Klein-Gordan 场的连续对称性与守恒量

摘要

在量子场论框架中，对称性揭示了一个理论的重要物理性质，通过对体系的连续对称性，也即场对应的拉格朗日密度在某种连续变换下的不变性的研究，基于诺特定理，我们可以得到体系中很多重要的守恒量。本文主要介绍了量子场论中的诺特定理，并通过复 Klein-Gordan 场的 U(1)不变性推导出了体系的电荷守恒。通过时空平移对称性推导出能动量密度张量，并结合实 Klein-Gordan 场对其物理意义进行了阐释。

关键词：诺特定理，U(1)对称性，时空平移对称性，电荷守恒，能动量守恒

0. 引言

随着理论物理的发展，人们发现对称性在物理体系的研究中起到了至关重要的作用，物理学家也基于对称性建立了许多新的理论框架，如共形场论中的共形不变性(conformal invariant)，基于超对称(supersymmetry)建立的超弦理论等，对于对称性以及对称性破缺的研究也越来越收到人们的重视。Harald 在 *Introduction to Supersymmetry* 一书中详细讨论了量子场论中的超对称性。而与对称性联系在一起的，我们最熟知的物理概念就是守恒量，比如哈密顿力学中的时空平移不变性和能动量守恒。

数学上，对称性由群论来表述。对称群为连续群和分立群的情形分别被称为连续对称性（continuous symmetry）和分立对称性(discrete symmetry)。在量子理论中，连续对称性与守恒量的联系尤为密切，目前在该方面的理论研究主要基于著名数学家诺特提出的**诺特定理：一个连续的对称性必然有一个守恒流与之对应**。在本文中，我们就以量子场论中复 Klein-Gordan 场为例，通过诺特定理，从 U(1)对称性推导出电荷守恒。在第一部分，我们首先对诺特定理进行简要介绍与推导，进而在第二部分，应用其推导电荷守恒。在第三部分，通过时空平移对称性推导出能动量密度张量，并结合实 Klein-Gordan 场对其物理意义进行了阐释。本文采用的符号与 Mark Srednick 的 *Quantum Field Theory* 一书中采用的符号一致

一、 诺特定理与守恒流。

我们以标量场为例，对量子场论中的诺特定理进行推导。

假设我们有一组标量场$\varphi_a(x)$ ，以及相应的拉格朗日密度$L(x)=L(\varphi_a(x),\partial_\mu\varphi_a(x))$，($\mu=0,1,2,3$，第 0 指标为时间分量)。如果我们使每一个场有一个微小的变化$\varphi_a(x)\to\varphi_a(x)+\delta\varphi_a(x)$，那么相应的$L(x)$也会随之变化，我们有$L(x)\to L(x)+\delta L(x)$，其中$\delta L(x)$由链式法则求得：

$$\delta L(x)=\frac{\partial L}{\partial\varphi_a(x)}\delta\varphi_a(x)+\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_a(x)\right)}\partial_\mu\delta\varphi_a(x) \tag{1}$$

考虑经典的动力学方程，它满足最小作用量原理：

$$\frac{\delta S}{\delta q_a} = 0 \tag{2}$$

$$S = \int dt\, L(q_a, \dot{q_a})$$

在量子场论中，最小作用量原理的形式写为

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} = 0$$

$$S = \int dt \int d^3y\, L(y) = \int d^4y\, L(y) \tag{3}$$

注意此处的$L(y)$为拉格朗日密度，拉格朗日量为其对空间的积分。进而我们有：

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} &= \int d^4y \frac{\delta L(y)}{\delta \varphi_a(x)} \\ &= \int d^4y \left[\frac{\delta L(y)}{\delta \varphi_b(x)} \frac{\delta \varphi_b(y)}{\delta \varphi_a(x)} + \frac{\partial L(y)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_b(y)\right)} \frac{\delta(\partial_\mu \varphi_b(y))}{\delta \varphi_a(x)}\right] \\ &= \int d^4y \left[\frac{\delta L(y)}{\delta \varphi_b(x)} \delta_{ba}\, \delta^4(y-x) + \frac{\partial L(y)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_b(y)\right)} \frac{\delta(\partial_\mu \varphi_b(y))}{\delta \varphi_a(x)} \delta_{ba}\, \partial_\mu\, \delta^4(y-x)\right] \\ &= \frac{\delta L(x)}{\delta \varphi_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)}\end{aligned} \tag{4}$$

过程中相同的指标采用**爱因斯坦求和约定**。

我们可以用这个结果做一个代换

$$\frac{\delta L(x)}{\delta \varphi_a(x)} \to \partial_\mu \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)} + \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \tag{5}$$

带入到(1)式中，得到

$$\begin{aligned}\delta L(x) &= \left(\partial_\mu \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)} + \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)}\right) \delta \varphi_a(x) + \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)} \partial_\mu \delta \varphi_a(x) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)} \delta \varphi_a(x)\right) + \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \delta \varphi_a(x)\end{aligned} \tag{6}$$

