





Determinación del módulo de Young: método dinámico

Sofía Correa*, Juan Octavio Castro**

Laboratorio 4 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA)

Resumen

En este experimento se buscó determinar el modulo de Young del latón a partir de un método dinámico. Este nsistió en hacer oscilar una varilla del material de interés, de manera que nterna con la señal emitida por un láser con el fin de identificar la frecuencia de oscilación de la misma. Con este dato, junto con el coeficiente de rozamiento que etermina el decaimiento de la señal, las dimensiones y la masa de la varilla, se puede cular el modulo de Young. Además, al adquirir los datos, se comparó la resolución, practicidad y eficacia de dos conversores analógicos digitales: un osciloscopio y un sistema DAQ.

1 INTRODUCCIÓN

Para una gran variedad de materiales la experiencia muestra que si se ejerce una fuerza que extiende un cuerpo una cantidad Δl , siempre y cuando la variación sea lo suficientemente pequeña, la respuesta del mismo será proporcional a dicha elongación. Esta es la denominada *Ley de Hooke*. Para que la fuerza dependa exclusivamente del material y no de sus dimensiones, la ley se puede formular como

$$F \propto A \frac{\Delta l}{l},$$

donde A es el área de la sección transversal del objeto en cuestión y l su longitud en reposo[1]. A la constante de proporcionalidad se la denomina *Módulo de Young* y se la llama con la letra E .

*soficorrea98@gmail.com

**joctavio287@gmail.com

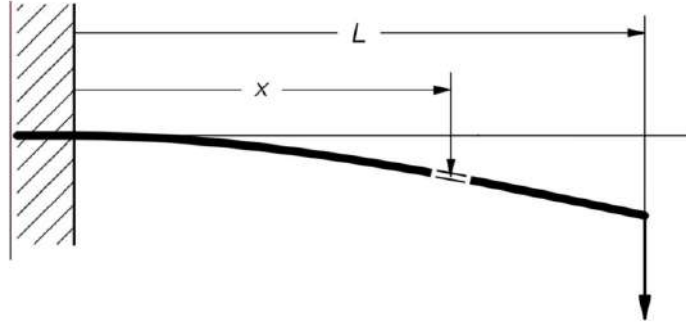


Figura 1: barra oscilando en voladizo con un extremo fijo.

El experimento utilizado para determinar el módulo de Young consiste en registrar la frecuencia de oscilación temporal de una varilla en voladizo. Es decir, adosada con un extremo fijo y otro libre, como se detalla en la figura 1.

La ecuación de movimiento que rige la dinámica de la barra[2] es

$$\frac{4 E I}{\rho \pi d^2} \partial_x^4 w(x, t) + \partial_t^2 w(x, t) + \alpha \partial_t w(x, t) = 0,$$

donde $I = \frac{\pi d^4}{64}$ es el momento de inercia de la sección transversal de la barra entorno al eje que sale del plano de la figura 1, E es el módulo de Young, ρ es la densidad, d es el diámetro de la sección transversal de la barra y α es el coeficiente de rozamiento. La solución de esta ecuación es separable en parte temporal y espacial:

$$\begin{aligned} W(x) &= C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 \cosh(kx) + C_4 \sinh(kx) \\ T(t) &= e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

Al imponer condiciones de contorno propicias para extremos fijo-libre se obtiene

$$\cos(kL) \cosh(kL) = -1 \implies k_1 L \approx 1,875104; \quad k_2 L \approx 4,694091... \quad (2)$$

y la relación de dispersión

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I E}{\rho_l} k_n^4 - \alpha^2}, \quad (3)$$

donde ρ_l es la densidad lineal de la barra. La relación de dispersión puede ser reescrita equivalentemente como

$$E = \frac{\rho_l}{I k_n^4} (f_n^2 4\pi^2 + \alpha^2). \quad (4)$$



2 DESARROLLO EXPERIMENTAL

El objetivo del experimento fue determinar el módulo de Young de una varilla de latón. Para ello fue necesario obtener el coeficiente de rozamiento, la densidad lineal, el momento seccional de inercia de la varilla y la frecuencia temporal de oscilación de la misma.

