

Report V1

July 25, 2022

Contents

1	Introduction	1
2	Méthode des Elements finis	2
2.1	Formulation Variationnelle	2
2.2	Construction de l'espace d'approximation	3
2.2.1	Notations	3
2.2.2	Construction des fonctions de base	3
2.3	Construction des Matrices éléments finis	4
2.4	Etude de convergence	6
3	Méthode des Bases reduites	7
3.1	Mise en oeuvre	7
3.2	Algorithme glouton	8
3.3	Etude du conditionnement ou sélection de la dimension	9
3.4	Qualité de la Base Reduite	9
3.5	Etude de l'erreur	9

1 Introduction

Dans ce projet, on s'intéresse à un problème elliptique (une équation de diffusion en une ou deux dimensions d'espace) où le coefficient de diffusion dépend d'un paramètre, et on suppose qu'on a besoin de résoudre le problème pour un nombre important de valeurs de ce paramètre.

Voici l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(D(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \\ D(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_1 \\ \mu, x \in \Omega_2 \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce contexte, résoudre un nombre important de fois le problème elliptique (par la méthode des éléments finis par exemple) devient extrêmement onéreux. Le principe de la méthode des bases réduites est de procéder à ces évaluations en deux temps : (1) on résout d'abord le problème elliptique (par la méthode de éléments finis) pour un nombre relativement modeste de valeurs du paramètre, puis (2) on utilise les solutions ainsi obtenues pour engendrer un espace vectoriel de dimension réduite où l'on cherchera une approximation de la solution du problème elliptique pour toutes les autres valeurs du paramètre .

Comment choisir les quelques solutions de base ? Nous utiliserons l'algorithme glouton qui procède de la manière suivante :

$$\begin{cases} B_n = \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \\ u_{n+1}^{\vec{}} = \operatorname{argmax}(\Delta(\mu)), \text{ avec } \Delta(\mu) = ||u(\mu) - P_{B_n}(u)|| \\ B_{n+1} = \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, u_{n+1}^{\vec{}} \end{cases}$$

Comme le calcul de $u_{n+1}^{\vec{}}$ est assez long , Pour palier ce problème, nous envisagerons de d'utiliser des réseaux de neurones pour construire $\Delta(\mu)$.

2 Méthode des Elements finis

2.1 Formulation Variationnelle

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(D(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + u(x) = f(x), x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega \\ D(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega_1 \\ \mu, x \in \Omega_2 \end{cases} \end{cases}$$

Avec $\Omega =]0, 1[$,

$\Omega_2 =]0.19; 0.21[\cup]0.39; 0.41[\cup]0.59; 0.61[\cup]0.79; 0.81[$, et $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2$

$$\forall x \in \Omega, -(D(x)u'(x))' + u(x) = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), -v(x) - (D(x)u'(x))' + v(x)u(x) = v(x)f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_{\Omega} -v(x) - (D(x)u'(x))' + v(x)u(x) = \int_{\Omega} v(x)f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} D(x)v'(x)u'(x)dx + \int_{\partial\Omega} D(x)v(x)u'(x) + \int_{\Omega} v(x)u(x) \\
= & \int_{\Omega} D(x)v'(x)u'(x) + \int_{\Omega} v(x)u(x) = \int_{\Omega} 1_{\Omega_1}v'(x)u'(x) + \int_{\Omega} 1_{\Omega_2}\mu v'(x)u'(x) + \int_{\Omega} v(x)u(x) \\
& = \int_{\Omega} 1_{\Omega_1}v'u' + \int_{\Omega} 1_{\Omega_2}\mu v'u' + \int_{\Omega} vu
\end{aligned}$$

On pose alors ceci :

$$\alpha_{\mu}(u, v) = \int_{\Omega} 1_{\Omega_1}v'u' + \mu \int_{\Omega} 1_{\Omega_2}v'u' + \int_{\Omega} v u l(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)$$

Et la formulation variationnelle devient

$$\alpha_{\mu}(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

2.2 Construction de l'espace d'approximation

2.2.1 Notations

Maillage : $x_{min} = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_{max}$

