



---

# INTRODUCTION AUX MÉTHODES DE MONTE-CARLO SÉQUENTIELLES

---

Rapport de projet Monte-Carlo



Abderrahmane GHANEM – Mohamed RUINE  
M2 Statistique 2019/2020

## Table des matières

1	Introduction .....	1
1.1	Motivation.....	1
1.2	Enoncé du problème.....	1
2	Inférence bayésienne.....	3
2.1	Estimation récursive bayésienne .....	3
2.2	Méthodes de Monte-Carlo classiques .....	4
2.2.1	Echantillonnage parfait .....	4
2.2.2	Echantillonnage préférentiel .....	5
2.2.3	Echantillonnage préférentiel séquentiel.....	6
2.2.4	Rééchantillonnage .....	7
3	Monte-Carlo Séquentielle.....	9
4	Simulation numérique.....	11
5	Conclusion.....	12
5.1	Pour aller plus loin.....	12
5.2	Applications .....	12
	Références .....	13

# 1 Introduction

Dans ce rapport, on fait une brève introduction aux méthodes Monte-Carlo Séquentielles. Il est fortement inspiré du chapitre d'introduction du livre *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (2001) par Doucet, Freitas & Gordon.

On commencera par une introduction du sujet et des problématiques liées, avant d'enchaîner avec les notions essentielles sur lesquelles s'appuient notre sujet. On débouchera ainsi naturellement sur ce dernier pour en faire une analyse plus poussée. Ces résultats seront ensuite illustrés au cours de l'implémentation numérique. Enfin, on terminera avec une conclusion succincte présentant quelques perspectives.

## 1.1 Motivation

Dans le domaine de l'ingénierie, on est souvent amené à rencontrer le problème suivant : des états décrivant un système dynamique sont inconnus et doivent être estimés sur la base d'observations ou de mesures bruitées. La solution à ce problème est donnée par la fonction de densité de probabilité (PDF, en anglais) a posteriori, qui donne la loi de probabilité des états par rapport à toutes les informations disponibles. En usant de cette densité, il est par exemple possible de calculer des estimations ponctuelles (à l'aide d'une moyenne) ou encore des régions de confiance.

Dans le cas d'un système linéaire et gaussien, une paramétrisation analytique de ces distributions peut être déterminée, connu sous le nom de filtre de Kalman. En revanche, dans le cas général non-linéaire, aucune expression explicite ne peut être dégagée. L'approche la plus courante pour traiter ces scénarios problématiques consiste alors en une approximation locale du modèle afin d'obtenir une version linéarisée permettant l'utilisation du filtre de Kalman. Dès lors que les non-linéarités ne sont pas trop « fortes », cette méthode, dite de Kalman étendu, fonctionne bien.

Plus récemment, une méthode basée sur de la simulation a été publiée et est capable de gérer des problèmes d'estimation dans des contextes non-linéaires et non-gaussiens. Utilisant une classe de méthodes appelées *méthodes Monte-Carlo Séquentielles* (SMC, en anglais) ou, plus communément, filtres particulaires, il devient possible d'approximer numériquement la loi a posteriori. Une caractéristique intéressante est que ces méthodes fournissent une solution approximative au problème exacte, et non pas une solution optimale au problème approximatif. C'est pourquoi la précision des filtres particulaires est bien meilleure face à celle des méthodes basées sur les filtres de Kalman.

## 1.2 Enoncé du problème

Un typique problème (d'automatique) est donc un cas tel que les états d'un système soient inconnus et sont à estimer à l'aide d'observations. Par exemple, pour contrôler un bras de robot, des informations sur la position, la vitesse et l'accélération des diverses pièces mécaniques sont nécessaires. Or en général, seuls certains de ces états sont mesurés ; les autres doivent être estimés.

