KTH Teknikvetenskap

SF1694 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
Onsdag, 11 januari 2023

Skrivtid: 14:00–17:00
Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij och Katarina Gustavsson

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng. Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från uppgift 1 adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på uppgift 1 kan dock som högst bli 6 poäng. De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Betrakta matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna A^{-1}. **(4 p)**

(b) Använd (a) för att att lösa matrisekvationen $AX = B$. **(2 p)**

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Avgör om vektorn $\mathbf{u}$ tillhör nollrummet till A. **(1 p)**

(b) Avgör om vektorn $\mathbf{v}$ tillhör kolonnrummet till A. **(3 p)**

(c) Bestäm en bas för kolonnrummet till A. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL B

3. Låt

$$V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\3\\4\\5\\6 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2\\4\\5\\-7\\3 \end{bmatrix}.$$

Använd minstakvadratmetoden för att beräkna den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på V.

(6 p)

4. Låt

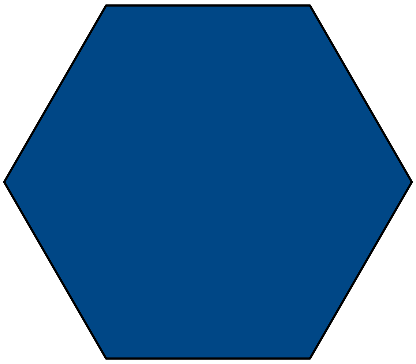
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifiera att A^2 är diagonaliserbar genom att bestämma en bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till A^2. **(4 p)**

(b) Visa att A inte är diagonaliserbar. **(2 p)**

DEL C

5. De tre punkterna $A = (0, 6, -3)$, $B = (-2, 5, 4)$ och $C = (2, 4, 5)$ utgör tre av de sex hörnen i en regelbunden hexagon. Använd vektorgeometri för att bestämma övriga tre hörn i hexagonen. (*Ledning:* Se på längder och vinklar i triangeln ABC.) **(6 p)**



FIGUR 1. En regelbunden hexagon

6. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kallas *ortogonal* om $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. En $n \times n$-matris A kallas *ortogonal* om $A^{-1} = A^T$.

(a) Visa att sammansättningen av två ortogonala avbildningar är ortogonal. **(2 p)**

(b) Visa att produkten av två ortogonala matriser är ortogonal. **(2 p)**

(c) Visa att en linjär avbildning T är ortogonal om dess standardmatris A är en ortogonal matris. **(2 p)**