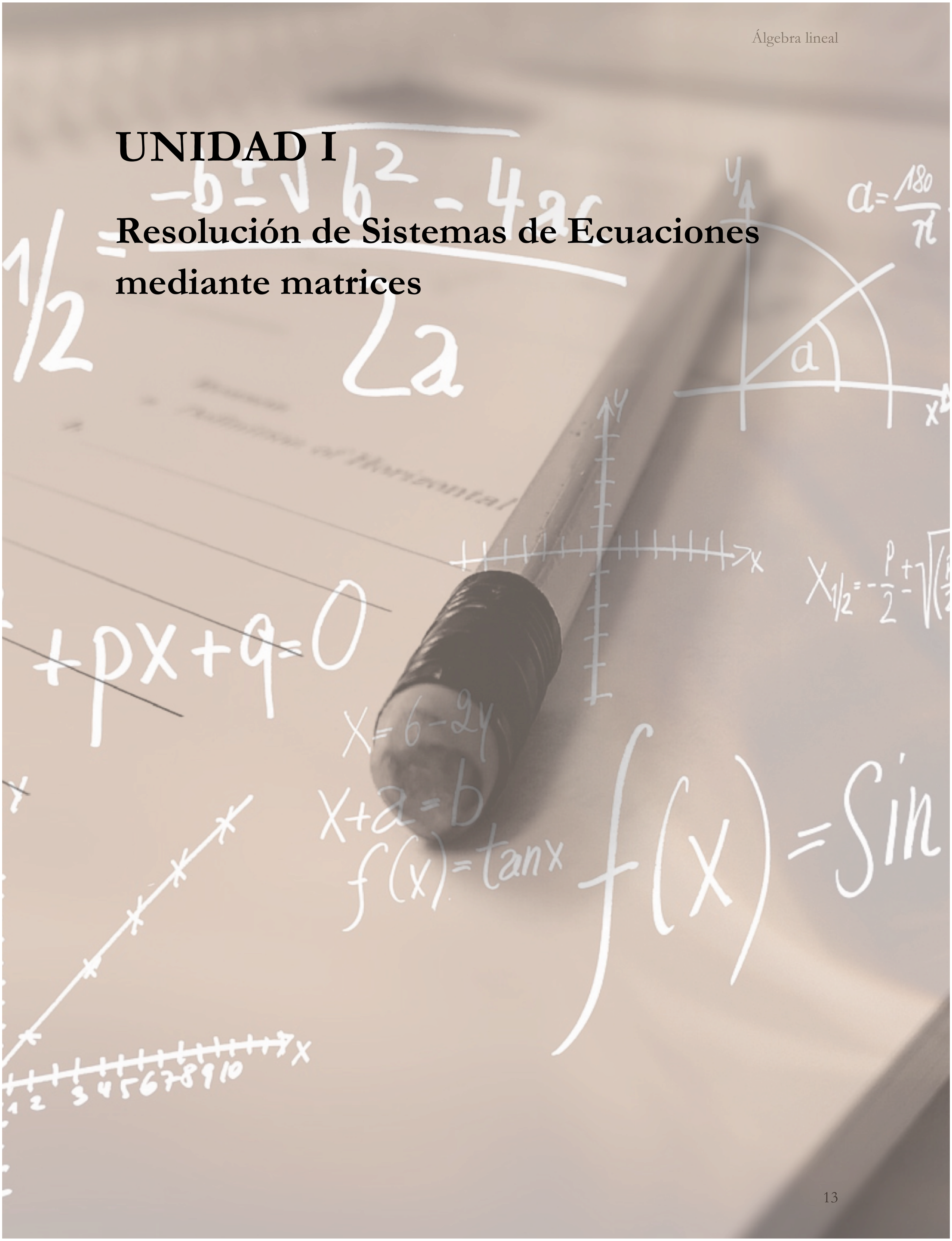


UNIDAD I

Resolución de Sistemas de Ecuaciones mediante matrices

Orientaciones para el estudio de la unidad I

Se ha elegido como Unidad I el tema de los Sistemas de Ecuaciones Lineales para dar inicio con él a un curso de Algebra Lineal. Esto obedece a dos razones: la primera es que este tema es central en toda la asignatura y se utiliza en las demás unidades del texto; la segunda es tipo pedagógico, pues su contenido y muchos de los problemas de aplicación que se pueden realizar son cercanos al estudiante. Ver que problemas cotidianos se resuelven de forma sencilla con un sistema de ecuaciones es una motivación adecuada para el logro de los objetivos que se plantean de forma general para la asignatura.

En esta unidad se introducen los conceptos básicos de los sistemas de ecuaciones lineales, para el desarrollo de estos conceptos se hace necesario que el estudiante tenga el conocimiento previo de las matrices y las operaciones del álgebra matricial, además de las habilidades en las operaciones con números reales.

Es esencial es determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene o no soluciones y encontrarlas en caso de que éstas existan. Resolver problemas de esta naturaleza es totalmente algorítmico, de forma que con una secuencia de pasos se logra obtener la respuesta. Con la práctica frecuente se logra aprender los algoritmos y aplicarlos para dar solución a los problemas que sobre este tema puedan plantearse.

Competencias de la unidad I

- Reconoce cuando una ecuación es lineal.
- Identifica sistemas de ecuaciones lineales.
- Expresa un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial y viceversa.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan.
- Calcula la matriz inversa usando el método de Gauss-Jordan.
- Resuelve sistemas de ecuaciones usando la inversa de la matriz de los coeficientes.

Esquema de contenidos de la unidad I

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Planteamiento de problemas
1.2 Sistema de ecuaciones homogéneos
1.3 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales
1.3.1 Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales
1.4 Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales
1.4.1 Método de Gauss
1.4.2 Método de Gauss-Jordan
1.5 Matrices elementales
1.6 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan
1.7 Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de los coeficientes
1.8 Ejemplos de aplicaciones de sistemas lineales

1.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Planteamiento de problemas

Un gran número de problemas de las ciencias, de ingeniería y de la vida diaria requieren un tratamiento con ecuaciones del tipo:

$$ax = b$$

donde a y b son constantes cuyos valores son conocidos y x es una variable de valor desconocido a la cual se le llama incógnita.

La ecuación anterior se denomina **ecuación lineal**. La palabra lineal hace referencia a que la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta. De forma análoga las ecuaciones del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1.1}$$

donde los a_i y b son constantes conocidas, y las x_i son incógnitas, son llamadas **ecuaciones lineales**.

Son diversos los problemas que se resuelven planteando ecuaciones lineales y luego encontrando los valores correspondientes de las incógnitas que satisfagan la igualdad.

Una **solución** de la ecuación lineal (1.1) es una sucesión de n números $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ con la propiedad de satisfacer la ecuación (1.1) al sustituir x_1 por c_1, x_2 por c_2, …., x_n por c_n.

Ejemplo 1.1. Para la ecuación lineal: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6$

Una solución de la misma es:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 0$$

puesto que al sustituir x_1, x_2, x_3 por los valores 0, 2 y 0 respectivamente, se cumple la ecuación:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -6$$

Esta solución no es la única que tiene la ecuación lineal dada, puesto que

$$x_1 = -4,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = -1$$

también es solución, se puede verificar sustituyendo estos valores.

Observación

Una ecuación lineal **no contiene** productos, cocientes o raíces de las incógnitas, todas las incógnitas se presentan únicamente a la primera potencia (exponente uno) y no aparecen como argumento de funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Las siguientes ecuaciones **no** son lineales:

a) $\frac{3x+1}{y} = 3$

b) $2xy + 5x = 4$

c) $\sqrt{x} - 4x^2 = 10$

d) $2sen(x-1) + 2y = 0$

d) $2^x - 3x + 5y = 24$

e) $log(2-x) + 5x = 9$

El problema central que se estudia en este tema es cuando se presenta un conjunto de ecuaciones lineales que deben cumplirse en forma simultánea. Ax dichos conjuntos se les llama **sistemas de ecuaciones lineales**.

