

# 数独问题

## 1.实验要求

- 解决数独问题: 使用1-k的数字填充 $n*n$ 的棋盘, 每行每列不得有重复数字, 输出一个可行解
- 从4个算法中选2个实现: CSP 问题的前向检验算法、模拟退火算法

## 2.模拟退火算法

将数独问题表达为一个优化问题, 再用求解优化问题的模拟退火算法去解。需要定义初始状态,后继函数和评价函数。

### 【预定义】

- 1.定义初始状态 $x_0$ : 在每一行每一列, 随机填入1-k的数字, 使得每行没有重复数字, 接下来只用调整列。
- 2.定义后继函数 $S$ : 在 $n*n$ 的数独表内随机选取一个填好数字的空格A, 从A所在行随机选取一个空格B, 交换A和B的值。这样, “每一行没有重复数字”这一条件始终成立。
- 3.定义评价函数 $F(x)$ : 每一列重复数字个数的两倍, 我们的目标是缩小这个值

### 【算法步骤】

- 1.选定初始温度 $t$ , 一般设置为一个较大的数20至100均可, 可根据实际输入做调节
- 2.得到后继 $x_1=S(x_0)$
- 3.计算评价函数 $F(x_0)$ 和 $F(x_1)$ ,  $dF=F(x_1)-F(x_0)$ 
  - 如果 $dF<0$ , 将数独表状态更新到 $x_1$ ,即 $x_0=x_1$
  - 如果 $dF>0$ , 取一个概率, 计算数值 $con=\exp\{-dF/t\}$ ,再取一个0到1之间的随机数 $random(0,1)$ , 如果 $con>random(0,1)$ , 将数独表状态更新到 $x_1$ 。意味着当温度 $t$ 值越大, 将状态更新到 $x_1$ 的概率也越大
- 4.以某种策略降低温度值
  - $t=R*t$ ,  $R$ 为0到1之间的一个常数, 一般取靠近1的值
  - 如果生成数独完全解, 结束
  - 否则重回步骤2

### 【运行结果】

每个编号下均提供了3个测试样例, 记录3个样例的平均用时, 并对每个样例记录一个解矩阵

#### 1.N=4, K=5

$T=(0ms+1ms+0ms)/3=1ms$

```
2 5 1 3
4 3 5 2
3 1 4 5
5 2 3 1

1 3 2 5
3 4 5 1
```

```
2 5 1 3
4 1 3 2

5 4 3 2
4 3 2 5
2 1 4 3
3 5 1 4
```

## 2.N=5, k=6

$$T=(0\text{ms}+1\text{ms}+0\text{ms})/3=1\text{ms}$$

```
1 2 6 5 4
5 6 1 2 3
4 1 2 3 6
3 5 4 6 1
6 4 5 1 2

6 2 3 1 5
4 6 1 2 3
5 1 4 3 6
3 4 5 6 1
1 5 6 4 2

5 4 2 6 1
2 1 6 5 3
3 5 1 2 6
1 3 5 4 2
6 2 3 1 4
```

## 3.N=6, k=7

$$T=(0\text{ms}+1\text{ms}+2\text{ms})/3=1\text{ms}$$

```
7 3 6 4 5 2
1 6 7 5 2 3
2 1 4 6 3 7
4 5 2 3 1 6
3 2 5 1 6 4
6 4 1 2 7 5

4 1 7 3 2 6
1 3 6 5 7 2
6 5 2 7 3 4
3 2 5 4 6 1
5 6 1 2 4 3
2 4 3 6 1 5

7 6 3 1 2 4
2 3 6 5 1 7
3 1 7 4 6 2
4 5 1 2 3 6
```

```
1 4 2 6 5 3
6 2 5 3 4 1
```

#### 4.N=7, k=8

$$T=(0\text{ms}+2\text{ms}+1\text{ms})/3=1\text{ms}$$

```
5 1 2 8 7 3 4
8 3 4 5 2 7 6
3 2 7 6 8 4 1
6 8 1 4 5 2 7
7 4 5 3 1 6 8
1 7 3 2 6 8 5
4 5 8 7 3 1 2

8 5 4 2 3 7 1
5 3 8 6 7 4 2
6 8 5 3 4 1 7
7 4 1 5 2 6 8
2 6 3 7 5 8 4
4 2 7 1 6 5 3
3 7 6 8 1 2 5

5 6 1 4 7 3 2
2 3 7 5 8 4 6
8 1 4 7 6 2 3
4 7 8 1 2 6 5
7 2 3 8 1 5 4
6 8 5 2 3 1 7
1 5 2 3 4 7 8
```

