

Mesure et intégration
INP-ENSEEIH
2018-2019

Serge Gratton, Sylvain Rubenthaler

Licence creative common

Table des matières

1	Quelques rappels	1
2	Théorie de la mesure	3
2.1	Tribus	3
2.2	Mesures	4
2.3	Fonctions mesurables	6
3	Intégrale des fonctions mesurables	9
3.1	Intégrales des fonctions étagées mesurables positives.	9
3.2	Intégrales des fonctions mesurables positives	10
3.3	Intégrales des fonctions mesurables de signe quelconque.	12
3.4	Fonction de répartition	13
3.5	Exercices	14
3.5.1	Énoncés	14
3.5.2	Corrigés	15
4	Ensembles négligeables	19
5	Théorèmes limites et applications	21
5.1	Stabilité de la mesurabilité par passage à la limite.	21
5.2	Théorèmes de convergence pour les intégrales.	21
5.3	Lien avec l'intégrale de Riemann	24
5.4	Intégrales dépendant d'un paramètre	26
5.5	Exercices	28
5.5.1	Énoncés	28
5.5.2	Corrigés	29
6	Mesure produit et théorèmes de Fubini	33
6.1	Théorèmes de Fubini et Fubini-Tonelli	33
6.2	Changement de variable	35
6.3	Exercices	38
6.3.1	Énoncés	38
6.3.2	Corrigés	39

Chapitre 1

Quelques rappels

Définition 1.0.1. *Injection.*

Soit E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ est une injection si $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Définition 1.0.2. *Surjection.*

Soit E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ est une surjection si $\forall z \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = z$.

Définition 1.0.3. *Bijection.*

Soit E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ est une bijection si f est une injection et une surjection.

Proposition 1.0.4. Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$. Alors $[f \text{ et } g \text{ injectives}] \Rightarrow [g \circ f \text{ injective}]$.

Démonstration. Soient x, y tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. L'application g est injective donc $f(x) = f(y)$. L'application f est injective donc $x = y$. \square

Définition 1.0.5. On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une injection de E dans \mathbb{N} . Dans le cas où E est infini, on peut alors démontrer qu'il existe alors une bijection de E dans \mathbb{N} .

Exemple 1.0.6. Tout ensemble fini est dénombrable.

Exemple 1.0.7. \mathbb{Z} est dénombrable car l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k &\mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est bijective (donc injective).

Exemple 1.0.8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable car l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (p, q) &\mapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q \end{aligned}$$

est bijective (donc injective).

Exemple 1.0.9. L'ensemble \mathbb{Q} est dénombrable. L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Proposition 1.0.10. Si on a $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ des ensembles dénombrables alors $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ est un ensemble dénombrable.

(En d'autres termes, une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.)

Démonstration. Pour tout $i \geq 0$, E_i est dénombrable donc $\exists f_i : E_i \rightarrow \mathbb{N}$ injective. Pour $x \in \bigcup_{n \geq 0} E_n$, on choisit $i(x)$ le plus petit entier tels que $x \in E_{i(x)}$. Soit

$$\begin{aligned} F : \bigcup_{n \geq 0} E_n &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x &\mapsto (i(x), f_{i(x)}(x)) \text{ si } x \in E_i \end{aligned}$$

Cette application F est injective. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable donc il existe $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injective. Par la proposition 1.0.4, $g \circ F$ est injective. Donc $\bigcup_{n \geq 0} E_n$ est dénombrable. \square

Exemple 1.0.11. *Rappel : Si $f : E \rightarrow F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), x \in C\}$.*

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

1. Déterminer $f([-3, -1])$, $f([-3, 1])$, $f(]-3, 1])$.
2. Déterminer $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}(]1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-1, 0] \cup [1, 2])$.

Correction :

1. $f([-3, -1]) = [1, 9]$, $f([-3, 1]) = [0, 9]$, $f(]-3, 1]) = [0, 9[$.
2. $f^{-1}(]-\infty, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $f^{-1}(]1, +\infty[) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f^{-1}(]-1, 0] \cup [1, 2]) = \{0\} \cup]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[$.

Chapitre 2

Théorie de la mesure

2.1 Tribus

Dans la suite, on utilisera un ensemble E que l'on appellera « univers » en théorie des probabilités.

Définition 2.1.1. Une famille \mathcal{A} de parties de E est une tribu (sur E) si elle vérifie

1. $E \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire)
3. $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ (une réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{A} est dans \mathcal{A})

Si \mathcal{A} est une tribu sur E , on dit que (\mathcal{A}, E) est un espace mesurable.

Remarque 2.1.2. On rappelle que :

- $A^c := \{x \in E : x \notin A\}$
- Une tribu est un ensemble de parties.

Proposition 2.1.3. Stabilité par des opérations ensemblistes.

