Capítulo

2. Cinemática

Contenido:

2.1 Mecánica Clásica.

2.2 Elementos de la Cinemática.

2.3 Movimiento Rectilíneo.

2.4 Movimiento en el Plano.

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

2.1 MECANICA CLASICA

La rama de la física que se encarga del estudio del estado de movimiento o de reposo de los objetos, y las causas que le modifican, se conoce como **Mecánica Clásica**, esta se subdivide en:

- La **cinemática** que se ocupa de la descripción del movimiento,
- La **dinámica** que se ocupa de las causas que determinan el movimiento,
- Y la **estática** que se ocupa del análisis de las fuerzas de los sistemas físicos en estado de reposo.

Para el estudio de cualquier fenómeno físico es necesario establecer un **marco de referencia** el cual es un ente constituido por un punto de referencia arbitrario, un conjunto de ejes coordenados y un reloj. En cada fenómeno en estudio se identifica al menos un **sistema**. Se entiende por sistema al conjunto de entes materiales, tal que esté caracterizado por tener un marco de referencia. Para el estudio de cualquier fenómeno físico usamos aproximaciones a la realidad, para fines de simplificación, llamadas **modelos**. A cualquiera de las situaciones posibles como resultado de cada uno de los cambios que sufre el sistema se le denomina **estado físico**.

En este capítulo nos ocuparemos de la descripción del movimiento de **partículas** o de cuerpos cuyo movimiento puede ser estudiado como el de una partícula.

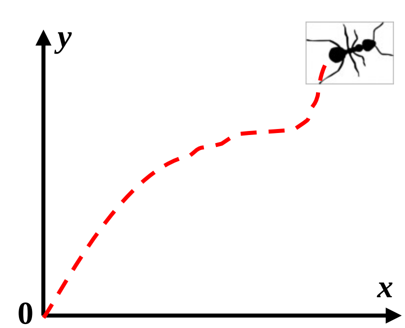
2.2 ELEMENTOS DE LA CINEMÁTICA

Denominaremos elementos de la cinemática a los modelos y cantidades físicas que nos sirven para describir el movimiento. A continuación los que son de interés para este curso.

- **Partícula.** Es un modelo que consiste en una porción de materia suficientemente pequeña para que su tamaño no sea un elemento a considerar en los razonamientos en los que dicha porción de materia interviene, sin que dichos razonamientos se alteren.

- **Trayectoria y Posición**

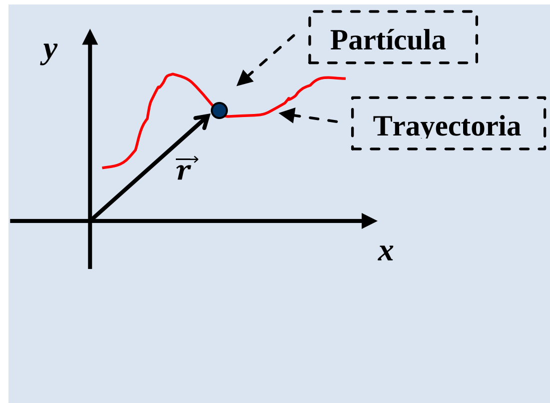
Imagine que mientras usted lee este libro, apoyándolo sobre una mesa, ve una hormiguita caminar por la superficie de la mesa. Además, suponga que la hormiguita tiene las patitas sucias de tinta roja. Mientras la hormiguita camina, deja una línea de color rojo que se corresponde con los puntos por donde ésta pasó. A la línea roja que la hormiguita dejó marcada en la mesa le denominamos trayectoria. Entonces, **trayectoria** es la línea que describe un objeto en su movimiento.



** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Es importante advertirles que la descripción, como la hemos hecho, no debe inducirles a pensar que la trayectoria es la tinta. La tinta deja un registro de la línea que la hormiga describe mientras se mueve. Sin embargo, si las patitas de la hormiguita no están sucias de tinta y por tanto no deja registro, de todas formas usamos la palabra trayectoria para designar a la línea que describe la hormiguita mientras se mueve.

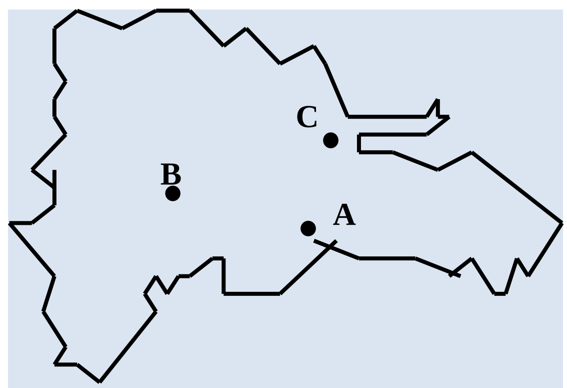
Para precisar cada punto de la trayectoria por donde pasa la hormiguita, nos auxiliamos de un sistema de coordenadas, el cual consideramos fijo. La ubicación de cada punto la expresamos mediante una cantidad física vectorial que denominamos **posición.** Esta se denota con $\vec{r}$. Se expresa en metros en el Sistema Internacional. *El vector posición es el segmento dirigido que va del origen del sistema de coordenadas hasta el punto en que está la partícula en un instante dado.*



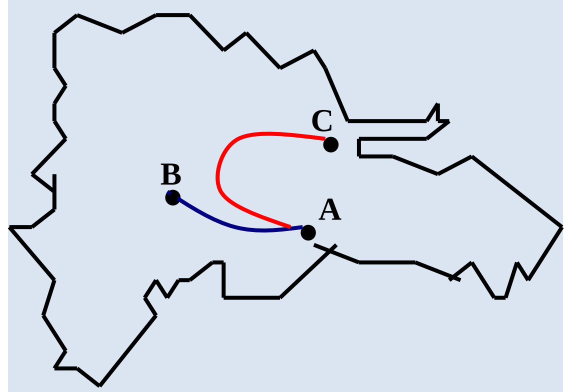
➢ Desplazamiento y Distancia

Suponga que eres un extranjero y planificas tus vacaciones. Llegarás a la ciudad A, por avión y desde ahí irás en auto a otra ciudad. Tienes dos opciones; B y C. Tienes suficiente información sobre B y C como para establecer que te divertirás igual en ambas. Tomas un mapa en el que aparecen A, B y C. Desde que lo ves dices – Iré desde A hasta C. C está más cerca (ver figura 2.2 *a*).

Ahora el operador turístico te pasa un nuevo mapa. Este último tiene las carreteras que te conducirían de **A** hasta **B** y de **A** hasta **C** (ver figura 2.2 *b*), y exclamas "¡Tendré un mayor recorrido si voy de **A** hasta **C**!" Está claro que el nuevo mapa tiene las ciudades en el mismo lugar que el anterior. La diferencia es que en el primero has apreciado una cosa y en segundo has apreciado otra. En el primer mapa te has ocupado de comparar la longitud del segmento que va de **A** hasta **B** con la longitud del segmento que va de **A** hasta **C**. En el segundo mapa te has ocupado de comparar la longitud de la trayectoria que habrás de recorrer si vas de **A** hasta **B** con la que tendrás que recorrer si vas de **A** hasta **C**. Para distinguir una cosa de la otra, la física tiene dos cantidades, a saber:



a) Ubicación de ciudades A, B y C, sin carreteras.



b) Ubicación de ciudades A, B y C, con carreteras

Figura 2.2

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

- **Desplazamiento:** Cantidad vectorial con que se precisa el cambio de posición de una partícula en un intervalo de tiempo dado. Está dado por el segmento dirigido que va desde la posición en el instante inicial del intervalo hasta la posición en el instante final del intervalo. En el caso que hemos ilustrado, el desplazamiento, si vas de A hasta C, está constituido por la longitud del segmento que va de A hasta C (módulo) y el ángulo de éste con un eje dado (dirección). El desplazamiento se expresa en metros en el Sistema Internacional. Otras unidades son: km, cm, pie, milla, etc.

- **Distancia:** Longitud de la trayectoria seguida por una partícula en un intervalo de tiempo dado. En el caso que hemos ilustrado, la distancia, si vas de A hasta C, es la longitud de la línea roja. La distancia usa las mismas unidades del desplazamiento.

Si una partícula tiene posición $\overrightarrow{r_1}$ en el instante t_1 y tiene posición $\overrightarrow{r_2}$ en el instante t_2, entonces el desplazamiento en el intervalo t_2 a t_1 está dado:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} \qquad (2.1)$$

Este es modelo que define matemáticamente el vector desplazamiento.

En la figura 2.3 podemos identificar:

a) El punto **A**, el cual es la ubicación de la partícula en el instante $\mathbf{t_1}$

b) El punto **B**, el cual es la ubicación de la partícula en el instante $\mathbf{t_2}$

c) El segmento dirigido que va desde **0** hasta A, es el vector posición de la partícula en el instante $\mathbf{t_1}$

d) El segmento dirigido que va desde **0** hasta **B**, es el vector posición de la partícula en el instante $\mathbf{t_2}$

e) El segmento dirigido que va desde **A** hasta **B**, es el vector **desplazamiento** de la partícula en el intervalo $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$

f) La línea roja es la trayectoria. La longitud de la parte de la línea roja que va de **A** hasta **B** es la **distancia**.