#### 5.N=8, k=9

$$T=(1\text{ms}+2\text{ms}+1\text{ms})/3=1.33\text{ms}$$

```
2 6 1 5 3 9 8 4
9 1 4 6 8 3 7 5
8 7 6 9 2 1 5 3
5 2 7 8 6 4 3 9
1 4 3 7 5 2 6 8
7 3 8 1 9 6 4 2
3 9 2 4 7 5 1 6
6 5 9 3 4 8 2 7

6 8 1 2 4 5 3 9
4 2 9 7 3 1 8 6
1 3 6 9 2 8 5 7
3 6 2 8 9 4 7 5
7 1 5 4 8 2 6 3
2 7 4 1 6 3 9 8
8 4 3 6 7 9 1 2
9 5 7 3 1 6 2 4
```

```
8 5 4 9 2 1 6 3
7 3 6 1 4 9 8 5
2 9 3 6 5 8 1 7
4 8 1 5 3 6 7 2
3 4 8 7 1 2 5 6
1 2 7 4 6 3 9 8
5 6 9 3 7 4 2 1
6 1 5 2 9 7 3 4
```

**6.n=9, k=10**

$T=(1\text{ms}+2\text{ms}+3\text{ms})=2\text{ms}$

```
1 3 7 5 10 6 9 2 8
8 5 2 10 6 7 4 9 3
7 2 6 8 1 9 3 4 10
4 10 3 7 2 5 6 8 9
6 9 4 2 7 3 10 5 1
10 7 9 3 5 2 8 1 4
2 8 10 9 4 1 5 3 6
5 6 8 1 3 4 7 10 2
3 1 5 4 8 10 2 6 7
```

```
2 3 1 7 10 8 9 5 6
8 9 2 10 4 5 3 6 7
9 7 10 8 5 3 6 4 2
6 10 4 2 3 9 7 1 5
10 2 8 5 9 7 1 3 4
1 4 6 9 7 10 5 2 8
7 8 5 6 1 4 2 10 3
3 5 7 4 6 2 10 8 1
5 1 9 3 2 6 4 7 10
```

```
3 10 1 2 5 6 9 8 7
8 4 2 5 10 7 6 9 3
2 3 5 8 6 10 4 7 9
5 1 6 10 2 9 7 3 4
1 7 9 3 4 5 8 10 2
6 5 8 9 7 4 10 2 1
10 2 4 7 8 1 3 5 6
7 8 10 6 1 3 2 4 5
9 6 7 4 3 2 5 1 10
```

**7.N=10, k= 11**

$T=(3\text{ms}+6\text{ms}+5\text{ms})=4.67\text{ms}$

```
4 6 7 5 10 2 11 9 1 3
10 7 9 2 3 5 1 11 4 8
1 3 10 4 5 9 2 6 11 7
6 10 1 9 2 3 5 4 7 11
7 5 11 10 4 1 3 2 9 6
```

5 2 6 11 9 4 7 1 8 10  
3 11 2 6 8 7 9 5 10 1  
2 1 5 3 7 11 4 10 6 9  
9 4 3 1 11 8 10 7 5 2  
11 9 4 7 1 10 6 3 2 5

6 10 5 8 2 1 11 7 3 9  
10 8 9 1 6 4 5 3 7 11  
3 5 7 9 11 10 2 4 1 6  
2 1 8 5 4 11 10 9 6 7  
8 11 4 10 5 2 7 1 9 3  
7 6 3 4 10 5 9 8 11 1  
11 9 1 2 7 3 8 6 10 5  
1 3 11 7 9 8 4 5 2 10  
9 4 6 3 8 7 1 10 5 2  
5 2 10 6 1 9 3 11 4 8

