Álgebra Lineal
Ma1010

Transformaciones Lineales

Departamento de Matemáticas

ITESM

Introducción

En esta lectura se presentan las funciones entre espacios vectoriales que *preservan* las cualidades de los espacios vectoriales.

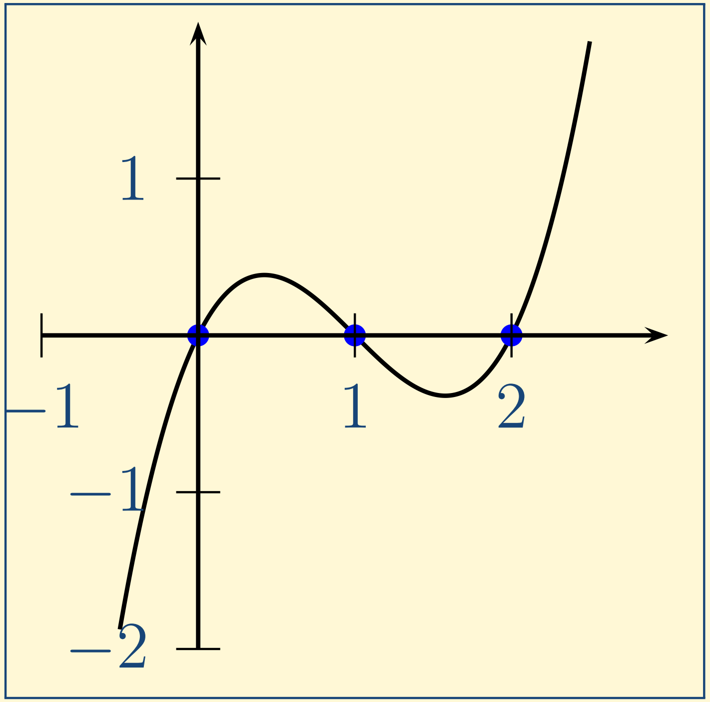
Introducción

En esta lectura se presentan las funciones entre espacios vectoriales que *preservan* las cualidades de los espacios vectoriales. Es decir, de funciones que preservan la suma y la multiplicación por escalares.

En los cursos básicos relativos a ecuaciones vimos que la solución a la ecuación

$$f(x) = 0$$

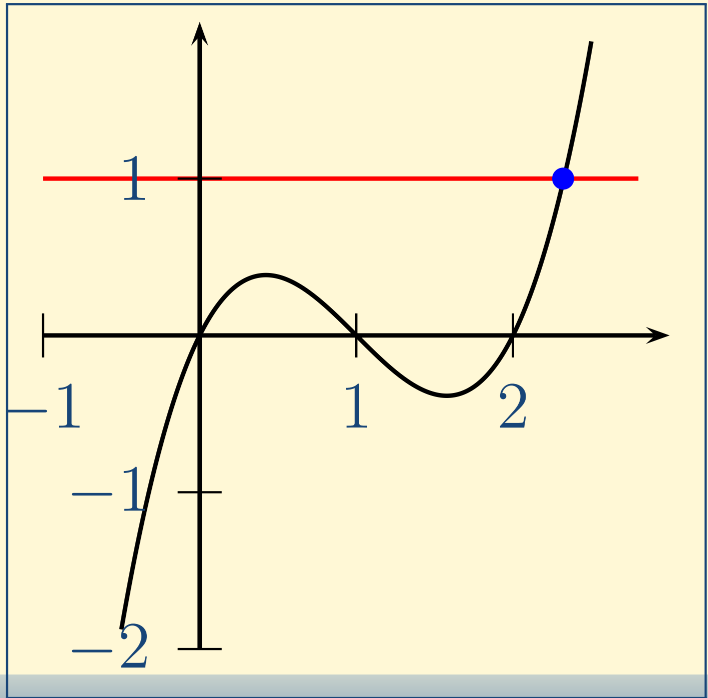
podría entenderse como los puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ corta el eje de las x's:



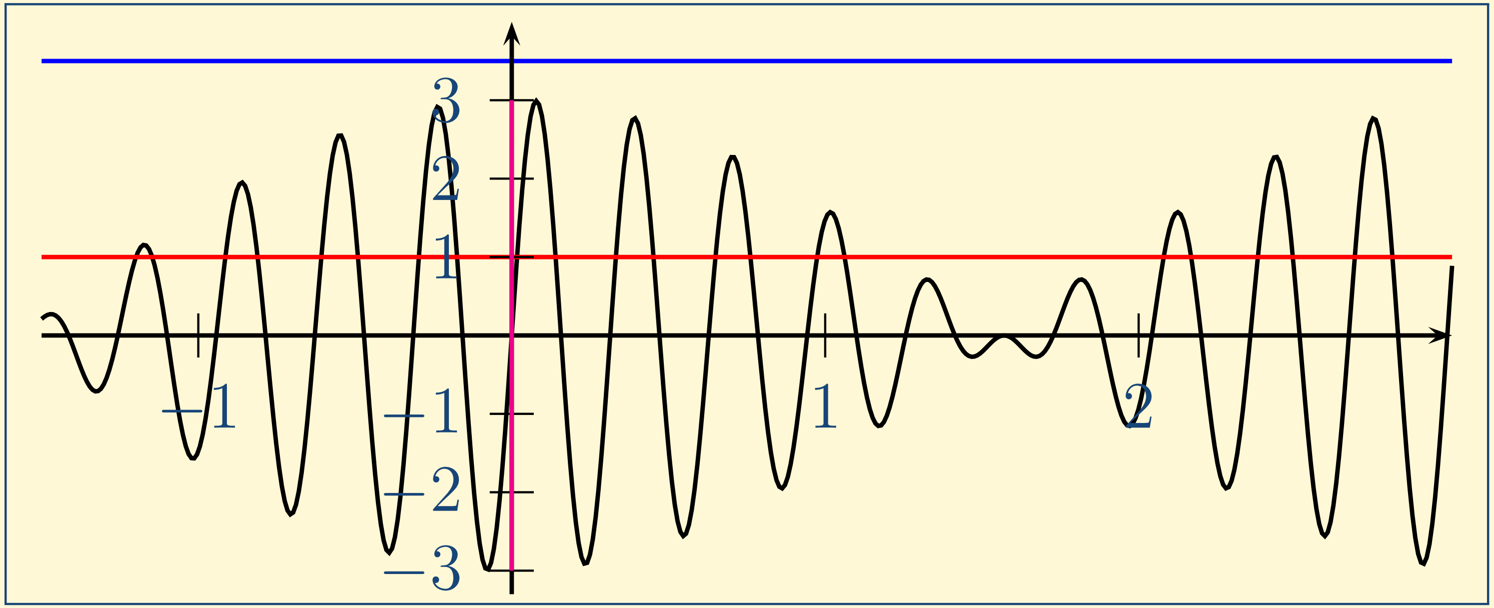
esta forma de ver a una ecuación permite entonces resolver ecuaciones de la forma:

$$f(x) = a$$

en este caso lo que se busca son los valores de x de aquellos puntos donde la gráfica de la función $f(x)$ corta la línea horizontal $y = a$:



Esta idea de corte de la gráfica de $f(x)$ con la recta $y = a$ da pie a métodos gráficos de solución de ecuaciones y también permite obtener conclusiones cualitativas a ciertas ecuaciones. Por ejemplo, se deduce fácilmente que $3\,\text{sen}(20\,x)\cos(x) = 1$ tiene infinitas soluciones, mientras que $3\,\text{sen}(20\,x)\cos(x) = 3.5$ no tiene solución:



En el caso anterior, $3\,\text{sen}(20\,x)\cos(x) = 1$ tiene solución debido a que 1 está en el rango de la función; mientras que $3\,\text{sen}(20\,x)\cos(x) = 3.5$ no tiene solución porque 3.5 no lo está. El rango de la función está marcado en el eje y como un segmento de línea magenta. En general, el siguiente resultado se tiene:

Teorema

La ecuación

$$f(x) = a$$

tiene solución si y sólo si a está en el *rango* de $f(x)$.

Nosotros usaremos el concepto de la función para darle un tratamiento a los sistemas de ecuaciones lineales. La restricción que haremos será sobre el tipo de funciones: sólo estaremos interesados en funciones que preserven las operaciones en el espacio vectorial. Este tipo de funciones serán llamadas funciones lineales. Primeramente las definiremos, veremos algunas propiedades generales y después veremos cómo se aplican estos resultados a sistemas de ecuaciones.

