

Collection **Recherches en Mathématiques Appliquées**
sous la direction de P.G. CIARLET et J.-L. LIONS

RMA 8

**CONTÔLABILITY EXACTE
PERTURBATIONS ET STABILISATION
DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS**

**TOME 1
CONTÔLABILITY EXACTE**

J.-L. LIONS



MASSON

***CONTRÔLABILITÉ EXACTE
PERTURBATIONS ET STABILISATION
DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS***

***TOME 1
CONTRÔLABILITÉ EXACTE***

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Du même auteur :

CONTRÔLABILITÉ EXACTE, PERTURBATIONS ET STABILISATION DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS, par J.-L. LIONS. Tome 2 Perturbations, RMA 9, 1988, 288 pages.

MODELLING, ANALYSIS AND CONTROL OF THIN PLATES, par J.-L. LIONS et J.E. LAGNESE, RMA 6, 1988, 184 pages.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET CALCUL NUMÉRIQUE, par R. DAUTRAY et J.-L. LIONS
Volume 1 : Modèles physiques, 1987, 296 pages.

Volume 2 : L'opérateur de Laplace, 1987, 566 pages.

Volume 3 : Transformations, Sobolev, opérateurs, 1987, 320 pages.

Volume 4 : Méthodes variationnelles, 1988, 360 pages.

Volume 5 : Spectre des opérateurs, 1988, 614 pages.

Volume 6 : Méthodes intégrales et numériques, 1988, 544 pages.

Volume 7 : Évolution : Fourier, Laplace, à paraître.

Volume 8 : Évolution : semi-groupe, variationnel, à paraître.

Volume 9 : Évolution : numérique, transport, à paraître.

Dans la même collection :

Voir page 4 de couverture.

Dans la collection Mathématiques appliquées pour la Maîtrise, sous la direction de P.G. CIARLET et J.-L. LIONS.

INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE ET À L'OPTIMISATION.

- COURS, par P.G. CIARLET, 1985, 2^e tirage, 292 pages.
- EXERCICES, par P.G. CIARLET, B. MIARA et J.-M. THOMAS, 1987, 2^e édition, 192 pages.

ANALYSE FONCTIONNELLE. Théorie et applications, par H. BRÉZIS, 1987, 2^e tirage, 248 pages.

ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, par M. CROUZEIX et A.L. MIGNOT.

- COURS, 1984, 180 pages.
- EXERCICES. 1986, 184 pages.

INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, par A. RAVIART et J.-M. THOMAS, 1988, 2^e tirage, 224 pages.

EXERCICES D'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, par P. RABIER et M. THOMAS, 1985, 208 pages.

Autres ouvrages :

VIBRATIONS DES SYSTÈMES MÉCANIQUES. Méthodes analytiques et applications, par M. ROSEAU, 1984, 492 pages.

TRANSPORT ET RELAXATION DANS LES ÉCOULEMENTS GAZEUX par R. BRUN, *Collection Physique Fondamentale et Appliquée*, 1986, 209 pages.

FONCTIONNEMENT HORS ADAPTATION DES TURBOMACHINES, par V. BENSIMHON, préface du P^r BOUDIGUES, *Collection Physique Fondamentale et Appliquée*, 1986, 176 pages.

CONCEPTION DES VÉHICULES SPATIAUX par D. MARTY, 1986, 672 pages.

**CONTÔLABILITY EXACTE
PERTURBATIONS ET STABILISATION
DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS**

**TOME 1
CONTÔLABILITY EXACTE**

J.-L. LIONS

*Professeur au Collège de France
et à l'École Polytechnique
Président du CNES*

La collection Recherches en Mathématiques Appliquées a pour objectif de publier dans un délai très rapide des textes de haut niveau en Mathématiques Appliquées, notamment :

- *des cours de troisième cycle,*
- *des séries de conférences sur un sujet donné,*
- *des comptes rendus de séminaires, congrès,*
- *des versions préliminaires d'ouvrages plus élaborés,*
- *des thèses, en partie ou en totalité.*

Les manuscrits, qui doivent comprendre de 120 à 250 pages, seront reproduits directement par un procédé photographique. Ils devront être réalisés avec le plus grand soin, en observant les normes de présentation dactylographiques précisées par l'Editeur.

Les manuscrits seront rédigés en français ou en anglais. Ils seront soumis directement soit au Professeur P.G. Ciarlet, Analyse numérique, T. 55, Université Pierre-et-Marie Curie, 4, place Jussieu, 75005 Paris, soit au Professeur J.-L. Lions, Collège de France, 11, place Marcellin-Berthelot, 75005 Paris. Dans tous les cas, ils seront soumis à l'avis d'au moins un rapporteur.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies » ou « reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Masson, Paris, 1988

ISBN : 2-225-81477-5

ISSN : 0298-3168

MASSON S.A.

MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.

MASSON S.A.

MASSON EDITORES

120, bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06

Via Statuto 2, 20121 Milano

Balmes 151, 08008 Barcelona

Dakota 383, Colonia Napoles, 03810 Mexico DF

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| INTRODUCTION..... | 1 |
| Chapitre I. UN PROBLEME MODELE : CONTROLABILITE EXACTE DE L'EQUATION DES ONDES - CONTROLE PAR DIRICHLET..... | 15 |
| 1. INTRODUCTION. FORMULATION DU PROBLEME DE LA CONTROLABILITE EXACTE..... | 15 |
| 2. DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION : HUM. CONTROLABILITE EXACTE DANS DES ESPACES ABSTRAITS..... | 21 |
| 3. QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES..... | 28 |
| 3.1. Prolongement d'un champ de vecteurs normaux..... | 28 |
| 3.2. Quelques rappels sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des ondes..... | 32 |
| 3.3. Une identité..... | 40 |
| 4. REGULARITE DES SOLUTIONS FAIBLES..... | 44 |
| 4.1. Le problème homogène. L'inégalité directe..... | 44 |
| 4.2. Le problème non homogène..... | 46 |
| 5. UN THEOREME D'UNICITE. L'INEGALITE INVERSE..... | 54 |
| 6. QUELQUES RESULTATS DE CONTROLABILITE EXACTE DANS DES ESPACES FONCTIONNELS CLASSIQUES..... | 60 |
| 6.1. Le résultat fondamental..... | 60 |
| 6.2. Quelques remarques sur les changements de norme..... | 64 |
| 7. QUELQUES COMMENTAIRES ET RESULTATS SUPPLEMENTAIRES..... | 79 |
| 7.1. Interprétation géométrique de l'ensemble $\Gamma(x^0)$ | 79 |
| 7.2. Action sur des parties de frontière non-cylindriques..... | 83 |
| 7.3. Contrôlabilité exacte dans des ouverts non-réguliers..... | 85 |
| 8. LE THEOREME DE HOLMGREN ET SES CONSEQUENCES..... | 87 |
| 9. CONTROLABILITE EXACTE ELARGIE..... | 95 |
| 10. PROBLEMES OUVERTS..... | 103 |

**Chapitre II. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME DE LA
CONTROLABILITE EXACTE.****HUM : HILBERT UNIQUENESS METHOD..... 107**

| | |
|--|-----|
| 1. INTRODUCTION..... | 107 |
| 2. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME DE LA CONTROLABILITE EXACTE..... | 108 |
| 3. HUM : HILBERT UNIQUENESS METHOD..... | 111 |
| 4. QUELQUES COMMENTAIRES SUR LES CHANGEMENTS DES NORMES..... | 122 |
| 5. PROBLEMES OUVERTS..... | 127 |

**Chapitre III. EQUATION DES ONDES : CONDITIONS AUX LIMITES DE
NEUMANN ET DE TYPE MELE..... 131**

| | |
|--|-----|
| 1. CONTROLE PAR NEUMANN..... | 131 |
| 1.1. Formulation du problème..... | 131 |
| 1.2. Quelques rappels sur l'équation des ondes..... | 133 |
| 1.3. Une identité..... | 137 |
| 1.4. Un théorème d'unicité, L'inégalité inverse..... | 141 |
| 1.5. Mise en place de la méthode HUM..... | 149 |
| 1.6. Contrôlabilité exacte sans conditions géométriques..... | 158 |
| 1.7. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques..... | 162 |
| 1.8. Normes plus fortes..... | 163 |
| 1.9. Affaiblissement de la norme..... | 167 |
| 1.10. Quelques commentaires..... | 174 |
| 2. CONTROLE PAR DES CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE MELE..... | 178 |
| 2.1. Orientation..... | 178 |
| 2.2. Quelques rappels sur l'équation des ondes..... | 180 |
| 2.3. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques (I)..... | 184 |
| 2.4. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques (II) Normes plus fortes..... | 196 |
| 2.5. Contrôlabilité exacte des conditions géométriques (III) Affaiblissement de la norme..... | 200 |
| 2.6. Contrôlabilité exacte sans conditions géométriques..... | 204 |
| 2.7. Quelques commentaires..... | 212 |
| 3. PROBLEMES OUVERTS..... | 217 |

| | |
|---|------------|
| Chapitre IV. SYSTEME DE L'ELASTICITE ET QUELQUES MODELES DE PLAQUES VIBRANTES..... | 223 |
| | |
| 1. LE SYSTEME DE L'ELASTICITE (I). ACTION DU TYPE DIRICHLET..... | 223 |
| 1.1. Orientation..... | 224 |
| 1.2. Inégalités..... | 224 |
| 1.3. Application de HUM..... | 227 |
| 2. LE SYSTEME DE L'ELASTICITE (II). ACTION DU TYPE NEUMANN..... | 228 |
| 2.1. Orientation..... | 228 |
| 2.2. Formulation variationnelle..... | 229 |
| 2.3. Une inégalité..... | 232 |
| 2.4. Application de HUM..... | 237 |
| 3. PLAQUES VIBRANTES (I). ACTION DU TYPE DIRICHLET..... | 239 |
| 3.1. Formulation du problème..... | 239 |
| 3.2. Quelques rappels..... | 241 |
| 3.3. Une identité..... | 243 |
| 3.4. L'inégalité directe..... | 247 |
| 3.5. Existence et régularité des solutions du problème avec des conditions aux limites non homogènes..... | 249 |
| 3.6. Un théorème d'unicité. L'inégalité inverse..... | 254 |
| 3.7. Quelques résultats de contrôlabilité exacte..... | 260 |
| 3.8. Quelques commentaires..... | 270 |
| 4. PLAQUES VIBRANTES (II). CONTROLES PORTANT SUR y ET Δy | 280 |
| 4.1. Formulation du problème..... | 280 |
| 4.2. Quelques rappels..... | 282 |
| 4.3. Une identité..... | 284 |
| 4.4. L'inégalité directe..... | 287 |
| 4.5. Existence et unicité des solutions du problème avec des conditions aux limites non homogènes..... | 288 |
| 4.6. Un théorème d'unicité. L'inégalité inverse..... | 296 |
| 4.7. Quelques résultats de contrôlabilité exacte..... | 301 |
| 4.8. Quelques commentaires..... | 311 |
| 5. PROBLEMES OUVERTS..... | 319 |

| | |
|---|------------|
| Chapitre V. CONTROLABILITE EXACTE SIMULTANEE..... | 322 |
| 1. INTRODUCTION..... | 322 |
| 2. UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DES ONDES..... | 323 |
| 2.1. Formulation du problème..... | 323 |
| 2.2. Contrôlability exacte avec des conditions géométriques..... | 324 |
| 2.3. Contrôlability exacte sans conditions géométriques..... | 336 |
| 2.4. Quelques commentaires..... | 340 |
| 3. UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DE PLAQUES VIBRANTES..... | 342 |
| 3.1. Formulation du problème..... | 342 |
| 3.2. L'inégalité inverse..... | 344 |
| 3.3. Contrôlability exacte..... | 349 |
| 4. PROBLEMES OUVERTS..... | 353 |
| Chapitre VI. CONTROLABILITE EXACTE DE PROBLEMES DE TRANSMISSION..... | 356 |
| 1. INTRODUCTION..... | 356 |
| 2. FORMULATION DU PROBLEME..... | 356 |
| 3. RESULTATS PRELIMINAIRES..... | 360 |
| 4. INEGALITES..... | 369 |
| 4.1. Inégalité directe..... | 369 |
| 4.2. Inégalité inverse..... | 371 |
| 5. LE RESULTAT PRINCIPAL DE CONTROLABILITE EXACTE..... | 375 |
| 6. QUELQUES VARIANTES..... | 385 |
| 6.1. Normes plus fortes..... | 385 |
| 6.2. Normes plus faibles..... | 387 |
| 7. QUELQUES COMMENTAIRES..... | 390 |
| 7.1. Existence d'une infinité de contrôles..... | 390 |
| 7.2. Les conséquence du Théorème de Holmgren..... | 391 |
| 8. PROBLEMES OUVERTS..... | 394 |
| Chapitre VII. CONTROLE INTERNE..... | 396 |
| 1. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME . DESCRIPTION DE HUM..... | 396 |

| | | |
|---|--|-----|
| 2. | EQUATION DES ONDES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET..... | 400 |
| 2.1. | Orientation..... | 400 |
| 2.2. | Action sur tout l'ouvert Ω | 401 |
| 2.3. | Action sur un voisinage du bord..... | 409 |
| 2.4. | Changement de normes..... | 419 |
| 2.5. | Quelques commentaires..... | 422 |
| 3. | PROBLEMES OUVERTS..... | 427 |
| Chapitre VIII. CARACTERISATION DU CONTROLE DONNE PAR HUM. | | |
| SYSTEME DE L'OPTIMALITE ET METHODE DE DUALITE..... | | 430 |
| 1. | INTRODUCTION..... | 430 |
| 2. | CONTROLABILITE EXACTE ET PENALISATION..... | 431 |
| 2.1. | Orientation..... | 431 |
| 2.2. | Caractérisation du contrôle. Système de l'optimalité..... | 433 |
| 3. | DUALITE..... | 441 |
| 3.1. | Orientation..... | 441 |
| 3.2. | Première application de la théorie générale de dualité..... | 442 |
| 3.3. | Autre aspect de la dualité..... | 445 |
| 3.4. | Dualité et pénalisation..... | 447 |
| 3.5. | Dualité et autres conditions aux limites..... | 449 |
| 4. | CONTROLABILITE EXACTE ELARGIE ET PENALISATION..... | 452 |
| 5. | PROBLEMES OUVERTS..... | 456 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | | 459 |
| Appendice I. CONTROLABILITE EXACTE EN UN TEMPS ARBITRAIREMENT PETIT DE QUELQUES MODELES DE PLAQUES (E. Zuazua).... | | 465 |
| 1. | INTRODUCTION..... | 465 |
| 2. | CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET..... | 468 |
| 3. | CONDITIONS AUX LIMITES PORTANT SUR y ET Δy | 473 |
| 4. | CONTROLABILITE EXACTE SIMULTANEE..... | 479 |
| 5. | QUELQUES REMARQUES..... | 484 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | | 490 |

| | |
|--|------------|
| Appendice 2. CONTROLE ET STABILISATION DANS LES PROBLEMES HYPERBOLIQUES (C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch)..... | 492 |
| 1. INTRODUCTION..... | 492 |
| 2. NOTATIONS ET RAPPELS SUR L'ANALYSE LOCALE ET MICROLOCALE..... | 495 |
| 3. L'EXACTE CONTROLABILITE DU PROBLEME DE DIRICHLET..... | 501 |
| 4. L'EXACTE CONTROLABILITE DU PROBLEME DE NEUMANN..... | 521 |
| 5. STABILISATION DISTRIBUEE SUR LA FRONTIERE..... | 525 |
| FIGURES..... | 535 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | 536 |
| Index terminologique | 539 |

Introduction

1. Donnons pour commencer un exemple "modèle" des problèmes étudiés dans ce volume.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2, 3$ dans les applications), de frontière Γ régulière. On considère dans Ω et pour $t > 0$, l'équation des ondes – autrement dit un système dont l'état $y = y(x, t)$ satisfait à

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad T > 0 \text{ fixé.}$$

On suppose que l'on peut agir sur le système par l'intermédiaire d'une fonction (le contrôle) $v = v(x, t)$ sur le bord $\Gamma \times (0, T)$, de façon que

$$(2) \quad y = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T).$$

Soient par ailleurs les données initiales

$$(3) \quad y(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Le problème étudié est le suivant : Soit $T > 0$ donné. Peut-on, pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ donné dans un espace convenable, trouver un contrôle v tel que, si y est la solution de (1) (2) (3), on ait

$$(4) \quad y(x, T) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si cela est possible, on dit alors que le système est exactement contrôlable à l'instant T .

Remarque 1.

A cause de la vitesse finie de propagation des ondes, il est clair (voir des précisions là-dessus au Chapitre I ci-après) que le système (1) (2) (3) ne peut être exactement

contrôlable que si T est assez grand.

■

Remarque 2.

L'énoncé précédent du problème est *ambigu* *il faut en effet préciser dans quel espace fonctionnel on choisit $\{y^0, y^1\}$.* Cela – qui est essentiel – fera dans la suite l'objet de développements assez longs.

■

Remarque 3.

Il y a dans l'énoncé *une autre ambiguïté* qu'il faudra lever : *dans quel espace fonctionnel prend on le contrôle v ?*

■

Remarque 4.

L'intérêt pour les applications de ce type de problèmes est clair : on cherche un contrôle qui partant de $\{y^0, y^1\}$, *amène le système à l'instant T dans l'état d'équilibre.*

Naturellement, compte tenu de la linéarité, on pourra aussi bien amener le système à l'instant T dans un *état désiré*

$$(5) \quad y(x, T) = z^0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, T) = z^1(x)$$

pourvu, il est vrai, de choisir z^0, z^1 dans un espace convenable ("esthétiquement", le même espace que celui dans lequel sont fixées les conditions initiales $\{y^0, y^1\}$). ■

Remarque 5.

Dans les applications, rares sont les systèmes où *l'on peut agir sur tout le bord.*

Donc, en fait une question essentielle est la suivante : soit Γ_0 une partie de Γ donnée. On agit sur le système par

$$y = v \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T),$$

$$(6) \quad y = 0 \quad \text{sur } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T).$$

On pose alors la même question que précédemment.

Cela revient à imposer à v la *contrainte*

$$(7) \quad v = 0 \quad \text{sur } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T). \quad \blacksquare$$

Remarque 6.

Il y a encore dans le problème énoncé une autre ambiguïté : si le problème est exactement contrôlable à l'instant T (les espaces fonctionnels étant précisés), il y aura généralement *une infinité de contrôles* v répondant à la question.

Définissons

$$(8) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v \text{ dans un espace fonctionnel "convenable", tel que, pour } \{ y^0, y^1 \} \\ \text{ donné, on ait (4).} \}$$

Peut-on choisir un "relèvement"

$$(9) \quad v = v(y^0, y^1)$$

tel que, dans une topologie convenable, l'application

$$(10) \quad \{y^0, y^1\} \rightarrow v(y^0, y^1)$$

soit *continue* ?

C'est, à vrai dire, cette question qui conduit à des méthodes de solution, comme on explique maintenant. ■

2. Méthode de solution directe par recherche d'un "relèvement".

Nous reprenons le système (1) (2) (3) et nous définissons \mathcal{U}_{ad} (ensemble des contrôles admissibles) par (8).

Nous supposons a priori que

$$(11) \quad v \in L^2(\Sigma)$$

Il y a là *un choix*. Bien d'autres choix sont possibles. Tout cela sera examiné en détail au Chapitre I (et dans les chapitres suivants !). Il est alors naturel de considérer *le problème de contrôle optimal*, d'ailleurs "classique", suivant : désignons par

$$(12) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 \, d\Gamma dt$$

la fonction *coût*. On cherche

$$(13) \quad \inf. J(v), v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Naturellement ce problème *n'a de sens* que si \mathcal{U}_{ad} *n'est pas vide*, i.e., si le problème *est exactement contrôlable*; mais admettant un instant cela, il est intéressant de voir ce que l'on peut dire de (13). La question naturelle étant alors la suivante : le problème (13) *admet une solution unique* u . Peut-on *caractériser* u par un *système d'optimalité*, et obtient on ainsi un relèvement satisfaisant à (10) ? ■

Le système d'optimalité (S.O.) est pris ici au sens des S.O. dans les systèmes distribués, comme dans J.L. LIONS [1]. Pour chercher le S.O. une méthode générale est d'utiliser *la méthode de pénalisation*. On introduit :

$$(14) \quad J_{\epsilon}(v, z) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 \, d\Gamma dt + \frac{1}{2\epsilon} \| z'' - \Delta z \|_{L^2(Q)}^2$$

où $z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

On suppose dans (14) que

$$v \in L^2(\Sigma), \quad z'' - \Delta z \in L^2(Q),$$

$$z = v \text{ sur } \Sigma,$$

$$(15) \quad z(x, 0) = y^0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$z(x, T) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

ont lieu. On essaye, dans cette introduction, de dégager l'idée générale conduisant à la méthode générale que nous exposerons dans ce volume. On considère donc le problème

$$(16) \quad \inf J_\varepsilon(v, z), \quad v, z \text{ satisfaisant à (15).}$$

Ce problème admet une solution unique

$$(17) \quad u_\varepsilon, y_\varepsilon.$$

Si le problème est exactement contrôlable, c'est donc que \mathcal{U}_{ad} n'est pas vide. Si l'on choisit

$$(18) \quad v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad z = y(v) = \text{solution de (1)(2)(3)}$$

alors

$$(19) \quad J_\varepsilon(v, y(v)) = J(v)$$

et par conséquent

$$(20) \quad \inf J_\varepsilon(v, z) \leq \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Il résulte de (20) que

$$(21) \quad \begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma)} &\leq C, \\ \|y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad C = \text{constante indépendante de } \varepsilon. \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \text{On peut extraire alors une sous suite, encore notée } u_\varepsilon, \text{ telle que} \\ u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ dans } L^2(\Sigma) \text{ faible, et } \hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}. \end{aligned}$$

Alors

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq J(u_\varepsilon)$$

donne

$$(23) \quad \liminf J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \liminf J(u_\varepsilon) \geq J(\hat{u}).$$

Comparant à (20), on voit que $J(\hat{u}) \leq \inf J(v) ; v \in \mathcal{U}_{ad}$, donc $J(\hat{u}) = \inf J(v) , v \in \mathcal{U}_{ad}$ et par conséquent

(24) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Sigma)$ faible (en fait dans $L^2(\Sigma)$ fort), u étant la solution de (13).

Ecrivons maintenant le S.O. pour (16). On introduit

$$(25) \quad p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} (y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon).$$

On a (c'est l'équation d'Euler !)

$$(26) \quad - \int_Q p_\varepsilon (\zeta'' - \Delta \zeta) dx dt + \int_{\Sigma} u_\varepsilon v d\Gamma dt = 0$$

$\forall \zeta, v$ tels que

$$(27) \quad \begin{aligned} \zeta'' - \Delta \zeta &\in L^2(Q), \zeta(x, 0) = \zeta'(x, 0) = \zeta(x, T) = \zeta'(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \zeta &= v \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

On déduit alors de (26) (27) que

$$p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T),$$

$$(28) \quad p_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} = u_\varepsilon \quad \text{sur } \Sigma.$$

On arrive au point essentiel. On a une famille de solutions de l'équation des ondes dans Q , telle que les données de Cauchy $p_\varepsilon, \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v}$ demeurent dans un borné de $L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$.

De manière générale, soit φ solution de

$$\varphi'' - \Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } Q,$$

$$(29) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi^1(x) \quad \text{dans } \Omega;$$

introduisons

$$(30) \quad \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}.$$

Il s'agit là, si T est assez grand, d'une norme sur les données initiales $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ (cela sera précisé au Chapitre I notamment), car si $\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = 0$, alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Sigma$$

et donc les données de Cauchy $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont nulles sur Σ . Donc si T est assez grand, il en résulte que $\varphi = 0$ (théorème d'unicité d'Holmgren – cf. Chap. I ci après).

On a donc défini ainsi une (nouvelle) structure hilbertienne sur l'espace des données initiales.

Il existe donc un espace hilbertien F (que l'on pourra expliciter simplement dans le Chapitre I) tel que, revenant à (18),

$$(31) \quad \{p_\epsilon(0), p_\epsilon'(0)\} \text{ demeure dans un borné de } F.$$

Dans ces conditions *on peut passer à la limite dans le S.O.* (on ne précise pas ici les topologies). On trouve donc que si u est la solution de (13), et si y est l'état (optimal) correspondant, il existe p tel que

$$y'' - \Delta y = 0, \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \quad y = u \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$(32) \quad p'' - \Delta p = 0, \quad p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = y \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$y(T) = y'(T) = 0.$$

(on a posé ici $y(0) = y(x, 0)$, $y(T) = y(x, T)$, etc).

On déduit de là *un algorithme*.

On part de

$$(33) \quad \varphi'' - \Delta \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \varphi^1, \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Pour φ^0, φ^1 donnés, cela définit φ . On résout alors

$$(34) \quad \psi'' - \Delta \psi = 0, \quad \psi(T) = \psi'(T) = 0, \quad \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma.$$

On définit ainsi un opérateur

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} \rightarrow \{\psi(0), \psi'(0)\}.$$

On considère l'équation

$$(35) \quad K\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{y^0, y^1\}.$$

D'après (32) *il existe une solution* qui n'est autre que

$$(36) \quad \varphi^0 = p(0), \quad \varphi^1 = p'(0).$$

On peut d'ailleurs montrer *l'unicité* de la solution.

Tout est donc ramené à l'inversion de l'opérateur K .

Remarque 7.

En fait, pour des raisons techniques, on introduit Λ défini par

$$(37) \quad \Lambda\{y^0, y^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

et l'on résoudra

$$(38) \quad \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{y^1, -y^0\}.$$

Cela revient, bien entendu, au même que (35) ! ■

Remarque 8.

En résumé, la méthode directe que nous proposons, que nous allons étudier en détail, repose sur :

- a) *un théorème d'unicité.* C'est grâce à un théorème d'unicité que nous avons pu introduire une (nouvelle) structure hilbertienne F donnée par (30) ;
- b) *un espace de Hilbert* (F) introduit à partir de l'unicité.

Tout est alors ramené à l'inversion de \wedge *dont on verra qu'elle est automatique* : c'est d'ailleurs ce qu' indique la méthode de pénalisation précédente.

C'est pourquoi nous proposons la terminologie HUM (Hilbert Uniqueness Method) pour la méthode étudiée dans ce volume. ■

3. La méthode précédente sera présentée de manière *directe* au Chapitre I sur le cas ci dessus – puis dans de nombreuses autres situations dans les Chapitres suivants. Il est clair en effet que la méthode est, dans son principe, *très flexible et très générale* : on peut, à partir d'un théorème d'unicité, *introduire une famille de structures hilbertiennes* (on peut en effet dans (30) par exemple, remplacer la norme $L^2(\Sigma)$ pour $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ par n'importe quelle norme hilbertienne. On peut même prendre une norme d'espace de Banach sur Σ !) Et on peut considérer *d'autres* théorèmes d'unicité pour *d'autres* conditions aux limites.

On aboutit aussi à un "programme général", étudié selon le plan suivant.

Le cas examiné ci-dessus est étudié au Chapitre I.

La méthode générale est présentée au Chapitre II .

On étudie au Chapitre III, toujours pour l'équation des ondes, le contrôle s'exerçant par les conditions mêlées (Dirichlet et Neumann) ou par Neumann "pur". On considère également (au Chapitre VI) des problèmes de transmission (ce qui correspond à des coefficients discontinus).

On étudie au Chapitre IV quelques modèles de *plaques vibrantes*. D'autres modèles pour cette situation sont étudiés dans les articles séparés, par la méthode HUM mais avec de nouveaux développements techniques, dans une série de publications de E. ZUAZUA et dans un volume de J. LAGNESE et J.L. LIONS. [1].

On donne quelques indications sur le système de l'élasticité.

On étudie au Chapitre V le contrôle simultané : peut-on contrôler exactement, par le *même* contrôle, des systèmes *differents* ?

On considère au Chapitre VII les situations où le contrôle intervient *à l'intérieur de* Ω (et non sur le bord).

Le Chapitre VIII reprend (rapidement) tout cela sous l'angle du système d'optimalité que l'on vient d'esquisser.

On peut alors étudier *le problème dual*, une technique qui sera reprise dans le deuxième volume de cet ouvrage.

4. Les méthodes proposées dans ce volume sont *constructives*. C'est ce que nous montrons, du point de vue numérique, dans une série d'articles en préparation, avec R. GLOWINSKI et ses collaborateurs.

Le premier article de cette série est en cours de publication : R. GLOWINSKI, C. LI, J.L. LIONS [1].

5. Naturellement on peut toujours "expliciter" toutes les solutions par la méthode de Fourier, "réduisant" ainsi le problème de contrôlability exacte à des questions gravitant autour de l'analyse harmonique (ou encore l'analyse de Fourier non harmonique ...) cf. D.L. RUSSELL [1] et la Bibliographie de ce travail. La méthode proposée ici est beaucoup plus générale, les méthodes de l'analyse harmonique n'apparaissant plus que dans certains points techniques.

Une autre méthode très générale a été proposée par D.L. RUSSELL et a donné lieu à un grand nombre de travaux ; cf. notamment G. CHEN [1] [2], J. LAGNESE [1] et la Bibliographie de ces travaux. Elle consiste à expliciter un opérateur de Feedback de *stabilisation*. Par exemple dans le problème (1) (2) (3) on construit – si possible ! – un opérateur

$$(39) \quad y = S \left(\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad (S = \text{Feedback}) \quad \text{sur } \Sigma$$

de manière que la solution de (1) (2) (3) soit à décroissance exponentielle (dans une norme convenable) lorsque $t \rightarrow \infty$. cf. également I. LASIECKA et R. TRIGGIANI [1].

On déduit alors de là, la contrôlabilité exacte .

Nous suivons ici *la démarche inverse* : on montre la contrôlabilité exacte dans des espaces convenables par HUM. *Puis* on en déduit, de manière systématique, la stabilisation, cf. un premier exposé de cela dans J.L. LIONS [3]

Une solution très générale et très souple du problème de stabilisation pour certaines situations est donnée par V. KOMORNÍK et E. ZUAZUA [1].

Tout cela sera repris dans le 3^{eme} volume J.L. LIONS [5].

6. Disposant , avec HUM, d'un outil systématique pour la contrôlabilité exacte, il est naturel d'étudier la *robustesse* de la méthode par rapport aux *perturbations*.

Le "programme" général est le suivant :

(i) étude de la contrôlabilité exacte pour des systèmes contenant des *perturbations singulières* . Deux premières publications dans ce sens ont été faites par J.L. LIONS [6] [7];

(ii) étude de la contrôlabilité exacte de systèmes à *coefficients très fortement oscillants* . cf. M. AVELANNEDA et F.H. LIN [1] et un exposé préliminaire dans J.L. LIONS [3] et les travaux de D. CIORANESCU et P. DONATO [1].

(iii) étude, enfin, de la contrôlabilité exacte pour des systèmes définis dans des domaines perturbés, ou dans les domaines "minces" (passage de la situation tridimensionnelle à celle bidimensionnelle), en liaison avec les travaux de Ph. CIARLET [1] et ses collaborateurs.

Tout cela est étudié dans le 2^{eme} volume de cet ouvrage J.L. LIONS [4].

7. Du point de vue technique les méthodes utilisées dans ce volume sont, à coté des méthodes "standard" des équations aux dérivées partielles non homogènes (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1]), les suivantes :

(i) *la méthode des multiplicateurs*, déjà utilisée par tous les auteurs cités, complétée dans le cas (1)(2)(3) par une très intéressante observation de L.F. HO [1] (qui permet de caractériser l'espace F dans le cas particulier (1)(2)(3)) ;

(ii) certains résultats d'analyse harmonique ;

(iii) des techniques microlocales, exposées, avec des résultats nouveaux, dans un Appendice, dû à – et rédigé par C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH [1].

On utilise enfin des méthodes générales de dualité dans les fonctions convexes (cela en un seul point, au dernier chapitre).

8. Plusieurs variantes de HUM sont utiles.

Tout d'abord on peut introduire *d'autres normes* que celles étudiées dans ce volume, à partir de fonctionnelles quadratiques de données initiales φ^0, φ^1 exprimées par des intégrales de surface. Des exemples seront donnés ailleurs. On obtient ainsi des variantes, des généralisations (et des questions ouvertes) dans le cadre de l'article de W. KRABS, G. LEUGERING et Th. SEIDMAN [1].

Reprendons (28). Avec l'introduction de F par (30) on en déduit (31). *On peut effectuer la même démarche à l'instant T*. Dans les cas étudiés dans ce volume (où l'on peut inverser le sens du temps) cela ne change rigoureusement rien. Mais il en va différemment pour les systèmes irréversibles, où l'on doit distinguer soigneusement entre l'opérateur modélisant le système et son adjoint. On est ainsi conduit à RHUM qui est étudié au volume 2 .

On étudiera, sous cet angle, les travaux de G. LEUGERING [1], [2].

On peut étudier, également, sous cet angle, la contrôlabilité exacte partielle (cf . J.L. LIONS [4]) et les intéressants résultats de K. NARUKAWA [1].

9. Dans la préparation de ces notes , l'A. a bénéficié de très nombreuses discussions avec beaucoup de chercheurs- et notamment J. BALL, C. BARDOS, G. ESKIN, R. GLOWINSKI, P. GRISVARD, A. HARAUZ, L.F. HO, V. KOMORNIK, J. LAGNESE, I. LASIECKA, W. LITTMAN, L. MARKUS, S. MITTER, D.L. RUSSELL, R. TRIGGIANI, E. ZUAZUA. Je les remercie vivement.

Les notes ont été rédigées par E. ZUAZUA, à partir de la présentation faite à la conférence J. Von Neumann de J.L. LIONS [3] et à partir du cours au Collège de France

1986/87. Il a apporté beaucoup d'améliorations dans le fond et dans la forme, ce dont je le remercie tout particulièrement. Naturellement il n'est pas responsable d'erreurs pouvant subsister dans la présente publication. On a également incorporé dans le texte une partie de quelques uns des résultats de Y. KOMORNIK [1] Y. KOMORNIK et E. ZUAZUA [1], P. GRISYARD [1], [2] et de E. ZUAZUA [1][2][4].

10. L'idée d'introduire des espaces fonctionnels, éventuellement nouveaux, et adaptés à telle ou telle situation de contrôle optimal a déjà été introduite par l'A. pour le contrôle ponctuel de systèmes paraboliques (cf. J.L. LIONS [8], [9]) et pour le contrôle de systèmes mal posés (ou singuliers) (cf. J.L. LIONS [9], [10]). On peut d'ailleurs établir une analogie précise entre la contrôlabilité exacte et la résolution du problème de Cauchy pour les équations elliptiques. (cf. J.L. LIONS [15]).

11. Quitte à ce qu'il y ait quelques redites et quelques longueurs, on a essayé de présenter tout cela le plus complètement possible et avec une possibilité de lecture "locale" chapitre par chapitre. Après avoir lu l'essentiel du Chapitre I le lecteur pourra aller directement à l'un quelconque des chapitres suivants.

12. De très nombreuses questions, qui nous semblent intéressantes, restent ouvertes. Chaque chapitre se termine par une liste de problèmes ouverts.

Une *question systématique* peut d'ailleurs présenter un certain intérêt : comparer tous les résultats établis *indépendamment* de HUM avec ce que donnerait, dans la même situation, la méthode HUM. Un exemple particulièrement intéressant est celui étudié par d'autres méthodes, par W. LITTMAN et L. MARKUS [1]. Il y en d'autres. Plusieurs articles de divers auteurs seront consacrés à ces questions.

Je remercie Melle D. BIDOIS et Mme A. RENAULT qui ont assuré, dans des conditions parfois difficiles la frappe de ce livre sur microordinateur.

Chapitre I

Un problème modèle : contrôlabilité exacte de l'équation des ondes. Contrôle par Dirichlet

I. INTRODUCTION. FORMULATION DU PROBLEME DE LA CONTROLABILITE EXACTE.

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les idées principales du problème de la contrôlabilité exacte et de la méthode générale de résolution sur l'exemple modèle de l'équation des ondes avec une action du type Dirichlet sur la frontière.

Soit Ω un domaine (ouvert, connexe et non vide) borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Soit $T > 0$.

On suppose, sauf mention explicite du contraire, que la frontière $\Gamma = \partial \Omega$ de Ω est régulière de classe C^2 .

On considère *l'équation des ondes* :

$$(1.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[,$$

avec des *conditions initiales* :

$$(1.2) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et une *condition aux limites non-homogène de type Dirichlet*

$$(1.3) \quad y = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

■

Dans les équations (1.1) et (1.2) on a utilisé les notations suivantes :

(a) Pour une fonction $y = y(x,t) : \Omega \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\Delta y(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} y(x,t)$$

c'est-à-dire, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le *Laplacien par rapport aux variables d'espace*

$x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$(b) \quad y'(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)$$

où t est la *variable de temps*,

(c) $y(0) = "x \rightarrow y(x,0)"$ et donc les équations (1.2) doivent être interprétées au sens :

$$y(x,0) = y^0(x); \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y^1(x) \text{ dans } \Omega.$$

■

Le système d'évolution (1.1)(1.2)(1.3) décrit, par exemple, les vibrations d'un corps n -dimensionnel Ω soumis à l'action d'une force v sur la frontière Γ (sur son bord) et partant d'un état initial décrit par les données $\{y^0, y^1\}$. ■

Dans le but d'expliciter la dépendance de la solution $y = y(x,t)$ du problème (1.1)(1.2)(1.3) par rapport au *vecteur contrôle* v on utilisera la notation :

$$(1.4) \quad y = y(x,t;v) = y(v).$$

■

La formulation du *problème de la contrôlabilité exacte* du système (1.1)(1.2)(1.3) est la suivante :

"Etant donné un temps $T > 0$ et des conditions initiales $\{y^0, y^1\}$ "convenables", existe-t-il un vecteur contrôle v tel que la solution $y = y(v)$ du système (1.1)(1.2)(1.3) satisfasse la condition :

$$(1.5) \quad y(T; v) = y'(T; v) = 0 \quad \text{dans } \Omega ?".$$

Autrement dit, il s'agit d'étudier l'existence d'un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre $\{0,0\}$ au temps $T > 0$. ■

Remarque 1.1.

On dit que l'état $\{0,0\}$ est un état d'équilibre du système car une fois que la solution $y = y(v)$ atteint cet état, elle reste dans cet état si on n'introduit aucune autre action sur la frontière du système. En effet, supposons (1.5) vérifiée. On définit les prolongements :

$$(1.6) \quad \bar{v} = \begin{cases} v, & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ 0, & \text{sur } \Gamma \times]T, +\infty[\end{cases}$$

et

$$(1.7) \quad \bar{y}(\bar{v}) = \begin{cases} y(v), & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ 0, & \text{dans } \Omega \times]T, +\infty[, \end{cases}$$

alors, la fonction $\bar{y} = y(\bar{v})$ est la solution du problème :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \bar{y}'' - \Delta \bar{y} &= 0 && \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ \bar{y}(0) = y^0, \bar{y}'(0) &= y^1 && \text{dans } \Omega \\ \bar{y} = \bar{v}, & && \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad ■$$

Le problème de la contrôlabilité exacte que l'on vient de poser est *ambigu* dans la mesure où l'on n'a pas précisé les données du problème et en particulier :

- (a) L'instant $T > 0$ auquel on veut contrôler le système ;
- (b) L'espace des données initiales $\{y^0, y^1\}$ à contrôler ;
- (c) L'espace des vecteurs contrôle v dont on dispose pour contrôler le système. ■

En ce qui concerne ces trois questions il faudra notamment tenir compte des considérations suivantes.

Remarque 1.2.

Le système d'évolution (1.1)(1.2)(1.3) est *hyperbolique*. En conséquence, la vitesse de propagation des ondes est finie (= 1 dans ce cas) et donc, la contrôlabilité exacte du système *exige que le temps* $T > 0$ *soit suffisamment grand*. Autrement dit, si T est "trop petit" à cause de la vitesse finie de propagation des ondes, aucune action sur la frontière latérale Σ du système n'est perçue dans "les points de Ω qui sont loin de Γ ".

Avant de considérer cette situation sur un exemple précis, rappelons la notion de *domaine de dépendance*.

Soit $z = z(x,t)$ une solution de l'équation des ondes

$$z'' - \Delta z = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

$$z(0) = z^0 ; z'(0) = z^1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n .$$

Il est connu que la valeur de z au point $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ dépend uniquement des restrictions des données initiales $\{z^0, z^1\}$ à la boule $B(x_0, t_0)$ (boule de centre x_0 et de rayon t_0 dans \mathbb{R}^n).

Considérons maintenant l'exemple du domaine $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$. Supposons $T < R$ et donc $T < R - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ convenable. Soit $y = y(v)$ une solution du système (1.1)(1.2)(1.3). Il est clair, d'après ce que l'on vient de dire, que la valeur de y dans la région

$$K = \{(x,t) \in Q = \Omega \times]0,T[: |x| < (T-t) + \varepsilon\}$$

dépend uniquement des valeurs des données initiales $\{y^0, y^1\}$ dans la boule $B(0, T+\varepsilon) \subset B(0, R)$ et donc, elle ne dépend pas en particulier, de la condition aux limites v . Autrement dit, $y(v)|_K$ est indépendant de v . Par conséquent, la *contrôlabilité exacte du système exige* $T > R$.

On démontrera dans le paragraphe 7.2 que si $T > R$ la contrôlabilité exacte du système a lieu et dans le paragraphe 6 que si $T > 2R$ l'espace des données initiales contrôlables ne dépend pas de T .

Dans la Figure 1 ci-dessous la zone hachurée correspond à la région K que ne perçoit pas l'action du contrôle v sur la frontière Σ du système.

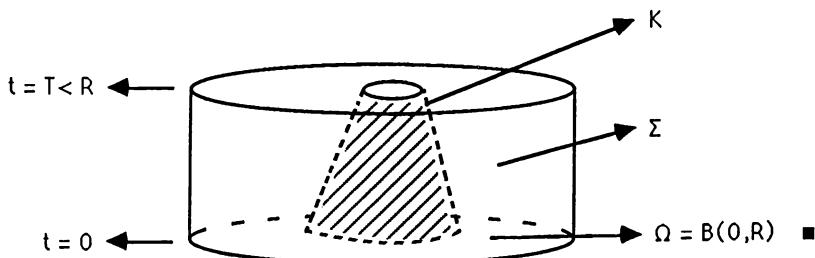


Figure 1

Remarque 1.3.

La nature des données initiales contrôlables et des vecteurs contrôle utilisés pour leur contrôle et en particulier, leurs propriétés de régularité sont liées.

Dans le paragraphe 6 on démontrera que pour des données initiales plus régulières on peut choisir des vecteurs contrôle appartenant à un espace de fonctions plus régulières. ■

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans l'étude des autres modèles d'évolution des chapitres suivants, on s'intéresse à la contrôlabilité exacte des systèmes avec *une action minimale* sur la frontière. Plus précisément, on souhaite contrôler le système en un temps $T > 0$ aussi petit que possible et avec *des contrôles à support dans un sous-ensemble* Σ_0 de Σ , situation que nous examinons maintenant. ■

Nous avons formulé jusqu'ici le problème de la contrôlabilité exacte dans le cas où le vecteur contrôle v agit sur tout le bord Σ .

Une question essentielle est la contrôlabilité exacte du système avec *l'action du contrôle uniquement sur une partie du bord*.

La formulation du problème est dans ce cas la suivante.

Considérons une partie ouverte non vide Σ_0 de Σ . On agit sur le système par la condition aux limites

$$(1.9) \quad y = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{cases}$$

Par $y = y(v)$ on désigne à nouveau la solution du système (1.1)(1.2)(1.9).

Le problème est maintenant le suivant :

"Soit $T > 0$ donné. Peut-on, pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ donné dans un espace convenable, trouver un contrôle v défini sur Σ_0 tel que si $y = y(v)$ est la solution de (1.1)(1.2)(1.9) on ait (1.5) ?" ■

Remarque 1.4.

La condition aux limites (1.9) doit être interprétée comme une *contrainte sur le vecteur contrôle* v . ■

Remarque 1.5.

Le cas essentiel auquel on s'intéresse est celui où Σ_0 est de la forme $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$, avec Γ_0 une partie ouverte non vide donnée de Γ . ■

Remarque 1.6.

On démontrera dans le paragraphe 6 que lorsqu'on veut contrôler dans un espace de données initiales fixes, à des parties Γ_0 "plus petites" correspondent des temps de contrôlabilité T "plus grands", ce qui est conforme au bon sens. ■

Remarque 1.7.

L'une des idées utilisées auparavant pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes est dûe à D.L. RUSSELL [1]. Elle s'applique au moins dans le cas où la dimension n de l'espace est impaire et quand il s'agit d'une action sur tout le bord Γ .

On définit un prolongement $\{\tilde{y}^0, \tilde{y}^1\}$ des données initiales $\{y^0, y^1\}$,

$$(1.10) \quad \tilde{y}^i = \begin{cases} y^i & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \text{ pour } i = 0, 1, \end{cases}$$

et on résout le *problème de Cauchy*

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \tilde{y}'' - \Delta \tilde{y} &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{y}(0) &= \tilde{y}^0 ; \quad \tilde{y}'(0) = \tilde{y}^1 && \text{dans } \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

D'après le *principe de Huygens* on sait que

$$(1.12) \quad \exists T > 0 \text{ qui dépend uniquement de } \Omega \text{ tel que } \tilde{y} = 0 \text{ dans } \Omega \times [T, +\infty[$$

et donc le contrôle

$$(1.13) \quad v = \tilde{y}|_{\Gamma \times]0, T[}$$

ramène la solution $y = y(v)$ à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ à l'instant T .

W. LITTMAN [1] a développé plusieurs extensions de ce type de méthodes. ■

Dans le paragraphe suivant on introduit les idées principales de la méthode que nous proposons pour l'étude du problème de la contrôlabilité exacte. Il s'agit d'une méthode qui s'applique dans un cadre très général qui sera présenté au Chapitre II.

2 - DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION : HUM . CONTROLABILITE EXACTE DANS DES ESPACES ABSTRAITS.

Dans ce paragraphe on présente les lignes générales de la méthode que nous allons utiliser tout au long du volume pour la résolution du problème de la contrôlabilité exacte, dans une version adaptée au système (1.1)(1.2)(1.9) considéré ci-dessus.

Les points essentiels de la méthode sont :

- (a) L'obtention de critères d'unicité pour le système homogène associé ;

(b) La construction –par des procédés de complétion– d'espaces hilbertiens adaptés à la structure du système.

On désignera cette méthode par HUM , abréviation de "HILBERT UNIQUENESS METHOD". ■

Le programme suivant décrit les étapes fondamentales de l'application de la méthode HUM à la résolution du problème de la contrôlabilité exacte du système (1.1)(1.2)(1.9).

Etape 1 .

On se donne d'abord des conditions initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ (on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω) et on considère l'équation des ondes homogène

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.1) \quad \Phi(0) = \Phi^0 ; \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma .$$

Il est connu que le problème (2.1) admet une solution unique (cf. paragraphe 3.2). ■

Etape 2 .

On résout ensuite le *problème "rétrograde"*

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi &= \frac{\partial \Phi}{\partial v} && \text{sur } \Sigma_0 \\ &0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{aligned}$$

où v désigne le vecteur normal extérieur à Ω et " $\frac{\partial}{\partial v}$ " la dérivée dans cette direction,

c'est-à-dire $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \nabla \Phi \cdot v = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} v_k$, ou bien, avec la convention de sommation des indices répétés

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} v_k.$$

Le système (2.2) est un *problème aux limites non homogène à caractère "rétrograde"*. Cela ne change pas le caractère "bien posé" du système, qui admet donc une solution unique ψ .

On définit alors un opérateur linéaire Λ qui associe à $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ le vecteur donné par :

$$(2.3) \quad \Lambda\{\Phi^0, \Phi^1\} = (\psi'(0), -\psi(0)).$$

L'opérateur Λ est bien défini car ψ est suffisamment régulière (cf. le paragraphe 4.2). ■

Etape 3 .

On considère maintenant des données initiales $\{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et $\zeta = \zeta(x, t)$ la solution du problème (2.1) associé.

On multipliant l'équation (2.2) par $\zeta = \zeta(x, t)$ et en intégrant sur Q on obtient aisément par intégration par parties ,

$$(2.4) \quad \langle \Lambda\{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = \int_Q [\psi'(0) \zeta^0 - \psi(0) \zeta^1] dx = \int_\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial v} d\Sigma$$

et en particulier

$$(2.5) \quad \langle \Lambda\{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

où $d\Sigma = d\Gamma dt$ désigne la mesure associée à la variété Σ , $d\Gamma$ étant celle qui correspond à Γ .

On introduit alors la *semi-norme*

$$(2.6) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \right\}^{1/2} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma_0)} \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$$

et on suppose qu'en fait $\|\cdot\|_F$ définit une norme dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Evidemment, le fait que $\|\cdot\|_F$ définisse une norme est équivalent à ce que le théorème d'unicité suivant soit vérifié.

Théorème 2.1. – (Théorème d'unicité).

Si $\Phi = \Phi(x,t)$ vérifie (2.1) pour des données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et la condition

$$(2.7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

alors $\Phi = 0$ dans Q . ■

Remarque 2.1.

L'obtention d'un théorème d'unicité de ce type est le premier point essentiel dans l'application de la méthode HUM. ■

Supposons le Théorème 2.1 vérifié. On définit l'espace hilbertien F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme (2.6).

D'après (2.4) et (2.6) on a

$$(2.8) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = (\{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\})_F$$

$$\forall \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

où $(\cdot, \cdot)_F$ désigne le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_F$ et par conséquent

$$(2.9) \quad |\langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle| \leq \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F \|\{\zeta^0, \zeta^1\}\|_F$$

$$\forall \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

L'inégalité (2.9) nous permet de prolonger \wedge (de manière unique) en un opérateur linéaire continu de F dans l'espace dual F' (F' est aussi un espace hilbertien qu'on n'identifie pas à l'espace F)

$$(2.10) \quad \Lambda : F \rightarrow F' .$$

De (2.8) on déduit

$$(2.11) \quad \langle \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \rangle = (\{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\})_F$$

$$\forall \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \in F$$

ce qui implique

$$(2.12) \quad \Lambda = \Lambda^*$$

où Λ^* désigne l'opérateur adjoint de Λ .

De tout cela résulte que Λ est un *isomorphisme* de F sur F' . ■

Remarque 2.2.

En fait on a construit l'espace F et l'opérateur Λ de façon que Λ soit un isomorphisme de F sur F' ! Rappelons que le point de départ de cette construction est le Théorème 2.1 d'unicité. ■

Etape 4 . Conclusion.

Comme Λ est un isomorphisme de F sur F' , l'équation

$$(2.13) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

a une solution unique $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$ pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ tel que

$$(2.14) \quad \{y^1, -y^0\} \in F' .$$

Remarque 2.3.

La résolution de (2.13) équivaut à la recherche de

$$\inf_{\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F} \left\{ \frac{1}{2} \langle \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle - (y^1, \Phi^0) + (y^0, \Phi^1) \right\}$$

formulation qui est à la base de l'approximation numérique étudiée dans R. GLOWINSKI, C. LI , J.L. LIONS [1]. ■

On choisit le vecteur contrôle v par

$$(2.15) \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_0$$

où Φ désigne la solution de (2.1) qui correspond aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ vérifiant (2.13).

Alors, d'après l'unicité de la solution du problème (1.1)(1.2)(1.9) on a

$$(2.16) \quad y(v) = \psi$$

où ψ est la solution de (2.2) associée à Φ .

Enfin, par la définition de ψ on voit que $y = y(v)$ satisfait à (1.5) et donc le contrôle v répond à la question. ■

Le résultat que l'on vient de démontrer se résume dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.2. - (Théorème de contrôlabilité exacte).

Soit $T > 0$ tel que le Théorème 2.1 d'unicité soit vérifié. On peut donc définir l'espace F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (2.6).

Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ tel que

$$\{y^1, -y^0\} \in F'$$

il existe un contrôle

$$v \in L^2(\Sigma_0)$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (1.1)(1.2)(1.9) satisfait à (1.5). ■

Remarque 2.4.

La définition de l'espace F , comme complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$, entraîne une correspondance entre l'espace F et l'espace $L^2(\Sigma_0)$ de sorte que

$$\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F \iff \frac{\partial \Phi}{\partial v} \in L^2(\Sigma_0)$$

où Φ désigne la solution de (2.1) avec des conditions initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\}$.

La régularité $L^2(\Sigma_0)$ du contrôle v défini par (2.15) est donc une conséquence directe de la construction de l'espace F et de l'opérateur Λ . ■

Remarque 2.5.

Quand le Théorème 2.2 est vérifié on dit que le système (1.1)(1.2)(1.9) est *exactement contrôlable à l'instant T* ■

Remarque 2.6.

Les espaces F et F' sont définis moyennant un procédé de complétion. En conséquence, ils ne sont pas, pour l'instant, caractérisés en termes d'espaces fonctionnels usuels. Ils dépendent a priori de Σ_0 (i.e. de Γ_0 et de T).

Dans la mesure où l'espace F' n'est pas "identifié", le Théorème 2.2 a un caractère "abstrait". Le deuxième point essentiel de HUM consistera donc à identifier les espaces hilbertiens F et F' , ou au moins à les décrire aussi précisément que possible. ■

Remarque 2.7.

Nous allons démontrer dans le paragraphe 8 l'existence d'un $T_0 > 0$ dépendant uniquement de la géométrie du domaine Ω tel que le Théorème 2.1 d'unicité soit vérifié avec $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$ où Γ_0 ouvert non vide de Γ et $T > T_0$ sont quelconques. Par conséquent, on aura la contrôlabilité exacte dans un espace F' de données initiales qui dépendra a priori de Γ_0 et de T .

On va voir dans le paragraphe 6 que si Γ_0 est "assez gros", il existe $T(\Gamma_0) > 0$, tel que F' ne dépend ni de Γ_0 ni de $T > T(\Gamma_0)$. ■

Dans la suite du chapitre, nous allons étudier chaque étape de l'application de HUM. Le plan est le suivant :

– **Paragraphe 3.** – On établit des résultats préliminaires qui seront nécessaires dans la suite.

– **Paragraphe 4.** – On étudie l'existence et la régularité des solutions des problèmes (2.1) et (2.2).

– **Paragraphe 5.** – On démontre un théorème d'unicité et on obtient une estimation permettant d'identifier les espaces F et F' , lorsque Γ_0 est "assez gros", en utilisant par ailleurs une estimation obtenue dans le paragraphe 4.

– **Paragraphe 6.** – On énonce le résultat principal de contrôlabilité exacte, ainsi que d'autres résultats supplémentaires.

– **Paragraphe 7.** – On donne quelques variantes des résultats du paragraphe 6 et on interprète du point de vue géométrique les résultats obtenus.

– **Paragraphe 8.** – On introduit le théorème d'unicité de Holmgren et ses conséquences dans l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec action de type Dirichlet.

– **Paragraphe 9.** – On étudie le problème de la "contrôlabilité exacte élargie".

– **Paragraphe 10.** – On donne quelques problèmes ouverts.

3 - QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES.

3.1. - Prolongement d'un champ de vecteurs normaux.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer quelques lemmes techniques qui seront d'une grande utilité dans l'étude des différents modèles présentés dans ce volume. Ces résultats sont connus. On les explicite ici pour la commodité du lecteur.

Lemme 3.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Alors il existe un champ de vecteurs $h = (h_k) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ qui vérifie

$$(3.1) \quad h(x) = v(x) \text{ sur } \Gamma.$$

Démonstration.

D'après la régularité C^2 de la frontière Γ , pour tout $x \in \Gamma$ il existe un voisinage V_x de x dans \mathbb{R}^n et une fonction $\sigma_x \in C^2(V_x, \mathbb{R})$ tels que :

$$(3.2) \quad \nabla \sigma_x(z) \neq 0 \quad \forall z \in V_x,$$

$$(3.3) \quad \sigma_x(z) = 0 \iff z \in V_x \cap \Gamma,$$

$$(3.4) \quad v(z) = \frac{\nabla \sigma_x(z)}{|\nabla \sigma_x(z)|} \quad \forall z \in V_x \cap \Gamma.$$

On observe ensuite que la compacité de la frontière Γ implique :

$$(3.5) \quad \exists \{x_j\}_{1 \leq j \leq \ell} \subset \Gamma | \Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j$$

avec

$$V_j = V_{x_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

On définit ensuite un ouvert $V_0 \subset \Omega$ vérifiant :

$$(3.6) \quad \overline{V}_0 \subset \Omega, \quad \Omega \subset \bigcup_{j=0}^{\ell} V_j$$

et on considère une *partition de l'unité* $\{e_j\}_{0 \leq j \leq \ell}$ subordonnée au recouvrement $\{V_j\}_{0 \leq j \leq \ell}$; c'est-à-dire un ensemble de fonctions $\{e_j\}_{0 \leq j \leq \ell}$ satisfaisant les conditions :

$$(3.7) \quad e_j \in \mathcal{D}(V_j); \quad 0 \leq e_j \leq 1 \quad \text{dans } V_j, \quad \forall j \in \{0, \dots, \ell\}$$

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^{\ell} e_j = 1 \quad \text{dans } \bar{\Omega} .$$

On a en particulier

$$(3.9) \quad \sum_{j=0}^{\ell} e_j = 1 \quad \text{sur } \Gamma .$$

Comme conséquence de (3.4)(3.7) et (3.9) on voit que le champ de vecteurs

$$(3.10) \quad h(x) = \sum_{j=0}^{\ell} e_j(x) |\nabla \sigma_j(x)|^{-1} \nabla \sigma_j(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

où $\sigma_j = \sigma_{x_j}$, $\forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ vérifie les propriétés exigées. ■

Remarque 3.1.

De (3.1) on déduit :

$$(3.11) \quad h(x) \cdot v(x) = h_k(x) v_k(x) = 1 \quad \forall x \in \Gamma . \quad ■$$

Remarque 3.2.

Par construction de h on a :

$$(3.12) \quad \text{supp } h \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} V_j ,$$

où $\text{supp } h$ désigne le support de la fonction h .

En fait, on peut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un champ de vecteurs $h_\varepsilon \in [C^1(\bar{\Omega})]^n$ vérifiant (3.1) et de plus :

$$(3.13) \quad \text{supp } h_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, \Gamma) \leq \varepsilon\}$$

où $d(x, \Gamma)$ désigne la "distance du point x à l'ensemble Γ " :

$$(3.14) \quad d(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} |x - y| .$$

Dans la Figure 2, la région hachurée $\Gamma_\varepsilon^{\text{int}}$ désigne l'ensemble $\Gamma_\varepsilon^{\text{int}} = \Gamma_\varepsilon \cap \Omega$:

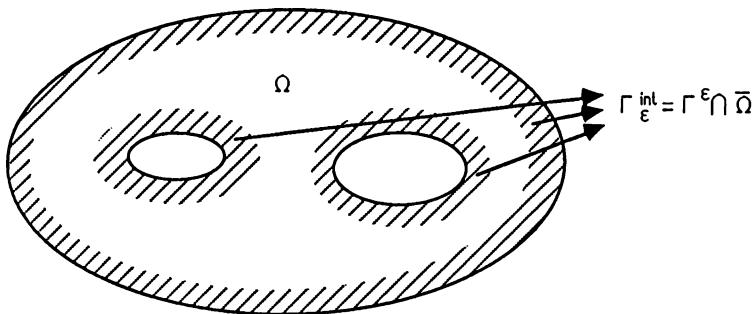


Figure 2

Il faut aussi observer que les arguments employés dans la démonstration sont *locaux*, de sorte que le résultat suivant peut être aussi obtenu :

$$(3.15) \quad " \forall \gamma \subset \Gamma, \quad \forall \varepsilon > 0, \exists h_{\gamma, \varepsilon} \in [C^1(\bar{\Omega})]^n \text{ tel que}$$

$$h_{\gamma, \varepsilon}(x) = v(x) \quad \forall x \in \gamma$$

$$\text{supp } h_{\gamma, \varepsilon} \subset \gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, \gamma) \leq \varepsilon\}. "$$

■

Le lemme suivant généralise d'une certaine manière le résultat du Lemme 3.1 (plus précisément l'identité (3.11)) à des ouverts Ω de frontière lipschitzienne.

Lemme 3.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ lipschitzienne. Alors, il existe $\delta > 0$ et un champ de vecteurs $h \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$ tel que

$$(3.16) \quad h(x) \cdot v(x) \geq \delta \quad \text{p.p. sur } \Gamma .$$

Remarque 3.3.

Dans le cas général d'un ouvert Ω à frontière lipschitzienne, la normale extérieure $v(x)$ n'est définie que "presque partout" sur la frontière Γ .

Il est évident que le champ de vecteur $v(x)$ présente des discontinuités autour des éventuels "coins" de la frontière Γ . Ceci montre que l'identité (3.1) ne peut pas avoir lieu avec un champ de vecteurs $h \in [C(\bar{\Omega})]^n$.

Les Lemmes 3.1 et 3.2 seront utilisés dans le paragraphe 4.1 pour la démonstration de "l'inégalité directe". Leur obtention ne nécessite en fait que l'existence d'un champ vérifiant (3.17), ce qui permettra de généraliser "l'inégalité directe" à des ouverts convexes sans hypothèse de régularité sur Γ autre que celle impliquée par la convexité.

Grâce au Lemme 3.2 "l'inégalité directe" pourra être également démontrée dans le paragraphe 7.3 pour des polyèdres Ω de \mathbb{R}^n , avec $n \leq 3$. ■

La démonstration du Lemme 3.2 est analogue à celle du Lemme 3.1. On définit d'abord le champ h localement et on recouvre ensuite la frontière Γ par une partition de l'unité.

Le résultat a de nouveau un caractère local et les conclusions de la Remarque 3.2 restent donc valables dans ce cas. ■

3.2. Quelques rappels sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des ondes.

Dans le lemme suivant on résume les résultats d'existence, d'unicité et de régularité du problème (2.1) dont on aura besoin dans la suite du chapitre.

Lemme 3.3.

(a) *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ lipschitzienne.*

Alors, pour tout $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ il existe une solution unique $\Phi = \Phi(x, t)$ de (2.1) avec

$$(3.17) \quad \Phi \in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)) \cap C^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

(b) On suppose maintenant que Γ est de classe C^2 .

Alors, si $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ la solution $\Phi = \Phi(x,t)$ vérifie

$$(3.18) \quad \Phi \in C(0,T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0,T; L^2(\Omega)). \quad \blacksquare$$

Si $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la solution Φ de (2.1) (qui appartient à la classe (3.17)) est dite *solution faible* de l'équation. Dans ce cas, Φ vérifie (2.1) au sens *faible* suivant :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & \langle \Phi''(t), \varphi \rangle + \int_{\Omega} \nabla \Phi(t) \cdot \nabla \varphi \, dx = 0, \quad \forall t \in [0,T], \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ & \Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre les espaces $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. \blacksquare

Les solutions Φ appartenant à la classe (3.18) sont appelées *solutions fortes* ou *solutions régulières* de l'équation. Dans ce cas, l'équation est vérifiée au sens de l'espace $L^2(Q)$. \blacksquare

Démonstration du Lemme 3.3.

Le résultat énoncé est classique. La preuve peut-être établie par différentes méthodes. Nous en rappelons ici trois :

1. - Méthode de Fourier.

On choisit une *base hilbertienne* $\{w_i\}_{i \geq 1}$ de l'espace $L^2(\Omega)$ constituée de *fonctions propres* de $-\Delta$ avec la condition de Dirichlet homogène, c'est-à-dire

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & -\Delta w_i = \lambda_i w_i \quad \text{dans } \Omega \\ & w_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On cherche la solution Φ de (2.1) sous la forme :

$$(3.21) \quad \Phi(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(t) w_i(x).$$

En multipliant l'équation (2.6) par $w_i(x)$ et en intégrant sur Ω l'on obtient

$$(3.22) \quad a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots$$

et d'après les conditions initiales $\Phi(0) = \Phi^0$, $\Phi'(0) = \Phi^1$ on a

$$(3.23) \quad a_i(0) = a_i^0 \quad ; \quad a_i'(0) = a_i^1 \quad , \quad \forall i = 1, \dots$$

où $(a_i^0)_{i \geq 1}$ et $(a_i^1)_{i \geq 1}$ désignent respectivement les coefficients de Fourier des données initiales Φ^0 et Φ^1 , c'est-à-dire,

$$(3.24) \quad \Phi^0(x) = \sum_{i \geq 1} a_i^0 w_i(x) \quad ; \quad \Phi^1(x) = \sum_{i \geq 1} a_i^1 w_i(x).$$

En résolvant les équations (3.22)(3.23) on obtient

$$(3.25) \quad \Phi(x,t) = \sum_{i \geq 1} (a_i^0 \cos(t\sqrt{\lambda}_i) + \frac{a_i^1}{\sqrt{\lambda}_i} \sin(t\sqrt{\lambda}_i)) w_i(x).$$

On rappelle que

$$\Phi^0 \in H_0^1(\Omega) \iff \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i |a_i^0|^2 < +\infty$$

et

$$\Phi^1 \in L^2(\Omega) \iff \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i^1|^2 < +\infty.$$

La conclusion de (a) est maintenant immédiate à partir de la formule de représentation (3.25).

En ce qui concerne (b), on remarque que si Ω a une frontière Γ de classe C^2 (en fait $C^{1,1}$ suffit) l'opérateur

$$-\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

est un isomorphisme et par conséquent

$$\Phi^0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \iff \sum_{i \geq 1} \lambda_i^2 |\phi_i^0|^2 < +\infty.$$

La conclusion de (b) est à nouveau une conséquence de la formule (3.25).

2. - La Théorie de Hille-Yosida.

On écrit l'équation des ondes

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0$$

sous la forme d'un système du 1^{er} ordre

$$(3.26) \quad U' + A U = 0$$

avec $U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \xi \end{pmatrix}$ et

$$(3.27) \quad A U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ -\Delta \Phi \end{pmatrix}.$$

On considère l'espace $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(3.28) \quad (U_1, U_2) = \int_{\Omega} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2 \, dx + \int_{\Omega} \xi_1 \xi_2 \, dx$$

où

$$U_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur linéaire $(A, D(A))$ avec domaine

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

est, grâce à la régularité C^2 de Γ , maximal monotone dans H (dans le cas général, i.e. Γ lipschitzienne, on a comme domaine de A , $D(A) = \{\Phi^0 \in H_0^1(\Omega) : \Delta \Phi^0 \in L^2(\Omega)\} \times H_0^1(\Omega)$).

De cette manière on ramène l'équation des ondes au cadre fonctionnel de la Théorie de Hille-Yosida, le Lemme 3.3 étant une conséquence de cette théorie (cf. K. YOSIDA [1]). On trouvera dans H. BREZIS [1] (Chap. VII et X) une présentation de cette théorie très adaptée aux applications. -Consulter aussi R. DAUTRAY et J.L. LIONS [1, Vol 3] et A. PAZY [1] pour la théorie des semi-groupes non linéaires- .

3. - Le Lemme 3.3 entre aussi dans le cadre abstrait introduit dans J.L. LIONS et E. MAGENES [1].

On a en particulier le résultat suivant (cf. J.L. LIONS [11]).

Lemme 3.4.

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H \subset V'$ avec injections continues et denses. Pour chaque $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire continue et symétrique $a(t; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) La fonction $t \rightarrow a(t; \Phi, \xi)$ est de classe C^1 , $\forall \Phi, \xi \in V$.

(ii) $\exists \alpha > 0 \mid a(t; \Phi, \Phi) \geq \alpha \|\Phi\|^2$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \Phi \in V$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de l'espace V .

Alors, étant données $f \in L^2(0, T ; H)$, $\Phi^0 \in V$, $\Phi^1 \in H$ il existe une fonction unique Φ telle que :

$$\Phi \in C(0, T ; V) \cap C^1(0, T ; H) \cap H^2(0, T ; V')$$

$$(3.29) \quad \langle \Phi''(t), v \rangle + a(t; \Phi(t); v) = \langle f(t), v \rangle, \quad \text{p. p. } t \in [0, T], \quad \forall v \in V$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \quad \Phi'(0) = \Phi^1$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre les espaces V' et V . ■

Remarque 3.4.

Dans le cas général d'un ouvert Ω à frontière lipschitzienne on voit que si $\Phi^0 \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta\Phi^0 \in L^2(\Omega)$ et $\Phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ alors $\Phi \in C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ et $\Delta\Phi \in C(0,T; L^2(\Omega))$.

Si on suppose en outre que Ω est *convexe* on a (cf. P. GRISYARD [1])

$$H^2 \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

et donc le résultat (b) du Lemme 1.3 reste valable.

Cette remarque sera importante pour l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des ouverts convexes. ■

On considère maintenant *l'énergie* naturelle associée à l'équation des ondes

$$(3.30) \quad E(t) = \frac{1}{2} \{ |\Phi'(t)|^2 + |\nabla\Phi(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0,T]$$

avec les notations

$$|\Phi'(t)|^2 = \|\Phi'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\Phi'(x,t)|^2 dx$$

et

$$|\nabla\Phi(t)|^2 = \|\nabla\Phi(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x,t) \right|^2 dx .$$

Le lemme suivant établit une *loi de conservation de l'énergie* qui exprime l'invariance de l'énergie le long d'une trajectoire. Il est aussi valable dans le cas général d'un domaine Ω à frontière lipschitzienne.

Lemme 3.5.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ lipschitzienne.

Soit $\Phi = \Phi(x,t)$ une solution faible de l'équation des ondes (2.1). Alors, on a

$$(3.31) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} \{ |\Phi^1|^2 + |\nabla\Phi^0|^2 \} \quad \forall t \in [0,T] .$$

Démonstration.

On considère d'abord une solution régulière Φ correspondant à des données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

On multiplie l'équation (2.1) par la fonction $\Phi'(x,t)$ et en intégrant sur Ω on obtient (le calcul est justifié car on a $\Phi \in C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\Delta\Phi \in C(0,T; L^2(\Omega))$)

$$(3.32) \quad \frac{dE}{dt}(t) = 0 \quad \text{dans } [0,T]$$

et donc (3.31).

Dans le cas général $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on raisonne par un argument de densité. Soit $\{\Phi_i^0, \Phi_i^1\}_{i \geq 1} \subset (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ une suite de fonctions vérifiant

$$(3.33) \quad \{\Phi_i^0, \Phi_i^1\} \rightarrow \{\Phi^0, \Phi^1\} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad \text{lorsque } i \rightarrow +\infty .$$

D'après la dépendance continue des solutions de l'équation des ondes par rapport aux données initiales on en déduit que

$$(3.34) \quad \Phi_i \rightarrow \Phi \quad \text{dans } C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)) \quad \text{lorsque } i \rightarrow +\infty$$

où $\Phi_i = \Phi_i(x,t)$ désigne la solution de (2.1) de données initiales $\{\Phi_i^0, \Phi_i^1\}$. Par conséquent

$$(3.35) \quad E_i(t) \rightarrow E(t) \quad \text{dans } C[0,T] \quad \text{lorsque } i \rightarrow +\infty$$

où $E_i(t)$ est l'énergie associée à la solution Φ_i , $i = 1, \dots, \infty$.

Par un passage à la limite lorsque $i \rightarrow +\infty$ on obtient donc l'identité (3.31) pour la solution faible Φ . ■

On considère maintenant l'équation des ondes non homogène

$$\theta'' - \Delta\theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(3.36) \quad \theta(0) = \theta^0 ; \quad \theta'(0) = \theta^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.6.

(a) Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne. Pour tout $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, $\theta^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\theta^1 \in L^2(\Omega)$ il existe une solution unique θ de (3.36) avec

$$(3.37) \quad \theta \in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.38) \quad \|\theta\|_{L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))} \leq C \{ |\nabla \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega))} \}.$$

(b) On suppose maintenant que Ω est de classe C^2 . Alors, pour tout $f \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\theta^0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ et $\theta^1 \in H_0^1(\Omega)$ il existe une solution unique θ telle que

$$(3.39) \quad \theta \in C(0,T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$$

avec l'estimation

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \|\theta\|_{L^\infty(0,T; H^2 \cap H_0^1(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))} &\leq \\ &\leq C \{ \|\theta^0\|_{H^2 \cap H_0^1(\Omega)} + \|\theta^1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))} \} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 3.5.

D'après la remarque 3.4, le résultat (b) est aussi valable dans le cas d'un convexe Ω . \blacksquare

Le lemme 3.6 peut être obtenu par les trois méthodes déjà mentionnées.

Si on applique par exemple la méthode de Fourier on obtient la formule de représentation

$$\theta(x,t) = \sum_{i \geq 1} \{ a_i^0 (\cos t \sqrt{\lambda_i}) + a_i^1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \sin (\sqrt{\lambda_i} t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t \sin ((t-s) \sqrt{\lambda_i}) f_i(s) ds \} w_i(x)$$

où

$$\theta^0(x) = \sum_{i \geq 1} a_i^0 w_i(x), \theta^1(x) = \sum_{i \geq 1} a_i^1 w_i(x); f(t,x) = \sum_{i \geq 1} f_i(t) w_i(x).$$

On peut ensuite démontrer aisément le lemme 3.6 à partir de (3.40). ■

3.3. - Une identité.

Dans ce paragraphe on établit une identité qui permettra dans la suite d'obtenir les estimations a priori nécessaires dans l'application de HUM.

Lemme 3.7.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $q = (q_k)$ un champ de vecteurs de classe $[C^1(\bar{\Omega})]^n$. Alors, pour toute solution faible $\theta = \theta(x,t)$ (i.e. $\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$) de l'équation (3.36) l'identité suivante est vérifiée :

$$(3.41) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k}) |_0^T + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2] dx dt + \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dx dt - \\ & - \int_0^T f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt \end{aligned}$$

Les notations utilisées sont les suivantes

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

$$(u(t), v(t)) |_0^T = (u(T), v(T)) - (u(0), v(0)) \quad \forall u, v \in C(0, T; L^2(\Omega)).$$

Par ailleurs on a appliqué la convention des indices répétés de sorte que, par exemple

$$q_k v_k = \sum_{k=1}^n q_k v_k . \quad \blacksquare$$

Démonstration du Lemme 3.7.

On établit d'abord l'identité dans le cas d'une solution forte θ , i.e. qui correspond à des données $\{\theta^0, \theta^1\} \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$.

On multiplie l'équation (3.36) par la fonction $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ et on intègre sur Q ; il en résulte que

$$(3.42) \quad \int_Q (\theta'' - \Delta \theta) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt .$$

D'après la formule d'intégration par parties on a

$$(3.43) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T - \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt$$

et on observe que

$$(3.44) \quad \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt = \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\theta'|^2) dx dt = -\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt$$

comme conséquence de la formule de Green et du fait que $\theta' = 0$ sur Σ .

De (3.43)(3.44) il résulte

$$(3.45) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k})|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt .$$

Par ailleurs,

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \int_Q \Delta \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt &= - \int_Q \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) dx dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma = \\ &= - \int_Q \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma \end{aligned}$$

et en outre

$$(3.47) \quad \int_{\Omega} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_k q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\nabla \theta|^2) dx dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\nabla \theta|^2 d\Sigma.$$

Comme $\theta = 0$ sur Σ on a

$$(3.48) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \forall k = 1, \dots, n; |\nabla \theta|^2 = \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 \text{ sur } \Sigma.$$

En combinant (3.46)(3.47)(3.48) il vient

$$(3.49) \quad \int_{\Omega} \Delta \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = - \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

et de (3.42)(3.45) et (3.49) on déduit l'identité (3.41).

Considérons maintenant le cas général d'une solution faible $\theta = \theta(x, t)$, c'est-à-dire qui correspond à des données $\{\theta^0, \theta^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

On approche ces données par des données plus régulières $\{\theta_n^0, \theta_n^1\} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $\{f_n\} \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ telles que

$$(3.50) \quad \{\theta_n^0, \theta_n^1\} \rightarrow \{\theta^0, \theta^1\} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ et} \\ f_n \rightarrow f \text{ dans } L^1(0, T; L^2(\Omega)), \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

L'identité (3.41) est donc vérifiée par les solutions fortes θ_n qui correspondent aux données $\{\theta_n^0, \theta_n^1, f_n\}$, et d'après l'estimation (3.38) et les propriétés (3.50) on voit que

$$\theta_n \rightarrow \theta \quad \text{dans } C(0,T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{et}$$

$$\theta_n' \rightarrow \theta' \quad \text{dans } C(0,T; L^2(\Omega)), \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci nous permet de passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans le membre de droite de l'identité (3.41), d'en déduire que $q_k v_k |\frac{\partial \theta}{\partial v}|^2 \in L^1(\Sigma)$ et que l'identité (3.41) est aussi vérifiée dans ce cas. ■

Corollaire 3.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $q \in [C^1(\bar{\Omega})]^n$. Alors, pour toute solution faible Φ de l'équation (2.1) on a l'identité :

$$(3.51) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = (\Phi'(t), q_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k})|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [\lvert \Phi' \rvert^2 - \lvert \nabla \Phi \rvert^2] dx dt + \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} dx dt. \quad ■$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de (3.41), il suffit de prendre $f = 0$. ■

Remarque 3.6.

Les identités (3.41) et (3.51) restent valables lorsque Ω est un domaine borné et convexe, car $-\Delta$ est, dans ce cas, un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Dans le cas général d'un ouvert à frontière lipschitzienne on ne peut pas justifier par la méthode précédente les intégrations par parties réalisées dans la démonstration à cause de la non régularité des solutions fortes $\theta \in C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\Delta \theta \in C(0,T; L^2(\Omega))$.

P. GRISYARD dans [2] et [3] a généralisé ces identités au cas d'un polygone $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou d'un polyèdre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, non nécessairement convexes. On reviendra là-dessus. ■

4 - REGULARITE DES SOLUTIONS FAIBLES.

4.1. Le problème homogène.

Nous démontrons dans ce paragraphe un *résultat de régularité* qui a été déjà introduit dans J.L. LIONS [12] dans le cadre des équations hyperboliques à coefficients variables.

Théorème 4.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(4.1) \quad \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) \{ |\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \},$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution du problème (3.36). ■

Avant de donner la démonstration de ce théorème, on remarque qu'avec le choix particulier $[f = 0]$ on obtient le

Corollaire 4.1. (L'inégalité directe)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ de classe C^2 . Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(4.2) \quad \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) E_0, \quad \forall \Phi \text{ solution faible de (2.1)}. \quad ■$$

Remarque 4.1.

D'après (4.1) il en résulte que $\frac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Ceci est une propriété de régularité des solutions faibles de l'équation des ondes. ■

Remarque 4.2.

Au cours de la démonstration on obtiendra que la constante C de l'estimation (4.1) *dépend uniquement de la géométrie du domaine* Ω . En fait C dépend uniquement de $\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, où h est le champ de vecteurs introduit dans le Lemme 3.1. ■

Démonstration du Théorème 4.1.

On applique l'identité (3.41) avec $q = h$, où h désigne le champ de vecteurs introduit dans le Lemme 3.1.

Du fait que $h \cdot v = 1$ sur Γ , on obtient aisément

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma &\leq C(T+1) [\|\theta\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\theta'\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))}^2] + \\ &+ C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|\theta\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))} \end{aligned}$$

et grâce à l'estimation (3.38) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma &\leq C(T+1) [|\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2] + \\ (4.3) \quad &+ C \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} [|\nabla \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}] \leq \\ &\leq C(T+1) [|\nabla \theta^0|^2 + |\theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2]. \quad ■ \end{aligned}$$

Remarque 4.3.

La conclusion du Théorème 4.1 reste valable dans le cas d'un domaine borné et *convexe* Ω . Nous avons justifié l'identité (3.41) dans la Remarque 3.6. Il suffit donc d'appliquer cette identité avec $q = h$ où h est le champ de vecteurs introduit dans le Lemme 3.2 qui vérifie $h \cdot v \geq 6 > 0$, p.p. sur Γ . ■

Remarque 4.4.

La technique de multiplication par " $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ " utilisée dans la démonstration du Lemme 3.7 –et a fortiori dans celle du Théorème 4.1 – est classique dans le cadre des équations elliptiques. Elle a été introduite par F. RELLICH. ■

4.2. - Le problème non homogène.

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'existence et la régularité des solutions du problème non homogène (2.2).

Dans le but de simplifier les notations et d'établir le résultat dans un cadre contenant le système (2.2) et le système (1.1)(1.2)(1.9) nous allons traiter ici le problème suivant :

$$z'' - \Delta z = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.4) \quad z(0) = z^0; z'(0) = z^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$z = v \quad \text{sur } \Sigma .$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant

Théorème 4.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Alors pour tout ensemble de données

$$(4.5) \quad \{ z^0, z^1, v \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$$

il existe une solution unique z de (4.4) avec

$$(4.6) \quad z \in C(0,T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

En outre, on a l'estimation

$$(4.7) \quad \exists C > 0 / \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C [|z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}],$$

$$\forall \{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma). \quad \blacksquare$$

Remarque 4.5.

On a le même résultat si on remplace les conditions initiales $z(0) = z^0, z'(0) = z^1$ par des conditions finales $z(T) = z^0 ; z'(T) = z^1$, et en particulier dans le cas de l'équation non homogène (2.2). Ceci est une conséquence de la réversibilité de l'équation $z'' - \Delta z = 0$, par rapport à la variable temps t . \blacksquare

Avant de démontrer ce résultat, nous allons préciser le sens dans lequel la solution z vérifie l'équation.

La solution z est définie par la méthode de transposition (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1]). Plus précisément, on dit que z est une solution de (4.4) si

$$(4.8) \quad \int_Q z f dx dt = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_\Sigma v \frac{\partial \theta}{\partial v} d\Sigma, \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution du problème

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\ \theta(T) &= \theta'(T) = 0 && \text{dans } \Omega \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Il s'agit d'une *formulation faible* du problème (4.4). Il est facile de vérifier que toute solution régulière z de (4.4) (qui correspond à des données régulières $\{z^0, z^1, v\}$) satisfait à (4.8). Il suffit de multiplier (4.9) par z et intégrer sur Q . \blacksquare

Démonstration du Théorème 4.2.

On commence par établir une estimation pour le problème transposé (4.9).

Grâce au Lemme 3.6 et au Théorème 4.1 on voit qu'il existe $C > 0$ avec

$$(4.10) \quad |\nabla \theta(0)| + |\theta'(0)| + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega))}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q).$$

De (4.10) on déduit aisément

$$(4.11) \quad \exists z \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ vérifiant (4.8)}$$

et en outre

$$(4.12) \quad \|z\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))} \leq C \{ |z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} \},$$

$$\forall \{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma).$$

La régularité $C(0,T; L^2(\Omega))$ de la solution z est maintenant une conséquence de l'estimation (4.12) et du fait que si les données $\{z^0, z^1, v\}$ sont régulières alors z est régulier. Plus précisément, on considère une suite de données initiales et aux limites

$$\{z_n^0, z_n^1, v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^2(0,T; H^{3/2}(\Gamma))$$

telle que

$$\{z_n^0, z_n^1, v_n\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \{z^0, z^1, v\} \text{ dans } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma).$$

Grâce à (4.12), si (z_n) est la suite de solutions de (4.4) qui correspond aux données $\{z_n^0, z_n^1, v_n\}$, alors $z_n \rightarrow z$ dans $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Il suffit donc de démontrer que

$$z_n \in C(0,T; L^2(\Omega)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans ce but on considère un relèvement

$$\hat{v}_n \in H_0^2(0,T; H^2(\Omega)) : \hat{v}_n|_\Sigma = v_n$$

et on remarque que $u_n = z_n - \hat{v}_n$ satisfait à

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES

$$u_n'' - \Delta u_n = -(\hat{v}_n'' - \Delta \hat{v}_n) \in L^2(Q) ,$$

$$u_n(0) = z_n^0 - \hat{v}_n(0) \in H_0^1(\Omega) ,$$

$$u_n'(0) = z_n^1 - \hat{v}_n'(0) \in L^2(\Omega) ,$$

$$u_n = 0 \text{ sur } \Sigma .$$

Grâce au Lemme 3.6

$$u_n \in C(0,T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T ; L^2(\Omega))$$

et par conséquent

$$z_n = u_n + \hat{v}_n \in C(0,T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T ; L^2(\Omega)).$$

On a donc

$$(4.13) \quad z \in C(0,T ; L^2(\Omega)) .$$

avec

$$z'' - \Delta z = 0 \text{ dans } Q$$

et par conséquent

$$(4.14) \quad z'' = \Delta z \in C(0,T ; H^{-2}(\Omega)).$$

En outre

$$(4.15) \quad \|z''\|_{L^\infty(0,T ; H^{-2}(\Omega))} \leq C \|z\|_{L^\infty(0,T ; L^2(\Omega))} .$$

Il reste à démontrer que $z' \in L^\infty(0,T ; H^{-1}(\Omega))$ et, plus précisément, que

$$(4.16) \quad \text{l'application linéaire } \{z^0, z^1, v\} \rightarrow z' \text{ est continue de}$$

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^\infty(0,T ; H^{-1}(\Omega)) .$$

Il en résulte ensuite (par le même procédé que ci-dessus de passage à la limite) que

$$(4.17) \quad z' \in C(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Il n'est pas totalement évident (ni même *vrai*, contrairement à ce que l'A. a parfois indiqué -mais jamais utilisé de manière essentielle) que $z \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $z'' \in L^\infty(0,T; H^{-2}(\Omega))$ entraîne $z' \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega))$. (*) ■

Remarque 1.26.

Il résulte de la théorie de l'interpolation que z' est dans $L^p(0,T; H^{-1}(\Omega))$ pour tout p fini et que z' est dans $L^\infty(0,T; H^{1-\epsilon}(\Omega)) \forall \epsilon > 0$. Le "résultat" général n'est pas vrai mais il est presque vrai ... ! ■

Il est de toutes façons plus simple de démontrer directement (4.16) à partir de la définition (4.8) de la solution faible z .

Désignons par $L(f)$ le deuxième membre de (4.8) :

$$L(f) = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial v} d\Sigma$$

où θ est la solution de (4.9). On a montré que $f \rightarrow L(f)$ est une forme linéaire continue sur $L^1(0,T; L^2(\Omega))$. Si l'on considère

$$f = \frac{df_1}{dt}, f_1 \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$$

i.e.

$$f \in W^{-1,1}(0,T; H_0^1(\Omega))$$

(avec les notations usuelles des espaces de Sobolev et de leurs duals), on aura (4.16) si l'on montre que

(*) Un ingénieux contre exemple a été construit par L. RODRIGUEZ-PIAZZA.

$$(4.18) \quad |L(f)| \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}.$$

En effet on a alors

$$z \in (W^{-1,1}(0,T; H_0^1(\Omega)))' = W^{1,\infty}(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

i.e. $z' \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega))$ et en outre z' dépend continûment de $\{z^0, z^1, v\}$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, i.e. (4.16).

Cela revient donc à résoudre (4.9) avec $f = \frac{df_1}{dt}$ et à démontrer que l'on a alors :

$$(4.19) \quad \|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\theta'(0)\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}.$$

Pour la commodité de l'exposition, inversons le sens du temps. On a donc θ solution de

$$(4.20) \quad \theta'' - \Delta \theta = \frac{df_1}{dt} \quad \text{dans } Q$$

$$\theta(0) = \theta'(0) = 0; \quad \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

On veut montrer que

$$(4.21) \quad \|\theta(T)\|_{H_0^1(\Omega)} + |\theta'(T)| + \left\| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}.$$

Par densité et passage à la limite, il suffit de montrer (4.21) pour f_1 régulièrè en t , à support compact dans $]0,T[$, à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$.

On a alors

$$(4.22) \quad \theta = w'$$

où w est défini par

$$w'' - \Delta w = f_1 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.23) \quad w = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$w(0) = w'(0) = 0$$

(en effet $\theta'(0) = w''(0) = \Delta w(0) = 0$ car f_1 est nulle au voisinage de 0).

Une première estimation a priori sur (4.23) est standard. On prend le produit scalaire par $-\Delta w'$. Il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|\nabla w'(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2] = (\nabla f_1(t), \nabla w'(t))$$

d'où aussitôt

$$(4.24) \quad w \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad w' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

l'application $f_1 \rightarrow w$ étant continue de $L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ dans l'espace des w vérifiant (4.24) avec la topologie correspondante. Donc on a les mêmes résultats pour les fonctions continues en t (remplaçant L^∞ par C) et par conséquent

$$(4.25) \quad \|w(T)\|_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} + \|w'(T)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}.$$

Or $w'(T) = \theta(T)$ et, comme on a $f_1 = 0$ au voisinage de $t = T$, $w''(T) = \Delta w(T) = \theta'(T)$ de sorte que (4.25) équivaut à

$$(4.26) \quad |\Delta \theta(T)| + |\theta'(T)| \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}. \quad \blacksquare$$

On aura donc le résultat (4.21) si l'on montre que

$$(4.27) \quad \left\| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f_1\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}.$$

L'inégalité (4.27) est une variante des "inégalités directes" déjà démontrées antérieurement. Donnons les détails. On multiplie (4.20) par $h_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$, où $h_k \in C^1(\bar{\Omega})$, $h_k = v_k$ sur Γ (exactement comme on l'a déjà fait dans la démonstration du Théorème 4.3). On obtient au premier membre les mêmes expressions que dans (3.41) (avec $q_k = h_k$) soit

$$(4.28) \quad \begin{aligned} & (\theta'(T), h_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(T)) + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 d\Sigma + \\ & + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = - \int_Q f_1 h_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

Mais si l'on pose

$$X = - \int_Q f_1 h_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt$$

on a

$$X = \int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} (h_k f_1) \theta' dx dt.$$

$$\text{Or } \theta' = w'' = \Delta w + f_1 \text{ donc}$$

$$(4.29) \quad \begin{aligned} X &= \int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (h_k f_1) \Delta w + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f_1|^2 + \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (f_1)^2 \right) dx dt = \\ &= \int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (h_k f_1) \Delta w + \frac{1}{2} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f_1|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

On utilise (4.29) dans (4.28) où l'on remplace θ' par $\Delta w + f_1$. Il vient :

$$\begin{aligned} & (\theta'(T), h_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(T)) + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} ((\Delta w)^2 + 2 f_1 \Delta w + |f_1|^2 - |\nabla \theta|^2) dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 d\Sigma + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \\ & = \int_Q \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} f_1 \Delta w + h_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \Delta w + \frac{1}{2} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |f_1|^2 \right) dx dt. \end{aligned}$$

Simplifiant cette expression, on trouve donc :

$$(4.30) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 d\Sigma = (\theta'(T), h_k \frac{\partial \theta(T)}{\partial x_k}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} ((\Delta w)^2 - |\nabla \theta|^2) dx dt + \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt - \int_{\Omega} h_k \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \Delta w dx dt.$$

De (4.24) (4.26) il résulte que le deuxième membre de (4.30) est majoré par $C \|f_1\|_{L^1(\Omega; H^1(\Omega))}^2$, d'où (4.27). ■

Remarque 1.27.

Le Théorème 1.4 reste valable lorsque Ω est un domaine borné et *convexe*. ■

5 - UN THEOREME D'UNICITE - L'INEGALITE INVERSE .

Dans ce paragraphe nous allons établir un résultat d'unicité du type du Théorème 2.1.

On a déjà vu dans le paragraphe 2 qu'un tel résultat d'unicité entraîne la contrôlabilité exacte du système (1.1)(1.2)(1.9) grâce à HUM .

L'élément de base dans la preuve de ce résultat d'unicité est l'identité (3.41).

Nous démontrons en fait – lorsque Σ_0 (ou Γ_0) est "assez gros" – une deuxième estimation (l'inégalité inverse) qui combinée avec "l'inégalité directe" du Corollaire 1.1 , nous permettra d'identifier l'espace F – ce qui rendra précis le cadre fonctionnel dans lequel la contrôlabilité exacte a lieu– . ■

On introduit d'abord quelques notations.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction

$$m(x) = x - x^0 = (x_k - x_k^0)$$

et une partition de la frontière Σ de la manière suivante

$$\Gamma(x^0) = \{ x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) = m_k(x)v_k(x) > 0 \}$$

$$\Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0) = \{ x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) \leq 0 \}$$

et

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$$

$$\Sigma^*(x^0) = \Gamma^*(x^0) \times]0, T[.$$

On introduit en outre

$$R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 \right|^{1/2}, \quad T(x^0) = 2R(x^0) .$$

Remarque 5.1.

La constante $R(x^0)$ définie ci-dessus est en fait le rayon de la plus petite boule de \mathbb{R}^n centrée en x^0 et qui contient Ω . ■

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 5.1. (L'inégalité Inverse)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Alors, pour tout $T > T(x^0)$ et toute solution faible Φ de (2.1) l'inégalité suivante est vérifiée

$$(5.1) \quad (T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma . \quad ■$$

Ce théorème implique en particulier le résultat d'unicité suivant

Corollaire 5.1. (Théorème d'unicité).

Sous les hypothèses du théorème précédent, si Φ est une solution faible de (2.1) qui vérifie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma(x^0)$$

alors $\Phi \equiv 0$. ■

Remarque 5.2.

Le Corollaire 5.1 implique, d'après les conclusions obtenues dans le paragraphe 2, la contrôlabilité exacte à l'instant $T > T(x^0)$ du système (1.1)(1.2)(1.9).

Le résultat de contrôlabilité exacte sera énoncé dans le paragraphe 6 dans le cadre fonctionnel précis correspondant. ■

Démonstration du Théorème 5.1.

On applique l'identité (3.51), cette fois-ci avec le choix $q = m$.

On a donc

$$(5.2) \quad X + \frac{n}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + \int_Q |\nabla \Phi|^2 dx dt = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

avec

$$(5.3) \quad X = (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}) |_0^T$$

On remarque que

$$(5.4) \quad \int_{\Sigma} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq \int_{\Sigma(x^0)} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq R(x^0) \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

puisque $m \cdot v \leq 0$ sur $\Sigma(x^0)$ et $|m \cdot v| \leq R(x^0)$ sur $\Sigma(x^0)$.

On en déduit donc de (5.2) et (5.4)

$$(5.5) \quad X + \frac{n}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + \int_Q |\nabla \Phi|^2 dx dt \leq -\frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

On pose

$$(5.6) \quad Y = \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt$$

et on estime Y par le

Lemme 5.1.

Pour toute solution faible Φ de l'équation (2.1) on a

$$(5.7) \quad Y = (\Phi'(t), \Phi(t))|_0^T.$$

Démonstration.

La démonstration est très simple. On peut établir l'identité (5.7) directement pour les solutions faibles.

On multiplie l'équation (2.1) par Φ et en intégrant sur Q on obtient

$$\int_Q (\Phi'' - \Delta \Phi) \Phi dx dt = - \int_Q |\Phi'|^2 + (\Phi'(t), \Phi(t))|_0^T + \int_Q |\nabla \Phi|^2 dx dt = 0$$

et par conséquent (5.7). ■

Revenons à la démonstration du Théorème 5.1.

On écrit l'inégalité (5.5) sous la forme

$$(5.8) \quad X + \frac{n-1}{2} Y + \frac{1}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt \leq -\frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

D'après la loi de conservation de l'énergie on a

$$(5.9) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt = TE_0$$

$$(5.10) \quad X + \frac{n-1}{2} Y + TE_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma .$$

Il suffit maintenant d'estimer le terme

$$Z = \left| X + \frac{n-1}{2} Y \right| = \left| \langle \Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(t) \rangle_0^T \right| .$$

Il est évident que

$$(5.11) \quad |Z| \leq 2 \left\| \left(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(t) \right) \right\|_{L^\infty(0,T)} .$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$(5.12) \quad \left| \langle \Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(t) \rangle \right| \leq \frac{R(x^0)}{2} |\Phi'(t)|^2 + \frac{1}{2R(x^0)} |m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(t)|^2$$

et d'autre part

$$(5.13) \quad \left| m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(t) \right|^2 = \left| m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{4} |\Phi(t)|^2 + (n-1) \left(m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}, \Phi(t) \right),$$

$$\forall t \in [0, T].$$

En outre

$$(5.14) \quad \left(m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}, \Phi(t) \right) = \int_{\Omega} m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} \Phi(t) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\Phi(t)|^2) dx = -\frac{n}{2} |\Phi(t)|^2$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Combinant (5.13) et (5.14) on obtient

$$(5.15) \quad |m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} |\Phi(t)|^2| = |m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}|^2 + \left[\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right] |\Phi(t)|^2 \leq$$

$$\leq |m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}|^2 \leq R^2(x^0) |\nabla \Phi(t)|^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

De (5.11), (5.12) et (5.15) on déduit

$$(5.16) \quad |Z| \leq R(x^0) \| |\Phi'(t)|^2 + |\nabla \Phi(t)|^2 \|_{L^\infty(0, T)} = T(x^0) E_0$$

et l'inégalité (5.1) est une conséquence de (5.10) et (5.16). ■

Remarque 5.3.

Un premier résultat de ce type a été établi par L.F. HO [1] pour tout $T > \hat{T}(x^0)$, avec

$$\hat{T}(x^0) = T(x^0) + \frac{n-1}{\lambda_0}$$

où λ_0^2 désigne la première valeur propre de $-\Delta$ dans Ω avec la condition de Dirichlet homogène au bord.

Le Théorème 5.1 a été démontré dans J.L. LIONS [3] en utilisant une remarque de P.L. LIONS. Le résultat a été finalement démontré sous cette forme par V. KOMORNÍK [1], qui a observé (5.15). ■

Remarque 5.4.

Le Théorème 5.1 est encore vérifié dans le cas d'un domaine borné et **convexe** Ω , puisque la démonstration est basée dans l'identité (3.51) qui reste valable dans ce cas. ■

6. QUELQUES RESULTATS DE CONTROLABILITE EXACTE DANS DES ESPACES FONCTIONNELS CLASSIQUES.

6.1. Le résultat principal.

L'objet de ce paragraphe est d'énoncer le résultat principal de contrôlabilité exacte de ce chapitre.

