Respuestas a los ejercicios de autoevaluación

UNIDAD I

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d	b	c	c	c	b	c	b	d	c	a

PARTE II

1) a) El sistema tiene infinitas soluciones: $\begin{cases} x_3 = 3\alpha \\ x_2 = -4\alpha \\ x_1 = 2 - \alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

b) Solución del sistema homogéneo: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{4}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

3) a) Sistema lineal:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x + 2y + z + 3w} &= \mathbf{120} \quad \leftarrow \text{María} \\ \boldsymbol{2x + 5y + w} &= \mathbf{100} \quad \leftarrow \text{José} \\ \boldsymbol{3x + 6y + 4z + 10w} &= \mathbf{400} \quad \leftarrow \text{Antonio} \end{aligned}$$

La solución es: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{200} - \mathbf{9}\boldsymbol{w} \\ -\mathbf{60} + \mathbf{3}\boldsymbol{w} \\ \mathbf{40} - \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{w}$ es la variable libre y puede tomar valores entre 15 y 20 para que los valores de todas las variables resulten no negativas.

UNIDAD II

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V

PARTE II

1) $gen(M) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + y + 2z = 0\}$, $\quad dim(S) = 2$

2) a) B_1 y B_2 generan a $\mathbb{R}^2$ y son conjuntos linealmente independientes, por lo tanto B_1 y B_2 son bases para $\mathbb{R}^2$.

b) $[u_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[u_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

d) $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

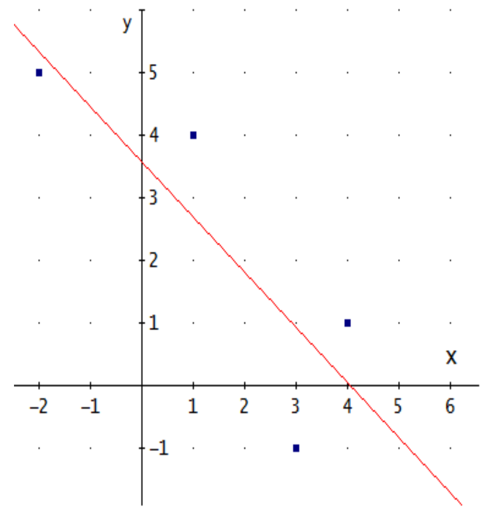
e) $P[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = [v]_{B_2}$

3) El conjunto B es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que B es linealmente independiente y $card(B) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ es:

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\}$$

4) i) $x_1 = 1, x_2 = -2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ y_1 = 4,\ y_2 = 5,\ y_3 = -1,\ y_4 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{-37}{42} \end{pmatrix}$$

La recta de mejor ajuste tiene ecuación $y = \frac{-37}{42}x + \frac{25}{7}$.

UNIDAD III

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9
V	V	F	F	V	F	V	F	V

PARTE II

1	2	3	4	5
b	c	b	a	b

PARTE III

1) **a)** No es posible hallar tal transformación lineal pues no se cumple la propiedad de homogeneidad.

b) Si es posible hallarla: $f(x, y) = \frac{-8x+7y}{2}$

2) **a)** $A = [f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $f(-2,2,-3) = (4,-1)$

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $N(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z,\ y = -z\} = \{\, z(2,-1,1)$ con $z \in \mathbb{R}, \}$

Base para $N(f)$ es $\{(2,-1,1)\}$ y $dim\big(N(f)\big) = 1$

e) $dim\big(Im(f)\big) = 2,\ Im(f) = \mathbb{R}^2$

f) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 2z - 1\ \ ,\ \ y = 3 - z\ \ ,\ z \in \mathbb{R}\ \}$

UNIDAD IV

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	V	V	F	V	F	F	F	V	F

PARTE II

1) a) Valor propio de F : $\lambda = 1$, los vectores propios asociados son:

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ no ambos nulos}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Polinomio característico: $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3$

Valor propio: $\lambda = 1\ ,\ m_a(1) = 3.$

Vector propio: $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con a y b no ambos nulos

d) Los resultados obtenidos en a y c son iguales.

2) Matriz $\boldsymbol{A}$:

a) Polinomio característico: $P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)$

b) Valores propios $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ cada uno con $m_a = 1$.

Para $\lambda = 0$: $a\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 1$: $b\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con a, b, c distintos de cero.

Para $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Una base de cada subespacio propio.

$$S_{\lambda=0} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = a\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\} , \quad \text{Base: } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = b\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{Base: } \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{R} \right\} , \quad \text{Base: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Como los valores propios son distintos, entonces a cada valor propio le corresponde un solo vector propio linealmente independiente, por lo tanto la multiplicidad geométrica de cada vector propio es 1.

Matriz $\boldsymbol{B}$:

a) Polinomio característico: $P(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$

b) Valores propios: $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 1$ y $\lambda = -2$ con $m_a(-2) = 2$

c) Vectores propios: Para $\lambda = 1$: $a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, y para $\lambda = -2$:

$$b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ con a, b, c distintos de cero.

d) Una base de cada subespacio propio.

$$S_{\lambda=1} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}\right\}$$, Base: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$S_{\lambda=-2} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \ b, c \in \mathbb{R}\right\},$$

Base: $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

e) $m_g(1) = 1$, $m_g(-2) = 2$

3) Sea $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ el polinomio característico de la matriz A: como el determinante de una matriz y el determinante de su traspuesta son iguales entonces se tiene que:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I^t| = |A^t - \lambda I|$$

A y A^t tienen el mismo polinomio característico, por lo tanto tienen los mismos valores propios.

