LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Elizabeth Vargas Villegas

Luis Alfredo Núñez

EDICIONES UAPA

Santiago de los Caballeros

República Dominicana, 2019

UNIDAD II

Razonamiento lógico
y métodos de demostración

ORIENTACIONES DE LA UNIDAD II

Una característica de la matemática es que sus proposiciones son sometidas a un análisis riguroso llamado demostración, lo que permite aceptar tales proposiciones como teoremas. En una demostración se deben aplicar métodos y cumplir ciertas reglas, para deducir una conclusión, este proceso no es exclusivo de la matemática, en todas las áreas del saber y en el quehacer diario nos encontramos con la necesidad de obtener una conclusión a partir de un conjunto de informaciones o suposiciones. El problema es cómo saber si ese proceso de pensamiento que se ha ejecutado para derivar una conclusión es correcto. En esta unidad denominada **Razonamiento lógico y métodos de demostración** se trata de dar respuesta a esa necesidad, en ella se ofrecen herramientas que permiten desarrollar un proceso deductivo y también calificar un razonamiento como válido o no válido.

Cuando se habla de razonamientos, argumentos y demostraciones parece como algo complicado que está más allá de nuestras posibilidades, con el estudio de esta unidad el participante notará que no hay tales dificultades, para iniciar solo se requiere el uso del lenguaje simbólico de la lógica proposicional, proposiciones, conectivos y construir tablas de verdad. Con estas herramientas y un poco de dedicación el participante podrá adquirir las habilidades necesarias para entender las demostraciones matemáticas que puedan encontrar en los textos y también desarrollar sus propias demostraciones.

"El razonamiento se hace por el sentimiento que nos produce en la mente la evidencia de la verdad, sin necesidad de norma o regla alguna"

Jean Marie Duhamel

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD II

- Determina si un argumento es válido.
- Demuestra la equivalencia entre dos proposiciones compuestas.
- Identifica las formas de razonamiento deductivo.
- Aplica reglas de inferencia y leyes lógicas para deducir la conclusión derivada de un conjunto de premisas.
- Identifica la hipótesis y la tesis de un teorema.
- Demuestra teoremas usando los métodos de demostración.

ESQUEMA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD II

2.1 Definiciones

2.1.1 Argumentos

El propósito principal de la Lógica formal es el estudio de los argumentos deductivos que son llamados en este texto simplemente "argumentos". Un argumento es un grupo de proposiciones donde se afirma que una de ellas que es llamada "conclusión" se deriva como consecuencia de las otras que son llamadas "premisas", por lo que a cada deducción posible le corresponde un argumento.

En este apartado se estudiará el significado del concepto de "argumento válido", el cual será utilizado para demostrar la veracidad de proposiciones.

Si un argumento tiene como premisas las proposiciones: P_1, P_2, …, P_n y como conclusión C, entonces se simboliza

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$$

Y usualmente se escribe en forma vertical

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

2.1.2 Validez de un argumento

Una proposición posee un valor de verdad (verdadero o falso), con proposiciones se construyen los argumentos o razonamientos, pero los argumentos no son ni verdaderos ni falsos, a estos se les califica como válidos o no válidos.

El argumento o razonamiento $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ se dice que es válido si la conclusión C es verdadera cada vez que todas las premisas P_1, P_2, . . , P_n lo sean. Es decir que las premisas implican lógicamente la conclusión, dicho de otra forma, un argumento es válido cuando $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ es una tautología.

Ejemplo:

P_1: Si Antonio nació en La Romana, entonces Antonio es dominicano

P_2: Antonio nació en La Romana

C: Antonio es dominicano

En este ejemplo, la primera premisa P_1 es un condicional que nos afirma que si Antonio nació en La Romana, necesariamente Antonio es dominicano. La segunda premisa P_2 nos afirma que Antonio nació en La Romana. Por lo tanto se concluye lógicamente que Antonio es dominicano.

En forma simbólica puede ser escrito así:

$$\begin{array}{l} P_1 : p \rightarrow q \\ P_2 : p \\ \hline C : \ q \end{array}$$

donde

p: Antonio nació en La Romana y q: Antonio es dominicano

Revisemos este ejemplo con una tabla de verdad

p	q	p→q	
V	V	V	
~~V~~	~~F~~	~~F~~	Se descarta esta fila pues se supone que la premisa P_1 es V
~~F~~	~~V~~	~~V~~	Se eliminan estas dos filas pues la premisa P_2 debe ser verdadera
~~F~~	~~F~~	~~V~~	

Por lo que en la tabla queda solo una posibilidad en la cual q es verdadera.

Esto prueba que la verdad de las premisas garantiza la verdad de la conclusión en este razonamiento. Por lo tanto el razonamiento es válido.

El lector puede verificar con una tabla de verdad que $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ es una tautología, es decir que la conjunción de las premisas implica la conclusión.

Ejemplo de un razonamiento no válido.

P_1 : Si es dominicano, entonces es americano
P_2: Si es mexicano, entonces es americano
C: Si es mexicano, entonces es dominicano

En este caso aunque las premisas sean verdaderas, la conclusión es falsa.

Un argumento con premisas verdaderas y conclusión falsa nunca será válido.

Pero existen argumentos no válidos con premisas y conclusión verdaderas, como el que se ilustra a continuación:

Ejemplo.

"Si Sammy Sosa nació en San Pedro de Macorís, entonces no es verdad que nació en Puerto Rico. Pero Sammy Sosa no nació en Puerto Rico. Por lo tanto, nació en San Pedro de Macorís".

El argumento anterior se puede expresar así:

P_1 : Si Sammy Sosa nació en San Pedro de Macorís, entonces no es verdad que nació en Puerto Rico.
P_2 : Sammy Sosa no nació en Puerto Rico.
C : Sammy Sosa nació en San Pedro de Macorís.

En este argumento las premisas P_1 y P_2, y la conclusión C son verdaderas conforme a los hechos, pero el argumento no es válido.

En este caso la invalidez no proviene del contenido de las proposiciones, sino de la forma del argumento. Si la forma fuese correcta se podría aplicar a otros casos semejantes como el siguiente:

Ejemplo.

"Si Sammy Sosa nació en La Habana, entonces no es verdad que nació en Puerto Rico. Pero Sammy Sosa no nació en Puerto Rico. Por lo tanto, nació en La Habana".

Este argumento tiene la misma forma que el anterior, pero tiene sus dos premisas verdaderas y la conclusión falsa, obviamente es no válido.

Para que un razonamiento sea válido se debe seguir las reglas de inferencia y eso es lo que falla en los dos ejemplos anteriores.

2.2 Inferencia

La **inferencia lógica**, es el proceso de obtención de una proposición a partir de otra u otras proposiciones dadas, en dicho proceso se aplican reglas y métodos, de tal manera que la proposición que resulte sea consecuencia lógica de las proposiciones dadas.

A las proposiciones dadas se les llaman **premisas** y se suponen verdaderas. A la proposición obtenida o deducida como resultado de una inferencia lógica, se le llama **conclusión** y esta también debe ser verdadera.

Al proceso mediante el cual la conclusión se obtiene de las premisas también se le llama **deducción, prueba o demostración**.

Conociendo las formas de las proposiciones y teniendo los instrumentos de simbolización al alcance, se puede ir a esta parte importante de la Lógica que es la inferencia.

2.3 Reglas de inferencia

Una regla de inferencia es una forma de razonamiento que valida la verdad de una conclusión a partir de premisas verdaderas; es decir, si las premisas son verdaderas, la conclusión también tendrá que ser verdadera.

Cada tautología da origen a una ley lógica, de las infinitas que existen se requieren unas pocas para el proceso de inferencia. Estas leyes son la base teórica que fundamenta a las reglas de razonar en forma válida, las cuales son llamadas **reglas de inferencia.**

Las reglas de inferencia se presentan como implicaciones (condicionales), donde el antecedente está compuesto de la conjunción de las premisas y el consecuente es la conclusión que de ellas se deriva, tales implicaciones deben ser tautológicas, pues tienen que estar amparadas por leyes lógicas, es decir, cada ley lógica autoriza a un acto de inferencia.

