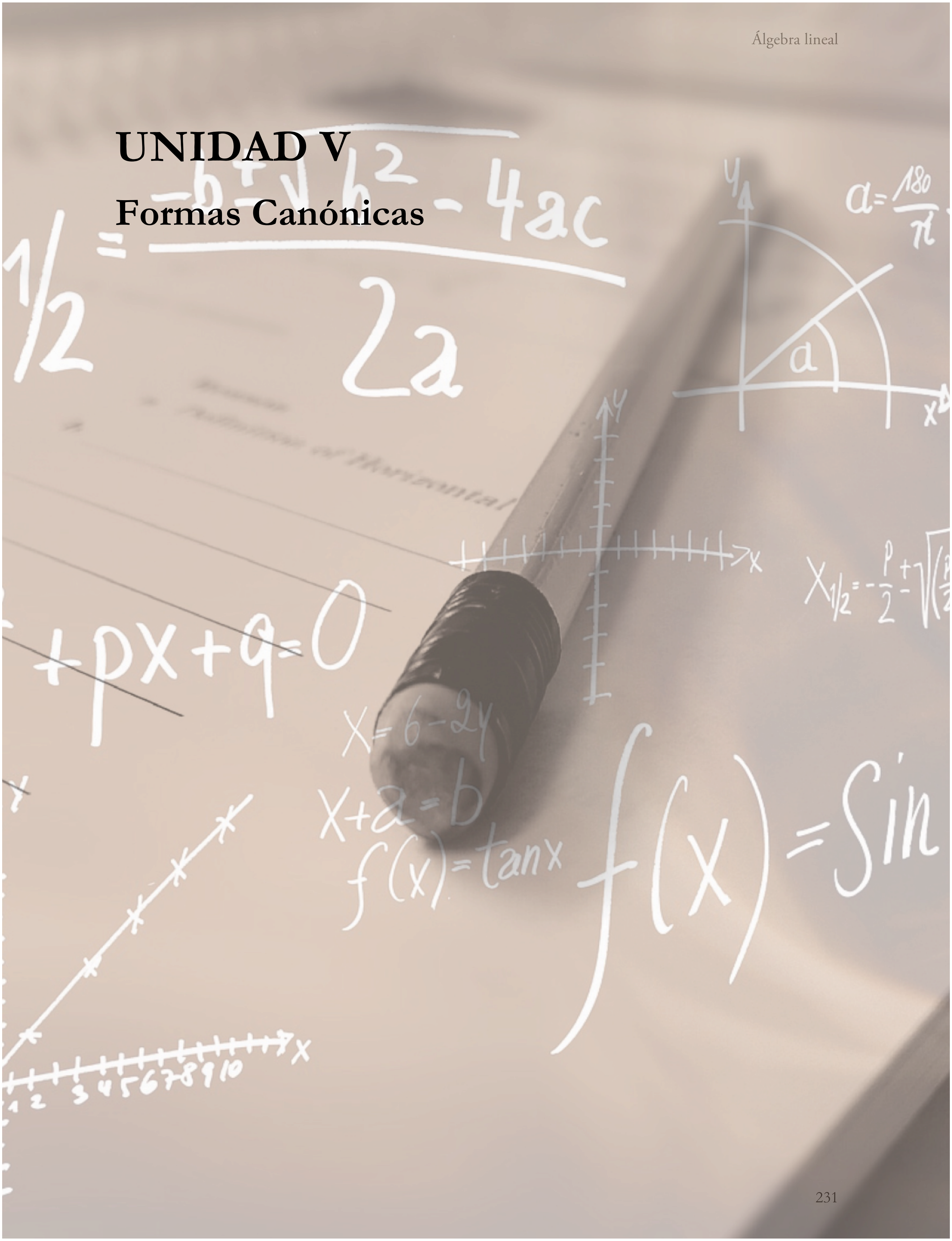
UNIDAD V

Formas Canónicas



Orientaciones para el estudio de la unidad V

En esta unidad se aborda el problema de la descomposición (factorización) de matrices usando su forma canónica de Jordan. Incluye como casos particulares la diagonalización y la diagonalización ortogonal de matrices simétricas.

Para el estudio de esta unidad se requiere el conocimiento y habilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, operaciones del algebra matricial, cálculo de determinante de una matriz, cálculo de raíces de polinomios, valores y vectores propios de una matriz, base y dimensión de espacios vectoriales, producto interno usual (euclídeo) y norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, y el Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt. Por lo cual es esencial el conocimiento de las unidades previas. No obstante, la parte práctica es algorítmica, se incluye una variedad de ejemplos resueltos con todo detalle de modo que sirvan de apoyo para entender los conceptos y propiedades incluidas en esta unidad.

Se recomienda la revisión detallada de los ejemplos. Y las unidades anteriores en aquellos contenidos en los que requiera reforzar el desarrollo de las actividades propuestas, así como la autoevaluación.

Competencias de la unidad V

- Calcula la forma canónica de Jordan para una matriz cuadrada.
- Determina si una matriz es diagonalizable.
- Usa los vectores propios de una matriz para obtener una matriz de paso.
- Aplica el teorema de Cayley-Hamilton para calcular la inversa de una matriz.
- Encuentra los vectores propios generalizados para matrices no diagonalizables.
- Factoriza una matriz usando su forma canónica de Jordan.
- Efectúa la descomposición ortogonal de matrices simétricas.

Esquema de contenidos de la unidad V

5.1 Matrices semejantes y diagonalización

Definición 5.1 Las matrices A y B, cuadradas de orden n, se dice que son **semejantes** si existe una matriz invertible C de orden n tal que

$$B = C^{-1}AC \tag{5.1}$$

La igualdad (5.1) es equivalente a $CB = AC$.

Ejemplo 5.1 Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisfacen la relación (5.1).

Solución

La inversa de C es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pues $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Por lo tanto las matrices A y B son semejantes.

Teorema 5.1 Sean A y B matrices cuadradas de orden n, si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios.

Demostración

Por hipótesis A y B son semejantes lo que implica que $B = C^{-1}AC$ para alguna matriz C invertible y se debe probar que $det(B - \lambda I) = det(A - \lambda I)$:

$$\begin{aligned} det(B - \lambda I) &= det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C) && \text{pues } \lambda I = C^{-1}(\lambda I)C \\ &= det(C^{-1}(A - \lambda I)C) && \text{factorizando} \\ &= det(C^{-1})det(A - \lambda I)det\,(C) && \text{propiedad del determinante} \\ &= det(A - \lambda I)det\,(C)det(C^{-1}) && \text{asociatividad} \\ &= det(A - \lambda I)det\,(CC^{-1}) && \text{propiedad del determinante} \end{aligned}$$

$$= det(A - \lambda I)\, det(I) \qquad\qquad CC^{-1} = I$$

$$= det(A - \lambda I) \qquad\qquad \text{pues} \quad det(I) = 1$$

Por lo tanto A y B tienen el mismo polinomio característico y en consecuencia los mismos valores propios.

