

TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
TD1 : SIGNAUX ET SPECTRES

Exercice 1 : Etude du secteur

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

où $f_0 = 50\text{Hz}$ et $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.

2. On considère ensuite le modèle suivant :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, $f_0 = 50\text{Hz}$ et $A_0 = 220\sqrt{2}\text{V}$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.

3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50\text{Hz}$. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :

$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$

f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ . Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

Exercice 2 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :

$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$.
 - (a) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$.
 - (b) Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?

Rappels

Propriétés générales

|| T.F. ||

$ax(t) + by(t)$	\Rightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Rightarrow	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	\Rightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Rightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Rightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Rightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	\Rightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Rightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Rightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

|| T.F. ||

1	\Rightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Rightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Rightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Rightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Rightarrow	$\frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Rightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Rightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Rightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Rightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Rightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Rightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Rightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Rightarrow	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention!!!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$$