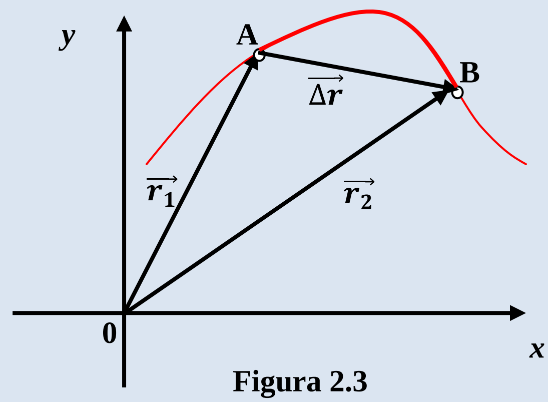


Figura 2.3

Puede establecerse que, en sentido general, la distancia es mayor que la magnitud del desplazamiento. Sin embargo, existe la posibilidad de que sean iguales, pero nunca la magnitud del desplazamiento será mayor que la distancia. La igualdad de la distancia y la magnitud del desplazamiento sólo es posible si el movimiento es en línea recta y en un solo sentido.

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

- **Velocidad:** Cantidad física vectorial que expresa desplazamiento en la unidad de tiempo de una partícula en movimiento. Se tiene ***velocidad media*** cuando esta corresponde a un intervalo de tiempo y se denomina ***velocidad instantánea*** cuando está corresponde a un instante. La velocidad se expresa en m/s (metro sobre segundo) en el Sistema Internacional. Otras unidades son: km/h, cm/s, pie/s, milla/h, nudo, etc.

  En el lado derecho de esta expresión aparecen cuatro elementos: $\vec{r_1}$ vector posición en el instante t_1, $\vec{r_2}$ vector posición en el instante t_2, y $(t_2 - t_1)$ es la duración del intervalo. Es decir, $t_2 - t_1$ es el tiempo transcurrido mientras el cuerpo se desplaza $\vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$\vec{v} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} \qquad (2.2)$$

Este es modelo que define matemáticamente la velocidad media.

En este curso no nos ocuparemos de la expresión matemática para la velocidad instantánea, porque la misma corresponde al cálculo diferencial e integral, que no es del interés de este curso.

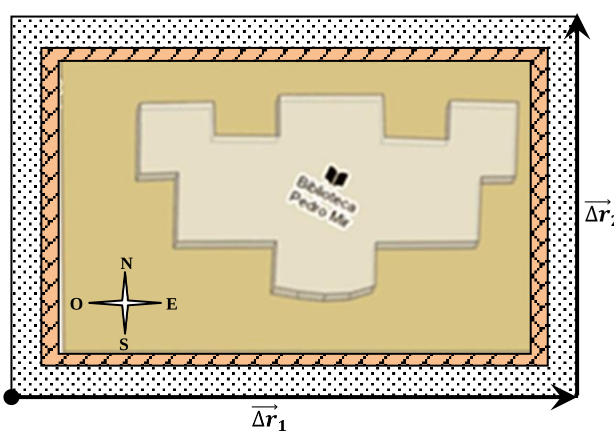
- **Rapidez:** Cantidad física escalar con que se precisa la distancia en la unidad de tiempo de una partícula en movimiento. Se tiene rapidez **media** cuando ésta corresponde a un intervalo de tiempo y **rapidez instantánea** cuando está corresponde a un instante.
  - Donde ***S*** es la distancia en el intervalo t_1 a t_2.

$$R_m = \frac{S}{t_2 - t_1} \qquad (2.3)$$

Este es modelo que define matemáticamente la rapidez media.

Ejemplo 2.1

Un estudiante de la UASD va desde la esquina suroeste de la acera de la cuadra que ocupa la biblioteca central hasta la esquina noreste de la misma cuadra. Camina por la acera sur de la cuadra, que mide de esquina a esquina 80.0 m, la cual recorre en 1.00 minuto. Finalmente, gira hacia el norte y camina por la acera este que mide 60.0 m, la cual recorre en 0.500 minuto. Determine; a) la magnitud de la velocidad media y b) la rapidez media en el intervalo de 1.50 minuto de su recorrido.



** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Solución

a) Tenemos dos desplazamientos: $\overrightarrow{\Delta r_1} = 80.0 \text{ m al este, y } \overrightarrow{\Delta r_2} = 60.0 \text{ m al norte}$

- Estos se pueden expresar como: $\overrightarrow{\Delta r_1} = (80.0 \text{ m}, \ 0) \text{ y } \overrightarrow{\Delta r_2} = (0, 60.0 \text{ m})$
- Para un desplazamiento total de: $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_2} + \overrightarrow{\Delta r_1} = (80.0 \text{ m}, 60.0 \text{ m})$
- La magnitud de este vector es:

$$\Delta \text{r} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(80.0 \text{ m})^2 + (60.0 \text{ m})^2} = 100 \text{ m}$$

- El cual le ha tomado $\Delta \text{t} = 1.50 \text{ min} = 1.50 \cancel{\text{min}} \text{ x } 60.0 \frac{\text{s}}{\cancel{\text{min}}} = 90.0 \text{ s}$
- El módulo de la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{90.0 \text{ s}} = 1.11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Tenemos que el estudiante ha hecho un recorrido de dos tramos rectos que miden 80.0 m y 60.0 m, para una distancia total recorrida de S = 140 m

- La rapidez media es:

$$R_m = \frac{S}{\Delta t} = \frac{140 \, m}{90.0 \, s} = 1.56 \frac{m}{s}$$

- **Aceleración.** Cantidad física vectorial que expresa cambio de velocidad en la unidad de tiempo. Cuando esta corresponde a un intervalo de tiempo, se le denomina aceleración media y se le denomina aceleración instantánea cuando corresponde a un instante. La aceleración se expresa en m/s² (metro sobre segundo cuadrado) en el sistema internacional. Otras unidades son cm/s², pie/s², etc.

Cambio de velocidad equivale a:

a) cambio de la magnitud de la *velocidad*,
b) cambio de la dirección y sentido de la velocidad, ó
c) cambio de la magnitud, dirección y sentido de la velocidad.

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \frac{\boldsymbol{\vec{v_2}} - \boldsymbol{\vec{v_1}}}{\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}} \qquad (\mathbf{2.4})$$

Este es modelo que define matemáticamente la aceleración media.

En este curso no nos ocuparemos de la expresión matemática para la aceleración instantánea, porque la misma corresponde al cálculo diferencial e integral, que no es del interés de este curso.

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

2.3 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Ahora estudiaremos el movimiento de los cuerpos cuya trayectoria es recta. Esto lo haremos considerando que la trayectoria coincide con el eje *x*. Esto tiene como propósito simplificar las expresiones matemáticas que usamos. Además, las cantidades vectoriales que antes precisamos (posición, desplazamiento, velocidad y aceleración) podrán ser identificadas por una de sus componentes, lo cual permitirá evitar manejarlas como vectores.

- **Posición**.

Como ya habíamos dicho, consideraremos que la recta que describe el partícula en estudio es el eje x. Tomamos un punto de dicha recta al que denominamos origen. Usaremos la letra *x* para denotar a la posición. El valor de *x* es la longitud del segmento que va desde el origen al punto en que está la partícula (vea figura 2.3), teniendo en cuenta que éste puede tener signo positivo o negativo. El signo de *x* (la posición) será positivo si el cuerpo *está* de un lado del origen (digamos a la derecha del origen) y será negativo si *está* al otro lado del origen (digamos a la izquierda).

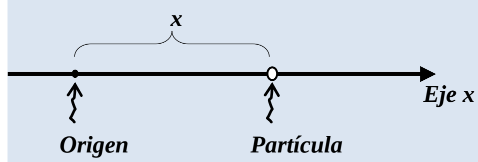


Figura 2.3

- **Desplazamiento**

Si en el instante inicial de cierto intervalo de tiempo un cuerpo está en x_1 y en el instante final del mismo intervalo está en x_2, entonces decimos que el desplazamiento de dicho cuerpo en dicho intervalo es:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (2.5)$$

El desplazamiento puede tener signo positivo o negativo, eso dependerá hacia donde se mueve la partícula. Podríamos decir que el signo de Δx es positivo si el cuerpo *va hacia* la derecha y que Δx es negativo si el cuerpo *va hacia* la izquierda (ver figura 2.4).

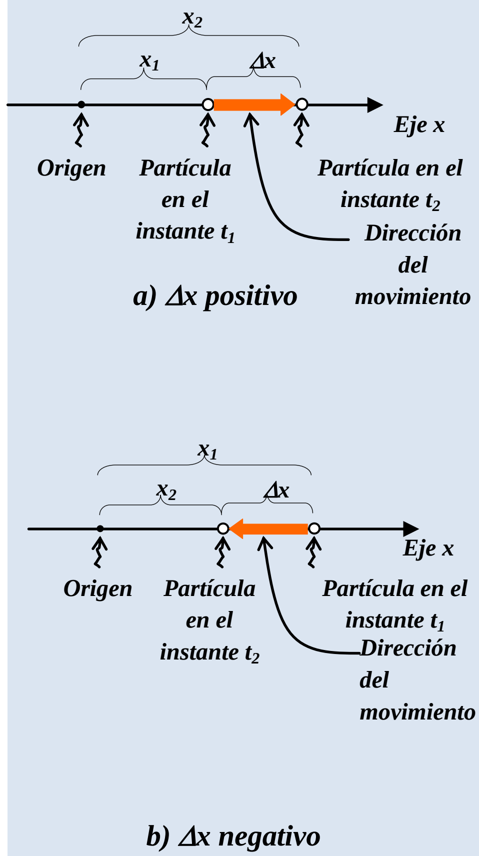


Figura 2.4

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

- **Velocidad**

En el movimiento rectilíneo denotaremos con v_{x-m} a la velocidad media. El subíndice *x* para indicar que el cuerpo se mueve sobre el eje *x*. Para denotar la velocidad instantánea, usamos v_x. Igual que como dijimos sobre el desplazamiento, la velocidad es positiva si el cuerpo *va hacia* la derecha y es negativa si el cuerpo *va hacia* la izquierda.

$$\boldsymbol{v_{x-m} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_1 - t_2)}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Expresión matemática con que se define velocidad media en el movimiento rectilíneo.

