

Determinación del módulo de Young: método estático



Sofía Correa,* Juan Octavio Castro**

Laboratorio 4 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA)

Resumen

En este experimento se determinó el módulo de Young del acero inoxidable (aleación 304) a partir de un método estático. Éste consistió en analizar patrones de difracción obtenidos con un sistema óptico para determinar la flexión de una barra sujetada en voladizo al someterla a distintas fuerzas externas.



1 INTRODUCCIÓN

Para una gran variedad de materiales la experiencia muestra que si se ejerce una fuerza que extiende un cuerpo una cantidad Δl , siempre y cuando la variación sea lo suficientemente pequeña, la respuesta del mismo será proporcional a dicha elongación. Esta es la denominada *Ley de Hooke*. Para que la fuerza dependa exclusivamente del material y no de sus dimensiones, la ley se puede formular como

$$F \propto A \frac{\Delta l}{l},$$

donde A es el área de la sección transversal del objeto en cuestión y l su longitud en reposo[1]. A la constante de proporcionalidad se la denomina *Módulo de Young* y se la llama con la letra E .

*soficorrea98@gmail.com

**joctavio287@gmail.com

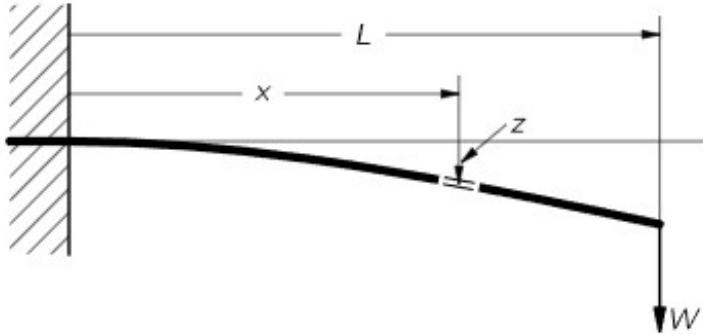


Figura 1: barra en voladizo con un extremo fijo[1]. La letra W representa una fuerza ejercida en el extremo de la barra.

El experimento utilizado para determinar el módulo de Young consiste en registrar la elongación de una varilla en voladizo. Es decir, adosada con un extremo fijo y otro libre, como se detalla en la figura 1.

La ecuación que determina el apartamiento de la barra respecto al equilibrio es [1]

$$z = \frac{W}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (1)$$

donde z es el apartamiento de la barra respecto al equilibrio, x es la distancia respecto al punto de apoyo donde se quiere medir la elongación, $I = \pi d^4/64$ es el momento de inercia de la sección transversal de la barra entorno al eje que sale del plano de la figura 1, d es el diámetro de la sección transversal de la barra, E es el módulo de Young, L es la longitud de la barra desde el punto de apoyo, y W es el módulo de la fuerza que genera la flexión en la barra, en este caso la fuerza peso de una masa ($W = mg$).

La ecuación 1 puede ser reescrita como

$$\frac{m}{E} = \frac{2zI}{g(Lx^2 - \frac{x^3}{3})}, \quad (2)$$

que es un expresión conveniente para determinar el módulo de Young realizando un ajuste por cuadrados mínimos.

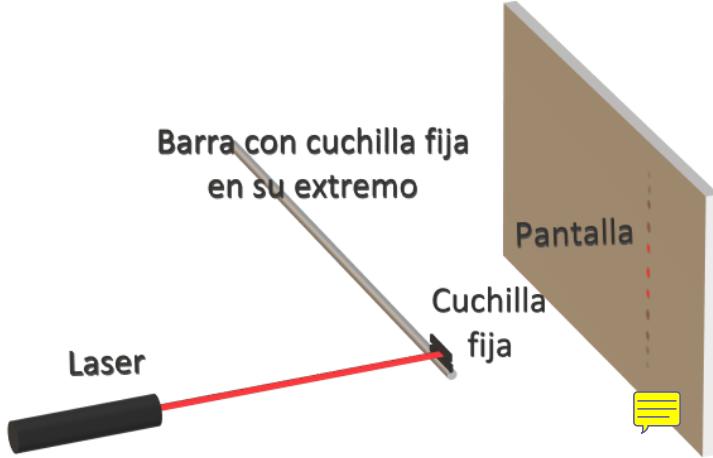


Figura 2: **método óptico** para medir la flexión de la barra.

