

3 Kinematisches Modell

Im Folgenden werden die mathematischen Ansätze zur Beschreibung offener, unverzweigter kinematischer Ketten eingeführt, die zur Modellierung des stationären Positionierverhaltens des Roboters dienen. Auf der Basis der homogenen Transformationen werden die Koordinatentransformationen der kinematischen Kette des Industrieroboters definiert. Die bekannten und in der Robotik etablierten Transformationstypen werden hinsichtlich ihrer Eignung untersucht und bewertet. Zur Beschreibung des Fehlerfortpflanzungsverhaltens der kinematischen Kette wird eine neue analytische Methode entwickelt, die die rekursive analytische Beschreibung der verallgemeinerten Taylorschen Reihe des kinematischen Modells zulässt. Es wird kurz der Begriff der inversen kinematischen Transformation eingeführt, werden Verfahren zur Berechnung mit ihren Querverbindungen zur analytischen Differenziation aufgezeigt, das Beschleunigungs- Kraft- sowie Momentenverhalten erörtert, die internen Sensorgleichungen beschrieben, Verfahren zur Werkzeug- und Montageposebestimmung aufgezeigt und die Parameteridentifikation diskutiert.

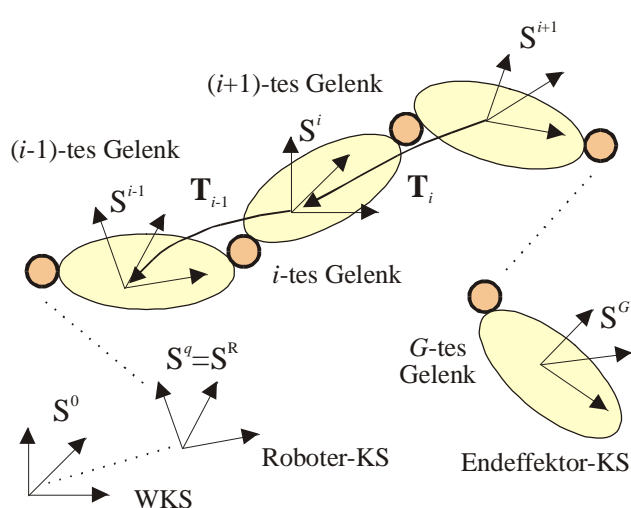


Abb. 3-1: Schema der offenen kinematischen Kette

Industrieroboter bestehen aus mehreren, durch Gelenke miteinander verbundene Teilstrukturen. Bei der Beschreibung ihres stationären Positionierverhaltens wird ein starres Mehrkörpersystem zugrunde gelegt. Die regulär nummerierten G Teilkörper sind dabei ebenfalls durch regulär nummerierte G Gelenke, die Drehachsen und Führungen des Industrieroboters, miteinander verbunden (siehe Abb. 3-1). Im Allgemeinen werden die Achsen voneinander unabhängig angetrieben. Diese rotatorischen und translatorischen Achsen eines Industrieroboters dienen zur definierten Bewegung. Die Orientierungseinstellung des Industrieroboters wird allein durch

die rotatorischen Gelenke bestimmt. Die Position des Industrieroboters wird jedoch sowohl von den Rotationsachsen als auch von den Translationsachsen beeinflusst. Gewöhnlich werden hierbei kartesische Koordinatensysteme verwendet.

Im Raum hat ein beweglicher, starrer Körper sechs Freiheitsgrade $f=6$, die in einem kartesischen Bezugskordinatensystem durch drei Rotations- und drei Translationsparameter beschrieben werden. Ein einzelnes Gelenk eines Industrieroboters kann wegen der mechanischen Kopplung maximal fünf der existierenden sechs Freiheitsgrade nutzen, so dass der Antriebsfreiheitsgrad f_{Ai} des i -ten Gelenks im Intervall

$$0 \leq f_{Ai} \leq f \quad (f=5) \quad (3-1)$$

liegt. Typischerweise werden die Gelenke nur mit einem Gelenkfreiheitsgrad "eins" als Dreh- oder Schubgelenke ausgeführt.

Die Anzahl der Bewegungsachsen des Industrieroboters oder der Getriebefreiheitsgrad

$$f_B = \sum_{\text{Glieder } i} f_{Ai} \quad (3-2)$$

der offenen kinematischen Kette muss nicht identisch mit dem Freiheitsgrad f sein. Dennoch kann der Freiheitsgrad f_K des Endeffektorkoordinatensystems gegenüber dem Bezugs- oder Weltkoordinatensystem S^0 die maximale Anzahl der Freiheitsgrade f nicht überschreiten, so dass die Relation

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq f_K \leq f & \text{für } f_B > f \\ 0 \leq f_K \leq f_B & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (3-3)$$

gilt. Ist der Getriebefreiheitsgrad größer als 6 ($f_B > f$), so kann die erhöhte "Beweglichkeit" des Industrieroboters dazu genutzt werden, z.B. um Hindernisse herumzugreifen.

Bei dem üblicherweise realisierten Aufbau eines Industrieroboters mit nur einem Freiheitsgrad hinsichtlich der Translation oder¹ Rotation lassen sich die Transformationen der Achskoordinaten des Industrieroboters in ein Weltkoordinatensystem S^0 in mehrere Elementartransformationen zerlegen. Aus dieser roboterspezifischen Zerlegung ergeben sich die typischen Grundformen von Robotern und Arbeitsraumbeschreibungen. Die Aufgabe der kinematischen Transformation besteht darin, die Endeffektorposition und -orientierung, die allgemein als Pose bezeichnet wird, im Welt- oder Roboterkoordinatensystem zu berechnen. Hierzu werden typischerweise körperfeste, lokale kartesische Koordinatensysteme in die Bewegungsachsen des Industrieroboters gelegt, so dass hierdurch eine Kette von lokalen Koordinatensystemen und Transformationen entsteht. Die rekursive Transformationsvorschrift \mathbf{T}_{i-1} ergibt sich in homogen Koordinaten

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & k_M \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^4 \quad (3-4)$$

zu:

$$\mathbf{T}_{i-1}: \mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{T}_{i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i-1} & \mathbf{t}_{i-1} \\ \mathbf{0} & k_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad i \in \{1, \dots, G\}, \quad \text{mit} \quad (3-5)$$

\mathbf{r}_i := Ortsvektor im i -ten Koordinatensystem,

\mathbf{t}_{i-1} := Translationsvektor zwischen dem $(i-1)$ -ten und i -ten Koordinatensystem im $(i-1)$ -ten Koordinatensystem beschrieben,

\mathbf{D}_{i-1} := Rotationsmatrix der absteigenden Koordinatentransformation und

k_M := Skalierungsfaktor. (3-6)

Der Faktor k_M ermöglicht eine Gesamtskalierung, die bei einer maßstabsgetreuen Darstellung, wie sie in der Robotik erforderlich ist, zu $k_M = 1$ zu setzen ist. Zwischen den neun Richtungskosinussen, die eine Drehung charakterisieren, existieren wegen der Orthogonalitätsrelation

$$\mathbf{D}_i \mathbf{D}_i^t = \mathbf{E} \quad (3-7)$$

nur sechs unabhängige Gleichungen, weshalb die Drehung allein mit drei Größen und die homogene Transformationsmatrix mit sechs Parametern eindeutig beschreibbar ist. Bei der homogenen Koordinatentransformation handelt es sich um eine eindeutige Abbildung.

¹ Unter dem sprachlichen 'oder' soll hier das logische 'exklusiv-oder' verstanden sein.

Die bei der sukzessiven Koordinatentransformation entstehende resultierende Koordinatentransformation kann aufgrund der homogenen Koordinaten über den Produktterm

$$\mathbf{T} = \prod_{j \in \{q, q+1, \dots, G-1\}} \mathbf{T}_j, \quad q \in \{0, 1, 2, \dots, G-2\} \quad (3-8)$$

beschrieben werden. Diese Matrix stellt die kinematische Transformation dar, wobei q den Index des Roboter- oder des Bezugskoordinatensystems angibt.

Die \mathbf{T}_j -Matrizen der kinematischen Transformation sind von den entsprechenden Transformationsparametern des Gelenkübergangs abhängig. Je nachdem, welche Beschreibungsform für diese Gelenkübergänge gewählt wird, hängt jede Matrix von einer bestimmten Anzahl von Parametern ab. Dabei sind gewisse Parameter konstant und andere Variable, so dass eine Abbildung im Sinne von

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{p}') \equiv \mathbf{T}(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}^t \mathbf{x}^{t^t}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_i^t, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_i^t \quad \text{und} \\ \mathbf{T}_j \equiv \mathbf{T}_j(\mathbf{p}_j') = \mathbf{T}_j(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}_j) \quad . \quad (3-9)$$

vorliegt.

Die Aufgabe der inversen kinematischen Transformation ist es, unter vorgegebener Pose die Gelenkstellungen der homogenen Transformationsmatrizen zu berechnen. Die inverse kinematische Transformation ist nicht notwendigerweise eindeutig, so dass für eine Pose mehrere Lösungen existieren können. Ferner sind für den allgemeinen Fall bisher keine analytischen Lösungen bekannt. Für weitere Einzelheiten zur inversen kinematischen Transformation sei auf Kap. 3.4 verwiesen.

3.1 Allgemeine Ansätze

Bisher wurde bewusst offen gelassen, wie die Rotations- und Translationsparameter der Gelenkkoordinatentransformationen in Zusammenhang mit den konstruktiven Größen eines Roboters stehen. Diese Beschreibungen lassen sich nicht für die Charakterisierung der Kinetik heranziehen, da hierfür die Ortskoordinaten der Teilkörperschwerpunkte und nicht die Ortskoordinaten der Gelenke benötigt werden.

Prinzipiell gibt es eine Reihe von Beschreibungsformen, die sich hinsichtlich der Transformationsparameter und ihren Eigenschaften unterscheiden, z.B.:

- Roll-Pitch-Yaw-Transformation [107],
- Euler-Transformation,
- Denavit-Hartenberg-Transformation [23],
- Hayati-Mirmirani-Transformation [53],
- Veitschegger-Wu-Transformation [158] usw.