Las matrices A y B del ejemplo 5.1 tienen el mismo polinomio característico,

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

Definición 5.2 Matriz diagonalizable

Una matriz cuadrada se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ya que existe la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ cuya inversa es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y se cumple que:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra que A es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

y por lo tanto A es diagonalizable.

Observaciones

1) Los valores propios de una matriz diagonal D son los elementos de su diagonal.

2) Si la matriz A es diagonalizable, es semejante a una matriz diagonal D.

3) Si A y D son semejantes, tienen los mismos valores propios.

4) De las observaciones anteriores se deduce que si una matriz cuadrada A es diagonalizable, es semejante a una matriz diagonal cuyas componentes de la diagonal son los valores propios de A.

Teorema 5.2 Una matriz A cuadrada de orden n es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En cuyo caso la matriz diagonal D semejante a A es de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde los λ_i con $i = 1, 2, \dots, n$ son los valores propios de A. Además, si la matriz $P = (P_1, P_2, \cdots, P_n)$ donde las columnas P_i son los vectores propios linealmente independientes de A asociados a los respectivos valores propios λ_i entonces $P^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ o en forma equivalente se obtiene una factorización la matriz A:

$$\mathrm{A} = \mathrm{PD}P^{-1}$$

Ejemplo 5.2 Obtener una matriz diagonal semejante a la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

En el ejemplo 4.4 de la unidad IV se encontraron los valores propios de B: $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, este último con multiplicidad algebraica 2.

Los vectores propios de B asociados al valor propio $\lambda_1 = 4$ son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y los vectores propios asociados a $\lambda_2 = -2$ son las combinaciones lineales no nulas de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estos tres vectores propios, los cuales son linealmente independientes, son las columnas de la matriz P señalada en el teorema 5.2:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto $P^{-1}BP$ se obtiene:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por lo cual se concluye que la matriz B es diagonalizable por ser semejante a una matriz diagonal.

Proceso de diagonalización para una matriz cuadrada

1) Calcular los valores propios de la matriz A cuadrada de orden n:

   i. Se halla el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

   ii. Se resuelve la ecuación característica $P(\lambda) = 0$.

   iii. Las raíces de $P(\lambda)$ son los valores propios de A.

2) Encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio:

   Los vectores propios de A asociados a cada valor propio λ se encuentran resolviendo el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$.

3) Comparar las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio, si las multiplicidades coinciden en cada valor propio, entonces la matriz A es diagonalizable, en caso contrario no es diagonalizable y termina el proceso.

4) Si A es diagonalizable se forma la matriz P con n vectores propios linealmente independiente y se efectúa el producto $P^{-1}AP$ cuyo resultado será una matriz diagonal D con los valores propios de A en su diagonal.

Nota

Si A es una matriz $n \times n$ y posee n valores propios distintos, entonces se garantiza que A es diagonalizable, en caso contrario procede lo indicado en el paso 3 del proceso anterior.

Ejemplo 5.3 Determinar si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

1) El polinomio característico: $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - (-2)5(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)[(-4-\lambda)(3-\lambda) + 10]$$

$$= (1-\lambda)\left[-2 + \lambda + \lambda^2\right] = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

2) La ecuación característica $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

3) Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ (repetido)

Como hay un valor propio con multiplicidad algebraica 2, no se sabe aun si A es diagonalizable, se debe buscar la multiplicidad geométrica de λ_2, para ello se determina la dimensión del espacio propio correspondiente o en su defecto una base de dicho espacio resolviendo el sistema lineal $(A - \lambda_2 I)x = 0$.

4) Vectores propios, para $\lambda_2 = 1$

$$(A - I)x = 0 \;\; \rightarrow \;\; \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema consta de dos ecuaciones $\begin{cases} -5x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Despejando x_1 de la primera ecuación se obtiene $x_1 = \frac{-2}{5}x_3$

Sustituyendo x_1 en la otra ecuación se obtiene $x_2 = 0$.

Las soluciones del sistema son los vectores de la forma $\begin{pmatrix} \frac{-2}{5}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, los cuales constituyen el espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 1$, este espacio tiene dimensión 1 ya que es generado por un solo vector, por lo cual la multiplicidad geométrica de dicho valor propio es 1, mientras que la multiplicidad algebraica es 2. Por lo tanto la matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo 5.4 Determinar si es diagonalizable la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo diagonalizarla.

Solución

1) Polinomio característico: $det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

2) Ecuación característica: $det(B - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

3) Valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$

Como B es de orden 2×2 y tiene 2 valores propios distintos, entonces B es diagonalizable y a continuación se completa el proceso para diagonalizarla.

4) Vectores propios de B:

- Para $\lambda_1 = 1$, $(B - I)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Como en la matriz una fila es múltiplo de la otra, el sistema se reduce a una sola ecuación $x_1 + x_2 = 0$ de donde $x_2 = -x_1$.

  Luego $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 1$ son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Para $\lambda_2 = 4$, $(B - 4I)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Como en la matriz una fila es múltiplo de la otra, el sistema se reduce a una sola ecuación $-x_1 + 2x_2 = 0$ despejando $x_1 = 2x_2$.

  Luego $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4$ son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) Se forma la matriz P cuyas columnas son dos vectores propios linealmente independientes $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Se calcula la inversa de P que en este caso es $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) Verificar que $P^{-1}BP = D$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5.2 Teorema de descomposición espectral para matrices simétricas

Teorema 5.3 Teorema espectral

Una matriz A, simétrica, de orden n y cuyas entradas son reales, satisface las siguientes propiedades:

1. A tiene n valores propios reales (incluyendo posiblemente algunos repetidos).
2. Si λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$ y multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$, entonces $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$
3. Los espacios propios de A son mutuamente ortogonales, es decir, dos vectores propios que corresponden a dos valores propios distintos son ortogonales.
4. Existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^t$.