Nombre d'éléments (mailles) : N

Nombre de noeuds : $N + 1$

Nombre de noeuds internes : $N - 1$

Tailles de mailles : $h_j = x_{j+1} - x_j$ et $h_j = a_{j+1} - a_j$

On pose : $K = \{a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $P = P_1(\mathbb{R}) = \{p = \alpha + \beta x\}$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^N [x_i, x_{i+1}]$, et $\Omega_2 = \bigcup_{i=1}^N [a_i, a_{i+1}]$

Espace d'approximation : $V_h = \{v_h \in C^0 : v_h|_{\Gamma} = 0, v_h|_K \in P_1(K)\}$, Avec $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

2.2.2 Construction des fonctions de base

Support des fonctions de bases : $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Définitions des fonctions de bases :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned}
\forall i \in [1, N], \varphi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\
\forall i \in [1, N], \varphi_{i-1}(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-2}}{h_{i-1}}, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ -\frac{x-x_i}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\forall i \in [1, N], \varphi_{i+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ -\frac{x-x_{i+2}}{h_{i+2}}, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Et leurs dérivées

$$\forall i \in [1, N], \varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\forall i \in [1, N], \varphi'_{i-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ -\frac{1}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\forall i \in [1, N], \varphi'_{i+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ -\frac{1}{h_{i+2}}, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

2.3 Construction des Matrices éléments finis

$$A_{ij} = a_\mu(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} 1_{\Omega_1} \varphi'_i \varphi'_j + \mu \int_{\Omega} 1_{\Omega_2} \varphi'_i \varphi'_j + \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

$$\text{En posant } A_1 = \int_{\Omega} 1_{\Omega_1} \varphi'_i \varphi'_j, A_2 = \int_{\Omega} 1_{\Omega_2} \varphi'_i \varphi'_j \text{ et } M = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j$$

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{\Omega_1} \varphi'_i \varphi'_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{\Omega_1} \varphi'_i \varphi'_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{\Omega_1} \varphi_i'^2 \end{cases}$$

Sur chaque sous-intervalle de Ω_1 on a :

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'^2 \end{cases}$$

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_{i+1} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_{i-1} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'^2 \end{cases}$$

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} * 0 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} * \frac{1}{h_i} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h_{i+1}} * 0 \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} * \frac{1}{h_i} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} * \frac{1}{h_{i+1}} \end{cases}$$

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\frac{1}{h_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\frac{1}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{1}{h_i} * 1_{[x_{i-1}, x_i]} + \frac{1}{h_{i+1}} * 1_{[x_i, x_{i+1}]} \end{cases}$$

De même pour A_2 on a ceci :

$$(A_2)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\frac{1}{h_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\frac{1}{h_i}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{1}{h_i} * 1_{[x_{i-1}, x_i]} + \frac{1}{h_{i+1}} * 1_{[x_i, x_{i+1}]} \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi_i^2 \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i \varphi_{i+1} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+1} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i \varphi_{i-1} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i-1} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |(i-j)| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} * 0 - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} \frac{x-x_i}{h_{i+1}} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} \frac{x-x_i}{h_i} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} * 0 \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} \frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}} \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, |i - j| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)}{h_{i+1}^2} \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{h_i^2} \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{h_i^2} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_{i+1})^2}{h_{i+1}^2} \end{cases}$$

$$(M)_{ij} = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = h_{i+1}/6, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = h_i/6, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = \begin{cases} \frac{h_i}{3}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{h_{i+1}}{3}, x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \end{cases}$$

