Déduction naturelle

Cadre général

- Modélisation des preuves : Axiomatisation par des règles de déduction
- Règles nommées et paramétrées : remplacement des méta-variables par des formules lors de l'utilisation
- Approche par chaînage arrière : De la conclusion aux hypothèses
- Jugement $\Gamma \vdash \psi$ avec $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$
  et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \Phi$
  φ_i sont les hypothèses disponibles pour prouver ψ
- Sémantique mathématique : $\displaystyle\bigwedge_{i \in [1 \cdots n]} \varphi_i \Rightarrow \psi$

Déduction naturelle

Cadre général

- Modélisation des preuves : Axiomatisation par des règles de déduction
- Règles nommées et paramétrées : remplacement des méta-variables par des formules lors de l'utilisation
- Approche par chaînage arrière : De la conclusion aux hypothèses
- Jugement $\Gamma \vdash \psi$ avec $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$
  et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \Phi$
  φ_i sont les hypothèses disponibles pour prouver ψ
- Sémantique mathématique : $\displaystyle\bigwedge_{i \in [1 \cdots n]} \varphi_i \Rightarrow \psi$
- Axiome de l'hypothèse (méta-variables : Γ, φ) :

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \; Hyp(\Gamma, \varphi)$$

Déduction naturelle constructive

Implication : $\varphi \to \psi$

- Introduction (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

- Élimination – Modus Ponens (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

Déduction naturelle constructive

Conjonction : $\varphi \wedge \psi$

- Introduction (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_\wedge(\Gamma, \varphi, \psi)$$

- Élimination à gauche (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_\wedge^G(\Gamma, \varphi, \psi)$$

- Élimination à droite (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_\wedge^D(\Gamma, \varphi, \psi)$$

Déduction naturelle constructive

Disjonction : $\varphi \vee \psi$

- Introduction à gauche (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

- Introduction à droite (méta-variables Γ, φ, ψ)

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

- Élimination (méta-variables Γ, φ, ψ, χ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}(\Gamma, \varphi, \psi, \chi)$$

Déduction naturelle constructive

Négation : $\neg\varphi$ et Absurde : $\bot$

- Négation :
  - Introduction (méta-variables Γ, φ)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}(\Gamma, \varphi)$$

  - Élimination – Modus Ponens pour $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ (méta-variables Γ, φ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}(\Gamma, \varphi)$$

- Absurde :
  - Introduction – Modus Ponens pour $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ (méta-variables Γ, φ)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}(\Gamma, \varphi)$$

  - Élimination (méta-variables Γ, φ)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}(\Gamma, \varphi)$$

Déduction naturelle

Règles de déduction constructive

Introduction	Élimination
$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ I_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\to}(\Gamma, \varphi, \psi)$
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ I_{\wedge}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\wedge}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\wedge}^{D}(\Gamma, \varphi, \psi)$
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ I_{\vee}^{D}(\Gamma, \varphi, \psi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ E_{\vee}(\Gamma, \varphi, \psi, \chi)$
$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ I_{\neg}(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ E_{\neg}(\Gamma, \varphi)$
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ I_{\bot}(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ E_{\bot}(\Gamma, \varphi)$

Déduction naturelle

Heuristique/Méthode de preuve

- Construire la preuve de bas en haut en appliquant par ordre de préférence :

  1. Les axiomes (règle de l'hypothèse, ...) ;
  2. Les régles d'élimination sur les hypothèses pour extraire la conclusion si elle figure dans une hypothèse ;
  3. Les règles d'introduction pour décomposer la conclusion jusqu'à obtenir un élément disponible dans les hypothèses ou une variable ;
  4. La règle $E_\perp$ (preuve par l'absurde constructive) s'il n'est pas possible de faire apparaitre en conclusion un élément figurant dans les hypothèses.

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)
    }{A \wedge B \vdash B}\ E_{\wedge}^{D}(A \wedge B, A, B)
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)
    }{A \wedge B \vdash A}\ E_{\wedge}^{G}(A \wedge B, A, B)
  }{A \wedge B \vdash B \wedge A}\ I_{\wedge}(A \wedge B, B, A)
}{\emptyset \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}\ I_{\rightarrow}(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)
$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash B}\ E^{D}_{\wedge}(A \wedge B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash A}\ E^{G}_{\wedge}(A \wedge B, A, B)}{\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\emptyset \vdash {\color{red}A \wedge B} \rightarrow {\color{red}B \wedge A}}\ I_{\rightarrow}(\emptyset, {\color{red}A \wedge B}, {\color{red}B \wedge A})}\ I_{\wedge}(A \wedge B, B, A)$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ I_{\rightarrow}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\Gamma = \emptyset$$
$$\varphi = A \wedge B$$
$$\psi = B \wedge A$$

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\ Hyp(\emptyset, A \land B)}{A \land B \vdash B}\ E_\land^D(A \land B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\ Hyp(\emptyset, A \land B)}{A \land B \vdash A}\ E_\land^G(A \land B, A, B)}{\dfrac{\color{red}{A \land B} \vdash \color{red}{B} \land \color{red}{A}}{\emptyset \vdash A \land B \to B \land A}\ I_\to(\emptyset, A \land B, B \land A)}\ I_\land(\color{red}{A \land B}, \color{red}{B}, \color{red}{A})
$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$
\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}\ I_\land(\Gamma, \varphi, \psi)
$$

$$
\Gamma = A \land B
$$
$$
\varphi = B
$$
$$
\psi = A
$$

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\, Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash B}\, E^D_\wedge(A \wedge B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\, Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash A}\, E^G_\wedge(A \wedge B, A, B)}{\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\emptyset \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}\, I_\rightarrow(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)}\, I_\wedge(A \wedge B, B, A)$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\, E^D_\wedge(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\Gamma = A \wedge B$$
$$\varphi = A$$
$$\psi = B$$