Soient \mathcal{A} une tribu et $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$. De même une tribu est stable par différence ($A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = \{x; x \in A, x \notin B\} \in \mathcal{A}$) et par différence symétrique ($A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$)

Démonstration. On note pour tout n , $B_n = A_n^c$. Donc, par définition d'une tribu, $B_n \in \mathcal{A}, \forall n$ et $\bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \geq 0} A_n &= \bigcap_{n \geq 0} B_n^c \\ &= \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right)^c \\ &\text{(par définition) } \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Les autres résultats se montrent de manière semblable. □

Exemple 2.1.4. Pour n'importe quel ensemble E , $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$ est une tribu.

Exemple 2.1.5. Pour n'importe quel ensemble E , et $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu.

Exemple 2.1.6. Pour n'importe quel ensemble E , $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ (les parties de E) est une tribu.

Exercice 2.1.7. Une intersection de tribus sur E est une tribu sur E .

Démonstration. L'intersection des tribus contient E car chaque tribu contient E . Si A est dans l'intersection des tribus, son complémentaire dans E est aussi dans toutes les tribus, donc dans l'intersection. De même pour la réunion dénombrable. □

Proposition 2.1.8. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, il existe une tribu notée $\sigma(\mathcal{A})$ telle que si \mathcal{B} est une tribu telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.

On dira que $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant \mathcal{A} , ou encore que $\sigma(\mathcal{A})$ est la tribu engendrée par \mathcal{A} . C'est l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{A} .

Définition 2.1.9. Soit \mathcal{O} l'ensemble de parties ouvertes de E pour une topologie donnée. La tribu $\sigma(\mathcal{O})$ s'appelle la tribu des boréliens et se note $\mathcal{B}(\mathcal{O})$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$, et $d \in \mathbb{N}$, on montre (cf exercice 2.1.10 pour $d = 1$) que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les boules ouvertes pour la norme Euclidienne de \mathbb{R}^d , (ou pour la valeur absolue de \mathbb{R} , si $d = 1$).

Exercice 2.1.10. Soit l'ensemble de parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant :

$$\mathcal{A} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ est la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exemple 2.1.11. Soit $[a, b]$ intervalle fermé de \mathbb{R} . Les intervalles $] -\infty, a[$, $]b, +\infty[$ sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu donc $] -\infty, a[\cup]b, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (stabilité par réunion dénombrable), et donc aussi $(] -\infty, a[\cup]b, +\infty[)^c = [a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (stabilité par passage au complémentaire).

De même, on peut montrer que tous les intervalles de \mathbb{R} sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ainsi que tous les singletons (les ensembles de la forme $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 2.1.12. Montrer les relations suivantes :

1. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.
2. Si $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$ alors $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.

2.2 Mesures

Notation 2.2.1. Dans le calcul des mesures, on adopte les conventions de calcul suivantes (qui ne sont pas valables ailleurs) : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \infty = +\infty$, $0 \times \infty = 0$.

Définition 2.2.2. Soit E un ensemble muni d'une tribu \mathcal{A} . On dit que μ est une mesure (positive) sur (E, \mathcal{A}) si :

1. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ (elle peut prendre la valeur ∞)
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. si $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ et sont deux à deux disjoints alors $\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.

Exemple 2.2.3. Quand μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) telle que $\mu(E) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité. La tribu \mathcal{A} contient tous les événements possibles et, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est la probabilité que A se produise.

Définition 2.2.4. Quand μ est telle que $\mu(E) < \infty$, on dit que μ est une mesure finie.

Définition 2.2.5. Si on a une mesure μ sur l'espace mesurable (E, \mathcal{A}) , on dit que (E, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré.

Exemple 2.2.6. Le triplet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$ est un espace mesuré. Nous avons vu (exemple 2.1.6) que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une tribu sur \mathbb{N} . De plus :

1. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\text{card}(A)$ (= le nombre d'éléments de A) est bien dans $[0, +\infty]$.
2. La partie \emptyset est de cardinal 0.
3. Si $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont deux à deux disjoints, $\text{card}(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \text{card}(A_n)$.

Proposition 2.2.7. Croissance et mesure d'une différence

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $B \subset A$.

- Alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.
- Si, de plus $\mu(B) < +\infty$, alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(Rappel : $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.)

Démonstration. On a $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$ (car $A \setminus B$ et B sont disjoints). Donc $\mu(B) \leq \mu(A)$. Si $\mu(B) < +\infty$, nous avons alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. \square

Proposition 2.2.8. *Sous-additivité.*

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Si $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ (pas forcément deux à deux disjoints). Alors $\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.

Démonstration. On pose pour tout entier $k \geq 1$, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} A_i$ (et nous avons alors, par convention, $B_0 = A_0$). Les ensembles B_0, B_1, B_2, \dots sont deux à deux disjoints. Nous avons

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \\ (\text{car } B_0, B_1, B_2, \dots \text{ deux à deux disjoints}) &= \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) \\ (\text{car } \forall n, B_n \subset A_n) &\leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) \end{aligned}$$

\square

Proposition 2.2.9. *Mesure d'une réunion croissante.*

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soient $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$ tels que $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$. Alors $\mu(\bigcup_{k \geq 0} A_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$.