Nota

Una matriz cuadrada P es ortogonal siempre que su transpuesta sea igual a su inversa, es decir $P^t = P^{-1}$

Demostración de la propiedad 3

Sean x y w dos vectores propios de una matriz simétrica A, asociados a los valores propios distintos λ_1 y λ_2 respectivamente. Es decir:

$$Ax = \lambda_1 x \quad \text{y} \quad Aw = \lambda_2 w \tag{5.2}$$

Se quiere probar que x y w son ortogonales, para lo cual debe probarse que $x \cdot w = 0$, donde $x \cdot w$ es el producto escalar (producto interno en $\mathbb{R}^n$) entre los vectores x y w, el cual puede ser definido así: $x \cdot w = x^t w$.

Partiendo de $\lambda_1(x \cdot w)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x \cdot w) &= (\lambda_1 x) \cdot w && \text{por propiedad del producto escalar} \\
&= Ax \cdot w && \text{por (5.2)} \\
&= (Ax)^t w && \text{por la definición del producto escalar en } \mathbb{R}^n \\
&= x^t A^t w && \text{por propiedad de la transpuesta} \\
&= x^t (Aw) && \text{por ser A simétrica y propiedad asociativa} \\
&= x^t (\lambda_2 w) && \text{por (5.2)} \\
&= \lambda_2 x^t w && \\
&= \lambda_2 (x \cdot w) && \text{por definición del producto escalar en } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1(x \cdot w) = \lambda_2(x \cdot w)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y de allí se concluye que $x \cdot w = 0$ por lo tanto x y w son ortogonales.

5.3 Diagonalización ortogonal

El teorema espectral garantiza que en el caso de las matrices simétricas (de entradas reales) los espacios propios forman una "descomposición" ortogonal de

$\mathbb{R}^n$ y es posible encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A. El mencionado teorema justifica la siguiente definición:

Definición 5.3 Matriz ortogonalmente diagonalizable

Una matriz $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ se dice que es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si A es diagonalizable mediante una matriz P ortogonal, es decir, si existen P ortogonal y D diagonal tales que $A = PDP^t$ o su equivalente $P^tAP = D$.

Teorema 5.4 Una matriz $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si A es simétrica.

Ejemplo 5.5 Verificar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es ortogonalmente diagonalizable.

Solución

La matriz A es simétrica y por el teorema 5.4 es diagonalizable ortogonalmente, a continuación se procede a obtener la matriz P:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda - 8 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 8) \end{aligned}$$

Como la matriz A es de orden 3 y posee tres valores propios distintos, se puede afirmar que ella es diagonalizable, falta verificar que es ortogonalmente diagonalizable.

Para cada valor propio se resuelve el sistema lineal $(A - \lambda I)x = 0$.

Para $\lambda_1 = 1$ se obtiene $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[f_3\to f_3-f_1]{f_2\to f_2-\frac{2}{3}f_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 3 & 0\\ 0 & \frac{-7}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

El sistema lineal equivalente es $\begin{cases}3x_1+2x_2+3x_3=0\\ \qquad\qquad \frac{-7}{3}x_2\ =0\end{cases}$ del cual resulta que $x_2=0$ y $x_1=-x_3$, por lo que los vectores propios de la matriz A asociados a $\lambda_1=1$ son los múltiplos no nulos del vector $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ y el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para el espacio propio correspondiente a λ_1.

Para $\lambda_2=-1$ se obtiene que los vectores propios son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ y el espacio propio es el generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Para $\lambda_3=8$ se obtiene que los vectores propios son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ y el espacio propio es el generado por $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Los vectores $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ son ortogonales entre sí, lo cual se verifica efectuando el producto interno que debe resultar igual a cero:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=(-1)1+0(-4)+1\cdot 1=0$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=(-1)2+0\cdot 1+1\cdot 2=0$$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=1\cdot 2+(-4)\cdot 1+1\cdot 2=0$$

Este resultado se puede extender al afirmar que en el caso de matrices simétricas, dos vectores propios cualesquiera que corresponden a valores propios distintos son ortogonales, tal como lo establece la propiedad 3 del teorema espectral.

El conjunto $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$, si estos vectores se normalizan se obtiene una base ortonormal, para ello se calcula la norma o longitud de cada vector y se multiplica cada vector por el inverso multiplicativo de su norma.

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2=}\,\sqrt{2}\,,\quad \left\|\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{18}\,,\quad \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = 3$$

Los vectores que forman la base ortonormal son:

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\qquad v=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{18}}\\\frac{-4}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{18}}\end{pmatrix},\qquad w=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Los vectores u,v,w además de formar una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ con vectores propios de A, también permiten formar la matriz ortogonal P que diagonaliza a la matriz A:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Esta matriz satisface la igualdad $P^tAP=D$, donde $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$, se deja al lector la verificación de este resultado.

Ejemplo 5.6 Diagonalizar ortogonalmente la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución

Se observa que B es simétrica y por lo tanto diagonalizable ortogonalmente.

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 8$ con multiplicidad algebraica 1.

Para $\lambda_1 = -1$, se obtienen los vectores propios asociados resolviendo el sistema lineal $(B + I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al reducir el sistema queda una sola ecuación $-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, de donde $x_2 = 2x_1 + 2x_3$, luego las soluciones del sistema son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios son las combinaciones lineales no nulas de los vectores $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 8$ se obtienen los vectores propios asociados resolviendo el sistema lineal $(B - 8I)x = 0$, de allí se obtiene que los vectores propios son los múltiplos no nulos del vector $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Puede verificarse que este vector u es ortogonal con v y con w, pero v y w no son ortogonales ya que $v \cdot w = 4 \neq 0$.

Se requiere obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con vectores propios. Con estos vectores se forma una matriz ortogonal para diagonalizar ortogonalmente a B, para ello es necesario aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con los vectores v y w, y normalizar al vector u.

- Normalizar v

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$v' = \frac{1}{\sqrt{5}} v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$ este es el primer vector normalizado (unitario).

- Ahora se busca un segundo vector w' normalizado que sea ortogonal a v'

$$w - (v' \cdot w)v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$ es ortogonal a v'

Ahora se normaliza dividiendo sus componentes entre su longitud

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Luego

$$w' = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad w' = \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$, w' es unitario y ortogonal v'

- Como u es ortogonal a v y w , también es ortogonal con v' y w', por lo cual solo se requiere normalizarlo para obtener un vector unitario:

$$u' = \frac{1}{\|u\|}u \quad \rightarrow \quad u' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad u' = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Los vectores v', w' y u' constituyen una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ con vectores propios de B, también permiten formar la matriz ortogonal P que diagonaliza ortogonalmente a la matriz B.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4\sqrt{5}}{15} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Se deja al participante la verificación de:

a) P es una matriz ortogonal, es decir $PP^t = I$.

b) $P^tBP = D$, donde D es una matriz diagonal que contiene a los valores propios de B en su diagonal.