Considere el problema de determinar n números reales: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ que satisfagan simultáneamente las m condiciones siguientes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

En donde los a_{ij} (llamados coeficientes) y los b_i (términos independientes) son constantes reales cuyos valores se conocen.

Los dos subíndices de los coeficientes, i y j, se usan de la siguiente forma: el primer subíndice, i indica que se trata de la *i*-ésima ecuación, mientras que el segundo subíndice, j está referido a la *j*-ésima incógnita x_j, estos subíndices permiten la rápida ubicación en el sistema.

Al conjunto de ecuaciones (1.2), se les llama un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas**, o de forma más simple **sistema lineal.** Los valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema constituyen **una solución** del sistema de ecuaciones lineales.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, consiste en encontrar todas las soluciones, si es que existen.

Observación

Cuando un sistema lineal tiene $2, 3,$ o 4 incógnitas éstas se suelen denotar con letras minúsculas sin subíndices: x, y, z, w; en forma general o con sistemas con muchas incógnitas se hace necesario usar los subíndices $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots$.

En el proceso para resolver un sistema lineal, se usan dos axiomas importantes del álgebra elemental:

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$
2. Si $a, b, k \in \mathbb{R}$ son tales que $a = b$, entonces $k \cdot a = k \cdot b$

El primero de estos axiomas garantiza que, si en un sistema de ecuaciones se suman miembro a miembro dos ecuaciones, se obtiene otra ecuación correcta. El segundo axioma nos dice que si se multiplica cada miembro de una ecuación por una misma constante $k \neq 0$, se obtiene una ecuación válida. El caso $k = 0$, no es útil porque resultaría $0 = 0$, que aunque es cierta no contribuye a encontrar la solución del sistema.

Estos dos axiomas se aplican en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.2 Resolver el sistema lineal $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x + y = \ \ 8 \end{cases}$

Solución

Para determinar las soluciones de este sistema lineal, se utilizará la técnica llamada **método de eliminación** que seguramente se haya trabajado en cursos anteriores.

Procedimiento:

i) Se multiplican los miembros de la primera ecuación por -2, resultando

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 6 \\ 2x + \ y &= 8 \end{aligned}$$

ii) Sumando miembro a miembro las ecuaciones se obtiene: $7y = 14$

iii) Despejando y se obtiene: $y = 2$

iv) Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones del sistema lineal, por ejemplo en $x - 3y = -3$, se obtiene:

$$x - 3 \cdot 2 = -3 \;\rightarrow\; x - 6 = -3 \;\rightarrow\; x = 3$$

v) Sustituyendo $x = 3$ e $y = 2$ en las dos ecuaciones del sistema dado, se verifica que efectivamente estos valores constituyen una solución.

$$\begin{aligned} 3 - 3 \cdot 2 &= 3 - 6 = -3 \\ 2 \cdot 3 + 2 &= 6 + 2 = 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3 Resolver el sistema lineal $\begin{cases} 3x - 6y = 8 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$

Solución

Aplicando el procedimiento anterior, se multiplican los miembros de la segunda ecuación por 3 y se obtiene:

$$3x - 6y = 8$$

$$-3x + 6y = -6$$

Luego al sumar miembro a miembro en las dos ecuaciones se obtiene: $0 = 1$, lo cual carece de sentido. Esto significa que el sistema lineal dado no tiene solución.

Ejemplo 1.4 Resolver el sistema lineal $\begin{cases} -x - 2y + 3z = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 4 \end{cases}$

Solución

Multiplicando los miembros de la primera ecuación por 3 y luego sumando miembro a miembro con la segunda ecuación se obtiene:

$$-4y + 4z = -8$$

de donde se obtiene $y = z + 2$.

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene

$$-x - 2(z + 2) + 3z = -4$$

de allí se despeja x para obtener: $x = z$

Se obtuvo: $y = z + 2$, $x = z$. Observe que tanto el valor de y como el valor de x dependen del valor de z, en casos como este se dice que z es una variable libre, por lo que se le asigna un valor r a z. Al hacer $z = r$ la solución del sistema se puede expresar de esta forma:

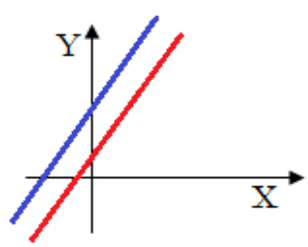
$$x = r\ ,\ y = 2 + r,\ \ z = r$$

donde r es un número real cualquiera. Por lo tanto, este sistema tiene infinitas soluciones.

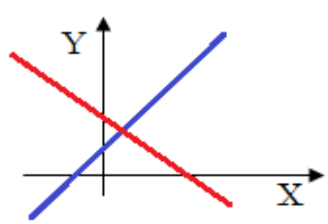
Estos ejemplos muestran que un sistema lineal puede tener:

- Una única solución
- Ninguna solución
- Infinitas soluciones

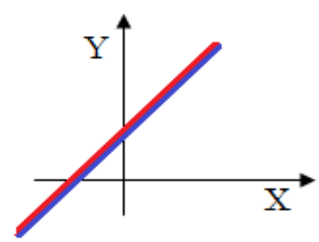
Desde el punto de vista geométrico una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano. En este sentido resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale a encontrar la intersección de dichas rectas, aquí se presentan tres posibilidades:



Rectas paralelas, no tienen puntos en común



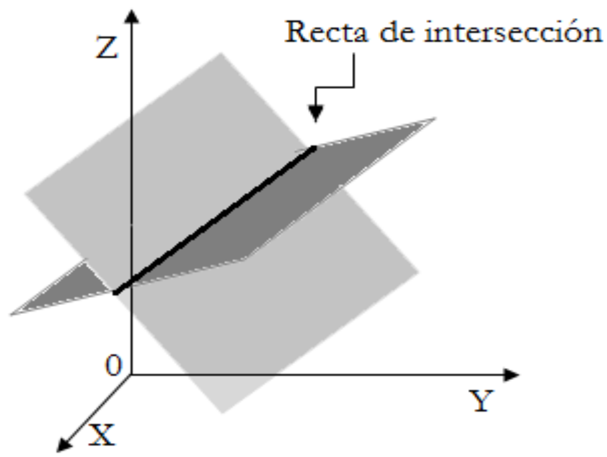
Rectas secantes, tienen un punto de intersección



Rectas coincidentes, tienen infinitos puntos de intersección

Al resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales estarán presentes tres posibilidades: solución única, infinitas soluciones o ninguna solución, de las cuales solo ocurre una de ellas. Si el sistema lineal tiene solución única, se dice que es un **sistema lineal compatible determinado**. Si tiene infinitas soluciones, entonces es un **sistema lineal compatible indeterminado** y si no tiene solución se dice que el **sistema lineal incompatible o inconsistente**.

En el ejemplo 1.4 se puede observar que el sistema consta de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, cada ecuación geométricamente representa un plano en el espacio tridimensional $(\mathbb{R}^3)$ y la solución corresponde a las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio, dicha recta es la intersección de los dos planos que corresponden a las ecuaciones del sistema. En la siguiente figura se ilustra este hecho.



Sistemas lineales equivalentes

Dado un sistema de ecuaciones lineales, una forma práctica de resolverlo es reducirlo a un sistema más simple de resolver y que tenga las mismas soluciones. Si dos sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones se dice son equivalentes.

Un sistema lineal es equivalente a cualquier sistema que se obtenga mediante una operación elemental. Esto se debe a que tales operaciones no alteran las soluciones de un sistema lineal. Las operaciones elementales son las que se describen a continuación.

Tipo I Intercambio de dos ecuaciones del sistema.

