

Analyse numérique et optimisation

Méthode des bases réduites

Alexandre Ern

ern@cermics.enpc.fr

Dans ce projet, on s'intéresse à un problème elliptique (pour fixer les idées, une équation de diffusion en une ou deux dimensions d'espace) où le coefficient de diffusion dépend d'un paramètre, et on suppose qu'on a besoin de résoudre le problème pour un nombre important de valeurs de ce paramètre. Un exemple typique (que l'on considérera ci-après) est celui où le coefficient de diffusion est incertain (du fait, par exemple, d'une caractérisation expérimentale insuffisante), ce qui conduit à le décrire par le biais d'une variable aléatoire dont on se fixe a priori la loi de distribution.

Dans ce contexte, résoudre un nombre important de fois le problème elliptique (par la méthode des éléments finis par exemple) devient extrêmement onéreux. Le principe de la méthode des bases réduites est de procéder à ces évaluations en deux temps : (1) on résout d'abord le problème elliptique (par la méthode des éléments finis) pour un nombre relativement modeste de valeurs du paramètre, puis (2) on utilise les solutions ainsi obtenues pour engendrer un espace vectoriel de dimension réduite où l'on cherchera une approximation de la solution du problème elliptique pour toutes les autres valeurs du paramètre ; cette approximation sera obtenue en ayant recours à la méthode de Galerkin mais en évitant la discrétisation par éléments finis.

1 Étude du cas unidimensionnel

On se place sur l'intervalle $\Omega =]0, 1[$ et on considère un problème de diffusion sous la forme

$$-\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{du}{dx}(x) \right) + u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

où D est le coefficient de diffusion et f le terme source. Par la suite, on prendra toujours $f \equiv 1$ sur Ω et on imposera des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord de Ω . Le coefficient de diffusion D est variable (constant par morceaux) en espace et s'écrit sous la forme

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_1, \\ \mu & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2)$$

où $\Omega_2 :=]0.19; 0.21[\cup]0.39; 0.41[\cup]0.59; 0.61[\cup]0.79; 0.81[$, $\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_2$ et $\mu \in \mathcal{P}$ où \mathcal{P} est un ensemble de valeurs strictement positives. Le coefficient μ sert à paramétrer le coefficient de diffusion ; les ensembles Ω_1 et Ω_2 sont, quant à eux, toujours fixés. Pour plus de clarté, on explicitera par la suite

la dépendance de D en μ et on écrira $D_\mu(x)$. La solution u de (1) dépend elle aussi de μ , et on la notera $u_\mu(x)$.

En résumé, pour tout $\mu \in \mathcal{P}$, on cherche la fonction $u_\mu(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(D_\mu(x) \frac{du_\mu}{dx}(x) \right) + u_\mu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_\mu(0) = u_\mu(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Un cadre d'application (idéalisé!) du problème (3) est la modélisation d'un matériau composite contenant des inclusions dont on connaît la position (l'ensemble Ω_2). Le coefficient de diffusion dans les inclusions est μ et on veut tester un nombre important de valeurs pour ce paramètre (par exemple, parce qu'il n'est pas connu avec certitude).

Question 1 Établir la formulation variationnelle du problème (3) dans l'espace $V = H_0^1(\Omega)$. On notera a_μ la forme bilinéaire associée (définie sur $V \times V$) et b la forme linéaire associée (définie sur V).

Question 2 On considère une approximation par la méthode des éléments finis de Lagrange de degré 1, l'intervalle Ω étant maillé de manière uniforme en utilisant $(N+1)$ mailles. En posant $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de maillage, la solution approchée est notée $u_{h,\mu}$. On introduit le vecteur X_μ (d'ordre N) formé par les composantes de $u_{h,\mu}$ dans la base canonique des fonctions chapeau $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$. Le vecteur X_μ est solution du système linéaire (d'ordre N)

$$A_\mu X_\mu = B. \quad (4)$$

Pour tout $0 \leq i \leq N$, on note K_i la maille $[x_i, x_{i+1}]$ avec $x_i = ih$. Par la suite, on suppose que chaque maille K_i se trouve soit dans $\overline{\Omega}_1$ soit dans $\overline{\Omega}_2$. Évaluer les coefficients de la matrice de rigidité A_μ et du vecteur B .

Question 3 Écrire un code Scilab afin d'approcher, pour une valeur de $\mu \in \mathcal{P}$ fixée, la solution fournie par la méthode des éléments finis. On prendra $N = 999$. Tracer les solutions $u_{h,\mu}(x)$ pour $\mu = 0.01$, $\mu = 0.1$ et $\mu = 1$ et commenter les profils obtenus.