Die Wahl einer bestimmten Transformation wird in der Regel von Anwendungs- oder Anschaulichkeitsaspekten geleitet, auf die im Folgenden kurz eingegangen werden soll.

Minimalität der kinematischen Transformation

Die kinematische Transformation der offenen und unverzweigten kinematischen Kette, deren Elemente durch Dreh- und Schubgelenke verbunden sind, ist minimal und vollständig, wenn sie genau

$$n_K = 4r_K + 2t_K + 6 \quad (3-10)$$

Parameter enthält [135], wobei r_K die Anzahl der Drehgelenke und t_K die Anzahl der Schubgelenke angibt. Dies macht deutlich, dass bei Rotationsgelenken 4 parametrische und bei Translationsgelenken 2 parametrische Achsmodelle zur Konstruktion minimaler Systeme hilfreich wären. Die Zielsetzung der Konstruktion minimaler Modelle hat dabei zu verschiedenen Konventionen bei der Beschreibung benachbarter Achsbeziehungen geführt. Dabei wurde der Gewinn an Minimalität zumeist durch den Verlust an Eindeutigkeit und einer Zunahme von Rangdefekten erkauft.

• Roll-Pitch-Yaw- und Elementartransformationen

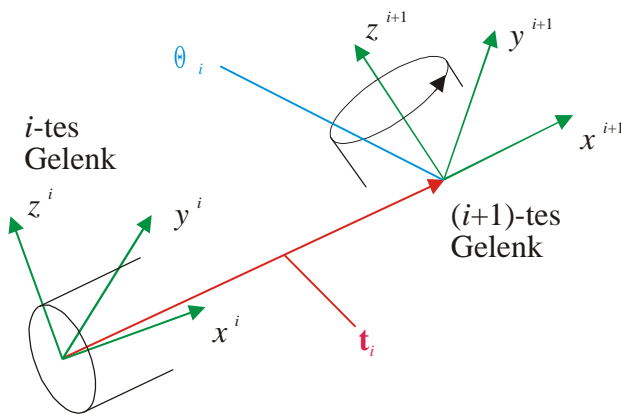


Abb. 3-2: Koordinatentransformation zwischen benachbarten Gelenken

Die 6-dimensionale Roll-Pitch-Yaw-Transformation (RPY) besitzt drei Positions- und drei Rotationsparameter t_x , t_y und t_z sowie Θ_x , Θ_y und Θ_z (siehe Abb. 3-2). Sie lässt sich zur Beschreibung beliebiger Transformationsbeziehungen zweier kartesischer Koordinatensysteme verwenden, weshalb sie häufig zur Charakterisierung von Posen herangezogen wird.

Die homogene Transformationsmatrix (3-5) der RPY-Transformation lässt sich über elementare Translations- und Rotationsoperationen beschreiben, die nur von einem Transformationsparameter abhängig sind:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_z(t_z) \mathbf{T}_y(t_y) \mathbf{T}_x(t_x) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_z) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_y) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_x), \text{ mit} \quad (3-11)$$

Translation

$$\mathbf{T}_x(t_x) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & t_x \mathbf{0} \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_y(t_y) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & 0 t_y \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_z(t_z) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & 0 \mathbf{0} t_z^t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-12)$$

Rotation

$$\mathbf{T}_{Rx}(\Theta_x) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x(\Theta_x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_y) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_y(\Theta_y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{Rz}(\Theta_z) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_z(\Theta_z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \text{ mit} \quad (3-13)$$

$$\mathbf{R}_x(\Theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_x & -\sin \Theta_x \\ 0 & \sin \Theta_x & \cos \Theta_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\Theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_y & 0 & \sin \Theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_y & 0 & \cos \Theta_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_z(\Theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_z & -\sin \Theta_z & 0 \\ \sin \Theta_z & \cos \Theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(\Theta) = \mathbf{R}_z(\Theta_z) \mathbf{R}_y(\Theta_y) \mathbf{R}_x(\Theta_x). \quad (3-15)$$

Die homogene Transformationsmatrix $\mathbf{T}_j \equiv \mathbf{T}$ der j -ten Transformation des Produktterms (3-8)

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}(\mathbf{p}'_j) \quad (3-16)$$

ist eine Funktion des Transformationsparametervektors

$$\mathbf{p}'_j \equiv (\mathbf{t}_j^t, \Theta_j^t)^t = (t_{xj}, t_{yj}, t_{zj}, \Theta_{xj}, \Theta_{yj}, \Theta_{zj})^t. \quad (3-17)$$

Der im 3. Kap. eingeführte Begriff der Pose zwischen zwei Koordinatensystemen lässt sich nach der Wahl einer bestimmten Koordinatentransformation als Zahlentupel $\mathbf{p}'_j \in \mathbb{R}^6$ der Transformationsparameter dieser Transformation definieren². Für die RPY-Transformation berechnet sich die Pose aus der homogenen Transformationsmatrix zu:

$$(\mathbf{t}^t \quad \Theta_{1;2}^t)^t = \mathbf{p}_{\text{RPY}}(\mathbf{T}), \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (t_{14} \quad t_{24} \quad t_{34})^t, \\ \Theta_{1;2} &= (\Theta_{x1;2} \quad \Theta_{y1;2} \quad \Theta_{z1;2})^t, \\ \Theta_{y1;2} &= \begin{cases} -\arcsin(t_{31}) & \text{für I. und II. Quadranten} \\ -\arcsin(t_{31}) + \pi & \text{für III. und IV. Quadranten} \end{cases}, \\ \Theta_{x1;2} &= \arctan 2(t_{32} / \cos(\Theta_{y1;2}), t_{33} / \cos(\Theta_{y1;2})) \text{ für } \Theta_{y1;2} \neq \pm 90^\circ \text{ und} \\ \Theta_{z1;2} &= \arctan 2(t_{21} / \cos(\Theta_{y1;2}), t_{11} / \cos(\Theta_{y1;2})) \text{ für } \Theta_{y1;2} \neq \pm 90^\circ. \end{aligned} \quad (3-18)$$

Es existieren grundsätzlich zwei Posevektoren, die die Matrix \mathbf{T} beschreiben. Durch die Beschränkung auf die RPY-Hauptwerte $\Theta_y \in [0, \pi]$, lässt sich die Eindeutigkeit der Poseberechnung sicherstellen.

Translatorische Bewegungen können bei der RPY-Transformation in Richtung des Ortsvektors $\lambda \cdot \mathbf{t} / |\mathbf{t}|$ oder in Richtung einer der Einheitsvektoren $\lambda \cdot \mathbf{e}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{x, y, z\}$ beschrieben werden und rotatorische Bewegungen repräsentieren Drehungen um eine der Koordinatenachsen Θ_ε , $\varepsilon \in \{x, y, z\}$. Damit lässt sich diese Transformation sowohl für Schub- als auch Drehgelenke verwenden.

² Konsequenterweise müßte der Posevektor mit der verwendeten Transformation indiziert werden, da nur unter ihrer Kenntnis der Begriff der Pose Sinn hat. Auf die Indizierung wird jedoch in der Regel verzichtet.

Der Vorteil der RPY-Transformation liegt in dem isolierten, nur punktförmigen Rangverlust. Ihr Nachteil beruht auf dem 6 parametrischen Transformationstyp, der bei der Beschreibung von Kinematiken zum Minimalitätsverlust führt (siehe Tab. 3-1).

Transformationstyp	$T = T_x(t_x) T_y(t_y) T_z(t_z) T_{Rz}(\Theta_z) T_{Ry}(\Theta_y) T_{Rx}(\Theta_x)$
Transformation	$T = \begin{pmatrix} c\Theta_z c\Theta_y & c\Theta_z s\Theta_y s\Theta_x - s\Theta_z c\Theta_x & c\Theta_z s\Theta_y c\Theta_x + s\Theta_z s\Theta_x & t_x \\ s\Theta_z c\Theta_y & s\Theta_z s\Theta_y s\Theta_x + c\Theta_z c\Theta_x & s\Theta_z s\Theta_y c\Theta_x - c\Theta_z s\Theta_x & t_y \\ -s\Theta_y & c\Theta_y s\Theta_x & c\Theta_y c\Theta_x & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$
Rangverlust	Ist identisch mit dem Rangverlust des Rotationsteils und tritt bei Drehungen auf, bei der die z-Achse in die x/y-Ebene übergeht ($\Theta_y = \pm 90^\circ$).
Vollständigkeit	ja (global)
Stetigkeit	ja
Minimalität	6 parametrisch

Tab. 3-1: Eigenschaften der RPY-Transformation

• Denavit-Hartenberg-Transformation

Die Denavit-Hartenberg-Transformation (DH), siehe Abb. 3-3, erlaubt die Beschreibung be-

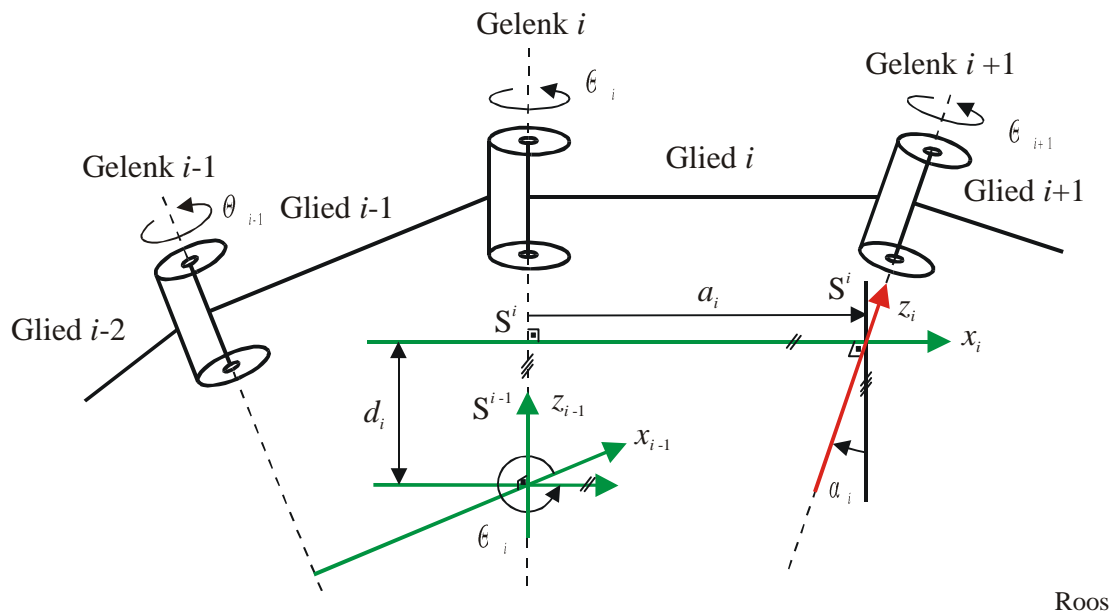


Abb. 3-3: Denavit-Hartenberg-Transformation

liebigster mechanischer Gelenke mit nur vier Parametern. Die geringe Anzahl der Parameter ergibt sich aus der Einschränkung der Freiheitsgrade benachbarter Koordinatensysteme. Das Modell ist sowohl für Dreh- als auch Schubgelenke geeignet.

