Logique des Propositions

Objectifs

- Syntaxe
- Exploitation pour la modélisation
- Sémantique
- Déduction naturelle

Syntaxe

Vision algébrique

- Notons Φ l'ensemble dénombrable des formules bien formées de logique des propositions
- Eléments lexicaux :
  - Propositions (variables propositionnelles) : mots, phrases, ...(ensemble $\mathcal{P}$ dénombrables)
  - Opérateurs : $\perp, \top, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Contrôle structure (associativité, priorité) : (,)
- Eléments grammaticaux :
  - Constantes (Opérateurs zéro-aire) : Propositions, $\top$ (Té) et $\perp$ (Anti-Té)
  - Opérateur unaire : $\neg$ (Négation)
  - Opérateurs binaires associatifs et commutatifs : $\vee$ (disjonction), $\wedge$ (conjonction), $\leftrightarrow$ (équivalence)
  - Opérateur binaire associatif à droite : $\rightarrow$ (implication)
  - Priorité croissante : $\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Syntaxe

Vision déductive

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles

- Version classique

  Axiomes $\quad \dfrac{}{\top \in \Phi} \quad \dfrac{}{\bot \in \Phi} \quad \dfrac{}{P \in \Phi}\ (P \in \mathcal{P})$

  Déductions $\quad \dfrac{\varphi \in \Phi}{(\varphi) \in \Phi} \qquad \dfrac{\varphi \in \Phi}{\neg\varphi \in \Phi}$

  $$\dfrac{\varphi \in \Phi \qquad \psi \in \Phi}{\varphi\ op\ \psi \in \Phi}\ (op \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$$

- Il existe une définition stratifiée plus complexe pour éliminer les paradoxes de Russell (théorie des types, New Foundations, ...)

Exploitation pour la modélisation

Logique de propositions

- Modélisation d'énoncé en langage naturel
- Décomposition de l'énonce en propositions combinées par les opérateurs
- Opérateurs : conjonction de coordination, de subordination
- Propositions : parties de l'énoncé liées par les conjonctions (phrases, groupe nominal, groupe sujet et verbal, ...)
- Exemples : Lorsque je dors, je fais des rêves ou des cauchemars. Je ne suis reposé que lorsque j'ai fait des rêves. Or je suis reposé donc je n'ai pas fait de cauchemars.
- Propositions : $D =$ je dors; $V =$ je fais des rêves; $C =$ je fais des cauchemars; $P =$ je suis reposé.
- Formule : $(D \to V \vee C) \wedge (P \to V) \wedge P \to \neg C$

Sémantique

Tables de vérité

- Valeurs de vérité notées V (vrai) et F (faux)
  Autres notations possibles (T et F, 1 et 0, ...)
- Opérateurs définis pour chaque valeur de vérité des opérandes

$\neg$	
F	V
V	F

$\wedge$	F	V
F	F	F
V	F	V

$\vee$	F	V
F	F	V
V	V	V

$\rightarrow$	F	V
F	V	V
V	F	V

$\leftrightarrow$	F	V
F	V	F
V	F	V

- Notation sous la forme de formules élémentaires :

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

Sémantique

Construction tables de vérité

- Formule $\varphi \in \Phi$ contient variables $\{P_i\}_{i \in [1 \cdots n]} \subseteq \mathcal{P}$
- Variables propositionnelles P_i reçoivent valeurs de vérité
- n variables : 2^n lignes
- Discriminant ligne : Formule uniquement satisfaite par la ligne
- Discriminant ligne : $\bigwedge\limits_{i \in [1 \cdots n]} \alpha_i$ avec $\begin{cases} \alpha_i = P_i \text{ si valeur } V \\ \alpha_i = \neg P_i \text{ si valeur } F \end{cases}$
- 1 colonne par variable propositionnelle
- 1 colonne par opérateur de la formule
- dont 1 colonne pour la formule complète

Sémantique

Exemple de tables de vérité

- Formule : $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$
- Table de vérité

Discriminant	A	B	$A \wedge B$	$B \vee A$	$(A \wedge B) \rightarrow (B \vee A)$
$\neg A \wedge \neg B$	F	F	F	F	V
$\neg A \wedge B$	F	V	F	V	V
$A \wedge \neg B$	V	F	F	V	V
$A \wedge B$	V	V	V	V	V

- Formule satisfiable et valide : Théorème, Tautologie

Sémantique

Vocabulaire

Selon sa table de vérité, $\varphi \in \Phi$ est :

- Valide, tautologie, . . . :
  Toutes les lignes V
  Notée $\models \varphi$
- Satisfiable, consistante, cohérente, . . . :
  Au moins une ligne V (modèle de φ)
  Si L est son discriminant alors $\models L \to \varphi$
  Notée $\neg \models \neg\varphi$
  Si Valide alors Satisfiable
- Invalide, . . . :
  Au moins une ligne F
  Si et seulement si $\neg\varphi$ satisfiable
  Notée $\neg \models \varphi$
- Insatisfiable, inconsistante, incohérente, antilogie, . . . :
  Toutes les lignes F
  Si et seulement si $\neg\varphi$ valide
  Notée $\models \neg\varphi$
  Si Insatisfiable alors Invalide