2 4 3 9 1 11 5 7 10 8  
3 2 4 10 8 1 9 11 7 5  
7 10 9 11 5 3 6 1 4 2  
5 9 1 3 6 2 11 10 8 4  
6 11 7 2 3 5 10 4 9 1  
9 5 2 4 11 8 7 6 1 3  
11 7 5 1 2 4 8 3 6 9  
4 1 8 7 10 9 3 5 2 6  
1 3 10 6 4 7 2 9 5 11  
8 6 11 5 9 10 4 2 3 7

**8.n=9, k=9**

$T=(1\text{ms}+2\text{ms}+8\text{ms})/3=3.67\text{ms}$

7 4 1 5 2 3 6 8 9  
9 5 7 3 1 6 2 4 8  
6 8 9 4 7 1 3 5 2  
8 7 3 6 4 2 1 9 5  
5 9 8 2 6 4 7 3 1  
4 1 2 8 9 7 5 6 3  
3 6 4 1 5 8 9 2 7  
1 2 6 9 3 5 8 7 4  
2 3 5 7 8 9 4 1 6

1 4 7 5 8 2 6 3 9  
5 6 3 4 9 8 7 2 1  
6 7 8 1 3 5 9 4 2  
4 5 1 8 2 7 3 9 6  
3 8 4 9 7 1 2 6 5  
9 3 2 7 6 4 5 1 8  
8 2 5 6 4 9 1 7 3  
2 1 9 3 5 6 4 8 7  
7 9 6 2 1 3 8 5 4

```

8 5 1 9 2 7 3 6 4
9 1 2 6 4 3 8 7 5
6 8 7 4 1 5 2 3 9
2 9 6 5 8 1 7 4 3
4 7 3 2 5 8 1 9 6
5 3 4 8 7 9 6 1 2
7 2 8 3 9 6 4 5 1
3 4 9 1 6 2 5 8 7
1 6 5 7 3 4 9 2 8

```

**9.N=9, k=9**

$$T=(2\text{ms}+2\text{ms}+2\text{ms})/3=2\text{ms}$$

```

1 7 2 3 5 6 4 9 8
7 6 9 4 2 3 8 1 5
8 2 3 9 7 4 6 5 1
6 4 1 8 9 2 5 3 7
9 5 7 2 6 1 3 8 4
3 1 4 5 8 9 7 2 6
4 8 5 1 3 7 9 6 2
5 9 6 7 1 8 2 4 3
2 3 8 6 4 5 1 7 9

```

```

6 7 1 5 3 2 9 8 4
2 9 3 6 5 7 4 1 8
8 4 7 9 2 1 3 5 6
3 8 9 1 7 5 6 4 2
9 3 5 4 1 6 8 2 7
1 2 4 7 9 8 5 6 3
5 6 2 8 4 3 1 7 9
7 5 8 3 6 4 2 9 1
4 1 6 2 8 9 7 3 5

```

```

6 8 7 4 5 2 3 9 1
1 7 3 6 4 5 9 8 2
8 3 9 2 6 1 4 5 7
5 1 4 7 2 9 8 6 3
3 5 1 8 9 7 2 4 6
7 4 2 5 1 8 6 3 9
9 6 5 3 7 4 1 2 8
2 9 6 1 8 3 5 7 4
4 2 8 9 3 6 7 1 5

```

**10.N=9, k=9**

$$T=(2\text{ms}+4\text{ms}+1\text{ms})/3=2.33\text{ms}$$

```

1 2 3 8 9 6 5 4 7
3 5 8 7 2 4 1 6 9
2 7 5 9 1 3 6 8 4

```

5 3 9 6 4 7 8 2 1  
7 4 6 1 8 2 9 3 5  
6 1 4 2 5 8 7 9 3  
4 6 1 5 3 9 2 7 8  
9 8 2 3 7 1 4 5 6  
8 9 7 4 6 5 3 1 2

5 6 2 7 9 8 3 4 1  
4 2 9 8 3 1 6 7 5  
3 8 4 6 5 7 1 9 2  
7 1 6 5 4 9 2 8 3  
6 9 1 2 8 4 5 3 7  
9 5 8 1 2 3 7 6 4  
2 7 3 4 6 5 8 1 9  
1 3 5 9 7 6 4 2 8  
8 4 7 3 1 2 9 5 6

