SF1694 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
Onsdag 3 april 2024

Skrivtid: 14:00–17:00
Tillåtna hjälpmedel: Inga
Examinator: Mats Boij och Mattias Sandberg

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Till antalet erhållna poäng på del A adderas eventuella bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt.

Betygsgränser vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade.

Del A

1. Beräkna $\det(ABA^{-1}B^T)$ där

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Avgör om vektorn $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A. (1 p)

b) Avgör om A är diagonaliserbar. (3 p)

c) Bestäm $A^{-10}\mathbf{w}$. (2 p)

Del B

3. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, b, 0, 1)$ och $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, -1)$ i $\mathbb{R}^4$.

a) För vilka a och b bildar $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ en bas för ett tredimensionellt delrum i $\mathbb{R}^4$? (4 p)

b) Bestäm a och b så att vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 1, 3)$ har koordinaterna $(4, -3, 2)$ i basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. (2 p)

4. Låt $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras genom

$$L(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm standardmatrisen för L. (2 p)

b) Bestäm matrisen för L i basen $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. (2 p)

c) Bestäm ON-baser för nollrummet $\ker(L)$ och bildrummet $\operatorname{ran}(L)$. (2 p)

Del C

5. Linjen L_1 och L_2 ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{resp.} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (s \in \mathbb{R}).$$

a) Bestäm en enhetsvektor som är vinkelrät mot både linjen L_1 och L_2. (1 p)

b) Bestäm avståndet d mellan linjerna L_1 och L_2. (3 p)

c) Bestäm punkten A på linjen L_1 och punkten B på linjen L_2 sådana att avståndet mellan A och B är d. (2 p)

6. Planet π innehåller punkten $P = (3, 1, 4)$ och skär cylindern $x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz = 1$ utmed en cirkel.

a) Skriv cylinderns ekvation i huvudaxelform (principal axes form). (2 p)

b) Bestäm skärningscirkelns medelpunkt och radie. (4 p)