³ Um eine kompakte Schreibweise zu ermöglichen, steht c für cosinus und s für sinus.

Transformationstyp	$T = R_z(\Theta) T_z(d) T_x(a) R_x(\alpha)$
Transformation	$T = \begin{pmatrix} c\Theta & -s\Theta c\alpha & s\Theta s\alpha & a c\Theta \\ s\Theta & c\Theta c\alpha & -c\Theta s\alpha & a s\Theta \\ 0 & s\alpha & c\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rangverlust	bei parallelen Achsen
Vollständigkeit	ja (global)
Stetigkeit	ja
Minimalität	4 parametrig

Tab. 3-2: Eigenschaften der Denavit-Hartenberg-Transformation

Der Vorteil der DH-Transformation liegt in ihrem 4 parametrigem minimalen Ansatz. Von Nachteil ist, dass bei parallelen Achsen ein Rangverlust auftritt (siehe Tab. 3-2).

Dieser Rangverlust ist problematisch, da aufgrund der stets vorhandenen Fertigungsfehler, Messfehler und Toleranzen die Sollwerte der Konstruktionsparameter eines Industrieroboters nicht exakt einzuhalten sind. Bei aufeinanderfolgenden, fast parallelen Achsen ist die DH-Transformation aufgrund des Rangverlustes und der o.g. Fehler schlecht konditioniert, womit hinsichtlich der Fehlerfortpflanzung ein ungünstiges Verhalten entsteht [11, 98]. Im Hinblick auf die Verbesserung der Positioniergenauigkeit von Industrierobotern mittels Roboterparameteridentifikation gilt es gerade, diese individuellen Roboterparameter zu identifizieren, und da die in der Montagetechnik bewährten Horizontal-Knickarm-Roboter (SCARA) nahezu parallele Drehachsen aufweisen, ist die Verwendung der DH-Transformation für die Genauigkeitssteigerung einer off-line-programmierbaren flexiblen Montagezelle nicht geeignet.

• Hayati-Mirmirani-Transformation

Die Hayati-Mirmirani-Transformation (HM) in Abb. 3-4 stellt eine Erweiterung des DH-Modells dar, mit dem Ziel, den Rangverlust bei parallelen Achsen auszuschließen. Dies wird

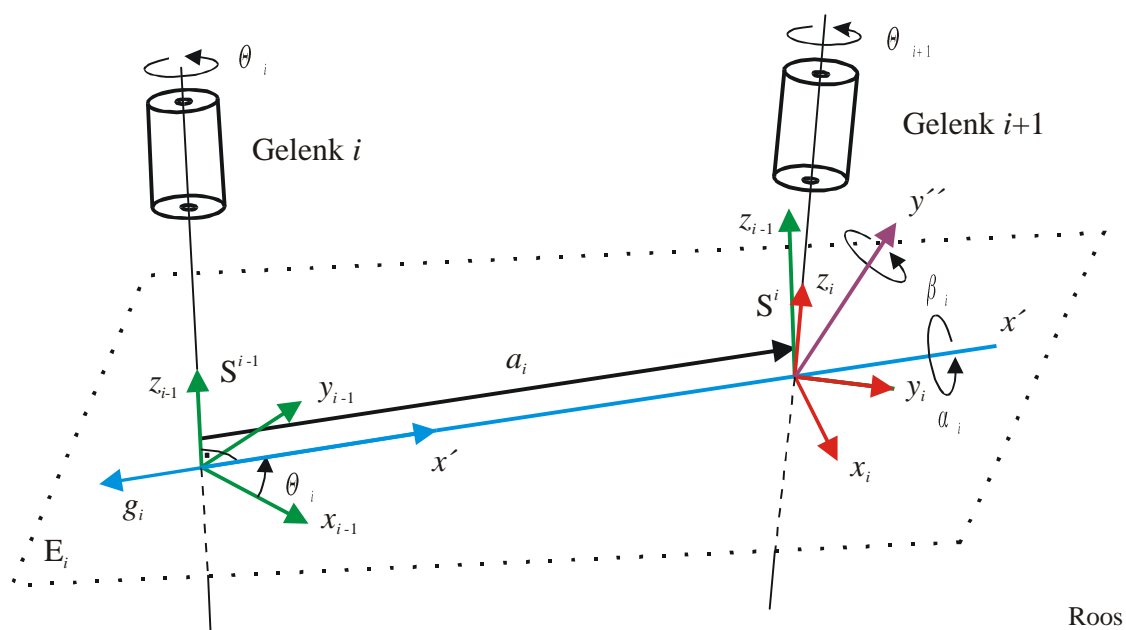


Abb. 3-4: Hayati-Mirmirani-Transformation

durch eine zusätzliche Drehung um die y-Achse zusammen mit einer einparametrigem

Beschreibung des Koordinatensystemursprungs erreicht. Das Modell ist nur für Drehgelenke geeignet und muss zur Anwendung auf Schubgelenke entsprechend modifiziert werden.

Transformationstyp	$T = R_z(\theta) T_x(a) R_x(\alpha) R_y(\beta)$ (nur Drehgelenke)
Transformation	$T = \begin{pmatrix} c\theta c\beta - s\theta s\alpha s\beta & -s\theta c\alpha & c\theta s\beta + s\theta s\alpha c\beta & a c\theta \\ s\theta c\beta + c\theta s\alpha s\beta & c\theta c\alpha & s\theta s\beta - c\theta s\alpha c\beta & a s\theta \\ -c\alpha s\beta & s\alpha & c\alpha c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rangverlust	Bei orthogonalen Rotationsachsen und beliebigen Rotationsachsen, die sich im Ursprung des Ausgangskordinatensystems schneiden.
Vollständigkeit	nein (global); nur lokal, für nicht aufeinanderfolgende identische Rotationsachsen
Stetigkeit	ja
Minimalität	4 parametrig

Tab. 3-3: Eigenschaften der Hayati-Mirmirani-Transformation

Veitschegger-Wu-Transformation

Das von Veitschegger und Wu (VWU) entwickelte Modell kombiniert die DH- und HM-Ansätze mit dem Ziel, die Rangverluste für aufeinanderfolgende identische Achsen auszuschließen. Dies wird durch die Einführung eines weiteren Drehwinkels mit dem Verlust an Minimalität erreicht (siehe auch Abb. 3-4).

Transformationstyp	$T = R_z(\theta) T_z(d) T_x(a) R_x(\alpha) R_y(\beta)$
Transformation	$T = \begin{pmatrix} c\theta c\beta - s\theta s\alpha s\beta & -s\theta c\alpha & c\theta s\beta + s\theta s\alpha c\beta & a c\theta \\ s\theta c\beta + c\theta s\alpha s\beta & c\theta c\alpha & s\theta s\beta - c\theta s\alpha c\beta & a s\theta \\ -c\alpha s\beta & s\alpha & c\alpha c\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rangverlust	Bei Rotationsachsen, die die z-Achse im Ausgangskordinatensystem schneiden und bei Rotationsachsen, die parallel zur x/y-Ebene liegen.
Vollständigkeit	ja (global)
Stetigkeit	ja
Minimalität	5 parametrig

Tab. 3-4: Eigenschaften der Veitschegger-Wu-Transformation

• Zusammenfassung

Die o.g. Transformationen haben jeweils spezifische Vor- und Nachteile, so dass keinem dieser Ansätze generell der Vorzug zu geben wäre. Unter dem Gesichtspunkt der Minimalität des Modells haben die DH- und die HM-Transformation eine höhere Präferenz, wobei die DH-Transformation für aufeinanderfolgende, (quasi) orthogonale und die HM-Transformation für (quasi) parallele Achsen einzusetzen ist.

Unter den Aspekten der Vollständigkeit und des Rangdefekts wäre die RPY-Transformation vorzuziehen. Dies hätte jedoch den Verlust der Minimalität zur Folge, weshalb die RPY-Transformation bisher hauptsächlich zur Posebeschreibung herangezogen wurde. Mit Hilfe des Verfahrens zur Konstruktion minimaler Modelle kann dieser Nachteil beseitigt werden. Damit lässt sich auch die RPY-Transformation für kinematische Modelle ohne Verlust der Minimalität einsetzen und man erhält ein vollständiges, minimales und hinsichtlich der

Rangverluste vorteilhaftes Modell. Aus diesem Grunde wird im Folgenden nur die RPY-Transformation diskutiert.