Para poder medir la elongación de la barra respecto al equilibrio (z) sin tener que perturbar mecánicamente la varilla se puede implementar un sistema óptico. Éste consiste en hacer incidir un láser sobre una rendija formada por dos cuchillas como se muestra en la figura 2 para generar un patrón de difracción que permita calcular la elongación de la varilla. La intensidad del patrón [2] viene dada por

$$I(y) \propto \frac{\sin^2\left(\frac{\pi y z}{\lambda D}\right)}{\left(\frac{\pi y z}{\lambda D}\right)^2}, \quad (3)$$

donde D simboliza la distancia de la rendija formada por las cuchillas a la pantalla, λ la longitud de onda del láser e y el apartamiento del centro del patrón en la pantalla. Esta expresión resulta válida si se satisface la condición de Fraunhofer:

$$z^2 \ll D \lambda.$$

Se puede mostrar que la interfranja del patrón, es decir, la distancia entre dos mínimos consecutivos de la intensidad (ecuación 3) es

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{z} \implies z = \frac{\lambda D}{\Delta y} \quad (4)$$

de donde se puede despejar z , la distancia requerida, acorde a la ecuación 2, para determinar el módulo.

2 DESARROLLO EXPERIMENTAL

El objetivo del experimento fue determinar el valor del módulo de Young de una varilla de acero inoxidable (304). Para llevarlo a cabo se usó un láser Melles Griot con longitud de onda de 670 nm, un espejo regulable Melles Griot, un polarizador, una varilla de acero inoxidable montada en voladizo, dos cuchillas (una de ellas adherida a la barra), un dispositivo que permitiera sacar fotos y una hoja milimetrada. En el esquema de la figura 3 se especifican las posiciones y dimensiones de los elementos utilizados.

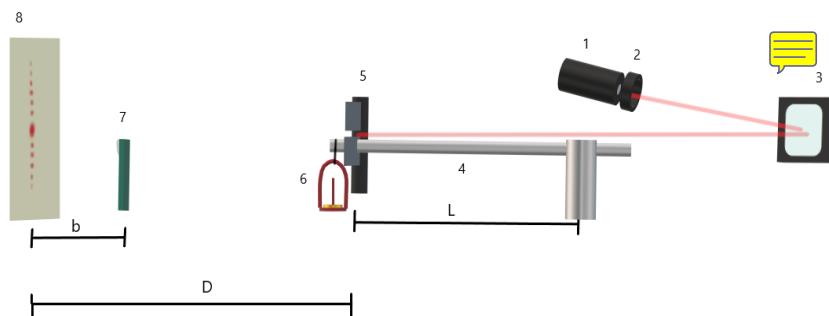


Figura 3: esquema del armado experimental, donde $L = (28,8 \pm 0,5)$ cm es la distancia entre la rendija y el punto fijo de la barra, $b = (21,5 \pm 0,2)$ cm es la distancia entre el celular y la pantalla y $D = (153,6 \pm 0,6)$ cm es la distancia entre la rendija y la pantalla. 1) Láser, 2) Polarizador, 3) Espejo regulable, 4) Varilla de acero inoxidable montada en voladizo con una cuchilla fija en su extremo, 5) Cuchilla sujetada por un posicionador óptico de tres dimensiones, 6) Soporte para las distintas masas, 7) Celular Motorola One Fusion para sacar fotos, 8) Hoja milimetrada.

El experimento consistió en hacer incidir el haz proveniente del láser sobre el espejo regulable de manera que al reflejarse pasara por la rendija que formaban las cuchillas. Proyectando así el patrón de difracción sobre la hoja milimetrada. El hecho de que el espejo fuera regulable permitió modificar la dirección del haz sin tener que cambiar el armado experimental.

Una de las cuchillas estaba fija a la mesa óptica, sujetada por un [posi-](#)

cionar óptico de tres dimensiones, por lo que se podía regular su posición de forma precisa. La otra ~~estaba~~ estaba adherida a la varilla, sobre la cual se colgaban distintas masas cuyos pesos hacían que la misma se flexionara. ~~X~~ por lo tanto, la abertura entre las cuchillas aumentaba, modificando consecuentemente el patrón sobre la hoja milimetrada. Una vez que se conseguía visualizar el patrón se sacaba una foto con el celular que estaba ubicado siempre a la misma distancia de la pantalla. Así se aseguró sacar las fotos de todos los patrones desde la misma posición.

