TD 3 – Intégrales de fonctions mesurables positives (suite)

▷ **Exercice 1.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et de réunion $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive. Montrer que

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu.$$

▷ **Exercice 2.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

2.1. Montrer que :

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

2.2. Montrer que si $\exists\, N \in \mathbb{N}$, t.q. $\displaystyle\int_E f_N \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

▷ **Exercice 3.** Soit $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$ un espace mesuré avec λ la mesure de Lebesgue. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f_n \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & f_n(x) := \dfrac{n\, e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2\, x^2}} \end{array}$$

mesurable de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \,\mathrm{d}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Indication : on admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{e^{-x}}{x} \,\mathrm{d}\lambda = +\infty$.

▷ **Exercice 4.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0\,,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}} x & \text{si} \quad x \in [0\,, \dfrac{1}{n}], \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]\dfrac{1}{n}\,, 1]. \end{cases}$$

4.1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0\,,1]$.

4.2. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une fonction f à préciser.

4.3. Calculer $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu$.