

Εργασία 1^η

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 09/07/2025

Ταμπαρέσκου Ιωάννα, 4453

Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της πληροφοριακής εντροπίας και γενικότερα της πληροφοριακής δομής ενός κβαντικού συστήματος — συγκεκριμένα, ατόμων με διαφορετικό ατομικό αριθμό Z . Η βασική ιδέα είναι να διερευνηθεί πώς εξελίσσεται το πληροφοριακό περιεχόμενο ενός ατόμου όσο αυξάνεται το μέγεθός του, δηλαδή όσο προστίθενται ηλεκτρόνια και διαφοροποιείται η ηλεκτρονική του δομή.

Πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός των κυματοσυναρτήσεων της βασικής κατάστασης για τα άτομα από He ($Z=2$) έως και Ne ($Z=10$), που περιλαμβάνουν τη δεύτερη περίοδο του περιοδικού πίνακα. Από αυτές τις κυματοσυναρτήσεις προκύπτουν οι πυκνότητες πιθανότητας στον χώρο των θέσεων $\rho(r)$ και στον χώρο των ορμών $\eta(k)$, πάνω στις οποίες εφαρμόζονται διάφορα μέτρα πληροφορίας για να ποσοτικοποιηθεί η κατανομή και η "οργάνωση" των ηλεκτρονίων.

Κύριο μέτρο πληροφορίας που εξετάζεται είναι η πληροφοριακή εντροπία Shannon, η οποία έχει τη μορφή $S = S_r + S_k$, όπου S_r είναι η εντροπία στον χώρο των θέσεων και S_k στον χώρο των ορμών. Το άθροισμα αυτό εκφράζει την ολική πληροφοριακή αβεβαιότητα του ηλεκτρονικού νέφους. Όπως έχει προταθεί στη βιβλιογραφία, η συνολική πληροφοριακή εντροπία ακολουθεί μια καθολική λογαριθμική εξάρτηση από τον ατομικό αριθμό: $S = a + \ln Z$, και αποτελεί βασικό σημείο μελέτης και επαλήθευσης σε αυτή την εργασία [1].

Πέρα από την εντροπία Shannon, σημαντικά είναι και άλλα μέτρα πληροφορίας:

- Η ενέργεια πληροφορίας Onicescu (E) είναι ένα εναλλακτικό μέτρο της "συγκέντρωσης" μιας κατανομής. Όσο πιο συγκεντρωμένη είναι η πυκνότητα, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του E . Αντίστροφα, ένα πιο "εξαπλωμένο" νέφος έχει χαμηλότερη Onicescu ενέργεια. Μπορεί να συσχετιστεί με άλλες φυσικές ποσότητες, όπως το δυναμικό ιονισμού [1].
- Η πληροφορία Fisher (I) μετράει τοπικές διακυμάνσεις μιας κατανομής και θεωρείται ευαίσθητο μέτρο εντοπισμού της κβαντικής "δομής" ενός συστήματος. Ερμηνεύεται ως μέτρο "ευκρίνειας" ή "λεπτομέρειας" της κατανομής. Αντίθετα με την εντροπία Shannon, που αποτιμά τη συνολική διασπορά, η Fisher πληροφορία είναι εντοπισμένη και δίνει έμφαση στις περιοχές όπου αλλάζει γρήγορα η πυκνότητα. Στην παρούσα εργασία δεν γίνεται υπολογισμός της Fisher πληροφορίας, αλλά η αναφορά της είναι σημαντική, καθώς αποτελεί βασικό εργαλείο της θεωρίας πληροφορίας σε κβαντικά συστήματα [1].

Η εργασία περιλαμβάνει επίσης μελέτη της συσχέτισης αυτών των μέτρων με φυσικά μεγέθη όπως το δυναμικό ιονισμού, και εστιάζει στην παρατήρηση ότι τα άτομα με πλήρεις στιβάδες (όπως το He και το Ne) παρουσιάζουν τοπικά ελάχιστα στην πληροφοριακή εντροπία και την πολυπλοκότητα, κάτι που συμφωνεί με τη φυσική διαίσθηση — είναι δηλαδή πιο "απλά" και "συμμετρικά" συστήματα.