On final on obtient:

$$A_\mu = A_1 + \mu A_2 + M$$

Pour calculer le second membre , voici la méthode des trapèzes par morceaux:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} g(x)dx \approx (x_{max} - x_{min}) \frac{g(x_{min}) + g(x_{max})}{2}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} b &= \int_{\Omega} f \varphi_i = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_i \\ b_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \varphi_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_i \\ b_i &\approx h_i \left(\frac{f(x_{i-1})\varphi_i(x_{i-1}) + f(x_i)\varphi_i(x_i)}{2} \right) + h_{i+1} \left(\frac{f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1})}{2} \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$b_i = h_i \frac{f(x_i)\varphi_i(x_i)}{2} * 1_{[x_{i-1}, x_i]} + h_{i+1} \frac{f(x_i)\varphi_i(x_i)}{2} * 1_{[x_i, x_{i+1}]}$$

$$b_i = (h_i + h_{i+1}) \frac{f(x_i)}{2}, x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

car $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$

En supposant que $f = 1$, on obtient :

$$b_i = \frac{h_i}{2} * 1_{[x_{i-1}, x_i]} + \frac{h_{i+1}}{2} * 1_{[x_i, x_{i+1}]}$$

2.4 Etude de convergence

Plaçons nous dans le cas où $D(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$, alors l'équation s'écrit de la manière suivante:

$$-u'' + u = 1 \iff \int_{\Omega} v' u' + \int_{\Omega} v u = \int_{\Omega} v$$

Comme on a

$$\forall u \in H^1, u = u_1 \varphi_1 + \dots + u_N \varphi_N$$

Alors on

$$\sum_{i,j=1}^N u_i u_j \int_{\Omega} \varphi_i' \varphi_j' + \sum_{i,j=1}^N u_i u_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j = \sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} \varphi_i$$

Posons

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, M = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i' \varphi_j', N = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j, F = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \varphi_i$$

Alors le système se réécrit de cette manière

$$U^T M V + U^T N V = F$$

Ainsi :

$$\|u\|_{L^2} = \int u^2 dx = \sum_{i,j=1}^N u_i u_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = U^T N U$$

$$\|u\|_{H^1} = \int u^2 + (u')^2 dx = \sum_{i,j=1}^N u_i u_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i,j=1}^N u_i u_j \int_{\Omega} \varphi_i' \varphi_j' dx = U^T M U + U^T N U$$

Après la résolution du problème pour différent valeur du pas h ,nous obtenons la pente courbe de l'erreur en norme H1 de 1.1234069031123024 ,et en norme L2 = 2.0200385934151055 , ce qui qui est conforme à nos attentes théorique.

3 Méthode des Bases reduites

3.1 Mise en oeuvre

Posons $P_0 = \{\mu_1, \dots, \mu_{N_0}\} \subset P$, $V_0 = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0})$ avec $u_i = u(\mu_i)$ et $V_0 \subset H_0^1$. Ces fonctions u_i sont obtenues en résolvant le problème approché par éléments finis pour chaque μ_i dans P_0 .

Soit $\mu \in P$, On approche la fonction u_μ solution de base par une méthode de Galerkin dans V_0 , ce qui revient à chercher la fonction $u_\mu^{BR} \in V_0$ telle que :