3.2 Schnelle und exakte Differenziation

Ausgehend von der Produktform (3-8) erhält man mit der Produktregel die partielle Ableitung nach den Eingangsgrößen $p_k \in \{t_{xk}, t_{yk}, t_{zk}, \Theta_{xk}, \Theta_{yk}, \Theta_{zk}\}$ des parametrischen Modells zu [117]:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T} = \sum_k \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{T}_j \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial p_k} \prod_{j=k+1}^{G-1} \mathbf{T}_j, \quad k \in \{0, 1, \dots, G-1\} \quad (3-19)$$

Da der Parameter nur in einer Transformation vorliegt, vereinfacht sich die Ableitung zu:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T} = \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{T}_j \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial p_k} \prod_{j=k+1}^{G-1} \mathbf{T}_j \quad (3-20)$$

Zerlegt man den Term

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_k \quad (3-21)$$

in die Elementartransformationen (3-12) und (3-13), so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_k = \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \quad (3-22)$$

bzw. nach erneuter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_k &= \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \\ &+ \mathbf{T}_z(t_{zk}) \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \\ &+ \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \\ &+ \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \\ &+ \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \\ &+ \mathbf{T}_z(t_{zk}) \mathbf{T}_y(t_{yk}) \mathbf{T}_x(t_{xk}) \mathbf{T}_{Rz}(\Theta_{zk}) \mathbf{T}_{Ry}(\Theta_{yk}) \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{T}_{Rx}(\Theta_{xk}) \end{aligned} \quad (3-23)$$

Damit lässt sich die Differenziation der kinematischen Kette auf die Differenziation der Elementarmatrizen zurückführen. Da jeweils auch nur eine Elementartransformation vom Parameter p_k abhängt, verschwinden die Ableitungen der Terme (3-23), die nicht von diesem Parameter abhängen.

Die Ableitungen der homogenen⁴ Elementarmatrizen ergeben sich zu:

Translation

$$\frac{\partial \mathbf{T}_x}{\partial t_x}(t_x) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_x \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{T}_y}{\partial t_y}(t_y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_y \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{T}_z}{\partial t_z}(t_z) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_z \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

Rotation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_{Rx}}{\partial \Theta_x}(\Theta_x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \Theta_x}(\Theta_x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Ry}}{\partial \Theta_y}(\Theta_y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \Theta_y}(\Theta_y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_{Rz}}{\partial \Theta_z}(\Theta_z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \Theta_z}(\Theta_z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-25)$$

Analog lassen sich höhere Ableitungen beschreiben, wobei die Besonderheit auftritt, dass die Translationsterme verschwinden und lediglich höhere Ableitungen der Rotationsterme existieren:

Translation

$$\frac{\partial^n \mathbf{T}_\varepsilon}{\partial t_\varepsilon^n}(t_\varepsilon) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_\varepsilon \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} & \text{für } n=1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}, \quad \varepsilon \in \{x, y, z\} \quad (3-26)$$

⁴ Die Differenziation homogener Koordinaten führt zu der Gleichung: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{r}' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{R} & \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix}.$

Hierbei ist darauf zu achten, dass die Matrizendifferenziation homogener Matrizen von der allgemeinen Definition der Matrixdifferenziale abweichen muss, weil man ansonsten nicht homogene Differenzialmatrizen erhält. Man kann dies erkennen, wenn man von $\mathbf{r}' = \mathbf{R} \mathbf{r} + \mathbf{t}$ ausgeht. Aus $\frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{r}' = \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{R} \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{t}$ erhält man in

homogener Schreibweise die partiellen Ableitungen homogener Matrizen zu: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{r}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{R} & \frac{\partial}{\partial p'} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix}.$

Dieser Umstand kann dadurch berücksichtigt werden, dass man in erst der resultierenden Produktmatrix \mathbf{T} (3-19) den verschwindenden Maßstabsfaktor zu eins setzt. Dies gilt analog auch für die homogene Koordinate \mathbf{r}_H .

Rotation

$$\frac{\partial^n \mathbf{T}}{\partial \Theta_\varepsilon^n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^n \mathbf{D}(\Theta)}{\partial \Theta_\varepsilon^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad \varepsilon \in \{x, y, z\} \quad \text{mit}$$

$$\frac{\partial^n \mathbf{D}}{\partial \Theta_\varepsilon^n}(\Theta) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \Theta_\varepsilon}(\Theta + (n-1) \Theta_\varepsilon) \quad (3-27)$$

Betrachtet man die Gleichung

$$\frac{\partial^n}{\partial p_k^n} \mathbf{T} = \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{T}_j \frac{\partial^n \mathbf{T}_k}{\partial p_k^n} \prod_{j=k+1}^{G-1} \mathbf{T}_j, \quad (3-28)$$

so kann man die Produktterme durch ihre Transformationen

$$\frac{\partial^n}{\partial p_k^n} \mathbf{T} = \mathbf{T}_0^{k-1} \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial p_k} \mathbf{T}_{k+1}^{G-1} \quad (3-29)$$

ersetzen. Mit (3-26) und (3-27) erhält man nach Multiplikation der Matrizen⁵:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial p_{k\varepsilon}^n} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{k\varepsilon n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} && \text{für R-Achsen} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{e}_{k\varepsilon n} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} && \text{für T-Achsen} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{R}_{k\varepsilon n} & \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} && \text{für R-Achsen} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{R}_k & \mathbf{D}_0^{k-1} \mathbf{e}_{k\varepsilon n} + \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} && \text{für T-Achsen} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{R}_{k\varepsilon n} & \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{D}_0^{k-1} \mathbf{R}_{k\varepsilon n} \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} + \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} && \text{für R-Achsen} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0^{k-1} & \mathbf{R}_k & \mathbf{D}_{k+1}^{G-1} & \mathbf{D}_0^{k-1} \mathbf{R}_k \mathbf{t}_{G-1}^{k+1} + \mathbf{D}_0^{k-1} \mathbf{e}_{k\varepsilon n} + \mathbf{t}_{k-1}^0 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} && \text{für T-Achsen} \\ &\text{mit } \mathbf{e}_{k\varepsilon n} = \begin{cases} \mathbf{e}_{k\varepsilon n} & \text{für } n=1 \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \\ &\mathbf{R}_{k\varepsilon n} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \Theta_\varepsilon}(\Theta_k + (n-1) \pi/2 \mathbf{e}_{\Theta_\varepsilon}) \quad (3-31) \end{aligned}$$

Infolgedessen lässt sich das Differenzial der offenen kinematischen Kette analytisch beschreiben (siehe auch Anhang Kap. 3.7).

⁵ R steht für Rotation und T Translation.

3.3 Verallgemeinerte Taylorsche Reihe

Die \mathbf{T}_j -Matrizen der kinematischen Transformation sind von den entsprechenden Transformationsparametern des Gelenkübergangs abhängig. Je nachdem, welche Beschreibungsform für diese Gelenkübergänge gewählt wird, hängt jede Matrix von einer bestimmten Anzahl von Parametern p'_{jk} ab:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{f}_j(p'_{j1}, p'_{j2}, \dots, p'_{jk}, \dots, p'_{jb}) . \quad (3-32)$$

Hierbei bezeichnet der erste Index die Nummer und der zweite Index den Parameter des Gelenkübergangs. Diese Parameter beschreiben sowohl stationäre Größen, z.B. Armlängen, als auch variable Größen, die Stellgrößen der Antriebe. Bei der Berechnung der Pose der kinematischen Transformationsmatrix

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}_{\text{RPY}}(\mathbf{T}) \quad (3-33)$$

werden $N = G \cdot b$ Parameter der Gelenkübergänge auf $M = 6$ Transformationsparameter abgebildet:

$$\mathbf{p}' \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{p}') . \quad (3-34)$$

Im Falle der hier diskutierten Roll-Pitch-Yaw-Transformation ist $b = \text{const} = 6$. Die Parameter der Gelenkübergänge sind nur mit einer beschränkten Genauigkeit bekannt oder lassen sich hinsichtlich der Stellgrößen nur mit einer beschränkten Auflösung messen oder einstellen.

Die Fehlerfortpflanzungsanalyse erster Ordnung dieser Unsicherheiten der kinematischen Transformation wird im wesentlichen bereits durch die allgemeinen systemtheoretischen Darstellungen vollzogen, weshalb im Folgenden lediglich kurz die Möglichkeiten der analytischen Berechnung der partiellen Ableitungen der \mathbf{T} -Matrizen [117] diskutiert wird.

Diese analytische Beschreibung ermöglicht eine geschlossene Berechnung der verallgemeinerten Taylorschen Reihe [31] der T-Matrix:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}') = \mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) + d\mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) + \frac{1}{2!} d^2\mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) + \dots + \frac{1}{m!} d^m\mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) + \mathbf{R}_{Tm}(\Delta\mathbf{p}') , \quad (3-35.1)$$

$$\text{mit } d^k\mathbf{T}(\mathbf{p}') = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p'_i} h'_i \right)^k \mathbf{T}(\mathbf{p}') , \quad (3-35.2)$$

$$\mathbf{p}' = (p'_1 \dots p'_p)^t = (p'_{11} \dots p'_{1b}; p'_{21} \dots p'_{2b}; \dots; p'_{a1} \dots p'_{ab})^t , \quad (3-35.3)$$

$$\mathbf{h}' = \Delta\mathbf{p}' = \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_0 \text{ und} \quad (3-35.4)$$

$$\mathbf{R}_{Tm}(\Delta\mathbf{p}') = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1}\mathbf{T}(\mathbf{p}'_0 + \mathbf{h}'_g) , \quad \mathbf{h}'_g = (g h'_i) , \quad 0 < g < 1 . \quad (3-35.5)$$

Für den Differenzialoperator in (35.2) lässt sich die Identitätsaussage

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p'_i} h'_i \right)^k \equiv \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \prod_{i=1}^N \frac{\partial^{k_i}}{\partial p'^{k_i}_i} h'^{k_i}_i \quad (3-36)$$

(Summe über alle N -Tupel verschiedener natürlicher Zahlen,
für die gilt $\sum k_i = N$)

angeben. Diese Beschreibung lässt sich in eine rekursive Form überführen:

$$\mathbf{T}_{0,m} - \mathbf{R}_{Tm}(\Delta\mathbf{p}') = \mathbf{T}_{0,m-1} + \frac{1}{m!} d^m\mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) , \quad \text{mit } \mathbf{T}_{0,0} = \mathbf{T}(\mathbf{p}'_0) . \quad (3-37)$$

Die rekursive Beschreibung hat den Vorteil, dass bei einer Genauigkeitssteigerung nicht sämtliche Terme der verallgemeinerten Taylorschen Reihe neu zu berechnen sind. In der Praxis wird man sich meist auf lineare, quadratische und kubische Terme beschränken. Für weitere Einzelheiten und Anwendungsmöglichkeiten dieses Ansatzes sei auf [117, 166] verwiesen.