Μεθοδολογία

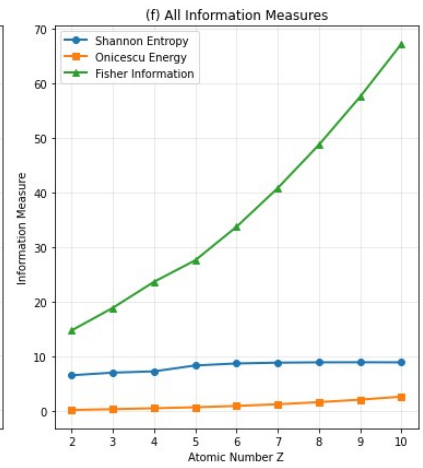
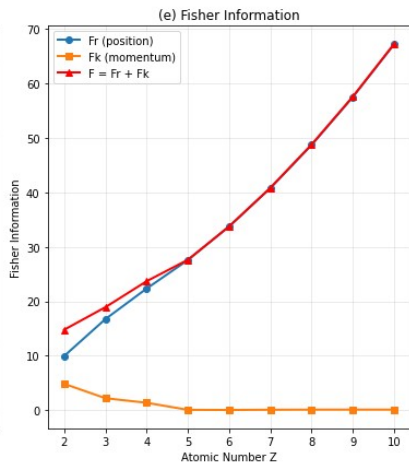
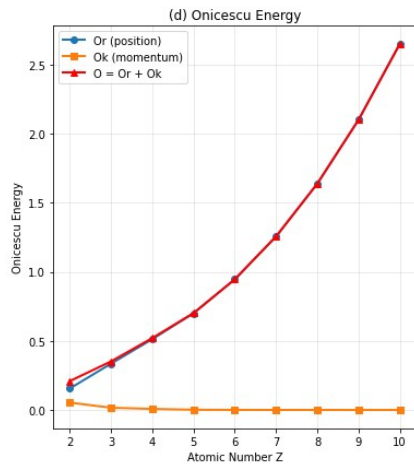
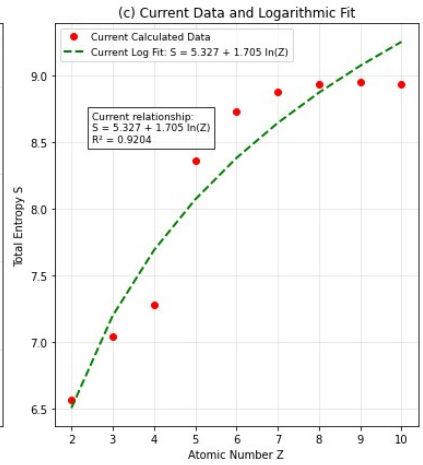
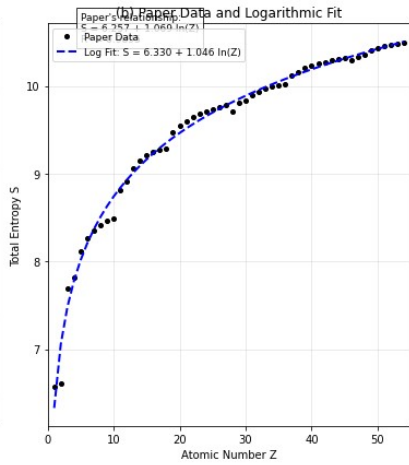
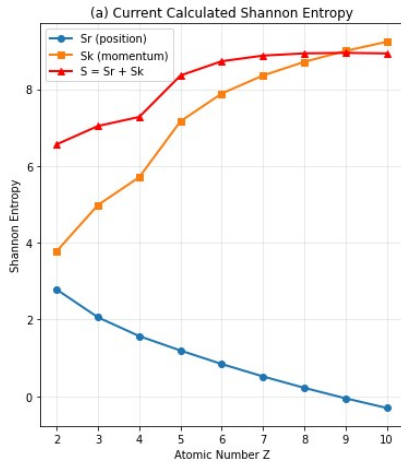
Η μελέτη βασίστηκε σε υπολογιστικό κώδικα σε Python, με στόχο να υπολογιστούν μέτρα πληροφορίας (Shannon, Onicescu, Fisher) για τα άτομα από $Z=2$ (He) μέχρι $Z=10$ (Ne). Για κάθε στοιχείο, κατασκευάστηκε η αντίστοιχη ηλεκτρονική διαμόρφωση και αντιστοιχίστηκαν τροχιακά τύπου STO (Slater - Type Orbitals) με συντελεστές και παραμέτρους ζήτα που βασίζονται σε τιμές από υπολογισμούς RHF. Οι συναρτήσεις πυκνότητας κατασκευάστηκαν τόσο στον χώρο των θέσεων όσο και στον χώρο των ορμών.