Tipo II Reemplazo de una ecuación por un múltiplo escalar no nulo de ella.

Tipo III Reemplazo de una ecuación del sistema por la suma de ella y un múltiplo real de otra ecuación del sistema.

Ejemplo 1.5 Resolver el siguiente sistema lineal aplicando operaciones elementales para obtener un sistema equivalente.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 & \leftarrow \text{ Ecuación 1} \\ 4x + y - z = 4 & \leftarrow \text{ Ecuación 2} \\ 2x - y + 3z = 10 & \leftarrow \text{ Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución

El objetivo es transformar este sistema en otro equivalente que se pueda resolver fácilmente.

1) Sumar en la ecuación 2 los miembros de la ecuación 1 multiplicados por (-4).

$$\begin{array}{r} -4x + 8y - 12z = -44 \\ \underline{4x + \ y - \quad z = \ 4} \\ 9y - 13z = -40 \end{array} \quad \leftarrow \text{ Ecuación 4}$$

2) Sumar en la ecuación 3 los miembros de la ecuación 1 multiplicados por (-2).

$$\begin{array}{r} -2x + 4y - 6z = -22 \\ \underline{2x - \ y + \ 3z = 10} \\ 3y - 3z = -12 \end{array} \quad \leftarrow \text{ Ecuación 5}$$

3) Sumar en la ecuación 4 los miembros de la ecuación 5 multiplicados por (-3).

$$\begin{array}{r} 9y - 13z = -40 \\ \underline{-9y + 9z = \ 36} \\ -4z = -4 \end{array}$$

4) El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{array}{r} x - 2y + 3z = \ 11 \\ 3y - 3z = -12 \\ -4z = -4 \end{array}$$

Este sistema lineal puede resolverse así:

Despejar z de la última ecuación $z = 1$

Sustituir z en la ecuación $3y - 3z = -12$, luego despejar y:

$$3y - 3(1) = -12 \ \rightarrow \ 3y = -12 + 3 \ \rightarrow \ 3y = -9 \ \rightarrow \ y = -3$$

Ahora se sustituyen $y = -3$ y $z = 1$ en la primera ecuación.

$$x - 2(-3) + 3(1) = 11 \;\rightarrow\; x + 6 + 3 = 11 \;\rightarrow\; x = 2$$

Se ha obtenido la solución $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$, que se puede verificar en el sistema dado para estar seguro que no hubo error.

1.2 Sistemas lineales homogéneos

De un sistema lineal se dice que es **homogéneo** si los términos independientes de cada una de sus ecuaciones son iguales a cero.

El siguiente sistema es homogéneo

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Los sistemas lineales homogéneos son compatibles, es decir, todo sistema homogéneo tiene solución.

Observe que si en el sistema dado se hacen $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$ se satisfacen

las dos ecuaciones, por lo tanto, es una solución, esto es aplicable a todo sistema homogéneo.

En un sistema homogéneo, la solución donde todas las incógnitas se igualan a cero es llamada la **solución nula** o **solución trivial**, si existe otra solución donde no todas las incógnitas se anulen, es llamada **solución no trivial**.

En un sistema homogéneo interesa saber si la solución nula es la única o tiene soluciones no triviales, y en este caso interesa encontrar esas soluciones.

Teorema 1.1 Un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas siempre tiene soluciones no triviales si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones en un sistema lineal homogéneo, este tendrá otras soluciones además de la trivial.

Este teorema garantiza que el sistema lineal anterior es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Para mejorar el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones se usarán matrices.

1.3 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Existe una relación muy estrecha entre las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales. En este texto se utilizarán los conocimientos previos de matrices para resolver los sistemas lineales.

1.3.1 Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema lineal (1.2) se puede expresar en la forma $A \cdot X = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de los coeficientes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ columna de las incógnitas

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ columna de los términos independientes

A la expresión $A \cdot X = B$ se le llama **representación matricial** del sistema lineal.

Si a la matriz A de los coeficientes se le agrega la columna B de los términos independientes se forma la **matriz ampliada del sistema lineal:**

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La representación matricial del sistema lineal del ejemplo 1.5 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

En este caso si se efectúa la multiplicación matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x-2y+3z \\ 4x+\ y-z \\ 2x-y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de ambas columnas se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= 11 \\ 4x+\ y-\ z &= 4 \\ 2x-\ y+\ 3z &= 10 \end{aligned}$$

La representación matricial de un sistema lineal homogéneo es $A \cdot X = 0$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la columna con las incógnitas y 0 es una columna nula (solo contiene ceros).

La representación matricial del sistema $\begin{aligned} 2x-2y+3z=0 \\ 3x+2y-5z=0 \end{aligned}$

es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones existen varios métodos que se clasifican en directos e indirectos:

- **Métodos directos**: Método de Gauss, Método de Gauss-Jordan, Regla de Cramer, Método de la matriz inversa y Factorización L.U entre otros.
- **Métodos indirectos**: Destacan el de Jacobí y el de Gauss-Seidel.

Los métodos indirectos son tratados en cursos de cálculo numérico usando software de cálculo o desarrollando programas en un lenguaje de programación, que está fuera del alcance de este trabajo. En este texto se tratarán sólo algunos métodos directos. Se inicia con los métodos basados en la obtención de sistemas equivalentes.

1.4.1 Método de Gauss

El **Método de Gauss** consiste de dos fases: la primera es el proceso de eliminación para reducir el número de incógnitas y en algunos casos también se eliminan ecuaciones. La segunda fase consiste en encontrar el valor de la última incógnita y sustituirla en la ecuación que le antecede para obtener el valor de otra incógnita, hasta completar la solución.

El método de Gauss es también conocido como método de eliminación gaussiana con sustitución regresiva**.**

Procedimiento:

a) Se considera la matriz aumentada (o ampliada) del sistema.

b) Se determina una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada del sistema.

c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se detecta directamente un valor de una de las incógnitas.

d) Se usa la sustitución regresiva para encontrar los valores de las restantes incógnitas.

e) Verificar la solución.

El siguiente ejemplo se desarrollará con todas las explicaciones y comentarios para ilustrar el método, por lo que puede parecer algo extenso.

Ejemplo 1.6 Resolver por el método de Gauss el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -2 \\ 2x + 5y + z &= -4 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

Solución

La matriz ampliada asociada al sistema es $\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Ahora se resuelve por el Método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la incógnita x, la segunda a los de y, la tercera a los de z, y la cuarta a los términos independientes. La línea vertical trazada en la matriz es un separador, que no es necesario colocar, pues al indicar que es la matriz ampliada se sabe que la última columna es la de los términos independientes.

A continuación el proceso para obtener una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada. Para ello se aplicarán las operaciones elementales a las filas (renglones) de la matriz, las posibles operaciones elementales se denotarán así:

- Intercambio de fila i con fila j: $f_i \leftrightarrow f_j$
- Sustituir una fila por un múltiplo escalar de ella misma: $f_i \to \alpha f_i$, $\alpha \neq 0$.
- Reemplazar una fila por la suma de ella más un múltiplo de otra fila:

$$f_i \to f_i + \alpha f_j \ \text{ con } \ \alpha \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + 4f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Luego, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$ es la matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del sistema. Es **equivalente** pues se obtuvo mediante una secuencia de operaciones elementales aplicadas a la matriz ampliada, y es escalonada pues cumple las condiciones:

- Las filas nulas (si las hay) están debajo de las filas no nulas.
- Si dos filas sucesivas tienen elementos no nulos, entonces el primer elemento no nulo de la fila de abajo está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila de arriba.