2.3.1 Implicaciones lógicas

Si A y B son proposiciones. Se dice que A implica lógicamente a B, o simplemente A implica a B, si y solo si la proposición compuesta $A \rightarrow B$ es una tautología.

Esto equivale a decir que cuando A resulta verdadera, entonces B también es verdadera.

Ejemplo. La conjunción $p\wedge q$ implica a q, es decir $(p\wedge q)\rightarrow q$ es una tautología.

Se procede a verificar que la proposición compuesta es una tautología, para ello se construye su tabla de verdad:

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La proposición compuesta $(p\wedge q)\rightarrow q$ es una tautología, pues la columna correspondiente solo contiene el valor de verdad V.

Ahora se intentará determinar si $p\vee q$ implica p. Para ello se construye la tabla de verdad de $(p\vee q)\rightarrow q$

p	q	$p\vee q$	$(p\vee q)\rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

En este caso no es una tautología y por lo tanto la disyunción $p\vee q$ no implica q

2.3.2 Equivalencias lógicas

En la unidad anterior se trató este tema y se dieron algunos ejemplos. Allí se afirmó que dos proposiciones son equivalentes si en sus tablas de verdad las columnas correspondientes a ellas son idénticas.

Recordando que el conectivo bicondicional produce una proposición verdadera cuando sus componentes tienen igual valor de verdad, se puede concluir que al conectar dos proposiciones equivalentes con el conectivo bicondicional, se genera una tautología. Es decir, para dos proposiciones compuestas P y Q se cumple que: $P\cong Q$ si y sólo si $P\leftrightarrow Q$ es una tautología.

Las tautologías así obtenidas se llaman **Leyes lógicas de equivalencia**.

En general toda tautología es una ley lógica.

Propiedades de las equivalencias:

La relación de equivalencia entre fórmulas proposicionales cualesquiera P, Q y H satisface las propiedades siguientes:

a. **Reflexiva**: $P \cong P$

Toda proposición es equivalente a ella misma

b. **Simetría**: $P \cong Q \leftrightarrow Q \cong P$

Si P es equivalente a Q, entonces, Q es equivalente a P y recíprocamente.

c. **Transitividad**: $(P \cong Q \wedge Q \cong H) \rightarrow P \cong H$

Si una proposición Q es equivalente a otras dos proposiciones P y H, entonces P y H también son equivalentes entre sí.

Ejemplos

a. Probar con las tablas de verdad que cualquiera sea la proposición p se cumplen las equivalencias:

1) $p \vee p \cong p$ 2) $p \wedge p \cong p$ 3) $p \vee p \cong p \wedge p$

b. Sin usar tablas de verdad probar que de las equivalencias 1) y 2) se deduce 3)

Solución

a. Se procede a construir una tabla para estas tres proposiciones.

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

Las tres columnas son idénticas, por lo cual las tres proposiciones son equivalentes entre sí.

b. De las equivalencias 1) y 2) se tiene que:

$$p \vee p \cong p \ \wedge \ p \wedge p \cong p$$

Aplicando simetría a $p \wedge p \cong p$ se obtiene:

$$p \vee p \cong p \ \wedge \ p \cong p \wedge p$$

Por transitividad se obtiene que: $p \vee p \cong p \wedge p$

De una forma sencilla se ha desarrollado la demostración lógica de $p \vee p \cong p \wedge p$ para cualquier proposición p.

El lector debe tener cuidado, pues esta equivalencia no es válida con dos proposiciones distintas, es decir, $p \vee q \cong p \wedge q$ **no** es cierta y puede verse en sus tablas de verdad.

Nota: La demostración es un tema que se abordará más adelante en esta unidad, igualmente las relaciones de equivalencia, que se estudiarán en la última unidad, ayudarán a comprender mejor estas propiedades: reflexividad, simetría y transitividad.

A continuación se da un primer grupo de las equivalencias lógicas de mayor utilidad en los procesos de inferencia.

Leyes del álgebra de proposiciones

1. Leyes Idempotentes	
a) $(p \vee p) \cong p$ b) $(p \wedge p) \cong p$	La disyunción y la conjunción son Idempotentes
2. Leyes Asociativas	
a) $(p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \wedge r \cong p \wedge (q \wedge r)$	Asociatividad de la disyunción inclusiva Asociatividad de la conjunción
3. Leyes Conmutativas	
a) $p \vee q \cong q \vee p$ b) $p \wedge q \cong q \wedge p$	Conmutatividad de la disyunción inclusiva Conmutatividad de la conjunción
4. Leyes Distributivas	
a) $p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributividad de la disyunción

	respecto a la conjunción
b) $p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
5. Leyes de Complementación	
a) $p \vee (\sim p) \cong V$ b) $p \wedge (\sim p) \cong F$ c) $\sim(\sim p) \cong p$	Tercero excluido Contradicción Doble negación

Las leyes asociativas de la disyunción y la conjunción permiten escribir $p\vee q\vee r$ en lugar de $p\vee(q \vee r)$ o de $(p\vee q)\vee r$ y en forma análoga $p\wedge q\wedge r$ en lugar $(p\wedge q)\wedge r$ o de $p\wedge(q\wedge r)$, sin temor a caer en una ambigüedad. Es decir, en estos casos no son necesarios los signos de agrupación.

Para complementar las leyes mencionadas se agregan las siguientes que también son de importancia.

Otras Leyes lógicas de equivalencia

6. Ley del condicional	
$p\rightarrow q \cong \sim p\vee q$	El condicional equivale a la disyunción entre la negación del antecedente y el consecuente.
7. Ley del bicondicional	
$p\leftrightarrow q \cong (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	El bicondicional equivale a la conjunción de un condicional y su recíproco.
8. Ley del contrarrecíproco	
$p\rightarrow q \cong \sim q\rightarrow\sim p$	Un condicional es equivalente a su contrarrecíproco
9. Ley de la disyunción exclusiva	
$p \veebar q \cong (p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$	

Todas las leyes anteriores (de ambos grupos) requieren de una verificación, para ello deben construirse las correspondientes tablas de verdad a fin de verificar que al sustituir el símbolo $\cong$ por $\leftrightarrow$ se obtienen tautologías.

A continuación se desarrolla la ley 9: $p \veebar q \cong (p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$

p	q	~p	~q	p∧~q	~p∧q	**(p∧~q)∨ (~p∧q)**	**p ⊻ q**
V	V	F	F	F	F	**F**	**F**
V	F	F	V	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F	V	**V**	**V**
F	F	V	V	F	F	**F**	**F**

Observe que las columnas correspondientes a $(p \veebar q)$ y $[(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)]$ son idénticas, si se enlazan estas dos compuestas con el conectivo $\leftrightarrow$ se obtiene una tautología.

2.3.3 Reglas Básicas de Inferencia

En general cada tautología es una ley lógica y genera una regla de inferencia, por ejemplo $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ es una tautología (puede verificarse construyendo la tabla de verdad), es una de las leyes de equivalencia, conocida como Ley del Condicional $(p\rightarrow q)\cong(\sim p\vee q)$, en el proceso de inferencia se puede utilizar como una regla que permite obtener como conclusión $\sim p\vee q$ a partir de la premisa $p\rightarrow q$ y viceversa.

A continuación se nombran algunas reglas de inferencias adicionales que junto a las que se derivan de las leyes ya mencionadas constituyen el grupo básico de reglas de inferencia.