3.4 Inverse kinematische Transformation

Die Aufgabe der inversen kinematischen Transformation ist es, unter vorgegebener Pose die Gelenkkoordinaten zu berechnen. Die inverse kinematische Transformation ist nicht notwendigerweise eindeutig, so dass für eine Pose mehrere Lösungen existieren können. Diese Mehrdeutigkeiten können dazu genutzt werden, z. B. um Hindernisse herumzugreifen.

Die inverse kinematische Transformation

$$\mathbf{K}_I: \mathbf{T} \mapsto \mathbf{p}'_v = \mathbf{K}_I(\mathbf{T}), \quad \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{t}_G^q, \mathbf{\Theta}_G^q) \quad (3-38)$$

berechnet zu einer gegebenen Pose $(\mathbf{t}_G^q, \mathbf{\Theta}_G^q)^t$ des Endeffektorkoordinatensystems S^G gegenüber dem Bezugskoordinatensystem S^q die Werte der Gelenkvariablen

$$\mathbf{p}'_v = (p'_{vq}, p'_{v(q+1)}, \dots, p'_{v(G-1)})^t \in \mathbb{R}^{f_B} \quad (3-39)$$

der kinematischen Transformation.

Der Gelenkvariablenvektor \mathbf{p}'_v enthält die nicht konstanten Elemente der Transformationsparametervektoren \mathbf{p}'_i , $i \in \{0, 1, \dots, G-1\}$. Es existieren zumeist mehrere Lösungen, mit denen dieselbe Pose angefahren wird. Der durch den Vektor \mathbf{p}'_v aufgespannte Raum wird als Gelenkkoordinatenraum des IR und die Elemente des Gelenkkoordinatenvektors werden als Gelenkkoordinaten bezeichnet.

Die Problemstellung der inversen kinematischen Transformation erfordert die Lösung von G gekoppelten, nichtlinearen Gleichungen [24, 64, 76, 77, 133, 140, 173, 178]. Geschlossene analytische Lösungen sind nur für bestimmte Annahmen, wie z.B. der Parallelität oder der Orthogonalität der Gelenkachsen zueinander, entwickelt worden. Im Zusammenhang mit der Roboterparameteridentifikation der 3D-Modelle gilt es, gerade auch diese Parallelitäts- und Orthogonalitätsfehler zu identifizieren, so dass man in diesem Zusammenhang von den vereinfachenden Annahmen keinen oder nur in beschränkter Weise Gebrauch machen kann. Die Lösung der inversen kinematischen Transformation wird deshalb zumeist unter Anwendung numerischer Minimierungsverfahren vollzogen [24, 35, 133, 148]. Der Ansatz von Li [89] nutzt ein Bindungsgleichungssystem, um mit Hilfe einer Polynomgleichung und weiteren linearen Gleichungen sämtliche Lösungen der Gelenkkoordinaten zu berechnen. Dieser Ansatz führt letztlich auf die iterative Suche der Nullstellen der Polynomgleichung, weshalb man auch diese Methode in die Klasse der iterativen Verfahren einordnen muss. Für einen systematischen Vergleich verschiedener Verfahren der inversen Transformation sei auf Kreuzer [77] verwiesen.

3.4.1 Singularitäten

Kinematische Robotermodelle besitzen sowohl kontante als auch zeitlich veränderliche Parameter. Singularitäten können sowohl aus der Sicht der konstanten als auch der Sicht der variablen Parameter auftreten. Unter einer Singularität wird ein Rangdefekt der Jacobi-Matrix im Sinne von

$$\text{Rang } \mathbf{J}_v(\mathbf{p}'_v) < \text{Dim } \mathbf{p}'_v \quad (3-40)$$

verstanden. Man unterscheidet struktur- und lagebedingte Rangdefekte. Strukturbedingte Singularitäten sind konstruktiver Natur oder liegen in den Achsmodelle begründet. Lagebedingte Rangdefekte sind strukturspezifisch und treten bei bestimmten Gelenkstellungen auf. Damit zerfällt die Ranguntersuchung einer kinematischen Struktur in zwei Teile:

Die Parametersingularitäten

$$\text{Rang } \mathbf{J}_p(\mathbf{p}, \mathbf{x}) < \text{Dim } \mathbf{p} \quad (3-41)$$

und Antriebssingularitäten

$$\text{Rang } \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) < \text{Dim } \mathbf{x} \quad (3-42)$$

Parametersingularitäten sind für die Parameteridentifikation und Antriebssingularitäten für das inverse kinematische Problem bedeutsam. Singularitäten können auf Flächen oder Punktmengen auftreten und kennzeichnen linear abhängige Parameter oder Eingangsgrößen. Von besonderem Interesse sind ausgezeichnete Punktsingularitäten der Antriebsgrößen innerhalb des Wertevorrats des TCP-Poseraums.

3.4.2 Klassische Ansätze

Die klassischen Lösungsverfahren können auf zwei Ansätze zurückgeführt werden:

- **Ansatz mit Taylorscher Reihe**

Die Aufgabenstellung der Bestimmung der Stellwerte für eine mit dem Endeffektorkoordinatensystem anzufahrende Pose lässt sich auf die Taylorsche Reihendarstellung zurückführen, so dass man die linearisierte Parametervektoränderung über

$$\Delta \mathbf{p}'_v = \mathbf{J}_v^{-1}(\mathbf{p}'_v) \Delta \mathbf{p}_{GRPY}^q, \text{ mit } \Delta \mathbf{p}_{GRPY}^q = \Delta \mathbf{t}^t \Delta \Theta_{GRPY}^{q,t} \quad (3-43)$$

berechnen kann. Für den Fall einer quadratischen, nichtsingulären Jacobi-Matrix lässt sich die Aufgabenstellung lösen. Bei den nichtquadratischen Formen bedient man sich der Pseudoinversen der SVD-Zerlegung. Hieran zeigt sich die Bedeutung der Singularitäten für die Inversenberechnung. Dies wird auch noch einmal in Kap. 3.5 im Zusammenhang mit den Gelenkgeschwindigkeiten deutlich.

- **Minimierungsproblem**

Eine andere Interpretation der Aufgabenstellung führt zu einem Minimierungsproblem

$$\text{Min}_{\mathbf{p}'_v} \left\| \mathbf{t}^t - \mathbf{\Theta}_{\text{RPY,Soll}}^t - \mathbf{p}_{\text{RPY}}(\mathbf{T}(\mathbf{p}'_v)) \right\|, \quad (3-44)$$

so dass für die Bestimmung des Gelenkvariablenvektors Verfahren Anwendung finden können, die sich der partiellen Ableitung der kinematischen Transformation bedienen.

Die o. g. Ansätze nutzen bei der iterativen Berechnung der Gelenkkoordinaten die partiellen Ableitungen der kinematischen Kette. Anstatt numerische Differenzierungsverfahren zu verwenden, ließe sich für eine Genauigkeitssteigerung und Beschleunigung der Berechnung der Gelenkkoordinaten die analytische Berechnung der partiellen Ableitungen heranziehen [117, 166]. Ferner kann der Startwert für eine weitere Beschleunigung der Verfahren über das vereinfachte parallelitäts- und orthogonalitätsfehlerfreie kinematische Modell des IR berechnet werden.

Minimierungsansätze haben zudem den Vorteil, dass sie bei Rangdefekten nicht versagen und mehrdeutige Lösungen produzieren, die für die Antriebe auch vorliegen. Deshalb kann man diese zur Inversenberechnung an ausgezeichneten Antriebssingularitäten einsetzen. Als Startwerte kann man Lösungen der Inversen in der Umgebung der ausgezeichneten Singularität heranziehen. Dies hat zudem zur Folge, dass man mit minimalen Veränderungen der Antriebsgrößen in die analytisch nicht berechenbare Endeffektorpose fährt.

Diese Möglichkeit der Inversenberechnung an ausgezeichneten Singularitäten ist insbesondere für den kooperierenden Betrieb eines Multi-Kinematik-Systems bedeutsam, weil man hiermit die Bewegungsrestriktionen des Gesamtsystems reduzieren kann. Die Iteration muss dabei unter Echtzeitbedingungen erfolgen, was keineswegs eine triviale Aufgabe darstellt.

3.4.3 Analytische Inverse für ausgezeichnete Kinematiken

Eine analytische inverse kinematische Transformation mit sechs Freiheitsgraden lässt sich immer dann finden, wenn die serielle offenen kinematischen Kette so konstruiert ist, dass sowohl die Drehgelenksachsen orthogonal bzw. parallel ausgerichtet als auch die Position und Orientierung separierbar sind. Hierzu müssen sich die drei letzten Drehachsen des Handgelenks in einem Punkt, dem **Wrist Center Point (WCP)**, schneiden (siehe Abb. 3-5).

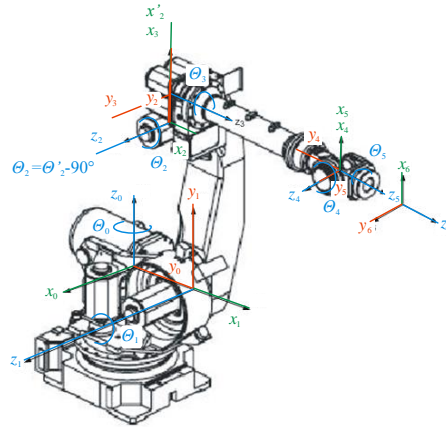


Abb. 3-5: Fanuc Industrieroboter mit eingezeichneten Koordinatensystemen in Nulllage

Ausgehend von den Koordinatensystemen in Abb. 3-5 erhält man die Transformationsmatrizen zu⁶:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_0^1 &= \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{T}_1^2 &= \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{T}_2^3 &= \begin{pmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{T}_3^4 &= \begin{pmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{T}_4^5 &= \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{T}_5^6 &= \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

⁶ Der kompakten Schreibweise wegen werden die Abkürzungen und Identitäten

$$C_i = \cos(\theta_i), \quad S_i = \sin(\theta_i),$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) - \sin(\theta_i)\sin(\theta_j) = \cos(\theta_i + \theta_j) \quad \text{und}$$

$$S_{ij} = \sin(\theta_i)\cos(\theta_j) + \cos(\theta_i)\sin(\theta_j) = \sin(\theta_i + \theta_j)$$

herangezogen.