Théorème 6.1. – (Théorème de contrôlabilité exacte).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(6.1) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(6.2) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (1.1)(1.2)(1.9) satisfait à (1.5).

Autrement dit, on peut contrôler exactement les données initiales de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ avec des contrôles appartenant à $L^2(\Sigma(x^0))$. ■

Démonstration

C'est désormais très simple.

D'après le résultat d'unicité du Corollaire 5.1 et le théorème de contrôlabilité exacte démontré par HUM dans le paragraphe 2, on a la contrôlabilité exacte des données initiales $\{y^0, y^1\}$ telles que

$$(6.3) \quad \{y^1, -y^0\} \in F'$$

où F' est le dual de F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme

$$(6.4) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

En combinant l'inégalité directe (Corollaire 4.1) et l'inégalité inverse (Théorème 5.1) on obtient que

$$(6.5) \quad \exists C_1, C_2 > 0 : C_1 E_0 \leq \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^2 \leq C_2 E_0$$

et par conséquent

$$(6.6) \quad F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

On a donc

$$(6.7) \quad F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et la condition

$$(6.8) \quad \{y^1, y^0\} \in F'$$

équivaut à (6.1).

En outre, le vecteur contrôle v est défini par

$$(6.9) \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \text{ sur } \Sigma(x^0)$$

où Φ est une solution de (2.1) associée à des données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$ et grâce à l'inégalité directe on a (6.2). ■

Remarque 6.1.

D'après le Théorème 4.2 la solution $y = y(v)$ satisfait

$$(6.10) \quad y \in C(0, T ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T ; H^{-1}(\Omega)).$$

■

Remarque 6.2.

Le Théorème 6.1 de contrôlabilité exacte est encore valable lorsque Ω est un domaine borné et *convexe*, sans régularité du bord autre que celle impliquée par la convexité. ■

Remarque 6.3.

Pour tout $T > T(x^0)$, il existe un nombre infini de contrôles v qui ramènent la solution y à l'état d'équilibre $\{0,0\}$ à l'instant T . C'est-à-dire l'ensemble

$$(6.11) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma(x^0)) / y(T; v) = y'(T; v) = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

a un nombre infini d'éléments.

En effet choisissons $\epsilon > 0$ quelconque avec

$$(6.12) \quad T - \epsilon > T(x^0).$$

Prenons dans $t \in (0, \epsilon)$,

$$(6.13) \quad v_\epsilon = \text{fonction quelconque de } L^2(0, \epsilon ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

On résout le problème

$$(6.14) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } \Omega \times]0, \epsilon[\\ y(0) &= y^0; y'(0) = y^1 && \text{dans } \Omega \\ v_\epsilon & && \text{sur } \Gamma(x^0) \times]0, \epsilon[\\ y &= 0 && \text{sur } \Gamma^*(x^0) \times]0, \epsilon[\end{aligned}$$

avec $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, ce qui donne

$$(6.15) \quad \{y(\epsilon) = z^0; y'(\epsilon) = z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

car $y \in C(0, \epsilon ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, \epsilon ; H^{-1}(\Omega))$.

On considère alors u contrôlé donné par HUM tel que la solution $y = y(u)$ de

$$(6.16) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } \Omega \times]\varepsilon, T[\\ y(\varepsilon) &= z^0, y'(\varepsilon) = z^1 && \text{dans } \Omega \\ u &= && \text{sur } \Gamma(x^0) \times]\varepsilon, T[\\ y &= && 0 \quad \text{sur } \Gamma^*(x^0) \times]\varepsilon, T[\end{aligned}$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω . Il est clair que u existe puisque $T - \varepsilon > T(x^0)$.

Alors le contrôle

$$(6.17) \quad \begin{aligned} v_\varepsilon &\text{ dans }]0, \varepsilon[\\ v &= \\ u &\text{ dans }]\varepsilon, T[\end{aligned}$$

répond à la question, c'est-à-dire $v \in \mathcal{U}_{ad}$.

On a donc bien une infinité d'éléments dans \mathcal{U}_{ad} .

On peut aller plus loin dans l'étude de la structure de \mathcal{U}_{ad} et cela a diverses applications qui feront l'objet de publications séparées.

Dans le Chapitre VIII on démontrera que le contrôle v donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle

$$(6.18) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma$$

sur l'ensemble \mathcal{U}_{ad} . ■

6.2. Quelques remarques sur les changements de norme.

Soit G un espace de Hilbert quelconque de fonctions définies sur $\Sigma(x^0)$.

D'après le Corollaire 5.1

$$(6.19) \quad \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{F_G} := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_G$$

définit une norme sur $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

On définit alors F_G comme le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour cette norme.

Pour simplifier l'écriture posons

$$(6.20) \quad F_G = F.$$

Alors, au moins formellement, on considère le système d'équations (2.1) et en outre le système "rétrograde"

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 && \text{dans } \Omega \\ I_G \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

où I_G désigne l'isomorphisme canonique de G sur G' .

On définit ensuite l'opérateur

$$(6.22) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

et on vérifie que Λ satisfait

$$(6.23) \quad \langle \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_G^2.$$

Donc \wedge est un isomorphisme de F sur F' .

On démontre de cette manière que

$$(6.24) \quad \forall \{y^1, -y^0\} \in F' , \exists v \in G' \text{ tel que } y = y(v) \text{ satisfait (1.5).}$$

On a présenté ceci d'une manière formelle, mais tout peut être justifié en précisant, par la méthode de transposition, le sens dans lequel les solutions du problème (6.21) sont définies. ■

Le résultat ainsi démontré reste "abstrait" dans la mesure où l'espace F (resp. F') n'est pas défini en termes classiques. ■

On a vu dans le paragraphe précédent que si l'on prend

$$T > T(x^0), \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[\text{ et } G = L^2(\Sigma(x^0))$$

on a

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad ■$$

Avant d'étudier d'autres exemples donnons deux remarques utiles et générales.

Remarque 6.4.

Si l'on considère

$$G_1 \subset G_2$$

alors

$$F_{G_1} \subset F_{G_2}$$

et par conséquent

$$[F_{G_2}]' \subset [F_{G_1}]'. \quad ■$$

Remarque 6.5.

Soit L un opérateur linéaire opérant sur les fonctions définies sur $\Sigma(x^0)$ (on précise cela dans les exemples!). Alors, si l'on a un résultat d'unicité du type :

$$(6.25) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad L \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} &= 0 \text{ sur } \Sigma(x^0) \\ &\text{entraîne } \Phi \equiv 0 && \text{dans } Q \end{aligned}$$

on définit la norme

$$(6.26) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \|L \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\|_6$$

et on a la contrôlabilité exacte dans F' dual de F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$. ■

Remarque 6.6.

On peut aussi construire l'espace F par complétion d'espace de fonctions régulières autres que $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Donnons un exemple de cette situation.

Exemple 6.1.

Prenons $L = \frac{\partial}{\partial t}$, c'est-à-dire

$$(6.27) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial\Phi^1}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

On a dans ce cas le

Théorème 6.2. - (Théorème de contrôlabilité exacte)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $T > T(x^0)$.

Alors pour tout couple de données initiales

$$(6.28) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times (H^2 \cap H_0^1(\Omega))'$$

il existe un contrôle

$$(6.29) \quad v \in [H^1(0,T; L^2(\Gamma(x^0)))']'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (1.1)(1.2)(1.9) satisfasse (1.5). ■

Idée de la démonstration.

Soit

$$(6.30) \quad \Phi \in C(0,T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0,T; L^2(\Omega))$$

une solution forte de l'équation (2.1).

On vérifie aisément que $\zeta(x,t) = \Phi'(x,t)$ est une solution faible du problème

$$(6.31) \quad \begin{aligned} \zeta'' - \Delta \zeta &= 0 && \text{dans } Q \\ \zeta(0) &= \Phi^1; \zeta'(0) = \Delta \Phi^0 && \text{dans } \Omega \\ \zeta &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \zeta &\in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Grâce à "l'inégalité directe" et à "l'inégalité inverse" on voit que la norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (6.27) est équivalente à la norme

$$(6.32) \quad \{ |\Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \}^{1/2}.$$

Soit F le complété de (*) $[C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)] \times [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$. On a alors

$$(6.33) \quad F = [H^2 \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$$

(*) $C^\infty(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ dans $\bar{\Omega}$.

et donc

$$(6.34) \quad F' = [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]' \times H^{-1}(\Omega).$$

Dans ce cas on définit le problème "rétrograde"

$$(6.35) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 && \text{dans } \Omega \\ -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right) && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

La solution $\psi = \psi(x,t)$ de ce problème est définie par la méthode de transposition, c'est-à-dire, ψ vérifie

$$(6.36) \quad \int_Q \psi f \, dx \, dt = - \langle \psi(0), \theta^1 \rangle + \langle \psi'(0), \theta^0 \rangle - \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \frac{\partial \theta^*}{\partial v} \, d\Sigma,$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in [H^2 \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times L^1(0,T ; H_0^1(\Omega))$$

où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution de

$$(6.37) \quad \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \theta(0) &= \theta^0; \theta'(0) = \theta^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Le 1^{er} (resp. 2^e) crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ (resp. entre $[H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'$ et $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$).

Par une méthode analogue à celle du Théorème 4.2, on peut démontrer que

$$(6.38) \quad \begin{aligned} \psi &\in L^\infty(0,T ; H^{-1}(\Omega)); \psi' \in L^2(0,T ; [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]') \\ \{\psi(0), \psi'(0)\} &\in H^{-1}(\Omega) \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'. \end{aligned}$$

L'opérateur \wedge défini par

$$(6.39) \quad \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

vérifie

$$(6.40) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

et il s'agit donc d'un *isomorphisme* de F sur F' .

Le théorème est maintenant une conséquence de la théorie générale. On a la contrôlabilité exacte des données $\{y^1, -y^0\} \in F'$ avec des contrôles v définis par les équations

$$\wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

$$(6.41) \quad w = \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \text{ sur } \Sigma(x^0)$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial t} w \text{ sur } \Sigma(x^0).$$

On observe que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} w$ dans $(6.41)_3$ est prise au sens de la dualité entre les espaces $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ et $(H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))))'$ de sorte que

$$(6.42) \quad \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi d\Sigma = - \int_{\Sigma(x^0)} w \varphi' d\Sigma, \forall \varphi \in H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Par conséquent l'on a

$$(6.43) \quad v \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]'. \quad \blacksquare$$

Remarque 6.7.

L'espace hilbertien $(H^2 \cap H_0^1(\Omega))'$ n'est pas un espace de distributions (car $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$).

Le contrôle v est défini par dualité, c'est-à-dire,

$$(6.44) \quad \langle -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right), \varphi \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \varphi' d\Sigma, \forall \varphi \in H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Ce point est essentiel. Il n'y a pas dans l'intégration par parties, d'intégrales à prendre sur $\Gamma(x^0)$ pour $t = 0$ ou $t = T$, parce que les dérivées en t sont prises au sens (6.44).

La solution $y = y(v)$ du système est définie par la méthode de transposition. Elle vérifie l'équation dans le sens faible suivant

$$(6.45) \quad \int_0^T y f dx dt = - \langle y^0, \theta'(0) \rangle_1 + \langle y^1, \theta(0) \rangle_2 - \int_{\Sigma(x^0)} w \frac{\partial \theta'}{\partial v} d\Sigma$$

$$\forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

avec

$$\theta'' - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(6.46) \quad \theta(T) = \theta'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$) désigne le produit de dualité entre les espaces $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ (resp. $(H^2 \cap H_0^1(\Omega))'$ et $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$).

Grâce à (6.38) on a

$$y \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)) \cap H^1(0,T; (H^2 \cap H_0^1(\Omega))'). \quad \blacksquare$$

Remarque 6.8.

On n'a pas donné ici une démonstration détaillée de (6.38). Dans les Chapitres III et IV on retrouvera des situations analogues avec démonstrations complètes. \blacksquare

On peut, assez naturellement, considérer les normes

$$(6.47) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(0,T; H^1(\Gamma(x^0)))}$$

et

$$(6.48) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{H^1(\Sigma(x^0))}.$$

Le problème de l'identification de l'espace F semble être dans ce cas un problème encore ouvert. Néanmoins on peut les caractériser dans certains cas particuliers. On donne ici un exemple (qui par ailleurs donne une idée de la structure probable, dans le cas général, des espaces F définis ci-dessus).

Exemple 6.2.

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 < 1\} = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

On note par (r, φ) les coordonnées polaires dans le plan \mathbb{R}^2 .

Dans ce cas, on a

$$(6.49) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} |_{\Sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} |_{\Sigma}.$$

Nous avons déjà démontré que si $T > T(x^0)$ alors

$$(a) \quad \text{Pour } \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \text{ on a } F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$(b) \quad \text{Pour } \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \text{ on a } F = (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Nous allons démontrer que

$$(c) \quad \text{Pour } \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{L^2(0,T; H^1(\Gamma(x^0)))} = \left(\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \right)^{1/2}$$

on a

$$(6.50) \quad F = \{\Phi^0 \in H_0^1(\Omega) : \frac{\partial \nabla \Phi^0}{\partial \varphi} \in (L^2(\Omega))^n\} \times \{\Phi^1 \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \Phi^1}{\partial \varphi} \in L^2(\Omega)\}$$

$$(d) \quad \text{Pour } \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left(\left\| \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r \partial \varphi} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \right)^{1/2} \quad \text{on a}$$

$$(6.51) \quad F = \{\Phi^0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) : \frac{\partial \Delta \Phi^0}{\partial \varphi} \in L^2(\Omega)\} \times \{\Phi^1 \in H_0^1(\Omega) : \frac{\partial \nabla \Phi^1}{\partial \varphi} \in [L^2(\Omega)]^n\}.$$

La démonstration est dans ce cas très simple. Il suffit de remarquer que si Φ est une solution de (2.1) alors $\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ est solution de

$$\zeta'' - \Delta \zeta = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(6.52) \quad \zeta(0) = \frac{\partial \Phi^0}{\partial \varphi} ; \zeta'(0) = \frac{\partial \Phi^1}{\partial \varphi} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\zeta = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et que par conséquent, d'après les inégalités directe et inverse,

$$(6.53) \quad \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \sim \left| \frac{\partial \nabla \Phi^0}{\partial \varphi} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi^1}{\partial \varphi} \right|^2 . \quad \blacksquare$$

On obtient ainsi (6.50). L'identité (6.51) peut être démontrée d'une manière analogue à partir des équivalences de normes établies dans l'Exemple 6.1. ■

Normes plus faibles

Dans les exemples précédents, nous avons pris des normes $\|\cdot\|_F$ de plus en plus *fortes*, donc des espaces F de plus en plus petits, donc leurs duals F' de plus en plus grands.

On cherche maintenant des normes plus faibles.

On commence par une remarque générale : on a défini F à partir d'un espace G de fonctions définies sur $\Sigma(x^0)$. *On peut "inverser" et définir l'espace G à partir de F .*

Faisons le choix

$$(6.54) \quad F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) .$$

Alors bien sûr

$$(6.55) \quad F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) .$$

Pour $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$, la solution Φ vérifie

$$(6.56) \quad \begin{aligned} \Phi &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \\ \Phi' &\in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

donc

$$(6.57) \quad \Delta\Phi = \Phi'' \in W^{-1,\infty}(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Comme Δ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ et comme Φ est (dans un sens faible) nulle au bord, il en résulte que

$$(6.58) \quad \Phi \in W^{-1,\infty}(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Alors $\Delta\Phi = \Phi'' \in W^{-3,\infty}(0,T; H_0^1(\Omega))$ et -pourvu que Γ soit assez régulière, par exemple de classe C^2 - il en résulte que $\Phi \in W^{-3,\infty}(0,T; H^2 \cap H_0^1(\Omega))$.

Alors

$$(6.59) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} |_{\Sigma} \in W^{-3,\infty}(0,T; H^{1/2}(\Gamma(x^0))).$$

On définit alors

$$(6.60) \quad G = \text{espace parcouru par } \frac{\partial \Phi}{\partial v} |_{\Sigma} \text{ lorsque } \{\Phi^0, \Phi^1\} \text{ parcourt } F.$$

Comme l'application

$$(6.61) \quad (\Phi^0, \Phi^1) \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial v} |_{\Sigma}$$

est biunivoque (grâce à un résultat d'unicité), on munit G de la structure hilbertienne naturelle :

$$(6.62) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} |_{\Sigma(x^0)} \right\|_G = \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F.$$

On a alors (on a fait ce qu'il fallait pour cela)

Théorème 6.3.

On suppose la frontière Γ de classe C^2 et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$. Soient

$\{y^0, y^1\}$ donnés quelconques dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors il existe v dans G' telle que $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Naturellement ce résultat "abstrait" n'a d'intérêt que si l'on peut préciser la nature de G' !

Pour cela on introduit x solution de

$$(6.63) \quad \Delta x = \Phi^1, \quad x \in H_0^1(\Omega)$$

et w défini par

$$(6.64) \quad w(t) = \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma + x.$$

Alors

$$w'' - \Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(6.65) \quad w(0) = x; \quad w'(0) = \Phi^0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Lorsque $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ parcourt $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, alors $\{x, \Phi^0\}$ parcourt $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et donc

$$(6.66) \quad \frac{\partial w}{\partial v} |_{\Sigma(x^0)} \text{ parcourt } L^2(\Sigma(x^0)).$$

Donc

$$(6.67) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)$$

parcourt $\frac{d}{dt} L^2(\Sigma(x^0)) = H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$.

L'application

$$(6.68) \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

est donc linéaire continue et *surjective* de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ dans $H^{-1}(0,T ; L^2(\Gamma(x^0)))$. Elle est en outre *biunivoque* (théorème d'unicité). C'est donc un isomorphisme et l'on a

$$(6.69) \quad G = H^{-1}(0,T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Par conséquent

$$(6.70) \quad G' = H_0^1(0,T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

On a donc le

Théorème 6.4.

On se place dans le cadre du Théorème 6.3. Alors pour $\{y^0, y^1\}$ donnés quelconques dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe v tel que

$$(6.71) \quad v, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Sigma(x^0)), \quad v = 0 \text{ si } t = 0 \text{ et si } t = T,$$

et

$$(6.72) \quad y(T) = y'(T) = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 6.8.

Les résultats précédents sont aussi vérifiés lorsque Ω est un domaine borné et convexe de \mathbb{R}^n , sans autre hypothèse de régularité sur le bord Γ . \blacksquare

On peut également introduire des *espaces de Banach non hilbertiens*.

En effet, si on définit

$$(6.73) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^p(\Sigma(x^0))} = \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^p d\Sigma \right\}^{1/p}, \quad 1 < p < +\infty,$$

et on construit l'espace de Banach F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_F$, on a la contrôlabilité exacte dans l'espace dual F' .

Dans le cas $p = 2$, on retrouve les résultats précédents.

Pour démontrer ce résultat on considère le problème "rétrograde"

$$(6.74) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \psi &= \begin{cases} |\frac{\partial \Phi}{\partial v}|^{p-2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases} \end{aligned}$$

et on définit

$$\wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

On note que

$$(6.75) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^p.$$

On démontre par ailleurs que \wedge est un opérateur monotone de F sur F' .

En effet, on a

$$(6.76) \quad \begin{aligned} \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} - \wedge \{\hat{\Phi}^0, \hat{\Phi}^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} - \{\hat{\Phi}^0, \hat{\Phi}^1\} \rangle &= \\ &= \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^{p-2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial v} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial v} \right) d\Sigma \geq 0. \end{aligned}$$

L'opérateur $\wedge : F \rightarrow F'$ est donc inversible et on a le

Théorème 6.5. - (Théorème de contrôlabilité exacte).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ suffisamment régulière. Soit $1 < p < +\infty$ et $T > T(x^0)$.

Alors pour tout $\{y^0, y^1\}$ tel que

$$\{y^1, -y^0\} \in F'$$

l'espace F étant défini comme le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme (6.73), il existe $v \in L^p(\Sigma(x^0))$ qui ramène le système à l'état d'équilibre à l'instant T . ■

Remarque 6.9.

Lorsque $1 < p \leq 2$ la régularité C^2 de la frontière Γ suffit puisque

$$(6.77) \quad \Phi \in L^2(\Sigma(x^0)) \Rightarrow \Phi \in L^p(\Sigma(x^0)).$$

Dans ce cas on a

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F$$

et par conséquent

$$(6.78) \quad F' \subset H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad ■$$

Remarque 6.10.

Lorsque $p > 2$ on est obligé de supposer "un peu plus de régularité sur Γ " pour que la norme $\|\cdot\|_F$ soit bien définie. En effet, on sait que si Φ est une solution faible de (2.1) alors $\Phi \in L^2(\Sigma(x^0))$ mais on ne peut pas démontrer que $\Phi \in L^p(\Sigma(x^0))$. Par contre si Γ est suffisamment régulière (C^∞ par exemple) on voit que $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ pour tout $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ et en

particulier $\frac{\partial \Phi}{\partial v} \in L^p(\Sigma(x^0))$, ce qui permet de construire l'espace F .

On a évidemment dans le cas $p > 2$,

$$(6.79) \quad \exists C > 0 : \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \leq C \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^p(\Sigma(x^0))}$$

et par conséquent

$$(6.80) \quad \begin{aligned} F &\subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) &\subset F'. \quad ■ \end{aligned}$$

Remarque 1.11.

Lorsque $n = 1$ on a $F = W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Dans le cas $n \geq 2$, peut-on donner des informations sur F autres que (6.78) et (6.80) ? ■

On peut aussi introduire des *normes avec des poids*.

Considérons par exemple $q \in L^\infty(\Sigma(x^0))$ avec $0 < q_0 \leq q(x,t) \leq q_1$ dans $\Sigma(x^0)$ et la norme

$$(6.81) \quad \| \{\Phi^0, \Phi^1\} \|_F = \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} q \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}.$$

On a évidemment pour $T > T(x^0)$

$$(6.82) \quad F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Cette fois-ci le contrôle est de la forme

$$(6.83) \quad v_q = \begin{cases} q \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases}$$

où $\Phi = \Phi(x,t)$ est la solution de (2.1) qui correspond à des données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ telles que

$$(6.84) \quad \Lambda_q \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}.$$

Dans ce cas l'isomorphisme Λ_q est défini par le problème rétrograde

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(6.85) \quad \begin{aligned} \psi &= \begin{cases} q \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{cases} \end{aligned}$$

La manière dont v_q dépend du poids q est un problème qui semble être encore ouvert. ■

7. QUELQUES COMMENTAIRES ET RESULTATS SUPPLEMENTAIRES.

7.1. Interprétation géométrique de l'ensemble $\Gamma(x^0)$.

Dans les résultats de contrôlabilité exacte qui précèdent l'action du contrôle v a été exercée sur des parties de frontière de la forme

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[.$$

Nous avons démontré que pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$ la contrôlabilité exacte du système a lieu avec une action sur $\Sigma(x^0)$.

Néanmoins, il est important de signaler qu'un ensemble de la forme $\Gamma(x^0)$ est toujours un sous-ensemble "assez gros" de Γ . ■

Considérons par exemple le cas $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Il est évident que :

(a) Si $x^0 \in \Omega$, $\Gamma(x^0) = \Gamma$;

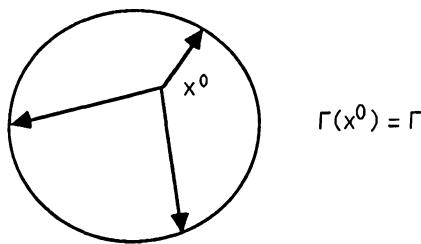
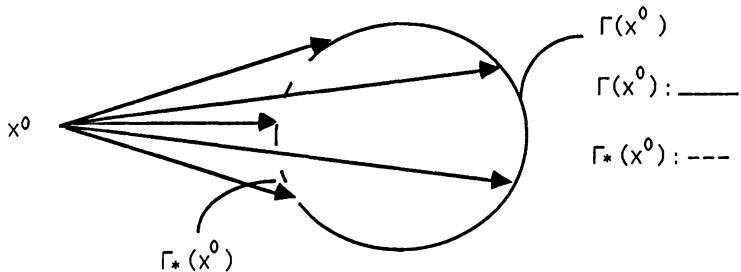
(b) La mesure de $\Gamma(x^0)$ est inversement proportionnelle au module de x^0 si $x^0 \notin \Omega$. On a en particulier

$\Gamma(\alpha x^0) \rightarrow$ demi-circonférence, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

et

$R(x^0) \rightarrow +\infty$, lorsque $\Gamma(x^0) \rightarrow$ demi-circonférence.

Dans la Fig. 3₁ et Fig. 3₂ on illustre les situations $x^0 \in \Omega$ et $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ respectivement.

Figure 3₁Figure 3₂

Dans ce cas donc on aboutit aux résultats suivants :

(c) Pour tout $T > 2$ on a la contrôlabilité exacte avec action sur Γ tout entier.

On prend en effet $x^0 = 0$; alors $\Gamma(x^0) = \Gamma$ et $T(x^0) = 2$. On a en fait

$$R(0) = \min_{x^0 \in \mathbb{R}^n} R(x^0).$$

(d) On peut contrôler le système en partant de $y^0 \in L^2(\Omega)$, $y^1 \in H^{-1}(\Omega)$ avec action sur des parties $\Gamma(x^0)$ arbitrairement proches d'une demi-circonférence, mais en des temps T "très grands".

Le point essentiel de ces résultats est que l'espace F' des données initiales contrôlables

ne dépend pas de x^0 ni de $T > T(x^0)$.

Dans le paragraphe 8 on démontrera que la contrôlabilité exacte du système a lieu dès que $T \geq 4$ et pour tout ouvert non vide Γ_0 de Γ , mais avec des données initiales prises dans un espace plus petit, et d'ailleurs difficile à identifier.

Dans l'Appendice II, C. BARDOS, G. LEBEAU, et J. RAUCH caractérisent les ensembles $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$ pour lesquels le système est exactement contrôlable dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Ils démontrent en particulier que :

- Si Γ_0 est connexe alors Γ_0 contient une demi-circonférence et donc un ensemble de la forme $\Gamma(x^0)$.

- Le système n'est pas contrôlable dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ si $T < 2$.

- Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0$ et $\Gamma(x^0) \subset \Gamma$ la contrôlabilité exacte a lieu dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. ■

Considérons maintenant le cas d'un carré $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$. On peut vérifier aisément que :

- Si $x^0 \in \Omega$, $\Gamma(x^0) = \Gamma$ et $T(x^0) \geq \sqrt{2}$.

$$- R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \min_{x^0 \in \mathbb{R}^2} R(x^0)$$

- Si $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, $\Gamma(x^0)$ est l'union de deux côtés qui s'intersectent en un sommet.

Ces situations sont illustrées dans les figures suivantes.

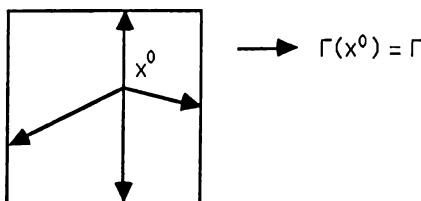


Figure 4_1

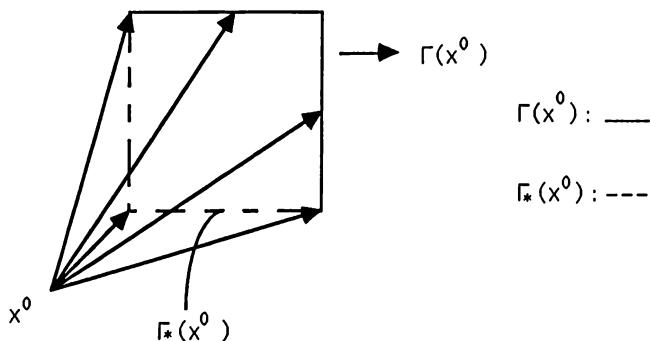


Figure 4_2

Dans ce cas donc :

– Si l'on agit sur Γ tout entier il suffit de $T > \sqrt{2}$ pour contrôler le système dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

– Si l'on agit sur deux côtés qui s'intersectent on a la contrôlabilité exacte dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ si $T > 2\sqrt{2}$.

Les résultats du paragraphe 8 ci-après s'appliquent et montrent que pour $T \geq 2\sqrt{2}$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$ "quelconque" la contrôlabilité exacte a lieu dans un espace F' "non identifié".

Les résultats de l'Appendice II ne s'appliquent pas dans ce cas à cause de la non régularité du domaine Ω . ■

En général on peut dire que si Ω est convexe alors on a la contrôlabilité exacte dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ avec action sur Γ tout entier et $T > \text{diamètre de } \Omega$. ■

7.2. Action sur des parties de frontière non cylindriques.

On a démontré des résultats de contrôlabilité exacte avec action sur des parties de Σ cylindriques de la forme $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$.

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment la méthode des multiplicateurs peut s'appliquer pour obtenir des résultats de contrôlabilité exacte avec action sur des parties de frontière non cylindriques.

On établit d'abord le

Lemme 7.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $q \in [C^1(\bar{\Omega} \times [0, T])]^n$. Alors, pour toute solution faible Φ de (2.1) on a

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma &= (\Phi'(t), q_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k})|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} dx dt - \int_{\Omega} \Phi' q'_k \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

Démonstration.

C'est l'analogue exact de la démonstration du Lemme 3.7. Il suffit de tenir compte de l'apparition d'un terme supplémentaire :

$$\begin{aligned}
 \int_Q \Phi'' q_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx dt &= - \int_Q \Phi' (q_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k})' dx dt + (\Phi'(t), q_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k})|_0^T \\
 &= - \int_Q \Phi' (q_k \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k} + q'_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}) dx dt + (\Phi'(t), q_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k}) \\
 &= - \int_Q \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Phi'|^2 + \Phi' q'_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) dx dt + (\Phi'(t), q_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k})|_0^T. \blacksquare
 \end{aligned}$$

On considère maintenant un champ de vecteurs de la forme $m(x,t) = x - x^0(t)$, où $x_j^0(t) \in C^1(0,T)$.

On applique l'identité (6.19) avec $q = m$ et on obtient comme au Théorème 5.1 :

$$(7.2) \quad (T - T_0) E_0 \leq \left| \int_Q \Phi' m'_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx dt \right| + C \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

avec $C > 0$,

$$(7.3) \quad \Sigma_0 = \{(x,t) \in \Sigma = \Gamma \times]0,T[: m(x,t) \cdot v(x) > 0\}$$

et

$$(7.4) \quad T_0 = 2 \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |m(x,t)| = 2 \max_{(x,t) \in Q} \left| \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^0(t)|^2 \right|^{1/2}.$$

On majore ensuite le terme

$$(7.5) \quad \left| \int_Q \Phi' m'_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx dt \right| \leq T \|m'\|_{L^\infty(Q)} E_0$$

et on obtient

$$(7.6) \quad (T (1 - \|m'\|_{L^\infty(Q)}) - T_0) E_0 \leq C \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

De l'inégalité directe et (7.6) on déduit grâce à HUM le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 7.1.

Soit Ω un domaine borné de frontière Γ de classe C^2 et $x^0(t) \in [C^1(\mathbb{R})]^n$ avec $T_1 = \sup | \frac{dx^0}{dt}(t) | < 1$. Alors, pour tout

$$(7.7) \quad T > \frac{T_0}{1-T_1}$$

le système (1.1)(1.2)(1.9) est exactement contrôlable dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ avec des contrôles $v \in L^2(\Sigma_0)$. ■

Remarque 7.1.

Lorsque $x^0(t) = x^0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on a $T_1 = 0$ et $T_0 = T(x^0)$. On retrouve donc le résultat du Théorème 6.1. ■

Remarque 7.2.

A partir de ce résultat de base on peut obtenir les autres variantes comme dans le paragraphe 6.2. ■

7.3. Contrôlabilité exacte dans des ouverts non-réguliers.

Nous avons déjà noté que le point essentiel dans l'obtention des résultats de contrôlabilité exacte est l'identité (3.41).

L'identité (3.41) est d'abord établie pour les solutions régulières

$$\theta \in C(0,T ; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T ; L^2(\Omega))$$

du problème

$$\theta'' - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$\theta(0) = \theta^0 ; \theta'(0) = \theta^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et ensuite pour les solutions faibles $\theta \in C(0,T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T ; L^2(\Omega))$ par passage à la limite.

Nous avons déjà noté que l'existence de solutions fortes θ dans la classe

$$C(0,T ; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T ; L^2(\Omega))$$

est une conséquence de la propriété suivante

$$\begin{aligned} -\Delta u &\in L^2(\Omega) \\ &\Rightarrow u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega). \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Ce résultat de régularité a lieu lorsque Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière de classe C^2 ou bien est convexe.

P.GRISVARD a démontré dans [2] et [3] que les résultats de contrôlabilité exacte précédents restent valables lorsque Ω est un polyèdre de \mathbb{R}^n , $n \leq 3$.

La base de sa démonstration est l'obtention de la relation d'identité (3.41) à partir du résultat suivant de régularité maximal pour le problème de Dirichlet.

Lemme 7.2.

Soit Ω un polygone borné de \mathbb{R}^2 ou un polyèdre borné de \mathbb{R}^3 . Alors il existe $s \in]\frac{3}{2}, 2]$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &\in L^2(\Omega) \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \Rightarrow u \in H^s \cap H_0^1(\Omega).$$

■

Ce Lemme 7.2 nous permet de démontrer que les solutions fortes

$$\theta \in C^1(0,T ; H_0^1(\Omega)) ; \Delta \theta \in C(0,T ; L^2(\Omega))$$

de l'équation des ondes vérifient

$$\theta \in C(0,T ; H^s(\Omega)) ; s > \frac{3}{2}$$

et ensuite d'établir l'identité (3.41).

On a par conséquent le

Théorème 7.2. (P. GRISVARD [2] , [3])

Soit Ω un polygone borné de \mathbb{R}^2 ou un polyèdre borné de \mathbb{R}^3 .
Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors pour tout couple de données initiales

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

qui ramène la solution à l'état d'équilibre $\{0,0\}$ à l'instant T . ■

8. LE THEOREME DE HOLMGREN ET SES CONSEQUENCES.

Dans le paragraphe 6, nous avons obtenu des résultats de contrôlabilité exacte avec une action sur une partie de la frontière de la forme $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$.

Nous avons déjà noté que les ensembles $\Gamma(x^0)$ sont en général "assez gros".

L'objet de ce paragraphe est de donner des résultats d'unicité –et a fortiori de contrôlabilité exacte– lorsque l'ensemble $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est une partie ouverte *arbitrairement petite de* Γ . ■

On commence par un théorème dû à L. HÖRMANDER [1] (Th. 5.3.3) qui est valable dans un cadre très général d'équations aux dérivées partielles pour des opérateurs à coefficients constants. Il s'agit en fait d'un corollaire du Théorème d'unicité de Holmgren classique.

Théorème 8.1. (L. HÖRMANDER [1]).

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts convexes de \mathbb{R}^k tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan Π caractéristique par rapport à $P(D)$ et vérifiant $\Pi \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ satisfait aussi $\Pi \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Alors toute solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ de l'équation $P(D)u = 0$ telle que $u = 0$ dans Ω_1 vérifie $u = 0$ dans Ω_2 . ■

Remarque 8.1.

Les conditions

$$u = 0 \text{ dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

doivent être interprétées au sens des distributions, i.e.

$$\langle u, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i), \quad i = 1, 2. \quad ■$$

Pour nous placer dans le cadre de ce théorème, on pose :

$$(8.1) \quad k = n + 1$$

$$(8.2) \quad P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

On considère ensuite un plan $\Pi \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ d'équation

$$(8.3) \quad \Pi = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / \sum_{i=1}^n a_i x_i + bt = c\}$$

où $(a_i)_{i=1}^n$, b et c désignent des constantes réelles quelconques.

Le polynôme caractéristique $P(a_1, \dots, a_n, b)$ associé à l'opérateur $P(D)$ est défini par

$$(8.4) \quad P(a_1, \dots, a_n, b) = b^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

et par conséquent

$$(8.5) \quad \Pi \text{ est caractéristique par rapport à } P(D) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = b^2. \quad \blacksquare$$

On se donne maintenant $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ quelconques et par ailleurs des constantes $\delta, \tau > 0$, $\tau > 2|z_1 - z_2|$. On construit les *convexes*

$$(8.6) \quad \Omega_1 = B(z_1, \delta) \times]0, \tau[$$

et

$$(8.7) \quad \Omega_2 = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2, \delta) \times [\lambda|z_1 - z_2|, \tau - \lambda|z_1 - z_2|].$$

Il est clair (voir Fig. 5₁, 5₂ et 5₃ ci-dessous) d'après la structure des plans caractéristiques π que les hypothèses du Théorème 8.1 sont vérifiées.

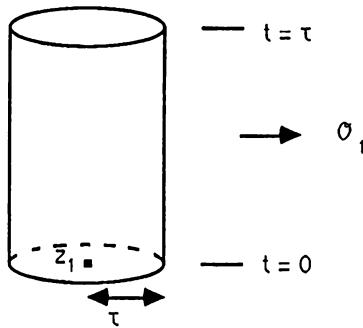
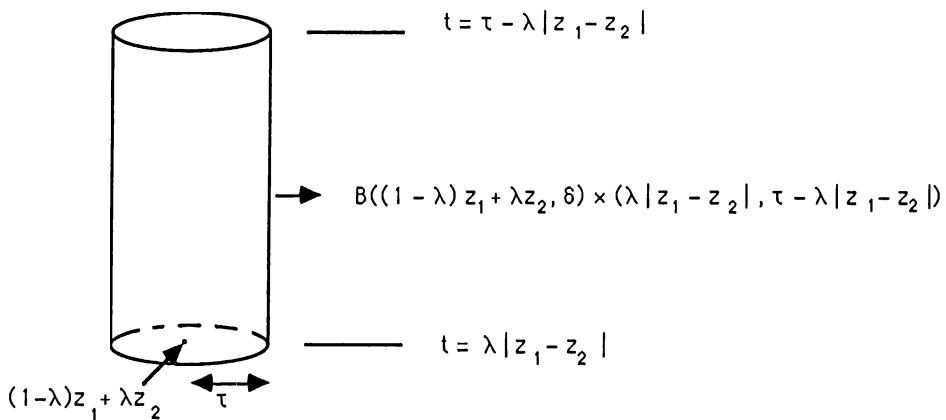
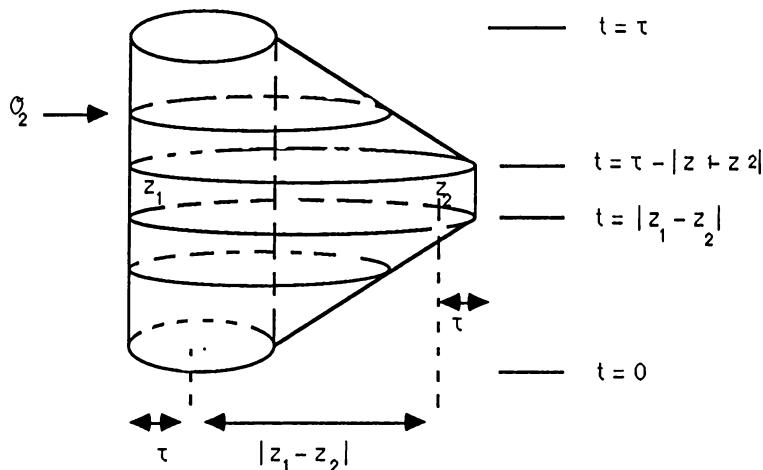


Figure 5₁

Figure 5₂Figure 5₃

On a donc, d'après le Théorème 8.1 , le critère d'unicité suivant.

Lemme 8.1.

Soient Ω_1 et Ω_2 donnés comme en (8.6)(8.7). Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ une solution de

$$(8.8) \quad \begin{aligned} u'' - \Delta u &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_2) \\ u &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(8.9) \quad u = 0 \quad \text{dans } \Omega_2. \quad \blacksquare$$

Nous allons démontrer maintenant un théorème d'unicité du type du Théorème 2.1.

Pour simplifier l'exposé on considère un ouvert borné *convexe* Ω de \mathbb{R}^n (cf. Remarque 8.4 ci-dessous pour le cas *général*)

On considère un point $z \in \Gamma$ et $\eta > 0$ et on définit (cf. Fig. 6)

$$(8.10) \quad \Gamma_0 = \Gamma \cap B(z, \eta).$$

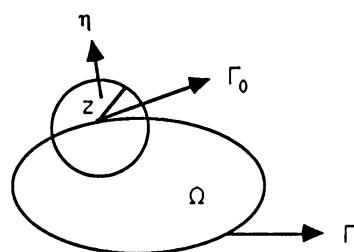


Figure 6

On introduit ensuite la constante

$$(8.11) \quad d(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} d(x, \Gamma_0) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \inf_{y \in \Gamma_0} |x-y|$$

c'est-à-dire, la plus grande distance entre un point $x \in \Omega$ et la partie de frontière Γ_0 .

On a le théorème d'unicité suivant

Théorème 8.2.

Soit $T > 2d(\Omega, \Gamma_0)$. Alors toute solution faible Φ du problème

$$(8.12) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ \Phi &= 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\end{aligned}$$

telle que

$$(8.13) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$$

vérifie $\Phi \equiv 0$. ■

Remarque 8.2.

Lorsque Ω est un ouvert à frontière lipschitzienne, la trace $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}|_{\Sigma}$ de cette solution faible $\Phi \in C(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T ; L^2(\Omega))$ est définie dans l'espace $W^{-1, \infty}(0, T ; H^{-1/2}(\Gamma))$. Ceci donne un sens à (8.16).

On sait par ailleurs que lorsque Ω a une frontière de classe C^2 (ou Ω convexe) $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$. Dans ce cas donc, (8.16) doit être interprété au sens $L^2(\Sigma_0)$. ■

Démonstration du Théorème 8.2.

On définit un prolongement $\hat{\Phi}$ de la solution faible Φ , de la manière suivante

$$\Phi \text{ dans } Q$$

$$(8.14) \quad \hat{\Phi} = \begin{cases} \Phi & \text{dans } Q \\ 0 & \text{dans } \hat{Q} \setminus Q \end{cases}$$

avec $\hat{Q} = \hat{\Omega} \times]0, T[$ et $\hat{\Omega} = \Omega \cup B(z, \eta)$.

La fonction $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(x, t)$ vérifie

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &\in C(0, T ; H_0^1(\bar{\Omega})) \cap C^1(0, T ; L^2(\bar{\Omega})) \\ (8.15) \quad \hat{\Phi}'' - \Delta \hat{\Phi} &= 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \\ \hat{\Phi} &= 0 \text{ sur } \hat{\Sigma} = \hat{\Gamma} \times]0, T[\end{aligned}$$

avec $\hat{\Gamma} = \partial \bar{\Omega}$.

D'autre part, par construction de $\hat{\Phi}$

$$(8.16) \quad \hat{\Phi} = 0 \text{ dans } \hat{\Omega} \setminus \bar{\Omega} = (\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}) \times]0, T[.$$

On remarque que pour tout point $x \in \Omega$ il existe $z_1 \in \hat{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$ et $\delta > 0$ tels que

$$(8.17) \quad T > 2|z_1 - x|$$

$$(8.18) \quad \bigcup_{\lambda \in]0, 1[} B((1-\lambda)z_1 + \lambda x, \delta) \subset \hat{\Omega}, \quad B(z_1, \delta) \subset \hat{\Omega} \setminus \bar{\Omega}.$$

On construit les ensembles \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 comme dans (8.6)(8.7) avec $z_2 = x$ et $\tau = T$.

De (8.16) et (8.18) on déduit

$$\hat{\Phi} = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_1 = B(z_1, \delta) \times]0, T[.$$

Grâce au Lemme 8.1 on a donc

$$\hat{\Phi} = 0 \text{ dans } B(x, \delta) \times [z_1 - x|, T - |z_1 - x|[$$

mais comme $T > 2|z_1 - x|$ et $x \in \Omega$ est quelconque on a en fait

$$\Phi\left(\frac{T}{2}\right) = \Phi'\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \text{ dans } \Omega$$

ce qui avec (8.12) implique $\Phi = 0$ dans $\bar{\Omega}$. ■

Remarque 8.3.

On a

$$d(\Omega, \Gamma_0) < \text{diamètre de } \Omega, \forall \Gamma_0 \subset \Gamma$$

et donc en particulier, un résultat d'unicité pour $\Gamma_0 \subset \Gamma$ quelconque avec $T \geq 2$ diamètre de Ω . ■

Remarque 8.4.

Lorsque Ω n'est pas convexe on peut démontrer un résultat analogue. Il suffit de définir

$$d_c(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d_c(x, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{y \in \Gamma_0} d_c(x, y)$$

avec

$$d_c(x, y) = \text{la plus petite longueur des courbes } \gamma \in C([0,1] ; \bar{\Omega}) / \gamma(0) = x, \gamma(1) = y.$$

On a ainsi un résultat d'unicité pour $T > 2 d_c(\Omega, \Gamma_0)$, Γ_0 étant une partie ouverte non vide quelconque de Γ . Lorsque Ω est à frontière lipschitzienne il existe $T_0(\Omega) > 0$ tel que $T_0(\Omega) > 2 d_c(\Omega, \Gamma_0) \quad \forall \Gamma_0 \subset \Gamma$. On a donc un temps d'unicité $T_0(\Omega)$ uniforme par rapport à Γ_0 . ■

Nous avons donc démontré que si Ω est de classe C^2 ,

$$(8.19) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma_0)}$$

est une norme dans $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ avec

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$$

pour $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et $T > T_0(\Omega)$ quelconques.

Grâce à HUM on a donc le

Théorème 8.3. (Théorème de contrôlabilité exacte).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $T > T_0(\Omega)$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Alors pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ tel que $\{y^1, -y^0\} \in F'$, l'espace F étant défini comme le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$, il existe $v \in L^2(\Sigma_0)$ qui ramène le système à l'état d'équilibre à l'instant T . ■

Remarque 8.5.

Lorsque Ω est convexe le même résultat a lieu (sans régularité C^2 du bord).

Dans le cas général d'un ouvert Ω à frontière Lipschitzienne, on ne peut pas toujours donner un sens à $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ dans $L^2(\Sigma)$, ce qui empêche de définir la norme $\|\cdot\|_F$ par (8.19). Néanmoins $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ peut être toujours définie dans $W^{-1,\infty}(0,T ; H^{-1/2}(\Gamma_0))$ ce qui permet de considérer

$$\|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{W^{-1,\infty}(0,T ; H^{-1/2}(\Gamma_0))}$$

et aboutir à la contrôlabilité exacte dans F' dual de F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour cette norme.

De cette manière on démontre la *contrôlabilité exacte dans un ouvert à frontière lipschitzienne avec action sur une partie Γ_0 de Γ arbitrairement petite, dès que $T > T_0(\Omega)$* .

Le problème ouvert important est celui de la caractérisation de l'espace $F = F(\Gamma_0)$ introduit ci-dessus. ■

9. CONTROLABILITE EXACTE ELARGIE (C.E.E.)

La notion que l'on va exposer dans ce n° est générale. On va l'exposer ici dans le cas particulier étudié dans ce chapitre.

On considère donc *l'équation d'état*

$$(9.1) \quad y'' - \Delta y = 0$$

avec les données initiales

$$(9.2) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1,$$

où

$$(9.3) \quad y^0 \in L^2(\Omega), \quad y^1 \in H^{-1}(\Omega).$$

On exerce le contrôle suivant :

$$(9.4) \quad y = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma(x^0). \end{cases}$$

Remarque 9.1.

On choisit le cadre fonctionnel par (9.3) et en prenant

$$(9.5) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad \blacksquare$$

On se donne maintenant en outre

$$(9.6) \quad G = \text{sous espace vectoriel fermé de } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

On dit que l'on a *Contrôlabilité Exacte Élargie* (C.E.E.) à l'instant T , si, $\forall (y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tel que

$$(9.7) \quad \{y(T; v), y'(T; v)\} \in G$$

(où, dans (9.7), $y(t; v) = y(v)$ désigne la solution de (9.1) (9.2) (9.4)).

Remarque 9.2.

Bien entendu si $G = \{0, 0\}$, on retrouve la notion classique de contrôlabilité exacte. Si $G = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, le problème est évidemment sans objet. \blacksquare

Remarque 9.3.

La structure de $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T)$ est choisie identique à la structure généralement étudiée dans ce livre. On pourrait bien entendu faire d'autres choix de Γ_0 (au lieu de $\Gamma(x^0)$) , adaptant les considérations faites par ailleurs.

Pour une structure $\Gamma(x^0) \times (0,T)$ choisie, on peut s'attendre à ce que l'on ait C.E.E. pour des T éventuellement *plus petits* lorsque G est "plus grand". On va en effet vérifier cela sur les exemples. ■

Remarque 9.4.

Supposons qu'il y ait C.E.E.. Alors on introduit l'ensemble *non vide*

$$(9.8) \quad \mathcal{U}_{ad}(G) = \{v \mid v \in L^2(\Sigma(x^0)), y(T; v) = y'(T; v) = 0\},$$

et l'on peut chercher

$$(9.9) \quad \inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}(G).$$

L'adaptation de HUM qui suit fournit la solution de (9.9). ■

Adaptation de HUM

On introduit

$$(9.10) \quad G^0 = \text{ensemble polaire de } G \text{ dans } L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Donc

$$f = \{f^0, f^1\} \in G^0 \iff (f^0, g^0) + (f^1, g^1) = 0 \quad \forall \quad g = \{g^0, g^1\} \in G.$$

Pour $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ donné dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on définit Φ par :

$$(9.11) \quad \Phi'' - \Delta \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi'(0) = \Phi^1, \quad \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

et on définit

$$(9.12) \quad F_G = \{(\Phi^0, \Phi^1) \mid \Phi^0 \in H_0^1(\Omega), \Phi^1 \in L^2(\Omega), \text{ tels que } \{\Phi'(T), -\Phi(T)\} \in G^0\}. \quad ■$$

Remarque 9.5.

Si $G = \{0,0\}$, alors $F_6 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. ■

On choisit T de façon que

$$(9.13) \quad \left(\int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Gamma dt \right)^{1/2} \text{ définit sur } F_6 \text{ une norme équivalente à la norme induite par } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Remarque 9.6.

On sait que si $T > 2R(x^0)$ la norme ci-dessus est équivalente à celle de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sur l'espace $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, donc, a fortiori sur F_6 . Mais on verra que l'on peut avoir (9.13) pour T assez grand, $< 2R(x^0)$. ■

On définit maintenant ψ par

$$\psi'' - \Delta \psi = 0$$

$$(9.14) \quad \psi(T) = g^0, \quad \psi'(T) = g^1$$

$$\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \text{ sur } \Sigma(x^0), \quad \psi = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma(x^0)$$

où

$$(9.15) \quad \{g^0, g^1\} \text{ est quelconque dans } G.$$

On définit donc *une famille* de fonctions ψ lorsque $g = \{g^0, g^1\}$ parcourt G .

On définit *une classe* de fonctions par

$$(9.16) \quad \Lambda_G \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

On a

Lemme 9.1.

Si $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F_6$, alors $\Lambda_G \{\Phi^0, \Phi^1\} \in (F_6)'$ et $\Lambda_G \in \mathcal{L}(F_6; (F_6)')$.

Démonstration

L'espace $(F_G)'$ est un espace quotient de $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pour $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ donné dans F_G , soit ψ (resp. $\hat{\psi}$) la solution de (9.14) correspondant à $g = \{g^0, g^1\}$ (resp. $\hat{g}^0, \hat{g}^1\}$) dans G .

Il faut montrer que

$$\{\psi'(0) - \hat{\psi}'(0), -(\psi(0) - \hat{\psi}(0))\} \in (F_G)^0$$

i.e. que

$$(9.17) \quad (\psi'(0) - \hat{\psi}'(0), \tilde{\Phi}^0) - (\psi(0) - \hat{\psi}(0), \tilde{\Phi}^1) = 0 \quad \forall \{\tilde{\Phi}^0, \tilde{\Phi}^1\} \in F_G.$$

Mais si l'on pose $\psi - \hat{\psi} = \theta$, alors

$$\theta'' - \Delta \theta = 0$$

$$(9.18) \quad \theta(T) = h^0 (= g^0 - \hat{g}^0), \quad \theta'(T) = h^1 (= g^1 - \hat{g}^1)$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Sigma$$

où $\{h^0, h^1\} \in G$.

Soit $\tilde{\Phi}$ la solution de (9.11) correspondant à $\{\tilde{\Phi}^0, \tilde{\Phi}^1\}$; on a :

$$(9.19) \quad \int_{\Omega \times (0, T)} (\theta'' - \Delta \theta) \tilde{\Phi} \, dx \, dt = 0 = (h^1, \tilde{\Phi}(T)) - (\theta'(0), \tilde{\Phi}^0) \\ - (h^0, \tilde{\Phi}'(T)) + (\theta(0), \tilde{\Phi}^1).$$

Comme $\{\tilde{\Phi}^0, \tilde{\Phi}^1\} \in F_G$, on a, par définition, $\{\tilde{\Phi}'(T), -\tilde{\Phi}(T)\} \in G^0$.

Donc $(h^1, \tilde{\Phi}(T)) - (h^0, \tilde{\Phi}'(T)) = 0$ et par conséquent (9.19) donne (9.17). ■

On a bien sûr (on a fait ce qu'il fallait pour cela)

$$(9.20) \quad \langle \wedge_G \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \int_{\Gamma(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 \, d\Gamma \, dt$$

et par conséquent

$$(9.21) \quad \Lambda_G \text{ est un isomorphisme de } F_G \text{ sur } (F_G)'.$$

On a alors

Théorème 9.1.

On suppose que (9.13) a lieu. Alors il y a C.E.E. à l'instant T .

Plus précisément : pour y^0, y^1 donnés dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on résout l'équation

$$(9.22) \quad \Lambda_G \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

ou, plus précisément encore

$$(9.23) \quad \begin{aligned} \Lambda_G \{\Phi^0, \Phi^1\} &= \{y^1 + h^1, -(y^0 + h^0)\}, \\ \text{où } h^0 &\in L^2(\Omega), h^1 \in H^{-1}(\Omega) \text{ avec} \\ &\langle h^1, -h^0 \rangle, \langle \Phi^0, \Phi^1 \rangle > = 0 \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in F_G. \end{aligned}$$

On définit Φ et on choisit

$$(9.24) \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma(x^0).$$

Alors v résout le problème (et, en outre, comme on verra plus tard, minimise $\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt$). ■

Remarque 9.7.

Il revient au même, dans le cadre de la C.E.E., de ramener non plus à l'équilibre mais dans l'espace G , le système partant de $\{y^0, y^1\}$ ou de $\{y^0 + h^0, y^1 + h^1\}$ avec $\{h^0, h^1\}$ quelconques dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ vérifiant la condition dans (9.23), i.e. $\langle h^1, -h^0 \rangle \in (F_G)^0$. En effet si l'on considère la solution z de

$$(9.25) \quad z'' - \Delta z = 0, \quad z(0) = h^0, \quad z'(0) = h^1, \quad z = 0 \text{ sur } \Sigma$$

alors

$$(9.26) \quad \{z(T), z'(T)\} \in G.$$

En effet soit $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F_6$, Φ la solution correspondante. On a

$$(z'(T), \Phi(T)) - (z(T), \Phi'(T)) = (z'(0), \Phi^0) + (z(0), \Phi^1) = 0.$$

Par hypothèse $(z'(0), \Phi^0) - (z(0), \Phi^1) = 0$, donc

$$(9.27) \quad (z'(T), \Phi(T)) - (z(T), \Phi'(T)) = 0.$$

Mais par définition de F_6 , $\{\Phi'(T), -\Phi(T)\} \in G^0$ et parcourt G^0 lorsque $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ parcourt F_6 (puisque l'on peut inverser le sens du temps). Alors (9.27) montre que l'on a (9.26). ■

Exemple 9.1.

Soient ω_0, ω_1 deux ouverts contenus dans Ω tels que

$$(9.28) \quad \Omega = \omega_0 \cup \omega_1.$$

Supposons que

$$(9.29) \quad G = \{ \{g^0, g^1\} \mid g^0 = 0 \text{ sur } \omega_0, g^1 = 0 \text{ sur } \omega_1 \}.$$

Alors

$$(9.30) \quad G^0 = \{h \mid h = \{h^0, h^1\}, h^0 = 0 \text{ sur } \omega_1, h^1 = 0 \text{ sur } \omega_0\}$$

et par conséquent

$$(9.31) \quad (\Phi'(T), m_k \frac{\partial \Phi(T)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \Phi(T)) = 0$$

si $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F_6$.

Le calcul usuel des n° précédents montre alors que l'on a (9.13) pour $T > R(x^0)$. On a

donc C.E.E. (correspondante à G défini par (9.29)) si $T > R(x^0)$ (au lieu de $> 2R(x^0)$ si $G = \{0,0\}$). ■

Remarque 9.8.

L'exemple précédent contient les deux cas particuliers suivants :

$$(9.32) \quad G = \{g \mid g^0 = 0, g^1 \text{ quelconque dans } H^{-1}(\Omega)\}$$

$$(9.33) \quad G = \{g \mid g^0 \text{ quelconque dans } L^2(\Omega), g^1 = 0\}.$$

Il s'agit alors de ramener le système non pas à un état d'équilibre mais à un état où *soit* la "position", *soit* la "vitesse", est nulle à l'instant T . On peut réaliser cela "*2 fois plus vite*" que pour atteindre l'équilibre. ■

Exemple 9.2.

Soit ω un ouvert de Ω et

$$(9.34) \quad G = \{g \mid g^0 = g^1 = 0 \text{ sur } \omega\}.$$

On veut donc ramener le système à un état qui soit "en équilibre" *sur le sous ensemble* ω de Ω à l'instant T .

Alors

$$(9.35) \quad G^0 = \{h \mid h^0, h^1 = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \bar{\omega}\}.$$

Introduisons alors

$$(9.36) \quad R_*(x^0) = \sup |x - x^0|, \quad x \in \Omega \setminus \bar{\omega}.$$

Le calcul usuel conduit à (9.13) pour

$$(9.37) \quad T > R(x^0) + R_*(x^0),$$

(ce qui améliore $2R(x^0)$ puisque $R_*(x^0) \leq R(x^0)$). ■

10 - PROBLEMES OUVERTS

1. Influence de la géométrie

Considérons un ouvert Ω avec *un trou* \mathcal{O}_1 de frontière Γ_1 (cf. Fig. 1), avec, pour simplifier, l'hypothèse que Γ_0 et Γ_1 sont les frontières d'ouverts *convexes*.

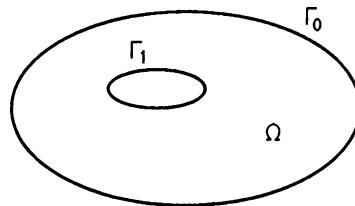


Figure 7

Alors $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et si l'on prend x^0 dans \mathcal{O}_1 , on voit que $\Gamma(x^0) = \Gamma_0$.
Donc on peut contrôler exactement l'équation des ondes, *avec données initiales dans* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *en agissant uniquement sur le bord extérieur* Γ_0 .

Si maintenant on a 2 trous \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 de frontière Γ_1 , Γ_2 , \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 étant (toujours pour simplifier) convexes, la remarque précédente *n'est plus valable*.

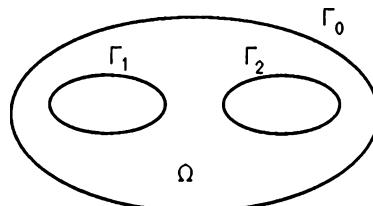


Figure 8

Cela est conforme aux résultats de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH (Appendice II) : il y a propagation possible de singularité sur un "rayon indéfiniment réfléchi" comme AB (Fig. 9), quelle que soit l'action exercée par ailleurs sur le bord.

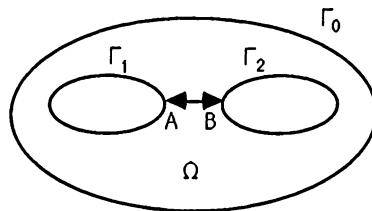


Figure 9

Mais on peut toujours considérer *la norme*

$$(10.1) \quad \left(\int_{\Gamma_0 \times (0, T)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}$$

pour T assez grand. *Quel est l'espace F correspondant ?* (cet espace est assez "grand" pour que son dual *ne contienne pas* d'éléments avec singularités sur les rayons indéfiniment réfléchis –mais cela demande à être précisé...).

2 - Soit Γ_0 un morceau *arbitrairement petit* de Γ . Alors (10.1) est une norme pour T assez grand. Quel est l'espace F correspondant ? (On a indiqué à la fin du problème 1 ci-dessus un cas particulier de ce problème général).

3 - Quelle est la situation pour les opérateurs hyperboliques à *coefficients variables* et tout particulièrement à coefficients variables *irréguliers* :

$$(10.2) \quad \Phi'' - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = 0$$

$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha \zeta_i \zeta_j, \quad \alpha > 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega.$

Seuls des cas particuliers semblent jusqu'ici résolus. cf. L.F. HO, V. KOMORNIK, C. BARDOS, G. LEBEAU, F. RAUCH, (où les coefficients sont supposés *réguliers*) E. ZUAZUA .

Nous reviendrons sur un exemple où les a_{ij} sont des constantes *differentes* dans deux parties de Ω (*problèmes de transmission*) au Chapitre VI, n° 2 .

Cette question est très importante pour les problèmes *d'homogénéisation et contrôlabilité exacte*, cf. J.L.L. [3] et le tome 2 du présent ouvrage.

4. Le cas des coefficients dépendant de t .

Considérons l'équation

$$(10.3) \quad \Phi'' - a(t) \Delta \Phi = 0$$

avec $\Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi', \Phi = 0$ sur Σ .

On suppose que

$$(10.4) \quad a(t), a'(t) \in L^\infty(0, \infty), a(t) \geq a_0 > 0.$$

Si l'on pose

$$(10.5) \quad E(t) = \frac{1}{2} [a(t) |\nabla \Phi(t)|^2 + |\Phi'(t)|^2]$$

on a

$$(10.6) \quad E(t) = E_0 + \frac{1}{2} \int_0^t a'(\sigma) |\nabla \Phi(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire très forte

$$(10.7) \quad a' \geq 0$$

on obtient alors $E(t) \geq E_0$ et si $\|a\|_\infty = \sup a(t), 0 \leq t \leq T$, on obtient avec les notations habituelles

$$(10.8) \quad \left(T - \frac{2R(x^0)}{\sqrt{\|a\|_\infty}} \right) E_0 \leq \frac{R(x^0) \|a\|_\infty}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt$$

et la théorie se "déroule" comme précédemment – Qu'en est-il sans l'hypothèse (10.7) ? Cette question est moins difficile que les précédentes. Mais une étude systématique avec les hypothèses les plus générales sur a pourrait être intéressante.

5. Cas non hilbertien.

Que peut-on dire (en dehors du cas de la dimension 1) de l'espace F complété des données régulières pour

$$\left(\int_{\Gamma \times (0,T)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^p d\Gamma dt \right)^{1/p}$$

si $p \neq 2$.

6. Problèmes non linéaires.

Dans les problèmes non linéaires, il faut d'abord prendre garde au fait que *l'on ne peut prendre que des contrôles assez réguliers*, du moins en général.

Ainsi si l'on considère

$$(10.9) \quad y'' - \Delta y + y^3 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$(10.10) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1,$$

$$(10.11) \quad y = v \text{ sur } \Sigma \text{ (ou partie de } \Sigma, y = 0 \text{ ailleurs sur } \Sigma)$$

le problème n'a pas de sens "raisonnable" si $v \in L^2(\Sigma)$. En effet on peut considérer w solution de

$$w'' - \Delta w = 0,$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w = v \text{ sur } \Sigma.$$

Alors $w \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ et si l'on introduit

$$z = y - w$$

alors

$$z'' - \Delta z + (z^3 + 3z^2 w + 3zw^2 + w^3) = 0$$

et le terme w^3 n'a pas de sens, à moins de supposer v , donc w , plus régulière.

Moyennant cette restriction, que peut-on dire de l'ensemble parcouru par $\{y(T), y'(T)\}$ lorsque v parcourt un espace de fonctions "régulières" ?

Chapitre II

Formulation générale du problème de la contrôlabilité exacte. HUM : Hilbert Uniqueness Method

1. INTRODUCTION.

Dans ce deuxième chapitre, on introduit, dans un cadre général (qui contient l'exemple modèle de l'équation des ondes avec action Dirichlet étudié dans le Chapitre I, ainsi que les différents modèles considérés le long des chapitres suivants) le problème de la contrôlabilité exacte d'un système d'évolution et la méthode générale de résolution de ce problème.

La méthode présentée est appelée "HILBERT UNIQUENESS METHOD" (HUM), qui a été déjà introduite dans un cas particulier au Chapitre I.

On va voir que comme au Chapitre I - par l'introduction d'un opérateur Δ convenable - on se ramène à *deux points* :

(a) L'obtention de *théorèmes d'unicité* ;

(b) L'étude (si possible la caractérisation, mais au moins l'encadrement entre des espaces connus) des espaces hilbertiens introduits systématiquement à partir des théorèmes d'unicité utilisés. ■

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode dans le cas du *contrôle frontière*, mais elle est susceptible d'être également appliquée aux problèmes du contrôle ponctuel et du contrôle interne. Ces problèmes seront étudiés dans le chapitre VII. ■

L'objet de ce chapitre est donc de développer les aspects fondamentaux de la méthode sans entrer dans tous les détails techniques qui nuiraient à la clarté de l'exposé. Nous ferons

systématiquement usage de J.L. LIONS et E. MAGENES [1] (Vol I, Chap. 2 et Vol II, Chap. 5) pour tout ce qui concerne les formulations variationnelles des problèmes considérés et l'existence des solutions faibles. Ces questions seront ensuite traitées avec soin dans chaque cas particulier étudié dans la suite du livre. ■

2. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME DE LA CONTROLABILITE EXACTE.

Soit Ω un domaine (ouvert et connexe) de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière. Soit $T > 0$.

Considérons le système d'évolution

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + A y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$(2.2) \quad y(x, 0) = y^0(x); \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.3) \quad B_j y = v_j \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

où A est un opérateur elliptique symétrique d'ordre $2m$ ($m = 1, 2, \dots$) à coefficients réguliers indépendants de la variable temps "t" et $\{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ est un ensemble d'opérateurs frontière, tel que le système (2.1) (2.2) (2.3) est bien posé dans des espaces de Hilbert convenables (voir J.L.LIONS et MAGENES [1] pour des conditions nécessaires et suffisantes). Autrement dit, on suppose que pour des données initiales $\{y^0, y^1\}$ et des conditions aux limites $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$ qui appartiennent à des espaces de Hilbert convenables et qui vérifient éventuellement des conditions de compatibilité, le système (2.1) (2.2) (2.3) admet une solution unique. ■

L'équation (2.1) modélise l'évolution d'un certain phénomène physique au cours du temps.

L'équation (2.2) nous donne les *conditions initiales* ou de Cauchy du système.

Les vecteurs $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$ agissent sur la frontière du système par l'intermédiaire des opérateurs $\{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$. ■

Avec les notations

$$(2.4) \quad y'(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t); \quad y(0) := "x \rightarrow y(x,0)"$$

les équations (2.1), (2.2) s'écrivent sous la forme simplifiée suivante

$$(2.5) \quad y'' + A y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.6) \quad y(0) = y^0; \quad y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Le problème de la contrôlabilité exacte du système (2.1) (2.2) (2.3) peut être formulé de la manière suivante :

"Etant donné un temps $T > 0$ et pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ dans un espace de Hilbert convenable, peut-on trouver des vecteurs contrôle $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$ dans un espace de fonctions ou de distributions définies sur Σ tels que la solution $y = y(v)$ du système (2.1) (2.2) (2.3) avec $v = \{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$ vérifie la condition

$$(2.7) \quad y(T; v) = y'(T; v) = 0 \quad \text{dans } \Omega ?"$$

Si cela est possible, on dit alors que *le système est exactement contrôlable à l'instant T.* ■

Remarque 2.1.

L'état $\{0,0\}$ considéré dans (2.7) est un *état d'équilibre* du système. En effet, une fois l'état $\{0,0\}$ atteint au temps $T > 0$, la solution $y = y(v)$ reste dans cet état pour tout $t > T$, si on n'introduit aucune autre action sur la frontière du système : si on définit

$$(2.8) \quad \begin{aligned} y & \quad \text{dans } Q \\ \bar{y} &= \\ 0 & \quad \text{dans } \Omega \times]T, +\infty[\end{aligned}$$

et

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_j & \quad \text{sur } \Sigma \\ \bar{v}_j &= \\ 0 & \quad \text{sur } \Gamma \times]T, +\infty[, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m, \end{aligned}$$

alors si la condition (2.5) est satisfaite , $\bar{y} = \bar{y}(x,t)$ est la solution du problème

$$(2.10) \quad \bar{y}'' + A\bar{y} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[$$

$$(2.11) \quad \bar{y}(0) = y^0; \bar{y}'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.12) \quad B_j \bar{y} = \bar{v}_j \quad \text{sur } \Gamma \times]0,+\infty[, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m. \blacksquare$$

Contrôler exactement le système (2.1) (2.2) (2.3) en un temps $T > 0$ consiste donc à ramener la solution $y = y(v)$ du système à l'état d'équilibre $\{0,0\}$ au temps $T > 0$ grâce à un choix approprié des conditions aux limites $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m}$. \blacksquare

Le problème de la contrôlabilité exacte ainsi posé est ambigu dans la mesure où l'on n'a pas précisé :

- (a) l'instant $T > 0$ auquel on veut contrôler le système ;
- (b) l'espace des données initiales que l'on veut contrôler ;
- (c) l'espace des vecteurs contrôle dont on dispose pour contrôler le système. \blacksquare

En ce qui concerne ces questions quelques remarques sont nécessaires .

Remarque 2.2.

Si A est un opérateur elliptique d'ordre 2 le système considéré est hyperbolique. Le cas le plus simple est celui qui correspond à $A = -\Delta$ (Δ : = Laplacien) et pour lequel on retrouve l'équation des ondes déjà étudiée dans le Chapitre I, *dans le cas de l'action de Dirichlet sur la frontière*. \blacksquare

Remarque 2.3.

Dans la classe des problèmes hyperboliques la contrôlabilité exacte du système n'aura lieu que pour des temps $T > 0$ suffisamment grands. Cela a déjà été mentionné à la Remarque 1.2, Chapitre I.

Si A est un opérateur elliptique d'ordre supérieur à 2 le système n'est plus hyperbolique et ce phénomène ne se produit pas. Par exemple, dans le cas $A = \Delta^2$ (Δ^2 =

Bilaplaciens) on a des résultats de contrôlabilité exacte en un temps $T > 0$ arbitrairement petit (voir Chap. IV et Appendice I). ■

Remarque 2.4.

Dans les applications pratiques on s'intéresse au contrôle du système en "minimisant", dans un sens ou dans un autre, l'action sur la frontière. On rencontre donc très souvent des *contraintes* de la forme suivante *sur les vecteurs contrôle* :

- (a) $v_j = 0$ sur $\Sigma \setminus \Sigma_0$, pour $j \in J \subset \{1, \dots, m\}$, où Σ_0 désigne une partie non vide de Σ et J un ensemble d'indices. Cette contrainte signifie que l'action des vecteurs contrôle $\{v_j\}_{j \in J}$ est réalisée uniquement sur la partie Σ_0 de la frontière Σ du système ;
- (b) $v_j = 0$ sur Σ , pour $j \in J \subset \{1, \dots, m\}$, $J \neq \{1, \dots, m\}$.

Dans ce cas on agit sur le système uniquement au moyen des opérateurs frontière $\{B_j\}_{j \notin J}$.

Dans le paragraphe 3 suivant on précisera comment la méthode HUM de résolution du problème de la contrôlabilité exacte s'adapte à ce type de contraintes. ■

Remarque 2.5.

On peut dire d'une manière générale, que la régularité des données initiales qu'on contrôle dépend de la régularité des vecteurs contrôle dont on dispose pour agir sur le système.

Nous avons déjà démontré dans le Chapitre I que dans le cas où la partie Σ_0 de Σ où on introduit l'action du contrôle est convenablement choisie, à des données initiales régulières (resp. irrégulières) correspondent des contrôles réguliers (resp. irréguliers). ■

3. HUM : HILBERT UNIQUENESS METHOD .

Dans ce paragraphe nous allons décrire les idées fondamentales de la méthode HUM de résolution du problème de la contrôlabilité exacte formulé dans le paragraphe précédent. Nous allons donner les étapes principales de son application dans le cas du système d'évolution (2.1) (2.2) (2.3) sans entrer dans tous les détails techniques, qui seront étudiés dans les modèles particuliers considérés dans la suite du volume. ■

On considère d'abord la suite d'opérateurs frontière $\{C_j\}_{1 \leq j \leq m}$, où $\{C_j\}$ désigne l'ensemble *d'opérateurs complémentaires* à $\{B_j\}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ (voir J.L. LIONS et E. MAGENES [1] pour les définitions précises). Les opérateurs $\{A, B_j, C_j\}$ vérifient la formule de Green suivante :

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} [(A\Phi)\psi - \Phi(A\psi)] dx = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} (C_j\Phi B_j\psi - B_j\Phi C_j\psi) d\Gamma, \\ \forall \Phi, \psi \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$$

où $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace de fonctions de classe C^{∞} dans $\bar{\Omega}$.

Les étapes fondamentales de HUM sont les suivantes :

Etape 1.

On considère le *système homogène* :

$$\Phi'' + A\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.2) \quad \Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$B_j\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \text{ pour } j = 1, \dots, m,$$

avec des données initiales $\Phi^0, \Phi^1 \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ qui vérifient les conditions de compatibilité :

$$(3.3) \quad B_j\Phi^0 = 0, \forall j \text{ t.q. } B_j \text{ est d'ordre inférieur à } m.$$

Le système $\{A, B_j\}$ étant bien posé (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1]) le problème (3.2) admet une solution faible unique $\Phi = \Phi(x, t)$. ■

Etape 2.

On considère ensuite le *problème adjoint* (adjoint de (3.2)) :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \psi'' + A \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ B_j \psi &= -C_j \Phi && \text{sur } \Sigma \quad \text{pour } j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

où $\Phi = \Phi(x, t)$ est la solution de (3.2).

Si l'on impose la contrainte $v_j = 0$ sur $\Sigma \setminus \Sigma_0$ (resp. $v_j = 0$ sur Σ) sur le contrôle v_j du système (2.1) (2.2) (2.3) la condition aux limites qu'on considérera dans (3.4) est alors

$$B_j \psi = \begin{cases} -C_j \Phi & \text{sur } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{cases} \quad (\text{resp. } = 0 \text{ sur } \Sigma)$$

Le problème (3.4) est un *système rétrograde non-homogène*, car on a une *condition finale* $\psi(T) = \psi'(T) = 0$ dans Ω et des *conditions aux limites non-homogènes*.

La solution ψ du système (3.4) est définie par la *méthode de transposition* (cf. J.L. LIONS et E.MAGENES [1]). La solution ψ peut être faible mais elle est suffisamment régulière pour qu'on puisse définir la valeur de ψ et ψ' à l'instant $t = 0$.

On définit ainsi un *opérateur linéaire* Λ en associant à $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ le vecteur donné par

$$(3.5) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \quad \blacksquare$$

Etape 3.

Considérons maintenant des données initiales $\xi^0, \xi^1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant les conditions de compatibilité (3.3) et soit $\xi = \xi(x, t)$ la solution du problème (3.2) correspondant.

En multipliant par ξ l'équation (3.4) et en intégrant sur Q on obtient par une formule de Green :

$$(3.6) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \xi^0, \xi^1 \} \rangle = \int_{\Omega} [\psi'(0) \xi^0 - \psi(0) \xi^1] dx = - \sum_{j=1}^m \int_{\Sigma} B_j \psi C_j \xi d\Sigma = \\ = \sum_{j=1}^m \int_{\Sigma} C_j \Phi C_j \xi d\Sigma.$$

Il est important de noter que *les conditions aux limites* du système (3.4) ont été choisies pour arriver à l'identité (3.6).

En particulier, pour le choix $\{\xi^0, \xi^1\} = \{\Phi^0, \Phi^1\}$ on a

$$(3.7) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \int_{\Omega} [\Phi^0 \psi'(0) - \Phi^1 \psi(0)] dx = \sum_{j=1}^m \int_{\Sigma} |C_j \Phi|^2 d\Sigma = \\ = \sum_{j=1}^m \|C_j \Phi\|_{L^2(\Sigma)}^2,$$

$\forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant les conditions (3.3).

On définit alors la *semi-norme*

$$(3.8) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \sum_{j=1}^m \|C_j \Phi\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right\}^{1/2}, \\ \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ satisfaisant (3.3).}$$

Supposons que $\|\cdot\|_F$ définisse une *norme* dans le sous-espace de fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ qui satisfont les conditions de compatibilité (3.3). Bien sur, le fait que $\|\cdot\|_F$ définisse une norme dans ce sous-espace équivaut au *théorème d'unicité* suivant.

Théorème 3.1. - (Théorème d'unicité)

Toute solution $\Phi = \Phi(x, t)$ du système (3.2) qui correspond à des données initiales $\Phi^0, \Phi^1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfaisant (3.3) et qui vérifie la condition

$$(3.9) \quad C_j \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

vérifie $\Phi = 0$ dans Q et en particulier, $\Phi^0 = \Phi^1 = 0$ dans Ω . ■

Remarque 3.1.

Nous avons déjà mentionné comment les conditions aux limites du système (3.4) doivent être adaptées aux éventuelles contraintes introduites sur les vecteurs contrôle du système.

Si l'on impose les contraintes

$$v_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

les conditions aux limites du problème (3.4) seront

$$\begin{aligned} -C_j \Phi & \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ B_j \psi &= \\ 0 & \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{aligned}$$

et on aura l'identité

$$\langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \sum_{j=1}^m \|C_j \Phi\|_{L^2(\Sigma_0)}^2.$$

Dans ce cas on définit la semi-norme

$$\|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left(\sum_{j=1}^m \|C_j \Phi\|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \right)^{1/2}$$

et on voit que $\|\cdot\|_F$ définit une norme si l'on a le critère d'unicité suivant :

Φ solution de (3.2)

$$\Rightarrow \Phi = 0 \quad \text{dans } Q.$$

$$C_j \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

De même, sous les contraintes

$$v_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad \forall j \in J \subset \{1, \dots, m\}$$

les conditions aux limites à considérer seront

$$B_j \psi = -C_j \Phi, \quad \text{si } j \notin J; \quad B_j \psi = 0, \quad \text{si } j \in J$$

et l'on obtiendra

$$\langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \sum_{j \notin J} \| C_j \Phi \|_{L^2(\Sigma)}^2 .$$

Alors, dans ce cas la semi-norme

$$\| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_{F(J)} = \left(\sum_{j \notin J} \| C_j \Phi \|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme si l'on a le critère d'unicité :

Φ solution de (3.2)

$$\Rightarrow \Phi = 0 \text{ dans } Q .$$

$$C_j \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma, \forall j \notin J$$

Il est important de remarquer que les *conditions aux limites du problème* (3.4) doivent être adaptées aux contraintes imposées sur les contrôles. Ces conditions aux limites nous conduisent à des *semi-normes* et ces semi-normes définissent des normes si l'on a des critères d'unicité convenables.

Les semi-normes sont de la forme

$$\left(\sum \| C_j \Phi \|_{G_j(\Sigma)}^2 \right)^{1/2}$$

où les $G_j(\Sigma)$ (ou $G_j(\Sigma_0)$) sont des espaces de Hilbert sur Σ (ou Σ_0) (qui peuvent être choisis avec une grande liberté !) ■

Remarque 3.2.

L'obtention d'un théorème d'unicité adapté est donc le premier point essentiel dans l'application de HUM. Les techniques fondamentales dont on dispose pour démontrer ces résultats d'unicité sont les suivantes :

(a) Obtention d'estimations a priori à partir des *méthodes de multiplicateurs*. Cette technique a déjà été introduite dans le Chapitre I.

(b) Des *critères de prolongement unique*. Notamment, le Théorème de Holmgren dans le cas des équations à coefficients analytiques. Nous en avons vu quelques applications dans le Chapitre I. On en retrouvera d'autres dans les chapitres suivants.

(c) Des méthodes d'Analyse Harmonique.

Nous présentons dans le Chapitre IV un exemple dû à J. BALL

(d) Les techniques microlocales

Dans l'Appendice II rédigé par C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH, on donnera une description des idées fondamentales des méthodes microlocales et quelques applications à la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes. ■

Remarque 3.3.

Dans la Remarque 2.2 on a vu que dans le cas des systèmes hyperboliques (i.e, le cas où A est un opérateur elliptique d'ordre 2) la contrôlabilité exacte du système n'a lieu que pour des temps $T > 0$ suffisamment grands.

Plus précisément, dans ce cas, un théorème d'unicité du type précédent n'a lieu que pour des temps $T > 0$ assez grands. ■

Supposons donc que le Théorème 3.1 est vérifié. On définit l'espace de Hilbert F comme le complété du sous-espace de fonctions $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ qui satisfont la condition de compatibilité (3.3) pour la norme $\|\cdot\|_F$. Soit F' l'espace dual (F' est aussi un espace de Hilbert, en général non identifié à F).

De (3.6) et (3.8) il résulte que :

$$(3.10) \quad |<\Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}>| \leq \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F \|\{\xi^0, \xi^1\}\|_F \\ \forall \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ qui satisfont (3.3).}$$

L'estimation (3.9) nous permet, d'après les définitions des espaces F et F' , de prolonger l'opérateur Λ de manière unique à un opérateur linéaire continu Λ de F dans F' :

$$\Lambda \in \mathcal{L}(F; F').$$

Notons que (3.7) peut aussi s'écrire :

$$(3.11) \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in F, <\Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\}> = \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^2.$$

En particulier on a d'après (3.10) et (3.11)

$$(3.12) \quad \|\wedge\|_{\mathcal{L}(F; F)} = 1 ; \wedge^* = \wedge$$

(où \wedge^* désigne l'opérateur adjoint à \wedge) et \wedge est un isomorphisme de F sur F' . ■

Etape 4. (Conclusion)

Comme \wedge est un isomorphisme de F sur F' , l'équation

$$(3.13) \quad \wedge\{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

a une solution unique $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$ pour chaque couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ tel que $\{y^1, -y^0\} \in F'$.

Notons par ailleurs que (3.13) équivaut à ce que la solution $\psi = \psi(x, t)$ du problème adjoint (3.4) (qui correspond aux conditions aux limites $\{-C_j \Phi\}_{1 \leq j \leq m}$, avec $\Phi = \Phi(x, t)$ solution de (3.2) pour des données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\}$), satisfasse la condition

$$(3.14) \quad \psi(0) = y^0 ; \psi'(0) = y^1.$$

Alors, les vecteurs contrôle

$$(3.15) \quad v_j = -C_j \Phi \quad \text{sur } \Sigma, \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

répondent à la question, car d'après l'unicité de la solution du problème (2.1) (2.2) (2.3) on a

$$(3.16) \quad y(x, t ; v) = \psi(x, t)$$

et par construction de ψ comme solution de (3.4), $y = y(v)$ satisfait (2.5). ■

Remarque 3.4.

On a défini F comme étant le complété d'un certain espace de fonctions régulières par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (3.8). Cette définition établit une application de F dans $(L^2(\Sigma))^m$ de sorte que :

$$(3.17) \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} \in F \Leftrightarrow C_j \Phi \in L^2(\Sigma), \forall j = 1, \dots, m.$$

Ceci démontre que les vecteurs contrôle définis dans (3.15) appartiennent à l'espace $(L^2(\Sigma))^m$. ■

Le théorème suivant résume le résultat de contrôlabilité exacte obtenu comme conséquence de l'application de la méthode HUM au système (2.1) (2.2) (2.3).

Théorème 3.2. (Théorème de contrôlabilité exacte).

Soit $T > 0$ tel que le Théorème 3.1 d'unicité soit vérifié. Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^1, y^0\} \in F'$, où F' est le dual de l'espace de Hilbert F (complété du sous espace de fonctions régulières vérifiant (3.3) pour la norme $\|\cdot\|_F$ définie dans (3.8)), il existe une suite de vecteurs contrôle $\{v_j\}_{1 \leq j \leq m} \in (L^2(\Sigma))^m$ telle que la solution $y = y(v)$ du système (2.1) (2.2) (2.3) correspondant satisfait à (2.5).

Le schéma fondamental de la méthode HUM (qui explique en fait la dénomination de HILBERT UNIQUENESS METHOD) est donc le suivant :

THEOREME D'UNICITE →

CONSTRUCTION D'UN ESPACE DE HILBERT →

CONTROLABILITE EXACTE DANS L'ESPACE DUAL.

Le Théorème 3.2 démontre que tout théorème d'unicité du type Théorème 3.1 implique un résultat de contrôlabilité exacte. Ceci étant, il faut noter le caractère "abstrait" de ce résultat de contrôlabilité dans la mesure où l'espace hilbertien F' des données initiales n'est pas "caractérisé" en termes "d'espace fonctionnel usuel". En fait, un des points les plus délicats de la méthode est l'étude de cet espace, si possible sa "caractérisation", ou bien son "encadrement". ■

Il faut noter qu'on a aussi la possibilité de procéder d'une manière, en quelque sorte "duale" : si l'on veut un espace hilbertien F simple, on choisit l'espace G les contrôles à partir de F .

Par exemple, on prendra la norme

$$\| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F = \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_V$$

où $V = \{ \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in H^m(\Omega) \times L^2(\Omega) / \Phi^0, \Phi^1 \text{ satisfont les conditions de compatibilité (3.3)} \}$ et l'on définira G comme l'espace parcouru par les traces des solution $\Phi = \Phi(x, t)$ de (3.2) correspondantes (ce procédé a été déjà utilisé dans le Chapitre I).

On sait alors dans quel espace on contrôle, mais il peut être plus difficile de savoir "avec quoi" on contrôle.

Il faut tenir compte de ce "double choix" et du fait qu'il y a pas de raison fondamentale pour que F et G soient *simultanément* "simples".

Dans le modèle étudié dans le Chapitre I on a été capables d'identifier les espaces F et F' en termes d'espaces classiques. Dans le Chapitre III, on considérera l'équation des ondes avec une action de type Neumann sur la frontière du système. On obtiendra alors des estimations a priori permettant de démontrer que $F \subset F_0$ avec injection continue et dense, où F_0 est un espace de Sobolev. Ceci implique $F'_0 \subset F'$ et a fortiori la contrôlabilité exacte des données $\{ y^0, y^1 \}$ telles que $\{ y^1, -y^0 \} \in F'_0$. Ce type de résultats peut être considéré comme satisfaisant du point de vue de la contrôlabilité exacte dans la mesure où on démontre la contrôlabilité pour *au moins* les données initiales appartenant à un espace hilbertien F'_0 parfaitement "identifié". ■

Dans d'autres situations, on dispose de résultats d'unicité qui nous permettent d'aboutir à des théorèmes de contrôlabilité exacte dans des espaces F' pour lesquels l'obtention d'informations supplémentaires semble délicate (cf. par exemple, Chap. I, N°8). ■

Remarque 3.5.

Si le Théorème 3.1 d'unicité est vérifié pour un temps $T_0 > 0$, il est évidemment aussi vérifié pour tout $T > T_0$. Par conséquent, on a la contrôlabilité exacte à l'instant T , pour tout $T > T_0$, dans un espace $F(T)$.

Si par ailleurs l'espace $F(T)$ ne dépend pas de $T > T_0$ (i.e si l'on a $F(T) = F(T_0) \forall T > T_0$) on aura une infinité de contrôles v ramenant les données initiales $\{ y^1, -y^0 \} \in F(T_0)$ à l'état d'équilibre $\{ 0, 0 \}$ à l'instant $T > T_0$.

Pour démontrer ceci on reprend les arguments de la Remarque 6.3, Chap. I.

On fixe $T > T_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ avec $T - \varepsilon > T_0$ on choisit un vecteur quelconque

$$u^\varepsilon = (u_j^\varepsilon)_{j=1}^m \in (L^2(\Sigma))^m.$$

On résout le problème

$$y'' + Ay = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, \varepsilon[$$

$$y(0) = y^0 ; \quad y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$B_j y = u_j^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma \times]0, \varepsilon[, \text{ pour } j = 1, \dots, m$$

avec $\{y^1, -y^0\} \in F(T) = F(T_0)$. On a

$$\{z^1, -z^0\} = \{y'(\varepsilon), -y(\varepsilon)\} \in F(T_0)$$

et du fait que $T - \varepsilon > T_0$, il existe un contrôle $v = \{v_j\}$ (donné par HUM) tel que la solution de

$$y'' + Ay = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]\varepsilon, T[$$

$$y(\varepsilon) = z^0 ; \quad y'(\varepsilon) = z^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$B_j y = v_j \quad \text{sur } \Gamma \times]\varepsilon, T[, \text{ pour } j = 1, \dots, m$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$.

On a donc démontré que le contrôle

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\quad \text{sur } \Gamma \times]0, \varepsilon[\\ v^\varepsilon &= \\ v &\quad \text{sur } \Gamma \times]\varepsilon, T[\end{aligned}$$

ramène l'état initial $\{y^1, -y^0\} \in F(T_0)$ à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ au temps T , pour $u^\varepsilon \in [L^2(\Sigma)]^m$ quelconque. On a en particulier l'existence d'une infinité de contrôles.

Dans ce cas, on peut démontrer que le contrôle donné par HUM à l'instant $T > T_0$ est celui qui *minimise la fonctionnelle*

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \|v_j\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in (L^2(\Sigma))^m \mid y(T; v) = y'(T; v) = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

La caractérisation du contrôle en termes de minimum de la fonctionnelle $J(\cdot)$ sur \mathcal{U}_{ad} sera soigneusement étudiée dans le Chapitre VIII, sur l'exemple modèle de l'équation des ondes avec action Dirichlet sur la frontière. ■

Remarque 3.6.

Nous avons présenté la méthode HUM dans le cadre du problème de la contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution quand le contrôle agit sur la frontière du système.

En fait HUM s'applique également au problème de la contrôlabilité exacte quand le contrôle agit *sur une partie* $\omega \subset \Omega$, c'est alors un *contrôle interne*. Dans le Chapitre VII nous présentons l'adaptation de HUM au problème du contrôle interne sur quelques exemples. ■

4. QUELQUES COMMENTAIRES SUR LES CHANGEMENTS DES NORMES.

Le long du développement de la méthode HUM dans l'étude de la contrôlabilité exacte du système (2.1) (2.2) (2.3) on a implicitement supposé que

" $\forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ qui satisfont (3.3) l'on a

$$(4.1) \quad C_j \Phi \in L^2(\Sigma), \quad \forall j = 1, \dots, m$$

où $\Phi = \Phi(x, t)$ désigne la solution du problème (3.2)

avec les conditions initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ ".

C'est le cas, par exemple, dans le modèle étudié au Chapitre I.

En général on ne peut pas avoir de *résultat de régularité* de ce type, mais par les techniques introduites dans J.L. LIONS et E. MAGENES [1] on peut toujours définir $C_j \Phi|_{\Sigma}$ dans les espaces du type $H^{-\beta}(\Sigma)$, avec $\beta > 0$ assez grand s'il le faut.

Ce phénomène se présente dans les systèmes à coefficients variables non réguliers ou quand on considère des ouverts Ω non réguliers.

Supposons donc – ce qui est par ailleurs *toujours* vrai d'après les techniques de J.L. LIONS et E. MAGENES [1] – qu'il existe un ensemble $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq m} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$(4.2) \quad C_j \Phi \in H^{\alpha_j}(\Sigma), \forall j = 1, \dots, m, \forall \text{ solution } \Phi \text{ de (3.2) avec des données } \\ \{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ qui satisfont (3.3).}$$

Lorsque les α_j sont < 0 la semi-norme $\|\cdot\|_F$ introduite dans (3.8) n'est pas bien définie. Dans ce cas on introduit la semi-norme

$$(4.3) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left(\sum_{j=1}^m \|C_j \Phi\|_{H^{\alpha_j}(\Sigma)}^2 \right)^{1/2}.$$

On note que $\|\cdot\|_F$ définit une norme si le Théorème 3.1 d'unicité est vérifié.

On introduit l'ensemble d'opérateurs $\{M_j\}_{1 \leq j \leq m}$, où $M_j : H^{\alpha_j}(\Sigma) \rightarrow (H^{\alpha_j}(\Sigma))'$ désigne l'isomorphisme canonique. On définit ensuite ψ comme la solution du *problème adjoint*

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \psi'' + A\psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0, && \text{dans } \Omega \\ B_j \psi &= -M_j C_j \Phi, && \text{sur } \Sigma, \text{ pour } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

et l'opérateur \wedge

$$(4.5) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$$

où ψ désigne la solution de (4.4) associée à Φ solution de (3.3) avec des données $\{ \Phi^0, \Phi^1 \}$.

On a alors

$$(4.6) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle := \{ \sum_{j=1}^m \| C_j \Phi \|_{H^{\alpha_j}(\Sigma)}^2 \}^{1/2}$$

et par conséquent \wedge définit un isomorphisme de F sur F' , où F est complété des fonctions régulières vérifiant (3.3) par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$ ci-dessus.

Par un argument analogue à celui de l'étape 4 du paragraphe 2, on obtient la contrôlabilité exacte des données $\{ y^1, -y^0 \} \in F'$ avec des contrôles

$$(4.7) \quad v_j = -M_j C_j \in (H^{\alpha_j}(\Sigma))', \quad \forall j = 1, \dots, m$$

où Φ est la solution du problème (3.2) qui correspond aux données $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F$ vérifiant

$$(4.8) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}.$$

Le choix de la norme $\|\cdot\|_F$ – celui de (4.3) – n'est pas unique ; en effet, soit $\{ G_j(\Sigma) \}_{1 \leq j \leq m}$ une suite d'espaces de Hilbert de fonctions définies sur Σ vérifiant

$$(4.9) \quad H^{\alpha_j}(\Sigma) \subset G_j(\Sigma), \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

On définit l'espace $F(G)$ complété des fonctions régulières vérifiant (3.3) par rapport à la norme

$$(4.10) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_{F(G)} := \{ \sum_{j=1}^m \| C_j \Phi \|_{G_j(\Sigma)}^2 \}^{1/2}.$$

Avec ce procédé – toujours en supposant que le Théorème 3.1 d'unicité est vérifié – on obtient la contrôlabilité exacte des données initiales $\{ y^1, -y^0 \} \in (F(G))'$ (espace dual de $F(G)$).

Les vecteurs contrôle sont donnés par

$$(4.11) \quad v_j = -M_{G_j} C_j \Phi ; \forall j = 1, \dots, m$$

où M_{G_j} dénote l'isomorphisme canonique de $G_j(\Sigma)$ dans $(G_j(\Sigma))'$.

D'après les injections (4.9) on a d'une part

$$(4.12) \quad F \subset F(G) ; (F(G))' \subset F'$$

et d'autre part

$$(4.13) \quad [G_j(\Sigma)]' \subset [H^{s_j}(\Sigma)]' , \forall j = 1, \dots, m.$$

Ceci démontre que, avec la nouvelle norme $\|\cdot\|_{F(G)}$ introduite dans (4.10), on aboutit à un résultat de contrôlabilité exacte dans un espace plus petit avec des contrôles appartenant aussi à un espace plus petit.

Ce résultat justifie la relation qu'on avait déjà annoncée dans la Remarque 2.3 concernant le lien entre l'espace de données initiales contrôlées et les vecteurs contrôle utilisés. ■

La méthode HUM admet encore d'autres variantes, toujours dans le cadre du contrôle frontière. Considérons par exemple le cas où on impose des contraintes sur le vecteur contrôle du type de la Remarque 2.4. Dans la Remarque 3.1 nous avons déjà mentionné quelques détails de l'adaptation de HUM à ce cas.

Le procédé précis est le suivant.

Supposons que l'on ait le

Théorème 4.1. (Théorème d'unicité).

Si $\Phi = \Phi(x, t)$ solution du problème (3.2) satisfait aux conditions

$$(4.14) \quad C_j \Phi = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \subset \Sigma, \text{ pour } j \in J \subset \{1, \dots, m\}$$

alors, on a $\Phi \equiv 0$. ■

Supposons en outre que l'on ait, pour tout $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant (3.3),

$$C_j \Phi \in H^{\alpha_j}(\Sigma_0), \quad \forall j \in J.$$

Soit M_j l'isomorphisme canonique de $H^{\alpha_j}(\Sigma_0)$ dans son dual. On considère le *problème adjoint*

$$\begin{aligned} \psi'' + A\psi &= 0, && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ (4.15) \quad B_j \psi &= 0, && \text{sur } \Sigma, \text{ si } j \notin J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -M_j C_j \Phi & && \text{sur } \Sigma_0 \\ B_j \psi = & && \\ 0 & && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \text{ pour } j \in J, \end{aligned}$$

et l'espace $F(\Sigma_0)$, complété des fonctions régulières vérifiant (3.3) par rapport à la norme

$$(4.16) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_{F(\Sigma_0)} := \left(\sum_{j \in J} \|C_j \Phi\|_{H^{\alpha_j}(\Sigma_0)}^2 \right)^{1/2}.$$

On définit l'opérateur

$$(4.17) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

et l'on voit que Λ est un isomorphisme de $F(\Sigma_0)$ sur $(F(\Sigma_0))'$ car

$$(4.18) \quad \langle \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \left(\sum_{j \in J} \|C_j \Phi\|_{H^{\alpha_j}(\Sigma_0)} \right)^{1/2}.$$

Par les arguments habituels on obtient le

Théorème 4.2. (Théorème de contrôlabilité exacte)

Pour tout couple de données initiales $\{y^1, y^0\} \in (F(\Sigma_0))'$, il existe un ensemble de contrôles $\{v_j\}_{j \in J} \in \prod_{j \in J} (H^{\alpha_j}(\Sigma_0))'$ tel que la solution $y = y(v)$

de (2.1) (2.2) (2.3) vérifie (2.5). ■

D'après HUM on a évidemment

$$(4.19) \quad \begin{aligned} v_j &\equiv 0 && \text{sur } \Sigma, \text{ si } j \notin J \\ -M_j C_j \Phi && \text{sur } \Sigma_0 \\ v_j = & & \\ 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \text{ pour } j \in J. \end{aligned}$$

Il est important de noter que c'est le Théorème 4.1 d'unicité qui nous permet d'aboutir à la contrôlabilité exacte du système avec des contrôles soumis aux contraintes (4.19). ■

5. PROBLEMES OUVERTS.

1. Systèmes du 1^{er} ordre.

Dans les considérations générales de ce chapitre, on n'a pas considéré les systèmes du 1^{er} ordre, hyperboliques ou non.