Para obtener la frecuencia de oscilación fue necesario un diodo láser (Melles Griot-06 DAL003, longitud de onda 673, 5nm), dos polarizadores lineales, una lente convergente (Thorlabs LB1723, $f = 60$ mm), una varilla de latón con una cuchilla en uno de sus extremos y un fotodetector (Thorlabs DET36A). Para adquirir las mediciones se utilizó un osciloscopio (Tektronix TDS1002B) y un sistema DAQ (NI USB-621x), ambos instrumentos conectados al fotodetector mediante una ficha T.

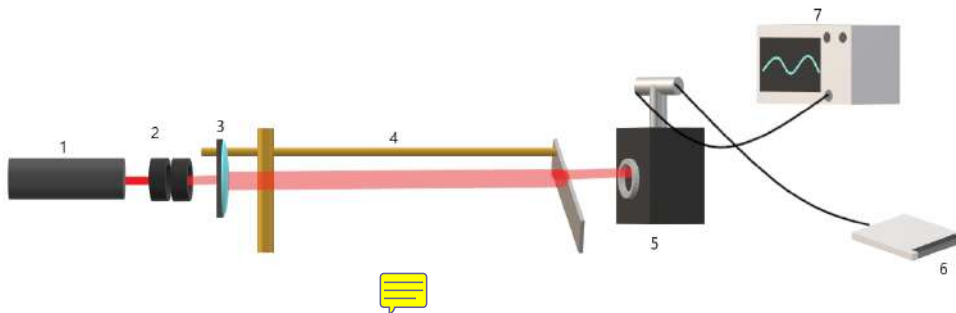


Figura 2: esquema del armado experimental. 1) Láser, 2) Polarizadores lineales, 3) Lente óptica, 4) Varilla de latón con soporte que la deja fija en un punto y con cuchilla en el extremo, 5) Fotodetector con una ficha T para conectar dos instrumentos a la vez, 6) Sistema DAQ, 7) Osciloscopio.

El arreglo experimental se puede ver en la figura 2. Los polarizadores lineales se utilizaron para disminuir la intensidad de la luz y así evitar que el fotodiodo sature. Por otro lado, la lente permitió expandir el diámetro del haz, lo cual fue necesario para que la señal medida por el fotodetector variara suavemente al hacer oscilar la varilla. Entre la lente y el fotodiodo se colocó la varilla de latón (de largo $(38,0 \pm 0,2)$ cm, $(0,5 \pm 0,1)$ cm de diámetro y

($88,85 \pm 0,01$) g de masa) con un soporte que la dejaba fija en un punto. La cuchilla obstruía parcialmente el paso del haz hacia el fotodetector, el cual estaba conectado al osciloscopio y al sistema DAQ.

El experimento consistió en hacer oscilar la varilla de latón y con ella la cuchilla, de manera tal que la intensidad del haz que recibía el fotodetector fuera cambiando acorde a la oscilación. Tanto en el osciloscopio como en el sistema DAQ la intensidad de la luz se interpretaba como una señal eléctrica, por lo tanto las mediciones que se obtuvieron fueron de tensión en función del tiempo. La variación de la señal dependía directamente de cómo la cuchilla interfería con el haz de luz y por lo tanto, de la oscilación de la misma.

3 RESULTADOS

Por un lado, se comparan ambos instrumentos de adquisición y se presentan las mediciones obtenidas con el sistema DAQ. Por otro lado, se analizan las mediciones del osciloscopio que fueron las utilizados para calcular el módulo de Young.