5.4 Descomposición de matrices

Además de la descomposición de matrices diagonalizables $(A = PDP^{-1})$, incluyendo las matrices simétricas $(A = PDP^t)$, existen otras descomposiciones que no se estudiarán en este texto, entre ellas están las factorizaciones LU y

QR. Más adelante en esta unidad se incluye otra descomposición para las matrices no diagonalizables (formas canónicas de Jordan).

El siguiente teorema proporciona otra forma de descomposición para matrices simétricas que se deriva de la descomposición espectral.

Teorema 5.5 Si $A \in M_{n\times n}[\mathbb{R}]$ es simétrica, entonces la descomposición espectral de A se expresa en función de sus valores y vectores propios de la forma:

$$A = PDP^t = \lambda_1 v_1 (v_1)^t + \lambda_2 v_2 (v_2)^t + \cdots + \lambda_n v_n (v_n)^t$$

Donde:

- D es la matriz diagonal que contiene en su diagonal a los n valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, incluyendo los repetidos si los hay.
- P es la matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios de A normalizados $v_1, v_2, \cdots, v_n$, asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Nota

Los vectores v_i se toman como columnas y sus traspuestas $(v_i)^t$ son filas, por lo cual los productos de la forma $v_i(v_i)^t$ son matrices $n\times n$.

Ejemplo 5.7 Descomponer la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ como se indica en el teorema 5.5.

Solución

Del ejemplo 5.5 se tienen los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 8$ con vectores propios ortonormales asociados respectivamente:

$$u = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz simétrica, entonces por el teorema 5.5 la matriz A se puede descomponer de la siguiente forma:

$$A = \lambda_1 uu^T + \lambda_2 vv^T + \lambda_3 ww^T$$

Para verificar se desarrolla el lado derecho de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{-4}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{-4}{18} & \frac{16}{18} & \frac{-4}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-4}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Otra descomposición que resulta de utilidad en algunos casos es la que proporciona el siguiente teorema, el cual es una versión más general para la descomposición del teorema 5.5, pues no exige que la matriz sea simétrica.

Teorema 5.6 Sea A una matriz cuadrada de orden n, con n vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ no necesariamente distintos, entonces A es diagonalizable y se puede descomponer de la forma:

$$A = PDP^{-1} = \lambda_1 v_1 f_1 + \lambda_2 v_2 f_2 + \cdots + \lambda_n v_n f_n$$

donde las columnas de P son los vectores propios v_i, D es la matriz diagonal con los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ en su diagonal principal y $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son las filas de la matriz P^{-1}.

Ejemplo:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y tiene como vectores propios a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

Se verifica que $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, esto se puede corroborar en el ejemplo 5.2. Adicionalmente se cumple la descomposición indicada en el teorema 5.6:

$$A = \lambda_1 v_1 f_1 + \lambda_2 v_2 f_2$$

En efecto:

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

5.5 Forma canónica de Jordan

En muchas aplicaciones con matrices resulta de utilidad, porque ayuda a la simplificación de los cálculos, la descomposición $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal. En este caso se dice que A es diagonalizable.

Tal diagonalización es posible cuando A es cuadrada de orden n y posee n vectores propios linealmente independientes. Pero lamentablemente no todas las matrices cuadradas son diagonalizables. Es por ello que surge la necesidad de buscar una descomposición más general que sea aplicable a toda matriz cuadrada y que facilite los cálculos en su aplicación y es precisamente el tema de esta sección.

Definición 5.4 Bloque de Jordan

Para un escalar λ se define el **bloque de Jordan** de orden k como la matriz cuadrada de orden k, cuyas componentes de la diagonal principal son iguales a λ, contiene solo unos en la diagonal superior y ceros en las demás posiciones. Dichos bloques se denotarán como $B_k(\lambda)$:

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplos de bloques de Jordan:

$$B_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2(-4) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_4(6) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nota

La expresión $B_1(\lambda) = (\lambda)$ se entenderá como un bloque de Jordan de orden 1.

Definición 5.5 Matriz de Jordan

Una **matriz de Jordan** es una matriz cuadrada que en su diagonal contiene bloques de Jordan y ceros en las demás posiciones.

$$J = \begin{pmatrix} B_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{k_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

Son ejemplos de matrices de Jordan:

$$\left(\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c|cc} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right)$$

Las líneas trazadas en las matrices son para demarcar en forma ilustrativa los bloques que conforman las matrices de Jordan, en lo sucesivo no se colocarán esas líneas.

A continuación se muestran diferentes formas de matrices de Jordan.

- **Matrices de Jordan de orden 2**

Las matrices de Jordan de orden 2 tienen dos formas posibles:

a) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ donde λ_1 y λ_2 pueden ser iguales, es decir que es posible que hayan dos bloques iguales de orden 1 o dos bloques distintos de orden 1.

b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un solo bloque de orden 2.

- **Matrices de Jordan de orden 3**

Las matrices de Jordan de orden 3 tienen las siguientes formas posibles:

a) La matriz tiene tres bloques de orden 1:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

donde no necesariamente $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ son diferentes.

b) La matriz tiene un bloque de orden 1 y un bloque de orden 2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde no necesariamente $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

c) La matriz tiene un solo bloque de orden 3:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 5.7 Si A es una matriz cuadrada de orden n, con entradas reales o complejas, entonces existe una matriz cuadrada P, con entradas reales o complejas e invertible, tal que $P^{-1}AP = J$, donde J es una matriz de Jordan que contiene en su diagonal los valores propios de A y la matriz P es llamada matriz de paso.

Definición 5.6 Forma canónica de Jordan

Dada una matriz cuadrada A, la matriz de Jordan J garantizada por el teorema 5.7 se le llama **forma canónica de Jordan** de la matriz A.

Si la matriz A es diagonalizable entonces, su forma canónica de Jordan J es una matriz diagonal en cuya diagonal principal estarán los valores propios de A. De modo que el proceso de obtención de la forma canónica de Jordan para el caso de matrices diagonalizables es ya conocido puesto que coincide con la diagonalización. Ahora interesa cómo encontrar la forma canónica de Jordan para matrices no diagonalizables.

