Techniques d'apprentissage

IFT603

Machines à vecteurs de support

Par
Pierre-Marc Jodoin
/
Hugo Larochelle

Méthode à Noyau

Au chapitre précédent, nous avons vu les méthodes à noyau

- Entraînement

$$\vec{a} = (K + \lambda I_N)^{-1}\vec{t}$$

Matrice de Gram

- Prédiction

$$y(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{N} k(\vec{x}, \vec{x}_n) a_n$$

Noyau

Malheureusement, on doit toujours avoir accès aux données d'entraînement

Comparaison entre $\vec{x}$ et toutes les données d'entraînement $\vec{x}_n$ $\forall$n

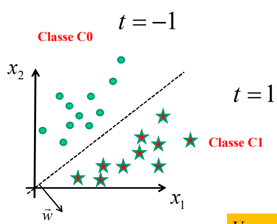
Machine à vecteur de Support

(*support vector machine*, SVM en anglais)

- Algorithme principalement dédié à la classification binaire
- Après l'entraînement, SVM seulement un **sous-ensemble des données d'entraînement**
- Plusieurs des a_n vont être à 0

Classification linéaire

RAPPEL



$$y_{\vec{w}}(\vec{x}) = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2$$
$$= w_0 + \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{x}$$

Un problème est **linéairement séparable** si on peut séparer les éléments de chaque classe avec un **hyperplan**.

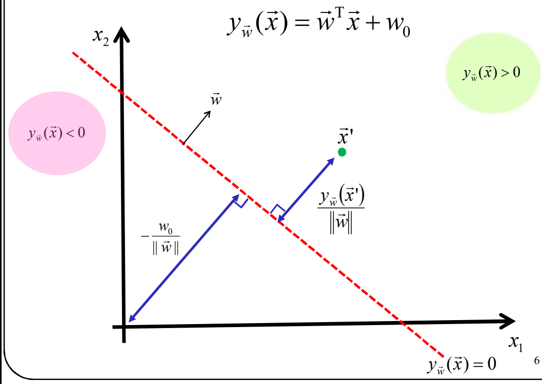
4

Au cœur des machines à vecteurs de support figure la notion de **marge**.

5

Marge

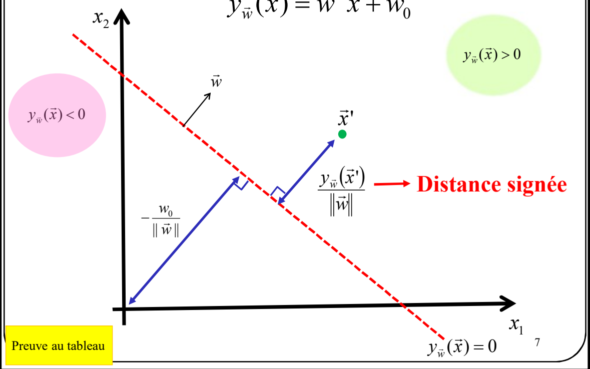
$$y_{\vec{w}}(\vec{x}) = \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{x} + w_0$$



6

Marge

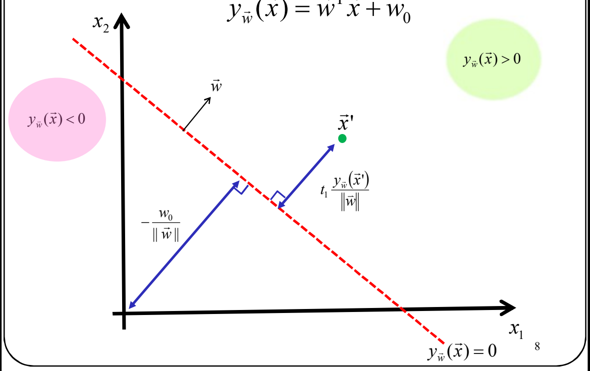
$$y_{\vec{w}}(\vec{x}) = \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{x} + w_0$$



