LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Elizabeth Vargas Villegas

Luis Alfredo Núñez

Santiago de los Caballeros

República Dominicana, 2019

UNIDAD I

Lógica proposicional

ORIENTACIONES DE LA UNIDAD I

En esta unidad se inicia el estudio de la **Lógica proposicional**, conocida también como lógica de orden cero, ella constituye la parte inicial y fundamental de lo que se conoce como Lógica Matemática, se basa en el estudio de las proposiciones, la verdad o la falsedad de ellas, la simbolización y su uso tanto en el lenguaje natural, como en el lenguaje matemático.

En todas nuestras actividades usamos el lenguaje natural, es el que usamos a diario para comunicarnos, para justificar la validez de un razonamiento, pero este lenguaje natural presenta dificultades para el análisis de los argumentos, generando algunas veces ambigüedades. Para un análisis riguroso que elimine las ambigüedades se hace necesario ese lenguaje simbólico que se inicia en esta unidad de estudio con la Lógica Proposicional.

Para el estudio de esta disciplina no se requiere conocimientos avanzados de matemática ni de otra ciencia, es suficiente con conocer los conjuntos numéricos, las operaciones algebraicas y relaciones básicas, particularmente para entender los ejemplos que se plantean el ámbito matemático. Para apropiarse del conocimiento y desarrollar las habilidades en el uso correcto del lenguaje simbólico con las proposiciones solo es necesario la perseverancia.

"Existen dos tipos de verdades: las verdades de la razón y las verdades de hecho"

Gottfried Wilhelm Leibniz

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD I

- Distinguir cuando un enunciado es una proposición.
- Determinar el valor de verdad de una proposición.
- Construir proposiciones compuestas usando los conectivos lógicos, y determinar su valor de verdad.
- Traducir proposiciones compuestas del lenguaje natural al lenguaje simbólico y viceversa.
- Construir la tabla de verdad de una proposición compuesta.
- Determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, conociendo el valor de verdad de las proposiciones simples que la integran.
- Clasificar las proposiciones compuestas en tautologías, contradicciones y contingencias.
- Identifica el antecedente y el consecuente de una proposición condicional.
- Enunciar las condicionales asociadas a una proposición condicional dada.

ESQUEMA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD I

1.1 Lógica: Definición y clasificación

La Lógica es la disciplina dedicada a identificar los principios generales, formas y estructuras o esquemas de razonamiento formales, con el fin de determinar si un argumento es o no válido. La palabra lógica proviene del griego "logos" que significa pensamiento, discurso, razón.

La Lógica se clasifica en:

- Lógica Clásica, también conocida como Aristotélica, pues su creación se le imputa a Aristóteles. Ella se encarga del estudio de proposiciones, enunciados u oraciones desde el punto de vista de su estructura.
- Lógica Moderna, también llamada simbólica o matemática, tiene su origen en el siglo XIX cuando se incluyen elementos matemáticos y simbólicos, con los cuales se desarrolla un lenguaje técnico con reglas más exactas que el lenguaje natural, lo cual ayuda a evitar confusiones e imprecisiones.
- Lógicas Polivalentes, a diferencia de las anteriores, éstas admiten más valores de verdad que los usuales verdadero y falso, pueden admitir desde tres hasta infinitos valores.

1.2 Breve desarrollo histórico de la lógica

La Lógica fue sistematizada por Aristóteles en el siglo IV A.C, está Lógica reinó cerca de 2000 años, durante ese tiempo, el lenguaje de la Lógica era el lenguaje ordinario, el cual contiene imprecisiones y ambigüedades que daban origen a contradicciones. En 1666 Leibniz creó un nuevo lenguaje simbólico, dando inicio a lo que hoy conocemos como Lógica Simbólica o Matemática, sin embargo este trabajo de Leibniz permaneció cerca de 200 años sin despertar interés, hasta que en 1847 Boole presentó la estructura conocida hoy como Álgebra de Boole, de gran importancia en las ciencias puras y aplicadas. En la segunda mitad del siglo XIX se continuó desarrollando esta disciplina, en 1894 G. Peano y sus colaboradores iniciaron la publicación del "Formulaire de Mathématiques" en el que habrían de presentarse todas las disciplinas matemáticas usando la Lógica Matemática, luego entre los años 1910 y 1936, Whitehead, Russell y Hilbert, completan toda la construcción de la matemática, libre de las contradicciones que surgieron al principio y que dieron origen a algunas paradojas famosas.

1.3

1.4 Elementos de la Lógica Proposicional

La Lógica Proposicional es parte de la Lógica Matemática, constituida por un sistema formal cuyos elementos más simples son las proposiciones y los conectivos, con los cuales se efectúan operaciones con proposiciones para formar otras proposiciones de mayor complejidad.

1.4.1 Proposición

Una proposición es todo enunciado respecto al cual se disponga de un criterio que permita afirmar inequívocamente que su contenido es verdadero o falso. En otras palabras, una proposición es una oración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Ejemplos. Determine cuales de las siguientes oraciones son proposiciones

a. 13 es un número par
b. Leonel Fernández fue presidente de República Dominicana
c. ¿Qué hora es?
d. $x+3=5$

Solución

Las oraciones **a** y **b** son proposiciones, ya que ellas pueden calificarse como falsa y verdadera respectivamente. En el caso de **a** se tiene la definición de número par y en el caso de **b** se tiene la información documentada de los presidentes de la república. En cambio las oraciones **c** y **d** no son proposiciones pues no pueden calificarse ni de verdaderas ni de falsas. En el caso de la **c** es una interrogación y en el caso de la **d** se desconoce el valor de x, de cuyo valor depende que la expresión sea verdadera o falsa.

La verdad o falsedad de algunas oraciones es relativa, es decir, dependen del contexto y el momento determinado en que se hagan las afirmaciones, del criterio utilizado para calificarlas o de las personas que hagan las calificaciones.