$$a_\mu(u_\mu^{BR}, u_i) = b(u_i), \forall i \in \{1, \dots, N_0\}$$

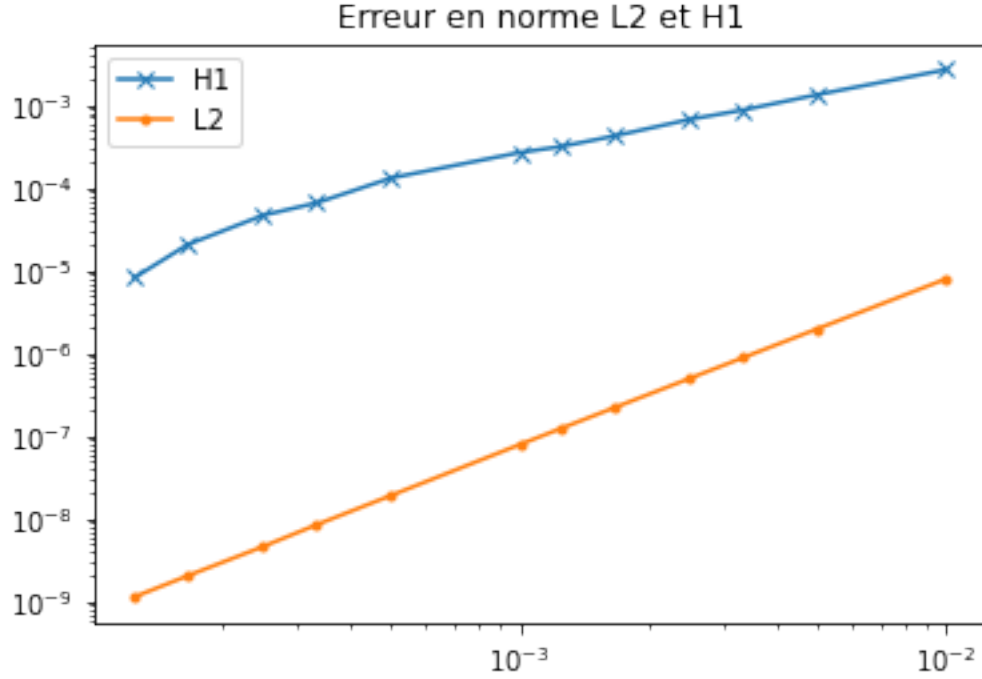


Figure 1: Résultat de l'étude de convergence

En décomposant u_μ^{BR} sous la forme $u_\mu^{BR} = \sum_{i=1}^{N_0} X_{\mu,i}^{BR} u_i$ et $u_i = \beta_1 \varphi_1 + \dots + \beta_N \varphi_N$

$a_\mu(u_\mu^{BR}, u_i) = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{k,j=1}^N X_{\mu,i}^{BR} \beta_k \beta_j a_\mu(\varphi_k, \varphi_j)$ car a_μ est bilinéaire

Posons

$$X_\mu^{BR} = \begin{pmatrix} X_{\mu,1}^{BR} \\ \vdots \\ X_{\mu,N_0}^{BR} \end{pmatrix}, U = (u_1, \dots, u_{N_0}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_0} \end{pmatrix}$$

On réécrit le système :

$$(U^T A_\mu U) X^{BR} = U^T (A_0 + M) U + \mu U^T A_1 U = U^T B$$

Notons $V_0 = U^T (A_0 + M) U$, $V_1 = U^T A_1 U$ et $B^{BR} = U^T B$, $A_\mu^{BR} = V_0 + \mu V_1$. Le problème s'écrit : $A_\mu^{BR} X^{BR} = B^{BR}$.

3.2 Algorithme glouton

Pour sélectionner les N_0 solutions de base, la procédure ci-dessous a été utilisée.

Pseudo-code de l'algorithme :

choisir μ_1 de manière aléatoire

$u(\mu_1) = u_1$
 $B = Vect(u(\mu_1))$
 Pour i allant de 2 à N_0 faire :
 $u_i := \underset{\mu \in P}{argmax}(\Delta(B_i, \mu))$
 $B_i := Vect(u_1, \dots, u_i)$

$$\Delta(B, \mu) = ||u(\mu) - P_B u(\mu)||$$

3.3 Etude du conditionnement ou sélection de la dimension

Pour déterminer la valeur de optimale de N_0 , Nous avons calculer pour différent valeur de N_0 , le conditionnement de la matrice U .

3.4 Qualité de la Base Reduite

Pour différent valeur de M dans $\{10, 100, 500, 1000, 2000, 2500, 3000\}$, on calcul l'erreur entre la solution Ef et RB puis on affiche le graphe.

$$err = \sup_{\Lambda_M^{test}} ||u^{EF}(\mu) - u^{RB}(\mu)||_{L^2}$$

3.5 Etude de l'erreur

References

- [1] Gianluigi Rozza, *An introduction to reduced basis method for parametrized PDEs*
- [2] B. Haasdonk, *Reduced Basis Methods for Parametrized PDEs – A Tutorial Introduction for Stationary and Instationary Problems*
- [3] Alexandre Ern, *Analyse numérique et optimisation Méthode des bases réduites*