7

Marge

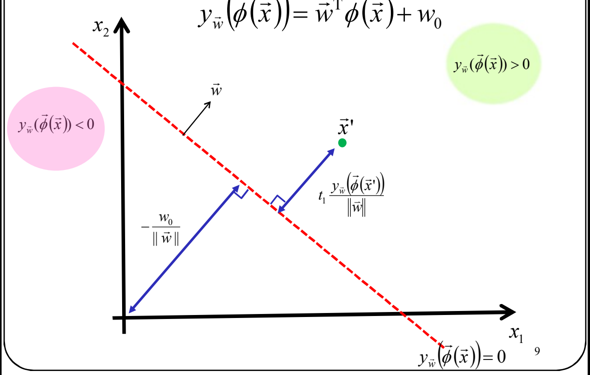
$$y_{\vec{w}}(\vec{x}) = \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{x} + w_0$$



8

Pour être général, on va considérer $\vec{\phi}(\vec{x})$

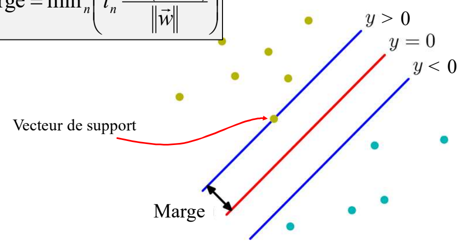
$$y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x})\right) = \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}) + w_0$$



9

La **marge** est la plus **petite distance** entre la surface de séparation et les données d'entraînement

$$\text{marge} = \min_n \left(t_n \frac{y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)}{\|\vec{w}\|} \right)$$



Classifieur à marge maximale

Un SVM cherche les paramètres $\vec{w}^{\mathrm{T}}$ et w_0 de l'hyperplan qui **maximisent la marge**

$$\begin{aligned}
&\arg\max_{\vec{w},w_0} \{\text{marge}(\vec{w}, w_0)\} \\
&= \arg\max_{\vec{w},w_0} \left\{ \min_n \left(t_n \frac{y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)}{\|\vec{w}\|} \right) \right\} \\
&= \arg\max_{\vec{w},w_0} \left\{ \min_n \left(t_n \frac{\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0}{\|\vec{w}\|} \right) \right\} \\
&= \arg\max_{\vec{w},w_0} \left\{ \frac{1}{\|\vec{w}\|} \min_n \left(t_n \left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0 \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

11

Problème!

Il existe une **infinité de solutions** au problème de la page précédente!

La **marge est la même** si on multiplie $\vec{w}^{\mathrm{T}}$ et w_0 par une **constante non nulle** (a)

$$t_n \frac{\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0}{\|\vec{w}\|} = t_n \frac{\cancel{a}\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + \cancel{a}w_0}{\cancel{a}\|\vec{w}\|}$$

12

Solution!

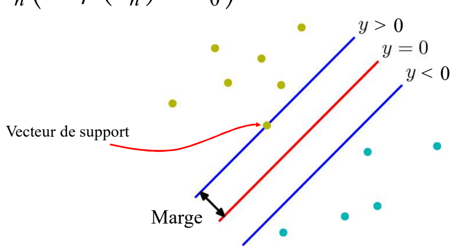
Contraindre la solution pour que les vecteurs de support

$$t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right) = t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0\right) = 1$$

13

Sans contrainte

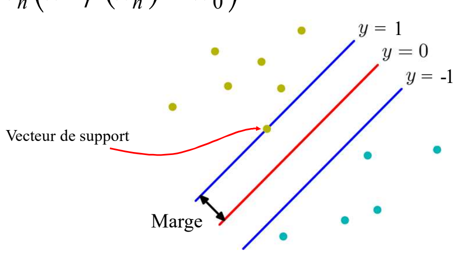
$$t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0\right) > 0$$



14

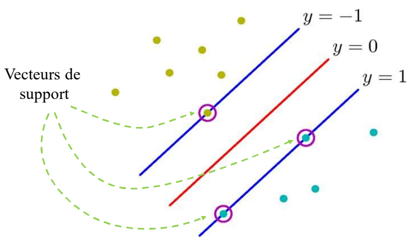
Avec contrainte

$$t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0\right) > 1$$



15

Exemple de résultat au terme d'une optimisation SVM



16

En supposant que l'ensemble d'entraînement est linéairement séparable, on a :

$$\arg\max_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{\|\vec{w}\|}\min_n\left(t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\right)\right\}$$