1 7 8 9 2 5 4 6 3  
3 8 9 2 4 7 1 5 6  
4 2 7 8 5 3 6 9 1  
9 3 6 5 8 4 7 1 2  
2 1 4 6 3 9 5 7 8  
5 9 1 3 6 8 2 4 7  
6 5 3 7 1 2 9 8 4  
7 4 2 1 9 6 8 3 5  
8 6 5 4 7 1 3 2 9

### 11.N=9, k=9

$$T=(19\text{ms}+\text{ms}+12\text{ms})/2=15.5\text{ms}$$

1 9 3 2 5 6 7 4 8  
6 8 2 7 9 3 5 1 4  
4 3 7 8 6 2 9 5 1  
7 2 9 4 1 5 8 3 6  
2 6 8 3 4 7 1 9 5  
5 4 6 1 8 9 3 2 7  
8 7 1 5 3 4 2 6 9  
3 5 4 9 7 1 6 8 2  
9 1 5 6 2 8 4 7 3

x

7 5 4 9 6 3 8 2 1  
4 9 5 1 2 7 6 8 3  
5 6 3 4 7 2 1 9 8  
3 1 2 7 4 8 9 5 6  
9 7 1 2 8 6 3 4 5  
1 8 9 6 5 4 2 3 7  
2 3 8 5 9 1 7 6 4  
8 4 6 3 1 9 5 7 2  
6 2 7 8 3 5 4 1 9

12.N=9, k=9

$T=(11ms+8ms+ms)/2=9.5ms$

8 1 4 2 3 6 7 5 9  
5 6 1 4 7 3 2 9 8  
6 4 7 9 2 8 3 1 5  
2 7 3 5 4 9 1 8 6  
7 9 2 8 5 1 6 3 4  
1 2 8 3 6 5 9 4 7  
3 8 5 6 9 2 4 7 1  
9 5 6 7 1 4 8 2 3  
4 3 9 1 8 7 5 6 2

1 4 2 6 3 9 7 5 8  
3 2 8 4 6 7 5 1 9  
7 1 3 8 2 4 9 6 5  
4 9 5 2 7 8 1 3 6  
8 5 6 7 9 2 3 4 1  
2 6 9 3 5 1 8 7 4  
9 7 4 5 1 3 6 8 2  
6 3 1 9 8 5 4 2 7  
5 8 7 1 4 6 2 9 3

x

3.CSP问题前向检验算法

将数独问题表达为一个约束满足问题，在回溯法的算法框架基础上添加前向检验技术，提升回溯法的效率

【预定义】

- 1.有效赋值A: 对n\*n棋盘的空格填入一个1-k间的数字
- 2.启发式函数1: 决定接下来对哪个变量赋值
  - 选择残留值域最小的
  - 残留值域大小相同则选取同行列元素数量最多的
- 3.启发式函数2: 决定变量值域的排序
  - 按大小顺序选择，总选择当前值域中最小的
- 4.值域的确定: 初始给定的方格值域为空，其余方格初始值域为1到k的数字舍去同行同列已有的数字

【算法步骤】

- 读取数独的初始状态，填入sudoku变量  
在读取数独的初始状态的同时，并初始化数字的可填区域，填入flag变量



在读取数独的初始状态的同时，更新数独的数字占用情况，填入rule变量

- 开始求解数独，进入首层递归
- 根据启发式函数获取下一个可填区域的位置
- 修改值域，前向检验，判断是否合法
- 合法则继续递归，不合法则还原值域，回退

### 【运行结果】

每个编号下均提供了3个测试样例，记录3个样例的平均用时，并对每个样例记录一个解矩阵

#### 1.N=4, K=5

$$T=(9\text{ms}+9\text{ms}+8\text{ms})/3=8.67\text{ms}$$

```
1 5 3 4
4 1 5 2
3 2 4 5
5 3 2 1
```

```
1 3 2 4
3 2 5 1
2 4 1 3
4 1 3 2
```

```
1 2 3 5
4 1 2 3
2 3 4 1
3 5 1 4
```

#### 2.N=5, k=6

$$T=(6\text{ms}+6\text{ms}+7\text{ms})/3=6.33\text{ms}$$

```
5 2 6 3 4
4 3 1 2 5
1 4 2 5 6
3 1 4 6 2
2 6 5 1 3
```

```
5 2 6 3 4
4 3 1 2 5
1 4 2 5 6
3 1 4 6 2
2 6 5 1 3
```

```
5 4 2 1 6
2 1 6 5 3
1 3 4 2 5
3 5 1 4 2
6 2 5 3 1
```