Ejemplos:

a. Considere la afirmación

"hace calor"

Para poder calificar esta frase como verdadera o falsa es necesario conocer el momento al cual se refiere y el lugar en donde se hace la afirmación, puesto que, con una temperatura de 20ºC en Noruega se diría que la frase es verdadera, pero para un habitante de Santo Domingo se considera que es falsa.

b. Ahora analicemos la oración

"Colombia es un país desarrollado"

Para determinar si es verdadera o falsa se debe tener un criterio de lo que se entiende por país desarrollado, si es por el grado de industrialización, por haber logrado independencia económica o por que ha logrado el total bienestar para su población. Al elegir un criterio puede generarse opiniones encontradas.

Si no se dispone de un criterio unificado que todos acepten, la oración no puede considerarse como una proposición.

Principios lógicos

Los siguientes principios de la Lógica Matemática pretenden resumir lo anterior

1) **Tercero excluido**

   Cada proposición es o verdadera o falsa. Es decir, no existe una tercera posibilidad.

2) **No contradicción**

   Ninguna proposición es, a la vez, verdadera y falsa.

Ejemplo 1.1 Indicar cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones

a. El oro es un metal.
b. Alejandro Magno nació en Cuba.
c. 4+8=12.
d. Santo Domingo no es la capital de República Dominicana.
e. Ayer llovió.
f. $x^2 = 4$.
g. Esta frase es falsa.

Solución

Las cuatro primeras oraciones son proposiciones, pues para cada una de ellas se dispone de un criterio que nos permite afirmar que **a** y **c** son verdaderas, mientras que **b** y **d** son falsas.

Los demás enunciados no son proposiciones pues no se puede establecer si son verdaderos o falsos, observe:

En la oración **"Ayer llovió"**, no se hace referencia al lugar donde se afirma que llovió.

En "$\mathbf{x^2 = 4}$", aunque se podría suponer que x es un número, no se conoce su valor para poder calificarla de verdadera o falsa.

Para la oración **"Esta frase es falsa"**, si preguntamos al lector, ¿esta frase es falsa? En caso de dar respuesta afirmativa, sería falsa. Pero, ¿es entonces falsa? Si fuera así, sería verdadera. Por tal razón no es proposición.

"Esta frase es falsa" es una versión simplificada de la antigua "paradoja del mentiroso", creada por el filósofo griego Epiménides en el siglo VI A.C.

Notación

Las proposiciones se representarán con letras minúsculas, generalmente p, q, r, s, t, etc. Cuando convenga se usará una letra acompañada de un subíndice, por ejemplo p_1, p_2, p_3, etc.

p: 4 es un número natural

q: el diamante es un mineral

El uso de esta notación hace más práctico el trabajo con las proposiciones y también permite referirse a proposiciones indeterminadas, es decir, que p puede representar a una proposición cualquiera, aun cuando no se conozca el enunciado.

1.4.2 Valor de verdad

En el caso de la lógica bivalente, que es la que se trata en este texto, los valores de verdad son **verdadero y falso** que usualmente se denotan con las letras **V** y **F** respectivamente.

Ejemplos. Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

a. El cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
b. El número 17 es primo e impar.
c. Santiago de los Caballeros es la capital de República Dominicana.

Solución

La proposición **a** es verdadera, la **b** es verdadera, y la **c** es falsa.

1.4.3 Proposiciones simples y compuestas

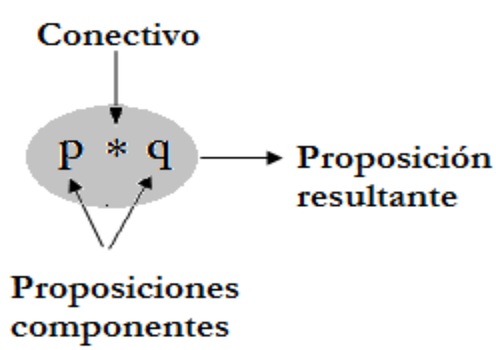
Las proposiciones que no se pueden dividir en proposiciones más pequeñas se denominan proposiciones **simples o atómicas**. Si se juntan varias proposiciones en una sola proposición, se dice que esta proposición es **compuesta o molecular.**

En los ejemplos del apartado anterior las proposiciones **a** y **c** son simples, mientras que la **b** es compuesta, ella contiene las proposiciones: "el número 17 es primo" y "el número 17 es impar"

1.4.4 Conectivos lógicos

Los conectivos lógicos son enlaces usados para combinar una o más proposiciones, de tal forma que se obtenga como resultado otra proposición llamada compuesta o molecular, cuyo valor de verdad estará determinado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos usados.

El siguiente diagrama ilustra el uso de un conectivo cualquiera "*" para obtener una proposición compuesta a partir de dos proposiciones simples p y q:



Ejemplos de proposiciones compuestas

a. Hoy es sábado o domingo.
Es una proposición compuesta por las proposiciones simples: "hoy es sábado" y "hoy es domingo", ambas unidas con el conectivo "o".

b. La nieve es blanca y fría.
Es una proposición compuesta por las proposiciones simples: "la nieve es blanca" y "la nieve es fría", enlazadas con el conectivo "y".

La siguiente tabla contiene los conectivos lógicos y los símbolos con los cuales se representan.

Tabla 1.1

Conectivos lógicos

CONECTIVO	SÍMBOLO	OPERACIÓN	LECTURA
Negación	$\sim$	$\sim p$	no p
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción inclusiva	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Disyunción exclusiva	$\veebar$	$p \veebar q$	o p o q
Implicación o condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	p implica q
Doble implicación o Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q

1.5 Proposiciones compuestas

1.5.1 Negación

La negación es un conectivo lógico unitario que se aplica a una sola proposición, dando como resultado una proposición compuesta cuyo valor de verdad es opuesto al de la proposición original. Esto es, si el valor de verdad de una proposición es verdadero, entonces el valor de verdad de su negación es falso.

El símbolo para la negación es "$\sim$"

Para denotar la negación de una proposición p, se utiliza la notación $\sim p$, la cual se lee "no p".

Ejemplo. Para cada proposición dada escriba su negación:

a. p: 6 es múltiplo de 3
b. q: los animales carnívoros se alimentan de plantas.