5.6 Vectores propios generalizados

Si se desea descomponer una matriz A de tamaño $n \times n$ como se establece en el teorema 5.7, se debe encontrar la matriz de paso P que reduzca la matriz A a su forma canónica de Jordan $P^{-1}AP = J$. Pero si A no es diagonalizable, entonces no existen n vectores propios de A linealmente independiente para formar la matriz P, es entonces que surge la necesidad de usar los llamados vectores propios generalizados.

Definición 5.7 Vector propio generalizado

Sea A es una matriz cuadrada de orden n. Un vector no nulo v es llamado **vector propio generalizado** de A si existe un escalar λ tal que $(A - \lambda I)^p v = 0$ para algún entero positivo p. En tal caso se dice que v es un vector propio generalizado de A asociado a λ.

A continuación se plantea una forma de encontrar vectores propios generalizados.

Si λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$ y multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$, y se cumple $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$, se encuentra un vector propio v_1, el cual satisface la igualdad $(A - \lambda I)v_1 = 0$.

Luego se encuentran los vectores $v_2, v_3, \cdots, v_p$ que satisfagan las igualdades

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)v_2 &= v_1\\ (A-\lambda I)v_3 &= v_2\\ &\vdots\\ (A-\lambda I)v_p &= v_{p-1}\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $p \leq m_a(\lambda)$

Los vectores $v_2, v_3, \cdots, v_p$ no son vectores propios de A, pero si tienen un comportamiento parecido y por ello se les llama **vectores propios generalizados** de A, al conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_p\}$ se le llama cadena de Jordan de largo p asociada al vector propio v_1

Ejemplo 5.8 En cada caso, determinar la matriz invertible P que transforme a su forma canónica de Jordan a la matriz dada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución

Para la matriz A basta con tomar $P = I$, pues A es una matriz de Jordan.

Para la matriz B se debe iniciar buscando el polinomio característico y los valores propios.

$$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -8 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(5-\lambda) - 2(-8)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

B posee solo un valor propio que es $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

Se resuelve el sistema lineal $(B - \lambda I)x = 0$ para encontrar vectores propios:

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como una fila es múltiplo de la otra, el sistema se reduce a una sola ecuación

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

De allí se obtiene $x_1 = -2x_2$, por lo cual, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Los vectores propios de B son los múltiplos no nulos de $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Este vector será la primera columna de la matriz P. Como no existen más vectores propios de B que sean linealmente independiente con v_1, se busca un vector propio generalizado v_2:

$$(B-\lambda I)v_2 = v_1$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -8 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + 2f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

De donde:

$$2x_1 + 4x_2 = 1 \quad \to \quad x_1 = \frac{1}{2} - 2x_2$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una elección posible es $x_2 = 0$, así $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, luego la matriz P es $P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y se cumple $P^{-1}BP = J$:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la forma canónica de Jordan

Dada una matriz cuadrada A de orden n con entradas reales. Si el polinomio característico solo tiene raíces reales se procede así:

i. Calcular los valores propios de A: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k$ con sus respectivas multiplicidades algebraicas $m_a(\lambda_1),\ m_a(\lambda_2), \cdots, m_a(\lambda_k)$.

ii. Para cada valor propio λ_i se calculan los rangos de las matrices $(A-\lambda_i I)^h$ iniciando con $h = 1$ hasta finalizar el proceso que se indica a continuación que a lo sumo termina con $h = m_a(\lambda_i)$:

Hacer

$r_1 = rango(A - \lambda_i I)$ y $n_1 = n - r_1$, si $n_1 < m_a(\lambda_i)$ continúa

$r_2 = rango(A - \lambda_i I)^2$ y $n_2 = r_1 - r_2$, si $n_1 + n_2 < m_a(\lambda_i)$ continúa

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ hasta

$r_h = rango(A - \lambda_i I)^h$ y $n_h = r_{h-1} - r_h$, si $n_1 + n_2 + \cdots + n_h = m_a(\lambda_i)$

Nota

El $rango(A)$ es el número de columnas de A linealmente independientes.

iii. Al valor propio λ_i le corresponderán:

$n_1 - n_2$ bloques de Jordan de orden 1
$n_2 - n_3$ bloques de Jordan de orden 2
$\vdots$
$n_{h-1} - n_h$ bloques de Jordan orden $h - 1$
n_h bloques de Jordan orden h

Cálculo de la matriz de paso *P*

Una vez que se ha calculado la matriz J con el método anterior se procede a calcular la matriz P.

Si para el valor propio λ_1 se ha determinado que posee un bloque de orden h (se inicia con los bloques de mayor tamaño)

Se elige un vector v_h tal que $(A - \lambda_1 I)^h v_h = 0$

Luego se sigue con

$$\begin{aligned} v_{h-1} &= (A - \lambda_1 I)v_h \\ v_{h-2} &= (A - \lambda_1 I)v_{h-1} \\ &\vdots \\ v_1 &= (A - \lambda_1 I)v_2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

El vector v_1 debe ser un vector propio y $v_2, v_3, \cdots, v_h$ son los vectores propios generalizados, estos vectores $v_1,\ v_2,\ v_3, \cdots, v_h$ serán las primeras columnas de P en ese orden.

Las igualdades de (5.4) son las mismas de (5.3), pero en orden inverso.

Se repite la operación por cada bloque hasta obtener los $m_a(\lambda_i)$ vectores linealmente independientes, incluyendo los vectores propios y los generalizados.

Luego se continúa con el siguiente valor propio, hasta finalmente obtener n vectores propios o generalizados linealmente independientes que formarán una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y también son las columnas de la matriz de paso P que permite descomponer la matriz A de la forma $A = PJP^{-1}$.

Ejemplo 5.9 Encontrar la forma canónica de Jordan J y la matriz de paso P para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

1. Polinomio característico:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Haciendo el desarrollo del determinante por los cofactores de la primera columna se obtiene

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante 3×3 y efectuando se obtiene

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^3(3-\lambda)$$

2. Valores propios: $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica $m_a(2) = 3$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebraica $m_a(3) = 1$

3. Vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$

$$(A-2I)x=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como tiene filas repetidas el sistema se reduce a dos ecuaciones $\begin{cases} -x_2+x_4=0 \\ \ \ x_2+x_3=0 \end{cases}$

De donde: $x_4=x_2$ y $x_3=-x_2$, luego:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios de A asociados a $\lambda_1=2$ son las combinaciones lineales no nulas de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Con este resultado se tiene que la multiplicidad geométrica de $\lambda_1=2$ es 2, menor que la multiplicidad algebraica, por lo tanto la matriz A no es diagonalizable y se necesita un vector propio generalizado. Pero previamente se determina la matriz J.

