

# Lógica

## Lógica de predicados

### Elementos de programación y lógica

#### ① Lógica de Predicados

- Limitaciones de la lógica proposicional.
- Individuos y Propiedades
- Relaciones simples
- Todos

#### ② Formación de la lógica de predicados

- Presentando individuos
- Predicados
- Cuantificadores y Variables

#### ③ La lógica de predicados en la matemática

##### Limitaciones de la lógica proposicional

Intentamos analizar el siguiente razonamiento

Todos los perros son animales

Jirularis es un perro

Jirularis es un animal

Suena lógico, ¿Verdad? Pareciera que esto debería ser cierto, que el razonamiento y las premisas desde las cuales partimos, son verdaderas.

## Limitaciones de la lógica proposicional

Intentamos formalizar el razonamiento. Cada oración es independiente, y no contiene conectivas. Cada una es una única proposición. Por tanto, tenemos:

$p$  = Todos los perros son animales

$q$  = Jirulais es un perro

$r$  = Jirulais es un animal

Donde  $p$  y  $q$  son nuestras premisas y  $r$  sería la conclusión.

Quedando:

$p, q \vdash r$

Como ya vimos, como la conclusión es independiente de las premisas, esta puede ser Verdadero o Falso, y por tanto, el razonamiento es inválido.

## Limitaciones de la lógica proposicional

¿Cuál es el problema en nuestro razonamiento? ¿Será que el razonamiento es realmente inválido y que nuestra intuición nos miente?

La problemática radica en que las proposiciones hablan de una condición que se da en el universo, pero no dicen nada acerca de la estructura interna de esa condición.

En ese caso, parte de las cosas que dice  $p$  se usa en  $q$  y otra parte en  $r$ , y el mismo individuo



(Girulaiz) es mencionado tanto en  $q$  como en  $r$ , y sin embargo la lógica proposicional no dice nada acerca de estos hechos.

### Lógica de predicadores al rescate

Por eso, necesitamos un nuevo tipo de lógica, la **lógica de predicadores**, o también llamada **lógica de orden uno** o **lógica de primer orden**.

La lógica de primer orden nos va a permitir formalizar oraciones que hablan de individuos, sobre las propiedades de esos individuos, y sobre como esos individuos se relacionan entre si.

La lógica de orden uno engloba a la lógica de orden cero. Es decir, que todo lo que se puede formalizar con lógica proposicional se puede formalizar en lógica de predicadores, pero no al revés.

### Individuos

La lógica de predicado va hablar sobre **individuos**.

Un individuo es un elemento único e irrepetible del universo. Por ejemplo, una persona (Juan, Luis, Maria, etc.) un animal (Girulaiz, Michipus, etc.), o un elemento más abstracto (un número, un color, etc.)

Lo importante para que algo sea un individuo es que sea identificable de forma inequívoca. Por ejemplo si hablamos de "Juan", solo hay un Juan, podemos



saber quien es y señalarlo con el dedo. Si hubiera  
dos personas con el nombre "Juan" deberíamos dis-  
tinguir para saber claramente sobre quien estamos hablando.

### Universo de discurso

Como llamamos a nuestros individuos va a depender  
el contexto. Es decir, depende de lo que estemos hablan-  
do. Por ejemplo, si estamos hablando de un grupo  
de amigos, "Juan" será el individuo puntual al cual  
podemos identificar.

sin embargo, si estamos hablando de todos los alum-  
nos de la universidad, deberemos ser mucho más espe-  
cíficos acerca de que "Juan" se trata.

Pero "Juan" es solo el nombre, y uno no es solamente  
su nombre sino el individuo en si.

### Misma individuo, muchos nombres.

Los números por ejemplo, son elementos que son  
únicos e irrepetibles. Cinco es cinco, simple-  
mente.

sin embargo, podemos decir "cinco", pero si hablamos  
en otro idioma sería por ejemplo "cinq", "cinq",

"five", "pem", etc

Incluso en nuestro lenguaje cotidiano, sin hablar otro  
idioma, tenemos símbolos que representan al mismo  
individuo como "5", o "V" (en números romanos)

Más aún, si escribimos " $3+2$ " o " $4+1$ ", ¿qué representan?  
Podríamos decir que es otra forma de escribir cinco.  
Lo que importa no es como lo escribimos, si no lo  
que estamos queriendo representar, el individuo en  
sí. Si suena filosófico, pero es así... al fin de cuentas,  
la lógica nace en la filosofía.