Solución

La negación de las proposiciones anteriores es:

a. ~p: 6 no es múltiplo de 3

La negación también se puede redactar anteponiendo a la proposición la expresión "**no es verdad que**":

~p: no es verdad que 6 es múltiplo de 3

b. ~q: los animales carnívoros no se alimentan de plantas

En forma equivalente:

~q: no es cierto que los animales carnívoros se alimentan de plantas

Los valores de verdad de las proposiciones compuestas resultantes se pueden esquematizar en una tabla denominada "tabla de verdad"

Tabla 1.2
Tabla de verdad de la negación

p	~p
V	F
F	V

1.5.2 Conjunción

La conjunción es un conectivo lógico que aplicado a dos proposiciones da como resultado otra proposición, la cual es verdadera cuando ambas componentes son verdaderas, y resulta falsa en los demás casos.

El símbolo usado para este conectivo es "$\wedge$"

La conjunción de las proposiciones s y p se escribe "$s \wedge p$" y se lee "s y p".

Por ejemplo, a partir de las proposiciones:

r: el sol es un planeta

t: la luna es un satélite de la tierra

u: Madrid es una ciudad de España

w: Miami es una ciudad de España

Se pueden construir varias conjunciones:

- $r \wedge t$: el sol es un planeta **y** la luna es un satélite

  La proposición compuesta $r \wedge t$ es falsa, puesto que r es falsa

- $t \wedge u$: la luna es un satélite de la tierra y Madrid es una ciudad de España

  Es verdadera, dado que tanto t como u son verdaderas

- $u \wedge w$: Madrid y Miami son ciudades de España

  Es falsa pues la proposición w es falsa.

- $t \wedge (\sim r)$: la luna es un satélite de la tierra, pero el sol no es un planeta.

  En este caso t es verdadera y $(\sim r)$ es verdadera, pues es la negación de r que es falsa. Por lo tanto la compuesta conjuntiva $t \wedge (\sim r)$ es verdadera

- $(\sim r) \wedge (\sim w)$: ni el sol es un planeta ni Miami es una ciudad de España
  Como r y w son falsas sus negaciones son verdaderas y por tanto $(\sim r) \wedge (\sim w)$ es verdadera.

En el lenguaje natural u ordinario la conjunción de dos proposiciones se puede expresar de diferentes formas, dependiendo de las proposiciones. La forma usual es colocando una "y" entre las dos proposiciones, como en el primer y segundo ejemplo, otra forma es como el tercer ejemplo donde las oraciones tienen el mismo predicado, en el cuarto caso $t \wedge (\sim r)$ donde se utilizó la palabra "pero" en lugar de "y", esto es usual cuando la primera componente es una afirmación y segunda componente contiene una negación, en la cuarta $(\sim r) \wedge (\sim w)$ se utilizó el vocablo "ni" delante de cada una de las proposiciones componentes, esta forma de redactar la conjunción se puede usar cuando ambas proposiciones componentes están negadas.

Se puede apreciar en este ejemplo que mientras en el lenguaje simbólico se usa un símbolo para enlazar dos proposiciones, en lenguaje español hay variedad de formas.

En la siguiente tabla se resumen los valores de verdad de la conjunción de dos proposiciones cualesquiera.

Tabla 1.3

Tabla de verdad para la conjunción.

p	q	p^q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es verdadera solo cuando ambas proposiciones componentes son verdaderas, y resulta falsa en los demás casos.

1.5.3 Disyunción inclusiva

La disyunción inclusiva es un conectivo que aplicado a dos proposiciones p y q, genera como resultado la proposición compuesta cuyo valor de verdad es falso cuando ambas componente sean falsas y verdadero cuando al menos una de las componentes sea verdadera.

El símbolo correspondiente a este conectivo es "∨"

La proposición compuesta resultante de unir p y q con el conectivo disyunción inclusiva se escribe simbólicamente "p∨q" y se lee "p o q"

Los valores de verdad se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 1.4

Tabla de verdad para la disyunción inclusiva.

p	q	p∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposición inclusiva resulta falsa cuando todas las proposiciones componentes son falsa, y verdadera cuando al menos una de ellas es verdadera.

Ejemplos. Dadas las proposiciones:

r: 7 es un número primo

t: 6 es un número par

p: 6 es múltiplo de 4

q: 2 es un número impar

Se pueden construir algunas proposiciones usando la disyunción inclusiva:

- $r \vee t$: 7 es un número primo o 6 es un número par

  La proposición compuesta $r \vee t$ es verdadera, puesto que tanto r como t son verdaderas.

- $p \vee q$: 6 es múltiplo de 4 o 2 es un número impar

  En este caso la proposición resulta falsa pues sus dos componentes son falsas.

- $t \vee p$: 6 es un número par o es múltiplo de 4

  Es verdadera pues la proposición t es verdadera, aunque la otra componente es falsa.

1.5.4 Disyunción exclusiva

La disyunción exclusiva es un conectivo que aplicado a dos proposiciones cualesquiera p y q da como resultado una proposición compuesta que será verdadera si sólo una de las proposiciones que la componen es verdadera.

Este conectivo se representa con el símbolo "$\underline{\vee}$"

La proposición compuesta que resulta de aplicar la disyunción exclusiva a p y q se escribe simbólicamente "$p \underline{\vee} q$", la cual se lee "o p o q".

En el lenguaje ordinario la disyunción exclusiva de dos proposiciones se obtiene colocando una "o" delante de la primera proposición y otra "o" intercalada entre las dos proposiciones, salvo en los casos en los que se pueda redactar de otra forma, por ejemplo "**o** ayer fue sábado **o** ayer fue domingo", en este caso las dos componentes se refieren al día de ayer, por lo cual puede redactarse así, "ayer fue o sábado o domingo".

Si $p \veebar q$ es verdadera se puede asegurar que únicamente una de las dos proposiciones es verdadera y si $p \veebar q$ es falsa se puede garantizar que p y q tienen el mismo valor de verdad.

Lo anterior puede ser observado en la siguiente tabla de verdad.

Tabla 1.5

Tabla de verdad para la disyunción exclusiva.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva resulta verdadera solo cuando una de las dos proposiciones componentes es verdadera, y falsa en los demás caso.

