Equations aux dérivées partielles

Chap 2 : Différences finies pour les EDP instationnaires

Joseph Gergaud, Serge Gratton, Ehouarn Simon

13 octobre 2020

INP Toulouse ENSEEIHT

Outline

Description

Nous cherchons u solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \ , \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t \in]0,T[\quad \text{"Conditions aux limites"} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in]0,1[. \quad \text{"Conditions initiales"} \end{cases}$$

Discrétisation

On se donne un maillage spatio-temporel régulier, de pas d'espace h et de pas de temps Δt : $(x_i)_{i\in[\![0:N+1]\!]}$ et $(t_n)_{n\in[\![0:M+1]\!]}$, avec $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $\Delta t = \dfrac{1}{M+1}$.

On cherche une approximation $(u_i^n)_{i\in[\![0:N+1]\!];n\in[\![0:M+1]\!]}$ de la solution u en les points du maillage :

$$u_i^n \approx u(x_i,t_n) \quad \forall (i,n) \in [\![0:N+1]\!] \times [\![0:M+1]\!].$$

Pour ce cas particulier, les conditions aux limites donnent :

$$\forall n \in \ [\![0:M+1]\!] \quad u_0^n = u_{N+1}^n = 0;$$

et la condition initiale donne :

$$\forall i \in [\![0:N+1]\!] \quad u_i^0 = u_0(x_i).$$

Discrétisation

Il ne reste plus qu'à déterminer $(u_i^n)_{i \in [\![1:N]\!]; n \in [\![1:M+1]\!]}$. Notons

$$u_h^n := [u_1^n, \cdots, u_N^n]^T \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n \in [\![1:M+1]\!].$$

Au temps t_n, la dérivée spatiale d'ordre 2 est approximmée en (x_i, t_n) via le schéma centré (d'ordre 2) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \quad \forall i \in [\![1:N]\!], \forall n \in [\![1:M+1]\!].$$

Nous nous intéressons par la suite à **différents stratégies de discrétisation temporelle**.

Schéma explicite décentré

Au temps t_n, la dérivée temporelle d'ordre 1 est approximmée en (x_i, t_n) via le schéma décentré "avant" (d'ordre 1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad \forall i \in [\![1 : N]\!], \forall n \in [\![0 : M]\!].$$

On obtient alors le système d'équations :

$$(\mathcal{S}_E) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n), \quad \forall i \in [\![1 : N]\!], \forall n \in [\![0 : M]\!].$$

Ceci s'écrit

$$u_h^{n+1} = A_h u_h^n + \Delta t F^n,$$

avec $A_h = \begin{pmatrix} 1-2c & c & 0 & \dots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & 0 & c & 1-2c \end{pmatrix}$, $c = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, et $F^n = \begin{pmatrix} f(x_1, t_n) \\ \vdots \\ f(x_N, t_n) \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1.1. Ce schéma est très simple : un produit matrice - vecteur pour passer du temps t_n au temps t_{n+1}.

Schéma implicite décentré

Au temps t_n, la dérivée temporelle d'ordre 1 est approximmée en (x_i, t_n) via le schéma décentré "arrière" (d'ordre 1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}, \quad \forall i \in [\![1:N]\!], \forall n \in [\![1:M+1]\!].$$

On obtient alors le système d'équations :

$$(\mathcal{S}_I) \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n), \quad \forall i \in [\![1:N]\!], \forall n \in [\![1:M+1]\!].$$

Ceci s'écrit

$$B_h u_h^n = u_h^{n-1} + \Delta t F^n,$$

avec $B_h = \begin{pmatrix} 1+2c & -c & 0 & \dots & 0 \\ -c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -c \\ 0 & \dots & 0 & -c & 1+2c \end{pmatrix}$, $c = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, et $F^n = \begin{pmatrix} f(x_1, t_n) \\ \vdots \\ f(x_N, t_n) \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1.2. Ce schéma requière la résolution d'un système linéaire pour passer du temps t_{n-1} au temps t_n.

Schéma de Richardson ("saute-mouton", "leap-frog")

Au temps t_n, la dérivée temporelle d'ordre 1 est approximmée en (x_i, t_n) via le schéma centré (d'ordre 2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \forall i \in [\![1 : N]\!], \forall n \in [\![1 : M]\!].$$

On obtient alors le système d'équations :

$$(\mathcal{S}_{LF}) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = f(x_i, t_n), \quad \forall i \in [\![1 : N]\!], \forall n \in [\![1 : M+1]\!].$$

Ceci s'écrit

$$u_h^{n+1} = -2cT_h u_h + u_h^{n-1} + 2\Delta t F^n,$$

avec $T_h = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \dfrac{\Delta t}{h^2}$, et $F^n = \begin{pmatrix} f(x_1, t_n) \\ \vdots \\ f(x_N, t_n) \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1.3. Ce schéma est à 2 niveaux : il faut connaître u_h^n et u_h^{n-1}pour passer des temps t_{n-1} et t_n au temps t_{n+1}.