Les filtres à particules sont des méthodes SMC qui fournissent des approximations à la solution du problème d'estimation pour des systèmes dynamiques décrits par le modèle à espace d'état non-linéaire et en temps discret suivant :

$$x_{t+1} = f_t(x_t, v_t) \quad (1.1)$$

$$y_t = h_t(x_t, w_t) \quad (1.2)$$

Ces équations décrivent l'évolution des états  $x_t$  et des observations  $y_t$ . Le bruit d'état  $v_t$  et le bruit de mesure  $w_t$  sont supposés être blancs et indépendants. De plus, ce modèle à espace d'état peut être formulé de manière équivalente comme un *Modèle de Markov Caché* (HMM, en anglais), défini par :

$$p(x_0), p(x_t|x_{t-1}) \quad (1.3)$$

$$p(y_t|x_t) \quad (1.4)$$

Sous cette forme, les états stochastiques  $x_t$  évoluent selon une chaîne de Markov avec des probabilités de transition données par (1.3). En d'autres termes, la chaîne est définie par la PDF initiale  $p(x_0)$ , combinée avec la probabilité des états cachés à un moment donné sachant les états de l'instant précédent  $p(x_t|x_{t-1})$ . Les observations  $y_t$  sont quant à eux distribuées selon (1.4).

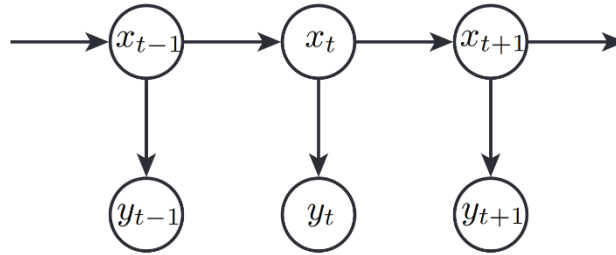


Figure 1.1. Représentation de la HMM sous la forme d'un réseau bayésien

Un problème d'estimation classique consiste à estimer les états  $x_t$  à chaque instant  $t$  étant donné l'historique des mesures ou observations jusqu'à l'instant  $t$ , i.e.  $y_{0:t} := \{y_0, \dots, y_t\}$ . La solution à ce problème est alors donnée par la densité de filtrage  $p(x_t|y_{0:t})$ , ou en d'autres termes, la probabilité des états courants compte tenu de l'historique des observations.

Les filtres particuliers fournissent des approximations de cette densité de filtrage pour les systèmes dynamiques implémentés ci-dessus. Ces équations décrivent de manière très générale, des systèmes non-linéaires et non-gaussiens. Ce qui veut dire que les hypothèses requis par le filtre de Kalman classique ne sont plus d'actualité. D'où leur privilège face à ces dernières.

## 2 Inférence bayésienne

### 2.1 Estimation récursive bayésienne

Pour de nombreux cas, les observations deviennent disponibles au fur et à mesure. C'est pourquoi on privilégie alors cadre récursif afin de permettre l'estimation en-ligne ; par opposition à celle hors-ligne qui sera itératif. Le théorème suivant présente le fondement théorique pour cette tâche :

▪ **Théorème 2.1**

La densité de filtrage  $p(x_t | y_{0:t})$  peut être définie par récurrence en utilisant les équations suivantes :

$$p(x_t | y_{0:t}) = \frac{p(y_t | x_t) p(x_t | y_{0:t-1})}{p(y_t | y_{0:t-1})} \quad (2.1)$$

$$p(y_t | y_{0:t-1}) = \int p(y_t | x_t) p(x_t | y_{0:t-1}) dx_t \quad (2.2)$$

$$p(x_{t+1} | y_{0:t}) = \int p(x_{t+1} | x_t) p(x_t | y_{0:t}) dx_t \quad (2.3)$$

L'équation (2.1) cherche à corriger la densité à la suite d'une nouvelle observation. Tandis, que (2.3) cherche à prédire l'état suivant.

Remarquez enfin que les quantités restées en noir, à savoir  $p(y_t | x_t)$  et  $p(x_{t+1} | x_t)$  s'expriment en fait à partir des équations de transition du système.