2 façons de résoudre ce problème :

- **Approche primale**
- **Approche duale**

17

18

Approche primale

$$\arg\max_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{\|\vec{w}\|}\underbrace{\cancel{\min_n\left(t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\right)}}_{=1}\right\}$$

19

Approche primale

$$\arg\max_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{\|\vec{w}\|}\underbrace{\cancel{\min_n\left(t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\right)}}_{=1}\right\}$$

Équivalent à

$$\boxed{\begin{array}{l}\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}\\ \text{t.q. } t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\geq 1 \quad \forall n\end{array}}$$

Ce problème d'optimisation est un **programme quadratique** pour lequel il existe de nombreuses bibliothèques informatiques

Approche **duale**: inclure les noyaux dans SVM

21

Approche duale

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}$$
$$\text{t.q. } t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\geq 1 \quad \forall n$$

On peut enlever les contraintes en introduisant les **multiplicateurs de Lagrange** (voir Bishop, Annexe E)

$$L(\vec{w},w_0,\vec{a})=\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2-\sum_{n=1}^{N}a_n\left\{t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)-1\right\} \quad \text{t.q } a_n\geq 0$$

Approche duale

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}$$
$$\text{t.q. } t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\geq 1 \quad \forall n$$

On peut enlever les contraintes en introduisant les **multiplicateurs de Lagrange** (voir Bishop, Annexe E)

$$L(\vec{w},w_0,\vec{a})=\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2-\sum_{n=1}^{N}a_n\left\{t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)-1\right\} \quad \text{t.q } a_n\geq 0$$

$$\boxed{L(\vec{w},w_0,\vec{a})=\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2-\sum_{n=1}^{N}a_n\left\{t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)-1\right\} \quad \text{t.q } a_n\geq 0}$$

En annulant les dérivées $\frac{\partial L(\vec{w},w_0,\vec{a})}{\partial \vec{w}}=0$ $\frac{\partial L(\vec{w},w_0,\vec{a})}{\partial w_0}=0$

$$\vec{w}=\sum_{n=1}^{N}a_n t_n\vec{\phi}(\vec{x}_n) \qquad \sum_{n=1}^{N}a_n t_n=0$$

$$L(\vec{w}, w_0, \vec{a}) = \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 - \sum_{n=1}^{N} a_n \left\{ t_n \left(\vec{w}^{\mathrm{T}} \vec{\phi}(\vec{x}_n) + w_0 \right) - 1 \right\} \quad \text{t.q } a_n \geq 0$$

En annulant les dérivées $\frac{\partial L(\vec{w}, w_0, \vec{a})}{\partial \vec{w}} = 0$ $\frac{\partial L(\vec{w}, w_0, \vec{a})}{\partial w_0} = 0$

$$\underbrace{\vec{w} = \sum_{n=1}^{N} a_n t_n \vec{\phi}(\vec{x}_n)} \qquad \sum_{n=1}^{N} a_n t_n = 0$$

on peut exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire des entrées

On peut alors réécrire $L(\vec{w}, w_0, \vec{a})$ comme suit

$$\tilde{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m \overbrace{k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)}^{\phi(\vec{x}_n)^{\mathrm{T}} \phi(\vec{x}_m)}$$

où on a toujours $a_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{N} a_n t_n = 0$

On peut alors réécrire $L(\vec{w}, w_0, \vec{a})$ comme suit

$$\tilde{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m \overbrace{k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)}^{\phi(\vec{x}_n)^{\mathrm{T}} \phi(\vec{x}_m)}$$

où on a toujours $a_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{N} a_n t_n = 0$

Solution par **programme quadratique**

↳ Représentation **duale** avec **l'astuce du noyau**

$$\tilde{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m \overbrace{k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)}^{\phi(\vec{x}_n)^{\mathrm{T}}\phi(\vec{x}_m)}$$