- **Separationsansatz**

Die TCP-Pose sei im Aktuatorkoordinatensystem über folgende Matrix

$$\mathbf{T}_0^6 = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & p_x \\ u_y & v_y & w_y & p_y \\ u_z & v_z & w_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-46)$$

beschrieben. Für die gesamte kinematische Kette gilt:

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5 \mathbf{T}_5^6. \quad (3-47)$$

Diese kinematische Vorwärtstransformation wird so separiert, dass die erste Matrix

$$\mathbf{T}_0^3 = \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 = \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & S_1 & S_1 S_{23} & C_1 (a_1 + a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -C_1 & S_1 S_{23} & S_1 (a_1 + a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & 0 & -C_{23} & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-48)$$

die Transformation vom WCP- ins Aktuatorkoordinatensystem und die zweite Matrix

$$\mathbf{T}_3^6 = \mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5 \mathbf{T}_5^6 = \begin{pmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_4 + d_6 C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-49)$$

die Transformation vom TCP- ins WCP-Koordinatensystem angibt. Weiter gilt dann:

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{T}_3^6. \quad (3-50)$$

- **Position des Wrist Center Point**

Die WCP-Position sei durch den Vektor

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} q_x & q_y & q_z & 1 \end{pmatrix}^t \quad (3-51)$$

beschrieben. Für die Position des WCP in Bezug auf den TCP gilt:

$$\mathbf{q}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_6 & 1 \end{pmatrix}^t. \quad (3-52)$$

Damit erhält man die Transformation

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{T}_0^6 \mathbf{q}_6 = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & p_x \\ u_y & v_y & w_y & p_y \\ u_z & v_z & w_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-53)$$

bzw.

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - d_6 w_x \\ p_y - d_6 w_y \\ p_z - d_6 w_z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3-54)$$

Hiermit lässt sich die WCP-Position in Bezug auf das Aktuatorkoordinatensystem für eine TCP-Pose angeben. Zudem ist die Position des WCP in Bezug auf das dritte Gelenk über

$$\mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-55)$$

definiert. Mit der Transformation \mathbf{T}_0^3 multipliziert, lässt die Gleichung

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} p_x - d_6 w_x \\ p_y - d_6 w_y \\ p_z - d_6 w_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & S_1 & S_1 S_{23} & C_1(a_1 + a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -C_1 & S_1 S_{23} & S_1(a_1 + a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & 0 & -C_{23} & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-56)$$

aufstellen. Diese Gleichung lässt sich mit der inversen von \mathbf{T}_0^1 zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_0^1)^{-1} \mathbf{q}_0 &= (\mathbf{T}_0^1)^{-1} \mathbf{T}_0^3 \mathbf{q}_3 = (\mathbf{T}_0^1)^{-1} \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{q}_3 = \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{q}_3 \\ &= \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{23} & 0 & S_{23} & a_3 C_{23} + a_2 C_2 \\ S_{23} & 0 & -C_{23} & a_3 S_{23} + a_2 S_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-57)$$

umformen. Aus diesem Gleichungssystem lassen sich drei unabhängige Gleichungen für drei Variablen bestimmen:

$$q_x C_1 + q_y S_1 - a_1 = d_4 S_{23} + a_3 C_{23} + a_2 C_2 \quad (3-58)$$

$$q_z = -d_4 C_{23} + a_3 S_{23} + a_2 S_2 \quad (3-59)$$

$$q_x S_1 - q_y C_1 = 0 \quad (3-60)$$

Aus (3-60) lässt sich dann unmittelbar der Winkel

$$\theta_1 = \arctan 2(q_y, q_x) \quad (3-61)$$

berechnen. Die Variablen q_x und q_y sind über (3-54) bestimmt. Bildet man das Quadrat der ersten drei Zeilen (3-58) bis (3-60), so erhält man:

$$\begin{aligned} q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 - 2a_1 q_x C_1 - 2a_1 q_y S_1 \\ = d_4^2 + a_3^2 + a_2^2 - a_1^2 + 2a_2 a_3 (C_2 C_{23} + S_2 S_{23}) + 2a_2 d_4 (S_{23} C_2 - C_{23} S_2) \end{aligned} \quad (3-62)$$

Mit den trigonometrischen Additionstheoremen

$$C_{23} C_2 + S_{23} S_2 = \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_2) = C_3 \quad \text{und} \quad (3-63)$$

$$S_{23} C_2 - C_{23} S_2 = \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_2) = S_3 \quad (3-64)$$

kann man (3-62) zu

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 - 2a_1 q_x C_1 - 2a_1 q_y S_1 = d_4^2 + a_3^2 + a_2^2 - a_1^2 + 2a_2 a_3 C_3 + 2a_2 d_4 S_3 \quad (3-65)$$

umformen. Da θ_1 über (3-61) bestimmt ist, können die bekannten und konstanten Parameter zusammengefasst werden. Mit den Abkürzungen

$$\kappa_1 = 2a_2 d_4, \quad (3-66)$$

$$\kappa_2 = 2a_2 a_3 \quad \text{und} \quad (3-67)$$

$$\kappa_3 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 - 2a_1 q_x C_1 - 2a_1 q_y S_1 - (d_4^2 + a_3^2 + a_2^2 - a_1^2) \quad (3-68)$$

erhält man für (3-65):

$$\kappa_1 S_3 + \kappa_2 C_3 = \kappa_3. \quad (3-69)$$

Und mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\sin A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \text{und} \quad \cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad (3-70.1-2)$$

können S_3 und C_3 mit

$$t_3 = \tan \frac{\theta_3}{2} \quad (3-71)$$

durch $S_3 = \frac{2t_3}{1+t_3^2}$ und $C_3 = \frac{1-t_3^2}{1+t_3^2}$ ersetzt werden, so

dass man die quadratische Gleichung

$$(\kappa_3 + \kappa_2) t_3^2 - 2 \kappa_1 t_3 + (\kappa_3 - \kappa_2) = 0 \quad (3-72)$$

erhält. Deren zwei Lösungen

$$t_{3;1,2} = \frac{\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}}{\kappa_3 + \kappa_2} \quad (3-73)$$

erlaubt über (3-71) eine Berechnung der Lösungen

$$\theta_{3;1,2} = 2 \arctan(t_{3;1,2}). \quad (3-74)$$

Dies sind die sogenannte rechts- und eine linksarmige Lösung den inversen Problems.

Aus (3-58) und (3-59) erhält man eine Beziehungen für θ_2 . Führt man hierzu die Abkürzungen

$$\mu_1 = a_2 + a_3 C_3 + d_4 S_3, \quad (3-75)$$

$$\mu_2 = a_3 S_3 - d_4 C_3, \quad (3-76)$$

$$\nu_1 = -a_3 S_3 + d_4 C_3 \quad \text{und} \quad (3-77)$$

$$\nu_2 = a_2 + a_3 C_3 + d_4 S_3 \quad (3-78)$$

ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem:

$$\mu_1 C_2 + \nu_1 S_2 = \gamma_1 \quad (3-79)$$

$$\mu_2 C_2 + \nu_2 S_2 = \gamma_2. \quad (3-80)$$

Mit der Cramerschen Regel erhält man die gesuchte Lösungen zu:

$$S_2 = \frac{\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1}{\nu_1 \mu_2 - \nu_2 \mu_1} \quad \text{und} \quad (3-81)$$

$$C_2 = \frac{\gamma_1 \nu_2 - \gamma_2 \nu_1}{\nu_2 \mu_1 - \nu_1 \mu_2}. \quad (3-82)$$

Damit lässt sich der Winkel θ_2 über

$$\theta_2 = \arctan 2(S_2, C_2) \quad (3-83)$$

berechnen. Für diesen Winkel existieren korrespondierend zu (3-74) ebenfalls zwei Lösungen.

• Orientierung des Handgelenks

Nachdem sämtliche Winkel der ersten drei Antriebsachsen bestimmt sind, lassen sich die Winkel der letzten drei Antriebsachsen ermitteln. Aus der bereits bekannten kinematischen Kette $\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{T}_3^6$ folgt für die WCP-Transformation:

$$\mathbf{T}_3^6 = (\mathbf{T}_0^3)^{-1} \mathbf{T}_0^6. \quad (3-84)$$

Damit ergibt sich nach (3-49) für \mathbf{T}_3^6 :

$$\mathbf{T}_3^6 = \begin{pmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_4 + d_6 C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-85)$$

Für die verbleibenden Gelenkwinkel ist nur noch die Orientierung des TCP bedeutsam. Aus diesem Grunde wird die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_3^6 = \begin{pmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{pmatrix} \quad (3-86)$$

herangezogen.

Diese Transformationsmatrix ist bereits über (3-48) zu

$$\mathbf{R}_0^3 = \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & S_1 & C_1 S_{23} \\ S_1 C_{23} & -C_1 & S_1 S_{23} \\ S_{23} & 0 & -C_{23} \end{pmatrix} \quad (3-87)$$

definiert. Da die Inverse dieser Matrix gleich ihrer Transponierten ist, erhält man:

$$(\mathbf{R}_0^3)^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & S_1 C_{23} & S_{23} \\ S_1 & -C_1 & 0 \\ C_1 S_{23} & S_1 S_{23} & -C_{23} \end{pmatrix}. \quad (3-88)$$

Mit

$$\mathbf{R}_3^6 = (\mathbf{R}_0^3)^{-1} \mathbf{R}_0^6 \quad (3-89)$$

gewinnt man die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & S_1 C_{23} & S_{23} \\ S_1 & -C_1 & 0 \\ C_1 S_{23} & S_1 S_{23} & -C_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \quad (3-90)$$

und

$$\begin{pmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}. \quad (3-91)$$

Hieraus lässt sich der Winkel θ_5 über das Matrixelement 33 berechnen. Mit

$$C_5 = r_{33} \quad (3-92)$$

ergibt sich

$$\theta_{5,1,2} = \pm \arccos(r_{33}) . \quad (3-93)$$

Für θ_5 existieren somit zwei Lösungen.