❖ **Preuve**

D'après le théorème de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} p(x|y) &= \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \\ p(y) &= \int p(x, y) dx = \int p(y|x)p(x) dx \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(x_t | y_{0:t}) &= \frac{p(x_t | y_t, y_{0:t-1})}{p(y_t | x_t, y_{0:t-1})} = \frac{p(y_t | x_t) p(x_t | y_{0:t-1})}{p(y_t | y_{0:t-1})} \end{aligned}$$

Puis, de façon analogue,

$$\begin{aligned} p(y_t, x_t | y_{0:t-1}) &= p(y_t | x_t, y_{0:t-1}) p(x_t | y_{0:t-1}) = p(y_t | x_t) p(x_t | y_{0:t-1}) \\ p(x_{t+1}, x_t | y_{0:t}) &= p(x_{t+1} | x_t, y_{0:t}) p(x_t | y_{0:t}) = p(x_{t+1} | x_t) p(x_t | y_{0:t}) \end{aligned}$$

Reste alors à intégrer suivant  $x_t$  sur chaque ligne, pour retrouver :

$$\begin{aligned} p(y_t | y_{0:t-1}) &= \int p(y_t | x_t) p(x_t | y_{0:t-1}) dx_t \cdot \\ p(x_{t+1} | y_{0:t}) &= \int p(x_{t+1} | x_t) p(x_t | y_{0:t}) dx_t \cdot \end{aligned}$$

□

## 2.2 Méthodes de Monte-Carlo classiques

Le théorème précédent est en réalité d'une simplicité trompeuse. En effet, les formules de récurrence sont plutôt un résultat théorique car les intégrales (multi-dimensionnelles) impliquées n'aboutissent pas à une solution analytique dans le cas général. Comme répété, le modèle linéaire gaussien est une exception.

Pour contourner cette difficulté, les filtres particuliers font donc appel aux techniques d'intégration Monte-Carlo pour approximer la PDF a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ . La densité de filtrage  $p(x_t|y_{0:t})$  s'obtient ensuite par marginalisation.

### 2.2.1 Echantillonnage parfait

L'échantillonnage parfait constitue la base de toutes les méthodes de Monte-Carlo. Elle sert à donner une approximation de fonctions de densité.

La fonction de répartition (CDF, en anglais)  $D(\cdot)$  est liée à la fonction de densité (PDF)  $p(\cdot)$  par :  $D(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(s) ds$ . De plus, par le théorème de Glivenko-Cantelli, la fonction de répartition empirique  $\widehat{D}_N(\cdot)$  est un très bon estimateur de la CDF. On peut donc se permettre de définir une approximation  $\widehat{p}_N(\cdot)$  de la densité  $p(\cdot)$ , en dérivant  $\widehat{D}_N(\cdot)$ . Autrement dit,  $p(\cdot)$  est approchée par  $N$  poids ponctuelles, modélisée par une masse de Dirac  $\delta(\cdot)$ .

Soit un échantillon de taille  $N$  et *iid*  $(x_i)_{i=1,\dots,N}$  suivant la loi  $p(\cdot)$ , on pose :

$$\widehat{p}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \quad (2.4)$$

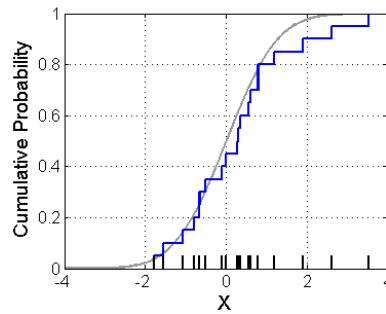


Figure 2.1. Une réalisation de la fonction de répartition empirique pour une loi normale standard

Soit une v.à.r.  $X \sim p(x)$ . Pour une certaine fonction  $g$ , l'intégrale

$$I(g) = \mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)p(x) dx \quad (2.5)$$

peut être approchée par

$$\widehat{I}_N(g) = \int g(x) \widehat{p}_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \quad (2.6)$$

Par la loi des grands nombres (LGN),  $\widehat{I}_N(g)$  converge presque-sûrement vers  $I(g)$ . Bien que l'on semble avoir retrouvé une bonne approximation pour un calcul d'intégrales, l'échantillonnage parfait ne peut pas être appliqué directement au filtre particulaire car la densité  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  n'est connu qu'à une constante près.