3.1 COMPARACIÓN DE LOS ADC

TDS

Las señales fueron adquiridas con dos conversores analógico-digitales (TBS-1200B y NI USB-621 DAQ). Ambos instrumentos presentan características distintivas: por un lado, el osciloscopio permite ver la señal “en vivo”, lo cual es conveniente para controlar que el fotodetector no sature. Por otro lado, el sistema DAQ permite fijar una mayor frecuencia de muestreo, pudiendo así, adquirir más datos. Además, el osciloscopio depende de la configuración de la escala temporal para tomar la medición, mientras que el sistema DAQ permite regular la duración de la medición sin ningún tipo de restricción. Por estas razones era conveniente tomar mediciones con el sistema DAQ teniendo como referencia la señal “en vivo” sobre la pantalla del osciloscopio.

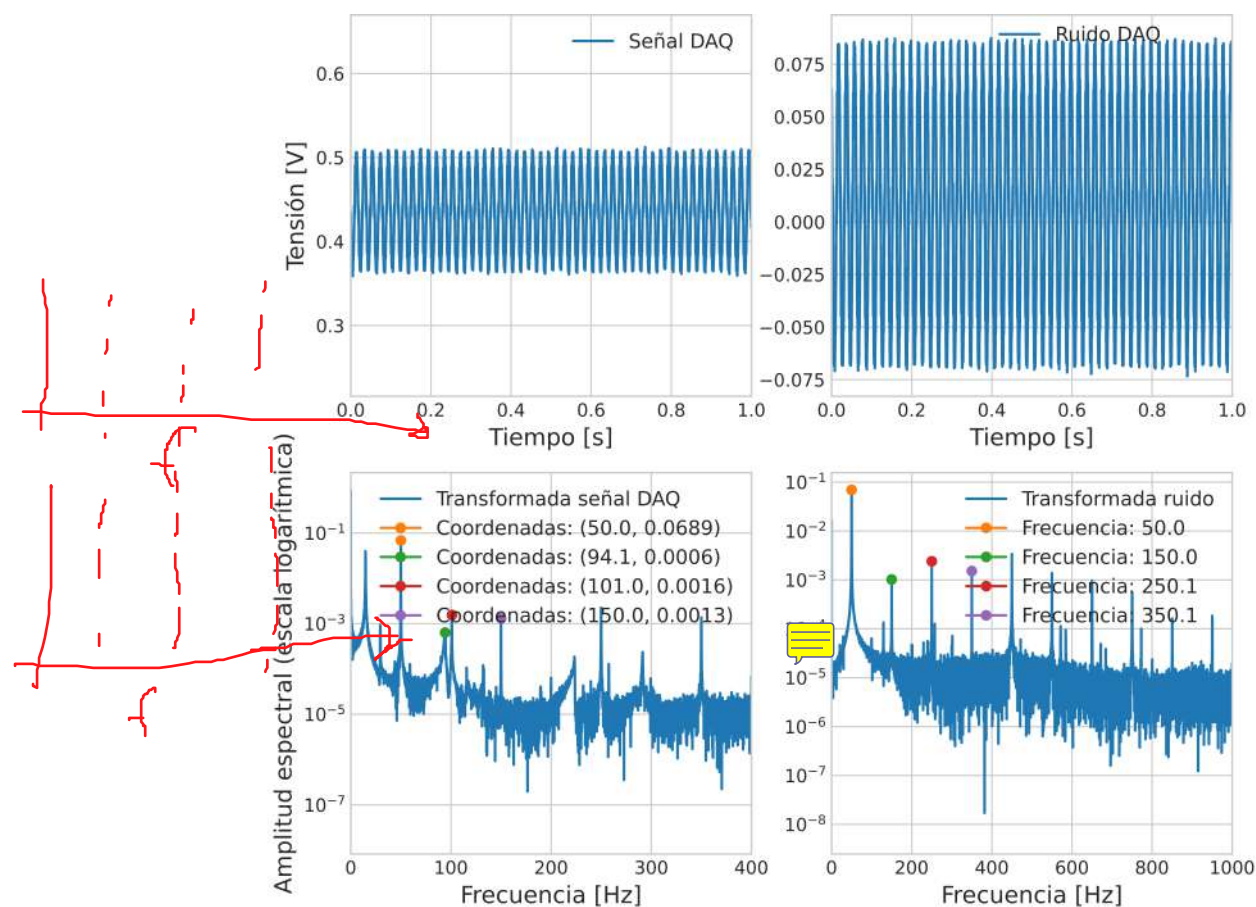


Figura 3: señales adquiridas utilizando el sistema DAQ. Se puede ver de izquierda a derecha el fragmento de una señal eléctrica adquirida durante la oscilación de la varilla, el ruido de fondo en el laboratorio y las respectivas transformadas de Fourier, señalando en color aquellas frecuencias relevantes.

Como se observa en las transformadas de Fourier de la figura 3, entre las frecuencias se encontraban múltiplos de 50 Hz que no se correspondían con la señal proveniente del haz, sino con la señal de fondo o con el ruido eléctrico del montaje experimental. Al no poder filtrarlo, se optó por continuar midiendo con el osciloscopio que tenía la resolución suficiente (quinientas muestras por segundo) para adquirir señales suaves y sin ruido.

3.2 MÓDULO DE YOUNG

Habiendo realizado varias mediciones, se seleccionó aquella que estaba mejor definida y mostraba la mayor cantidad de modos.