2.3.3.1 Regla de adjunción (o de conjunción)

Si se tienen dos proposiciones como premisas, su conjunción puede ser inferida como conclusión:

$$\begin{array}{l} P_1:\ p \\ P_2:\ q \\ \hline C:\ p\wedge q \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{l} P_1: \text{Pedro es carpintero} \\ P_2: \text{Juan es albañil} \\ \hline C: \text{Pedro es carpintero y Juan es albañil} \end{array}$$

2.3.3.2 Regla de simplificación

Si se tiene una premisa formada por la conjunción de dos proposiciones, entonces se puede deducir a cualquiera de las dos proposiciones por separado.

$$\begin{array}{l} P_1: p \wedge q \\ \hline C_1: p \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l} P_1: p \wedge q \\ \hline C_2: q \end{array}$$

Esta regla está garantizada pues $p \wedge q \rightarrow p$ y $p \wedge q \rightarrow q$ son tautologías, lo cual equivale a decir que son leyes lógicas (Ley de Simplificación).

Ejemplo

$$\begin{array}{l} \text{P: 3 es mayor que 1 y menor que 5} \\ \hline \text{C: 3 es menor que 5} \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{l} \text{P: 3 es mayor que 1 y menor que 5} \\ \hline \text{C: 3 es mayor que 1} \end{array}$$

2.3.3.3 Regla de adición

Dada una proposición p como premisa, es posible deducir de ella la disyunción $p \vee q$, donde q es cualquier proposición.

$$\begin{array}{l} P_1: p \\ \hline C: p \vee q \end{array}$$

El participante debe comprobar que $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

2.3.4 Leyes de Morgan

Estas son reglas de inferencia basada en un par de leyes de equivalencia, que establecen el resultado de negar una disyunción o una conjunción de proposiciones. Ellas permiten transformar una disyunción en conjunción y viceversa, resultando de gran utilidad en los procesos de inferencia para demostrar la validez de un argumento. Estas leyes fueron definidas por el matemático Augustus De Morgan.

Leyes de Morgan	
$\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$	La negación de una disyunción equivale a la conjunción de las negaciones.
$\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$	La negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones.

Estas leyes se pueden expresar usando el símbolo de equivalencia

$$\sim(p \vee q) \cong (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$\sim(p \wedge q) \cong (\sim p) \vee (\sim q)$$

Su aplicación en la inferencia es muy simple, si una premisa es una conjunción o una disyunción, de ella se puede deducir su equivalente.

Ejemplos. En cada caso deducir una conclusión aplicando una de las Leyes de Morgan a la premisa dada y construir la tabla de verdad correspondiente

a. P: $\sim(t\vee s)$ b. P: $\sim t \vee \sim s$

Solución

a. $\dfrac{P: \sim(t\vee s)}{C: \sim t \wedge \sim s}$

Tabla de verdad

t	s	$t\vee s$	$\sim t$	$\sim s$	$\sim t \wedge \sim s$	$\sim(t\vee s)$
V	V	V	F	F	**F**	**F**
V	F	V	F	V	**F**	**F**
F	V	V	V	F	**F**	**F**
F	F	F	V	V	**V**	**V**

Las columnas correspondientes a $\sim(t\vee s)$ y $(\sim t \wedge \sim s)$ son idénticas, lo que demuestra que son equivalentes.

Se deja al participante que demuestre la parte **b**, para ello debe construir la tabla de verdad para probar que: $\dfrac{P: \sim t \vee \sim s}{C: \sim(t \wedge s)}$

Ejemplo. Demostrar que $\sim(p\rightarrow q)\cong p\wedge\sim q$ sin usar tablas de verdad

En este caso se trata de probar una equivalencia, se parte de una de las proposiciones compuestas por ejemplo de $\sim(p\rightarrow q)$ y mediante la aplicación sucesiva de reglas de inferencias y leyes lógicas se busca probar la equivalencia con $p\wedge\sim q$.

Cada paso de la demostración se enumera y se justifica:

1) $\sim(p\rightarrow q) \cong \sim(\sim p\vee q)$ por Ley del Condicional: $(p\rightarrow q) \cong (\sim p\vee q)$

2) $\sim(\sim p\vee q) \cong \sim(\sim p)\wedge\sim q$ se aplica Ley de Morgan para la disyunción

3) $\sim(\sim p)\wedge\sim q \cong p\wedge\sim q$ Ley de Doble Negación $\sim(\sim p)\cong p$

4) $\sim(p\rightarrow q) \cong p\wedge\sim q$ por transitividad de equivalencias aplicada a 1, 2 y 3

2.3.5 Modus Ponendo Ponens (MPP)

Esta regla que tradicionalmente se le da su nombre en latín, su traducción es "método que afirma afirmando" o "modo que al afirmar, afirma". Su forma es la siguiente.

$$\begin{array}{l} P_1:\ p\rightarrow q \\ P_2:\ p \\ \hline C:\ \ q \end{array}$$

Basada en la tautología $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$

Tabla de verdad

p	q	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\wedge p$	$[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

En esencia, el Modus Ponendo Ponens nos garantiza que si una premisa es un condicional y tenemos otra premisa que nos afirma el antecedente, entonces se deriva como conclusión el consecuente del condicional.

Ejemplos. En los siguientes casos se muestra el uso del MPP

1) En el enunciado:

"Si está lloviendo, el cielo ha de estar nublado. Está lloviendo. Por lo tanto, el cielo ha de estar nublado".

Se observan dos premisas y una conclusión:

P_1: Si está lloviendo, el cielo ha de estar nublado
P_2: Está lloviendo
____
C: El cielo ha de estar nublado

En este ejemplo, tenemos dos premisas P_1 y P_2 de ellas se obtuvo la conclusión C "el cielo ha de estar nublado", este es un razonamiento válido, por estar amparado en la regla de inferencia MPP.

2) El enunciado: "Si gano la lotería, entonces mi esposa se alegra. Gano la lotería. Por lo tanto mi esposa se alegra".

Se puede expresar así:

P_1: Si gano la lotería, entonces mi esposa se alegra
P_2: Gano la lotería
____
C: Mi esposa se alegra

Este ejemplo tiene la misma forma del ejemplo anterior, sólo ha cambiado el contenido o significado de cada premisa y de la conclusión, por ello el argumento es válido igual que el anterior.

2.3.6 Modus Tollendo Tollens (MTT)

El Modus Tollendo Tollens es una regla de inferencia que significa "método que, al negar, niega", en cierta forma es contraria al MPP, ella se aplica cuando se tiene como premisa un condicional y otra premisa es la negación del consecuente, entonces se deriva como conclusión la negación del antecedente.

Esta regla de inferencia que tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} P_1:\ A \rightarrow B \\ P_2:\ \sim B \\ \hline C:\ \sim A \end{array}$$

Los siguientes razonamiento son ejemplos donde se aplica el Modus Tollendo Tollens:

1) "Si está soleado, entonces es de día. Pero no es de día. Por lo tanto, no está soleado".

En símbolos el MTT se expresa así:

$$\begin{array}{l} P_1:\ r \rightarrow t \\ P_2:\ \sim t \\ \hline C:\ \sim r \end{array}$$

donde las proposiciones r y t son :

r: está soleado y t: es de día

2) En el siguiente enunciado:

"Si tiene luz propia, entonces el astro es una estrella. El astro no es una estrella. Por tanto no tiene luz propia".

Se evidencian dos premisas y una conclusión, sean:

r: tiene luz propia y t: el astro es una estrella

En forma simbólica:

$$\begin{array}{l} P_1:\ r \rightarrow t \\ P_2:\ \sim t \\ \hline C:\ \sim r \end{array}$$

Este ejemplo ilustra la aplicación del Modus Tollendo Tollens, su validez está amparada en la tautología o ley lógica $[(r \rightarrow t) \wedge (\sim t)] \rightarrow (\sim r)$.

Tabla de verdad

r	t	$r \rightarrow t$	$\sim t$	$\sim r$	$(r \rightarrow t) \wedge (\sim t)$	$[(r \rightarrow t) \wedge (\sim t)] \rightarrow (\sim r)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

2.3.7 Modus Tollendo Ponens (MTP)

Su traducción es "método que negando afirmo", esta regla en esencia dice que, si una disyunción es verdadera y una de sus componentes es falsa, entonces la otra componente es verdadera.

