Master 2 - CSMI

Contrôle optimal - T.D. n° 3

1 Exercice 1 : contrôle frontière d'un problème de Neumann sous contrainte

Soit Ω, un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est supposée régulière et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\partial\Omega) | v \geq 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega\}.$$

Le but de cet exercice est de résoudre le problème

$$\inf_{v \in U_{ad}} J(v),$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

et $y(v)$ désigne la solution du problème de Neumann

$$\begin{cases} y(v) - \Delta y(v) = f \text{ dans } \Omega \\ \partial_\nu y(v) = v \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(i) On se donne $u \in L^2(\partial\Omega)$. Montrer que le problème de Neumann admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$ et qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in U_{ad}, \ \|y(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}).$$

En déduire que $y'(u)(v-u) = y(v)-y(v)$, et $(\nabla J(u), v-u) = (y(u)-z_d, y(v)-y(u))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u, v-u)_{L^2(\partial\Omega)}$.

(ii) Montrer que J est α-convexe. En déduire qu'il existe un unique contrôle optimal $u \in U_{ad}$.

(iii) On introduit l'état adjoint $p(u)$ défini par

$$\begin{cases} p(u) - \Delta p(u) = y(u) - z_d \text{ dans } \Omega \\ \partial_\nu p(u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que u est le contrôle optimal si et seulement si

$$(p(u) + \alpha u, v - u) \geq 0 \ \forall \ v \in U_{ad}.$$

(iv) Proposer un algorithme numérique de résolution de ce problème.

2 Exercice 2 : contrôle interne de l'équation de la chaleur

Dans cet exercice, on considère un problème de contrôle optimal dont la function coût fait intervenir l'état final comme une pénalité, ce qui oblige l'état final à s'approcher "au mieux" l'état nul. Soit Ω, un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n$ de bord régulier, et posons $Q =]0,T[\times\Omega$, $\Sigma =]0,T[\times\partial\Omega$. Étant donnés $y_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et un contrôle $v \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, on consi- dère y, solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = f + v & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ y(0,\cdot) = y_0(\cdot) & \text{dans } Q. \end{cases}$$

On se donne $\alpha > 0$ ainsi qu'une fonction de réference de l'état final $z_d \in L^2(\Omega)$. On définit la fonction coût

$$J : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ni v \mapsto \frac{1}{2}\|y(u)(T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

où $y(u) \in C^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1_0(\Omega))$ désigne l'unique solution du problème ci-dessus. On cherche un contrôle optimal u qui minimise J sur un ensemble convexe fermé $U_{ad} \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

(i) Montrer que l'application affine

$$L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ni v \mapsto y(v)(T) \in L^2(\Omega)$$

est continue pour les normes correspondantes.

(ii) Montrer que J est α-convexe sur $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Que peut-on en déduire que le problème $\inf_{v\in U_{ad}} J(v)$? Écrire l'inéquation d'Euler associée à ce problème.

(iii) On définit l'état adjoint $p(u)$ comme la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\partial_t p(u) - \Delta p(u) = 0 & \text{dans } Q, \\ p(u) = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ p(u)(T) = y(u)(T) - z_d & \text{dans } Q. \end{cases}$$

Montrer que

$$(p(u) + \alpha u, v - u)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \geq 0 \ \forall v \in U_{ad}.$$

(iv) Interpréter la condition d'optimalité dans le cas sans contrainte $U_{ad} = L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

(v) Proposer un algorithme numérique de résolution dans le cas de contraintes locales

$$U_{ad} = \{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) : a \leq v \leq b \text{ p.p. dans } Q\}.$$