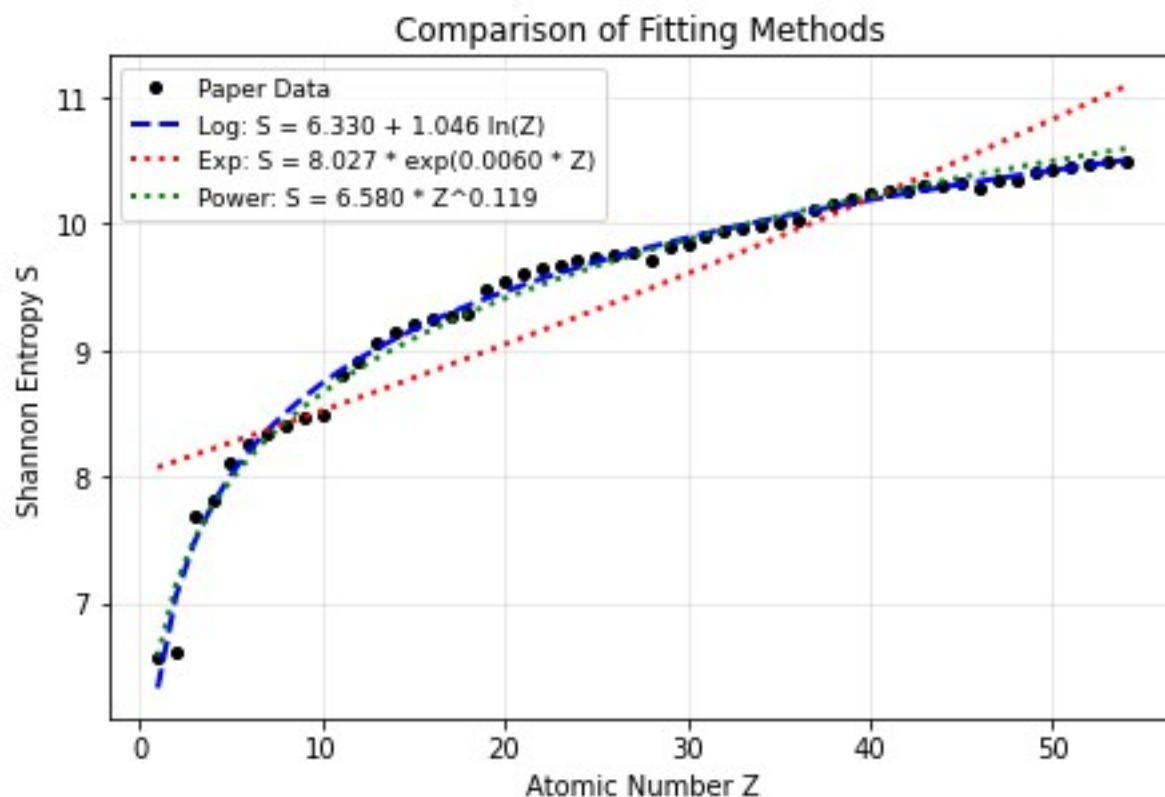
Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν με αριθμητική ολοκλήρωση (μέθοδος τραπεζοειδούς) τα εξής μεγέθη: η πληροφοριακή εντροπία Shannon σε θέση (S_r) και ορμή (S_k), η συνολική εντροπία $S = S_r + S_k$, η ενέργεια Onicescu (O_r , O_k), καθώς και η πληροφορία Fisher (F_r , F_k). Οι ενσωματώσεις έγιναν σε κατάλληλο πλέγμα τιμών για r και k στην περιοχή $[0, 20]$, με 1000 σημεία ανά χώρο, και ελέγχθηκε η κανονικοποίηση των πυκνοτήτων ώστε να είναι έγκυρα τα αποτελέσματα.

Αφού βγήκαν οι αριθμητικές τιμές, έγιναν γραφικές παραστάσεις για όλα τα μέτρα πληροφορίας συναρτήσει του Z . Επιπλέον, έγινε προσαρμογή της συνολικής εντροπίας $S(Z)$ σε λογαριθμική σχέση της μορφής $S = a + b \ln Z$, όπως προτείνει και το σχετικό άρθρο [1]. Τέλος, συγκρίθηκαν τα δικά μας αποτελέσματα με τα δεδομένα του άρθρου τόσο ποσοτικά (μέσω ποσοστιαίας απόκλισης), όσο και οπτικά (με κοινά plots), και δοκιμάστηκαν επιπλέον προσεγγιστικές συναρτήσεις όπως εκθετικές και power-law σχέσεις.