Ejemplos. Dadas las proposiciones:

r: 2 es un número primo

s: 2 es un número par

q: 2 es un número impar

Se pueden construir algunas proposiciones con la disyunción exclusiva

- $r \veebar s$: o 2 es un número primo o 2 es un número par

  La proposición compuesta $r \veebar s$ es falsa, debido que tanto r como s son verdaderas.

- $s \veebar q$: 2 es un número o par o impar

  En este caso la proposición resulta verdadera pues solo una de sus dos componentes es verdadera.

1.5.5 Condicional

El condicional o implicación, se representa con el símbolo **"→"**, aunque también se suele usar **"⇒"**.

Así, dadas las proposiciones p y q, el condicional de ellas se denota "$p \rightarrow q$"

y se lee "si p, entonces q", también puede leerse "p implica q".

A la primera proposición, es decir, a p se le llama **antecedente** y a la segunda, o sea, a q se le llama **consecuente**. Su tabla de verdad es

Tabla 1.6

Tabla de verdad para la implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El condicional es un conectivo que aplicado a dos proposiciones da como resultado una nueva proposición que es verdadera en todos los casos excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Un condicional con antecedente falso, es verdadero independientemente del valor de verdad del consecuente.

En el lenguaje ordinario, el condicional de dos proposiciones se expresa colocando la palabra "si" delante del antecedente (primera proposición) y la palabra "entonces" delante del consecuente (segunda proposición).

Ejemplo. Con las proposiciones

p: hoy recibo mi pago

q: hoy compro una camisa

Formar el condicional con p de antecedente y q como consecuente, y analice su valor de verdad.

Solución

El condicional con p de antecedente y q como consecuente es

$p \rightarrow q$: si hoy recibo mi pago, entonces hoy compro una camisa

Analicemos el valor de verdad de este condicional.

- Si el antecedente p y el consecuente q son verdaderos, el condicional es verdadero, pues se cumplió el compromiso asumido de comprar una camisa, habiendo recibido el pago.
- En el caso de ser p verdadera y q falsa, es decir se recibió el pago pero no se compró la camisa, el resultado es una falsedad.
- Si p es falsa y q es verdadera, entonces se cumplió el compromiso de comprar la camisa aunque no se recibió el pago, en este caso se considera el condicional verdadero.
- Si tanto el antecedente como el consecuente son falsos, es decir no se recibió el pago y tampoco se compró la camisa, se considera verdadera, puesto que al no recibir el pago queda libre del compromiso.

Lo que afirma un condicional es que su antecedente implica al consecuente. No afirma que el antecedente sea verdadero, sino que si el antecedente es verdadero, entonces su consecuente también lo es.

Ejemplo. Simbolizar la proposición compuesta

"Si 12 es múltiplo de 2, entonces 12 es un número par"

Solución

Para simbolizar una proposición, previamente hay que identificar las proposiciones simples que la componen y los conectivos que las unen.

En este ejemplo, la proposición dada tiene la forma

"si ______ entonces ________"

de allí que se trata de un condicional $p \to q$ donde:

p: 12 es múltiplo de 2 (antecedente)

q: 12 es un número par (consecuente)

El valor de verdad del condicional es verdadero, pues p y q son verdaderas

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underbrace{V \quad\; V}_{V} \end{array}$$

1.5.6 Bicondicional

El bicondicional o doble implicación es un conectivo que al unir con él dos proposiciones se genera una proposición compuesta, que resulta verdadera cuando las dos componentes tienen el mismo valor de verdad y falsa cuando tienen valores de verdad diferentes.

El símbolo usado para representar el conectivo bicondicional es "**↔**".

El bicondicional de las proposiciones r y s se simboliza mediante "$r \leftrightarrow s$" y se lee "r, si y solo si, s".

Ejemplo. Con los siguientes enunciados:

p: el número es múltiplo de 2

q: el número es par

h: el número real 1 es el elemento neutro de la multiplicación

k: la raíz cuadrada de -2 es un número real

Formar los bicondicionales que se indican y analizar sus valores de verdad:

a. El bicondicional con p y q
b. El bicondicional con h y k

Solución

a. El bicondicional con p y q

$p \leftrightarrow q$: el número es múltiplo de 2, si y solamente si, el número es par.

Esta bicondicional referida a un número entero cualquiera es verdadera ya que ambas componentes son verdaderas o ambas son falsas.

b. El bicondicional con h y k

$h \leftrightarrow k$: el número real 1 es el elemento neutro de la multiplicación, si y solo si, la raíz cuadrada de -2 es un número real.

Esta bicondicional es falsa pues la primera componente (h) es verdadera mientras que la segunda componente (k) es falsa.

La siguiente tabla resume los valores de verdad para la bicondicional

Tabla 1.7

Tabla de verdad para la doble implicación.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En matemática, tienen mucha importancia las proposiciones condicionales y bicondicionales, puesto que la gran mayoría de sus teoremas son de estos tipos de proposiciones, en este caso al antecedente de un teorema con forma condicional se le llama "hipótesis" y al consecuente "tesis".

$$\underbrace{H}_{\text{hipótesis}} \rightarrow \underbrace{T}_{\text{tesis}}$$

También es usual en matemática hablar de las condiciones necesarias y suficientes, lo cual está referido a condicionales.

El condicional $p \rightarrow q$ puede ser leído de las siguientes formas

$$\begin{cases} \text{Si p, entonces q} \\ \text{q es condición necesaria para p} \\ \text{p es condición suficiente para q} \end{cases}$$

y el bicondicional $p \leftrightarrow q$, puede leerse

"p es condición necesaria y suficiente para q"

Como ejemplo considere la siguiente proposición condicional:

Si -5 es un número entero, entonces -5 es un número racional

Podemos expresarla de las siguientes formas:

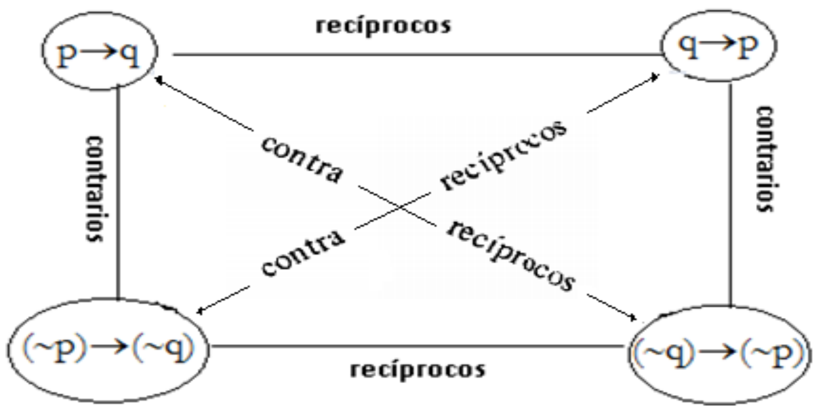
- Si -5 es un número entero, necesariamente -5 es un número racional.
- Que -5 sea un número entero es suficiente para que -5 sea un número racional.
- Que -5 sea un número racional es necesario para que -5 sea un número entero.