On peut démontrer que la solution à $\tilde{L}(\vec{a})$ satisfait

$$\left.\begin{array}{r} a_n \geq 0 \\ t_n y(\vec{x}_n) - 1 \geq 0 \\ a_n \left\{ t_n y(\vec{x}_n) - 1 \right\} = 0 \end{array}\right\} \text{Implique} \left\{ \begin{array}{c} t_n y(\vec{x}_n) = 1 \text{ et } a_n \geq 0 \\ \text{ou} \\ t_n y(\vec{x}_n) > 1 \text{ et } a_n = 0 \end{array}\right.$$

Lié aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
(voir Bishop, annexe E)

28

$$\tilde{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m \overbrace{k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)}^{\phi(\vec{x}_n)^{\mathrm{T}}\phi(\vec{x}_m)}$$

On peut démontrer que la solution à $\tilde{L}(\vec{a})$ satisfait

Vecteurs de support

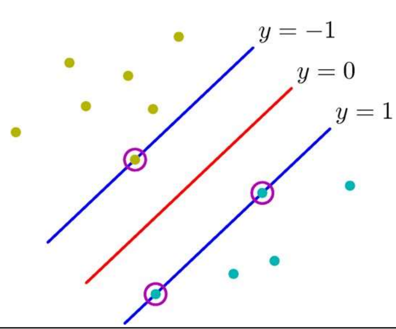
$$\left.\begin{array}{r} a_n \geq 0 \\ t_n y(\vec{x}_n) - 1 \geq 0 \\ a_n \left\{ t_n y(\vec{x}_n) - 1 \right\} = 0 \end{array}\right\} \text{Implique} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{t_n y(\vec{x}_n) = 1 \text{ et } a_n \geq 0} \\ \text{ou} \\ t_n y(\vec{x}_n) > 1 \text{ et } a_n = 0 \end{array}\right.$$

Lié aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
(voir Bishop, annexe E)