Transformación Lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales posiblemente iguales. Una transformación lineal o mapeo lineal de V a W es una función $T : V \to W$

Transformación Lineal

Sean V y W dos espacios vectoriales posiblemente iguales. Una transformación lineal o mapeo lineal de V a W es una función $T : V \rightarrow W$ tal que para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de V y cualquier escalar c:

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(c\,\mathbf{u}) = c\,T(\mathbf{u})$

Ejemplo

Demuestre que la tranformación $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definida por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3\,y \\ x + 2\,y \end{bmatrix}$$

es lineal.

Ejemplo

Demuestre que la tranformación $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3\,y \\ x + 2\,y \end{bmatrix}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Entonces

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \;=\; T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + 3\,(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2\,(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + 3\,(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2\,(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2\,y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 3\,y_2 \\ x_2 + 2\,y_2 \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1+x_2)+3\,(y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)+2\,(y_1+y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1+3\,y_1 \\ x_1+2\,y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+3\,y_2 \\ x_2+2\,y_2 \end{bmatrix} \\
&= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + 3\,(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2\,(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2\,y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 3\,y_2 \\ x_2 + 2\,y_2 \end{bmatrix} \\
&= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$T(c\,\mathbf{u}) \quad =$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$T(c\,\mathbf{u}) = T\begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{aligned} T(c\,\mathbf{u}) &= T\begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\,x_1 + 3\,c\,y_1 \\ c\,x_1 + 2\,c\,y_1 \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{aligned} T(c\,\mathbf{u}) &= T\begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\,x_1 + 3\,c\,y_1 \\ c\,x_1 + 2\,c\,y_1 \end{bmatrix} \\ &= c\begin{bmatrix} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$
\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T\begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\,x_1 + 3\,c\,y_1 \\ c\,x_1 + 2\,c\,y_1 \end{bmatrix} \\
&= c\begin{bmatrix} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix} \\
&= c\,T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$
\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T\begin{bmatrix} c\,x_1 \\ c\,y_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\,x_1 + 3\,c\,y_1 \\ c\,x_1 + 2\,c\,y_1 \end{bmatrix} \\
&= c\begin{bmatrix} x_1 + 3\,y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix} \\
&= c\,T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\
&= c\,T(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \\ T(c\,\mathbf{u}) &= c\,T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \\ T(c\,\mathbf{u}) &= c\,T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

T es lineal ■

Ejemplo

Demuestre que la transformación $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ es lineal:

$$T((x, y, z)') = (x + z, y - z)'$$

Ejemplo

Demuestre que la transformación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ es lineal:

$$T((x, y, z)') = (x + z, y - z)'$$

Solución

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)'$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)'$. Entonces

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \quad =$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)') \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)') \\
&= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2))' \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)') \\
&= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2))' \\
&= (x_1+z_1, y_1-z_1)' + (x_2+z_2, y_2-z_2)' \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)') \\
&= ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (y_1+y_2)-(z_1+z_2))' \\
&= (x_1+z_1, y_1-z_1)' + (x_2+z_2, y_2-z_2)' \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$T(c\,\mathbf{u}) \;=$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{aligned} T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\ &= \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$
\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\
&= (c\,x_1 + c\,z_1, c\,y_1 - c\,z_1)' \\
&=
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$\begin{aligned} T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\ &= (c\,x_1 + c\,z_1, c\,y_1 - c\,z_1)' \\ &= c\,(x_1 + z_1, y_1 - z_1)' \\ &= \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$
\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\
&= (c\,x_1 + c\,z_1, c\,y_1 - c\,z_1)' \\
&= c\,(x_1 + z_1, y_1 - z_1)' \\
&= c\,T((x_1, y_1, z_1)') \\
&=
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$
\begin{aligned}
T(c\,\mathbf{u}) &= T((c\,x_1, c\,y_1, c\,z_1)') \\
&= (c\,x_1 + c\,z_1, c\,y_1 - c\,z_1)' \\
&= c\,(x_1 + z_1, y_1 - z_1)' \\
&= c\,T((x_1, y_1, z_1)') \\
&= c\,T(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \\ T(c\,\mathbf{u}) &= c\,T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

T es lineal ■

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$T(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad =$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$T(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \quad = \quad \mathbf{A}\,(\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \;=\; \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{B}) + \mathbf{T}(\mathbf{C})$$

$$T(c\,\mathbf{B}) =$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{B}) + \mathbf{T}(\mathbf{C}) \\ T(c\,\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,(c\,\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \to \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{B}) + \mathbf{T}(\mathbf{C}) \\ T(c\,\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,(c\,\mathbf{B}) = c\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$. Demuestre que la transformación $T : \mathbf{M}_{n\times k} \rightarrow \mathbf{M}_{m\times k}$ definida como

$$T(\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$$

es lineal.