Sémantique

Relation d'équivalence

- Soient $\varphi, \psi, \chi \in \Phi$:
- $\varphi = \psi$ si et seulement si φ et ψ ont la même table de vérité
- $\varphi = \psi$ si et seulement si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$
- Equivalence de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$:

$$
\begin{aligned}
\varphi \rightarrow \psi &= \neg\varphi \vee \psi \\
\varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}
$$

- Lois de De Morgan :

$$
\begin{aligned}
\neg(\varphi \wedge \psi) &= \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\neg(\varphi \vee \psi) &= \neg\varphi \wedge \neg\psi
\end{aligned}
$$

- Opposé, éléments neutres et absorbants :

$$
\begin{array}{ccccc}
\varphi \wedge \neg\varphi = \bot & \varphi \rightarrow \varphi = \top & \varphi \wedge \bot = \bot & \varphi \vee \bot = \varphi & \\
 & & & & \neg\neg\varphi = \varphi \\
\varphi \vee \neg\varphi = \top & \varphi \leftrightarrow \varphi = \top & \varphi \wedge \top = \varphi & \varphi \vee \top = \top &
\end{array}
$$

Sémantique

Relation d'équivalence

- Soient $\varphi, \psi, \chi \in \Phi$:
- Idempotence :

$$\varphi \land \varphi = \varphi \quad \varphi \lor \varphi = \varphi$$

- Commutativité :

$$\varphi \land \psi = \psi \land \varphi \quad \varphi \lor \psi = \psi \lor \varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi = \psi \leftrightarrow \varphi$$

- Associativité :

$$\begin{array}{ccccc} (\varphi \land \psi) \land \chi & = & \varphi \land \psi \land \chi & = & \varphi \land (\psi \land \chi) \\ (\varphi \lor \psi) \lor \chi & = & \varphi \lor \psi \lor \chi & = & \varphi \lor (\psi \lor \chi) \\ (\varphi \to \psi) \to \chi & \neq & \varphi \to \psi \to \chi & = & \varphi \to (\psi \to \chi) \end{array}$$

- Distributivité :

$$\begin{array}{c} \varphi \land (\psi \lor \chi) = (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi) \\ \varphi \lor (\psi \land \chi) = (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi) \end{array}$$

- Simplification :

$$\begin{array}{cc} \varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) = \varphi \lor \psi & \varphi \lor (\varphi \land \psi) = \varphi \\ \varphi \land (\neg\varphi \lor \psi) = \varphi \land \psi & \varphi \land (\varphi \lor \psi) = \varphi \end{array}$$

Sémantique

Formes normales

Pour toute formule $\varphi \in \Phi$, il existe :

- Une formule équivalente en forme normale disjonctive :

$$\begin{array}{l} \varphi = \bigvee_{i \in [1 \cdots n]} \beta_i \\ \beta_i = \bigwedge_{j \in [1 \cdots m_i]} \alpha_{i,j} \\ \alpha_{i,j} \in \mathcal{P} \cup \{\neg P \mid P \in \mathcal{P}\} \end{array}$$

- Une formule équivalente en forme normale conjonctive :

$$\begin{array}{l} \varphi = \bigwedge_{i \in [1 \cdots n]} \beta_i \\ \beta_i = \bigvee_{j \in [1 \cdots m_i]} \alpha_{i,j} \\ \alpha_{i,j} \in \mathcal{P} \cup \{\neg P \mid P \in \mathcal{P}\} \end{array}$$

- Ces formules sont obtenues en :
  - Remplaçant $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ par leurs équivalents
  - Rapprochant les négations $\neg$ des variables propositionnelles
  - Effectuant les distributivités de $\wedge$ sur $\vee$ (respectivement de $\vee$ sur $\wedge$)

Sémantique

Exemple d'équivalence sémantique

- Formule : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- Raisonnement équationnel
  - Remplacer $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ par leurs équivalents
    $((\neg A \vee B) \wedge (\neg\neg B \vee \neg A)) \vee (\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg\neg B \vee \neg A))$
  - Rapprocher les négations $\neg$ des variables propositionnelles
    $((\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee (\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg A))$
    $((\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((\neg\neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg B \wedge \neg\neg A))$
    $((\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge (\neg B \wedge A))$
  - Simplification par Idempotence et Commutativité
    $((\neg A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee (A \wedge \neg B)$
  - Distributivité
    $((\neg A \wedge (B \vee \neg A)) \vee (B \wedge (B \vee \neg A))) \vee (A \wedge \neg B)$
    $(((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg A)) \vee ((B \wedge B) \vee (B \wedge \neg A))) \vee (A \wedge \neg B)$
  - Simplification par Associativité, Idempotence et Commutativité
    $((\neg A \wedge B) \vee \neg A) \vee (B \vee (A \wedge \neg B))$
  - Simplification
    $\neg A \vee (B \vee A)$
    $\top$

Sémantique

Base minimale d'opérateurs

- La mise en forme normale montre que $\{\vee, \wedge, \neg\}$ sont suffisants pour représenter toute formule
- Il existe des bases minimales d'opérateurs
  - $\{\wedge, \neg\}$ ou $\{\vee, \neg\}$ par De Morgan
  - $\{\rightarrow, \neg\}$ car $\varphi \vee \psi = \neg\varphi \rightarrow \psi$
  - $\{\rightarrow, \bot\}$ car $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \bot$