其中第一项的合并使用了莱布尼茨法则。。

我们把第一项记为$j^\mu(x)$，在接下来的推导中我们将看到，这就是我们的守恒流，也称为诺特流（$Nother\ current$），

$$j^\mu(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_a(x)\right)} \delta \varphi_a(x) \tag{7}$$

其中a指标是对所有独立的场φ_a的求和。从而式(6)可以写为

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \delta L(x) - \frac{\delta S}{\delta \varphi_a(x)} \delta \varphi_a(x) \tag{8}$$

如果$\varphi_a(x)$满足经典场方程（也即最小作用量原理式(3)），则上式第二项为0。

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \delta L(x) \tag{9}$$

诺特流扮演了重要作用。如果我们可以找到一组无限小变化，使得拉格朗日密度在在中变换下保持不变，即$\delta L = 0$，我们就称拉格朗日密度有一个**连续的对称性**。这时我们就有$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$，我们称此时诺特流是守恒的，将时间和空间分量分开来写

$$\frac{\partial}{\partial t} j^0(x) + \nabla \cdot \vec{\mathrm{j}}(x) = 0 \tag{10}$$

与电动力学中的电荷守恒类似，我们也将$j^0(x)$称为守恒荷密度，其对空间的积分称为守恒荷。

二、 U(1)对称性与电荷守恒

实的 Klein-Gordan 场描述的标量粒子的反粒子是它本身，所以电荷为 0，电荷守恒在此意义上并不是很显著。我们采用复 Klein-Gordan 场(complex scalar field) 的U(1)对称性来推导电荷守恒。

我们知道，一个复K-G场，它的满足厄米性的拉格朗日密度可写为

$$L = -\partial^\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^+\varphi)^2 \tag{11}$$

这里对于场的相互作用部分我们采用了$\lambda\varphi - 4$理论，实际上守恒流和相互作用部分无关，采用任何一种模型都是可以的，这个在后面的推导中可以看到。对于复标量场，我们可以将其写为实部虚部两个部分$\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$，$\varphi_1$和$\varphi_2$是两个实的场。进而拉氏密度可以写为

$$L = -\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2}\partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{16}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \tag{12}$$

如果我们对$\varphi(x)$进行一个$U(1)$变换，即

$$\varphi(x) \to e^{-i\alpha}\varphi(x) \tag{13}$$

其中α是一个实数，因为式(11)中φ和φ^+总是成对出现的，所以显然在这种变换下，L是不变的。利用φ的分解形式，变换(13)可以写为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \tag{14}$$

如果我们将(φ_1, φ_2)看作一个 2 维矢量，那么该变换就是矢量空间中的一个α角度的转动，相应的对称群为$SO(2)$群，这样我们就建立了一个从$U(1)$到$SO(2)$的映射，这种映射关系使用李群的流形结构可以看得更清楚。（这是一些题外话，我们回归正文）

式(13)中，如果α是一个无穷小量，那么φ可以写为

$$\begin{gathered} \varphi(x) \to \varphi(x) - i\alpha\varphi(x) \\ \varphi^+(x) \to \varphi^+(x) + i\alpha\varphi^+(x) \end{gathered} \tag{15}$$

在式(7)的诺特流中，我们需要考虑所有相互独立的场算符，对于复标量场，

有实部和虚部两个独立的部分，这两部分可以由φ和φ^+作相加和相减得到，所以我们要将φ和φ^+看作两个独立的场，进而根据式(7)

$$
\begin{aligned}
j^\mu &= \frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi + \frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu\varphi^+)}\delta\varphi^+ \\
&= (-\partial^\mu\varphi^+)(-i\alpha\varphi) + (-\partial^\mu\varphi)(i\alpha\varphi^+) \\
&= \alpha(-i)(\varphi\partial^\mu\varphi^+ - \varphi^+\partial^\mu\varphi) \\
&= \alpha Im(\varphi^+\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^+)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

对于α，它是一个小的常量，所以可以将其忽略，不进行考虑，进而

$$j^\mu = Im(\varphi^+\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^+)$$

考虑 0 分量对空间的积分，我们可以得到守恒荷

$$Q = \int d^3x\, j^0(x) = \int d^3x\ Im(\varphi^+\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^+) \tag{17}$$

在式(16)的推导中我们也可以看到，对$\partial_\mu\varphi$做变分，拉格朗日密度L中的相互作用项并不起作用。

利用正则量子化可以知道复标量场在自由场论中的场算符为

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \widetilde{dk}\left[a(\vec{k})e^{ikx} + b^+(\vec{k})e^{-ikx}\right] \\
\varphi^+(x) &= \int \widetilde{dk}\left[b(\vec{k})e^{ikx} + a^+(\vec{k})e^{-ikx}\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其中kx是 4-矢量的缩并，即$k_\mu x^\mu$，a, a^+表示粒子的产生与湮灭算符，b, b^+表示反粒子的湮灭与产生算符。将其代入(17)式，并利用正则量子化条件

$$
\begin{gathered}
\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\right] = 0 \\
\left[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = 0 \\
\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')\right] = (2\pi)^3 2\omega\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
\left(the\ same\ principle\ for\ b(\vec{k})\right)
\end{gathered}
\tag{19}
$$