Además, es importante mencionar que se utilizó un polarizador que atenuara la intensidad de la luz para que en la foto se viera con más claridad la distancia entre los mínimos.

Una vez montado el experimento, se sacó foto de la hoja milimetrada, para luego usarla de referencia en el procesamiento de imágenes. A continuación se colgó un soporte sobre la varilla en el cual se fueron ubicando distintas masas y se sacaron fotos de los patrones producidos por los diferentes pesos. Las masas que se utilizaron fueron tales que abrieran la rendija de manera que se pudiese distinguir la interfranja.

3 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES Y RESULTADOS

Una vez que las ~~fotos~~ de los diferentes patrones fueron sacadas, se llevó a cabo un procesamiento de imágenes a partir del cual se pudo calcular el tamaño de la rendija según el peso aplicado sobre la barra. Éste era necesario para calcular el módulo de Young de acuerdo con las ecuaciones 4 y 2.

Las imágenes tomadas tenían formato de compresión PNG, por lo que cada una de ellas estaba representada por tres matrices (RGB) de 919x1225 píxeles. Cada elemento de estas matrices era un número del 0 al 256 (8 bits) que representaba la intensidad del color en cada píxel. Para hacer el procesamiento se utilizó sólo la parte de la imagen que contuviera el patrón y se seleccionó aquella matriz (R, G ó B) en la cual se distinguiera con mayor claridad la interfranja.

En primer lugar, se analizó la imagen de la hoja milimetrada sobre la cual se marcó un eje con una graduación de medio centímetro (ver imagen de la izquierda en la figura 4). Se sumaron las columnas de la matriz, de manera que se obtuvo la suma de la intensidad de los píxeles a lo largo de todo el eje vertical de la foto, es decir se obtuvo un valor de intensidad

para cada una de las filas de la matriz (ver imagen de la derecha en la figura 4). Sobre el gráfico se marcaron aquellos picos que correspondían a las líneas dibujadas cada medio centímetro y se calculó la distancia relativa (en píxeles) entre cada mínimo. Luego se sacó un promedio de estas medidas para reducir el error y obtener el valor de cuántos píxeles representaban medio centímetro. Finalmente [haciendo una regla de tres](#) se pudo calcular la relación de conversión de píxeles a centímetros.

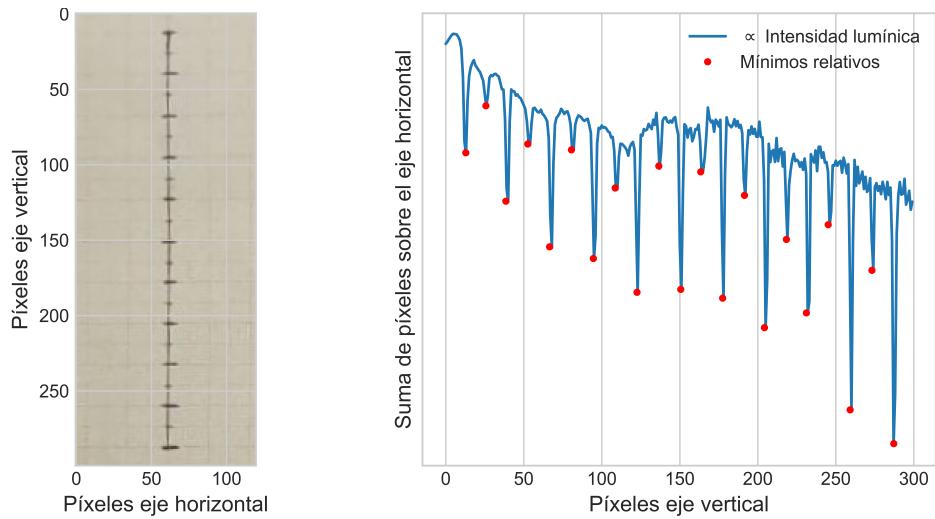


Figura 4: calibración para la conversión de unidades de píxeles a centímetros. Del lado izquierdo se ve un recorte de la escala de referencia que medía $(11,1 \pm 0,1)$ cm, del otro lado se puede ver el perfil de intensidad asociado a una de las matrices de la imagen en la cual se ve dicha escala. Para obtener éste perfil se sumo la intensidad de los píxeles a lo largo del eje horizontal.

Una vez hecha la conversión de píxeles a centímetros se procedió a analizar las imágenes con el patrón de difracción. Para ello se utilizó aquella matriz de píxeles (R, G o B) en la cual se distinguía mejor la interfranja (ver figura 5).