Viens alors à l'esprit de faire aux méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC, en anglais). Mais ces méthodes sont implémentées de façon itérative, ce qui ne sied pas du tout à notre problème d'estimation récursive. On va donc faire appel à l'échantillonnage préférentiel.

### 2.2.2 Echantillonnage préférentiel

L'échantillonnage préférentiel (IS, en anglais) est une variante de l'échantillonnage parfait vu précédemment. On va plutôt ici tirer nos échantillons suivant une densité auxiliaire, dite pondérée,  $\pi(\cdot|\cdot)$ , qui peut être choisie quasi arbitrairement.

La méthode est basée sur l'argument suivant :

Si  $p(x_{0:t}|y_{0:t}) > 0$  implique  $\pi(x_{0:t}|y_{0:t}) > 0$ ,

Alors, on peut réécrire (2.5) comme :

$$\begin{aligned}
 I(g) &= \int g(x_{0:t}) p(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t} \\
 &= \int g(x_{0:t}) \frac{p(x_{0:t}|y_{0:t})}{\pi(x_{0:t}|y_{0:t})} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t} \\
 &= \int g(x_{0:t}) \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{p(y_{0:t}, y_{0:t})} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t} \\
 &= \frac{\int g(x_{0:t}) \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{\pi(x_{0:t}|y_{0:t})} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t}}{\int p(y_{0:t}, x_{0:t}) dx_{0:t}} \\
 &= \frac{\int g(x_{0:t}) \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{\pi(x_{0:t}|y_{0:t})} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t}}{\int \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{\pi(x_{0:t}|y_{0:t})} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t}} \\
 I(g) &= \frac{\int g(x_{0:t}) \tilde{w}(x_{0:t}) \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t}}{\int \tilde{w}(x_{0:t}) \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) dx_{0:t}} \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

où le poids préférentiel  $\tilde{w}(\cdot)$  est défini par :

$$\tilde{w}(x_{0:t}) = \frac{p(x_{0:t}, y_{0:t})}{\pi(x_{0:t}|y_{0:t})} \tag{2.8}$$

Dès lors, grâce à l'échantillonnage parfait, on peut approcher  $\pi(x_{0:t}|y_{0:t})$  en tirant un échantillon *iid*  $(x_{0:t,i})_{i=1,\dots,N}$  suivant la densité pondérée  $\pi(x_{0:t}|y_{0:t})$ , et non plus suivant l'inaccessible  $p(x_{0:t}, y_{0:t})$ . Ainsi,

$$\widehat{\pi}_N(x_{0:t}|y_{0:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i}) \tag{2.9}$$

qui, injectée dans (2.6) donne un nouvel estimateur MC pour  $I(g)$  :

$$\hat{I}_N(g) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{w}(x_{0:t,i}) g(x_{0:t,i})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{w}(x_{0:t,i})} = \sum_{i=1}^N w_{t,i} g(x_{0:t,i}) \quad (2.10)$$

où les poids préférentiels  $w_{t,i}$  sont normalisés et définis par :

$$w_{t,i} = \frac{\tilde{w}(x_{0:t,i})}{\sum_{i=1}^N \tilde{w}(x_{0:t,i})} \quad (2.11)$$

Par identification avec (2.4), cette méthode d'intégration MC peut aussi être vue comme une approximation de la PDF a posteriori :

$$\hat{p}_N(x_{0:t}|y_{0:t}) = \sum_{i=1}^N w_{t,i} \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i}) \quad (2.12)$$

où  $x_{0:t,i} \sim \pi(x_{0:t}|y_{0:t})$ , pour  $i = 1, \dots, N$ .

Mais, tout comme pour les méthodes MCMC, l'échantillonnage préférentiel est une méthode hors-ligne et requiert de dérouler tous les calculs à chaque nouvelle observation, ce qui nuit fortement à sa complexité algorithmique.