Simbólicamente se escribe así:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$$

Para su aplicación en la inferencia se acostumbra la forma

$$\begin{array}{l} P_1: \ p \vee q \\ P_2: \sim p \\ \hline C: q \end{array}$$

Si una de las premisas es una disyunción y otra premisa es la negación de un componente de la disyunción, entonces se concluye la afirmación del otro componente de la disyunción.

Ejemplos. En los siguientes casos se aplica la regla de inferencia Modus Tollendo Ponens para obtener una conclusión como consecuencia de las premisas dadas.

a.

P_1: Pedro es mayor que José o es mayor que María
P_2: Pedro no es mayor que María

C : Pedro es mayor que José

b.

b.	$P_1: \sim t \vee \sim q$	disyunción de $\sim t$ y $\sim q$
	$P_2: \ t$	negación de $\sim t$
	$C: \sim q$	conclusión

2.3.8 Silogismos: disyuntivo, hipotético y conjuntivo

Un silogismo es una forma de razonamiento deductivo que consta de tres elementos: dos premisas y una conclusión.

Tipos de silogismos

Existe una variedad silogismos, a continuación se describen los principales que son los de uso frecuente.

- **Silogismo hipotético**. Esta regla de inferencia se basa en la ley transitividad del condicional:

$$[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$$

Para su aplicación se requiere contar con dos premisas condicionales donde el consecuente de la primera (P_1), sea igual al antecedente de la otra premisa (P_2), de ellas se deriva como conclusión otro condicional con el antecedente de P_1 y el consecuente de P_2.

En el esquema usual se simboliza así:

$$\begin{array}{l} P_1: p\rightarrow q \\ P_2: q\rightarrow r \\ \hline C: p\rightarrow r \end{array}$$

Ejemplo. El siguiente razonamiento es un caso de Silogismo Hipotético (SH):

"Si el hombre es virtuoso, será feliz; pero si va a ser feliz, verá a Dios; luego, si el hombre es virtuoso, verá a Dios".

Se expresa de la siguiente forma:

P_1: Si el hombre es virtuoso, será feliz
P_2: Si va a ser feliz, verá a Dios
C: Si el hombre es virtuoso, verá a Dios

- **Silogismo disyuntivo**. Esta regla se plantea cuando existe una premisa disyuntiva en la cual sus componentes no pueden ser ciertas simultáneamente, y se dispone de otra premisa que afirma (o niega) una de las componentes de la disyunción, de allí se deduce como conclusión la afirmación (o negación) de la otra componente de la disyunción. Es semejante al Modus Tollendo Ponens, pero con la disyunción exclusiva.

Su esquema simbólico es el siguiente:

$$\begin{array}{l} P_1: p \,\underline{\vee}\, q \\ P_1: \sim p \\ \hline C: \quad q \end{array}$$

Ejemplos de Silogismo Disyuntivo (SD)

1. Carlos o está descansando o está corriendo. Carlos no está corriendo. Por lo tanto Carlos está descansando.

Simbolizando las proposiciones

s: Carlos está descansando y h: Carlos está corriendo

En forma simbólica:

$$\begin{array}{l} P_1: s \veebar h \\ P_2: \sim h \\ \hline C: \quad s \end{array}$$

2. Carlos o está descansando o está corriendo. Carlos está corriendo. Por lo tanto Carlos no está descansando.

Esquema usado en lenguaje simbólico

$$\begin{array}{l} P_1: s \veebar h \\ P_2: h \\ \hline C: \sim s \end{array}$$

- **Silogismo conjuntivo.** Es aquel que presenta dos premisas, la principal es

una que niega que dos proposiciones con el mismo sujeto puedan ser verdad al mismo tiempo, la segunda premisa afirma una de las componentes de la primera premisa, por lo tanto, la conclusión es la negación de la otra componente.

Su esquema es:

$$\begin{array}{l} P_1: \sim(p \wedge q) \\ P_2: \quad q \\ \hline C: \sim P \end{array}$$

Ejemplos.

1) No se puede ser ético y engañar a las personas. Engañas a las personas. Luego no eres ético.

En forma simbólica:

p: eres ético, q: engañas a las personas

$$\begin{array}{l} P_1: \sim(p \wedge q) \\ P_2: \quad q \\ \hline C: \sim P \end{array}$$

2) Tú no puedes ser justo y violar la ley. Eres justo. Por lo tanto, no violas la ley.

Este silogismo es muy particular y tiene menos uso que las otras reglas de inferencia.

Regla del dilema constructivo. Dadas tres premisas, dos de ellas condicionales, y la tercera una disyunción cuyas componentes son los antecedentes de las implicaciones, se puede deducir como conclusión una disyunción cuyas componentes son los consecuentes de las dos condicionales.

El esquema simbólico es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \rightarrow q \\ P_2: & s \rightarrow h \\ P_3: & p \vee s \\ \hline C: & q \vee h \end{array}$$

2.4 La demostración matemática

En matemáticas no se acepta una proposición como verdadera hasta que no se haya construido su demostración formal, con la única excepción de los axiomas. Si se conoce que una proposición es verdadera para un número determinado de casos y no se tiene conocimiento de un caso donde falle, no significa que sea válida en forma general. Por ejemplo:

"Para cualquier número real x se cumple que $x^2 \geq x$"

Si probamos la desigualdad para ciertos valores de x, como -3, 0, 1, 2, 5 se satisface, por ello se puede estar tentado a afirmar que $x^2 \geq x$ se cumple para todo número real x. Lo cual es falso, pues bastaría con verificar que para $x=\frac{1}{2}$ no se satisface la desigualdad.

Se inicia con demostraciones lógicas y después se desarrollan demostraciones de propiedades o teoremas de matemática.

Una deducción lógica es una secuencia de un número finito de transformaciones que se realizan a partir de un determinado grupo de premisas, mediante la aplicación de reglas de inferencia, con la finalidad de obtener una conclusión.

Para hacer una demostración lógica seguiremos los siguientes pasos:

1. Simbolizar las premisas dadas teniendo en cuenta que en los enunciados una premisa termina con punto.

2. Enumerar las premisas de manera consecutiva, indicando que son premisas, para ello se coloca la letra P a la derecha de cada premisa, también se puede usar la notación P_1, P_2, …

3. Proceder a derivar la conclusión a partir de las premisas, teniendo en cuenta que se deben utilizar todas las premisas.

4. En cada paso se obtiene una conclusión que se escribe en otra línea, se enumera y a la derecha se coloca en forma abreviada su justificación, indicando la regla o ley aplicada y a cuales premisas se le aplicó.

5. La proposición obtenida en cada paso realizado se considera como otra premisa y será utilizada en el proceso de la demostración hasta llegar a la conclusión definitiva.

Ejemplos. En cada caso, ofrezca una demostración detallada de la conclusión indicada a partir de las premisas dadas:

a. "Si término mis estudios y encuentro un trabajo, entonces tendré un sueldo. Si tengo un sueldo, entonces mantendré a mi familia. No mantengo a mi familia. Por lo tanto, no terminé mis estudios o no encontré trabajo".

Solución a

En este caso se debe iniciar por la simbolización de las proposiciones simples para luego simbolizar las premisas y la conclusión.

Proposiciones simples:

p: "término mis estudios", q: "encuentro trabajo",

r: "tendré un sueldo" , t: "mantengo a mi familia"

Premisas:

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$

2) $r \rightarrow t$

3) $\sim t$

Conclusión:

C: $\sim p \vee \sim q$

Demostración:

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$ P

2) $r \rightarrow t$ P

3) $\sim t$ P

4) $\sim r$ MTT(2,3) (se aplicó MTT a las premisas 2 y 3)

5) $\sim (p \wedge q)$ MTT(1,4)

6) $\sim p \vee \sim q$ Ley de Morgan (5)

En 6 se obtuvo la conclusión deseada y finaliza el proceso. En 4, 5 y 6 se colocó a la derecha a modo de justificación la regla de inferencia aplicada y entre paréntesis los números correspondientes a las premisas utilizadas en cada paso.