Démonstration. Posons pour tout $k \geq 1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1} (= \{x : x \in A_k, x \notin A_{k-1}\})$ et $B_0 = A_0$. Les ensembles B_0, B_1, B_2, \dots sont deux à deux disjoints. Donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} B_k\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(B_k) \end{aligned}$$

On a $\forall n, \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \mu(A_n)$. Donc $\mu(\bigcup_{k \geq 0} A_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$. \square

Proposition 2.2.10. *Mesure d'une intersection décroissante.*

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soient $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$ tels que $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ et tels que $\mu(A_0) < +\infty$. Alors $\mu(\bigcap_{k \geq 0} A_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$.

Démonstration. Posons pour tout k , $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$. Les ensembles B_0, B_1, B_2, \dots sont deux à deux disjoints. On pose $B_n = A_0 \setminus A_n = A_0 \cap A_n^c$. La suite (B_n) est croissante et $B := \bigcup_{n \geq 0} B_n = \bigcup_{n \geq 0} (A_0 \cap A_n^c) = A_0 \setminus \bigcap_{n \geq 0} A_n = A_0 \setminus A$. On obtient alors $\mu(B) = \mu(A_0 \setminus A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(A_0) - \mu(A)$. \square

Théorème 2.2.11. *Mesure de Lebesgue.*

Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et $x \in \mathbb{R}$ alors $\{y : y - x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant

1. *pour tout intervalle $]a, b[$, $\lambda(]a, b[) = b - a$*
2. *$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A)$.*

Cette mesure λ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Exemple 2.2.12. *Mesure de Lebesgue d'un intervalle quelconque.*

Soient $a \leq b$ des éléments de \mathbb{R} . Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda([a, b]) &= \lambda(]a-1, b+1[\setminus (]a-1, a[\cup]b, b+1[)) \\ (\text{par Prop. 2.2.7}) &= \lambda(]a-1, b+1[) - \lambda(]a-1, a[\cup]b, b+1[) \\ (\text{réunion disjointe}) &= \lambda(]a-1, b+1[) - \lambda(]a-1, a[) - \lambda(]b, b+1[) \\ &= (b+1 - (a-1)) - (a - (a-1)) - (b+1 - b) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

De même, $\lambda([a, b[) = \lambda([a, b]) = b - a$.

Exemple 2.2.13. *Mesure de Lebesgue d'un singleton.*

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $\{x\} \subset [x - 1/n, x + 1/n]$. Donc, en utilisant la prop. 2.2.7, $\forall n \geq 1$, $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x - 1/n, x + 1/n]) = 2/n$. Donc $\lambda(\{x\}) = 0$.

Exemple 2.2.14. *Mesure de Lebesgue de \mathbb{Q} .*

On sait que \mathbb{Q} est dénombrable. Donc on peut numéroté ses éléments : $\mathbb{Q} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $A_n = \bigcup_{i \geq 0} [u_i - \frac{1}{n2^i}, u_i + \frac{1}{n2^i}]$. On a pour tout n , $\mathbb{Q} \subset A_n$

(donc, par la prop. 2.2.7, $\lambda(\mathbb{Q}) \leq \lambda(A_n)$) et, par la prop. 2.2.8, $\lambda(A_n) \leq \sum_{i \geq 0} \lambda([u_i - \frac{1}{n2^i}, u_i + \frac{1}{n2^i}]) = \frac{2}{n}$. Et donc $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

2.3 Fonctions mesurables

Définition 2.3.1. *Application mesurable.*

Soient (E, \mathcal{A}) , (E', \mathcal{A}') deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : E \rightarrow E'$ est mesurable (par rapport aux tribus \mathcal{A} , \mathcal{A}') si $\forall B \in \mathcal{A}'$, $f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\} \in \mathcal{A}$. On notera que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. De plus si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, on pose $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\}$.

Définition 2.3.2. *Application borélienne.*

Dans la définition ci-dessus si E et E' sont deux espaces topologique, et si f est mesurable pour les tribus des boréliens associées, on dit que f est borélienne. Si de plus $E' = \mathbb{R}$ on parle de fonction borélienne.

Définition 2.3.3. Soit $A \subset E$. La fonction indicatrice de A est la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe d'autres notations. Par exemple si $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, on peut écrire $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{x \in [0, 1]} = \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 1}$.

Exemple 2.3.4.

- Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et $A \subset E$. La fonction indicatrice de A est mesurable de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ssi $A \in \mathcal{E}$.
- Toute fonction constante de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Lemme 2.3.5. Image par f^{-1} d'une tribu. Soit $f : E \rightarrow F$ et \mathcal{F} une tribu sur F . Alors $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{F}\}$ est une tribu.

Lemme 2.3.6. Lemme de transport. Soit $f : E \rightarrow F$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(F)$. Alors $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$.

