Domácí úkol III - RK4 (králíci a lišky)

Datum odevzdání: 29.5.2025

Mějme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \quad \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y.$$

Tyto rovnice se mouhou použít pro aproximaci časového vývoje biologického systému, kde spolu interagují dva druhy - predátoři (lišky y) a kořist (králíci x). Vašim úkolem je řešit soustavu metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu. Řešení hledejte pro dvě konfiguace parametrů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s počáteční podmínkou:

1. $$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = (1.1, 0.5, 0.5, 0.1)\,; \quad (x(t=0), y(t=0)) = (12, 10)$$

2. $$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) = (0.67, 1.33, 1.00, 1.00)\,; \quad (x(t=0), y(t=0)) = (1, 1)$$

V obou konfiguracích uvažujte maximální čas $T = 100$. V jednom grafu by měla být vykreslena časová závislost počtu králíků $x(t)$ a lišek $y(t)$. Integrálem pohybu pro daný systém je Hamiltonián $H(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y)$. Vašim úkolem je najít vhodnou volbu časového kroku h pokud pro maximální přípustnou změnu Hamiltoniánu v průběhu simulace platí

$$|H\left(x(0), y(0)\right) - H\left(x(100), y(100)\right)| \leq 10^{-5}. \tag{1}$$

Součástí řešení by mělo být i vykreslení grafů ve fázovém prostoru - tj. na horizontání ose veličinu x a na vertikální y. Jak se příliš velká hodnota kroku h projeví ve fázovém prostoru?

Bonus

Navrhněte a implementujte postup, který zajistí, aby velikost kroku h byla co největší při splnění podmínky (1).