Question 4 La méthode des bases réduites. On choisit un sous-ensemble $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ de cardinal fini N_0 avec $N_0 \ll N$ (N_0 sera de l'ordre de 3 à 5). On énumère les éléments de \mathcal{P}_0 sous la forme $\{\mu_1, \dots, \mu_{N_0}\}$. Pour tout $1 \leq i \leq N_0$, on introduit la fonction $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$u_i(x) := u_{h,\mu_i}(x), \quad \forall 1 \leq i \leq N_0. \quad (5)$$

Ces fonctions sont obtenues en résolvant le problème approché par éléments finis pour chaque μ_i . Par la suite, on supposera que les N_0 fonctions u_i sont indépendantes. On pose

$$V_0 := \text{vect}(u_1, \dots, u_{N_0}). \quad (6)$$

Il s'agit d'un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie N_0 . Soit maintenant $\mu \in \mathcal{P}$ donné. On approche la fonction u_μ solution de (3) par une méthode de Galerkin, ce qui revient à chercher la fonction $u_\mu^{\text{RB}} \in V_0$ telle que

$$a_\mu(u_\mu^{\text{RB}}, u_i) = b(u_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N_0. \quad (7)$$

En décomposant u_μ^{RB} sous la forme $u_\mu^{\text{RB}} = \sum_{i=1}^{N_0} X_{\mu,i}^{\text{RB}} u_i$, montrer que le vecteur $X_\mu^{\text{RB}} \in \mathbb{R}^{N_0}$ est solution d'un système linéaire (d'ordre N_0) de la forme

$$A_\mu^{\text{RB}} X_\mu^{\text{RB}} = B^{\text{RB}}. \quad (8)$$

où on donnera l'expression des composantes de la matrice A_μ^{RB} et du vecteur B^{RB} . On justifiera le caractère symétrique défini positif de la matrice A_μ^{RB} .

Question 5 On observe que la grande matrice de rigidité A_μ peut se décomposer sous la forme $A_\mu = A_0 + \mu A_1$ où A_0 et A_1 sont deux matrices d'ordre N indépendantes de μ . Pour tout $1 \leq i \leq N_0$, on note X_i le vecteur de \mathbb{R}^N formé par les composantes de la fonction u_i dans la base des fonctions chapeau $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$. Montrer que

$$A_\mu^{\text{RB}} = A_0^{\text{RB}} + \mu A_1^{\text{RB}}, \quad (9)$$

où A_0^{RB} et A_1^{RB} sont deux matrices d'ordre N_0 indépendantes de μ dont on précisera les composantes en fonction des matrices A_0 et A_1 et des vecteurs $(X_i)_{1 \leq i \leq N_0}$ (on observera que les deux matrices A_0^{RB} et A_1^{RB} sont de petite taille mais pleines). Donner également l'expression des composantes du vecteur B^{RB} .

Question 6 Implémentation sous Scilab. On structurera le script de la manière suivante :

1. évaluation de la grande matrice de rigidité A_μ (en fait, des deux grandes matrices A_0 et A_1) et du membre de droite B ;
2. choix de l'ensemble \mathcal{P}_0 et calcul des fonctions de la base réduite $(u_i)_{1 \leq i \leq N_0}$ en résolvant le grand système linéaire (4) pour chaque valeur du paramètre $\mu \in \mathcal{P}_0$; on stockera ces solutions dans une famille de vecteurs (X_1, \dots, X_{N_0}) , chaque vecteur étant de taille N ;
3. évaluation des matrices A_0^{RB} et A_1^{RB} et du vecteur B^{RB} ;

4. pour chaque valeur de $\mu \in \mathcal{P}$ dont on souhaite connaître la solution correspondante u_μ , résolution du petit système linéaire (8); un point d'implémentation important est que dans cette quatrième partie du script, aucune boucle de longueur N ne doit être utilisée.

Application numérique : on prendra $N_0 = 3$ avec les valeurs $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.1$ et $\mu_3 = 1$ pour évaluer les fonctions de la base réduite. Puis, on choisira $\mu = 0.05$ et on comparera sur un même graphique u_μ et u_μ^{RB} ; on tracera également l'erreur $|u_\mu - u_\mu^{\text{RB}}|$ en fonction de $x \in \Omega$.