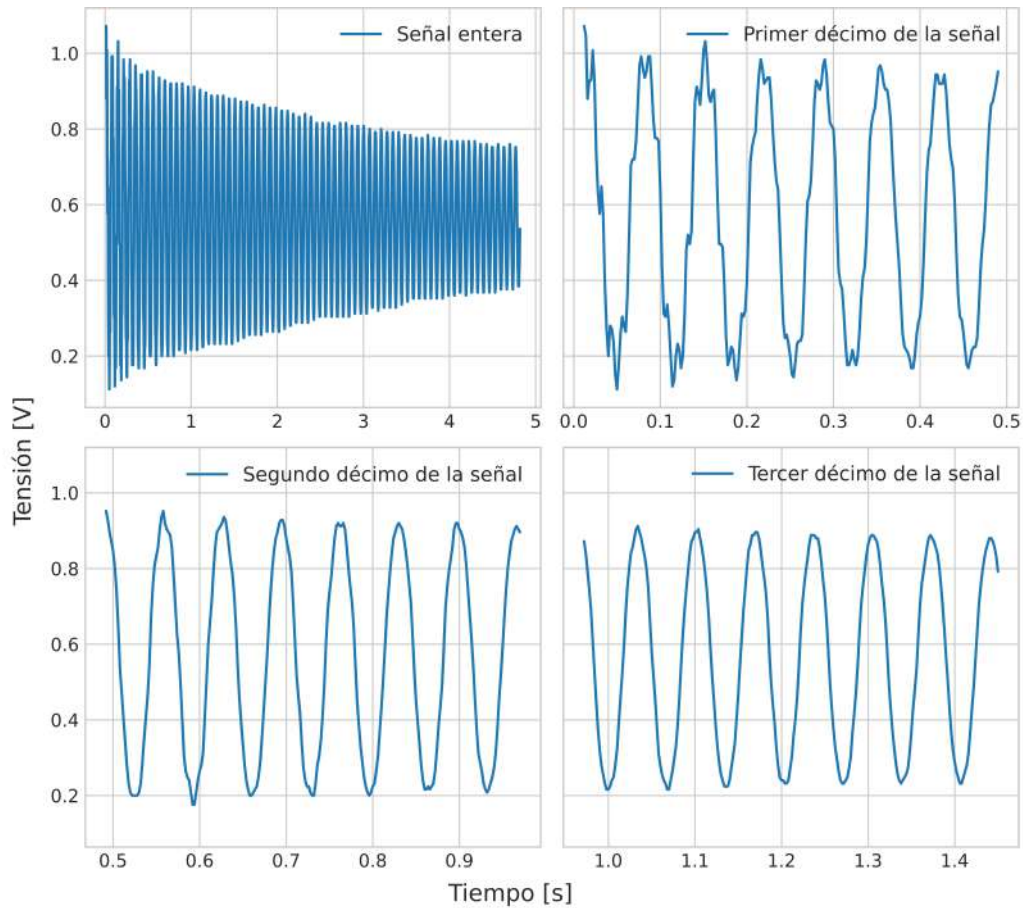


Figura 4: señal adquirida con el osciloscopio. Se puede ver de izquierda a derecha: la señal completa y, seguido, sucesivos fragmentos temporales de la misma.

En la figura 4 se aprecia la evolución temporal de la varilla. En la primera imagen se puede ver que la oscilación parece seguir la forma funcional esperada, mostrando un decaimiento exponencial acorde a la solución propuesta