#### 3.N=6, k=7

$$T=(9\text{ms}+7\text{ms}+8\text{ms})/3=8\text{ms}$$

```
1 3 6 4 5 2
2 6 7 5 4 3
5 1 4 3 2 7
4 2 3 6 1 5
3 4 2 1 7 6
6 7 5 2 3 1
```

```
3 5 7 6 2 1
1 3 2 4 5 7
6 2 1 3 7 4
2 1 5 7 3 6
5 4 6 2 1 3
7 6 3 1 4 2
```

```
3 4 6 1 2 5
2 3 4 6 1 7
5 1 2 4 6 3
7 2 1 5 3 4
4 6 3 2 5 1
6 7 5 3 4 2
```

**4.N=7, k=8**

$$T=(13\text{ms}+10\text{ms}+16\text{ms})/3=13\text{ms}$$

```
5 1 6 3 7 2 4
1 3 5 4 8 7 6
2 8 3 6 1 4 5
6 4 1 2 3 8 7
3 6 2 1 4 5 8
8 7 4 5 2 3 1
4 5 7 8 6 1 2
```

```
2 5 4 7 3 6 1
3 2 8 6 7 1 4
6 1 5 2 4 7 8
7 4 1 3 2 5 6
5 6 3 4 1 8 7
1 8 7 5 6 3 2
4 7 6 8 5 2 3
```

```
5 6 8 4 7 1 2
1 3 7 2 5 4 6
8 4 3 7 6 2 1
2 7 1 3 4 8 5
7 2 4 8 1 6 3
4 1 2 6 3 5 7
3 5 6 1 2 7 8
```

**5.N=8, k=9**

$$T=(11\text{ms}+39\text{ms}+17\text{ms})/3=22.33\text{ms}$$

4 5 1 8 6 9 2 3  
 2 1 3 6 7 8 4 5  
 3 7 4 1 5 2 9 6  
 6 3 2 5 8 4 7 9  
 1 4 7 2 9 3 6 8  
 7 8 5 4 1 6 3 2  
 8 9 6 7 2 5 1 4  
 5 2 9 3 4 7 8 1

6 3 9 2 4 5 7 1  
 1 2 4 5 8 7 3 6  
 2 1 8 9 7 4 5 3  
 8 4 2 1 9 3 6 5  
 5 7 6 3 1 2 4 9  
 4 5 1 7 2 6 9 8  
 7 8 3 4 6 9 1 2  
 3 9 7 6 5 1 2 4

8 4 1 7 2 5 6 3  
 2 3 6 4 5 7 8 1  
 4 1 3 2 9 8 7 6  
 9 7 2 5 1 3 4 8  
 6 5 8 3 4 2 1 7  
 5 8 7 6 3 1 9 2  
 1 6 4 8 7 9 2 5  
 3 2 9 1 8 6 5 4

**6.n=9, k=10**

$$T=(20\text{ms}+14\text{ms}+49\text{ms})/3=27.67\text{ms}$$

1 3 8 2 9 7 4 6 5  
 8 5 2 10 3 1 6 9 4  
 3 7 5 8 1 9 2 4 10  
 9 10 4 6 7 5 3 8 1  
 2 9 1 3 4 8 10 7 6  
 4 2 3 7 5 6 9 1 8  
 6 8 7 1 10 2 5 3 9  
 7 6 10 9 2 4 1 5 3  
 5 1 9 4 6 10 8 2 7

2 3 7 5 1 8 10 9 6  
 3 9 1 7 5 4 8 6 2  
 7 1 10 4 8 5 6 2 9  
 6 7 4 2 3 9 5 10 8  
 1 6 8 3 9 2 7 4 5  
 8 4 6 9 2 10 1 5 3  
 10 8 5 6 7 1 2 3 4  
 9 5 2 10 4 6 3 8 1  
 5 2 9 8 6 3 4 1 10

```
2 3 1 10 5 6 7 9 4
3 2 9 5 1 7 10 8 6
6 9 5 1 2 8 4 10 7
7 1 2 4 6 9 5 3 8
1 8 3 7 4 10 9 5 2
8 5 7 9 10 1 6 2 3
5 10 4 8 7 2 3 1 9
10 7 8 6 9 3 1 4 5
4 6 10 2 3 5 8 7 1
```