Question 7 Application à l'échantillonnage dans le cas d'un modèle probabiliste d'incertitudes sur le coefficient de diffusion. Pour cette question, on considère que μ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $I_\mu := [0.01, 1]$, ce que l'on note

$$\mu \sim \mathcal{U}([0.01, 1]). \quad (10)$$

En utilisant le script développé à la question précédente, évaluer la fonction de Ω dans \mathbb{R} définie par

$$\mathbb{E}(u_\mu(x)) := \int_{I_\mu} u_\mu(x) d\mu. \quad (11)$$

On utilisera la méthode de Monte Carlo consistant à effectuer M tirages de μ , $\{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(M)}\}$, et à remplacer l'espérance par la moyenne empirique

$$\mathbb{E}^{\text{MC}}(u_\mu(x)) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_{\mu^{(i)}}(x). \quad (12)$$

Sous Scilab, des appels à la fonction `rand()` permettent de tirer une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On tracera sur un même graphique les fonctions $\mathbb{E}^{\text{MC}}(u_\mu(x))$ (avec $M = 1000$) et $u_{\bar{\mu}}(x)$ où $\bar{\mu}$ est la valeur moyenne de μ (qui ici vaut 0.505). Commenter. Reprendre l'étude lorsque μ suit une loi log-uniforme avec

$$\log_{10} \mu \sim \mathcal{U}([-2, 0]). \quad (13)$$

2 Étude du cas bidimensionnel

On se place maintenant sur le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. Comme précédemment, le terme source f est pris identiquement égal à 1 sur Ω et on impose des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord $\partial\Omega$ de Ω . Le coefficient de diffusion D_μ est toujours défini par (2), mais cette fois le sous-ensemble Ω_2 est composé de 16 inclusions circulaires sous la forme

$$\Omega_2 := \bigcup_{1 \leq i \leq 4} \bigcup_{1 \leq j \leq 4} C_{i,j}, \quad (14)$$

où $C_{i,j}$ est le disque de rayon 0.02 et de centre $(x_i, y_j) = (0.2i, 0.2j)$. Ainsi, pour chaque $\mu \in \mathcal{P}$ fixé, on cherche la fonction $u_\mu(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D_\mu(x) \nabla u_\mu(x)) + u_\mu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_\mu|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Question 8 Mise en œuvre sous FreeFem++. On organisera le script comme à la question 6 ci-dessus. On utilisera les valeurs proposées à la question 6 pour l'application numérique. À titre facultatif, on pourra également reprendre l'échantillonnage proposé à la question 7.

Conseils FreeFem++.

- Pour définir le domaine Ω et son maillage (les ... signifient qu'il faut faire des copié-collé)


```
border B1(t=0,1) {x=t;y=0 ;label =1;};
...
real Rc = 0.02;
border C11(t=0,2*pi){x=0.2+Rc*cos(t); y=0.2+Rc*sin(t); label=2;};
...
int Nb=100;
int Nc=15;
mesh Th=buildmesh(B1(Nb)+...+C11(Nc)+...);
```

 où les paramètres Nb et Nc permettent de contrôler la finesse du maillage.
- Espaces d'éléments finis


```
fespace Vh(Th, P1);
fespace Xh(Th, P0);
```
- Matrices A_0 et A_1

```
Xh coeffB = (region==16);
Xh coeffC = (region<16);
varf A0p(u,v,solver=UMFPACK) =
int2d (Th) ( coeffB*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)) ) + on(1,u=0);
matrix A0 = A0p(Vh,Vh);
...
```
- Choix de \mathcal{P}_0 et initialisation des matrices réduites A_0^{RB} et A_1^{RB}

```
int nrb=3;
real [int] select(nrb);
select[0]=.1;select[1]=.5;select[2]=1.;
real [int,int] A0red(nrb,nrb);
real [int,int] A1red(nrb,nrb);
```
- Calcul des fonctions de la base réduite


```
Vh [int] solutions(nrb);
for(int k=0;k<nrb;k++){
  mu = select(k);
  A = A0+mu*A1;
```

```

        set(A,eps=1e-10);
        u[]=A^-1*F[];
        solutions[k]=u;
    }
- Obtention de  $N$ 
    int nddl= Vh.ndof;
- Le calcul des matrices pourra être effectué selon
    real [int] buffer(nddl);
    for(int i=0;i<nrb;i++){
        for(int j=0;j<nrb;j++){
            buffer = (A0*solutions[j] []);
            A0red(i,j) =solutions[i] [] '*buffer;
            ...
        }
    }
}

```