Con la matriz escalonada se forma un sistema lineal equivalente al sistema dado.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -2 \\ y - z &= 0 \\ -8z &= 8 \end{aligned}$$

Este sistema tiene una ecuación con una sola incógnita que permite hallar el valor de z:

$$-8z = 8 \;\rightarrow\; z = -1$$

Ahora se inicia el proceso de sustitución regresiva, sustituyendo $z = -1$ en la segunda ecuación:

$$y - z = 0 \;\rightarrow\; y - (-1) = 0 \;\rightarrow\; y + 1 = 0 \;\rightarrow\; y = -1$$

Se prosigue sustituyendo $y = -1$ y $z = -1$ en la primera ecuación:

$$x + 2y + z = -2 \;\rightarrow\; x + 2(-1) + (-1) = -2$$

$$x - 2 - 1 = -2 \;\rightarrow\; x = 1$$

El sistema lineal dado tiene solución única $x = 1,\ y = -1,\ z = -1$

Finalmente se verifica la solución obtenida sustituyendo los valores en las ecuaciones del sistema dado.

$$3x + 2y - z = 2 \;\rightarrow\; 3(1) + 2(-1) - (-1) = 2 \rightarrow 3 - 2 + 1 = 2 \quad ✓$$
$$2x + 5y + z = -4 \;\rightarrow\; 2(1) + 5(-1) + (-1) = -4 \rightarrow 2 - 5 - 1 = -4 \quad ✓$$
$$x + 2y + z = -2 \;\rightarrow\; 1 + 2(-1) + (-1) = -2 \rightarrow 1 - 2 - 1 = -2 \quad ✓$$

Ejemplo 1.7 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se toma la matriz ampliada del sistema y se inicia el proceso de eliminación para obtener una matriz escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \rightarrow f_3 - 2f_1]{f_2 \rightarrow f_2 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - 3f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \text{ matriz escalonada}$$

Se forma el nuevo sistema lineal equivalente

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se obtiene $x_3 = 0$ y se sigue el proceso de sustitución regresiva.

En la segunda ecuación se sustituye $x_3 = 0$:

$$3x_2 - 3x_3 = 0 \quad \to \quad 3x_2 - 3(0) = 0 \quad \to \quad 3x_2 = 0 \quad \to \quad x_2 = 0$$

En la primera ecuación se sustituyen $x_3 = 0$ y $x_2 = 0$:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \quad \to \quad x_1 - 2(0) + 3(0) = 0 \quad \to \quad x_1 = 0$$

Se obtuvo la única solución del sistema $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

Observaciones

- Al resolver sistemas homogéneos no es necesario trabajar con la matriz ampliada, pues la última columna es nula y se mantiene inalterable.
- En este caso, siendo un sistema homogéneo, se sabía que una solución es la nula, es decir, todas las incógnitas iguales a cero, pero no se sabía si esta solución era única o no.
- En este ejemplo y en el anterior los sistemas resultaron ser compatibles determinados, es decir, tienen solución única.

Ejemplo 1.8 Resuelva el sistema lineal usando el método de eliminación de Gauss con sustitución regresiva.

$$\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$$

Solución

Se procede a escalonar la matriz ampliada mediante operaciones elementales en sus filas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - \frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Luego el sistema equivalente es:
$$\begin{aligned} x + 5y + 4z - 13w &= 3 \\ 0x - 16y - 10z + 44w &= -7 \\ 0x + 0y + 0z + 0w &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene $0 = -\frac{3}{2}$, lo cual es falso, por lo tanto el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible.**

1.4.2 Método de Gauss–Jordan

Este método consiste en un proceso de eliminación para obtener un sistema lineal equivalente cuya solución se obtiene directamente.

Procedimiento:

a) Se considera la matriz aumentada del sistema.

b) Se determina la **matriz escalonada reducida por filas** equivalente a la anterior.

c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se puede ver de inmediato la solución del sistema.

d) Verificar la solución.

Una matriz A es escalonada reducida por fila si ella es escalonada y además reducida por filas. Para que la matriz A sea reducida por fila debe cumplirse que:

i) El primer elemento no nulo de cada fila no nula de $\boldsymbol{A}$ es 1.

ii) Cada columna de $\boldsymbol{A}$ que contiene el primer elemento no nulo de alguna fila debe tener ceros en las demás posiciones.

Por ejemplo, de las matrices siguientes A es escalonada pero no reducida, B es reducida por filas pero no es escalonada, C es escalonada reducida por filas:

$$A=\begin{pmatrix}1&5&0\\0&3&-1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.9 Resolver el siguiente sistema lineal por el Método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}x+y+2z-5w&=3\\2x+5y-z-9w&=-3\\2x+y-z+3w&=-11\\x-3y+2z+7w&=-5\end{aligned}$$

Se toma la matriz aumentada de este sistema lineal y se inicia el proceso de eliminación para obtener una matriz escalonada reducida por fila.

El primer elemento no nulo de la primera fila debe ser 1. En este caso ya lo es. Luego los demás elementos de la primera columna deben ser ceros, para ello se aplican operaciones elementales en las filas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-5&3\\2&5&-1&-9&-3\\2&1&-1&3&-11\\1&-3&2&7&-5\end{array}\right)\xrightarrow[f_4\to f_4-f_1]{\substack{f_2\to f_2-2f_1\\ f_3\to f_3-2f_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-5&3\\0&3&-5&1&-9\\0&-1&-5&13&-17\\0&-4&0&12&-8\end{array}\right)$$

Se multiplica la segunda fila por $\frac{1}{3}$ para colocar un 1 como primer elemento no nulo en la segunda fila y luego hacer que los demás elementos de su columna sean ceros

$$\xrightarrow{f_2\to\frac{1}{3}f_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-5&3\\0&1&\frac{-5}{3}&\frac{1}{3}&-3\\0&-1&-5&13&-17\\0&-4&0&12&-8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4 \to f_4 + 4f_2]{\substack{f_1 \to f_1 - f_2 \\ f_3 \to f_3 + f_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{-16}{3} & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-20}{3} & \frac{40}{3} & -20 \\ 0 & 0 & \frac{-20}{3} & \frac{40}{3} & -20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_4 \to f_4 - f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{-16}{3} & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-20}{3} & \frac{40}{3} & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se multiplica la tercera fila por $\frac{-3}{20}$ para obtener un 1 como primer elemento no nulo de la fila tres y luego hacer que los demás elementos de su columna sean ceros.

$$\xrightarrow{f_3 \to \frac{-3}{20} f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{-16}{3} & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 + \frac{5}{3} f_3]{f_1 \to f_1 - \frac{11}{3} f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ya se obtuvo la matriz escalonada reducida por filas que es equivalente a la matriz aumentada del sistema lineal dado.

El sistema lineal equivalente representado por esta matriz es:

$$\begin{aligned} x \quad + 2w &= -5 \\ y - 3w &= 2 \\ z - 2w &= 3 \end{aligned}$$

Se ha eliminado la última fila que consta completamente de ceros.

La solución del sistema lineal se obtiene asignando a w un valor arbitrario r y se despejan todas las incógnitas. Por ejemplo: $w = r$

$$
\begin{aligned}
x &= -5 - 2r \\
y &= 2 + 3r \\
z &= 3 + 2r \\
w &= r
\end{aligned}
$$

En este caso el sistema es compatible indeterminado, pues tiene infinitas soluciones, para cada valor que se le asigne a r se obtiene una solución particular del sistema lineal. Por ejemplo si $r = 2$ se obtiene:

$$x = -9, \quad y = 8, \quad z = 7, \quad w = 2$$

Se puede verificar sustituyendo en cada ecuación o en forma matricial:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}
$$

Ejemplo 1.10 Hallar el valor (o los valores) de β para que el sistema dado sea compatible determinado, luego elegir un valor adecuado para β y resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan.

$$
\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y - \beta z = 6 \end{cases}
$$

Solución

Se inicia el proceso de eliminación usando operaciones elementales en las filas de la matriz ampliada.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -\beta & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -\beta - 10 & -5 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[f_1 \to f_1 + \frac{1}{3}f_2]{f_3 \to f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\beta - 8 & -1 \end{array}\right)
$$

El sistema es incompatible si $-\beta - 8 = 0$ y es compatible determinado si $-\beta - 8 \neq 0$ es decir $\beta \neq -8$.

