KTH Teknikvetenskap

SF1694 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
Fredag, 14 april 2023

Skrivtid: 08:00–11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij och Katarina Gustavsson

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng. De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

Del A

1. Givet det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ x + y - 3z = 1 \\ \quad\;\; y - 5z = 2 \end{cases}$$

(a) Bestäm alla lösningar till systemet med Gausseliminering. **(4 p)**

(b) Avgör om det finns någon lösning som uppfyller att $x \le y \le z$. **(2 p)**

2. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A. **(3 p)**

(b) Bestäm en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. **(2 p)**

(c) Beräkna $A^{123}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Svaret får innehålla potenser. **(1 p)**

Var god vänd!

Del B

3. Låt L_1 vara linjen i rummet som går genom punkterna $R = (2,1,3)$ och $S = (3,1,1)$ och låt L_2 vara linjen som på parameterform ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller L_1 och är parallellt med L_2. **(4 p)**

(b) Bestäm avståndet mellan L_1 och L_2. (Tips: det kortaste avståndet mellan L_1 och L_2 är samma som avståndet från en godtycklig punkt på L_2 till planet i del (a)). **(2 p)**

4. Den kvadratiska formen Q ges av

$$Q(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

(a) Ange den symmetriska matris som hör till Q. **(1 p)**

(b) Ange den matris som hör till Q med avseende på basen **(2 p)**

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Bestäm karaktären av Q (positivt/negativt definit/semidefinit eller indefinit). **(1 p)**

(d) Skissa kurvan som ges av ekvationen $Q(x,y) = 12$. **(2 p)**

Del C

5. (a) För delrum U och V av $\mathbb{R}^n$ ges skärningen av

$$U \cap V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in U \text{ och } \mathbf{x} \in V\}.$$

Visa att skärningen $U \cap V$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**

(b) Betrakta de två delrummen av $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestäm en ON-bas för skärningen $U \cap V$. **(4 p)**

6. För ett heltal $n \geq 0$, låt P_n vara vektorrummet av alla polynom av grad högst n. Betrakta avbildningen $T_n : P_n \to P_n$ som ges av $T_n(p(x)) = (x+2)p'(x)$ för alla $p(x) \in P_n$, där $p'(x)$ betecknar derivatan av $p(x)$.

(a) Visa att T_n är en linjär avbildning för alla $n \geq 0$. **(1 p)**

(b) Bestäm dimensionen för nollrummet $\ker(T_n)$ och dimensionen för bildrummet $\operatorname{ran}(T_n)$ för alla $n \geq 0$. **(2 p)**

(c) Bestäm alla egenvärden till T_n för alla $n \geq 0$. **(3 p)**