Ejemplo 2.3

Un auto se mueve sobre una carretera recta. El conductor ve las 2:15 p.m., en su reloj, en el instante en que pasa frente a un borne que indica 20 km. Luego, en el instante en que su reloj marca 2:30 p.m., pasa frente al borne que índica 40 km. ¿Cuál es la velocidad media del auto en el intervalo de 2:15 p.m. a 2:30 p.m.?

Solución

- Dado que el auto se mueve en línea recta, tenemos que los valores indicados en los bornes representan x_1 y x_2 . Es decir, las posiciones en el instante inicial y final del intervalo en cuestión.
  - $x_1 = 20.0\ km$ y $x_2 = 40.0\ km$

- En el intervalo de 2:15 p.m. a 2:30 p.m., transcurren 15 minutos. Es decir, $\Delta t = t_2 - t_1$ = (2 horas 30 minutos) – (2 horas 15 minutos) = 15 minutos. 15 minutos, expresados en hora, es 0.25 h.

  La velocidad es:

$$v_{x-m} = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_1 - t_2)} = \frac{(x_2 - x_1)}{\Delta t} = \frac{40.0\ km - 20.0\ km}{0.25\ h} = \underline{\underline{80.0 \frac{km}{h}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

➢ OBTENCIÓN DE VELOCIDAD DADO EL GRÁFICO $x = f(t)$

- La velocidad media es igual a la pendiente de la recta secante[1] al gráfico $x = f(t)$ (ver figura 2.5). Dicho de otro modo, si tenemos un gráfico $x = f(t)$ y se nos pide la velocidad media en cierto intervalo t_1 a t_2, entonces trazamos una recta que corta (secante) al gráfico $x = f(t)$ en los puntos correspondientes a los instantes t_1 y t_2, y finalmente la velocidad en dicho intervalo es la pendiente de la recta ya trazada.

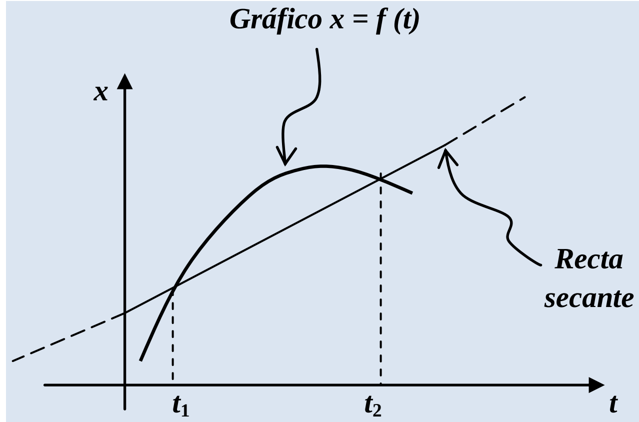


Figura 2.5

- La velocidad instantánea es igual a la pendiente de la recta tangente[2] al gráfico $x = f(t)$ (ver figura 2.6). Dicho de otro modo, si tenemos un gráfico $x = f(t)$ y se nos pide la velocidad en cierto instante t_1, entonces trazamos una recta que *toca* (tangente) al gráfico $x = f(t)$ en el punto correspondientes al instante t_1, y finalmente la velocidad en dicho instante es la pendiente de la recta ya trazada.

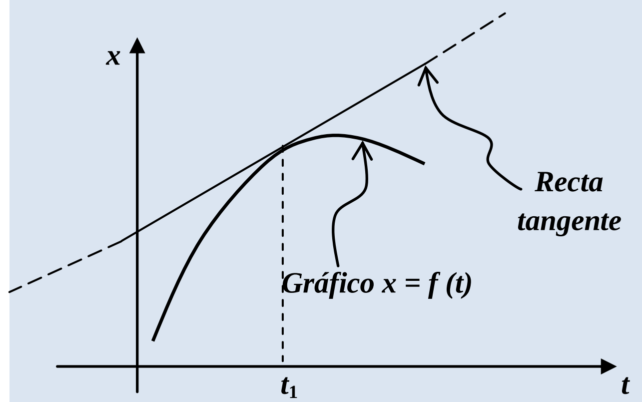


Figura 2.6

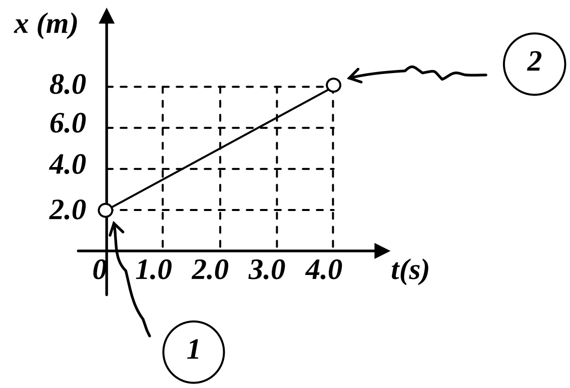
Si el gráfico $x = f(t)$ es una recta, entonces en el gráfico, toda secante y toda tangente al él, coinciden. Siendo la velocidad – en cualquier intervalo (velocidad media) y en cualquier instante (velocidad instantánea) – una constante igual a la pendiente del gráfico.

Es importante hacer notar que tanto la velocidad media como la velocidad instantánea pueden obtenerse a partir del gráfico $x = f(t)$, la diferencia es que en un caso (velocidad media) usamos una recta secante y en el otro caso (velocidad instantánea) usamos la recta tangente.

[1] *Se denomina recta secante a aquella que corta una curva en dos puntos.*
[2] *Se denomina recta tangente a aquella que toca a una curva en un solo punto*
** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.4

El gráfico $x = f$ (t) que se muestra más abajo, corresponde a un partícula que se mueve en línea recta (sobre el eje x). Cuál es la velocidad de dicha partícula.



Solución

- Como el gráfico $x = f(t)$ es una recta, entonces debemos calcular la pendiente de dicha recta para obtener la velocidad. Con tal propósito hemos seleccionado dos puntos de la recta (señalados en la figura). En estos tenemos:
  - Punto 1: $t_1 = 0$ y $x_1 = 2.00$ m,
  - y Punto 2: $t_2 = 4.0$ s y $x_2 = 8.00$ m.

- La velocidad es:

$$v_x = pendiente = \frac{(x_2 - x_1)}{(t_1 - t_2)} = \frac{8.00\text{ m} - 2.00\text{ m}}{4.00\text{ s} - 0} = \underline{\underline{1.50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

➢ OBTENCIÓN DE DESPLAZAMIENTO DADO EL GRÁFICO $v_x = f\ (t)$

- Si tenemos el gráfico $v_x = f\ (t)$, como se ve en la figura 2.7 y nos interesa el desplazamiento en cierto intervalo t_1 a t_2, entonces podemos obtener el desplazamiento como el área comprendida entre: el gráfico $v_x = f$ (t), el eje t, las rectas verticales que cortan al eje de t en t_1 y t_2. Esto acostumbra a expresarse como "*El desplazamiento de una partícula que se mueve sobre el eje x es igual al área bajo el gráfico $v_x = f\ (t)$*". Es decir, el área sombreada de la figura 2.7.

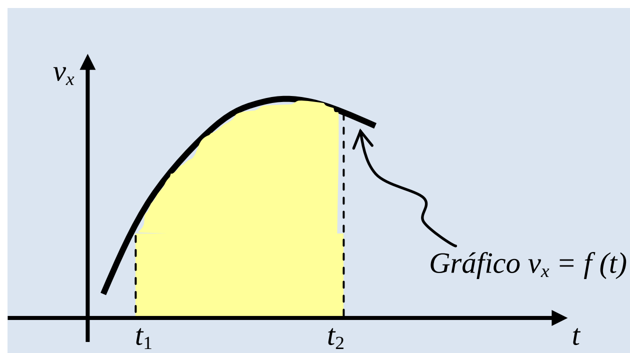
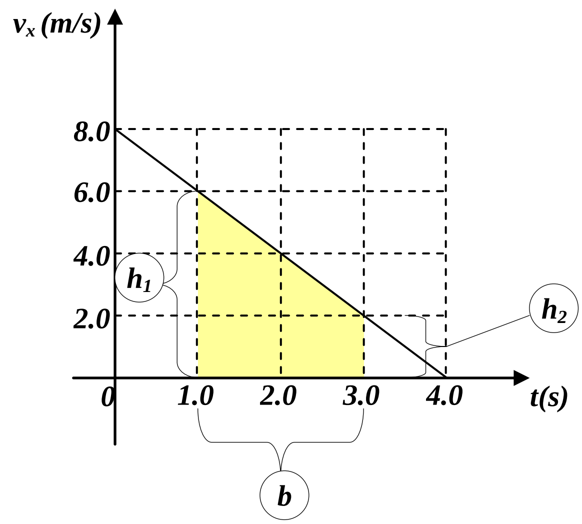


Figura 2.7

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.5

Considerando que el gráfico $v_x = f(t)$ de una partícula que se mueve sobre el eje x, es el que se muestra más abajo, determine cuanto se desplaza dicha partícula en el intervalo
t = 1.0 s a t = 3.0 s



Solución

- Al sombrear la superficie bajo el gráfico, entre t = 1.0 s y t = 3.0 s, se evidencia un trapecio. En la figura hemos indicado las dimensiones del trapecio, a citar; h_1 = 6.0 m/s, h_2 = 2.0 m/s y b = 2.0 s.