Solución

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ dos matrices $n \times k$ cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{T}(\mathbf{B}) + \mathbf{T}(\mathbf{C}) \\ T(c\,\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,(c\,\mathbf{B}) = c\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = c\,T(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= T(\mathbf{B})+T(\mathbf{C}) \\ T(c\,\mathbf{B}) &= c\,T(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

T es lineal ■

Ejemplo

¿Es lineal la transformación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Ejemplo

¿Es lineal la transformación $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Solución

No,

Ejemplo

¿Es lineal la transformación $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Solución

No, la parte 1 de la definición no se cumple porque

$$f(x + y) = (x + y) + 1$$

Ejemplo

¿Es lineal la transformación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Solución

No, la parte 1 de la definición no se cumple porque

$$f(x + y) = (x + y) + 1$$

y

$$f(x) + f(y) = x + 1 + y + 1 = x + y + 2$$

Ejemplo

¿Es lineal la transformación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x + 1$?

Solución

No, la parte 1 de la definición no se cumple porque

$$f(x+y) = (x+y) + 1$$

y

$$f(x) + f(y) = x + 1 + y + 1 = x + y + 2$$

no son iguales ■

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$D(p(x) + q(x)) \quad =$$

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$D(p(x) + q(x)) \quad = \quad \tfrac{d}{dx}\,(p(x) + q(x))$$

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} D(p(x)+q(x)) &= \tfrac{d}{dx}(p(x)+q(x)) = D(p(x)) + D(q(x)) \\ D(c\,p(x)) &= \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} D(p(x)+q(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(p(x)+q(x)) = D(p(x)) + D(q(x)) \\ D(c\,p(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(c\,p(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} D(p(x)+q(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(p(x)+q(x)) = D(p(x)) + D(q(x)) \\ D(c\,p(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(c\,p(x)) = c\,D(p(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ definida como

$$D(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

Entonces D es una transformación lineal.

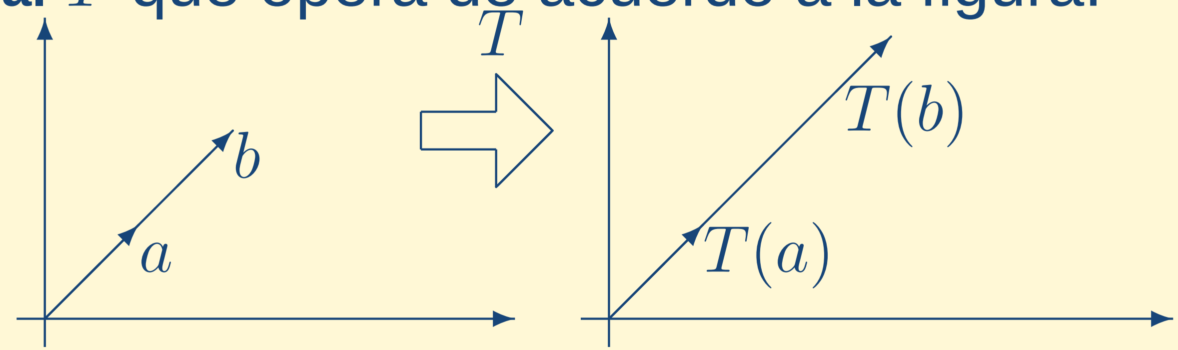
Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c un escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} D(p(x)+q(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(p(x)+q(x)) = D(p(x)) + D(q(x)) \\ D(c\,p(x)) &= \tfrac{d}{dx}\,(c\,p(x)) = c\,D(p(x)) \,\blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo

Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



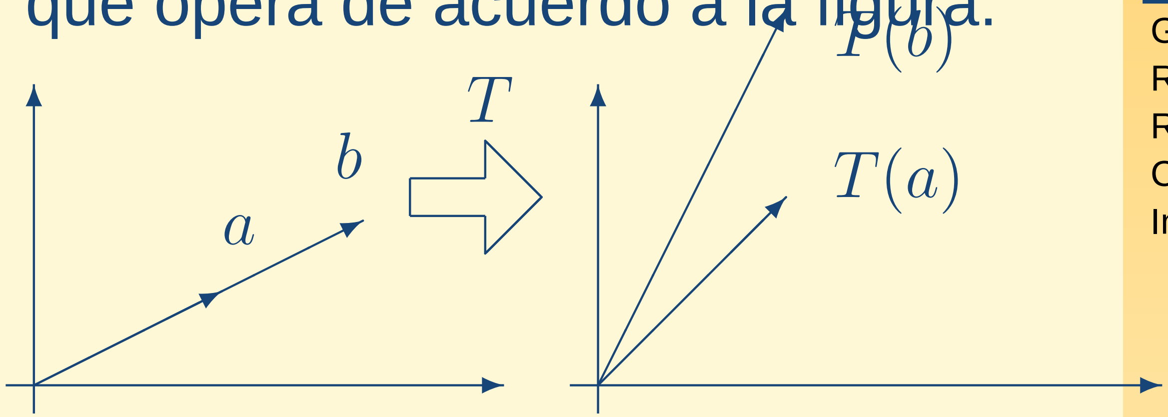
- $\boxed{\text{A}}$ La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.
- $\boxed{\text{B}}$ No es posible que exista una función lineal así: la proporción entre a y b y entre $T(a)$ y $T(b)$ debe ser la misma.
- $\boxed{\text{C}}$ Sí es posible que exista una función lineal así.
- $\boxed{\text{D}}$ No es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ no deben ser colineales.

Solución

Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $b = 2a$, sin embargo en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(b) = 3\,T(a)$. Si T fuera lineal de $b = 2\,a$ se obtendría $T(b) = T(2\,a) = 2\,T(a)$, lo cual no se cumple, por tanto la respuesta correcta es **B** $\blacksquare$

Ejemplo

Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



A No es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ deben ser colineales.

B Sí es posible que exista una función lineal así: $T(a)$ y $T(b)$ pueden no ser colineales.

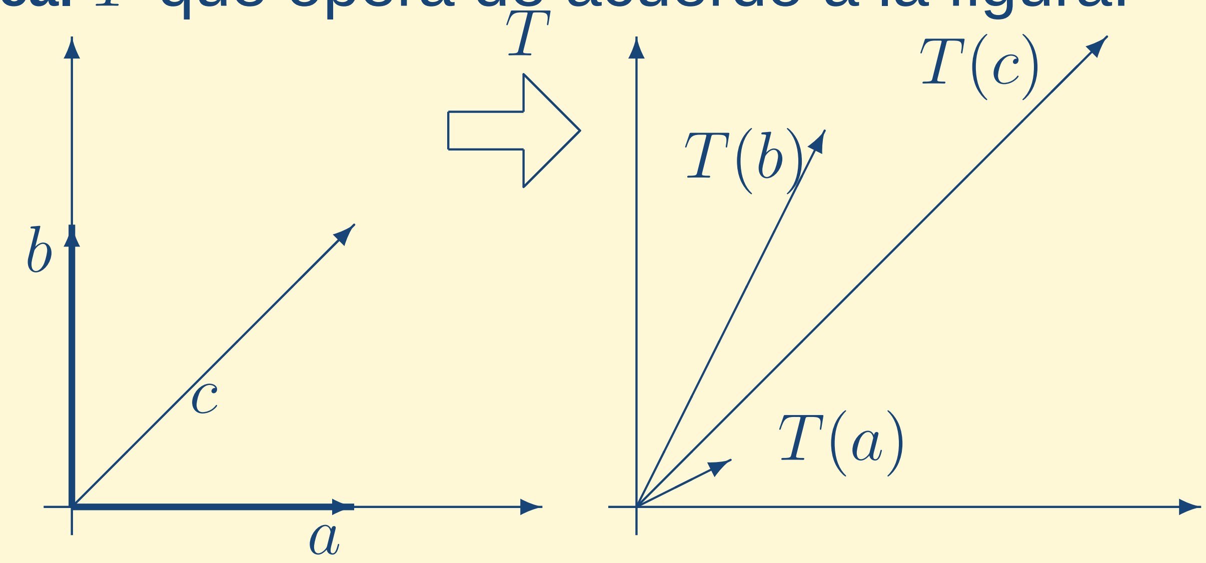
C La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

Solución

Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $b = 2a$. Si T fuera lineal de $b = 2\,a$ se obtendría $T(b) = T(2\,a) = 2\,T(a)$, es decir $T(b)$ y $T(a)$ deberían tener la misma dirección. Es decir, $T(b)$ y $T(a)$ deberían ser colineales. Lo cual no se cumple en la imagen (figura derecha); por tanto, la respuesta correcta es **A** ■

Ejemplo

Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



A **Sí** es posible que exista una función lineal así.

