TD – EDP

▷ **Exercice 1.**

1.1. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[x-h_0, x+h_0]$, avec $h_0 > 0$. Montrer que $\forall h \in]0, h_0], \exists \xi \in]x-h, x+h[$ tel que

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi)$$

En déduire l'ordre de consistance de l'approximation de $u''(x)$.

▷ **Exercice 2.** Soit un domaine 2D rectangulaire $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, avec $(L_1, L_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On s'intéresse à l'équation du Laplacien 2D sur ce domaine :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \nu_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = c(x), \quad \forall x \in]0, L_1[\times]0, L_2[\\ \\ u(x_1, 0) = u(x_1, L_2) = 0, \quad \forall x_1 \in]0, L_1[\\ u(0, x_2) = u(L_1, x_2) = 0, \quad \forall x_2 \in]0, L_2[\end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ les coefficients de diffusivité dans les directions x_1 et x_2, et c continue sur Ω.

2.1. On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de Ω, de pas constants h_1 et h_2 dans chacune des deux directions. Soit $(x_{i,j})_{i=0:N_1+1, j=0:N_2+1}$ les points de discrétisation du maillage. On approximme les dérivées partielles secondes par un schéma centré d'ordre 2. Donner le schéma numérique correspondant.

▷ **Exercice 3.** Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $(c, f) \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, et $\forall x \in [0,1], c(x) \geq 0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1]$, de pas constant h. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, les points de discrétisation du maillage.

3.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de u, écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \tag{3}$$

avec $u_h = (u_i)_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Préciser u_0 et u_{N+1} satisfaisant les conditions aux limites du problème.

3.2. Montrer que la matrice A_h est symétrique définie positive. Que pouvez-vous conclure pour le système (3) ?

3.3. On suppose $u \in \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$. Soit $\xi_h(u) = A_h\Pi_h(u) - b_h$ l'erreur de consistance du schéma (3), avec $\Pi_h(u) = (u(x_i))_{i=1:N} \in \mathbb{R}^N$. Montrer que

$$\|\xi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y\in[0,1]} |u^{(4)}(y)|,$$

avec $\forall y \in \mathbb{R}^N, \|y\|_\infty = \sup\limits_{i\in\{1,\cdots,N\}} |y_i|$.

En conclure quant à l'ordre de consistance du schéma (3) pour la norme infinie.

3.4. On suppose toujours $u \in \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|u_h - \Pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y\in[0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

On admettra que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$.

En conclure quant à la convergence du schéma (3) pour la norme infinie.

▷ **Exercice 4.** Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{4}$$

avec $(c,f) \in \mathcal{C}^0([0,1]) \times \mathcal{C}^0([0,1])$, et c telle que $\exists c_0 > 0, \forall x \in [0,1], c(x) \geq c_0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1]$, de pas constant h. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, les points de discrétisation du maillage.

4.1. En utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde de u, et des schémas décentrés d'ordre 1 pour sa dérivée première, écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire

$$A_h u_h = b_h, \tag{5}$$

avec $u_h = (u_i)_{i=0:N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$.

Par la suite, on admet que le système admet une unique solution.

4.2. On suppose $u \in \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$. Soit $\xi_h(u)$ l'erreur de consistance du schéma (5). Montrer que $\forall h_0 > 0, \exists C > 0$ tel que

$$\forall h \in]0,h_0], \quad \|\xi_h(u)\|_\infty \leq Ch.$$

En conclure quant à l'ordre de consistence du schéma (5) pour la norme infinie.

4.3. Proposer une stratégie permettant d'obtenir un schéma d'ordre 2 pour la norme infinie.

▷ **Exercice 5.** Soit $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,1[. \end{cases} \tag{6}$$

avec f continue sur $[0,1] \times [0,T]$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1] \times [0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, et $(t_n)_{n=0:M+1}$, avec $t_0 = 0$ et $t_{M+1} = T$, les points de discrétisation du maillage.

On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "saute-mouton", pour la norme $\|.\|_h$ sur $\mathbb{R}^N$ (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1:N, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \tag{7}$$

5.1. On suppose que le vecteur $(u_i^1)_{i=1:N}$ a été obtenus avec un schéma consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$. Montrer que le schéma saute-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$.

5.2. Etude de stabilité du schéma pour la norme $\|.\|_h$.

a) Montrer que ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1:M, \quad Z_h^{n+1} = M_h Z_h^n + 2\Delta t C^n \tag{8}$$

en précisant Z_h^n, M_h, C^n.

b) Montrer que $\rho(M_h) > 1$. Conclure quant à la stabilité du schéma pour la norme $\|.\|_h$.

▷ **Exercice 6.** Soit $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,1[. \end{cases} \tag{9}$$

avec f continue sur $[0,1] \times [0,T]$.

On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité du schéma "implicite", pour la norme infinie sur $\mathbb{R}^N$ (espace). Celui-ci s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall i = 1:N, \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n). \tag{10}$$

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1] \times [0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, et $(t_n)_{n=0:M+1}$, avec $t_0 = 0$ et $t_{M+1} = T$, les points de discrétisation du maillage.

6.1. Ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 1 : M+1, \quad B_h U_h^n = U_h^{n-1} + \Delta t F^n \tag{11}$$

Rappeler ce que valent U_h^n, B_h, F^n et U_h^0. On notera $c = \frac{\Delta t}{h^2}$.

6.2. Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme infinie.

6.3. Etude de stabilité du schéma pour la norme infinie.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrer que $\forall i = 1 : N, [B_h x]_i \geq 0 \Rightarrow x_i \geq 0$.
En déduire que $[B_h^{-1}]_{i,j} \geq 0, \quad \forall i = 1 : N, \forall j = 1 : N$.

b) Montrer que $\|B_h^{-1}\|_\infty \leq 1$.

c) En déduire que le schéma est inconditionnellement stable pour la norme infinie.

6.4. Conclure quant à la convergence du schéma pour la norme infinie.