- Para obtener el desplazamiento requerido, calculamos el área del trapecio ya citado. El desplazamiento es:

$$\Delta x = \acute{a}rea\ del\ trapecio = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) b = \left(\frac{6.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2}\right)(2.0\ \mathrm{s}) = \underline{\underline{8.0\ \mathrm{m}}}$$

- **Aceleración**

Para denotar a la aceleración media usamos a_{x-m} y para denotar a la aceleración instantánea usamos a_x. Debemos decir nuevamente que el subíndice *x* es tan solo para recordar que se trata de una partícula que se mueve en línea recta (sobre el eje *x*). De no ser así, entonces cada una de las cantidades físicas que hemos citado deben ser "manipuladas" como vectores, por cuanto sus símbolos deben tener una flechita horizontal sobre los mismos.

$$\boldsymbol{a_{x-m} = \frac{(v_{2x} - v_{1x})}{(t_1 - t_2)}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Expresión matemática con que se define aceleración media en el movimiento rectilíneo.

Recordamos que el signo de la velocidad solo índica hacia dónde va la partícula. Sin embargo, tomando este signo como si fuese *parte de la cuantificación de la misma*, podemos decir que la aceleración es positiva si la velocidad aumenta y negativa si la velocidad disminuye. Insisto, esta forma de establecer el signo de la aceleración es válida considerando el signo de la velocidad como

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

parte de la cuantificación de la misma, pues una velocidad de -20.0 m/s no es menor que una velocidad de 10.0 m/s. El signo de la primera solo índica el sentido.

➢ OBTENCIÓN DE ACELERACIÓN DADO EL GRÁFICO $v_x = f\,(t)$

- La aceleración media es igual a la pendiente de la recta secante al gráfico $v_x = f\,(t)$ (figura 2.8). Dicho de otro modo, si tenemos un gráfico $v_x = f\,(t)$ y se nos pide la aceleración media en cierto intervalo t_1 a t_2, entonces trazamos una recta que corta al gráfico $v_x = f\,(t)$ en los puntos correspondientes a los instantes t_1 y t_2, y finalmente la aceleración en dicho intervalo es la pendiente de la recta ya trazada.

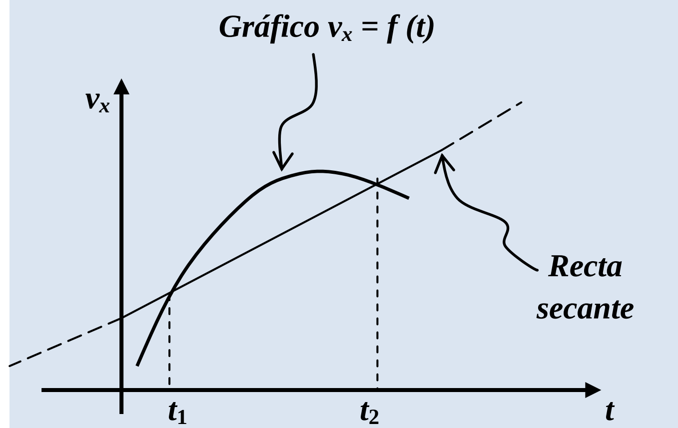


Figura 2.8

- La aceleración instantánea es igual a la pendiente de la recta tangente al gráfico $v_x = f(t)$ (figura 2.9). Dicho de otro modo, si tenemos un gráfico $v_x = f\,(t)$ y se nos pide la aceleración en cierto instante t_1, entonces trazamos una recta que *toca* (tangente) al gráfico $v_x = f\,(t)$ en el punto correspondientes al instante t_1, y finalmente la velocidad en dicho instante es la pendiente de la recta ya trazada.

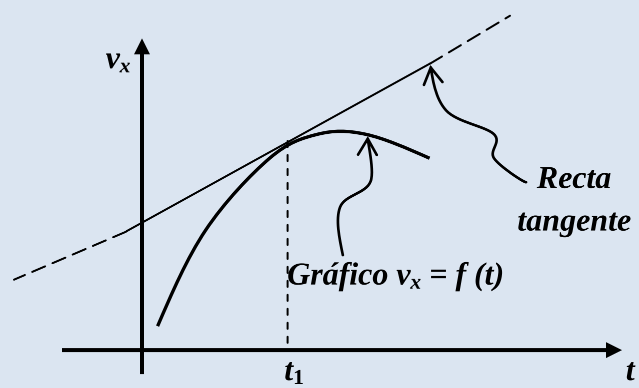


Figura 2.9

Si el gráfico $v_x = f\,(t)$ es una recta, entonces toda secante y toda tangente a él, coinciden. Siendo la aceleración – en cualquier intervalo (media) y en cualquier instante (instantánea) – una constante igual a la pendiente del gráfico.

Es importante hacer notar que tanto la aceleración media como la instantánea pueden obtenerse a partir del gráfico $v_x = f\,(t)$, la diferencia es que en un caso (velocidad media) usamos una recta secante y en el otro caso (velocidad instantánea) usamos la recta tangente.

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

➢ MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

- Es el movimiento en el que la velocidad es constante en magnitud, en dirección (movimiento en línea recta) y sentido.
- En este movimiento tenemos que la relación entre el desplazamiento y el tiempo es una proporcionalidad directa, la cual se expresa por:

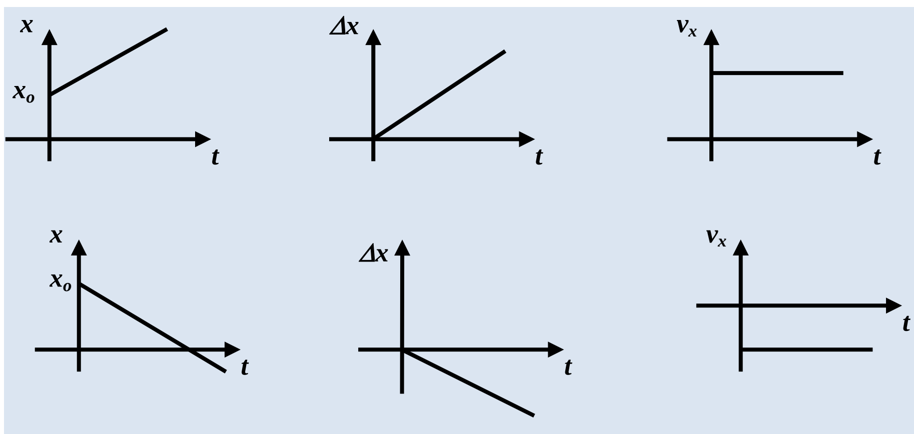
$$\Delta x = v_x\, t \qquad \textbf{(2.8)}$$

Expresión matemática de $\Delta x = f(t)$ de una partícula con movimiento rectilíneo uniforme

- Siendo Δx el desplazamiento en el intervalo $t = 0$ a t, y v_x es la velocidad (constante) con que se mueve el cuerpo considerado.
- Además, $\Delta x = x - x_o$. Donde x_o es la posición en el instante $t = 0$ y x es la posición en el instante t.

Ahora nos ocupamos de ilustrar, con gráficos, las diferentes cantidades físicas de la cinemática en función del tiempo, correspondientes al movimiento rectilíneo uniforme.

- Considerando que el cuerpo se mueve hacia la parte *positiva* del eje *x*
- Considerando que el cuerpo se mueve hacia la parte *negativa* del eje *x*



Ejemplo 2.6

Un auto viaja por una calle recta con velocidad constante de 20.0 m/s. Pasa frente a la casa de Juan 5.00 s después de haber pasado frente la casa de Pedro. ¿Cuándo dista la casa de Juan de la casa de Pedro?

Solución

- Lo que dista la casa de Juan de la casa de Pedro es lo que se desplazó el auto en el lapso de 5.00 s. Teniendo como velocidad $v_x = 20.0$ m/s.

- El desplazamiento es:

$$\Delta x = v_x\, t = \left(20.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(5.00\ \mathrm{s}) = \underline{\underline{100\ \mathrm{m}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

➢ MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

- **Movimiento en línea recta con aceleración constante.**

En este movimiento pueden considerarse dos posibilidades: que aumente la magnitud de la velocidad (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado) o que disminuya la magnitud de la velocidad (movimiento rectilíneo uniformemente retardado). Sin embargo, debe tenerse cuidado sobre el significado de esto. No ha faltado quien se haya sentido tentado a establecer que si la magnitud de la velocidad aumenta, entonces la aceleración es positiva, y si la magnitud de la velocidad disminuye, entonces la aceleración es negativa. En tal sentido, es preciso señalar que existen cuerpos en movimiento en línea recta con aceleración constante, tales que la magnitud de su velocidad disminuye y luego aumenta, sin que su aceleración haya cambiado mientras dicho cambio ocurre.