B **No** es posible que exista una función lineal así.

C La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

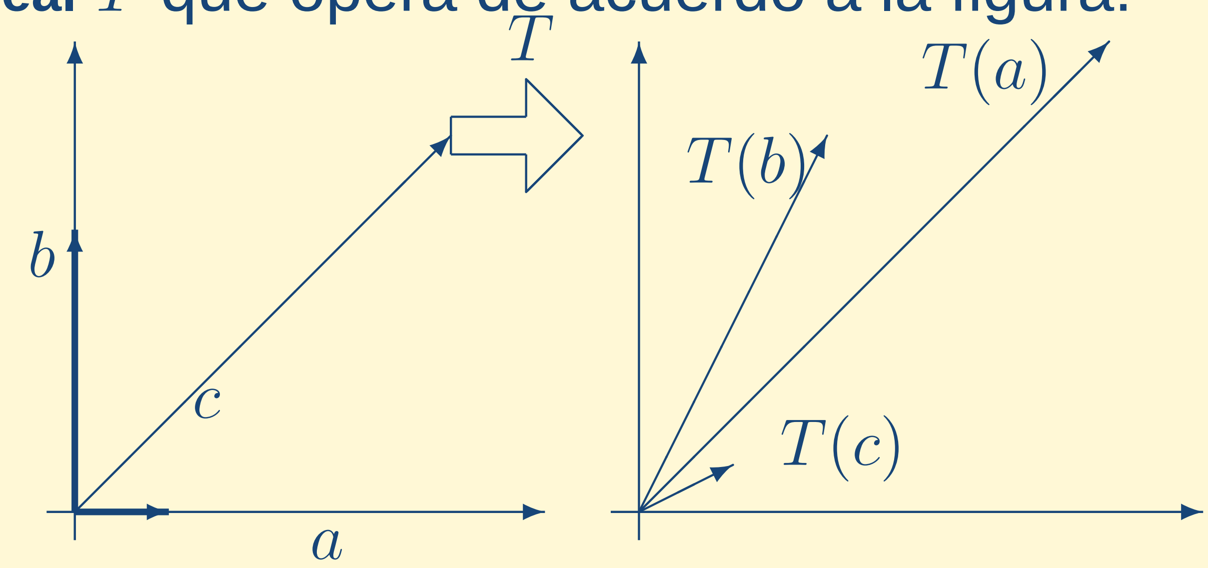
Solución

Del dominio (figura a la izquierda) se observa que $c = a + b$, sin embargo, en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(c) \neq T(a) + T(b)$: Pues $T(c)$ no corresponde a la diagonal del paralelogramo construido con lados en $T(a)$ y $T(b)$

■

Ejemplo

Indique la opción que mejor describe la posible función **lineal** T que opera de acuerdo a la figura:



A **Sí** es posible que exista una función lineal así.

B **No** es posible que exista una función lineal así.

C La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no T lineal que realice eso.

Solución

Del dominio (figura a la izquierda) se observa que c está entre a y b. Sin embargo, en la imagen (figura a la derecha) se observa que $T(c)$ no está entre $T(a)$ y $T(b)$: T no puede ser lineal. (Recuerde que si c está entre a y b, entoces los valores de d_1 y de d_2 para que $c = d_1\, a + d_2 b$ deben ser positivos) ■

Geometría de las transformaciones lineales

De los ejemplos anteriores podemos concluir que:
Una transformación lineal preserva

- colinealidad:

$$\mathbf{b} = c\,\mathbf{a} \to T(\mathbf{b}) = c\,T(\mathbf{a})$$

- proporcionalidad:

$$\mathbf{b} = c\,\mathbf{a} \to T(\mathbf{b}) = c\,T(\mathbf{a})$$

- la relación entre:

$$\mathbf{d} = c_1\,\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \to T(\mathbf{d}) = c_1\,T(\mathbf{a}) + c_2\,T(\mathbf{b})$$

Linealidad en una condición

El siguiente resultado formula las dos condiciones para ser lineal en sólo una.