### 2.2.3 Echantillonnage préférentiel séquentiel

Fort heureusement, l'échantillonnage préférentiel peut être rendu récursif (SIS, en anglais) : il est en effet possible de simplement corriger les poids préférentiels pour chaque nouvelle observation. Le secret réside dans l'hypothèse où  $\pi(x_{0:t}|y_{0:t})$  peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \pi(x_{0:t}|y_{0:t}) &= \pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t}) \pi(x_{0:t-1}|y_{0:t-1}) \\ &= \pi(x_0) \prod_{s=1}^t \pi(x_s|x_{0:s-1}, y_{0:s}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} p(x_{0:t}, y_{0:t}) &= p(x_t, y_t, x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) \\ &= p(y_t|x_t, x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) p(x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) \\ &= p(y_t|x_t) p(x_t|x_{t-1}) p(x_{0:t-1}, y_{0:t-1}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

puis, en insérant (2.13)-(2.14) dans (2.8), on aboutit à une formule par récurrence pour le poids préférentiel :

$$\tilde{w}(x_{0:t}) = \frac{p(y_t|x_t) p(x_t|x_{t-1})}{\pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t})} \tilde{w}(x_{0:t-1}) \quad (2.15)$$



Résumons tout cela en implémentant le pseudo-code de l'algorithme :

---

**Algorithme 2.1 : Sequential Importance Sampling (SIS)**


---

L'estimateur de densité  $\widehat{p}_N(x_{0:t}|y_{0:t})$  est corrigé par récursivité à chaque itération, c'est-à-dire, à l'instant où une nouvelle observation est disponible. Le déroulé, pour chaque instant  $t$ , est alors pour  $i = 1, \dots, N$  :

- Etape de prédiction des particules

$$x_{0:t,i} = \{x_{0:t-1,i}, x_{t,i}\} \text{ avec } x_{t,i} \sim \pi(x|x_{0:t-1,i}) \quad (2.16)$$

- Etape de correction des poids préférentiels (au regard de la nouvelle mesure)

$$w_{t,i} = \frac{p(y_t|x_{t,i})p(x_{t,i}|x_{t-1,i})}{\pi(x_{t,i}|x_{0:t-1,i}, y_{0:t})} w_{t-1,i} \quad (2.17)$$

- Etape de normalisation des poids

$$w_{t,i} = \frac{w_{t,i}}{\sum_{i=1}^N w_{t,i}} \quad (2.18)$$


---

L'échantillonnage préférentiel séquentiel souffre cependant d'un sérieux inconvénient : la dispersion des poids préférentiels ne peut que croître avec le temps. En pratique, cela signifie qu'après quelques itérations sur les instants  $t$ , la quasi-totalité des poids normalisés seront réduits à des valeurs proches de 0. Ainsi, il devient impossible d'éviter la détérioration de la qualité de l'estimateur et finira irrémédiablement par diverger.

Une solution existe en revanche, il faut rajouter une étape finale pour rééchantillonner les particules.

## 2.2.4 Rééchantillonnage

Une étape de rééchantillonnage modifie l'estimateur pondéré de densité  $\widehat{p}_N$  en un autre estimateur non-pondéré  $\widetilde{p}_N$  pour éliminer purement et simplement les particules qui ont un poids jugé trop faible, et a contrario, démultiplier celles qui ont un poids important. Plus formellement :

$$\begin{aligned} \overbrace{\sum_{i=1}^N w_{t,i} \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i})}^{\widehat{p}_N} &\Rightarrow \overbrace{\sum_{i=1}^N \frac{n_{t,i}}{N} \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i})}^{\widetilde{p}_N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x_{0:t} - x_{0:t,j}^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $n_{t,i}$  est le nombre de descendants associé à la particule  $x_{t,i}$ . Si de plus, la nouvelle densité rééchantillonnée est « proche » de celle d'origine, i.e. pour toute fonction  $g(\cdot)$  tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int g(x) \widehat{p}_N(x) dx - \int g(x) \widetilde{p}_N(x) dx \right)^2 \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.20)$$

alors, il y a convergence.