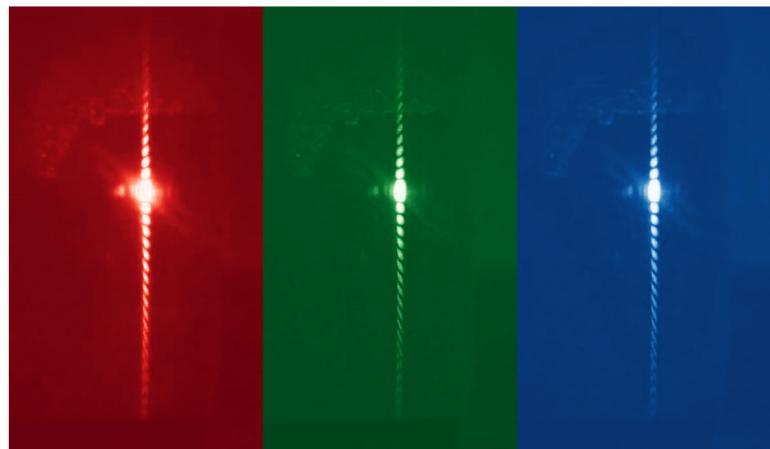


Figura 5: patrón de difracción en tres colores (RGB), cada imagen está representada por una matriz cuyos valores tienen una resolución de 8 bits (256 valores posibles).

Al igual que antes se sumaron las columnas de dicha matriz obteniendo la suma de la intensidad de cada píxel. Luego se realizó un gráfico donde el eje x representaba las filas de la matriz y el eje y la suma de los valores de los píxeles en dicha fila. En el gráfico se veían mínimos relativos que correspondían a los mínimos del patrón de difracción, los cuales fueron localizados digitalmente para luego calcular la distancia en píxeles entre cada uno de ellos, como se muestra en la figura 6.

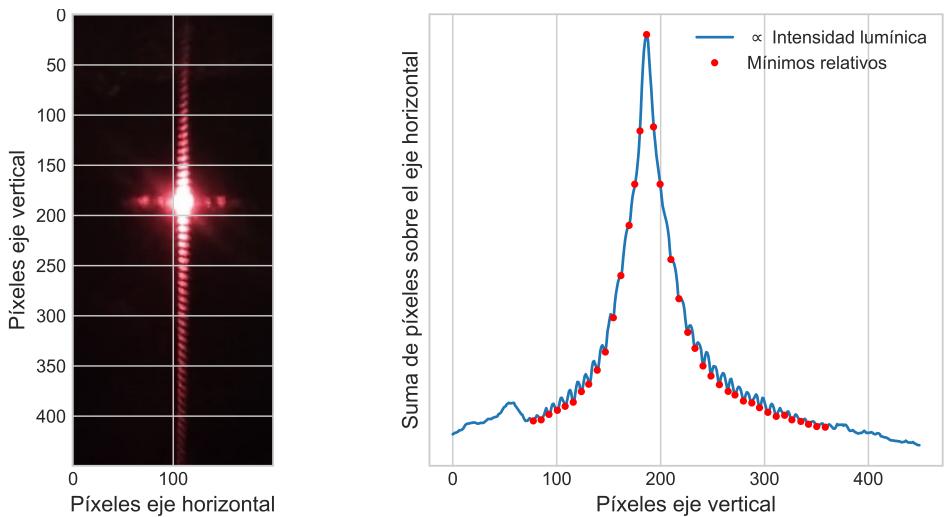


Figura 6: patrón de difracción correspondiente a la masa de $(45,7895 \pm 0,0002)$
g. Del lado izquierdo se ve un recorte de la imagen del patrón, del otro lado se puede ver el perfil de intensidad asociado a una de las matrices de la misma imagen.



Finalmente, se pudo calcular el desplazamiento de la varilla respecto al equilibrio usando la ecuación 4. Es importante aclarar que en esta ecuación se mide la distancia respecto al equilibrio (z) y en las mediciones efectuadas, la apertura inicial de la rendija era distinta de cero.



Luego de obtener el valor de z para cada uno de los diferentes pesos, se pudo graficar (ver figura 7) la relación entre este valor y la masa colgada de la varilla, utilizando la ecuación 2.

Por un lado, se puede ver en la figura, el coeficiente de correlación lineal es cercano a uno, lo cual indica que el modelo utilizado (ecuación 2) puede ser compatible con los datos.