Discrétisation temporelle : bilan (provisoire)

- Schéma $(\mathcal{S}_E)$
  - ▷ Simple et peu coûteux : un produit matrice-vecteur à chaque pas de temps.
- Schéma $(\mathcal{S}_I)$
  - ▷ Coûteux : résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps.
  - ▷ La taille du système augmente avec le nombre de points de grille spatiaux : plus on cherchera à être précis, plus le système sera "gros".
- Schéma $(\mathcal{S}_{LF})$
  - ▷ Peu coûteux : un produit matrice-vecteur à chaque pas de temps.
  - ▷ Schéma multi-niveaux : connaissance de u_h^{n-1} et u_h^n pour calculer u_h^{n+1}.
  - ▷ Initialisation : il est nécessaire de fournir u_h^0 et u_h^1 pour amorcer la récurrence. Utilisation d'un autre schéma pour calculer u_h^1 ?

Quel schéma choisir ?

- Simplement basé sur les coût et temps de calcul : schéma $\mathcal{S}_E$.
- "Qualité" de la discrétisation ? De la solution numérique ?

Outline

Définition 1.2.1 – Schéma ($\mathcal{S}_{ML}$)

En notant $u_h^k \in \mathbb{R}^N$ une approximation de la solution au temps t_k en les nœuds du maillage spatial, on appellera par la suite schéma ($\mathcal{S}_{ML}$) tout schéma à $m+l$ niveaux de la forme

$$\sum_{p=-m}^{l} B_p u_h^{n+p} = C^n,$$

avec $n \geq m$, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $l+m \geq 1$, $B_p \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ $\forall p \in [\![-m:l]\!]$, $B_l \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ inversible, et $C^n \in \mathbb{R}^N$.

Exemple 1.2.1. Les schémas vu précédemment sont des schémas ($\mathcal{S}_{ML}$) :

- ($\mathcal{S}_E$) : $l=1$, $m=0$;
- ($\mathcal{S}_I$) : $l=0$, $m=1$;
- ($\mathcal{S}_{LF}$) : $l=1$ et $m=1$.

Définition 1.2.2 – Erreur de consistance

Soit un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$. On appelle erreur de consistance du schéma au temps t_n, le vecteur, noté $\xi_h^n(u) \in \mathbb{R}^N$, défini par :

$$\xi_h^n(u) = \sum_{p=-m}^{l} B_p \Pi_h^{n+p}(u) - C^n,$$

avec u la solution ("inconnue") de l'EDP, et $\Pi_h^{n+p}(u) = [u(x_1, t_{n+p}), \cdots, u(x_N, t_{n+p}))]^T \in \mathbb{R}^N$ la solution évaluée au temps t_{n+p} en les noeuds du maillage spatial.

Remarque 1.2.1. L'erreur de consistance est une quantité qui **dépend de la solution u de l'EDP, et non pas de son approximation u_h**. Elle renvoie aux erreurs de troncatures issues de l'approximation des différentes dérivées partielles présentes dans l'EDP.

Définition 1.2.3 – Consistance d'un schéma, ordre de consistance

Soit un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$. On note $\xi_h^n(u) \in \mathbb{R}^N$ son erreur de consistance. Soit $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$.
Le schéma est dit consistant pour la norme $\|\|$ si

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|\xi_h^n(u)\| \underset{(\Delta t, h)\to 0}{\to} 0.$$

De plus, s'il existe $C \geq 0$, $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ des constantes indépendantes de Δt et h telles que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|\xi_h^n(u)\| \leq C(\Delta t^p + h^q),$$

le schéma est dit consistant à l'ordre p en temps et q en espace pour la norme $\|\|$.

Remarque 1.2.2.

- Si $C = 0$, alors le schéma est dit exacte.
- Un schéma est consistant si la discrétisation devient exacte quand $(\Delta t, h) \to 0$.

Définition 1.2.4 – Stabilité d'un schéma pour une norme

Soient un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$ et $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. On note u_h^n la solution de ce schéma au temps t_n.
Le schéma est dit stable pour la norme $\|\|$ s'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ indépendantes de Δt et h telles que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|u_h^n\| \leq \alpha_1 \sup_{j \in [\![0:l+m-1]\!]} \|u_h^j\| + \alpha_2 \sup_{n\Delta t \leq T} \|C^n\|,$$

et ce quelques soient les données initiales $(u_h^j)_{j \in [\![0:l+m-1]\!]}$ et les termes sources $(C^n)_{n \in \mathbb{N}, n\Delta t \leq T}$.

Remarque 1.2.3.