Linealidad en una condición

El siguiente resultado formula las dos condiciones para ser lineal en sólo una.

Teorema

$T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si y sólo si para todos los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 \in V$, y todos los escalares c_1 y c_2, se cumple

$$T(c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2) = c_1\,T(\mathbf{v}_1) + c_2\,T(\mathbf{v}_2)$$

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\, dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \rightarrow \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\, dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$I(c_1\, p(x) + c_2\, q(x)) \quad =$$

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\,dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$\begin{aligned} I(c_1\,p(x) + c_2\,q(x)) &= \int_a^b (c_1\,p(x) + c_2\,q(x))\,dx \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \rightarrow \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\, dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$\begin{aligned} I(c_1\, p(x) + c_2\, q(x)) &= \int_a^b (c_1\, p(x) + c_2\, q(x))\, dx \\ &= c_1\, \int_a^b p(x)\, dx + c_2\, \int_a^b q(x)\, dx \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\, dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$\begin{array}{rcl} I(c_1\, p(x) + c_2\, q(x)) & = & \int_a^b (c_1\, p(x) + c_2\, q(x))\, dx \\ & = & c_1\, \int_a^b p(x)\, dx + c_2\, \int_a^b q(x)\, dx \\ & = & c_1\, I(p(x)) + c_2\, I(q(x)) \end{array}$$

Ejemplo

Sean a y b números tales que $a < b$, y sea $I : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$ definida como

$$I(p(x)) = \int_a^b p(x)\,dx$$

Entonces I es una transformación lineal.

Solución

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en x cualquiera y c_1 y c_2 escalares cualquiera:

$$\begin{array}{rcl} I(c_1\,p(x) + c_2\,q(x)) & = & \int_a^b (c_1\,p(x) + c_2\,q(x))\,dx \\ & = & c_1\,\int_a^b p(x)\,dx + c_2\,\int_a^b q(x)\,dx \\ & = & c_1\,I(p(x)) + c_2\,I(q(x))\,\blacksquare \end{array}$$

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

a) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

a) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Es decir, el neutro se envia al neutro.

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

a) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Es decir, el neutro se envia al neutro.

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
Es decir, envia inversos aditivos en inversos aditivos.

Hechos que cumple una transormación lineal

Una transformación lineal debe cumplir las siguiente condiciones:

Teorema

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

a) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Es decir, el neutro se envia al neutro.

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
Es decir, envia inversos aditivos en inversos aditivos.

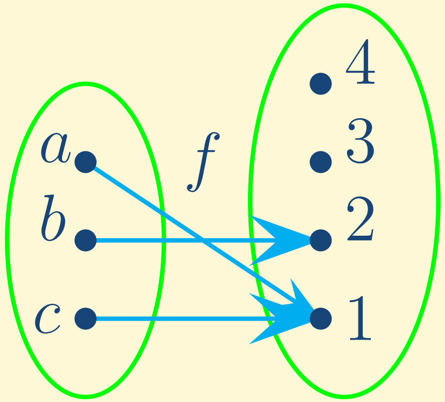
c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
Es decir, envia restas en restas.

Sea $F : X \to Y$ una función del conjunto X al conjunto Y. El rango de F es el conjunto de elementos de Y que son imagen de un valor en X:

$$\text{rango}(F) = \{y \in Y \,|\exists x \in X,\; F(x) = y\}$$

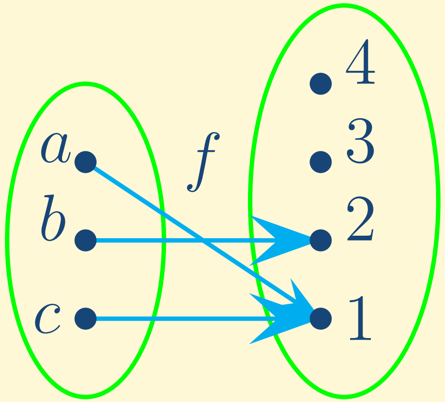
Son sinónimos rango o imagen de una función.