Démonstration. On a $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, d'où $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. Pour la réciproque, considérer $\mathcal{S} = \{B \subset F, f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}$ et montrer que c'est une tribu, que $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, puis que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}$, puis que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$. \square

Proposition 2.3.7. *Critères de mesurabilité*

- Si (E, \mathcal{E}) et (F, \mathcal{F}) sont mesurables et $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$. Alors f mesurable $\iff f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$.
- Si $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E', \mathcal{A}')$ est mesurable et $g : (E', \mathcal{A}') \rightarrow (E'', \mathcal{A}'')$ est mesurable alors $g \circ f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E'', \mathcal{A}'')$ est mesurable.
- Soient E et F sont deux espaces munis de topologies. Si $f : E \rightarrow F$ est continue, alors $f : (E, \mathcal{B}(E)) \rightarrow (F, \mathcal{B}(F))$ est mesurable.

Proposition 2.3.8. Si f_1, \dots, f_d sont des fonctions mesurables de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; soit g une fonction borélienne sur \mathbb{R}^d . Alors $h : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_d(x))$ est mesurable de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exemple 2.3.9. Si les f_i , $i = 1 \dots d$ sont des fonctions mesurables sur (E, \mathcal{E}) , alors les fonctions suivantes sont des fonctions mesurables sur (E, \mathcal{E}) :

1. $\sum_{i=1}^d a_i f_i$, les a_i étant réels
2. $\min(f_1, f_2)$, $\max(f_1, f_2)$

De plus les ensembles $\{x, f_1(x) = f_2(x)\}$, $\{x, f_1(x) \geq f_2(x)\}$ sont éléments de \mathcal{E} .

Proposition 2.3.10.

- Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable (de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).
- Si f et g sont des fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors $f + g$, $f \times g$ sont mesurables. Si de plus g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est mesurable.

Proposition 2.3.11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur (E, \mathcal{E}) , alors les fonctions suivantes sont des fonctions mesurables sur (E, \mathcal{E}) :

1. $x \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x))$ et $x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x))$
2. $x \mapsto \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x)) = \sup_k \inf_{n \geq k} (f_n(x))$ et $x \mapsto \limsup_{n \in \mathbb{N}} (f_n(x)) = \inf_k \sup_{n \geq k} (f_n(x))$

De manière générale, toute fonction $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par une formule est mesurable.

Proposition 2.3.12. *Mesure image.*

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit (E', \mathcal{B}) un espace mesurable. Soit $f : E \rightarrow E'$ mesurable. L'application $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure appelée mesure image de μ par f .

Démonstration. Vérifions d'abord que ν est bien définie : $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ car f est mesurable, donc $\nu(B)$ est bien défini. On a donc $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$.

Puis $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.

Enfin, si $B_0, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints, $\nu(\bigcup_{n \geq 0} B_n) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0} B_n)) = \mu(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n))$. En effet $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0} B_n) = \{x \in E : f(x) \in \bigcup_{n \geq 0} B_n\} = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in E : f(x) \in B_n\}$. Soient $m \neq n$, si $x \in f^{-1}(B_n)$, $f(x) \in B_n$, donc $f(x) \notin B_m$ (car B_0, B_1, B_2, \dots sont deux à deux disjoints), donc $x \notin f^{-1}(B_m)$, donc $f^{-1}(B_n) \cap f^{-1}(B_m) = \emptyset$. Donc, puisque μ est une mesure,

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(f^{-1}(B_n)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \nu(B_n) . \end{aligned}$$

Donc ν est une mesure. □

Chapitre 3

Intégrale des fonctions mesurables

On se donne un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) .

3.1 Intégrales des fonctions étagées mesurables positives.

Définition 3.1.1. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. On dit que f est étagée (positive) s'il existe une famille finie A_1, \dots, A_n de \mathcal{A} telle que

- les A_i forment une partition de E (ce qui veut dire que A_1, \dots, A_n sont deux à deux disjoints et que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$)
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0$, tel que $f(x) = a_i, \forall x \in A_i$.

L'ensemble des étagées est noté \mathcal{F}_+^0 .

Remarque 3.1.2. Une fonction de \mathcal{F}_+^0 est mesurable, comme somme de mesurables. Si $f \in \mathcal{F}_+^0$ est définie avec une partition A_1, \dots, A_n , il peut exister une autre partition B_1, \dots, B_m (différente de A_1, \dots, A_n) telle que f est constante sur chacun des B_i .

Lemme 3.1.3. Si $A \subset E, B \subset E$ alors $\forall x, \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A \cap B}(x)$.

Exemple 3.1.4. La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction positive étagée ($\lfloor x \rfloor$ signifie « partie entière »). En effet, elle est constante sur $]-\infty, 0[, [0, 1[, [1, 2], \{2\},]2, +\infty[$.

