UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Master 2 - CSMI

Contrôle optimal - T.D. nº 1

Problèmes temps optimal et LQ pour les systèmes linéaires

1 Exercice 1

Minimiser la fonction

$$\int_0^1 u^2(t)dt + x^2(1)$$

sous la contrainte dynamique $x'(t) = x(t) + u(t)$ et $x(0) = 1$.

2 Exercice 2 : Mouvement d'un point matériel

Soit $T > 0$. Considérons, le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0, T] \\ x(0) = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ sont deux applications définies sur $[0, T]$ et à valeurs réelles.

(i) Dans cette question, on suppose que $T = 1$ et on considère le coût C_1 défini par

$$C_1(u) = \int_0^1 (x^2(t)(|u(t)| - 1)^2)dt,$$

On considère le contrôle u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = (-1)^k \text{ si } t \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right[, k \in \{0, ..., 2n-1\}$$

Calculer $C_1(u_n)$. Que peut-on en déduire ?

(ii) Soit le coût C_2 défini par

$$C_2(u) = \int_0^T x^2(t) + u^2(t)dt,$$

où x désigne la solution du système ci-dessus.

(a) Montrer l'existence d'une trajectoire optimale et la caractériser. Quelle est la valeur optimale du coût ?

(b) Résoudre l'equation de Riccati, écrire le contrôle optimal comme un feedback et déterminer (à nouveau) la valeur minimale atteinte par le critère.

3 Exercice 3 : Contrôle optimal d'un tram

Soit $T > 0$. Considérons le problème du véhicule se déplaçant en ligne droite, modélisé par le système de contrôle

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \ t \in [0, T] \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On souhaite, pendant le temps T, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie. On choisit critère

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T u(t)^2 dt.$$

Montrer l'existence d'une trajectoire optimale et la caractériser.

4 Trajectoires temps-optimales

Soit $T > 0$ et $U = [-1, 1]$. On considère le système contrôlé

$$\begin{cases} x^{(3)}(t) + 6x''(t) + 12x'(t) + 8x(t) = u(t), \ t \in]0, T[\\ (x(0), x'(0), x''(0)) = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

où $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction de contrôle de ce système.

(i) Mettre le système (1) sous la forme usuelle $X' = AX + Bu$ et $X(0) = X_0$ où X est un vecteur, A et B sont deux matrices à préciser.

(ii) Ce système est-il contrôlable ?

(ii) On suppose dorénavant que $u \in L^\infty(]0, T[, U)$ et que T n'est plus fixé. On souhaite rejoindre l'origine avec un contrôle $u(\cdot)$ en temps T minimal.

  (a) Déterminer les valeurs propres de A. On pourra par exemple remarquer que -2 est valeur propre évidente.

  (b) Étudier l'existence d'une trajectoire temps-optimale.

  (c) Démontrer que le contrôle optimal est bang-bang et qu'il a au plus deux commutations.