Il existe de nombreuses méthodes différentes pour rééchantillonner de nouvelles particules. Par la suite, bien que cette étape résolve le problème de divergence, elle introduit également d'autres problèmes : un phénomène d'appauvrissement des échantillons se produit. Cela signifie que la diversité des particules est réduite en raison du fait que celles avec un poids de grande importance seront sélectionnées plusieurs fois. Ceci est particulièrement problématique pour les applications de lissage, où l'on s'intéresse à la densité au temps  $t' \ll t$ , car les particules y ont été rééchantillonnées plusieurs fois. En raison de cet effet négatif, on peut vouloir éviter une étape de rééchantillonnage quand cela n'est pas nécessaire.

### 3 Monte-Carlo Séquentielle

Tout au long des sections précédentes, nous avons abordé toutes les notions nécessaires à l'élaboration du plus basique des filtres particuliers. En effet, il ne repose que sur le simple ajout d'une ultime étape de rééchantillonnage à l'algorithme **2.1** (SIS). Il devient alors l'échantillonnage préférentiel séquentiel avec rééchantillonnage (SISR, en anglais), ou plus simplement, filtre Bootstrap.

Cependant, il reste encore une subtilité à éclaircir : il faut choisir une fonction pondérée  $\pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t}) = \pi(x_t|x_{t-1}, y_t)$ . Cette propriété markovienne implique ainsi que l'historique complet des états et observations n'est pas nécessaire, et donc n'a pas besoin d'être stocké. De plus, l'étape de rééchantillonnage a été introduite afin de prévenir la dispersion des poids de croître. Il est alors naturel de choisir une fonction pondérée minimisant cette même dispersion. En pratique, résoudre un tel problème d'optimisation relève souvent de l'impossible, et il faut alors se contenter de résultats sous-optimaux. Il est en revanche important d'insister sur le fait qu'un bon choix pour  $\pi(\cdot|\cdot)$  améliore grandement les performances du filtre particulier.

Un choix naturel, bien que non-optimal, est la densité de probabilité a priori qui est :

$$\pi(x_t|x_{t-1}, y_t) = p(x_t|x_{t-1}) \quad (3.1)$$

Utiliser cette fonction permet de simplifier la formule de récurrence du poids préférentiel (2.15) :

$$\tilde{w}(x_{0:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})}{\pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t})} \tilde{w}(x_{0:t-1}) = p(y_t|x_t) \tilde{w}(x_{0:t-1}) \quad (3.2)$$

En appliquant enfin une étape de rééchantillonnage à chaque instant  $t$ , le basique filtre particulier devient :

---

#### Algorithme 2.2 : Bootstrap filter (SISR)

---

L'estimateur de densité  $\widehat{p}_N(x_{0:t}|y_{0:t})$  est corrigé par récursivité à chaque itération, c'est-à-dire, à l'instant où une nouvelle observation est disponible. Le déroulé, pour chaque instant  $t$ , est alors pour  $i = 1, \dots, N$  :

- Etape de prédiction des particules

$$x_{t,i} \sim \pi(x|x_{t-1,i}) \quad (3.3)$$

- Etape de correction des poids préférentiels (au regard de la nouvelle mesure)

$$w_{t,i} = p(y_t|x_{t,i}) w_{t-1,i} \quad (3.4)$$

- Etape de normalisation des poids

$$w_{t,i} = \frac{w_{t,i}}{\sum_{i=1}^N w_{t,i}} \quad (3.5)$$

- Etape de rééchantillonnage : remplacer l'approximation pondérée par une estimation non-pondérée, en effectuant  $n_i$  copies de la particule  $x_{t,i}$ , puis réinitialiser les poids  $w_{t,i}$  à la valeur  $\frac{1}{N}$ .
-

Reste alors plus qu'à se servir de l'approximation de densité définie par le couple  $(x_{t,i}, w_{t,i})$  et l'injecter dans l'équation (2.10), afin de calculer les estimations ponctuelles (à l'aide de la moyenne empirique).