Para resolver el sistema se elegirá el valor $\beta = -10$, luego

$$-\beta - 8 = 10 - 8 = 2$$

Ya la matriz está escalonada, falta llevarla a la forma reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to \frac{1}{2}f_3]{f_2 \to \frac{-1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - \frac{1}{3}f_3]{f_1 \to f_1 - \frac{5}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

La solución obtenida es $\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ la cual se verifica con la multiplicación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} + \frac{5}{6} - 1 \\ \frac{26}{6} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2} \\ \frac{65}{6} - \frac{5}{6} - \frac{10}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.11 Halle los valores de α y β para que el sistema dado sea compatible:

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= \alpha \\ x + y &= \beta \\ 5x - 13y &= 5\alpha - 2\beta \\ x + 2y &= \alpha + \beta - 1 \end{aligned}$$

Una vez hallado los valores de α y β, el lector debe sustituirlos en el sistema y buscar la solución del mismo.

Solución

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 5 & -13 & 5\alpha - 2\beta \\ 1 & 2 & \alpha + \beta - 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ 3 & -7 & \alpha \\ 5 & -13 & 5\alpha - 2\beta \\ 1 & 2 & \alpha + \beta - 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -3f_1+f_2\to f_2 \\ -5f_1+f_3\to f_3 \\ -f_1+f_4\to f_4 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ 0 & -10 & \alpha-3\beta \\ 0 & -18 & -5\beta+5\alpha-2\beta \\ 0 & 1 & -\beta+\alpha+\beta-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & -18 & 5\alpha-7\beta \\ 0 & -10 & \alpha-3\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[10f_2+f_4\to f_4]{18f_2+f_3\to f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 23\alpha-7\beta-18 \\ 0 & 0 & 11\alpha-3\beta-10 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible si se cumple que:

$$\begin{cases} 23\alpha-7\beta-18=0 \\ 11\alpha-3\beta-10=0 \end{cases} \text{, de donde } \quad \begin{matrix} \alpha=2 \\ \beta=4 \end{matrix}$$

Conclusión: si $\alpha = 2 \ y \ \beta = 4$ el sistema tiene solución.

Observaciones

- Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas es compatible, si y solo si, al llevar la matriz ampliada a la forma escalonada el número de filas no nulas de la matriz A de los coeficientes de las incógnitas es igual al número de filas no nulas de la matriz ampliada $(A|B)$.
- Si además el número de filas no nulas de dichas matrices, coincide con el número de incógnitas, entonces el sistema lineal tiene solución única.
- Si el número de incógnitas es mayor que el número de filas no nulas en las correspondientes matrices escalonadas, entonces el sistema lineal tendrá infinitas soluciones.

En el ejemplo 1.8 la matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$ que tiene **tres** filas no nulas, mientras que la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 \\ 0 & -16 & -10 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene **dos** filas no nulas, luego el sistema no tiene solución.

Se recomienda revisar la matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del ejemplo 1.9, donde podrá confirmar las afirmaciones dadas en las observaciones anteriores, igualmente en los ejemplos 1.10 y 1.11 se usan estas afirmaciones para lograr la respuesta en esos ejemplos

1.5 Matrices Elementales

De una matriz cuadrada A se dice que es **elemental** si se puede obtener al aplicarle una sola operación elemental a la matriz identidad.

Por ejemplo, si a la matriz $I_{3\times 3}$ (matriz identidad de tamaño 3×3) se le aplica la operación elemental $f_1 \to f_1 - 3f_2$ se obtendrá una matriz elemental:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - 3f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es elemental, si a ella se le aplica otra operación elemental dejaría de ser elemental.

Como existen diferentes operaciones elementales se implementará la siguiente notación para las matrices elementales

- $E_{i,j}$ denota la matriz elemental obtenida al intercambiar las filas i, j
- $E_{i,j}(\alpha)$ denota la matriz elemental obtenida al efectuar la operación elemental $f_i \to f_i + \alpha f_j$
- $E_i(\alpha)$ denota la matriz elemental obtenida al efectuar la operación elemental $f_i \to \alpha f_i$

Teorema 1.2 Sean A una matriz de tamaño $n\times m$ y E la matriz elemental obtenida al aplicar a la identidad de orden n una operación elemental cualquiera, al realizar el producto $E \cdot A$ se obtiene el mismo resultado que aplicar a la matriz A la misma operación elemental con la cual se obtiene E.

Ejemplo 1.12 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y la operación elemental $f_1 \rightarrow f_1 - 3f_2$.

a) Hallar la correspondiente matriz elemental de orden 3.

b) Efectuar el producto $E \cdot A$.

c) Aplicar a la matriz A la operación elemental indicada.

d) Comparar los resultados obtenidos en b y c.

Solución

a) Para hallar la correspondiente matriz elemental de orden 3 se le aplica la operación elemental $f_1 \rightarrow f_1 - 3f_2$ a la matriz identidad de orden 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow f_1 - 3f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2}(\text{-}3)$$

b) $$E_{1,2}(\text{-}3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow f_1 - 3f_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Tal como lo afirma el teorema anterior se obtiene el mismo resultado.

Teorema 1.3 Toda matriz elemental es invertible, y su inversa es también una matriz elemental.

Las inversas de las matrices elementales se determinan de la siguiente forma:

- $\left(E_{i,j}\right)^{-1} = E_{i,j}$, las matrices elementales obtenidas por intercambio de filas son iguales a su inversa.
- $\left(E_{i,j}(\alpha)\right)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$, la inversa de la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \rightarrow f_i + \alpha f_j$ es igual a la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \rightarrow f_i - \alpha f_j$

- $(E_i(\alpha))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, la inversa de la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to \alpha f_i$ es igual a la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to \frac{1}{\alpha} f_i$

Ejemplo 1.13 Obtener la inversa de las matrices elementales de orden 3 obtenidas con cada una de las siguientes operaciones:

a) $f_3 \to f_3 + 4f_1$ b) $f_3 \leftrightarrow f_1$ c) $f_2 \to -2f_2$

Solución

a) Se inicia obteniendo la matriz elemental a partir de la identidad de orden 3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 4f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{3,1}(4)$$

Ahora se obtendrá la matriz inversa de $E_{3,1}(4)$ que es la matriz elemental obtenida con la operación $f_3 \to f_3 - 4f_1$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 4f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{3,1}(-4)$$

Efectuando el producto $E_{3,1}(4) \cdot E_{3,1}(-4)$ se verifica si una es la inversa de la otra:

$$E_{3,1}(4) \cdot E_{3,1}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Análogamente $E_{3,1}(-4) \cdot E_{3,1}(4) = I_3$

Con lo cual se comprueba que efectivamente $E_{3,1}(-4) = \left(E_{3,1}(4)\right)^{-1}$

Se dejan b) y c) como ejercicios.

Teorema 1.4 Si A es una matriz $n{\times}m$, existen matrices elementales $E_1, E_2, \dots E_k$, todas de orden n y una matriz A^* de orden $n{\times}m$, escalonada reducida equivalente a A, tales que

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = A^* \tag{1.3}$$

Observaciones

- Cuando se busca la matriz escalonada reducida por filas equivalente a una matriz A, lo que se hace es aplicar una secuencia de operaciones elementales. Esas operaciones elementales producen el mismo resultado que la multiplicación por la izquierda por una matriz elemental, lo cual se confirma con este teorema.
- Si A es una matriz cuadrada de orden n e invertible, entonces la matriz escalonada reducida equivalente a ella es la identidad de orden n, por lo tanto la relación (1.3) quedaría así:

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathrm{I} \tag{1.4}$$

De donde se concluye que:

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$

Teorema 1.5 Una matriz cuadrada es invertible si y solo si ella es el producto de matrices elementales.