Αποτελέσματα

Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον κώδικα.





| Z | Sr | Sk | S | Or | Ok | Fr | Fk | O_total | F_total |
|----|---------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|---------|
| 2 | 2.7820 | 3.7845 | 6.5665 | 0.1555 | 0.0535 | 9.9225 | 4.8375 | 0.2089 | 14.7600 |
| 3 | 2.0579 | 4.9865 | 7.0445 | 0.3352 | 0.0163 | 16.7147 | 2.1885 | 0.3515 | 18.9032 |
| 4 | 1.5690 | 5.7112 | 7.2803 | 0.5125 | 0.0079 | 22.3325 | 1.3501 | 0.5204 | 23.6826 |
| 5 | 1.1933 | 7.1686 | 8.3618 | 0.6999 | 0.0018 | 27.5736 | 0.0520 | 0.7017 | 27.6256 |
| 6 | 0.8412 | 7.8912 | 8.7323 | 0.9454 | 0.0007 | 33.7355 | 0.0281 | 0.9461 | 33.7636 |
| 7 | 0.5175 | 8.3612 | 8.8788 | 1.2557 | 0.0004 | 40.7879 | 0.0711 | 1.2562 | 40.8590 |
| 8 | 0.2208 | 8.7160 | 8.9368 | 1.6383 | 0.0003 | 48.7210 | 0.0921 | 1.6385 | 48.8131 |
| 9 | -0.0520 | 9.0019 | 8.9500 | 2.1006 | 0.0002 | 57.5327 | 0.0971 | 2.1008 | 57.6298 |
| 10 | -0.3037 | 9.2389 | 8.9352 | 2.6503 | 0.0002 | 67.2242 | 0.0943 | 2.6505 | 67.3185 |

Paper's reported relationship: $S = 6.257 + 1.069 \ln(Z)$

Current fit to paper data: $S = 6.330 + 1.046 \ln(Z)$

Paper data $R^2 = 0.9895$

Current calculated relationship: $S = 5.327 + 1.705 \ln(Z)$

Current data $R^2 = 0.9204$

| Z | Paper S | Current S | Difference | % Error |
|---|---------|-----------|------------|---------|
|---|---------|-----------|------------|---------|

| | | | | |
|----|--------|--------|---------|---------|
| 2 | 6.6119 | 6.5665 | -0.0455 | -0.69 % |
| 3 | 7.6983 | 7.0445 | -0.6538 | -8.49 % |
| 4 | 7.8140 | 7.2803 | -0.5338 | -6.83 % |
| 5 | 8.1113 | 8.3618 | 0.2505 | 3.09 % |
| 6 | 8.2626 | 8.7323 | 0.4697 | 5.69 % |
| 7 | 8.3510 | 8.8788 | 0.5277 | 6.32 % |
| 8 | 8.4179 | 8.9368 | 0.5189 | 6.16 % |
| 9 | 8.4621 | 8.9500 | 0.4878 | 5.76 % |
| 10 | 8.4922 | 8.9352 | 0.4430 | 5.22 % |

Method 1 - Exponential: $S = a * \exp(b * Z)$

$S = 8.0274 * \exp(0.0060 * Z)$

$R^2 = 0.7871$

Method 2 - Power law: $S = a * Z^b$

$S = 6.5800 * Z^{0.1194}$

$R^2 = 0.9862$

Logarithmic: $R^2 = 0.9895$

Exponential: $R^2 = 0.7871$

Power law: $R^2 = 0.9862$

The best exponential relationship found is:

Power law form: $S = 6.5800 * Z^{0.1194}$

with $R^2 = 0.9862$

However, the logarithmic relationship from the paper:

$S = 6.330 + 1.046 \ln(Z)$ with $R^2 = 0.9895$

appears to provide the best fit to the data.

Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Οι υπολογισμοί και οι γραφικές παραστάσεις της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκαν με χρήση του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Python. Για την αριθμητική ολοκλήρωση, την ανάλυση δεδομένων και τη δημιουργία διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν οι βιβλιοθήκες NumPy και Matplotlib. Ο κώδικας εκτελέστηκε σε προσωπικό υπολογιστή χωρίς χρήση εξειδικευμένων υπολογιστικών πόρων. Η υπολογιστική επιβάρυνση ήταν χαμηλή, καθώς οι ενσωματώσεις περιορίστηκαν σε πλέγματα 1000 σημείων στην περιοχή [0, 20], καθιστώντας το πρόβλημα ελαφρύ από πλευράς επεξεργασίας και μνήμης.