Avec des fonctions indicatrices, nous pouvons écrire f de manière plus compacte :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \mathbf{1}_{[0,2]}(x) = \mathbf{1}_{[0,2]}(x) \times \lfloor x \rfloor + 2 \times \mathbf{1}_{\{2\}}(x) = \dots$$

Définition 3.1.5. Si $f \in \mathcal{F}_+^0$, il existe une représentation de f appelée canonique sous la forme $f = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec $[i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j]$.

Définition 3.1.6. Soit f une fonction positive étagée associée à une partition A_1, \dots, A_n (avec $f(x) = a_i$ si $x \in A_i$). On appelle intégrale de f par rapport à μ le nombre suivant

$$\int_E f(x) \mu(dx) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Ce nombre peut être $+\infty$. Une fonction positive étagée f est dite intégrable si $\int_E f(x) \mu(dx) < +\infty$. Dans cette définition, la valeur $+\inf$ prise sur un ensemble de mesure nulle est comptée pour "0" ("0" $\times +\inf = 0$). S'il n'y a pas de risque de confusion, on note aussi $\int_E f d\mu = \int_E f(x) \mu(dx)$.

Remarque 3.1.7.

1. La valeur de $\int_E f d\mu$ est indépendante de la partition associée à f .
2. L'intégrale de la fonction nulle est nulle.
3. L'intégrale de la fonction constante égale à c est $c\mu(E)$.

Proposition 3.1.8.

- i) Si $a > 0$ et $f \in \mathcal{F}_+^0$, alors $a \cdot f \in \mathcal{F}_+^0$ et $\int_E a \cdot f d\mu = a \cdot \int_E f d\mu$.
- ii) Si f et $g \in \mathcal{F}_+^0$, alors $f + g \in \mathcal{F}_+^0$ et $\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.
- iii) Si f et $g \in \mathcal{F}_+^0$ et $f \leq g$, alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Remarque 3.1.9. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E . La $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions sur E ssi $n \leq p \Rightarrow [\forall x \in E, f_n(x) \leq f_p(x)]$.

Définition 3.1.10. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que (f_n) converge simplement vers f si $\forall x, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Proposition 3.1.11. Clé de voûte de l'intégrale

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de fonctions de \mathcal{F}_+^0 qui converge simplement vers f (f non nécessairement dans \mathcal{F}_+^0). Alors

- Si $g \in \mathcal{F}_+^0$ vérifie $g \leq f$ alors $\int_E g d\mu \leq \lim \int_E f_n d\mu$
- Si $f \in \mathcal{F}_+^0$ alors $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On pose $g = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $A_i^n = \{x : x \in A_i \text{ et } (1 - \varepsilon)a_i \leq f_n(x)\}$. Partir de $\sum (1 - \varepsilon)a_i \mathbf{1}_{A_i^n} \leq f_n$, utiliser iii) de la proposition 3.1.8 et passer successivement à la limite $n \rightarrow +\infty$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'intégrale. \square

3.2 Intégrales des fonctions mesurables positives

Définition 3.2.1. L'ensemble des fonctions mesurables de (E, \mathcal{E}) dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ à valeurs positives est noté \mathcal{F}_+ .

Définition 3.2.2. Soit $f \in \mathcal{F}_+$. L'intégrale de f sur E par rapport à la mesure μ est définie par

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E \phi d\mu : \phi \in \mathcal{F}_+^0 \text{ et } \phi \leq f \right\}$$

Pour $B \in \mathcal{E}$, on note

$$\int_B f d\mu = \int_E f \mathbf{1}_B d\mu.$$

Remarque 3.2.3. Dans le cas de l'intégrale sur E tout entier on utilise souvent la notation : $\int f d\mu := \int_E f d\mu$.

Définition 3.2.4. Une fonction mesurable positive f est dite intégrable si $\int_E f d\mu < \infty$.

Proposition 3.2.5. Toute fonction de \mathcal{F}_+ est limite simple d'une suite croissante de fonctions de \mathcal{F}_+^0 .

Démonstration. Considérer pour $f \in \mathcal{F}_+$,

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}, k = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \\ n & \text{si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

et se convaincre par un dessin faisant figurer $n = 1$ et $n = 2$ sur une fonction en cloche. \square

Proposition 3.2.6. Si $f \in \mathcal{F}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\forall n, f_n \in \mathcal{F}_+^0$, alors

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Proposition 3.2.7. Croissance de l'intégrale.

Soient $f, g \in \mathcal{F}_+$ tel que $f \leq g$, alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Démonstration. On utilise les propositions 3.2.5 et 3.2.6. Soit (f_n) et (g_n) deux suites croissantes d'éléments de \mathcal{F}_+^0 convergent simplement respectivement vers f et g . On a alors $f_p \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, qui entraîne, d'après la définition 3.2.2 $\int_E f_p d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu = \int_E g d\mu$. On achève par une nouvelle utilisation de la proposition 3.2.6. \square

Cette proposition admet comme corollaire le théorème suivant.

