SF1694 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
10 januari 2024

Skrivtid: 14:00–17:00
Tillåtna hjälpmedel: Inga
Examinator: Mats Boij och Mattias Sandberg

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Till antalet erhållna poäng på del A adderas eventuella bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt.

Betygsgränser vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade.

Del A

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} - 3z = k \\ kx + y + 4z = 2 \\ 2x + y + k^2 z = 2 \end{cases}$$

där k är en konstant.

a) Avgör för vilka värden på k som systemet har en unik lösning. (2 p)

b) Lös systemet för de värden på k då systemet *inte* har en unik lösning. (4 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Avgör vilken av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ som är en egenvektor till A och bestäm dess egenvärde. (2 p)

b) Avgör om A är diagonaliserbar. (3 p)

c) Avgör om A är ortogonalt diagonaliserbar. (1 p)

DEL B

3. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$ och låt $U = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

a) Visa att $\mathbf{v}$ ligger i delrummet U och bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ med avseende på basen $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. (2 p)

b) Bestäm en ON-bas för delrummet U. (2 p)

c) Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{w}$ på delrummet U. (2 p)

4. Betrakta punkten $A = (1, 2, 1)$ och planet Π med ekvation $2x + y + z = 11$.

(a) En punkt B är en *spegelbild* av punkten A i planet Π om punkterna ligger på olika sidor om Π, men på samma avstånd från Π så att linjen genom punkterna är ortogonal mot Π. Bestäm spegelbilden B av A i planet Π. (4 p)

(b) Avgör om punkten $C = (4, 3, 3)$ ligger på samma sida om planet Π som punkten A. (2 p)

DEL C

5. Låt P_2 vara vektorrummet av polynom av grad högst 2 och med reella koefficienter. Delmängden V består av polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ som uppfyller $p(1) = 0$.

a) Visa att V är ett delrum av P_2. (2 p)

b) Bestäm en bas för V. (2 p)

c) Bestäm en matris för den linjära avbildning $T : P_2 \longrightarrow V$ som ges av

$$T(p(x)) = p(x) - p(1).$$

Ange vilka baser som används. (2 p)

6. Två matriser A och B kallas för *similära* om det finns en inverterbar matris P sådan att $B = P^{-1}AP$.

a) Visa att similära matriser har samma egenvärden med samma algebraiska multiplicitet genom att visa att de har samma karakteristiska polynom. (2 p)

b) Visa att om $\mathbf{x}$ är en egenvektor till $B = P^{-1}AP$ så är $P\mathbf{x}$ en egenvektor till A med samma egenvärde. (2 p)

c) Antag att matriserna A och B är similära. Visa att varje egenvärde λ har samma geometriska multiplicitet för A som för B. (2 p)