Contrôle optimal - T.D. nº 2

1 Exercice 1 : contrôle optimal en économie

Un consommateur a une durée de vie $T > 0$. Il gagne un salaire avec un taux $\alpha > 0$ constant (par unité de temps). Soit $x(t)$ son salaire accumulé et i le taux de rémunération de l'épargne ou le taux d'intérêt de la dette. La consommation au temps t est notée $u(t)$. La fonction "salaire $x(\cdot)$ du consommateur" est solution du système différentiel

$$x'(t) = \alpha + ix(t) - u(t),$$

et $x(0) = x(T) = 0$ (il n'y a ni héritage ni leg). La fonction $u(\cdot)$ agit ici comme un contrôle. On souhaite déterminer la consommation qui maximise la fonction d'utilité J définie par

$$J(u) = \int_0^T \ln u(t) e^{-\rho t} dt$$

où $\rho > 0$ est un paramètre tel que $i > \rho$.

(i) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha + ix(t) - u(t) \quad t \geqslant 0 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) Définir le Hamiltonien associé à ce problème.

(iii) On admet l'existence d'un contrôle optimal. Énoncer le principe du maximum de Pontryagin pour ce problème, en précisant les conditions de transversalité s'il y a lieu.

(vi) Préciser la trajectoire optimale $x(\cdot)$ et démontrer que l'on a

$$u(t) = \alpha \frac{g(\rho)}{g(i)} e^{(i-\rho)t}$$

où g est une fonction à préciser.

(v) Comparer $u(t)$ et α lorsque t prend de grandes valeurs. Commenter.

2 Exercice 2 : problème de la reine Didon

Soient ℓ et L positifs tels que $2\ell < L < \pi\ell$. On cherche à résoudre le problème :

$$\text{maximiser} \int_{-\ell}^{\ell} x(t)dt \text{ par rapport à } u \in \mathcal{C}^0[-\ell, \ell]),$$

où (x, y) désigne la solution du système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \geqslant 0 \\ \dot{y}(t) = \sqrt{1 + u(t)^2}, \ t \geqslant 0 \\ x(-\ell) = x(\ell) = 0, \\ y(-\ell) = y(\ell) = L. \end{cases}$$

On admet que ce problème possède une solution.

(i) On définit la fonction $\hat{h}$ sur $\mathbb{R}$ par $\hat{h}(u) = p_1 u + p_2\sqrt{1+u^2}$ où $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que le problème $\sup_{\mathbb{R}} \hat{h}$ possède une solution. Montrer que, nécessairement, $p_2 < 0$.

(ii) Caractériser le contrôle optimal. On montrera en particulier :

- qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que le contrôle optimal u vérifie

$$\frac{u(t)}{\sqrt{1+u(t)^2}} = -\frac{t-b}{a}.$$

- que $(t, x(t))$ se trouve sur une portion de cercle.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.