Aus den Matrixelementen 13 und 23 erhält man die Relationen

$$C_4 = \frac{r_{13}}{S_5} \quad \text{und} \quad (3-94)$$

$$S_4 = \frac{r_{23}}{S_5} \quad (3-95)$$

Damit gilt dann weiter:

$$\theta_4 = \arctan 2 \left(\frac{r_{23}}{S_5}, \frac{r_{13}}{S_5} \right). \quad (3-96)$$

Analog lässt sich auch θ_6 zu

$$\theta_6 = \arctan 2 \left(\frac{r_{32}}{S_5}, -\frac{r_{31}}{S_5} \right) \quad (3-97)$$

berechnen. Für diese Winkel existieren korrespondierend zu (3-93) ebenfalls zwei Lösungen.

Damit sind sämtliche Gelenkwinkel bestimmt. Insgesamt existieren somit vier verschiedene Lösungen. Vor allem der dritten Achse kommt eine besondere Bedeutung zu, wenn es darum geht, Hindernisse zu umfahren.

Die nominellen Werte der DH-Transformation für das inverse Modell unterscheiden sich von denen der Vorwärtstransformation. Die entsprechenden Werte können der Tab. 3-5 entnommen werden (siehe auch Abb. 3-5 u. 3-6).

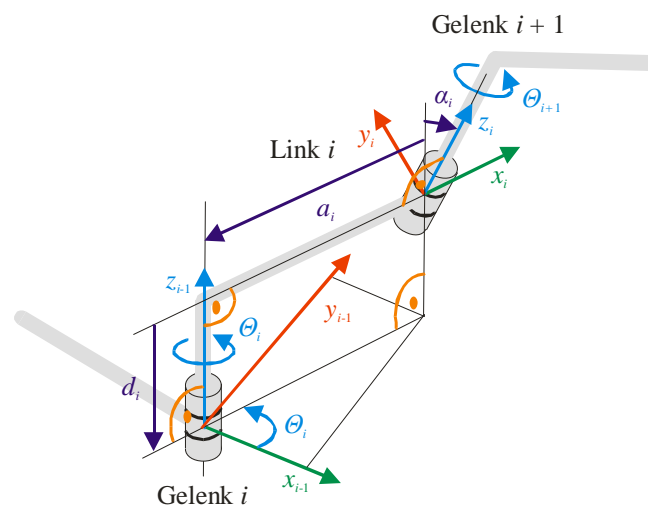


Abb. 3-6: DH-Parameter eines Gelenküberganges

i	θ_i	a / mm	d / mm	$\alpha / ^\circ$	${}^7\theta_o / ^\circ$
1	θ_1	312	0	90	0
2	θ_2	1075	0	0	-90
3	θ_3	225	0	90	0
4	θ_4	0	1280	-90	0
5	θ_5	0	0	90	0
6	θ_6	0	215	0	0

Tab. 3-5: DH-Parameter der Fanuc-Kinematik

Bemerkungen: Die Lage des Steuerungskoodinatsystems wird von vielen Roboterherstellern in die x/y-Ebene des Montageflansches in Abb. 3-5 gelegt. Dies ist im Hinblick auf die Kalibration der Robotermodelle nicht zweckmäßig, da hierdurch eine Linearkombination (Rangdefekt) des d -Parameters mit einem Translationsparameter zum externen Posemesssystem entsteht.

⁷ Diese Werte ergeben sich aus der vom Hersteller willkürlich definierten Nulllagenstellung der Maschine.

3.5 Jacobi-Matrizen und kinematische Eigenschaften

Die Jacobi-Matrizen der Systemmodelle spielen eine zentrale Rolle in der Systemtheorie. Sie verknüpfen verschiedene Eigenschaften der Ein- und Ausgangssignale und charakterisieren das Fehlerfortpflanzungsverhalten erster Ordnung [201]. Zum Ende dieses Kapitels wird in Form einer Tabelle ein kompakter Überblick gegeben, um rückblickend die Bedeutung der Jacobi-Matrizen als Ganzes zu illustrieren.

3.5.1 Lokales Poseverhalten

Ausgehend von dem kinematischen Modell (3-8) und (3-33) mit einer Zerlegung nach Parametern \mathbf{p} und Eingangsgrößen \mathbf{x}

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (3-98)$$

erhält man über das totale Differenzial

$$d\mathbf{y} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_i}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) dp_i + \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) dx_i \quad (3-99)$$

bzw. mit den Jacobi-Matrizen kompakt

$$d\mathbf{y} = \mathbf{J}_p(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{p} + \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} . \quad (3-100)$$

Im Allgemeinen verschwinden die Parameteränderungen, so dass man die in der Robotik gebräuchliche Form

$$d\mathbf{y} = \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3-101)$$

bzw.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{y} , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-102)$$

erhält.

3.5.2 Geschwindigkeitsverhalten

Aus dem totalen Differenzial (3-99) erhält man die Relation

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_i}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{dp_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} \quad (3-103)$$

bzw. mit den Jacobi-Matrizen kompakt

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} . \quad (3-104)$$

Infolgedessen hängen die Posegeschwindigkeiten über die Jacobi-Matrizen mit den Parameter- und Achsgeschwindigkeiten zusammen. Im Allgemeinen verschwinden die Parametergeschwindigkeiten, so dass man die in der Robotik gebräuchliche Form

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \quad (3-105)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}}, \quad \text{mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-106)$$

erhält.

3.5.3 Beschleunigungsverhalten

Das Beschleunigungsverhalten erhält man nach Differenziation von (3-103) unter Anwendung der Summen- und Produktregel zu:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = & \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{dp_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{d^2 p_i}{dt^2} \\ & + \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \frac{d^2 x_i}{dt^2} \end{aligned} \quad (3-107)$$

Mit den Jacobi-Matrizen erhält man in kompakter Form die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{J}}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{J}_p \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}}, \quad \text{mit } \mathbf{J}_p \equiv \mathbf{J}_p(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{J}_x \equiv \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (3-108)$$

bzw. in der Robotik bei verschwindenden Ableitungen der Parameter die gebräuchliche Form der Gleichung zu:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-109)$$

bzw. aus (3-106) zu:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}_x^{-1} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}}, \quad \text{mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \text{ und } \det \dot{\mathbf{J}}_x \neq 0. \quad (3-110)$$

3.5.4 Ruck- und Pulsverhalten

In physikalischen Systemen, die durch Differenzialgleichungen n -ter Ordnung beschrieben werden, sollten Zustandsänderungen $(n+1)$ -fach stetig differenzierbar sein, damit keine Sprung- und Dirac-Funktionen⁸ auftreten, die physikalisch letztlich nicht realisierbar sind. Man nennt solche Zustandsänderungen ruck- und stoßfrei. Diese Bewegungen zeichnen sich zudem potenziell sowohl durch geringere Soll-Istfehler als auch einen materialschonenden, vibrationsarmen Betrieb aus.

In realen mechatronischen Systemen sind typischerweise Differenziale 3-ter Ordnung zu betrachten, da elektrische Spannungssprünge im Allgemeinen zulässig und näherungsweise realisierbar sind. Nach Anwendung der Produktregel erhält man aus (3-108) das Ruck- und Pulsverhalten zu:

⁸ Sprung- oder Pulsfunktionen bedingen Spektren der Art $\frac{1}{j2\pi f} + \pi \delta(2\pi f)$ oder $\text{si}(\pi f) = \sin(\pi f) / \pi f$. Die

Dirac-Funktion hat als Spektrum eine konstante 1. Bei endlicher Bandbreite können diese Funktionen nicht existieren.

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{J}}_p \dot{\mathbf{p}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_p \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{J}_p \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-111)$$

Die in der Robotik bei verschwindenden Ableitungen der Parameter gebräuchliche Form ergibt sich dann zu:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-112)$$

bzw. aus (3-110) zu:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{J}}_x^{-1} \dot{\mathbf{y}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}}, \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0, \det \dot{\mathbf{J}}_x \neq 0 \text{ und } \det \ddot{\mathbf{J}}_x \neq 0. \quad (3-113)$$

3.5.5 Kraft- und Momentenverhalten

Unter der Annahme einer verlustlosen Bewegung einer masselosen kinematischen Struktur lässt sich aufgrund des Energieerhaltungssatzes eine Relation zwischen den verallgemeinerten Kräften im $(G-1)$ -ten Koordinatensystem und den Antriebskräften herleiten.

Ausgehend von einer infinitesimalen Bewegung der Antriebs- und $(G-1)$ -ten-Koordinaten $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{y}$ erhält wegen der Äquivalenz der Energien

$$\mathbf{F}^t d\mathbf{y} = \mathbf{T}^t d\mathbf{x} \quad (3-114)$$

Hierbei repräsentiert \mathbf{F} den verallgemeinerten Kraftvektor im $(G-1)$ -ten Koordinatensystem und \mathbf{T} den der Antriebskoordinaten. Da die infinitesimale Bewegung über die Jacobi-Matrix

$$d\mathbf{y} = \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3-115)$$

zusammenhängt, erhält man mit (3-114) weiter

$$\mathbf{F}^t \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{T}^t d\mathbf{x}, \quad (3-116)$$

so dass die Relation

$$\mathbf{T}^t = \mathbf{F}^t \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (3-117)$$

gilt. Mit $\mathbf{A} \mathbf{B}^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ lassen sich die verallgemeinerten Kräfte sodann über

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_x^t(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \mathbf{F} \quad (3-118)$$

beschreiben. Damit stehen bei einer verlustlosen Kinematik die verallgemeinerten Antriebskräfte über die transponierten Jacobi-Matrix der Antriebskoordinaten mit den verallgemeinerten Kräften im $(G-1)$ -ten Koordinatensystem in einem wohldefinierten Zusammenhang. Bei der Verwendung von elektrischen Antrieben kann man seinerseits die Antriebskräfte- bzw. -momente über die Motorströme und Motorkonstanten bestimmen, so dass eine Messung der verallgemeinerten Kräfte im $(G-1)$ -ten Koordinatensystem möglich wird. Treten nicht zu große Verluste auf, so lassen sich diese Gleichungen zur Abschätzung der Kräfte heranziehen.