- **Velocidad en función del tiempo de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniformemente variado.**

La aceleración para todo cuerpo con movimiento rectilíneo uniformemente variado puede obtenerse como:

$$a_x = \frac{(v_{2x} - v_{1x})}{(t_1 - t_2)}$$

En nuestro caso, consideraremos la expresión en el intervalo $t_1 = 0$ a $t_2 = t$. Por lo que sustituiremos a v_{2x} por v_x, que representa la velocidad en el instante t y sustituiremos a v_{1x} por v_{ox}, tal que v_{ox} se denomina velocidad inicial (velocidad en el instante $t = 0$) La expresión es entonces:

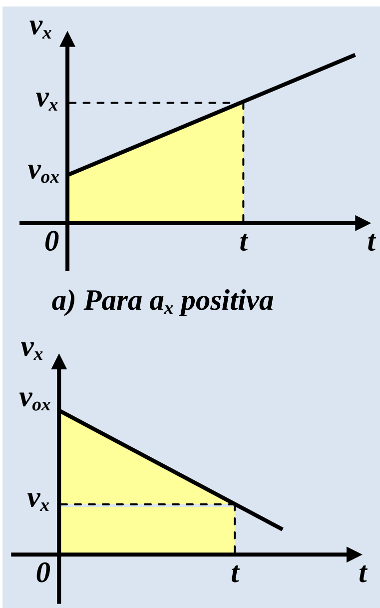
$$a_x = \frac{(v_x - v_{0x})}{t}$$

De donde,

$$v_x = v_0 + a_x t \qquad \textbf{(2.9)}$$

Expresión matemática de $v_x = f(t)$ de una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente variado

- **Desplazamiento en función de velocidad y tiempo.**



a) Para a_x positiva

b) Para a_x negativa

Figura 2.10

Dada la expresión de velocidad en función de tiempo de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniformemente variado, podemos establecer la forma del gráfico correspondiente.

Como ya habíamos dicho, podemos obtener el desplazamiento usando el gráfico $v_x = f(t)$. Por lo que, podemos calcular el área de la parte sombreada en la figura 2.10 (en *a* o en *b*), cuyo resultado es el desplazamiento en el intervalo $t = 0$ a t. Dicha figura es un

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

trapecio con base igual a t, con alturas v_{ox} y v_x. Por lo que el desplazamiento es (el área):

$$\Delta x = \left(\frac{v_x + v_{0x}}{2}\right) t \qquad \textbf{(2.10)}$$

Desplazamiento en función de velocidad y tiempo para una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente variado.

- **Desplazamiento en función del tiempo.**

Ahora sustituiremos la expresión *(2.9)* en la expresión *(2.10)*, con lo que obtenemos:

$$\Delta x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Desplazamiento en función tiempo para una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente variado.

A partir de esta ecuación se puede construir un gráfico para el desplazamiento en función del tiempo.

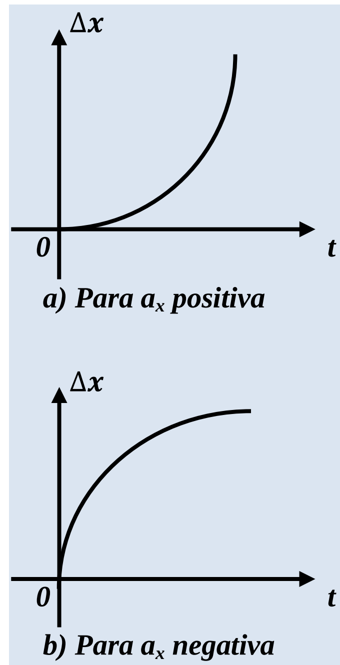


Figura 2.11

- **Expresión que relaciona al desplazamiento y la velocidad.**

Ahora despejamos a t de la ecuación (2.9) y sustituimos en la ecuación (2.10). Con lo cual tenemos como resultado lo siguiente:

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \qquad \textbf{(2.12)}$$

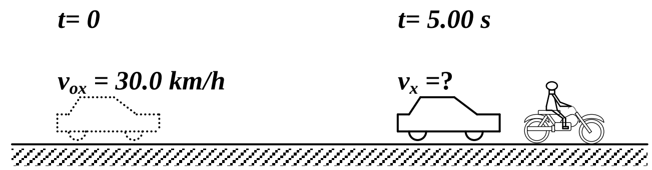
Expresión que relaciona al desplazamiento y la velocidad para una partícula con movimiento rectilíneo uniformemente variado

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.7

Una patrulla de policía tiene en marcha el auto en que transita, sobre una avenida recta, a una velocidad constante de 30.0 km/h, mientras supervisan a los transeúntes de la avenida. Al ver pasar por el carril adyacente a un motorista a alta velocidad, acelera a razón de 4.00 m/s² con la idea de alcanzarlo. Lo cual logra al cabo de 5.00 s. ¿Qué velocidad tiene el auto de policía en el momento que alcanza al motorista?

Solución



- Al momento de iniciar su movimiento acelerado, el auto viaja a 30.0 km/h. Por lo que v_{ox} = 30.0 km/h.
- Esta velocidad puede expresarte en m/s dividiendo entre 3.6. Por lo que v_{ox} = 8.33 m/s
- La velocidad del auto al alcanzar el motorista corresponde a la velocidad cuando t = 5.00 s

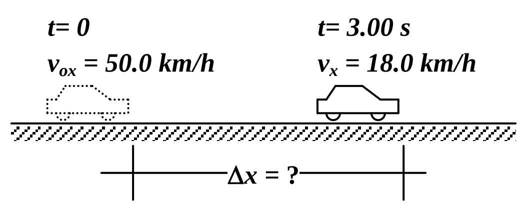
- La velocidad es:

$$v_x = v_0 + a_x t = \left(8.33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) + \left(4.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(5.00\ \mathrm{s}) = \underline{\underline{28.3\ \mathrm{m/s}}}$$

- Este resultado lo expresaremos en km/h, para que se corresponda con la forma convencional de expresar la velocidad de los autos. Esto se logra multiplicando el valor de velocidad en m/s por 3.6. Por lo que, tenemos $v_x = \ 102\,\frac{km}{h}$

Ejemplo 2.8

El conductor de un auto que viaja en línea recta a 50.0 km/h pisa los frenos, al ver un bache un poco más adelante, sobre la calle en que transita. El conductor pisa los frenos durante 3.00 s y la velocidad se reduce uniformemente hasta 18.0 km/h. ¿Cuánto se desplazó el auto mientras el conductor pisó los frenos?



Solución

- Tenemos que 50.0 km/h es la velocidad en el instante en que inicia el movimiento con aceleración constante.
- Es decir, v_{ox} = 50.0 km/h. Expresado en m/s, tenemos $v_{0x} \ = \ 13.9\ m/s$
- 18.0 km/h es la velocidad en el instante t = 3.00 s. Esta, expresada en m/s, es 5.00 m/s. Es decir, v_x = 5.00 m/s cuando t = 3.00 s

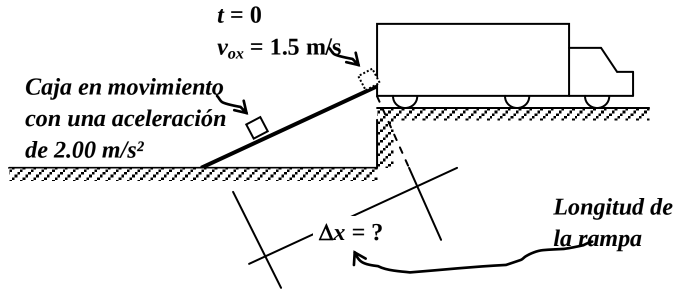
- El desplazamiento del auto en este lapso es:

$$\Delta x = \left(\frac{v_x + v_{0x}}{2}\right)t = \left(\frac{13.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 5.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2}\right)(3.00\mathrm{s}) = \underline{\underline{28.4\ \mathrm{m}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.9

Para descargar una camión, el descargador empuja cajas desde el tope superior de una rampa, las cuales (las cajas) se deslizan con una aceleración constante de 2.00 m/s² y llegan al otro extremo de la rampa al cabo de 3.00 s. Suponiendo que el descargador le da una velocidad de 1.50 m/s a la caja, al momento de esta iniciar su movimiento sobre la rampa, determine la longitud de la rampa.



Solución

- La longitud de la rampa es el desplazamiento de cada caja en un intervalo de 3.00s, iniciando con una velocidad inicial de 1.50 m/s (v_{ox} = 1.50 m/s) y moviéndose con una aceleración constante de 2.00 m/s²

- La longitud de la rampa es:

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = \left(1.50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(3.00\ \mathrm{s}) + \frac{\left(2.00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3.00\ \mathrm{s})^2}{2} = \underline{\underline{13.5\ \mathrm{m}}}$$

Ejemplo 2.10

Al ser golpeada, cierta bola de golf, inicia su movimiento con una velocidad de 6.00 m/s. Esta se desliza en línea recta y alcanza el hoyo a 2.00 m/s, el cual (el hoyo) está a 10.0 m del punto de ser golpeada. ¿Con que aceleración se deslizó la bola?