En general el proceso de la demostración no es único, por ejemplo en este caso se puede cambiar los pasos 4 y 5 como se indica a continuación:

4) $(p \wedge q) \rightarrow t$ Silogismo Hipotético (1, 2)

5) $\sim (p \wedge q)$ MTT (4,3)

b. Demostrar $\sim t$

1. $(q \vee r) \rightarrow p$ P
2. $\sim p$ P
3. $s \rightarrow (q \vee r)$ P
4. $\sim s \rightarrow \sim t$ P

Solución b

Acá se tiene el problema planteado y sus premisas enumeradas. Antes de iniciar la demostración se recomienda un análisis previo que no se escribe en el proceso, se puede hacer mentalmente.

- Lo que se quiere deducir es $\sim t$, la cual está en la premisa 4 como consecuente de una condicional.
- Para extraer $\sim t$ de 4 se necesita $\sim s$, para aplicar el MPP.
- En 3 está s como antecedente, se necesita $\sim (q \vee r)$ para aplicar el MTT y extraer $\sim s$.
- En 1 se encuentra $q \vee r$ como antecedente de una implicación, si tenemos la negación del consecuente, se aplica MTT para obtener $\sim (q \vee r)$
- La premisa 2 es $\sim p$, que es la negación del consecuente de la premisa 1.

Visto lo anterior se tiene claro el inicio y los pasos sucesivos, esto evita el ensayo y error o intentos fallidos.

Ahora si se desarrolla la demostración.

Demostrar $\sim t$

1. $(q \vee r) \rightarrow p$ P
2. $\sim p$ P
3. $s \rightarrow (q \vee r)$ P
4. $\sim s \rightarrow \sim t$ P
5. $\sim (q \vee r)$ MTT(1,2)
6. $\sim s$ MTT(3,5)
7. $\sim t$ MPP(4,6)

En 7 se obtuvo la conclusión deseada y finaliza el proceso.

Se invita al participante a ensayar otro procedimiento.

c. Demostrar r de las premisas

1. $q \rightarrow \sim p$ P
2. $\sim q \rightarrow r$ P
3. $(p \wedge \sim r) \vee s$ P
4. $(s \vee t) \rightarrow r$ P

Procediendo en forma análoga al ejemplo anterior, se hace el análisis previo, el cual se explica a continuación y se obviará para los ejemplos siguientes.

- La conclusión que se desea obtener es r la cual aparece en 2 y en 4 como consecuente de ambas implicaciones, de cualquiera de ellas se puede obtener si antes se obtiene el antecedente de 2 o de 4.
- Obtener $\sim q$ que es el antecedente de 2 no se ve tan simple, por lo que se evaluará primero la opción de obtener $s \vee t$

- Para obtener $s \vee t$ es suficiente con deducir uno de los dos componente, el otro se agregaría por ley de adición. Por ello se buscará s, pues t solamente aparece en la premisa 4
- Para sacar s como conclusión se requiere usar MTP con la premisa 3 y la negación de $p \wedge \sim r$. Aquí es necesario recordar las leyes de Morgan para la negación de una conjunción, doble negación y la ley condicional

Luego de este análisis previo, se inicia la demostración.

Demostrar r de las premisas

1.	$q \to \sim p$	P
2.	$\sim q \to r$	P
3.	$(p \wedge \sim r) \vee s$	P
4.	$(s \vee t) \to r$	P
5.	$p \to \sim q$	Ley del Contrarrecíproco (1)
6.	$p \to r$	SH(5,2) SH (Silogismo Hipotético)
7.	$\sim p \vee r$	Ley Condicional (6)
8.	$\sim (p \wedge \sim r)$	Ley de Morgan (7)
9.	s	MTP(3,8)
10.	$s \vee t$	Ley de Adición (9)
11.	r	MPP(4, 10)

Si se va a demostrar que un condicional $p \to q$ es un teorema, es decir, que la implicación es verdadera, se debe verificar que no es posible que p sea verdadera y q falsa, pues es la única posibilidad que tiene $p \to q$ para resultar falso. Para ello se puede partir con el antecedente p, en tal caso se dice que se sigue el método directo, o se inicia el análisis con el consecuente q, y se dice que se sigue el método indirecto.

2.4.1 Método de demostración directo o de hipótesis auxiliar

Suponga que se desea probar el condicional $p \to q$ con el método directo, por lo cual se inicia el análisis partiendo de la proposición p (antecedente), como toda proposición, p tiene dos posibilidades es verdadera o es falsa.

- Si p es falsa, entonces el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero para cualquier valor de verdad que tenga q. En este caso no hay que probar nada, pues ya se sabe que el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero
- Si p es verdadero, existen dos posibilidades:
    a. Que q sea verdadera, lo cual implica que el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero.
    b. Que q sea falsa, lo que implica que el condicional $p \rightarrow q$ es falso, siendo esta la única posibilidad donde el condicional resulta falso.

Como el objetivo es probar que $p \rightarrow q$ es verdadero, entonces debe evitarse la posibilidad de que p esa verdadera y q falsa. La demostración se centra en asumir que p es verdadera y establecer que necesariamente q es verdadera, es decir que siendo p verdad, q no puede ser falsa.

En los ejemplos de demostración que se realizaron en el apartado anterior se siguió el método directo para demostrar una conclusión C, partiendo de la conjunción de las premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es decir, se prueba el condicional

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ asumiendo que las premisas son verdaderas.

Veamos ahora la demostración de algunos teoremas.

Conviene aclarar que la mayoría de los teoremas tiene la forma de un condicional, otros son bicondicional y algunos que no tienen la forma condicional.

- En los condicionales $(p \rightarrow q)$ se asume como verdad la hipótesis particular que es el antecedente p y una hipótesis general que contiene los axiomas, equivalencias y los teoremas previamente demostrados.
- Los bicondicionales $p \leftrightarrow q$ se pueden separar en $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$, al probar ambos condicionales queda demostrado el bicondicional $p \leftrightarrow q$.
- Los teoremas que no tienen la forma condicional ni bicondicional se analizan considerando solo la hipótesis general.

Esquema para la demostración directa:

Para demostrar un teorema de la forma $H \rightarrow T$ se procede así:

1. Se supone verdadero el antecedente H. (llamada hipótesis auxiliar).

2. A partir de la hipótesis se construye una argumentación lógica en la cual se pueden usar los axiomas, teoremas demostrados previamente y las definiciones para obtener mediante la aplicación de las reglas de inferencia la certeza de que la tesis (consecuente) T es verdadera.
3. Con esto concluye la prueba y queda establecida la validez de $H \rightarrow T$.

Ejemplos. Usando el método directo, demuestre los siguientes teoremas:

i. Cualesquiera que sean los números enteros a, b y c, si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c.
ii. Para los números enteros x e y se cumple que: si x e y son impares, entonces $x \cdot y$ es impar.

Solución.

i. Cualesquiera que sean los números enteros a, b y c, si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c .

En forma simbólica la expresión " a divide a b " se denota así: $a|b$.

Luego, el teorema dado se puede escribir así:

Cualquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{Z} : (a|b \wedge b|c) \rightarrow a|c$

La hipótesis de este teorema es:

$$a|b \wedge b|c$$

y la tesis es:

$$a|c$$

Recuerde que por definición: $a|b$ significa que $b = n \cdot a$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Por hipótesis tenemos que:

1. $a|b$ lo cual implica que $b = n \cdot a$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
2. $b|c$ lo que implica que $c = m \cdot b$ para algún $m \in \mathbb{Z}$

   Sustituyendo $b = n \cdot a$ en $c = m \cdot b$ se tiene que:
3. $c = m \cdot (n \cdot a)$

Lo cual equivale a:

4. $c = (m \cdot n) \cdot a$
5. $c = h \cdot a$ donde $h = m \cdot n \in \mathbb{Z}$, pues el producto de números enteros es también un número entero.

