1 Chyby v numerických výpočtech

zdroje chyb:

1. Chyby vstupních dat (např. chyby měření)
2. Zaokrouhlovací chyby (roundoff errors) - konečná délka čísel v počítači (viz datové typy)
3. Chyby metody (truncation errors) - převedení matematické úlohy na numerickou

1.1 Typy chyb

- **Absolutní chyba** = $\|$ přesná hodnota - přibližná hodnota $\|$
- $A(x) = \| x - \tilde{x} \|$
- **Relativní chyba** = Absolutní chyba/$\|$ přesná hodnota $\|$
- $R(x) = \frac{A(x)}{\|x\|}$

1.2 Zaokrouhlovací chyby

1.2.1 Reprazentace čísel v počítači

- *floating point*, číslo ve formátu $X \times 10^Z$ (*platné číslice*$\times$*základ* ^{exponent})
- X se označuje jako mantisa (délka udává přesnost čísla)
- Z je exponent (velikost udává rozsah čísla)
- v počítači je mezi 1 a 2 konečný počet čísel $1 + \epsilon$, $1 + 2\epsilon$, ..., $2 - \epsilon$
- čím menší ϵ, tím menší zaokrouhlovací chyba (strojové ϵ)

1.3 Chyba metody

Při výpočtech je nahrazen nekonečně krátký krok dx konečně krátkým krokem h.

1.3.1 Taylorův rozvoj

$$f(x+h) = \sum_n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \tag{1}$$

- řád metody α
- chyba veličiny úměrná h^α

1.3.2 Dopředné schéma (metoda prvního řádu)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \mathcal{O}(h^2) \to f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} \to$$
$$\to f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

zanedbáním příspěvku $\mathcal{O}(h)$ získám aproximaci derivace zvané dopředné schéma:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

1.3.3 Centrální schéma (metoda druhého řádu)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x)/2 + \mathcal{O}(h^3)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + h^2 f''(x)/2 + \mathcal{O}(h^3)$$

odečtením rovnic při zanedbání $\mathcal{O}(h^2)$ získáme

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{3}$$