en 1. Al observar los intervalos temporales más cortos, se puede ver que hay una interferencia que rápidamente se disipa.

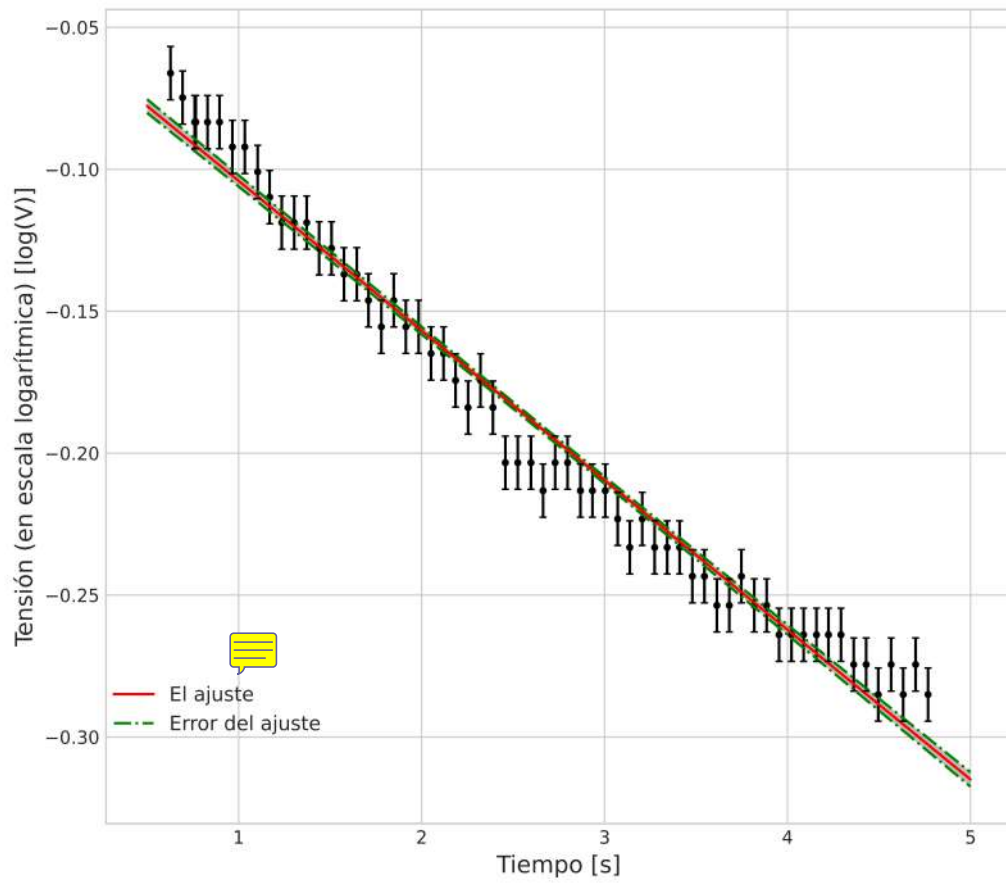


Figura 5: amplitud de los picos de la señal de mayor valor -en escala logarítmica- en función del tiempo. La pendiente obtenida por cuadrados mínimos es $\alpha = (-0,052710 \pm 0,00009) 1/s$ y el coeficiente de correlación lineal de los datos es $r = -0,988$.