Solución

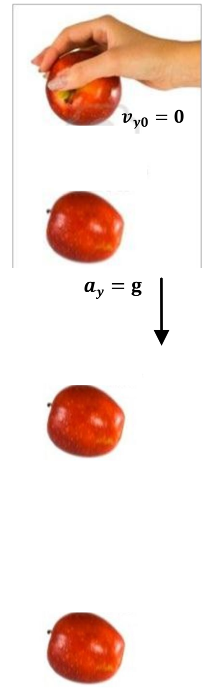
- Consideremos que la parte positiva del eje x apunta hacia donde se mueve la bola. Teniendo tal consideración, tenemos un bola en movimiento rectilíneo con aceleración constante que inicia su movimiento con 6.00 m/s (v_{ox} = 6.00 m/s) y que alcanza una velocidad de 2.00 m/s al desplazarse 10.0 m (v_x = 2.00 m/s cuando Δx = 10.0 m).

- La solución viene dada por la ecuación (2.12), despejando de ella a_x.

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2\Delta x} = \frac{\left(2.00\frac{m}{s}\right)^2 - \left(6.00\frac{m}{s}\right)^2}{2(10.0\ m)} = \underline{\underline{-1.60\ \mathrm{m/s^2}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

CAÍDA LIBRE DE LOS CUERPOS.



En nuestra experiencia cotidiana, hemos observado el movimiento de cuerpos que lanzamos o soltamos, sin que estos estén apoyados o suspendidos. Estos cuerpos terminarán chocando, en algún momento, con "el suelo". En particular, consideremos los cuerpos que son lanzados hacia arriba, hacia abajo o dejados caer (sin ser lanzados). Además, en nuestra consideración despreciemos los efectos del aire. A los cuerpos en movimiento bajo las condiciones citadas, les denominamos cuerpos en caída libre. Todo cuerpo en caída libre tiene una aceleración de magnitud 9.8 m/s², hacia abajo, *independiente de su masa*. A ésta, la denominamos aceleración de caída libre o aceleración gravitacional, o simplemente gravedad. Dicha cantidad la simbolizamos con la legra "g".

Al estudiar el movimiento de cuerpos en caída libre con trayectoria vertical (lanzado hacia arriba, lanzado hacia abajo o dejado caer), estamos ante un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente variado. Dicho movimiento es retardado si el cuerpo va hacia arriba y es acelerado si va hacia abajo. Es decir, disminuye la magnitud de la velocidad si va hacia arriba y aumenta la magnitud de la velocidad si va hacia abajo. Sin embargo, en ambos casos la aceleración es la misma, como dijimos antes, 9.8 m/s² hacia abajo. Por lo que, en nuestro estudio, consideramos que la trayectoria coincide con el eje y, el cual tendrá su origen en "el suelo" y su parte positiva arriba del suelo. Por lo que, usaremos como aceleración a_y = - 9.8 m/s², en ambos casos.

Al momento de resolver cualquier problema de caída libre debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. La trayectoria es una recta vertical.
2. Si el cuerpo es lanzado hacia arriba, entonces v_{oy} es positiva, y la magnitud de la velocidad disminuye.
3. Si el cuerpo es lanzado hacia abajo, entonces v_{oy} es negativa, y la magnitud de la velocidad aumenta.
4. Si el cuerpo se deja caer desde un lugar en reposo v_{oy} es cero
5. Si el cuerpo se suelta desde un marco de referencia en movimiento (un globo, por ejemplo), entonces v_{oy} es igual a la velocidad de dicho marco de referencia, "positiva si dicho marco de referencia va hacia arriba y negativa si dicho marco de referencia va hacia abajo"
6. En todo caso usar a_y = -9.8 m/s². Es decir, $a_y = -g$

La solución de todo problema de caída libre, puede obtenerse usando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, antes citada. Considerando $a_y = -g$.

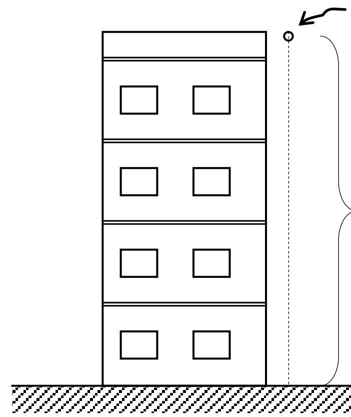
$v_y = v_0 - gt$	(2.9)	Expresión matemática de $v_y = f(t)$ de una partícula en caída libre
$\Delta y = \left(\frac{v_y + v_{0y}}{2}\right) t$	(2.10)	Desplazamiento en función de velocidad y tiempo para una partícula en caída libre
$\Delta y = v_{0y} t - \frac{g\,t^2}{2}$	(2.11)	Desplazamiento en función tiempo para una partícula en caída libre
$\Delta y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g}$	(2.12)	Expresión que relaciona al desplazamiento y la velocidad para una partícula en caída libre

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.11

A un estudiante se le ha pedido que diga cuál es la altura del edificio de apartamentos donde vive. Como no tiene los instrumentos apropiados para medirlo, se le ocurre usar la fórmula (2.11) del movimiento de caída libre. El procedimiento usado por el alumno consiste en soltar un tomate desde la azotea del edificio y tomar el tiempo que le toma en caer. Suponga que al tomate le tomó 1.60 s caer desde la azotea del edificio. ¿Cuál es la altura del edificio?

Solución



- Como el tomate es soltado desde la mano del estudiante, en reposo, entonces la velocidad inicial es nula (v_{oy} = 0). Además, consideraremos que el tomate se mueve en caída libre.

- Al calcular Δy, obtendremos un valor negativo porque el punto final del movimiento del tomate está bajo el punto de partida. Es decir, en el intervalo en cuestión, va hacia abajo. Por tal razón, establecemos que la altura del edifico es el valor absoluto del desplazamiento del tomate.

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{g\,t^2}{2} = (0)(1.60\ \mathrm{s}) - \frac{(9.8\ \mathrm{m/s^2})(1.60\ \mathrm{s})^2}{2} = \underline{\underline{-12.5\ \mathrm{m}}}$$

- La altura del edificio es: $\underline{\underline{12.5\ \mathrm{m}}}$

Ejemplo 2.12

Con la idea de que el periódico llegue al 4to nivel de un edificio, el cual está a 6.60 m sobre el punto de lanzamiento (6.60 m sobre el punto donde la mano del repartidor lanza el periódico), el repartidor lanza el periódico a 10.0 m/s. ¿Llegará el periódico al lugar pretendido?

Solución

- Para establecer si el periódico llegará hasta una altura de 6.60 m, debemos establecer cuanto es lo máximo que sube el periódico al ser lanzado con esa velocidad. Si el periódico sube más o igual de 6.60 m, entonces lo logrará.

- Cuando un objeto en caída libre alcanza el punto más alto de su trayectoria, su velocidad es nula. Entonces calcularemos cual es el valor de Δy para v_y = 0 de un objeto lanzado a 10.0 m/s hacia arriba (v_{oy} = 10.0 m/s).

- Para obtener el valor de Δy usaremos la ecuación (2.12) correspondiente a un cuerpo en caída libre con trayectoria vertical.

- El valor de Δy es:

$$\Delta y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g} = \frac{(0)^2 - (10.0\ \mathrm{m/s})^2}{-2\left(9.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)} = \underline{\underline{5.10\ \mathrm{m}}}$$

Entonces, la respuesta es:
<u>No llegará hasta el cuarto nivel.</u>

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

2.4 MOVIMIENTO CURVILÍNEO (EN EL PLANO)

Ahora haremos algunas descripciones sobre el movimiento circular uniforme y el movimiento de proyectiles. En estos movimientos la trayectoria es curvilínea (no es recta) y todos los puntos de la trayectoria están en un mismo plano.

➢ MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Movimiento en el que la trayectoria es circular y la magnitud de la velocidad es constante. Es equivalente decir que la magnitud de la velocidad es constante que decir que la rapidez es constante, porque la magnitud de la velocidad en un instante dado es igual a la rapidez. Es posible que los estudiantes piensen que al haber precisado que la rapidez es constante, debamos establecer que la aceleración es nula, pero no es así. Cuando definimos la aceleración, hablamos de cambio en la velocidad, y este cambio puede ser tanto en la magnitud como en la dirección de la velocidad. La velocidad en el movimiento circular uniforme ***no es constante***, su dirección cambia continuamente, la cual es tangente a la trayectoria (ver figura 2.12). No se le ocurra pensar que al precisar aquí que la velocidad es tangente a la trayectoria, entonces este enunciado es exclusivo para el movimiento circular uniforme. Este enunciado es universal. Es decir, válido para todo movimiento. Además, recuerde que la tangente a una recta coincide con la propia recta.

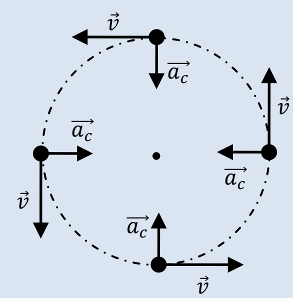


Figura 2.12

La aceleración en el movimiento circular uniforme es perpendicular a la velocidad y apunta hacia el centro de la trayectoria, su magnitud es constante, como se muestra en la figura 2.12. Si tenemos la magnitud de la velocidad (v) de una partícula con movimiento circular uniforme y el radio (R) de la circunferencia que describe, entonces podemos obtener la magnitud de la aceleración como.