29

Exemple

$t_n y(\vec{x}_n) = 1$ et $a_n \geq 0$ Vecteurs de support

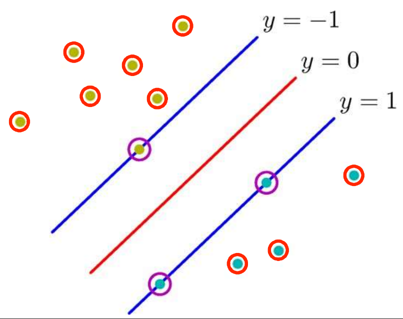


30

Exemple

- $t_n y(\vec{x}_n) = 1$ et $a_n \geq 0$
- $t_n y(\vec{x}_n) > 1$ et $a_n = 0$

Vecteurs de support

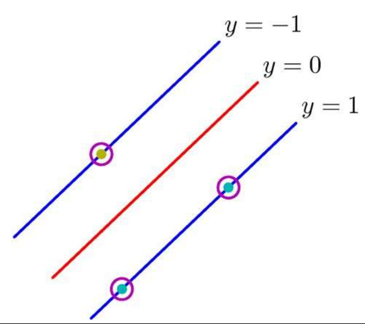


31

Exemple

- $t_n y(\vec{x}_n) = 1$ et $a_n \geq 0$
- $t_n y(\vec{x}_n) > 1$ et $a_n = 0$

Vecteurs de support

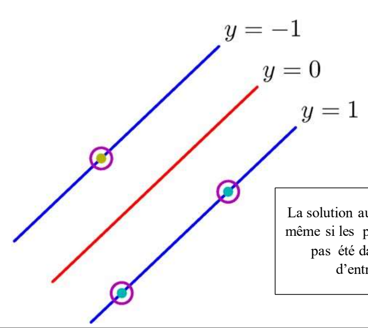


32

Exemple

- $t_n y(\vec{x}_n) = 1$ et $a_n \geq 0$
- $t_n y(\vec{x}_n) > 1$ et $a_n = 0$

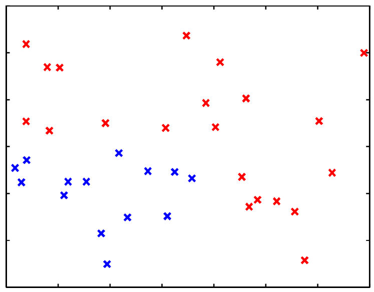
Vecteurs de support



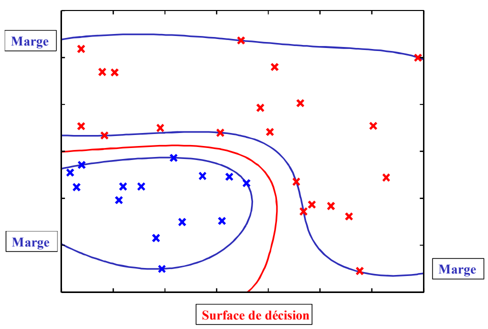
La solution aurait été identique, même si les points O n'avaient pas été dans l'ensemble d'entraînement!

33

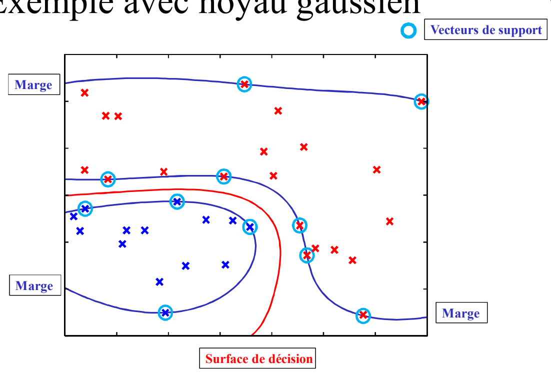
Exemple avec noyau gaussien



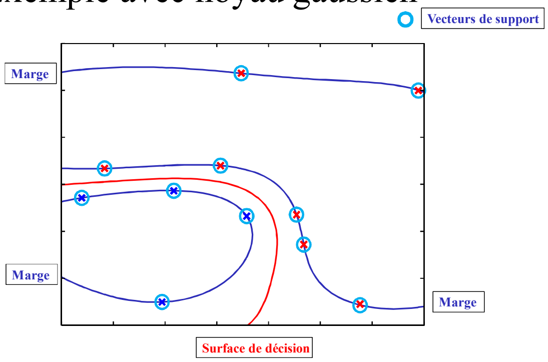
Exemple avec noyau gaussien



Exemple avec noyau gaussien



Exemple avec noyau gaussien



Prédiction avec la représentation duale

$$
\begin{aligned}
y_w\left(\vec{\phi}(\vec{x})\right) &= \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}) + w_0 \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n t_n \vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)^T \vec{\phi}(\vec{x}) + w_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(a_n t_n \vec{\phi}(\vec{x}_n)^T \vec{\phi}(\vec{x})\right) + w_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(a_n t_n k(\vec{x}_n, \vec{x})\right) + w_0
\end{aligned}
$$

Seuls les vecteurs de support vont voter!

Noyau

38

Prédiction avec la représentation duale

$$
\begin{aligned}
y_w\left(\vec{\phi}(\vec{x})\right) &= \vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}) + w_0 \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n t_n \vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)^T \vec{\phi}(\vec{x}) + w_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(a_n t_n \vec{\phi}(\vec{x}_n)^T \vec{\phi}(\vec{x})\right) + w_0 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(a_n t_n k(\vec{x}_n, \vec{x})\right) + w_0
\end{aligned}
$$

Voir équation 7.18 pour calculer w_0

39

40

Données non séparables

41

SVM : Approche primale

RAPPEL

$$\arg\max_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{\|\vec{w}\|}\underbrace{\cancel{\min_n\left(t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\right)}}_{=1}\right\}$$

Équivalent à

$$\boxed{\begin{array}{l}\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}\\ \text{t.q. } t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\geq 1 \quad \forall n\end{array}}$$