Para obtener el coeficiente de decaimiento α , se tomaron los picos de mayor amplitud de la señal y, luego de graficarlos (figura 5) en escala logarítmica -asumiendo que el decaimiento es, en efecto, exponencial-, se les aplicó una regresión lineal. Los errores de los datos fueron asignados acorde a la resolución del osciloscopio. Teniendo en cuenta que el osciloscopio [4] tiene una resolución de 8 bits y la escala vertical estaba fija en $0,2V/Div$, se asignó un 50 % extra del valor $1,6/256$, sobrestimando el error por posibles fluctuaciones debidas al ruido.

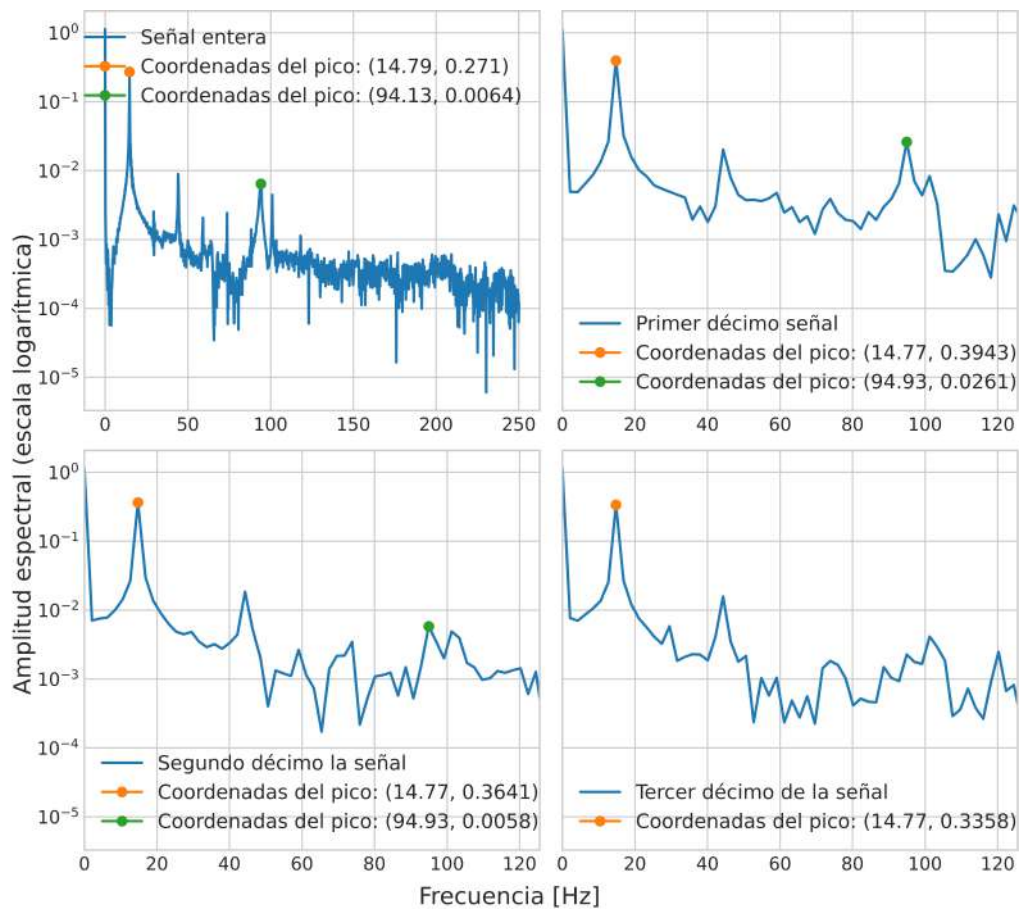




Figura 6: transformada de Fourier de la señal de la figura 4. De izquierda a derecha se ven las transformadas de la señal entera y, seguido, las transformadas de los primeros tres décimos.