Condicionales asociados

A cada condicional $p \rightarrow q$ se le asocian otros tres condicionales:

1. Directo: $p\rightarrow q$ (el condicional dado)
2. Recíproco: $q \rightarrow p$
3. Contrario: $(\sim p)\rightarrow(\sim q)$
4. Contrarrecíproco: $(\sim q)\rightarrow(\sim p)$

Cualquiera de las cuatro condicionales se puede tomar como directa y partiendo de ella se construyen las otras. El siguiente rectángulo explica esta situación.



1.5.7 Ejercicios de aplicación

Simbolización de proposiciones compuestas

Para simbolizar proposiciones compuesta se utilizan con frecuencia signos de agrupación, paréntices o corchetes, también existe un orden jerárquico de los conectivos que ayuda a minimizar el uso de signos de agrupación.

Para evitar las diferentes interpretaciones y hacer más preciso el lenguaje simbólico se establece el siguiente orden jerárquico:

1) Signos de agrupación como paréntesis o corchetes
2) Negación
3) Conjunción, disyunción inclusiva, disyunción exclusiva
4) Condicional

5) Bicondicional

Por ejemplo en la proposición compuesta $p\rightarrow(q\wedge r)$ es una condicional donde el antecedente es p y el consecuente es $(q\wedge r)$, ella se puede escribir así $p\rightarrow q\wedge r$ con igual significado. En cambio $(p\rightarrow q)\wedge r$ es una conjunción donde una de sus componentes es una condicional y no significa lo mismo que $p\rightarrow q\wedge r$.

Es necesario destacar el papel de los signos de agrupación. A continuación algunos ejemplos.

- Cuando se tiene una proposición compuesta de la forma

  $$w\vee s\wedge h$$

  Se pudiera interpretar como:

  $$(w\vee s)\wedge h \quad \text{o} \quad w\vee(s\wedge h)$$

  Las cuales no tienen el mismo significado, por ello, en casos como estos se escribirá con signos de agrupación para evitar la ambigüedad o se asume el criterio que en conectivos de igual orden jerárquico prevalece el orden de izquierda a derecha, es decir que ante una proposición simbolizada así, $w\vee s\wedge h$ se asume que se trata de $(w\vee s)\wedge h$, pues la disyunción está antes que la conjunción, en el sentido de izquierda a derecha. En este texto se usará los signos de agrupación siempre que se presente un caso como este.

- La negación de la condicional $p\rightarrow q$ debe escribirse $\sim(p\rightarrow q)$ pues en la forma sin paréntesis $\sim p\rightarrow q$ solo se niega el antecedente.
- En vez de escribir $(\sim p)\rightarrow(\sim q)$ se puede escribir sin paréntesis $\sim p \rightarrow \sim q$

Ejemplos. Simbolice cada uno de los siguientes enunciado:

a. Si Juan ha llegado muy tarde, pero Pedro llegó puntual, entonces el gerente está inconforme.
b. Pedro no llegó puntual y Juan ha llegado muy tarde, por lo que, el gerente no está inconforme.
c. El gerente está inconforme, únicamente si, Juan ha llegado muy tarde o Pedro no llegó puntual.

Solución

Se inicia denotando las proposiciones simples que intervienen en cada enunciado, sean:

p: Pedro llegó puntual

j : Juan ha llegado muy tarde

g: el gerente está inconforme

Ahora se procede a escribir en símbolos cada proposición compuesta

a. $(j \wedge p) \rightarrow g$
b. $(\sim p \wedge j) \rightarrow \sim g$
c. $g \leftrightarrow (j \vee \sim p)$

En las tres proposiciones simbolizadas, si se considera el orden jerárquico, se pueden eliminar los paréntesis sin que se pierda el significado de cada una de ellas.

Tablas de verdad para proposiciones compuestas

Una tabla de verdad es una forma sencilla y concisa de mostrar la relación entre el valor de verdad de una fórmula compuesta y los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

Por ejemplo, a la proposición $\sim(s \vee \sim t)$ le corresponde la siguiente tabla de verdad:

s	t	$\sim t$	$s \vee \sim t$	$\sim(s \vee \sim t)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

¿Cómo se construye una tabla de verdad para una proposición compuesta?

- Las primeras columnas están ocupadas por las proposiciones simples.
- Debe haber una columna para cada proposición compuesta que intervenga.
- Aparte de la fila que encabeza la tabla, se necesitan filas para abarcar todas las posibles combinaciones de V y F de todas las proposiciones simples:

  Si se tienen dos proposiciones simples y por ello hay 4 filas (pues hay 4 combinaciones de V y F); para tres proposiciones se requerirán 8 filas, en general, para n proposiciones se necesitan 2^n filas.

Ejemplo. Construir la tabla de verdad correspondiente a

$$\sim[w \rightarrow (\sim h \wedge p)]$$

Solución

En la proposición compuesta dada, hay tres proposiciones simples w, h, p, por lo que la tabla tiene $2^3 = 8$ filas, y 7 columnas: p, w, h, ~h, (~h∧p), w→(~h∧p) y una para la proposición dada.

Primera columna: se divide $8 \div 2 = 4$, en las primeras cuatro casillas de la columna va el valor de verdad V, y en las cuatro últimas va F.