Une étude systématique pourrait être intéressante.

Des travaux sont en cours sur les équations de Maxwell (K. KIME, J. LAGNESE).

2. On n'a pas considéré non plus les systèmes qui ne sont pas du type Cauchy Kowalewska.

Voici un exemple (qui ne semble pas d'intérêt physique particulier).

On considère le système

$$\varphi'' - \Delta \varphi = -\nabla \pi ,$$

$$(5.1) \quad \operatorname{div} \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} ,$$

$$(5.2) \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \varphi^1$$

$$(5.3) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

On introduit

$$(5.4) \quad \begin{aligned} Y &= \{ \varphi \mid \varphi \in (H_0^1(\Omega))^n, \operatorname{div} \varphi = 0 \}, \\ H &= \text{fermeture de } Y \text{ dans } (L^2(\Omega))^n. \end{aligned}$$

Multiplications (5.1) par $m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ (i.e. la i^{eme} équation (5.1) par $m_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$). On utilise les notations habituelles. On trouve

$$(5.5) \quad \begin{aligned} X + \frac{n-1}{2} \iint_Q (\varphi'^2 - |\nabla \varphi|^2) dx dt + TE_0 - \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma &= \\ &= - \iint_Q (\nabla \pi) m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

On a encore

$$(5.6) \quad \iint_Q (\varphi'^2 - |\nabla \varphi|^2) dx dt = Y = (\varphi', \varphi)|_0^T$$

car

$$\iint_Q (\nabla \pi) \varphi dx dt = - \iint_Q \pi \operatorname{div} \varphi dx dt = 0.$$

Calculons le 2^{eme} membre de (5.5), i.e.

$$\begin{aligned} - \iint_Q \frac{\partial \pi}{\partial x_i} m_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx dt &= - \int_{\Sigma} \pi m_k v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d\Sigma + \\ &\quad + \iint_Q \pi \left(m_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = 0$, on a donc $- \int_{\Sigma} \pi m_k v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d\Sigma$. Mais sur Σ , $v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = v_i v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} = 0$.

Donc (5.5) se réduit à

$$(5.7) \quad X + \frac{n-1}{2} Y + TE_0 - \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = 0.$$

On en déduit que

$$(5.8) \quad (T - 2R(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 d\Sigma dt.$$

Assez curieusement c'est ici *l'inégalité directe* qui semble présenter une difficulté.

En effet l'élimination de quelques termes ci-dessus repose explicitement sur le fait que

$$m_k(x) = x_k - x_k^0.$$

Si l'on multiplie par $h_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, $h_k = v_k$ sur Γ , alors (au moins en général !) h_k n'est pas

$x_k - x_k^0$ et le terme $- \iint_Q \nabla \pi h_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx dt$ n'est plus égal à 0. Il vaut

$$\iint_Q \pi \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx dt$$

et il faudrait, pour conclure, que l'on ait des estimations sur π assez précises (ce qui semble être ouvert).

Le seul résultat démontré est donc le suivant. Si l'on désigne par F le complété des fonctions régulières φ^0, φ^1 à divergence nulle, $\varphi^0 = 0$ sur Γ , alors

$$(5.9) \quad F \subset V \times H.$$

Si Ω est strictement étoilé, disons par rapport à 0, on choisit $x^0 = 0$, on a (par hypothèse)

$$(5.10) \quad m v \geq \gamma > 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \Gamma(x^0) = \Gamma$$

et (5.7) donne

$$(5.11) \quad \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \leq \frac{2}{\gamma} (T + c) E_0.$$

On a donc *dans ce cas*

$$(5.12) \quad F = V \times H.$$

Qu'en est-il dans le cas non étoilé ? ■

La méthode HUM s'applique. On considère le système (5.1) (5.2) (5.3) et on définit ψ par

$$\psi'' - \Delta\psi = -\nabla\sigma, \quad \operatorname{div} \psi = 0,$$

$$(5.13) \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$\psi =$$

$$0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$

On définit $\wedge \{ \varphi^0, \varphi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$. Prenant le produit scalaire de l'équation en ψ par φ , il vient

$$(5.14) \quad \langle \wedge \{ \varphi^0, \varphi^1 \}, \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \right)^2 d\Gamma dt + \int_{\Sigma} \psi_i v_i \pi d\Sigma.$$

La dernière intégrale dans (5.14) vaut

$$(5.15) \quad \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial\phi_i}{\partial\nu} v_i \pi d\Sigma = \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i} \right) \pi d\Sigma = 0$$

et on en déduit que \wedge est un isomorphisme de F sur F' .

Le calcul (5.14) (5.15) a été conduit ici comme si toutes les fonctions étaient régulières. Mais en fait ψ est solution faible de (5.13) et les égalités ci-dessous ont lieu *par définition*. ■

Chapitre III

Équation des ondes : conditions aux limites de Neumann et de type mêlé

1. CONTROLE PAR NEUMANN.

1.1. Formulation du problème.

On s'intéresse ici à la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec un contrôle du type Neumann sur la frontière du système.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ . Soit $T > 0$.

On considère dans $Q = \Omega \times]0, T[$ un système dont l'état $y = y(x, t)$ satisfait à l'équation des ondes.

$$(1.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q.$$

On suppose que l'on peut agir sur le système par l'intermédiaire d'un contrôle $v = v(x, t)$ de la façon suivante :

$$(1.2) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[;$$

soient par ailleurs les données initiales.

$$(1.3) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (1.1) (1.2) (1.3), c'est-à-dire, on

cherche à résoudre le problème suivant :

Etant donné $T > 0$, peut-on, pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ donné dans un espace convenable, trouver un contrôle v tel que la solution $y = y(v)$ de (1.1) (1.2) (1.3) vérifie

$$(1.4) \quad y(T, v) = y'(T, v) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad \blacksquare$$

Le système précédent rentre dans le cadre général étudié dans le Chapitre II. En effet, il suffit de prendre

$$A = -\Delta ; \quad B = \frac{\partial}{\partial v} ; \quad C = \text{identité.}$$

Nous allons donc attaquer la contrôlabilité exacte de ce système par la méthode HUM introduite dans le Chapitre II qu'on a déjà appliquée dans le Chapitre I au contrôle de l'équation des ondes par Dirichlet. \blacksquare

Il s'agit d'un système hyperbolique. On n'aura donc la contrôlabilité exacte que pour des temps $T > 0$ suffisamment grands. \blacksquare

Comme dans les chapitres antérieurs, on se réserve la possibilité de n'agir *que sur un morceau du bord.* \blacksquare

L'étude de la contrôlabilité de ce système présente des difficultés supplémentaires par rapport au cas de l'équation des ondes avec contrôle par Dirichlet. Plus précisément :

(a) L'identification des espaces fonctionnels où l'on contrôle est dans ce cas une question nettement plus délicate.

(b) La structure des contrôles dépend de la géométrie de l'ouvert Ω . \blacksquare

On commence, comme au Chapitre I, avec quelques résultats techniques préliminaires. Les résultats principaux de contrôlabilité exacte seront donnés à partir du paragraphe 1.

1.2. Quelques rappels sur l'équation des ondes .

Dans ce paragraphe on rappelle quelques résultats classiques sur l'existence et la régularité des solutions du problème

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \theta(0) &= \theta^0; \theta'(0) = \theta^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Le résultat suivant sera d'une grande utilité dans la suite.

Lemme 1.1.

(a) Soit Ω un domaine borné \mathbb{R}^n à frontière Γ lipschitzienne.

Alors, pour tout ensemble de données

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$$

il existe une solution (faible) unique de (1.5) avec

$$(1.6) \quad \theta \in C(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

En outre, on a la propriété

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \text{l'application } \{\theta^0, \theta^1, f\} \rightarrow \{\theta, \theta'\} \text{ est linéaire continue de} \\ H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

(b) Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ de classe C^2 .

Alors , pour tout ensemble de données

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times H^1(\Omega) \times L^1(0, T; H^1(\Omega)),$$

avec

$$(1.8) \quad D(A) = \{ \varphi \in H^2(\Omega) / \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

il existe une solution unique de (1.5) avec

$$(1.9) \quad \theta \in C(0, T ; D(A)) \cap C^1(0, T ; H^1(\Omega)).$$

En outre,

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \text{l'application } & \{ \theta^0, \theta^1, f \} \rightarrow \{ \theta, \theta' \} \text{ est linéaire continue de} \\ & D(A) \times H^1(\Omega) \times L^1(0, T ; H^1(\Omega)) \rightarrow L^\infty(0, T ; D(A)) \times L^\infty(0, T ; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.

Soit f donné avec

$$(1.11) \quad f \in W^{-1,1}(0, T ; H^1(\Omega))$$

c'est-à-dire,

$$(1.12) \quad f = \frac{dg}{dt}, \quad g \in L^1(0, T ; H^1(\Omega)).$$

Prenons, par exemple, des conditions initiales $\theta^0 = \theta^1 = 0$. Alors la solution $\theta = \theta(x, t)$ de (1.5) est définie par

$$(1.13) \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial t}$$

où $w = w(x, t)$ est la solution de

$$w'' - \Delta w = g \quad \text{dans } Q$$

$$(1.14) \quad w(0) = w'(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Grâce au lemme précédent on a donc

$$(1.15) \quad \theta = w' \in C(0, T ; H^1(\Omega)).$$

La trace $\theta'(T)$ est bien définie dans $L^2(\Omega)$. On a l'estimation

$$(1.16) \quad \|\theta\|_{L^\infty(0, T ; H^1(\Omega))} + |\theta'(T)| \leq C \|g\|_{L^1(0, T ; H^1(\Omega))}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $g \in L^1(0, T ; H^1(\Omega))$.

(On a repris ici la notation du Chapitre I, $|\cdot| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. On notera de même par $|\cdot|$ la norme d'un vecteur dans $[L^2(\Omega)]^n$).

On peut également démontrer que lorsque

$$(1.17) \quad f \in W^{-1,1}(0, T ; D(A))$$

c'est-à-dire,

$$(1.18) \quad f = \frac{d}{dt} g ; g \in L^1(0, T ; D(A)) ;$$

on a

$$(1.19) \quad \theta \in C(0, T ; D(A)) ; \theta'(T) \in H^1(\Omega)$$

avec dépendance continue par rapport à la norme de g dans $L^1(0, T ; D(A))$. ■

Considérons maintenant *l'équation homogène*

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.20) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0 ; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et l'énergie associée

$$(1.21) \quad E(t) = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi(t)|^2 + |\Phi'(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0, T].$$

On a la *loi de conservation de l'énergie suivante* :

Lemme 1.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière lipschitzienne. Alors, pour toute solution faible Φ (dans la classe (1.6)) de l'équation (1.20) l'énergie est conservée le long de la trajectoire, i.e.

$$(1.22) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2 \} \quad \forall t \in [0, T]. \quad \blacksquare$$

Remarque 1.2.

Tous les résultats précédents sont classiques et peuvent être démontrés par les méthodes déjà mentionnées dans le Chapitre I. \blacksquare

Remarque 1.3.

Il faut tenir compte du fait que l'expression

$$E_0^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2 \} \right)^{1/2}$$

est une semi norme (et non pas une norme) sur l'espace $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Plus précisément

$$E_0 = 0 \iff \Phi^0 \equiv \text{cte} ; \Phi^1 = 0.$$

Il s'agit d'une norme sur $(H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega)$. \blacksquare

Remarque 1.4.

Tout ce qui a été dit s'applique lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et convexe, sans autre hypothèse de régularité sur la frontière Γ . En effet, dans ce cas, l'opérateur $-\Delta$

définit un isomorphisme de $D(A)$ sur $L^2(\Omega)$. ■

1.3. Une identité.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, précisons quelques notations, qui seront largement utilisées dans la suite.

Considérons un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne.

Il est connu qu'on peut définir, presque partout sur Γ , un champ $v(x) \in L^\infty(\Gamma)$ de vecteurs normaux unitaires dirigés vers l'extérieur de Ω . Il est évident que, lorsque Ω est de classe C^1 , le champ $v(x)$ est défini partout sur Γ et que $v(x) \in C(\Gamma)$.

De même on peut définir un ensemble de $n-1$ champs de vecteurs tangents $\{\tau^k(x)\}$, $k = 1, \dots, n-1$, de sorte que $\{v(x), \tau^1(x), \dots, \tau^{n-1}(x)\}$ définit une base orthonormée de \mathbb{R}^n pour presque tout $x \in \Gamma$.

On aura donc pour toute fonction ψ régulière

$$(1.23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial \psi}{\partial v} + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_j^k \frac{\partial \psi}{\partial \tau^k} \quad \text{sur } \Gamma, j = 1, \dots, n$$

où τ_j^k est la j -ième composante de τ^k .

On pose

$$(1.24) \quad \sigma_j \psi = \sum_{k=1}^{n-1} \tau_j^k \frac{\partial \psi}{\partial \tau^k}, \quad j = 1, \dots, n$$

et l'on a

$$(1.25) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial \psi}{\partial v} + \sigma_j \psi, \quad j = 1, \dots, n.$$

On a donc construit une famille $\{\sigma_j\}_{j=1}^n$ d'opérateurs différentiels tangentiels du 1^{er} ordre sur Γ .

On dénote par

$$(1.26) \quad \nabla_{\sigma} \varphi = \{ \sigma_j \varphi \}_{j=1}^n$$

le gradient tangentiel de φ sur Γ .

Lorsque la fonction φ vérifie

$$(1.27) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

on a, grâce à (1.25),

$$(1.28) \quad \nabla \varphi = \nabla_{\sigma} \varphi \quad \text{sur } \Gamma$$

et en particulier

$$(1.29) \quad |\nabla \varphi|^2 = |\nabla_{\sigma} \varphi|^2 = \sum_{j=1}^n |\sigma_j \varphi|^2 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Il est clair que pour tout Γ_0 , sous-ensemble ouvert de Γ , l'opérateur σ_j est continu de $H^1(\Gamma_0)$ sur $L^2(\Gamma_0)$ pour tout $j = 1, \dots, n$. On définit donc l'opérateur adjoint $\sigma_j^* : L^2(\Gamma_0) \rightarrow [H^1(\Gamma_0)]'$ et l'on pose

$$(1.30) \quad -\Delta_{\Gamma_0} = \sigma_j^* \sigma_j = \sum_{j=1}^n \sigma_j^* \sigma_j.$$

L'opérateur $-\Delta_{\Gamma_0}$ ainsi défini vérifie

$$(1.31) \quad \langle -\Delta_{\Gamma_0} \varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma_0} \nabla_{\sigma} \varphi \cdot \nabla_{\sigma} \psi \, d\Gamma \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Gamma_0).$$

On a en particulier

$$(1.32) \quad \langle -\Delta_{\Gamma_0} \varphi, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_0} |\nabla_{\sigma} \varphi|^2 \, d\Gamma \quad \forall \varphi \in H^1(\Gamma_0).$$

L'opérateur $-\Delta_{\Gamma_0} + I$ (I = Identité) définit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_0)$ sur $[H^1(\Gamma_0)]'$. On note que lorsque Γ_0 est une variété sans bord (c'est le cas par exemple si $\Gamma_0 = \Gamma$) on a $H^1(\Gamma_0) = H_0^1(\Gamma_0)$ et par conséquent $[H^1(\Gamma_0)]' = H^{-1}(\Gamma_0)$. ■

Ces notations étant précisées on peut maintenant démontrer l'identité suivante.

Lemme 1.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2 .
Soit $q \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^n$.

Alors, pour toute solution faible $\theta = \theta(x,t)$ de l'équation des ondes (1.5) on a l'identité

$$(1.33) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k [|\theta'|^2 - |\nabla_{\sigma} \theta|^2] d\Sigma &= (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt - \int_{\Omega} f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

Démonstration.

On procède en deux étapes.

Etape 1.

On suppose que les données $\{\theta^0, \theta^1, f\}$ sont régulières, par exemple, $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times H^1(\Omega) \times L^1(0, T ; H^1(\Omega))$ de sorte que la solution $\theta = \theta(x,t)$ soit régulière et les calculs suivants aient un sens.

On multiplie l'équation (1.5)₁ par $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ et l'on intègre sur $Q = \Omega \times [0, T]$. Il vient

$$(1.34) \quad \int_Q (\theta'' - \Delta \theta) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt.$$

On a d'autre part (avec la notation $(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi dx$)

$$(1.35) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T - \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt$$

et

$$(1.36) \quad \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt = \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\theta')^2 dx dt = -\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\theta'|^2 d\Sigma.$$

De (1.35) et (1.36) on déduit l'identité

$$(1.37) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\theta'|^2 d\Sigma.$$

On estime ensuite le terme

$$(1.38) \quad \int_Q \Delta \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_{\Sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma - \int_Q \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) dx dt = \\ = - \int_Q q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_k} dx dt - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \\ = - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\nabla \theta|^2 d\Sigma - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt.$$

En combinant (1.34), (1.37) et (1.38) on obtient (1.33). ■

Etape 2.

Le membre de droite de l'identité (1.33) est bien défini pour les solutions faibles,

c'est-à-dire, pour les solutions dans la classe (1.6) qui correspondent à des données

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Grâce à la propriété de continuité des solutions par rapport aux données du problème (1.8) on déduit, par approximation, que pour toute solution faible θ , on a

$$q_k v_k [|\theta'|^2 - |\nabla_\sigma \theta|^2] \in L^1(\Sigma)$$

et que l'identité (1.33) a lieu. ■

Remarque 1.5.

Dans le cas de la dimension $n = 1$, le terme

$$\int_{\Sigma} q_k v_k |\nabla_\sigma \theta|^2 d\Sigma$$

n'apparaît pas dans l'identité (1.33) et on a donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q v |\theta'|^2 d\Sigma = (\theta'(t), q \frac{\partial \theta}{\partial x}(t))_0^T +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x} [|\theta'|^2 + |\frac{\partial \theta}{\partial x}|^2] dx dt - \int_{\Omega} f q \frac{\partial \theta}{\partial x} dx dt. ■$$

Remarque 1.6.

Le résultat reste valable lorsque Ω est un domaine borné *convexe* de \mathbb{R}^n , sans hypothèses de régularité sur Γ autres que celles impliquées par la convexité. ■

1.4. Un théorème d'unicité. L'inégalité inverse.

Dans ce paragraphe on établit une estimation a priori (l'inégalité inverse) pour l'équation homogène

$$(1.39) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Phi(0) &= \Phi^0 ; \Phi'(0) = \Phi^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On reprend les notations du Chapitre I et pour $x^0 \in \mathbb{R}^n$ donné on pose donc

$$m(x) = x - x^0 ; R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |x - x^0| ;$$

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot \nu(x) > 0\} ; \Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0).$$

On a l'estimation suivante.

Lemme 1.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution faible Φ de (1.39) l'on ait

$$(1.40) \quad \begin{aligned} \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 &\leq C \left\{ \int_{\Sigma} m \cdot \nu [|\Phi'|^2 - |\nabla_{\sigma} \Phi|^2] d\Sigma + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} m \cdot \nu [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \right\}. \end{aligned}$$

(la démonstration qui suit fournit des estimations sur C).

Remarque 1.7.

Dans le cas de la dimension $n = 1$ le terme $\int_{\Sigma} m \cdot \nu |\nabla_{\sigma} \Phi|^2 d\Sigma$ n'apparaît pas dans l'expression et on a donc

$$(1.41) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \left\{ \int_{\Sigma} m \nu |\Phi'|^2 d\Sigma + \int_{\Gamma} m \nu [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \right\}.$$

En fait si $\Omega =]a_0, a_1[$,

$$\int_{\Gamma} m v |\Phi(0)|^2 d\Gamma = (a_1 - x^0) \Phi(a_1, 0)^2 - (a_0 - x^0) \Phi(a_0, 0)^2.$$

et formule analogue pour $\int_{\Gamma} m v |\Phi(T)|^2 d\Gamma$. ■

Démonstration.

1) On considère d'abord le cas $n > 1$.

On applique l'identité (1.39) avec $q = m, f \equiv 0$.

On obtient

$$(1.42) \quad X + \frac{n}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + \int_Q |\nabla \Phi|^2 dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m \cdot v [|\Phi'|^2 - |\nabla_{\sigma} \Phi|^2] d\Sigma$$

avec

$$(1.43) \quad X = (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))_0^T.$$

En multipliant l'équation (1.39)₁ par Φ et en intégrant sur Q on obtient

$$(1.44) \quad (\Phi'(t), \Phi(t))_0^T = \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt$$

ce qui, grâce à la loi de conservation de l'énergie, permet d'écrire (1.42) sous la forme

$$(1.45) \quad (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t))_0^T + TE_0 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v [|\Phi'|^2 - |\nabla_{\sigma} \Phi|^2] d\Sigma.$$

On majore ensuite le terme

$$(1.46) \quad Z(t) = |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t))| \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour $\alpha > 0$ on a

$$(1.47) \quad |Z(t)| \leq \alpha |\Phi'(t)|^2 + \frac{1}{4\alpha} |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t)|^2.$$

Par ailleurs

$$(1.48) \quad |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t)|^2 = |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 + \frac{(n-1)^2}{4} |\Phi(t)|^2 + \\ + (n-1)(m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t), \Phi(t)).$$

Mais

$$(1.49) \quad (m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t), \Phi(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\Phi(t)|^2 dx = -\frac{n}{2} |\Phi(t)|^2 + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} m_k v_k |\Phi(t)|^2 d\Gamma.$$

On a donc

$$(1.50) \quad |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t)|^2 \leq R(x^0)^2 |\nabla \Phi(t)|^2 + \frac{(1-n^2)}{4} |\Phi(t)|^2 + \\ + \frac{(n-1)}{2} \int_{\Gamma} m_k v_k |\Phi(t)|^2 d\Gamma.$$

En choisissant $\alpha = \frac{R(x^0)}{2}$ on en déduit de (1.47) et (1.50) :

$$(1.51) \quad |Z(t)| \leq R(x^0) E_0 - \frac{(n^2-1)}{8R(x^0)} |\Phi(t)|^2 + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma} m_k v_k |\Phi(t)|^2 d\Gamma$$

et par conséquent,

CONTROLE PAR NEUMANN

$$\begin{aligned}
 (1.52) \quad & |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-1}{2} \Phi(t))|_0^T \leq |Z(0)| + |Z(T)| \leq \\
 & \leq 2R(x^0)E_0 - \frac{(n^2-1)}{8R(x^0)} [|\Phi^0|^2 + |\Phi(T)|^2] + \\
 & + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma} m_k v_k [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \leq \\
 & \leq 2R(x^0)E_0 - \frac{(n^2-1)}{8R(x^0)} |\Phi^0|^2 + \\
 & + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma} m_k v_k [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma.
 \end{aligned}$$

En combinant (1.45) et (1.52) on trouve

$$\begin{aligned}
 (1.53) \quad & \frac{(n^2-1)}{8R(x^0)} |\Phi^0|^2 + (T - 2R(x^0)) E_0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_{\sigma} \Phi|^2] d\Sigma + \\
 & + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma} m_k v_k [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

2) Considérons le cas $n = 1$.

D'après la Remarque 1.5 on a l'identité :

$$(1.54) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v |\Phi'|^2 d\Sigma = (\Phi'(t), m \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t))|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 + |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2] dx dt.$$

On choisit $\gamma \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $\gamma T > T(x^0)$ et on écrit

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 + |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2] dx dt &= \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 + |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2] dx dt + \\
 &+ \frac{(1-\gamma)}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 - |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2] dx dt + \frac{(1-2\gamma)}{2} \int_{\Omega} |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2 dx dt
 \end{aligned}$$

et d'après (1.54) on a

$$(1.55) \quad X + \gamma TE_0 + \frac{(1-\gamma)}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 - |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2] dx dt + \frac{(1-2\gamma)}{2} \int_{\Omega} |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2 dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v |\Phi'|^2 d\Sigma$$

avec $X = (\Phi'(t), m \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t))|_0^T$. En négligeant le terme $\frac{(1-2\gamma)}{2} \int_{\Omega} |\frac{\partial \Phi}{\partial x}|^2 dx dt$ et en

utilisant (1.44) on obtient

$$(1.56) \quad \gamma TE_0 + (\Phi'(t), m \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) + \frac{(1-\gamma)}{2} \Phi(t))|_0^T \leq -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v |\Phi'|^2 d\Sigma$$

et en reprenant les estimations du cas $n > 1$ pour le terme

$$Z(t) = (\Phi'(t), m \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t) + \frac{(1-\gamma)}{2} \Phi(t))|_0^T$$

on trouve (1.41). ■

Théorème 1.1. (L'inégalité inverse).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution régulière Φ on ait

$$(1.57) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} |\nabla_{\sigma} \Phi|^2 d\Sigma \right\}.$$

Démonstration.

En négligeant les termes qui donnent une contribution négative dans le membre de droite de l'inégalité (1.40) on obtient

$$(1.58) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma + \int_{\Gamma(x^0)} (|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2) d\Gamma \right\}.$$

On observe ensuite qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de Φ telle que

$$(1.59) \quad \int_{\Gamma(x^0)} (|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2) d\Gamma \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi|^2] d\Sigma$$

et de (1.58) (1.59) on déduit le résultat. ■

Remarque 1.8.

Dans le cas de la dimension $n = 1$ on obtient évidemment

$$(1.60) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi|^2] d\Sigma. \quad ■$$

Remarque 1.9.

L'inégalité (1.57) n'est a priori valable que pour les solutions suffisamment régulières, par exemple dans la classe $C(0, T ; D(A)) \cap C^1(0, T ; H^1(\Omega))$.

En effet si Φ est une solution faible, on n'a pas d'estimations directes qui démontrent que les traces $\Phi|_{\Sigma(x^0)}$ et $\Phi|_{\Sigma_*(x^0)}$ appartiennent aux espaces $H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$ et $L^2(0, T ; H^1(\Gamma^*(x^0)))$ respectivement.

Cette remarque est sans objet lorsque $n = 1$; dans ce cas on a (1.60) pour toute solution faible. ■

Remarque 1.10.

Le résultat précédent a été démontré dans J.L. LIONS [3] en utilisant des arguments de compacité et des principes de prolongement unique. La démonstration présentée ici est due à Y. KOMORNÍK [1] qui a observé l'estimation intermédiaire (1.40). ■

Du Théorème 1.1 on déduit immédiatement le résultat d'unicité suivant.

Corollaire 1.1. (Théorème d'unicité).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Si Φ est une solution régulière de (1.39) telle que

$$(1.61) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \quad \nabla_\sigma \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

on a alors $\Phi = 0$. ■

Remarque 1.11.

Ce résultat d'unicité sera amélioré dans le paragraphe 1.10 moyennant le Théorème d'Holmgren. ■

Toutefois, on peut déduire de l'inégalité (1.40) un résultat d'unicité d'un type peut être inhabituel.

Supposons que Φ soit une solution régulière de (1.39) telle que

$$(1.62) \quad \begin{aligned} \Phi(0) = \Phi(T) &= 0 && \text{sur } \Gamma(x^0) \\ |\Phi'| &\leq |\nabla_\sigma \Phi| && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ |\Phi'| &\geq |\nabla_\sigma \Phi| && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

alors nécessairement $\Phi = 0$. ■

Considérons maintenant le cas particulier d'un ouvert étoillé par rapport à x^0 , c'est à dire telle que $\Gamma(x^0) = \Gamma$. On a alors le résultat suivant.

Corollaire 1.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 , étoillé par rapport à $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution régulière Φ de (1.39) on ait

$$(1.63) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma} (|\Phi'|^2 + |\Phi|^2) d\Sigma.$$

Remarque 1.12.

Les résultats démontrés dans ce paragraphe s'appliquent aussi lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^n , sans autre hypothèse de régularité sur Γ . En particulier, le Corollaire 1.2 reste valable puisque, lorsque Ω est convexe, il est étoilé par rapport à tout point $x^0 \in \Omega$. ■

1.5. Mise en place de la méthode HUM.

Les estimations a priori démontrées dans le paragraphe précédent nous permettent d'aboutir à la contrôlabilité exacte du système (1.1)(1.2)(1.3). On applique la méthode HUM. ■

On se donne donc $T > T(x^0) = 2R(x^0)$ et on résout le système homogène

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Phi(0) &= \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

avec des données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times C^\infty(\bar{\Omega})$. Grâce à l'inégalité inverse (Théorème 1.1) l'expression

$$(1.65) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} (|\Phi'|^2 + |\Phi|^2) d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

définit une *norme* dans $(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times C^\infty(\bar{\Omega})$.

On définit alors *l'espace de Hilbert*

$$F = \{ \text{complété de } (C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ pour la norme } \|\cdot\|_F \}.$$

Par ailleurs, de l'inégalité inverse on déduit que

$$(1.66) \quad F \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et par conséquent

$$(1.67) \quad [H^1(\Omega)]' \times L^2(\Omega) \subset F'. \quad \blacksquare$$

Considérons $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$. On a alors

$$\Phi|_{\Sigma(x^0)}, \Phi'|_{\Sigma(x^0)} \in L^2(\Sigma(x^0)) \text{ et } \nabla_\sigma \Phi|_{\Sigma_*(x^0)} \in (L^2(\Sigma_*(x^0)))^n$$

(c'est la définition de F !). On veut maintenant introduire ψ solution de

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

(1.68)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} \Phi' && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &\quad \Delta_{\Gamma_*(x^0)} \Phi && \text{sur } \Sigma_*(x^0). \end{aligned}$$

Il faut prendre garde dans ce qui suit : les dérivées apparaissant dans les conditions aux limites de (1.68) *ne sont pas prises au sens des distributions*.

La solution ψ de (1.68) est définie par la méthode de transposition (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1]). Précisons cela. On considère $f \in L^1(0, T ; H^1(\Omega))$, $\{\theta^0, \theta^1\} \in F$. On définit θ par

$$\theta'' - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(1.69) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1.$$

Multiplications (1.69) par ψ et intégrons par parties *formellement*.

Il vient :

$$\int_Q f \psi \, dx \, dt = -(\theta^1, \psi(0)) + (\theta^0, \psi'(0)) + \int_\Sigma \theta \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, d\Sigma.$$

On remplace $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ par sa valeur – et ici les dérivées ne sont pas prises au sens des distributions. Alors

$\int_{\Sigma} \theta \frac{\partial \psi}{\partial v} d\Sigma$ est remplacé par

$$-\int_{\Sigma(x^0)} (\theta \Phi + \theta' \Phi') d\Sigma - \int_{\Sigma_*(x^0)} \nabla_\sigma \theta \cdot \nabla_\sigma \Phi d\Sigma.$$

Cela conduit à définir la forme linéaire $L(f, \theta^0, \theta^1)$ continue sur $L^1(0, T; H^1(\Omega)) \times F$ par

$$(1.70) \quad L(f, \theta^0, \theta^1) = -\int_{\Sigma(x^0)} (\theta \Phi + \theta' \Phi') d\Sigma - \int_{\Sigma_*(x^0)} \nabla_\sigma \theta \cdot \nabla_\sigma \Phi d\Sigma.$$

On a *formellement*

$$(1.71) \quad \int_0^T \int_{\Omega} f \psi dx dt + (\psi(0), \theta^1) - (\psi'(0), \theta^0) = L(f, \theta^0, \theta^1).$$

On définit maintenant $\psi, \varrho^1, \varrho^0$ par

$$\int_0^T \int_{\Omega} \psi f dx dt + (\varrho^0, \theta^1) - (\varrho^1, \theta^0) = L(f, \theta^0, \theta^1)$$

$$(1.72) \quad \psi \in L^\infty(0, T ; (H^1(\Omega))')$$

$$\{ \varrho^1, -\varrho^0 \} \in F'.$$

Reste maintenant à vérifier, *à partir de la définition* (1.72), *à quel sens* ψ est solution de (1.68) et si l'on a, dans un sens convenable, $\psi(0) = \varrho^0, \psi'(0) = \varrho^1$.

On a le

Lemme 1.5.

Il existe une solution unique ψ du problème (1.68), prise au sens (1.72) ; cette solution vérifie

$$(1.73) \quad \begin{aligned} \psi &\in L^\infty(0, T ; (H^1(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0, T ; (D(A))') \\ \{\psi'(0), -\psi(0)\} &\in F'. \end{aligned}$$

En outre, l'application $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F \rightarrow \{\psi'(0), -\psi(0)\} \in F'$ est linéaire et continue pour les topologies correspondantes. ■

Démonstration.

On note d'abord que la solution θ de (1.69) vérifie $\theta = \theta_1 + \theta_2$, où θ_1 et θ_2 désignent respectivement les solutions de

$$\theta_1'' - \Delta \theta_1 = 0$$

$$(1.74) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} &= 0 \\ \theta_1(0) &= \theta^0; \theta_1'(0) = \theta^1 \end{aligned}$$

et

$$(1.75) \quad \begin{aligned} \theta_2'' - \Delta \theta_2 &= f \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial v} &= 0 \\ \theta_2(0) &= \theta_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.1 on a

$$(1.76) \quad \|\theta_2\|_{L^\infty(0, T ; D(A))} + \|\theta_2'\|_{L^\infty(0, T ; H^1(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^1(0, T ; H^1(\Omega))}$$

et par conséquent, en particulier,

$$(1.77) \quad \|\theta_2\|_{H^1(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T ; H^1(\Omega))}.$$

On définit la forme linéaire

$$(1.78) \quad L(\theta^0, \theta^1, f) = \int_{\Sigma(x^0)} (\Phi \theta + \Phi' \theta') d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma \theta d\Sigma$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma(x^0)} (\Phi \theta_i + \Phi' \theta'_i) d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma \theta_i d\Sigma.$$

On a évidemment

$$(1.79) \quad |L(\theta^0, \theta^1, f)| \leq C \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} (|\theta_i|^2 + |\theta'_i|^2) d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} |\nabla_\sigma \theta_i|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

où $C = \text{constante qui dépend uniquement de } \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F$.

Par construction de l'espace F et de (1.77) on obtient donc

$$(1.80) \quad |L(\theta^0, \theta^1, f)| \leq C \left\{ \|\{\theta^0, \theta^1\}\|_F^2 + \|f\|_{L^1(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right\}^{1/2}.$$

De (1.80) on déduit donc l'existence et unicité de $\{\psi, \varrho^1, \varrho^0\}$ tels que

$$(1.81) \quad \int_Q \psi f dx dt - (\varrho^1, \theta^0) + (\varrho^0, \theta^1) = - \int_{\Sigma(x^0)} (\Phi \theta + \Phi' \theta') d\Sigma - \int_{\Sigma_*(x^0)} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma \theta d\Sigma$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1\} \in F, f \in L^1(0, T; H^1(\Omega))$$

avec

$$(1.82) \quad \psi \in L^\infty(0, T; (H^1(\Omega))')$$

et

$$(1.83) \quad \{\varrho^1, -\varrho^0\} \in F'.$$

(Noter que l'intégrale $\int_Q \psi f dx dt$ doit être interprétée au sens de la dualité entre $L^\infty(0, T; [H^1(\Omega)]')$ et $L^1(0, T; H^1(\Omega))$).

Par ailleurs, lorsque

$$(1.84) \quad f = \frac{d}{dt} g ; g \in C^\infty([0, T] ; D(A)) ; \theta^0 = \theta^1 = 0$$

grâce à la Remarque 1.1 on a

$$(1.85) \quad |L(0, 0, f)| \leq C \|g\|_{L^1(0, T; D(A))}$$

et par conséquent

$$(1.86) \quad \psi \in W^{1,\infty}(0, T ; [D(A)]').$$

Le lemme sera donc démontré si l'on donne un sens aux traces $\{\psi(0), \psi'(0)\}$ et si l'on prouve que

$$(1.87) \quad \psi(0) = \varrho^0, \quad \psi'(0) = \varrho^1.$$

Pour cela, on introduit une fonction propre m quelconque de $-\Delta$ avec la condition aux limites de Neumann :

$$(1.88) \quad \begin{aligned} -\Delta m &= \lambda m && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial m}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

et l'on prend

$$(1.89) \quad \begin{aligned} f &= g(t)m, \quad \theta^0 = \alpha_0 m, \quad \theta^1 = \alpha_1 m, \\ g &\text{ fonction régulière sur } [0, T], \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors

$$(1.90) \quad \begin{aligned} \theta &= h(t)m, \\ h'' + \lambda h &= g, \\ h(0) &= \alpha_0, \quad h'(0) = \alpha_1. \end{aligned}$$

On utilise maintenant (1.72). On pose :

$$(1.91) \quad \begin{aligned} \xi_0(t) &= - \int_{\Gamma(x^0)} \Phi m \, d\Gamma - \int_{\Gamma(x^0)} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma m \, d\Gamma \\ \xi_1(t) &= - \int_{\Gamma(x^0)} \Phi' m \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Alors (1.72) donne

$$(1.92) \quad \int_0^T (\psi, m) g dt + \alpha_1(\varrho^0, m) - \alpha_0(\varrho^1, m) = \int_0^T (\xi_0 h + \xi_1 h') dt.$$

Attention. Dans le 2^e membre la dérivée en t n'est pas prise au sens des distributions.
Le 2^e membre vaut en fait

$$(1.93) \quad = \int_0^T (\xi_0 h - \frac{d\xi_1}{dt} h) dt.$$

On déduit alors de (1.92) (puisque $g = h'' + \lambda h$) que

$$(1.94) \quad (\psi, m)'' + \lambda(\psi, m) = \xi_0 - \frac{d\xi_1}{dt}$$

et cela $\forall m$ avec (1.88). Cela justifie (1.70).

En outre on peut maintenant donner un sens à $\psi(0), \psi'(0)$, puisque – en particulier – $(\psi, m)(0), (\psi', m)(0)$ a un sens $\forall m$.

Mais reprenant (1.92) on en déduit

$$-(\psi, m)(0) h'(0) + (\psi, m)'(0) h(0) + \alpha_1(\varrho^0, m) - \alpha_0(\varrho^1, m) = 0$$

i.e.

$$\alpha_1[(\varrho^0, m) - (\psi, m)(0)] - \alpha_0[(\varrho^1, m) - (\psi, m)'(0)] = 0 \quad \forall \alpha_0, \alpha_1.$$

Donc

$$(1.95) \quad (\psi, m)(0) = (\varrho^0, m), (\psi, m)'(0) = (\varrho^1, m) \quad \forall m$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 1.13.

Il faut bien prendre soin au fait que les dérivées dans les conditions aux limites (1.68) ne sont pas prises au sens des distributions.

Par conséquent dans la formule (1.70), $t = 0$ et $t = T$ jouent des rôles particuliers.

On *ne peut donc* conclure du raisonnement précédent que

$$(1.96) \quad \{\psi', -\psi\} \in L^\infty(0, T; F').$$

mais cette "propriété" n'est pas utilisée ! Ce qui compte c'est que $\{\psi'(0), -\psi(0)\}$ soit défini sans ambiguïté, et soit un élément de F' .

Un problème reste ouvert : l'espace F est-il indépendant de T pour T assez grand ? cf. les problèmes ouverts dans le dernier N° du présent chapitre. ■

Remarque 1.14.

On vient de voir qu'il faut prendre de grandes précautions avec ψ' .

On retrouvera cela, dans une situation différente, dans les exemples ultérieurs des chapitres suivants, par exemple au Chapitre IV, N° 4.

Mais la solution ψ est plus régulière que ne l'indique le Lemme 1.5.

On a en effet

$$F' \subset [D(A^{(1+s)/2})]^\circ \times (H^s(\Omega))^\circ, \quad \forall s > \frac{1}{2}$$

puisque

$$D(A^{(1+s)/2}) \times (H^s(\Omega)) \subset F$$

et par conséquent

$$(1.97) \quad (\psi \in L^\infty(0, T ; (H^s(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0, T ; (D(A^{(1+s)/2}))')) , \quad \forall s > \frac{1}{2} .$$

En effet, lorsque

$$\{\Phi^0, \Phi^1\} \in D(A^{(1+s)/2}) \times H^s(\Omega), \quad \text{avec } s > \frac{1}{2}$$

la solution $\Phi = \Phi(x, t)$ de (1.64) vérifie

$$\Phi \in C(0, T ; D(A^{(1+s)/2})) \cap C^1(0, T ; H^s(\Omega))$$

et par conséquent

$$\Phi \in H^1(\Sigma).$$

Ceci implique, en particulier, pour chaque $s > \frac{1}{2}$, l'existence d'une constante $C_s > 0$ telle que

$$\|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F \leq C_s \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_{D(A^{(1+s)/2}) \times H^s(\Omega)}$$

et donc

$$D(A^{(1+s)/2}) \times H^s(\Omega) \subset F, \quad \forall s > \frac{1}{2}.$$

La régularité maximale de ψ n'est pas une question indispensable. En revanche, on note que par *construction*, on a le résultat essentiel :

$$\{\psi'(0), -\psi(0)\} \in F'. \quad \blacksquare$$

Le lemme étant démontré on définit l'opérateur

$$(1.98) \quad \Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \} \quad \forall \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F.$$

Du lemme précédent on déduit que l'opérateur Λ est continue de F dans F' .

Par ailleurs en prenant dans (1.72),

$$f = 0, \theta^0 = \Phi^0; \theta^1 = \Phi^1$$

on obtient

$$(1.99) \quad \begin{aligned} <\Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \}> &= <\psi'(0), \Phi^0> - <\psi(0), \Phi^1> = \\ &= \int_{\Sigma(x_0)} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2) d\Sigma + \int_{\Sigma^*(x_0)} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma \quad \forall \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F \end{aligned}$$

et par conséquent Λ est un isomorphisme de F sur F' .

Alors, pour tout couple de données initiales

$$\{ y^1, -y^0 \} \in F'$$

il existe une solution unique du problème

$$(1.100) \quad \begin{aligned} \Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \} &= \{ y^1, -y^0 \} \\ \{ \Phi^0, \Phi^1 \} &\in F \end{aligned}$$

ce qui implique que ψ solution de (1.68), associé aux données $\{ \Phi^0, \Phi^1 \}$ solution de (1.100), vérifie

$$\psi(0) = y^0; \psi'(0) = y^1. \quad \blacksquare$$

1.6. Contrôlabilité exacte sans conditions géométriques.

Dans ce paragraphe on donne le premier résultat de contrôlabilité exacte pour le système (1.1) (1.2) (1.3).

On étudie donc le système

$$(1.101) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v_0 && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ v_1 & && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 1.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(1.102) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))'$$

il existe un contrôle

$$(1.103) \quad \begin{aligned} v_0 &\in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]' \\ v_1 &\in L^2(0, T ; [H^1(\Gamma^*(x^0))]') \end{aligned}$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (1.101) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

D'après

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))'$$

et

$$(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega) \subset F'$$

on a

$$\{y^1, -y^0\} \in F'.$$

Par conséquent l'équation (1.99) a une solution unique $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$ de sorte que la solution ψ du problème (1.70) associé vérifie

$$\psi(0) = y^0; \psi'(0) = y^1.$$

On définit donc les contrôles

$$(1.104) \quad v_0 = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi') \\ v_1 = \Delta_{\Gamma^*(x^0)}\Phi$$

où Φ est la solution de (1.64) qui correspond aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$.

On note que

$$v_0 \in [H^1(0, T; L^2(x^0))]'; v_1 \in L^2(0, T; [H^1(\Gamma^*(x^0))]').$$

La solution $y = y(v)$ du problème (1.101) correspondant est unique ; on a en fait

$$y = \psi$$

et par conséquent

$$y(T) = \psi(T) = 0; y'(T) = \psi'(T) = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 1.15.

On a en fait la contrôlabilité exacte dans l'espace des données initiales $\{y^0, y^1\}$ telles que

$$\{y^1, -y^0\} \in F'.$$

On a démontré que $[H^1(\Omega)]' \times L^2(\Omega) \subset F'$.

L'espace F n'est pas nécessairement identifiable en termes d'espaces fonctionnels

classiques. On a néanmoins donné dans la Remarque 1.14 une estimation dans l'autre sens, de manière à "encadrer" les espaces F et F' . En effet, on a démontré

$$(1.105) \quad D(A^{(1+s)/2}) \times H^s(\Omega) \subset F \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega) \subset F' \subset (D(A^{(1+s)/2}))' \times (H^s(\Omega))', \forall s > \frac{1}{2}$$

■

Remarque 1.16.

Les contrôles v_0 et v_1 ne sont pas indépendants. En effet, ils sont définis dans (1.104) au moyen d'une fonction Φ unique, solution de (1.64).

Cependant, on observe une structure différente du contrôle dans chacune des composantes v_0 et v_1 qui correspondent respectivement aux parties $\Sigma(x^0)$ et $\Sigma^*(x^0)$ de la frontière latérale Σ .

■

Remarque 1.17.

La solution $y = y(v)$ de (1.101) vérifie l'équation au sens faible suivant.

On pose $\Phi = w$ de sorte que

$$v_0 = -w + \frac{\partial}{\partial t} w', \quad v_1 = \Delta_{\Gamma_*(x^0)} w.$$

On a alors

$$(1.106) \quad \int_Q y f dx dt = \langle y^0, \theta'(0) \rangle - \langle y^1, \theta(0) \rangle + \int_{\Sigma(x^0)} (w\theta + w'\theta') d\Sigma + \int_{\Gamma_*(x^0)} \nabla_\sigma w \cdot \nabla_\sigma \theta d\Sigma$$

$$\forall (\theta^0, \theta^1, f) \in D(A) \times H^1(\Omega) \times L^1(0, T ; H^1(\Omega))$$

où $\theta = \theta(x, t)$ désigne la solution de (1.69).

■

Remarque 1.18.

Le Théorème reste valable lorsque Ω est un domaine borné et convexe de \mathbb{R}^n , sans autre hypothèse de régularité sur Γ .

■

Remarque 1.19.

Si dans l'application de HUM on remplace l'espace F complété de $(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A) \times C^\infty(\bar{\Omega}))$ par rapport à la norme

$$\| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F = \left(\int_{\Sigma(x^0)} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2) d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma \right)^{1/2}$$

par l'espace

$$F_1 = \text{complété de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ par rapport à la norme } \| \cdot \|_F,$$

on a, grâce à l'inégalité inverse,

$$F_1 \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et donc

$$H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F_1.$$

On obtient, de cette manière, la contrôlabilité exacte des données

$$\{ y^0, y^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

■

1.7. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques.

Dans ce paragraphe on suppose

$$(1.107) \quad \Omega \text{ est étoilé par rapport à } x^0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{i.e.} \quad \Gamma^*(x^0) = \emptyset, \quad \Gamma(x^0) = \Gamma.$$

On aura cette fois une structure uniforme du contrôle sur toute la frontière Σ .

On considère le problème

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans}$$

$$(1.108) \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \quad \text{sur } \Sigma$$

$$y(0) = y^0; \quad y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Comme une conséquence immédiate du Théorème précédent on a le

Théorème 1.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , étoilé par rapport à $x^0 \in \Omega$ et de frontière Γ de classe C^2 . Soit $T > T(x^0)$.

Alors pour tout couple de données initiales

$$(1.109) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'$$

il existe un contrôle

$$(1.110) \quad v \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (1.108) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.2.

En effet, du fait que Ω est étoilé par rapport à $x^0 \in \Omega$ on a $\Gamma(x^0) = \Gamma$ et $\Gamma^*(x^0) = \emptyset$.

On a alors $v = v_0 = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi')$ sur Σ . ■

Avec la technique de changement des normes introduites dans les Chapitres I et II on peut donner diverses variantes de ce résultat. On commence par un cas qui correspond à un choix d'une norme $\|\cdot\|_F$ plus forte. ■

1.8. Normes plus fortes.

On donne d'abord une variante de l'estimation obtenue dans le Théorème 1.1 concernant le problème

$$\Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.111) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Théorème 1.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ de classe C^2 et étoilé par rapport à $x^0 \in \Omega$. Soit $T > T(x^0)$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution régulière Φ de (1.111) on ait

$$(1.112) \quad \|\Phi^0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2 + |\Phi''|^2) d\Sigma.$$

Démonstration.

On prend des données initiales régulières $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times D(A)$ et on définit

$$(1.113) \quad w^0 = \Phi^1, \quad w^1 = \Delta\Phi^0$$

On a

$$w^0 \in D(A), \quad w^1 \in H^1(\Omega)$$

et donc la solution du problème

$$w'' - \Delta w = 0$$

$$(1.114) \quad \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0$$

$$w(0) = w^0; \quad w'(0) = w^1$$

est régulière.

Grâce au Théorème 1.1 on a

$$(1.115) \quad \|w^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |w^1|^2 \leq C \int_{\Sigma} (|w|^2 + |w'|^2) d\Sigma.$$

On observe que $w = \Phi'$. On a donc

$$(1.116) \quad |\Delta\Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma} (|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2) d\Sigma.$$

On applique maintenant le Théorème 1.1 à la solution Φ directement et on obtient

$$(1.117) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2) d\Sigma.$$

En combinant (1.116) (1.117) on en déduit

$$(1.118) \quad |\Delta\Phi^0|^2 + \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2 + |\Phi''|^2) d\Sigma$$

ce qui achève la démonstration puisque la norme $(|\Delta\Phi^0|^2 + \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2)^{1/2}$ est équivalente à la norme induite par $H^2(\Omega)$ sur $D(A)$. ■

De l'estimation précédente on déduit le résultat de contrôlabilité exacte suivant

Théorème 1.5.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , étoilé par rapport à $x^0 \in \Omega$ et de frontière Γ de classe C^2 . Soit $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(1.119) \quad \{y^0, y^1\} \in [H^1(\Omega)]' \times [D(A)]'$$

Il existe un contrôle

$$(1.120) \quad v \in [H^2(0, T ; L^2(\Gamma))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (1.108) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

On applique HUM.

On résout d'abord le problème (1.111) avec des données initiales régulières $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times D(A)$. On construit ensuite l'espace F complété de $(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap D(A)) \times D(A)$ par rapport à la norme

$$(1.121) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\{ \int_{\Sigma} (|\Phi|^2 + |\Phi'|^2 + |\Phi''|^2) d\Sigma \right\}^{1/2}.$$

D'après (1.112) on a

$$(1.122) \quad F \subset D(A) \times H^1(\Omega)$$

et donc

$$(1.123) \quad [D(A)]' \times [H^1(\Omega)]' \subset F'$$

On résout ensuite le problème rétrograde

$$(1.124) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'') && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

les dérivées $\frac{\partial}{\partial t} (\Phi')$ (resp. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'')$) étant prises au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\Gamma))$ (resp. $H^2(0, T ; L^2(\Gamma))$) et son dual.

On démontre, par la même technique qu'au Lemme 1.5, qu'il existe une solution unique de (1.124) (dans un sens faible convenable) avec

$$(1.125) \quad \{\psi'(0), -\psi(0)\} \in F'.$$

On définit l'opérateur $\Lambda : F \rightarrow F'$ tel que

$$(1.126) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\} \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$$

et on vérifie que

$$(1.127) \quad \langle \Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F^2.$$

Par conséquent Λ est un isomorphisme de F sur F' .

Pour des données initiales $\{ y^0, y^1 \} \in [H^1(\Omega)]' \times [D(A)]'$ on a

$$\{ y^1, -y^0 \} \in F'$$

et donc le problème

$$\Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

admet une solution unique $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F$.

On définit alors le contrôle

$$(1.128) \quad v = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'') \quad \text{sur } \Sigma$$

et on voit, comme d'habitude, que la solution $y = y(v)$ associée vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

On donne maintenant un exemple où l'on prend une norme plus faible.

1.9. Affaiblissement de la norme.

L'estimation de base est dans ce cas la suivante :

Théorème 1.6.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ de classe C^2 . On suppose que Ω est étoillé par rapport à $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution Φ de (1.111) on ait :

$$(1.129) \quad \|\Phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{(H^1(\Omega))'}^2 \leq C \int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma.$$

Démonstration.

On procède en plusieurs étapes .

Etape 1.

On se donne $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))'$ avec

$$(1.130) \quad m(\Phi^1) = \text{moyenne de } \Phi^1 = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Phi^1 dx = 0.$$

(cela a un sens : $\int_{\Omega} \Phi^1 dx = \langle \Phi^1, 1 \rangle, 1 \in H^1(\Omega)$).

On construit alors $\chi \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\Delta \chi = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.131) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$m(\chi) = 0 .$$

On note que les normes $\|\chi\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\Phi^1\|_{(H^1(\Omega))'}$ sont alors équivalentes.

Soit $\Phi = \Phi(x,t)$ la solution de (1.111) qui correspond aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ et soit

$$(1.132) \quad w(t) = \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma + \chi.$$

On observe que w est solution de

$$w'' - \Delta w = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.133) \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$w(0) = \chi ; w'(0) = \Phi^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si Φ^0 et Φ^1 sont assez régulières, et donc aussi x et Φ^0 , l'inégalité inverse est vérifiée et alors

$$(1.134) \quad \|x\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^0|^2 \leq C \int_{\Sigma} (|w|^2 + |w'|^2) d\Sigma.$$

Supposons démontrée l'existence de $C > 0$, indépendante de w , telle que

$$(1.135) \quad \int_{\Sigma} |w|^2 d\Sigma \leq C \int_{\Sigma} |w'|^2 d\Sigma.$$

Alors, comme $w' = \Phi$,

$$(1.136) \quad |\Phi^0|^2 + \|x\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma.$$

On démontre (1.135) par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une suite $\{w_n, x_n, \Phi_n^0\}$ telle que

$$(1.137) \quad \begin{aligned} \int_{\Sigma} |w_n|^2 d\Sigma &= 1 \\ \int_{\Sigma} |w_n'|^2 d\Sigma &\rightarrow 0, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

D'après (1.134) on a alors

$$x_n \text{ borné dans } H^1(\Omega); \Phi_n^0 \text{ borné dans } L^2(\Omega),$$

et donc, les solutions w_n correspondantes sont bornées dans

$$L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Quitte à extraire des sous-suites, on a donc

$$(1.138) \quad \begin{aligned} w_n &\rightarrow w && \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible *} \\ w_n' &\rightarrow w' && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible *}. \end{aligned}$$

La fonction w est évidemment solution de

$$w'' - \Delta w = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.139) \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$w(0) = \chi ; w'(0) = \Phi^0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $\{\chi, \Phi^0\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est la limite faible de $\{\chi_n, \Phi_n^0\}$ dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Par ailleurs, de (1.138) on déduit que la suite de traces $w_n|_{\Sigma}$ est relativement compacte $L^2(\Sigma)$. On a donc

$$(1.140) \quad \int_{\Sigma} |w|^2 d\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} |w_n|^2 d\Sigma = 1$$

et d'autre part

$$(1.141) \quad w'|_{\Sigma} = 0 .$$

Alors la fonction $\theta = w'$ vérifie

$$\theta'' - \Delta \theta = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.142) \quad \theta = \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\theta \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Grâce au Théorème d'unicité de Holmgren (cf. Chap. I, N° 8) on a

$$(1.143) \quad \theta = 0$$

et donc

$$(1.144) \quad w(t) = w(0) = \chi \quad \forall t \in [0, T].$$

Mais grâce à l'équation (1.139) on a aussi,

$$(1.145) \quad \Delta \chi = 0 ; \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

ce qui implique $\chi = \text{const}$. Mais d'autre part, comme $m(\chi_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a $m(\chi) = 0$ et donc $\chi = 0$, donc $w = 0$ ce qui contredit (1.140). ■

Etape 2.

Considérons maintenant le cas général $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'$ sans la condition (1.130), et soit Φ la solution correspondante de (1.111). On va voir qu'il existe une constante $C > 0$ de $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ telle que

$$(1.146) \quad |m(\Phi^1)|^2 \leq C \int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma.$$

On raisonne par l'absurde. Si (1.146) n'est pas vérifié on peut trouver une suite $\{\Phi_n^0, \Phi_n^1\}$ telle que

$$(1.147) \quad m(\Phi_n^1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$(1.148) \quad \int_{\Sigma} |\Phi_n|^2 d\Sigma \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

On considère $\theta_n = \Phi_n - t m(\Phi_n^1)$ solution de

$$\theta_n'' - \Delta \theta_n = 0$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial \nu} = 0$$

$$\theta_n(0) = \Phi_n^0 ; \theta_n'(0) = \Phi_n^1 - m(\Phi_n^1)$$

à laquelle on peut appliquer (1.136). Donc

$$(1.149) \quad \{\Phi_n^0, \Phi_n^1 - m(\Phi_n^1)\} \text{ bornée dans } L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'.$$

De (1.147) et (1.149) on déduit que

$$(1.150) \quad \{\Phi_n^0, \Phi_n^1\} \text{ bornée dans } L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'$$

et donc les solutions (Φ_n) correspondantes sont bornées dans

$$L^\infty(0, T ; L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T ; [H^1(\Omega)]').$$

Quitte à extraire des sous-suites on a donc

$$\Phi_n \rightarrow \Phi \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T ; L^2(\Omega)) \quad \text{faible *}$$

$$(1.151) \quad \Phi_n' \rightarrow \Phi' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T ; [H^1(\Omega)]') \quad \text{faible *}$$

et grâce à (1.147) (1.148),

$$(1.152) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma ; m(\Phi^1) = 1.$$

En outre, Φ est une solution de

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et d'après (1.152) par unicité,

$$(1.153) \quad \Phi \equiv 0$$

ce qui contredit $m(\Phi^1) = 1$, car $\Phi'(0) = \Phi^1 = 0$.

On décompose maintenant la solution Φ de la manière suivante

$$(1.154) \quad \Phi = \theta + t m(\Phi^1) , \quad \theta = \Phi - t m(\Phi^1)$$

de façon que

$$(1.155) \quad \theta'(0) = \Phi^1 - m(\Phi^1).$$

On peut donc appliquer (1.136) à θ et l'on a

$$(1.156) \quad |\Phi^0|^2 + \|\Phi^1 - m(\Phi^1)\|_{[H^1(\Omega)]}^2 \leq C \int_{\Sigma} |\theta|^2 d\Sigma \leq C \{ \int_{\Sigma} |\Phi|^2 + \int_{\Sigma} |t m(\Phi^1)|^2 d\Sigma \} \leq \\ \leq C \int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma + C_1 |m(\Phi^1)|^2$$

avec C_1 assez grand (dépendant uniquement de C et de la mesure de Σ).

En combinant (1.156) avec (1.146) on obtient

$$(1.157) \quad |\Phi^0|^2 + \|\Phi^1 - m(\Phi^1)\|_{[H^1(\Omega)]}^2 + |m(\Phi^1)|^2 \leq C \int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma$$

et donc le résultat . ■

A partir de cette estimation on a le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 1.7.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , étoilé par rapport à $x^0 \in \Omega$ et de frontière Γ de classe C^2 . Soit $T > T(x^0)$.

Alors pour tout couple de données initiales

$$(1.158) \quad \{y^0, y^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(1.159) \quad v \in L^2(\Sigma)$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (1.108) satisfait à $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

Dans ce cas la norme considérée est

$$(1.160) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := (\int_{\Sigma} |\Phi|^2 d\Sigma)^{1/2}.$$

Grâce au Théorème 1.6 l'espace F , complété de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ par rapport à cette norme, vérifie

$$(1.161) \quad F \subset L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'$$

et donc

$$(1.162) \quad L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \subset F'.$$

On considère ensuite le problème rétrograde

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.163) \quad \psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\Phi \quad \text{sur } \Sigma.$$

On définit ensuite l'opérateur \wedge habituel et on voit que c'est un isomorphisme de F sur F' .

On aboutit donc à la contrôlabilité exacte des données $\{y^1, -y^0\} \in F'$ et en particulier, grâce à (1.162), des données $\{y^0, y^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. ■

Remarque 1.20.

Les résultats précédents s'appliquent lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^n sans autre hypothèse de régularité sur Γ , et avec $x^0 \in \Omega$ quelconque. On a donc contrôlabilité exacte pour tout $T > T(\Omega) = \min_{x^0 \in \Omega} T(x^0) = \text{diamètre de } \Omega$. ■

1.10. Quelques commentaires.

1.10.1. Autres conditions aux limites.

Il faut noter que dans tous les résultats de contrôlabilité exacte qui précèdent *le contrôle ν est appliqué sur toute la frontière latérale Σ du système*. La contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces fonctionnels classiques (par exemple dans $L^2(\Omega) \times [H^1(\Omega)]'$) par action du type Neumann *sur une partie de la frontière*, c'est-à-dire avec des conditions aux limites

$$(1.164) \quad \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[\subset \Sigma \\ \frac{\partial y}{\partial v} = 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases}$$

est un problème ouvert, au moins dans le cadre général considéré dans ce N°.

Dans l'Appendice II de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, le problème est résolu pour des ouverts Ω à frontière analytique.

Toutefois, dans le paragraphe 1.10.4 qui suit, on démontrera que pour tout $T > 0$ assez grand et $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ouvert non vide quelconque, la contrôlabilité exacte a lieu dans un espace hilbertien F' . La question qui se pose est donc l'obtention d'informations sur cet espace et l'étude de son éventuelle dépendance par rapport à T et Γ_0 .

On rappelle que lorsqu'il s'agit de l'équation des ondes avec conditions aux limites de Dirichlet la contrôlabilité exacte dans les espaces classiques – $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ par exemple – a lieu au moyen de l'action du contrôle *sur une partie de frontière de la forme* $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$ pour $T > T(x^0)$. ■

1.10.2. Existence d'une infinité de contrôles.

En utilisant les arguments de la Remarque 6.2 du Chap. I, on peut démontrer, pour chaque situation des paragraphes précédents où l'on avait la contrôlabilité exacte, l'*existence d'une infinité de contrôles* ramenant le système à l'état d'équilibre. ■

Considérons, pour fixer les idées, la situation du Théorème 1.7. Dans ce cas on a

(1.165) pour chaque couple de données initiales $\{y^0, y^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe une infinité de contrôles $v \in L^2(\Sigma)$ qui ramènent le système à l'état d'équilibre à l'instant $T > T(x^0)$.

Autrement dit, l'ensemble convexe de contrôles admissibles

$$(1.166) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma) / y(T; v) = y'(T; v) = 0\}$$

admet une infinité d'éléments, pour chaque couple de données $\{y^0, y^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En outre, le contrôle v donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique

$$(1.167) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |v|^2 d\Sigma$$

sur l'ensemble de contrôles admissibles \mathcal{U}_{ad} .

Ces questions seront étudiées au Chapitre VIII. ■

1.10.3. Contrôlabilité exacte dans des ouverts non réguliers.

Les résultats de contrôlabilité exacte des N°S précédents ont été démontrés en supposant que ou bien la frontière $\partial\Omega$ était de classe C^2 ou bien l'ouvert Ω était convexe.

Ces résultats ont été généralisés par P. GRISYARD dans [2] et [3], aux cas où Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 et un polyèdre de \mathbb{R}^3 , pas nécessairement convexe. ■

1.10.4. Les conséquences du Théorème de Holmgren.

Soit Ω domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière lipschitzienne et soit Γ_0 une partie ouverte non vide de Γ .

A l'aide du Théorème de Holmgren (cf. Th. 8.1., Chap. I) on peut démontrer l'existence d'un temps $T_0 = T_0(\Omega) > 0$ tel que si $T > T_0$, Γ_0 est un sous-ensemble ouvert non vide quelconque de Γ et si Φ vérifie

$$\Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.168) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$$

alors $\Phi \equiv 0$.

Lorsque Ω est convexe on sait que $T_0(\Omega) = 2$ (diamètre de Ω).

Ce résultat d'unicité démontre que l'expression

$$(1.169) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\{ \int_{\Sigma_0} |\Phi|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

est une *norme* dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Soit donc F le complété de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ par rapport à cette norme et F' l'espace dual.

En appliquant HUM on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 1.8.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière lipschitzienne. Soit $T > T_0(\Omega)$ et Γ_0 une partie ouverte non vide de Γ .

Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^0, -y^1\}$ telles que $\{y^1, -y^0\} \in F'$, il existe un contrôle $v \in L^2(\Sigma_0)$ tel que la solution $y = y(v)$ du système

$$(1.170) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) &= y^0; y'(0) = y^1 \end{aligned}$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Une question intéressante qui se pose est l'obtention d'informations supplémentaires sur l'espace F .

Il est clair que l'on a toujours

$$(1.171) \quad \exists C > 0 / \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^2 \leq C \{ \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 \},$$

$$\forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et donc

$$(1.172) \quad H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F$$

et aussitôt

$$(1.173) \quad F' \subset [H^1(\Omega)]' \times L^2(\Omega).$$

Mais, peut-on obtenir des estimations dans l'autre sens ?

Dans le Théorème 1.6 on a démontré que lorsque Ω est de classe C^2 (ou bien convexe) et étoilé par rapport à x^0 , $\Sigma_0 = \Sigma$ et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$, on a

$$(1.174) \quad F \subset [H^1(\Omega)]' \times L^2(\Omega)$$

et donc

$$(1.175) \quad H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F'.$$

Cependant, cette question semble être ouverte dans la situation générale du Théorème 1.8. Notamment, a-t-on, lorsque $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et $T > 0$ sont "assez grands", l'estimation (1.174) ?

2. CONTROLE PAR DES CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE MELE.

2.1. Orientation.

On s'intéresse ici à la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec des conditions aux limites du type mêlées Dirichlet Neumann. Plus précisément, on exerce une action de type Neumann sur un morceau du bord et on impose une condition de Dirichlet homogène sur l'autre.

Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un ouvert borné à frontière Γ de classe C^2 et Γ_0 une partie ouverte non vide du bord Γ .

Considérons l'équation des ondes

$$(2.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

avec des conditions aux limites

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial v} &= v && \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[\\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{aligned}$$

et des *conditions initiales*

$$(2.3) \quad y(0) = y^0, y'(0) = y^1.$$

On étudie la contrôlabilité exacte de ce système et on cherche donc, pour $T > 0$ fixé (assez grand) et des données initiales dans un espace hilbertien convenable, un contrôle v tel que la solution $y = y(v)$ de (2.1) (2.2) (2.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$.

Lorsque $\Gamma_0 = \Gamma$ on trouve le cas du contrôle par Neumann étudié dans le N° 1 précédent. On s'intéresse donc au cas $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_0 \neq \Gamma$ et $\Gamma_0 \neq \emptyset$.

On attaque le problème par HUM au moyen de la méthode des multiplicateurs.

Il faudra toujours distinguer les deux situations suivantes :

(i) $\bar{\Gamma}_0 \cap \{\Gamma / \Gamma_0\} = \emptyset$, c'est-à-dire, essentiellement le cas où $\Omega = \Omega_0 \setminus \bar{\Omega}_1$, avec $\Gamma_0 = \partial \Omega_0$ et $\Gamma / \Gamma_0 = \partial \Omega_1$, Ω_0 et Ω_1 étant deux ouverts non vides de classe C^2 tels que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$.

Dans ce cas, à condition que $\partial \Omega_1 \subset \Gamma^*(x^0)$ (i.e. Ω_1 étoilé par rapport à x^0 , cf. Fig. 1 ci-après), la méthode des multiplicateurs s'applique sans difficulté.

(ii) $\bar{\Gamma}_0 \cap \{\Gamma \setminus \Gamma_0\} \neq \emptyset$.

Cette situation, à la différence de la précédente, n'impose aucune condition géométrique à l'ouvert Ω . Cependant, l'application de la méthode des multiplicateurs entraîne des difficultés supplémentaires.

Plus précisément les solutions du problème homogène associé ne dépassent pas un certain seuil de régularité même lorsque les données initiales sont très régulières. Ce phénomène est dû à l'apparition de singularités aux "sommets" de $\bar{\Gamma}_0 \cap \{\Gamma \setminus \Gamma_0\}$ qui portent des conditions aux limites mêlées, et empêche d'appliquer directement la méthode des multiplicateurs.

On ne considérera que le cas de la dimension $n = 2$, où l'on dispose d'un résultat de P. GRISYARD [3] (qui montre que les identités usuelles obtenues par la méthode des multiplicateurs deviennent des *inégalités* !) qui permet d'obtenir l'inégalité inverse lorsqu'on pose $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ et donc $\Gamma \setminus \Gamma_0 = \Gamma^*(x^0)$.

La méthode présentée est générale mais son application au cas des dimensions $n > 2$ exige la généralisation du résultat de P. GRIVARD [3] mentionné ci-dessus. Une telle extension semble être un problème encore ouvert. ■

Le plan de ce N° est le suivant :

- Au paragraphe 2.2 on présente quelques résultats classiques sur l'existence et unicité des solutions de l'équation des ondes avec des conditions aux limites mêlées homogènes ;
- Aux paragraphes 2.3, 2.4, et 2.5 on étudie la situation (i), où l'on impose donc des conditions géométriques à l'ouvert Ω .
- Au paragraphe 2.6 on attaque la situation générale (ii) dans le cas de la dimension $n = 2$.

On termine par quelques commentaires au paragraphe 2.7.

2.2. Quelques rappels sur l'équation des ondes.

On donne ici, pour la commodité du lecteur, quelques résultats classiques sur l'existence et la régularité des solutions du problème :

$$\begin{aligned}
 \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\
 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[\\
 (2.4) \quad \theta &= 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \\
 \theta(0) &= \theta^0; \theta'(0) = \theta^1 && \text{dans } \Omega
 \end{aligned}$$

où Γ_0 désigne une partie ouverte non vide quelconque de Γ .

On introduit d'abord quelques notations.

On note

$$(2.5) \quad V = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_0 \}.$$

On remarque que, puisque $\Gamma_0 \neq \emptyset$, la norme $|\nabla \varphi| = \|\nabla \varphi\|_{(L^2(\Omega))^n}$ est équivalente, sur V , à la norme induite par $H^1(\Omega)$.

On considère ensuite l'opérateur $A = -\Delta$ de domaine

$$(2.6) \quad D(A) = \{ \varphi \in V : \Delta \varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

muni de la norme naturelle

$$(2.7) \quad \|\varphi\|_{D(A)} = \{ |\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2 \}^{1/2}.$$

On a le résultat suivant

Lemme 2.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ lipschitzienne.

Alors,

(a) Pour des données

$$(2.8) \quad \{ \theta^0, \theta^1, f \} \in V \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$$

il existe une solution unique θ de (2.4), avec

$$(2.9) \quad \theta \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

En outre, l'application $\{ \theta^0, \theta^1, f \} \rightarrow \{ \theta, \theta' \}$ est continue pour les topologies correspondantes.

(b) Pour des données

$$(2.10) \quad \{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times V \times L^1(0, T; V)$$

la solution θ appartient à la classe

$$(2.11) \quad \theta \in C(0, T; D(A)) \cap C^1(0, T; V),$$

l'application $\{ \theta^0, \theta^1, f \} \rightarrow \{ \theta, \theta' \}$ étant continue pour les topologies correspondantes.

Remarque 2.1.

Supposons que $\bar{\Gamma}_0 \cap \{\Gamma \setminus \Gamma_0\} = \emptyset$. Alors, si Ω a une frontière Γ de classe C^2 on a

$$(2.12) \quad D(A) \subset H^2(\Omega)$$

et les normes $\|\cdot\|_{D(A)}$ et $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ sont équivalentes sur $D(A)$.

Considérons maintenant le cas où $\bar{\Gamma}_0 \cap \{\Gamma \setminus \Gamma_0\} \neq \emptyset$. La situation change beaucoup. Même lorsque la frontière Γ est de classe C^∞ , l'inclusion (2.12) n'est pas vraie. On a en fait, pour chaque $\varphi \in D(A)$, une décomposition du type

$$(2.13) \quad \varphi = \varphi_R + \varphi_S$$

avec $\varphi_R \in H^2(\Omega)$, $\varphi_S \notin H^2(\Omega)$ étant une fonction qui présente des singularités aux points d'intersection de $\bar{\Gamma}_0$ et $\Gamma \setminus \Gamma_0$ (cf. P. GRISYARD [1] et [3] pour une étude détaillée de ces questions). ■

Remarque 2.2.

Soit

$$(2.14) \quad f \in W^{-1,1}(0, T; V)$$

c'est-à-dire

$$(2.15) \quad f = \frac{dg}{dt}, \quad g \in L^1(0, T; V).$$

Alors, pour des données initiales $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ il existe une solution unique θ de (2.4) dans $C(0, T; V)$. En outre, la trace $\theta'(T)$ est bien définie dans l'espace $L^2(\Omega)$ et l'application $\{\theta^0, \theta^1, f\} \rightarrow \{\theta, \theta'(T)\}$ est continue pour les topologies correspondantes.

Lorsque

$$(2.16) \quad f \in W^{-1,1}(0, T; D(A))$$

et les données initiales sont prises dans $D(A) \times V$, la solution θ est dans la classe $C(0, T; D(A))$ et en plus $\theta'(T) \in V$. On a de nouveau la dépendance continue par rapport aux données.

La démonstration de ces résultats est analogue à celle qu'on a donné au Chapitre I pour le cas des conditions aux limites de Dirichlet. ■

Considérons maintenant l'équation homogène

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.17) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0$$

$$\Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et l'énergie associée

$$(2.18) \quad E(t) = \frac{1}{2} (|\nabla \Phi(t)|^2 + |\Phi'(t)|^2) \quad \forall t \in [0, T].$$

On a la loi de conservation de l'énergie suivante :

Lemme 1.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ lipschitzienne.

Alors, pour toute solution faible Φ de (2.17) (qui correspond à des

données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ l'énergie est conservée le long de la trajectoire, i.e.

$$(2.19) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} (|\nabla \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2) \quad \forall t \in [0, T]. \quad \blacksquare$$

2.3. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques (I).

On se donne un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, à frontière Γ de classe C^2 telle que,

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \setminus \bar{\Omega}_1, \text{ où } \Omega_0 \text{ et } \Omega_1 \text{ sont deux ouverts bornés à frontière de classe } C^2, \\ \Omega_1 &\text{ est étoilé par rapport à un point } x^0 \in \Omega_1 \subset \Omega_0 \text{ et } \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0. \end{aligned}$$

La situation est illustrée dans la figure 1 ci-dessous :

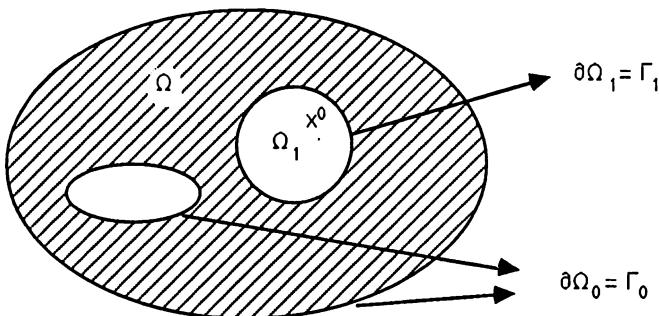


Figure 1

La frontière Γ de Ω comprend donc deux composantes disjointes $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ et $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$.

On définit $v(x)$ le vecteur normal unité, orienté vers l'extérieur de Ω (et donc, sur Γ_1 , vers l'intérieur de Ω_1). On définit comme d'habitude

$$m(x) = x - x^0, \quad R(x^0) = \max_{x \in \Omega} |m(x)| \quad \text{et}$$

$$(2.21) \quad \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m \cdot v > 0\}, \quad \Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0).$$

On a donc

$$(2.22) \quad \Gamma_1 = \partial\Omega_1 \subset \Gamma^*(x^0).$$

Remarque 2.3.

On ne suppose pas que Ω_0 soit étoilé par rapport à x^0 !

On ne suppose même pas que Ω_0 soit simplement connexe ! Ω peut donc avoir des "trous" autres que celui qui correspond à Ω_1 (cf. figure 1).

Le fait que Ω_1 soit étoilé par rapport à x^0 est essentiel pour qu'on puisse avoir une condition de Dirichlet homogène : $y = 0$ sur $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$. ■

Remarque 2.4.

Tout ce qui va être fait dans la suite s'applique de manière triviale, au cas où $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $\Gamma_0 = \{a\}$ (resp. $\Gamma_0 = \{b\}$) et $\Gamma_1 = \{b\}$ (resp. $\Gamma_1 = \{a\}$). ■

On considère d'abord le problème avec des conditions aux limites homogènes :

$$\theta'' - \Delta\theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(2.23) \quad \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[; \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[,$$

$$\theta(0) = \theta^0; \theta'(0) = \theta^1.$$

On a l'identité suivante :

Lemme 2.3.

Soit $q \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^n$. Alors pour toute solution faible θ de l'équation (2.23) l'identité suivante a lieu

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} q_k v_k [|\theta'|^2 - |\nabla_\sigma \theta|^2] d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma = \\
 (2.24) \quad &= (\theta' (t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} (t)) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2] dx dt + \\
 &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt - \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt.
 \end{aligned}$$

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Lemme 1.3. On l'établit d'abord pour les solutions fortes, c'est-à-dire pour des données $(\theta^0, \theta^1, f) \in D(A) \times V \times L^1(0, T; V)$. Grâce au fait que les composantes Γ_0 et Γ_1 de la frontière sont disjointes, la solution θ est suffisamment régulière (on en a fait $\theta \in C(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; V)$) pour obtenir l'identité (2.24) en multipliant l'équation (2.23)₁ par la fonction scalaire $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ et en intégrant par parties sur Q .

On en déduit ensuite l'identité pour les solutions faibles par les arguments de densité standard. ■

Considérons maintenant l'équation homogène :

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.25) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0; \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1.$$

On applique l'identité (2.24) avec le choix $q = m$. On obtient,

$$(2.26) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_\sigma \Phi|^2] d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \\ = (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))|_0^T + \frac{n}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + \int_Q |\nabla \Phi|^2 dx dt.$$

On a d'autre part $m_k v_k \leq 0$ sur Σ_1 , donc :

$$(2.27) \quad (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt + \\ + \frac{(n-1)}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_\sigma \Phi|^2] d\Sigma$$

et d'après la loi de conservation de l'énergie

$$(2.28) \quad TE_0 + \frac{(n-1)}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt + (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))|_0^T \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_\sigma \Phi|^2] d\Sigma.$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (2.25)₁ par Φ , on obtient, comme d'habitude,

$$(2.29) \quad \int_Q [|\Phi'|^2 - |\nabla \Phi|^2] dx dt = (\Phi(t), \Phi'(t))|_0^T$$

ce qui, combiné avec (2.28), donne

$$(2.30) \quad TE_0 + (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{(n-1)}{2} \Phi(t))|_0^T \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_\sigma \Phi|^2] d\Sigma.$$

Ensuite, par la méthode du Lemme 1.4 on obtient

$$\begin{aligned}
 (2.31) \quad & (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{(n-1)}{2} \Phi(t))|_0^T \leq \\
 & \leq 2R(x^0) E_0 - \frac{(n^2-1)}{8R(x^0)} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma_0} m_k v_k [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \leq \\
 & \leq 2R(x^0) E_0 + \frac{(n-1)}{4R(x^0)} \int_{\Gamma_0} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma.
 \end{aligned}$$

On a donc démontré l'estimation suivante.

Lemme 2.4.

Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.32) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma_0} m \cdot v [|\Phi'|^2 - |\nabla_\sigma \Phi|^2] d\Sigma + \int_{\Gamma_0} m \cdot v [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \right\}$$

pour toute solution faible Φ de (2.25).

Remarque 2.5.

Les calculs précédents fournissent une estimation précise sur C . ■

On pose ensuite

$$(2.33) \quad \Gamma_0^* = \Gamma_0 \cap \Gamma^*(x^0), \quad \Sigma_0^* = \Gamma_0^* \times]0, T[.$$

De (2.32) on déduit directement

$$(2.34) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi'|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_0^*} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma + \int_{\Gamma(x^0)} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Sigma \right\}$$

et du fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.35) \quad \int_{\Gamma(x^0)} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Sigma \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.1. (L'inégalité inverse)

Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.36) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma_0^*} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma \right\}$$

pour toute solution forte Φ de (2.25).

Remarque 2.6.

L'estimation (2.36) n'est vérifiée, a priori, que pour les solutions fortes (celles qui correspondent à des données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in D(A) \times V$) de l'équation (2.25), puisque le terme de droit de cette inégalité n'est pas, en principe, défini lorsque Φ est une solution faible. ■

Corollaire 2.1.

Si l'ouvert Ω est tel que Ω_0 est étoillé par rapport à x^0 , alors pour $T > T(x^0)$ on a

$$(2.37) \quad E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma.$$

Démonstration .

Si Ω_0 est étoillé par rapport à x^0 on a $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ et donc $\Gamma_0^* = \emptyset$. Alors, (2.37) est une conséquence immédiate de (2.36). ■

Remarque 2.6.

A partir de l'estimation (2.32) du Lemme 2.4 on obtient le résultat d'unicité suivant :

Si $T > T(x^0)$ et Φ est une solution faible de (2.25) telle que,

$$(2.38) \quad |\nabla_\sigma \Phi| \geq |\Phi'| \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \quad |\nabla_\sigma \Phi| \leq |\Phi'| \quad \text{sur } \Sigma_0^*;$$

$$\Phi(0) = \Phi(T) = 0 \quad \text{sur } \Gamma(x^0)$$

alors $\Phi \equiv 0$. ■

Remarque 2.7.

L'estimation (2.36) du Théorème 2.1 implique aussi un résultat d'unicité, à savoir,

si $T > T(x^0)$ et Φ est une solution forte de (2.25) telle que

$$(2.39) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \quad \nabla_\sigma \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^*$$

alors $\Phi \equiv 0$.

Ceci étant, ce résultat d'unicité est une conséquence du Corollaire 5.1 du Chapitre I. En effet, si Φ vérifie $\Phi = 0$ sur $\Sigma(x^0)$ et $\nabla_\sigma \Phi = 0$ sur Σ_0^* on a évidemment, $\Phi = 0$ sur Σ_0 .

On a donc

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0$$

et le Corollaire 5.1 du Chapitre I s'applique. ■

A partir de l'inégalité inverse du Théorème 2.1 on obtient, grâce à HUM, le résultat de contrôlabilité exacte suivant (On rappelle que : $V = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$).

Théorème 2.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, vérifiant (2.20). Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.40) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times V$$

il existe un contrôle

$$(2.41) \quad v = \begin{cases} v_1 & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ v_2 & \text{sur } \Sigma_0^* \end{cases}$$

avec

$$(2.42) \quad v_1 \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]^* ; v_2 \in L^2(0, T ; H^1(\Gamma_0^*))'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système

$$(2.43) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v \quad \text{sur } \Sigma_0 ; y = 0 && \text{sur } \Sigma_1 \\ y(0) &= y^0 ; y'(0) = y^1 \end{aligned}$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Avant de donner la démonstration de ce théorème, notons le résultat suivant.

Corollaire 2.2.

Soit Ω donné vérifiant (2.20), avec Ω_0 étoillé par rapport à x^0 .

Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times V$ il existe un contrôle

$$(2.44) \quad v \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma_0))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.43) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration du Théorème 2.2 :

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.2. Elle repose sur la méthode HUM. On résout d'abord le problème homogène

$$\begin{aligned} \Phi'' - \Delta \Phi &= 0 && \text{dans } Q, \\ (2.45) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 0 \text{ sur } \Gamma_0; \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1,$$

avec des données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in D(A) \times V$.

On définit la *norme* (loisible d'après l'inégalité inverse)

$$(2.46) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma_0^*} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}.$$

On construit l'espace de Hilbert

$$(2.47) \quad F = \text{complété de } D(A) \times V \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F$$

Soit F' son dual (non identifié à F).

On observe que, par construction de F ,

$$(2.48) \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} \in F \Leftrightarrow \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma_0^*} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma < +\infty$$

et d'autre part, d'après l'inégalité inverse,

$$(2.49) \quad F \subset V \times L^2(\Omega); V' \times L^2(\Omega) \subset F'.$$

On considère ensuite le problème rétrograde

$$\begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q, \\ (2.50) \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &= ; \psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ &\quad \Delta_{\Gamma_0^*} \Phi && \text{sur } \Sigma_0^* \end{aligned}$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0.$$

La dérivée $\frac{\partial(\Phi')}{\partial t}$ est prise au sens de la dualité entre l'espace $H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual, c'est-à-dire

$$(2.51) \quad \langle \frac{\partial}{\partial t} (\Phi'), v \rangle = - \int_{\Sigma(x^0)} \Phi' v' d\Sigma \quad \forall v \in H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

De même, $\Delta_{\Gamma_0^*} \Phi \in L^2(0, T ; [H^1(\Gamma_0^*)]')$ puisque $\Phi \in L^2(0, T ; H^1(\Gamma_0^*))$.

La solution ψ de (2.49) est définie par la méthode de transposition. On considère donc le problème adjoint

$$\theta'' - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(2.52) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 ; \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

$$\theta(0) = \theta^0 ; \theta'(0) = \theta^1$$

et l'on dit que ψ est une solution de (2.50) si

$$(2.53) \quad \int_Q \psi f dx dt + \langle \psi(0), \theta^1 \rangle - \langle \psi'(0), \theta^0 \rangle = - \int_{\Sigma(x^0)} [\Phi \theta + \Phi' \theta'] d\Sigma - \\ - \int_{\Sigma_0^*} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma \theta d\Sigma, 0$$

$$\forall \{ \theta^0, \theta^1, f \} \in D(A) \times V \times L^1(0, T ; V).$$

Par la méthode du Lemme 1.5 du N° précédent on démontre l'existence d'une solution unique ψ de (2.50), prise au sens (2.53), avec

$$(2.54) \quad \psi \in L^\infty(0, T ; V) \cap W^{1,\infty}(0, T ; (D(A))')$$

$$\{ \psi'(0), -\psi(0) \} \in F'.$$

On définit l'opérateur linéaire

$$(2.55) \quad \Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}.$$

D'après (2.53) on a

$$\begin{aligned}
 (2.56) \quad & \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \langle \psi'(0), \Phi^0 \rangle - \langle \psi(0), \Phi^1 \rangle = \\
 & = \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma + \int_{\Sigma_0^*} |\nabla_\sigma \Phi|^2 d\Sigma = \\
 & = \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F^2.
 \end{aligned}$$

Alors, l'opérateur \wedge définit un isomorphisme de F sur F' .

D'après (2.49), pour chaque couple de données initiales $\{ y^0, y^1 \} \in L^2(\Omega) \times V'$, l'équation

$$(2.57) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

admet une solution unique $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F$ et le contrôle

$$\begin{aligned}
 (2.58) \quad & \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\
 & \Delta_{\Gamma_0^*} \Phi \quad \text{sur } \Sigma_0^* = \Sigma_0 \cap \Sigma^*(x^0),
 \end{aligned}$$

où Φ désigne la solution de (2.45) associée aux données initiales vérifiant (2.57), répond à la question. ■

Remarque 2.8.

On a en fait démontré la contrôlabilité exacte de tout couple de donnée $\{ y^0, y^1 \}$ telles que $\{ y^1, -y^0 \} \in F'$.

On a, d'après (2.49), $V' \times L^2(\Omega) \subset F'$.

Il est clair, grâce au Lemme 2.1, qu'on a aussi

$$(2.59) \quad D(A) \times V \subset F ; F' \subset [D(A)]' \times V'.$$

Comme à la Remarque 1.14, on peut aller un peu plus loin et démontrer que

$$(2.60) \quad D(A^{(1+s)/2}) \times Y_s \subset F ; F' \subset [D(A^{(1+s)/2})'] \times Y_s', \quad \forall s > \frac{1}{2}$$

où $Y_s = \{\varphi \in H^s(\Omega) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$ ■

Remarque 2.9.

La solution $y = y(v)$ vérifie les équations dans un sens faible donnée par la méthode de transposition.

On considère le problème transposé

$$\begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\ (2.61) \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma_0 ; \theta = 0 && \text{sur } \Sigma_1, \end{aligned}$$

$$\theta(T) = \theta^0 ; \theta'(T) = \theta^1.$$

Alors la solution $y = y(v)$ vérifie

$$\begin{aligned} (2.62) \quad \int_Q y f dx dt + \langle y^0, \theta'(0) \rangle - \langle y^1, \theta(0) \rangle &= - \int_{\Sigma(x^0)} [\Phi \theta + \Phi' \theta'] d\Sigma - \\ &\quad - \int_{\Sigma_0^+} \nabla_\sigma \Phi \cdot \nabla_\sigma \theta d\Sigma, \end{aligned}$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times V \times L^1(0, T; V).$$

A partir du Lemme 2.1 et la Remarque 2.2 on peut démontrer, par exemple, l'existence d'une solution unique y de ce problème dans la classe

$$(2.63) \quad y \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; (D(A))').$$

On peut aller plus loin (cf. Remarque 1.13) et démontrer que

$$(2.64) \quad \{y', -y\} \in L^\infty(0, T; F'),$$

ce qui implique, en particulier, d'après (2.60),

$$(2.65) \quad y \in L^\infty(0, T ; V_s') \cap W^{1,\infty}(0, T ; [D(A^{(1+s)/2}])'), \quad \forall s > \frac{1}{2} .$$

Evidemment, dans l'expression (2.62), l'intégrale $\int_Q y f dx dt$ doit être interprétée au sens de la dualité entre $L^\infty(0, T ; V')$ et $L^1(0, T ; V)$. De même, le crochétage $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre V' et V . ■

Le Théorème 2.2 ne présente qu'un résultat "modèle" de contrôlabilité exacte. On peut, par la méthode habituelle du changement de la norme, donner des nombreuses variantes. Dans les paragraphes 2.4 et 2.5 suivants on donne deux variantes du cas considéré au Corollaire 2.2, correspondant respectivement à des normes plus fortes et plus faibles.

2.4. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques (II). Normes plus fortes.

On se place ici dans la situation considérée au Corollaire 2.2, c'est-à-dire, on suppose que Ω vérifie (2.20) avec

$$(2.66) \quad "\Omega_0 \text{ étoilé par rapport à } x^0."$$

On a donc (cf. Fig. 2)

$$(2.67) \quad \Gamma(x^0) = \Gamma_0 = \partial\Omega_0 ; \quad \Gamma^*(x^0) = \Gamma_1 = \partial\Omega_1 .$$

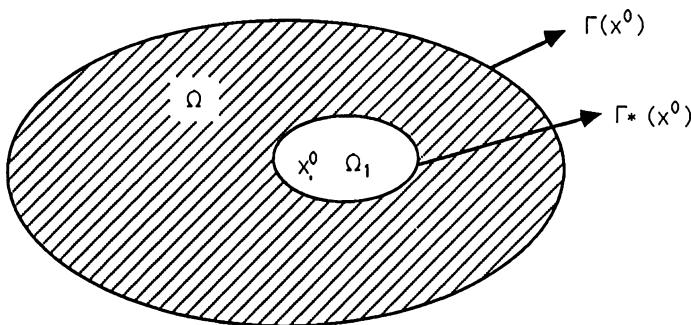


Figure 2

On considère d'abord le problème homogène

$$\Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.68) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 ; \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

$$\Phi(0) = \Phi^0 ; \Phi'(0) = \Phi^1.$$

On note

$$(2.69) \quad W = \{ \varphi \in D(A) ; \Delta\varphi \in V \} = D(A^{3/2}).$$

On a l'estimation suivante.

Théorème 2.3.

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.70) \quad \|\Phi^0\|_{D(A)}^2 + |\nabla\Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma_0} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] d\Sigma$$

pour toute solution Φ qui correspond à des données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in W \times D(A)$.

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.4.

On définit

$$(2.71) \quad w^0 = \Phi^1 \in D(A) ; w^1 = \Delta\Phi^0 \in V.$$

Soit $w \in C(0, T ; D(A)) \cap C^1(0, T ; V)$ la solution du problème

$$w'' - \Delta w = 0 \quad \text{dans } Q,$$

$$(2.72) \quad \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 ; w = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

$$w(0) = w^0 ; w'(0) = w^1.$$

D'après le Corollaire 2.1 on a

$$(2.73) \quad |\nabla w^0|^2 + |w^1|^2 \leq C \int_{\Sigma_0} [|w|^2 + |w'|^2] d\Sigma.$$

On observe que $w = \Phi'$ et donc

$$(2.74) \quad |\Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma_0} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] d\Sigma.$$

On sait, par ailleurs, que les normes $|\Delta \phi|$ et $\|\phi\|_{D(A)}$ sont équivalentes sur $D(A)$; d'où le résultat. ■

On a ensuite le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.4.

Soit Ω vérifiant (2.20) et (2.66). Soit $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.75) \quad \{y^0, y^1\} \in V' \times [D(A)]'$$

il existe un contrôle

$$(2.76) \quad v \in [H^2(0, T ; L^2(\Gamma_0))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.77) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma_0 ; y = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$.

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.5. On applique la méthode HUM. On indique ici les idées principales.

La norme qu'il faut considérer est, cette fois,

$$(2.78) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] d\Sigma \right)^{1/2}.$$

L'espace F , complété de $W \times D(A)$ par rapport à cette norme, vérifie, d'après (2.70),

$$(2.79) \quad F \subset D(A) \times V$$

et donc

$$(2.80) \quad V' \times [D(A)]' \subset F'.$$

On considère ensuite le problème rétrograde

$$(2.81) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'') && \text{sur } \Sigma_0; \psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 \end{aligned}$$

la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} (\Phi')$ (resp. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'')$) étant prise au sens de la dualité entre $H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))$ (resp. $H^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$) et son dual.

On vérifie, par la méthode de transposition, l'existence d'une solution unique ψ de (2.82), prise dans un sens faible convenable, avec

$$(2.82) \quad \{\psi'(0), -\psi(0)\} \in F'.$$

On définit l'opérateur

$$(2.83) \quad \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

Grâce à l'identité

$$(2.84) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^2$$

(on a défini le problème (2.81) pour aboutir à cela !) on voit que \wedge définit un isomorphisme de F sur F' .

Pour des données initiales $\{y^1, -y^0\} \in F'$, on résout l'équation

$$(2.85) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

et le contrôle

$$(2.86) \quad v = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'')$$

répond à la question. ■

2.5. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques (III).

Affaiblissement de la norme.

On se place encore dans la situation du paragraphe précédent. On suppose donc que Ω vérifie (2.20) et (2.66).

On considère le problème homogène (2.68). On a l'estimation suivante.

Théorème 2.5.

Si $T > T(x^0)$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.87) \quad |\Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_V^2 \leq C \int_{\Sigma_0} |\Phi|^2 d\Sigma$$

pour toute solution faible Φ de (2.68).

Démonstration .

D'après le Corollaire 2.1 on a

$$(2.88) \quad E_0 \leq C \int_{\Sigma_0} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma .$$

On considère la norme

$$(2.89) \quad \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_F = \left\{ \int_{\Sigma_0} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma \right\}^{1/2}$$

et l'espace

$$(2.90) \quad F = \text{complété de } D(A) \times V \text{ par rapport à } \|\cdot\|_F.$$

On a

$$(2.91) \quad F \subset V \times L^2(\Omega)$$

et d'autre part, l'opérateur

$$(2.92) \quad F \rightarrow H^1(0, T ; L^2(\Gamma_0)) \mid (\Phi^0, \Phi^1) \mapsto \Phi$$

définit un isomorphisme entre F et $H^1(0, T ; L^2(\Gamma_0))$.

Par ailleurs, on sait que pour chaque $f \in V'$, le problème

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.93) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

a une solution unique $u \in V$. En outre, l'opérateur

$$(2.94) \quad T : V' \rightarrow V \mid f \mapsto Tf = u$$

définit un isomorphisme de V' sur V . Soit $S = T^{-1}$.

On construit l'espace

$$(2.95) \quad F_1 = \{ \{ \Phi^1, S\Phi^0 \} : \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F \},$$

muni de la norme naturelle

$$(2.96) \quad \| \{ w^0, w^1 \} \|_{F_1} = \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F ; \text{ si } \{ w^0, w^1 \} = \{ \Phi^1, S\Phi^0 \}$$

c'est-à-dire,

$$(2.97) \quad \|\{w^0, w^1\}\|_{F_1} = \|\{Tw^1, w^0\}\|_F \quad \forall \{w^0, w^1\} \in F_1.$$

On a, d'après (2.91),

$$(2.98) \quad F_1 \subset L^2(\Omega) \times V';$$

avec injection continue.

On note par w la solution de (2.68) qui correspond aux données $\{w^0, w^1\} \in F_1$.

On construit ensuite l'espace

$$(2.99) \quad G = \{ \text{espace parcouru par les traces } w|_{\Sigma_0} \text{ lorsque } \{w^0, w^1\} \text{ parcourt } F_1 \},$$

muni de la structure hilbertienne naturelle :

$$(2.100) \quad \|w|_{\Sigma_0}\|_G = \|\{w^0, w^1\}\|_{F_1}.$$

Il est clair que lorsque w est la solution de (2.68) associée aux données $\{w^0, w^1\} \in F_1$, alors

$$(2.101) \quad \Phi(t) = \int_0^t w(s) ds + Tw^1$$

est la solution de (2.68) associée aux données $\{Tw^1, w^0\} \in F$. On a aussitôt

$$(2.102) \quad w = \Phi'$$

et, en particulier

$$(2.103) \quad w \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; V').$$

Du fait que (2.92) définit un isomorphisme, l'application linéaire

$$(2.104) \quad F_1 \rightarrow L^2(\Sigma_0) \{ (w^0, w^1) \mapsto w|_{\Sigma_0} = \Phi'|_{\Sigma_0}$$

est *continue* et *surjective*. Pour démontrer que (2.104) définit un isomorphisme de F_1 ,

sur $L^2(\Sigma_0)$, il suffit donc de démontrer l'injectivité de l'application. Mais ceci est, en fait, une conséquence du Théorème de Holmgren (cf. Théorème 8.1 du Chapitre I).