Théorème 3.2.8. *Théorème de comparaison.*

Soient $f, g \in \mathcal{F}_+$. Si $f \leq g$ et g est intégrable alors f est intégrable.

Définition 3.2.9. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La mesure μ est dite avoir pour densité la fonction $f \geq 0$ sur \mathbb{R} (par rapport à λ) si $\forall \phi$ mesurable positive $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi d\mu = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) \lambda(dx) .$$

Ceci implique, en particulier, que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda .$$

Théorème 3.2.10. *Linéarité de l'intégrale.*

Soit $f, g \in \mathcal{F}_+$ et $a \geq 0$, alors :

$$\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

et

$$\int_E af d\mu = a \int_E f d\mu .$$

En particulier, si f et g sont intégrables alors $f + g$ aussi.

Théorème 3.2.11. *Convergence monotone ou théorème de Beppo-Levi.* Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de \mathcal{F}_+ qui converge simplement vers f ($f \in \mathcal{F}_+$ nécessairement). Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu .$$

Note : la suite $(\int_E f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. On a directement $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ car $f_n \leq f$.

On considère pour chaque n une suite $(g_{n,i})_i$ de fonctions de \mathcal{F}_+^0 qui converge vers f_n . On pose alors $h_i = \max\{g_{1,i}, \dots, g_{n,i}\}$, et $h = \sup_n \int_{\mathbb{N}} h_n$. On montre que $h \leq f$ (en partant de $h_i \leq \max\{f_1, \dots, f_i\} = f_i$) puis que $f \leq h$ (en partant de $g_{n,i} \leq \max(h_n, h_i) \leq h$). Enfin le résultat s'obtient et passant à la limite dans $\int_E h_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ et en se rappelant de ce que $h_n \leq f_n$. \square

Théorème 3.2.12. *Inégalité de Markov.*

Soit f une fonction positive mesurable sur (E, \mathcal{A}, μ) . Soit $a > 0$. Alors :

$$\mu(\{x \in E : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f(x) \mu(dx) .$$

Démonstration. On a $a \mathbf{1}_{\{y: f(y) \geq a\}} \leq f$ donc par théorème de comparaison (théorème 3.2.8) :

$$\int_E a \mathbf{1}_{\{y: f(y) \geq a\}} d\mu \leq \int_E f d\mu .$$

La fonction $a \mathbf{1}_{\{y: f(y) \geq a\}}$ est une fonction étagée et on calcule son intégrale :

$$\int_E a \mathbf{1}_{\{y: f(y) \geq a\}} d\mu = a \times \mu(\{y : f(y) \geq a\}) + 0 \times \mu(\{y : f(y) < a\}) .$$

D'où le résultat. \square

Théorème 3.2.13. *Lemme de Fatou*

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. On note $f = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors f est mesurable positive et

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu$$

Démonstration. Par définition de la \liminf , nous avons pour tout x ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right)$$

(cette limite existe dans $] -\infty, +\infty]$ car c'est la limite d'une suite décroissante). Par le théorème ??, les fonctions $x \mapsto \inf_{k \geq n} f_k(x)$ sont mesurables pour tout n . Par le corollaire 5.1.4, la fonction f est mesurable.

Soit $m \geq 1$. Soit pour tout n , $A_n = \{x : \forall p \geq n, f_p(x) \geq (f(x) - \frac{1}{m})_+\}$. Pour tout x , $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow f_n(x) \geq f(x) - \frac{1}{m}$. Nous avons donc $\bigcup_{n \geq 1} A_n = E$. On remarque que pour tout n , $A_n \subset A_{n+1}$. Et donc pour tout x ,

$$\left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mathbf{1}_{A_n}(x) \nearrow_{n \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+.$$

Donc, par théorème de convergence monotone,

$$\int_E \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mu(dx).$$

Pour tout n , nous avons

$$\int_E f_n(x) \mu(dx) \geq \int_E f_n(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) \geq \int_E \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx)$$

et donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) \mu(dx) \geq \int_E \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mu(dx).$$

Nous avons pour tout x , $\left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \nearrow_{m \rightarrow \infty} f(x)$. Donc, par théorème de convergence monotone, $\int_E \left(f(x) - \frac{1}{m} \right)_+ \mu(dx) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_E f(x) \mu(dx)$. Et donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) \mu(dx) \geq \int_E f(x) \mu(dx).$$

□

Exercice 3.2.14. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{F}_+ . Alors $\int_E \sum f_n d\mu = \sum \int_E f_n d\mu$.

