Cadeias de Markov

Introdução

Processo de Markov

Cadeias de Markov de tempo discreto

Matriz de transição

K dependent Markov Chain

Equações de Chapman-Kolmogorov

Classificação de Estados

Distribuição de Probabilidade

Steady State

Cadeias de Markov de tempo contínuo

Matriz de taxa

Equações de Chapman-Kolmogorov

Distribuição transiente

Steady state

Equações de Balanço

Soluções Numéricas para cadeias de Markov

Método Direto: Gaussian Elimination

Método Interativo:
Power method

Introdução

* Um processo estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias $X(t) \in T$
* t geralmente é o tempo
* Se T é discreto → discrete time stochastic process
* Se T é contínuo → continuous time stochastic process
* X(t) são os estados

Processo de Markov

Se os estados futuros dependem apenas do estado presente, então é um processo de Markov

Processo estocástico
- → Espaço de Estados
  - → discreto : $X = \{1, 2, \dots\}$ "cadeia"
  - → contínuo
- → Variável temporal
  - → tempo discreto : conjunto T finito e contável, Inteiros não negativos $\{X(t),\ t = 0, 1, 2, \dots\}$
  - → tempo contínuo : $\{X(t),\ t \geq 0\}$
- → característica da V.A
  - → estacionária — Se não depende do tempo (shift): $P(X(t) \leq x) = P(X(t+a) \leq x)$
    - memoryless → Markov (Homogênea) : futuro não depende do passado. Somente do presente

$$P(X_{T+1} = x_T \mid X_t = x_t, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{T+1} = x_T \mid X_T = x_T)$$

Cadeias de Markov de tempo discreto (DTMC)

Definição: $P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] =$

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

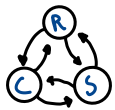
Matriz de transição:

Se P é invariante ao tempo, ela é dita homogênea, ou seja, as prob. de transição são constantes ou estacionárias. Nesse caso, dizemos que a cadeia de Markov é homogênea.

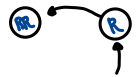
K-dependent Markov Chain:

Transforma non-Markov → Markov.

Exemplo:



$P[C_{n+1} \mid R_n, R_{n-1}]$ → transformar em Markov Chain



S^k states = RR, RC, RS, CR, CC, CS, SR, SC, SS

Notação:

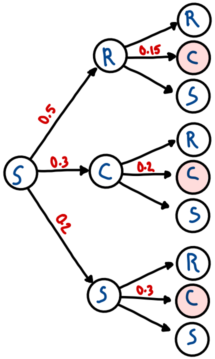
$$P(X(t) = i) = P(X_\tau = i)$$

tempo   estado

Chapman-Kolmogorov Equation

Como encontrar a probabilidade dois dias depois?

C (Cloud) dois dias depois dado que hoje é S (Sunny)



$$P_{SR}P_{RC} + P_{SC}P_{CC} + P_{SS}P_{SC} = \sum_{w=\{R,C,S\}} P_{Sw}P_{wC}$$

$$P = \begin{array}{c|c} & \text{to} \\ \hline \text{from} & \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[P_{SR} \; P_{SC} \; P_{SS}] \begin{bmatrix} P_{RC} \\ P_{CC} \\ P_{SC} \end{bmatrix}$$

$$P_{SR}P_{RC} + P_{SC}P_{CC} + P_{SS}P_{SC}$$

Generalização (Prova): P deve ser homogênea!

$$P[X_{m+n} = j \mid X_0 = i] = \sum_{k \in S} P[X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i]$$

Bayes Rule $P(A,B|C) = P(A|B,C)P(B|C)$

$$\sum_{k \in S} P[\underbrace{X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i}_{\text{Markov property}}]P[X_m = k \mid X_0 = i]$$

$$\sum_{k \in S} P[X_{m+n} = j \mid X_m = k]P[X_m = k \mid X_0 = i]$$

$$\boxed{P^{m+n} = P^m P^n}$$

$$\begin{cases} P(A|B,C) = \dfrac{P(A,B,C)}{P(B,C)} \\ P(B|C) = \dfrac{P(B,C)}{P(C)} \\ P(A,B|C) = \dfrac{P(A,B,C)}{P(C)} \end{cases}$$

$$P(A|B,C) = \frac{P(A,B|C)\cancel{P(C)}}{P(B|C)\cancel{P(C)}}$$

Classificação de Estados

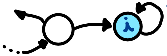
Classificação:

- alcançável: (chego em j começando i) Se existir um path
- comunicante: $i \leftrightarrow k \leftrightarrow j$
- transiente

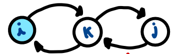
$i \to k \to j$ somente

i reachable j but j not reachable i

- absorvedor:

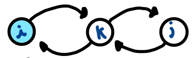


- recorrente: Se não é transiente



$i \to k \to j$
$j \to k \to i$

- Periódico:



$$\begin{cases} i \to k \to i & t=2 \\ i \to k \to j \to k \to i & t=4 \;(2t) \\ \text{se } t>1 \text{ e múltiplos de } t \;(\text{Ex. } t, 2t, 3t, \dots) \end{cases}$$

- não Periódico: se o estado não for periódico

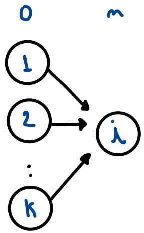
* Se todos os estados são comunicantes então a cadeia é irredutível

* Estados recorrentes aperiódicos são chamados de ergóticos

Distribuição de Probabilidade

$$\boxed{\pi_i(n) = P[X_n = i]}$$

$$\begin{aligned} P[X_n=i] = {} & P[X_n=i \mid X_0=1]P[X_0=1] + \\ & P[X_n=i \mid X_0=2]P[X_0=2] + \\ & \vdots \\ & P[X_n=i \mid X_0=K]P[X_0=K] \\ = {} & \sum_{K\in S} \underbrace{P[X_n=i \mid X_0=K]}_{P^n}\,\underbrace{P[X_0=K]}_{\pi_K(0)} \end{aligned}$$



$$\boxed{\pi(0)\,P^n = \pi(n)}$$

Probabilidade de Estados Estáveis

$\Big\{$ P é matriz de transição homogênea
z é o vetor de prob. de cada estado

Se $\boxed{zP = z}$ então z é estacionário

Dado P, a medida que vamos potencializando P (Ex. P^2, P^3, P^5, P^∞), percebemos que as linhas de P ficam iguais

Ou seja, é tudo igual independentemente de onde se começa. π não muda!

$$\boxed{\pi P = \pi}$$

balance Equation

Cadeias de Markov de tempo contínuo

i, j e K inteiros e $t \geq 0$, $s \geq 0$ e $0 \leq u \leq s$ nós temos:

$$\boxed{\begin{aligned} & P[X(s+t)=k \mid X(s)=j,\ X(u)=i] = \\ & P[X(s+t)=k \mid X(s)=j] \end{aligned}}$$

Se for uma cadeia homogênea: As prob. dependem apenas de τ.

$$P_{ij}(\tau) = P[X(s+\tau)=j \mid X(s)=i] = P[X(\tau)=j \mid X(0)=i]$$

Sabemos também que $\sum_{j\in S} p_{ij}(\tau) = 1$

Matriz de taxa

$$p_{ij}(t,t+\Delta t)\ \begin{cases} \xrightarrow{\Delta t \to 0} & \text{Prob. de transição} \downarrow \\ & P_{ii} \uparrow \ \text{Prop. de conservação} \\ \xrightarrow{\Delta t \to \infty} & \text{Prob de transição} \uparrow \\ & P_{ii} \downarrow \ \text{Prop. de conservação} \end{cases}$$

* Vamos associar $\Big\{$ Prob. = distância
taxa = velocidade

$$\boxed{q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t,t+\Delta t)}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\underset{\text{taxa}}{\Delta V} = \frac{\overset{\text{Prob}}{\Delta S}}{\underset{\text{tempo}}{\Delta t}}}$$

Matriz de taxa (cont.)

$$\begin{cases} p_{ij}(t, t+\Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t \\ 1 - p_{ii}(t, t+\Delta t) = \sum_j p_{ij}(t, t+\Delta t) \end{cases}$$