Se procedió a realizar la transformada de Fourier de la señal presentada en la figura 4 para encontrar las frecuencias fundamentales de los modos normales. Como se puede apreciar en la primera imagen de la figura 6, la frecuencia fundamental del primer modo se corresponde con el pico de mayor amplitud, en 14,79 Hz. Con ésta frecuencia se utilizó la ecuación 4 para determinar que el módulo de Young era $(110,94 \pm 0,03)$ GPa que difiere un $(4,66 \pm 0,03)$ % del valor esperado (106 gPa)[3].

Habiendo calculado el módulo de Young se procedió a estimar el segundo modo de oscilación para corroborar si la interferencia que se observaba en los primeros dos décimos de la señal de la figura 4 se correspondía efectivamente con el siguiente modo. El valor estimado para la frecuencia del mismo, utili-

zando la ecuación 2 y 3, fue de (92 ± 2) Hz. 

En las imágenes de la figura 6 se puede apreciar que hay un pico en 94, 93 Hz que se corresponde con la frecuencia que interfería en los primeros intervalos temporales de la señal de la figura 4. La amplitud de esta frecuencia disminuye considerablemente a medida que avanza el tiempo. Inclusive, al llegar al tercer décimo de la señal no se observa más la interferencia y, correspondientemente, en la figura 6 el pico deja de distinguirse. 

La diferencia con el valor de la frecuencia del segundo modo calculado con las fórmulas 2 y 3 puede deberse a que las condiciones de contorno no eran exactas: el extremo fijo de la varilla quizás no era del todo firme y los tornillos no sujetaban bien la base.

4 CONCLUSIÓN

Luego de analizar suficientes mediciones se puede concluir que el método propuesto es efectivo para obtener una aproximación del módulo de Young para una varilla rígida.

Después utilizar los dos instrumentos de adquisición -el osciloscopio y el sistema DAQ- se concluye que, a pesar de que este último presenta ventajas sobre la elección de la frecuencia de muestreo y la duración de la medición, el osciloscopio tiene resolución suficiente para adquirir señales suaves y sin ruido. Además, con el osciloscopio es posible visualizar al menos hasta el segundo modo de oscilación.

Es importante notar que si se quisiera estimar modos de oscilación mayores al primero, resulta útil dividir la señal en fragmentos temporales más pequeños y calcular la transformada de Fourier para cada uno de ellos. Si en efecto apareciesen más modos, las amplitudes de estas frecuencias se verían disminuidas (aún más que el modo fundamental) conforme se analicen los sucesivos fragmentos temporales. Además, para tener una aproximación de dónde se encontrarán (antes de ver las transformadas) es útil hacer una estimación analítica, calculando previamente el módulo de Young con la frecuencia del primer modo.

5 REFERENCIAS

- [1] Feynmann, R.P., *The Feynmann Lectures on Physics*, California Institute of Technology, New Millennium Edition (2010), lección 38, sección 1 y 4.
- [2] Rao, S.S., *Mechanical Vibrations*, Pearson Education, Fifth Edition (2010), capítulo 8, sección 5.3 y 5.4.
- [3] Rao, S.S., *Mechanical Vibrations*, Pearson Education, Fifth Edition (2010), Apéndice A, pp. 1038.
- [4] Manual del osciloscopio: TDS 1002B, <https://docs.rs-online.com/efef/0900766b807ddf1d.pdf>.