3.3 Intégrales des fonctions mesurables de signe quelconque.

Soit une espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Elle peut toujours s'écrire $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- mesurables positives :

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 3.3.1. Une fonction f mesurable sur un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) est dite *intégrable* si f^+ et f^- le sont (voir définition 3.2.4 de l'intégrabilité des fonctions mesurables positives) et dans ce cas, on définit l'intégrale de f (sur E par rapport à μ) par

$$\int_E f(x) \mu(dx) := \int_E f^+(x) \mu(dx) - \int_E f^-(x) \mu(dx)$$

et, $\forall A \in \mathcal{A}$, l'intégrale de f sur A par

$$\int_A f(x) \mu(dx) := \int_E f(x) \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) .$$

Lemme 3.3.2. Soit f une fonction mesurable sur un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) et intégrable. Alors

$$\left| \int_E f(x) \mu(dx) \right| \leq \int_E |f(x)| \mu(dx)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left| \int_E f(x) \mu(dx) \right| &= \left| \int_E f^+(x) \mu(dx) - \int_E f^-(x) \mu(dx) \right| \\ &\leq \left| \int_E f^+(x) \mu(dx) \right| + \left| \int_E f^-(x) \mu(dx) \right| \\ &= \int_E f^+(x) \mu(dx) + \int_E f^-(x) \mu(dx) \\ &= \int_E |f(x)| \mu(dx) . \end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.3. Linéarité et croissance.

Pour l'intégrale d'une fonction de signe quelconque, on a encore la linéarité et la croissance comme dans la proposition 3.2.7 et le théorème 3.2.10.

3.4 Fonction de répartition

L'étude de la fonction de répartition d'une mesure va permettre de mettre en œuvre les théorèmes de ce chapitre.

Définition 3.4.1. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. On définit la fonction de répartition de μ par :

$$\begin{aligned} F_\mu : \mathbb{R} &\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]) . \end{aligned}$$

Proposition 3.4.2. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. La fonction F_μ est croissante, càdlàg (continue à droite avec une limite à gauche), $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) = \mu(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = 0$.

Démonstration. Soient $x \leq y$. Nous avons $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$ donc, par la proposition 2.2.7, $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]) \leq \mu(]-\infty, y]) = F_\mu(y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ suite de \mathbb{R} telle que $u_n \geq x$ et $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$. Pour tout n , $]-\infty, u_{n+1}] \subset]-\infty, u_n]$, $\bigcap_{n \geq 0}]-\infty, u_n] =]-\infty, x]$ et $\mu(]-\infty, u_0]) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty$, donc, par la proposition sur l'intersection décroissante (prop. 2.2.10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(]-\infty, u_n]) = \mu(\bigcap_{n \geq 0}]-\infty, u_n]) = \mu(]-\infty, x])$. En d'autres termes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_\mu(u_n) = F_\mu(x)$.

Ceci prouve que F est continue à droite par application du théorème de la limite monotone.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ suite de \mathbb{R} telle que $u_n < x$ et $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$. Pour tout n , $]-\infty, u_{n+1}] \supset]-\infty, u_n]$, $\bigcup_{n \geq 0}]-\infty, u_n] =]-\infty, x[$, donc par la propriété de réunion croissante (prop. 2.2.9), $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = \mu(]-\infty, x[)$. Ceci prouve que F_μ a une limite à gauche (égale à $\mu(]-\infty, x[)$).

On trouve également la limite de F_μ en $+\infty$ en utilisant la propriété de réunion croissante et la limite de F_μ en $-\infty$ en utilisant la propriété d'intersection décroissante. □

Remarque 3.4.3. Dans la proposition précédente, la limite à gauche en x de F_μ est $\mu(]-\infty, x])$ et $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$. Par la proposition 2.2.7, $\mu(]-\infty, x]) - \mu(]-\infty, x]) = \mu(\{x\})$. Donc $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

3.5 Exercices

3.5.1 Énoncés

- 1) Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$ et $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \{x : \exists n \text{ tel que } x \in A_n\}$
 - (a) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$.
 - (b) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)]$.
 - (c) Déterminer $\bigcap_{n \geq 0}]1 - 1/(n+1), 2]$.
 - (d) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[)$.
- 2) Soit E un ensemble et soient A_0, A_1, \dots des sous-ensembles de E .
 - (a) On suppose dans cette question que $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$. Posons pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (rappel : $A \setminus C = \{x \in A : x \notin C\}$). Montrer que les ensembles B_n sont deux à deux disjoints.
 - (b) On note : $\forall A \subset E, A^c = \{x \in E : x \notin A\}$. Montrer que $\bigcup_{n \geq 0} A_n^c = (\bigcap_{n \geq 0} A_n)^c$.
 - (c) Montrer que $(\bigcup_{n \geq 0} A_n^c)^c = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.
- 3) Soit A_1, \dots, A_n une partition de \mathbb{R} . Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, \dots, n\}\}$ est une tribu. (\mathcal{A} est constitué de toutes les réunions possibles d'ensembles A_i .)
- 4) Soit

$$\begin{aligned} \text{Card} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \text{Card}(A) = \text{le nombre d'éléments de } A. \end{aligned}$$

Montrer que Card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

- 5) On se donne un espace mesurable (E, \mathcal{A}) .

- (a) Soit $x \in E$, on note

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{A} &\rightarrow [0, +\infty] \\ B &\mapsto \delta_x(B) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in B \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que δ_x est une mesure sur (E, \mathcal{A}) . (Cette mesure s'appelle la mesure de Dirac en x .)