$\boldsymbol{a = \frac{v^2}{R}}$	**(2.13)**	Expresiones para la magnitud de la aceleración de una partícula con movimiento circular uniforme.

A cada partícula con MCU le toma el mismo tiempo completar cada vuelta, al cual llamamos período. Usamos T como símbolo para el período. Por otro lado, denominamos frecuencia al número de vueltas que completa dicha partícula en cada unidad de tiempo. Usamos f como símbolo para la frecuencia. La frecuencia se expresa en Hertz, que abreviamos Hz, que representa (1/s). Son usuales múltiplos del Hertz, como son: kHz y MHz

Si una partícula en movimiento circular uniforme completa n vueltas en un intervalo de tiempo t, entonces podemos usar las siguientes fórmulas para obtener el período y la frecuencia:

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

$T = \frac{t}{n}$ $f = \frac{n}{t}$	**(2.14)**	Expresiones para período (T) y frecuencia (f) para una partícula con movimiento circular uniforme.

En las expresiones anteriores puede notarse que el período y la frecuencia son inversos. Es decir, $T = \frac{1}{f}$ ó $f = \frac{1}{T}$

Considerando un intervalo del movimiento, trazamos un segmento que va desde el centro de la trayectoria hasta su ubicación en el instante inicial del intervalo y otro segmento que va desde el centro de la trayectoria hasta su ubicación en el instante final. Al ángulo entre los segmentos citados le denominamos desplazamiento angular (ver figura 2.13) correspondiente al intervalo de tiempo dado. Este se expresa en radianes y en grados. Ahora estamos interesados en establecer cuál es el desplazamiento angular en cada unidad de tiempo, a lo que denominaremos velocidad angular. Esta se expresa en rad/s (radian sobre segundo). Para una partícula con movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante. La cual está dada por:

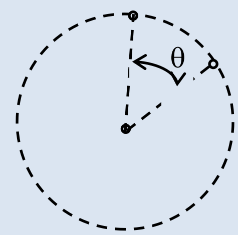


Figura 2.13

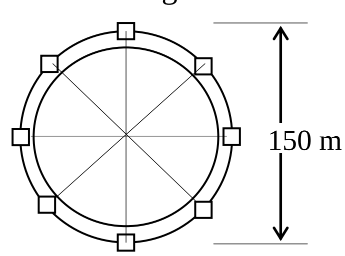
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\omega = 2\pi f$	(2.15)	Expresiones para la velocidad angular de una partícula con movimiento circular uniforme.

Si conocemos el radio de la circunferencia que describe una partícula con movimiento circular uniforme y el tiempo que le toma completar cada vuelta (el período), entonces podemos obtener la magnitud de su velocidad como:

$v = \frac{2\pi R}{T}$ $v = 2\pi R f$ $v = \omega R$	(2.16)	Expresiones para la velocidad de una partícula con movimiento circular uniforme.

Ejemplo 2.13

El Singapore Flyer es la rueda de la fortuna de mayor diámetro en el mundo, con 150 m. Esta completa una vuelta en 30.0 minutos. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de las cápsulas de pasajeros?



Singapore Flyer

Solución

- El tiempo que le toma completar cada vuelta es el período. Su valor, expresado en segundos, es 1.80×10^3 s.

- Para obtener el valor de la velocidad, considerando como datos el período y el radio, y considerando que el diámetro es el doble del radio (D = 2R), entonces es válido que:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{\pi D}{T} = \frac{(3.14)(150\ \text{m})}{1.80 \text{ x } 10^{3}\ \text{s}} = \underline{\underline{0.262\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.14

Un niño hace girar su avión de juguete usando una cuerda elástica. En base a cuanto se estira la cuerda con que hace girar el avión, el niño puede establecer que la aceleración del mismo (del avión), cuyo valor es 9.00 m/s². Si la trayectoria que describe el avión es de 4.00 m de radio, (a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del avión?, (b) ¿Cual es el periodo del avión?

Solución

- Para conseguir la magnitud de la velocidad, despejamos la velocidad de la ecuación (2.13), teniéndose como resultado:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{aR} = \sqrt{\left(9.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(4.00\ \mathrm{m})} = \underline{\underline{6.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

- Ahora despejamos el período de la ecuación (2.16). Se obtiene:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{v} = \frac{(2)(3.14)(4.00\ \mathrm{m})}{6.00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{4.00\ \mathrm{s}}}$$

Ejemplo 2.15

Con la idea de establecer cuál es la velocidad angular del abanico de techo de su habitación, en el nivel uno, un estudiante de física toma el tiempo que a éste (al abanico) le toma completar 40 vueltas. Si el tiempo tomado por el estudiante fue de 8.0 s, ¿Cuál es la velocidad angular del abanico?

Solución

- Con el tiempo que le toma completar 40 vueltas, conseguimos la frecuencia del abanico.

$$f = \frac{n}{t} = \frac{40}{80\ \mathrm{s}} = 5.0\ \mathrm{Hz}$$

- Ahora usamos la ecuación (2.15) para conseguir la velocidad angular.

$$\omega = 2\pi f = 2(3.14)(5.0\ Hz) = \underline{\underline{31\,\frac{rad}{s}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

➢ MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Denominaremos proyectil a toda partícula en movimiento cerca de la superficie de la Tierra, en contacto solo con el aire. En general, el movimiento de un proyectil está determinado por las condiciones atmosféricas y *el campo gravitatorio de la Tierra*. Sin embargo, en este curso solo consideraremos proyectiles bajo los efectos de campo gravitatorio de la Tierra. Dada esta consideración el proyectil se mueve con aceleración constante de 9.8 m/s² hacia abajo. Aceleración que denominamos aceleración gravitatoria, o aceleración de caída libre, cuyo módulo simbolizamos con la letra g.

Todo proyectil en movimiento bajo los efectos exclusivos del campo gravitatorio, describe una trayectoria parabólica. A la coordenada horizontal del punto donde cae, tomando como origen el punto de partida, se le denomina alcance y lo simbolizamos con la letra *R*. A la coordenada "*y*" del punto superior de la trayectoria (el vértice de la parábola) la simbolizamos con la letra h (ver figura 2.14).

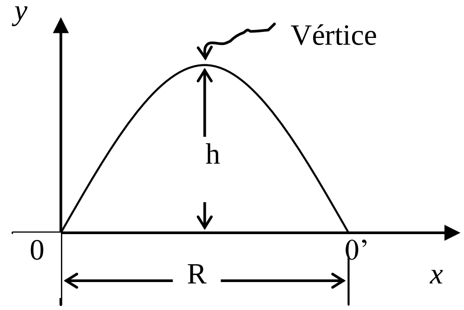


Figura 2.14

Si consideramos un proyectil que se ha disparado con una velocidad de magnitud v_o con un ángulo θ_o (ángulo de disparo) sobre la horizontal, se pueden conseguir *R* y *h* con las siguientes expresiones.

$\boldsymbol{R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}}$	(2.17)	Expresión para el alcance considerando que cae en un punto al mismo nivel que el punto de lanzamiento
$\boldsymbol{h = \frac{v_0^2 (\sin\theta_0)^2}{2g}}$	(2.18)	Expresión para la coordenada y del punto superior de la trayectoria de un proyectil

Utilizando la expresión para *R* antes citada, se puede demostrar que el mayor alcance de un proyectil se consigue si se dispara con un ángulo de 45º. Además, se puede demostrar que se tiene el mismo alcance para dos proyectiles disparados con la misma magnitud de velocidad, tales que la suma de sus ángulos de disparo sea 90º.

Ejemplo 2.16

En una competencia de lanzamiento de bala, un atleta hace un lanzamiento con una velocidad de magnitud 15.0 m/s. Despreciando la resistencia del aire y suponiendo que cae en un punto al mismo nivel de lanzamiento, determine el máximo alcance de dicha bala.

Solución

- Como se nos ha pedido el máximo alcance, entonces tenemos que debe dispararse con un ángulo de 45.0º. Además, tenemos v_o = 15.0 m/s

- Obtenemos la solución con la ecuación 2.17

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} = \frac{(15.0\ \mathrm{m/s})^2 \sin[2(45.0°)]}{9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \underline{\underline{23.0\ \mathrm{m}}}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

- **MOVIMIENTO DE PROYECTILES CON ÁNGULO DE DISPARO DE 0º**

Al considerar los proyectiles con ángulo de disparo de 0º, solo nos estamos ocupando de una parte del problema. Esto, junto a considerar el origen del sistema de coordenadas situado en el punto de disparo, permite una simplificación que se corresponde con el alcance de este libro.