Segunda columna: se divide $(8 \div 4 = 2)$, en las casillas de la segunda columna los valores de verdad se distribuyen así V V F F V V F F.

Tercera columna: se divide $(8 \div 8 = 1)$ los valores de verdad se alternan de la forma V, F,...,V, F.

p	w	h	~h	~h∧p	w→(~h∧p)	~[w→(~h∧p)]
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

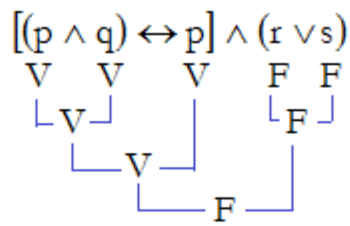
Diagrama de valores de verdad

Independientemente de lo extensa y complicada que sea una proposición compuesta, se puede determinar su valor de verdad si se conocen los valores de verdad de las proposiciones simples que la integran. Una forma práctica es usando un diagrama, se ilustrará con los siguientes ejemplos.

- Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta:

$$[(p\wedge q)\leftrightarrow p]\wedge(r\vee s)$$

Sabiendo que p es verdadera, q es verdadera, r es falsa y s es falsa



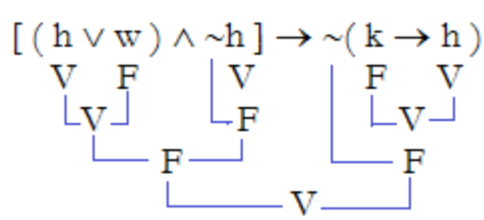
Obviamente también se puede determinar el valor de verdad de esta proposición, por medio de la tabla de verdad, donde solo interesa la fila que contiene los valores de verdad de p, q, r y s indicados en este caso.

p	q	r	s	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\leftrightarrow p$	$r\vee s$	$[(p\wedge q)\leftrightarrow p]\wedge(r\vee s)$
V	V	F	F	V	V	F	F

- Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta

$$[\,(h\vee w)\wedge{\sim}h\,]\rightarrow{\sim}(\,k\rightarrow h\,)$$

Sabiendo que h es verdadera, w es falsa y k es falsa



Circuitos lógicos

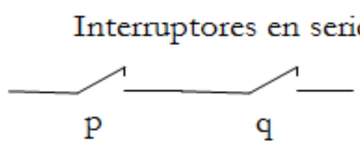
Entre algunas aplicaciones de la lógica aparecen los llamados circuitos lógicos, utilizados en la Electrónica, Comunicación Satelital y la Cibernética, en ellos se aprovecha la bivalencia de un interruptor (cerrado o abierto) en analogía con la bivalencia de las proposiciones (verdaderas o falsas).

En este texto solo se dan las ideas iniciales.

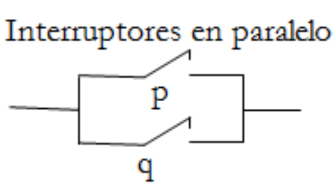
Para representar una proposición p se usa un interruptor, si la proposición es verdadera el interruptor es cerrado para que permita el paso de la corriente eléctrica.

Para una proposición p que es falsa se usa un interruptor abierto que no permite el paso de la corriente eléctrica.

La conjunción $p \wedge q$ es V (verdadera) cuando ambas proposiciones son V. En un circuito esto equivale a dos interruptores en serie



Este circuito permite el paso de la corriente solo cuando los dos interruptores están cerrados.
La disyunción $p \vee q$ es V cuando al menos una de las proposiciones es V

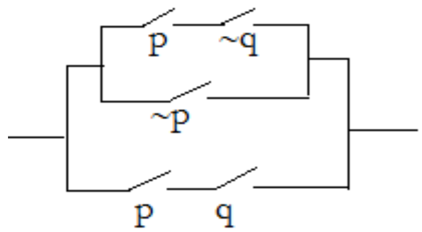


El circuito permite el paso de corriente cuando al menos uno de los interruptores está cerrado.

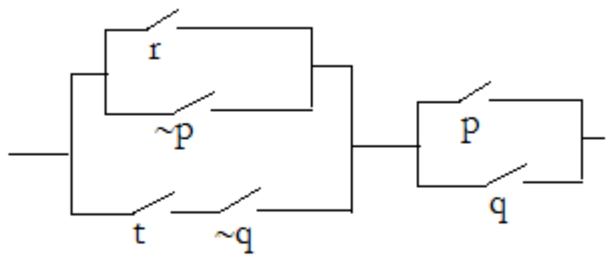
Ejemplo.

Determinar las proposiciones compuestas correspondientes a los siguientes circuitos:

a)



b)



Solución

a) Se observan dos partes conectadas en paralelo. La parte superior tiene una línea con dos interruptores en serie que se representan con p∧~q, estos a su vez se conectan en paralelo con otro interruptor (~p), lo que se expresa como (p∧~q)∨~p. La parte inferior tiene dos interruptores en serie y le corresponde la conjunción p∧q. Finalmente el circuito completo se representa con la proposición [(p∧~q)∨~p]∨(p∧q).

b) Con un proceso análogo al caso a) se obtiene: [(r∨~p)∨(t∧~q)∧(p∨q)

Otra aplicación de la Lógica Proposicional es la de descifrar algunos acertijos.

Descifrado de acertijos

Ejemplo.

Se ha cometido un delito la policía nacional arresta a cuatro sospechosos, en el interrogatorio estos dicen lo siguiente:

Antonio: “Pedro es el culpable”

Pedro: “José es el culpable”

José: "Pedro miente cuando dice que yo soy el culpable"

Ramón: "yo no soy culpable"

Se sabe que solo hay un culpable y de los sospechosos solo uno de ellos ha dicho la verdad. Cuál es el culpable?

Solución

Para darle solución al problema se construye una tabla de verdad para las cuatro respuestas, pero tomando en cuenta que sólo una es verdadera

	Antonio	Pedro	José	Ramón
1	V	F	F	F
2	F	V	F	F
3	F	F	V	F
4	F	F	F	V

Opción 1: Antonio dice la verdad y los demás mienten, en este caso Antonio es inocente, Pedro y Ramón son culpables. Pero como José miente entonces Pedro dijo una verdad, luego hay una contradicción y por ello se descarta esta posibilidad.