Se fizermos:

$$1 - p_{ii}(t, t+\Delta t) = \sum_j p_{ij}(t, t+\Delta t)$$

$$1 - q_{ii}(t)\Delta t = \sum_j q_{ij}(t)\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{q_{ii}(t)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\sum_j \frac{q_{ij}(t)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\underbrace{\cancel{\lim_{\Delta t \to 0}} \frac{1}{\Delta t}}_{0} - \cancel{\lim_{\Delta t \to 0}} q_{ii}(t) = \cancel{\lim_{\Delta t \to 0}} \sum_j q_{ij}(t)$$

$$\boxed{q_{ii}(t) = -\sum_j q_{ij}(t)}$$

Ou seja: $\begin{cases} q_{ii}(t) + \sum_j q_{ij}(t) = 0 \\ p_{ii}(t, t+\Delta t) + \sum_j p_{ij}(t, t+\Delta t) = 1 \end{cases}$

$$\boxed{Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{P(t, t+\Delta t) - I}{\Delta t}\right\}}$$

Equações de Chapman Kolmogorov

Se a cadeia não for homogênea:

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{\text{all } K} p_{iK}(s,u)\, p_{Kj}(u,t)$$

Se a cadeia for homogênea:

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{\text{all } K} p_{iK}(t)\, p_{Kj}(\Delta t)$$

Vamos tirar o Δt da equação:

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{\text{all } K} p_{iK}(t)\, p_{Kj}(\Delta t)$$

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{K \neq j} p_{iK}(t)\, p_{Kj}(\Delta t) + p_{ij}(t)\, p_{jj}(\Delta t)$$

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{K \neq j} \frac{p_{iK}(t)\, p_{Kj}(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{p_{ij}(t)\, p_{jj}(\Delta t)}{\Delta t} - \frac{p_{ij}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{K \neq j} p_{iK}(t)\underbrace{\frac{p_{Kj}(\Delta t)}{\Delta t}}_{q_{Kj}} + p_{ij}(t)\underbrace{\cancel{\left(\frac{p_{jj}(\Delta t) - 1}{\Delta t}\right)}}_{q_{jj}}$$

$$\boxed{\frac{d\, p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{\text{all } K} p_{iK}(t)\, q_{Kj}}$$

Forma matricial

$$\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\,Q}$$

Distribuição transiente

DTMC: $\pi = \pi P$

CTMC: $\boxed{\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t) Q}$

Estado Estacionário: (steady state)

Sabemos que no estado estacionário, não existe variação em π, ou seja

$\frac{d\pi(t)}{dt} = 0$, ou seja

$$\boxed{\pi(t) Q = 0}$$

Global Balance Equations

Sabemos que $\sum \pi = 1$, podemos escrever:

$$\sum_{all\ i} \pi_i q_{ij} = 0$$

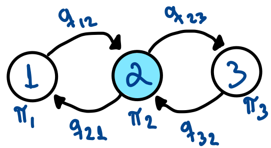
$$\sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} + \pi_j q_{jj} = 0$$

$$\sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij} = -\pi_j q_{jj}$$

$$\sum_{i, i \neq j} \pi_i q_{ij} = \pi_j \sum_{i, i \neq j} q_{ji}$$

total flow In — total flow out

Exemplo:



$$\pi_2 q_{23} + \pi_2 q_{21} = \pi_1 q_{12} + \pi_3 q_{32}$$

Soluções Numéricas para Cadeias de Markov

- método
  - direto → Gaussian Elimination
  - Iterativo
    - Power method
    - Gauss-Seidel method

Gaussian Elimination:

Steady State Homogênea CTMC:
$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum \pi = 1 \\ \pi \geq 0 \end{cases}$$

Resolver $Ax = b$

Então: $\underbrace{Q^T}_{A} \underbrace{\pi^T}_{x} = \underbrace{0}_{b}$

Power method

para DTMC, temos $\pi = \pi P$, podemos fazer $\pi \leftarrow$ random dado que $|\pi| = 1$ e

$$\pi^{k+1} = \pi^k P$$

e loopar até $|\pi^{k+1} - \pi^k| < e$ definido pelo usuário