L'application (2.104) définit donc un isomorphisme de F_1 sur $L^2(\Sigma_0)$ et grâce à (2.98) on obtient (2.87). ■

A partir de cette estimation et à l'aide de HUM on obtient aisément le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.6.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n vérifiant (2.20) et (2.66). Soit $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.105) \quad \{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(2.106) \quad v \in L^2(\Sigma_0)$$

tel que la solution $y = y(v)$ de

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.107) \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \quad \text{sur } \Sigma_0 ; y = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Remarque 2.10.

Les résultats de contrôlabilité exacte précédents montrent le rapport habituel entre l'espace des données contrôlables et l'espace des contrôles. On a montré qu'à des conditions initiales plus (resp. moins) régulières correspondent des contrôles plus (resp. moins) réguliers. ■

2.6. Contrôlabilité exacte sans conditions géométriques.

Dans ce paragraphe on étudie la contrôlabilité exacte du système qui nous occupe sans autre hypothèse sur le domaine Ω autre que la régularité de la frontière.

Comme on a déjà mentionné dans le paragraphe 2.1 la difficulté essentielle repose sur le fait que les solutions du problème homogène associé ne dépassent pas un certain seuil de régularité, a priori insuffisant pour l'application de la méthode des multiplicateurs, même lorsque les données initiales et l'ouvert sont très réguliers. Ce phénomène est dû à *l'apparition de singularités des solutions aux intersurfaces entre les conditions aux limites du type Dirichlet et du type Neumann*.

Dans les paragraphes précédents cette difficulté a été évitée en imposant une forte restriction à la géométrie de Ω , à savoir la condition (2.20), supprimant les interfaces gênantes ! ■

On étudie donc le cas général mais en dimension $n = 2$. On dispose alors d'un résultat, dû à P.GRISVARD [3] et [4] (cf. Lemme 2.5 ci-dessous) qui permet de développer la méthode des multiplicateurs.

Les idées présentées sont générales et susceptibles d'être appliquées, si l'on dispose d'une généralisation de ce résultat, pour le cas des dimensions $n > 2$. Mais il s'agit là d'un problème ouvert. ■

Soit donc Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 à frontière Γ de classe C^2 .

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^2$ et considérons la partition de la frontière

$$(2.108) \quad \Gamma_0 = \Gamma(x^0) ; \quad \Gamma_1 = \Gamma^*(x^0)$$

avec les notations habituelles $m(x) = x - x^0$, $R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|$.

On note de nouveau

$$(2.109) \quad V = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma^*(x^0) \}$$

et

$$(2.110) \quad D(A) = \{ \phi \in V / \Delta \phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma(x^0) \}.$$

On a le résultat suivant.

Lemme 2.5. (P. GRISYARD [3] et [4])

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ de classe C^2 .

Alors, pour toute fonction $\phi \in D(A)$ on a l'inégalité :

$$(2.111) \quad \int_{\Omega} \Delta \phi m_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^0)} m_k v_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^0)} m(x) \cdot v(x) |\nabla_{\nu} \phi|^2 d\Gamma.$$

Remarque 2.11.

On peut calculer explicitement la différence entre les membres de gauche et de droite de cette inégalité. Dans cette différence interviennent les coefficients de singularité de la fonction ϕ aux points d'intersection de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $\Gamma^*(x^0)$. Pour une étude détaillé de cette question ainsi que pour la démonstration du Lemme 2.5 voir P. GRISYARD [3] et [4].

La démonstration de ce résultat repose sur la construction de perturbations convenables du domaine Ω , où l'on peut établir l'identité désirée, puis sur le passage à la limite lorsque le domaine perturbé tend vers Ω , pour aboutir à (2.111) en gardant les termes supplémentaires (toujours du même signe) qui apparaissent à cause des singularités.

On observe que d'après le fait que $n=2$ le terme habituel $(\frac{n}{2}-1) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx$ est dans ce cas nul.

On note que lorsque $\overline{\Gamma(x^0)} \cap \Gamma^*(x^0) = \emptyset$, $D(A) \subset H^2(\Omega)$ et donc (2.111) devient une identité. C'est la situation considérée aux paragraphes précédents. ■

On considère maintenant le problème avec des conditions aux limites homogènes

$$\theta'' - \Delta \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(2.112) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

$$\theta(0) = \theta^0; \theta'(0) = \theta^1.$$

Lemme 2.6.

On suppose que Ω vérifie les hypothèses du Lemme 2.5. Alors, si θ est une solution forte de (2.112) (i.e. qui correspond à des données $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times Y \times L^1(0, T; Y)$) l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(2.113) \quad (\theta'(t), m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T + \int_Q |\theta'|^2 dx dt - \int_Q f m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k v_k [|\theta'|^2 - |\nabla_\sigma \theta|^2] d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma^*(x^0)} m_k v_k \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.$$

Démonstration.

On multiplie l'équation (2.112) par $m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ et on intègre sur Q . On intègre par parties et on obtient les identités habituelles pour tous les termes sauf pour $\int_Q \Delta \theta m_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt$ où l'on applique l'inégalité (2.111). ■

Considérons ensuite le problème homogène

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.114) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1.$$

D'après (2.113) on a,

$$\begin{aligned} (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))|_0^T + \int_{\Omega} |\Phi'|^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k v_k [|\Phi'|^2 - |\nabla_{\sigma} \Phi|^2] d\Sigma + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \end{aligned}$$

et en tenant compte du fait que $m_k v_k \geq 0$ sur $\Gamma(x^0)$ et $m_k v_k \leq 0$ sur $\Gamma_*(x^0)$, on obtient

$$\begin{aligned} (2.115) \quad (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t))|_0^T + \int_{\Omega} |\Phi'|^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m_k v_k |\Phi'|^2 d\Sigma \leq \\ &\leq C \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi'|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

et par le procédé habituel

$$(2.116) \quad T E_0 + (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{1}{2} \Phi(t))|_0^T \leq C \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi'|^2 d\Sigma.$$

Par ailleurs, on a

$$(2.117) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{1}{2} \Phi(t))|_0^T| \leq 2R(x^0) E_0 + C \int_{\Gamma(x^0)} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} (2.118) \quad (T - 2R(x^0)) E_0 &\leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi'|^2 d\Sigma + \int_{\Gamma(x^0)} [|\Phi(0)|^2 + |\Phi(T)|^2] d\Gamma \right\} \leq \\ &\leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma. \end{aligned}$$

On a donc démontré le résultat suivant.

Théorème 2.7. (L'inégalité inverse)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 vérifiant les hypothèses du Lemme 2.5.
Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution forte Φ de (2.114) on ait

$$(2.119) \quad E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma. \quad \blacksquare$$

On considère maintenant le système

$$(2.120) \quad \begin{aligned} y'' - \Delta y &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v && \text{sur } \Sigma(x^0); y = 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ y(0) &= y^0; y'(0) = y^1. \end{aligned}$$

On rappelle que $V = \{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma(x^0) \}$.

On a le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.8.

Soit Ω un domaine borné \mathbb{R}^2 à frontière Γ de classe C^2 .

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^2$ et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.121) \quad \{ y^0, y^1 \} \in L^2(\Omega) \times V'$$

il existe un contrôle

$$(2.122) \quad v \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))']'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.121) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

C'est une conséquence de l'estimation (2.119) et de l'application de HUM.

On considère la norme

$$(2.123) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F = \{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] d\Sigma \}^{1/2}.$$

Soit F l'espace complété de $D(A) \times Y$ par rapport à cette norme.

D'après (2.119) on a

$$(2.124) \quad F \subset Y \times L^2(\Omega) ; \quad Y' \times L^2(\Omega) \subset F'.$$

On considère le problème rétrograde

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.125) \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \quad \psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0$$

qui admet une solution faible unique ψ avec

$$(2.126) \quad \{\psi'(0), -\psi(0)\} \in F'.$$

Il faut remarquer que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} (\Phi')$ est prise au sens de la dualité entre $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual.

Ensuite, on définit l'opérateur

$$(2.127) \quad \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

On vérifie que \wedge satisfait à

$$(2.128) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F^2$$

ce qui montre que \wedge définit un isomorphisme de F sur son dual F' .

Si $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times Y'$, d'après (2.124), $\{y^1, -y^0\} \in F'$ et donc l'équation

$$(2.129) \quad \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

admet une solution unique $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$. Alors, le contrôle

$$(2.130) \quad v = -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]'$$

ramène le système à l'état d'équilibre à l'instant T . ■

On peut maintenant changer convenablement la norme $\|\cdot\|_F$.

Normes plus fortes.

Théorème 2.9.

On suppose que les hypothèses du Théorème 2.8 sont vérifiées.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.131) \quad \{y^0, y^1\} \in V' \times [D(A)]'$$

il existe un contrôle

$$(2.132) \quad v \in [H^2(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.120) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Idée de la démonstration.

Par la méthode utilisée dans la démonstration du Théorème 1.3 on obtient l'estimation

$$(2.133) \quad \|\Phi^0\|_{D(A)}^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] d\Sigma.$$

On considère la norme

$$(2.134) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] d\Sigma \right\}^{1/2}$$

et l'espace hilbertien

(2.135) $F = \text{complété de } W \times D(A) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F$

avec $W = \{\varphi \in D(A) : \Delta \varphi \in V\}.$

D'après (2.133) on a

(2.136) $F \subset D(A) \times V ; [D(A)]' \times V' \subset F'.$

Le problème rétrograde à considérer est cette fois,

$$\psi'' - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'') \quad \text{sur } \Sigma(x^0); \quad \psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0),$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0.$$

On définit l'opérateur \wedge et on conclut la démonstration comme d'habitude. ■

Normes plus faibles.

Théorème 2.10.

On suppose que les hypothèses du Théorème 2.8 sont vérifiées.

Alors, pour tout couple de données initiales

(2.137) $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$

il existe un contrôle

(2.138) $v \in L^2(\Sigma(x^0))$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.120) vérifie $y(T) = y'(T) = 0.$ ■

Idée de la démonstration.

Par les arguments du Théorème 1.5 on obtient l'estimation

$$(2.139) \quad |\Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_{V'}^2 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi|^2 d\Sigma.$$

On considère donc la norme

$$(2.140) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

et l'espace de Hilbert F , complété de $V \times L^2(\Omega)$ par rapport à cette norme.

On a, d'après (2.139),

$$(2.141) \quad F \subset L^2(\Omega) \times V'; L^2(\Omega) \times V \subset F'.$$

Dans ce cas le problème rétrograde à considérer est

$$(2.142) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= -\Phi && \text{sur } \Sigma(x^0); \psi = 0 && \text{sur } \Sigma \setminus (x^0) \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0. \end{aligned}$$

■

2.7. Quelques commentaires.

2.7.1. Autres conditions aux limites.

(i) Considérons la situation des paragraphes 2.3, 2.4 et 2.5 ; c'est-à-dire lorsque

$$(2.143) \quad \Omega = \Omega_0 \setminus \bar{\Omega}_1 \text{ avec } \Omega_1 \text{ étoilé par rapport à } x^0.$$

On a démontré la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de la forme

$$(2.144) \quad \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v && \text{sur } \Sigma_0 = \partial \Omega_0 \times]0, T[\\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma_1 = \partial \Omega_1 \times]0, T[\end{aligned}$$

le contrôle v ayant une structure différente sur les parties $\Sigma_0 \cap \Sigma(x^0)$ et $\Sigma_0 \cap \Sigma^*(x^0)$.

Supposons que $\Gamma_0^* = \Gamma_0 \cap \Gamma^*(x^0) \neq \emptyset$ (cf. Fig. 3 ci-dessous)

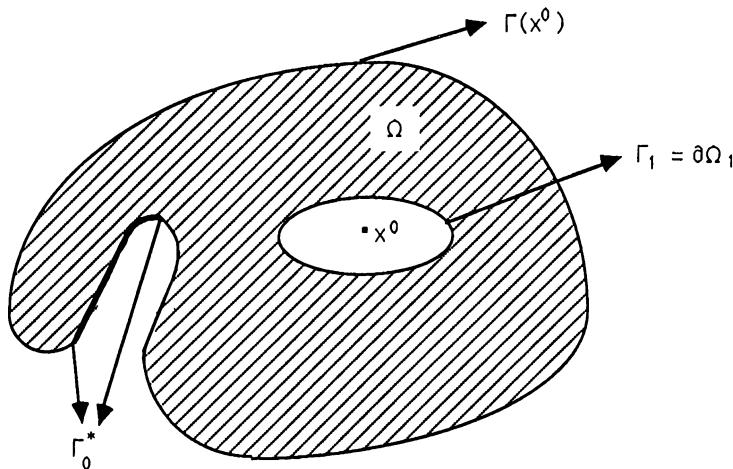


Figure 3

Dans ce cas, la contrôlabilité exacte dans des espaces fonctionnels "classiques" (par exemple de la forme $L^2(\Omega) \times V'$ ou $V \times L^2(\Omega)$) avec un contrôle du type

$$(2.145) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} &= v && \text{sur } \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[\\ \frac{\partial u}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma_0^* = \Gamma_0^* \times]0, T[\\ u &= 0 && \text{sur } \Sigma_1 = \partial\Omega_1 \times]0, T[\end{aligned}$$

est un problème ouvert.

Par le Théorème de Holmgren (cf. paragraphe 2.7.4 ci-après) on peut démontrer la contrôlabilité exacte, avec ce type de conditions aux limites, dans un certain espace hilbertien F' . Cependant, l'obtention d'informations supplémentaires sur cet espace en termes "classiques" est un problème ouvert. ■

(ii) Le Théorème 2.2 du paragraphe 2.3 peut être généralisé de la manière suivante.

Soit $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\ell}$ une suite d'ouverts disjoints à frontière Γ_i , $i = 1, \dots, \ell$ de classe C^2 tels que

$$(2.146) \quad \bar{\Omega}_i \subset \Omega_0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell.$$

Soit

$$(2.147) \quad \Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \bar{\Omega}_i$$

On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on considère le système

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$(2.148) \quad \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v_0 && \text{sur } \Sigma_0 \\ &v_i && \text{sur } \Sigma_i \cap \Sigma(x^0) \\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma_i \cap \Sigma^*(x^0), \quad i = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

avec $\Sigma_i = \partial \Omega_i \times]0, T[$, $i = 1, \dots, \ell$.

On a alors le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.11.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n donné par (2.147). Soit $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.149) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times V'$$

où $V = \{\psi \in H^1(\Omega) / \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_i = \partial \Omega_i \quad \forall i = 1, \dots, \ell\}$, il existe une famille $\{v_0, v_1, \dots, v_\ell\}$ de contrôles avec

$$(2.150) \quad v_0 = \begin{cases} w_0 & \text{sur } \Sigma_0 \cap \Sigma(x^0) \\ w_1 & \text{sur } \Sigma_0 \cap \Sigma^*(x^0) \end{cases}$$

$$(2.151) \quad w_0 \in [H^1(0,T ; L^2(\Gamma_0 \cap \Gamma(x^0)))'] ; w_1 \in L^2(0,T ; [H^1(\Gamma_0 \cap \Gamma^*(x^0))]')$$

$$(2.152) \quad v_i \in L^2(\Sigma_i \cap \Sigma(x^0)) , \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

et tels que la solution $y = y(v)$ de (2.148) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0 .$$

■

Evidemment lorsque $\ell = 1$ et Ω_1 est étoilé par rapport à x^0 on retrouve le résultat du Théorème 2.2. ■

2.7.2. Existence d'une infinité de contrôles.

Pour les résultats de contrôlabilité exacte démontrés le long de ce N°2 , ce qu'on a dit au paragraphe 1.10.2 reste valable : chaque fois qu'il existe un contrôle ramenant le système à l'état d'équilibre, il en existe une infinité.

On voit donc que l'ensemble des contrôles admissibles contient une infinité d'éléments. Le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique associée. Pour ce type de questions, voir Chapitre VIII.

2.7.3. Contrôlabilité exacte dans des ouverts non réguliers.

La contrôlabilité exacte avec des conditions aux limites mêlées dans des polygones de \mathbb{R}^2 et des polyèdres de \mathbb{R}^2 a été étudiée par P. GRISYARD [3].

2.7.4. Les conséquences du théorème de Holmgren.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ lipschitzienne. Soit Γ_0 une partie ouverte non vide de Γ et $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$.

Considérons le problème homogène

$$(2.153) \quad \Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[; \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[.$$

Par les arguments analogues à ceux du Théorème 8.1, Chapitre I, on peut démontrer l'existence de $T(\Gamma_0, \Omega) > 0$ tel que si $T > T(\Gamma_0, \Omega)$ et Φ est une solution faible de (2.154) avec

$$(2.154) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0$$

alors $\Phi = 0$.

On sait par ailleurs qu'il existe $T_0 = T_0(\Omega) > 0$ tel que

$$(2.155) \quad T(\Gamma_0, \Omega) \leq T_0(\Omega) \quad \forall \Gamma_0 \subset \Gamma.$$

En particulier, si Ω est convexe on a

$$(2.156) \quad T_0(\Omega) = 2 \text{ (diamètre de } \Omega).$$

Soit donc $T > T_0(\Omega)$ et considérons la norme

$$(2.157) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma_0} |\Phi|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}.$$

Soit F le complété de $V \times L^2(\Omega)$ par rapport à cette norme.

On a le résultat suivant.

Théorème 2.12.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ lipschitzienne.

Soit Γ_0 une partie ouverte non vide de Γ quelconque et $T > T_0(\Omega)$.

Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ telles que $\{y^1, -y^0\} \in F'$ (dual de F , complété de $V \times L^2(\Omega)$ par rapport à la norme (2.151)) il existe un contrôle $v \in L^2(\Sigma_0)$ tel que la solution $y = y(v)$ de

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.158) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma_0 ; y = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

L'obtention des informations supplémentaires sur l'espace F est un problème ouvert.

Dans le paragraphe 2.6 on a démontré, *dans le cas de la dimension* $n = 2$, que

$$L^2(\Omega) \times V \subset F$$

lorsque $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$, $T > T(x^0)$ et Ω est de classe C^2 .

On a un résultat analogue au Théorème 2.11 lorsque l'on considère des conditions aux limites du type

$$\frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \gamma \times]0, T[$$

$$(2.159) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \{ \Gamma_0 \setminus \gamma \} \times]0, T[$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \{ \Gamma \setminus \Gamma_0 \} \times]0, T[$$

où γ et Γ_0 sont deux parties ouvertes non vides de Γ telles que $\gamma \subset \Gamma_0$. ■

3. PROBLEMES OUVERTS.

3.1. Considérons Ω borné de frontière Γ régulière et considérons la solution Φ de

$$\Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(3.1) \quad \Phi(x, 0) = \Phi^0(x), \quad \Phi'(x, 0) = \Phi^1(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T).$$

Pour T assez grand ($>$ diamètre de Ω), la quantité

$$(3.2) \quad \left(\int_{\Gamma \times (0, T)} \Phi^2 \, d\Gamma \, dt \right)^{1/2}$$

est une norme et définit donc par complétion de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert F .

Nous conjecturons que F ne dépend pas de T , pour T assez grand et, bien sur, à une équivalence de norme près. ■

La même question se pose en remplaçant dans (3.2) Γ par $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et pour $T > T(\Gamma_0)$ assez grand. ■

On note que, dans le cas des conditions de *Dirichlet*, i.e. en considérant dans (3.1) la condition

$$(3.3) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{au lieu de } \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0)$$

et en considérant, au lieu de (3.2), la norme

$$(3.4) \quad \left(\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right)^2 \, d\Gamma \, dt \right)^{1/2}$$

on obtient un espace F indépendant de T (à une équivalence de norme près, et pour T assez grand); cela résulte du fait que l'on explicite F dans ce cas : $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. ■

3.2. Une question analogue se pose pour les opérateurs à coefficients variables, cette fois à T fixé.

On considère

$$(3.5) \quad \Phi'' + A\Phi = 0,$$

$$A\Phi = -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \xi_i \xi_j.$$

Les coefficients a_{ij} étant réguliers (disons dans $C^0(\bar{\Omega})$), considérons les conditions initiales comme dans (3.1) et des conditions aux limites homogènes qui peuvent être très variées. *Par exemple*, prenons

$$(3.6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_A} = v_i \quad a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Alors, pour T assez grand, (3.2) définit une norme. Cette fois T est fixé. Les normes sont probablement dépendantes de A (au moins au voisinage du bord mais cela demande à être précisé!). ■

3.3. Dans le cas des conditions aux limites mêlées, et lorsque les conditions de Dirichlet et de Neumann sont prises sur deux régions de $\partial\Omega$ *d'intersection vide*, on a obtenu dans le texte des résultats avec une condition géométrique. Que se passe t'il si l'on échange Dirichlet et Neumann, sans changer la géométrie ? ■

3.4. Si maintenant on suppose que les régions où l'on prend des conditions de Dirichlet et de Neumann ont une intersection non vide, alors on a des problèmes dûs à l'absence de régularité (cf. P. GRISVARD [3]). On a résolu, suivant P. GRISVARD, un cas lorsque $n = 2$.

Tout ce qui a été dit ici s'étend au cas de la dimension 3 mais avec des difficultés considérables qui seront explicitées dans des travaux de P. GRISVARD en préparation.

3.5. Il serait intéressant d'étudier le cas du contrôle s'exerçant par la condition

$$(3.7) \quad \alpha \frac{\partial y}{\partial v} + \beta y = v \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{ou sur partie de } \Sigma)$$

les fonctions α , β étant d'abord supposées régulières, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ – puis d'examiner le cas limite où α et β sont des fonctions caractéristiques (de façon à retrouver les résultats du texte). Nous avons obtenu quelques résultats partiels, mais une étude systématique reste à faire.

3.6. On retrouve dans le cadre des conditions aux limites de ce Chapitre, les problèmes ouverts du Chapitre I, donc, en particulier, les situations à coefficients variables et les problèmes non linéaires.

3.7. Etude directe des espaces F .

Pour illustrer les problèmes que nous avons en vue ici, supposons pour simplifier que

$$(3.8) \quad \Omega \text{ est strictement étoilé par rapport à } x^0$$

donc

$$(3.9) \quad m \cdot v \geq \gamma > 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On suppose que T est fixé avec

$$(3.10) \quad T > \text{diamètre } \Omega.$$

Définissons

$$(3.11) \quad F_0 = \text{complété des fonctions } \Phi^0, \Phi^1 \text{ régulières dans } \bar{\Omega} \text{ pour } (\int_{\Sigma} \Phi^2 d\Sigma)^{1/2}$$

$$(3.12) \quad F_1 = \text{complété pour } (\int_{\Sigma} (\Phi^2 + (\Phi')^2) d\Sigma)^{1/2}.$$

On a vu au cours du Chapitre comment on pouvait "encadrer" les espaces F_0 et F_1 . Démontrons ici :

$$(3.13) \quad l'injection de \quad F_1 \quad dans \quad F_0 \quad est compacte.$$

Pour cela on reprend (1.40). On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 + \int_{\Sigma} |\nabla_{\sigma} \Phi|^2 d\Sigma &\leq \\ &\leq C R(x^0) \int_{\Sigma} (\Phi')^2 d\Sigma + C R(x^0) (\int_{\Gamma} |\Phi(0)|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma} |\Phi(T)|^2 d\Gamma), \end{aligned}$$

d'où, comme au Théorème 1.1,

$$(3.14) \quad \|\Phi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Phi^1|^2 + \int_{\Sigma} |\nabla_{\sigma} \Phi|^2 d\Sigma \leq C \int_{\Sigma} (\Phi^2 + \Phi'^2) d\Sigma.$$

Soit alors $\{\Phi_n^0, \Phi_n^1\}$ une suite bornée de F_1 .

Donc $\int_{\Sigma} (\Phi_n^2 + \Phi_n'^2) d\Sigma$ est borné et par conséquent, d'après (3.14),

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\sigma} \Phi|^2 d\Sigma \leq C$$

donc $\Phi_n|_{\Sigma}$ bornée dans $H^1(\Sigma)$.

On peut donc alors extraire une sous suite, encore notée Φ_n , telle que $\Phi_n|_{\Sigma}$ converge **fortement** dans $L^2(\Sigma)$, de sorte que – par définition de $F_0 = \{\Phi_n^0, \Phi_n^1\}$ – $\Phi_n|_{\Sigma}$ converge **fortement** dans F_0 . ■

Le rôle de (3.8) est-il essentiel dans ce *résultat* ? (Il l'est dans la *démonstration* précédente).

On peut en effet considérer les quantités $(\int_{\Sigma} (\Phi')^2 d\Sigma)^{1/2}$, $(\int_{\Sigma} (\Phi^2 + \Phi'^2) d\Sigma)^{1/2}$ sans hypothèse géométrique sur Γ ; ce sont encore des *normes* sur l'espace des $\{\Phi^0, \Phi^1\}$, d'où encore des espaces de Hilbert F_0 et F_1 . A-t-on encore (3.13) ? ■

3.8. Action sur une partie du bord.

Dans le cas où l'on contrôle par une action du type Dirichlet, la méthode des multiplicateurs (cf. Chap. I) a naturellement conduit à la contrôlabilité exacte en agissant sur une partie (convenable) du bord.

Assez curieusement (?) la méthode des multiplicateurs dans le cas Neumann ne *conduit pas* à une telle possibilité.

Mais les résultats "abstraits" avec action sur une partie du bord sont faciles par HUM.

Par exemple soit

$$(3.15) \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T).$$

Alors, exactement comme au Chapitre I , N°8, si

$$(3.16) \quad T > 2 d(\Omega, \Gamma_0)$$

la quantité

$$(\int_{\Sigma_0} \Phi^2 d\Sigma)^{1/2}$$

est une *norme*, donc définit un espace $F(\Gamma_0)$.

Alors HUM s'applique et on a *contrôlabilité exacte avec une action*

$$(3.17) \quad \begin{aligned} v \in L^2(\Sigma_0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \\ 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{aligned}$$

pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ tel que

$$(3.18) \quad \{y^1, -y^0\} \in F'(\Gamma_0).$$

La structure de $F'(\Gamma_0)$ n'est pas totalement élucidée ! ■

On peut noter que, quel que soit Γ_0 fixé, on a :

$$(3.19) \quad \text{l'injection de } H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ dans } F(\Gamma_0) \text{ est compacte.}$$

En effet si $\{\Phi_n^0, \Phi_n^1\}$ est bornée dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la suite Φ_n (resp. Φ'_n) correspondante est bornée dans $L^\infty(0, T ; H^1(\Omega))$ (resp. $L^\infty(0, T ; L^2(\Omega))$) d'où résulte que $\Phi_n|_\Sigma$ demeure dans un ensemble relativement compact de $L^2(\Sigma)$, donc de $L^2(\Sigma_0)$ et donc alors $\{\Phi_n^0, \Phi_n^1\}$ demeure dans un ensemble relativement compact de $F(\Gamma_0)$. ■

Chapitre IV

Système de l'élasticité et quelques modèles de plaques vibrantes

1. LE SYSTEME DE L'ELASTICITE (I) . ACTION DU TYPE DIRICHLET.

1.1. Orientation.

On va considérer le système de l'élasticité

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu \Delta y - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n),$$

avec

$$(1.2) \quad y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & y \quad \text{sur } \Sigma_0 \subset \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ & y = \\ & 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{aligned}$$

Dans (1.1) on considère *le cas isotrope* ; les λ et μ sont > 0 , *ce sont les constantes de Lamé*. ■

Remarque 1.1.

Ce qui suit s'adapte au cas *non* isotrope ! ■

On étudie la contrôlabilité exacte du système (1.1) (1.2) (1.3).

On va appliquer la méthode HUM.

On présente ici d'une manière succincte les résultats essentiels.

1.2. Inégalités.

On considère

$$\varphi'' - \psi \Delta \varphi - (\lambda + \psi) \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ dans } Q$$

$$(1.4) \quad \varphi(0) = \varphi^0; \quad \varphi'(0) = \varphi^1$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

où

$$(1.5) \quad \varphi^0 \in (H_0^1(\Omega))^n, \quad \varphi^1 \in (L^2(\Omega))^n.$$

Inégalité "directe".

En multipliant par $h_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ (i.e. par le vecteur de composantes $h_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \dots, n$)

et intégrant par parties comme dans le cas scalaire, on obtient

$$(1.6) \quad \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt \leq C E_0$$

où

$$(1.7) \quad E_0 = \frac{1}{2} [\psi |\nabla \varphi^0|^2 + (\lambda + \psi) |\operatorname{div} \varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2].$$

Remarque 1.2.

Dans (1.7), $|\nabla \varphi^0|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x_j} \right)^2$.

On peut dans l'inégalité (1.6) remplacer E_0 par

$$\|\varphi^0\|_{(H_0^1(\Omega))^n}^2 + \|\varphi^1\|_{(L^2(\Omega))^n}^2.$$

■

Inégalité "inverse".

On introduit, comme dans les chapitres antérieurs,

$$m_k(x) = x_k - x_k^0, \quad \Gamma(x^0), \quad R(x^0)$$

et on pose

$$X = (\varphi'(t), m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k})|_0^T, \quad Y = (\varphi'(t), \varphi(t))|_0^T.$$

On note que

$$E(t) = \frac{1}{2} [\psi |\nabla \varphi(t)|^2 + (\lambda + \psi) |\operatorname{div} \varphi(t)|^2 + |\varphi'(t)|^2]$$

est indépendant de t :

$$(1.8) \quad E(t) = E_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Multippliant par φ , on obtient

$$(1.9) \quad \iint (\varphi')^2 - \psi (\nabla \varphi)^2 - (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 = Y$$

où

$$\iint \psi = \iint_{\Omega \times (0, T)} \psi \, dx \, dt.$$

On multiplie l'équation (1.4), par $m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$. Il vient

$$(1.10) \quad X + \frac{n}{2} \iint (\varphi')^2 - \psi \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma - \psi \frac{n}{2} \iint |\nabla \varphi|^2 + \psi \iint |\nabla \varphi|^2 -$$

$$- (\lambda + \psi) \int_{\Sigma} (\operatorname{div} \varphi) m_k \nu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} d\Sigma + (\lambda + \psi) \iint \left[\frac{m_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\operatorname{div} \varphi)^2 + (\operatorname{div} \varphi)^2 \right] = 0.$$

La dernière intégrale dans (1.10) vaut

$$(\lambda + \psi) \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} (\operatorname{div} \varphi)^2 d\Sigma - (\lambda + \psi) \frac{n}{2} \iint (\operatorname{div} \varphi)^2 + (\lambda + \psi) \iint (\operatorname{div} \varphi)^2 .$$

On arrive alors à

$$X + \frac{n}{2} \iint [|\varphi'|^2 - \psi |\nabla \varphi|^2] + \psi \iint |\nabla \varphi|^2 - \psi \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma -$$

$$- (\lambda + \psi) \int_{\Sigma} \frac{m \nu}{2} (\operatorname{div} \varphi)^2 d\Sigma - (\lambda + \psi) \frac{n}{2} \iint (\operatorname{div} \varphi)^2 + \iint (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 = 0$$

et par conséquent

$$(1.11) \quad X + \frac{n-1}{2} Y + \frac{1}{2} \iint (\varphi')^2 + \psi |\nabla \varphi|^2 + (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 -$$

$$- \int_{\Sigma \setminus \Sigma(x^0)} \frac{m \nu}{2} \left(\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 \right) d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma(x^0)} \frac{m \nu}{2} \left[\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 \right] d\Sigma .$$

Mais – comme dans le cas scalaire –

$$|X + \frac{n-1}{2} Y| = |(\varphi'(t), m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \varphi(t))|_0^T \leq$$

$$\leq 2 R(x^0) \sup_t |\varphi'(t)| |\nabla \varphi(t)| \leq \frac{2 R(x^0)}{\sqrt{\psi}} E_0 .$$

Par conséquent (1.11) donne

$$(1.12) \quad \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left[\psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 + (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \phi)^2 \right] d\Gamma dt \geq (T - \frac{2R(x^0)}{\sqrt{\psi}}) E_0. \quad \blacksquare$$

1.3. Application de HUM .

Théorème 1.1.

On se donne x^0 et on définit $\Gamma(x^0)$, $R(x^0)$ comme au Chapitre I et on se donne T avec

$$(1.13) \quad T > \frac{2}{\sqrt{\psi}} R(x^0).$$

Alors pour $y^0 \in (L^2(\Omega))^n$, $y^1 \in (H^{-1}(\Omega))^n$, il existe $v \in (L^2(\Sigma(x^0)))^n$ tel que la solution correspondante de (1.1) (1.2) (1.3) vérifie

$$(1.14) \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Démonstration .

Le système en $\{\phi, \psi\}$ de la méthode HUM est ici donné de la façon suivante : ϕ est calculé par (1.14), puis ψ par

$$\psi'' - \psi \Delta \psi - (\lambda + \psi) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi = 0,$$

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \psi(T) &= \psi'(T) = 0, \\ &\psi \frac{\partial \phi}{\partial v} + (\lambda + \psi) v \operatorname{div} \phi \quad \text{sur } \Sigma(x^0), \\ \phi &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma(x^0). \end{aligned}$$

On définit

$$(1.16) \quad \wedge \{\psi^0, \psi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}.$$

On a alors, en multipliant l'équation en ψ par φ et en intégrant par parties

$$\begin{aligned} & \langle \wedge \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \psi \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + (\lambda + \psi) \operatorname{div} \varphi \right) d\Sigma \\ (1.17) \quad & = (\text{en utilisant le choix de } \psi \text{ sur } \Sigma(x^0)) \\ & = \int_{\Sigma(x^0)} \left| \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + (\lambda + \psi) \operatorname{div} \varphi \right|^2 d\Sigma . \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\Sigma(x^0)} 2\psi (\lambda + \psi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} v_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} d\Sigma = 2\psi (\lambda + \psi) \int_{\Sigma(x^0)} (\operatorname{div} \varphi)^2 d\Sigma$$

car $v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ sur Σ . Donc (1.17) donne

$$\begin{aligned} & \langle \wedge \{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \left(\psi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + (\lambda + \psi) (\lambda + 3\psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 \right) d\Sigma = \\ & = \psi \int_{\Sigma(x^0)} \left(\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + (3 + \frac{\lambda}{\psi}) (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 \right) d\Sigma \geqslant \\ & \geqslant \psi \int_{\Sigma(x^0)} \left(\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + (\lambda + \psi) (\operatorname{div} \varphi)^2 \right) d\Sigma \geqslant \\ & \geqslant \psi \left(T - \frac{2R(x^0)}{\sqrt{\psi}} \right) E_0 . \end{aligned}$$

Par conséquent \wedge est un isomorphisme de $F = (H_0^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$ sur F' et on applique HUM. ■

2. LE SYSTEME DE L'ELASTICITE (II). ACTION DU TYPE NEUMANN

2.1. Orientation.

On considère encore le système de l'élasticité, dans le cas isotrope (comme au n° précédent). Les conditions initiales sont

$$(2.1) \quad y(0) = y^0, y'(0) = y^1$$

où y^0 et y^1 sont pris dans des espaces *differents* de ceux utilisés dans le n° précédent.

On agit sur le système par *les conditions de Neumann*

$$(2.2) \quad \psi \left(\frac{\partial y_i}{\partial v} + v_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) + \lambda v_i \operatorname{div} y = v_i \quad \text{sur } \Sigma, i=1,\dots,n$$

v_i pouvant éventuellement être nul sur tout ou partie du bord.

Pour obtenir la forme de la condition de Neumann apparaissant dans (2.2), on note que la j ème composante du vecteur $-\psi \Delta y - (\lambda + \psi) \operatorname{grad} \operatorname{div} y$ s'écrit :

$$(2.3) \quad -\psi \Delta y_j - \psi \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} y$$

d'où l'opérateur apparaissant dans (2.2) par les intégrations par parties "naturelles". ■

On étudie le problème de la *contrôlabilité exacte* du système précédent. On ne va pas étudier tous les aspects de ce problème, ce qui entraînerait de longs développements : il faudrait en effet reprendre tout ce qui est fait au Chapitre III, en l'adaptant convenablement. *On va se borner à un résultat simple de contrôlabilité exacte, avec une hypothèse géométrique sur Ω très restrictive* (Ω étoilé). ■

2.2. Formulation variationnelle.

On part de φ solution "régulière" de

$$(2.4) \quad \varphi''_i - \psi \Delta \varphi_i - \psi \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \varphi = 0,$$

avec

$$(2.5) \quad \varphi(0) = \varphi^0, \varphi'(0) = \varphi^1$$

et les conditions de Neumann

$$(2.6) \quad \psi \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} + v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) + \lambda v_i \operatorname{div} \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \quad i = 1, \dots, n.$$

On introduit le tenseur des déformations linéarisé

$$(2.7) \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right).$$

La forme bilinéaire attaché à (2.4) (2.6) dans le cas stationnaire est

$$(2.8) \quad a(\varphi, \hat{\varphi}) = 2\psi \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\hat{\varphi}) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi \operatorname{div} \hat{\varphi} dx.$$

On introduit

$$(2.9) \quad V = \{ \varphi / \varphi \in (L^2(\Omega))^n, \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j \}.$$

On sait (cf. G. DUVAUT et J.L. LIONS, [1], Théorème 3.1 Chap. III) que (2.9) implique (et donc équivaut à)

$$(2.10) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j$$

i.e.

$$(2.11) \quad V = (H^1(\Omega))^n. \quad \blacksquare$$

La formulation variationnelle du système est donc

$$(2.12) \quad (\varphi'', \hat{\varphi}) + a(\varphi, \hat{\varphi}) = 0 \quad \forall \hat{\varphi} \in V,$$

$$\varphi(0) = \varphi^0 \in V, \quad \varphi'(0) = \varphi^1 \in (L^2(\Omega))^n. \quad \blacksquare$$

Conservation de l'énergie.

Si l'on pose (on écrit $a(\varphi, \varphi) = a(\varphi)$)

$$(2.13) \quad E(t) = \frac{1}{2} [|\varphi'(t)|^2 + a(\varphi(t))], \quad E_0 = \frac{1}{2} [|\varphi^1|^2 + a(\varphi^0)]$$

alors

$$(2.14) \quad E(t) = E_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

On prendra garde au fait que $E_0^{1/2}$ est une *semi-norme sur* V . En effet $E_0 = 0$ équivaut à $\varphi^1 = 0$ et à

$$(2.15) \quad \varphi^0 = b_0 + b_1 \wedge x = \text{déplacement rigide.} \quad \blacksquare$$

C'est précisément pour tenir compte de ces déplacements rigides que nous utilisons plus loin *l'inégalité suivante* :

$$(2.16) \quad \text{il existe } \gamma > 0 \text{ telle que } |\nabla \varphi|^2 \leq \gamma [a(\varphi) + \int_{\Gamma} |\varphi|^2 d\Gamma] \quad \forall \varphi \in V.$$

$$\text{(On a posé dans (2.16)} \quad |\nabla \varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Démonstration de (2.16).

1) Considérons sur V l'expression

$$(2.17) \quad |||\varphi||| = (a(\varphi) + \int_{\Gamma} |\varphi|^2 d\Gamma)^{1/2}.$$

C'est une norme. En effet si $|||\varphi||| = 0$ alors

$\varphi = b_0 + b_1 \wedge x$ et $\varphi = 0$ sur Γ frontière d'un ouvert borné. Donc $b_0 = 0$, $b_1 = 0$.

2) Il suffit alors de montrer que V est *complet* pour la norme (2.17) car elle est alors équivalente à la norme de $(H^1(\Omega))^n$, d'où (2.16).

3) On va utiliser le fait (cf. G.DUYAUT et J.L. LIONS, Théorème 3.4, Chap. 3) qu'il existe $c > 0$ telle que

$$(2.18) \quad a(\varphi) \geq c \|\varphi\|_{V^0}^2 \quad \text{où } V^0 = \text{quotient de } V \text{ par les déplacements rigides.}$$

Si φ^α est une suite de Cauchy par rapport à la norme (2.17), alors c'est une suite de Cauchy pour $\sqrt{a(\varphi)}$ et pour $(\int_{\Gamma} \varphi^2 d\Gamma)^{1/2}$; d'après (2.18), il existe $b_0^\alpha, b_1^\alpha \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que

$$(2.19) \quad \varphi^\alpha + b_0^\alpha + b_1^\alpha \wedge x \text{ converge dans } (H^1(\Omega))^n.$$

Mais $\varphi^\alpha|_\Gamma$ converge dans $(L^2(\Gamma))^n$. Donc comparant à (2.19)

$$(b_0^\alpha + b_1^\alpha \wedge x)|_\Gamma \text{ converge dans } (L^2(\Gamma))^n$$

donc b_0^α, b_1^α convergent et on a le résultat. ■

Equipartition de l'énergie.

Faisons $\hat{\varphi} = \varphi$ dans (2.12). Il vient

$$(2.20) \quad \int_0^T [|\varphi'|^2 - a(\varphi)] dt = Y$$

où

$$(2.21) \quad Y = (\varphi'(t), \varphi(t))|_0^T. \quad ■$$

2.3. Une inégalité.

On suppose φ^0 et φ^1 assez régulières pour que les intégrations par parties qui suivent aient un sens. Il n'y a pas de difficulté en ce point.

On introduit $m_k(x) = x_k - x_k^0$ et on multiplie (2.4) par $m_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$. On pose

$$(2.22) \quad X = (\varphi'(t), m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k})|_0^T.$$

Il vient :

$$X - \iint \frac{m_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varphi'^2) + \iint \psi \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (m_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}) +$$

$$+ \iint \psi \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (m_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}) + \iint \lambda \operatorname{div} \varphi \operatorname{div} (m_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} X - \iint \frac{m_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varphi')^2 + \iint \psi m_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi)) + 2\psi \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi) + \\ + \iint \lambda \frac{m_k}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\operatorname{div} \varphi)^2 + \lambda (\operatorname{div} \varphi)^2 = 0 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(2.23) \quad \begin{aligned} X + \frac{n}{2} \iint |\varphi'|^2 - \psi \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi) - \lambda (\operatorname{div} \varphi)^2 + \\ + \iint 2\psi \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi) + \lambda (\operatorname{div} \varphi)^2 - \int_{\Sigma} \frac{mv}{2} (|\varphi'|^2 - 2\psi \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi) - \lambda (\operatorname{div} \varphi)^2) d\Sigma = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$(2.24) \quad \begin{aligned} X + \frac{n-1}{2} Y + \frac{1}{2} \int_0^T [|\varphi'(t)|^2 + a(\varphi(t))] dt + \\ + \int_{\Sigma} \frac{mv}{2} [2\psi \varepsilon_{ij}(\varphi) \varepsilon_{ij}(\varphi) + \lambda (\operatorname{div} \varphi)^2] d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{mv}{2} |\varphi'|^2 d\Sigma . \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse

$$(2.25) \quad \Omega \text{ est étoilé.}$$

On prend x^0 = un point par rapport auquel Ω est étoilé.

Alors $mv \geq 0$ sur Γ et l'on déduit de (2.24) que

$$(2.26) \quad TE_0 \leq |X + \frac{n-1}{2} Y| + \frac{1}{2} R(x^0) \int_{\Sigma} |\varphi'|^2 d\Sigma . \quad \blacksquare$$

On majore maintenant $|X + \frac{n-1}{2}Y|$, en utilisant la méthode de V.KOMORNÍK [1]

(cf. Chap. III), convenablement adaptée et utilisant (2.16). On pose :

$$(2.27) \quad \xi(t) = (\varphi'(t), m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \varphi(t))$$

de sorte que

$$(2.28) \quad |X + \frac{n-1}{2}Y| \leq |\xi(T)| + |\xi(0)|.$$

Mais

$$(2.29) \quad |\xi(t)| \leq \frac{\alpha}{2} |\varphi'(t)|^2 + \frac{1}{2\alpha} |m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \varphi(t)|^2,$$

la constante α étant choisie plus loin.

On a :

$$\begin{aligned} |m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} \varphi(t)|^2 &= |m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k}|^2 + (\frac{n-1}{2})^2 |\varphi(t)|^2 + \frac{n-1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\varphi(t)|^2) dx = \\ &= |m_k \frac{\partial \varphi(t)}{\partial x_k}|^2 - \frac{n^2-1}{4} |\varphi(t)|^2 + \frac{n-1}{2} \int_{\Gamma} m \nu \varphi(t)^2 d\Gamma \leq \\ &\leq R(x^0)^2 |\nabla \varphi(t)|^2 - \frac{n^2-1}{4} |\varphi(t)|^2 + \frac{n-1}{2} R(x^0) f(t) \end{aligned}$$

où

$$(2.30) \quad f(t) = \int_{\Gamma} |\varphi(t)|^2 d\Gamma.$$

Utilisant (2.16), on en déduit.

$$(2.31) \quad |m_k \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} |\psi(t)|^2| \leq \gamma R(x^0)^2 a(\psi(t)) - \frac{n^2-1}{4} |\psi(t)|^2 +$$

$$+ \left(\frac{n-1}{2} R(x^0) + \gamma R(x^0)^2 \right) f(t).$$

On choisit α de façon que $\alpha = \frac{\gamma R(x^0)^2}{\alpha}$ donc $\alpha = R(x^0) \sqrt{\gamma}$.

Alors

$$(2.32) \quad |\xi(t)| \leq R(x^0) \sqrt{\gamma} \left[\frac{1}{2} |\psi'(t)|^2 + \frac{1}{2} a(\psi(t)) \right] - \frac{n^2-1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\psi(t)|^2 +$$

$$+ \left(\frac{n-1}{2} + \gamma R(x^0) \right) \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} f(t).$$

Mais si $g, g' \in L^2(0, T)$ on a :

$$(2.33) \quad \|g\|_{L^\infty(0, T)} \leq c_1 (\|g\|_{L^2(0, T)}^2 + \|g'\|_{L^2(0, T)}^2)^{1/2}$$

et par conséquent

$$(2.34) \quad \sup_{t \in [0, T]} f(t) \leq c_1^2 \int_{\Sigma} (|\psi|^2 + |\psi'|^2) d\Sigma dt.$$

Posant

$$(2.35) \quad c_2 = \frac{c_1^2}{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{n-1}{2} + \gamma R(x^0) \right)$$

on déduit de (2.32) que

$$(2.36) \quad |\xi(t)| \leq R(x^0) \sqrt{\gamma} E_0 - \frac{n^2-1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\psi(t)|^2 + c_2 \int_{\Sigma} (|\psi|^2 + |\psi'|^2) d\Sigma.$$

Par conséquent (2.28) donne

$$(2.37) \quad |X + \frac{n-1}{2} Y| \leq 2R(x^0) \sqrt{\gamma} E_0 - \frac{n^2 - 1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\varphi^0|^2 + 2c_2 \int_{\Sigma} (|\varphi|^2 + |\varphi'|^2) d\Sigma$$

(on n'utilise pas le terme $- \frac{n^2 - 1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\varphi(T)|^2$).

Utilisant (2.37) dans (2.26), il vient

$$(2.38) \quad (T - 2R(x^0) \sqrt{\gamma}) E_0 + \frac{n^2 - 1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\varphi^0|^2 \leq \\ \leq c_1^2 \int_{\Sigma} \varphi^2 d\Sigma + (c_1^2 + \frac{1}{2} R(x^0)) \int_{\Sigma} |\varphi'|^2 d\Sigma.$$

On a donc obtenu le

Théorème 2.1. *On suppose que Ω est étoilé par rapport à x^0 . Soit γ la constante (optimale) dans (2.16). Soit T donné avec*

$$(2.39) \quad T > 2R(x^0) \sqrt{\gamma}.$$

Il existe alors une constante c_2 telle que

$$(2.40) \quad \|\varphi^0\|_{(H^1(\Omega))^n}^2 + \|\varphi'\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 \leq c_2 \int_{\Sigma} (\varphi^2 + \varphi'^2) d\Gamma dt. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1.

La constante $2R(x^0) \sqrt{\gamma}$ dans (2.39) n'est pas nécessairement optimale. Par exemple on a : pour tout $k > 0$, il existe $\gamma(k)$ telle que

$$(2.41) \quad |\nabla \varphi|^2 \leq \gamma(k) [\alpha(\varphi) + k \int_{\Sigma} \varphi^2 d\Gamma]$$

(variante de (2.16), bien entendu démontrée de la même façon). Alors le Théorème 2.1 est valable pour

$$(2.42) \quad T > 2R(x^0) \sqrt{\gamma(k)}$$

mais la valeur de $\inf \sqrt{\gamma}(k)$ n'est pas claire (et on ne peut faire tendre k vers $+\infty$ sans changer d'espace !). ■

Remarque 2.2.

On a utilisé dans (2.40) l'intervention de $\frac{n^2 - 1}{8R(x^0)\sqrt{\gamma}} |\phi^0|^2$. Bien sûr $n > 1$.

Le cas $n = 1$ correspond à l'équation des ondes, déjà étudié. ■

2.4. Application de HUM.

On va montrer le

Théorème 2.2.

On se place dans les conditions du Théorème 2.1. Pour tout couple $\{y^0, y^1\}$ avec

$$(2.43) \quad y^0 \in (L^2(\Omega))^n, \quad y^1 \in (H^1(\Omega))'$$

il existe des contrôles $v = \{v_j\}$,

$$(2.44) \quad v_j \in (H^1(0,T; L^2(\Gamma)))'$$

tel que la solution y correspondante vérifie

$$(2.45) \quad y(T) = y'(T) = 0. \quad ■$$

Remarque 2.3

Il s'agit de solutions *faibles*. Noter en particulier que les espaces intervenant dans (2.43) pour y^1 et (2.44) *ne sont pas* des espaces de distributions. ■

Démonstration.

1) Soient ϕ^0, ϕ^1 donnés assez régulières dans $\bar{\Omega}$. On pose :

$$(2.46) \quad \| \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \|_F = \left(\int_{\Sigma} (|\varphi|^2 + |\varphi'|^2) d\Gamma dt \right)^{1/2}$$

et on désigne par F l'espace complété pour cette *norme* (c'est bien, en effet, une norme pour $T > 2R(x^0) \sqrt{\gamma}$ par (2.40)). On a

$$(2.47) \quad F \subset (H^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$$

donc

$$(2.48) \quad F' \supset (H^1(\Omega))' \times (L^2(\Omega))'$$

2) On définit \wedge par la méthode générale. Si l'on explicite, on trouve :

$$\varphi'' - \gamma \Delta \varphi - (\lambda + \gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi = 0$$

$$\psi - \gamma \Delta \psi - (\lambda + \gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \varphi^1, \quad \psi(T) = \psi'(T) = 0$$

(2.49)

$$\gamma \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} + v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) + \lambda v_i \operatorname{div} \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\gamma \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial v} + v_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) + \lambda v_i \operatorname{div} \psi = - \left(\varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \right) \quad \text{sur } \Sigma.$$

On note bien que dans (2.49) ψ est entendue au sens des *solutions faibles*. Alors si $\wedge \{ \varphi^0, \varphi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$, on a

$$(2.50) \quad \langle \wedge \{ \varphi^0, \varphi^1 \}, \{ \varphi^0, \varphi^1 \} \rangle = \int_{\Sigma} (|\varphi|^2 + |\varphi'|^2) d\Sigma$$

de sorte que \wedge est un isomorphisme de F sur F' .

Soient alors y^0, y^1 donnés avec (2.43). D'après (2.48), $\{y^1, -y^0\} \in F'$.

On peut donc résoudre l'équation

$$(2.51) \quad \wedge \{ \psi^0, \psi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

et on a le résultat. ■

3. PLAQUES VIBRANTES (I). ACTION DU TYPE DIRICHLET.

3.1. Formulation du problème.

Soit Ω un domaine borné de frontière Γ . Soit en outre $T > 0$.

On considère un système dont l'état $y = y(x, t)$ satisfait à

$$(3.1) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[.$$

On suppose que l'on peut agir sur le système par l'intermédiaire d'une fonction (*le contrôle*) $v = v(x, t)$ sur le bord $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ de façon que

$$(3.2) \quad y = 0 ; \quad -\frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma.$$

Soient par ailleurs les données initiales

$$(3.3) \quad y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (3.1)(3.2)(3.3), c'est-à-dire le problème suivant :

Soit $T > 0$ donné. Peut-on, pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ données dans un "espace convenable", trouver un contrôle v tel que, si $y = y(v)$ est la solution du problème (3.1)(3.2)(3.3), on ait

$$(3.4) \quad y(x, T; v) = y'(x, T; v) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Remarque 3.1

Le système (3.1)(3.2)(3.3) considéré entre dans le cadre général étudié dans le Chapitre II.

En effet, il suffit de poser

$$A = \Delta^2 ; B_1 = \text{identité} ; B_2 = \frac{\partial}{\partial v} .$$

Les opérateurs complémentaires sont dans ce cas

$$C_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial v} ; C_2 = \Delta .$$

On a imposé sur les conditions aux limites (3.2) la contrainte $y = 0$ sur Σ . *On agit donc sur le système uniquement au moyen de l'opérateur B_2 .*

En fait nous allons considérer la contrôlabilité exacte de ce système sous une *deuxième contrainte* du type

$$v = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 .$$

On considèrera en particulier le cas $\Sigma_0 = \Sigma(x^0)$, où $\Sigma(x^0)$ dénote l'ensemble déjà introduit dans le N° 1. ■

Remarque 3.2.

Le système (3.1)(3.2)(3.3) n'est pas hyperbolique. Il s'agit d'un *système bien posé au sens de Petrowsky*.

Le système n'étant pas hyperbolique, on pourrait envisager sa contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit ; ceci étant, les résultats de contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit exigeront des développements supplémentaires. (Cf. l'Appendice I de E. ZUAZUA). ■

Remarque 3.3.

Dans le cas $n = 2$, le système (3.1)(3.2)(3.3) modélise d'une manière très simplifiée, les vibrations d'une plaque Ω (cf. pour la modélisation S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG et W. WEAVER Jr. [1] et pour la contrôlabilité exacte de certains de ces modèles, J. LAGNESE et J.L. LIONS [1]). ■

Dans les paragraphes suivants on introduit quelques résultats préliminaires qui permettront ensuite, dans le paragraphe 3.7, d'établir les résultats de contrôlabilité exacte.

3.2. Quelques rappels.

Dans ce paragraphe on s'intéresse au problème

$$\theta'' + \Delta^2 \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(3.5) \quad \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\theta(0) = \theta^0; \theta'(0) = \theta^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Lemme 3.1.

(a) Soit Ω un domaine borné de frontière Γ lipschitzienne.

Alors, pour tout $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T; L^2(\Omega))$ il existe une solution unique $\theta = \theta(x,t)$ de (3.5) avec

$$(3.6) \quad \theta \in C(0,T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

En outre il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.7) \quad \|\theta\|_{L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))} \leq C \{ |\Delta \theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega))} \}$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

(b) On suppose maintenant que Γ est de classe C^3 .

Alors, pour tout $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in (H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ la solution $\theta = \theta(x,t)$ vérifie

$$(3.8) \quad \theta \in C(0,T; H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$$

et en outre, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.9) \quad \|\theta\|_{L^\infty(0,T; H^3_0 \cap H^2(\Omega))} + \|\theta'\|_{L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega))} \leq C (\|\theta^0\|_{H^3_0 \cap H^2(\Omega)} + \|\theta^1\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T; H^1_0(\Omega))})$$

$$\forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in (H^3 \cap H^2_0(\Omega)) \times H^1_0(\Omega) \times L^1(0,T; H^1_0(\Omega)). \quad \blacksquare$$

On considère maintenant le problème homogène

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.10) \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Le résultat précédent s'applique dans ce cas et donc, pour tout $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H^2_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ il existe une solution unique $\Phi = \Phi(x,t)$ qui vérifie $\Phi \in C(0,T; H^2_0(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$.

D'autre part, du fait que

$$\Phi'' = -\Delta^2 \Phi \quad \text{dans } Q$$

on déduit que

$$\Phi \in C^2(0,T; H^{-2}(\Omega)).$$

On considère maintenant l'énergie $E(t)$ associée au système (3.10) définie par :

$$(3.11) \quad E(t) = \frac{1}{2} [|\Delta \Phi(t)|^2 + |\Phi'(t)|^2] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\Delta \Phi(x,t)|^2 + |\Phi'(x,t)|^2] dx dt$$

$$\forall t \in [0, T].$$

On a le résultat classique suivant :

Lemme 3.2. (Loi de conservation de l'énergie).

Soit Ω un domaine borné de frontière lipschitzienne. Pour toute solution faible Φ du problème (3.10) l'énergie reste constante le long de la trajectoire, i.e.

$$(3.12) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} \{ |\Delta \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2 \} \quad \forall t \in [0, T].$$

Remarque 3.4.

Les résultats précédents sont standard, ils peuvent être démontrés à l'aide des trois méthodes introduites dans le Chapitre I, c'est-à-dire

- Méthode de Fourier.
- Théorie de Hille-Yosida.
- La théorie variationnelle, cf. J.L. LIONS [11] et J.L. LIONS et E. MAGENES [1]. ■

Remarque 3.5.

Lorsque Ω est un domaine borné et convexe de \mathbb{R}^2 on a (sans autre hypothèse de régularité sur le bord Γ)

$$(3.13) \quad \text{l'opérateur } \Delta^2 \text{ définit un isomorphisme de } H^3 \cap H_0^2(\Omega) \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

(cf. P. GRISVARD [1]).

Grâce à (3.13) la partie (b) du Lemme 3.1 concernant l'existence et unicité des solutions régulières (dans la classe (3.8)) s'étend à ce cas. Ce résultat nous permettra d'établir les estimations nécessaires pour aboutir à la contrôlabilité exacte dans des domaines bornés et convexes de \mathbb{R}^2 . ■

3.3. Une identité.

L'objet de ce paragraphe est d'établir une identité pour les solutions *faibles* du problème (3.5) – et par conséquent pour celles de (3.10) – qui permettra ensuite d'établir les estimations nécessaires dans l'application de HUM.

Lemme 3.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit $(q = (q_k))$ un champ de vecteurs tel que $q \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^n$. Alors pour toute solution faible

$$(3.14) \quad \theta \in C(0,T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$$

du problème (3.5), on a l'identité

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma &= (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta(t)}{\partial x_k})|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\theta'| - |\Delta \theta|^2] dx dt + \\ &+ 2 \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} dx dt + \int_Q \Delta q_k \Delta \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt + \\ &+ \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Démonstration .

On établit d'abord l'identité dans le cas d'une solution forte θ , i.e. d'une solution $\theta \in C(0,T; H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ qui correspond à des données $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in (H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$. On passe ensuite à la limite.

On multiplie l'équation (3.5) par $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ et on intègre sur Q ; il en résulte que

$$(3.16) \quad \int_Q (\theta'' + \Delta^2 \theta) q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_Q f q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt.$$

D'après la formule d'intégration par parties on a

$$(3.17) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T - \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt$$

et on observe que

$$(3.18) \quad \int_{\Omega} \theta' q_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} [|\theta'|^2] dx dt = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt$$

puisque $\theta' = 0$ sur Σ . ■

De (3.17) et (3.18) il résulte

$$(3.19) \quad \int_{\Omega} \theta'' q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(t))|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\theta'|^2 dx dt.$$

Par ailleurs

$$(3.20) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_{\Omega} \Delta \theta \Delta (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) dx dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} d\Sigma - \\ - \int_{\Sigma} \Delta \theta \frac{\partial}{\partial v} (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) d\Sigma = \int_{\Omega} \Delta \theta \Delta (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) dx dt - \int_{\Sigma} \Delta \theta \frac{\partial}{\partial v} (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) d\Sigma$$

car $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 0$ sur Σ .

En outre

$$(3.21) \quad \Delta (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) = \Delta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} + q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j}$$

et

$$(3.22) \quad \frac{\partial}{\partial v} (q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}) = (\frac{\partial q_k}{\partial v}) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial x_k} = q_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial x_k} \text{ sur } \Sigma$$

donc

$$(3.23) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_{\Omega} [\Delta q_k \Delta \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} + \\ + q_k \Delta \theta \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}] dx dt - \int_{\Sigma} q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial x_k} d\Sigma.$$

On remarque que

$$(3.24) \quad \int_{\Omega} q_k \Delta \theta \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\Delta \theta|^2) dx dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Delta \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma$$

et en combinant (3.23) avec (3.24) on obtient

$$(3.25) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dx dt = \int_{\Omega} [\Delta q_k \Delta \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\Delta \theta|^2] dx dt - \int_{\Sigma} q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial x_k} d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma.$$

Par ailleurs, puisque $\theta \in H_0^2(\Omega)$, on a

$$(3.26) \quad \frac{\partial \theta}{\partial v \partial x_k} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} v_k \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} v_k^2 \quad \text{sur } \Sigma$$

d'où

$$(3.27) \quad - \int_{\Sigma} q_k \Delta \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial x_k} d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\Delta \theta|^2 d\Sigma.$$

De (3.16)(3.19)(3.25) et (3.27) résulte l'identité (3.15). ■

Remarque 3.6

Pour obtenir une identité du type (3.15), ou des variantes de cette identité, il faut un multiplicateur avec des dérivées d'ordre impair. Dans ce paragraphe on utilise $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$. On utilisera plus loin $q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}$. ■

Remarque 3.7.

L'identité (3.15) reste valable lorsque Ω est un ouvert borné et *convexe* de \mathbb{R}^2 . ■

3.4. L'inégalité directe.

L'objet essentiel de ce paragraphe est d'établir le

Théorème 3.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.28) \quad \|\Delta\theta\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \{ |\Delta\theta^0| + |\theta^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \} .$$

Démonstration.

D'après le Lemme 3.2 du Chapitre I, on sait qu'il existe un champ de vecteurs $h \in [C^\infty(\mathbb{R}^n)]^n$ tel que

$$h \cdot v = h_k v_k \geq \gamma > 0 \text{ sur } \Gamma.$$

On applique l'identité (3.15) avec le choix $q = h$ et on obtient aisément

$$(3.29) \quad \frac{\gamma}{2} \int_\Sigma |\Delta\theta|^2 d\Sigma \leq C \{ \| \theta \|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))}^2 + \| \theta^1 \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ + \| f \|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \| \theta \|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \}$$

avec $C = C (\| h \|_{W^{2,\infty}(\Omega)})$.

En combinant (3.29) avec l'estimation (3.7) du Lemme 3.1 on obtient le résultat. ■

Corollaire 3.1. (L'inégalité directe)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution faible $\Phi = \Phi(x,t)$ du problème (3.10), on ait

$$(3.30) \quad \int_{\Sigma} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma \leq C E_0 . \quad \blacksquare$$

Démonstration.

Il suffit de prendre $f = 0$ dans l'estimation (3.28). \blacksquare

Remarque 3.8.

Ces résultats restent valables lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^2 . \blacksquare

Remarque 3.9.

A partir de l'inégalité (3.28) on déduit que pour toute solution faible θ de (1.5) on a

$$\Delta \Phi \in L^2(\Sigma).$$

Il s'agit d'un résultat supplémentaire sur la régularité des solutions faibles. En effet, à partir des équations

$$\theta'' + \Delta^2 \theta = f$$

$$f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$$

$$\theta \in C(0,T; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega))$$

on sait que $\Delta \theta|_{\Sigma}$ est définie comme "une distribution à valeurs dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ ".

Ce phénomène a été observé dans J.L. LIONS [12]. On a établi dans J.L. LIONS [13] que si $f \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ et, pour simplifier, $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ alors

$$\Delta \theta|_{\Sigma} \in L^2(0,T; H^1(\Gamma)), \quad \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v}|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma).$$

Par ailleurs, en utilisant la même technique que dans la démonstration du Théorème 4.2, Chapitre I, on peut démontrer que lorsque

$$f \in W^{-1,1}(0,T; H_0^2(\Omega))$$

i.e.

$$f = \frac{dg}{dt}, g \in L^1(0, T; H_0^2(\Omega))$$

alors, la solution $\theta = \theta(x, t)$ de (3.5) pour $\theta^0 = \theta^1 = 0$ vérifie

$$\{\theta(T), \theta'(T)\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et

$$\Delta\theta|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$$

et en outre

l'application $g \rightarrow \{\theta(T), \theta'(T), \Delta\theta|_{\Sigma}\}$ est continue de

$$L^1(0, T; H_0^2(\Omega)) \rightarrow H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma).$$

3.5. Existence et régularité des solutions du problème avec des conditions aux limites non homogènes.

Dans ce paragraphe nous allons étudier l'existence et la régularité des solutions du problème suivant

$$z'' + \Delta^2 z = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.31) \quad z(0) = z^0; z'(0) = z^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$z = 0; \frac{\partial z}{\partial \nu} = v \quad \text{sur } \Sigma.$$

Théorème 3.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Alors pour tout ensemble de données initiales et aux limites

$$(3.32) \quad \{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$$

il existe une solution unique z de (3.31) avec

$$(3.33) \quad z \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

En outre, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.34) \quad \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C (\|z^0\| + \|z^1\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|\nu\|_{L^2(\Sigma)})$$

$$\forall \{z^0, z^1, \nu\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Sigma).$$

Remarque 3.10.

Grâce à la réversibilité de l'équation par rapport à la variable de temps t on a le même résultat si l'on remplace les conditions initiales $z(0) = z^0 ; z'(0) = z^1$ par des "conditions finales" $z(T) = z^0 ; z'(T) = z^1$. ■

Avant de rentrer dans la démonstration du résultat précisons le sens dans lequel la solution z satisfait les équations (3.31).

La solution z est définie par la *méthode de transposition* : On dit que $z = z(x,t)$ est une solution de (3.31) si l'on a

$$(3.35) \quad \int_Q z f dx dt = \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_\Omega z^0 \theta'(0) dx - \int_\Sigma \nu \Delta \theta d\Sigma \quad \forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution du *problème transposé*

$$\theta'' + \Delta^2 \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(3.36) \quad \theta(T) = \theta'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre les espaces $H^{-2}(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$. ■

Démonstration du Théorème 3.2.

1) Désignons par $L(f)$ le 2^{ème} membre de (3.35), c'est-à-dire

$$(3.37) \quad L(f) = \langle z^1, \theta(0) \rangle - \int_\Omega z^0 \theta'(0) dx - \int_\Sigma \nu \Delta \theta d\Sigma$$

où $\theta = \theta(x, t)$ désigne la solution de (3.36) associée à f .

D'après les résultats qui précédent (cf. Lemme 3.1 et Théorème 3.1) la forme linéaire $L(f)$ est continue sur $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ et par conséquent il existe un élément z et un seul tel que

$$(3.38) \quad z \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

et

$$(3.39) \quad \int_0^T z f dx dt = L(f) \quad \forall f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

On a donc bien (comparer à (3.35)) l'existence et l'unicité de z avec (3.37) solution (faible) du problème.

En outre,

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \text{l'application de } \{z^0, z^1, v\} \rightarrow z \text{ est continue de} \\ L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

2) Supposons démontrée la propriété

$$(3.41) \quad \text{pour un ensemble dense dans } L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \text{ la solution } z \text{ correspondante est continue de } [0, T] \rightarrow L^2(\Omega), \text{ i.e. } z \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Alors par prolongement par continuité (loisible d'après (3.40)) on voit que

$$(3.42) \quad z \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Pour démontrer (3.41) on ne restreint pas la généralité en prenant des données initiales z^0 et z^1 très régulières, par exemple

$$(3.43) \quad \{z^0, z^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace de fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω .

On prend par ailleurs

$$(3.44) \quad v \in \mathcal{D}(]0, T[; C^3(\Gamma))$$

c'est-à-dire, une fonction v de classe C^∞ en t à valeurs dans $C^3(\Gamma)$, nulle au voisinage de $t = 0$ et $t = T$. (Une (petite) difficulté technique qui va apparaître ci-dessous serait évitée si l'on pouvait prendre $v \in \mathcal{D}(]0, T[; C^4(\Gamma))$, i.e. si Γ était de classe C^4).

On construit alors un relèvement \hat{v} tel que

$$\hat{v} \in \mathcal{D}(]0, T[; H^3 \cap H_0^1(\Omega))$$

$$(3.45) \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma.$$

La fonction

$$(3.46) \quad u = z - \hat{v}$$

vérifie alors

$$u'' + \Delta^2 u = -(\hat{v}'' + \Delta^2 \hat{v}) = F \quad \text{dans } Q$$

$$(3.47) \quad u(0) = z^0; u'(0) = z^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

avec F qui vérifie, en particulier,

$$(3.48) \quad F \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

D'après (3.45)(3.46) il suffit de démontrer

$$(3.49) \quad u \in C(0, T; L^2(\Omega))$$

mais en fait on a

$$(3.50) \quad u \in C(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Pour démontrer (3.50) on prend un procédé standard. On définit l'opérateur

$A = \{ \Delta^2 \text{ avec les conditions aux limites de Dirichlet} \}$, i.e. $D(A) = \{ \varphi \in H_0^2(\Omega) : \Delta^2 \varphi \in L^2(\Omega) \}$

et l'on prend le produit scalaire de (3.47), avec $A^{-\alpha} u'$, $\alpha > 0$. Il vient

$$(3.51) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|A^{-\alpha/2} u'|^2 + |A^{(1-\alpha)/2} u'|^2] = (A^{-\alpha/2} F, A^{-\alpha/2} u').$$

Si l'on choisit $\alpha = \frac{1}{2}$ on a alors

$$(3.52) \quad A^{-\alpha/2} F = A^{-1/4} F \in L^1(0, T ; L^2(\Omega))$$

et on en déduit

$$(3.53) \quad u \in C(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T ; H^{-1}(\Omega)).$$

3) Il nous reste donc à démontrer

$$(3.54) \quad z \in C^1(0, T ; H^{-2}(\Omega))$$

et plus précisément

$$(3.55) \quad z' \in L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))$$

avec l'estimation

$$(3.56) \quad \begin{aligned} \text{l'application linéaire } \{ z^0, z^1, v \} \rightarrow z' \text{ est } &\text{ continue de} \\ L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^\infty(0, T ; H^{-1}(\Omega)). & \end{aligned}$$

En effet, une fois (3.55)(3.56) démontrés (3.54) en résulte par le procédé ci-dessus.

Si l'on pose

$$(3.57) \quad f = \frac{d}{dt} g \in W^{-1, 1}(0, T ; H_0^2(\Omega))$$

avec

$$(3.58) \quad g \in L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$$

on a, d'après la Remarque 3.9,

$$(3.59) \quad |\Delta\theta(0)| + |\theta'(0)| + \|\Delta\theta\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|g\|_{L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))}$$

où $\theta = \theta(x, t)$ désigne la solution de (3.36) associée à $f = \frac{d}{dt} g$ et $C > 0$ est une constante indépendante de g .

Par conséquent, la forme linéaire $L(f)$ est aussi continue sur $W^{-1,1}(0, T ; H_0^2(\Omega))$ et la solution z du problème appartient donc à la classe

$$(3.60) \quad z \in (W^{-1,1}(0, T ; H_0^2(\Omega)))' = W^{1,\infty}(0, T ; H^{-2}(\Omega)).$$

En outre, on a l'estimation (3.56) ce qui achève la démonstration de ce théorème. ■

Remarque 3.11.

Le résultat précédent reste valable lorsque Ω est un ouvert borné et *convexe* de \mathbb{R}^2 .

Dans ce cas, quand il s'agit de démontrer (3.41) on peut prendre des données initiales très régulières $z^0, z^1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et des conditions aux limites

$$(3.61) \quad v \in \mathcal{D}([0, T] ; H^{1/2}(\Gamma)).$$

On peut alors relever v par une fonction \hat{v} telle que

$$(3.62) \quad \begin{aligned} \hat{v} &\in \mathcal{D}([0, T] ; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \nu} &= v \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

On obtient donc que $u = z - \hat{v}$ satisfait à (3.47) avec $F \in L^1(0, T ; H^{-2}(\Omega))$ et en appliquant (3.51) avec $\alpha = 1$ on obtient

$$(3.63) \quad u \in C(0, T ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T ; H^{-2}(\Omega)). \quad ■$$

1.6. Un théorème d'unicité. L'inégalité inverse.

Nous avons démontré dans le Chapitre II que l'obtention d'un résultat d'unicité implique

un résultat de contrôlabilité exacte.

L'objet de ce paragraphe est d'établir une estimation a priori – *l'inégalité inverse* – qui permettra en même temps d'aboutir à un résultat d'unicité – et a fortiori à un théorème de contrôlabilité exacte – et d'obtenir des informations supplémentaires sur l'espace des données initiales contrôlables. ■

Reprendons encore les notations des Chapitres précédents.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $m(x) = x - x^0$.

On définit une partition de la frontière latérale Σ du système de la manière suivante

$$(3.64) \quad \begin{aligned} \Gamma(x^0) &= \{ x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) = m_k(x) v_k(x) > 0 \} \\ \Gamma_*(x^0) &= \{ x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) \leq 0 \} = \Gamma \setminus \Gamma(x^0) \end{aligned}$$

et

$$(3.65) \quad \begin{aligned} \Sigma(x^0) &= \Gamma(x^0) \times]0, T[\\ \Sigma_*(x^0) &= \Gamma_*(x^0) \times]0, T[. \end{aligned}$$

On introduit en outre

$$(3.66) \quad R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^0|^2 \right|^{1/2}$$

et λ_0^2 = première valeur propre du problème

$$(3.67) \quad \begin{aligned} \Delta^2 w &= -\lambda_0^2 \Delta w \quad \text{dans } \Omega \\ w &\in H_0^2(\Omega) . \end{aligned}$$

La valeur propre λ_0^2 est caractérisée par

$$\lambda_0^2 = \min_{w \in H_0^2(\Omega) - \{0\}} \frac{|\Delta w|^2}{|\nabla w|^2}$$

et par conséquent on a

$$(3.68) \quad |\nabla w| \leq \frac{1}{\lambda_0} |\Delta w| \quad \forall w \in H_0^2(\Omega).$$

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 3.3. (L'inégalité inverse)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 .

Alors, pour tout $T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\lambda_0}$ et toute solution faible $\Phi = \Phi(x,t)$ du problème homogène (3.10), l'inégalité suivante est vérifiée

$$(3.69) \quad (T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{4} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma. \quad \blacksquare$$

Comme une conséquence immédiate de ce théorème on a le

Corollaire 3.2. (Théorème d'unicité)

Sous les hypothèses du Théorème 3.3, si $\Phi = \Phi(x,t)$ est une solution faible du problème homogène (3.10) qui vérifie

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma(x^0)$$

alors $\Phi \equiv 0$. ■

Remarque 3.12.

Ce résultat d'unicité donné dans J.J. LIONS [14] semble être de type nouveau. Il n'est pas une conséquence du Théorème de Holmgren ou des principes de prolongement unique classiques qui exigent "en plus" que

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \subset \Sigma.$$

Ces questions seront étudiées en détail dans le paragraphe 3.9. Dans l'Appendice I de E. ZUAZUA, on démontrera qu'en fait le résultat d'unicité du Corollaire 3.2 est vrai pour tout $T > 0$. Ceci permettra d'obtenir une estimation du type (3.69) pour tout $T > 0$.

Le résultat d'unicité du Corollaire 3.2 pose un assez grand nombre de questions qui semblent ouvertes et intéressantes. Si Φ est solution de

$$\Phi'' + \Delta^2\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

et vérifie *trois* conditions aux limites homogènes (construites à partir des opérateurs I = identité, $\frac{\partial}{\partial\nu}$, Δ , $\frac{\partial}{\partial\nu}$ sur Σ ou partie de Σ) et si T est assez grand, quand a-t-on $\Phi = 0$?

Par exemple, si l'on remplace $\Delta\Phi = 0$ sur $\Sigma(x^0)$ par $\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu} = 0$ sur $\Sigma(x^0)$, a-t-on encore $\Phi = 0$?.

Un cas particulier a été résolu par I. LASIECKA et R. TRIGGIANI [3], [4]. Ils ont démontré que lorsque Ω est strictement étoilé par rapport à x^0 (i.e. $(x - x^0) \cdot \nu(x) \geq \gamma > 0$ $\forall x \in \Gamma$) le résultat d'unicité a lieu pour tout $T > 0$. Le problème est ouvert dans le cas général. ■

Démonstration du Théorème 3.3.

On applique l'identité (3.15) avec $q = m = x - x^0$ et $f = 0$.

On a donc

$$(3.70) \quad X + \frac{n}{2} \int_{\Omega} [|\Phi'|^2 - |\Delta\Phi|^2] dx dt + 2 \int_{\Omega} |\Delta\Phi|^2 dx dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m \cdot \nu |\Delta\Phi|^2 d\Sigma \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta\Phi|^2 d\Sigma$$

avec

$$(3.71) \quad X = (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k})|_0^T$$

Posons

$$(3.72) \quad Y = \int_Q [|\Phi'|^2 - |\Delta \Phi|^2] dx dt.$$

On a le

Lemme 3.4.

Pour toute solution faible Φ de (3.10) on a

$$(3.73) \quad Y = (\Phi'(t), \Phi(t))|_0^T.$$

Démonstration du Lemme 3.4.

On multiplie l'équation (3.10) par Φ et on intègre sur Q . On obtient

$$\int_Q (\Phi'' + \Delta^2 \Phi) \Phi dx dt = - \int_Q |\Phi'|^2 dx dt + (\Phi'(t), \Phi(t))|_0^T + \int_Q |\Delta \Phi|^2 dx dt = 0$$

d'où le résultat. ■

Dans (3.70) on utilise

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\Delta \Phi|^2] dx dt + 2 \int_Q |\Delta \Phi|^2 dx dt &= \frac{n-2}{2} \int_Q [|\Phi'|^2 - |\Delta \Phi|^2] dx dt + \\ &+ \int_Q [|\Phi'|^2 + |\Delta \Phi|^2] dx dt = \frac{n-2}{2} (\Phi'(t), \Phi(t))|_0^T + 2TE_0 \end{aligned}$$

grâce à (3.73) et à la loi de conservation de l'énergie.

On obtient donc

$$(3.74) \quad 2TE_0 + (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t))|_0^T \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi|^2 d\Gamma dt.$$

Pour obtenir (3.69) il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\left| \left(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t) \right) \Big|_0^T \right| \leq 2 \frac{R(x^0)}{\lambda_0} E_0$$

ce qui résulte de l'inégalité

$$(3.75) \quad \left| \left(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t) \right) \Big|_0^T \right| \leq \frac{R(x^0)}{\lambda_0} E_0 \quad \forall t \in [0, T]$$

que l'on va démontrer.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$(3.76) \quad \begin{aligned} \left| \left(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t) \right) \right| &\leq \frac{R(x^0)}{2\lambda_0} |\Phi'(t)|^2 + \\ &+ \frac{\lambda_0}{2R(x^0)} \left| m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t) \right|^2 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$(3.77) \quad \begin{aligned} \left| m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t) \right|^2 &= \left| m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) \right|^2 + \frac{(n-2)^2}{4} |\Phi(t)|^2 + \\ &+ (n-2) \left(m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t), \Phi(t) \right). \end{aligned}$$

En outre

$$(3.78) \quad \left(m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t), \Phi(t) \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\Phi(t)|^2) dx = -\frac{n}{2} |\Phi(t)|^2.$$

En combinant (3.77) et (3.78) on en déduit

$$(3.79) \quad |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} |\Phi(t)|^2| = |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 + \left[\frac{(n-2)^2}{4} - \frac{n(n-2)}{2} \right] |\Phi(t)|^2 \leq$$

$$\leq |m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 \leq R(x^0)^2 |\nabla \Phi(t)|^2$$

(par (3.68)) $\leq \frac{R(x^0)^2}{\lambda_0^2} |\Delta \Phi(t)|^2.$

Finalement, de (3.76) et (3.79) on déduit (3.75), ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 3.13.

Dans J. L. LIONS [3] ce résultat a été démontré pour tout $T > \hat{T}(x^0)$ avec

$$\hat{T}(x^0) = T(x^0) + \frac{|n-2|}{2\psi_0}$$

où ψ_0^2 désigne la première valeur propre de Δ^2 dans Ω avec la condition de Dirichlet homogène au bord.

L'amélioration précédente a été obtenue par V. KOMORNÍK qui a observé (3.79). ■

Dans l'Appendice I de E. ZUAZUA, on démontre une estimation du type (2.69) pour tout $T > 0$. ■

Remarque 3.14.

Les résultats précédents restent valables lorsque Ω est un domaine borné et convexe de \mathbb{R}^2 . ■

3.7. Quelques résultats de contrôlabilité exacte.

Le résultat fondamental de contrôlabilité exacte est le suivant :

Théorème 3.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(3.80) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(3.81) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (3.1)(3.2)(3.3) satisfait à (3.4).

Démonstration.

On applique la méthode HUM.

On résout d'abord le système homogène (3.10), i.e.

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0 ; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

avec les conditions initiales $\Phi^0, \Phi^1 \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'après le Corollaire 3.1 on a, en particulier,

$$\Delta \Phi \in L^2(\Sigma(x^0))$$

avec l'estimation (3.30).

On considère ensuite le problème rétrograde

$$\psi'' + \Delta^2 \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.82) \quad \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} &= \begin{cases} \Delta \Phi & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma_*(x^0). \end{cases} \end{aligned}$$

Du Théorème 3.2 on déduit l'existence d'une solution unique $\psi = \psi(x,t)$ du problème (3.80) avec

$$(3.83) \quad \psi \in C(0,T ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T ; H^{-2}(\Omega)).$$

On définit l'opérateur

$$(3.84) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \} \quad \forall \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$$

qui vérifie

$$(3.85) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma.$$

On construit ensuite l'espace hilbertien F complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme

$$(3.86) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F = \| \Delta \Phi \|_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

Grâce aux estimations (3.30) et (3.69) on déduit que

$$(3.87) \quad F = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

De (3.85) résulte que \wedge définit un isomorphisme de F sur F' . On a évidemment

$$(3.88) \quad F' = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Grâce à HUM on déduit la contrôlabilité exacte des données initiales $\{ y^0, y^1 \}$ telles que

$$\{y^1, -y^0\} \in H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega) = F,$$

le contrôle $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ étant donné par

$$v = \Delta \Phi \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

où Φ désigne la solution de (3.10) associée aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.15.

Le Théorème 3.7 de contrôlabilité exacte reste valable lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^2 . \blacksquare

On peut aussi donner d'autres résultats de contrôlabilité exacte qui correspondent à d'autres choix de la norme $\|\cdot\|_F$.

On donne d'abord un exemple où l'on considère une *norme plus forte*. On pose

$$(3.89) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \|\Delta \Phi'\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$$

et avec ce choix on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.5.

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(3.90) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-2}(\Omega) \times [H^4 \cap H_0^2(\Omega)]'$$

il existe un contrôle

$$(3.91) \quad v \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (3.1)(3.2)(3.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. \blacksquare

Démonstration.

On applique de nouveau la méthode HUM.

On résout d'abord le problème homogène

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

avec des données initiales régulières $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

On remarque que la norme $\|\cdot\|_F$ définie par (3.84) est équivalente à la norme

$$(3.92) \quad (\|\Delta^2 \Phi^0\|^2 + \|\Delta \Phi^1\|^2)^{1/2}.$$

La démonstration de ce fait est analogue à celle qu'on a donnée au Théorème 6.2, Chapitre I. En effet, on pose $\xi = \Phi'$ solution de

$$\xi'' + \Delta^2 \xi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\xi(0) = \Phi^1; \xi'(0) = -\Delta^2 \Phi^0.$$

On a évidemment $\|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \|\Delta \xi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$ et grâce aux estimations (3.30) et (3.69) on voit que $\|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F$ est équivalente à la norme de $\{\Phi^1, -\Delta^2 \Phi^0\}$ dans $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Par conséquent, grâce au fait que Ω est régulier de classe C^4 , l'espace F complété de $(C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^2(\Omega)) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$ est dans ce cas

$$(3.93) \quad F = (H^4 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$$

et donc

$$(3.94) \quad F' = [H^4 \cap H_0^2(\Omega)]' \times H^{-2}(\Omega).$$

On définit ensuite le problème rétrograde

$$(3.95) \quad \begin{aligned} \psi + \Delta^2 \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= - \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Phi') && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

On remarque que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Phi')$ n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre les espaces $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ et $[H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]'$, c'est-à-dire de sorte que

$$(3.96) \quad \left\langle - \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Phi'), w \right\rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \Delta \Phi' w' d\Sigma \quad \forall w \in H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))).$$

La solution $\psi = \psi(x, t)$ du problème existe et est unique. Elle est définie par la méthode de transposition (cf. Remarque 3.16 ci-dessous) ; il s'agit d'une solution faible qui vérifie en particulier

$$(3.97) \quad \{\psi(0), \psi'(0)\} \in H^{-2}(\Omega) \times [H^4 \cap H_0^2(\Omega)]'.$$

On définit maintenant l'opérateur

$$(3.98) \quad \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

qui vérifie

$$(3.99) \quad \langle \wedge \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \|\Delta \Phi'\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2.$$

Par conséquent \wedge définit un isomorphisme de $(H^4 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ sur $[H^4 \cap H_0^2(\Omega)]' \times H^{-2}(\Omega)$.

Pour tout $\{y^0, y^1\} \in H^{-2}(\Omega) \times [H^4 \cap H_0^2(\Omega)]'$ il existe donc une solution unique $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (H^4 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ du problème

$$(3.100) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}.$$

On démontre donc, par les arguments habituels, l'existence d'un contrôle

$$(3.101) \quad \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Phi') && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

où $\Phi = \Phi(x, t)$ désigne la solution de (3.10) associée à $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ solution de (3.100). ■

Remarque 3.16.

La solution $\psi = \psi(x, t)$ du problème (3.95) est définie par la méthode de transposition. On dit que ψ est solution de (3.95) si elle vérifie

$$(3.102) \quad \int_Q \psi f dx dt + \langle \psi'(0), \theta^0 \rangle - \langle \psi(0), \theta^1 \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \Delta \Phi' \Delta \theta' d\Sigma,$$

$$\forall \{ \theta^0, \theta^1, f \} \in (H^4 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$$

où $\theta = \theta(x, t)$ désigne la solution de

$$(3.103) \quad \begin{aligned} & \theta'' + \Delta^2 \theta = f && \text{dans } Q \\ & \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Sigma \\ & \theta(0) = \theta^0 ; \Phi'(0) = \theta^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Dans l'identité (3.102) le 1^{er} (resp. le 2^{ème}) crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre les espaces $(H^4 \cap H_0^2(\Omega))'$ et $H^4 \cap H_0^2(\Omega)$ (resp. $H^{-2}(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$). De même, l'intégrale $\int_Q f y dx dt$ doit être interprétée au sens de la dualité entre $L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))$ et $L^1(0, T ; H_0^2(\Omega))$.

Il existe une solution (faible) unique ψ de ce problème dans la classe

$$(3.104) \quad \psi \in L^\infty(0, T ; H^{-2}(\Omega))$$

avec des traces $\{\psi(0), \psi'(0)\}$ bien définies de sorte que

$$(3.105) \quad \{\psi(0), \psi'(0)\} \in H^{-2}(\Omega) \times [H^4 \cap H_0^2(\Omega)]'.$$

On ne donne pas ici une démonstration complète de ce résultat. Un résultat analogue sera démontré dans le Théorème 4.2 de ce Chapitre. ■

Remarque 3.17.

Lorsque Ω a une frontière de classe C^3 ou bien Ω est un domaine *convexe* de \mathbb{R}^2 on démontre un résultat de contrôlabilité exacte analogue.

Dans ce cas on a la contrôlabilité exacte des données

$$(3.106) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-2}(\Omega) \times V'$$

avec

$$(3.107) \quad V = \{\varphi \in H_0^2(\Omega) / \Delta^2 \varphi \in L^2(\Omega)\}.$$

Evidemment, à cause de la non-régularité du domaine Ω on pourrait avoir $V \neq H^4 \cap H_0^2(\Omega)$. ■

Affaiblissement de la norme.

On peut procéder comme au Chapitre I, N° 7.2. On se fixe l'espace F

$$(3.108) \quad F = L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

et par conséquent

$$(3.109) \quad F' = L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega).$$

On sait que le problème (3.10) est bien posé dans F , c'est-à-dire que pour tout

$\{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ il existe une solution unique $\Phi = \Phi(x, t)$ de (3.10) avec

$$(3.110) \quad \Phi \in C(0, T ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T ; H^{-2}(\Omega)).$$

On définit l'espace

$$(3.111) \quad G = \{ \text{espace des traces } \Delta \Phi|_{\Sigma(x, 0)} \text{ lorsque } \{\Phi^0, \Phi^1\} \text{ parcourt } F \}$$

muni de la norme induite par F

$$(3.112) \quad \| \Delta \Phi \|_G = [|\Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_{H^{-2}(\Omega)}^2]^{1/2}.$$

Cela a un sens si le bord Γ est assez régulier, par exemple de classe C^3 .

Avec ce procédé on déduit la contrôlabilité exacte des données

$$(3.113) \quad \{y^0, y^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

avec des contrôles

$$(3.114) \quad v \in G'.$$

Le résultat devient plus intéressant si on est capable d'obtenir des informations supplémentaires sur G' .

Dans le but d'identifier G' on introduit la solution x du problème

$$(3.115) \quad \Delta^2 x = \Phi^1 \text{ dans } \Omega, \quad x \in H_0^2(\Omega)$$

et $w = w(x, t)$ définie par

$$(3.116) \quad w(t) = \int_0^t \Phi(\sigma) d\sigma + x$$

où $\Phi = \Phi(x, t)$ désigne la solution de (3.10) qui correspond aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$.

On vérifie aisément que w est la solution du problème

$$(3.117) \quad \begin{aligned} w'' + \Delta^2 w &= 0 && \text{dans } Q \\ w(0) &= \chi, \quad w'(0) = \Phi^0 && \text{dans } \Omega \\ w &= \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Lorsque $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ parcourt l'espace $F = L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$, alors $\{\chi, \Phi^0\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Si Ω est de classe C^3 grâce à "l'inégalité directe" et à "l'inégalité inverse" on en déduit que l'application

$$(3.118) \quad \begin{aligned} H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Sigma(x^0)) \\ \{\chi, \Phi^0\} &\rightarrow \Delta w|_{\Sigma(x^0)} \end{aligned}$$

est un isomorphisme et par conséquent l'application

$$(3.119) \quad \begin{aligned} L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0)) \\ \{\Phi^0, \Phi^1\} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Delta w|_{\Sigma(x^0)} \end{aligned}$$

est aussi un isomorphisme.

On en déduit donc

$$(3.120) \quad G = \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0)) = H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Théorème 3.6.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(3.121) \quad \{y^0, y^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(3.122) \quad v \in H_0^1(0,T ; L^2(\Gamma(x^0)))$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (3.1)(3.2)(3.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Remarque 3.18.

Le Théorème 3.6 est de nouveau valable lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^2 . ■

3.8. Quelques commentaires.

a) **Optimalité du temps de contrôlabilité $T(x^0)$.**

Nous avons démontré dans le Théorème 3.4 que la contrôlabilité exacte du système a lieu dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ pour tout $T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\lambda_0}$.

En fait ce résultat peut être amélioré.

On définit T_0 comme la plus petite constante telle que pour tout $T > T_0$ on ait le résultat d'unicité suivant

$$(3.123) \quad \begin{aligned} \Phi &\text{ solution faible de (3.10)} \\ \Delta\Phi &= 0 \text{ sur } \Gamma(x^0) \times]0,T[\end{aligned} \quad \Rightarrow \Phi = 0.$$

Pour T_0 ainsi définie on a le résultat suivant .

Théorème 3.7.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T_0$.

Alors, pour tout couple de données

$$(3.124) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(3.125) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (3.1)(3.2)(3.3) satisfait à (3.4). ■

Démonstration.

Le résultat est une conséquence de HUM si on démontre l'estimation suivante :

Lemme 3.5.

Pour tout $T > T_0$ il existe une constante $C > 0$ (indépendante de la solution Φ) telle que

$$(3.126) \quad E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} (\Delta \Phi)^2 d\Sigma \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Démonstration du Lemme 3.5.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $T - \varepsilon > T_0$.

D'après l'estimation (3.74) obtenue au cours de la démonstration du Théorème 3.4 on a

$$(3.127) \quad 2(T-\varepsilon) E_0 \leq C(\varepsilon) \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma$$

puisque

$$|(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n-2}{2} \Phi(t))|_0^T \leq 2\varepsilon E_0 + C(\varepsilon) \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2.$$

Il suffit donc de démontrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$(3.128) \quad \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \|\Delta \Phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}.$$

On raisonne par l'absurde. Si (3.128) n'est pas vérifiée il existe une suite de solutions faibles (Φ_n) telle que

$$(3.129) \quad \|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3.130) \quad \|\Delta\Phi_n\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty .$$

En combinant (3.127)(3.129) et (3.130) on déduit (grâce à la conservation de l'énergie)

$$(3.131) \quad \|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} + \|\Phi_n'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Quitte à extraire une sous-suite on a donc

$$(3.132) \quad \Phi_n \rightarrow \Phi \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \quad \text{faible *}$$

$$(3.133) \quad \Phi_n' \rightarrow \Phi' \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{faible *}$$

et par compacité

$$(3.134) \quad \Phi_n \rightarrow \Phi \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{forte.}$$

Par ailleurs, de (3.130) on déduit que

$$(3.135) \quad \Delta\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0).$$

D'après (3.129) et (3.134) on a

$$(3.136) \quad \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1 .$$

En outre, de (3.132) et (3.133) résulte que Φ est une solution faible du problème (3.10) qui vérifie (3.135). D'après (3.123) on a donc $\Phi \equiv 0$ ce qui contredit (3.136).

Le lemme est donc démontré. ■

On conclut la démonstration du Théorème 3.7 en reprenant les arguments de la démonstration du Théorème 3.4. ■

Remarque 3.19.

D'après le corollaire 3.2 on a évidemment $T_0 \leq T(x^0)$. Dans l'Appendice I de E. ZUAZUA on démontrera qu'en fait $T_0 = 0$. ■

b) Existence d'une infinité de contrôles.

Nous avons démontré la contrôlabilité exacte du système pour tout $T > T(x^0)$ dans un espace F qui ne dépend pas de T , à savoir $F = L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.

Par les mêmes arguments que ceux déjà introduits dans le Chapitre I, on montre *l'existence d'une infinité de contrôles* qui ramènent tout état initial $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ à l'instant $T > T(x^0)$.

Rappelons brièvement l'idée de la démonstration. On fixe $T > T(x^0)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $T - \varepsilon > T(x^0)$, pour tout couple $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ et pour tout $u^\varepsilon \in L^2(\Gamma(x^0) \times]0, \varepsilon[)$ il existe une solution unique du problème

$$y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$y(0) = y^0; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, \varepsilon[; \frac{\partial y}{\partial v} = \begin{cases} u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma(x^0) \times]0, \varepsilon[\\ 0 & \text{sur } \Gamma^*(x^0) \times]0, \varepsilon[\end{cases}$$

avec

$$y \in C(0, \varepsilon; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, \varepsilon; H^{-2}(\Omega)).$$

A l'instant $t = \varepsilon$ on a donc

$$\{z^0, z^1\} = \{y(\varepsilon), y'(\varepsilon)\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega).$$

Du fait que $T - \varepsilon > T(x^0)$, on sait, d'après le Théorème 3.7, qu'il existe un contrôle $v^\varepsilon \in L^2(\Gamma(x^0) \times]\varepsilon, T[)$ qui ramène l'état $\{z^0, z^1\}$ à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ à l'instant T .

Nous avons construit par ce procédé un contrôle

$$w^\varepsilon = \begin{cases} u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma(x^0) \times]0, \varepsilon[\\ v^\varepsilon & \text{sur } \Gamma(x^0) \times]\varepsilon, T[\end{cases}$$

pour chaque $\varepsilon < T - T(x^0)$ et $u^\varepsilon \in L^2(\Gamma(x^0) \times]0, \varepsilon[)$.

Ce contrôle w^ε satisfait

$$y(T; w^\varepsilon) = y'(T; w^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega$$

ce qui démontre que *l'ensemble des contrôles admissibles*

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ v \in L^2(\Sigma(x^0)) / y(T; v) = y'(T; v) = 0 \}$$

contient une infinité d'éléments.

Le contrôle donné par HUM peut être caractérisé comme celui qui minimise

$$J(v) = \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma$$

sur le convexe \mathcal{U}_{ad} .

Cette question sera étudiée dans le Chapitre VIII dans le cas modèle de l'équation des ondes avec contrôle de type Dirichlet. ■

c) Autres contraintes sur le contrôle.

Nous avons étudié dans les paragraphes précédents la contrôlabilité exacte du système (3.1)(3.2)(3.3) avec des conditions aux limites du type

$$y = 0 ; \frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma.$$

I. LASIECKA et R. TRIGGIANI ont démontré dans [3][4] la contrôlabilité du système (3.1)(3.2)(3.3) avec des contrôles du type

$$y = v ; \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

sous l'hypothèse géométrique,

Ω strictement étoilé.

Leur démonstration utilise les arguments de E. ZUAZUA [4] (cf. aussi l'appendice I),

mais avec des développements techniques supplémentaires dûs à la non conservation des énergies usuelles. ■

d) Action sur des parties de frontière non cylindriques.

Par des arguments analogues à ceux introduits dans le Chapitre I, on peut démontrer la contrôlabilité exacte du système (3.1)(3.2)(3.3) avec des contrôles v à support dans une partie non cylindrique Σ_0 de Σ de la forme

$$\Sigma_0 = \{ (x,t) \in \Sigma / m(x,t) \cdot v(x) > 0 \}$$

avec

$$m(x,t) = x - x^0(t)$$

et $\|x^0(t)\|_{W^{1,\infty}(0,T)}$ suffisamment petit. ■

e) Les conséquences du Théorème de Holmgren.