Opción 2: Pedro dice la verdad, por lo cual sería inocente igualmente Antonio, pero José y Ramón resultan culpables y no hay dos culpable, opción descartada

Opción 3: José dice la verdad, se deduce que Antonio, Pedro y José son inocentes, y Ramón es el culpable

Opción 4: Ramón dice la verdad, se llega a una contradicción pues Jesús sería inocente y culpable a la vez.

Por lo tanto, el culpable es Ramón

1.5 Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones compuestas son equivalentes, si y solo si, en ellas intervienen las mismas proposiciones simples y, en sus tablas de verdad, las columnas correspondientes a cada una de las dos proposiciones compuestas son idénticas.

Por ejemplo, las proposiciones compuestas:

$$\sim p \vee \sim q \quad \text{y} \quad \sim(p \wedge q)$$

tienen las mismas proposiciones simples, para determinar si son equivalentes, se construye la tabla de verdad que contenga a ambas:

p	q	~p	~q	**~p∨~q**	p∧q	**~(p∧q)**
V	V	F	F	**F**	V	**F**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	F	**V**	F	**V**
F	F	V	V	**V**	F	**V**

Ahora puede observarse que las columnas correspondientes a las proposiciones compuestas dadas son idénticas, por lo tanto son equivalentes, lo cual se simboliza por: $\sim p \vee \sim q \cong \sim(p \wedge q)$

- Dadas las proposiciones compuestas

$$p \to q \quad \text{y} \quad \sim q \to \sim p$$

Se elaboran sus tablas de verdad para determinar si ellas son equivalentes

p	q	~p	~q	**p→q**	**~q→~p**
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Como se puede observar las dos últimas columnas de la tabla son idénticas por lo que se concluye que las proposiciones compuestas son equivalentes, es decir,

$$p \to q \cong \sim q \to \sim p$$

Este ejemplo se trata del condicional $(p \to q)$ y su contrarrecíproco $(\sim q \to \sim p)$, los cuales son equivalentes. En forma análoga, se tiene que el condicional contrario $(\sim p \to \sim q)$ y el recíproco $(q \to p)$ son equivalentes entre si, en cambio, el directo $p \to q$ y el recíproco $q \to p$ no son equivalentes. Se deja al lector verificar estas afirmaciones construyendo las correspondientes tablas de verdad.

Existen muchas equivalencias lógicas, sin embargo, todas pueden deducirse a partir de unas pocas equivalencias básicas o fundamentales que se incluyen dentro de las leyes lógicas.

1.6 Tautología, contradicción y contingencia

Tautología

Una proposición compuesta se dice que es una **tautología** si ella resulta verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la integran.

La forma más simple de probar que una proposición compuesta es una tautología es construyendo la tabla de verdad.

Ejemplos.

Determine si las siguientes proposiciones son tautologías:

a. $p \vee \sim p$

b. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

c. $(p \wedge q) \rightarrow p$

d. $(p \underline{\vee} q) \rightarrow q$

Solución

En cada caso se procede a construir la tabla de verdad correspondiente:

a. La tabla de verdad de $p \vee \sim p$ tiene dos filas (pues solo interviene una proposición simple $2^1=2$), y tres columnas:

p	~p	p∨~p
V	F	V
F	V	V

La proposición $p \vee \sim p$ es una tautología.

b. En $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ intervienen dos proposiciones simples, por lo que la tabla tiene $2^2=4$ filas y 6 columnas:

p	q	p→q	~p	~p∨q	(p→q)↔(~p∨q)
V	V	V	F	V	V

V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

La proposición $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ es una tautología.

Observe que las columnas correspondientes a $(p\rightarrow q)$ y $(\sim p\vee q)$ son idénticas, por lo que $(p\rightarrow q) \cong (\sim p\vee q)$.

c. La proposición $(p\wedge q)\rightarrow p$ es una tautología pues:

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

d. $(p\veebar q)\rightarrow q$

p	q	$p\veebar q$	$(p\veebar q)\rightarrow q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

La proposición $(p\veebar q)\rightarrow q$ no es una tautología.

Contradicción

Cuando una proposición compuesta resulta falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen, se dice que la proposición es una **contradicción**.

Ejemplos.

Determine si las siguientes proposiciones son contradicciones:

a. $p \wedge \sim p$
b. $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
c. $(p \wedge q) \to \sim q$
d. $(p \veebar q) \to (p \leftrightarrow q)$

Solución

En cada caso se procede a construir la tabla de verdad correspondiente

a. $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Así, $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

b. $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ es una contradicción.

c. $(p \wedge q) \to \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \to \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V

F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

$(p \wedge q) \rightarrow \sim q$ no es una contradicción.

d. $(p \veebar q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \veebar q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \veebar q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

$(p \veebar q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ no es una contradicción.

Contingencia

Una proposición compuesta es una contingencia, si y solo si, ella es verdadera en unos casos y falsa en otros, sin importar la proporción entre ellas.

Son ejemplos de contingencias $(p \veebar q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$, $(p \veebar q) \rightarrow q$ (sus tablas de verdad se construyeron en los ejemplos previos).

RESUMEN DE DE LA UNIDAD I

Definición y clasificación

La Lógica es la disciplina dedicada a identificar los principios generales, formas y estructuras o esquemas de razonamiento formales, con el fin de determinar si un argumento es o no válido. La palabra lógica proviene del griego "logos" que significa pensamiento, discurso, razón.
La Lógica se clasifica en: Lógica Clásica, Lógica Moderna, Lógicas Polivalentes.

Proposición

Una proposición es todo enunciado respecto al cual se disponga de un criterio que permita afirmar inequívocamente que su contenido es verdadero o falso. En otras palabras, una proposición es una oración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Principios Lógicos

1) Tercero excluido
Cada proposición es o verdadera o falsa. Es decir, no existe una tercera posibilidad.
2) No contradicción
Ninguna proposición es, a la vez, verdadera y falsa.

Valor de Verdad

En el caso de la lógica bivalente, que es tratada en este texto, los valores de verdad son **verdadero** y **falso** que usualmente se denotan con las letras **V** y **F** respectivamente.