Ce problème d'optimisation est un **programme quadratique** pour lequel il existe de nombreuses bibliothèques

SVM : Approche primale

RAPPEL

$$\arg\max_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{\|\vec{w}\|}\cancel{\min_n\left(t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\vec{\phi}(\vec{x}_n)+w_0\right)\right)}\right\}$$

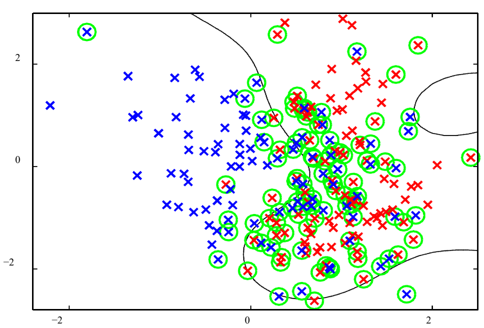
Que faire s'il y a :

- **Des données aberrantes dans l'ensemble d'entraînement?**
- **Si les données des 2 classes se chevauchent?**

$$\text{t.q. } t_n\left(\vec{w}^{\mathrm{T}}\phi(\vec{x}_n)+w_0\right)\geq 1 \quad \forall n$$

Ce problème d'optimisation est un **programme quadratique** pour lequel il existe de nombreuses bibliothèques

Exemple de classes qui se chevauchent



Variables de ressort (*slack variables*)

Permettre que certains exemples ne respectent pas la contrainte de marge

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}$$
$$\text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1 \quad \forall n$$

Devient

$$\arg\min_{\vec{w},w_0,\xi}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}+C\sum_{n=1}^{N}\xi_n$$
$$\text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1-\xi_n$$
$$\forall n, \xi_n \geq 0$$

Les **variables de ressorts** ξ_n correspondent aux violations des contraintes de marge.

Variables de ressort (*slack variables*)

On va permettre que les exemples ne respectent pas la contrainte de marge

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1 \quad \forall n$$

Devient

$$\arg\min_{\vec{w},w_0,\boxed{\vec{\xi}}}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}+C\boxed{\sum_{n=1}^{N}\xi_n} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1-\boxed{\xi_n} \quad \forall n, \boxed{\xi_n}\geq 0$$

Les **variables de ressorts** ξ_n correspondent aux violations des contraintes de marge.

Variables de ressort (*slack variables*)

On va permettre que les exemples ne respectent pas la contrainte de marge

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1 \quad \forall n$$

Devient

$$\arg\min_{\vec{w},w_0,\boxed{\vec{\xi}}}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}+C\boxed{\sum_{n=1}^{N}\xi_n} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1-\boxed{\xi_n} \quad \forall n, \boxed{\xi_n}\geq 0$$

Si ξ_n est plus grand que 1, la donnée est alors mal classée.

Variables de ressort (*slack variables*)

On va permettre que les exemples ne respectent pas la contrainte de marge

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1 \quad \forall n$$

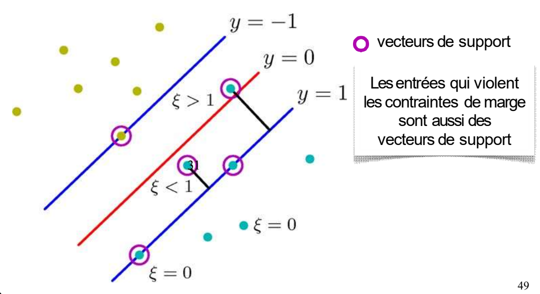
Devient

$$\arg\min_{\vec{w},w_0,\boxed{\vec{\xi}}}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}+C\boxed{\sum_{n=1}^{N}\xi_n} \quad \text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}\left(\vec{\phi}(\vec{x}_n)\right)\geq 1-\boxed{\xi_n} \quad \forall n, \boxed{\xi_n}\geq 0$$

La constante $C > 0$ est un hyper-paramètre

- Plus C est petit, plus on permet des données mal classées

Exemple (variables de ressort)