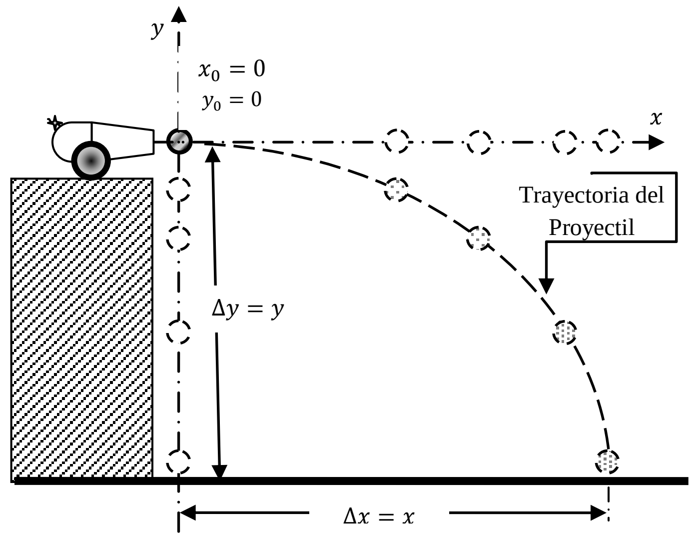


Figura 2.15

- Un proyectil con ángulo de disparo de 0º, tiene componente vertical de velocidad inicial cero, por lo que la magnitud de la velocidad inicial y la componente horizontal de velocidad son iguales.

- Además, como la aceleración es vertical, la componente horizontal de aceleración es cero. Es decir, la componente horizontal de velocidad no cambia ($v_{ox} =$ constante $= v_o$).

- Dado que el origen del sistema de coordenadas coincide con el punto donde se dispara, entonces $x_o = 0$ y $y_o = 0$. Por tanto, $\Delta x = x$, y $\Delta y = y$.

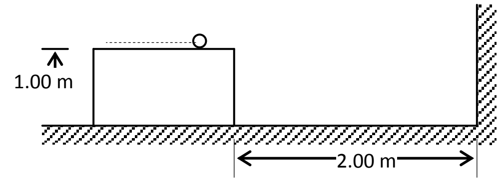
- Finalmente, debemos decir que el movimiento de un proyectil disparado horizontalmente, con origen del sistema de coordenadas en el punto de lanzamiento, puede ser descrito con tres ecuaciones: una para obtener la coordenada x, que se corresponde con la precisada anteriormente para un movimiento ***rectilíneo uniforme*** y dos para la parte vertical del movimiento, que se corresponden con ***el movimiento de caída libre con trayectoria vertical con velocidad inicial cero*** (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado). Estás son:

$\boldsymbol{x = v_0 t}$	**(2.19)**	Coordenada x de la trayectoria de un proyectil disparado horizontalmente
$\boldsymbol{y = -\frac{g\,t^2}{2}}$	**(2.20)**	Coordenada y de la trayectoria de un proyectil disparado horizontalmente
$\boldsymbol{v_y = -g\,t}$	**(2.21)**	Componente y de la velocidad de un proyectil disparada horizontalmente

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Ejemplo 2.17

Una bola de masilla avanza sobre una mesa de 1.00 m de altura y llega al borde de la misma con una velocidad de magnitud 5.00 m/s (ver figura). ¿Dónde cae la bola?



Solución

- Consideremos que la masilla cae en un punto entre la pared y la mesa. Comenzamos calculando el tiempo que le tomaría llegar al piso si no choca contra la pared del frente, usando la ecuación 2.20

$$y = -\frac{g\,t^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-1.00\text{ m})}{9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{0.452\text{ s}}$$

- Con este último valor (t = 0.452 s), calculamos el alcance, usando la ecuación 2.19

$$x = v_0 t = \left(5.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0.452\text{ s}) = \underline{\underline{2.26\text{ m}}}$$

- Según este resultado, está claro que la bola no llega al suelo, porque antes de llegar al suelo, a una distancia de 2.26 m de la base de la mesa, chocaría contra la pared. Entonces el valor del alcance es x = 2.00 m. Con este valor, usando la ecuación 2.19, calculamos el tiempo que le toma caer.

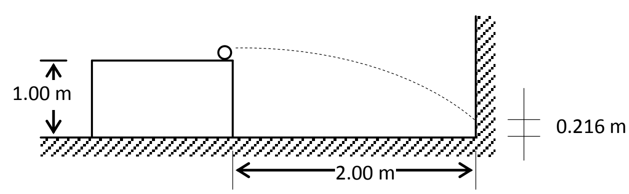
$$x = v_0 t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{x}{v_0} = \frac{(2.00\text{ m})}{5.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{0.400\text{ s}}}$$

- Con el valor de t, recién calculado, obtendremos en qué punto sobre la pared se pega la masilla, usando la expresión 2.20.

$$y = -\frac{g\,t^2}{2} = -\frac{(9.8\text{ m/s}^2)(0.400\text{ s})^2}{2} = \underline{\underline{-0.784\text{ m}}}$$

- Este resultado indica que choca en un punto a 0.784 m bajo el tope de la mesa.

- Como la mesa tiene una altura de 1.00 m, entonces puede decirse que la masilla se pega en la pared a 0.216 del piso (ver figura siguiente)



** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

RESUMEN

Cantidades físicas con que describimos el movimiento

Para precisar la ubicación de una partícula que se mueve en un plano, usamos una cantidad física que llamamos posición.

$$\vec{r} = (x, y)$$

Si una partícula tiene posición $\vec{r}_1$ en el instante t_1 y posición $\vec{r}_1$ en el instante t_2, entonces la velocidad media en el intervalo t_1 a t_2 se obtiene con la siguiente expresión:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

Si la trayectoria de una partícula en el intervalo t_1 a t_2 es de longitud S, entonces la rapidez media en el t_1 a t_2 se obtiene con la siguiente expresión:

$$R_m = \frac{S}{t_2 - t_1}$$

Si una partícula tiene posición $\vec{v}_1$ en el instante t_1 y posición $\vec{v}_1$ en el instante t_2, entonces la aceleración media en el intervalo t_1 a t_2 se obtiene con la siguiente expresión:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$$

Movimiento rectilíneo

Si una partícula se mueve en línea recta, entonces la posición se denota con "x", el desplazamiento con "Δx", la velocidad instantánea con "v_x", la velocidad media con "v_{x-m}", la aceleración instantánea con "a_x" y la aceleración media con "a_{x-m}". Las expresiones matemáticas correspondientes son:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$v_{x-m} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$a_{x-m} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Además, si tenemos el gráfico de $v_x = f(t)$, entonces Δx en el intervalo t_1 a t_2 es igual al área bajo el gráfico $v_x = f(t)$.

Movimiento rectilíneo uniforme

Una partícula que se mueve en línea recta con velocidad constante y que inicia su movimiento en t = 0, tiene como variables la posición (x), el desplazamiento (Δx) y tiempo (t).

$$x = v_x t$$

$$x = x_0 + v_0 t$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

Movimiento Rectilíneo con Aceleración Constante (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado)

Una partícula que se mueve en línea recta con aceleración constante y que inicia su movimiento en t = 0, tiene como variables la posición (x) y el desplazamiento (Δx), la velocidad (v_x). Las expresiones que relaciones a estás son:

- Si se trata de un movimiento de caída libre, la trayectoria es vertical entonces en las ecuaciones sustituimos la variable x por y, al igual que la aceleración a_x por (– g). Siendo g = 9.8 m/s^2.

En dirección horizontal (En el eje x)	En dirección vertical (En caída libre)
$v_{x-m} = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} - gt$
$\Delta x = \left(\frac{v_x + v_{0x}}{2}\right) t$	$\Delta y = \left(\frac{v_y + v_{0y}}{2}\right) t$
$\Delta x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\Delta y = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$
$\Delta x = \left(\frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}\right)$	$\Delta y = \left(\frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g}\right)$

Movimiento circular uniforme

Si tenemos una partícula con movimiento circular uniforme, a la cual le toma t tiempo completar n vueltas, entonces calculamos el periodo y la frecuencia con las siguientes expresiones

$$T = \frac{1}{f} \quad \therefore \quad \begin{cases} T = \frac{t}{n} \\ f = \frac{n}{t} \end{cases}$$

Dado el radio (R) de la trayectoria y el período del movimiento, la magnitud de la velocidad de una partícula con movimiento circular uniforme se obtiene como:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Dada la magnitud de la velocidad y el radio de la trayectoria de una partícula con movimiento circular uniforme, la magnitud de la aceleración se obtiene con la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

La velocidad angular es constante para una partícula con movimiento circular uniforme. Si se tiene el período de su movimiento, entonces su valor puede obtenerse con la siguiente expresión:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ó} \quad \omega = 2\pi f$$

Movimiento de proyectiles

Un proyectil es todo cuerpo al que se le da cierta velocidad inicial y se mueve cerca de la superficie de la Tierra, tal que mientras se mueve solo tiene contacto con el aire y que su movimiento puede ser descrito como partícula. La trayectoria de un proyectil en caída libre es una parábola. La ecuación para la coordenada vertical del punto superior de su trayectoria es:

$$h = \frac{v_0^2 (\sin\theta_0)^2}{2g}$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.

La expresión para la coordenada *x* del punto donde cae, considerando que cae en un punto al mismo nivel del punto de lanzamiento es:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

Movimiento de proyectiles cuyo ángulo de disparo es 0º

Un proyectil en caída libre es un proyectil que se mueve sin contacto con ninguna entidad material. Su aceleración es vertical hacia abajo y tiene como magnitud 9.8 m/s². A este valor se le denota con la letra g. Para simplificar, se considera que el origen de su movimiento está en el punto de lanzamiento. Si consideramos que el ángulo de disparo es 0º, entonces las expresiones para sus coordenadas y para la componente y de la velocidad son las siguientes:

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{g\,t^2}{2}$$

$$v_y = -g\,t$$

** Las imágenes fueron seleccionada de la galería de imágenes de google.