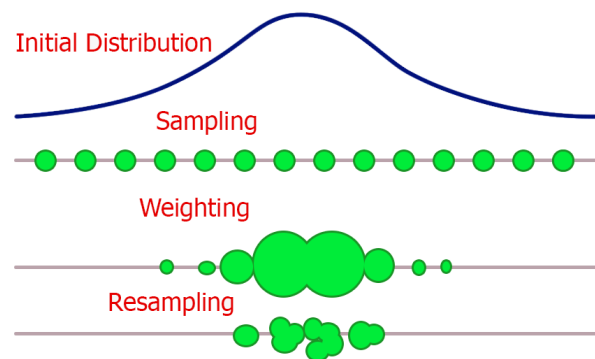


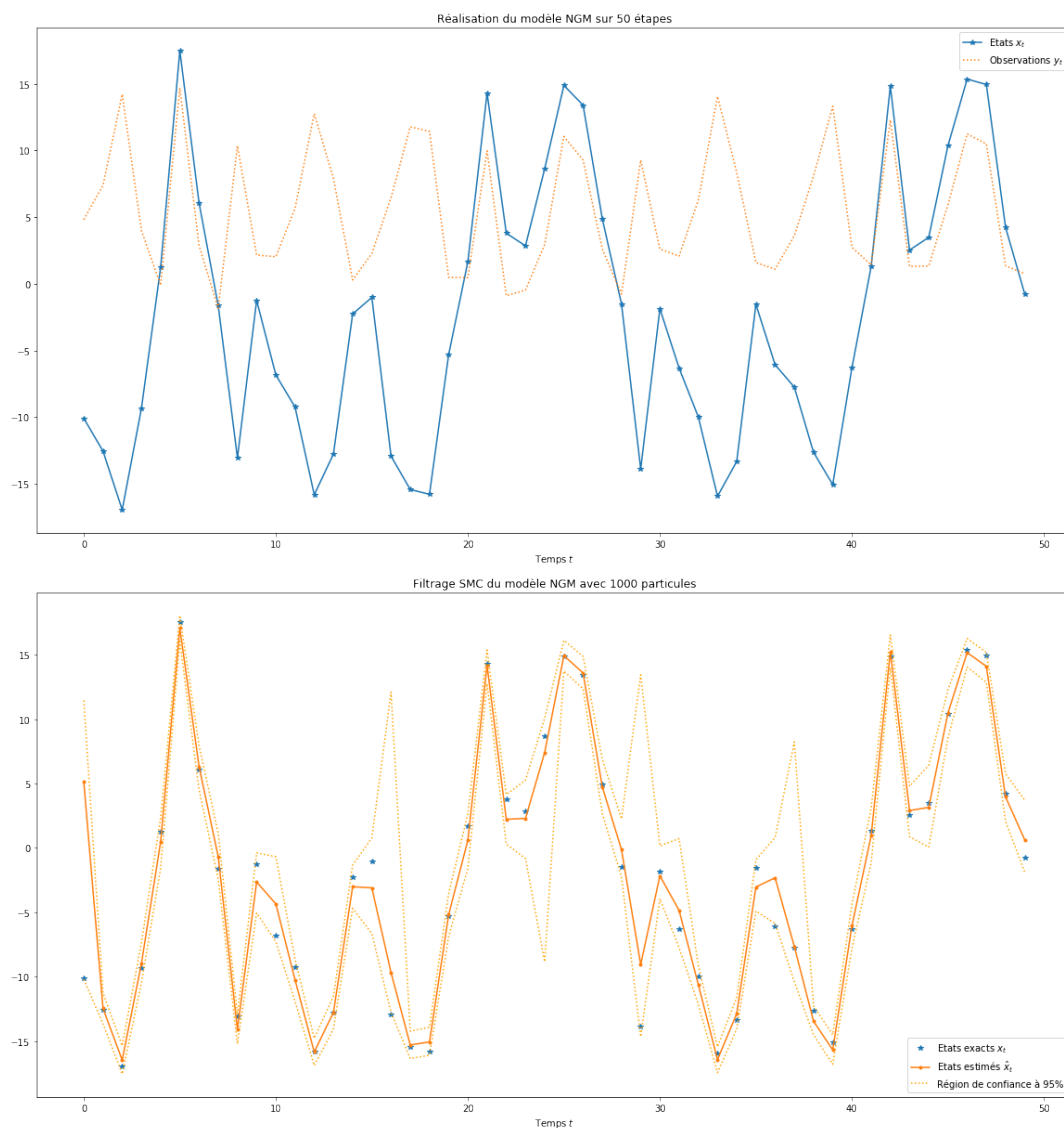
Figure 3.1. Schéma récapitulatif de l'algorithme SIS.