Die Jacobi-Matrizen können analytisch über die Ansätze im Kap. 3.2 bestimmt werden, so dass eine Berechnung selbst unter zeitkritischen Bedingungen möglich ist.

3.5.6 Übersicht

Stationäres explizites parametrisches Steuerungsmodell:

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^{P+M} \exists \mathbf{y} \in W_y \subseteq \mathbb{R}^N \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \quad \text{mit } \mathbf{J}_x \equiv \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (3-119)$$

Positions-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs-, Stoss- und Ruck- sowie Kraftverhalten:

Kinematisch vorwärts

$$d\mathbf{y} = \mathbf{J}_x d\mathbf{x} \quad (3-120)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} \quad (3-121)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-122)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_x \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad (3-123)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_x^t(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \mathbf{F} \quad , \text{ verlust- und massefreie Kinematik} \quad (3-124)$$

Kinematisch invers

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J}_x^{-1} d\mathbf{y} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-125)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x^{-1} \dot{\mathbf{y}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-126)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}}_x^{-1} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \text{ und } \det \dot{\mathbf{J}}_x \neq 0 \quad (3-127)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{J}}_x^{-1} \dot{\mathbf{y}} + 2 \dot{\mathbf{J}}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0, \det \dot{\mathbf{J}}_x \neq 0 \text{ und } \det \ddot{\mathbf{J}}_x \neq 0 \quad (3-128)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_x^t(\mathbf{p}, \mathbf{x})^{-1} \mathbf{T} \quad , \text{ verlust- und massefreie Kinematik} \quad (3-129)$$

Kinematisch invers rekursive Alternative

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}_i \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-130)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-131)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-132)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x^{-1} \ddot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} - 2 \dot{\mathbf{J}}_x \ddot{\mathbf{x}} \quad , \text{ mit } \det \mathbf{J}_x \neq 0 \quad (3-133)$$

Technische Restriktionen:

$$|\dot{x}_\varepsilon(t)| \leq v_{\varepsilon \text{Max}} \quad \text{und} \quad |\ddot{x}_\varepsilon(t)| \leq a_{\varepsilon \text{Max}} \quad , \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, \dots, f\} \quad (3-134)$$

Unsicherheiten:

$$\text{Implizites Modell} \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \in D_f \times W_y \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{p}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad (3-135)$$

Systematische Fehler

$$\left| \Delta y_{\mathbf{x} \mathbf{p} m} \right|_{\text{Max}} = \left| \mathbf{J}_{\mathbf{y} m n}^{-1} \right| \quad \left| \mathbf{J}_{\mathbf{x} m n} \right| \quad \left| \Delta \mathbf{x}_m \right| + \left| \mathbf{J}_{\mathbf{p} m n} \right| \quad \left| \Delta \mathbf{p}_m \right| \quad (3-136)$$

Zufällige Fehler

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{Q}_{y\mathbf{x}} \mathbf{S}_x \mathbf{Q}_{y\mathbf{x}}^t \quad , \quad \text{mit } \mathbf{Q}_{y\mathbf{x}} = \mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}_x(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad , \quad (3-137)$$

$$\mathbf{S}_{x'} = \begin{bmatrix} E & x'_m - \mu_{x'_m} & x'_n - \mu_{x'_n} \end{bmatrix} \quad , \quad (3-137)$$

$$\mathbf{S}_Y = \begin{bmatrix} E & y_i - \mu_{y_i} & y_j - \mu_{y_j} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3-137)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^t \mathbf{p}^t \quad (3-138)$$

Tab. 3-6: Jacobi-Matrizen und kinematisches Systemverhalten

3.6 Kooperierende Kinematiken

Im Folgenden sollen die geometrischen Aspekte kooperierender Kinematiken beim Objekt-Transport betrachtet werden. Die offenen kinematischen Ketten werden dabei letztlich über das Objekt zu geschlossenen kinematischen Ketten (siehe Abb. 3-7). Hierdurch entstehen zusätzliche Zwangsbedingungen, die zu beachten sind. Eine fehlerhafte Positionierung führt unmittelbar je nach Systemsteifigkeit zum Auftreten von mehr oder minder großen Kräften und Momenten. Dies kann bei falscher Auslegung des Gesamtsystems sowohl die Objekte als auch die Greifer und Kinematiken gefährden. Die Bewegungsplanung muss dabei sämtliche Kinematiken berücksichtigen, wodurch im Hinblick auf die Antriebssingularitäten zusätzliche Bewegungseinschränkungen entstehen, die man jedoch mit den Ansätzen in Kap. 3.4.2 hinsichtlich der ausgezeichneten Singularitäten entschärfen kann.

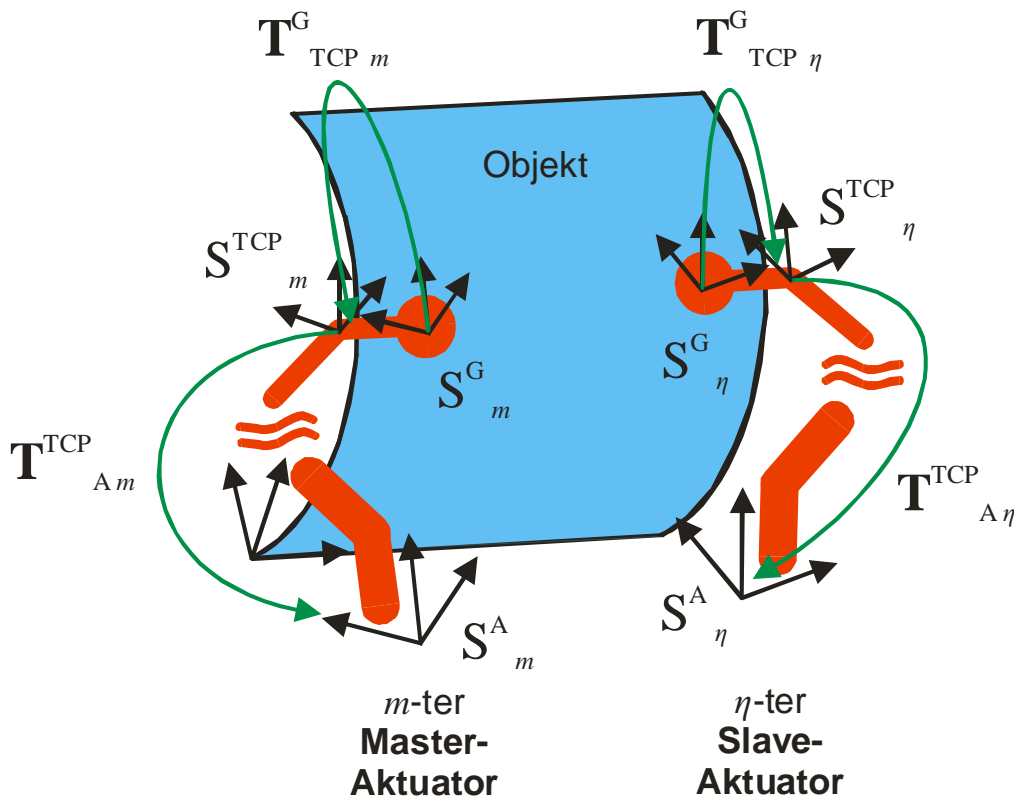


Abb. 3-7: Kooperierende Kinematiken

Für die Beschreibung derartiger System mit A Kinematiken ist es zweckmäßig, eine Kinematik $m \in \{1, \dots, A\}$ zum Master (Meister) zu erklären. Die anderen Kinematiken werden als Slaves (Sklaven) betrachtet. Über einen geschlossenen Umlauf erhält man die Transformation:

$$\mathbf{T}_{TCP\,m}^{TCP\,\eta} \mathbf{T}_{A\,\eta}^{TCP\,m} \mathbf{T}_{A\,\eta}^{A\,m} \mathbf{T}_{A\,m}^{TCP\,\eta} = \mathbf{E}, \quad \eta \in \{1, \dots, A\} \setminus m, \quad \text{mit } \mathbf{T}_{A\,\eta}^{A\,m} = \text{const} \wedge \mathbf{T}_{TCP\,m}^{TCP\,\eta} = \text{const}. \quad (3-139)$$

Diese Gleichung ist sowohl Grundlage für die messtechnische Bestimmung der Aktuatorrelationen $\mathbf{T}_{A\,\eta}^{A\,m}$ als auch Grundlage für die Berechnung der kooperierenden Bewegung. Die kooperierenden Bewegungen müssen den Zwangsbedingungen

$$\mathbf{T}_{A\,\eta}^{TCP} = \mathbf{T}_{A\,\eta}^{A\,m} \mathbf{T}_{A\,m}^{TCP} \mathbf{T}_{TCP\,m}^{TCP\,\eta}, \quad \eta \in \{1, \dots, A\} \setminus m, \quad \text{mit } \mathbf{T}_{A\,\eta}^{A\,m} = \text{const} \wedge \mathbf{T}_{TCP\,m}^{TCP\,\eta} = \text{const} \quad (3-140)$$

genügen.

Inhaltsverzeichnis

3	Kinematisches Modell.....	1
3.1	Allgemeine Ansätze	3
3.2	Schnelle und exakte Differenziation	9
3.3	Verallgemeinerte Taylorsche Reihe	12
3.4	Inverse kinematische Transformation	13
3.4.1	Singularitäten	14
3.4.2	Klassische Ansätze.....	14
3.4.3	Analytische Inverse für ausgezeichnete Kinematiken	16
3.5	Jacobi-Matrizen und kinematische Eigenschaften	23
3.5.1	Lokales Poseverhalten	23
3.5.2	Geschwindigkeitsverhalten	23
3.5.3	Beschleunigungsverhalten	24
3.5.4	Ruck- und Pulsverhalten	24
3.5.5	Kraft- und Momentenverhalten.....	25
3.5.6	Übersicht	26
3.6	Kooperierende Kinematiken	27