Por otro lado, se puede observar que el error de las mediciones crece conforme aumenta la masa. Esto sucede porque a medida que crece el valor del peso la interfranja disminuye. Por lo tanto, al calcular el promedio, su error se hace cada vez más chico. Sin embargo, acorde a la ecuación 4, la relación con la abertura de la rendija es inversamente proporcional, dando como resultado un error cada vez más grande.

Una vez obtenida la pendiente del ajuste se calculó el módulo de Young: (192 ± 3) GPa.

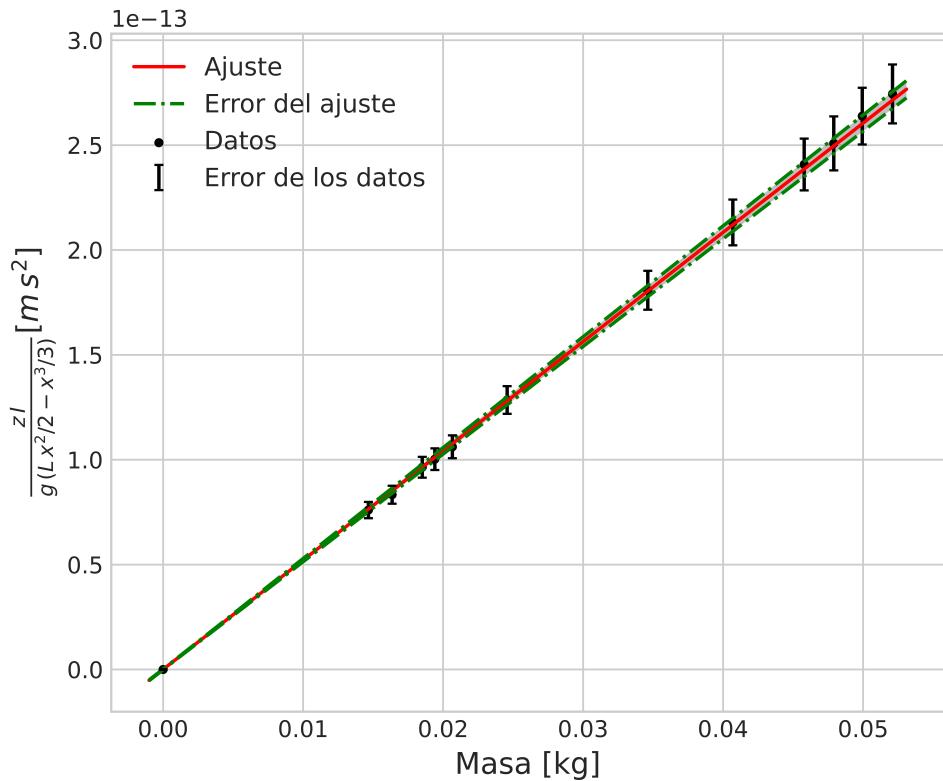


Figura 7: ajuste acorde a la ecuación 2 para determinar la inversa del módulo de Young. La pendiente obtenida por cuadrados mínimos es $1/E = (0,520 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ GPa}$ y el coeficiente de correlación lineal de los datos es $r = 0,999$.

4 CONCLUSIONES

Luego de analizar suficientes mediciones se puede concluir que el método propuesto es efectivo para obtener una aproximación del módulo de Young de una varilla rígida.

A la hora de montar el experimento, resultó conveniente disponer de un espejo (como se detalla en la figura 3) que permitiese dirigir fácilmente el haz hacia la abertura formada por las dos cuchillas. Además, si se quisiera reducir el error, se sugiere cambiar la apertura inicial de las cuchillas o la distancia entre la rendija y la pantalla (D) en cada medición. De esta forma, se podría regular el ancho de las interfranjas para promediar aún más datos. Inclusive se podría modificar estas distancias para que el error sea aproximadamente

el mismo en todas las mediciones.

Por último, se sugiere explorar cómo se comporta el modelo propuesto al tomar otro rango para la fuerza flexora.

5 REFERENCIAS

- [1] Feynmann, R.P., *The Feynmann Lectures on Physics*, California Institute of Technology, New Millennium Edition (2010), lectura 38, sección 1 y 4.
- [2] Hetch, S.S., *Mechanical Vibrations*, Pearson Education, Fifth Edition (2010), capítulo 8, sección 5.3 y 5.4.