En appliquant le Théorème 8.1 du Chapitre I on peut obtenir des critères d'unicité très généraux pour l'équation

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Comme on a déjà démontré dans le Chapitre II ces résultats d'unicité permettent d'obtenir systématiquement des résultats de contrôlabilité exacte en appliquant la méthode HUM.

Ceci étant, comme on a déjà vu dans le Chapitre I, les résultats de contrôlabilité exacte obtenus ont un caractère "abstrait" qui doit donc être complété par des informations supplémentaires sur l'espace des données initiales contrôlables.

Donnons un exemple.

En appliquant le Théorème 8.1 du Chapitre I, on peut obtenir facilement le résultat suivant :

Lemme 3.6.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^∞ , soient $T > 0$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ouvert non vide quelconques.

Alors si $\Phi = \Phi(x,t)$ est une solution régulière de

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.137) \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

telle que

$$(3.138) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[$$

on a $\Phi \equiv 0$. ■

Le critère d'unicité est vrai pour tout $T > 0$. C'est une conséquence du fait que les plans caractéristiques de l'opérateur $P(D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2$ sont de la forme $\pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / t = \text{const.}\}$. ■

On voit donc que pour Γ_0 sous-ensemble ouvert non vide quelconque de Γ , $T > 0$ arbitrairement petit et $k \in \mathbb{R}$, la semi-norme

$$(3.139) \quad \|(\Phi^0, \Phi^1)\|_{F_k} = \left\{ \|\Delta \Phi\|_{H^{-k}(\Gamma_0 \times]0, T[)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right\|_{H^{-k}(\Gamma_0 \times]0, T[)}^2 \right\}^{1/2}$$

(où $\Phi = \Phi(x,t)$ désigne la solution de (3.137) vérifiant $\Phi(0) = \Phi^0$; $\Phi'(0) = \Phi^1$) est une norme sur $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

On peut donc construire l'espace

$$(3.140) \quad F_k = \text{complété de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_{F_k}.$$

On désigne par F_k' son dual.

En appliquant HUM on démontre le résultat suivant :

(..)

Théorème 3.8

Soit Ω domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^∞ et Γ_0 sous-ensemble ouvert non vide de Γ , $T > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ quelconques.

Alors, pour tout couple de données initiales $\{y^0, y^1\}$ telles que

$$(3.141) \quad \{y^1, -y^0\} \in F_k'$$

il existe un contrôle

$$(3.142) \quad \{v_0, v_1\} \in H_0^k(\Gamma_0 \times]0, T[) \times H_0^k(\Gamma_0 \times]0, T[)$$

tel que la solution $y = y(v)$ du problème

$$(3.143) \quad \begin{array}{ll} y'' + \Delta^2 y = 0 & \text{dans } Q \\ y(0) = y^0; y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \\ y = \begin{cases} v_0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[\\ 0 & \text{sur } [\Gamma \setminus \Gamma_0] \times]0, T[\end{cases} \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \begin{cases} v_1 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[\\ 0 & \text{sur } [\Gamma \setminus \Gamma_0] \times]0, T[\end{cases} \end{array}$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω . ■

On a donc utilisé deux contrôles

$$\{v_0, v_1\} \in H_0^k(\Gamma_0 \times]0, T[) \times H_0^k(\Gamma_0 \times]0, T[)$$

qui peuvent être :

(i) à support arbitrairement petit puisque $\Gamma_0 \subset \Gamma$ peut être choisi arbitrairement,

(ii) arbitrairement réguliers car $k > 0$ peut être choisi aussi grand que l'on veut,

et on a démontré la contrôlabilité exacte du système en un temps arbitrairement petit .

Ceci étant le résultat a un caractère abstrait dans la mesure où l'on n'a pas d'informations supplémentaires sur les espaces F_k et F_k' . ■

f) Systèmes d'ordre supérieur.

On peut généraliser les résultats de ce N° pour des systèmes de la forme

$$(3.144) \quad y'' + \Delta^{2q} y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.145) \quad y(0) = y^0; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$y = \frac{\partial y}{\partial v} = \dots = \frac{\partial^{2q-2} y}{\partial v^{2q-2}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

(3.146)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2q-1} y}{\partial v^{2q-1}} &= v && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma_*(x^0) \end{aligned}$$

avec $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$.

On introduit la valeur propre

$$(3.147) \quad \lambda_0^2(q) = \min_{w \in H_0^{2q}(\Omega) - \{0\}} \frac{|\Delta^q w|^2}{|\nabla w|^2}.$$

Par les méthodes développées dans les paragraphes précédents on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.9.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^{2q-1} .

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T_q(x^0) = \frac{R(x^0)}{\lambda_0(q)}$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(3.148) \quad \{ y^0, y^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-2q}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(3.149) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (3.144)(3.145)(3.146) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

La démonstration de ce résultat repose sur HUM. Le point essentiel de la démonstration est l'obtention des "inégalités directes" et " inverses" pour le problème homogène

$$\Phi'' + \Delta^{2q} \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.150) \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \dots = \frac{\partial^{2q-1} \Phi}{\partial v^{2q-1}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si l'on définit l'énergie

$$(3.151) \quad E_0 = \frac{1}{2} [|\Delta^q \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2]$$

on obtient par la méthode standard des multiplicateurs

$$(3.152) \quad \frac{4q}{R(x^0)} (T - T_q(x^0)) E_0 \leq \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta^q \Phi|^2 d\Sigma$$

et d'autre part

$$(3.153) \quad \int_{\Sigma} |\Delta^q \Phi|^2 d\Sigma \leq C E_0.$$

Remarque 3.20.

Le Théorème 3.9 généralise le résultat du Théorème 3.4. ■

Remarque 3.21.

On peut obtenir le même type de résultats pour les systèmes gouvernés par des équations du type

$$y'' - \Delta^{2q+1} y = 0 \quad \text{dans } Q. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.22.

Les méthodes de l'Appendice I permettent de démontrer ces résultats pour $T > 0$ quelconque. ■

4. PLAQUES VIBRANTES (II). CONTROLE PORTANT SUR y ET Δy .**4.1. Formulation du problème.**

On va considérer le système

$$(4.1) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

avec des conditions initiales

$$(4.2) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et des conditions aux limites

$$(4.3) \quad \begin{aligned} y &= v_0 && \text{sur } \Sigma_0 \subset \Sigma \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \\ \Delta y &= v_1 && \text{sur } \Sigma_0 \subset \Sigma \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{aligned}$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (4.1)(4.2)(4.3).

Remarque 4.1

Notons que *l'on agit sur le système au moyen de deux contrôles v_0 et v_1* (situation différente de celle considérée dans le N° 3 où l'on agissait avec un seul contrôle v).

La contrôlabilité exacte du système avec un seul contrôle (i.e. avec $v_0 = 0$ ou bien $v_1 = 0$) est un *problème ouvert*, au moins si on s'intéresse à la contrôlabilité exacte dans des espaces de données initiales "classiques". ■

Notons d'abord ceci. D'après le résultat d'unicité du Corollaire 3.2 précédent, si l'on considère le système homogène

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.4) \quad \Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

la semi-norme

$$(4.5) \quad \| \{\Phi^0, \Phi^1\} \|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}$$

définit une norme si $T > T(x^0)$.

Grâce à HUM on a donc la contrôlabilité exacte du système pour tout $T > T(x^0)$ dans l'espace F' , dual de l'espace F (complété des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifiant les conditions de compatibilité $\varphi = \Delta \varphi = 0$ sur Γ pour la norme (4.5)), avec l'action d'un seul contrôle, à savoir v_1 .

Mais ce résultat de contrôlabilité exacte n'est pas entièrement satisfaisant dans la mesure où l'on pas d'informations précises sur les espaces F et F' . ■

Nous allons démontrer dans les paragraphes suivants, et notamment par "l'inégalité directe", que

$$(4.6) \quad Y \times H_0^1(\Omega) \subset F$$

avec

$$(4.7) \quad Y = \{ \Phi \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) : \Delta \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

et par conséquent

$$(4.8) \quad F' \subset Y' \times H^{-1}(\Omega).$$

Cela donne alors une première estimation sur F et F' mais on ne sait pas donner d'information dans le sens inverse. ■

On attaque le problème de la contrôlabilité exacte du système (4.1)(4.2)(4.3) par la méthode HUM . On se place dans le cadre général du Chapitre II en posant :

$$i) \quad A = \Delta^2 ;$$

$$ii) \quad B_1 = \text{Identité}, B_2 = \Delta \text{ et par conséquent } C_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial v}, \quad C_2 = \frac{\partial}{\partial v}. \quad ■$$

4.2. Quelques rappels.

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'existence et la régularité des solutions du problème

$$\theta'' + \Delta^2 \theta = f \quad \text{dans } Q$$

$$(4.9) \quad \theta = \Delta \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\theta(0) = \theta^0; \theta'(0) = \theta^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Le résultat dont on aura besoin dans la suite est le suivant.

Lemme 4.1.

(a) Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 .

Alors , pour tout $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ il existe une solution (faible) unique $\theta = \theta(x,t)$ de (4.9) avec

$$(4.10) \quad \theta \in C([0, T]; H^2 \cap H_0^1(\Omega) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))).$$

L'application $\{\theta^0, \theta^1, f\} \rightarrow \{\theta, \theta'\}$ est linéaire continue de

$$(4.11) \quad (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \\ \rightarrow L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

(b) On suppose maintenant que Γ est de classe C^4 .

Alors, pour tout $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in D(A) \times (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^1(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega))$ (avec $D(A) = \{\phi \in H^4 \cap H_0^1(\Omega) : \Delta\phi = 0 \text{ sur } \Gamma\} = H^4(\Omega) \cap Y$) il existe une solution (forte) unique θ avec

$$(4.12) \quad \theta \in C(0, T; D(A)) \cap C^1(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega))$$

et en outre

l'application $\{\theta^0, \theta^1, f\} \rightarrow \{\theta, \theta'\}$ est linéaire continue de

$$(4.13) \quad D(A) \times (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times L^1(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \text{ dans} \\ L^\infty(0, T; D(A)) \times L^\infty(0, T; H^2 \cap H_0^1(\Omega)). \quad \blacksquare$$

Comme conséquence de (b) on obtient par interpolation :

$$(4.14) \quad \forall \{\theta^0, \theta^1, f\} \in Y \times H_0^1(\Omega) \times L^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ il existe une solution unique} \\ \theta \in C(0, T; Y) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

On a, en outre, la dépendance continue des solutions par rapport aux données du problème dans les espaces correspondants. \blacksquare

On considère maintenant le problème homogène

$$(4.15) \quad \Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour toute solution de (4.15) au sens (4.14) on définit l'énergie associée au système

$$(4.16) \quad E(t) = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Delta \Phi(t)|^2 + |\nabla \Phi(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0, T]$$

et on vérifie par les méthodes standard, la *loi de conservation de l'énergie* :

$$(4.17) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \} \quad \forall t \in [0, T].$$

On remarque par ailleurs que la semi-norme $E_0^{1/2}$ est une *norme* dans l'espace $\mathbb{V} \times H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$. ■

Remarque 4.3

Les résultats précédents, classiques, sont rappelés pour la commodité du lecteur. On peut les démontrer aisément au moyen des méthodes déjà mentionnées. ■

4.3. Une Identité.

L'objet de ce paragraphe est d'établir l'identité de base pour ensuite démontrer, dans les paragraphes suivants, "l'inégalité directe" et "l'inégalité inverse".

Le résultat essentiel est le suivant.

Lemme 4.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soit $q \in (W^{2,\infty}(\Omega))^n$. Alors, pour toute solution de (4.9) au sens de (4.14) on a l'identité

$$(4.18) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k [|\frac{\partial \theta'}{\partial \nu}|^2 + |\frac{\partial \Delta \theta}{\partial \nu}|^2] d\Sigma = - (\theta'(t), q_k \frac{\partial \Delta \theta(t)}{\partial x_k})|_0^T + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\nabla \theta'|^2 - |\nabla \Delta \theta|^2) dx dt + \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} \right] dx dt + \int_{\Omega} \Delta q_k \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt + \int_{\Omega} f q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned} \quad ■$$

Démonstration.

On établit d'abord l'identité pour une solution forte θ (i.e. dans la classe (4.12)) et on passe ensuite à la limite pour l'obtenir dans le cas d'une solution faible.

On multiplie l'équation (4.9) par $q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}$ et on intègre sur Q ; il en résulte que

$$(4.19) \quad \int_Q (\theta'' + \Delta^2 \theta - f) q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = 0.$$

D'après la formule d'intégration par parties on a

$$(4.20) \quad \int_Q \theta'' q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \Delta \theta(t)}{\partial x_k})|_0^T - \int_Q \Phi' q_k \frac{\partial \Delta \theta'}{\partial x_k} dx dt.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} (4.21) \quad & \int_Q \theta' q_k \frac{\partial \Delta \theta'}{\partial x_k} dx dt = - \int_Q \frac{\partial}{\partial x_j} (q_k \theta') \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} dx dt = \\ & = - \frac{1}{2} \int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \theta'|^2 dx dt - \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \theta' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta'|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\nabla \theta'|^2 d\Sigma + \\ & + \int_Q \Delta q_k \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt. \end{aligned}$$

De (4.20)(4.21) et du fait que $|\nabla \Phi'|^2 = |\frac{\partial \theta'}{\partial v}|^2$ sur Σ , on déduit

$$(4.22) \quad \int \theta'' q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = (\theta'(t), q_k \frac{\partial \Delta \theta(t)}{\partial x_k})|_0^T + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\frac{\partial \theta'}{\partial v}|^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \theta'|^2 dx dt - \\ - \int_{\Omega} \Delta q_k \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt - \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} dx dt.$$

En outre

$$(4.23) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}) dx dt \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} d\Sigma.$$

Comme $\Delta \theta = 0$ sur Σ , on a $\frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} v_k \quad \forall k = 1, \dots, n$ et (4.23) s'écrit donc sous la forme

$$(4.24) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 \theta q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt = - \frac{1}{2} \int q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (|\nabla \Delta \theta|^2) dx dt - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt + \int_{\Sigma} q_k v_k |\frac{\partial \Delta \theta}{\partial v}|^2 d\Sigma = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \Delta \theta|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k |\frac{\partial \Delta \theta}{\partial v}|^2 d\Sigma - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k} dx dt.$$

Enfin, de (4.19)(4.22) et (4.24) on déduit l'identité (4.18). ■

Remarque 4.4.

Dans les paragraphes précédents on a toujours utilisé le multiplicateur " $q_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$ ".

Cette fois ci on a fait usage de " $q_k \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x_k}$ " .

En général, pour aboutir à de "bonnes" estimations a priori il faut utiliser des multiplicateurs avec un nombre impair de dérivées sur la fonction θ . ■

4.4. L'inégalité directe.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir l'estimation directe.

Théorème 4.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $T > 0$ et $\theta = \theta(x, t)$ solution de (4.9) au sens de (4.14) on ait

$$(4.25) \quad \left\| \frac{\partial \theta'}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C \left(|\nabla \Delta \theta^0|^2 + |\nabla \theta^1|^2 + \|f\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2 \right).$$

Démonstration.

On applique l'identité (4.18) avec $q = h$ où h est le champ de vecteurs introduit dans le Lemme 3.2 du Chapitre I.

On obtient aisément l'estimation

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{\partial \theta'}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 &\leq C(T+1) \left\{ \|\nabla \Delta \theta\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \theta^1\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 + \|f\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2 \right\} \end{aligned}$$

et en appliquant (4.14) on déduit l'estimation (4.25). ■

Remarque 4.5.

La constante C ne dépend que de $\| h \|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ et de la constante $\gamma > 0$ telle que $h \cdot v \geq \gamma$ sur Γ . ■

En appliquant (4.25) avec $f = 0$ on obtient "l'inégalité directe".

Corollaire 4.1. (L'inégalité directe)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Alors, il existe une constante $C > 0$ (indépendante de T) telle que

$$(4.27) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C(T+1) E_0$$

pour toute Φ solution de (4.15) au sens (4.14). ■

Remarque 4.6.

D'après le Théorème 4.1 on a

$$\frac{\partial \theta'}{\partial v} \in L^2(\Sigma), \quad \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} \in L^2(\Sigma).$$

Il s'agit d'un résultat de régularité supplémentaire pour les solutions faibles (au sens (4.14)) du système (4.9). ■

4.5. Existence et unicité des solutions du problème avec des conditions aux limites non homogènes.

Dans ce N° on va étudier l'existence et l'unicité de la solution -prise dans un sens que l'on va préciser - du problème

$$(4.28) \quad \begin{aligned} z'' + \Delta^2 z &= 0 && \text{dans } Q \\ z(0) &= z^0, \quad z'(0) = z^1 && \text{dans } \Omega \\ z &= v_0, \quad \Delta z = v_1 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Il est nécessaire pour la suite d'introduire des solutions de (4.28) dans un sens très faible, lorsque notamment z^1 et v_1 , ne sont pas des distributions sur Ω et sur Σ (bien sur si Γ est de classe C^k on ne parle que des distributions d'ordre $\leq k$ sur Σ). ■

Plus précisément, on rappelle la notation

$$(4.29) \quad V = \{ \varphi \mid \varphi \in H^3(\Omega), \varphi = \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

et on va utiliser

$$V' = \text{dual de } V.$$

On prend dans (4.28)

$$(4.30) \quad z^0 \in H^{-1}(\Omega), z^1 \in V',$$

et donc z^1 n'est pas une distribution sur Ω .

Nous prendrons ensuite

$$(4.31) \quad \begin{aligned} v_0 &\in L^2(\Sigma), \\ v_1 &\in (H^1(0,T;L^2(\Gamma)))'. \end{aligned}$$

Par conséquent v_1 n'est pas une distribution sur Σ .

La structure générale des formes linéaires continues sur $H^1(0,T;L^2(\Gamma))$ est donnée par

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \langle v_1, \varphi \rangle &= \int (w_0 \varphi + w_1 \varphi') d\Sigma, \\ w_0, w_1 &\in L^2(\Sigma). \end{aligned}$$

On écrira

$$(4.33) \quad v_1 = w_0 - \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

en notant bien que dans (4.33), $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ n'est pas prise au sens des distributions sur Σ

mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T; L^2(\Gamma))$ et son dual –qui n'est pas un espace de distributions–. ■

On définit maintenant la solution (faible) de (4.28) par la *méthode de transposition*, comme dans J.L. LIONS et E. MAGENES [1], mais avec une différence technique, que l'on explique maintenant.

Soient

$$(4.34) \quad \begin{aligned} f &\in L^1(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \theta^0 &\in Y, \theta^1 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

et soit θ la solution du problème (rétrograde)

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \theta'' + \Delta^2 \theta &= f, \\ \theta(T) &= \theta^0, \theta'(T) = \theta^1, \\ \theta &= \Delta \theta = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Désignons par X l'espace parcouru par θ lorsque $\{f, \theta^0, \theta^1\}$ parcourt $L^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \times Y \times H_0^1(\Omega)$, muni de la structure hilbertienne naturelle telle que

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \{f, \theta^0, \theta^1\} \rightarrow \theta \\ \text{est un isomorphisme de } L^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \times Y \times H_0^1(\Omega) \rightarrow X. \end{aligned}$$

D'après les résultats de régularité vus précédemment, on a

$$(4.37) \quad \begin{aligned} X &\subset C([0, T]; Y) \cap C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)), \\ \text{et} \\ \theta \in X &\Rightarrow \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \in H^1(0, T; L^2(\Gamma)). \quad ■ \end{aligned}$$

Supposons maintenant les données dans (4.28) régulières. Alors partant de

$$\int_Q (z'' + \Delta^2 z) \theta \, dx \, dt = 0$$

et intégrant par parties, on trouve

$$(4.38) \quad \int_{\Omega} z f dx dt + (z'(T), \theta^0) - (z(T), \theta^1) = \int_{\Sigma} (z \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} + \Delta z \frac{\partial \theta}{\partial v}) d\Sigma.$$

Mais on doit avoir $z = v_0$ sur Σ et $\Delta z = v_1$.

Utilisant (4.33), au sens des dérivées dans $(H^1(0, T; L^2(\Gamma)))'$, on arrive à

$$(4.39) \quad \begin{aligned} & \int z f dx dt + (z'(T), \theta^0) - (z(T), \theta^1) = \\ & = \int (v_0 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} + w_0 \frac{\partial \theta}{\partial v} + w_1 \frac{\partial \theta'}{\partial v}) d\Sigma + (z^1, \theta(0)) - (z^0, \theta'(0)). \end{aligned}$$

On prend maintenant (4.39) comme définition. Plus précisément on définit L forme linéaire continue sur X (d'après (4.37)) par

$$(4.40) \quad L(\theta) = \int_{\Sigma} (v_0 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial v} + w_0 \frac{\partial \theta}{\partial v} + w_1 \frac{\partial \theta'}{\partial v}) d\Sigma + (z^1, \theta(0)) - (z^0, \theta'(0)).$$

Par transposition de l'isomorphisme (4.36), on voit que, pour L donnée dans X' (par (4.40)), il existe

$$(4.41) \quad \{z, \zeta^*, \zeta\} \text{ unique dans } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times Y' \times H^{-1}(\Omega)$$

avec

$$(4.42) \quad \langle z, f \rangle + (\zeta^*, \theta^0) + (-\zeta, \theta^1) = L(\theta) \quad \forall \theta \in X.$$

Compte tenu de (4.38), il est légitime de définir $z(T), z'(T)$ par

$$(4.43) \quad z(T) = \zeta, z'(T) = \zeta^*. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.7.

Dans les définitions usuelles par transposition dans J.L. LIONS et E.MAGENES, on part de (4.35) avec $\theta^0 = \theta^1 = 0$ et l'on définit z par (4.39). On calcule ensuite $z(T), z'(T)$.

On définit ici l'ensemble $z, z(T), z'(T)$ simultanément pour éviter toute difficulté technique, un peu artificielle, tenant au fait que les dérivations en t sur le bord – et donc dans l'intérieur ! – ne sont pas prises au sens des distributions.

Bien entendu cela mérite alors de "légitimiser" un peu plus les *définitions* (4.43) – ce qui est l'objet des remarques qui suivent. ■

Une méthode systématique pour interpréter (4.42) est de choisir les "fonctions test" particulières suivantes. On introduit m fonction propre quelconque de Δ^2 :

$$\begin{aligned} \Delta^2 m &= \lambda m, \\ (4.44) \quad m &= \Delta m = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

et l'on prend d'abord

$$(4.45) \quad f = h(t) m, \theta^0 = 0, \theta^1 = 0.$$

Alors

$$(4.46) \quad \theta = q(t) m$$

avec

$$(4.47) \quad q'' + \lambda q = h, q(T) = q'(T) = 0$$

i.e.

$$q(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_t^T \sin((t-\sigma)\sqrt{\lambda}) h(\sigma) d\sigma.$$

Alors

$$\begin{aligned} (4.48) \quad L(\theta) &= \int_0^T \left(\int_{\Gamma} v_0 \frac{\partial \Delta m}{\partial v} + w_0 \frac{\partial m}{\partial v} \right) d\Gamma \cdot q dt + \int_0^T \left(\int_{\Gamma} w_1 \frac{\partial m}{\partial v} \right) q' dt + \\ &\quad + (z^1, m) q(0) - (z^0, m) q'(0), \end{aligned}$$

et l'on a

$$(4.49) \quad \int_0^T (z, m) (q'' + \lambda q) dt = \int_0^T (\zeta_0 q + \zeta_1 q') dt + (z^1, m) q(0) - (z^0, m) q'(0)$$

si

$$(4.50) \quad \zeta_0 = \int_{\Gamma} (v_0 \frac{\partial \Delta m}{\partial v} + w_0 \frac{\partial m}{\partial v}) d\Gamma, \quad \zeta_1 = \int_{\Gamma} v_1 \frac{\partial m}{\partial v} d\Gamma.$$

Cela donne

$$(4.51) \quad (z, m)'' + \lambda (z, m) = \zeta_0 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial t}$$

$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}$ étant pris au sens de $(H^1(0, T))'$,

$$(z, m)(0) = (z^0, m)$$

$$(4.52) \quad (z, m)'(0) = (z^1, m)$$

ce qui justifie (puisque m est quelconque avec (4.44)) que z est une solution généralisée de (4.28). ■

Si par ailleurs on prend maintenant

$$(4.53) \quad f = 0, \theta^0 = 0, \theta^1 = -m$$

i.e.

$$(4.54) \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin((T-t)\sqrt{\lambda}) m$$

alors (4.42) donne

$$(4.55) \quad (\zeta, m) = L(\theta) \text{ calculé avec (4.54).}$$

On vérifie aussi que

$$(4.56) \quad (z, m)(T) = (\zeta, m).$$

On prend ensuite

$$(4.57) \quad f = 0, \theta^0 = m, \theta^1 = 0,$$

i.e.

$$(4.58) \quad \theta = \cos((T-t)\sqrt{\lambda})m.$$

Alors

$$(4.59) \quad (\zeta_*, m) = L(\theta) \text{ calculé avec (4.58),}$$

i.e.

$$(4.60) \quad (\zeta_*, m) = \int_{\Sigma} \left(v_0 \frac{\partial \Delta m}{\partial v} + w_0 \frac{\partial m}{\partial v} \right) \cos((T-t)\sqrt{\lambda}) d\Sigma + \\ + \int_{\Sigma} w_1 \frac{\partial m}{\partial v} \sqrt{\lambda} \sin((T-t)\sqrt{\lambda}) d\Sigma + (z^1, m) \cos(T\sqrt{\lambda}) - (z^0, m) \sqrt{\lambda} \sin(T\sqrt{\lambda})$$

ou encore en utilisant les notations (4.50)

$$(4.61) \quad (\xi_*, m) = \int_0^T \xi_0 \cos((T-t)\sqrt{\lambda}) dt + \int_0^T \xi_1 \sqrt{\lambda} \sin((T-t)\sqrt{\lambda}) dt + \\ + (z^1, m) \cos(T\sqrt{\lambda}) - (z^0, m) \sqrt{\lambda} \sin(T\sqrt{\lambda}).$$

Mais (4.51)(4.52) donnent

$$(z, m) = (z^0, m) \cos(t\sqrt{\lambda}) + (z^1, m) \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin((t-\sigma)\sqrt{\lambda}) \left(\xi_0 - \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \right) d\sigma$$

d'où

$$(z, m)' = - (z^0, m) \sqrt{\lambda} \sin(t\sqrt{\lambda}) + (z^1, m) \cos(t\sqrt{\lambda}) +$$

$$+ \int_0^T \cos((t-\sigma)\sqrt{\lambda}) \left(\xi_0 - \frac{\partial \xi_1}{\partial \sigma} \right) d\sigma .$$

Donc

$$(z, m)'(T) = - (z^0, m) \sqrt{\lambda} \sin(T\sqrt{\lambda}) + (z^1, m) \cos(T\sqrt{\lambda}) + \\ + \int_0^T \cos((T-t)\sqrt{\lambda}) (\xi_1 - \frac{\partial \xi_1}{\partial t}) dt$$

et par définition de $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, on obtient

$$(z, m)'(T) = - (z^0, m) \sqrt{\lambda} \sin(T\sqrt{\lambda}) + (z^1, m) \cos(T\sqrt{\lambda}) + \int_0^T \cos((T-t)\sqrt{\lambda}) \xi_0 dt + \\ + \int_0^T \sqrt{\lambda} \sin((T-t)\sqrt{\lambda}) \xi_1 dt$$

et comparant à (4.61) on a donc

$$(z, m)'(T) = (\xi^*, m)$$

ce qui justifie la définition de $z'(T) = \xi^*$. ■

On a donc obtenu le

Théorème 4.2.

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ de classe C^4 . On suppose que $\{z^0, z^1, v_0, v_1\}$ sont donnés avec (4.30)(4.31). Il existe alors une solution unique du problème (4.28), prise au sens (4.42) ; cette solution vérifie

$$\begin{aligned} z &\in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ (4.62) \quad z(T) &\in H^{-1}(\Omega), z'(T) \in V'; \end{aligned}$$

l'application $\{z^0, z^1, v_0, v_1\} \rightarrow \{z, z(T), z'(T)\}$ est linéaire et continue pour les topologies correspondantes. ■

Remarque 4.8.

On a en fait la propriété supplémentaire :

$$z \in C([0, T]; H^{-1})$$

puique cette propriété est vraie si toutes les données sont régulières et, d'après le Théorème 4.2, se conserve par passage à la limite. ■

Remarque 4.9.

Il est tentant de penser que z' est continue à valeur dans V' . En réalité cela n'est pas tout à fait exact.... car on a pris la condition aux limites $\Delta z = v_1$ sur Σ avec une *définition* particulière, faisant jouer un rôle particulier à $t = T$. Donc z' est en fait *la somme* d'une fonction continue à valeurs dans V' et d'une fonction L^2 dans un espace plus petit exprimant une intégrale sur Γ , intégrale qui disparaît pour $t = T$ par *l'interprétation* que l'on choisit pour z' . Comme on vient de le voir, cette interprétation est légitime. ■

4.6. Un Théorème d'unicité. L'inégalité inverse.

L'objet de ce paragraphe est d'établir "l'inégalité inverse" qui nous permettra ensuite d'appliquer HUM.

On reprend les notations des N°S précédents, c'est-à-dire, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque

$$m(x) = x - x^0$$

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) > 0\}, \Gamma^*(x^0) = \Gamma / \Gamma(x^0)$$

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[, \Sigma^*(x^0) = \Sigma / \Sigma(x^0)$$

$$R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|.$$

On introduit par ailleurs $\psi_0^2 =$ la première valeur propre de $-\Delta$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire,

$$(4.63) \quad \psi_0^2 = \min_{w \in H_0^1(\Omega) - \{0\}} \left\{ \frac{|\nabla w|^2}{|w|^2} \right\} .$$

On a donc

$$(4.64) \quad |w| \leq \frac{1}{\psi_0} |\nabla w| \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

■

On considère l'équation homogène

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.65) \quad \Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

avec des conditions initiales

$$(4.66) \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} \in Y \times H_0^1(\Omega)$$

de sorte que la solution Φ de (4.65) existe et est unique dans la classe (4.14).

On rappelle que l'énergie

$$(4.67) \quad E_0 = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \}$$

est conservée le long de toute trajectoire.

■

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 4.3 (L'inégalité inverse)

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soit

$$T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\psi_0}.$$

Pour toute solution Φ de (4.65) (au sens de (4.14)) on a l'inégalité :

$$(4.68) \quad (T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{4} \int_{\Sigma(x^0)} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right)^2 \right] d\Sigma.$$

■

Démonstration.

On applique l'identité (4.18) avec $q = m$ et on obtient

$$(4.69) \quad X + \frac{n}{2} Y + \int_Q [|\nabla \Phi'|^2 + |\nabla \Delta \Phi|^2] dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v [\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2] d\Sigma$$

avec

$$(4.70) \quad X = - (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k} (t))_0^T$$

et

$$(4.71) \quad Y = \int_Q [|\nabla \Phi'|^2 - |\nabla \Delta \Phi|^2] dx dt.$$

On a évidemment

$$(4.72) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m v [\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2] d\Sigma \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} [\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2] d\Sigma.$$

D'autre part, en multipliant (4.65)₁ par $\Delta \Phi$ et en intégrant dans Q on obtient aisément

$$(4.73) \quad Y = - (\Phi'(t), \Delta \Phi(t))_0^T.$$

D'après la loi de conservation de l'énergie on a

$$(4.74) \quad \int_Q [|\nabla \Phi'|^2 + |\nabla \Delta \Phi|^2] dx dt = 2TE_0$$

En combinant les résultats précédents on obtient donc

$$(4.75) \quad 2TE_0 - (\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k} (t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))_0^T \leq \\ \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} [\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2] d\Sigma.$$

La démonstration est donc achevée si l'on démontre que

$$(4.76) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))|_0^T \leq 2 \frac{R(x^0)}{\psi_0} E_0.$$

Pour $t \in [0, T]$ et $\alpha > 0$ quelconques on a

$$(4.77) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))| \leq \\ \leq \alpha |\Phi'(t)|^2 + \frac{1}{4\alpha} |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t)|^2.$$

On calcule ensuite le terme

$$(4.78) \quad |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t)|^2 = |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 + \frac{n^2}{4} |\Delta \Phi(t)|^2 + \\ + n (\langle m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t), \Delta \Phi(t) \rangle)$$

et on remarque que

$$(4.79) \quad \langle m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t), \Delta \Phi(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\Delta \Phi(t)|^2 dx = \\ = -\frac{n}{2} |\Delta \Phi(t)|^2.$$

Donc

$$(4.80) \quad |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t)|^2 = |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 + n^2 (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) |\Delta \Phi(t)|^2 \leq \\ \leq |m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t)|^2 \leq R(x^0)^2 |\nabla \Delta \Phi(t)|^2.$$

De (4.77) et (4.80) (en utilisant (4.64)) on déduit

$$(4.81) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))| \leq \frac{\alpha}{\psi_0^2} |\nabla \Phi'(t)|^2 + \frac{R(x^0)^2}{4\alpha} |\nabla \Delta \Phi(t)|^2$$

et pour

$$(4.82) \quad \alpha = \frac{R(x^0) u_0}{2}$$

l'on a

$$(4.83) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))| \leq \frac{R(x^0)}{2u_0} [|\Delta \Phi'(t)|^2 + |\nabla \Delta \Phi(t)|^2] \\ = \frac{R(x^0)}{u_0} E_0$$

d'où (4.76), ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 4.10.

Ce résultat a été démontré dans J.L. LIONS [3] pour tout $T > T(x^0) = T(x^0) + \frac{n}{2u_0^2}$,

puis pour $T > T(x^0)$ par Y. KOMORNÍK qui a observé (4.76). Dans l'Appendice I de E. ZUAZUA, on a une estimation analogue pour tout $T > 0$. ■

Comme conséquence immédiate du théorème précédent on a le *résultat d'unicité* suivant.

Corollaire 4.2. (Théorème d'unicité).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soit

$$T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{u_0}$$

Alors, si Φ est une solution de (4.65) telle que

$$(4.84) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \equiv \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

on a

$$\Phi \equiv 0 .$$

■

4.7. Quelques résultats de contrôlabilité exacte.

On commence par un résultat modèle pour ensuite, en appliquant la technique habituelle de changement des normes, donner quelques variantes.

Le résultat principal.

Théorème 4.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\psi_0}$.

Alors pour tout couple de données initiales

$$(4.85) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times V'.$$

il existe des contrôles

$$(4.86) \quad \{v_0, v_1\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))']'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (4.1)(4.2)(4.3) soit à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ à l'instant T . ■

Démonstration.

On applique la méthode HUM.

On résout d'abord le système

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(4.87) \quad \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

avec des conditions initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in V \times H_0^1(\Omega)$.

D'après l'inégalité directe

$$(4.88) \quad \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial v}, \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times L^2(\Sigma(x^0)).$$

On considère ensuite le problème " rétrograde "

$$(4.89) \quad \begin{aligned} \psi'' + \Delta^2 \psi &= 0 && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ - \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} & && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right) & && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \Delta \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

On note que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right)$ n'est pas prise au sens des distributions sur Σ mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual qui n'est pas un espace de distribution.

Le Théorème 4.2 montre l'existence et l'unicité de la solution ψ de (4.88) (dans un sens convenable) avec

$$(4.90) \quad \{\psi(0), \psi'(0)\} \in H^{-1}(\Omega) \times V'.$$

On définit donc l'opérateur

$$(4.91) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$$

qui vérifie

On considère l'espace

$$(4.93) \quad F = V \times H_0^1(\Omega)$$

muni de la norme

$$(4.94) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \| = \left\{ \| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \right\}^{1/2}.$$

Grâce aux inégalités directes et inverses, (4.94) est bien, sur l'espace F , une norme équivalente à la norme induite par $H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

De (4.92) on déduit que

$$(4.95) \quad \Lambda : F \rightarrow F' \text{ est un } isomorphisme.$$

De (4.85) on déduit que

$$\{ y^1, -y^0 \} \in F'$$

et par conséquent, l'équation

$$(4.96) \quad \Lambda \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

admet une solution unique

$$(4.97) \quad \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in V \times H_0^1(\Omega).$$

Les contrôles $\{ v_0, v_1 \}$ sont maintenant donnés par des formules

$$(4.98) \quad v_0 = -\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$(4.99) \quad v_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

où Φ désigne la solution de (4.87) qui correspond aux données $\{ \Phi^0, \Phi^1 \}$ solution de (4.99).

On observe enfin que, d'après (4.89), on a bien

$$(4.100) \quad \{ v_0, v_1 \} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0))$$

et d'autre part

$$(4.101) \quad \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0)) = [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]'. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.11.

Notons que les *contrôles* $\{ v_0, v_1 \}$ ne sont pas indépendants. En effet ils sont donnés par les équations (4.98)(4.99) à partir d'une fonction unique Φ solution de (4.87). \blacksquare

Remarque 4.12.

Grâce au Théorème 4.2 la solution $y = y(v)$ du système (4.1)(4.2)(4.3) associé vérifie

$$(4.102) \quad y \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

avec des traces $y(T), y'(T)$ bien définies.

Il s'agit d'une solution faible qui vérifie l'équation au sens de (4.34). \blacksquare

A partir des résultats précédents on peut obtenir un grand nombre de variantes. On en mentionne ici deux.

Normes plus fortes.

On suppose que l'ouvert Ω a une frontière Γ suffisamment régulière, par exemple, de classe C^5 .

On définit les espaces

$$(4.103) \quad W = \{ \varphi \in H^5(\Omega) / \varphi = \Delta \varphi = \Delta^2 \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

et

$$(4.104) \quad F = W \times Y.$$

En dérivant l'équation (4.87) par rapport à la variable t , on obtient d'après les inégalités directes et inverses que la norme

$$(4.105) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\{ \left\| \frac{\partial \Phi''}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \right\}$$

est bien équivalente à la norme induite par $H^5(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

On résout donc l'équation

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.106) \quad \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

avec des données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in W \times Y$. On a donc

$$(4.107) \quad \left\{ \frac{\partial \Phi''}{\partial v}, \frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times L^2(\Sigma(x^0)).$$

On considère cette fois le problème rétrograde

$$\psi'' + \Delta^2 \psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$(4.108) \quad \psi = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Sigma_*(x^0) \end{cases}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$\Delta \psi = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Sigma_*(x^0). \end{cases}$$

On note que la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right)$ (resp. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v} \right)$) n'est pas prise au sens des distributions sur Σ mais au sens de la dualité entre $H^2(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ (resp. $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual.

Par une méthode analogue à celle du Théorème 4.2 on démontre l'existence d'une seule solution ψ (dans un sens convenable) de (4.108) avec des traces $\{ \psi(0), \psi'(0) \}$ bien définies et telles que

$$(4.109) \quad \{ \psi(0), \psi'(0) \} \in V' \times W' .$$

On définit l'opérateur

$$(4.110) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$$

qui grâce à l'identité

$$(4.111) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \left\| \frac{\partial \Phi''}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2$$

définit un isomorphisme de F sur F' . On résout comme d'habitude l'équation

$$(4.112) \quad \wedge \{ \Phi^1, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

avec $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F$ et on obtient les contrôles

$$(4.113) \quad v_0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Delta \Phi'}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$(4.114) \quad v_1 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma(x^0) .$$

De (4.107) on en déduit

$$(4.115) \quad \{ v_0, v_1 \} \in \frac{\partial}{\partial t} L^2(0, T; L^2(\Gamma(x^0))) \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} L^2(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$$

i.e

$$(4.116) \quad \{ v_0, v_1 \} \in [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]^* \times [H^2(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]^*$$

Nous avons donc démontré le

Théorème 4.5.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière. Soit

$$T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\psi_0} .$$

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(4.117) \quad \{y^0, y^1\} \in V' \times W'$$

il existe des contrôles

$$(4.118) \quad \{v_0, v_1\} \in [H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]^* \times [H^2(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))]$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (4.1)(4.2)(4.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω . ■

Remarque 4.12.

Les contrôles v_0 et v_1 ne sont pas indépendants. Ils sont liés par les équations (4.113)(4.114). ■

Remarque 4.13.

Par la méthode utilisée dans le Théorème 4.2 on peut démontrer que la solution $y = y(v)$ de (4.1)(4.2)(4.3) (qui vérifie les équations dans un sens faible convenable) est dans la classe $L^\infty(0, T; V')$. Par ailleurs elle a des traces $\{y(T), y'(T)\}$ bien définies. ■

Remarque 4.14.

Nous avons bien démontré le rapport habituel de régularité entre contrôles et les données initiales. On a démontré ici qu'on peut contrôler des données initiales moins régulières avec des contrôles moins réguliers. ■

Affaiblissement des normes.

On se fixe maintenant au départ l'espace

$$(4.119) \quad F = H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

et par conséquent

$$(4.120) \quad F' = H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

On associe à chaque couple $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F$ la solution du problème

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.121) \quad \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

On a

$$(4.122) \quad \Phi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

On définit l'espace des traces

$$(4.123) \quad G = G_0 \times G_1 = \{ \text{espace parcouru par les traces } \left\{ \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\} \text{ lorsque } \{\Phi^0, \Phi^1\} \text{ parcourt } F \}$$

muni de la norme induite par F

$$(4.124) \quad \left\| \left\{ \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\} \right\|_G = \left\{ |\nabla \Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Avec ce procédé on en déduit la contrôlabilité exacte des données

$$\{y^1, -y^0\} \in F'$$

i.e.

$$\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

avec des contrôles

$$\{v_0, v_1\} \in G'_0 \times G'_1$$

où G'_i désigne le dual de G_i , $i = 0, 1$. (comparer aux deux résultats de contrôlabilité exacte précédents).

Dans le but d'identifier l'espace G , i.e. les espaces G_0 et G_1 , on introduit la fonction χ solution de

$$(4.125) \quad \begin{aligned} \Delta^2 \chi &= \Phi^1 && \text{dans } \Omega \\ \chi &= \Delta \chi = 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On observe que

$$(4.126) \quad \begin{aligned} \text{lorsque } \{\Phi^0, \Phi^1\} \text{ parcourt } F &= H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ \text{le couple } \{\chi, \Phi^0\} \text{ parcourt l'espace } V \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On définit

$$(4.127) \quad w(t) = \int_0^t \Phi(\sigma) + \chi$$

et on vérifie aisément que w est solution de

$$(4.128) \quad \begin{aligned} w'' + \Delta^2 w &= 0 && \text{dans } Q \\ w(0) = \chi, w'(0) = \Phi^0 & && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Du fait que

$$V \times H_0^1 \rightarrow L^2(\Sigma(x^0)) \times H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$$

$$\{\chi, \Phi^0\} \rightarrow \left\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial v} \right\}$$

est un isomorphisme, on en déduit que

$$H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0)) \times \frac{\partial}{\partial t} H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

$$\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rightarrow \left\{ \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Delta w'}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial w'}{\partial v} \right\}$$

est aussi un isomorphisme, et par conséquent

$$(4.129) \quad G = G_0 \times G_1 = \frac{\partial}{\partial t} L^2(\Sigma(x^0)) \times \frac{\partial}{\partial t} H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))). \\ = H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))) \times L^2(\Sigma(x^0)).$$

On a donc

$$(4.130) \quad G_0 = H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))) ; \quad G_1 = L^2(\Sigma(x^0)).$$

et

$$(4.131) \quad G'_0 = H_0^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))) ; \quad G'_1 = L^2(\Sigma(x^0)).$$

On a démontré donc le résultat de contrôlabilité exacte suivant :

Théorème 4.6.

Soit Ω un domaine borné à frontière Γ de classe C^4 .

Soit $T > T(x^0) = \frac{R(x^0)}{\psi_0}$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(4.132) \quad \{ y^0, y^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe des contrôles

$$(4.133) \quad \{ v_0, v_1 \} \in H_0^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))) \times L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (4.1)(4.2)(4.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Remarque 4.15.

Les contrôles v_0 et v_1 ne sont pas indépendants. ■

Remarque 4.16.

La solution $y = y(v)$ du système (4.1)(4.2)(4.3) vérifie dans ce cas

$$(4.134) \quad y \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

■

Remarque 4.17.

On a démontré qu'à des données initiales plus régulières correspondent des contrôles plus réguliers. ■

4.8. Quelques commentaires.**a) Optimalité du temps de la contrôlabilité $T(x^0)$.**

Le temps de la contrôlabilité exacte $T(x^0) = \frac{R(x^0)}{U_0}$ obtenu *n'est pas optimal*.

En appliquant le Théorème de Holmgren on peut démontrer que le résultat d'unicité donné dans le Corollaire 4.2 reste valable pour $T > 0$. A partir de ce résultat d'unicité et à l'aide des critères de compacité analogues de ceux qu'on a introduits dans le Théorème 3.7, on peut démontrer que les résultats de contrôlabilité exacte précédents restent valables *pour tout* $T > 0$.

Ce résultat sera démontré dans l' Appendice I.

Toutefois, donnons une idée de la démonstration du critère d'unicité pour $T > 0$ quelconque.

Supposons donc que Φ , solution de

$$(4.135) \quad \begin{aligned} \Phi'' + \Delta^2 \Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi &= \Delta \Phi = 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

vérifie

$$(4.136) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0).$$

Alors, la fonction $\zeta = \Phi'$ est aussi une solution de (4.135) et vérifie

$$(4.137) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0).$$

Grâce au Théorème de Holmgren (cf. Théorème 8.1 , Chapitre I) on peut démontrer

$$(4.138) \quad \zeta = 0$$

i.e.

$$(4.139) \quad \Phi' = 0 .$$

On a donc

$$(4.140) \quad \Phi(t) = \Phi^0 \quad \forall t \in [0, T] , \Phi^1 = 0$$

et du fait que Φ est solution de (4.135)

$$(4.141) \quad \Delta^2 \Phi^0 = 0$$

ce qui, avec les conditions aux limites $\Phi^0 = \Delta \Phi^0 = 0$ sur Γ , implique $\Phi^0 = 0$. ■

b) Le cas de l'action d'un seul contrôle.

On a observé dans la Remarque 4.1 que grâce aux résultats d'unicité du n°3 la semi-norme

$$(4.142) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}$$

est en fait une norme lorsque $T > \frac{R(x^0)}{\lambda_0}$ avec

$$(4.143) \quad \lambda_0^2 = \min_{\substack{v \in H_0^2(\Omega) - \{0\}}} \left\{ \frac{|\Delta v|^2}{|\nabla v|^2} \right\} .$$

On construit l'espace

(4.144) $F = \text{complété des fonctions } C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}) \text{ vérifiant } \varphi = \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma$
par rapport à la norme $\|\cdot\|_F$.

En appliquant HUM on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant, avec l'action d'un seul contrôle, à savoir v_1 .

Théorème 4.7.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit

$$T > \frac{R(x^0)}{\lambda_0}.$$

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(4.145) \quad \{y^1, -y^0\} \in F' \text{ dual de } F$$

et en choisissant $v_0 = 0$, il existe un contrôle

$$(4.146) \quad v_1 \in L^2(\Sigma)$$

tel que la solution $y = y(v_1)$ du système

$$y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(4.147) \quad y(0) = y^0; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma; \Delta y = v_1 \text{ sur } \Sigma$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

On a donc contrôlé le système au moyen d'un seul contrôle portant sur Δy .

Que peut-on dire sur l'espace F ?

Dans le paragraphe précédent on a démontré que l'application

$$H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Sigma(x^0)) \times H^{-1}(0,T; L^2(\Gamma(x^0)))$$

$$\{\Phi^0, \Phi^1\} \rightarrow \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right\}$$

est un isomorphisme

Par des arguments tout à fait analogues, on peut démontrer que

$$H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Sigma) \times H^{-1}(0,T; L^2(\Gamma))$$

$$\{\Phi^0, \Phi^1\} \rightarrow \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right\}$$

est un isomorphisme, et donc, qu'en particulier

$$(4.148) \quad \text{l'application } \{\Phi^0, \Phi^1\} \rightarrow \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\}_{|\Sigma} \text{ est continue de } H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Sigma).$$

Par conséquent on a

$$(4.149) \quad H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \subset F$$

et donc

$$(4.150) \quad F' \subset H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Mais, peut-on trouver un espace de Hilbert H défini en termes classiques et tel que $H \subset F$? Ceci est un problème ouvert.

Voyons un exemple où l'on peut effectivement préciser (J. Ball communication personnelle).

Prenons $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ et considérons Φ satisfaisant

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(4.151) \quad \Phi = \Delta\Phi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

On résout le problème par la méthode de Fourier

$$(4.152) \quad \Phi(x, t) = \sum_{m, n=1}^{\infty} [a_{mn} e^{i(m^2 + n^2)t} + b_{mn} e^{-i(m^2 + n^2)t}] \sin mx_1 \sin nx_2$$

où les (a_{mn}) , (b_{mn}) sont des constantes, définies par

$$(4.153) \quad (a_{mn} + b_{mn}) \frac{\pi^2}{4} = \int_{\Omega} \Phi^0(x_1, x_2) \sin mx_1 \sin nx_2 dx_1 dx_2$$

$$(4.154) \quad (a_{mn} + b_{mn}) \frac{\pi^2}{4} = \frac{-i}{m^2 + n^2} \int_{\Omega} \Phi^1(x_1, x_2) \sin mx_1 \sin nx_2 dx_1 dx_2$$

Ecrivons alors $\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$ sur $]0, \pi[\times \{0\}$. On a

$$(4.155) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1, 0) = \sum_{m, n=1}^{\infty} n[a_{mn} e^{i(m^2 + n^2)t} + b_{mn} e^{-i(m^2 + n^2)t}] \sin mx_1 = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n[a_{mn} e^{i(m^2 + n^2)t} + b_{mn} e^{-i(m^2 + n^2)t}] \right\} \sin mx_1$$

La suite $\{\sin mx_1\}$ est une base hilbertienne de $L^2(0, \pi)$ et par conséquent :

$$(4.156) \quad \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1, 0) \right\|_{L^2(0, \pi)} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n[a_{mn} e^{i(m^2 + n^2)t} + b_{mn} e^{-i(m^2 + n^2)t}] \right)^2 \\ = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} |f_m(t)|^2$$

avec

$$(4.157) \quad f_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_{mn} e^{i(m^2 + n^2)t} + b_{mn} e^{-i(m^2 + n^2)t}] .$$

On remarque ensuite que

$$(4.158) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ [m^2 + (n+1)^2] - [m^2 + n^2] \} = +\infty$$

ce qui implique (cf. J.BALL M. SLEMROD [1], Th. 2.1)

$$(4.159) \quad \forall T > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}, \exists C_{m,i}(T) > 0, i = 1, 2 \quad \text{telles que}$$

$$C_{m,1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2] \leq \int_0^T |f_m(t)|^2 dt \leq C_{m,2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2].$$

De (4.156)(4.159) on déduit donc que

$$(4.160) \quad \int_0^T \int_0^\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x_1, 0) \right|^2 dx_1 dt \geq \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m,1} n^2 [|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2].$$

L'inégalité (4.160) montre que (4.142) définit une norme pour tout $T > 0$. Par conséquent on a la contrôlabilité exacte dans un espace Hilbertien F' pour $T > 0$ quelconque avec un contrôle $v \in L^2(\Sigma)$ à support sur $\Gamma_0 \times (0, T)$, $\Gamma_0 = \{(x_1, 0) / x_1 \in]0, \pi[\}$. D'autre part pour $T \geq 2\pi$ la suite $(C_{m,1})_{m \in \mathbb{N}}$ est uniformément minorée par une constante positive.

On observe alors que si $\Gamma_0 = \{(x_1, 0), x_1 \in]0, \pi[\} \subset \Gamma$ et $T \geq 2\pi$,

$$(4.161) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Gamma_0)} = \left\{ \int_0^T \int_0^\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x_1, 0) \right|^2 dx_1 dt \right\}^{1/2}$$

définit une norme sur $(H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, l'espace

$$(4.162) \quad F(\Gamma_0) = \text{complété de } (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

coïncide avec

$$(4.163) \quad F(\Gamma_0) = \{ \Phi^0 \in L^2(\Omega) / \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \} \times \{ \Phi^1 \in H^{-2}(\Omega) / \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_2} \in H^{-2}(\Omega) \}.$$

Par symétrie, si l'on prend la norme

$$(4.164) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Gamma_1)} = \left\{ \int_0^T \int_0^\pi \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 dx_2 dt \right\}^{1/2}$$

avec $\Gamma_1 = \{(0, x_2) / x_2 \in]0, \pi[\} \subset \Gamma$ et $T \geq 2\pi$ on aura

$$(4.165) \quad F(\Gamma_1) = \{ \Phi^0 \in L^2(\Omega) / \frac{\partial \Phi^0}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \} \times \{ \Phi^1 \in H^{-2}(\Omega) / \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1} \in H^{-2}(\Omega) \}$$

et enfin pour la norme

$$(4.166) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_{L^2(\Sigma)}$$

l'espace

$$(4.167) \quad F = H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

Ces résultats peuvent être généralisés au cas d'un rectangle de \mathbb{R}^2 (cf. A. HARAUX [3]).

c) Existence d'une infinité de contrôles.

En reprenant les arguments du paragraphe 3.8 (cf. aussi Chap. I, Remarque 6.2) on peut démontrer, à partir du Théorème 4.4, l'existence d'une infinité de contrôles. Plus précisément, si les hypothèses du Théorème 4.4 sont vérifiées, on a

Pour tout $\{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times V'$ il existe une infinité de contrôles
 $(4.168) \quad \{v_0, v_1\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))]$ qui ramènent le système à l'état d'équilibre à l'instant T .

Par conséquent *l'ensemble des contrôles admissibles*

$$(4.169) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ \{v_0, v_1\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times [H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))] / y(T, v) = y'(T, v) = 0 \}$$

contient une infinité d'éléments.

On a par construction

$$(4.170) \quad v_1 = \frac{\partial}{\partial t} w_1 ; w_1 \in L^2(\Sigma(x^0))$$

où la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ n'est pas prise au sens des distributions, mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual.

Le contrôle donné par HUM est, dans ce cas, l'élément de \mathcal{U}_{ad} qui réalise le *minimum* de la fonctionnelle quadratique

$$(4.171) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} [|v_0|^2 + |w_1|^2] d\Sigma$$

sur l'ensemble \mathcal{U}_{ad} . ■

d) Action sur des parties de frontière non cylindriques.

On peut aussi démontrer des résultats de contrôlabilité exacte lorsque le contrôle s'exerce sur une partie de frontière Σ_0 non cylindrique.

En effet, si l'on prend par exemple

$$m(x, t) = x - x^0(t)$$

et

$$\Sigma_0 = \{ (x, t) \in \Sigma / m(x, t) \cdot v(x) > 0 \}$$

avec $\| m' \|_{L^\infty(\Omega)}$ suffisamment petite on peut démontrer des résultats analogues à ceux du paragraphe 4.7 en remplaçant $\Sigma(x^0)$ par Σ_0 et $T(x^0)$ par $T(m)$.

Dans le cas où $x^0(t) = x^0 \quad \forall t \in [0, T]$ on a $T(m) = T(x^0)$ et on retrouve donc les résultats précédents. ■

e) Systèmes d'ordre supérieur

Lorsque Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^∞ , les résultats démontrés dans ce n° peuvent être généralisés à des systèmes de la forme

$$(4.172) \quad \begin{aligned} & y'' + (-\Delta)^q y = 0 && \text{dans } Q \\ & y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 && \text{dans } \Omega \\ & y = v_0 && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ & \Delta^j y = v_j && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0), j = 1, \dots, q-1 \end{aligned}$$

avec $q \in \mathbb{N}$, $q > 2$.

Notons que dans ce cas l'on agit sur le système au moyen de q contrôles. ■

5. PROBLEMES OUVERTS

1. Quelle est la situation pour le système

$$(5.1) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(5.2) \quad y(0) = y^0 \in L^2(\Omega), \quad y'(0) = y^1 \in H^{-2}(\Omega)$$

$$(5.3) \quad y = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Peut-on contrôler exactement ? Quel espace peut-on contrôler ?

I. LASIECKA et R. TRIGGIANI dans [3][4] ont résolu le problème dans un cas particulier, à savoir, lorsque Ω est strictement étoilé par rapport à x^0 , i.e.

$$(x - x^0) \cdot v(x) \geq \gamma > 0 \quad \forall x \in \Gamma.$$

Bien entendu, dans ce cas on a $\Sigma(x^0) = \Sigma$. Ils ont démontré la contrôlabilité exacte des données $\{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times (H^3 \cap H_0^2(\Omega))'$ avec un contrôle $v \in L^2(\Sigma)$ et un temps

arbitrairement petit.

Tout cela est simplifié et généralisé dans l'Appendice 1 de E. Zuazua.

2. De manière générale, considérons au lieu de (5.3) la situation

$$(5.4) \quad \begin{aligned} B_1 u &= 0, \\ B_2 u &= v, \quad v \text{ à support dans } \Sigma_0 \subset \Sigma, \end{aligned}$$

où B_1 et B_2 sont deux opérateurs frontières généraux donnant lieu à un problème bien posé. Quelle est la situation ? Dans ce chapitre plusieurs cas particuliers ont été résolus. D'autres situations seront examinées dans le Vol. 2, notamment en introduisant des normes à partir d'expressions différentes, comme on a indiqué dans l'Introduction.

3. (Variante de la question 2 précédente) *Problème d'unicité*.

Soit Φ solution de

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

avec $B_j \Phi = 0$ sur Σ pour *trois* opérateurs ($j = 1, 2, 3$) d'un ensemble de quatre opérateurs correspondants aux données de Cauchy.

Quand a-t-on -en supposant éventuellement T assez grand-

$$\Phi \equiv 0 ?$$

Là aussi des cas particuliers ont été résolus dans le texte.

4. Chaque fois que l'on a unicité, on a un espace F .

De nombreux cas restent à étudier : structure de F , dépendance de F de la géométrie, etc.

5. Bien entendu on a des problèmes analogues pour le système de l'élasticité.

6. Se posent aussi toutes les questions analogues dans le cas des coefficients variables -et notamment l'élasticité pour des matériaux non homogènes-.

7. Les problèmes non linéaires correspondants -donc, par ex., la contrôlabilité exacte de matériaux élastiques soumis à de grandes déformations- sont, semble-t-il, très largement ouverts.

Chapitre V

Contrôlabilité exacte simultanée

I. INTRODUCTION.

Nous avons jusqu'ici étudié la contrôlabilité exacte de systèmes gouvernés par une équation, ou par un système d'équations, l'intervention sur le système se faisant par des contrôles (lorsqu'il en faut plusieurs) *indépendants entre eux*.

On considère ici la question, un peu différente, suivante : étant donné un système modélisé par *plusieurs équations, couplées ou non*, peut-on contrôler exactement par l'action *d'un seul contrôle* (ou, ce qui revient à peu près au même, par l'action de plusieurs contrôles liés entre eux) ?

C'est le problème de la *contrôlabilité simultanée*.

De telles questions, abordées pour la première fois dans J.L. LIONS [3] ont été motivées par le travail de D. L. RUSSELL [3] sur le contrôle d'équations de Maxwell.

L'application de HUM aux premiers exemples (et notamment à celui motivé par D.L. RUSSELL étudié au n° 2 ci-après) nous a conduit, en vérité, à une foule de problèmes nouveaux qui semblent assez intéressants.

Une étude exhaustive n'entrerait pas dans le cadre de ce volume 1. Certains points seront repris dans les volumes ultérieurs. Nous nous bornons ici à l'étude de deux situations :

i) contrôle simultané de deux équations des ondes, en agissant sur l'une par Dirichlet, sur l'autre par Neumann, les deux contrôles étant liés ;

ii) contrôle simultané de deux équations du type $y_i'' + \Delta^2 y_i = 0$.

D'autres exemples seront étudiés par A. HARAUX [1] pour le cas du contrôle interne pour un ensemble d'équations. D'autres le seront par E. ZUAZUA [2]. Enfin des problèmes ouverts sont posés en assez grand nombre au n° 4.

2 - UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DES ONDES.

2.1. Formulation du problème.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2 . Soit Γ_0 une partie ouverte de Γ et $T > 0$.

On considère deux *états* y_1 et y_2 gouvernés par les *équations des ondes*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y_1'' - \Delta y_1 &= 0 \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[, \\ y_2'' - \Delta y_2 &= 0 \text{ dans } Q , \end{aligned}$$

qui satisfont aux *conditions aux limites*

$$(2.2) \quad y_1 = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[, \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial y_2}{\partial \nu} = w \text{ sur } \Sigma_0$$

$$y_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0$$

et aux *conditions initiales*

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_1(0) &= y_1^0 ; y_1'(0) = y_1^1 \\ y_2(0) &= y_2^0 ; y_2'(0) = y_2^1 . \end{aligned}$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (2.1)(2.4) *mais avec une relation entre v et w*. On cherche donc, pour $T > 0$ fixé assez grand et des conditions initiales $\{y_0^1, y_1^1, y_2^1, y_2^0\}$ données dans un espace hilbertien convenable, un couple $\{v, w\}$ de

contrôles tel que la solution $\{y_1(v), y_2(w)\}$ de ce système vérifie $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$, avec la contrainte

$$(2.5) \quad w = \frac{\partial}{\partial t} v \quad \text{sur } \Sigma_0$$

(la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ v n'étant pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $H^1(0,T; L^2(\Gamma_0))$ et son dual $[H^1(0,T; L^2(\Gamma_0))]'$).

On cherche donc un contrôle v tel que les solutions $\{y_1(v), y_2(v)\}$ de (2.1)(2.5) vérifient $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$.

On va appliquer la méthode HUM, utilisant par ailleurs la méthode des multiplicateurs pour aboutir à des inégalités inverses donnant contrôlabilité exacte simultanée.

Dans le paragraphe 2.2 on considérera le cas $\Gamma_0 \neq \Gamma$ et plus précisément $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ pour un certain $x^0 \in \mathbb{R}^n$, sous des conditions géométriques assez restrictives sur Ω qui assurent que $\overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma^*(x^0)} = \emptyset$.

Dans le paragraphe 2.4 on considère le cas $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ sans hypothèses géométriques. On a déjà vu dans le chapitre III que cette situation entraîne des difficultés supplémentaires dues aux singularités que les solutions du problème homogène présentent aux points d'interface $x \in \overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma^*(x^0)}$. On se limitera, comme dans le chapitre III, au cas de la dimension $n = 2$ où l'on dispose d'un résultat de P. GRISVARD [3], [4] permettant d'utiliser encore la méthode des multiplicateurs.

2.2. Contrôlabilité exacte avec des conditions géométriques.

On considère deux domaines bornés non vides $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, à frontières $\partial\Omega_0$ et $\partial\Omega_1$ de classe C^2 tels que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ et

$$(2.6) \quad " \Omega_0 \text{ et } \Omega_1 \text{ étoilés par rapport à } x^0 \in \overline{\Omega}_1 ".$$

On pose

$$(2.7) \quad \Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1.$$

Remarque 2.1.

Ce qui va être fait dans ce paragraphe s'adapte de manière triviale, au cas de la dimension $n = 1$, lorsque $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$, $\Gamma_0 = \{a\}$ (resp. $\Gamma_0 = \{b\}$) et $\Gamma_1 = \{b\}$ (resp. $\Gamma_1 = \{a\}$). ■

On note comme d'habitude

$$m(x) = x - x^0, \quad R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|,$$

(2.8)

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) \geq 0\}, \quad \Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0)$$

On a évidemment (cf. fig. 1 ci-dessous)

$$(2.9) \quad \Gamma(x^0) = \partial\Omega_0; \quad \Gamma^*(x^0) = \partial\Omega_1.$$

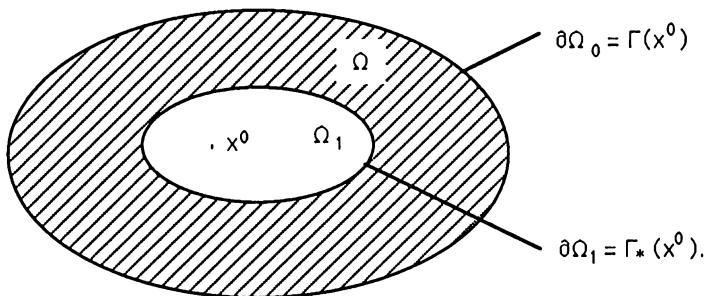


Figure 1

On choisit la partition de la frontière

$$(2.10) \quad \Gamma_0 = \Gamma(x^0); \quad \Gamma_1 = \Gamma^*(x^0)$$

et on cherche à contrôler exactement le système (2.1)(2.4) de manière simultanée, i.e. sous la contrainte (2.5).

On applique HUM.

On considère donc d'abord le système homogène :

$$\Phi_1'' - \Delta\Phi_1 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi_2'' - \Delta\Phi_2 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi_1(0) = \Phi_1^0 ; \Phi_1'(0) = \Phi_1^1$$

$$(2.11) \quad \Phi_2(0) = \Phi_2^0 ; \Phi_2'(0) = \Phi_2^1$$

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[$$

$$\Phi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$

On note

$$(2.12) \quad V = \{\Phi \in H^1(\Omega) / \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma^*(x^0)\}$$

et

$$(2.13) \quad W = \{\Phi \in V | \Delta\Phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma(x^0)\}.$$

On observe que dans cette situation $W \subset H^2(\Omega)$.

Soit $\lambda_0^2 > 0$ la première valeur propre du problème :

$$(2.14) \quad \begin{aligned} -\Delta\Phi &= \lambda_0^2\Phi \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} &= 0 \text{ sur } \Gamma(x^0); \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma^*(x^0). \end{aligned}$$

On a donc

$$(2.15) \quad |\Phi| \leq \frac{1}{\lambda_0} |\nabla\Phi| \quad \forall \Phi \in V$$

où $|\cdot|$ désigne à la fois la norme dans $L^2(\Omega)$ et dans $[L^2(\Omega)]^n$.

On considère les énergies associées aux solutions Φ_1 et Φ_2 du système (2.11), i.e.

$$(2.16) \quad E_i(t) = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi_i(t)|^2 + |\Phi_i'(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0, T], i = 1, 2.$$

On observe que ces énergies restent constantes le long des trajectoires, i.e.

$$(2.17) \quad E_i(t) = E_{0i} = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi_i^0|^2 + |\Phi_i^1|^2 \} \quad \forall t \in [0, T], i = 1, 2.$$

D'autre part, on sait que $E_{01}^{1/2}$ (resp. $E_{02}^{1/2}$) définit une norme équivalente sur $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (resp. $V \times L^2(\Omega)$) à celle qu'induit $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

On pose

$$(2.18) \quad E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

et on a donc

$$(2.19) \quad E(t) = E_0 = E_{01} + E_{02} \quad \forall t \in [0, T].$$

La norme $E_0^{1/2}$ est, dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega)$, équivalente à la norme induite par $[H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)]^2$.

Soit

$$(2.20) \quad T(x^0) = 4R(x^0) + \frac{n-1}{\lambda_0}.$$

On a l'estimation suivante :

Théorème 2.1. (L'inégalité inverse).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, de frontière Γ de classe C^2 vérifiant (2.6) (2.7). Soit $T > T(x^0)$.

Alors, pour chaque ensemble de conditions initiales

$$(2.21) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega); \{\Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in W \times V$$

les solutions Φ_1, Φ_2 du système (2.11) vérifient

$$(2.22) \quad \frac{2}{R(x^0)} [T - T(x^0)] E_0 \leq \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2' \right|^2 d\Sigma .$$

Démonstration.

On procède en plusieurs étapes

Etape 1.

On rappelle d'abord l'inégalité inverse donnée dans le Théorème 5.1 du Chapitre I.
Pour $T > 2R(x^0)$ on a

$$(2.23) \quad [T - 2R(x^0)] E_{01} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma . \quad \blacksquare$$

Etape 2.

On reprend ensuite l'inégalité (2.30) du paragraphe 2.3 du Chapitre III, on a alors

$$\begin{aligned} (2.24) \quad TE_{02} + (\Phi_2'(t), m \cdot \nabla \Phi_2(t) + \frac{(n-1)}{2} \Phi_2(t))_0^T &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m \cdot v [|\Phi_2'|^2 - |\nabla_v \Phi_2|^2] d\Sigma \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} m \cdot v |\Phi_2'|^2 d\Sigma \leq \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi_2'|^2 d\Sigma . \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$(2.25) \quad |(\Phi_2'(t), m \cdot \nabla \Phi_2(t))| \leq R(x^0) E_{02} \quad \forall t \in [0, T]$$

et

$$(2.26) \quad |(\Phi_2'(t), \Phi_2(t))| \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{02} \quad \forall t \in [0, T]$$

et aussitôt

$$(2.27) \quad |(\Phi_2'(t), m \cdot \nabla \Phi_2(t) + \frac{(n-1)}{2} \Phi_2(t))|_0^T \leq [2R(x^0) + \frac{(n-1)}{\lambda_0}] E_{02}.$$

De (2.24) et (2.27) on déduit

$$(2.28) \quad [T - 2R(x^0) - \frac{(n-1)}{\lambda_0}] E_{02} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi_2'|^2 d\Sigma$$

pour $T > 2R(x^0) + \frac{(n-1)}{\lambda_0}$.

En combinant (2.23) et (2.28) on a, en particulier,

$$(2.29) \quad [T - 2R(x^0) - \frac{(n-1)}{\lambda_0}] E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} [|\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}|^2 + |\Phi_2'|^2] d\Sigma. \quad \blacksquare$$

Etape 3.

On démontrera ci-dessous l'inégalité

$$(2.30) \quad \left| \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma \right| \leq 2 E_0.$$

Alors

$$R(x^0) \left| \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma \right| \leq 2 R(x^0) E_0$$

et grâce à (2.29) on obtient

$$(2.31) \quad [T - 4R(x^0) - \frac{(n-1)}{\lambda_0}] E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2' \right|^2 d\Sigma$$

ce qui achève la démonstration du théorème, sous réserve de démontrer (2.30). Pour cela on multiplie l'équation (2.11)₁ par Φ_2' et l'équation (2.11)₂ par Φ_1' et en intégrant sur Q on obtient

$$(2.32) \quad \int_{\Omega} [\Phi_1'' \Phi_2' + \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2'] dx dt = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma = \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma$$

(car $\Phi_2' = 0$ sur $\Sigma(x^0)$)

et

$$(2.33) \quad \int_{\Omega} [\Phi_1' \Phi_2'' + \nabla \Phi_1' \cdot \nabla \Phi_2] dx dt = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \Phi_1' d\Sigma = 0$$

(puisque $\Phi_1' = 0$ sur Σ).

Par addition des identités (2.32)(2.33) on a

$$(2.34) \quad \int_{\Omega} \frac{d}{dt} [\Phi_1' \Phi_2' + \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2] dx dt = \{(\Phi_1'(t), \Phi_2'(t)) + (\nabla \Phi_1(t), \nabla \Phi_2(t))\}|_0^T = \\ = \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma$$

et donc

$$(2.35) \quad \left| \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_2' d\Sigma \right| \leq \|(\Phi_1'(t), \Phi_2'(t)) + (\nabla \Phi_1(t), \nabla \Phi_2(t))\|_0^T \leq 2(E_{01} + E_{02}) = 2E_0$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Comme conséquence immédiate de l'estimation (2.22) on a le critère d'unicité suivant.

Corollaire 2.1.

On suppose que Ω vérifie les hypothèses du Théorème 2.1. Soit $T > T(x^0)$. Si deux solutions Φ_1 et Φ_2 qui correspondent respectivement à des données $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $\{\Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in W \times Y$ vérifient

$$(2.36) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2' = 0 \text{ sur } \Sigma(x^0)$$

alors $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv 0$.

Remarque 2.2.

Ce type de critère d'unicité semble être nouveau.

L'optimalité du temps $T(x^0)$ pour lequel on a l'estimation (2.22) et le critère d'unicité précédent est un problème ouvert. Les Techniques de l'Appendice II de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch adoptées dans l'Appendice I à l'étude de quelques modèles de plaques permettent de démontrer ce résultat pour tout $T > 4R(x^0)$. ■

A partir du Théorème 2.1 on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant :

Théorème 2.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, de frontière de classe C^2 qui vérifie (2.6)(2.7). Soit $T > T(x^0) = 4R(x^0) + \frac{(n-1)}{\lambda_0}$.

Alors, pour chaque ensemble de données initiales

$$(2.37) \quad \{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V'$$

il existe un contrôle

$$(2.38) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\}$ du système

$$y_1'' - \Delta y_1 = 0, \quad y_2'' - \Delta y_2 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.39) \quad \begin{aligned} y_1 &= v && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \quad y_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

$$y_1(0) = y_1^0 \quad ; \quad y_1'(0) = y_1^1 \quad y_2(0) = y_2^0 \quad ; \quad y_2'(0) = y_2^1$$

vérifie $y_1(T) = y'_1(T) = y_2(T) = y'_2(T) = 0$.

Démonstration.

On applique HUM.

On résout donc d'abord le système (2.11) avec les conditions initiales

$$(2.40) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times W \times V.$$

On définit la norme

$$(2.41) \quad \|\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\}\|_F := \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2^1 \right|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

et on construit l'espace

$$(2.42) \quad F = \text{complété de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times W \times V \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F.$$

Soit F' son dual (non identifié à F).

D'après (2.22) on a

$$(2.43) \quad F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega)$$

et aussitôt

$$(2.44) \quad H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V' \times L^2(\Omega) \subset F'$$

avec injection continue.

On a évidemment :

$$(2.45) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2^1 \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

D'autre part, grâce à (2.43) on sait que

$$(2.46) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F \Rightarrow \{\Phi_1^0, \Phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

mais d'après l'inégalité directe démontrée dans le Corollaire 4.1 du Chapitre I on a

$$(2.47) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \in L^2(\Sigma(x^0))$$

puisque $T > 2R(x^0)$.

En combinant (2.45)(2.47) on obtient alors

$$(2.48) \quad \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F \Leftrightarrow \begin{aligned} &\{\Phi_1^0, \Phi_1^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ &\text{et} \\ &\Phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0)). \end{aligned}$$

On considère donc la norme

$$(2.49) \quad \|\{\Phi_2^0, \Phi_2^1\}\|_G := \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} |\Phi_2'|^2 d\Sigma \right\}^{1/2}$$

et on construit l'espace hilbertien

$$(2.50) \quad G = \text{complété de } W \times V \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_G.$$

On a alors

$$(2.51) \quad G \subset V \times L^2(\Omega); V' \times L^2(\Omega) \subset G'$$

$$(2.52) \quad F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times G$$

et

$$(2.53) \quad F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times G'.$$

On considère ensuite le système rétrograde

$$\begin{aligned}
 & \psi_1'' - \Delta \psi_1 = 0 && \text{dans } Q \\
 & \psi_2'' - \Delta \psi_2 = 0 && \text{dans } Q \\
 & \psi_1(T) = \psi_1'(T) = \psi_2(T) = \psi_2'(T) = 0 \\
 (2.54) \quad & (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2') && \text{sur } \Sigma(x^0) \\
 & \psi_1 = && \\
 & 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\
 & \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2') && \text{sur } \Sigma(x^0) \\
 & \psi_2 = 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0).
 \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2')$ n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$ et son dual, c'est-à-dire de manière à ce qu'on ait

$$(2.55) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2'), v \right\rangle = - \int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2') v' d\Sigma, \quad \forall v \in H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Par la méthode habituelle de transposition, on démontre l'existence d'une solution unique $\{\psi_1, \psi_2\}$ de (2.52) avec

$$(2.56) \quad \{\psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0)\} \in F'.$$

Les systèmes correspondants à ψ_1 et ψ_2 ont été étudiés respectivement dans le paragraphe 4.2 du Chapitre I et dans le paragraphe 2.3 du Chapitre III. Nous renvoyons le lecteur à ces paragraphes pour une étude détaillée de l'existence, unicité et régularité des solutions du problème (2.54).

On rappelle qu'on a, en particulier,

$$(2.57) \quad \psi_1 \in C(0, T ; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T ; H^{-1}(\Omega))$$

$$(2.58) \quad \{\psi_2', -\psi_2\} \in L^\infty(0, T ; G').$$

On construit ensuite l'opérateur

$$(2.59) \quad \Lambda : F \rightarrow F' \mid \Lambda \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} = \{ \psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0) \} .$$

Par construction du problème rétrograde (2.54), on a

$$(2.60) \quad \langle \Lambda \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \}, \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \rangle = \| \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \|_F^2$$

ce qui montre que Λ est un isomorphisme de F sur F' .

On conclut la démonstration de la manière habituelle. Pour chaque ensemble de données initiales $\{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V'$, on a

$$(2.61) \quad \{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V' \times L^2(\Omega) \subset F'$$

et donc le problème

$$(2.62) \quad \Lambda \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} = \{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\}$$

admet une solution unique $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F$. On considère ensuite les solutions Φ_1 et Φ_2 du problème (2.11) associées à ces conditions initiales et on voit que le contrôle

$$(2.63) \quad v = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0))$$

répond à la question. ■

Remarque 2.3.

On a démontré en fait la contrôlabilité exacte des données telles que

$$\{y_1^0, y_1^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega); \{y_2^1, -y_2^0\} \in G'.$$

La caractérisation de l'espace G en termes d'espaces fonctionnels classiques semble être une question difficile. On a démontré l'estimation $G \subset V \times L^2(\Omega)$. Dans le sens inverse on peut par exemple démontrer $W \times V \subset G$. (cf. paragraphe 2.3 du Chapitre III). ■

Remarque 2.4.

Dans les Chapitres I et III on a démontré que pour contrôler séparément les états $\{y_1, y_2\}$, c'est-à-dire sans aucune contrainte qui lie les contrôles correspondants il suffit d'un temps $T > 2R(x^0)$. *On voit donc que contrôler exactement les systèmes de manière simultanée exige en gros le double de temps.*

Les méthodes de l'Appendice I, N° 4, permettent de démontrer le Théorème 2.2 pour tout $T > 4R(x^0)$. ■

2.3. Contrôlabilité exacte sans conditions géométriques.

On reprend ici le problème du paragraphe 2.2 dans le cas général où l'on n'impose pas de conditions géométriques à l'ouvert Ω .

Cette situation a déjà été étudiée pour le cas *d'une seule* équation dans le paragraphe 2.7 du Chapitre III. On a vu qu'à cause des singularités présentées par les solutions du problème homogène aux points d'interface, l'application de la méthode des multiplicateurs est dans ce cas une question délicate. On s'est alors limité (par des questions techniques) au cas de la dimension $n = 2$.

On se place ici dans cette même situation.

Soit donc Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ de classe C^2 . On se donne un point $x^0 \in \mathbb{R}^2$ et on considère la partition habituelle de la frontière $\{\Gamma(x^0), \Gamma^*(x^0)\}$.

On reprend les notations du paragraphe 2.2 précédent et on pose donc

$$(2.64) \quad V = \{\Phi \in H^1(\Omega) / \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma^*(x^0)\},$$

$$(2.65) \quad W = \{\Phi \in V \mid \Delta\Phi \in L^2(\Omega), \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma(x^0)\}.$$

Soit $\lambda_0 > 0$ la meilleure constante telle que

$$(2.66) \quad |\Phi| \leq \frac{1}{\lambda_0} |\nabla\Phi| \quad \forall \Phi \in V.$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système :

$$\begin{aligned}
 & y_1'' - \Delta y_1 = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\\
 & y_2'' - \Delta y_2 = 0 \quad \text{dans } Q \\
 & v \quad \text{sur } \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[\\
 & y_1 = \\
 & \quad 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0) \\
 (2.67) \quad & \frac{\partial y_2}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\
 & y_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\
 & y_1(0) = y_1^0 \quad ; \quad y_1'(0) = y_1^1 \\
 & y_2(0) = y_2^0 \quad ; \quad y_2'(0) = y_2^1 .
 \end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 à frontière Γ de classe C^2 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^2$ et $T > 4R(x^0) + \frac{1}{\lambda_0}$.

Alors, pour tout ensemble de conditions initiales

$$(2.68) \quad \{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V'$$

il existe un contrôle

$$(2.69) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que les solutions $\{y_1, y_2\}$ du système (2.67) vérifient
 $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$.

Idée de la démonstration.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème 2.2.

On applique HUM. On considère d'abord le système homogène

$$(2.70) \quad \begin{aligned} \Phi_1'' - \Delta\Phi_1 &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi_2'' - \Delta\Phi_2 &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi_1 &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0), \Phi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ \Phi_1(0) &= \Phi_1^0 ; \Phi_1'(0) = \Phi_1^1 \\ \Phi_2(0) &= \Phi_2^0 ; \Phi_2'(0) = \Phi_2^1 . \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité directe démontrée dans le Théorème 5.1 du Chapitre I et les résultats du paragraphe 2.6 du Chapitre III. On obtient, comme dans le Théorème 2.1 précédent, l'estimation

$$(2.71) \quad \frac{2}{R(x^0)} \left[T - 4R(x^0) - \frac{1}{\lambda_0} \right] E_0 \leq \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} + \Phi_2' \right|^2 d\Sigma .$$

On construit l'espace hilbertien F , complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W] \times [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap V]$ par rapport à la norme

$$(2.72) \quad \| \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \|_F = \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} + \Phi_2' \right|^2 d\Sigma \right\}^{1/2} .$$

Grâce à (2.71) on a

$$(2.73) \quad F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega)$$

et donc

$$(2.74) \quad H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V' \times L^2(\Omega) \subset F'$$

avec injections continues.

On considère ensuite le problème rétrograde

$$\psi_1'' - \Delta \psi_1 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi_2'' - \Delta \psi_2 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi_1(T) = \psi_1'(T) = \psi_2(T) = \psi_2'(T) = 0$$

$$(2.75) \quad \begin{aligned} & (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2') \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & \psi_1 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\ & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2') \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & \psi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

On construit l'opérateur \wedge habituel et on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme de F sur F' .

On résout ensuite l'équation

$$(2.76) \quad \wedge \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} = \{ y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0 \}$$

et on vérifie que le contrôle

$$(2.77) \quad v = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \Phi_2' \in L^2(\Sigma(x^0))$$

répond à la question. ■

Remarque 2.5.

Le cas de la dimension $n > 2$ est un problème ouvert. ■

Les techniques de l'Appendice I permettent de démontrer ce résultat pour tout

$T > 4R(x^0)$. ■

2.4. QUELQUES COMMENTAIRES.

2.4.1. Existence, unicité et régularité des solutions faibles.

Dans ce n° on n'a pas étudié en détail les questions liées aux formulations faibles des problèmes aux limites non homogènes ainsi que l'existence, unicité et régularité des solutions.

Nous renvoyons le lecteur aux paragraphes correspondants des Chapitres I et III. Les méthodes s'adaptent aux présentes situations. ■

2.4.2. - Existence d'une infinité de contrôles.

Comme il est habituel, on peut démontrer dans les modèles étudiés dans ce n° que lorsqu'il existe un contrôle (ou bien deux contrôles liés par des relations fonctionnelles simples) ramenant le système à l'état d'équilibre, *il en existe une infinité*.

Le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique associée sur l'ensemble de contrôles admissibles. ■

2.4.3. - Systèmes de plus de deux équations.

Dans ce n° on s'est limité au cas des systèmes de deux équations des ondes.

Les idées de base de la méthode qu'on vient de présenter peuvent s'appliquer dans l'étude de la contrôlability exacte de systèmes de plus de deux équations avec différentes conditions aux limites : Dirichlet, Neumann ou bien mêlées de type Dirichlet/Neumann. La situation générale n'est toutefois pas élucidée, cf. le Problème 4.4. ■

2.4.4. - Changement des normes.

La technique habituelle du changement des normes peut s'appliquer pour obtenir d'autres résultats de contrôlability exacte dans divers espaces hilbertiens.

En particulier, on peut démontrer le rapport habituel entre la régularité des conditions initiales contrôlées et des contrôles utilisés, à savoir : à des données initiales plus régulières (resp. moins régulières) correspondent des contrôles plus réguliers (resp. moins réguliers). ■

Considérons, pour donner un exemple, la situation du paragraphe 2.2.

On a l'estimation suivante

$$\text{Si } T > T(x^0) = 4R(x^0) + \frac{(n-1)}{\lambda_0} ,$$

$$(2.78) \quad \frac{2}{R(x^0)} [T - T(x^0)] \{ |\Delta\Phi_1^0|^2 + |\nabla\Phi_1^1|^2 + |\Delta\Phi_2^0|^2 + |\nabla\Phi_2^1|^2 \} \leq$$

$$\leq \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial\Phi_1^1}{\partial\nu} + \Phi_2^1 \right|^2 d\Sigma .$$

pour chaque ensemble de données $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \{\Phi \in W | \Delta\Phi \in V\} \times W$.

A l'aide de cette inégalité et de HUM on peut démontrer le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, de frontière Γ de classe C^2 vérifiant les conditions géométriques (2.6)(2.7). Soit $T > T(x^0) = 4R(x^0) + \frac{(n-1)}{\lambda_0}$.

Alors, pour chaque ensemble de données initiales

$$(2.79) \quad \{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]' \times V' \times W'$$

il existe un contrôle

$$(2.80) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que les solutions $\{y_1, y_2\}$ du système

$$\begin{aligned}
 y_1'' - \Delta y_1 &= 0 && \text{dans } Q \\
 y_2'' - \Delta y_2 &= 0 && \text{dans } Q \\
 y_1 &= \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} v & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases} \\
 (2.81) \quad \frac{\partial y_2}{\partial v} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} v && \text{sur } \Sigma(x^0) \\
 y_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \\
 y_1(0) &= y_1^0 ; \quad y_1'(0) = y_1^1 \\
 y_2(0) &= y_2^0 ; \quad y_2'(0) = y_2^1
 \end{aligned}$$

vérifient $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$.

2.4.5. Optimalité du temps $T(x^0)$ de contrôlability exacte.

Les techniques de l'Appendice I permettent de démontrer la contrôlability exacte du système considérés dans ce N° pour tout $T > 4R(x^0)$.

L'optimalité du temps de contrôlability exacte $T_0 = 4R(x^0)$ est un problème ouvert.

3. UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DE PLAQUES VIBRANTES.

3.1. Formulation du problème.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ de classe C^4 . Soit $T > 0$.

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la contrôlability exacte simultanée de deux états y_1 , y_2 vérifiant les équations de plaques vibrantes suivantes :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y_1'' + \Delta^2 y_1 &= 0 && \text{dans } Q \\ y_2'' + \Delta^2 y_2 &= 0 && \text{dans } Q \end{aligned}$$

avec des conditions initiales et aux limites

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y_1(0) &= y_1^0 ; y_1'(0) = y_1^1 \\ y_2(0) &= y_2^0 ; y_2'(0) = y_2^1 \\ y_1 &= 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \frac{\partial y_1}{\partial v} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma \\ y_2 &= v_2^0 \quad \text{sur } \Sigma ; \Delta y_2 = v_2^1 \quad \text{sur } \Sigma . \end{aligned}$$

On cherche en fait des contrôles $\{v_1, v_2^0, v_2^1\}$ liés par la contrainte :

$$(3.4) \quad v_2^1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} .$$

On a donc *deux contrôles* $\{v_1, v_2\}$ et on essaie de contrôler le système par des conditions aux limites de la forme :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} y_1 &= 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \frac{\partial y_1}{\partial v} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma \\ y_2 &= v_2 \quad \text{sur } \Sigma ; \Delta y_2 = \frac{\partial v_1}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma . \end{aligned}$$

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse en fait à la contrôlabilité exacte simultanée du système sous la contrainte (supplémentaire par rapport à (3.5))

$$(3.6) \quad v_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0) . \quad \blacksquare$$

Les systèmes correspondants aux états y_1 et y_2 ont été respectivement considérés dans les n°s 3 et 4 du Chapitre IV. On rappelle que *contrôler exactement le système associé à y_1 exige l'action d'un seul contrôle, tandis que contrôler l'état y_2 en exige deux.* Alors, *contrôler exactement et indépendamment ces systèmes exige l'action de trois contrôles.* Nous étudions ici la possibilité de contrôler exactement ces systèmes de manière simultanée au moyen de *deux* contrôles $\{v_1, v_2\}$ avec des

conditions aux limites de la forme (2.5).

On obtiendra un résultat semblable à ceux du n° précédent : contrôler simultanément les deux systèmes exige un temps supérieur ou égal à la somme des temps de contrôlabilité de chaque système. Les résultats de ce N° seront améliorés dans l'Appendice I où l'on démontrera la contrôlabilité exacte simultanée en un temps arbitrairement petit. ■

On appliquera la méthode introduite dans le paragraphe précédent. A l'aide des estimations obtenues dans les n°s 3 et 4 du Chapitre IV on obtiendra des inégalités inverses faisant intervenir des combinaisons linéaires des différentes traces des solutions du système homogène associé et on appliquera ensuite HUM.

3.2. L'inégalité inverse.

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'obtention d'une inégalité inverse pour le système homogène

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \Phi_i'' + \Delta^2 \Phi_i = 0 \quad \text{dans } Q \\ & \Phi_i(0) = \Phi_i^0 ; \Phi_i'(0) = \Phi_i^1 , \text{ pour } i = 1, 2 \\ & \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ & \Phi_2 = \Delta \Phi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma . \end{aligned}$$

On définit les énergies

$$(3.8) \quad E_1(t) = \frac{1}{2} \{ |\Phi_1'(t)| + |\Delta \Phi_1(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0, T] ,$$

$$(3.9) \quad E_2(t) = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi_2'(t)| + |\nabla \Delta \Phi_2(t)|^2 \} \quad \forall t \in [0, T] ,$$

et on rappelle qu'elles restent constantes le long des trajectoires (cf. n°s 3 et 4 du Chapitre IV), i.e.

$$(3.10) \quad E_1(t) = E_{01} = \frac{1}{2} \{ |\Phi_1^1|^2 + |\Delta \Phi_1^0|^2 \} \quad \forall t \in [0, T] ,$$

$$(3.11) \quad E_2(t) = E_{02} = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Phi_2^1|^2 + |\nabla \Delta \Phi_2^0|^2 \} \quad \forall t \in [0, T],$$

On considère ensuite l'énergie totale

$$(3.12) \quad E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

On a

$$(3.13) \quad E(t) = E_0 = E_{01} + E_{02} \quad \forall t \in [0, T].$$

On définit la valeur propre

$$\lambda_0^2 = \min_{\substack{w \in H_0^2(\Omega) - \{0\}}} \frac{|\Delta w|^2}{|\nabla w|^2}$$

de sorte que

$$(3.14) \quad |\nabla w| \leq \frac{1}{\lambda_0} |\Delta w| \quad \forall w \in H_0^2(\Omega).$$

On définit par ailleurs $\psi_0^2 =$ la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, de sorte que

$$(3.15) \quad |w| \leq \frac{1}{\psi_0} |\nabla w| \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Soit

$$(3.16) \quad T(x^0) = \left(\frac{1}{\psi_0} + \max \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\psi_0} \right) \right) R(x^0).$$

On définit ensuite l'espace

$$(3.17) \quad Y = \{\Phi \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) \mid \Delta \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On observe que la norme $E_0^{1/2}$ est équivalente, dans $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times Y \times H_0^1(\Omega)$, à la norme induite par $H^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

On a l'estimation suivante :

Théorème 3.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ de classe C^4 .
 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout ensemble de données initiales

$$\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times H_0^1(\Omega)$$

on a l'estimation

$$(3.18) \quad 2[T - T(x^0)] E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \left\{ \int_{\Sigma} (\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial v})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \right\}.$$

Démonstration.

D'après le Théorème 3.3 du Chapitre IV on a

$$(3.18) \quad 2[T - \frac{R(x^0)}{\lambda_0}] E_{01} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi_1|^2 d\Sigma$$

et aussitôt

$$(3.19) \quad 2[T - \frac{R(x^0)}{\lambda_0}] E_{01} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma} |\Delta \Phi_1|^2 d\Sigma.$$

D'autre part, dans le Théorème 4.3 du Chapitre IV on a démontré

$$2[T - \frac{R(x^0)}{\psi_0}] E_{02} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left[\left(\frac{\partial \Phi_2^1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 \right] d\Sigma$$

et donc

$$(3.20) \quad 2[T - \frac{R(x^0)}{\psi_0}] E_{02} \leq \frac{R(x^0)}{2} \left\{ \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Phi_2^1}{\partial v} \right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \right\}.$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation correspondante à Φ_1 (resp. à Φ_2) par Φ'_2 (resp. par Φ'_1) et en intégrant sur Q on obtient

$$(3.21) \quad \int_Q [\Phi''_1 \Phi'_2 + \Delta \Phi_1 \Delta \Phi'_2] dx dt = \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} d\Sigma$$

et

$$(3.22) \quad \int_Q [\Phi'_1 \Phi''_2 + \Delta \Phi'_1 \Delta \Phi_2] dx dt = 0 .$$

Donc

$$(3.23) \quad \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} d\Sigma = \frac{d}{dt} \int_Q [\Phi'_1 \Phi'_2 + \Delta \Phi_1 \Delta \Phi_2] dx dt = \\ = [(\Phi'_1(t), \Phi'_2(t)) + (\Delta \Phi_1(t), \Delta \Phi_2(t))]|_0^T$$

et comme

$$|(\Phi'_1(t), \Phi'_2(t)) + (\Delta \Phi_1(t), \Delta \Phi_2(t))| \leq \\ \leq \frac{1}{v_0} |\Phi'_1(t)| |\nabla \Phi'_2(t)| + \frac{1}{v_0} |\Delta \Phi_1(t)| |\nabla \Delta \Phi_2(t)| \leq \frac{1}{v_0} E(t) = \frac{1}{v_0} E_0$$

on a

$$(3.24) \quad \left| \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} d\Sigma \right| \leq \frac{2}{v_0} E_0 .$$

En combinant (3.19), (3.20) et (3.24) on obtient aisément (3.18). ■

Remarque 3.1.

De cette inégalité inverse on déduit immédiatement le critère d'unicité suivant :

" Si $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ sont solutions du système (3.7) avec $T > T(x^0)$ et

$$\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \quad \frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

alors $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv 0$ ".

Ce critère d'unicité (cf. J.L. LIONS [3]) semble être d'un type nouveau. (cf. aussi le problème ouvert 4.5). Il est en fait vérifié pour tout $T > 0$ (cf. l'Appendice I). ■

Remarque 3.2. (E. ZUAZUA)

En multipliant l'équation correspondante à Φ_1 (resp. Φ_2) par $\Delta\Phi_2$ (resp. $\Delta\Phi_1$) et en intégrant sur Q on obtient

$$(3.25) \quad \int_Q (\nabla\Phi_1'' \cdot \nabla\Phi_2 + \nabla(\Delta\Phi_1) \cdot \nabla(\Delta\Phi_2)) dx dt = 0$$

et

$$(3.26) \quad \int_Q (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2'' + \nabla(\Delta\Phi_1) \cdot \nabla(\Delta\Phi_2)) dx dt = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta\Phi_2}{\partial v} \Delta\Phi_1 d\Sigma$$

et donc

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \int_{\Sigma} \Delta\Phi_1 \frac{\partial \Delta\Phi_2}{\partial v} d\Sigma &= \int_Q (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2'' - \nabla\Phi_1'' \cdot \nabla\Phi_2) dx dt = \\ &= \int_Q \frac{d}{dt} (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2' - \nabla\Phi_1' \cdot \nabla\Phi_2) dx dt = \\ &= [(\nabla\Phi_1(t), \nabla\Phi_2'(t)) - (\nabla\Phi_1'(t), \nabla\Phi_2(t))] \Big|_0^T = \\ &= [(\nabla\Phi_1(t), \nabla\Phi_2'(t)) + (\Phi_1'(t), \Delta\Phi_2(t))] \Big|_0^T . \end{aligned}$$

Du fait que

$$\begin{aligned} |(\nabla\Phi_1(t), \nabla\Phi_2'(t)) + (\Phi_1'(t), \Delta\Phi_2(t))| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0} |\nabla\Phi_2'(t)| |\Delta\Phi_1(t)| + \frac{1}{\psi_0} |\Phi_1'(t)| |\nabla\Delta\Phi_2(t)| \leq \\ &\leq \max \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\psi_0} \right) E_0 \end{aligned}$$

on a alors

$$(3.28) \quad \left| \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} d\Sigma \right| \leq 2 \max \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\psi_0} \right) E_0 .$$

En combinant (3.18) et (3.28) on obtient que pour

$$T > \hat{T}(x^0) = T(x^0) + \max \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\psi_0} \right) R(x^0) = \left(\frac{1}{\psi_0} + 2 \max \left(\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\psi_0} \right) \right) R(x^0)$$

on a l'estimation

$$(3.29) \quad 2[T - \hat{T}(x^0)] E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma} \left[\left(\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 \right] d\Sigma . \quad \blacksquare$$

Remarque 3.3.

D'après les Corollaires 3.1 et 4.1 du Chapitre IV on a l'inégalité directe, c'est-à-dire, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout couple de solutions $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ et pour tout couple $T > 0$ on ait

$$(3.30) \quad \int_{\Sigma} \left[\left(\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \right] \leq C(T+1) E_0 .$$

De même

$$(3.31) \quad \int_{\Sigma} \left[\left(\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \right] \leq C(T+1) E_0 . \quad \blacksquare$$

3.3. Contrôlabilité exacte.

A partir des estimations du paragraphe précédent et à l'aide de HUM on obtient aisément des résultats de contrôlabilité exacte.

Considérons donc le système :

$$y'' + \Delta^2 y_1 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$y''_2 + \Delta^2 y_2 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.32) \quad y_1 = 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$y_2 = \begin{cases} v_2 & \text{sur } \Sigma(x^0) ; \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases} \quad \Delta y_2 = \frac{\partial}{\partial t} v_1 \quad \text{sur } \Sigma .$$

$$y_1(0) = y_1^0, \quad y'_1(0) = y_1^1, \quad y_2(0) = y_2^0, \quad y'_2(0) = y_2^1 .$$

On a le résultat suivant.