De (1.4) se tiene que $E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathrm{I}$, donde $E_1, E_2, \dots, E_k$ son matrices elementales y por lo tanto invertibles.

Multiplicando ambos miembros sucesivamente por las inversas de las matrices elementales se obtiene:

$$(E_k \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot (E_k \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot A = (E_k \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot \mathrm{I}$$

Pero $(E_k \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot (E_k \cdots E_2 \cdot E_1) = I$:

$$I \cdot A = (E_k \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1}$$

$$A = (E_k \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1}$$

Luego

$$\mathrm{A} = (E_1)^{-1} \cdots (E_{k-1})^{-1} \cdot (E_k)^{-1}$$

De modo que A puede expresarse como un producto de matrices elementales.

Estos resultados teóricos son los que avalan una forma práctica de obtener la inversa de una matriz usando operaciones elementales.

1.6 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Dada una matriz A cuadrada de orden n, si ella es invertible entonces existe su matriz inversa denotada por A^{-1} y se satisface la relación:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

El proceso se inicia partiendo de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con esta matriz A y la matriz identidad I_n se forma una matriz $(A|I_n)$, donde en la izquierda está la matriz a la cual se le quiere hallar su inversa y a la derecha la matriz identidad, para evitar confusiones se coloca una barra vertical como separador:

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots 1 \end{array}\right)$$

Mediante la aplicación de sucesivas operaciones elementales en las filas se obtiene en el lado izquierdo la matriz escalonada reducida equivalente a A y en lado derecho estará el producto de las matrices elementales correspondientes a las operaciones realizadas en las filas de I_n.

Si A es invertible entonces su forma escalonada reducida será I_n y en el lado derecho estará A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \dots 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Donde

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejemplo 1.14 Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_1]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_2]{f_1 \to f_1 + \frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to \frac{1}{2}f_3]{f_2 \to \frac{-1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1 \to f_1 - \frac{5}{3}f_3]{f_2 \to f_2 - \frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & 2 & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 2 & \frac{-5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Verificación, debe cumplirse $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, Para comprobar se realizará el producto $A \cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 2 & \frac{-5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aunque la multiplicación matricial no es conmutativa, es suficiente la verificación con un solo producto.

1.7 Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de los coeficientes

Dado un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots && \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{matrix}$$

Este se puede expresar en forma matricial $A.X = B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

Si la matriz A es invertible, entonces se puede obtener la inversa de A y con ella obtener la solución del sistema dado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A.X = B &\leftrightarrow A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B && \text{multiplicando por } A^{-1} \\ &\leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B && \text{asociatividad de la multiplicación} \\ &\leftrightarrow I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B && \text{pues } A^{-1} \cdot A = I_n \\ &\leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B && \text{debido a que } I_n \cdot X = X \end{aligned}$$

En conclusión: si la matriz A es invertible, la solución del sistema lineal $A \cdot X = B$ es $X = A^{-1} \cdot B$.

Ejemplo 1.15 Resolver el sistema lineal, usando la inversa:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -6 \\ 2x - y + 3z &= 3 \\ 5x - y + 10z &= 6 \end{aligned}$$

Solución

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, de la cual se calculó su inversa en el ejemplo 1.14 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 2 & \frac{-5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La solución del sistema lineal dado se calcula usando $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 2 & \frac{-5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+6-5 \\ -5+0-1 \\ 3-3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A, denotado por $|A|$ (o por det(A)) se calcula así:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= [1(-1) \cdot 10 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2(-1)] - [2(-1) \cdot 5 + 3(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 10]$$

$$= [-10 + 15 - 4] - [-10 - 3 + 20] = 1 - 7 = -6$$

Luego $|A| = -6$.

En álgebra matricial se conoce que una matriz cuadrada es invertible, si y solo si su determinante es diferente de cero. Por lo tanto, antes de buscar la matriz inversa para resolver un sistema lineal, se puede calcular el determinante para ver si la inversa existe.

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica las otras (de tal forma que si una es verdadera las demás también lo son y si una es falsa las otras son falsas):

i. A es invertible

ii. $|A| \neq 0$

iii. El sistema lineal $AX = B$ tiene solución única cualquiera que sea la columna B de tamaño $n\times 1$

iv. La matriz escalonada reducida por filas equivalente a A es I_n (la identidad de orden n).

1.8 Ejemplos de aplicaciones de sistemas lineales

Los sistemas lineales son utilizados para resolver una amplia diversidad de problemas, a continuación, se presentan algunos ejemplos de aplicaciones.

Ejemplo 1.16 Una fábrica produce tres modelos de computadoras personales: A, B y C. Para armar una computadora modelo A se necesitan 12 horas de ensamblado, 2.5 horas para probarla, y 2 horas para instalar sus programas. Para una modelo B se requiere 10 horas de ensamblado, 2 horas para probarla, y 2 horas para instalar programas. Y para una C es necesario 6 horas para ensamblado, 1.5 horas para probarla, y 1.5 horas para instalar programas. Si la fábrica dispone de 556 horas por mes para ensamble, 120 horas por mes para pruebas, y 103 horas por mes para instalación de programas, ¿cuántas computadoras se pueden producir por mes?

Solución

En este caso las incógnitas son las cantidades de computadoras de cada tipo que se van a producir. Sea

x: número de computadoras A

y: número de computadoras B

z: número de computadoras C

Para determinar las ecuaciones se debe utilizar los tiempos de ensamblado, pruebas e instalación de programas, con los cuales se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas que forman un sistema lineal:

Ensamblado	$12\,x + 10\,y + 6\,z = 556$
Pruebas	$2.5\,x + 2\,y + 1.5\,z = 120$
Instalación de programas	$2\,x + 2\,y + 1.5\,z = 103$

Al resolver este sistema por cualquiera de los métodos se obtiene:

$$x = 34,\ y = 4,\ z = 18$$

Por lo tanto, en un mes la fábrica puede construir 34 computadoras del tipo A, 4 del tipo B y 18 del tipo C

Ejemplo 1.17 Pedro tenía $\$RD\ 12{,}100$. Decidió colocar su dinero en certificados de ahorro y fondos de inversión. Invirtió una parte de su dinero en certificados de ahorro que pagaban 8% de interés anual, y el resto en un fondo de inversión que pagaba 9% anual. Luego de un año, el ingreso total que ganó de esas inversiones fue $\$RD\ 1{,}043$. ¿Cuánto colocó en certificados de ahorro y cuánto en fondos de inversión?

Solución

Las incógnitas en este problema son la cantidad que invirtió en certificados y la cantidad que invirtió en fondos de inversión:

Sea x la cantidad que invirtió en certificados de ahorro.

Sea y la cantidad que invirtió en fondos de inversión.

Las ecuaciones serían:

$$\text{Cantidad total} \quad \rightarrow \quad x + y = 12{,}100$$

$$\text{ganancia de inversiones} \quad \rightarrow \quad 0.08x + 0.09y = 1{,}043$$

Al resolver el sistema lineal, se obtiene $x = 4{,}600$ e $y = 7{,}500$

Pedro invirtió $\$RD\ 4{,}600$ en certificados de ahorro y $\$RD\ 7{,}500$ en fondos de inversión.

Ejemplo 1.18 El sistema de enfriamiento de un determinado vehículo es de 10 litros y está lleno con 20% de refrigerante y el resto de agua. ¿Qué cantidad de solución debe reemplazarse con refrigerante para elevar la concentración a 50%?

Solución

Sean x es la cantidad de solución a retirar, y es la cantidad de solución que queda en el sistema de enfriamiento.

La cantidad que se retira (x) más la cantidad que queda (y) es igual a 10 litros, por lo que se tiene la ecuación $x + y = 10$.