   De (5) se concluye:

6. $a|c$ que es la tesis del teorema.

Por lo tanto queda demostrado que:

Cualesquiera que sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$, $(a|b \wedge b|c) \rightarrow a|c$.

Ha finalizado la demostración por el método directo, se inició con la hipótesis, usando definiciones, operaciones y propiedades de los números enteros hasta lograr obtener la tesis.

ii. Para los números enteros x e y se cumple que: si x e y son impares, entonces $x \cdot y$ es impar.

Recuerde que un número entero a es impar si y solo si existe otro entero n tal que $a=2n+1$.

Hipótesis: x, y son números impares

Tesis: $x \cdot y$ es impar

Como se va a usar el método directo, entonces se debe iniciar con la hipótesis asumiéndola como verdadera.

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, con x e y impares

1) x impar significa que $x=2n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$

y

2) y impar significa que $y=2m+1$ para algún $m \in \mathbb{Z}$

En el producto $x \cdot y$ se sustituyen ambas con las igualdades anteriores

3) $x \cdot y=(2n+1)\cdot(2m+1)$

Efectuando el producto en el miembro de la derecha se obtiene:

4) $x \cdot y=4n \cdot m+2n+2m+1$

5) $x \cdot y = 2 \cdot (2n \cdot m + n + m) + 1$ se sacó factor común 2

6) $x \cdot y = 2k + 1$ donde $k = 2n \cdot m + n + m$ y $k \in \mathbb{Z}$, pues es el resultado de la suma y producto de números enteros.

De (6) se concluye que: $x \cdot y$ es impar

Ha finalizado la demostración.

A un caso particular de un teorema se le llama **corolario** del teorema.

Ejemplo:

Si **a** es un entero impar, entonces $\mathbf{a}^2$ es impar

Este es un caso particular (corolario) del teorema anterior, bastaría con hacer $x = y = \mathbf{a}$ con la condición de que a sea impar, con lo cual $x \cdot y = \mathbf{a}^2$ será impar. No hace falta hacer toda la demostración si ya se tiene el caso general demostrado.

2.4.2 Método indirecto o por el contrarrecíproco

Si se quiere demostrar un teorema condicional $H \rightarrow T$ con el método indirecto, entonces se debe suponer que la tesis o consecuente T es falsa y establecer la falsedad de la hipótesis o antecedente H. En otras palabras se debe demostrar el contrarrecíproco del teorema, es decir $\sim T \rightarrow \sim H$.

Es importante recordar que $(H \rightarrow T) \cong (\sim T \rightarrow \sim H)$

Esquema para la demostración indirecta

Para demostrar una proposición de la forma $H \rightarrow T$ usando el método indirecto se procede así:

1. Se supone como verdadera la negación de la tesis ($\sim T$).
2. Usar el mismo procedimiento de la demostración directa hasta concluir la negación de la hipótesis, es decir ($\sim H$).
3. Se concluye por el método directo que $\sim \mathbf{T} \rightarrow \sim \mathbf{H}$ es cierto.
4. Por la equivalencia entre $H \rightarrow T$ y su contrarrecíproco $\sim T \rightarrow \sim H$ se concluye que $H \rightarrow T$ verdadero y finaliza la demostración.

Nota: El método de demostración indirecto al igual que el directo se utiliza en las demostraciones lógicas y en la demostración de teoremas de matemática.

Ejemplo. Usando el método indirecto demostrar que $\sim s \rightarrow q$ es consecuencia de las premisas: $p \rightarrow q$, $p \vee r$ y $r \rightarrow s$

Solución

Para la demostración se seguirá el esquema anterior, iniciando con la negación del consecuente del condicional a demostrar:

1. $p \rightarrow q$ — P
2. $p \vee r$ — P
3. $r \rightarrow s$ — P
4. $\sim q$ — Negación de la tesis (consecuente) de $\sim s \rightarrow q$
5. $\sim p$ — MTT(1,5)
6. r — MTP(2,6)
7. s — MPP(3,7)

En 7 se obtuvo la negación de la hipótesis, con ello se obtiene como conclusión

$\sim q \rightarrow s$, que es el contrarrecíproco y por ende equivalente a $\sim s \rightarrow q$.

Ejemplo. Usando el método indirecto, demuestre que:

"Para cualesquiera números naturales x e y. Si $x \cdot y$ es un número impar entonces x e y son impares"

Solución.

Hipótesis: $x \cdot y$ es un número impar

Tesis: x e y son impares

Como se va a usar el método indirecto se tratará de probar el contrarrecíproco ($\sim T \rightarrow \sim H$). Para ello se inicia la demostración asumiendo que la negación de la tesis ($\sim T$) es cierta.

Supongamos que x e y **no** son ambos impares (negación de la tesis). Debemos concluir ($\sim H$), es decir que $x \cdot y$ no es un número impar (negación de la hipótesis).

Veamos la demostración.

1) Si x e y **no** son ambos impares, entonces al menos uno de ellos es par, por ejemplo considere que x es par:

2) Si x es par, entonces por definición de número par $x = 2p$ con $p \in \mathbb{N}$. De allí que:

3) $x \cdot y = (2p) \cdot y$

Por la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{N}$ se sigue que:

4) $x \cdot y = 2(p \cdot y)$

Haciendo $k = p \cdot y$ y sustituyendo en (4) se obtiene:

5) $x \cdot y = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, pues k es el producto de dos números naturales

6) $x \cdot y$ no es impar, por ser múltiplo de 2

Se obtuvo la negación de la hipótesis y por tanto ha finalizado la demostración.

2.4.3 Reducción al absurdo

El método de demostración por reducción al absurdo se fundamenta en el principio de no contradicción, es decir una proposición p no puede ser verdadera y falsa a la vez.

Si se quiere probar que una proposición condicional $H \to T$ es un teorema (verdadero), se plantea la posibilidad de que sea falso, lo que significa que T es falso y H es verdadero (es la única forma en que $H \to T$ resulta falsa), esto equivale a aceptar que $\sim T \wedge H$ es verdadero.

El proceso se inicia asumiendo la hipótesis H y la negación de la tesis ($\sim T$) del teorema a demostrar. En el desarrollo de la prueba se busca una contradicción, lo cual significa que lo supuesto no es verdad, es decir $\sim T \wedge H$ es falso, luego su negación $\sim(\sim T \wedge H)$ es verdadera. Pero:

$$\begin{aligned} \sim(\sim T \wedge H) &\cong \sim(\sim T) \vee \sim H && \text{Por Ley de Morgan} \\ &\cong T \vee \sim H && \text{Por Ley de doble negación} \\ &\cong H \to T && \text{Por Ley del condicional} \end{aligned}$$

Esquema para la demostración por reducción al absurdo

Si se quiere demostrar que una proposición P es verdadera usando el método de reducción al absurdo se procede así:

1. Suponer que la negación ($\sim P$) es verdad.

2. A partir de las premisas, de la teoría y de ($\sim P$) usada como hipótesis auxiliar se razona como en el método directo, hasta obtener una contradicción, por ejemplo, $S\wedge\sim S$.
3. Se ha probado que $\sim P\rightarrow(S\wedge\sim S)$ es verdad.
4. Como $\sim P\rightarrow(S\wedge\sim S)$ es verdad y $(S\wedge\sim S)$ es falso entonces la única posibilidad es que ($\sim P$) sea falso. Por lo tanto P es verdadero.

Nota: En la práctica, cuando se usa este método, al obtener una contradicción, inmediatamente se valida la negación de lo supuesto dando por terminada la demostración.

Ejemplo. Demostrar por reducción al absurdo que: $\sim(p\wedge q)$ a partir de las premisas:

$$P_1: p\rightarrow(s\vee r)$$

$$P_2: s\rightarrow\sim p$$

$$P_3: q\rightarrow\sim r$$

Solución

Se procede con la demostración siguiendo el esquema planteado para este método, se enumeran todos los resultados incluyendo las premisas.