### Propiedades

Nos va interesar hablar de ciertas cosas de esos  
individuos. Por ejemplo, vamos a querer decir cosas  
como "Juan es grande", "Girulais es un perro", o  
"Cinco es un número primo".

Vamos a decir entonces que los individuos tienen  
propiedades.

Una propiedad es una cualidad o atributo que  
puede o no aplicarse a un individuo.

### Propiedades - Cont

La idea es que vamos a pensar una propiedad  
como algo que, dado un individuo, la misma puede  
o no aplicarse a ese individuo. Si aplicamos la  
propiedad al individuo, la podemos tratar como una  
proposición. Es decir, es algo de lo que vamos a  
decir que es

Verdadero o Falso.



Por ejemplo, si la propiedad es "**ser grande**", vamos a **aplicar** a "**Juan**" esa propiedad para obtener "**Juan es grande**". Eso como vemos es una proposición tradicional, es algo de lo que podemos decir que es **Verdadero o Falso**.

Si en cambio aplicamos a "**Luis**" la misma propiedad, obtenemos la proposición "**Luis es grande**" la cual tiene también un valor de verdad, no necesariamente igual a aplicar la propiedad a Juan.

### **Propiedades ejemplo**

Con la lógica de predicados vamos intentar describir el universo. Mejor dicho, vamos a describir una parte puntual y significativa de universo.

Supongamos entonces que queremos hablar de una escuela a la que solo asisten cuatro alumnos, dos chicos (Juan y Luis), y dos chicas (María y Ana).

Juan, Luis, María y Ana van a ser los individuos sobre los que vamos hablar. una posible propiedad de ellos sera "**Es varón**".

### **Propiedades ejemplo - Cont**

Podemos representar las propiedades como una tabla de doble entrada con los individuos como filas y las propiedades como columnas.

	Es varón
Juan	
Luis	
Maria	
Ana	

La tabla podemos completarla con **Verdadero** o **Falso**, dependiendo el valor que toma la propiedad de la columna aplicada al individuo en esa fila.

### Propiedades ejemplo - Cont

	Es varón
Juan	✓
Luis	✓
Maria	F
Ana	F

Vemos entonces como la propiedad "Es varón" se aplica a "Juan", quedando "Juan es varón" y teniendo esa proposición el valor de **Verdadero**. La misma sucede con el caso de Luis. Por otro lado, cuando aplicamos la propiedad a "Maria" y a "Ana", la proposición tiene valor **Falso**.

### Propiedades que dependen de otras propiedades

Agreguemos ahora una segunda propiedad a nuestra ejemplo, la propiedad "Es mujer". Sabemos (intuitivamente) que la propiedad "Es mujer" se



aplica a "Juan", quedando "Juan es mujer" y teniendo esa proposición el valor de verdad **Falso**. La misma ocurre con Luis.

También sabemos que para los casos de "María" y de "Ana", la propiedad que aplica a ellas tiene valor **Verdadero**.

Veamos ambas propiedades en la tabla

	Es varón	Es mujer
Juan	V	F
Luis	V	F
María	F	V
Ana	F	V

**Propiedades que dependen de otras propiedades**

Si bien podemos tratar a ambas propiedades como independientes, hay una clara relación entre "Es varón" y "Es mujer".

En particular, si alguien es varón entonces seguro no es mujer. Y si es mujer, seguro no es varón, es decir ambas son complementarias.

Ya conocemos una conectiva que representa el concepto de complemento, la negación. Podemos reformular la propiedad "Es mujer" en términos de "Es varón".

$$\text{Es mujer} = \neg \text{Es varón}$$



Así, vemos como podemos tener propiedades que son dependientes de otras propiedades.

Propiedades que dependen de otras propiedades

Asumamos ahora que conocemos a nuevas propiedades que aplican a nuestro ejemplo, "Usa zapatos"

"Usa corbata"

Podemos crear nuevas propiedades a partir de las que conocemos. podemos decir por ejemplo, que si un hombre usa zapatos y corbata, entonces es elegante.

$\text{Es elegante} = \text{Es varón} \wedge \text{Usa zapatos} \wedge \text{Usa corbata}$

¿Qué significa entonces la propiedad "Es elegante" a "Juan"?

Significa que Juan debe cumplir con ser hombre, con usar zapatos y con usar corbata. Es decir que debemos aplicar a Juan cada una de las propiedades que componen a ser elegante y que en todos los casos el resultado debe ser Verdadero.

$\text{Juan es elegante} = \text{Juan es varón} \wedge \text{Juan usa zapatos} \wedge \text{Juan usa corbata}$