## 4 Simulation numérique

Nous avons implémenté ici le filtre Bootstrap sur un modèle non-linéaire et non-gaussien très répandu pour les méthodes SMC, dit modèle NGM (Netto, Gimeno & Mendes)

$$x_t = \frac{x_{t-1}}{2} + \frac{25x_{t-1}}{1 + x_{t-1}^2} + 8 \cos 1.2t + v_t$$

$$y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t$$



## 5 Conclusion

### 5.1 Pour aller plus loin

On a présenté dans ce rapport le filtre Bootstrap, qui constitue la méthode SMC la plus basique. Il existe de nombreuses extensions, qui peuvent être grossièrement divisées en deux groupes. Sans entrer dans les détails, certaines extensions courantes ont été mentionnées.

Premièrement, il existe certaines techniques pour résoudre le problème d'appauvrissement de l'échantillon. Le rééchantillonnage régularisé par exemple tente de réduire l'appauvrissement de l'échantillon en utilisant une approximation continue du noyau au lieu d'une approximation discrète. Il existe également des suggestions pour remplacer l'étape de rééchantillonnage par des méthodes MCMC afin de générer des particules complètement nouvelles.

En outre, il existe un certain nombre de méthodes pour améliorer les performances du filtre particulières. Les filtres particuliers auxiliaires modifient les poids de rééchantillonnage pour incorporer les informations de mesure, ce qui revient à utiliser une fonction préférentielle qui prend en compte les données de mesure. La marginalisation (Rao Blackwellisation) divise le système en une partie non-linéaire et une partie linéaire pour appliquer le filtre de Kalman optimal à la partie linéaire. Cela permet au filtre bayésien d'estimer uniquement la partie non-linéaire, résultant en de meilleures estimations à des coûts de calcul inférieurs.

### 5.2 Applications

Bien que les filtres à particules soient une méthode relativement nouvelle, ils ont été appliqués avec succès à de nombreux sujets différents. La raison principale en est que la méthode est applicable à des systèmes dynamiques très généraux.

Quelques exemples sont listés ci-dessous.

Le premier filtre particulier fonctionnel a été développé dans le cadre du suivi d'objets à l'aide de radars. Dans ce domaine, la méthode est désormais utilisée dans les applications industrielles.

Le positionnement des voitures est un autre domaine commercialisé. Ici, les informations de position relative des capteurs de vitesse de roue sont combinées avec des informations de carte numérique pour obtenir la position d'une voiture. Cette configuration offre des fonctionnalités similaires voire meilleures que lors de l'utilisation du GPS.

Des filtres particuliers ont enfin été utilisés pour la séparation des sources audio, en économétrie, ou en visualisation.

Cette liste est bien sûr loin d'être complète, mais elle donne une indication du large éventail d'applications possibles pour les filtres particuliers.

## Références

- [1] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, editors. Sequential Monte Carlo methods in practice. Springer Verlag, New York, 2001.
- [2] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. IEE Proceedings-F, 140(2):107–113, 1993.
- [3] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. IEEE Proceedings on Signal Processing, 50(2):174–188, 2002.
- [4] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. Statistics and computing, 10:197–208, 2000.
- [5] G. Kitagawa. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. Journal of Computational and Graphical Statistics, 5(1):1–25, 1996.
- [6] J. S. Liu and R. Chen. Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems. Journal of the American Statistical Association, 93(443):1032–1044, 1998.