4. Determinación de los bloques de Jordan para $\lambda_1=2$

Se calcula el rango de $(A-2I)$

Sea $r_1=rango(A-2I)=rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2$

Se hace $n_1=n-r_1=4-2=2<m_a(2)$, se debe continuar:

$$r_2=rango(A-2I)^2=rango\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=1$$

Se hace $n_2 = r_1 - r_2 = 2 - 1 = 1$

Como $n_1 + n_2 = 2 + 1 = 3 = m_a(2)$ finaliza

Este proceso garantiza que a $\lambda_1 = 2$ le corresponden:

- $n_1 - n_2 = 2 - 1 = 1$ un bloque de Jordan de orden 1
- $n_2 = 1,$ un bloque de Jordan de orden 2

De modo que a $\lambda_1 = 2$ le corresponden los bloques $B_1(2) = (2)$ y $B_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ los cuales se pueden ensamblar en una matriz de bloques de tamaño 3×3 : $B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ o $B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Esto dependerá del orden en que se elijan los vectores para las columnas de la matriz de paso P.

5. Vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I)x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtiene que los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$ son los múltiplos no nulos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Las multiplicidades algebraica y geométrica para $\lambda_2 = 3$ coinciden:

$m_a(3) = m_g(3) = 1,$ le corresponde el bloque $B_1(3) = (3)$.

Por lo tanto ya se ha determinado cual es la forma canónica de Jordan (J) correspondiente a la matriz A:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Determinar la matriz de paso (P)

Como a $\lambda_1 = 2$ le corresponde un bloque de orden 2, se necesita un vector propio generalizado v_2 que se determina siguiendo el proceso (5.4) iniciando con $(A-2I)^2 v_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que se reduce a solo una ecuación $-2x_2 + x_3 + x_4 = 0$, de la cual se despeja una de las variables: $x_3 = 2x_2 - x_4$, x_1 queda como variable libre, luego:

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$, entonces se elige a $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

también se puede elegir a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o una combinación de ellos.

$$v_1 = (A-2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$, en este caso una combinación lineal de los vectores encontrados en el paso 3.

Se eligen como $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ uno de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 2$ y como $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$

Con los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 en ese orden se forma la matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de P es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

El participante debe verificar la descomposición $A = PJP^{-1}$.

5.7 Teorema de Cayley-Hamilton

Antes de enunciar este teorema se introducen los polinomios con coeficientes matriciales y polinomios con variable matricial.

5.7.1 Evaluación de polinomios con coeficientes escalares en matrices

Dados un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde los coeficientes son reales o complejos, si la variable x se sustituye por una variable A que representa una matriz cuadrada de orden m, se obtiene un polinomio con coeficientes escalares y cuya variable es una matriz cuadrada de orden m:

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

donde I es la matriz identidad de orden m.

Si se sustituye A por una determinada matriz cuadrada de orden m, se obtendrá como resultado otra matriz cuadrada de orden m.

Ejemplo 5.10 Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ en la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

El polinomio matricial correspondiente es $P(A) = A^3 + 4A^2 - 2A + 5I$

donde $A^3 = A \cdot A \cdot A$, $A^2 = A \cdot A$.

Se evalúa dicho polinomio con la matriz dada

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 + 4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

5.7.2 Evaluación de polinomios con coeficientes matriciales

La expresión $P(x) = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0$ donde las B_i son matrices cuadradas de orden m y x es una variable escalar, define un polinomio cuyos coeficientes son matrices.

Por ejemplo, $P(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, en este caso al evaluar el polinomio en $x = 2$ se obtiene:

$$P(2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 8 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} 4 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} 1$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 16 & -10 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

También puede definirse un polinomio cuyos coeficientes sean matrices cuadradas y su variable represente matrices cuadradas del mismo tamaño.

Si en el polinomio del ejemplo anterior se cambia la variable x por una variable matricial A de tamaño 2×2 se obtiene:

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} A^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} I$$

Teorema 5.8 Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz A, entonces $P(A) = 0$.

Ejemplo 5.11 Verificar el teorema de Cayley-Hamilton con la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución

Del ejemplo 5.8 se tiene que el polinomio característico de la matriz B es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Calcularemos ahora $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= B^2 - 2B + I \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -16 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -16 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark \text{verificado} \end{aligned}$$

5.7.3 Cálculo de la matriz inversa usando el teorema de Cayley-Hamilton

Si A es una matriz cuadrada e invertible, de orden n y su polinomio característico es $P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ entonces $P(A) = 0$ y por lo tanto $A^{-1}P(A) = 0$:

$$\begin{aligned} A^{-1}P(A) = 0 \;&\rightarrow\; A^{-1}[(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I] = 0 \\ &\rightarrow\; (-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0 \\ &\rightarrow\; A^{-1} = \frac{-1}{a_0}[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I] \qquad (5.5) \end{aligned}$$

Nota

El término a_0 del polinomio característico de A es igual a $det(A)$ y si A es invertible entonces $a_0 = det(A) \neq 0$, esto garantiza la existencia de $\frac{-1}{a_0}$.

Ejemplo 5.12 Usar la fórmula obtenida del Teorema de Cayley-Hamilton para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

Del ejemplo 5.3 se tiene que el polinomio característico de A es:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\left[-2+\lambda+\lambda^2\right] \;\rightarrow\quad P(\lambda) = -\lambda^3 + 0\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

Luego se aplica la fórmula (5.5) con $n = 3$:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[(-1)^3 A^{3-1} + a_{3-1}A^{3-2} + a_{3-2}I\right]$$

$$= \frac{-1}{a_0}\left[-A^2 + a_2 A + a_1 I\right]$$

Sustituyendo $a_0 = -2$, $a_1 = 3$ y $a_2 = 0$ se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{-1}{-2}\left[-A^2 + 0A + 3I\right] = \frac{1}{2}\left[-A^2 + 3I\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left[-\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

El participante debe verificar que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

5.8 Teorema de los círculos de Gershgorin

Antes del enunciado de este teorema se definen los círculos de Gersgorin y los radios de dichos círculos.

Para una matriz cuadrada de orden n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se definen los números

$$\begin{aligned} r_1 &= |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ r_2 &= |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ r_n &= |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}| \end{aligned}$$

En general r_i es la suma de los valores absolutos de los elementos de la fila i de A excepto el elemento a_{ii} (el elemento que está sobre la diagonal).