Considere la función:



- Dominio de $f =$ ______
- Codominio de $f =$ ______
- $f(a) =$ ____, $f(b) =$ ____, $f(\{a, b\}) =$ ____
- Rango de $f =$ ______
- Imagen inversa de $1 =$ ______
- Imagen inversa de $2 =$ ______
- Imagen inversa de $3 =$ ______
- Parejas que forman $f =$ ________________

Considere la función:



- Dominio de $f = \{a, b, c\}$
- Codominio de $f = \{1, 2, 3, 4\}$
- $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(\{a, b\}) = \{1, 2\}$
- Rango de $f = \{1, 2\}$
- Imagen inversa de $1 = \{a, c\}$
- Imagen inversa de $2 = \{b\}$
- Imagen inversa de $3 = \{\}$
- Parejas que forman $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$

Imágenes de espacios generados

El siguiente resultado afirma que la imagen de un espacio generado es precisamente el espacio generado por las imágenes individuales de los vectores del generador.

Imágenes de espacios generados

El siguiente resultado afirma que la imagen de un espacio generado es precisamente el espacio generado por las imágenes individuales de los vectores del generador.

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ el generador de V.

Imágenes de espacios generados

El siguiente resultado afirma que la imagen de un espacio generado es precisamente el espacio generado por las imágenes individuales de los vectores del generador.

Teorema

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ el generador de V. Entonces el conjunto $T(\mathcal{B}) = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ genera a la imagen de T. Y por lo tanto, el conjunto imagen de una transformación lineal es un subespacio lineal.

Ejemplo

Sea $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$F((x, y, z)') = (-2\,x - 4\,z, -x - 2\,z, 3\,x + y + 6\,z)'$$

Indique en qué se transforma

- La línea L_1: $x/2 = y/(-3) = z$
- El plano P_1: $x - 2\,y + 3\,z = 0$
- El plano P_2: $x - 2\,y + 2\,z = 0$

Solución

Al pasar por el origen, la línea $x/2 = y/(-3) = z$ corresponde al espacio generado por su vector de dirección que es $\mathbf{d} =< 2, -3, 1 >'$. Por el resultado anterior, la imagen de la línea será el espacio generado por

$$T(\mathbf{d}) = (-2(2)-4(1), -(2)-2(1), 3(2)+(-3)+6(1))' = (-8, -4, 9)'$$

El generado por un vector corresponde a una línea que pasa por el origen, por tanto, la imagen de la línea es la línea:

$$\frac{x}{-8} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{9}$$

El plano P_1: $x - 2\,y + 3\,z = 0$ corresponde al conjunto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y - 3\,z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, corresponde al espacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)'$ y $\mathbf{v}_2 = (-3, 0, 1)'$. Por tanto, la imagen del plano P_1 corresponderá al generado por $T(\mathbf{v}_1) = (-4, -2, 7)'$ y $T(\mathbf{v}_2) = (2, 1, -3)'$. Su vector normal será:

$$\mathbf{n} = T(\mathbf{v}_1) \times T(\mathbf{v}_2) = (-1, 2, 0)'$$

Por tanto el plano P_1 se transforma en el plano:

$$-1\,x + 2\,y + 0\,z = 0$$

El plano P_2: $x - 2\,y + 2\,z = 0$ corresponde al conjunto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,y - 2\,z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, corresponde al espacio generado por los vectores $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0)'$ y $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1)'$. Por tanto, la imagen del plano P_2 corresponderá al generado por $T(\mathbf{u}_1) = (-4, -2, 7)'$ y $T(\mathbf{u}_2) = (0, 0, 0)'$. En $\mathbf{R}^3$ el generado por tales vectores corresponde a el espacio generado sólo por $T(\mathbf{u}_1)$ que corresponde a la línea con vector de dirección $(-4, -2, 7)'$. Por tanto el plano P_2 se transforma en la línea:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$$

Ejemplo

Sea $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Calcule $T\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$T \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$T \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = T(-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$T \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = T(-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}) = -4\,T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\,T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} &= T(-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}) = -4\, T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\, T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} &= T(-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}) = -4\,T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\,T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ -42 \\ 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solución

Como

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos T en ambos lados de la ecuación, obtemos

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} &= T(-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}) = -4\,T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\,T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ -42 \\ 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La segunda igualdad permanece porque *T* es lineal.

Es fácil observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es fácil observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Es fácil observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}+(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Es fácil observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}+(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y)\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & - & 3y \\ 4x & - & y \\ -x & + & 2y \end{bmatrix}$$