Como la cantidad de refrigerante que se agrega (x) más el 20% de lo que queda (0.2 y) es igual a 5 litros (50% de 10) se obtiene la ecuación $x + 0.2y = 5$

Se forma el sistema $\begin{cases} x + \ \ y = 10 \\ x + 0.2y = 5 \end{cases}$ cuya solución es $x = 3.75, \ \ y = 6.25$

Por lo tanto, la cantidad de solución que debe reemplazarse con refrigerante para elevar la concentración a 50% es 3.75 litros.

Ejemplo 1.19 Se tienen dos terrenos A y B de forma rectangular que tienen la misma área. El ancho del terreno A es menor en 2 yardas que su largo; el terreno B es 3 yardas más angosto que A y 4 yardas más largo que el terreno A. Hallar las dimensiones del terreno A.

Solución

Sean $x_a, \ y_a$ el ancho y el largo del terreno A, expresado en yardas.

$x_b, \ y_b$ el ancho y el largo del terreno B, expresado en yardas.

Como el ancho del terreno A es menor en 2 yardas que su largo, entonces

$$x_a = y_a - 2 \tag{1.5}$$

Como el ancho del terreno B es 3 yardas más angosto y 4 yardas más largo que el terreno A, entonces:

$$x_b = x_a - 3, \ \ y_b = \ y_a + 4 \tag{1.6}$$

Dado que ambos terrenos son rectangulares y tiene la misma área, se tiene que:

$$x_a \cdot \ y_a = x_b \cdot \ y_b \tag{1.7}$$

Sustituyendo (1.6) en (1.7) se obtiene:

$$x_a \cdot \ y_a = (x_a - 3) \cdot (y_a + 4) \ \ \rightarrow \ \ x_a \cdot \ y_a = x_a \cdot \ y_a + 4x_a - 3y_a - 12$$

Simplificando se obtiene la ecuación siguiente:

$$4x_a - 3y_a = 12 \tag{1.8}$$

Se forma un sistema lineal con las ecuaciones (1.5) y (1.8): $\begin{cases} \ \ x_a - y_a = -2 \\ 4x_a - 3y_a = 12 \end{cases}$

Al resolver el sistema se obtiene: $x_a = 18$ y $y_a = 20$.

Las dimensiones del terreno A son 18 yardas de ancho y 20 yardas de largo.

Si se desea encontrar las dimensiones del terreno B, entonces se procede a sustituir $x_a = 18$ y $y_a = 20$ en (1.6) y se obtiene $x_b = 15,\ \ y_b = 24$

Las dimensiones del terreno B son 15 yardas de ancho y 24 yardas de largo.

Resumen de contenidos de la unidad I

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

donde los a_{ij} (llamados coeficientes) y los b_i (términos independientes) son constantes reales cuyos valores se conocen. Los valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema constituyen una solución del sistema de ecuaciones lineales. Resolver un sistema de ecuaciones lineales, consiste en encontrar todas las soluciones, si es que existen.

Si el sistema lineal tiene solución única, se dice que es un sistema lineal compatible determinado.Si tiene infinitas soluciones, entonces es un sistema lineal compatible indeterminado y si no tiene solución se dice que el sistema lineal incompatible.

Sistemas lineales equivalentes

Un sistema lineal es equivalente a cualquier sistema que se obtenga mediante una operación elemental. Esto se debe a que tales operaciones no alteran las soluciones de un sistema lineal.

Las operaciones elementales son las que se describen a continuación:

Tipo I Intercambio de dos ecuaciones del sistema

Tipo II Reemplazo de una ecuación por un múltiplo escalar no nulo de ella

Tipo III Reemplazo de una ecuación del sistema por la suma de ella y un múltiplo real de otra ecuación del sistema.

De un sistema lineal se dice que es homogéneo si los términos independientes de cada una de sus ecuaciones son iguales a cero.

Los sistemas lineales homogéneos son compatibles, es decir, todo sistema homogéneo tiene solución.

Teorema Un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas siempre tiene soluciones no triviales si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

Forma matricial de un sistema lineal

El sistema lineal (1) se puede expresar en la forma matricial $A \cdot X = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de los coeficientes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ columna de las incógnitas

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ columna de los términos independientes

Matriz ampliada del sistema lineal:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Procedimiento para aplicar el método de Gauss:

a) Se considera la matriz aumentada (o ampliada) del sistema.

b) Se determina una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se detecta directamente un valor de una de las incógnitas.

d) Se usa la sustitución regresiva para encontrar los valores de las incógnitas.

e) Verificar la solución.

Operaciones elementales por fila:

- Intercambio de fila $\boldsymbol{i}$ con fila $\boldsymbol{j}$: $f_i \leftrightarrow f_j$
- Sustituir una fila por un múltiplo escalar de ella misma: $f_i \rightarrow \alpha f_i$.
- Reemplazar una fila por la suma de ella más un múltiplo de otra fila:

$$f_i \rightarrow f_i + \alpha f_j$$

Una **matriz es escalonada** si se cumplen las siguientes condiciones:

- Las filas nulas (si las hay) están debajo de las filas no nulas.
- Si dos filas sucesivas tienen elementos no nulos, entonces el primer elemento no nulo de la fila de abajo está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila de arriba.

Procedimiento para aplicar el método de Gauss–Jordan.

a) Se considera la matriz aumentada del sistema.

b) Se halla la **matriz escalonada reducida por filas** equivalente a la anterior.

c) Se construye un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, donde se puede ver de inmediato la solución del sistema.

d) Verificar la solución.

Una matriz A es **reducida por fila** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) El primer elemento no nulo de cada fila no nula de $\boldsymbol{A}$ es 1.

ii) Cada columna de $\boldsymbol{A}$ que contiene el primer elemento no nulo de alguna fila debe tener ceros en las demás posiciones.

Matrices Elementales

De una matriz cuadrada A se dice que es **elemental** si se puede obtener al aplicarle una sola operación elemental a la matriz identidad.

Como existen diferentes operaciones elementales se implementará la siguiente notación para las matrices elementales

- $E_{i,j}$ denota la matriz elemental obtenida al intercambiar las filas i, j

- $E_{i,j}(\alpha)$ denota la matriz elemental obtenida al efectuar la operación elemental $f_i \to f_i + \alpha f_j$
- $E_i(\alpha)$ denota la matriz elemental obtenida al efectuar la operación elemental $f_i \to \alpha f_i$

Teorema. Sean A una matriz de tamaño $n{\times}m$ y E la matriz elemental obtenida al aplicar a la identidad de orden n una operación elemental cualquiera, al realizar el producto $E \cdot A$ se obtiene el mismo resultado que aplicar a la matriz A la misma operación elemental con la cual se obtiene E.

Teorema. Toda matriz elemental es invertible, y su inversa es también una matriz elemental.

Las inversas de las matrices elementales se determinan de la siguiente forma:

- $\left(E_{i,j}\right)^{-1} = E_{i,j}$, las matrices elementales obtenidas por intercambio de filas son iguales a su inversa.
- $\left(E_{i,j}(\alpha)\right)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$, la inversa de la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to f_i + \alpha f_j$ es igual a la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to f_i - \alpha f_j$.
- $(E_i(\alpha))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, la inversa de la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to \alpha f_i$ es igual a la matriz elemental obtenida por la operación $f_i \to \frac{1}{\alpha} f_i$.

Teorema. Si A es una matriz $n{\times}m$, existen matrices elementales $E_1,\ E_2, \dots\ E_k$, todas de orden n y una matriz A^* de orden $n{\times}m$, escalonada reducida

equivalente a A, tales que $E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = A^*$

Teorema. Una matriz cuadrada es invertible si y solo si ella es el producto de matrices elementales.

Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Sea una A matriz cuadrada de orden n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Se forma una matriz $(A|I_n)$ y mediante la aplicación de sucesivas operaciones elementales en las filas se obtiene en el lado izquierdo la matriz escalonada reducida C equivalente a A y en lado derecho estará el producto de las matrices elementales correspondientes a las operaciones realizadas en las filas de I_n: $(C|B)$. Si A es invertible entonces $C = I_n$ y $B = A^{-1}$.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la inversa de la matriz de los coeficientes

Dado un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, se puede expresar en forma matricial $A \cdot X = B$:

Si A es invertible, la solución del sistema lineal $A \cdot X = B$ es $X = A^{-1} \cdot B$

Teorema. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- **i.** A es invertible
- **ii.** $|A| \neq 0$
- **iii.** El sistema lineal $A \cdot X = B$ tiene solución única cualquiera que sea la columna B de tamaño $n \times 1$
- **iv.** La matriz escalonada reducida por filas equivalente a A es I_n (la identidad de orden n).

Actividades de la unidad I

1) En cada caso, escribe el sistema lineal cuya matriz aumentada es:

a) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$ b) $B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

2) Resuelva los siguientes sistemas, usando el método de Gauss

a) $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ x - 5z - 4y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + 3y + z = -2 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 4y + 5z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y + z = -2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 2x + 10z = -4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + 5z + 10w = 2 \\ -x - 2z - 4w = 4 \\ 2x + 4y + 8z + 16w = 0 \\ y + z + 2w = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x - z + 6y + 8w = 10 \end{cases}$

3) Resuelva los sistemas lineales, usando el método de Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} -3x - 4y - 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 2x - 6y - 3z = 5 \\ -x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$

4) En cada caso, resuelva el sistema $A \cdot X = B$ usando el método de la matriz inversa, donde:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

5) Sea el sistema $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$. Determine los valores de a para que el sistema:

i) no tenga solución. ii) tenga infinitas soluciones.

iii) tenga solución única.

6) Determine una ecuación que relacione a, b, c de modo que el sistema lineal con matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & \boldsymbol{a}\\ 2 & -1 & -1 & \boldsymbol{b}\\ 4 & 1 & -5 & \boldsymbol{c}\end{array}\right)$ tenga solución.

7) Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

¿Qué condiciones deben cumplir b_1, b_2, b_3 para que el sistema tenga:

a) Solución única b) Infinitas soluciones c) No tenga solución

8) En cada caso, encuentre la matriz elemental E tal que EA=B:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 10\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

9) Dada la matriz $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ se pide:

a) Resuelva el sistema (C+I)X=0 , I es la matriz identidad de orden 3.

b) Usando el $|C|$ determine si el sistema $CX=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ tiene solución única.

10) Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Resolver el sistema AX=3X

11) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. Resolver el sistema $(A - \lambda I)X = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3, para: a) $\lambda = -1$ b) para $\lambda = 2$

12) Determine si las siguientes matrices son escalonadas, reducidas por filas.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13) Si el numerador de una fracción se disminuye en 2 y el denominador aumenta en 3, la nueva fracción es $\frac{1}{8}$; pero si se aumentan el numerador y el denominador en 4, la fracción sería $\frac{7}{9}$. Halle la fracción inicial.

14) En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas).

La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.

Actividades de autoevaluación de la unidad I

PARTE I. A continuación, se presentan varias preguntas, cada una tiene cuatro opciones, de las cuales solo una es correcta. Seleccione la respuesta correcta.

1) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación lineal en las variables x, y, z, w?

a) $\mathrm{x + y - z = w^2}$

b) $\frac{\mathrm{x+y-z}}{\mathrm{w}} = 2$

c) $\sqrt{\mathrm{x + y - z}} = 2\mathrm{w}$

d) $\frac{\mathbf{x+y-z}}{\mathbf{2}} = \mathrm{w}$

2) La solución del sistema $\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ 2x + z + y = \;\; 4 \\ x + z + 2y = -4 \end{cases}$ es:

a) $x = -\frac{9}{2}$, $y = \frac{7}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$

b) $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{7}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$

c) $x = \frac{7}{2}$, $y = -\frac{9}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$

d) $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{7}{2}$, $z = -\frac{9}{2}$

3) ¿Cuál de las siguientes operaciones no simboliza una operación elemental por filas de una matriz?

a) $f_2 \to f_2 - 3f_3$

b) $f_2 \to 4f_2$

c) $f_2 \to 3f_2 - f_3$

d) $f_2 \leftrightarrow f_3$

4) ¿Cuál de los siguientes sistemas es equivalente al sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$?

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - y = 14 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$

5) Si la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales es cuadrada y **no** invertible entones se puede concluir que:

a) Los sistemas no tienen solución.

b) El sistema tiene infinitas soluciones.

c) El sistema no tiene solución única.

d) El sistema tiene solución única.

6) El sistema $\begin{cases} ax + cy = b \\ ex + fy = g \end{cases}$ tiene solución única si se cumple que:

a) a, b, c, e, f, g son distintos de cero.

b) $a \cdot f - e \cdot c \neq 0$

c) a, c, e, f son distintos de cero.

d) $a \cdot g - e \cdot b \neq 0$

7) ¿Cuál de las siguientes matrices **no** es una matriz elemental?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) Si la matriz de los coeficientes de un sistema homogéneo, de n ecuaciones con n incógnitas, es invertible entonces se puede afirmar que:

a) El sistema tiene soluciones diferentes de la trivial (solución nula).

b) La única solución del sistema es la solución trivial.

c) El sistema tiene infinitas soluciones.

d) El sistema tiene solución única no trivial.

9) La matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es

a) Escalonada pero no reducida por fila
b) No es escalonada ni reducida por fila
c) No es escalonada, pero si reducida por fila
d) Escalonada y reducida por fila

10) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma $C \cdot X = D$?

a) Si $|C| = 0$ entonces el sistema no tiene solución.

b) Si $|C| \neq 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si $|C| \neq 0$ entonces la solución del sistema es $X = C^{-1} \cdot D$.

d) Si $|C| = 0$ entonces el sistema tiene solución única.

11) El sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = k \\ 2x + 6y - 11z = n \\ x - 2y + 7z = p \end{cases}$ tiene solución si k, n, p satisfacen la condición:

a) $-5k + 2n + p = 0$
b) $5k + 2n - p = 0$

c) $-5k - 2n + p = 0$

d) $5k + 2n + p = 0$

PARTE II.

1) Sea el sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$.

a) Resuelva el sistema dado usando el método de Gauss.

b) Resuelva el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

2) Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Resuelva el sistema $AX = B$ usando el método de la matriz inversa.

3) Una fábrica contrata a María, José y Antonio para producir cuatro tipos de artículos. El número de horas que participa cada empleado en la producción de una unidad de cada artículo se representa en la siguiente tabla:

Artículos	María	José	Antonio
x	1	2	3
y	2	5	6
z	1	0	4
w	3	1	10

Suponiendo que María, José y Antonio tienen contratos por 120, 100 y 400 horas respectivamente, se quiere determinar cuál es el número de unidades de cada tipo de artículo que se pueden producir durante el tiempo de los contratos.

a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones lineales el problema dado.

b) Tomando en cuenta que las incógnitas no pueden tomar valores negativos, encuentre un intervalo, para la variable libre, donde las soluciones tengan sentido.

Bibliografía de la unidad I

- Tucker, A. (1993). *Linear Algebra. New York*. Macmillan Publishing Company.
- Howard, A. (1979*). Introducción al Álgebra Lineal.* (Tercera edición). México. Editorial Limusa.
- Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal. (séptima edición).* México. McGraw Hill.
- Kolman B., Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal. (Octava edición).* México. Pearson Prentice Hall.
- Lay, D. (2012) *Algebra Lineal y sus aplicaciones (cuarta edición).* México. Pearson Educación
- Rojo, A. (1976). *Álgebra II. (Cuarta edición).* Buenos Aires. Librería El Ateneo Editorial.