Théorème 3.2.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ de classe C^4 .
Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout ensemble de données initiales

$$(3.33) \quad \{ y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times V'$$

il existe deux contrôles

$$(3.34) \quad \{ v_1, v_2 \} \in L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $\{ y_1, y_2 \}$ de (3.32) satisfasse à $y_1(T) = y'_1(T) = y_2(T) = y'_2(T) = 0$.

Idée de la démonstration.

Il s'agit d'une conséquence de l'estimation (3.18) et de l'application de HUM.

On considère la norme

$$(3.35) \quad \| \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \|_F := \left(\int_{\Sigma} (\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial v})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right)^2 d\Sigma \right)^{1/2}$$

et on construit l'espace

$$(3.36) \quad F = \text{complété de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap V] \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F.$$

D'après (3.18) et (3.30) on a

$$(3.37) \quad F = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times H_0^1(\Omega),$$

et donc

$$F' = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times V \times H^{-1}(\Omega).$$

On considère ensuite le problème rétrograde

$$\psi_1'' + \Delta^2 \psi_1 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi_2'' + \Delta^2 \psi_2 = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\psi_1(T) = \psi_1'(T) = \psi_2(T) = \psi_2'(T) = 0$$

$$(3.38) \quad \psi_1 = 0 \quad \text{sur } \Sigma; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} = \Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{-\partial \Delta \Phi_2}{\partial \nu} && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ & & ; \quad \Delta \psi_2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial \nu}) && \text{sur } \Sigma. \\ & 0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

D'après les résultats des paragraphes 3.5 et 4.5 du Chapitre IV on sait qu'il existe une solution unique $\{\psi_1, \psi_2\}$ de (3.38) (bien entendu, prise en un sens convenable au moyen de la méthode de transposition) telle que

$$(3.39) \quad \{\psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0)\} \in F'.$$

On construit l'opérateur \wedge habituel et on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme de F sur F' .

On résout ensuite l'équation

$$(3.40) \quad \wedge \quad \{\Phi_0^1, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} = \{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\}$$

et l'on voit que les contrôles

$$(3.41) \quad \begin{aligned} v_1 &= \Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial v} \in L^2(\Sigma) \\ v_2 &= -\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \in L^2(\Sigma(x^0)) \end{aligned}$$

ramènent le système à l'état d'équilibre. ■

Remarque 3.4.

A partir de l'estimation (3.29) on peut démontrer de manière analogue la contrôlabilité exacte des données initiales vérifiant (3.33), pour $T > \hat{T}(x^0)$ et avec des contrôles de la forme

$$(3.42) \quad \begin{aligned} y_1 &= 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = v_1 + v_2 \quad \text{sur } \Sigma \\ y_2 &= -v_2 \quad \text{sur } \Sigma ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} v_1 \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

où

$$(3.43) \quad \{v_1, v_2\} \in L^2(\Sigma).$$

Le temps de contrôlabilité est dans ce cas plus grand puisque $\hat{T}(x^0) > T(x^0)$. Le contrôle agissant sur y_2 est à support sur Σ tout entier. Mais *les trois contrôles sont liés* par des relations fonctionnelles simples. ■

Remarque 3.5.

Pour une étude détaillée des formulations faibles des problèmes non homogènes considérés ainsi que l'existence, unicité et régularité des solutions nous renvoyons le lecteur aux paragraphes 3.5 et 4.5 du Chapitre IV. ■

Remarque 3.6.

Par la méthode habituelle on peut démontrer que : chaque fois qu'il existe un contrôle (ou bien un couple de contrôles) ramenant le système à l'état d'équilibre il en existe une infinité. Le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique associée sur l'ensemble de contrôles admissibles (cf. Chapitre VIII). ■

Remarque 3.7.

Les résultats précédents se généralisent au cas des systèmes de plus de deux équations avec diverses conditions aux limites. Pour une étude plus détaillée cf. J. LAGNESE et J.L. LIONS [1]. ■

Remarque 3.8.

Avec la technique de changement des normes on peut démontrer d'autres résultats de contrôlabilité exacte : si les conditions initiales sont plus régulières (resp. moins régulières) les contrôles peuvent être pris plus réguliers (resp. moins réguliers). ■

On a démontré ici la contrôlabilité exacte du système pour tout $T > T(x^0)$. On peut en fait démontrer le même résultat pour $T > 0$ arbitrairement petit (cf. l'Appendice I). ■

4. PROBLEMES OUVERTS.

4.1. Le Théorème d'Unicité donné au Corollaire 2.1 conduit à des questions *du type* suivant : on considère des fonctions

$$\Phi_i(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad i = 1, \dots, q$$

solution de

$$(4.1) \quad \Phi_i'' - \Delta \Phi_i = 0$$

avec des conditions aux limites

$$(4.2) \quad \alpha_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} + \beta_i \Phi_i = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T);$$

dans (4.2) (où, bien sûr, on ne somme pas par rapport à l'indice i !) les fonctions α_i et β_i

sont des fonctions convenables données sur Γ .

Supposons que l'on ait en outre p relations supplémentaires, avec $p < q$, entre $\frac{\partial \Phi_i}{\partial v}$ et Φ_i sur Σ (ou sur $\Sigma_0 \subset \Sigma$).

Quand a-t-on alors $\Phi_i = 0 \quad \forall i$?

Ce type de question ne semble pas avoir été abordé dans la littérature. Le premier résultat dans ce sens semble avoir été donné dans J.L. LIONS [3], le Corollaire 2.1 reprenant ce résultat en améliorant l'estimation pour $T(x^0)$ qui n'est pas optimale (cf. l'Appendice I). La même question se pose pour les résultats du N° 3.

4.3. Une variante des problèmes précédents est la suivante. On considère y_i , $i = 1, \dots, q$, solution de

$$(4.3) \quad y_i'' - a_i \Delta y_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

avec cette fois des équations deux à deux différentes, i.e.

$$(4.4) \quad a_i > 0, \text{ tous les } a_i \text{ distincts.}$$

Peut-on contrôler exactement toutes les équations (4.3) en agissant sur chaque système par le même contrôle (du type Dirichlet, ou du type Neumann etc) ?

Un problème de ce type, avec action interne, est résolu par A. HARAUX [1].

4.4. Au N° 2 nous avons traité le problème du contrôle simultané de deux équations des ondes par Dirichlet pour l'un, par Neumann pour l'autre –mais avec dans ce cas une condition de Dirichlet homogène sur une partie du bord– Il ne s'agit donc pas de "Neumann pur". Pour l'étude de ce cas, qui nécessite des développements techniques supplémentaires assez longs, nous renvoyons à un travail séparé de E. ZUAZUA [2].

4.5. Tous les problèmes précédents ont des analogues pour le contrôle simultané de deux (ou plus de 2 !) équations de type Petrowski. On a examiné un cas au N° 3, mais il y a un

grand nombre de problèmes à étudier, en considérant d'autres conditions aux limites.

4.6. Signalons encore les questions suivantes. Considérons les équations

$$(4.5) \quad \begin{aligned} y_1'' - \Delta y_1 &= 0, \\ y_2'' + \Delta^2 y_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[. \end{aligned}$$

On contrôle par

$$(4.6) \quad y_1 = v \text{ sur tout ou partie du bord } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \text{ 0 ailleurs}$$

et par

$$(4.7) \quad \begin{aligned} y_2 &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \Delta y_2 &= w \text{ sur tout ou partie de } \Sigma, \text{ 0 ailleurs.} \end{aligned}$$

Peut-on contrôler exactement un tel système avec *une relation entre v et w*, par ex.

$$v = w ?$$

4.7. Considérons maintenant *un système couplé* – par exemple le système de l'élasticité. Peut-on contrôler exactement en agissant seulement sur *certaines* des composantes, ou *de la même façon* sur toutes les composantes de l'état du système ? Des questions de ce type sont abordées dans un travail de E. ZUAZUA [3].

Chapitre VI

Contrôlabilité exacte de problèmes de transmission

1. INTRODUCTION.

Dans les chapitres précédents on a étudié la contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution à coefficients constants.

Le problème de la contrôlabilité exacte de systèmes à coefficients variables et en particulier, *discontinus*, est largement ouvert.

Nous abordons dans ce chapitre l'étude de la contrôlabilité exacte d'un système *de transmission* hyperbolique. Il s'agit, bien sûr, d'un exemple modèle des systèmes à coefficients discontinus.

Comme dans les autres chapitres nous rencontrons un assez grand nombre de problèmes ouverts, présentés dans le dernier paragraphe.

2. FORMULATION DU PROBLEME.

Soient Ω et Ω_1 deux domaines bornés de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ et Γ_1 respectivement, de classe C^2 tels que

$$(2.1) \quad \bar{\Omega}_1 \subset \Omega.$$

On suppose que

$$(2.2) \quad \Omega_1 \text{ est simplement connexe}$$

et on pose (cf. Fig 1)

$$(2.3) \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1.$$

(Ω_2 est donc la partie hachurée dans la Fig. 1)

On a donc

$$(2.4) \quad \partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Gamma_1.$$

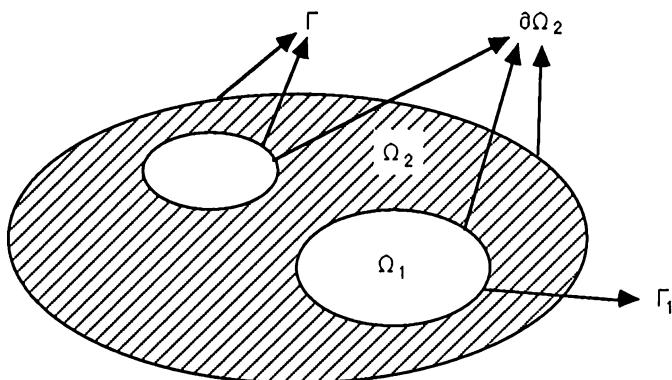


Figure 1

On se donne un temps $T > 0$ et deux constantes distinctes $a_1, a_2 > 0$.

L'état est donné par

$$(2.5) \quad y_i = y_i(x, t) : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$$

solutions des équations des ondes

$$(2.6) \quad y_i'' - a_i \Delta y_i = 0 \quad \text{dans } Q_i = \Omega_i \times]0, T[, i = 1, 2$$

et avec des conditions initiales et aux limites

$$(2.7) \quad \begin{aligned} y_i(0) &= y_i^0 && \text{dans } \Omega_i, \\ y'_i(0) &= y_i^1 && \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad y_2 = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

On impose par ailleurs les *conditions de transmission "canoniques"*

$$(2.9) \quad \begin{aligned} y_1 &= y_2 && \text{sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[, \\ a_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} &= a_2 \frac{\partial y_2}{\partial v} && \text{sur } \Sigma_1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.1.

Il s'agit d'un exemple simple d'une équation des ondes du type

$$(2.10) \quad y'' - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

avec des coefficients discontinus $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$.

L'exemple considéré correspond aux choix

$$a_1 \quad \text{si } x \in \Omega_1 \text{ et } i = j$$

$$a_{ij} = a_2 \quad \text{si } x \in \Omega_2 \text{ et } i = j$$

$$0 \quad \text{si } x \in \Omega \text{ et } i \neq j. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.2.

Le champ de vecteurs normaux unitaires v considéré est orienté vers l'extérieur de Ω_2 . Par conséquent, sur Γ_1 , le champ v est orienté vers l'intérieur de Ω_1 (cf. Fig. 2).

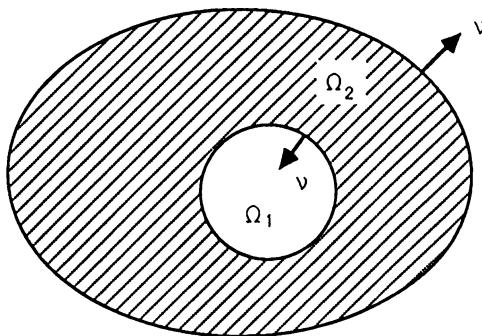


Figure 2

On étudie la contrôlabilité exacte du système (2.6)(2.7)(2.8)(2.9). On cherche donc, pour $T > 0$ assez grand fixé et des conditions initiales $\{y_i^0, y_i^1\}$, $i = 1, 2$ données, un contrôle v qui ramène le système à l'état d'équilibre à l'instant T , i.e. tel que

$$(2.11) \quad y_i(T) = y'_i(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Le contrôle v s'applique uniquement sur la frontière extérieure Γ de Ω et non sur la frontière intérieure Γ_1 qui sépare Ω_1 de Ω_2 . Le contrôle appliqué sur Γ agit bien entendu sur la composante y_1 par le biais des conditions de transmission (2.9). ■

Le système considéré est hyperbolique et par conséquent le système n'est exactement contrôlable que pour des temps T suffisamment grands. Le temps de contrôlabilité exacte dépendra des vitesses de propagation des ondes ($1/\sqrt{a_1}$ dans Ω_1 et $1/\sqrt{a_2}$ dans Ω_2) et des "diamètres" des ouverts Ω_1 et Ω_2 . ■

On se réserve, comme d'habitude, la possibilité d'agir uniquement sur une partie Σ_0 de la frontière latérale Σ , c'est-à-dire sous la contrainte

$$(2.12) \quad v = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0$$

On considérera en fait des ensembles de la forme $\Sigma_0 = \Sigma(x^0)$ avec $x^0 \in \Omega_1$. On démontrera la contrôlabilité exacte en supposant que

$$(2.13) \quad \Omega_1 \text{ est étoilé par rapport à } x \\ \text{et}$$

$$(2.14) \quad a_1 > a_2.$$

(Ces hypothèses n'interviennent qu'à partir du N° 4.2 ci après).

Le chapitre est organisé de la manière suivante :

- . Dans le paragraphe 3 on rappelle quelques résultats classiques sur les formulations variationnelles et la résolution des problèmes de transmissions ;
- . Dans le paragraphe 4 on établit les inégalités directe et inverse ;
- . Dans le paragraphe 5 on démontre le résultat principal de contrôlabilité exacte et on étudie brièvement l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème non homogène (2.6)(2.7)(2.8)(2.9) ;
- . Dans le paragraphe 6 on démontre quelques variantes de ces résultats par la technique habituelle du changement des normes,
- . Dans le paragraphe 7 on donne quelques remarques et commentaires ;
- . On termine en proposant un certain nombre de problèmes ouverts dans le paragraphe 8.

3. RESULTATS PRELIMINAIRES.

Considérons le système

$$\theta_i'' - a_i \Delta \theta_i = f_i \quad \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2$$

$$\theta_i(0) = \theta_i^0; \theta_i'(0) = \theta_i^1 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$(3.1) \quad \theta_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

avec des données $\{f_i, \theta_i^0, \theta_i^1\} \in L^1(0, T; L^2(\Omega_i)) \times H^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, vérifiant les conditions aux limites et de compatibilité naturelles, i.e.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \theta_1^0 &= \theta_2^0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ \theta_2^0 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de ce problème est la suivante : on dit que $\{\theta_1, \theta_2\}$ est une solution faible de ce système si la fonction

$$(3.3) \quad \theta = \begin{cases} \theta_1 & \text{dans } Q_1 \\ \theta_2 & \text{dans } Q_2 \end{cases}$$

vérifie

$$(3.4) \quad \theta \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$$

$$(3.5) \quad - \int_0^T \int_{\Omega} \theta' \varphi' dx dt + \sum_{i=1,2} a_i \int_0^T \int_{\Omega_i} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi dx dt = \sum_{i=1,2} \int_0^T \int_{\Omega_i} f_i \varphi dx dt$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0, T])$$

et les conditions initiales

$$(3.6) \quad \theta(0) = \begin{cases} \theta_1^0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \theta_2^0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}; \quad \theta'(0) = \begin{cases} \theta_1^1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \theta_2^1 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Remarque 3.1.

Les conditions (3.3)(3.4) sont équivalentes à

$$\theta_i \in C(0, T; H^1(\Omega_i)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_i)) \quad i = 1, 2$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$\theta_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

On peut aussi voir que (3.5) contient implicitement la condition de compatibilité

$$a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu} = a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma_1.$$

En effet, en appliquant (3.5) à des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{D}(Q_i) = \mathcal{D}(\Omega_i \times]0, T[)$ on voit que

$$\theta_i'' - a_i \Delta \theta_i = f_i \quad \text{dans } Q_i.$$

Alors, si $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ on a

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \theta' \varphi' dx dt + \sum_{i=1,2} a_i \int_0^T \int_{\Omega_i} \nabla \theta_i \cdot \nabla \varphi dx dt =$$

$$= \sum_{i=1,2} \int_0^T \int_{\Omega} (\theta_i'' - a_i \Delta \theta_i) \varphi dx dt + a_2 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu} \varphi d\Sigma - a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu} \varphi d\Sigma =$$

$$= \sum_{i=1,2} \int_0^T \int_{\Omega} f_i \varphi dx dt + \int_{\Sigma_1} (a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu} - a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu}) \varphi d\Sigma$$

et ceci, combiné avec (3.5) donne,

$$\int_{\Sigma_1} (a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \nu} - a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu}) \varphi d\Sigma = 0. \quad \blacksquare$$

En ce qui concerne l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, on a le résultat suivant.

Lemme 3.1.

(a) Soient

$$(3.7) \quad \{\theta_i^0, \theta_i^1, f_i\} \in H^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \times L^1(0, T; L^2(\Omega_i)), \quad i = 1, 2$$

tel que

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \theta_1^0 &= \theta_2^0 && \text{sur } \Gamma_1 \\ \theta_2^0 &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Alors, il existe un couple unique de solutions $\{\theta_1, \theta_2\}$ du problème (3.1) avec

$$(3.9) \quad \theta_i \in C(0, T ; H^1(\Omega_i)) \cap C^1(0, T ; L^2(\Omega_i)), \quad i = 1, 2,$$

tel que

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 && \text{sur } \Sigma_1 \\ \theta_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

De plus,

l'application $\{\theta_i^0, \theta_i^1, f_i\}_{i=1,2} \rightarrow \{\theta_i, \theta_i'\}_{i=1,2}$ est linéaire continue pour les topologies correspondantes.

(b) *Si les données sont telles que*

$$(3.12) \quad \{\theta_i^0, \theta_i^1, f_i\} \in H^2(\Omega_i) \times H^1(\Omega_i) \times L^1(0, T ; H^1(\Omega_i)), \quad i = 1, 2$$

avec

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \theta_1^j &= \theta_2^j && \text{sur } \Gamma_1, \quad j = 0, 1 \\ f_1 &= f_2 && \text{sur } \Sigma_1 \\ \theta_2^j &= 0 && \text{sur } \Gamma, \quad j = 0, 1 \\ f_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ a_1 \frac{\partial \theta_1^0}{\partial v} &= a_2 \frac{\partial \theta_2^0}{\partial v} && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

alors, les solutions sont dans la classe

$$(3.14) \quad \theta_i \in C(0, T ; H^2(\Omega_i)) \cap C^1(0, T ; H^1(\Omega_i)), \quad i = 1, 2$$

vérifient (3.10) et de plus

$$(3.15) \quad a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

En outre,

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \text{l'application } & \{ \theta_i^0, \theta_i^1, f_i \}_{i=1,2} \rightarrow \{ \theta_i, \theta_i' \}_{i=1,2} \text{ est linéaire continue} \\ \text{pour les topologies correspondantes.} \end{aligned}$$

Remarque 3.2.

Ces résultats sont standard et peuvent être démontrés à l'aide des méthodes usuelles. La partie (a) du lemme est valable même lorsque les frontières de Ω_1 et Ω_2 sont lipschitziennes.

Le résultat de la partie (b) est en fait un résultat de régularité. On a donc besoin de plus de régularité sur les ouverts. Il est vérifié dans le cadre des ouverts de classe C^2 considérés dans ce Chapitre. ■

Remarque 3.3.

En ce qui concerne la partie (a) du Lemme 3.1, on peut voir aisément que la fonction

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 & \text{dans } Q_1 \\ \theta_2 & \text{dans } Q_2 \end{cases}$$

vérifie

$$\theta \in C(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T ; L^2(\Omega))$$

puisque les conditions aux limites et de compatibilité (3.10) sont satisfaites.

Cependant, lorsqu'on est dans le cadre de régularité de la partie (b), même si

$$\theta_i \in C(0, T ; H^2(\Omega_i)) \text{ pour } i = 1, 2$$

il n'est pas vrai que

$$\theta \in C(0, T ; H^2(\Omega)).$$

En effet, d'après (3.15) on a

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

avec $\frac{a_2}{a_1} \neq 1$. Ceci montre que le gradient de θ présente un "saut" lorsqu'on traverse l'interface Σ_1 . ■

Dans le lemme suivant on donne l'identité de base qui sera utilisée dans le paragraphe suivant pour l'obtention des inégalités directe et inverse.

Lemme 3.2.

Soit $q = (q_k)_{k=1}^n$ un champ de vecteurs de classe $[W^{1,\infty}(\Omega)]^n$.

Alors pour chaque solution $\{\theta_1, \theta_2\}$ du problème (3.1), régulière au sens du paragraphe (b) du Lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad & \sum_{i=1,2} \left\{ (\theta'_i(t), q_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k}(t))_{\Omega_i} \right\}_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'_i|^2 - a_i |\nabla \theta_i|^2) dx dt + \\
 & + a_i \int_{\Omega_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dx dt \} + \\
 & + a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) \int_{\Sigma_1} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma - \frac{a_1}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\nabla \theta_1|^2 d\Sigma + \\
 & + \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\nabla \theta_2|^2 d\Sigma - \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \\
 & = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} f_i q_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dx dt.
 \end{aligned}$$

Remarque 3.4.

Les symboles $(\cdot, \cdot)_{\Omega_i}$ désignent les produits scalaires dans $L^2(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. C'est-à-dire,

$$(u, v)_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} u(x) v(x) dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega_i), \text{ pour } i = 1, 2. \quad \blacksquare$$

Démonstration.

On procède en plusieurs étapes.

Etape 1.

On multiplie l'équation correspondante à θ_1 par $q_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k}$. On intègre par parties dans Ω_1 et on obtient :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & (\theta'_1(t), q_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k})_{\Omega_1} |_0^T + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\theta'_1|^2 - a_1 |\nabla \theta_1|^2) dx dt \\ & + a_1 \int_{\Omega_1} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} dx dt + \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\theta'_1|^2 d\Sigma + \\ & + a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} d\Sigma - \frac{a_1}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\nabla \theta_1|^2 d\Sigma = \int_{\Omega_1} f_1 q_k \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Il faut tenir compte du fait que, sur Γ_1 , la normale v est dirigée vers l'intérieur de Ω_1 .

Avec les notations du Chapitre III on a

$$\nabla \theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial v} v + \nabla_\sigma \theta_1 \text{ sur } \Gamma_1$$

et on a donc

$$(3.19) \quad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} d\Sigma = \int_{\Sigma_1} [q_k v_k \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q \cdot \nabla_\sigma \theta_1] d\Sigma$$

où $q \cdot \nabla_{\sigma} \theta_1$ désigne le produit scalaire entre les vecteurs q et $\nabla_{\sigma} \theta_1$.

Etape 2.

On multiplie l'équation associée à θ_2 par $q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k}$ et en intégrant sur Q_2 on obtient :

$$(3.20) \quad (\theta'_2(t), q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k})_{H_2}|_0^T + \frac{1}{2} \int_{Q_2} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} [|\theta'_2|^2 - a_2 |\nabla \theta_2|^2] dx dt + \\ + a_2 \int_{Q_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} dx dt - \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\theta'_2|^2 d\Sigma + \\ - a_2 \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\Sigma + \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma_1} q_k v_k |\nabla \theta_2|^2 d\Sigma - \\ - \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \int_{Q_2} f_2 q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} dx dt.$$

On a tenu compte ici du fait que

$$\theta_2 = \theta'_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et donc

$$\nabla \theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial v} v \quad \text{sur } \Sigma.$$

On a d'autre part

$$(3.21) \quad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\Sigma = \int_{\Sigma_1} [q_k v_k \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial v} q \cdot \nabla_{\sigma} \theta_2] d\Sigma.$$

Etape 3.

On additionne les identités (3.18) et (3.20) et on obtient (3.17) en tenant compte de :

$$(i) \quad \theta_1 = \theta_2 \quad \text{sur } \Sigma_1 \text{ et donc } \theta'_1 = \theta'_2 \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad \text{Alors}$$

$$\int_{\Sigma_1} q_k v_k [|\theta'_1|^2 - |\theta'_2|^2] d\Sigma = 0 ;$$

(ii) $a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v}$ sur Σ_1 et donc, d'après (3.19) et (3.21), on a

$$\begin{aligned} a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} d\Sigma - a_2 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial v} q_k \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\Sigma = \\ = a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\theta_1 - \theta_2) d\Sigma = \\ = a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} q_k v_k \frac{\partial}{\partial v} (\theta_1 - \theta_2) d\Sigma = \\ = a_1 (1 - \frac{a_1}{a_2}) \int_{\Sigma_1} q_k v_k \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation homogène

$$\begin{aligned} \Phi''_i - \Delta \Phi_i = 0 & \quad \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2 \\ \Phi_i(0) = \Phi_i^0; \Phi'_i(0) = \Phi_i^1 & \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \\ (3.22) \quad \Phi_1 = \Phi_2 & \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ a_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ \Phi_2 = 0 & \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

et l'énergie associée

$$(3.23) \quad E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \{ |\Phi_i|^2_{\Omega_i} + a_i |\nabla \Phi_i(t)|^2_{\Omega_i} \} \quad \forall t \in [0, T]$$

où $|\cdot|_{\Omega_i}$ désigne aussi bien la norme dans $L^2(\Omega_i)$ que dans $(L^2(\Omega_i))^n$, pour $i = 1, 2$.

On a la *loi de conservation de l'énergie* suivante.

Lemme 3.3.

Pour toute solution faible $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ de (3.22) on a

$$(3.24) \quad E(t) = E_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \{ |\Phi_i^1|_{\Omega_i}^2 + a_i |\nabla \Phi_i(t)|_{\Omega_i}^2 \} \quad \forall t \in [0, T].$$

4. INEGALITES.

Dans ce paragraphe on donne les estimations *a priori* qui seront nécessaires dans l'application de HUM.

4.1. L'inégalité directe.

En ce qui concerne le problème (3.1) on a le résultat suivant.

Théorème 4.1.

Soit $T > 0$ quelconque. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution faible $\{\theta_1, \theta_2\}$ de (3.1) on ait

$$(4.1) \quad \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) \sum_{i=1,2} \{ \|\theta_i^0\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + |\theta_i^1|_{\Omega_i}^2 + \|f_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \}.$$

Démonstration.

On applique l'identité (3.17) avec un champ de vecteurs $h \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ tel que

$$(4.2) \quad \begin{aligned} h &= v \text{ sur } \Gamma \\ h &= 0 \text{ dans } \Omega_1. \end{aligned}$$

(L'existence de ce champ de vecteurs a été démontrée dans le paragraphe 3.1 du Chapitre I).

On obtient ainsi

$$(4.3) \quad \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \sum_{i=1,2} \left\{ (\theta_i(t), h_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k}(t))_{\Omega_i} \right\}_0^T + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (|\theta_i|^2 - a_i |\nabla \theta_i|^2) dx dt + a_i \int_{\Omega_1} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dx dt - \\ - \int_{\Omega_1} f_i h_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dx dt \}.$$

De (4.3) on tire aisément

$$(4.4) \quad \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) \sum_{i=1,2} \left\{ \|\theta_i\|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega_i))}^2 + \right. \\ \left. + \|\nabla \theta_i\|_{L^\infty(0,T; (L^2(\Omega_i))^n)}^2 + \|f_i\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega_i))} \|\nabla \theta_i\|_{L^\infty(0,T; (L^2(\Omega_i))^n)} \right\}$$

ce qui, combiné avec l'estimation (3.11), donne (4.1) pour les solutions régulières.

Par des arguments de densité standard on démontre que (4.1) est aussi vrai pour les solutions faibles. ■

Remarque 4.1.

Le théorème précédent montre que $\frac{\partial \theta_2}{\partial v} \in L^2(\Sigma)$ pour toute solution faible $\{\theta_1, \theta_2\}$.

Il s'agit donc d'un résultat de régularité. ■

Remarque 4.2.

La constante $C > 0$ de l'inégalité (4.1) est indépendante de T ; elle ne dépend que de $\|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega_2)}$ et des valeurs a_1, a_2 . ■

Comme conséquence immédiate de ce théorème on a l'inégalité directe suivante.

Corollaire 4.1. (L'inégalité directe)

Soit $T > 0$ quelconque. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution faible $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ de l'équation (3.22) on ait

$$(4.5) \quad \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \leq C(T+1) E_0. \quad \blacksquare$$

4.2. L'inégalité inverse.

Pour obtenir l'inégalité inverse on aura besoin de deux hypothèses supplémentaires, à savoir :

$$(4.6) \quad \Omega_1 \text{ est étoilé par rapport à } x^0 \in \Omega_1,$$

et

$$(4.7) \quad a_1 > a_2.$$

On définit $m(x) = x - x^0$. On observe que (4.6) est équivalent à

$$(4.8) \quad m \cdot v = m_k v_k \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

puisque v est orientée vers l'intérieur de Ω_1 .

On pose

$$R_1(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}_1} |m(x)| ; R_2(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}_2} |m(x)| ; R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|.$$

On a évidemment, puisque $x_0 \in \Omega_1$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$,

$$(4.9) \quad R_1(x^0) \leq R_2(x^0) = R(x^0).$$

On définit ensuite

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \Gamma(x^0) &= \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) > 0\}, \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[, \\ \Gamma^*(x^0) &= \Gamma \setminus \Gamma(x^0), \Sigma^*(x^0) = \Gamma^*(x^0) \times]0, T[. \end{aligned}$$

On a le résultat suivant.

Théorème 4.2. (L'inégalité inverse).

On suppose que (4.6) et (4.7) sont vérifiés. Alors, si $T > T(x^0) = 2 \frac{R(x^0)}{\sqrt{a_2}}$ pour toute solution faible $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ de (3.22) on a

$$(4.11) \quad (T - T(x^0)) E_0 \leq \frac{a_2 R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

Démonstration.

On applique l'identité (3.17) avec le champ de vecteurs $m(x) = x - x^0$.

On obtient

$$(4.12) \quad X_1 + X_2 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{n}{2} \int_{\Omega_i} [|\Phi_i|^2 - a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt + a_i \int_{\Omega_i} |\nabla \Phi_i|^2 dx dt \right\} + \\ + a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) \int_{\Sigma_1} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma - \\ - \frac{a_1}{2} \int_{\Sigma_1} m_k v_k |\nabla \Phi_1|^2 d\Sigma + \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma_1} m_k v_k |\nabla \Phi_2|^2 d\Sigma = \\ = \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

avec

$$(4.13) \quad X_i = (\Phi_i(t), m_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(t))_{\Omega_i} |_0^T, \quad i = 1, 2.$$

Par ailleurs

$$|\nabla \Phi_i|^2 = \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right|^2 + |\nabla_\sigma \Phi_i|^2 \quad \text{sur } \Sigma_1, \quad i = 1, 2$$

et

$$\left| \nabla_\sigma \Phi_1 \right|^2 = \left| \nabla_\sigma \Phi_2 \right|^2 ; \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 \quad \text{sur } \Sigma_1.$$

Alors, d'après (4.7) et (4.8),

$$(4.14) \quad a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \int_{\Sigma_1} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma - \frac{a_1}{2} \int_{\Sigma_1} m_k v_k |\nabla \Phi_1|^2 d\Sigma + \\ + \frac{a_2}{2} \int_{\Sigma_1} m_k v_k |\nabla \Phi_2|^2 d\Sigma = \\ = - \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \int_{\Sigma_1} m_k v_k |\nabla \sigma \Phi_1|^2 d\Sigma + \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \int_{\Sigma_1} m_k v_k \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \geq 0.$$

De (4.12) et (4.14) on déduit donc

$$(4.15) \quad X_1 + X_2 + \sum_{i=1,2} \left\{ \frac{n}{2} \int_{Q_i} [|\Phi_i|^2 - a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt + a_i \int_{Q_i} |\nabla \Phi_i|^2 dx dt \right\} \leq \\ \leq \frac{a_2 R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

On écrit

$$\frac{n}{2} \int_{Q_i} [|\Phi_i|^2 - a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt + a_i \int_{Q_i} |\nabla \Phi_i|^2 dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{Q_i} [|\Phi_i|^2 + a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt + \frac{(n-1)}{2} \int_{Q_i} [|\Phi_i|^2 - a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt$$

et d'après la loi de conservation de l'énergie on obtient

$$(4.16) \quad X_1 + X_2 + \frac{(n-1)}{2} [Y_1 + Y_2] + T E_0 \leq \frac{a_2 R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

avec

$$(4.17) \quad Y_i = \int_{Q_i} [|\Phi_i|^2 - a_i |\nabla \Phi_i|^2] dx dt, \quad i = 1, 2.$$

En multipliant l'équation correspondante à Φ_1 (resp. Φ_2) par Φ_1 (resp. Φ_2) et en intégrant dans Q_1 (resp. Q_2) on trouve

$$(4.18) \quad Y_1 = (\Phi'_1(t), \Phi_1(t))_{\Omega_1} |_0^T + a_1 \int_{\Sigma_1} -\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Phi_1 d\Sigma$$

et

$$(4.19) \quad Y_2 = (\Phi'_2(t), \Phi_2(t))_{\Omega_2} |_0^T - a_2 \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \Phi_2 d\Sigma$$

et donc, d'après les conditions de transmission,

$$(4.20) \quad Y_1 + Y_2 = \sum_{i=1,2} \{(\Phi'_i(t), \Phi_i(t))_{\Omega_i} |_0^T\}.$$

On obtient donc

$$(4.21) \quad Z_1 + Z_2 + TE_0 \leq \frac{a_2 R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma$$

avec

$$(4.22) \quad Z_i = (\Phi'_i(t), m_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(t) + \frac{(n-1)}{2} \Phi_i(t))_{\Omega_i} |_0^T, \quad i = 1, 2.$$

On démontre ensuite par la méthode habituelle que

$$(4.23) \quad |Z_1| \leq \frac{R_1(x^0)}{2\sqrt{a_1}} \{ |\Phi'_1(0)|_{\Omega_1}^2 + |\Phi'_1(T)|_{\Omega_1}^2 + a_1 (|\nabla \Phi_1(0)|_{\Omega_1}^2 + |\nabla \Phi_1(T)|_{\Omega_1}^2) \} - \frac{(n-1)\sqrt{a_1}}{4R_1(x^0)} \int_{\Gamma_1} [|\Phi_1(0)|^2 + |\Phi_1(T)|^2] d\Gamma.$$

et

$$(4.24) \quad |Z_2| \leq \frac{R_2(x^0)}{2\sqrt{a_2}} \{ |\Phi'_2(0)|_{\Omega_2}^2 + |\Phi'_2(T)|_{\Omega_2}^2 + a_2 (|\nabla \Phi_2(0)|_{\Omega_2}^2 + |\nabla \Phi_2(T)|_{\Omega_2}^2) \} + \frac{(n-1)\sqrt{a_2}}{4R_2(x^0)} \int_{\Gamma_2} [|\Phi_2(0)|^2 + |\Phi_2(T)|^2] d\Gamma.$$

On a alors (puisque $R_1(x^0) < R_2(x^0)$, $a_1 > a_2$) ,

$$(4.25) \quad |z_1 + z_2| \leq \frac{2R_2(x^0)}{\sqrt{a_2}} E_0 -$$

$$- \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{\sqrt{a_1}}{R_1(x^0)} - \frac{\sqrt{a_2}}{R_2(x^0)} \right) \int_{\Gamma_1} [|\Phi_2(0)|^2 + |\Phi_2(\tau)|^2] d\Gamma \leq$$

$$\leq \frac{2R_2(x^0)}{\sqrt{a_2}} E_0 = \frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_2}} E_0.$$

Combinant (4.21) et (4.25) on obtient (4.11). ■

Comme conséquence directe du Théorème 4.2 on a le critère d'unicité suivant.

Corollaire 4.2.

Supposons les hypothèses du Théorème 4.2 vérifiées. Alors, si $T > T(x^0) = \frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_2}}$ et $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ sont des solutions faibles de (3.22) telles que

$$\Phi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

on a $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. ■

Remarque 4.3.

Ce résultat d'unicité sera généralisé au paragraphe 7 à l'aide du Théorème de Holmgren. ■

5. LE RESULTAT PRINCIPAL DE CONTROLABILITE EXACTE.

Considérons le système d'évolution

$$y_i'' - a_i \Delta y_i = 0 \quad \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2$$

$$y_i(0) = y_i^0; \quad y_i'(0) = y_i^1 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$(5.1) \quad y_2 = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases}$$

$$y_1 = y_2 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$a_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial y_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1.$$

Les estimations obtenues dans le paragraphe précédent permettent de donner, à l'aide de HUM, des résultats de contrôlabilité exacte.

Avant d'énoncer le résultat principal de contrôlabilité exacte, il est opportun de faire quelques remarques. ■

Remarque 5.1.

Soit

$$(5.2) \quad H_r^1(\Omega_2) = \{ \varphi \in H^1(\Omega_2) / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \},$$

muni de la norme induite par $H^1(\Omega_2)$. On aura besoin dans la suite de l'espace V défini par

$$(5.3) \quad V = \{ (\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\Omega_1) \times H_r^1(\Omega_2) / \varphi_1 = \varphi_2 \text{ sur } \Gamma \}.$$

On vérifie aisément que

$$(5.4) \quad V \text{ est un sous-espace fermé de } H^1(\Omega_1) \times H_r^1(\Omega_2).$$

L'application

$$(5.5) \quad V \rightarrow H_0^1(\Omega) \mid \{ \varphi_1, \varphi_2 \} \rightarrow \varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{sur } \Omega_1 \\ \varphi_2 & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$

est un isomorphisme de V sur $H_0^1(\Omega)$.

Soit V' l'espace dual de V (non identifié à V). D'après l'identification de $V = H_0^1(\Omega)$ on a

$$(5.6) \quad V' = H^{-1}(\Omega).$$

Mais on peut aussi décrire V' comme un espace produit.

Puisque V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega_1) \times H_r^1(\Omega_2)$ on peut dire que

$$(5.7) \quad V' \text{ espace des restrictions des éléments de } (H^1(\Omega_1))' \times (H_r^1(\Omega_2))' \text{ à l'espace } V,$$

c'est-à-dire,

$$(5.8) \quad \forall S \in V', \exists \{ S_1, S_2 \} \in (H^1(\Omega_1))' \times (H_r^1(\Omega_2))' \text{ avec} \\ \langle S, \{ \varphi_1, \varphi_2 \} \rangle = \langle S_1, \varphi_1 \rangle + \langle S_2, \varphi_2 \rangle \quad \forall \{ \varphi_1, \varphi_2 \} \in V.$$

En outre

$$\forall \{ S_1, S_2 \} \in (H^1(\Omega_1))' \times (H_r^1(\Omega_2))', \text{l'application } S \text{ définie par} \\ (5.9) \quad \langle S, \{ \varphi_1, \varphi_2 \} \rangle = \langle S_1, \varphi_1 \rangle + \langle S_2, \varphi_2 \rangle \quad \forall \{ \varphi_1, \varphi_2 \} \in V, \\ \text{définit un élément } S \in V'.$$

Il est clair, puisque V n'est pas dense dans $H^1(\Omega_1) \times H_r^1(\Omega_2)$, que l'application

$$(5.10) \quad (H^1(\Omega_1))' \times (H_r^1(\Omega_2))' \rightarrow V' \text{ définie par } \{ S_1, S_2 \} \rightarrow S$$

n'est pas injective.

En fait V' est l'espace quotient de $(H^1(\Omega_1))' \times (H_r^1(\Omega_2))'$ par le noyau de l'opérateur
(5.10). ■

Remarque 5.2.

On va travailler avec des solutions faibles du problème (5.1). Elles sont définies par la méthode de transposition habituelle.

Considérons le problème transposé :

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \theta_i'' - a_i \Delta \theta_i &= f_i && \text{dans } Q_i, i = 1, 2, \\ \theta_i(T) &= 0; \theta_i'(T) = 0 && \text{dans } \Omega_i, i = 1, 2 \\ \theta_1 &= \theta_2; a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} && \text{sur } \Sigma_1 \\ \theta_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Supposons que $\{y_1, y_2\}$ est une solution régulière du problème (5.1). En multipliant l'équation qui correspond à y_1 (resp. à y_2) par θ_1 (resp. par θ_2) et en intégrant sur Q_1 (resp. sur Q_2) on obtient :

$$(5.12) \quad \int_{Q_1} y_1 f_1 dx dt = (y_1'(t), \theta_1(t))_{\Omega_1} |_0^T - (y_1(t), \theta_1'(t))_{\Omega_1} |_0^T + \\ + a_1 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial y_1}{\partial v} \theta_1 d\Sigma - a_1 \int_{\Sigma_1} y_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial v} d\Sigma$$

et

$$(5.13) \quad \int_{Q_2} y_2 f_2 dx dt = (y_2'(t), \theta_2(t))_{\Omega_2} |_0^T - (y_2(t), \theta_2'(t))_{\Omega_2} |_0^T - \\ - a_2 \int_{\Sigma_1} \frac{\partial y_2}{\partial v} \theta_2 d\Sigma + a_2 \int_{\Sigma_1} y_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial v} d\Sigma + a_2 \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta_2}{\partial v} d\Sigma.$$

Par addition

$$(5.14) \quad \sum_{i=1,2} \int_{Q_i} y_i f_i dx dt = \sum_{i=1,2} \{ - (y_i^1, \theta_i(0))_{\Omega_i} + (y_i^0, \theta_i'(0))_{\Omega_i} \} + a_2 \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta_2}{\partial v} d\Sigma.$$

La formulation faible du problème (5.1) est donc donnée par (5.14).

On va considérer des données initiales

$$y_i^0 \in L^2(\Omega_i), i = 1, 2 ; y_1^1 \in (H^1(\Omega_1))', y_2^1 \in (H_r^1(\Omega_2))' .$$

Dans ce cas le crochet $(y_1^1, \theta_1(0))_{\Omega_1}$ (resp. $(y_2^1, \theta_2(0))_{\Omega_2}$) désigne la dualité entre y_1^1 et $\theta_1(0)$ (resp. entre y_2^1 et $\theta_2(0)$) dans les espaces $(H^1(\Omega_1))'$ et $H^1(\Omega_1)$ (resp. $(H_r^1(\Omega_2))'$ et $H_r^1(\Omega_2)$).

Comme $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ sur Γ_1 , on aura une même solution $\{y_1, y_2\}$ du système pour chaque couple de données $\{y_1^0, y_2^0\}$ coïncidant au sens de V' . On aura une dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales pour la topologie de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times V'$. ■

Le résultat principal de contrôlability exacte est le suivant.

Théorème 5.1.

Soient Ω et Ω_1 deux domaines bornés de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontières Γ et Γ_1 de classe C^2 , $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. On suppose que Ω_1 est étoilé par rapport à $x^0 \in \bar{\Omega}_1$. Soit $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$.

On se donne deux constantes $a_1, a_2 > 0$ telles que $a_1 > a_2$ et un temps $T > T(x^0) = \frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_2}}$.

Alors, pour chaque ensemble de données initiales

$$(5.15) \quad y_i^0 \in L^2(\Omega_i), i = 1, 2 ; y_1^1 \in (H^1(\Omega_1))', y_2^1 \in (H_r^1(\Omega_2))'$$

il existe un contrôle

$$(5.16) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\} = \{y_1(v), y_2(v)\}$ du système (5.1) vérifie $y_1(T) = y_2(T) = y_1'(T) = y_2'(T) = 0$.

Démonstration.

On applique HUM.

On considère d'abord le système homogène :

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \Phi_i'' - a_i \Delta \Phi_i &= 0 && \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2 \\ \Phi_i(0) = \Phi_i^0; \Phi_i'(0) = \Phi_i^1 & && \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \\ \Phi_1 = \Phi_2; a_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} &= a_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} && \text{sur } \Sigma_1 \\ \Phi_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

avec des données initiales $\{\Phi_i^0, \Phi_i^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}_i) \times C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, $i = 1, 2$ vérifiant les conditions de compatibilité et aux limites,

$$(5.18) \quad \Phi_1^0 = \Phi_2^0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \Phi_2^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

On considère la norme

$$(5.19) \quad \|\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \right)^{1/2}$$

et on construit l'espace hilbertien

$$(5.20) \quad F = \text{complété des fonctions } \{\Phi_i^0, \Phi_i^1\} \in C^\infty(\Omega_i) \times C^\infty(\Omega_i), \quad i = 1, 2 \text{ vérifiant} \\ (5.18) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_F.$$

D'après les inégalités directe et inverse (Corollaire 4.1 et Théorème 4.2) on a

$$(5.21) \quad F = \{ \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in H^1(\Omega_1) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Omega_2) \text{ tels que} \\ \Phi_1^0 = \Phi_2^0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \Phi_2^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \}.$$

Soit F' le dual de F . On a donc

$$(5.22) \quad F' = \{ \{ \xi_1^0, \xi_1^1, \xi_2^0, \xi_2^1 \} \text{ tels que } \{ \xi_1^0, \xi_2^0 \} \in V' \text{ et } \xi_i^1 \in L^2(\Omega_i), i = 1, 2 \}$$

où V' désigne l'espace introduit dans le Remarque 2.1.

On considère ensuite le problème rétrograde :

$$\psi_i'' - a_i \Delta \psi_i = 0 \quad \text{dans } Q_i, i = 1, 2$$

$$\psi_i(T) = \psi'_i(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, i = 1, 2$$

$$(5.23) \quad \psi_1 = \psi_2, a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{cases}$$

Pour chaque solution $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ de (5.17) qui correspond à des données initiales dans F il existe une solution faible unique ψ de (5.3) telle que

$$(5.24) \quad \psi_i(0) \in L^2(\Omega_i), i = 1, 2 ; \{ \psi_1'(0), \psi_2'(0) \} \in V'.$$

La solution ψ du problème (5.23) est définie par la méthode de transposition. Dans le Théorème 5.2 ci dessous on démontrera entre autres la propriété (5.24).

On définit alors l'opérateur

$$(5.25) \quad \Lambda \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} = \{ \psi_1'(0), -\psi_1(0), \psi_2'(0), -\psi_2(0) \}$$

qui vérifie

$$(5.26) \quad \langle \Lambda \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \}, \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma.$$

Conformément à la théorie générale, Λ est un isomorphisme de F sur F' . (Bien sur, les

espaces F et F' et le problème rétrograde (5.23) ont été construits pour que l'identité (5.26) ait lieu).

Soient $\{y_i^0, y_i^1\}_{i=1,2}$ vérifiant (5.15). Alors, d'après (5.22),

$$(5.27) \quad \{y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0\} \in F'.$$

Alors l'équation

$$(5.28) \quad \wedge \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} = \{ y_1^1, -y_1^0, y_2^1, y_2^0 \}$$

admet une solution unique $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F$.

On définit ensuite le contrôle

$$v = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

qui vérifie, par construction de F , $v \in L^2(\Sigma(x^0))$. On a alors $\{y_1(v), y_2(v)\} = \{\psi_1, \psi_2\}$ de sorte que $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$. ■

Etudions maintenant brièvement l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes (5.1) et (5.23). D'après la réversibilité en t des équations considérées, on peut se ramener à l'étude du système

$$(5.29) \quad \begin{aligned} z_i'' - a_i \Delta z_i &= 0 && \text{dans } Q_i, i = 1, 2 \\ z_i(0) = z_i^0; z_i'(0) = z_i^1 & && \text{dans } \Omega_i, i = 1, 2 \\ z_1 = z_2, \quad a_1 \frac{\partial z_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial z_2}{\partial v} & && \text{sur } \Sigma_1 \\ z_2 = \begin{cases} v \\ 0 \end{cases} & && \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

avec

$$z_i^0 \in L^2(\Omega_i), i = 1, 2$$

$$(5.30) \quad \{ z_1^1, z_2^1 \} \in V'$$

$$v \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

On considère le problème transposé (5.11) et on dit que $\{ z_1, z_2 \}$ est solution faible de (5.29) si

$$(5.31) \quad \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} z_i f_i dx dt = \sum_{i=1,2} \{ - \langle z_i^1, \theta_i(0) \rangle_{\Omega_i} + z_i^0, \theta_i'(0) \}_{\Omega_i} + a_2 \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta_2}{\partial v} d\Sigma$$

$$\forall \{ \theta_i^0, \theta_i^1, f_i \} \in H^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \times L^1(0, T; L^2(\Omega_i)), i = 1, 2 \text{ tels que } \theta_1^0 = \theta_2^0$$

$$\text{sur } \Gamma_1, \theta_2^0 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

(Le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_1}$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_2}$) désigne la dualité entre $(H^1(\Omega_1))'$ et $H^1(\Omega_1)$ (resp. $(H_{\Gamma}^1(\Omega_2))'$ et $H_{\Gamma}^1(\Omega_2)$). ■

On a le résultat suivant.

Théorème 5.2.

Soient Ω et Ω_1 deux domaines bornés de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontières Γ et Γ_1 de classe C^2 . Soit $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ et $a_1, a_2, T > 0$.

Alors, pour chaque ensemble de données $\{ z_1^0, z_1^1, z_2^0, z_2^1, v \}$ vérifiant (5.30) il existe une solution unique $\{ z_1, z_2 \} = \{ z_1(x, t), z_2(x, t) \}$ de (5.29) (au sens (5.31)) telle que

$$(5.32) \quad z_i \in C(0, T; L^2(\Omega_i)), i = 1, 2$$

et

$$(5.33) \quad \{ z_1^1, z_2^1 \} \in C(0, T; V').$$

En outre,

(5.34) *l'application $\{ z_1^0, z_1^1, z_2^0, z_2^1, v \} \rightarrow \{ z_1, z_1^1, z_2, z_2^1 \}$ est linéaire continue dans les topologies correspondantes.*

Remarque 5.3.

La propriété (5.33) est équivalente, d'après ce qu'on a vu dans la Remarque 5.1, au fait que l'application $z'(t)$ définie par

$$(5.35) \quad \begin{aligned} < z'(t), \varphi > = & < z'_1(t), \varphi |_{\Omega_1} >_{\Omega_1} + < z'_2(t), \varphi |_{\Omega_2} >_{\Omega_2} \\ & \forall t \in [0, T], \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

vérifie

$$(5.36) \quad z' \in C(0, T ; H^{-1}(\Omega)).$$

On voit donc que le Théorème 5.2 généralise le Théorème 4.2 du Chapitre I où l'on avait $a_1 = a_2$. ■

Remarque 5.4.

Le résultat du Théorème 5.2 ne nécessite pas les hypothèses $a_1 > a_2$ et Ω_1 étoilé, car il s'agit d'une conséquence de l'inégalité directe. ■

Idée de la démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 4.2 du Chapitre I.

A partir de l'estimation (4.1) du Théorème 4.1 on obtient directement l'existence d'une solution unique $\{ z_1, z_2 \}$ de (5.31) avec

$$(5.37) \quad z_i \in L^\infty(0, T ; L^2(\Omega_i)), \quad i = 1, 2.$$

On a en plus la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Par les arguments de densité standard on démontre, en utilisant le fait que pour des données régulières la solution $\{ z_1, z_2 \}$ est régulière, qu'en fait

$$(5.38) \quad z_i \in C(0, T ; L^2(\Omega_i)), \quad i = 1, 2.$$

Ensuite, par la méthode du Théorème 4.2 du Chapitre I on établit l'estimation suivante

$$(5.39) \quad \sum_{i=1,2} \{ \| \theta_i(0) \|_{H^1(\Omega_i)} + \| \theta'_i(0) \|_{L^2(\Omega_i)} + \| \frac{\partial \theta_2}{\partial v} \|_{L^2(\Sigma)} \} \leq C \| f \|_{W^{-1,1}(0,T; H_0^1(\Omega))}$$

où $\{ \theta_1, \theta_2 \}$ désigne la solution de (5.11) avec

$$f_i = f|_{\Omega_i}, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad f = \frac{dg}{dt}, \quad g \in L^1(0, T ; H_0^1(\Omega)).$$

De cette estimation on déduit

$$(5.40) \quad \{ z'_1, z'_2 \} \in L^\infty(0, T ; V')$$

et encore par densité

$$(5.41) \quad \{ z'_1, z'_2 \} \in C(0, T ; V'). \quad \blacksquare$$

6. QUELQUES VARIANTES.

Dans ce paragraphe on donne, au moyen de la technique usuelle de changement de norme, d'autres résultats de contrôlabilité exacte.

6.1. Normes plus fortes.

Considérons la norme

$$(6.1) \quad \| \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \|_F = \{ \int_{\Sigma(t=0)} [\left| \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial v} \right|^2] d\Sigma \}^{1/2}.$$

D'après les inégalités directes et inverse on vérifie aisément que la norme $\| \cdot \|_F$ est équivalente à

$$(6.2) \quad \{ \|\Phi_1^0\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + \|\Phi_1^1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|\Phi_2^0\|_{H^2(\Omega_1)}^2 + \|\Phi_2^1\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \}^{1/2}.$$

Alors , si l'on définit l'espace

$$(6.3) \quad F = \text{complété des fonctions } \{\Phi_i^0, \Phi_i^1\} \in C^\infty(\bar{\Omega}_i) \times C^\infty(\bar{\Omega}_i), i = 1, 2, \text{ vérifiant}$$

$$\Phi_1^j = \Phi_2^j \text{ sur } \Gamma_1, j = 0, 1 ; a_1 \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial v} \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$\Phi_2^j = 0 \text{ sur } \Gamma, j = 0, 1$$

on obtient

$$(6.4) \quad F = \{ \{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in H^2(\Omega_1) \times H^1(\Omega_1) \times H^2 \cap H_\Gamma^1(\Omega_2) \times H_\Gamma^1(\Omega_2) /$$

$$\Phi_1^j = \Phi_2^j \text{ sur } \Gamma_1, \Phi_2^j = 0 \text{ sur } \Gamma; j = 0, 1; a_1 \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial v} \text{ sur } \Gamma_1 \}.$$

Dans ce cas , on a (cf. Remarque 5.1)

$$(6.5) \quad F' = \text{espace des restriction à } F \text{ des éléments de}$$

$$(H^2(\Omega_1))' \times (H^1(\Omega_1))' \times (H^2 \cap H_\Gamma^1(\Omega_2))' \times (H_\Gamma^1(\Omega_2))' .$$

En appliquant HUM on obtient aisément le résultat suivant.

Théorème 6.1.

Supposons les hypothèses du Théorème 5.1 vérifiées.

Alors , pour chaque ensemble de données

$$(6.6) \quad \{u_1^0, u_1^1, u_2^0, u_2^1\} \in [H^1(\Omega_1)]' \times [H^2(\Omega_1)]' \times [H_\Gamma^1(\Omega_2)]' \times [H^2 \cap H_\Gamma^1(\Omega_2)]'$$

il existe un contrôle

$$(6.7) \quad v \in (H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))))'$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\}$ de (5.1) vérifie $y_1(T) = y'_1(T) = y_2(T) = y'_2(T) = 0$. ■

Idée de la démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 5.1. On applique HUM. Le problème rétrograde qu'on considère est cette fois :

$$\psi''_i - a_i \Delta \psi_i = 0 \quad \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2$$

$$\psi_i(T) = \psi'_i(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$(6.8) \quad \psi_1 = \psi_2 ; \quad a_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} = a_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$\psi_2 = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_2'}{\partial \nu} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

$$\psi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ n'étant pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ et $(H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))))'$. ■

6.2. Normes plus faibles.

On a le résultat suivant :

Théorème 6.2.

Supposons les hypothèses du Théorème 5.1 vérifiées.

Alors, pour chaque ensemble de données $\{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\}$ tel que

$$\{y_1^0, y_2^0\} \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$$

$$(6.9) \quad y_1^0 = y_2^0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$y_i^1 \in L^2(\Omega_i), \quad i = 1,$$

il existe un contrôle

$$(6.10) \quad v \in H_0^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\}$ de (5.1) vérifie $y_1(T) = y'_1(T) = y_2(T) = y'_2(T) = 0$. ■

Idée de la démonstration.

Cette fois on applique la technique utilisée dans les Théorèmes 6.3 et 6.4 du Chapitre I.

On fait le choix

$$(6.11) \quad F = \{ \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} / \Phi_i^0 \in L^2(\Omega_i), \quad i = 1, 2 ; \{ \Phi_1^1, \Phi_2^1 \} \in V \}.$$

Alors

$$(6.12) \quad F' = \{ \{ \xi_1^0, \xi_1^1, \xi_2^0, \xi_2^1 \} / \xi_i^0 \in L^2(\Omega_i), \quad i = 1, 2 ; \{ \xi_1^1, \xi_2^1 \} \in V \}.$$

On définit

$$(6.13) \quad G = \text{espace parcouru par } \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \Big|_{\Sigma(x^0)} \text{ lorsque } \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \text{ parcourt } F$$

muni de la norme hilbertienne naturelle

$$(6.14) \quad \left\| \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \Big|_{\Sigma(x^0)} \right\|_G = \| \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \|_F.$$

En appliquant HUM on en déduit la contrôlability exacte des données

$$(6.15) \quad \{ y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0 \} \in F'$$

avec des contrôles

$$(6.16) \quad v \in G'.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$(6.17) \quad G' = H_0^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$$

c'est-à-dire que

$$(6.18) \quad G = H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma(x^0))).$$

Pour cela on introduit $\{x_1, x_2\}$ solution de

$$(6.19) \quad \begin{aligned} a_1 \Delta x_1 &= \Phi_1^1 && \text{dans } \Omega_1 \\ a_2 \Delta x_2 &= \Phi_2^1 && \text{dans } \Omega_2 \\ x_1 = x_2 ; \quad a_1 \frac{\partial x_1}{\partial \nu} &= a_2 \frac{\partial x_2}{\partial \nu} && \text{sur } \Gamma_1 \\ x_2 &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On a

$$(6.20) \quad x_1 \in H^1(\Omega_1), \quad x_2 \in H^1(\Omega_2), \quad x_1 = x_2 \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Si $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ est la solution de (5.17) qui correspond aux données $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\} \in F$, la fonction $\{w_1, w_2\}$ définie par

$$(6.21) \quad \begin{aligned} w_1(t) &= \int_0^t \Phi_1(\sigma) d\sigma + x_1 \\ w_2(t) &= \int_0^t \Phi_2(\sigma) d\sigma + x_2 \end{aligned}$$

est la solution de

$$(6.22) \quad \begin{aligned} w_i'' - a_i \Delta w_i &= 0 && \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2 \\ w_i(0) = x_i, \quad w_i'(0) &= \Phi_i^0 && \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \\ w_1 = w_2 ; \quad a_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu} &= a_2 \frac{\partial w_2}{\partial \nu} && \text{sur } \Sigma_1 \\ w_2 &= 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque $\{\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1\}$ parcourt F , $\{x_1, \Phi_1^0, x_2, \Phi_2^0\}$ parcourt

l'espace des fonctions de $H^1(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \times H_r^1(\Omega_2) \times L^2(\Omega_2)$ vérifiant $x_1 = x_2$ sur Γ_1 et donc, d'après les inégalités directe et inverse, $\frac{\partial w_2}{\partial v}$ parcourt $L^2(\Sigma(x^0))$.

On a d'autre part

$$(6.23) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w_2}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma$$

et donc $\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}$ parcourt $H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$.

On a ainsi démontré que $G = H^{-1}(0, T ; L^2(\Gamma(x^0)))$, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

7. QUELQUES COMMENTAIRES.

7.1. Existence d'une infinité de contrôles.

En utilisant les arguments de la Remarque 6.2 du Chapitre I on peut démontrer, pour chaque situation des paragraphes précédents où l'on avait contrôlabilité exacte, l'existence d'une infinité de contrôles ramenant le système à l'état d'équilibre. ■

Considérons, par exemple, la situation du Théorème 5.1. Dans ce cas on a :

pour chaque ensemble de données initiales

$$(7.1) \quad \{ y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1 \} \in L^2(\Omega_1) \times (H^1(\Omega_1))' \times L^2(\Omega_2) \times (H_r^1(\Omega_2))'$$

il existe une infinité de contrôles $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ ramenant le système à l'état d'équilibre à l'instant $T > T(x^0) = \frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_2}}$.

Autrement dit, l'ensemble des contrôles admissibles

$$(7.2) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v \in L^2(\Sigma(x^0)) / y_1(T; v) = y_1'(T; v) = y_2(T; v) = y_2'(T; v) = 0 \}$$

admet une infinité d'éléments pour chaque couple de données

$$\{ y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1 \} \in L^2(\Omega_1) \times (H^1(\Omega_1))' \times L^2(\Omega_2) \times (H_r^1(\Omega_2))'.$$

Le contrôle v donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique

$$(7.3) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U}_{ad} (cf. Chapitre VIII). ■

7.2. Les conséquences du Théorème de Holmgren.

Dans les chapitres précédents on a mentionné diverses applications du Théorème d'Holmgren à l'obtention de critères de contrôlabilité exacte.

En principe, le Théorème d'Holmgren s'applique à des équations aux dérivées partielles avec des coefficients analytiques. Par conséquent, il n'est pas question de l'appliquer directement au modèle étudié dans ce Chapitre. Cependant, on va voir que, grâce aux conditions de transmission, le Théorème de Holmgren fournit encore des critères d'unicité. ■

Considérons la situation où l'on a deux domaines bornés $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, à frontières Γ et Γ_1 de classe C^2 et tels que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. $\Omega_2 = \Omega / \bar{\Omega}_1$

Soient $a_1, a_2 > 0$.

On a le résultat suivant.

Théorème 7.1.

Il existe un temps T_0 qui dépend uniquement de $\Omega, \Omega_1, a_1, a_2$ tel que si Γ_0 est une partie ouverte non vide de Γ , $T > T_0$ et $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ une solution de

$$\Phi_i'' - a_i \Delta \Phi_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

$$(7.4) \quad \Phi_1 = \Phi_2 ; \quad a_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$\Phi_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

qui vérifie

$$(7.5) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$$

alors $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$.

Idée de la démonstration.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 8.2 du Chapitre I.

On applique d'abord le Théorème de Holmgren à l'équation qui correspond à Φ_2 et on voit que si T est assez grand on a, à partir de (7.5),

$$(7.6) \quad \Phi_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times]T_2, T - T_2[$$

avec $T_2 > 0$ qui dépend uniquement de la géométrie de Ω_2 et de a_2 .

D'après (7.6) et les conditions de transmission, on obtient

$$(7.7) \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]T_2, T - T_2[$$

et en appliquant le Théorème de Holmgren à Φ_1 on obtiendra

$$(7.8) \quad \Phi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times]T_1 + T_2, T - (T_1 + T_2)[$$

avec $T_1 > 0$ dépendant uniquement de la géométrie de Ω_1 et de a_1 .

D'où le résultat avec $T_0 = T_1 + T_2$. ■

Remarque 7.7.

Lorsque Ω est convexe on peut démontrer que

$$(7.9) \quad T_0 \leq \frac{2(\text{diamètre de } \Omega)}{\min(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})}.$$

Evidemment ces estimations peuvent être améliorées en fonction de la géométrie de Ω_1 et de la partie Γ_0 de frontière considérée. ■

Le résultat précédent montre donc que

$$(7.10) \quad \| \{ \Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1 \} \|_F = \left(\int_{\Sigma^0} \left| -\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \right)^{1/2}$$

pour $T > T_0$, définit une norme quelle que soit Γ_0 partie ouverte non vide de Γ .

En appliquant HUM on obtient le résultat suivant.

Théorème 7.2.

On suppose que les hypothèses du Théorème 7.1 sont vérifiées.

Alors, pour chaque ensemble de données initiales

$$(7.11) \quad \{ y_1^1, -y_1^0, y_2^1, -y_2^0 \} \in F'$$

où F' désigne le dual de l'espace F (complété des fonctions régulières vérifiant les conditions de compatibilité et aux limites naturelles, par rapport à la norme $\| \cdot \|_F$), il existe un contrôle

$$(7.12) \quad v \in L^2(\Sigma_0)$$

tel que la solution $\{ y_1(v), y_2(v) \}$ du système

$$y_i'' - a_i \Delta y_i = 0 \quad \text{dans } Q_i, \quad i = 1, 2$$

$$y_i(0) = y_i^0, \quad y_i'(0) = y_i^1 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

(7.13)

$$y_1 = y_2 ; \quad a_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} = a_2 \frac{\partial y_2}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma_1$$

$$\begin{aligned} y_2 &= v && \text{sur } \Sigma_0 \\ &= 0 && \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{aligned}$$

vérifie $y_1(T) = y_1'(T) = y_2(T) = y_2'(T) = 0$. ■

On voit donc que même lorsque les hypothèses

$a_1 > a_2$, Ω_1 étoilé

ne sont pas vérifiées, on a la contrôlability des données initiales appartenant à F' .

Dans le Théorème 5.1 on a démontré que lorsque $a_1 > a_2$, Ω_1 est étoilé par rapport à x^0 , $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ et $T > T(x^0) = \frac{2R(x^0)}{\sqrt{a_2}}$ on a

$$F = \{(\Phi_1^0, \Phi_1^1, \Phi_2^0, \Phi_2^1) \in H^1(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \times H_\Gamma^1(\Omega_2) \times L^2(\Omega_2) / \Phi_1^0 = \Phi_2^0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

La caractérisation ou l'obtention d'informations supplémentaires sur l'espace F et notamment l'étude de la dépendance par rapport aux paramètres a_1, a_2, T et Γ_0 est un problème ouvert. ■

8. PROBLEMES OUVERTS.

8.1. Quelle est la situation si, toutes choses égales par ailleurs, on a, dans le Théorème 5.1, $a_1 < a_2$?

La Remarque du N° 7.2 montre que "quelque chose" est possible dans ce cas, mais quel est précisément l'espace dans lequel on peut contrôler exactement ?

8.2. La deuxième partie du problème 8.1 est en fait un cas particulier du problème général suivant : se plaçant dans le cadre d'unicité du N° 7.2, quelles informations peut-on obtenir sur l'espace F ? (C'est le problème à la fin du N° 7).

8.3. Quelle est la situation lorsque l'on pas n'a pas d'hypothèse géométrique sur Ω_1 , i.e lorsque Ω_1 n'est pas étoilé ? Ici encore, on note que cette hypothèse *n'intervient pas* dans les résultats d'unicité basés sur le Théorème de Holmgren, et donc dans la définition des espaces F .

8.4. On peut considérer des questions analogues avec par exemple un contrôle du type Neumann sur Γ . Cette question est beaucoup moins difficile que les précédentes. Il s'agit plutôt

d'une situation dont la solution n'a pas été rédigée.

Il en va de même pour le problème suivant :

8.5. Contrôlabilité exacte des problèmes de transmission pour des équations du type Petrowsky.

8.6. Que donnent, dans la situation présente, les méthodes exposées dans l'Appendice II de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH ?

8.7. Le problème 8.1 est un cas (très) particulier du problème suivant : on considère l'équation d'état

$$(8.1) \quad y'' - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}) = 0,$$

où $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$(8.2) \quad y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x),$$

et

$$(8.3) \quad y = v \quad \text{sur } \Sigma \text{ (ou partie de } \Sigma).$$

Pour y^0, y^1, v dans des classes convenables, a-t-on contrôlabilité exacte (T assez grand ?)

On retrouvera des problèmes de ce type dans le Volume 2 de cet ouvrage, à propos de l'homogénéisation.

Chapitre VII

Contrôle interne

1. FORMULATION GENERALE DU PROBLEME. DESCRIPTION DE HUM.

Ce chapitre est consacré à l'étude du *problème de la contrôlabilité exacte avec un contrôle interne*, par distinction avec les cas étudiés jusqu'ici *de contrôle frontière*.

La méthode qu'on utilise consiste en une adaptation de la méthode HUM présentée dans la Chapitre II dans le cas du contrôle frontière et appliquée ensuite dans les chapitres précédents à l'étude de divers modèles particuliers.

Dans ce premier paragraphe on présente cette adaptation de HUM.

Dans le paragraphe 2 on étudie le problème "modèle" de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de Dirichlet. Les résultats et techniques présentés sont d'extension immédiate aux autres modèles considérés dans ce volume . On se contente ici d'exposer brièvement les idées et techniques principales sur cet exemple modèle pour éviter les longueurs.

Comme d'habitude, on termine le chapitre par une série de problèmes ouverts. ■

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ suffisamment régulière. Soit $T > 0$.

On considère un système d'évolution dont l'état $y = y(x,t)$ est gouverné par

l'équation

$$(1.1) \quad y'' + Ay = v \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

avec des *conditions initiales*

$$(1.2) \quad y(0) = y^0 ; \quad y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et des *conditions aux limites homogènes*

$$(1.3) \quad B_j y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\quad \text{pour } j = 1, \dots, m.$$

On suppose (comme au Chapitre II) que l'opérateur A est d'ordre $2m$, à coefficients réguliers indépendants de la variable temps t et uniformément elliptique dans Ω . De même, on suppose que les opérateurs frontière $\{B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ sont tels que le système $\{A, B_j\}_{1 \leq j \leq m}$ est symétrique et bien posé dans des espaces hilbertiens convenables (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1]).

La fonction v de l'équation (1.1) est le *contrôle du système*. Il s'agit d'un contrôle agissant *dans* Ω , donc *interne*. Ce contrôle peut être *distribué* ou *ponctuel* selon que le support en x du contrôle v est de mesure positive ou un ensemble fini de points.

Le problème de la contrôlabilité exacte du système (1.1)(1.2)(1.3) se formule d'une manière analogue au cas du contrôle frontière :

Etant donné un temps $T > 0$, pour des données initiales $\{y^0, y^1\}$ dans un espace de Hilbert convenable ; trouver un contrôle v tel que la solution $y = y(v)$ du système vérifie $y(T; v) = y^1(T, v) = 0$. ■

On s'intéresse tout particulièrement au cas où l'action du contrôle v est exercée dans un partie $\omega \times]0, T[$ du cylindre Q . On considérera donc des contraintes du type

$$(1.4) \quad v = 0 \quad \text{sur } \{\Omega \setminus \omega\} \times]0, T[$$

avec $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. ■

On considère d'abord le système homogène

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \Phi'' + A\Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) &= \Phi^1 && \text{dans } \Omega \\ B_j \Phi &= 0 && \text{sur } \Sigma, \text{ pour } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

avec des conditions initiales

$\{\Phi^0, \Phi^1\} \in [C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}), B_j] = \{ \text{espace des fonctions } C^\infty \text{ dans }$

$\bar{\Omega} \text{ telles que } B_j \Phi^0 = B_j \Phi^1 = 0 \text{ sur } \Gamma, j = 1, \dots, m \}.$

Soit $\chi_{\omega \times [0,T]}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\omega \times]0,T[$ et considérons le problème rétrograde

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \psi'' + A\psi &= -\Phi \chi_{\omega \times]0,T[} && \text{dans } Q \\ \psi(T) = \psi'(T) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ B_j \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma, \text{ pour } j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

On définit l'opérateur

$$(1.7) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$$

qui vérifie par construction

$$(1.8) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \int_0^T \int_{\omega} |\Phi|^2 dx dt.$$

Supposons que l'on ait le résultat d'unicité suivant

si Φ est une solution de (1.5) telle que

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Phi &\equiv 0 \text{ dans } \omega \times]0,T[\\ \text{alors} \\ \Phi &\equiv 0 \text{ dans } Q. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la semi-norme

$$(1.10) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F := \left(\int_0^T \int_{\omega} |\Phi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

est une norme dans $[C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}), B_j]$.

On construit alors l'espace

$$(1.11) \quad F = \text{complété de } [C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}), B_j] \text{ par rapport à la norme (1.10).}$$

D'après (1.8) on voit que \wedge est un isomorphisme de F sur F' (dual de F) et on déduit donc la contrôlabilité exacte des données

$$(1.12) \quad \{ y^1, -y^0 \} \in F'$$

avec un *contrôle* $v \in L^2(\omega \times]0, T[)$ donné par les équations

$$(1.13) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

$$(1.14) \quad v = -\Phi \chi_{\omega \times]0, T[}$$

où Φ désigne la solution de (1.5) associée aux données $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in F$ vérifiant (1.13). ■

On voit donc que de nouveau le résultat principal dont on a besoin est un résultat d'unicité. Dans une deuxième étape, le problème posé est l'étude et, si possible, la caractérisation en termes "classiques" des espaces F et F' . ■

On a déjà vu que le comportement du système par rapport à ce type de résultat d'unicité est différent en fonction du caractère hyperbolique ou non du système. Dans le cas hyperbolique, au moins lorsque $\omega \subset \Omega$, $\omega \neq \Omega$, pour qu'un résultat d'unicité du type (1.9) soit vérifié il est nécessaire que le temps T soit suffisamment grand. Par conséquent, on n'aura contrôlabilité exacte que pour des temps assez grands. Par contre, lorsque le système n'est pas hyperbolique (comme c'est le cas des modèles étudiés dans les N°s 3 et 4 du Chapitre IV) on peut avoir des critères d'unicité et donc des résultats de contrôlabilité exacte pour des temps arbitrairement petits.

Les techniques présentées dans le paragraphe 2 permettent, en particulier, d'obtenir

la contrôlabilité exacte interne en un temps arbitrairement petit, même avec $\omega \subset \Omega$, $\omega \neq \Omega$, pour les systèmes considérés aux paragraphes 3 et 4 du Chapitre IV.

Il est clair que, comme dans le cas du contrôle frontière, partant d'un résultat d'unicité du type (1.9), on peut aboutir à divers résultats de contrôlabilité exacte par changement de la norme $\|\cdot\|_F$ considérée dans (1.10). Il y a une infinité de choix possibles ! ■

Ces questions seront examinées dans le modèle considéré au N° 2. ■

2. EQUATION DES ONDES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET.

2.1. Orientation.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ lipschitzienne.

On considère l'équation

$$(2.1) \quad y'' - \Delta y = v \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

avec des conditions initiales

$$(2.2) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et la condition aux limites

$$(2.3) \quad y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (2.1)(2.2)(2.3).

On cherche à minimiser, d'une manière ou d'une autre, l'action du contrôle v sur le système et en particulier on s'intéresse à "minimiser" :

- le temps T de contrôlabilité ;
- le support du contrôle v en la variable spatiale x . ■

Il s'agit d'un système hyperbolique. Par conséquent à cause de la vitesse finie de propagation des ondes (= 1 dans ce cas), le temps de contrôlabilité dépendra de la "taille" du

support de v ou si l'on veut, de la plus grande distance entre les points de Ω et le support de v . Bien sur, pour contrôler le système il faut que l'action exercée par le contrôle v soit transmise à tout l'ouvert Ω . ■

On applique la méthode HUM présentée au paragraphe précédent.

On considère donc d'abord le système homogène

$$\Phi'' - \Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.4) \quad \Phi(0) = \Phi^0; \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

On cherche des critères d'unicité du type (1.9) pour ce système ainsi que des estimations a priori conduisant à l'identification des espaces F et F' .

On va appliquer la méthode des multiplicateurs.

2.2. Action sur tout l'ouvert Ω .

Dans ce paragraphe on présente un premier résultat qui sera ensuite raffiné. On suppose ici que l'on peut agir sur *tout* l'ouvert Ω .

On reprend les notations du Chapitre I. En particulier, on désigne par $|\cdot|$ la norme dans $L^2(\Omega)$ et dans $(L^2(\Omega))^n$.

On considère l'énergie associée au système (2.4)

$$(2.5) \quad E_0 = \frac{1}{2} \{ |\nabla\Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2 \}^{1/2}.$$

Lemme 2.1.

Soit $T > 0$. Alors la semi-norme

$$(2.6) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F := \{ \int_0^T \int_{\Omega} |\Phi'|^2 dx dt \}^{1/2} = \|\Phi'\|_{L^2(Q)}$$

est une norme, dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, équivalente à $E_0^{1/2}$.

Démonstration.

1) Voyons que $\|\cdot\|_F$ est une norme.

Si $\Phi' = 0$ dans Q , alors $\Phi^1 = 0$ et $\Phi(t,x) = \Phi^0(x) \quad \forall (t,x) \in Q$. Mais comme Φ est solution de (2.4) on a $\Delta\Phi^0 = 0$ avec $\Phi^0 \in H_0^1(\Omega)$ et donc $\Phi^0 = 0$.

2) D'après la loi de conservation de l'énergie, on voit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$(2.7) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F \leq C E_0^{1/2}.$$

On peut en fait prendre $C = \sqrt{2T}$.

3) On cherche maintenant l'estimation inverse.

On reprend ici une démonstration due à A. HARAUX [1].

On multiplie l'équation (2.4) par la fonction

$$\eta(x, t) = \varrho(t) \Phi(x, t)$$

avec

$$\varrho(t) = t^2(T-t)^2.$$

En intégrant sur Q on obtient

$$(2.8) \quad \int_Q \varrho(t) |\Phi'|^2 dx dt + \int_Q \varrho'(t) \Phi \Phi' dx dt = \int_Q \varrho(t) |\nabla \Phi|^2 dx dt$$

(on tient compte du fait que $\varrho(0) = \varrho(T) = 0$).

Par ailleurs on a, pour tout $\gamma > 0$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \left| \int_Q \varrho'(t) \Phi \Phi' dx dt \right| &\leq \gamma \int_Q \varrho(t) |\Phi|^2 dx dt + \frac{1}{4\gamma} \int_Q \frac{\varrho'(t)^2}{\varrho(t)} |\Phi'|^2 dx dt \leq \\ &\leq \gamma \int_Q \varrho(t) |\Phi|^2 dx dt + C(\gamma) \int_Q |\Phi'|^2 dx dt \end{aligned}$$

$$\text{avec } C(\gamma) = \frac{1}{4\gamma} \left\| \frac{|\varrho'(t)|^2}{\varrho(t)} \right\|_{L^\infty(0,T)}.$$

Soit λ_0^2 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, si $\gamma < \lambda_0^2$, d'après (2.8)(2.9) on a

$$(2.10) \quad \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_0^2}\right) \int_Q \varrho(t) |\nabla \Phi|^2 dx dt \leq \int_Q \varrho(t) |\Phi'|^2 dx dt + C(\gamma) \int_Q |\Phi'|^2 dx dt$$

(on tient compte du fait que $\lambda_0 |v| \leq |\nabla v| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$).

On a donc, pour $C > 0$ assez grand,

$$(2.11) \quad \int_Q \varrho(t) |\nabla \Phi|^2 dx dt \leq C \int_Q |\Phi'|^2 dx dt.$$

Par conséquent

$$(2.12) \quad \left(\int_0^T \varrho(t) dt \right) E_0 = \frac{1}{2} \int_Q \varrho(t) [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt \leq (\text{par (2.11)}) \leq \\ \leq C \int_Q |\Phi'|^2 dx dt.$$

Comme $\int_0^T \varrho(t) dt > 0$, (2.12) donne

$$(2.13) \quad E_0^{1/2} \leq C \| \{\Phi^0, \Phi^1\} \|_F. \quad \blacksquare$$

Par la technique habituelle de l'affaiblissement de la norme on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.2.

Soit $T > 0$. Alors, la norme

$$(2.14) \quad \| \{\Phi^0, \Phi^1\} \|_{F_1} = \left(\int_0^T \int_Q |\Phi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme

$$(2.15) \quad \{ |\Phi^0|^2 + \|\Phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \}^{1/2}$$

de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Démonstration.

Soient $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Soit $\chi \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \Delta \chi &= \Phi^1 && \text{dans } \Omega \\ \chi &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Alors, lorsque $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ parcourt $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\{\chi, \Phi^0\}$ parcourt $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

D'autre part, si $\Phi = \Phi(x, t)$ est la solution de (2.4) qui correspond aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$, la fonction

$$(2.17) \quad w(x, t) = \int_0^t \Phi(x, s) ds + \chi(x)$$

est la solution de (2.4) avec données initiales $\{\chi, \Phi^0\}$.

D'après le Lemme 2.1 la norme

$$\|w'\|_{L^2(\Omega)} = \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}$$

est équivalente à

$$\{ \|\chi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + |\Phi^0|^2 \}^{1/2}$$

qui est équivalente à (2.15), puisque $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. ■

Remarque 2.1.

On peut également démontrer que la norme

$$(2.18) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_{F_2} := \|\Phi''\|_{L^2(Q)}$$

est équivalente à

$$(2.19) \quad \left(\|\Phi^0\|_{H^2 \cap H_0^1(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Comme conséquence du Lemme 2.2, on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant

Théorème 2.1

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière lipschitzienne.

Alors, pour $T > 0$ donné quelconque et pour tout couple de données initiales

$$(2.20) \quad \{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(2.21) \quad v \in L^2(Q)$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.1)(2.2)(2.3) vérifie $y(T; v) = y'(T, v) = 0$. ■

Démonstration.

On applique la méthode HUM.

On résout d'abord le problème homogène

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.22) \quad \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0; \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

avec des conditions initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. (On obtient ici les mêmes

résultats en partant de $[C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}), B_j]$ avec les notations du N° 1)

On définit la norme hilbertienne

$$(2.23) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_{F_1} = (\int_Q |\Phi|^2 dx dt)^{1/2}.$$

Soit F_1 l'espace complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{F_1}$. D'après le Lemme 2.2 on a

$$(2.24) \quad F_1 = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

On considère le problème "rétrograde"

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= -\Phi && \text{dans } Q \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Lorsque $\Phi \in L^2(Q)$, il existe une solution unique ψ de (2.25) dans la classe $C(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T ; L^2(\Omega))$ (cf. Lemme 3.6, Chapitre I).

On définit ensuite l'opérateur

$$(2.26) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}$$

qui vérifie

$$(2.27) \quad \langle \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\}, \{\Phi^0, \Phi^1\} \rangle = \int_Q |\Phi|^2 dx dt.$$

Par conséquent, Λ est un isomorphisme de F_1 sur son dual F_1' , c'est-à-dire :

$$(2.28) \quad \Lambda \text{ est un isomorphisme de } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \text{ sur } L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Pour chacune des données initiales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ l'équation

$$(2.29) \quad \Lambda \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

a donc une solution unique

$$(2.30) \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

et le contrôle

$$(2.31) \quad v = -\Phi \in L^2(Q)$$

(où Φ désigne la solution de (2.22) associée à $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in F_1$, vérifiant (2.29)) est tel que $y(T; v) = y'(T, v) = 0$. ■

Remarque 2.2.

La solution $y = y(v)$ du système (2.1)(2.2)(2.3) vérifie

$$(2.32) \quad y \in C(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T ; L^2(\Omega)).$$

■

Remarque 2.3.

On a démontré la contrôlabilité exacte du système en un temps *arbitrairement petit*. Ceci n'est pas en contradiction avec le caractère hyperbolique du système car *on agit sur tout l'ouvert Ω* . ■

Remarque 2.4.

Au moins *formellement* le résultat précédent est évident.

On construit en effet une fonction w dans $\Omega \times (0, T)$ telle que $w(x, 0) = y^0(x)$, $w'(x, 0) = y'(x)$, $w(x, T) = w'(x, T) = 0$ dans Ω , $w = 0$ sur $\Gamma \times (0, T)$.

Et cela est possible avec $T > 0$ quelconque. Par les théorèmes de traces habituels (cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [1], Vol. 1), on peut choisir w vérifiant

$$w \in L^2(0, T ; H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad w' \in L^2(0, T ; H^{1/2}(\Omega)),$$

$$w'' \in L^2(0, T ; H^{-1/2}(\Omega)).$$

On prend ensuite

$$v = w'' - \Delta w.$$

Mais cela *ne donne pas* $v \in L^2(Q)$. On n'obtient donc "pas tout à fait" le résultat par une simple application de théorèmes de traces ! ■

Remarque 2.5.

Le résultat est vérifié sans autre hypothèse de régularité sur Ω que Γ lipschitzienne. ■

Remarque 2.6.

Le Théorème 2.1 résulte du Lemme 2.2 et HUM – On peut aussi bien appliquer le Lemme 2.1. On obtient alors :

Théorème 2.2.

Soit Ω comme au Théorème 1.1. Soit $T > 0$ donné quelconque.

Alors pour tout couple

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe $v \in [H^1(0, T ; L^2(\Omega))]'$ tel que la solution $y = y(v)$ de (2.1)(2.2)(2.3) vérifie $y(T ; v) = y'(T ; v) = 0$. ■

Remarque 2.7.

En appliquant l'estimation de la Remarque 2.1 on peut démontrer qu'à des données

$$\{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'$$

correspondent des contrôles

$$v \in [H^2(0, T ; L^2(\Omega))]'. ■$$

2.3. Action sur un voisinage du bord.⁽¹⁾

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des résultats de contrôlabilité exacte quand le contrôle v agit uniquement *sur un voisinage du bord ou d'une partie du bord.* ■

On prend ω voisinage de $\Gamma_0 \subset \Gamma$ (cf. Fig.1) et on considère l'expression

$$\left\{ \int_0^T \int_{\omega} |\Phi|^2 dx dt \right\}^{1/2}.$$

Si cette expression est nulle, alors $\Phi = 0$ dans $\omega \times]0, T[$ et donc

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[.$$

Si T est suffisamment grand, d'après les résultats d'unicité du Chapitre I, on a $\Phi = 0$. Il s'agit donc d'une norme et on peut appliquer HUM. ■

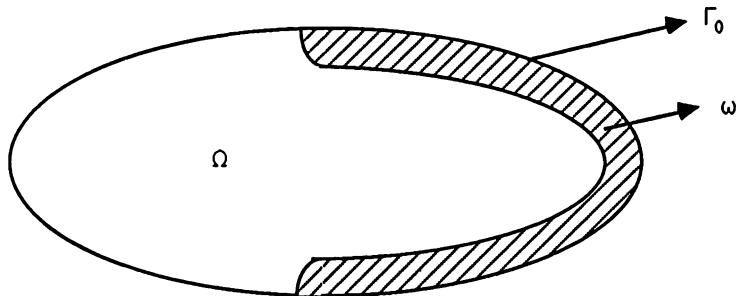


Figure 1

On suppose que le domaine Ω a une frontière Γ de classe C^2 .

On reprend les notations des chapitres précédents.

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque on définit

⁽¹⁾ Les résultats de ce N° sont dûs à E. ZUAZUA.

$$m(x) = x - x^0, \quad \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) > 0\},$$

(2.33) $\Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0); \quad \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times]0, T[,$

$$\Sigma^*(x^0) = \Gamma^*(x^0) \times]0, T[, \quad R(x^0) = \max_{x \in \Gamma} |m(x)|.$$

On considère ensuite, pour $\varepsilon > 0$ donné, les ensembles

$$(2.34) \quad \mathcal{O}_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Gamma(x^0)} B(x, \varepsilon); \quad \omega_\varepsilon = \mathcal{O}_\varepsilon \cap \Omega$$

où $B(x, \varepsilon)$ désigne la boule de centre x et de rayon ε dans \mathbb{R}^n (cf. Fig 2).

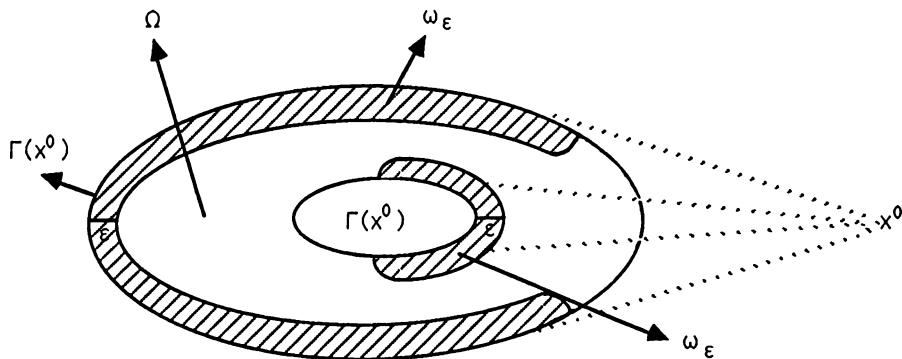


Figure 2

Notre objectif est maintenant de montrer que $\omega = \omega_\varepsilon$ étant choisi comme ci dessus, $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement petit, alors pour $T > 0$ assez grand – et indépendant de ε – (en fait $T > 2R(x^0)$) alors $\{\int_0^T \int_\omega [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] dx dt\}^{1/2}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

L'estimation de départ est la suivante :

Si $T > 2R(x^0)$,

$$(T - 2R(x^0)) E_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \quad (2.35)$$

pour toute solution Φ de (2.4) qui correspond à des données

$$\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Cette estimation a été démontrée dans le Théorème 5.1 du Chapitre I.

A partir de (2.35) on obtient aisément le

Lemme 2.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^2 . Soit

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $T > T(x^0) = 2R(x^0)$. Soit σ un voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $\omega = \sigma \cap \Omega$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.36) \quad E_0 \leq C \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt, \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Démonstration.

Soit $\alpha > 0$ tel que $T - 2\alpha > T(x^0)$. D'après (2.35) on a, pour $C > 0$ assez grand,

$$(2.37) \quad E_0 \leq C \int_{\alpha}^{T-\alpha} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Il reste donc à démontrer l'estimation

$$(2.38) \quad \int_{\alpha}^{T-\alpha} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \leq C \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt.$$

On reprend la méthode des multiplicateurs et on applique l'identité (3.51) du

Chapitre I avec le choix

$$(2.39) \quad \sigma(x, t) = t(T-t)h(x)$$

où $h \in [C^1(\bar{\Omega})]^n$ est le champ de vecteurs introduit dans la Remarque 3.2 du Chapitre I qui vérifie

$$(2.40) \quad h \cdot v = 1 \text{ sur } \Gamma(x^0), \quad h \cdot v \geq 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \sup \{ |h| \} \subset \omega.$$

On obtient

$$(2.41) \quad \int_{\alpha}^{T-\alpha} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Gamma dt \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \sigma \cdot v \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Gamma dt \\ \leq C(\omega) \int_0^T \int_{\omega} [| \Phi' |^2 + | \nabla \Phi |^2] dx dt.$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.8.

Pour $T > T(x^0)$ et $\alpha > 0$, avec $T - 2\alpha > T(x^0)$, fixés, la constante $C(\omega)$ de (2.41) ne dépend que de ω . Il s'agit en fait d'une fonction de $\|\nabla h\|_{L^\infty(\omega)}$.

Lorsque $\omega = \omega_\varepsilon$, ω_ε étant défini par (2.34), alors on a $\|\nabla h_\varepsilon\|_{L^\infty(\omega)} \sim C/\varepsilon$ et par conséquent $C(\omega_\varepsilon) \sim C/\varepsilon$.

On peut vérifier aisément que cette estimation est *optimale*. En effet, considérons le cas de la dimension $n = 1$, i.e $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$. Soit $x^0 = 1$. On a alors $\Gamma(x^0) = \{0\}$.

Soit $\omega_\varepsilon =]0, \varepsilon[$ et prenons la solution $\Phi(x, t) = \sin \pi t \sin \pi x$. On a

$$E_0 = \frac{\pi^2}{4}$$

et d'autre part

$$\int_0^T \int_0^\varepsilon [| \Phi' |^2 + | \frac{\partial \Phi}{\partial x} |^2] dx dt = \frac{\pi^2 T}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \sin 2\pi T \sin(2\pi \varepsilon) = O(\varepsilon), \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par contre le temps $T(x^0)$ pour lequel l'estimation (2.36) est vérifiée ne dépend pas de la taille du voisinage ω_ε (i.e de ε), il ne dépend que de $\Gamma(x^0)$. ■

Remarque 2.9.

Evidemment

$$(2.42) \quad \exists \ C > 0 / \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] \ dx \ dt \leq C E_0 .$$

On peut prendre, en fait, $C = 2T$.

De (2.36) et (2.42) on déduit l'équivalence des normes $E_0^{1/2}$ et

$$\{ \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] \ dx \ dt \}^{1/2}$$

lorsque $T > T(x^0)$. ■

A partir du lemme précédent on peut obtenir l'estimation suivante.

Lemme 2.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ de classe C^2

Soient $x^0 \in \Omega$, ω voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ dans Ω et $T > T(x^0)$ quelconques.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.43) \quad E_0 \leq C \int_0^T \int_{\omega} \{ |\Phi'|^2 + |\Phi|^2 \} \ dx \ dt \quad \forall \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Démonstration.

Considérons le cas où $\omega = \omega_\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Soit $\hat{\omega} = \omega_{\varepsilon/2}$.

On fixe $\alpha > 0$ tel que $T - 2\alpha > 2R(x^0)$. D'après le Lemme 2.1 on a pour $C > 0$ assez grand

$$(2.44) \quad E_0 \leq C \int_{\alpha}^T \int_{\hat{\omega}} [|\Phi'|^2 + |\nabla \Phi|^2] dx dt .$$

(On rappelle que $C = O(1/\varepsilon)$).

On considère ensuite une fonction

$$\varphi_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\mathcal{O}_\varepsilon)$$

(\mathcal{O}_ε étant défini comme dans (2.34)), qu'on note φ et telle que

$$(2.45) \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{dans } \mathcal{O}_\varepsilon, \quad \varphi = 1 \quad \text{dans } \hat{\omega} = \omega_{\varepsilon/2}.$$

Il est clair que l'on peut prendre φ de sorte que

$$(2.46) \quad \left\| \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathcal{O}_\varepsilon)} = 0 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right).$$

En effet, on peut prendre par exemple

$$(2.47) \quad \varphi = \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathcal{O}_{\varepsilon/2} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon - d(x, \partial \omega_{\varepsilon/2}))^2 & \text{dans } \mathcal{O}_\varepsilon \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon/2}. \end{cases}$$

où $d(x, \partial \omega_{\varepsilon/2})$ désigne la distance de x à la frontière $\partial \omega_{\varepsilon/2}$.

On reprend la méthode des multiplicateurs du Lemme 2.2, cette fois avec

$$(2.48) \quad \xi(x, t) = t(T-t) \varphi(x) \Phi(x, t).$$

On note $\zeta(t) = t(T-t)$.

En multipliant l'équation (2.4) par ξ et intégrant dans Q on obtient

$$(2.49) \quad \int_0^T \int_{\Omega} [\zeta(t) \varphi(x) |\Phi'|^2 + \zeta'(t) \varphi(x) \Phi \Phi'] dx dt = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \zeta(t) \varphi(x) |\nabla \Phi|^2 + \zeta(t) \Phi \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \Phi] dx dt .$$

On a d'autre part, pour tout $\gamma > 0$,

$$(2.50) \quad \left| \int_0^T \int_{\Omega} \zeta(t) \Phi \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \Phi \, dx \, dt \right| \leq \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \zeta(t) |\varphi(x)| |\nabla \Phi|^2 \, dx \, dt + \\ + \frac{1}{4\gamma} \int_0^T \int_{\Omega} \zeta(t) \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{\varphi(x)} |\Phi|^2 \, dx \, dt.$$

En combinant (2.44), (2.49) et (2.50) pour $\gamma < 1$, on obtient, pour $C > 0$ assez grand, l'estimation (2.43) où l'ordre de C est $C = O(1/\epsilon^3)$. ■

On peut vérifier aisément, sur le même exemple que dans la Remarque 2.8, que cette estimation est optimale. ■

A partir du Lemme 2.4 on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.3.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2 .

Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ω voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $T > T(x^0)$ quelconques.

Alors, quel que soit le couple de conditions initiales

$$(2.51) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(2.52) \quad v \in [H^1(0, T ; L^2(\omega))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (2.1) (2.2) (2.3) vérifie
 $y(T ; v) = y'(T ; v) = 0$. ■

Remarque 2.11.

Le fait que le contrôle v appartienne à un espace de fonctions définies sur $\omega \times]0, T[$ doit être interprété au sens de la contrainte

$$(2.53) \quad v = 0 \quad \text{sur } \{\Omega \setminus \omega\} \times]0, T[. \blacksquare$$

Démonstration.

On applique HUM.

On résout donc d'abord le système homogène

$$(2.54) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta \Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Phi(0) &= \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On considère ensuite le problème "rétrograde"

$$(2.55) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= \{-\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\Phi')\} \chi_{\omega \times]0, T[} && \text{dans } Q \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 && \text{dans } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

où $\chi_{\omega \times]0, T[}$ désigne la fonction caractéristique de $\omega \times]0, T[$.

On note que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}(\Phi')$ n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\omega))$ et son dual $[H^1(0, T ; L^2(\omega))]'$, i.e. de sorte que

$$(2.56) \quad \langle \frac{\partial}{\partial t}(\Phi'), w \rangle = - \int_0^T \int_{\omega} \Phi' w' dx dt \quad \forall w \in H^1(0, T ; L^2(\omega)).$$

La solution ψ du système (2.55) est définie par la méthode de transposition. La fonction ψ est solution du problème si

$$(2.57) \quad \begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \psi f dx dt - (\psi'(0), \theta^0) + (\psi(0), \theta^1) &= \int_0^T \int_{\omega} [\Phi \theta + \Phi' \theta'] dx dt \\ \forall \{\theta^0, \theta^1, f\} &\in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T ; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

où θ désigne la solution du problème transposé

$$(2.58) \quad \begin{aligned} \theta'' - \Delta \theta &= f && \text{dans } Q \\ \theta &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \theta(0) &= \theta^0, \theta'(0) = \theta^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Par la méthode habituelle on peut démontrer qu'il existe une solution unique $\psi = \psi(x, t)$ de (2.55) au sens de (2.57) et telle que

$$(2.59) \quad \begin{aligned} \psi &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \psi(0) &\in L^2(\Omega), \psi'(0) \in H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

On définit donc l'opérateur

$$(2.60) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ \psi'(0), -\psi(0) \}$$

qui envoie $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En appliquant (2.59) à $\theta = \Phi$ on obtient

$$(2.61) \quad \langle \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \}, \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \rangle = \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi|^2 + |\Phi'|^2] dx dt$$

et donc, d'après le Lemme 2.4, on voit que \wedge est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Alors, pour chaque couple de données

$$\{ y^0, y^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe une solution unique $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ du problème

$$\wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

et le contrôle

$$v = \left\{ -\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') \right\} \chi_{\omega \times]0, T[}$$

répond à la question . ■

Remarque 2.12.

