Conjunto diverso de clientes

Johanna Capote Robayna
Guillermo Galindo Ortuño

Problema

Un comerciante mantiene una matriz de compras de sus clientes. Hay una fila por cada cliente y una columna por cada producto y en cada entrada (i, j) regustra el número de unidades que el cliente i ha comprado del producto j. Un subconjunto S de cliente se llama diverso si nunca dos clientes de S distintos han comprado alguna vez el mismo producto. El problema consiste en dado K, determinar si existe un conjunto S de clientes de tamaño K que sea diverso.

3SET $\propto$ Conjunto diverso de clientes

$$X = \{a_1, \ldots, a_{3n}\} \rightarrow Productos = \{p_1, \ldots, p_{3n}\}$$
$$n \rightarrow K$$
$$C = \Big\{\{b_{11}, b_{12}, b_{13}\}, \ldots, \{b_{m1}, b_{m2}, b_{m3}\}\Big\} \rightarrow Clientes = \{c_1, \ldots, c_m\}\}$$

Formamos una tabla, ponemos en las columnas los elementos a_i y en las filas los b_j. Por cada b_j marcamos con un 1 cada elementos de X que forman parte del conjunto. Si $b_1 = \{a_1, a_2, a_4\}$ entonces la tabla quedaria de la siguiente forma:

	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	1		1	1

Por lo tanto en el problema del conjunto diverso de clientes, cada cliente siempre tiene asociado 3 productos.

3SET tiene solución $\Rightarrow$ Conjuntos diverso de clientes tiene solución

Si el problema de 3SET tiene solución significa que existe $C' \subseteq C$ de tamaño n tal que $\cup b_i = X$ con $b_i \cap b_j = \emptyset$ si $b_i, b_j \in C'$ con $i \neq j$. Por lo tanto existe un conjunto de K Clientes tal que sus Productos no coinciden, es decir que si un cliente ha comprado algún producto p ningún otro cliente del conjunto

lo ha comprado, lo que implica que este subconjunto C' es diverso, dejando resuelto el problema del Conjunto diverso de clientes.
Conjuntos diverso de clientes tiene solución ⇒ 3SET tiene solución
Si el problema del conjunto diverso de clientes tiene solución significa que existe un subconjunto de clientes de tamaño K diverso, esto quiere decir existe K elementos de C tal que $b_i \cap b_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Solo nos queda comprobar que $\cup b_i = X$, esto es cierto puesto que $K = n$ por lo tanto hemos elegido n elementos de C de 3 elementos, consiguiendo los $3n$ elementos de X.

Ejemplo

3SET
$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$
$C = \Big\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}, \{a_3, a_6, a_8\}\Big\}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
b_1	1		1	1					
b_2		1	1	1					
b_3	1				1	1			
b_4							1	1	1
b_5			1			1		1	

Solución: $C' = \{b_2, b_3, b_4\}$

Conjuntos diverso de clientes
$Productos = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$
$Clientes = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$
Solución: $C' = \{b_2, b_3, b_4\}$