1.	$p\rightarrow(s\vee r)$	P
2.	$s\rightarrow\sim p$	P
3.	$q\rightarrow\sim r$	P
4.	$\sim[\sim(p\wedge q)]$	negación de lo que se va a demostrar $\sim(p\wedge q)$
5.	$p\wedge q$	Ley de doble negación
6.	p	Ley de simplificación (5)
7.	$s\vee r$	MPP(1,6)
8.	$\sim s$	MTT(2,6)
9.	r	MTP(7,8)
10.	$\sim q$	MTT(3,9)
11.	q	Ley de simplificación (5)

12. $\sim q \wedge q$ Ley de adjunción (10,11)
13. $\sim(p \wedge q)$ Por la contradicción en (12) se concluye

Ejemplo. Demostrar por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución

Iniciamos con la negación de lo que se desea probar

1. Supóngase que $\sqrt{2}$ es un número racional.
2. $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ y $\frac{a}{b}$ irreducible, pues todo número racional se puede expresar en forma de fracción irreducible.
3. $2=\frac{a^2}{b^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros de (2)
4. $2b^2=a^2$ multiplicando ambos miembros de (3) por b^2
5. a^2 es par pues en (4) se tiene que a^2 es múltiplo de 2.
6. a es par pues $a \in \mathbb{Z}$ y a^2 es par (5).
7. $a=2n$, $n \in \mathbb{Z}$ por (6)
8. $2b^2=(2n)^2$ sustituyendo (7) en (4)
9. $2b^2=4n^2$ efectuando la potencia en (8)
10. $b^2=2n^2$ dividiendo entre 2 en (9)
11. b^2 es par por ser múltiplo de 2 (10)
12. b es par pues $b \in \mathbb{Z}$ y b^2 es par (11)
13. a y b son pares adjunción (6, 12)
14. $\frac{a}{b}$ no es irreducible pues a y b son pares (13)
15. Hay contradicción entre (14)y (2)

Por lo tanto lo supuesto ($\sqrt{2}$ es un número racional) no es cierto, quedando probado que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Refutación por contraejemplo

Este método se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para todos los elementos de un cierto conjunto.

Consiste en encontrar un elemento de ese conjunto que evidencie la falsedad de la proposición, a tal elemento se le llama **contraejemplo**.

Para demostrar que la afirmación "todas las ranas son verdes" es falsa, bastaría con probar que por lo menos existe una rana que no es verde.

Ejemplo. En cada caso demostrar que la proposición es falsa:

a) Para todo entero positivo n se cumple que $n^2>n$.

b) Para cualesquiera que sean los números enteros a, b y c, se cumple que si

$a<b$, entonces $a \cdot c<b \cdot c$

Solución

a) La proposición es falsa pues para n=1 (entero positivo) $1^2 = 1$, no se satisface la desigualdad $n^2>n$.

b) Sean a=3, b=4 y c=-2 , se cumple el antecedente $a<b$, pero el consecuente es falso, pues $3(-2) \nless 4(-2)$, donde $\nless$ significa "no es menor que".

RESUMEN DE LA UNIDAD II

Argumentos

Un argumento es un grupo de proposiciones donde se afirma que una de ellas que es llamada "conclusión" se deriva como consecuencia de las otras que son llamadas "premisas". Si un argumento tiene como premisas las proposiciones: P_1, P_2,…, P_n y como conclusión C, entonces se simboliza $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$

Validez de un argumento

El argumento o razonamiento $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ se dice que es válido si la conclusión C es verdadera cada vez que todas las premisas P_1, P_2,…, P_n lo sean.

La **inferencia lógica**, es el proceso de obtención de una proposición a partir de las premisas dadas, en dicho proceso se aplican reglas y métodos, de tal manera que la proposición que resulte sea consecuencia lógica de las premisas.

Las **premisas** se suponen verdaderas, la proposición deducida de una inferencia lógica, se llama **conclusión** y esta también debe ser verdadera.

Reglas de inferencia: es una forma de razonamiento que valida la verdad de una conclusión a partir de premisas verdaderas; es decir, si las premisas son verdaderas, la conclusión también tendrá que ser verdadera.

Implicaciones lógicas

Si A y B son proposiciones. Se dice que A implica lógicamente a B, si y solo si la proposición compuesta $A \rightarrow B$ es una tautología.

Equivalencias lógicas

El conectivo bicondicional produce una proposición verdadera cuando sus componentes tienen igual valor de verdad, se puede concluir que al conectar dos proposiciones equivalentes con el conectivo bicondicional, se genera una tautología. Es decir, $P \cong Q$ si y sólo si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología.

Leyes del álgebra de proposiciones

1. Leyes idempotentes	
a) $(p \vee p) \cong p$ b) $(p \wedge p) \cong p$	La disyunción y la conjunción son Idempotentes
2. Leyes asociativas	
a) $(p \vee q) \vee r \cong p \vee (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \wedge r \cong p \wedge (q \wedge r)$	Asociatividad de la disyunción Asociatividad de la conjunción
3. Leyes conmutativas	
a) $p \vee q \cong q \vee p$ b) $p \wedge q \cong q \wedge p$	Conmutatividad de la disyunción Conmutatividad de la conjunción
4. Leyes distributivas	
a) $p \vee (q \wedge r) \cong (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ b) $p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
5. Leyes de complementación	
a) $p \vee (\sim p) \cong V$ b) $p \wedge (\sim p) \cong F$ c) $\sim(\sim p) \cong p$	Tercero excluido Contradicción Doble negación
6. Leyes de Morgan	
a) $\sim (p \vee q) \cong (\sim p) \wedge (\sim q)$ b) $\sim (p \wedge q) \cong (\sim p) \vee (\sim q)$	La negación de una disyunción equivale a la conjunción de las negaciones de sus componentes. La negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones de sus componentes.
7. Ley del condicional	
$p \rightarrow q \cong \sim p \vee q$	El condicional equivale a la disyunción de la negación del antecedente y el consecuente.
8. Ley del bicondicional	
$p \leftrightarrow q \cong (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	El bicondicional equivale a la conjunción del

	condicional y su recíproco.
9. Ley del contrarrecíproco	
$p \rightarrow q \cong \sim q \rightarrow \sim p$	Un condicional es equivalente a su contrarrecíproco
10. Ley de la disyunción exclusiva	
$p \veebar q \cong (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	

Reglas básicas de inferencia

Regla de adjunción (conjunción) $P_1: p$ $P_2: q$ $C: p \wedge q$	**Regla de simplificación** $P_1: p \wedge q$ / $C_1: p$ o $P_1: p \wedge q$ / $C_2: q$
Regla de adición $P_1: p$ $C: p \vee q$	**Modus Ponendo Ponens (MPP)** $P_1: p \rightarrow q$ $P_2: p$ $C: q$
Modus Tollendo Tollens (MTT) $P_1: s \rightarrow t$ $P_2: \sim t$ $C: \sim s$	**Modus Tollendo Ponens (MTP)** $P_1: p \vee q$ $P_2: \sim p$ $C: q$

Un **silogismo** es una forma de razonamiento deductivo que consta de tres elementos: dos premisas y una conclusión.

Tipos de silogismos

Silogismo hipotético.	Silogismo disyuntivo	Silogismo conjuntivo
$P_1: p \rightarrow q$ $P_2: q \rightarrow r$ $C: p \rightarrow r$	$P_1: p \veebar q$ $P_1: \sim p$ $C: q$	$P_1: \sim(p \wedge q)$ $P_2: q$ $C: \sim P$

Regla del dilema constructivo

$$\begin{array}{l} P_1: p \rightarrow q \\ P_2: s \rightarrow h \\ P_3: p \vee s \\ \hline C: q \vee h \end{array}$$

Esquema para la demostración directa:

Para demostrar un teorema de la forma $H \rightarrow T$ se procede así:

1. Se supone verdadero el antecedente H. (llamada hipótesis auxiliar).
2. A partir de la hipótesis se construye una argumentación lógica en la cual se pueden usar los axiomas, teoremas demostrados previamente y las definiciones para obtener mediante la aplicación de las reglas de inferencia la certeza de que la tesis (consecuente) T es verdadera.
3. Con esto concluye la prueba y queda establecida la validez de $H \rightarrow T$.