Le temps de contrôlabilité $T(x^0) = 2 R(x^0)$ ne dépend pas de la taille du voisinage ω de $\Gamma(x^0)$. Ceci est bien conforme au bon sens , puisque , d'après ce qu'on a vu au Chapitre I , le temps $T(x^0)$ est suffisant pour contrôler le système avec action sur la partie du bord $\Gamma(x^0)$. ■

Remarque 2.13.

Le Théorème 2.3 reste valable lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^n , sans autre hypothèse de régularité supplémentaire sur le bord. En effet, d'après les résultats du Chapitre I l'estimation (2.34) est vérifiée dans ce cas et les démonstrations précédentes s'appliquent.

D'après les résultats de P. GRISVARD mentionnés dans le Chapitre I , l'estimation (2.34) est aussi vérifiée lorsque Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 ou un polyèdre de \mathbb{R}^3 et le Théorème 2.3 s'applique donc dans cette situation. ■

Remarque 2.14.

La méthode utilisée dans la démonstration du Théorème 2.3 et les lemmes précédents est générale.

Supposons que Γ_0 , partie ouverte non vide de Γ , et $T_0 > 0$, soient tels que l'on ait, pour tout $T > T_0$ (cf. l'Appendice II de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH pour des conditions suffisantes)

$$(2.62) \quad \exists C > 0 / E_0 \leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \quad \forall \{\Phi^0, \Phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Alors, si $T > T_0$ et ω est un voisinage quelconque de $\overline{\Gamma_0}$ dans Ω , pour chaque couple de données initiales

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$v \in [H^1(0, T ; L^2(\omega))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

2.4. Changement de normes.

On peut obtenir une infinité de résultats de contrôlabilité exacte par la technique usuelle de *renforcement* ou *d'affaiblissement des normes*.

On donne ici deux exemples. ■

Normes plus fortes.

On a le résultat suivant.

Théorème 2.4.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2 .

Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ω voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.63) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times (H^2 \cap H_0^1(\Omega))'$$

il existe un contrôle

$$(2.64) \quad v \in [H^2(0, T ; L^2(\omega))]'$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

On applique HUM.

On observe que la norme

$$(2.65) \quad \| \{ \Phi^0, \Phi^1 \} \|_F := \left\{ \int_0^T \int_{\omega} [|\Phi'|^2 + |\Phi''|^2] dx dt \right\}^{1/2}$$

est, sur l'espace de données initiales $\{ \Phi^0, \Phi^1 \} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$ telles que $\Phi^0 = \Phi^1 = 0$ sur Γ , équivalente à

$$\{ |\Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \}^{1/2}.$$

Par conséquent, l'espace F complété des données initiales régulières vérifiant $\Phi^0 = \Phi^1 = 0$ sur Γ coïncide avec $(H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.

On considère ensuite le problème rétrograde

$$(2.66) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Phi') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'') \right\} \chi_{\omega \times]0, T[} \quad \text{dans } Q \\ \psi(T) &= \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \psi &= 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

la dérivée $\frac{\partial}{\partial t} (\Phi')$ (resp. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi'')$) étant prise au sens de la dualité entre $H^1(0, T ; L^2(\omega))$ (resp. $H^2(0, T ; L^2(\omega))$) et son dual.

On conclut la démonstration par les arguments habituels. ■

Affaiblissement des normes.

On a le résultat suivant.

Théorème 2.5.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2 .

Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ω voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $T > T(x^0)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.67) \quad \{ y^0, y^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(2.68) \quad v \in L^2(\omega \times]0, T[)$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système (2.1)(2.2)(2.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Démonstration.

Cette fois on fixe l'espace

$$(2.69) \quad F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

Soient $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $x \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$(2.70) \quad \begin{aligned} \Delta x &= \Phi^1 && \text{dans } \Omega \\ x &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

On observe que lorsque $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ parcourt $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\{x, \Phi^0\}$ parcourt $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Soit $\Phi = \Phi(x, t)$ la solution de (2.54) associée aux données $\{\Phi^0, \Phi^1\}$. Alors

$$(2.71) \quad w(t) = \int_0^t \Phi(s) ds + x$$

est la solution de (2.54) qui correspond aux données $\{x, \Phi^0\}$.

D'après le Lemme 2.4, l'application

$$(2.72) \quad H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^1(0, T ; L^2(\omega)) \mid \{x, \Phi^0\} \rightarrow w$$

est un isomorphisme.

Comme $w' = \Phi$, on voit que

$$(2.73) \quad L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\omega \times]0, T[) \mid \{\Phi^0, \Phi^1\} \rightarrow \Phi$$

est aussi un isomorphisme.

On considère le problème rétrograde

$$\begin{aligned} \psi'' - \Delta\psi &= -\Phi && \text{dans } Q \\ (2.74) \quad \psi(T) &= \psi'(T) = 0 && \text{dans } \Omega \\ \psi &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

et on conduit la démonstration par la méthode habituelle. ■

Remarque 2.15.

Les résultats précédents restent valables lorsque Ω est un domaine borné et *convexe* de \mathbb{R}^n , sans autre hypothèse supplémentaire. ■

2.5. Quelques commentaires.

2.5.1. Existence d'une infinité de contrôles.

Dans chaque situation où l'on a démontré la contrôlabilité exacte on peut démontrer qu'en fait, pour chaque couple de données initiales contrôlables il existe une infinité de contrôles ramenant le système à l'état d'équilibre.

Le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle quadratique correspondante sur l'ensemble des contrôles admissibles. ■

2.5.2. Les conséquences du Théorème de Holmgren.

A partir des résultats du paragraphe 8 du Chapitre I on peut déduire aisément le critère d'unicité suivant.

Lemme 2.5.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, de frontière Γ lipschitzienne.

Il existe un temps $T_0 = T_0(\Omega) > 0$ tel que si $T > T_0$, ω est un sous-ensemble ouvert non vide de Ω et $\Phi = \Phi(x, t)$ est une solution de (2.54) vérifiant

$$\Phi = 0 \text{ dans } \omega \times [0, T[$$

alors $\Phi = 0$. ■

On notera bien que $T_0(\Omega)$ est *indépendant* de ω et dépend seulement de Ω . ■

On voit donc que la semi-norme

$$\| \{\Phi^0, \Phi^1\} \|_F := \left(\int_0^T \int_{\omega} |\Phi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2}$$

définit une norme sur l'espace des données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Soit F le complété de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à cette norme.

En appliquant HUM on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.6.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n \geq 1$, de frontière Γ lipschitzienne.

Soit ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω et $T > T_0(\Omega)$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.75) \quad \{y^1, -y^0\} \in F'$$

il existe un contrôle

$$(2.76) \quad v \in L^2(\omega \times [0, T[)$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.1)(2.2)(2.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$. ■

Remarque 2.16.

On a vu que lorsque ω est un voisinage de $\overline{\Gamma(x^0)}$ et $T > 2R(x^0)$, $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

L'étude de l'espace F et en particulier de sa dépendance par rapport à T et ω dans la situation générale du théorème précédent est un problème ouvert. Cf. Problème 3.3 et 3.6 ci-après.

Le cas où Ω est un carré de \mathbb{R}^2 a été étudié dans A. HARAUX [2]. Le cas où Ω est une boule a été traité dans J. LAGNESE [4]. ■

2.5.3. Contrôle ponctuel.

Une question intéressante et largement ouverte est celle du contrôle ponctuel.

Dans le théorème précédent on a vu la contrôlabilité exacte dans un certain espace hilbertien F' . Que se passe-t-il si l'on remplace l'ensemble ω par un seul point $b \in \Omega$ ou par un nombre fini de points $\{b_j\}_{1 \leq j \leq m} \subset \Omega$? ■

Dans le cas de la dimension $n = 1$ la question est simple.

Soit $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$. Considérons le problème homogène

$$(2.77) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 0 && \text{dans }]0, 1[\times]0, T[\\ \Phi(0, t) &= \Phi(1, t) = 0 && \forall t \in]0, T[\\ \Phi(0) &= \Phi^0 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0) = \Phi^1 && \text{dans }]0, 1[. \end{aligned}$$

On développe les données initiales $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ en série de Fourier :

$$\Phi^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x$$

(2.78)

$$\Phi^1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x .$$

Alors la solution $\Phi = \Phi(x, t)$ est donnée par

$$(2.79) \quad \Phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi t + \frac{b_k}{\pi k} \sin k\pi t) \sin k\pi x.$$

Soit $b \in]0, 1[$ un *point stratégique*, c'est-à-dire, tel que

$$(2.80) \quad \int_0^1 \sin k\pi b \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ce qui équivaut à b irrationnel. On a :

$$(2.81) \quad \Phi(b, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi b (a_k \cos k\pi t + \frac{b_k}{\pi k} \sin k\pi t) .$$

La série de Fourier apparaissant dans cette expression est lacunaire. Il résulte de J. BALL et M. SLEMROD [1] que pour $T > 2$ fixé quelconque alors

$$(2.82) \quad \int_0^T |\Phi(b, t)|^2 dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k^2 + (\frac{b_k}{\pi k})^2\} |\sin k\pi b|^2 .$$

On voit donc que la semi-norme

$$(2.83) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_{F_b} := \left(\int_0^T |\Phi(b, t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

est une norme dans $\mathcal{D}(]0, 1[) \times \mathcal{D}(]0, 1[)$.

Soit

$$(2.84) \quad F_b := \text{complété de } \mathcal{D}(]0, 1[) \times \mathcal{D}(]0, 1[) \text{ par rapport à la norme } \|\cdot\|_{F_b} .$$

On a évidemment

$$(2.85) \quad F_b = \{ \text{ensemble des } \{\Phi^0, \Phi^1\} \text{ tels que}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ |\langle \Phi^0, \sin k \pi x \rangle|^2 + \left(\frac{\langle \Phi^1, \sin k \pi x \rangle}{k \pi} \right)^2 \} |\sin k \pi b|^2 < \infty \}$$

et donc, son dual

$$(2.86) \quad F'_b = \{ \text{ensemble des } \{\xi^0, \xi^1\} \text{ tels que}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ |\langle \xi^0, \sin k \pi x \rangle|^2 + |\langle \xi^1, \sin k \pi x \rangle|^2 |k \pi|^2 \} |\sin k \pi b|^{-2} < +\infty \}.$$

En appliquant HUM on obtient le résultat de contrôlabilité exacte suivant.

Théorème 2.7.

Soit $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ et $b \in \Omega \setminus \mathbb{Q}$. Soit $T > 2$.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.87) \quad \{y^1, y^0\} \in F'_b \quad (\text{défini dans (2.86)})$$

il existe un contrôle

$$(2.88) \quad v = v(t) \in L^2(0, T)$$

tel que la solution $y = y(v)$ du système

$$y'' - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v(t) \delta_b \quad \text{dans }]0, 1[\times]0, T[$$

$$(2.89) \quad y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad t \in]0, T[$$

$$y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x), \quad x \in]0, 1[$$

$$\text{vérifie } y(T) = y'(T) = 0.$$

Dans (2.89), δ_b dénote la masse de Dirac au point b . ■

Remarque 2.17.

On peut vérifier que lorsqu'on considère la norme

$$\| \{\Phi^0, \Phi^1\} \| := \left\{ \int_0^T [|\Phi'(b, t)|^2 + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(b, t) \right|^2] dt \right\}^{1/2}$$

l'espace complété correspondant est, pour tout $b \in \Omega$,

$$F = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1).$$

On obtient de cette manière la contrôlabilité exacte dans $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$. ■

3. PROBLÈMES OUVERTS.

3.1. Contrôle ponctuel.

Quelques indications ont été données au N° 2.5.3. Le cas de la dimension $n > 1$ conduit à d'intéressantes difficultés.

Soit Φ solution de

$$\Phi'' - \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(3.1) \quad \Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi' \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

la condition de Dirichlet dans (3.1) étant prise pour *fixer les idées*. On introduit les fonctions et valeurs propres :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} -\Delta w_j &= \lambda_j w_j, \quad j = 1, \dots \\ w_j &\in H_0^1(\Omega), \quad j = 1, \dots \\ 0 < \lambda_1 &\leq \lambda_2 \leq \dots \end{aligned}$$

et on suppose que

(3.3) toutes les valeurs propres sont simples.

Alors

$$(3.4) \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} [(\Phi^0, w_j) \cos t \sqrt{\lambda_j} + (\Phi^1, w_j) \frac{\sin t \sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_j}}] w_j .$$

La première question est de savoir quand la quantité

$$(3.5) \quad \left(\int_0^T \Phi(b, t)^2 dt \right)^{1/2}$$

définit une norme.

Une condition nécessaire est que

$$(3.6) \quad w_j(b) \neq 0 \quad \forall j .$$

On dit alors que b est *stratégique*. Dans un tel cas la quantité (3.5) définit elle, pour T assez grand, une *norme*? Un contre exemple très intéressant a été obtenu par Y. MEYER [1], le résultat semblant vrai "en général".

Le § 7 de J.L. LIONS [3] contient certains points que l'on doit considérer comme *formels*, "génériquement" vrais...

3.2. Naturellement dans le cas de valeurs propres d'ordre de multiplicité $\leq k$, on pourra essayer de contrôler exactement avec k contrôles $v_1 \dots v_k$ agissant en k points $b_1 \dots b_k$.

3.3. Considérons un voisinage ω de b et la situation où l'on peut agir sur le système sur ω . cf. alors le problème énoncé dans la Remarque 2.16.

Il serait intéressant de voir ensuite ce qui se passe lorsqu'on prend une suite de

voisinages ω_ε de b avec $\omega_\varepsilon \rightarrow b$ (par ex. des boules centrées en b de rayon $\varepsilon \rightarrow 0$).

3.4. Il serait intéressant d'étudier le passage à la limite dans la situation du N° 2.2 - action dans un voisinage du bord lorsque "l'épaisseur" du voisinage $\rightarrow 0$.

3.5. On peut étudier systématiquement le contrôle *simultané* de k systèmes sur lesquels on peut agir de manière *interne par le même contrôle*. On consultera pour cela le travail de A. HARAUX [1]. Les situations analogues pour le contrôle ponctuel conduisent à des questions qui nous semblent très intéressantes.

3.6. L'étude de l'espace F défini par $(\int_0^T \int_{\omega} \Phi^2 dx dt)^{1/2}$ est une question très intéressante. Des exemples et contre exemples sont donnés dans A. HARAUX [2] et J. LAGNESE [4]. Ils devront être comparés aux résultats que l'on peut probablement obtenir en utilisant les méthodes de l'Appendice II de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH.

Chapitre VIII

Caractérisation du contrôle donné par HUM. Système de l'optimalité et méthode de dualité

1. INTRODUCTION.

Comme on a vu dans l'introduction du volume il y a une idée naturelle qui conduit à la méthode HUM.

L'idée de base est la suivante. En admettant que le système est exactement contrôlable, caractériser le contrôle qui minimise la *fonction coût* associée, parmi l'ensemble des contrôles admissibles, par un *système d'optimalité* (S.O.). Le S.O. peut être trouvé par la *méthode de pénalisation*.

Une fois le système de l'optimalité obtenu, on dispose "d'un opérateur de relèvement" qui associe à chaque couple de données initiales le contrôle ramenant le système à l'état d'équilibre, ce contrôle étant celui qui minimise la fonction coût.

On obtient ainsi la méthode HUM qu'on a appliquée systématiquement dans ce volume.

L'objet de ce dernier chapitre est de présenter brièvement cet aspect de HUM sur l'exemple "modèle" de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de Dirichlet.

Tout ce qui suit peut être étendu sans difficulté aux différents modèles considérés dans les chapitres précédents, y compris pour les problèmes de contrôle interne.

Le plan du chapitre est le suivant :

- Dans le N° 2 on étudie le système de l'optimalité par la méthode de pénalisation.
- Dans le N° 3 on donne quelques éclairages nouveaux sur HUM par la méthode de dualité, i.e. en étudiant le problème dual de la recherche du contrôle minimisant la fonction coût.
- Dans le N° 4 on applique la méthode de pénalisation au problème de la contrôlability exacte élargie (C. E. E) étudiée dans le N° 9 du Chapitre I.
- Dans le dernier N° on indique, comme dans les autres chapitres, plusieurs problèmes ouverts.

2. CONTROLABILITE EXACTE ET PENALISATION.

2.1. Orientation.

On considère l'exemple "modèle" étudié dans le Chapitre I.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, à frontière Γ de classe C^2 .

On considère l'équation des ondes

$$(2.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

avec $T > 0$ fixé.

On suppose que l'on peut agir sur le système par l'intermédiaire du *contrôle* $v = v(x, t)$ sur le bord $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, de façon que

$$(2.2) \quad y = v \quad \text{sur } \Sigma.$$

Soient par ailleurs les *données initiales*

$$(2.3) \quad y(x, 0) = y^0(x); \quad y'(x, 0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x^0$ et $R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)|$.

Considérons la partition habituelle de la frontière

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Gamma(x^0) &= \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) > 0\} \\ \Gamma^*(x^0) &= \Gamma \setminus \Gamma(x^0) \end{aligned}$$

et

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Sigma(x^0) &= \Gamma(x^0) \times]0, T[\\ \Sigma^*(x^0) &= \Sigma \setminus \Sigma(x^0). \end{aligned}$$

Dans le Théorème 6.1 du Chapitre I on a démontré le résultat de contrôlabilité exacte suivant :

Si $T > T(x^0) = 2R(x^0)$, pour chaque couple de données initiales

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

(2.6) il existe un contrôle

$$v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (2.1)(2.2)(2.3) vérifie $y(T, v) = y'(T, v) = 0$.

Le fait que le contrôle v soit défini sur $\Sigma(x^0)$ doit être interprété au sens

$$(2.7) \quad \begin{aligned} v &\text{ sur } \Sigma(x^0) \\ y &= \\ 0 &\text{ sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

Le résultat (2.6) a été démontré à l'aide de HUM. On a vu ensuite, dans la Remarque 6.2 du Chapitre I, que pour chaque couple de données initiales il existe une infinité de contrôles ramenant le système à l'état d'équilibre.

Autrement dit, pour chaque couple de données initiales

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega),$$

l'ensemble des contrôles admissibles

$$(2.8) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma(x^0)) / y(T; v) = y'(T; v) = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

contient une infinité d'éléments.

On va démontrer maintenant que le contrôle donné par HUM est celui qui *réalise le minimum de la fonction coût*

$$(2.9) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma$$

sur l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U}_{ad} .

On va ensuite caractériser le contrôle v à l'aide du *système d'optimalité*.

2.2. Caractérisation du contrôle. Système de l'optimalité.

Théorème 2.1.

Pour chaque couple de données initiales

$$\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

le contrôle $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ donné par HUM est celui qui minimise la fonction coût $J(v)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U}_{ad} .

Démonstration.

Etape 1.

On considère le problème de minimisation

$$(2.10) \quad \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

Le problème (2.10) est *un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état*. Une bonne méthode pour attaquer ce problème est *la méthode de pénalisation*. (On reprend ici de manière plus précise ce qui a été esquissé dans l'introduction du livre).

On définit la fonctionnelle

$$(2.11) \quad J_\varepsilon(v, z) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (z'' - \Delta z)^2 dx dt$$

avec $\varepsilon > 0$, $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ et $z = z(x, t)$ une fonction telle que

$$z'' - \Delta z \in L^2(\Omega)$$

$$z(0) = y^0, z'(0) = y^1 \text{ dans } \Omega$$

$$(2.12) \quad z = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases}$$

$$z(T) = z'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Evidemment, pour chaque $v \in \mathcal{U}_{ad}$ la fonction $y = y(v)$ solution de (2.1)(2.3) vérifie ces conditions.

Le terme $\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (z'' - \Delta z)^2 dx dt$ est un *terme de pénalisation*.

On considère le problème de contrôle optimal

$$(2.13) \quad \inf_{v, z} J_\varepsilon(v, z).$$

On peut vérifier aisément que *pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une solution unique $\{u_\varepsilon, z_\varepsilon\}$ de ce problème*, i.e.

$$(2.14) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) = \inf_{v, z} J_\varepsilon(v, z). \quad \blacksquare$$

Etape 2.

Notons que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans $L^2(\Sigma(x^0))$.

Soit $v \in \mathcal{U}_{ad}$ quelconque et $y = y(v)$ la solution du problème (2.1)(2.2)(2.3) associé. Le couple $\{v, y(v)\}$ est admissible pour le problème de minimisation (2.13) pour chaque $\varepsilon > 0$, et donc

$$(2.15) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v, y(v)).$$

Mais, comme $y(v)$ vérifie

$$(2.16) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

on voit que

$$(2.17) \quad J_\varepsilon(v, y(v)) = J(v) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Alors

$$(2.18) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J(v) \quad \forall \varepsilon > 0$$

et ceci pour chaque $v \in \mathcal{U}_{ad}$, on a donc

$$(2.19) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En particulier

$$(2.20) \quad J(u_\varepsilon) \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \quad \forall \varepsilon > 0$$

et, si l'on pose,

$$(2.21) \quad f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (z_\varepsilon'' - \Delta z_\varepsilon)$$

on a

$$(2.22) \quad (f_\varepsilon) \text{ borné dans } L^2(Q). \quad \blacksquare$$

Etape 3.

Quitte à extraire des sous-suites on aura

$$(2.23) \quad u_\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} \hat{v} \quad \text{dans } L^2(\Sigma(x^0)) \text{ faible.}$$

On a par ailleurs

$$(2.24) \quad \| z_\varepsilon'' - \Delta z_\varepsilon \|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'après le Théorème 4.2 du Chapitre I on a donc

$$(2.25) \quad (z_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \text{ bornée dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

On a en particulier

$$(2.26) \quad \| z_\varepsilon \|_{L^2(Q)} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0$$

et quitte à extraire encore une sous-suite

$$(2.27) \quad z_\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} \hat{y} \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ faible.}$$

D'après (2.12)(2.24) on a

$$\hat{y}'' - \Delta \hat{y} = 0$$

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \hat{y} &= && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \hat{y} &= && 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

$$\hat{y}(T) = \hat{y}'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\hat{y}(0) = y^0 ; \hat{y}'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

On a donc $\hat{v} \in \mathcal{U}_{ad}$. Par ailleurs

$$(2.29) \quad J_\epsilon(u_\epsilon, z_\epsilon) \geq J(u_\epsilon)$$

et d'après la semicontinuité inférieure faible de J on a :

$$(2.30) \quad J(\hat{v}) \leq \liminf J(u_\epsilon) \leq \liminf J_\epsilon(u_\epsilon, z_\epsilon).$$

De (2.19) et (2.30) on conclut

$$(2.31) \quad J(\hat{v}) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

On a démontré aussi que

$$(2.32) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(u_\epsilon) = J(\hat{v})$$

ce qui, combiné avec (2.23), donne

$$(2.33) \quad u_\epsilon \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} \hat{v} \text{ dans } L^2(\Sigma(x^0)) \text{ (fort)}.$$

Etape 4.

Considérons maintenant la suite

$$(2.34) \quad p_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} (z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0.$$

Evidemment

$$(2.35) \quad p_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} f_\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

On sait que $(f_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est borné dans $L^2(Q)$ mais on ne dispose pas encore d'estimations sur $(p_\epsilon)_{\epsilon > 0}$.

On écrit les équations d'Euler associées au problème de minimisation (2.13). On a

$$(2.36) \quad \int_{\Sigma(x^0)} u_\varepsilon v \, d\Sigma - \int_Q p_\varepsilon (\zeta'' - \Delta \zeta) \, dx dt = 0$$

pour tout ζ solution de

$$\zeta'' - \Delta \zeta \in L^2(Q)$$

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = \zeta(T) = \zeta'(T) = 0$$

$$\begin{aligned} v & \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\ \zeta = & \\ 0 & \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

avec $v \in L^2(\Sigma(x^0))$.

Moyennant la formule de Green on obtient donc

$$\begin{aligned} (2.37) \quad p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon &= 0 && \text{dans } Q \\ p_\varepsilon &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} &= u_\varepsilon && \text{sur } \Sigma(x^0). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (2.38) \quad \int_Q p_\varepsilon (\zeta'' - \Delta \zeta) \, dx dt &= \int_Q (p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon) \zeta \, dx dt - \int_\Sigma p_\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial v} \, d\Sigma + \int_\Sigma \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} \zeta \, d\Sigma = \\ &= \int_Q (p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon) \zeta \, dx dt - \int_\Sigma p_\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial v} \, d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} v \, d\Sigma \end{aligned}$$

et donc, d'après (2.36),

$$(2.39) \quad \int_Q (p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon) \zeta \, dx dt - \int_\Sigma p_\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial v} \, d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} v \, d\Sigma = \int_{\Sigma(x^0)} u_\varepsilon v \, d\Sigma$$

qui est équivalent à (2.37).

Etape 5.

On applique ensuite l'inégalité inverse démontrée dans le Théorème 5.1 du Chapitre I et on obtient

$$(2.40) \quad \frac{(T - 2R(x^0))}{2} \{ |\nabla p_\varepsilon(0)|^2 + |p'_\varepsilon(0)|^2 \} \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |u_\varepsilon|^2 d\Sigma.$$

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ étant bornée dans $L^2(\Sigma(x^0))$ on voit que

$$(2.41) \quad |\nabla p_\varepsilon(0)| + |p'_\varepsilon(0)| \leq C \quad \forall \varepsilon > 0$$

et d'après la loi de conservation de l'énergie on a

$$(2.42) \quad (p_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \text{ bornée dans } L^\infty(0, T ; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T ; L^2(\Omega)).$$

Quitte à extraire encore des sous-suites on a, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(2.43) \quad p_\varepsilon \rightarrow p \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; H_0^1(\Omega)) \text{ faible *}$$

$$(2.44) \quad p'_\varepsilon \rightarrow p' \quad \text{dans } L^\infty(0, T ; L^2(\Omega)) \text{ faible *}$$

$$(2.45) \quad \{ p_\varepsilon(0), p'_\varepsilon(0) \} \rightarrow \{ p(0), p'(0) \} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Alors, la fonction $p = p(x, t)$ est solution de

$$(2.46) \quad \begin{aligned} p'' - \Delta p &= 0 && \text{dans } Q \\ p &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial p}{\partial v} &= \hat{v} && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ p(0) &= p^0 ; p'(0) = p^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Etape 6.

On pose ensuite $\Phi = p$; $\Phi^0 = p^0$, $\Phi^1 = p^1$ et $\psi = \hat{y}$.

D'après (2.28) et (2.46) on a

$$\begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ (2.47) \quad \Phi &= 0 && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

$$\Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$\psi'' - \Delta\psi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(2.48) \quad \psi(T) = \psi'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial\Phi}{\partial v} && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &0 && \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$\psi(0) = y^0 ; \psi'(0) = y^1$$

on a

$$(2.49) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$$

où \wedge est l'isomorphisme entre les espaces $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ introduit dans l'application de HUM.

On voit ainsi que le contrôle \hat{v} , qui par construction minimise $J(\cdot)$ sur \mathcal{U}_{ad} , est le contrôle donné par HUM puisque

$$\hat{v} = \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial v} . \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1.

Les développements qu'on vient de faire dans la démonstration du Théorème 2.1 constituent, en un sens, une manière constructive d'introduire la méthode HUM. En cherchant le contrôle qui minimise la fonction coût on trouve le système d'optimalité qui conduit à HUM. Mais il faut bien noter que la *convergence* de la méthode de pénalisation *suppose* qu'il y ait contrôlabilité exacte. ■

Remarque 2.2.

Le résultat qu'on vient de démontrer est général. Il s'applique aux différentes situations étudiées le long de ce volume. On démontre ainsi que le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonction coût qui correspond à chaque situation. ■

Remarque 2.3.

Etant donné le caractère *réversible* de la situation on peut tout aussi bien déduire du Théorème 5.1 du Chapitre I que

$$(2.50) \quad |\nabla p_\varepsilon(T)|^2 + |p_\varepsilon'(T)|^2 \leq \text{constante}$$

au lieu de (2.41). Les deux estimations sont *équivalentes*.

Il n'en va pas de même dans les situations *irréversibles*, où il faut utiliser l'analogue de (2.50). C'est la méthode RHUM, pour Reverse HUM, que l'on présente dans J.L. LIONS [14] et le Volume 2. ■

3. DUALITE.

3.1. Orientation.

Nous allons considérer le problème du Chapitre I :

$$(3.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.2) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} v & \quad \text{sur } \Sigma(x^0) \\ y = & \\ 0 & \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{aligned}$$

Soit

$$(3.4) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v \in L^2(\Sigma(x^0)), y(T; v) = y'(T; v) = 0 \}.$$

On a vu que HUM fournit la solution de

$$(3.5) \quad \inf. \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On va chercher – au sens de la dualité dans les fonctions convexes – le problème dual de (3.5). On va obtenir le résultat de plusieurs manières, obtenant aussi des éclairages nouveaux sur HUM.

3.2. Première application de la théorie de dualité.

Introduisons $\eta = \eta(t, v)$ solution de

$$\eta'' - \Delta \eta = 0,$$

$$(3.6) \quad \eta(0) = \eta'(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \eta &= \\ &\quad v \text{ sur } \Sigma(x^0) \\ &\quad 0 \text{ sur } \Sigma^*(x^0) \end{aligned}$$

et posons $y(t; v = 0) = y_0(t)$, donc

$$(3.7) \quad y_0'' - \Delta y_0 = 0, \quad y_0(0) = y^0, \quad y_0'(0) = y^1, \quad y_0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Alors

$$(3.8) \quad y(v) = \eta(v) + y_0.$$

On introduit l'opérateur L par

$$(3.9) \quad L v = \{ \eta(T; v), \eta'(T; v) \};$$

on a donc

$$(3.10) \quad L \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma(x^0)) ; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)).$$

On a alors l'équivalence

$$(3.11) \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \Leftrightarrow v \in L^2(\Sigma(x^0)), L v + \{ y_0(T), y'_0(T) \} = 0.$$

On introduit les fonctions convexes propres (cf. T.R. ROCKAFELLAR [1], I. EKELAND et R. TEMAM [1])

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt,$$

$$0 \text{ si } \varrho = \{ \varrho^0, \varrho^1 \}, \varrho^0 + y_0(T) = 0, \varrho^1 + y'_0(T) = 0$$

$$\begin{aligned} G(\varrho) = \\ + \infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

où $\varrho \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Avec ces notations *le problème (3.5) équivaut à*

$$(3.12) \quad \inf. F(v) + G(Lv), \quad v \in L^2(\Sigma(x^0)). \quad \blacksquare$$

On utilise maintenant le Théorème de dualité de ROCKAFELLAR, loc. cit. On a

$$(3.13) \quad \inf [F(v) + G(Lv)] = - \inf [F^*(L^*q) + G^*(-q)],$$

où $q = \{ q^0, q^1 \} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, et où H^* désigne la fonction conjuguée de H , L^* l'adjoint de L . \blacksquare

De manière générale,

$$H^*(q) = \sup [(q, \hat{q}) - H(\hat{q})]$$

q et \hat{q} étant en dualité.

On a alors

$$F^*(v) = F(v),$$

$$G^*(q) = (q^0, -y_0(T)) + (q^1, -y'_0(T))$$

de sorte que

$$(3.14) \quad \inf_q [F(v) + G(Lv)] = - \inf_q \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} (L^* q)^2 d\Sigma + (q^0, y_0(T)) + (q^1, y'_0(T)) \right]. \blacksquare$$

Calculons maintenant L^* . On considère

$$w'' - \Delta w = 0$$

$$(3.15) \quad w(T) = -q^1, \quad w'(T) = q^0, \quad q^1 \in H_0^1(\Omega), \quad q^0 \in L^2(\Omega)$$

$$w = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Prenons le produit scalaire de l'équation (3.15) avec $\eta(v)$ et intégrons par parties ; il vient

$$(q^0, \eta(T; v)) + (q^1, \eta'(T; v)) - \int_{\Sigma(x^0)} \frac{\partial w}{\partial v} \eta(v) = 0$$

de sorte que

$$(3.16) \quad L^* q = \frac{\partial w}{\partial v} \quad \text{sur } \Sigma(x^0). \blacksquare$$

Introduisons les notations

$$(3.17) \quad \sigma^0 = -q^1, \quad \sigma^1 = q^0.$$

On résout l'équation

$$\theta'' - \Delta \theta = 0$$

$$(3.18) \quad \theta(T) = \sigma^0, \theta'(T) = \sigma^1, \sigma^0 \in H_0^1(\Omega), \sigma^1 \in L^2(\Omega)$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

On a donc démontré le

Théorème 3.1.

On a

$$(3.19) \quad \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt = - \inf_{\sigma} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + (\sigma^1, y_0(T)) - (\sigma^0, y'_0(T)) \right],$$

avec

$$\sigma = \{ \sigma^0, \sigma^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Remarque 3.1.

Le problème initial de contrôlabilité exacte avec minimisation de $\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt$

est un problème de contrôle optimal avec *contraintes sur l'état*, les contraintes étant

$$y(T; v) = y'(T; v) = 0.$$

Par dualité, les contraintes sur l'état deviennent des "poids" linéaires, à savoir les facteurs $(\sigma^1, y_0(T)) - (\sigma^0, y'_0(T))$. ■

Remarque 3.2.

Nous avons pris le contrôle agissant sur $\Sigma(x^0)$. On pourrait considérer, de la même façon, d'autres situations – éventuellement en changeant les espaces parcourus par σ^0, σ^1 . ■

3.3. Autre aspect de la dualité.

On peut établir *directement* (i.e. sans usage de la théorie générale de la dualité) le Théorème 3.1.

On reprend HUM. Il s'agit de résoudre

$$(3.20) \quad \wedge \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}.$$

La solution $\{ \Phi^0, \Phi^1 \}$ de (3.20) correspond à la solution du problème

$$(3.21) \quad \inf_{\{ \varrho^0, \varrho^1 \}} [\frac{1}{2} \langle \wedge \{ \varrho^0, \varrho^1 \}, \{ \varrho^0, \varrho^1 \} \rangle - (y^1, \varrho^0) + (y^0, \varrho^1)],$$

avec

$$\{ \varrho^0, \varrho^1 \} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Mais si l'on définit ϱ par

$$(3.22) \quad \varrho'' - \Delta \varrho = 0, \quad \varrho(0) = \varrho^0, \quad \varrho'(0) = \varrho^1, \quad \varrho = 0 \text{ sur } \Sigma$$

alors

$$\langle \wedge \{ \varrho^0, \varrho^1 \}, \{ \varrho^0, \varrho^1 \} \rangle = \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt$$

et donc $\{ \Phi^0, \Phi^1 \}$ est solution de

$$(3.23) \quad \inf_{\{ \varrho^0, \varrho^1 \}} [\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt - (y^1, \varrho^0) + (y^0, \varrho^1)].$$

On multiplie maintenant (3.22) par y_0 et on intègre par parties. Il vient

$$(\varrho'(T), y_0(T)) - (\varrho(T), y'_0(T)) = (\varrho^1, y^0) - (\varrho^0, y^1)$$

de sorte qu'il est équivalent de chercher

$$(3.24) \quad \inf. [\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt + (\varrho^1(T), y_0(T)) + (\varrho(T), y'_0(T))].$$

Si l'on pose

$$(3.25) \quad \varrho(T) = \sigma^0, \quad \varrho'(T) = \sigma^1$$

alors (puisque l'on peut inverser le sens du temps !)

$$\varrho(\varrho^0, \varrho^1) = \theta(\sigma^0, \sigma^1)$$

et donc (3.25) devient

$$(3.26) \quad \inf_{\sigma^0, \sigma^1} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + (\sigma^1, y_0(T)) - (\sigma^0, y_0'(T)) \right]$$

qui n'est autre que l'expression apparaissant (au signe près) dans le terme de droite de (3.19).

La valeur du minimum dans (3.26) est celle du minimum de (3.21), atteint pour $\{\Phi^0, \Phi^1\}$, i. e.

$$(3.27) \quad \inf \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt - (y^1, \Phi^0) + (y^0, \Phi^1) \right].$$

Mais si $\{\Phi, \psi\}$ est la solution du système HUM, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times (0, T)} (\psi'' - \Delta \psi) \Phi dx dt &= 0 = -(\psi'(0), \Phi^0) + (\psi(0), \Phi^1) + \\ &\quad + \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt \end{aligned}$$

et comme $\psi(0) = y^0$, $\psi'(0) = y^1$ on voit que l'expression (3.27) vaut

$$-\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)^2 d\Gamma dt$$

On a donc là la valeur du minimum dans (3.26), ce qui redonne le Théorème 3.1. ■

3.4. Dualité et pénalisation.

Ce N° est donné à titre d'exercice – et pour le lecteur troublé (éventuellement) par

l'usage de la fonction convexe propre $G(\varrho)$ un peu tétralogique.

L'idée est alors *de pénaliser les contraintes sur l'état.*

On introduit, $\forall k > 0$, la fonctionnelle

$$(3.28) \quad J_k(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt + \frac{k}{2} [|y(T; v)|^2 + \|y'(T; v)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2].$$

Soit u_k la solution de

$$(3.29) \quad \inf J_k(v), \quad v \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

On sait que, lorsque $k \rightarrow +\infty$,

$$(3.30) \quad u_k \rightarrow v = \text{solution de HUM} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \text{ sur } \Sigma(x^0), \quad v \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

On applique maintenant la théorie de la dualité – comme au N° 3.2 ci-dessus – à la fonctionnelle (3.28). On introduit encore :

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt,$$

$$G_k(\varrho) = \frac{k}{2} [|\varrho^0 + y_0(T)|^2 + \|\varrho^1 + y'_0(T)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2].$$

Lorsque $k \rightarrow +\infty$, $G_k(\varrho)$ converge, en un certain sens, vers la fonction $G(\varrho)$ introduite précédemment.

Le problème (3.29) équivaut à

$$\inf [F(v) + G_k(Lv)]$$

et par le Théorème général de dualité, on a

$$(3.31) \quad \inf [F(v) + G_k(Lv)] = - \inf [F^*(L^*q) + G_k^*(-q)]$$

où $q = \{ q^0, q^1 \} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

On a cette fois

$$(3.32) \quad G_k^*(q) = \frac{1}{2k} [|q^0|^2 + \|q^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2] - (q^0, y_0(T)) - (q^1, y_0'(T))$$

de sorte que

$$(3.33) \quad \inf J_k(v) = - \inf_{\sigma} [\frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial \theta}{\partial v})^2 + (\sigma^1, y_0(T)) - (\sigma^0, y_0'(T)) + \frac{1}{2k} [\|\sigma^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\sigma^1\|_{L^2(\Omega)}^2]] .$$

Si l'on fait tendre k vers $+\infty$ dans (3.33), on obtient encore (3.19).

Remarque 3.3.

Le problème (3.29) admet *toujours* une solution unique u_k , i.e. *quels que soient* $\Sigma(x^0)$ et T – et on peut remplacer dans (3.28) $\Sigma(x^0)$ par Σ_0 *quelconque* dans $\Gamma \times (0, T)$. Et l'on a toujours (3.33). *Tout cela pourvu que k soit fini.* Le passage à la limite, en revanche, n'est possible que dans le cadre de la contrôlabilité exacte. ■

3.5. Dualité et autres conditions aux limites.

Expliquons dans le cas *du contrôle par Neumann* ce que donne la dualité. Le cadre général sera alors clair. ■

On considère donc

$$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(3.34) \quad y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) .$$

On munit l'espace des fonctions $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de la norme (T est fixé assez grand) donnée par

$$(3.35) \quad \|\{\Phi^0, \Phi^1\}\|_F = (\int_{\Gamma \times (0, T)} \Phi^2 d\Gamma dt)^{1/2}$$

où Φ est la solution de

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta \Phi &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \Phi(0) = \Phi^0, \Phi'(0) = \Phi^1, \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

On définit

$$(3.37) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v / v \in L^2(\Sigma), y(T; v) = y'(T; v) = 0\}$$

où l'on suppose dans (3.34) que

$$(3.38) \quad \{y^1, -y^0\} \in F'.$$

Alors

$$(3.39) \quad \inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 d\Gamma dt = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \Phi^2 d\Gamma dt$$

où Φ est calculé par HUM. Donc, Φ étant d'abord calculé par (3.36), on définit ψ par :

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \psi'' - \Delta \psi &= 0, \psi(T) = \psi'(T) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\Phi && \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

et on définit $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ comme la solution unique de

$$(3.41) \quad \wedge \quad \{\Phi^0, \Phi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\} = \{y^1, -y^0\}.$$

Donc $\{\Phi^0, \Phi^1\}$ étant donnée par (3.41), Φ est calculé par (3.36). ■

On cherche le problème dual par la méthode du N° 3.2 ci-dessus. On trouve ainsi le résultat suivant : on définit θ solution de

$$(3.42) \quad \theta'' - \Delta \theta = 0, \quad \theta(T) = \sigma^0, \quad \theta'(T) = \sigma^1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Alors

$$(3.43) \quad \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} v^2 d\Gamma dt = - \inf_{\{\sigma^0, \sigma^1\} \in F} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \theta^2 d\Gamma dt + (\sigma^1, y_0(T)) - (\sigma^0, y_0'(T)) \right]$$

où la borne inférieure est prise dans le membre de droite pour

$$(3.44) \quad \{\sigma^0, \sigma^1\} \in F.$$

L'intervention de l'espace F dans (3.44) est essentielle. En effet, par analogie avec le N°3.2, on introduit η par

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \eta'' - \Delta \eta &= 0, \\ \eta(0) = \eta'(0) &= 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned}$$

puis l'opérateur L donné par

$$(3.46) \quad Lv = \{\eta(T; v), \eta'(T; v)\}.$$

Il est à vrai dire un peu plus commode d'introduire ici L par

$$(3.47) \quad Lv = \{\eta'(T; v), -\eta(T; v)\}$$

de sorte que

$$(3.48) \quad L \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma); F'). \quad \blacksquare$$

Remarque 3.4.

On aurait pu introduire L par (3.47) dans le N° 3.2. Cela n'a pas d'importance autre que technique. ■

Alors \mathcal{U}_{ad} n'est autre que l'ensemble où $G(Ly)$ est fini, en définissant G par

$$G(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q^1 + y'_0(T) = 0, \quad q^0 - y_0(T) = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Appliquant le théorème général de dualité, on trouve (3.43). ■

Remarque 3.5.

Dans le membre de droite de (3.43), la coercivité de la fonctionnelle en σ^0, σ^1 est assuré par $\frac{1}{2} \int \theta^2 d\Gamma dt$, sur F par définition de F . ■

Remarque 3.6.

On peut appliquer les considérations des N° 3.3 et 3.4 précédents à la présente situation. ■

4. CONTROLABILITÉ EXACTE ÉLARGIE ET PENALISATION.

Le problème considéré est celui du Chap. I, N°9 l'équation d'état est donnée par

$$(4.1) \quad y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

$$(4.2) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1$$

y^0, y^1 donné dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$(4.3) \quad y = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{cases}$$

On se donne

$$(4.4) \quad G = \text{sous espace fermé dans } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

et on dit qu'il y a C.E.E. (ou Contrôlabilité Exacte relative à G) si,

$$\forall y^0, y^1 \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

on peut trouver $v \in L^2(\Sigma_0)$ avec

$$(4.5) \quad \{y(T; v), y'(T; v)\} \in G.$$

Plus précisément on va chercher

$$(4.6) \quad \inf. \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Gamma dt, \quad v \in \mathcal{U}_{ad},$$

où \mathcal{U}_{ad} désigne l'ensemble (supposé non vide) des $v \in L^2(\Sigma_0)$ tels que l'on ait (4.5). ■

On introduit le *problème pénalisé* suivant ; pour $\epsilon > 0$, on définit

$$(4.7) \quad J_\epsilon(v, z) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2\epsilon} \|z'' - \Delta z\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pour v, z tels que

$$v \in L^2(\Sigma_0), \quad z'' - \Delta z \in L^2(Q),$$

$$(4.8) \quad z(0) = y^0, \quad z'(0) = y^1, \quad z = v \text{ sur } \Sigma_0,$$

$$z = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0, \quad \{z(T), z'(T)\} \in G.$$

On cherche

$$(4.9) \quad \inf J_\epsilon(v, z), \quad \{v, z\} \text{ vérifiant (4.8).}$$

Ce problème admet une solution unique $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$. ■

On note que

$$(4.10) \quad J_\varepsilon(v, z) = J(v) \left(= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Gamma dt \right) \text{ si } v \in \mathcal{U}_{ad}, z = y(v)$$

de sorte que

$$(4.11) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v, z) \leq \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Donc lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(4.12) \quad \begin{aligned} u_\varepsilon &\text{ demeure dans un borné de } L^2(\Sigma_0), \\ y'' - \Delta y_\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon, \quad \|f_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

On peut donc extraire une suite, encore notée u_ε , telle que

$$(4.13) \quad \begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Sigma_0) \text{ faible,} \\ y_\varepsilon &\rightarrow y \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ faible.} \end{aligned}$$

On a

$$\liminf J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \liminf J(u_\varepsilon) \geq J(u), \text{ et on vérifie que } u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Donc

$$(4.14) \quad J(u) = \inf J(v), \quad u \in \mathcal{U}_{ad}$$

et, en fait, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Sigma_0)$. ■

Introduisons maintenant le *Système d'Optimalité* (S.O.) pour le problème (4.9). On définit p_ε par

$$(4.15) \quad p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} (y_\varepsilon'' - \Delta y_\varepsilon).$$

On a

$$(4.16) \quad \int_{\Sigma_0} u_\varepsilon \cdot v \, d\Gamma dt - \iint_Q p_\varepsilon (\zeta'' - \Delta \zeta) \, dx dt = 0$$

$\forall \zeta, v$ tels que

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \zeta(0) &= \zeta'(0) = 0, \quad \{\zeta(T), \zeta'(T)\} \in G, \quad \zeta'' - \Delta \zeta \in L^2(Q) \\ \zeta &= v \text{ sur } \Sigma_0, \quad \zeta = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \Sigma_0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(4.18) \quad \begin{aligned} p_\varepsilon'' - \Delta p_\varepsilon &= 0 && \text{dans } Q \\ p_\varepsilon &= 0 && \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} &= u_\varepsilon && \text{sur } \Sigma_0 \end{aligned}$$

et

$$-(p_\varepsilon(T), \zeta'(T)) + (p_\varepsilon'(T), \zeta(T)) = 0 \quad \forall \{\zeta(T), \zeta'(T)\} \in G.$$

Donc

$$(4.19) \quad \{p_\varepsilon'(T), -p_\varepsilon(T)\} \in G^0.$$

Utilisant (4.13), Chapitre I, N° 9, on voit que si cette condition a lieu, alors, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(4.20) \quad \{p_\varepsilon(T), p_\varepsilon'(T)\} \text{ demeure dans un ensemble borné de } F_6.$$

On peut donc passer à la limite en ε dans le (S.O.). On obtient :

$$y'' - \Delta y = 0$$

$$p'' - \Delta p = 0$$

$$(4.21) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1$$

$$y = u \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0$$

$$p = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = u \quad \text{sur } \Sigma_0$$

$$\{ p'(T), -p(T) \} \in G^0.$$

On vérifie que cela équivaut à la résolution de $\wedge_6 \{ \Phi^0, \Phi^1 \} = \{ y^1, -y^0 \}$ avec les notations du Chap. I , N° 9 . ■

Remarque 4.1.

On vient, par la même occasion, de démontrer que la méthode HUM (adaptée à la C.E.E.) donne le contrôle u qui minimise

$$\int_{\Sigma_0} v^2 d\Gamma dt. \quad ■$$

5. PROBLÈMES OUVERTS.

5.1. Problèmes non linéaires . (cf. aussi Chap. I , Problème 10.6).

Le problème de la contrôlabilité exacte pour les systèmes distribués non linéaires est essentiellement ouvert . Une méthode constructive d'aborder le problème pourrait être celle de la pénalisation. Par exemple, considérons dans un ouvert Ω le système défini par

$$(5.1) \quad y'' - \Delta y + y^3 = \chi \quad v$$

où χ est la fonction caractéristique de $\omega \subset \Omega$ et où $v = v(x, t)$ est le contrôle ; avec

$$(5.2) \quad y = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

et

$$(5.3) \quad y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit T positif assez grand (pour fixer les idées!). Quel est l'ensemble alors décrit par $y(x, T)$, $y'(x, T)$ lorsque y parcourt $L^2(\omega \times (0, T))$?

Un moyen au moins *d'aborder* le problème (sans le résoudre) est de considérer le *problème pénalisé* (comme au N° 1) suivant : soit

$$(5.4) \quad J_\varepsilon(y, z) = \frac{1}{2} \int_{\omega \times (0, T)} y^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega \times (0, T)} (z'' - \Delta z - z^3 - \chi v)^2 \, dx \, dt$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & y \in L^2(\omega \times (0, T)), \quad z'' - \Delta z - z^3 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \quad z = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ & z(0) = y^0, \quad z'(0) = y^1, \quad z(T) = z^0, \quad z'(T) = z^1 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On a alors existence de u_ε , y_ε qui minimise $J_\varepsilon(y, z)$ sur l'ensemble des couples (y, z) vérifiant (5.5). Que se passe-t-il à la limite?

La contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes non linéaire a été étudiée dans W.C. CHENNING [1]. Les résultats démontrés sont de type local. C'est-à-dire, si les données initiales $\{y^0, y^1\}$ sont assez petites, il existe un contrôle frontière v tel que la solution y du système associé vérifie $y(T; v) = y'(T; v) = 0$ (bien entendu $T > 0$ est assez grand.)

Lorsque la non-linéarité $f(y)$ est sous-linéaire à l'infini, on a contrôlabilité exacte au sens usuel (cf. E.ZUAZUA [5]).

Dans le cas général, le problème reste ouvert.

5.2. Comme l'a indiqué *la dualité* telle que présentée dans ce chapitre est un *outil général*. [On l'utilisera dans le volume 2 de manière systématique pour la contrôlabilité exacte et les perturbations singulières]. Par conséquent on peut essayer de voir ce que donne la

formulation duale de beaucoup de problèmes ouverts donnés dans les chapitres précédents.

A titre d'exemple, donnons la formulation duale du problème de la contrôlabilité exacte avec *contrôle ponctuel*.

L'état du système est donné par

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \Phi'' - \Delta\Phi &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \Phi(x, 0) &= \Phi^0(x), \quad \Phi'(x, 0) = \Phi^1 && \text{dans } \Omega \\ \Phi &= 0 && \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{aligned}$$

(cette condition aux limites étant prise pour fixer les idées).

On considère la fonctionnelle

$$(5.7) \quad J(\Phi^0, \Phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \Phi(b, t)^2 dt - \int_{\Omega} (y^1 \Phi^0 - y^0 \Phi^1) dx$$

et on cherche

$$(5.8) \quad \inf. J(\Phi^0, \Phi^1).$$

L'une des difficultés est bien sûr de préciser où l'on fait varier Φ^0, Φ^1 : c'est dans l'espace de Φ^0, Φ^1 tels que $\int_0^T \Phi(b, t)^2 dt < \infty$ – et on retrouve, sous un jour différent, les problèmes des chapitres antérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

AVELLANEDA, M. & LIN, F.H.

- [1] Homogenization of elliptic problems with L^p boundary data. Applied Math. and Optimization 15, (1987), p.93-107 .
- [2] Counter examples related to high frequency oscillation of Poisson's Kernel—Applied Math. and Optimization. 15, (1987), p. 109-119.
- [3] Compactness Methods in the theory of homogenization. A paraître.
- [4] Homogenization of Poisson's Kernel and Applications to Boundary Control. A paraître.

BALL, J. & SLEMROD, M.

- [1] Non Harmonic Fourier Series and Stabilization of Distributed Semilinear Control Systems. C.P.A.M. XXXII (1979), p. 555-587.

BREZIS, H.

- [1] *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson. 1983.

CHEN, G.

- [1] Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain . J.M.P.A. (9) 58 (1979), p. 249-274.
- [2] Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain. Part I. SIAM J. Control and Optimization (17) 1 (1979), p. 66-81.
- [3] Control and Stabilization for the wave equation in a bounded domain. Part II. SIAM J. Control and Optimization 19 (1), (1981), p. 114-122.

CHEWNING, W.C.

- [1] Controllability of the non linear wave equation in several space variables. SIAM J. Control and Optimization. Vol 14. N° 1. 1976 , p. 19-25.

CIARLET, P.G.

- [1] A justification of the Von Karman equations. A.R.M.A. 75 (1980), p. 349-389.

CIORANESCU, D. & DONATO, P.

- [1] Exact internal controllability in perforated domains. A paraître.

DAUTRAY, R. & LIONS, J.L.

- [1] *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* Vol.3. Masson. Paris 1985.

DUVAUT, G. & LIONS, J.L.

- [1] *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod. Paris 1972.

EKELAND, I. & TEMAM, R.

- [1] *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, Gauthier-Villars 1974.

FATTORINI, H.O.

- [1] Boundary control systems. SIAM J. Control 6 (1968), p. 349–388.

GLOWINSKI, R. , LI, C. & LIONS, J.L.

- [1] A paraître.

GRISVARD, P.

- [1] *Elliptic problems in non smooth domains*, Pitman, 1985.
- [2] Contrôlabilité exacte dans des polygones et polyèdres. C.R. Acad. Sc. Paris. t. 304, Série I, n° 13, 1987.
- [3] Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. Preprint n° 153, Université de Nice, 1987.
- [4] Contrôlabilité exacte avec conditions mêlées. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 305, Série I, p. 363–366, 1987.

HARAUX, A.

- [1] On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations. A paraître dans "Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France, Seminar 87/88" . (H. BREZIS & J.L. LIONS, Editors), Research Notes in Math. Pitman.
- [2] Contrôlabilité exacte d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée. A paraître dans C.R. Acad. Sci. Paris. 1987.
- [3] Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. A paraître.

HO, L.F.

- [1] Observabilité frontière de l'équation des ondes. C.R. Acad. Sc. Paris, 302 p. 443-446, 1986.
- [2] Exact Controllability of second order hyperbolic systems with control in the Dirichlet boundary conditions. J.M.P.A. A paraître.

HÖRMANDER, L.

- [1] *Linear partial differential operators*, Springer- Verlag, 1976.

KOMORNIK, V.

- [1] Contrôlabilité exacte en un temps minimal, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série I, 1987, p. 223-225.

KOMORNIK, V. & ZUAZUA, E.

- [1] Stabilisation frontière de l'équation des ondes : Une méthode directe. C.R. Acad. Sc. Paris, t.305, série I, p. 605-608, 1987.

KRABS, W., LEUGERING, G. & SEIDMAN, T.I.

- [1] On Boundary Controllability of a Vibrating Plate. Appl. Math. Optim. 13, 1985, p. 205-229.

LAGNESE, J.

- [1] Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, J. Diff. Equations 50 (2) (1983), p. 163-182.
- [2] Boundary stabilization of linear elastodynamic systems. SIAM J. Control and Optimization. 21, 6, (1983), p. 968-984.
- [3] Stabilization of plates. To appear.
- [4] Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion. SIAM J. Cont. Opt. Vol. 21, n° 1 January 1983, p. 68-85.

LAGNESE, J. & LIONS, J.L.

- [1] *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*. Masson, 1988. Collection RMA.

LASIECKA , I. , LIONS, J.L. & TRIGGIANI, R.

- [1] Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators. J.M.P.A. 65, 1986, p. 149-192.

LASIECKA, I., & TRIGGIANI, R.

- [1] Uniform exponential energy decay in a bounded region with $L_2(0,T ; L_2(\Omega))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions. J. Diff. Eq. A paraître.
- [2] Exact controllability for wave equation with Neumann boundary control. A paraître.
- [3] Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with $L^2(\Sigma)$ -control only in the Dirichlet boundary conditions. Atti de la Accademia Nazionali dei Lincei, Rendiconti classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Vol. LXXXI (1987). Roma.
- [4] Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with controls in the Dirichlet and Neumann boundary conditions : A non-conservative case. A paraître.

LEUGERING, G.

- [1] Exact Boundary Controllability of an Integrodifferential Equation. Appl. Math. Opt. 15 (1987), p.223-250.
- [2] Optimal Controllability in Viscoelasticity of Rate Type. Math. in the Appl. Sci. 8 (1986), p. 368-386.

LIONS, J.L.

- [1] *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris. Dunod. 1968.
- [2] Contrôlabilité exacte des systèmes distribués. C.R. Acad. Sc. Paris, 302 (1986), p. 471-475.
- [3] Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. J. Von Neumann Lecture. Boston 1986. SIAM Review . March 1988.
- [4] *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*. Vol. 2 Perturbations. Masson. 1988. Collection RMA.
- [5] *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués*. Vol. 3 Stabilisation. Masson. En préparation.
- [6] Exact controllability, stabilization and singular perturbations. Colloque P. Lax. Berkeley 1986.
- [7] Contrôlabilité exacte et perturbations singulières (II). La méthode de dualité. Dans *Applications of Multiple Scaling in Mechanics* Ed. par P.G. CIARLET et E. SANCHEZ PALENCIA. Collection R M A. Masson. 1987.
- [8] Function spaces and optimal control of distributed systems. Conférence à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro. 1980.

- [9] *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control.* Science Press, Beijing et Gordon and Breach. 1981.
- [10] Some remarks on the optimal control of singular distributed systems. Berkeley.
- [11] *Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes aux Limites.* Springer- Grundlehren. t. 111. 1961.
- [12] *Contrôle des systèmes distribués singuliers.* Gauthier-Villars. Collection M.M.I. t. 13. 1983.
- [13] Un résultat de régularité pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2$, dans *Current Topics in Partial Differential Equations*, papers dedicated to S. MIZOHATA, ed. by Y. OHYA et al., Kinokuniya Company, Tokyo, 1986.
- [14] Some remarks on uniqueness properties. Edinburgh. 1986.
- [15] Colloque de Tbilissi . 1987 .

LIONS, J.L. & E. MAGENES

- [1] *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Vol. 1 et 2. DUNOD. Paris. 1968.

W. LITTMAN

- [1] Boundary control theory for hyperbolic and parabolic equations with constant coefficients. *Annali Sc. N. Sup. Pisa.* IV. (1978), p. 567-580.

W. LITTMAN & L. MARKUS

- [1] Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity. Univ. of Minnesota Tech. Report. 1987.

Y. MEYER

- [1] Travail à paraître sur le contrôle ponctuel.

K. NARUKAWA

- [1] Boundary value control of thermoelastic systems . Hiroshima Math. J. 13 (1983), p. 227-272.

A. PAZY

- [1] *Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* . Springer Verlag 1983.

T.R. ROCKAFELLAR

- [1] Duality and stability in extremum problems involving convex functionals. Pac. J. Math. 21 (1967), p. 167–187.

D.L. RUSSELL

- [1] Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. SIAM Rev. 20 (1978), p. 639–739.
- [2] A unified boundary controllability theory. Studies in applied Math. 52 (1973), p. 189–211.
- [3] The Dirichlet–Neumann boundary control problem associated with Maxwell's equations in a cylindrical region. SIAM J. Control and Optimization. 24, 2, (1986), p. 199–229.

S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG, & W. WEANER Jr.

- [1] *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley. 1974 (4^{eme} édition).

K. YOSIDA

- [1] *Functional Analysis*. Springer Verlag. Grundlehren. t. 123. 1974 (4^{eme} édition).

E. ZUAZUA

- [1] Contrôlabilité exacte d'un modèle de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série I, n°7, 1987, p.173–176.
- [2] Contrôle simultané de deux équations des ondes. A paraître.
- [3] Contrôle simultané de systèmes couplés. A paraître.
- [4] Exact controllability of distributed systems for arbitrarily small time. Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, 1987.
- [5] Contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution non-linéaires C.R. Acad. Sc. Paris, à paraître.

Appendice I

Contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques modèles de plaques (E. Zuazua)

1. INTRODUCTION.

L'obtention du temps minimal de contrôlabilité, selon la façon dont on agit sur le système est une des questions importantes qui se posent dans l'étude de la contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution.

Lorsque le système est hyperbolique la contrôlabilité exacte n'a lieu que pour des temps suffisamment grands. Ceci étant, quand il s'agit d'un système *non hyperbolique* il est naturel de s'attendre à la contrôlabilité exacte *en un temps arbitrairement petit*.

L'objet de cet appendice est de démontrer la contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques modèles déjà considérés dans les Chapitres IV et V de ce volume.

Afin d'illustrer les résultats qu'on démontre et de les comparer aux résultats obtenus précédemment, considérons le problème modèle suivant (qui sera étudié en détail dans le N° 2).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^∞ ; soit $T > 0$.

On considère le système d'évolution

$$(1.1) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

avec des conditions initiales et aux limites

$$(1.2) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad y = u ; \frac{\partial y}{\partial v} = v \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

Il s'agit d'un système qui, dans le cas de la dimension $n = 2$, modélise, de façon très simplifiée, les vibrations d'une plaque Ω . (cf. pour l'étude d'autres modèles J. LAGNESE et J.L. LIONS [4]).

On s'intéresse à la contrôlabilité exacte de ce système, c'est-à-dire, à la possibilité de trouver, pour $T > 0$ fixé et des conditions initiales $\{y^0, y^1\}$ données, un couple de contrôles $\{u, v\}$ tel que l'on ait

$$y(T) = y'(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Ce problème a déjà été considéré au Chapitre IV, N° 3 de ce volume, dans le cas où l'on a un seul contrôle v , i.e., sous la contrainte

$$(1.4) \quad u = 0,$$

et où en outre v n'intervient que *sur une partie du bord*.

Rappelons brièvement le résultat obtenu. Pour $x^0 \in \mathbb{R}^n$ posons $m(x) = x - x^0$. On considère la partition habituelle de la frontière latérale Σ :

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T)$$

$$(1.5) \quad \Sigma^*(x^0) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0) = \Gamma^*(x^0) \times (0, T)$$

avec

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma / m(x) \cdot v(x) > 0\}$$

$$(1.6) \quad \Gamma^*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0)$$

où " $v(x)$ " désigne la normale unitaire extérieure à Ω en $x \in \Gamma$.

Le résultat démontré dans le Théorème 3.4 du Chapitre IV de ce volume est le suivant :

Il existe $T(x^0) > 0$ tel que si $T > T(x^0)$, pour tout $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$

(1.7) il existe un contrôle $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tel que la solution

$y = y(v)$ de (1.1)(1.2)(1.3) vérifie $y(T) = y'(T) = 0$.

Ce résultat montre la contrôlabilité exacte du système pour T suffisamment grand, dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ et avec des conditions aux limites de la forme

$$(1.8) \quad y = 0 \text{ sur } \Sigma ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \begin{cases} v & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma_*(x^0), \end{cases} \quad v \in L^2(\Sigma(x^0)).$$

Cependant, comme on a déjà mentionné, la nature non-hyperbolique du système permet d'envisager la contrôlabilité exacte *en un temps arbitrairement petit*.

Un premier résultat dans cette direction a été démontré dans [9] mais avec *deux contrôles* $\{u, v\}$ *au lieu d'un seul*. Dans [9] on démontrait en fait la contrôlabilité exacte du système (1.1)(1.2)(1.3) en un temps arbitrairement petit et dans l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$, avec $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ et le contrôle u pouvant être choisi *arbitrairement régulier* et à *support arbitrairement petit*.

Le point clef de la démonstration de ce résultat reposait sur l'utilisation du critère d'unicité suivant, valable pour $T > 0$ arbitrairement petit et Σ_1 sous-ensemble ouvert non vide quelconque de Σ :

$$(1.9) \quad \Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0.$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

Ce résultat d'unicité avait été démontré à l'aide du Théorème de Holmgren (cf. L. Hörmander [3], Th. 5.3.3, rappelé au Lemme 3.6, Chapitre IV de ce volume).

Dans le N° 2 ci-après on démontre que l'action du deuxième contrôle u n'est en fait pas

nécessaire et que l'on a *contrôlability exacte en un temps arbitrairement petit avec $u = 0$* .

Ce résultat avait déjà été annoncé dans [10].

La démonstration de ce résultat repose sur l'utilisation du Théorème 3.7 , Chapitre IV de ce volume, qui réduit la question à l'obtention du critère d'unicité suivant :

$T > 0$ quelconque,

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \Phi'' + \Delta^2 \Phi &= 0 && \text{dans } Q \\ \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Delta \Phi &= 0 && \text{sur } \Sigma(x^0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \Phi = 0 .$$

Il faut noter que le résultat (1.10) n'est pas une conséquence du Théorème d'unicité de Holmgren. On l'a démontré en adaptant une technique introduite par C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH dans [1] pour l'étude de la contrôlability exacte de l'équation des ondes.

La méthode qu'on présente est générale et elle permet, en particulier, d'obtenir la contrôlability exacte en un temps arbitrairement petit pour divers systèmes d'évolution non-hyperboliques.

Dans les N°s 3 et 4 ci-après on étudie brièvement les modèles considérés respectivement dans les N° 4 , Chapitre IV et N° 3 , Chapitre V de ce volume et on démontre leur contrôlability exacte en un temps arbitrairement petit.

2. CONDITIONS AUX LIMITES DE DIRICHLET.

On considère le système (1.1)(1.2)(1.3), présenté dans l'Introduction, sous la contrainte (1.4).

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 2.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière Γ de classe C^3 . Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$ quelconques.

Alors, pour tout couple de données initiales

$$(2.1) \quad \{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

il existe un contrôle

$$(2.2) \quad v \in L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $y = y(v)$ de

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y'' + \Delta^2 y &= 0 && \text{dans } Q \\ y = 0 \quad \text{sur } \Sigma ; \frac{\partial y}{\partial \nu} &= v && \text{sur } \Sigma(x^0) \\ &0 && \text{sur } \Sigma_*(x^0) \\ y(0) &= y^0 ; y'(0) = y^1 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

vérifie $y(T) = y'(T) = 0$ dans Ω .

Démonstration.

Comme on a déjà mentionné dans l'Introduction, d'après le Théorème 3.7, Chap. IV de ce volume, il suffit de démontrer le critère d'unicité suivant :

Proposition 2.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^3 . Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$.

Alors, si

$$(2.4) \quad \Phi \in X = L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

est une solution de

$$(2.5) \quad \Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

telle que

$$(2.6) \quad \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

on a $\Phi \equiv 0$.

Démonstration.

Evidemment il suffit de montrer que l'espace de Hilbert Y défini par

$$Y = \{\Phi \in X \text{ vérifiant (2.5)(2.6)}\}$$

muni de la norme induite par X , vérifie

$$(2.7) \quad Y = \{0\}.$$

On procède en deux étapes.

Etape 1.

On démontre d'abord le

Lemme 2.1.

L'espace vectoriel Y est de dimension finie.

Démonstration du Lemme 2.1.

1) D'après l'estimation (3.127) du Chapitre IV de ce volume, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.8) \quad E_0 \leq C \{ \|\Delta \Phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \} \quad \forall \Phi \in X \text{ solution de (2.5)}$$

avec

$$(2.9) \quad E_0 = \frac{1}{2} \{ |\Delta\Phi(0)|^2 + |\Phi'(0)|^2 \}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$.

On peut démontrer aisément que

$$(2.10) \quad \exists C > 0 / \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \{ \|\Delta\Phi\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \}$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (2.5)

et donc

$$(2.11) \quad E_0 \leq C \{ \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta\Phi|^2 d\Sigma + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \} \quad \forall \Phi \in X \text{ solution de (2.5)}$$

pour $C > 0$ assez grand.

En effet, on raisonne par l'absurde. Si (2.10) n'est pas vrai, il existe une suite Φ_n de solutions de (2.4)(2.5) telle que

$$(2.12) \quad \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta\Phi_n|^2 d\Sigma + \|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$(2.13) \quad \|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1.$$

Mais d'après (2.8) et la loi de conservation de l'énergie, il en résulte que

$$(2.14) \quad \Phi_n \text{ est bornée dans } X$$

et donc, d'après la compacité de l'injection $X \rightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ (cf. J. SIMON [8])

$$(2.15) \quad \Phi_n \text{ est relativement compacte dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Quitte à extraire des sous-suites on a alors

$$(2.16) \quad \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ fort}$$

et d'après (2.13)

$$(2.17) \quad \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = 1.$$

Mais $\|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; donc $\Phi = 0$, ce qui contredit (2.17).

2) A partir de (2.11) la démonstration du Lemme peut être conclue facilement. C'est ici qu'on adapte les méthodes de [1].

On observe que si $\Phi \in Y$ alors $\zeta = \Phi'$ vérifie (2.5)(2.6) et $\zeta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. D'après (2.11) on a donc

$$\{\zeta(0), \zeta'(0)\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et par la loi de conservation de l'énergie $\zeta \in X$. On a donc

$$(2.18) \quad \Phi \rightarrow \Phi' \text{ applique } Y \rightarrow Y \text{ avec continuité.}$$

D'après les résultats de J. SIMON [8], on peut démontrer aisément que

$$(2.19) \quad \text{l'injection } \{\Phi \in Y, \Phi' \in Y\} \rightarrow Y \text{ est compacte}$$

De (2.18)(2.19), on déduit donc que la dimension de Y est finie. Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Etape 2.

Voyons maintenant que l'espace Y se réduit en fait à $\{0\}$.

Supposons $Y \neq \{0\}$.

D'après (2.18), et en "complexifiant" la situation, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\Phi \in Y - \{0\}$ tels que

$$(2.20) \quad \Phi' = \lambda\Phi.$$

Donc (2.20) implique

$$(2.21) \quad \Phi(x,t) = \exp(\lambda t) \Phi(x,0).$$

De (2.5)(2.6) et (2.21) on déduit que

$$\Phi \in L^\infty(\mathbb{R} ; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R} ; L^2(\Omega))$$

$$(2.22) \quad \Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (-\infty, +\infty)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma(x^0) \times (-\infty, +\infty).$$

Mais grâce au critère d'unicité démontré dans le Corollaire 3.2 , Chap IV de ce volume on sait que (2.22) implique $\Phi \equiv 0$. On obtient ainsi une contradiction, ce qui achève la démonstration de la Proposition 2.1. ■

Comme on a déjà mentionné, le Théorème 2.1 est maintenant une conséquence du Théorème 3.7, Chapitre IV de ce volume et de la Proposition 2.1.

En fait, à partir de l'estimation (2.11) (ou (2.8)) et de la Proposition 2.1 , on établit l'estimation

$$(2.23) \quad \forall T > 0 , \exists C > 0 / E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma \quad \forall \Phi \in X \text{ solution de (2.5)}$$

et ensuite on applique HUM. ■

3. CONDITIONS AUX LIMITES PORTANT SUR y ET Δy .

Dans ce paragraphe on étudie la contrôlabilité exacte du système

$$(3.1) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.2) \quad y(0) = y^0 ; y'(0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.3) \quad y = \begin{cases} v_0 & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases} ; \quad \Delta y = \begin{cases} v_1 & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0). \end{cases}$$

Ce problème a déjà été considéré au N° 4 , Chapitre IV de ce volume où le résultat suivant a été établi :

$$\forall x^0 \in \mathbb{R}^n \quad \exists T(x^0) > 0 \quad \text{tel que si } T > T(x^0), \text{ alors}$$

$$\forall \{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times V'$$

$$(3.4) \quad \text{avec } V = \{\varphi \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) / \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$\exists \{v_0, v_1\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times (H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))))'$$

tel que la solution $y = y(v)$ de (3.1)(3.2)(3.3) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0$$

Nous démontrons ici la contrôlabilité exacte de ce système pour tout $T > 0$. Plus précisément on a le résultat suivant, annoncé dans [9].

Théorème 3.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$ quelconques.

Alors pour tout couple de données initiales

$$(3.5) \quad \{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times V'$$

il existe un couple de contrôles

$$(3.6) \quad \{v_0, v_1\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times (H^1(0, T ; L^2(\Gamma(x^0))))'$$

tel que la solution y du système (3.1)(3.2)(3.3) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0 .$$

Démonstration.

En appliquant HUM, la démonstration du théorème se réduit à l'obtention de l'estimation

suivante

$$(3.7) \quad \exists C > 0 \mid E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma$$

$\forall \Phi \in X = L^\infty(0, T ; V) \cap W^{1,\infty}(0, T ; H_0^1(\Omega))$ solution de

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(3.8) \quad \Phi(0) = \Phi^0 \in V, \Phi'(0) = \Phi^1 \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Phi = \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

avec

$$(3.9) \quad E_0 = \frac{1}{2} \{ |\nabla \Delta \Phi^0|^2 + |\nabla \Phi^1|^2 \}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme de $(L^2(\Omega))^n$.

La méthode de démonstration est analogue à celle introduite dans le paragraphe 2.

Etape 1.

Grâce à l'identité (4.75), Chapitre IV de ce volume, on a

$$2TE_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma + |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))|_0^T |$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (3.8)

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

On a, pour $C > 0$ assez grand,

$$(3.11) \quad |(\Phi'(t), m_k \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x_k}(t) + \frac{n}{2} \Delta \Phi(t))|_0^T | = |(\Delta \Phi(t), \frac{\partial}{\partial x_k} (m_k \Phi'(t)) - \frac{n}{2} \Phi'(t))|_0^T | \leq TE_0 + C \|\Delta \Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 .$$

En combinant (3.10) et (3.11) on obtient donc, pour $C > 0$ assez grand,

$$(3.12) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma + \|\Delta \Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}.$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (3.8).

Etape 2.

Par l'argument de compacité utilisé dans la partie 1 de la démonstration du Lemme 2.1 précédent, on obtient

$$(3.13) \quad \|\Delta \Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (3.8)

et aussitôt

$$(3.14) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma(x^0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (3.8).

Etape 3.

On démontre ensuite le critère d'unicité suivant :

Lemme 3.1.

Sous les hypothèses du Théorème 3.1, si $\Phi \in X$ est une solution de (3.8) telle que

$$(3.15) \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(x^0)$$

alors $\Phi = 0$.

Ce lemme peut être démontré de deux manières différentes.

Démonstration 1.

C'est l'exact analogue de la démonstration de la Proposition 2.1.

On démontre d'abord, à partir de l'estimation (3.14), que l'espace vectoriel

$$Y = \{\Phi \in X \text{ vérifiant (3.8) et (3.15)}\}$$

est de dimension finie.

On démontre ensuite, en utilisant le critère d'unicité du Corollaire 4.2, Chapitre IV de ce volume, qu'en fait $Y = \{0\}$. ■

Démonstration 2.

Le Lemme 3.1 est aussi une conséquence directe du Théorème d'unicité d'Holmgren (cf. N° 4.8, Chap. IV de ce volume). ■

Etape 4.

Grâce à (3.14), pour aboutir à l'estimation (3.7), il suffit de montrer que pour $C > 0$ assez grand

$$(3.16) \quad \|\Phi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C \int_{\Sigma(x_0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma$$

$\forall \Phi \in X$ solution de (3.8).

On raisonne par l'absurde. Si (3.16) n'est pas vrai, il existe une suite Φ_n de solutions de (3.8) telle que

$$(3.17) \quad \int_{\Sigma(x_0)} \left(\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial v} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \Phi_n}{\partial v} \right|^2 \right) d\Sigma \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$(3.18) \quad \|\Phi_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De (3.14)(3.17)(3.18) on a

$$(3.19) \quad \Phi_n \text{ bornée dans } X$$

et par compacité (cf. J. SIMON [8])

$$(3.20) \quad \Phi_n \text{ relativement compacte dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Quitte à extraire des sous-suites on a donc

$$(3.21) \quad \begin{array}{ccc} \Phi_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & \Phi \\ & & \text{dans } L^\infty(0,T;V) & \text{faible *} \end{array}$$

$$\Phi'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi' \quad \text{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible *}$$

$$(3.22) \quad \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ fort}$$

et donc, grâce à (3.18),

$$(3.23) \quad \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 1.$$

De (3.17) et (3.21) on déduit que $\Phi \in X$ est une solution de (3.8) qui vérifie (3.15) et d'après le Lemme 3.1, $\Phi \equiv 0$. On a donc une contradiction.

Ceci achève la démonstration de l'estimation (3.7) et du Théorème 3.1. ■

Remarque 3.1.

Pour contrôler exactement ce système (3.1)(3.2)(3.3) on a utilisé deux contrôles (au lieu d'un seul dans le cas considéré au paragraphe 2). Néanmoins, il faut noter que ces deux contrôles ne sont pas indépendants (leur lien est mis en évidence dans l'application de HUM, cf. N° 4.7, Chapitre IV de ce volume).

On a en fait,

$$v_0 = - \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v}$$

(3.24)

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial v} \right)$$

où Φ désigne une solution $\Phi \in X$ de (3.8) (celle donnée par HUM). On note que la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ dans (3.24)₂ n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $(H^1(0,T; L^2(\Gamma(x^0))))$ et son dual $(H^1(0,T; L^2(\Gamma(x^0))))'$.

La contrôlabilité exacte de ce système avec l'action d'un seul contrôle est un problème essentiellement ouvert.

Il y a des résultats positifs dans cette direction dûs à J. BALL (cf. N° 4.8, Chapitre IV de ce volume). Ces résultats concernent le cas où Ω est un rectangle de \mathbb{R}^2 . Le cas général est un problème ouvert. ■

4. CONTROLABILITE EXACTE SIMULTANEE.

Dans ce paragraphe on étudie la contrôlabilité exacte du système

$$y_i'' + \Delta^2 y_i = 0 \quad \text{dans } Q, \quad i = 1, 2$$

$$y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$(4.1) \quad y_2 = \begin{cases} v_2 & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases}, \quad \Delta y_2 = v_1' \quad \text{sur } \Sigma$$

$$y_i(0) = y_i^0, \quad y_i'(0) = y_i^1 \quad \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2.$$

Ce problème a déjà été considéré au N° 3, Chap. V de ce volume. On avait le résultat suivant :

$\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists T(x^0) > 0$ tel que si $T > T(x^0)$ alors

$$\forall \{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times V'$$

$$\text{avec } V = \{\varphi \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) / \Delta \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$(4.2) \quad \exists \{v_1, v_2\} \in L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\}$ de (4.1) vérifie

$$y_i(T) = y'_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, 2.$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer qu'en fait ce résultat est vrai pour $T > 0$ quelconque.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 4.1.

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$ quelconques.

Alors, pour tout ensemble de conditions initiales

$$(4.3) \quad \{y_1^0, y_1^1, y_2^0, y_2^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times V'$$

il existe un couple de contrôles

$$(4.4) \quad \{v_1, v_2\} \in L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma(x^0))$$

tel que la solution $\{y_1, y_2\}$ du système (4.1) vérifie

$$y_i(T) = y'_i(T) = 0 \text{ dans } \Omega, i = 1, 2.$$

Démonstration.

On applique HUM (cf. N° 3.3, Chap. V de ce volume pour les détails). On se ramène donc

CONTRÔLABILITÉ EXACTE SIMULTANÉE

à l'étude du système homogène

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Phi'' + \Delta^2 \Phi_i &= 0 && \text{dans } Q, \quad i = 1, 2 \\ \Phi_1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Phi_2 &= \Delta \Phi_2 = 0 && \text{sur } \Sigma \\ \Phi_i(0) &= \Phi_i^0, \Phi'_i(0) = \Phi_i^1 && \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

et plus précisément à l'obtention de l'estimation

$$(4.6) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma} (\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \right\}$$

$\forall \{\Phi_1, \Phi_2\} \in X$ solution de (4.5)

avec

$$X = (L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))) \times (L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)))$$

$$E_0 = E_{01} + E_{02}$$

$$(4.7) \quad E_{01} = \frac{1}{2} \left\{ |\Phi^1|^2 + |\Delta \Phi^0|^2 \right\}$$

$$E_{02} = \frac{1}{2} \left\{ |\nabla \Phi^1|^2 + |\nabla \Delta \Phi^0|^2 \right\}$$

où $|\cdot|$ désigne aussi bien la norme de $L^2(\Omega)$ que celle de $(L^2(\Omega))^n$.

La méthode de démonstration de cette estimation repose sur les techniques introduites dans le Chapitre V de ce volume et celles utilisées dans les paragraphes précédents.

On procède en plusieurs étapes.

Etape 1.

D'après (2.23) et (3.7) on a l'estimation suivante :

$\forall T > 0, \exists C > 0$ telle que

$$(4.8) \quad E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} ((\Delta \Phi_1)^2 + (\frac{\partial \Phi_2'}{\partial v})^2 + (\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v})^2) d\Sigma$$

$\forall \{\Phi_1, \Phi_2\} \in X$ solution de (4.5).

Etape 2.

D'après l'identité (3.23), Chapitre V de ce volume, on a :

$$(4.9) \quad \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2'}{\partial v} d\Sigma = \{(\Phi_1'(t), \Phi_2'(t)) + (\Delta \Phi_1(t), \Delta \Phi_2(t))\}|_0^T$$

et donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$(4.10) \quad \left| \int_{\Sigma} \Delta \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2'}{\partial v} d\Sigma \right| \leq \varepsilon E_0 + C_\varepsilon (\|\Phi_2'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta \Phi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2).$$

On note que pour obtenir (4.9), il suffit de multiplier l'équation associée à Φ_1 (resp. Φ_2) par Φ_2' (resp. Φ_1'), d'intégrer par parties et d'additionner.

En combinant (4.8) et (4.10) avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit il vient

$$(4.11) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma} (\Delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial v})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial \Delta \Phi_2}{\partial v})^2 d\Sigma + \right.$$

$$\left. + \|\Phi_2'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta \Phi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}$$

$\forall \{\Phi_1, \Phi_2\} \in X$ solution de (4.5).

Etape 3.

Par les arguments des N°s précédents on démontre qu'en fait

$$(4.12) \quad \|\Phi_2'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta\Phi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq$$

$$\leq C \left\{ \int_{\Sigma} (\Delta\Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2'}{\partial\nu})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial\Delta\Phi_2}{\partial\nu})^2 d\Sigma + \|\Phi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}$$

et donc

$$(4.13) \quad E_0 \leq C \left\{ \int_{\Sigma} (\Delta\Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2'}{\partial\nu})^2 d\Sigma + \int_{\Sigma(x^0)} (\frac{\partial\Delta\Phi_2}{\partial\nu})^2 d\Sigma + \|\Phi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\}$$

$\forall \{\Phi_1, \Phi_2\} \in X$ solution de (4.5).

Etape 4.

Par la méthode présentée dans la démonstration de la Proposition 2.1 on établit ensuite le critère d'unicité suivant.

Lemme 4.1.

Sous les hypothèses du Théorème 4.1, si $\{\Phi_1, \Phi_2\} \in X$ est une solution de (4.5) telle que

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \Delta\Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2'}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial\Delta\Phi_2}{\partial\nu} &= 0 && \text{sur } \Sigma(x^0) \end{aligned}$$

on a $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$.

Etape 5.

L'argument de l'Etape 4 de la démonstration du Théorème 3.1 permet d'aboutir à (4.6) à partir de (4.13) et (4.14).

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 4.1.

La dérivée v'_1 dans (4.1) n'est pas prise au sens des distributions mais au sens de la dualité entre $H^1(0, T; L^2(\Gamma))$ et son dual. Donc $v'_1 \in (H^1(0, T; L^2(\Gamma)))'$. ■

5. QUELQUES REMARQUES**Remarque 5.1.**

Les résultats présentés dans les N°s précédents montrent la contrôlability exacte en un temps arbitrairement petit des systèmes considérés dans un espace *indépendant du point* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ choisi. Alors, du point de vue des applications et dans le but de "minimiser" le support $\Sigma(x^0)$ des contrôles, on prendra $x^0 \in \mathbb{R}^n$ de sorte que "la taille de $\Gamma(x^0)$ soit minimale". Cependant, il est évident qu'un ensemble de la forme $\Gamma(x^0)$ est, quel que soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$, un sous-ensemble "assez gros" de Γ .

Un problème intéressant reste essentiellement ouvert dans chacune des trois situations considérées. A savoir, la contrôlability exacte avec des contrôles à support dans un sous-ensemble de Γ qui ne contient aucun ensemble de la forme $\Gamma(x^0)$. ■

Remarque 5.2.

Les solutions des systèmes non-homogènes étudiés sont définies à l'aide de la méthode de transposition (cf. les N°s correspondants aux Chapitres IV et V de ce volume). Il s'agit de *solutions faibles*. ■

Remarque 5.3.

Les Théorèmes 3.1, 4.1 et 5.1 démontrés dans cet Appendice fournissent des résultats "modèles" de contrôlability exacte. A l'aide des techniques habituelles de changement des normes on peut démontrer d'autres variantes. ■

Remarque 5.4.

Dans chaque situation où l'on a démontré la contrôlability exacte on peut en fait démontrer que pour des conditions initiales données, il existe une infinité de contrôles ramenant le système à l'état d'équilibre. Le contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonction quadratique associée sur l'ensemble de contrôles admissibles. Par exemple, dans la situation du N° 2, le

contrôle donné par HUM est celui qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} |v|^2 d\Sigma$$

sur l'ensemble de contrôles admissibles

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ v \in L^2(\Sigma(x^0)) / y(T; v) = y'(T; v) = 0 \}.$$
■

Remarque 5.5.

Les résultats démontrés s'étendent, avec les mêmes méthodes de démonstration, au cas des équations de la forme

$$(5.1) \quad y'' + (-\Delta)^p y = 0 \quad \text{dans } Q$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ et avec diverses conditions aux limites.

■

Remarque 5.6.

Dans [10] on a démontré la contrôlabilité exacte *interne* du système

$$(5.2) \quad \begin{aligned} y'' + \Delta^2 y &= h && \text{dans } Q \\ y = \frac{\partial y}{\partial v} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\ y(0) &= y^0; y'(0) = y^1 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

en un temps arbitrairement petit.

Plus précisément, on a établi le résultat suivant.

Sous les hypothèses du Théorème 2.1, soit ϑ un voisinage quelconque de $\overline{\Gamma(x^0)}$ dans Ω . Alors, pour tout couple de données

$$(5.3) \quad \{y^0, y^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe un contrôle $h \in L^2(Q)$ avec support de $h \subset \vartheta \times]0, T[$ tel que la solution $y = y(h)$ de (5.2) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0.$$

Un résultat analogue peut être démontré pour les conditions aux limites $y = \Delta y = 0$. ■

Remarque 5.7.

Considérons le système :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} y'' + \Delta^2 y &= 0 && \text{dans } Q \\ y &= v_1 && \text{sur } \Sigma \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \begin{cases} 0 & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ v_2 & \text{sur } \Sigma^*(x^0) \end{cases} \\ y(0) &= y^0, y'(0) = y^1 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

On a le résultat de contrôlabilité exacte suivant :

"Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe C^4 . Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$ et

$$\{y^0, y^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times (H^3 \cap H_0^2(\Omega))'.$$

Alors, il existe un couple de contrôles

$$\{v_1, v_2\} \in L^2(\Sigma) \times L^2(0, T ; (H^1(\Gamma^*(x^0)))')$$

tel que la solution $y = y(x,t)$ de (5.4) vérifie

$$y(T) = y'(T) = 0 \quad .$$

On note la complémentarité de ce résultat et du Théorème 2.1. Dans le n° 2, on avait démontré la contrôlabilité exacte du système avec un seul contrôle portant sur $\frac{\partial y}{\partial v} |_{\Sigma(x^0)}$ et avec $\frac{\partial y}{\partial v} |_{\Sigma_*(x^0)} = y |_{\Sigma} = 0$. Ce résultat démontre la contrôlabilité exacte sous la contrainte $\frac{\partial y}{\partial v} |_{\Sigma(x^0)} = 0$.

On note que lorsque Ω est étoilé par rapport à x^0 , la contrôlabilité exacte a lieu avec un seul contrôle v_1 portant sur $y|_{\Sigma}$.

Ce résultat étend des résultats précédents de I. LASIECKA et R. TRIGGIANI [5], [6], qui par des raisons techniques dûes à la complexité de leur démonstration nécessitaient Ω strictement étoilé. D'autre part, dans le cas général, dans [5], [6], le contrôle v_2 était pris à support dans Σ tout entier.

La méthode de démonstration est essentiellement celle qu'on a utilisé dans les n°s précédents. On procède en plusieurs étapes :

Etape 1.

On applique HUM et on se ramène à l'obtention de l'estimation suivante :

$$(5.5) \quad \|\Phi^0\|_{H^3(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \right|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} |\nabla_{\sigma} \Delta \Phi|^2 d\Sigma \right\}$$

pour tout $\{\Phi^0, \Phi^1\} \in (H^3 \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, où $\Phi = \Phi(x,t)$ désigne la solution de

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi'(0) = \Phi^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Etape 2.

Par la méthode des multiplicateurs habituelle, on obtient (on utilise cette fois, comme au n° 4 du Chapitre IV de ce volume, les multiplicateurs $m \cdot \nabla \Delta \Phi$ et $\Delta \Phi$) :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [|\nabla \Phi'|^2 + |\nabla \Delta \Phi|^2] dx dt \leq \\ & \leq \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} m \cdot \nabla \Delta \Phi d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m \cdot v |\nabla \Delta \Phi|^2 d\Sigma + \frac{n}{2} \left| \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \Delta \Phi d\Sigma \right| + \\ & + \left| (\Delta \Phi, \frac{\partial}{\partial x_k} (m_k \Phi') - \frac{n}{2} \Phi') \right|_0^T. \end{aligned}$$

Etape 3.

On démontre qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $T > 0$ on ait (cf. [5],[6])

$$(5.7) \quad \gamma T [\|\Phi^0\|_{H^3(\Omega)}^2 + \|\Phi^1\|_{H^1(\Omega)}^2] \leq \int_0^T \int_{\Omega} [|\nabla \Phi'|^2 + |\nabla \Delta \Phi|^2] dx dt.$$

Pour cela on introduit l'opérateur

$$A = \Delta^2 : H_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega); D(A) = H^4 \cap H_0^2(\Omega).$$

L'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \{ |A^{3/4} \Phi(t)|^2 + |A^{1/4} \Phi'(t)|^2 \}$$

et conservée le long de toute trajectoire et d'autre part, d'après P. GRISVARD [2], $(E(t))^{1/2}$ définit sur $(H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ une norme équivalente à l'induite par $H^3(\Omega) \times H^1(\Omega)$. On obtient ainsi (5.7).

Etape 4.

D'après l'inégalité directe du n° 3 , Chapitre IV de ce volume, on a

$$\int_{\Sigma} |\Delta \Phi|^2 d\Sigma \leq C \{ \|\Phi'\|_{L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega))}^2 + \|\Delta \Phi\|_{L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega))}^2 \}$$

On a donc, pour $C > 0$ assez grand ,

$$(5.8) \quad \frac{n}{2} \left| \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} \Delta \Phi d\Sigma \right| + \left| (\Delta \Phi, \frac{\partial}{\partial x_k} (m_k \Phi') - \frac{n}{2} \Phi') \Big|_0^T \right| \leq$$

$$\leq \frac{\gamma T}{4} [\| \Phi^0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \Phi^1 \|_{H^1(\Omega)}^2] + C \{ \| \Phi' \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 + \| \Delta \Phi \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 \}.$$

Par ailleurs, d'après J.L. LIONS [7], on a

$$\int_{\Sigma} | \nabla_{\sigma} \Delta \Phi |^2 d\Sigma \leq C [\| \Phi^0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \Phi^1 \|_{H^1(\Omega)}^2].$$

Donc, pour $C > 0$ assez grand,

$$(5.9) \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} m \cdot \nabla \Delta \Phi d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m \cdot v | \nabla \Delta \Phi |^2 d\Sigma =$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} m \cdot v | \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} |^2 d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} m \cdot \nabla_{\sigma} \Delta \Phi d\Sigma -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Sigma_*(x^0)} m \cdot v | \nabla_{\sigma} \Delta \Phi |^2 d\Sigma \leq$$

$$\leq \frac{\gamma T}{4} [\| \Phi^0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \Phi^1 \|_{H^1(\Omega)}^2] + C \{ \int_{\Sigma} | \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} |^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} | \nabla_{\sigma} \Delta \Phi |^2 d\Sigma \}.$$

En combinant (5.6)(5.7)(5.8)(5.9), on obtient

$$(5.10) \quad \frac{\gamma T}{2} [\| \Phi^0 \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \Phi^1 \|_{H^1(\Omega)}^2] \leq C \{ \int_{\Sigma} | \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial v} |^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_*(x^0)} | \nabla_{\sigma} \Delta \Phi |^2 d\Sigma +$$

$$+ \| \Phi' \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 + \| \Delta \Phi \|_{L^\infty(0,T; L^2(\Omega))}^2 \} .$$

Etape 5.

Grâce à l'estimation (5.10) et par les arguments des n°s précédents, on se ramène à l'obtention du critère d'unicité suivant :

$$\Phi'' + \Delta^2 \Phi = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad \Rightarrow \Phi = 0 .$$

$$\nabla_\nu \Delta \Phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma^*(x^0)$$

Ce critère d'unicité peut être démontré à partir de l'estimation (5.10) en adaptant la méthode des n^os précédents.

Une démonstration détaillée de ce résultat sera donnée dans [11].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques, Appendice II de ce volume.
- [2] P. GRISVARD. Une caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Mech. Anal., 25 (1967), 40–63.
- [3] L. HORMANDER. *Linear partial differential operators*. Springer-Verlag, 1976.
- [4] J. LAGNESE et J.L LIONS. *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*. Masson, 1988. Collection RMA.
- [5] I. LASIECKA et R. TRIGGIANI. Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with $L^2(\Sigma)$ -control only in the Dirichlet boundary conditions, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Vol. LXXXI (1987) Roma.
- [6] I. LASIECKA et R. TRIGGIANI. Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with controls in the Dirichlet and Neumann boundary conditions : A non-conservative case. A paraître.

- [7] J.L. LIONS. Un résultat de régularité pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2$, dans *Current Topics in Partial Differential Equations*, papers dedicated to S. Mizohata, ed. by Y. OHYA et al, Kinokuniya Company, Tokyo, 1986.
- [8] J. SIMON . Compact sets in the space $L^p(0, T ; B)$. Annali di Matematica pura ed applicata. (IV), vol. CXLVI, (1987), pp. 65–96.
- [9] E. ZUAZUA. Contrôlabilité exacte d'un modèle de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série I, N°7, 1987, p. 173–176.
- [10] E. ZUAZUA. Exact controllability of distributed systems for arbitrarily small time. Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, 1987.
- [11] E. ZUAZUA. A paraître.

Appendice 2

Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques (C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch)

(rédigé par C. Bardos d'après des travaux en cours)

1. INTRODUCTION.

On se propose de montrer comment la notion de propagation peut être utilisée dans le traitement des problèmes de contrôle et de stabilisation pour les solutions d'équations hyperboliques. Plus particulièrement on donnera des conditions pratiquement nécessaires et suffisantes sur la région sur laquelle s'exerce l'action pour avoir exacte contrôlabilité et stabilisation. Dans le cas de l'exacte contrôlabilité on fait appel à la méthode HUM exposée dans cet ouvrage. Mais les estimations que l'on obtient ici s'avèrent être le complément optimal de cette méthode pour obtenir (en ce qui concerne les problèmes hyperboliques) les résultats les plus précis. L'essentiel de ce travail est consacré au problème de Dirichlet pour l'équation des ondes à coefficients constants mais le lecteur remarquera les points suivants.

(i) Le fait que les coefficients soient constants simplifie sensiblement les notations mais les démonstrations restent entièrement valables pour des équations à coefficients variables pourvu que ces coefficients soient C^∞ ou dans certains cas analytiques. D'ailleurs certaines étapes des démonstrations décrites ci-dessous nécessitent une réduction locale à un problème dans un demi espace et une transformation du d'Alembertien en un opérateur mis sous une forme canonique donnée par Sjöstrand [31]. A ce niveau on ne peut plus parler de problème à coefficients constants. Par contre dans l'état actuel de notre travail nous n'avons pas abordé des problèmes posés dans des ouverts avec "coins" ou des problèmes mêlés comme cela est réalisé (dans des géométries particulières) par P. Grisvard [10].

(ii) Les conditions géométriques nécessaires de contrôlabilité et de stabilisation n'apparaissent pas ici pour la première fois; leur énoncé n'est qu'une relecture dans le contexte présent de résultats classiques en théorie du Scattering ou de la propagation des singularités. Le premier résultat de ce type est dû à Ralston [29] (1969). Il a été obtenu sans usage de la notion de front d'onde. Néanmoins l'utilisation de ces notions conduit à des preuves plus rapides et à des énoncés plus précis, en particulier dans le cadre de la propagation analytique introduite par Sjöstrand [32] (1980).

(iii) La démonstration de la contrôlabilité exacte repose sur la méthode HUM et fait appel à la preuve d'une inégalité à priori. L'obtention de cette inégalité constitue l'essentiel de notre travail et elle comporte plusieurs étapes :

(1) L'obtention d'une régularité locale ou microlocale et la propagation de cette régularité à l'aide des résultats de Melrose et de Sjöstrand [25].

(2) La démonstration, par un argument de dimension finie d'un théorème d'unicité.

(3) L'utilisation du théorème du graphe fermé. Comme on le verra cette dernière étape n'est pas triviale; mais la méthode est standard aussi. On énonce et démontre un théorème abstrait que l'on appellera théorème du graphe fermé dans les espaces de trace.