**7.N=10, k= 11**

$T=(4632\text{ms}+37\text{ms}+36\text{ms})/3=1568.33\text{ms}$

```
2 9 4 8 5 10 6 7 1 3
5 2 6 9 3 8 7 11 4 1
3 11 1 5 10 7 2 6 8 9
6 7 8 1 2 3 5 9 11 4
10 8 11 2 4 1 3 5 6 7
4 6 3 11 9 2 1 8 5 10
8 5 2 6 1 4 9 3 7 11
7 1 5 10 6 9 4 2 3 8
9 4 7 3 8 5 11 10 2 6
11 3 9 4 7 6 8 1 10 5

6 1 3 4 5 10 2 7 11 9
1 3 4 5 6 8 9 10 7 11
3 5 2 10 9 6 11 4 1 8
4 6 8 1 2 11 10 9 5 7
8 11 9 3 1 2 7 5 6 10
11 9 7 8 10 5 1 2 4 6
9 8 5 2 7 1 3 6 10 4
2 10 11 7 4 3 6 1 8 5
10 4 6 9 11 7 5 8 2 3
5 2 10 6 8 9 4 11 3 1

2 4 3 1 8 9 11 7 5 10
3 1 2 10 9 5 6 11 7 4
7 3 1 4 5 6 9 8 10 2
5 7 4 3 6 2 1 10 11 9
6 9 7 5 1 3 10 2 4 8
10 5 9 8 2 1 4 6 3 11
11 10 5 9 7 8 2 3 6 1
9 2 10 7 11 4 3 1 8 6
1 8 6 11 4 7 5 9 2 3
4 6 11 2 3 10 8 5 1 7
```

**8.n=9, k=9**

$T=(1399\text{ms}+22969\text{ms}+22162\text{ms})/3=15510\text{ms}$

```
3 7 5 8 2 1 6 9 4
1 2 3 9 7 6 4 5 8
```

8 1 2 3 6 7 9 4 5  
4 3 1 2 9 8 5 7 6  
5 6 9 1 3 4 7 8 2  
7 5 8 6 4 2 1 3 9  
6 4 7 5 8 9 2 1 3  
9 8 6 4 1 5 3 2 7  
2 9 4 7 5 3 8 6 1

2 1 9 3 6 5 4 7 8  
6 2 1 8 9 4 7 3 5  
4 8 2 1 5 9 3 6 7  
5 7 6 2 1 3 8 4 9  
3 5 8 4 2 7 1 9 6  
7 9 4 6 8 2 5 1 3  
8 6 3 9 7 1 2 5 4  
1 4 5 7 3 6 9 8 2  
9 3 7 5 4 8 6 2 1

9 1 3 6 2 5 4 8 7  
8 4 1 7 5 2 3 9 6  
5 9 8 2 7 4 6 3 1  
6 2 4 1 9 8 7 5 3  
2 3 6 9 1 7 8 4 5  
7 6 5 8 3 1 9 2 4  
4 5 2 3 6 9 1 7 8  
3 7 9 4 8 6 5 1 2  
1 8 7 5 4 3 2 6 9

**9.N=9, k=9**

$T=(280\text{ms}+1472\text{ms}+75594\text{ms})/3=25782\text{ms}$

1 7 3 4 5 6 2 8 9  
3 1 9 5 4 7 8 6 2  
8 3 2 9 1 5 6 7 4  
6 9 1 8 2 3 4 5 7  
4 8 5 2 7 1 3 9 6  
5 6 4 1 3 9 7 2 8  
7 4 8 3 6 2 9 1 5  
9 2 6 7 8 4 5 3 1  
2 5 7 6 9 8 1 4 3

6 3 2 5 8 7 9 1 4  
2 8 7 3 5 1 4 9 6  
7 6 4 9 2 8 3 5 1  
3 2 5 4 1 9 7 6 8  
1 9 3 6 4 5 8 2 7  
8 1 6 2 7 3 5 4 9  
5 4 9 7 6 2 1 8 3  
4 7 1 8 9 6 2 3 5  
9 5 8 1 3 4 6 7 2