49

Variables de ressort – représentation **duale**

On peut montrer que la représentation duale demeure la même que sans variable de ressort

$$\tilde{L}(\vec{a}) = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)$$

mais avec les contraintes $\boxed{C \geq} a_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{N} a_n t_n = 0$

Reste un problème de **programmation quadratique**

50

Variables de ressort – représentation **primale**

$$\begin{aligned}
&\arg\min_{\vec{w}, w_0, \xi} \left\{ \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 \right\} + C\sum_{n=1}^{N} \xi_n \\
&\text{t.q. } t_n y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) \geq 1 - \xi_n \\
&\qquad\qquad \forall n, \xi_n \geq 0
\end{aligned}$$

51

Variables de ressort – représentation **primale**

$$\arg\min_{\vec{w},w_0,\xi}\left\{\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2\right\}+C\sum_{n=1}^{N}\xi_n$$

$$\text{t.q. } \xi_n \geq 1-t_n y_{\vec{w}}\left(\phi(\vec{x}_n)\right)$$

$$\forall n, \xi_n \geq 0$$

52

Variables de ressort – représentation primale

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2+C\sum_{n=1}^{N}\max\left(0,1-t_n y_{\vec{w}}\left(\phi(\vec{x}_n)\right)\right)$$

Forme similaire à celle présentée au chapitre sur la segmentation linéaire!

53

Même forme qu'au chapitre 4!

Constante

$$\arg\min_{\vec{w},w_0}\sum_{n=1}^{N}\max\left(0,1-t_n y_{\vec{w}}\left(\phi(\vec{x}_n)\right)\right)+\lambda\|\vec{w}\|^2$$

$(\lambda = 1/2C)$

Fonction de perte (*Hinge loss*)

Régularisation

Solution obtenue par **descente de gradient**

54

Résumé (SVM sans noyau - primal)

- **Modèle:** $y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) = \vec{w}^T \phi(\vec{x}_n) + w_0$
- **Problème** : $\boxed{\begin{array}{l} \arg\min_{\vec{w},w_0,\xi} \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum_{n=1}^{N}\xi_n \\ \text{t.q. } \xi_n \geq 1 - t_n y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) \\ \qquad\qquad \forall n, \xi_n \geq 0 \end{array}}$
- **Hyper-paramètres**: C
- **Entraînement** : résoudre programme quadratique

Résumé (SVM sans noyau - primal)

- **Modèle:** $y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) = \vec{w}^T \phi(\vec{x}_n) + w_0$
- **Problème** : $\boxed{\begin{array}{l} \arg\min_{\vec{w},w_0,\xi} \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum_{n=1}^{N}\xi_n \\ \text{t.q. } \xi_n \geq 1 - t_n y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) \\ \qquad\qquad \forall n, \xi_n \geq 0 \end{array}}$
- **Hyper-paramètres**: C
- **Entraînement** : descente de gradient

$$\arg\min_{\vec{w},w_0} \sum_{n=1}^{N} \max(0, 1 - t_n y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n))) + \lambda\|\vec{w}\|^2$$

Résumé (SVM avec noyau - dual)

- **Modèle:** $y_{\vec{w}}(\phi(\vec{x}_n)) = \vec{w}^T \phi(\vec{x}_n) + w_0$
- **Problème** : $\arg\min_{\vec{a}} \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m t_n t_m k(\vec{x}_n, \vec{x}_m)$

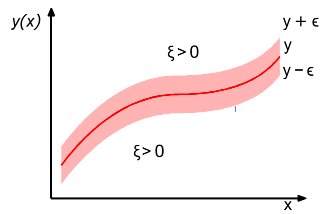
  t.q. $C \geq a_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{N} a_n t_n = 0$ $\boxed{\text{Plusieurs des } a_n \text{ seront à 0}}$
- **Hyper-paramètres**: C
- **Entraînement** : programme quadratique
- **Prédiction**: $y(\vec{x}_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n t_n k(\vec{x}_n, \vec{x}) + w_0$

Seules les vecteurs de support vont voter!

Noyau

Peut s'étendre à la régression

Voir section 7.1.4



58