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash B}\ E_\wedge^D(A \wedge B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\ Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash A}\ E_\wedge^G(A \wedge B, A, B)}{\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\emptyset \vdash A \wedge B \to B \wedge A}\ I_\to(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)}\ I_\wedge(A \wedge B, B, A)$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ Hyp(\Gamma, \varphi)$$

$$\Gamma = \emptyset$$
$$\varphi = A \wedge B$$

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\; Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash B}\; E_{\wedge}^{D}(A \wedge B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\; Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{\color{red}{A \wedge B \vdash A}}\; E_{\wedge}^{G}(\color{red}{A \wedge B}, \color{red}{A}, \color{red}{B})}{\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\emptyset \vdash A \wedge B \to B \wedge A}\; I_{\to}(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)}\; I_{\wedge}(A \wedge B, B, A)$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\; E_{\wedge}^{G}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\Gamma = A \wedge B$$
$$\varphi = A$$
$$\psi = B$$

Déduction naturelle : Exemple

Commutativité de la conjonction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B \vdash A \land B}\ Hyp(\emptyset, A \land B)}{A \land B \vdash B}\ E_{\land}^{D}(A \land B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\color{red}{A \land B \vdash A \land B}}\ Hyp(\emptyset, \color{red}{A \land B})}{A \land B \vdash A}\ E_{\land}^{G}(A \land B, A, B)}{\dfrac{A \land B \vdash B \land A}{\emptyset \vdash A \land B \to B \land A}\ I_{\to}(\emptyset, A \land B, B \land A)}\ I_{\land}(A \land B, B, A)
$$

Étape : 1. Axiome, 2. Élimination, 3. Introduction, 4. AntiTé

$$
\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ Hyp(\Gamma, \varphi)
$$

$$
\Gamma = \emptyset
$$
$$
\varphi = A \land B
$$

Déduction naturelle

Traces d'une preuve

- Étiquettes des règles de preuve dans un parcours en profondeur de gauche à droite de l'arbre de déduction

- Exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash B}\,E_{\wedge}^{D}(A \wedge B, A, B) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,Hyp(\emptyset, A \wedge B)}{A \wedge B \vdash A}\,E_{\wedge}^{G}(A \wedge B, A, B)}{\dfrac{A \wedge B \vdash B \wedge A}{\emptyset \vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A}\,I_{\rightarrow}(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)}\,I_{\wedge}(A \wedge B, B, A)$$

- Trace : $I_{\rightarrow}(\emptyset, A \wedge B, B \wedge A)$; $I_{\wedge}(A \wedge B, B \wedge A)$; $E_{\wedge}^{D}(A \wedge B, A, B)$; $Hyp(A \wedge B, A \wedge B)$; $E_{\wedge}^{G}(A \wedge B, A, B)$; $Hyp(A \wedge B, A \wedge B)$.

- Commandes pour les outils de construction de preuve

Déduction naturelle

Logique constructive et classique

- Logique constructive : Approche philosophique
- Interdiction du tiers-exclus (Axiome $\varphi \vee \neg\varphi$)
- Interdiction de l'axiome du choix

Déduction naturelle

Logique constructive et classique

- Logique constructive : Approche philosophique
- Interdiction du tiers-exclus (Axiome $\varphi \vee \neg\varphi$)
- Interdiction de l'axiome du choix
- La logique classique autorise ces principes à travers les règles :

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ TE(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ Abs(\Gamma, \varphi)$

Déduction naturelle

Logique constructive et classique

- Logique constructive : Approche philosophique
- Interdiction du tiers-exclus (Axiome $\varphi \vee \neg\varphi$)
- Interdiction de l'axiome du choix
- La logique classique autorise ces principes à travers les règles :

Tiers-exclu	Preuve par l'absurde
$\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\; TE(\Gamma, \varphi)$	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\; Abs(\Gamma, \varphi)$

- La preuve par l'absurde classique exploite le tiers-exclu

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\, TE(\Gamma, \varphi) \quad \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\, Hyp(\Gamma, \varphi) \quad \dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi}\, E_{\bot}(\Gamma, \neg\varphi, \varphi)}{\Gamma \vdash \varphi}\, E_{\vee}(\Gamma, \varphi, \neg\varphi, \varphi)$$

Logique des propositions

Conclusion

La logique des propositions est :

- Complète sémantiquement et axiomatiquement
- Consistante sémantiquement
- Correcte axiomatiquement
- Décidable mécaniquement
- Mais Très peu expressive
- Introduction des quantificateurs, des relations et des structures : Logique des prédicats

Logique des propositions

Mise en pratique

L'assistant de preuve Coq

- Développé au sein d'INRIA
- Système F : λ-calcul typé second ordre (Girard et Reynolds)
- Calcul des constructions inductives (Coquand)
- Correspondance de Curry-Howard
  - Formule = Type
  - Preuve = Programme

Le langage de développement prouvé Why3

- Développé au sein du LRI et d'INRIA
- Logique des prédicats du premier ordre et Logique de Hoare
- Passerelle vers de nombreux outils de vérification :
  - Automatique : SAT solver (résolution par saturation), SMT (SAT Modulo Theory)
  - Semi-automatique : Assistants de preuve