Proposiciones Simples y Compuestas

Las proposiciones que no se pueden dividir en proposiciones más pequeñas se denominan proposiciones **simples o atómicas**. Si se juntan varias proposiciones en una sola proposición, se dice que esta proposición es **compuesta o molecular**.

Conectivos lógicos

CONECTIVO	SÍMBOLO	OPERACIÓN	LECTURA
Negación	$\sim$	$\sim p$	no p
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
Disyunción inclusiva	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	$p \underline{\vee} q$	o p o q
Implicación o condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	p implica q
Doble implicación o Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q

Tabla de verdad de la negación

p	~p
V	F
F	V

Tabla de verdad para la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad para la disyunción inclusiva.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para la disyunción exclusiva

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para la implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad para la doble implicación.

p	q	$p \leftrightarrow q$

V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El condicional $p \to q$ puede ser leído de las siguientes formas

$$\begin{cases} \text{Si p, entonces q} \\ \text{q es condición necesaria para p} \\ \text{p es condición suficiente para q} \end{cases}$$

y el bicondicional $p \leftrightarrow q$, puede leerse

"p es condición necesaria y suficiente para q"

Condicionales asociados

A cada condicional $p \to q$ se le asocian otros tres condicionales:

1. Directo: $p \to q$
2. Recíproco: $q \to p$
3. Contrario: $(\sim p) \to (\sim q)$
4. Contrarrecíproco: $(\sim q) \to (\sim p)$

Tautología

Una proposición compuesta se dice que es una **tautología** si ella resulta verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la integran.

Contradicción

Cuando una proposición compuesta resulta falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen, se dice que la proposición es una **contradicción**.

Contingencia

Una proposición compuesta es una contingencia, si y solo si, ella es verdadera en unos casos y falsa en otros, sin importar la proporción entre ellas.

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD I

1) Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones. En los casos en los que resulten ser proposiciones, determine si es verdadera o falsa.

a. "Simón Bolívar nació en Canadá".
b. "El Parque Nacional Jaragua está ubicado en República Dominicana".
c. "El agua esta fría".
d. "El número 121 es un número primo"
e. "La Luna es un planeta".
f. "Más tarde voy a la playa".
g. "El café esta sabroso".
h. "No tires papel al piso".

2) Sean las proposiciones:

p: "José es rico"
q: "José es feliz"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:

a. "José no es feliz ni rico"
b. "José es pobre pero feliz"
c. "Si José no es pobre entonces es feliz"
d. "José es pobre o bien José es rico e infeliz"

3) Si para cualquier proposición q, se tiene que $(p \vee q)$ es verdadera. ¿Qué puede decirse sobre el valor de verdad de p?

4) Sean las proposiciones p, q, r, s, t tales que q y r son verdaderas, p, s y t son falsas. Determine el valor de verdad de:

a) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ b) $p \rightarrow (s \rightarrow t)$

c) $\left(r \rightarrow (\sim q)\right) \rightarrow (t \vee q)$ d) $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$

5) Determine cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes:

a. $\sim(p \wedge q)$ y $(\sim p \vee \sim q)$

b. $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$

c. $[p \vee \sim(p \vee q)]$ y $[\sim(p \vee q) \vee p]$

6) Construya la tabla de verdad de las siguientes proposiciones, y determine cuales son tautologías, contingencias o contradicciones.

a. $(p \wedge q) \wedge t$

b. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee s)$

c. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

d. $(p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

e. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

f. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$

g. $(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (q \underline{\vee} s)$

7) Enuncie el recíproco, contrario y contrarrecíproco de los siguientes condicionales. Determine su valor de verdad.

a. Si 100 es un número par entonces 10 es un número par.

b. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

c. Si un número entero es múltiplo de 4 entonces es múltiplo de 2.

d. Dos triángulos semejantes son congruentes.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1) Determine cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones. En los casos en los que resulten ser proposiciones determine si es verdadera o falsa.

a. "El número 81 es un número primo".
b. "La suma de dos números enteros impares es impar".
c. "Mañana será martes".
d. "Playa Sosúa está ubicada en República Dominicana".
e. "Ciudad de Vaticano es una ciudad de Portugal".
f. "¿Cuándo vamos a la playa?"

2) Sabiendo que $(r \rightarrow t)$ es falsa. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $\big(r \wedge (\sim t)\big) \rightarrow \big(\sim(\sim t)\big)$?

3) Determine si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias.

a. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q)$
b. $\sim\big(p \rightarrow (q \wedge r)\big)$
c. $(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)$
d. $p \rightarrow [(q \vee p) \vee r]$

4) ¿Las proposiciones $[p \leftrightarrow q]$ y $[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ son lógicamente equivalentes?

5) Sean las proposiciones q y r:

q: 8 es múltiplo de 4

r: 16 es múltiplo de 2

a. Redacte el condicional que tiene a la proposición q como antecedente y a la proposición r como consecuente y determine su valor de verdad.

b. Construya el recíproco, contrario y contrarrecíproco del condicional obtenido en la parte **a**, expréselos en forma simbólica y en el lenguaje natural y determine su valor de verdad.

BIBLIOGRAFÍA DE LA UNIDAD I

- Arnaz, J. (2010). *Iniciación a la Lógica Simbólica. (Tercera edición).* México. Editorial Trillas.
- Burgos, A. (1970). I*niciación a la Lógica Matemática.* Caracas. Ediciones Vega S.R.L.
- Gallo, C. (1988). *Matemáticas para estudiantes de administración y Economía. Tomo I.* Caracas. Ediciones de la Biblioteca UCV.
- Napolitano, A. (2005). *Lógica Matemática*. Caracas. Editorial Biosfera.
- Rojo, A. (1976*). Álgebra I.* (Quinta edición). Buenos Aires. Librería El Ateneo Editorial.
- Saenz, J., Gil, F., Romero, N. (1986). *Fundamentos de la Matemática. Barquisimeto.* Editorial Hipotenusa.
- Suppes, P., Hill S. (1982). *Introducción a la Lógica Matemática.* Barcelona. Editorial Reverté, S. A.