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Con cada r_i se determina un círculo en el plano complejo centrado en el elemento a_{ii} de la diagonal principal de la matriz A y cuyo radio es r_i

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

Teorema 5.9 Teorema de los círculos de Gershgorin

Si A una matriz cuadrada de orden n cuyas entradas son reales o complejas, entonces cada valor propio de A pertenece a alguno de los círculos D_i.

Ejemplo 5.13 Determinar los radios y trazar los círculos de gershgorin para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Luego verificar que cada valor propio está contenido en al menos un círculos.

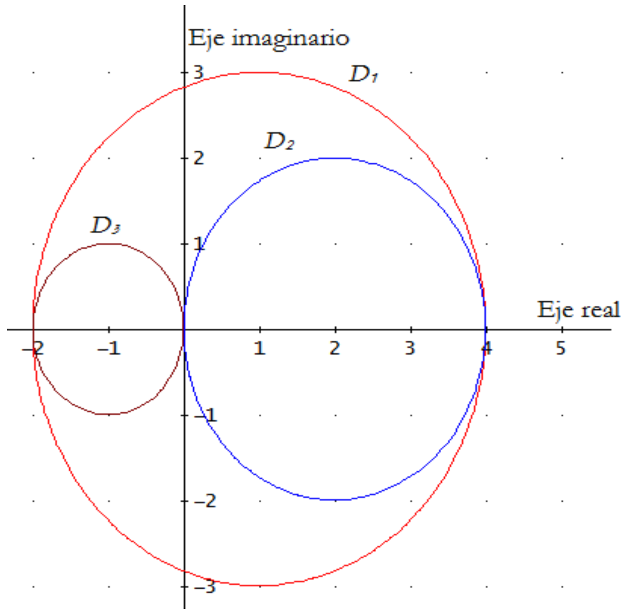
Solución

Los círculos son los siguientes:

D_1 tiene radio $r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 2 = 3$ y centro en $a_{11} = 1$

D_2 tiene radio $r_2 = |a_{21}| + |a_{23}| = 1 + 1 = 2$ y centro en $a_{22} = 2$

D_3 tiene radio $r_3 = |a_{31}| + |a_{32}| = 0 + 1 = 1$ y centro en $a_{33} = -1$



Del ejemplo 4.4a se tiene que los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$, como todos son reales están ubicados sobre el eje real, λ_1 y λ_2 están dentro de D_1 y D_2, mientras que λ_3 está dentro de D_1 y D_3 .

Resumen de contenidos de la unidad V

Matrices semejantes y diagonalización

Definición Matrices semejantes

Las matrices A y B, cuadradas de orden n, son **semejantes** si existe una matriz invertible C de orden n tal que $B = C^{-1}AC$

Teorema Sean A y B matrices cuadradas de orden n, si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios.

Teorema Una matriz A cuadrada de orden n es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En cuyo caso la matriz diagonal D semejante a A tiene en su diagonal los valores propios de A.

Proceso de diagonalización para una matriz cuadrada

1) Calcular los valores propios de la matriz A cuadrada de orden n:

i. Se halla el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

ii. Se resuelve la ecuación característica $P(\lambda) = 0$.

iii. Las raíces de $P(\lambda)$ son los valores propios de A.

2) Encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio:

3) Comparar las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio, si las multiplicidades coinciden en cada valor propio, entonces la matriz A es diagonalizable, en caso contrario no es diagonalizable y termina el proceso.

4) Si A es diagonalizable se forma la matriz P con n vectores propios linealmente independiente y se efectúa el producto $P^{-1}AP$ cuyo resultado será una matriz diagonal D con los valores propios de A en su diagonal.

Teorema espectral

Una matriz A, simétrica, de orden n y cuyas entradas son reales, satisface las siguientes propiedades:

a. A tiene n valores propios reales (incluyendo posiblemente algunos repetidos).

b. Si λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$ y multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$, entonces $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

c. Los espacios propios de A son mutuamente ortogonales, es decir, dos vectores propios que corresponden a dos valores propios distintos son ortogonales.

d. Existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^t$.

Definición Matriz ortogonalmente diagonalizable

Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice que es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es diagonalizable mediante una matriz P ortogonal, es decir, si existen P ortogonal y D diagonal tales que $A = PDP^t$ o su equivalente $P^tAP = D$.

Teorema Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si A es simétrica.

Teorema Sea A una matriz cuadrada de orden n, con n vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ no necesariamente distintos, entonces A es diagonalizable y se puede descomponer de la forma:

$$A = PDP^{-1} = \lambda_1 v_1 f_1 + \lambda_2 v_2 f_2 + \cdots + \lambda_n v_n f_n$$

donde las columnas de P son los vectores propios v_i, D es la matriz diagonal con los valores propios en su diagonal principal y f_i son las filas de P^{-1}.

Definición Bloque de Jordan

Para un escalar λ se define el **bloque de Jordan** de orden k como la matriz cuadrada de orden k, cuyas componentes de la diagonal principal son iguales a λ, contiene solo unos en la diagonal superior y ceros en las demás posiciones. Dichos bloques se denotarán como $B_k(\lambda)$:

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Definición Matriz de Jordan

Una **matriz de Jordan** es una matriz cuadrada que en su diagonal contiene bloques de Jordan y ceros en las demás posiciones.

$$J = \begin{pmatrix} B_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{k_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

Teorema Si A es una matriz cuadrada de orden n, con entradas reales o complejas, entonces existe una matriz cuadrada P, con entradas reales o complejas e invertible, tal que $P^{-1}AP = J$, donde J es una matriz de Jordan que contiene en su diagonal los valores propios de A y la matriz P es llamada matriz de paso.

Definición Forma canónica de Jordan

Dada una matriz cuadrada A, la matriz de Jordan J semejante a la matriz A se le llama **forma canónica de Jordan** de la matriz A.

Definición Vector propio generalizado

Sea A es una matriz cuadrada de orden n, un vector no nulo v es llamado **vector propio generalizado** de A si existe un escalar λ tal que $(A - \lambda I)^p v = 0$ para algún entero positivo p. En tal caso se dice que v es un vector propio generalizado de A asociado a λ.