- La notion de stabilité renvoie cette fois-ci à **l'approximation u_h, solution du schéma, et non pas à la solution de l'EDP u.**
- En pratique, la stabilité traduit le fait que l'erreur ne s'amplifie "pas trop" au cours du temps.
- Si cette majoration n'a lieu que pour des Δt et h soumis à certaines inégalités, on dit que le schéma est conditionnellement stable (ex : $\Delta t < h^2$).

Proposition 1.2.5 – Caractérisation

Soit un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$ de la forme

$$u_h^{n+1} = Bu_h^n + \Delta t F^n,$$

où B est la matrice dite d'amplification. Soit $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$.

Le schéma est dit stable pour la norme $\|\|$ si et seulement si $\exists C \geq 0$ indépendante de Δt et h telle que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|B^n\| \leq C.$$

- Admis. ■

Définition 1.2.6 – Stabilité pour la norme $\|\|_h$

Soit un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$ de la forme $u_h^{n+1} = Bu_h^n + \Delta t F^n$, avec B symétrique.

Par convention, le schéma est stable pour la norme $\|\|_h$ si $\rho(B) \leq 1$.

Définition 1.2.7 – Convergence

Soient un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$, et $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. On suppose que les données initiales vérifient :

$$\sup_{j\in[\![0:l+m-1]\!]} \|u_h^j - \Pi_h^j(u)\| \underset{(\Delta t,h)\to 0}{\rightarrow} 0.$$

Le schéma est convergent pour la norme $\|\|$ si

$$\sup_{n\Delta t\leq T} \|u_h^n - \Pi_h^n(u)\| \underset{(\Delta t,h)\to 0}{\rightarrow} 0.$$

Remarque 1.2.4. L'hypothèse sur les données initiales, nécessaires pour démarrer la récurrence d'un schéma multi-niveau, traduit le fait qu'elles ont également été obtenues depuis des schémas convergents pour cette même norme.

Théorème 1.2.8 – Théorème de Lax

Soit $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Soit un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$ consistant et stable pour la norme $\|\|$, il est alors convergent pour cette même norme.

Remarque 1.2.5. Afin d'appliquer le théorème de Lax, il est nécessaire d'avoir étudié la **consistance** et la **stabilité** du schéma **dans la même norme**.

Outline

Schéma explicite décentré

Le schéma s'écrit

$$u_h^{n+1} = A_h u_h^n + \Delta t F^n.$$

Proposition 1.3.1 – Consistance, stabilité et convergence

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps, et 2 en espace pour la norme $\|\|_\infty$;

(ii) Le schéma est conditionnellement stable pour la norme $\|\|_\infty$:

le schéma est stable pour la norme $\|\|_\infty$ si $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$;

(iii) Le schéma est convergent pour la norme $\|\|_\infty$ si $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Remarque 1.3.1. Le schéma explicite est simple à mettre en oeuvre, mais la condition de stabilité $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ requiert des pas de temps petit : $h \approx 10^{-3} \Rightarrow \Delta t \approx 10^{-6}$. Les temps de calcul peuvent s'avérer très élevés.

Schéma explicite

- (i) cf TD.

(ii) Supposons $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \|A_h\|_\infty &= \max(|1-2c|+c, |1-2c|+2c) \\ &= |1-2c|+2c \\ &= 1-2c+2c \quad \text{car } c \leq 1/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|A_h^n\|_\infty \leq 1.$$

(iii) Supposons $\dfrac{\Delta t}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Le schéma étant alors consistant et stable pour la norme $\|\|_\infty$, il est également convergeant pour cette même norme d'après le théorème de Lax.

■

Schéma implicite

Le schéma s'écrit

$$B_h u_h^n = u_h^{n-1} + \Delta t F^n.$$

Proposition 1.3.2 – Consistance, stabilité et convergence

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) Le schéma est consistant d'ordre 1 en temps, et 2 en espace pour la norme $\|\|_\infty$;

(ii) Le schéma est inconditionnellement stable pour la norme $\|\|_\infty$;

(ii) Le schéma est convergent pour la norme $\|\|_\infty$;

- cf TD. ■

Remarque 1.3.2. L'absence de condition de stabilité sur Δt et h permet d'utiliser des pas de temps plus grands que ceux utilisés par le schéma explicite.

Schéma de Richardson

Le schéma s'écrit

$$u_h^{n+1} = -2cT_h u_h^n + u_h^{n-1} + 2\Delta t F^n.$$

Proposition 1.3.3 – Consistance, stabilité et convergence

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) Le schéma est consistant d'ordre 2 en temps, et 2 en espace pour la norme $\|\|\|_h$;

(ii) Le schéma est inconditionnellement instable pour la norme $\|\|\|_h$;

- cf TD. ∎

Remarque 1.3.3. Malgré un meilleur ordre de consistance en temps, ce schéma est instable, et donc inutilisable, pour l'équation de la chaleur. Néanmoins, ce schéma pourra être utile pour d'autres EDP.