UNIDAD V

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V

PARTE II

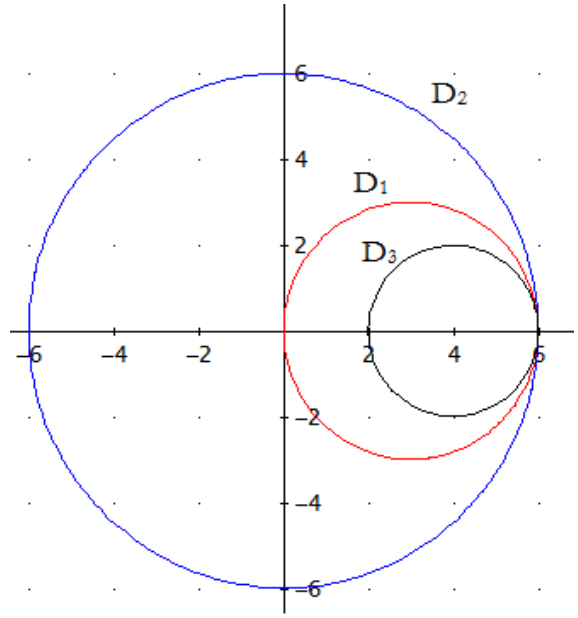
a) Polinomio característico: $P(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$

Matriz de paso $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Bloques de Jordan: $B_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1(3) = (3)$

c)

Radios	**centro**	**Círculos D_i**
$r_1 = \lvert 1 \rvert + \lvert 2 \rvert = 3$	$a_{11} = 3$	$D_1 = \{z \in \mathbb{C}: \lvert z - 3 \rvert \leq 3\}$
$r_2 = \lvert -1 \rvert + \lvert 5 \rvert = 6$	$a_{22} = 0$	$D_2 = \{z \in \mathbb{C}: \lvert z - 0 \rvert \leq 6\}$
$r_3 = \lvert -1 \rvert + \lvert -1 \rvert = 2$	$a_{33} = 4$	$D_3 = \{z \in \mathbb{C}: \lvert z - 4 \rvert \leq 2\}$



d) $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}[-A^2 + a_2 A + a_1 I] \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{12}[A^2 - 7A + 16I]$

Se sustituye A se efectúan las operaciones obteniéndose:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{-2}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{-13}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

UNIDAD VI

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	c	a	b	d	d	b	c	b

PARTE II

1) **a)** $\{f_1, f_2\}$ es linealmente independiente y genera a $V^* = (\mathbb{R}^2)^*$.

También se puede probar así: $\{f_1, f_2\}$ es linealmente independiente y $card = 2$, y como $dim(\mathbb{R}^2)^* = 2$ entonces $\{f_1, f_2\}$ es una base para $(\mathbb{R}^2)^*$.

b) Coordenadas para f_1 son $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ y para f_2 son $\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$.

c) $u_1 = (\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5})$, $u_2 = (\frac{-1}{5}, \frac{-2}{5})$

2) Se expresar (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $\{u_1, u_2,\ u_3\}$:

$$(a, b, c) = \underbrace{(a - b)}_{f_1}(1,0,-1) + \underbrace{(a - b + c)}_{f_2}(1,1,1) + \underbrace{(b - \frac{a + c}{2})}_{f_3}(2,2,0)$$

De donde

$$f_1(a, b, c) = a - b\ ,\ \ f_2(a, b, c) = a - b + c\ ,\ \ f_3(a, b, c) = b - \tfrac{1}{2}(a + c)$$

3) **a)** $\left(T^t(h)\right)(x, y) = 13x - 18y$,

b) $[T^t]_{B^*} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}$

c) $[T]_B = \begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $([T]_B)^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix} = [T^t]_{B^*}$

UNIDAD VII

PARTE I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V

PARTE II

1) $M(f) = \begin{pmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{pmatrix}$, la cual es simétrica, por lo tanto f es simétrica.

Valores propios de f: $\lambda = 5, \lambda = -5$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad P^t M(f) P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = D$$

2) $g(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$

3) g es indefinida.

4) $-130 \leq g(-1{,}5) \leq 130$

5) Forma cuadrática restringida: $g_S(x, y) = -25x^2$ y es definida negativa.

Bibliografia general

- Burgos, J. (1993). *Álgebra Lineal. (Primera edición)*. Madrid. McGraw Hill.
- Friedberg, S., Insel, A., Spence, L. (1979). *Linear Algebra*. New Jersey. Prentice-Hall.
- Grossman, S., Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal. (séptima edición)*. México. McGraw Hill.
- Herstein, I. (1976). Álgebra moderna. *(Tercera edición)*. México. Editorial Trillas.
- Howard, A. (1979). *Introducción al Álgebra Lineal. (Tercera edición)*. México. Editorial Limusa.
- Kolman B., Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal. (Octava edición)*. México. Pearson Prentice Hall.
- Kenneth H, Kunze R. (1973). *Álgebra Lineal*. México. Prentice- Hall.
- Lang, S. (1990). *Introducción al Álgebra Lineal*. México. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Lay, D. (2012) *Algebra Lineal y sus aplicaciones (cuarta edición)*. México. Pearson Educación
- Rojo, A. (1973). *Álgebra II. (Cuarta edición)*. Buenos Aires. Librería El Ateneo Editorial.
- Strang, G. (2016). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones (quinta edición)*. Wellesley. Wellesley-Cambridges Press.
- Tucker, A. (1993). *Linear Algebra*. New York. Macmillan Publishing Company.

Esta edición del libro *Álgebra lineal*
se terminó de imprimir en agosto de 2019,
en los talleres de la unidad de reproducciones de la UAPA,
Santiago, República Dominicana.