Esquema para la demostración indirecta o por el contrarrecíproco

Para demostrar una proposición de la forma $H \rightarrow T$ usando el método indirecto se procede así:

1. Se supone como verdadera la negación de la tesis ($\sim T$).
2. Usar procedimiento similar a la demostración directa hasta concluir ($\sim H$).
3. Se concluye por el método directo que $\sim T \rightarrow \sim H$ es válido.
4. Por la equivalencia entre $H \rightarrow T$ y su contrarrecíproco $\sim T \rightarrow \sim H$ se concluye que $H \rightarrow T$ verdadero y finaliza la demostración.

Esquema para la demostración por reducción al absurdo

Si se quiere demostrar que una proposición P es verdadera usando el método de reducción al absurdo se procede así:

1. Suponer que la negación ($\sim P$) es verdad.
2. A partir de las premisas, de la teoría y de ($\sim P$) se razona como en el método directo, hasta obtener una contradicción, por ejemplo, $S \wedge \sim S$.
3. Se ha probado que $\sim P \rightarrow (S \wedge \sim S)$ es verdad.
4. Como $\sim P \rightarrow (S \wedge \sim S)$ es verdad y $(S \wedge \sim S)$ es falso entonces la única posibilidad es que ($\sim P$) sea falso. Por lo tanto P es verdadero.

Refutación por contraejemplo

Este método se aplica para demostrar la falsedad de una proposición que tenga una conclusión referida para todos los elementos de un cierto conjunto.

Consiste en encontrar un elemento de ese conjunto que evidencie la falsedad de la proposición, a tal elemento se le llama contraejemplo.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD II

PARTE I

Obtenga la conclusión de acuerdo a las premisas dadas de modo que el argumento sea válido. Señale la ley usada:

a)
p: José se gradúa $\rightarrow$ su mamá se alegra
q: José se gradúa

____

b)
p: José se gradúa $\rightarrow$ su mamá se alegra
q: Su mamá no se alegra

____

c)
$q \vee r$
$\sim q$

______

d)
$t \rightarrow (z \wedge q)$
$\sim z \vee \sim q$

______

e)
$(p \rightarrow q) \vee t$
$\sim t$

______

f)
$\sim p \rightarrow \sim q$
$z \rightarrow q$

______

PARTEII

En cada caso, ofrezca una demostración detallada de la conclusión indicada a partir de las premisas dadas. Señale las leyes usadas en cada paso.

a) Demostrar t

1. $\sim q \rightarrow \sim p$
2. $\sim r$
3. $q \rightarrow t$
4. $p \vee r$

b) Demostrar $q \vee s$

1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow s$
3. $p \vee r$

c) Demostrar z

1. $p \rightarrow s$
2. $s \rightarrow \sim v$
3. $(q \wedge d) \rightarrow (\sim z \rightarrow \sim v)$
4. $(p \vee q) \wedge (p \vee d)$
5. v

d) Demostrar $a \vee t$

1. $(\sim a \wedge \sim t) \rightarrow v$
2. $v \rightarrow b$
3. $s \rightarrow \sim p$
4. s
5. $\sim b \vee p$

1) Demuestre los siguientes teoremas usando el método sugerido:

a) Si a y b son números impares entonces (a+b) es un número par. (Método directo)

b) Si m y n son números divisibles por 3 entonces (m+n) es divisible por 3. (Método directo)

c) Si y es un número racional y x es un número irracional entonces (x+y) es un número irracional. (Método de reducción al absurdo)

d) Si k es un entero entonces k^2+k es par. (Método directo)

e) Si n es un número entero positivo impar, entonces 8 divide a n^2-1. (Método directo)

2) Probar la validez de los siguientes razonamientos usando el método de reducción al absurdo:

a)

$$\begin{array}{ll} 1. & (a \wedge b) \rightarrow d \\ 2. & d \rightarrow (p \rightarrow \sim t) \\ 3. & \sim q \rightarrow (p \wedge t) \\ \hline & (a \wedge b) \rightarrow q \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} 1. & p \rightarrow (q \vee r) \\ 2. & q \rightarrow \sim p \\ 3. & t \rightarrow \sim r \\ 4. & p \\ \hline & \sim t \end{array}$$

3) Refutar las siguientes proposiciones

a) Si n es un número entero tal que n es divisible por 6 y n es divisible por 3 entonces n es divisible por 18.

b) Si a y b son números irracionales entonces (a+b) es un número irracional.

c) Si a y b son dos números reales entonces $|a+b|=|a|+|b|$.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1) Obtenga la conclusión de acuerdo a las premisas dadas de modo que el argumento sea válido. Señale la ley usada:

a)
p: Si llueve $\rightarrow$ Jesús enfermará
q: Jesús no se enfermó
____

b)
p: Si llueve $\rightarrow$ Jesús enfermará
q: Llovió
____

c) $\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow t \\ \sim t \\ \hline \\ \end{array}$

d) $\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \vee t \\ \sim t \\ \hline \\ \end{array}$

2) ¿Cuáles de los siguientes razonamientos son válidos?

a) $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$

b) $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$

c) $\begin{array}{c} p \wedge q \\ \sim p \rightarrow q \\ \hline \sim q \end{array}$

d) $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim p \rightarrow \sim r \\ \hline r \rightarrow p \end{array}$

e) $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim r \rightarrow \sim q \\ \hline \sim r \rightarrow \sim p \end{array}$

f) $\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \vee r \\ \sim r \\ \hline p \rightarrow q \end{array}$

3) Demuestre los siguientes teoremas usando el método sugerido:

a) Si n es un número natural impar, entonces n^2 es de la forma 8k+1, para algún k natural. (Método directo)

b) Sea n es un número natural, demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar. (Reducción al absurdo)

4) Refutar las siguientes proposiciones

a) El producto de dos números irracionales es un número irracional.

b) Si n es un número natural múltiplo de 3 entonces n es múltiplo de 6.

c) Todo número real elevado a la cero es igual a 1.

d) Si a y b son dos números reales positivos entonces $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

5) Para demostrar $\sim p \vee \sim r$ a partir de las premisas:

1. $p \to q$
2. $r \to s$
3. $\sim q \vee \sim s$

Se realizó la siguiente demostración:

	Justificación
1. $p \to q$	
2. $r \to s$	
3. $\sim q \vee \sim s$	
4. $\sim s \to \sim r$	
5. $q \to \sim s$	
6. $q \to \sim r$	
7. $p \to \sim r$	
8. $\sim p \vee \sim r$	

En la columna de la derecha justifique cada paso colocando la ley o regla de inferencia aplicada en cada paso.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD II

- Gallo, C. (1988). *Matemáticas para estudiantes de administración y Economía. Tomo I.* Caracas. Ediciones de la Biblioteca UCV.
- Hilbert, D., Ackermann, W. (1975). *Elementos de Lógica.* Madrid. Editorial Tecno. S. A.
- Jhonsonbaugh, R. (1988). *Matemáticas Discretas. México.* Grupo Editorial Iberoamericana.
- Napolitano, A. (2005). *Lógica Matemática.* Caracas. Editorial biosfera.
- Saenz, J., Gil, F., Romero, N. (1986). *Fundamentos de la Matemática.* Barquisimeto. Editorial Hipotenusa.
- Suppes, P., Hill S. (1982*). Introducción a la Lógica Matemática.* Barcelona. Editorial Reverte, S. A.