3 8 5 6 2 1 7 9 4

7 5 1 3 4 6 9 2 8  
4 7 8 9 1 2 5 6 3  
5 1 6 4 9 7 3 8 2  
1 2 3 8 7 5 6 4 9  
2 6 9 7 5 4 8 3 1  
8 3 4 2 6 9 1 7 5  
6 9 2 1 8 3 4 5 7  
9 4 7 5 3 8 2 1 6

**10.N=9, k=9**

$T=(534\text{ms}+117\text{ms}+178\text{ms})/3=276.33\text{ms}$

1 3 7 8 9 6 5 4 2  
2 5 4 7 1 3 6 9 8  
3 1 6 9 5 7 2 8 4  
5 9 1 6 2 8 4 3 7  
7 4 3 1 8 2 9 5 6  
9 6 5 2 3 4 8 7 1  
6 7 8 3 4 9 1 2 5  
4 8 2 5 7 1 3 6 9  
8 2 9 4 6 5 7 1 3

5 3 2 1 8 6 9 7 4  
2 5 8 3 9 1 6 4 7  
3 9 4 5 1 7 8 6 2  
7 1 3 4 6 9 2 8 5  
1 6 7 2 3 4 5 9 8  
9 7 1 8 4 2 3 5 6  
8 2 6 7 5 3 4 1 9  
4 8 9 6 7 5 1 2 3  
6 4 5 9 2 8 7 3 1

1 7 3 8 9 5 4 6 2  
3 4 1 2 6 8 5 9 7  
2 1 4 7 3 6 9 5 8  
8 2 9 4 5 3 7 1 6  
7 8 6 5 2 9 1 4 3  
6 9 8 3 4 1 2 7 5  
5 3 7 9 1 2 6 8 4  
9 5 2 6 7 4 8 3 1  
4 6 5 1 8 7 3 2 9

**11.N=9, k=9**

$T=(739\text{ms}+415\text{ms}+1874\text{ms})/3=1009.33\text{ms}$

1 9 4 2 5 3 7 8 6  
6 4 5 8 7 2 3 1 9  
4 7 2 3 9 8 5 6 1  
2 8 6 4 1 5 9 3 7  
7 6 3 1 4 9 8 2 5  
9 3 7 5 8 6 1 4 2

8 5 1 7 6 4 2 9 3  
3 1 8 9 2 7 6 5 4  
5 2 9 6 3 1 4 7 8

4 1 8 5 3 6 7 9 2  
1 9 4 3 6 8 2 5 7  
8 7 1 2 5 9 6 3 4  
2 4 9 6 7 1 3 8 5  
6 3 2 7 1 5 8 4 9  
3 6 7 9 4 2 5 1 8  
5 8 6 4 9 7 1 2 3  
9 2 5 1 8 3 4 7 6  
7 5 3 8 2 4 9 6 1

9 2 3 5 7 6 8 4 1  
4 5 9 6 2 8 7 1 3  
5 6 2 9 8 4 1 3 7  
7 3 8 1 4 2 6 5 9  
8 4 1 2 5 7 3 9 6  
3 8 6 4 9 1 2 7 5  
2 9 5 7 1 3 4 6 8  
1 7 4 3 6 9 5 8 2  
6 1 7 8 3 5 9 2 4

**12.N=9, k=9**

$T=(15\text{ms}+64\text{ms}+112\text{ms})/3=63.67\text{ms}$

X

7 2 1 4 3 9 6 5 8  
4 7 8 3 6 5 2 1 9  
2 1 3 7 4 8 9 6 5  
3 9 5 2 7 1 8 4 6  
8 5 4 6 9 7 1 3 2  
1 6 9 8 5 3 7 2 4  
9 4 6 5 1 2 3 8 7  
6 3 2 9 8 4 5 7 1  
5 8 7 1 2 6 4 9 3

8 7 1 4 2 9 3 5 6  
2 4 7 9 8 6 5 1 3  
5 1 6 7 3 4 8 9 2  
4 8 2 1 9 3 6 7 5  
1 3 5 6 7 8 4 2 9  
3 6 9 5 1 2 7 8 4  
6 9 8 2 4 5 1 3 7  
7 2 4 3 5 1 9 6 8  
9 5 3 8 6 7 2 4 1