我们可以得到守恒荷

$$Q = \int \widetilde{dk}[a^+a - bb^+] \tag{20}$$

事实上，a^+a恰恰计算了空间中动量为k的粒子（带正电）的数量，bb^+计算了空间中动量为k的反粒子（带负电）的数量，对k积分，我们得到的守恒荷也正是空间中所有的粒子的电荷之和。

三、 时空平移不变性与能动量守恒

在对对称性进行分析时，我们利用了拉格朗日密度是某种变换下的不变量的性质。但由于拉格朗日量是拉格朗日密度在全空间的积分，如果$\delta L \neq 0$，而是等于某个量的全微分，即

$$\delta L = \partial_\mu K^\mu \tag{21}$$

那么其在全空间的积分，即拉格朗日量的变化仍为 0。此时根据式(6)我们的守

恒流写为

$$j^\mu(x)=\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_a(x)\right)}\delta\varphi_a(x)-K^\mu(x) \tag{22}$$

这种情况下一个简单的例子就是时空平移，$\varphi_a(x)\to\varphi_a(x-a)$，$a^\mu$是一个4-矢量。当$a$为以无穷小量，在这种变换下，我们有

$$\varphi_a(x)\to\varphi_a(x-a)=\varphi_a(x)-a^\nu\partial_\nu\varphi_a(x)$$

$$L(x)\to L(x-a)=L(x)-a^\nu\partial_\nu L(x) \tag{23}$$

所以$\delta\varphi_a(x)=-a^\nu\partial_\nu\varphi_a(x)$, $\delta L(x)=-a^\nu\partial_\nu L(x)=-\partial_\nu(a^\nu L(x))$, 与(21)式对比可知，$K^\mu=-a^\mu L(x)$，则守恒流写为

$$j^\mu(x)=\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_a(x)\right)}\left(-a^\nu\partial_\nu\varphi_a(x)\right)+a^\mu L(x)=a_\nu T^{\mu\nu}(x) \tag{24}$$

其中

$$T^{\mu\nu}(x)=-\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_a(x)\right)}\left(\partial^\nu\ \varphi_a(x)\right)+g^{\mu\nu}L(x) \tag{25}$$

接下来我们通过一个实标量场的具体例子对其物理意义进行阐释，对于一个实标量场，拉氏密度写为

$$L=-\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi_a\partial_\mu\varphi_a-V(\varphi) \tag{26}$$

势能项$V(\varphi)$是关于φ的多项式。此时可以计算得

$$T^{\mu\nu}(x)=\partial^\mu\varphi_a\partial^\nu\varphi_a+g^{\mu\nu}L \tag{27}$$

特别地

$$T^{00}=\frac{1}{2}\Pi_a^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi_a)^2+V(\varphi) \tag{28}$$

其中$\Pi_a=\partial_0\varphi_a$是正则共轭动量，显然$T^{00}$体系的哈密顿量密度$H$。而对于$T^{0j}(j=1,2,3)$, 我们有

$$T^{0j}=\partial^0\varphi_a\partial^j\varphi_a \tag{29}$$

将实标量场的场算符φ_a代入(同式(18)，只是$b(\vec{k})=a(\vec{k})$)，并结合正则量子化条件(同式(19))，可以得到

$$P^j=\int d^3x\,T^{0j}=\int\widetilde{(dk)}k^j a_a^+(k)a_a(k) \tag{30}$$

而a^+a描述了空间内动量为 k 的粒子数，乘以k再积分，恰好是体系的总动量。与T^{00}合起来，我们得到了体系的能动量守恒荷:

$$P^\mu=\int d^3x\,T^{0\mu}(x) \tag{31}$$

四、　总结

在本文中，我们对量子场论中的对称性进行了讨论。我们首先推导了诺特

定理，得到守恒流的表达式

$$j^{\mu}(x)=\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_{\mu}\varphi_{a}(x)\right)}\delta\varphi_{a}(x) \tag{32}$$

接着我们通过复标量场的 U(1)对称性，利用诺特定理推导了复标量场的电荷守恒，得到守恒荷

$$Q=\int\widetilde{dk}[a^{+}a-bb^{+}] \tag{33}$$

最后，对于拉氏密度在时空平移变换下的变化为全微分的情况，我们推导出了对用于时空平移对称性的守恒量，能动量张量。并利用实标量场对其物理意义进行了阐释。

$$T^{\mu\nu}(x)=-\frac{\partial L(x)}{\partial\left(\partial_{\mu}\varphi_{a}(x)\right)}\left(\partial^{\nu}\,\varphi_{a}(x)\right)+g^{\mu\nu}L(x) \tag{34}$$

$$P^{\mu}=\int d^{3}x\,T^{0\mu}(x) \tag{35}$$

参考文献

[1]Mark Sredniciki. Quantum Field Theory[M],世界图书出版公司北京公司，2010

[2]Michael E.Peskin, An Introduction to Quantum Field Theory[M],CRC,1995