Από τα αποτελέσματα φαίνεται καθαρά ότι η ολική εντροπία Shannon $S = S_r + S_k$ αυξάνεται με τον ατομικό αριθμό Z . Ο όρος S_r (θέσεις) μειώνεται όσο αυξάνεται το Z , ενώ ο S_k (ορμές) αυξάνεται, και αυτό βγάζει νόημα γιατί το ηλεκτρονικό νέφος "μαζεύεται" χωρικά λόγω ισχυρότερου πυρηνικού φορτίου, αλλά εξαπλώνεται αντίστοιχα στον χώρο των ορμών. Συνολικά, η τιμή του SS σταθεροποιείται γύρω από το 9 για $Z > 6$.

Όταν συγκρίνουμε τα δικά μας αποτελέσματα με αυτά του άρθρου, υπάρχει γενικά καλή συμφωνία. Για He ($Z=2$) η διαφορά είναι μικρή ($\sim 0.7\%$), ενώ η μεγαλύτερη απόκλιση εμφανίζεται στο Li ($Z=3$), περίπου -8.5% . Από εκεί και πέρα, οι τιμές μας πλησιάζουν όλο και περισσότερο τις τιμές του άρθρου και για $Z=5-10$ η διαφορά είναι γύρω στο $\pm 5\%$. Αυτό είναι αποδεκτό, λαμβάνοντας υπόψη ότι χρησιμοποιήθηκαν απλοποιημένα STO τροχιακά και κάποιες προσεγγίσεις στη ζήτα.

Για τα υπόλοιπα μέτρα: η Onicescu ενέργεια στον χώρο θέσεων αυξάνεται με το Z , κάτι που δείχνει πιο συμπυκνωμένες κατανομές. Στον χώρο των ορμών οι τιμές είναι σχεδόν μηδενικές (ειδικά για $Z>6$), και δεν συμβάλλουν ουσιαστικά στο συνολικό μέτρο. Η πληροφορία Fisher αυξάνεται πολύ γρήγορα με το Z , με πιο απότομη αύξηση από τα άλλα μέτρα. Το ίδιο επιβεβαιώνεται και στα αντίστοιχα plots (εικόνες (e) και (f)), όπου η καμπύλη Fisher ξεχωρίζει με απότομη κλίση.

Όσον αφορά τις συναρτήσεις προσαρμογής, δοκιμάστηκαν τρεις μορφές: λογαριθμική, εκθετική και power-law. Η λογαριθμική προσαρμογή του άρθρου $S = 6.330 + 1.046 \ln Z$ είχε το καλύτερο R^2 (0.9895), ενώ το power-law μοντέλο ήταν επίσης καλό ($R^2 = 0.9862$). Το καθαρά εκθετικό μοντέλο δεν περιγράφει σωστά την καμπύλη ($R^2 = 0.7871$), οπότε απορρίπτεται. Τα δικά μας δεδομένα προσαρμόστηκαν επίσης με λογαριθμική σχέση, αλλά είχαν μικρότερο R^2 (0.9204), κυρίως λόγω απόκλισης στις πρώτες τιμές.

Συμπεράσματα

- Η πληροφοριακή εντροπία S αυξάνεται λογαριθμικά με το Z , και αυτό επιβεβαιώθηκε τόσο από τα δεδομένα του άρθρου όσο και από τους δικούς μας υπολογισμούς.
- Ο υπολογισμός μέσω STO κυματοσυναρτήσεων δίνει τιμές κοντά στις βιβλιογραφικές, με μέσο σφάλμα $\sim 5\%$ για τα στοιχεία της 2ης περιόδου.
- Από τα τρία μέτρα πληροφορίας (Shannon, Onicescu, Fisher), η Fisher πληροφορία είναι αυτή που αυξάνεται πιο έντονα με το Z .
- Η λογαριθμική σχέση δίνει την καλύτερη προσαρμογή (με βάση το R^2), σε σχέση με τις εκθετικές ή power-law συναρτήσεις.
- Τα plots βοηθούν να φανεί ξεκάθαρα η συμπεριφορά κάθε μέτρου και επιβεβαιώνουν ότι η πληροφοριακή πολυπλοκότητα των ατόμων αυξάνεται με την προσθήκη ηλεκτρονίων.

Βιβλιογραφία

- [1] K. Ch. Chatzisavvas, Ch. C. Moustakidis, and C. P. Panos, *Information entropy, information distances, and complexity in atoms*, The Journal of Chemical Physics (2005). <http://dx.doi.org/10.1063/1.2121610>