Cálculo de la forma canónica de Jordan

Dada una matriz cuadrada A de orden n con entradas reales. Si el polinomio característico solo tiene raíces reales se procede así:

i. Calcular los valores propios de A: $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \cdots, \lambda_k$ con sus respectivas multiplicidades algebraicas $m_a(\lambda_1),\ m_a(\lambda_2), \cdots, m_a(\lambda_k)$.

ii. Para cada valor propio λ_i se calculan los rangos de las matrices $(A-\lambda_i I)^h$ iniciando con $h=1$ hasta finalizar el proceso que se indica a continuación que a lo sumo termina con $h=m_a(\lambda_i)$:

Hacer

$r_1 = rango(A-\lambda_i I)$ y $n_1 = n - r_1$, si $n_1 < m_a(\lambda_i)$ continúa

$r_2 = rango(A-\lambda_i I)^2$ y $n_2 = r_1 - r_2$, si $n_1 + n_2 < m_a(\lambda_i)$ continúa

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ hasta

$r_h = rango(A-\lambda_i I)^h$ y $n_h = r_{h-1} - r_h$, si $n_1 + n_2 + \cdots + n_h = m_a(\lambda_i)$

iii. Al valor propio λ_i le corresponderán:

$n_1 - n_2$ bloques de Jordan de orden 1

$n_2 - n_3$ bloques de Jordan de orden 2

$\vdots$

$n_{h-1} - n_h$ bloques de Jordan orden $h-1$

n_h bloques de Jordan orden h

Cálculo de la matriz de paso *P*

Si para el valor propio λ_1 se ha determinado que posee un bloque de orden h.

Se elige un vector v_h tal que $(A-\lambda_1 I)^h v_h = 0$, luego se sigue con

$$\begin{gathered} v_{h-1} = (A-\lambda_1 I)v_h \\ v_{h-2} = (A-\lambda_{1i} I)v_{h-1} \\ \vdots \\ v_1 = (A-\lambda_1 I)v_2 \end{gathered}$$

El vector v_1 debe ser un vector propio y $v_2, v_3, \cdots, v_h$ son los vectores propios generalizados, estos vectores $v_1,\ v_2,\ v_3, \cdots, v_h$ serán las primeras columnas de P en ese orden.

Se repite la operación por cada bloque hasta obtener los $m_a(\lambda_i)$ vectores linealmente independientes, incluyendo los vectores propios y los generalizados.

Luego se continúa con el siguiente valor propio, hasta finalmente obtener n vectores propios o generalizados que formarán las columnas de la matriz de paso P que permite descomponer la matriz A de la forma $A = PJP^{-1}$.

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz A, entonces $P(A) = 0$.

Cálculo de la matriz inversa usando el teorema de Cayley-Hamilton

Si A es una matriz cuadrada e invertible, de orden n y su polinomio característico es $P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ entonces $P(A) = 0$ y por lo tanto $A^{-1}P(A) = 0$, y A^{-1} se calcula de la siguiente manera:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I\right]$$

El término a_0 del polinomio característico de A es igual a $det(A)$ y si A es invertible entonces $a_0 = det(A) \neq 0$, esto garantiza que la existencia de $\frac{-1}{a_0}$.

Círculos de Gershgorin

Para una matriz cuadrada de orden n $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se definen los números

$$\begin{aligned} r_1 &= |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| \\ r_2 &= |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}| \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ r_n &= |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}| \end{aligned}$$

En general r_i es la suma de los valores absolutos de los elementos de la fila i de A excepto el elemento a_{ii} : $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Con cada r_i se determina un círculo en el plano complejo centrado en el elemento a_{ii} de la diagonal principal de la matriz A y cuyo radio es r_i

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

Teorema de los círculos de Gershgorin

Si A una matriz cuadrada de orden n cuyas entradas son reales o complejas, entonces cada valor propio de A pertenece a alguno de los círculos D_i.

Actividades de la unidad V

1) Encuentre la matriz C invertible que satisfaga la condición $B = C^{-1}AC$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Determine si las matrices dadas son diagonalizables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) En cada caso determine, si es posible, una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4) Verifique que las siguientes matrices son ortogonales

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

5) Diagonalice ortogonalmente las matrices dadas. Halle la matriz diagonal D y la matriz ortogonal P

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6) Halle la forma canónica de Jordan para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

7) Verificar el teorema de Cayley-Hamilton para las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

8) Para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcular, si existe, la matriz inversa usando el teorema de Cayley-Hamilton.

b) Determinar los radios y trazar los círculos de Gershgorin para las matrices dadas. Luego verificar que los valores propios están contenidos en los círculos.

Actividades de autoevaluación de la unidad V

PARTE I. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1) La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable. ____

2) Toda matriz invertible es diagonalizable. ____

3) Si $\lambda = 0$ es un valor propio de una matriz A entonces A no es invertible. ___

4) Si A es una matriz semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces sus valores propios son $4,1,3$. ___

5) Si A y B son dos matrices semejantes entonces det(A)=det(B) ___

6) Si A es una matriz diagonalizable entonces A es diagonal ___

7) El bloque de Jordan de tamaño 3×3 y valor propio 6 es $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ___

8) El bloque de Jordan de tamaño 2×2 y valor propio 3 es $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ___

9) Al evaluar la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ en $P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$ se obtiene la matriz identidad. ___

10) Si dos matrices tienen los mismos valores propios entonces son semejantes. ___

11) Al evaluar la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en $P(X) = X^2 - 1$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$. ___

12) Si A, B, C son matrices de orden n tales que A es semejante con B y B es semejante con C entonces A es semejante con C ____

PARTE II.

1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Halle la matriz de paso P que satisface la relación $J = P^{-1}AP$, donde J es la forma canónica de Jordan para la matriz A .

b) Indicar los bloque de Jordan.

c) Determinar los radios y trazar los círculos de Gershgorin para la matriz A.

Luego verificar que cada valor propio está contenido en al menos un círculos.

d) Usar la formula obtenida del Teorema de Cayley-Hamilton para calcular la inversa de la matriz A.

Bibliografia de la unidad V

- Burgos, J. (1993). *Álgebra Lineal. (Primera edición)* Madrid. McGraw Hill.
- Friedberg, S., Insel, A., Spence, L. (1979). *Linear Algebra.* New Jersey. Prentice- Hall.
- Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal. (séptima edición).* México. McGraw Hill.
- Howard, A. (1979). *Introducción al Álgebra Lineal. (Tercera edición).* Editorial Limusa.
- Kolman B., Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal. (Octava edición).* México. Pearson Prentice Hall.
- Lay, D. (2012) *Algebra Lineal y sus aplicaciones (cuarta edición).* México. Pearson Educación
- Strang, G. (2016). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones (quinta edición).* Wellesley. Wellesley-Cambridges Press.