On désigne donc par \square l'opérateur : $\square u = \partial_t^2 u - \Delta u$ et par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ analytique. On notera v la normale extérieure à la frontière de cet ouvert et ∂_v la dérivation selon la direction de cette normale. On introduit une partie Γ_0 de Γ et un nombre T (positif pour fixer les idées, bien que certaines situations soient réversibles) et on considère essentiellement les deux problèmes modèles suivants

Problème 1. Exacte contrôlabilité du problème de Dirichlet.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse, à toute donnée de Cauchy $(u_0(x), u_1(x))$ associer un contrôle $g(x,t)$ défini sur $\Gamma_0 \times (0,T)$ de manière à ce que la solution du problème

$$(1) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (u(x,0), \partial_t u(x,0)) = (u_0(x), u_1(x))$$

$$(2) \quad u|_{(\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0,T)} = 0, \quad u|_{\Gamma_0 \times (0,T)} = g(x,t)$$

vérifie pour $t = T$ les relations : $(u(x,T), \partial_t u(x,T)) = 0$.

On dit alors qu'il y a contrôlabilité exacte.

Problème 2. Stabilisation à la frontière.

On considère le problème d'évolution

$$(3) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (u(x,0), \partial_t u(x,0)) = (u_0(x), u_1(x))$$

$$(4) \quad u|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0, \quad \partial_\nu u + \lambda(x) \partial_t u|_{\Gamma_0} = 0, \text{ pour } t \geq 0.$$

Dans (4) $\lambda(x)$ désigne une fonction positive et on sait que ce problème est bien posé pour t positif et que si Γ_0 est un ouvert non vide de Γ l'énergie de la solution temps vers zéro. Ce résultat est du à Iwasaki [17], par souci de complétude nous en donnerons une brève démonstration. Néanmoins cette décroissance de l'énergie peut être dans certain cas arbitrairement lente. Aussi on parle de stabilisation lorsqu'on peut assurer une décroissance exponentielle (ou ce qui revient au même uniforme) de l'énergie pour toute donnée initiale d'énergie finie.

Les résultats que nous nous proposons de montrer sont en gros les suivants :

Si tout rayon se propageant selon les lois de l'optique géométrique et se réfléchissant sur le bord de Ω (également selon les lois de l'optique géométrique) rencontre au moins une fois Γ_0 dans l'intervalle de temps $]0, T[$ il y a contrôlabilité exacte. Inversement s'il existe un rayon qui ne rencontre pas la fermeture de Γ_0 il n'y a pas contrôlabilité exacte. S'il existe un temps T tel que dans l'intervalle de temps $]0, T[$ tout rayon rencontre Γ_0 il y a stabilisation pour le problème (3), (4). Inversement, si pour tout temps T il existe au moins un rayon ne rencontrant pas Γ_0 dans l'intervalle $]0, T[$ il n'y a pas stabilisation.

Il a été démontré par Lasiecka et Triggiani [19] (cf. également Lions [21]) que la contrôlabilité exacte entraînait l'existence d'un stabilisateur. Ici nous traitons séparément ces deux problèmes. Mais bien entendu nous montrons qu'ils sont tous deux résolubles sous des hypothèses analogues. Nous employons pour la stabilisation une méthode inspirée de la contrôlabilité mais qui est cependant "directe". Au lieu de prouver l'existence d'un stabilisateur, nous prouvons que la condition aux limites $\partial_t u + \lambda(x) \partial_\nu u = 0$ sur une partie de $\partial\Omega$ stabilise effectivement le problème. La méthode employée pourra également permettre d'analyser la stabilisation par d'autres relations de la forme $\partial_t u + K(x) \partial_\nu u = 0$ où K désigne un opérateur positif convenable. La lecture des démonstrations permettra de se rendre compte que des généralisations à des opérateurs non linéaires sont envisageables (cf également Komornik et Zuazua [18]).

La relation entre la propagation et la stabilisation avait déjà été dégagée par Rauch et Taylor [30] en considérant soit une variété sans bord (au lieu d'un ouvert de \mathbb{R}^d) et une stabilisation par un terme de la forme $b(x) \partial_t u$, soit une condition aux limites quand Ω est réduit à un intervalle borné de \mathbb{R} . La difficulté fondamentale provient bien sûr de la frontière

et plus particulièrement des rayons glissants et des définitions plus précises sont nécessaires. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

2. NOTATIONS ET RAPPELS SUR L'ANALYSE LOCALE ET MICROLOCALE.

L'expérience montre qu'il est souvent utile de négliger le rôle particulier joué par la variable de temps. Dans cet esprit on posera $M = \Omega \times \mathbb{R}_t$, $\partial M = \Gamma \times \mathbb{R}_t$ dans le cadre du contrôle (et $M = \Omega \times \mathbb{R}_{t+}$, $\partial M = \Gamma \times \mathbb{R}_{t+}$ dans le cadre de la stabilisation). On considérera comme solutions de

$$(5) \quad \square u = 0$$

des distributions prolongeables (DP), c'est à dire, des distributions qui sont restrictions à M de distributions définies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t$.

On dira qu'une solution est dans l'espace de Sobolev H^s (s positif ou négatif) si pour un L fini non nul on a $u \in H^s(\Omega \times (0, L))$ (On néglige la non intégrabilité pour t tendant vers l'infini). Cette propriété est bien sûr indépendante de L . En particulier on voit que, pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann, l'espace H^1 coincide algébriquement et topologiquement avec l'espace des solutions qui à un instant donné quelconque (en particulier pour $t = 0$) sont d'énergie finie, c'est à dire, vérifient la relation classique

$$(6) \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, 0)|^2 + |\nabla_x u(x, 0)|^2) dx < +\infty.$$

Comme le bord de M est non caractéristique pour le d'Alembertien et que toute distribution est localement d'ordre fini on peut prolonger par zéro en dehors de M la solution de (5) et on notera toujours \underline{u} l'unique prolongement de u par zéro en dehors de M qui vérifie l'équation :

$$(7) \quad \square \underline{u} = \partial_y u \otimes \delta_{\partial M} + u \otimes \partial_y (\delta_{\partial M}).$$

Dans (7) u et $\partial_y u$ sont définies comme traces de u sur ∂M dans des espaces de distributions convenables (cf. Hörmander [16] et plus particulièrement l'appendice B du volume 3 et le théorème B. 2. 7).

On va utiliser la propagation des singularités pour les solutions de l'équation des ondes. Dans le cas de l'opérateur $\partial_t^2 - \Delta$ ces singularités se propagent selon le cône caractéristique et se réfléchissent sur $\partial \Omega$ selon les lois de l'optique géométrique. Pour préciser ces notions on

introduit dans $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t X ((\mathbb{R}_\xi^d \times \mathbb{R}_\tau) \setminus \{0\})$ le cône caractéristique C défini par :

$$(8) \quad (p, q) = ((x, t), (\xi, \tau)) / |\tau|^2 = |\xi|^2.$$

On notera C_M l'ensemble des points (p, q) de C qui vérifient la relation $p \in M$ et $C_{\partial M}$ ceux qui vérifient la relation $p \in \partial M$. Comme on se propose d'introduire des rayons qui se réfléchissent selon les lois de l'optique géométrique, on identifie les points (p, q) et (p, q^*) de ∂M qui vérifient la relation

$$(9) \quad q - q^* = 2(q, v(x))v(x).$$

On construit ainsi une relation R d'équivalence sur $C_{\partial M}$. $C_{\partial M} / R \cup C_M$ s'identifie à un sous ensemble de $T^*(M) \setminus \{0\} \cup T^*(\partial M) \setminus \{0\}$ noté Σ_b . Σ_b est ainsi canoniquement muni d'une structure de variété C^∞ . Sur Σ_b on définit une famille de courbes paramétrées $s \rightarrow \gamma(s)$ par les formules suivantes: (variables).

(i) dans $T^*(M)$ elles sont solutions du système hamiltonien :

$$(10) \quad d_s t = -\tau, \quad d_s x = \xi, \quad d_s \tau = 0, \quad d_s \xi = 0.$$

(ii) sur $T^*(\partial M)$ elles sont solutions du système hamiltonien :

$$(11) \quad d_s t = -\tau, \quad d_s x' = \nabla_\xi g(x', \xi'), \quad d_s \tau = 0, \quad d_s \xi = -\nabla_x g(x', \xi').$$

où $g(x', \xi')$ désigne la métrique induite sur ∂M par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_t$.

Puis on construit les rayons C^∞ par compositions finies de courbes γ_j, γ_{j+1} si elles possèdent les propriétés suivantes:

(i) Réflexion: γ_j et γ_{j+1} sont respectivement pour $s < s_0$ et pour $s > s_0$ solutions de (10) au point $s = s_0$ et elles vérifient les relations :

$$\gamma_j(s_0) = \gamma_{j+1}(s_0) \in \partial M, \quad q_j(s_0) - q_{j+1}(s_0) = 2(q(s_0).v(x))v(x).$$

(ii) Contact γ_j est, pour $s < s_0$, solution de (10) et γ_{j+1} est, pour $s > s_0$, solutions de (11) et au point $s = s_0$ on a :

$$\gamma_j(s_0) = (p_j(s_0), q_j(s_0)) \in \partial M \times \mathbb{R}^d \text{ et } q_j(s_0).v(s_0) = 0$$

Ainsi $\gamma_j(s_0)$ s'identifie à un point de $T^*(\partial M)$ et on a :

$$\gamma_j(s_0) = \gamma_{j+1}(s_0), \quad \gamma'_j(s_0) = \gamma'_{j+1}(s_0).$$

Enfin on exclut les courbes obtenues par composition en un point $\gamma_j(s_0)$ où la tangente est entièrement contenue dans $M \cup \{\gamma_j(s_0)\}$ (cf. fig 1).

D'autre part un point $m_0 = (p_0, q_0)$ sera dit diffractif si pour s assez petit mais différent de zéro le segment $(p_0 + sq_0, q_0)$ est contenu dans M . Un point de contact entre un rayon C^∞ et ∂M sera dit "mauvais point" s'il est diffractif et "bon point" dans les autres cas. Sur la figure 2 sont dessinés des bons et des mauvais points. Par tout point de Σ_b passe un unique rayon C^∞ (qui est bien sûr entièrement contenu dans Σ_b).

L'ensemble des rayons C^∞ définit ainsi un groupe de transformation de Σ_b . On dit que Σ_b est feuilletté par le flot hamiltonien. Bien entendu toute cette construction peut se faire pour des opérateurs à coefficients variables. (Pour un exposé complet cf. Hormander [16] t. 3 § 24.3). L'intérêt de ce flot réside dans le fait qu'il porte les singularités microlocales de toute distribution prolongeable solution de $\square u = 0$ vérifiant la condition aux limites de Dirichlet, la condition aux limites de Neuman (ou toute condition aux limites du type Kreiss; les situations où on change de condition aux limites en passant par exemple de Dirichlet à Neumann échappent à cette analyse). Plus précisément on introduit F la transformée de Fourier en les variables x et t et on définit le front d'onde d'une distribution $WF(u)$ comme un sous ensemble des points $T^*(M) \setminus 0$. On dit qu'un point

$$m_0 = (p_0 = (x_0, t_0), q_0 = (\xi_0, \tau_0))$$

de $T^*(M) \setminus 0$ n'appartient pas au front d'onde de u s'il existe une fonction indéfiniment dérivable φ à support compact, égale à 1 dans un voisinage conique de (x_0, t_0) telle que la fonction $F(\varphi u)$ soit à décroissance rapide dans un voisinage de q_0 . On vérifie que cette définition (cf. Hörmander [16]) est indépendante du choix de φ . La définition du front d'onde implique donc une localisation simultanée dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier; on peut bien entendu définir des espaces de Sobolev microlocaux. En particulier on dira qu'une fonction u appartient à H^s microlocalement au voisinage d'un point $m_0 = (p_0 = (x_0, t_0), q_0 = (\xi_0, \tau_0))$ s'il existe une fonction φ indéfiniment dérivable, égale à 1 dans un voisinage de p_0 et une fonction $\Theta(q/|q|)$ égale à 1 dans un voisinage de q_0 telle que l'on ait :

$$\int (1 + |q|)^{2s} |\Theta(q/|q|) F(\varphi u)(q)|^2 dq < +\infty$$

On notera alors $u \in H_{m_0}$ ^s. Bien entendu cette définition est également intrinsèque, c'est à dire, indépendante du choix des fonctions ϕ et Θ .

Comme nous aurons besoin d'estimations uniformes jusqu'au bord nous devrons également utiliser la définition de front d'onde au bord introduite par Melrose et Sjöstrand [25].

Définition 1.

On dit qu'un point $p \in T^*(M) \setminus 0 \cup T^*(\partial M) \setminus 0$ n'appartient pas au front d'onde jusqu'au bord, noté $WF_b(u)$, d'une fonction u solution de $\square u = 0$ si :

(i) lorsque $m_0 \in T^*(M) \setminus 0$ m_0 n'appartient pas au front d'onde au sens donné ci-dessus de u .

(ii) lorsque $m_0 \in T^*(\partial M) \setminus 0$ il existe :

(1) un changement de coordonnées qui ramène au cas où, au voisinage de p_0 , ∂M coincide avec l'hyperplan $y_n = 0$ tandis que M coincide avec l'ouvert $y_n > 0$.

(2) un opérateur pseudo différentiel $B'(y_n, y', \xi')$ d'ordre 1 microlocalement elliptique en les variables y' , ξ' dépendant éventuellement de y_n comme d'un paramètre et indéfiniment régularisant en dehors d'un voisinage de (y_n, y') tel que pour un $a > 0$ on ait $B'(y_n, y', \xi') u \in C^\infty(0, a, \mathbb{R}^d)$.

Bien entendu si u est indéfiniment dérivable au voisinage d'un point m_0 (uniformément jusqu'au bord si p_0 appartient à ∂M) m_0 n'appartient jamais au front d'onde jusqu'au bord de u .

Inversement on démontre (et ce n'est pas trivial, cf. Melrose et Sjöstrand [25] Proposition 1.2. p. 595) que les définitions ci-dessus sont, pour toute distribution prolongeable solution de $\square u = 0$, indépendantes du choix des changements de coordonnées et des opérateurs elliptiques B .

Les singularités "jusqu'au bord" sont contenues dans Σ_b et se propagent selon le flot hamiltonien. Plus précisément nous aurons besoin des énoncés classiques suivants que nous réunissons dans la

Proposition 1.

On suppose que la frontière de Ω est réunion de deux parties connexes disjointes $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. L'une d'entre elles pouvant éventuellement être vide. On considère des distributions prolongeable u solution du problème $\square u = 0$ dans M avec les conditions aux limites

$$(C_1) \quad u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ et } (C_2) \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_2} = 0$$

Alors on a l'énoncé suivant

(i) $WF_b(u)$ est contenu dans Σ_b .

(ii) Pour tout rayon $C^\infty \gamma$ contenu dans Σ_b il ne peut se produire que l'une des deux circonstances suivantes:

(1) Tout point de γ appartient à $WF_b(u)$.

(2) Aucun point de γ n'appartient à $WF_b(u)$.

(iii) A tout rayon $C^\infty \gamma$ contenu dans Σ_b et possédant au moins un point intérieur on peut associer une distribution prolongeable u solution du problème

$$(12) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \quad u|_{\partial M} = 0$$

vérifiant la relation $WF_b(u) = \gamma$.

Remarque 1.

Les points (i) et (ii) sont démontrés dans Melrose et Sjöstrand [25]. Le point (iii) s'obtient en utilisant, au voisinage d'un point $m_0 = (x_0, t_0, \xi_0, \tau_0)$ intérieur de γ , le théorème 8.3.8 de Hormander [16] t.1 p. 278 (pour des opérateurs à coefficients constants l'exemple 8.3.4 du même ouvrage suffit.) On obtient ainsi une solution u définie dans l'espace tout entier et ayant une singularité sur γ au voisinage de m_0 . Bien entendu u ne vérifie plus la condition aux limites. On introduit alors v solution de

$$(13) \quad \square v = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \quad v(x, t_0) = \partial_t v(x, t_0) = 0, \quad v|_{\partial M \times \mathbb{R}_t} = u$$

et en utilisant les théorèmes de propagation on voit que $u = u - v$ convient pour le point (iii).

La notion de front d'onde analytique est également utile pour comprendre la contrôlabilité exacte. On sait que l'analyticité d'une fonction se traduit par la décroissance exponentielle de sa transformée de Fourier . Il convient de microlocaliser cette notion et bien sur une difficulté provient du fait suivant. On ne peut pas multiplier par une fonction à support compact sans affecter sérieusement les propriétés d'analyticité. On procède comme suit.

Définition 2.

On dira qu'un point $m_0 = (p_0, q_0)$ de $T^*(M) \setminus 0$ n'appartient pas au front d'onde analytique d'une distribution prolongeable u si l'expression :

$$(14) \quad e^{-\lambda/2|q|^2} \iint e^{-\lambda/2(p+iq-y)^2} u(y) dy$$

est à décroissance exponentielle en λ (lorsque ce paramètre réel λ tend vers l'infini) uniformément pour (p, q) dans un voisinage de (p_0, q_0) . Pour voir que cette définition généralise les notions usuelles d'analyticité on observe que (14) peut aussi s'écrire:

$$\iint e^{-\lambda/2(p-y)^2 - \lambda i(p-y)q} u(y) dy.$$

Le facteur $e^{-\lambda/2(p-y)^2}$ introduit une décroissance exponentielle pour p à l'extérieur d'un voisinage arbitrairement petit de p_0 , tandis que $e^{-\lambda i(p-y)q}$ se comporte comme le terme d'une transformation de Fourier usuelle. En particulier si u est analytique (au sens usuel) en p_0 aucun point (p_0, q) de $T^*(M) \setminus 0$ n'appartient au front d'onde analytique et réciproquement si pour tout q (p_0, q) n'appartient pas au front d'onde analytique de q , u est analytique au sens usuel au voisinage de p . La transformation

$$u \rightarrow \iint e^{-\lambda/2(p+iq-y)^2} u(y) dy$$

est dite transformation de Fourier Bros et Iagolnitzer. La notion ci dessus se justifie encore par les propriétés de propagation, néanmoins ces propriétés deviennent particulièrement complexes lorsque l'ouvert n'est pas convexe. Nous évoquerons seulement le résultat suivant .

Proposition 2.

On suppose que Ω est strictement convexe alors :

- (i) *Pour tout rayon C^∞ non contenu dans $T^*(\partial M)$ il ne peut se produire que l'une des deux circonstances suivantes.*

(1) *Tout point de γ appartient au front d'onde analytique de u .*

(2) *Aucun point de γ n'appartient au front d'onde analytique de u .*

(ii) *A tout rayon C^∞ γ non contenu dans $T^*(\partial M)$ on peut associer une distribution prolongeable u solution du problème*

$$(15) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u|_{\partial M} = 0$$

dont le front d'onde analytique coïncide avec γ .

Le point (i) est prouvé dans Sjöstrand [23], pour prouver le point (ii) on procède comme dans la remarque 1 en se ramenant d'abord à l'espace entier.

3. L'EXACTE CONTROLABILITE DU PROBLEME DE DIRICHLET.

On désigne donc par Γ_0 une partie ouverte de $\Gamma = \partial \Omega$ et note K l'ouvert $\Gamma_0 \times]0, T[$ de ∂M . On va prouver les deux théorèmes suivants.

Théorème A.

Les cinq assertions suivantes se déduisent chacune de la précédente.

(i) *Tout rayon γ rencontre $K = \Gamma_0 \times]0, T[$ au moins une fois en un point non diffractif.*

(ii) *Les distributions prolongeables solutions de*

$$(16) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u|_{\partial M} = 0$$

qui vérifient de plus la relation:

$$(17) \quad \partial_\nu u|_K \in L^2(K).$$

appartiennent en fait à l'espace H^1 .

(iii) Il existe une constante C telle que pour toute solution u appartenant à H^1 on ait :

$$(18) \quad \|u\|_{H^1} \leq C \quad \|\partial_v u\|_{L^2(K)}$$

(iv) Pour toute donnée de Cauchy $u(x,0), \partial_t u(x,0)$ appartenant à

$$L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

il existe une fonction g appartenant à $L^2(K)$ telle que la solution du problème de Dirichlet non homogène :

$$(19) \quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } M \quad u|_K = g, u|_{\Gamma \setminus K} = 0$$

avec ces mêmes données de Cauchy vérifie:

$$u(x,T) = \partial_t u(x,T) = 0.$$

(v) Pour toute donnée de Cauchy $u(x,0), \partial_t u(x,0)$ appartenant à

$$[D'(\Omega)]^2$$

il existe une distribution g à support dans K telle que la solution du problème :

$$(20) \quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } M \quad u|_{\partial M} = g$$

avec ces mêmes données de Cauchy vérifie:

$$u(x,T) = \partial_t u(x,T) = 0.$$

Théorème B.

On suppose qu'il existe un rayon γ ne rencontrant pas \bar{K} (adhérence de K dans ∂M) et qui possède au moins un point à l'intérieur de M alors l'assertion (v) du théorème A et à fortiori toutes les autres sont fausses.

L'hypothèse (i) du théorème A sera dite hypothèse de contrôlabilité géométrique.

Remarque 2.

Les énoncés des théorèmes A et B montrent que en gros toutes les assertions du théorème A sont équivalentes à la suivante. Tout rayon γ rencontre K. Comme le montrera la lecture des démonstrations les seuls cas qui échappent à cette équivalence correspondent à des rayons γ appelés singuliers rencontrant \bar{K} mais ne rencontrant pas K ou à des rayons rencontrant K en des points diffractifs (ce qui est exclu si Ω est convexe). En effet dans ces circonstances on ne sait pas toujours construire une solution régulière sur K mais singulière sur γ . Par contre si on suppose que tout rayon singulier est limite d'une suite de rayons ne rencontrant pas \bar{K} alors les assertions (i), ..., (iv) sont équivalentes à l'assertion suivante: Tout rayon γ rencontre K.

On commence par démontrer le théorème B en admettant le théorème A (cette démarche permet de comprendre pourquoi le résultat de complétude qui apparaît dans la preuve du théorème A n'est pas trivial).

Démonstration du théorème B.

S'il existe un rayon γ qui dans $\Omega \times [0, T]$ ne rencontre pas \bar{K} et qui possède un point à l'intérieur de M, on peut construire une solution $u \in C^\infty$ en dehors de γ et singulière en tout point de ce rayon. Soit v une solution du problème :

$$(21) \partial_t^2 v - \Delta v = 0 \text{ dans } M \quad v|_{\partial M} = g$$

avec $\text{supp } g$ contenu dans K et avec des données de Cauchy nulles; alors toujours d'après les résultats de propagation de singularités v sera toujours régulière le long de γ . Ainsi il n'existe pas de g permettant, en additionnant la solution v correspondante, de ramener $u+v$ et sa dérivée en t, à zéro à l'instant T. Ainsi la dernière assertion (assertion (v)) du théorème A est fausse et il en est de même des autres.

Remarque 3.

On pourrait dans le même esprit démontrer directement que s'il existe un rayon ne rencontrant pas \bar{K} l'assertion (iii) du théorème A est fausse. Pour cela il suffit d'adapter la démonstration de Ralston [29] qui construisait une solution d'énergie localisée, pendant un temps fini (arbitraire) autour d'un rayon. Comme l'a remarqué M. Taylor (jamais publié) la preuve de Ralston peut se déduire des résultats de propagation de singularité en régularisant en temps une solution singulière sur γ .

Remarque 4.

Il existe des situations simples où l'expression

$$\|\partial_y u\|_{L^2(K)}$$

définit une norme sur H^1 bien que l'hypothèse de contrôlabilité géométrique ne soit pas satisfaite. Il suffit de choisir Γ_0 non vide, T assez grand et d'appliquer le théorème d'Holmgren (En particulier pour un opérateur à coefficients constants on peut utiliser le théorème 8.6.8 d'Hörmander [15] p. 312). Dans cette situation la méthode HUM permet de définir une classe de solutions exactement contrôlables comme le dual de F (complété de H^1 pour la norme $\|\partial_y u\|_{L^2(K)}$). Dans ces circonstances supposons qu'il existe un rayon ne rencontrant ∂M qu'en des points ou Ω est strictement convexe disjoints de l'adhérence de K . A l'instant T la solution contrôlable sera nulle et donc analytique (au sens classique) au voisinage de y . Dans cette situation simple l'analyticité microlocale (définie par la transformation de Fourier Bros et Iagolnitzer) se propage le long de y . Il en résulte (raisonner comme dans la preuve du théorème B) que toute solution exactement contrôlable doit être microlocalement analytique le long de y ; F apparaît ainsi comme un espace de fonctionnelles analytiques. On peut d'ailleurs expliciter certaines propriétés de cet espace dans des géométries particulières (cf. Haraux [13]).

Démonstration du Théorème A

Le fait que (iii) entraîne (iv) s'obtient en utilisant la dualité et plus particulièrement la méthode HUM. Le fait que (iv) implique (v) provient des points suivants. Localement (donc au voisinage de $M \cap \{(x,t), 0 \leq t \leq T\}$) toute distribution prolongeable est d'ordre fini. D'autre part l'opérateur

$$R(t) = (I - \partial_t^2)^{-1}$$

commute avec le d'Alembertien et préserve les conditions aux limites. En appliquant un nombre suffisant de fois cet opérateur à u on peut se ramener au cas où $R(t)^k u$ a ses données de Cauchy dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. On construit alors le contrôle correspondant g et on obtient le contrôle de u en appliquant à g l'opérateur $(I - \partial_t^2)^k$.

La preuve du fait que (i) implique (ii) représente l'essentiel de notre contribution; on en déduira que dans le cas où l'hypothèse de contrôle géométrique est satisfaite l'expression $\|\partial_y u\|_{L^2(K)}$ définit une norme sur H^1 . C'est-à-dire, le fait que (ii) implique (iii). On remarque ainsi que s'il existe un temps T tel que $K = \Gamma_0 \times]0, T[$ contrôle géométriquement le problème ce temps est toujours supérieur ou égal au temps minimum T' d'unicité. Temps pour lequel

toute solution v du problème:

$$(22) \quad \partial_t^2 v - \Delta v = 0 \text{ dans } M \quad v|_{\Gamma \times [0,T]} = 0, \quad \partial_v v|_{\Gamma_0 \times [0,T]} = 0$$

est identiquement nulle ; des exemples dus à Cazenave [3] semblent montrer qu'il est possible de construire en toutes dimension des ouverts pour lesquels ces deux temps coïncident ; il est évident que dans la plupart des géométries ces deux temps sont différents. Le fait que l'assertion (ii) implique l'assertion (iii) signifie que dans ce cas l'expression $\|\partial_v u\|_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))}$ définit une norme équivalente sur H^1 et donc que F coincide avec H^1 . Compte tenu de la remarque 3 ce point n'est pas évident. En effet si l'hypothèse d'unicité est satisfaite mais si l'hypothèse de contrôlabilité géométrique est fausse le complété de F n'est pas un espace de distributions.

Démonstration du fait que (i) implique (ii) dans le théorème A.

Le point essentiel est la

Proposition 3.

Soit u une distribution prolongeable solution de

$$(23) \quad \square u = 0 \text{ dans } M.$$

Soit d'autre part $m_0 = (p_0, q_0) \in C_{\partial M}$. On suppose que dans un voisinage U de p_0 u vérifie les relations

$$(24) \quad u|_{(\partial M \cap U)} \in H^1(\partial M \cap U)$$

$$(25) \quad \partial_v u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U)$$

alors localement (dans un voisinage $V \subset U$ de p_0) u s'écrit sous la forme $u = v + w$ où w est une fonction appartenant à $H^1(M \cap V)$ et où v est une solution de l'équation $\square v = 0$ dans M , nulle sur $\partial M \cap V$ qui possède les propriétés de régularité suivantes :

(i) Pour $m_0 = (p_0, q_0) \notin C_{\partial M}$ ($|\tau_0|^2 - |\xi_0|^2 \neq 0$)

$$(26) \quad v \in H_{m_0}^{3/2-\epsilon}.$$

(ii) Pour $m_0 = (p_0, q_0) \in C_{\partial M}$ ($|\tau_0|^2 - |\xi_0|^2 = 0$)

$$(27) \quad y \in H_{m_0}^{-1}.$$

Remarque 5.

La proposition 3 est en fait la réciproque d'un résultat local facile à obtenir :

Proposition 4.

Soit u une distribution prolongeable solution de l'équation $\square u = 0$ dans M . Soit U un voisinage ouvert borné d'un point $m_0 \in M$. On suppose que l'on a :

$$(28) \quad u|_{(M \cap U)} \in H^1(M \cap U) \quad \text{et} \quad u|_{(\partial M \cap U)} \in H^1(\partial M \cap U).$$

Alors la dérivée normale de u appartient à L^2 dans un voisinage de m_0 (i.e.) vérifie :

$$(29) \quad \partial_v u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U).$$

Démonstration. (Elle se trouve dans le livre. Nous la rappelons pour être complet).

On introduit un champ de vecteur (en x , à coefficients dépendants de x et de t) $\sum \varphi_i(x,t) \partial_{x_i}$ avec $\varphi(x,t) = \theta(x,t)v$ où θ est une fonction régulière à support U et qui possède les propriétés suivantes :

$\theta \geq 0$ sur ∂M et $\theta = 1$ dans un voisinage de p_0 .

On a alors (avec des notations évidentes) :

$$(30) \quad 0 = (\partial_t^2 u - \Delta u, \varphi \nabla u) = - (\partial_t u, \partial_t (\varphi \nabla u)) - \int_{\partial M} \partial_v u \cdot \varphi \nabla u d\sigma dt + (\nabla u, \nabla (\varphi \nabla u)) = \\ = - (\partial_t u, (\partial_t \varphi) \nabla u) - (\partial_t u, \varphi \nabla \partial_t u) - \int_{\partial M} \theta |\partial_v u|^2 d\sigma dt + \\ + (\nabla u, (\nabla \varphi) \nabla u) + (\nabla u, \varphi \cdot \nabla (\nabla u))$$

ou encore

$$(31) \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\partial_v u|^2 d\sigma dt = -(\partial_t u, (\partial_t \varphi) \nabla u) + (\nabla u, (\nabla \varphi) \nabla u) \\ - (\partial_t u, \varphi \nabla \partial_t u) + (\nabla u, \varphi \cdot \nabla (\nabla u))$$

Les deux premiers termes du second membre de (31) sont majorés par la norme H^1 . Les deux seconds s'intègrent par parties pour donner :

$$(32) -(\partial_t u, \varphi \nabla \partial_t u) + (\nabla u, \varphi \cdot \nabla (\nabla u)) = -1/2 \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\partial_t u|^2 d\sigma dt + 1/2 \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\nabla u|^2 d\sigma dt \\ + 1/2 \int_M (|\nabla u|^2 - |\partial_t u|^2) dx dt.$$

On écrit enfin le deuxième terme du second membre de (32) sous la forme

$$(33) 1/2 \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\nabla u|^2 d\sigma dt = 1/2 \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\partial_v u|^2 d\sigma dt + 1/2 \int_{\partial M} \varphi \cdot v |\nabla' u|^2 d\sigma dt$$

où ∇' désigne le gradient selon les directions tangentielle à $\partial \Omega$. En combinant les relations ci-dessus on obtient la Proposition 4.

La démonstration de la Proposition 3 se fait en plusieurs étapes. Dans la première étape on réduit l'énoncé au cas où u est nulle sur ∂M et on se limite ensuite à ce cas. Dans la seconde étape on étudie la régularité microlocale de la distribution $\partial_v u \otimes \delta_{\partial M}$. Dans la troisième étape on prouve que pour tout m non caractéristique on a

$$u \in H_m^{3/2-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

et que pour m caractéristique non diffractif on a

$$u \in H_m^{1/2}.$$

Il reste donc pour la quatrième étape à gagner un ordre $1/2$ de régularité.

Etape 1.

On introduit une fonction $\varphi(x, t)$ indéfiniment dérivable à support dans U , égale à 1 dans un petit voisinage de $p_0 = (x_0, t_0)$ et on désigne par w la solution du problème

$$(34) \quad \square w = 0 \text{ dans } M, w(x, t_0) = \partial_t w(x, t_0) = 0 \quad w|_{\partial M} = \varphi u.$$

D'après les théorèmes classiques sur la résolution des problèmes hyperboliques mixtes (cf. Chazarain et Piriou [5], ou plus particulièrement pour l'équation des ondes elle même Lions et Magenes [22]) on a :

$$(35) \quad w \in H^1$$

en procédant ensuite comme dans la démonstration de la proposition 4, on montre que w satisfait la relation

$$(36) \quad \partial_y w \in L^2(\partial M \cap U).$$

Ainsi en remplaçant u par $u-w$ on se ramène au cas où u est nulle sur ∂M et vérifie $\partial_y u \in L^2(\partial M \cap U)$. La fonction u est donc solution de l'équation :

$$(37) \quad \square u = \partial_y u \oplus \delta_{\partial M}.$$

Dans la suite de la démonstration de la proposition 3 on se limitera au cas où u est nulle sur ∂M et vérifie donc l'équation (37).

Etape 2.

On introduit des nouvelles variables $y=(x,t)=(y_n, y')$ choisies de manière à ce que au voisinage de $m_0=(0,0)$, ∂M s'identifie à l'hyperplan $y_n=0$. On note $\zeta=(\zeta_n, \zeta')$ les variables duales dans l'espace de Fourier, et $g(y')$ la fonction $\partial_n u$ restreinte à $\partial M \cap U$. On a le

Lemme 1.

Pour tout $\varepsilon > 0$, la distribution $\partial_y u \oplus \delta_{\partial M \cap U}$ appartient à $H^{-1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t)$

Démonstration.

Dans les nouvelles variables cette distribution s'écrit en Fourier sous la forme :

$$(38) \quad S(\zeta_n, \zeta') = \int e^{i\zeta'y'} g(y') dy'$$

et on a :

$$(39) \quad \iint (1+|\zeta|)^{-1-2\varepsilon} |S(\zeta')|^2 d\zeta' d\zeta_n \leq \int d\zeta_n (1+|\zeta_n|)^{-(1+2\varepsilon)} \int |S(\zeta')| d\zeta' \leq$$

$$\leq C \int |S(\zeta')|^2 d\zeta' \leq C \int |g(y')|^2 dy'.$$

Cette régularité peut être améliorée microlocalement en dehors de la direction normale.

Lemme 2.

Pour tout $m = (p, q) \in C_{\partial M}$ vérifiant $q \neq n$ on a :

$$(40) \quad \partial_y u \otimes \delta_M|_{\partial M \cap U} \in H_m^{-1/2}.$$

Démonstration.

On reprend la démonstration du lemme 1, on intègre l'expression $(1+|\zeta|)^{-1} |S(\zeta')|^2$ dans un voisinage conique de q soit dans un domaine contenu dans un cône de la forme $|\zeta_n| < C |\zeta'|$ ainsi il vient :

$$(41) \quad \iint_{|\zeta_n| < C |\zeta'|} (1+|\zeta|)^{-1} |S(\zeta')|^2 d\zeta' d\zeta_n \leq \int d\zeta' |S(\zeta')|^2 \int_{|\zeta_n| < C |\zeta'|} (1+|\zeta|)^{-1} d\zeta_n \\ \leq \int d\zeta' |S(\zeta')|^2 \int_{|\zeta_n| < C |\zeta'|} (1+|\zeta|)^{-1} d\zeta_n \leq 2C \int |S(\zeta')|^2 d\zeta'.$$

Etape 3.

Le symbole de l'opérateur \square est $\tau^2 - |\zeta|^2$ (avec des modifications évidentes lorsque les coefficients sont variables). Il est en particulier microlocalement elliptique d'ordre 2 en dehors du cône caractéristique $\tau^2 - |\zeta|^2 = 0$. Il en résulte par de la routine microlocale (cf. Nirenberg [27]) que pour tout q non caractéristique on a :

$$(42) \quad u \in H_{(p,q)}^{3/2-\varepsilon} \subset H_{(p,q)}^{-1}$$

Etape 4.

On s'intéresse aux directions caractéristiques ce qui exclut le cas $\zeta' = 0$, donc on sait déjà, d'après le Lemme 2, que l'on a, pour tout point m caractéristique, la relation (39). En m on a $\tau = |\zeta|$ ou $\tau = -|\zeta|$ (on choisit $\tau = |\zeta|$ pour fixer les idées) on utilise le fait que les caractéristiques sont simples, et on écrit l'équation (37) au voisinage de m sous la forme :

$$(43) \quad (\tau - |\zeta|) u = (\tau + |\zeta|)^{-1} (\partial_y u \otimes \delta_{\partial M}) \in H^{1/2}.$$

Ainsi, dans ce voisinage, \underline{u} est solution de l'équation

$$(44) \quad (\partial_{\zeta} - i|\zeta|)\underline{u} \in H^{1/2};$$

maintenant, si m est non diffractif la caractéristique $p+sq$ sort de M . Par exemple pour $s < 0$ (le cas $s > 0$ est identique) en intégrant de -6 à $6/2$ l'équation (44) on déduit que \underline{u} appartient à $H_m^{-1/2}$. On a donc en résumé prouvé la

Proposition 5.

En tout point m non caractéristique on a $u \in H_m^{3/2-\epsilon}$, en tout point m caractéristique non diffractif on a $u \in H_m^{-1/2}$.

Remarque 6.

Si M est convexe au voisinage de m_0 il n'y a pas de point diffractif pour l'équation à coefficients constants et sous les hypothèses du Théorème 1, on déduit de la Proposition 5 que \underline{u} appartient, au voisinage de m_0 à l'espace de Sobolev usuel $H^{1/2}$.

Etape 5.

Cette étape est consacrée au calcul de la régularité au voisinage d'un point caractéristique non diffractif. Pour cela on va utiliser des multiplicateurs microlocaux. La construction de ces multiplicateurs s'inspire du travail de Melrose et Sjostrand [25] et donc également du travail de Morawetz, Ralston et Strauss [26]. Il s'agit d'une version microlocale des multiplicateurs introduits par Chen [6,7] ou L.F. Ho [14] (cf. Lions [21]). Cependant il ne semble pas possible d'obtenir même dans le cas le plus simple: coefficients constants et M convexe au voisinage de p_0 une démonstration locale utilisant seulement des multiplicateurs locaux et non microlocaux. En utilisant toujours les variables (y_n, y') et (ζ_n, ζ') ainsi que l'identification de M avec le demi plan $y_n > 0$ au voisinage de m_0 , on introduit des opérateurs P de la forme suivante :

$$(45) \quad P = A_0(\zeta', y', y_n) D_n + A_1(\zeta', y', y_n)$$

où les $A_i(\zeta', y', y_n)$ ($i=1,2$) sont des opérateurs pseudo différentiels tangentiels en les variables ζ' , y' dépendant paramétriquement de la variable y_n . A_0 est un opérateur d'ordre zéro et A_1 un opérateur d'ordre 1 ; D_n désigne la dérivation selon la direction y_n .

On aura à utiliser les notions de support essentiel d'un opérateur (cf. Taylor [33] p. 127) noté ES. On notera également Π la projection canonique de $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$. Enfin on spécialise un peu plus le choix des coordonnées $y = (y', y_n)$. Les coordonnées sont construites de manière à ce que, dans la base correspondante, l'opérateur \square s'écrive sous la forme:

$$(46) \quad \square u = a(x,t)^{-1} (D_n^2 + r(y', \xi', y_n)) a(x,t) u$$

où $a(x,t)$ désigne une fonction strictement positive et indéfiniment dérivable ($a(x,t)u(x,t)$ a la même régularité locale et microlocale; on remplacera donc u par au chaque fois que cela sera opportun) et où r désigne un opérateur auto adjoint du second ordre par rapport aux variables (y', ξ') dépendant paramétriquement de la variable y_n . Ceci est possible (cf. Sjöstrand [31]). Dans ce changement de variables, $C_{\partial M}$ est l'ensemble des points $(y', 0, \xi', \xi_n) \mid \xi_n^2 + r(y', \xi', y_n) = 0$ et $C_{\partial M} / R$ s'identifie à un sous espace de $T^*(\partial M)$ qui coïncide avec l'ensemble des points (y', ξ') qui vérifient la relation

$$(47) \quad r(y', \xi', 0) \leq 0.$$

Les rayons transverses correspondent à $r(y', \xi', 0) < 0$ et les rayons tangents à $r(y', \xi', 0) = 0$. Une estimation essentielle est fournie par le lemme suivant :

Lemme 3.

Soit u une DP solution de $\square u = 0$ dans M vérifiant dans un voisinage U de m_0 les relations :

$$(48) \quad u|_{\partial M \cap U} = 0, \quad \partial_y u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U).$$

Soit d'autre part un opérateur P de la forme (45) possédant les propriétés suivantes :

$$(49) \quad A_i(\xi', y', y_n) = 0 \text{ pour } y_n \geq 0, \quad i = 0, 1$$

$$(50) \quad \Pi \operatorname{ES}'(A_i) \subset \{(y', y_n) \mid |y'| < \rho\}, \quad i = 0, 1.$$

Alors on a

$$(51) \quad \left| \int_{y_n > 0} (P \square u) \bar{u} dy_n dy' - \int_{y_n > 0} (\square P u) \bar{u} dy_n dy' \right| \leq$$

$$\leq C \left(\int_{y_n=0 \cap U} |D_n u(y')|^2 dy' + \|u\|_{H^{-s}}^2 \right)$$

où s désigne un réel positif éventuellement choisi très grand.

(Dans (49) et (50) δ et ϱ sont deux nombres choisis convenablement petits et E' désigne le support essentiel des opérateurs A_i en les variables (y', ζ')).

Démonstration.

Le premier terme du premier membre de (51) est évidemment nul. Pour calculer le second on utilise le fait que les solutions régulières sont denses dans l'espace des solutions distributions prolongeables (munies d'une norme locale convenable) et on intègre par parties. Compte tenu des propriétés de support de P seule la contribution de la frontière $y_n = 0$ n'est pas susceptible d'être compensée par un terme en $\|u\|_{H^{-s}}^2$. On a, en utilisant le fait que u est nulle sur $y_n = 0$,

$$(52) \int_{y_n > 0} (\square P u) \bar{u} dy_n dy' = \int_{y_n > 0} ((D_n^2 + r(y', \zeta', y_n)) P u) \bar{u} dy_n dy' = \\ \int_{y_n = 0} A_0(\zeta', y', 0) D_n u D_n \bar{u} dy' + \int_{y_n > 0} P u D_n^2 \bar{u} dy_n dy' \\ + \int_{y_n > 0} (r(y', \zeta', y_n) P u) \bar{u} dy_n dy' = \int_{y_n = 0} A_0(\zeta', y', 0) D_n u D_n \bar{u} dy' \\ \int_{y_n > 0} P u (D_n^2 u + r(y', \zeta', y_n) \bar{u}) dy_n dy' = \int_{y_n = 0} A_0(\zeta', y', 0) D_n u D_n \bar{u} dy'.$$

Ce qui prouve le lemme 3.

Lemme 4.

Pour tout opérateur P de la forme :

$$(53) P = A_0(\zeta', y', y_n) D_n + A_1(\zeta', y', y_n)$$

et toute distribution prolongeable solution de $\square u = 0$ dans M vérifiant dans un voisinage U de m les relations :

$$(54) \quad u|_{\partial M \cap U} = 0, \quad \partial_\nu u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U)$$

on a la majoration :

$$(55) |(P \square u - \square P u, u)| \leq C \left(\int_{y_n=0} \cap u |D_n u(y')|^2 dy' + \|u\|_{H^{-s}}^2 \right).$$

Démonstration.

On rappelle que comme $y_n=0$ n'est pas caractéristique u appartient à $C^\infty([0, \varrho], D'_{y'})$ et que \underline{u} est son prolongement par zéro pour $y_n < 0$. On en déduit que l'on a :

$$(56) [P, \square] u - [P, \square] \underline{u} = -2\partial_{y_n} A_0 D_n u \otimes \delta_{y_n=0}.$$

($D'_{y'}$ désigne les distributions en la variable tangentielle y').

En utilisant les lemmes 1 et 2 et la relation (42) on observe que en dehors de la direction $\zeta' = 0$, $\partial_{y_n} A_0 D_n u \otimes \delta_{y_n=0}$ appartient microlocalement à l'espace $H^{-1/2}$ et que u appartient microlocalement à l'espace $H^{1/2}$. D'autre part, au voisinage de la direction $\zeta' = 0$, $\partial_{y_n} A_0 D_n u \otimes \delta_{y_n=0}$ appartient à l'espace $H^{-1/2-\varepsilon}$ mais au voisinage de cette direction \underline{u} appartient à $H^{3/2-\varepsilon}$ et les semi normes dans ces espaces sont majorées par des quantités en

$$C \left(\int_{y_n=0} \cap u |D_n u(y')|^2 dy' + \|u\|_{H^{-s}}^2 \right)^{1/2}.$$

En localisant séparément autour de la direction $\zeta'=0$ et en dehors de cette direction on obtient donc la majoration :

$$(57) |([P, \square] u - [P, \square] \underline{u}, u)| = |(D_n u \otimes \delta_{y_n=0}, u)| \leq$$

$$C \left(\int_{y_n=0} \cap u |D_n u(y')|^2 dy' + \|u\|_{H^{-s}}^2 \right).$$

Fin de la Démonstration de la Proposition 3.

Soit maintenant $m_0 = (p_0, q_0)$ un point de $C_{\partial M}$. On introduit un opérateur C autoadjoint microlocalement elliptique d'ordre 2 au voisinage de m_0 . On peut par exemple choisir C sous la forme :

$$(58) Cu = \{\varphi(p) \bar{F} \theta(q/|q|) |q|^2 F u\}$$

$C(p, q) = \varphi(p) \theta(q/|q|)$ est le symbole de C .

Pour terminer la démonstration de la Proposition 3 il faut prouver que sous les hypothèses de ce théorème, la quantité (Cu, u) est finie.

Lemme 5.

Il existe un opérateur pseudo différentiel d'ordre 1 possédant les propriétés suivantes

$$(59) \quad [\square, S] = C$$

$$(61) \quad \pi(ES(C)) \cap M \subset U \cap M.$$

Dans (61) U désigne un voisinage assez petit (mais contenant $\pi(ES(C))$), choisi également petit) de p_0 .

Démonstration.

Cette construction est classique et fondamentale (cf. Nirenberg [27], Charazain [4] ou Hörmander [16]). On construit le symbole principal (d'ordre 1) de S en résolvant l'équation de transport :

$$(62) \quad \sum_{1 \leq i \leq u+1} \partial_{p_i} d \cdot \partial_{q_i} s_1 - \partial_{q_i} d \cdot \partial_{p_i} s_1 = C$$

Dans (62) d représente le symbole de \square . Comme m_0 est non diffractif il existe une direction suivant laquelle les bicaractéristiques de \square sortent de M et en intégrant selon cette direction on peut construire une solution de (62) nulle dans $M \setminus (U \cap M)$; les termes suivants du développement de S s'obtiennent par des équations analogues. S s'écrit donc sous la forme $S=S_1+S_0$ avec S_0 opérateur d'ordre zéro et S_1 opérateur d'ordre 1 de symbole s_1 , et on a :

$$(63) \quad (\underline{u}, Cu) = (\underline{u}, [\square, S] \underline{u}) = (\underline{u}, [\square, S_1] \underline{u}) + (\underline{u}, [\square, S_0] \underline{u})$$

$[\square, S_0]$ est un opérateur d'ordre 1 et comme on sait déjà que \underline{u} appartient à $H^{1/2}$ au voisinage de m_0 le second terme du dernier membre de (63) est fini. Il reste donc à montrer que le terme $(\underline{u}, [\square, S_1] \underline{u})$ est également fini. On utilise le système de coordonnées (y, ζ) introduit à l'occasion du Lemme 1 ; on utilise également la forme canonique de l'opérateur des ondes donnée par Sjöstrand. En dehors d'un petit voisinage conique de $(0, \xi_n)$ on écrit la fonction $s_1(p, q) = s(y, \zeta)$ sous la forme :

$$(64) \quad s_1(y, \zeta) = a_1(y', y_n, \zeta') + a_0(y', y_n, \zeta') \zeta_n + a_{-1}(y, \zeta) (\zeta_n^2 + r(y, \zeta')).$$

Dans (64) a_1 est une fonction homogène de degré 1 en ζ' , a_0 est une fonction homogène de degré 0 en ζ' . Pour obtenir (64) on utilise près de $\zeta_n^2 + r(y, \zeta')$ le théorème de division (cf.

Hormander [16] Vol 1 § 7.5, ou Malgrange [6]) en distinguant le cas tangent et le cas transverse. Ailleurs on pose

$$(65) \quad a_{-1} = (s_1(y, \zeta) - a_1(y', y_n, \zeta') + a_0(y', y_n, \zeta')\zeta_n) / (\zeta_n^2 + r(y, \zeta')).$$

On désigne par $A_i(y', y_n, \zeta')$ les opérateurs de symboles $a_i(y', y_n, \zeta')$ ($i = 1, 2$) et par P l'opérateur :

$$P = A_0(\zeta', y', y_n) D_n + A_1(\zeta', y', y_n).$$

P est un opérateur satisfaisant aux hypothèses des Lemmes 3 et 4. En dehors d'un voisinage conique arbitrairement petit de $(0, \xi_n)$ on a :

$$(66) \quad S_1 = P + A_{-1} \square + S'_0$$

avec A_{-1} opérateur pseudo différentiel de degré -1 et S'_0 opérateur pseudo différentiel de degré zéro. On introduit donc l'opérateur E de projection, de degré zéro qui tronque dans un petit voisinage de $(0, \xi_n)$. Comme on sait que u appartient à $H^{1/2}$, on désignera désormais par des constantes C_i tout terme de la forme $(u, L u)$ avec L opérateur de degré inférieur ou égal à 1 , ou plus généralement toute quantité déjà estimée (et bornée) en fonction de

$$\int_{\partial M \cap U} |\partial_\nu u|^2 d\sigma dt.$$

On peut enfin écrire en partant de (66)

$$\begin{aligned} (67) \quad (u, Cu) &= (u, [\square, S_1] u) + (u, [\square, S'_0] u) = (u, [\square, S_1] u) + C_1 = \\ &= (E u, [\square, S_1] u) + ((I-E)u, [\square, S_1] u) + C_1 \\ &= (E u, [\square, S_1] E u) + (E u, [[\square, S_1], E] u) \\ &\quad + ((I-E)u, [\square, S_1] (I-E)u) + ((I-E)u, [[\square, S_1], (I-E)] u) + C_1 \\ &= (E u, [\square, S_1] E u) + ((I-E)u, [\square, S_1] (I-E)u) + C_2. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression on utilise d'une part la relation (42) pour le terme en $(I-E)$ et d'autre part la formule (66). On obtient donc:

$$(68) (\underline{u}, C\underline{u}) = (E\underline{u}, [\square, P] E\underline{u}) + (E\underline{u}, [\square, A_{-1}] E \square \underline{u}) + (E\underline{u}, [\square, A_{-1}] [\square, E] \underline{u}) + C_3 \\ = (E\underline{u}, [\square, P] E\underline{u}) + (E\underline{u}, [\square, A_{-1}] E(D_n u \otimes \delta)) + C_4.$$

D'après le lemme 2 $E(D_n u \otimes \delta)$ appartient à $H^{-1/2}$ et comme \underline{u} appartient à $H^{1/2}$ on déduit de (69) la relation

$$(70) (\underline{u}, C\underline{u}) = (E\underline{u}, [\square, P] E\underline{u}) + C_5 = (\underline{u}, [\square, P] \underline{u}) + ((E-I)\underline{u}, [\square, P] (E-I)\underline{u}) + C_6.$$

Au voisinage de $(0, \xi_n)$ direction non caractéristique \underline{u} appartient à $H^{3/2-\varepsilon}$, il en résulte que le second terme du second membre de (70) est borné. On a donc obtenu :

$$(71) (\underline{u}, C\underline{u}) = (\underline{u}, [\square, P] \underline{u}) + C_7,$$

ce qui compte tenu des lemmes 3 et 4 complète la preuve de la proposition 3.

Fin de la démonstration du fait que (i) implique (ii) dans le théorème A.

Compte tenu du résultat de la proposition 3 ce point est une conséquence du résultat de Melrose et Sjöstrand rappelé ici sous le nom de Proposition 1. Il suffit de montrer que pour η fixé on a $u \in H^1([- \eta, \eta] \times \Omega)$. On pose $Q = [-\eta, \eta] \times \Omega$, $\partial Q = [-\eta, \eta] \times \partial \Omega$, et on va voir que u s'écrit sous la forme $u_1 + v$ avec $v \in H^1(Q)$ et $WF_b(u_1) = \emptyset$. Comme Q est compact et $WF_b(u_1)$ fermé, il suffit de prouver cette relation au voisinage d'un point quelconque de $T^*(Q) \cap T^*(\partial Q)$, on utilisera ensuite une partition de l'unité. Soit $m_1 \in T^*(Q) \cap T^*(\partial Q)$ et γ l'unique rayon C^∞ passant par $m_1 = (x_1, t_1)$. D'après l'hypothèse de contrôle géométrique il existe au moins un point $m_0 = (x_0, t_0)$ appartenant à $\gamma \cap \Gamma_0$. Si $\partial \Omega$ est strictement convexe au voisinage de x_0 il n'y a pas de rayon diffractif et d'après le théorème 1 u appartient à H^1 au voisinage de (x_0, t_0) . On introduit alors une fonction $\varphi(x, t)$ indéfiniment dérivable, à support dans un petit voisinage de (x_0, t_0) et égale à 1 dans un voisinage encore plus petit de ce point. φu est toujours nulle sur ∂M et vérifie l'équation

$$(72) \quad \square \varphi u = 2\partial_t \varphi \partial_t u - 2\nabla \varphi \nabla u + u \square \varphi$$

On introduit alors la fonction w solution de l'équation

$$(73) \quad \square w = 2\partial_t \varphi \partial_t u - 2\nabla \varphi \nabla u + u \square \varphi$$

avec la condition aux limites $w|_{\partial M} = 0$ et les données de Cauchy nulles au temps t_0 :

$$(74) \quad w(x, t_0) = \partial_t w(x, t_0) = 0.$$

w est dans H^1 car le second membre de (61) est dans L^2 ; on remarque d'autre part que le second membre de (72) est nul dans un voisinage de (x_0, t_0) . A cause des propriétés de vitesse finie de propagation il en est de même de w . On écrit alors u sous la forme

$$(75) \quad u = (u - \varphi u + w) + (\varphi u - w) = u_1 + v$$

avec $v \in H^1(Q)$ et $WF_b(u_1) = \{\emptyset\}$ au voisinage de m_0 ($(u - \varphi u + w)$ est en fait identiquement nul au voisinage de (x_0, t_0)). En utilisant la proposition 1 on en déduit qu'au voisinage du point m_1 , u s'écrit comme la somme d'une fonction $v \in H^1(Q)$ et d'une fonction dont le front d'onde jusqu'au bord est vide en m_1 .

La présence de rayons diffractifs (il en existe dès que Ω n'est pas strictement convexe en x_0) impose une microlocalisation. On choisit à nouveau un système de coordonnées adaptées $y = (y_n, y')$, $m_0 = (p_0, q_0) = (0, (0, q'_0))$. On suppose que $(0, q'_0) \in T^*(\partial M)$ est un point non diffractif. On introduit un opérateur tangentiel, $Z(\xi', y', y_n)$ indéfiniment régularisant au voisinage du cône diffractif, d'ordre zéro et microlocalement égal à 1 au voisinage de $(0, q'_0)$. Zu vérifie la condition aux limites et appartient à H^1 au voisinage de p_0 . De plus on a :

$$(76) \quad \square Zu = [Z, \square]u = g \in L^2.$$

Comme ci dessus on désigne par w la solution du problème

$$(77) \quad \square w = g, \quad w|_{\partial M} = 0; \quad w(x, t_0) = \partial_t w(x, t_0) = 0$$

et on écrit u sous la forme

$$u = u - Zu + w + Zu - w.$$

$Zu - w$ appartient à H^1 . En adaptant la partie microlocale (§2) de Melrose et Sjöstrand [25] on montre que l'on a

$$(78) \quad (I - Z)w \in C^\infty([0, \varepsilon]; \mathbb{R}_{y'}^d).$$

Il en résulte que $(0, q'_0)$ n'appartient pas à $WF_b(u - Zu + w)$. On termine alors la

démonstration comme ci-dessus.

Démonstration du fait que l'assertion (ii) du théorème A implique l'assertion (iii).

Ceci est l'objet de la

Proposition 6.

Si l'assertion (ii) du théorème A est vérifiée l'expression $\|\partial_t u\|_{(L^2(\Gamma_0 \times [0,T]))}$ définit une norme sur l'ensemble des solutions u d'énergie finie du problème :

$$(79) \quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } M \quad u|_{\partial M} = 0.$$

Démonstration.

La seule chose à prouver est que la relation :

$$(80) \quad \partial_t u|_{(L^2(\Gamma_0 \times [0,T]))} = 0$$

implique la nullité de u. Pour cela on désigne par N l'espace des solutions u de (79) qui vérifient (80) et par E l'espace des solutions d'énergie finie. A cause de la Proposition 4 N est un espace fermé mais si u appartient à N, il en est de même de $\partial_t u$. On en déduit que N est contenu dans l'espace $H^2(\Omega \times (0,T))$. Ainsi (utiliser la compacité de H^2 dans H^1) N est un espace de dimension finie. La dérivation est une application linéaire de N dans lui-même. Comme N est de dimension finie, s'il est non vide, ∂_t y admet un vecteur propre non trivial. Il existe donc une fonction $u \in N$ qui vérifie la relation $\partial_t u = \lambda u$ (avec λ constant en t et en x). On a donc :

$$(81) \quad \lambda^2 u - \Delta u = 0.$$

Comme sur $\Gamma_0 \times (0,T)$ on a u et $\partial_t u$ nuls on en déduit que u est nul dans le cylindre $\Omega \times (0,T)$. Comme u est solution de l'équation des ondes avec données de Dirichlet il résulte qu'il est nul partout.

Démonstration du fait que l'assertion (ii) du théorème A implique l'assertion (iii).

On désigne par W l'espace des distributions prolongeables u solutions de

$$(82) \quad \square u = 0 \text{ dans } M, \quad u|_{\partial M} = 0$$

qui vérifient la relation :

$$\partial_v u \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$$

muni de la norme correspondante. On désigne par E l'espace des solutions d'énergie finie, par F l'espace des solutions qui appartiennent à

$$[L^2(\Omega \times [0, T]) \times H^{-1}(\Omega \times [0, T])].$$

On désigne par G l'espace $L^2(K)$. On introduit un espace H de distributions peu régulier (par exemple $H = H^{-1/2}(\Gamma_0 \times (0, T))$). L'application $T : u \rightarrow \partial_v u$ est continue et injective de l'espace F à valeur dans H . T est une bijection continue de E sur $G \cap T(F) \subset H$. L'injection de E dans F est compacte. Pour conclure il suffit de démontrer la

Proposition 7 (Théorème du graphe fermé dans les espaces de trace).

On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & F \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ G \cap T(E) & \xrightarrow{i'} & T(F) \subset H \end{array}$$

On suppose que E, F, G et H sont des espaces de Hilbert. (E étant contenu algébriquement et topologiquement dans F et G étant contenu algébriquement et topologiquement dans H). On désigne par $\|\cdot\|, |\cdot|$ les normes et produits scalaires dans E et F , par $\|\cdot\|', |\cdot|'$ les normes et produits scalaires dans G et H . Les applications i et i' désignent les injections canoniques. On suppose que i est une application compacte de H . On suppose que l'application T est une injection continue de F dans H dont la restriction à E est continue de E dans G . Alors sous l'hypothèse

$$(83) \quad \forall u \in F, \quad T(F) \in G \Rightarrow u \in E$$

sur E les normes $\| \cdot \|$ et $\| T \cdot \|'$ sont équivalentes.

Démonstration.

Compte tenu du théorème du graphe fermé usuel la seule chose à prouver est que l'espace E muni de la norme $\|T\|'$ est complet ou ce qui revient au même que l'espace $G \cap T(E)$ est fermé dans G . On désignera par W cet espace. On prouve d'abord le :

Lemme 7.

L'injection de W dans F est continue.

Supposons que l'injection de W dans F ne soit pas continue. Il existerait alors une suite u_k d'éléments de W orthonormée dans F vérifiant

$$(84) \|u_k\|' < Ck^{-2}.$$

En effet supposons une telle suite construite jusqu'à l'ordre N et posons

$$G' = \{ u \in W, (u, u_j)_F = 0, j = 1, \dots, N \}.$$

S'il existe C tel que l'on ait, pour tout $u \in G'$

$$(85) |u| \leq C\|u\|'$$

alors G' est fermé dans G ; en effet si une suite u_i d'éléments de G' converge dans W d'après (84) elle converge aussi dans F vers un élément u . Comme l'application T est continue de F dans H on a

$$(86) T(u) = \lim T(i(u_i)) = \lim (T(u_i)).$$

Comme le dernier membre de (86) appartient à G ($T(u_i)$ est de Cauchy dans G) on en déduit que u appartient aussi à E . Enfin on déduit également de (85) que u vérifie les relations :

$$(87) (u, u_j)_F = 0, j = 1, \dots, N.$$

Ce qui prouve que u appartient à G' . Ainsi sous l'hypothèse (85) G' est fermé et W se décompose en la somme d'un sous espace de dimension finie et d'un sous espace fermé sur lequel l'injection i dans F est continue. Ainsi l'injection de W dans F est elle-même continue ce qui contredit l'hypothèse. (85) n'est donc pas vrai et il existe donc dans G' un élément u_{N+1}

vérifiant

$$\|u_{N+1}\|' < C(N+1)^{-2} \text{ et } |u_{N+1}| = 1.$$

On considère alors le sous espace E fermé dans F engendré par la base Hilbertienne formée par les u_k . Tout élément de cet espace s'écrit sous la forme $u = \sum_k \beta_k u_k$ avec $\beta_k \in \mathbb{C}$. Sous l'hypothèse de non continuité, la suite u_k vérifie la relation (84) et donc la série $u = \sum_k \beta_k u_k$ est normalement convergente dans W . Donc la série $T(u_k)$ converge normalement dans E . En utilisant à nouveau la continuité T et l'hypothèse (83) on en déduit que E est en fait contenu dans E . Restreinte à E l'injection compacte de E dans F est donc un isomorphisme entre espaces de Banach ce qui implique que F est de dimension finie et ceci contredit l'hypothèse (84) et termine la preuve du lemme 7.

On démontre maintenant la proposition 7.

Soit donc g un élément de W fermeture de $G \cap T(E)$ dans G . Il existe une suite u_n d'éléments de E , de Cauchy pour la norme $\|T u_n\|'$. D'après le lemme 1, la suite u_n est de Cauchy dans F et converge donc vers un élément u . Mais comme T est continue de F dans H , $T(u_n)$ converge dans H vers $T(u)$. D'autre part $T(u_n)$ converge dans G vers g . Comme la topologie de G est plus fine que celle de H on a $T(u) = g \in G$. Ce qui prouve que u appartient à E que $W = G \cap T(E)$ est fermé dans G et donc qu'il est complet. La démonstration du théorème A est terminée.

5. EXACTE CONTROLABILITE DU PROBLEME DE NEUMANN.

Un certain nombre de résultats décrits ci dessus se transposent à la contrôlabilité exacte du problème de Neumann. Par contre certaines questions restent ouvertes. On va résumer brièvement la situation ci dessous. On désigne toujours par Γ_0 une partie ouverte de $\Gamma = \partial\Omega$ et note K l'ouvert $\Gamma_0 \times]0, T[$ de ∂M . On a les deux théorèmes suivants.

Théorème A'.

Les quatre assertions suivantes se déduisent chacune de la précédente.

- (i) *Tout rayon γ rencontre K au moins une fois en un point non diffractif.*
- (ii) *Les distributions prolongeables solutions de*

$$(88) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \partial_\nu u|_{\partial M} = 0$$

qui vérifient de plus la relation :

$$(89) \quad \nabla_{x,t} u|_K \in L^2(K).$$

appartiennent en fait à l'espace H^1 et il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait.

$$\|u(0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(K)}^2.$$

(Dans (89) $\nabla_{x,t}$ désigne le gradient par rapport aux dérivées tangentielles et aux dérivées en temps).

(iii) Pour toute donnée de Cauchy $u(x,0), \partial_t u(x,0)$ appartenant à

$$H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

il existe une fonction g appartenant à $L^2(K)$ telle que la solution du problème de Neumann non homogène :

$$(90) \quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } M \quad \partial_\nu u|_{\Gamma \cap \Gamma_0} \times [0,T] = 0, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_0} \times [0,T] = g$$

avec ces mêmes données de Cauchy vérifie:

$$u(x,T) = \partial_t u(x,T) = 0.$$

(iv) Pour toute donnée de Cauchy $u(x,0), \partial_t u(x,0)$ appartenant à

$$[D'(\Omega)]^2$$

il existe une distribution g à support dans K telle que la solution du problème :

$$(91) \quad \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ dans } M \quad \partial_\nu u|_M = g$$

avec ces mêmes données de Cauchy vérifie:

$$u(x,T) = \partial_t u(x,T) = 0.$$

Théorème B'.

On suppose qu'il existe un rayon γ ne rencontrant pas \overline{K} (adhérence de K dans ∂M) et possèdent au moins un point à l'intérieur de M alors l'assertion (iv) du théorème A' et à fortiori toutes les autres sont fausses.

Les résultats de propagation étant tout aussi valables pour le problème de Neumann que pour le problème de Dirichlet il est évident que la preuve du théorème B' se fait en copiant le théorème B.

Pour prouver le théorème A' la difficulté essentielle provient du fait suivant: La proposition 4 n'a pas d'analogie simple pour le problème de Neumann plus précisément les solutions d'énergie finie du problème

$$(92) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad \partial_\nu u|_{\partial M} = 0$$

ne vérifient pas en général la relation

$$(93) \quad u|_{\partial M \cap U} \in H^1(\partial M \cap U).$$

Il semble (cf Eskin [9]) et cela fait l'objet de travaux en cours, que la régularité au bord de la solution de (92) soit un résultat non pas local mais microlocal. Par contre la Proposition 3 est toujours valable (son énoncé n'invoquait ni le problème de Dirichlet ni celui de Neumann) et sous l'hypothèse de contrôle géométrique on obtient en copiant la démonstration du cas Dirichlet que les solutions du problème

$$\square u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad \partial_\nu u|_{\partial M} = 0$$

qui vérifient la condition

$$\nabla_{x',t} u|_{[r_0, \infty) \times [0, T]} \in L^2(K)$$

appartiennent en fait à l'espace E des solutions d'énergie finie. Il faut cependant introduire la norme de u dans $L^2(\Omega)$ pour contrôler les solutions constantes. Elles forment donc un sous espace F (en général différent) de E . Comme au §III (exacte contrôlabilité du problème de Dirichlet) on peut prouver que

$$(\int_{[r_0, \infty) \times [0, T]} (|\nabla_{x',t} u|^2 + |u|^2) dt)^{1/2}$$

définit une norme sur cet espace (il n'y a rien à changer à la démonstration) et que cet espace est complet. En composant avec l'opérateur $(I - \partial_t^2)^{-1/2}$ (et en utilisant le Lemme 8 qui sera démontré plus loin), on en déduit que l'espace F_0 des solutions du problème de Neumann $\square u = 0$ dans M , $\partial_\nu u = 0$ sur ∂M qui vérifient la condition supplémentaire $u|_K \in L^2(K)$ est inclus dans l'espace E_{-1} (espace des solutions du problème de Neumann avec données de Cauchy dans $L^2(\Omega)X(H^1(\Omega))'$). Sur F_0 l'expression:

$$\left(\int_K |u|_{\partial M}^2 d\sigma dt \right)^{1/2}$$

définit une norme et F_0 est complet pour cette norme. On obtient donc le point (iii) en procédant comme dans Lions [21] théorème 5.2. Enfin comme au §III on déduit que toute distribution prolongeable solution du problème de Neumann est exactement contrôlable. Ainsi sans informations précises sur les espaces F et F' peu cependant généraliser les résultats du § 5 de Lions [21].

Remarque 7.

Considérons le cas où $\Gamma_0 X(0, T)$ satisfait aux hypothèses de contrôle géométrique. On peut donc introduire l'espace F des solutions de l'équation des ondes avec condition aux limites de Dirichlet qui vérifient la relation $\nabla_{x,t} u \in L^2(\Gamma_0 X(0, T))$. Cet espace est contenu dans H^1 (espace des solutions d'énergie finie) mais contrairement à ce qui se passe dans le cas du problème de Dirichlet il ne coïncide pas avec H^1 . Maintenant à tout sous ensemble K de ∂M vérifiant la relation $\Gamma_0 X(0, T) \subset K$ on peut associer l'espace G des solutions de l'équation des ondes avec condition de Neumann vérifiant la relation $\nabla_{x,t} u \in L^2(K)$. On aura $G \subset F \subset H^1$. Il est vraisemblable mais non encore démontré (reprendre les idées d'Eskin [9]) que G et F sont différents.

Remarque 8.

On n'évoque pas dans cette annexe les problèmes hyperboliques de contrôle intérieur (on pourra se reporter à Bardos Lebeau et Rauch [2]) ni les systèmes qui font l'objet de différents travaux en cours.

5. STABILISATION DISTRIBUEE SUR LA FRONTIERE.

Les théorèmes A et B concernent le contrôle; on a bien entendu un résultat analogue pour la stabilisation. On supposera pour simplifier (comparer avec l'énoncé de la proposition 1 et

se reporter à la Remarque 9) que la frontière de l'ouvert Ω : Γ est réunion de deux parties connexes disjointes non vides Γ_1 et Γ_0 . On considérera le problème d'évolution :

$$(94) \quad \square u = 0 \text{ dans } M_+ = \Omega \times \mathbb{R}_+^+$$

avec les conditions aux limites

$$(95) \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \partial_t u + \lambda(x) \partial_v u|_{\Gamma_0} = 0.$$

Dans (81) $\lambda(x)$ désigne une fonction indéfiniment dérivable et strictement positive sur Γ_0 .

En multipliant l'équation (94) par $\partial_t u$ et en intégrant par parties il vient :

$$(96) \quad 1/2 \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\Gamma_0} \lambda(x) |\partial_v u|^2 d\sigma = 0.$$

Il est donc naturel d'introduire l'espace E des couples

$$\{(u,v) = (u, \partial_t u) / u \in H^1(\Omega) \text{ et vérifie la relation } u|_{\Gamma_1} = 0, v \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme d'énergie usuelle :

$$\|(u,v)\|^2 = \int_{\Omega} (|v|^2 + |\nabla u|^2) dx$$

que l'on notera également $E(u)$. Dans cet espace l'application

$$(u(x,0), \partial_t u(x,0)) \rightarrow (u(x,t), \partial_t u(x,t))$$

ne définit plus un groupe mais seulement un semi groupe fortement continu à contraction.

En raison des ressemblances qui existent entre ce semi groupe et le semi groupe introduit par Lax et Phillips pour le Scattering nous le noterons $Z(t)$ et nous appellerons B son générateur. Enfin on introduit également E espace des distributions prolongeables $U = (u, \partial_t u)$ solutions de (94) et (95) dont les données de Cauchy, pour $t=0$, appartiennent à E muni de la norme $\|u\|_E = E(u)(0)$. Ces deux espaces coincident et on les identifiera désormais.

Le spectre de B est formé de valeurs propres ψ_k de multiplicité finie auxqu'elles sont associés les vecteurs propres (u_k, v_k) . En multipliant l'équation

$$(97) \psi_k^2 u_k - \Delta u_k = 0$$

par u_k et en intégrant sur Ω on obtient la formule

$$(98) \psi_k^2 \int_{\Omega} (|u_k|^2 + |\nabla u_k|^2) dx + \int_{\Gamma_0} (\lambda(x) \psi_k)^{-1} |v_k|^2 d\sigma = 0.$$

(le cas $\psi_k = 0$ est exclu à cause de l'inégalité de Poincaré!). De la relation (98) on déduit que les valeurs propres de B ne peuvent pas être imaginaires pures; elles sont donc situées dans le demi plan $\text{Re } z < 0$. Ceci est relié à l'absorption d'énergie produite par la condition aux limites .

Dans le même esprit on démontre la

Proposition 8.

Pour tout φ donnée initiale d'énergie finie on a

$$(99) \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t)\varphi = 0.$$

Il s'agit d'un résultat classique démontré dans le cas du problème extérieur par Lax et Phillips [22] et Iwasaki [17]. Dans le cas du problème intérieur c'est plus facile et on dispose de démonstrations dues à Dafermos [8] et Haraux [12] (pour le cas non linéaire). Pour être complet nous donnons une démonstration due à Haraux.

Démonstration.

On note donc $E(u)(t)$ la quantité:

$$E(u)(t) = 1/2 \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Pour toute solution c'est une expression positive et décroissante. Pour montrer que $Z(t)\varphi$ converge fortement vers zéro il suffit de prouver ce résultat lorsque φ appartient à un sous espace dense et il sera commode de choisir ce sous espace égal à $D(B^2)$. Ainsi si φ appartient à $D(B^2)$ il existe une suite t_k tendant vers l'infini telle que $Z(t_k)\varphi$ et $\partial_t Z(t_k) = BZ(t_k)\varphi$ convergent fortement dans E . On notera φ_∞ la limite de $Z(t_k)\varphi$. Maintenant $Z(t)Z(t_k)\varphi$ converge vers la solution dont la donnée initiale est φ_∞ . D'autre part $E(Z(t)\varphi)$ est une fonction positive et décroissante.

On a ensuite

$$(100) \lim_{t \rightarrow \infty} E(Z(t)\varphi) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} E(Z(t_k)\varphi) = E(\varphi_\infty) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} E(Z(s+t_k)\varphi) = E(Z(s)\varphi_\infty)$$

Il en résulte que $(u, \partial_t u) = Z(t)\varphi_\infty$ vérifie la relation $E(Z(t)\varphi_\infty) = E(\varphi_\infty)$ ou ce qui revient au même la relation :

$$(101) 0 = \int_{\Gamma_0} \lambda(x) |\partial_v u|^2 d\sigma = \int_{\Gamma_0} (\lambda(x))^{-1} |\partial_t u|^2 d\sigma.$$

Ainsi u et $\partial_v u$ sont toutes deux nulles sur $\Gamma_0 X(0, \infty)$. En appliquant le théorème d'Holmgren (cf. Hörmander [15] p. 129 Théorème 5.3.3.) on en déduit que u et donc φ_∞ est identiquement nulle. Ceci permet de terminer rapidement la démonstration de la Proposition 8. Par contre cette proposition ne dit rien sur la vitesse de convergence et la situation va dépendre de la géométrie du problème.

On dira que l'ensemble Γ_0 stabilise géométriquement le problème s'il existe un temps T fini tel que $\Gamma_0 X(0, T)$ contrôle géométriquement le problème.

On a alors le

Théorème C.

On suppose qu'il existe un rayon γ ne rencontrant pas $\Gamma_0 X \mathbb{R}_t^+$ et ayant au moins un point à l'intérieur de M . Alors $Z(t)$ converge arbitrairement lentement vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$ et tout T fini il existe une donnée initiale $\varphi = (u(x, 0), \partial_t u(x, 0))$ telle que l'on ait

$$(102) \|\varphi\|_E = 1, \|Z(t)\varphi\| > 1 - \epsilon \quad \forall t, 0 \leq t < T.$$

Démonstration.

On fixe T et un voisinage U de $\gamma \cap \{(x, t) / 0 < t < T\}$ ne rencontrant pas $\Gamma_0 X(0, T)$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe, d'après Ralston [29] et Taylor, une fonction u_ϵ solution du problème

$$(103) \quad \square u_\varepsilon = 0 \text{ dans } M, \quad u_\varepsilon|_{\partial M} = 0$$

et localisée autour de γ ; c'est à dire vérifiant la relation

$$(104) \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega X(0,T))} = 1, \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1((\Omega X(0,T)) \setminus \cup \Gamma_0 X(0,T))} < \varepsilon.$$

Il en résulte que la restriction de sa dérivée normale à $\Gamma_0 X(0,T)$ est majorée dans $L^2(\Gamma_0 X(0,T))$ par $C\varepsilon$ (utiliser la Proposition 4). On introduit alors v_ε solution du problème :

$$(105) \quad \square v_\varepsilon = 0 \text{ dans } M, \quad v_\varepsilon|_{\partial M \setminus \Gamma_0 X(0,T)} = 0, \quad \partial_t v_\varepsilon + \lambda(x) \partial_v v_\varepsilon|_{\Gamma_0 X(0,T)} = \lambda(x) \partial_v u_\varepsilon$$

avec pour données de Cauchy:

$$(106) \quad v_\varepsilon(x,0) = 0, \quad \partial_t v_\varepsilon(x,0) = 0.$$

En multipliant l'équation (105) par $\partial_t v_\varepsilon$ et intégrant sur $\Omega X(0,t)$ on obtient la relation :

$$(107) \quad (\int_{\Omega} (|\partial_t v_\varepsilon|^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2) dx)(t) + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_0} (\lambda(x))^{-1} |\partial_v v_\varepsilon|^2 d\sigma dt \leq \\ 2 \int_0^t \int_{\Gamma_0} (\lambda(x))^{-1} |\partial_v u_\varepsilon \partial_v v_\varepsilon| d\sigma dt.$$

En utilisant le fait que sur Γ_0 $\lambda(x)$ est majorée et minoré et le lemme de Gronwall on déduit de (105) et (106) la relation:

$$(108) \quad (\int_{\Omega} (|\partial_t v_\varepsilon|^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2) dx)(t) \leq C\varepsilon.$$

Il en résulte (remplacer partout dans cette construction ε par ε/C avec C convenable) que $\varphi_\varepsilon = (u_\varepsilon - v_\varepsilon, \partial_t u_\varepsilon - \partial_t v_\varepsilon)/\|\varphi_\varepsilon(0)\|$ vérifie bien les relations :

$$\|\varphi_\varepsilon\|_E = 1, \quad \|Z(t)\varphi_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon \quad \forall t, \quad 0 \leq t < T.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème C.

Théorème D.

On suppose que Γ_0 stabilise géométriquement le problème. Alors il

existe une constante M et une constante $\beta > 0$ telle que l'on ait :

$$(109) \quad \|Z(t)\| \leq M e^{-\beta t} \quad \forall t > 0.$$

Démonstration.

La démonstration consiste à adapter les idées du § III.

Le point essentiel est la démonstration de la

Proposition 9.

Soit T tel que tout rayon γ rencontre $\Gamma_0 \times (0, T)$ au moins une fois en un point non diffusif et soit N l'espace des distributions prolongeables u solutions dans $\Omega \times \mathbb{R}_t^+$ du problème d'évolution :

$$(110) \quad \square u = 0 \text{ dans } M_+ = \Omega \times \mathbb{R}_t^+$$

avec les conditions aux limites

$$(111) \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \partial_t u + \lambda(x) \partial_v u|_{\Gamma_0} = 0$$

qui vérifient les relations :

$$(112) \quad \partial_v u|_{\Gamma_0 \times (0, T)} \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T)) \text{ et } \partial_t u|_{\Gamma_0 \times (0, T)} \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$$

alors N coïncide avec les solutions d'énergie finie et il existe une constante C telle que l'on ait :

$$(113) \quad \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, T)|^2 + |\nabla u(x, T)|^2) dx \leq C \iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} (|\partial_v u|^2 + |\partial_t u|^2) d\sigma dt.$$

On montre d'abord que cette proposition entraîne facilement le théorème D. En effet, toute solution d'énergie finie vérifie la relation:

$$(114) \quad 0 = \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, T)|^2 + |\nabla u(x, T)|^2) dx - \int_{\Omega} (|\partial_t u(x, 0)|^2 + |\nabla u(x, 0)|^2) dx + \\ + 2 \iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} \lambda(x) |\partial_v u|^2 d\sigma dt \geq E(T) - E(0) + C E(T)$$

avec C strictement positif. De (114) on déduit la relation

$$E(T) \leq (1+C)^{-1} E(0)$$

qui suffit à prouver le théorème D.

Démonstration de la proposition 9.

Elle se fait en plusieurs lemmes.

Lemme 8.

Soit p_0 un point ∂M et soit u une distribution prolongeable vérifiant dans un voisinage U de p_0 les relations :

$$(115) \quad \square u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \partial_{\nu} u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U) \text{ et } \partial_{\nu} u|_{\partial M \cap U} \in L^2(\partial M \cap U)$$

alors il existe un voisinage U de p_0 tel que l'on ait $u|_{\partial M \cap U} \in H^1(\partial M \cap U)$.

Démonstration.

On se ramène au cas où, au voisinage de $p_0 = 0$, M s'identifie au demi espace $y_n > 0$ et on considère l'intégrale :

$$\int (|\xi'|^2 + |\tau|^2) |F_{\zeta'} u(\zeta', 0)|^2 d\xi' d\tau$$

$\zeta' = (\zeta', \tau)$ est la variable duale de y' et $F_{\zeta'}$ est la transformée de Fourier en ces variables.

Comme on a $\partial_{\nu} u|_{\partial M} \in L^2(\partial M)$ pour toute constante $C > 0$ on a :

$$(116) \quad \int_{|\xi'| < C} (|\xi'|^2 + |\tau|^2) |F_{\zeta'} u(\zeta', 0)|^2 d\xi' d\tau < +\infty.$$

Il suffit donc de prouver que pour d strictement inférieur à 1, l'intégrale

$$\int_{d|\xi'| > |\tau|} (|\xi'|^2 + |\tau|^2) |F_{\zeta'} u(\zeta', 0)|^2 d\xi' d\tau$$

est finie. Mais la région $d|\xi'| > |\tau|$ est contenue dans la région elliptique de l'opérateur des ondes et le calcul fait par Taylor [33] p. 204 montre que cette quantité est finie dès que $\partial_{\nu} u|_{\partial M} \in L^2(\partial M)$.

On désigne par W l'espace des distributions prolongeables solutions de

$$(117) \quad \square u = 0 \text{ dans } M_+ = \Omega \times \mathbb{R}_l^+$$

$$(118) \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \partial_l u \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T)), \quad \partial_v u \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T)).$$

Au voisinage de tout point p de $\partial\Omega \times (0, T)$ on a

$$(119) \text{ soit } u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ soit } \partial_l u + \lambda(x) \partial_v u|_{\Gamma_0} = 0 \text{ avec } \lambda(x) > 0.$$

Le problème d'évolution associé au semi groupe $Z(t)$ est bien posé uniquement pour $t > 0$, aussi il convient d'adapter le résultat de Melrose et Sjostrand et en procédant comme dans leur article (seule la partie locale §2 est à modifier) on obtient la

Proposition 10.

On suppose que la frontière de Ω est réunion de deux parties connexes disjointes $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. L'une d'entre elles pouvant éventuellement être vide. On considère des distributions prolongeables u solution du problème $\square u = 0$ dans M avec les conditions aux limites

$$(C_1) \quad u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ et } (C_2) \quad \partial_v u + \lambda(x) \partial_l u|_{\Gamma_2} = 0$$

où $\lambda(x)$ est une fonction strictement positive et indéfiniment dérivable.

Alors pour tout rayon $C^\infty \gamma$ contenu dans Σ_b on a la propriété suivante :

$$(120) \quad (x_0, t_0, q) \in \Sigma_b \notin WF_b(u) \Rightarrow \{(x, t, q) \in \Sigma_b \cap \gamma / t > t_0\} \cap WF_b(u) = \{0\}.$$

On utilise (120) pour montrer que si au voisinage d'un point m_0 non diffractif de Γ_2 u s'écrit microlocalement comme la somme d'une fonction w de H^1 et d'une fonction w vérifiant $m_0 \notin WF_b(w)$ cette propriété demeure vraie dans le futur même si γ rencontre à nouveau Γ_2 en un point diffractif. Ensuite on en déduit comme dans la démonstration du Théorème B que pour ϱ assez petit on a, pour tout $u \in W$,

$$(121) \quad u|_{\Omega X]T-\varrho, T[} \in H^1(\Omega X]T-\varrho, T[)$$

Ainsi u est solution d'un problème de Cauchy vérifiant pour un $t_0 \in \Omega X]T-\varrho, T[$

$$(122) \quad (u(x,t_0), \partial_t u(x,t_0)) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et les conditions aux limites (utiliser le lemme 8)

$$(123) \quad u|_{\Gamma_1 X(0,T)} = 0, \quad u|_{\Gamma_0 X(0,T)} \in H^1(\Gamma_0 X[0,T]).$$

On en déduit que u appartient à $H^1(\Omega X[0,T])$ et que W coincide algébriquement et topologiquement avec les solutions dont les données de Cauchy sont dans E .

Lemme 9.

L'expression

$$\left(\iint_{\Gamma_0 X(0,T)} (|\partial_\nu u|^2 + |\partial_t u|^2) d\sigma dt \right)^{1/2}$$

définit une norme sur E .

Démonstration.

On désigne par N l'espace des u vérifiant :

$$(124) \quad \iint_{\Gamma_0 X(0,T)} (|\partial_\nu u|^2 + |\partial_t u|^2) d\sigma dt = 0.$$

En utilisant la relation

$$1/2 \int_{\Omega} (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) dx + \int_{\Gamma_0} \lambda(x) |\partial_\nu u|^2 d\sigma = 0$$

on voit que N est un sous espace fermé de E . D'autre part si u appartient à N , il en est de même de $\partial_t u$ et on en déduit que u appartient en fait à $H^2(\Omega X(0,T))$. Donc que N est un espace de dimension finie dans lequel ∂_t opère. Il existe donc une fonction u non identiquement nulle vecteur propre de ∂_t . Cette fonction vérifie dans $\Omega X(0,T)$ les relations :

$$(125) \quad u^2 u - \Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma_1 X(0,T)} = 0 \text{ et } u|_{\Gamma_0 X(0,T)} = \partial_\nu u|_{\Gamma_0 X(0,T)} = 0.$$

On en déduit qu'elle est identiquement nulle dans $\Omega X(0,T)$ et donc que ses données de Cauchy sont nulles.

Pour terminer la démonstration de la proposition 9 il suffit maintenant d'utiliser la Proposition 7 (Théorème du graphe fermé dans les espaces de Traces). L'espace E de cet énoncé

coincide bien sur avec l'espace également noté E des solutions avec données de Cauchy d'énergie finie. L'espace F est l'espace des solutions de (94), (95) dont la restriction à $\Omega X(0,T)$ est dans $H^{-1}(\Omega X(0,T))$. T est la restriction à $\Gamma_0 X(0,T)$ de ces solution. G est l'espace $H_{x',t}^{-1}(\Gamma_0 X(0,T))$ et H est par exemple $H^{-351}(\Gamma_0 X(0,T))$.

Remarque 9.

Comme dans la remarque 1 en l'absence de rayon pathologique on peut montrer en concentrant des singularités sur les rayons limites que les théorème C et D donnent des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation.

Remarque 10.

Dans les énoncés et les démonstrations de ce § nous avons considéré une situation dans laquelle les frontières Γ_0 et Γ_1 étaient disjointes. La difficulté essentielle pour un cas plus général provient bien sur des points où la condition aux limites change de type. Avec la condition aux limites

$$(126) \lambda(x) \partial_y u + \psi(x) \partial_t u = 0$$

sur $\partial\Omega$ tout entier le problème est bien posé, pour les temps positifs dès que λ et ψ sont positifs. Néanmoins si λ s'annule à l'ordre 2 en un point p de $\partial\Omega$ le théorème de propagation des singularité n'est plus valable en ce point. On peut construire des solutions ayant pour tout $t > 0$ une singularité localisée en ce point. En utilisant l'argument de Taylor on montre alors qu'il n'est pas possible de stabiliser de telles solutions. On peut pallier à cette difficulté de deux manières.

(i) Au lieu de la condition (126) utiliser une condition aux limites du type

$$(127) \partial_y u + \lambda(x) \partial_t u = 0$$

avec $\lambda \in C^\infty$ et non nul sur une partie Γ_0 de Γ . Il s'agit alors de la stabilisation du problème de Neumann. Comme alors les constantes sont solutions de $\square u = 0$ avec la condition (111) il convient de disposer d'une partie disjointe de Γ sur laquelle on a la condition de Dirichlet. Dans cette situation on peut établir en procédant comme au § IV des conditions suffisantes de stabilité.

(ii) Adapter la démonstration de la proposition 3 au cas où sur le bord de Γ_0 (dans $\partial\Omega$) $\lambda(x)$

obtenu par Komornik et Zuazua [18]. Plus généralement il faudrait (travaux en cours) utiliser une version microlocale de l'inégalité de Hardy. On peut également signaler que dans un cas particulier (Grisvard [11]) les difficultés liées au changement de type de la condition aux limites sont surmontées.

Remarque 11.

Soit $Z(t) = e^{tB}$ un semi groupe fortement continu et soit $\sigma(B)$ et $\sigma(Z(t))$ les spectres de ces opérateurs. On sait que l'on a toujours : $e^{t\sigma(B)} \subset \sigma(Z(t))$ et que toute valeur propre non nulle de $Z(t)$ est l'image d'une valeur propre de B (cf. Pazy [28]). La situation de non stabilisation géométrique correspond donc, comme dans le cas du semi groupe de Lax et Phillips à la présence de spectre continu sur le disque unité pour le semi groupe $Z(t)$.

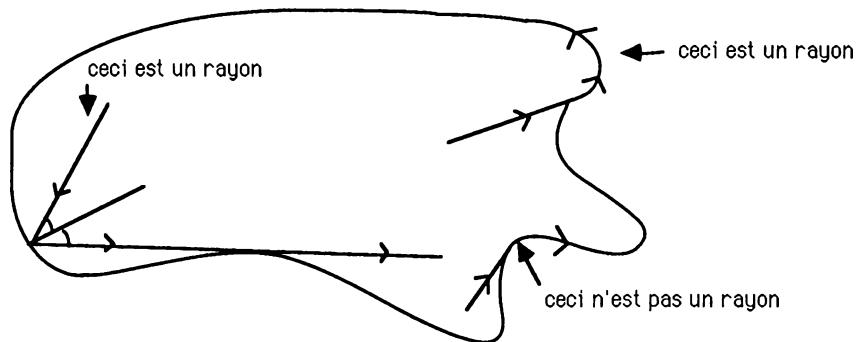
FIGURES :

Figure 1

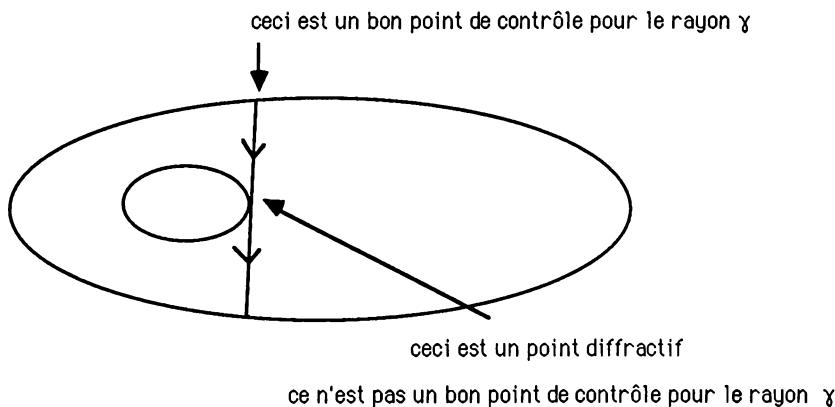


Figure 2

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch. Contrôle et stabilisation pour l'équation des ondes. Exposé de G. Lebeau au colloque de Saint Jean de Monts, Juin 1987. Publication de l'Ecole Polytechnique Palaiseau (1987)
- [2] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch. Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation des problèmes hyperboliques. Proceedings of the Workshop on non linear hyperbolic equations in applied sciences, Turin, Juin 1987. Ed. N. Bellomo.
- [3] T. Cazenave. (à paraître).
- [4] J. Chazarain. CIME Lectures notes 1973.
- [5] J. Chazarain et A. Piriou. Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires . Gauthiers Villars , Paris 1981.
- [6] G. Chen. Control and stabilisation for the wave equation in a bounded domain. SIAM J. Control and Optimisation (17), 1, (1979) , p. 66–81.
- [7] G. Chen. Control and stabilisation for the wave equation in a bounded domain. Part II SIAM J. Control and Optimisation (19) , 1, (1981) , p.114–122.
- [8] C.. Dafermos. Asymptotic behavior of solutions of evolution equations , in "Non linear evolution equations" (M.G. Crandall, Ed.) p. 103–123, Academic Press, New York 1978.
- [9] G. Eskin. Communication personnelle et Initial boundary value problem for second order hyperbolic equation with general boundary conditions. Israel Journal Anal. Math. 40, 43–49 (1981).
- [10] P. Grisvard. Contrôlabilité exacte dans les polygones et les polyèdres Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,tome 304, 367–370 (1987).
- [11] P. Grisvard. Contrôlabilité exacte avec conditions aux limites mêlées Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 305, 363–366(1987).
- [12] A. Haraux. Stabilisation of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations Jour. of Diff. Equations, Vol 59, N° 2, p. 145–154, 1985.
- [13] A. Haraux. Contrôlabilité exacte d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée; à paraître aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1988.
- [14] L. F. Ho. Observabilité frontière de l'équation des ondes . Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 302 , p. 443–446 (1986).
- [15] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag. Band 116 1969.
- [16] L. Hörmander. *The Analysis of linear partial differential operators*. Springer Verlag. Band 257, 1983, 256, 1983 et 274, 1984.
- [17] N. Iwasaki. Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative

- and coercive bounddary condition in exterior domains. Publ. RIMS Kyoto U. 5 (1969) , 193-218.
- [18] V. Komornik et E. Zuazua. Stabilisation frontière de l'équation des ondes : Une méthode directe. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 305, série I, p. 605 - 608, 1987.
- [19] I. Lasiecka and R. Triggiani Uniform exponential energy decay in a bounded region with $L_2(0,T;L_2(\Sigma))$ -feedback control in the Dirichlet boundary condition . J. Diff. Equation. à paraître.
- [20] P. Lax et R. Phillips. *Scattering Theory*. Academic Press New York, 1967.
- [21] J.L. Lions. Exact Controllability, stabilization and perturbation for distributed systems. John Von Neumann Lecture, Boston, July 1986. SIAM Jour. Cont. Opt. 1988.
- [22] J.L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications* I-III. Dunod, Paris, 1968-1970.
- [23] B. Malgrange. Ideal of differentiable functions . Oxford University Press. Oxford 1966.
- [24] R. Melrose. Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems . Duke Math. J. 42, 605-635 (1975).
- [25] R. B. Melrose et J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. Comm. Pure and Appl. Math. Vol 31 , 593-617 (1978).
- [26] C. Morawetz, J. Ralston et W. Strauss. Decay of the soultion of the wave equation outside a non trapping obstacle. Comm. Pure and Appl. Math. 30 , 1977, p. 447-508.
- [27] L. Nirenberg. Lecture on linear partial differential equations . Reg. Conf. Serie in Math. n° 17, A.M.S. ,Providence , 1967.
- [28] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and application to to partial differential equations* . Springer Verlag, Berlin 1983.
- [29] J. Ralston. Solution of the wave equation with localised energy. Comm. Pure and Appl. Math. Vol 22 , 807-823 (1969).
- [30] J. Rauch et M. Taylor. Exponential Decay of solutions to hyperbolic equations in bounded Domains. Indiana University Math Journal 24 n° 1 (1974) 7, 86.
- [31] J. Sjöstrand. *Singularités Analytiques Microlocaless*. Astérisque n° 95. Société Mathématique de France. Paris 1982.
- [32] J. Sjöstrand. Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems. Comm. P.D.E. 5 (1) 1980 , 41-94 .
- [33] M. Taylor. Grazing rays and reflection of singularities to solutions to wave equations. Comm. Pure Appl. Math. 29 , 1-38 (1976).

Index terminologique

- Contrôlabilité exacte
définition 15
formulation générale 107, 108
élargie 95
simultanée 322
- Contrôle
par Dirichlet 15
par Neumann 131
par des conditions mêlées 178
portant sur y et Δy 280
interne 396
donné par HUM 430
- Dirichlet (contrôle par, ou action de)
sur l'équation des ondes chap. 1
et p. 501
sur le système de l'élasticité 223
sur les plaques vibrantes 239, 468
- Dualité 433
- Elasticité
système de l'élasticité chap. 14
- Equation
des ondes 15, 131, 323, 400, 239,
280, 465
- Holmgren
théorème de Holmgren 87
conséquences 87, 391
- HUM = Hilbert Uniquess Method
21, 107, 149, 227, 237
- Hyperbolique 492
- Interne (contrôle interne) 396
- Inégalités directes 44, 247, 287, 369
- Inégalités inverses 54, 254, 296, 344,
371
- Microlocale (analyse) 495
- Neumann (cf. contrôle)
- Ondés (cf. équations)
- Pénalisation 431
- Plaques vibrantes (cf. équations)
- Stabilisation 492
- Unicité (théorème d') 54, 141, 254,
296

MASSON Editeur
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
Dépôt légal : Juillet 1988

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
av. d'Embrun 05002-GAP
Dépôt légal 306 — Mai 1988

- [1] **Élasticité tridimensionnelle**, par P.G. CIARLET. 1986, 168 pages.
- [2] **Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire**, par P. DESTUYNDER. 1986, 176 pages.
- [3] **Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués**, par A. EL JAI et A.J. PRITCHARD. 1986, 206 pages.
- [4] **Applications of Multiple Scaling in Mechanics**. Applications des échelles multiples en mécanique, coordonné par P.G. CIARLET et E. SANCHEZ-PALENCA. 1987, 360 pages.
- [5] **Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity**, par D. LEGUILLOU et E. SANCHEZ-PALENCA. 1987, 200 pages.
- [6] **Modelling, Analysis and Control of Thin Plates**, par J.E. LAGNESE et J.L. LIONS. 1988, 184 pages.
- [7] **Méthodes des éléments finis pour les fluides**, par O. PIROUNEAU. 1988, 204 pages.
Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, par J.L. LIONS.
- [8] Tome 1 : Contrôlabilité exacte. 1988, 552 pages.
- [9] Tome 2 : Perturbations. 1988, 288 pages.



9 782225 814778

ISBN: 2-225-81477-5