- (b) Soient x_1, \dots, x_k des éléments distincts de E et $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\rightarrow [0, +\infty] \\ B &\mapsto \mu(B) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(B) \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .

- 6) Soit $A = \bigcup_{n \geq 0} [n, n + \frac{1}{2^n}[$. Calculer $\lambda(A)$. (On se servira du fait que A est réunion d'ensembles disjoints et on utilisera la propriété d'additivité.)
- 7) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\{x\})$ (utiliser la propriété de croissance).

- (b) Soit $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lambda(\cup_{n \geq 0} \{x_n\})$$

(utiliser la propriété de sous-additivité).

- (c) En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Calculer $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.

- 8) Un ensemble de Cantor.

Pour $n \geq 1$, on note :

$$A_n = \{x \in [0, 1[, x \text{ n'a que des } 1 \text{ ou des } 5 \text{ dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\}$$

A_n est donc l'ensemble des $x \in [0, 1[$ qui s'écrivent $x = 0, u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \dots$ avec $u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}$.

- (a) Calculer $\lambda(A_n)$ pour tout n .

- (b) Soit $B = \cap_{n \geq 1} A_n$, calculer $\lambda(B)$ (utiliser la propriété d'intersection décroissante).

- 9) Mesures à densité.

- (a) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0, 1])$, $\mu([0, 2])$, $\mu([0, 1/2])$, $\mu(\{1/2\})$.

- (b) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{x>0}e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu(\mathbb{R})$, $\mu(\{1\})$, $\mu([0, 1])$, $\mu([1, +\infty[)$.

- (c) Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbf{1}_{x>0}xe^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0, 1])$.

- 10) (a) Montrer que $0 \leq \frac{1}{e^1} \int_{[0, e^1]} (\cos(x))^2 d\lambda(x) \leq 1$.

- (b) Montrer que $0 \leq \int_{[0, 2]} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\lambda(x) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$.

- (c) Montrer que $0 \leq \int_{[\pi/3, \pi/2]} \sin(\log(1+u)) d\lambda(u) \leq \frac{1}{2}$.

3.5.2 Corrigés

- (1) (a) $\cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)] = \emptyset$ car $1 \notin \cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$ et $\forall x \neq 1, \exists n$ tel que $x \notin]1, 1 + 1/(n+1)]$ et donc $x \notin \cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$

- (b) $\cap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)] =]1, 2]$

- (c) $\cap_{n \geq 0}]1 - 1/(n+1), 2] = [1, 2]$

- (d) $\cup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[=]0, +\infty[$ donc $f^{-1}(\cup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[) = f^{-1}(]0, +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

- (2) (a) Soient $k \neq n, k < n$. $A_k \subset A_{n-1}$ donc $\forall x \in A_k, x \notin B_n$. Comme $B_k \subset A_k$, alors $B_k \cap B_n = \emptyset$

- (b) — Si $x \in (\cap_{n \geq 0} A_n)^c$ alors $x \notin \cap_{n \geq 0} A_n$ donc $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $\exists n$ tel que $x \in A_n^c$. Donc $x \in \cup_{n \geq 0} A_n^c$.

- Si $x \in \cup_{n \geq 0} A_n^c$ alors $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $x \notin \cap_{n \geq 0} A_n$. Donc $x \in (\cap_{n \geq 0} A_n)^c$.

- Conclusion : $\cup_{n \geq 0} A_n^c = (\cap_{n \geq 0} A_n)^c$.

- (c) Par passage au complémentaire dans le résultat précédent : $(\cup_{n \geq 0} A_n^c)^c = \cap_{n \geq 0} A_n$.

- (3) On rappelle que " A_1, \dots, A_n partition de \mathbb{R} " signifie que les ensembles A_i sont 2 à 2 disjoints et que $A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{R}$.

- (i) $\mathbb{R} = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

- (ii) Soit $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c \in \mathcal{A}$.

- (iii) Si on fait une réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{A} :

$$\cup_{n \geq 0} (\cup_{i \in I_n} A_i) = \bigcup_{\left[i \in \cup_{n \geq 0} I_n\right]} A_i \in \mathcal{A}.$$

(4) Fait en cours

(5) (a) Remarque : δ_x s'appelle la mesure de Dirac en x .

(i) δ_x est bien une fonction de \mathcal{A} dans $[0, +\infty]$

(ii) $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$

(iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A} : A_0, A_1, \dots$

$$\begin{aligned} \delta_x\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in \bigcup_{n \geq 0} A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} = 1 & \text{si } \exists n \text{ tel que } x \in A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \sum_{n \geq 0} \delta_x(A_n) \end{aligned}$$

car les A_n sont 2 à 2 disjoints (et donc au plus un seul d'entre eux contient x , c'est à dire au plus un seul d'entre eux est tel que $\delta_x(A_n) = 1$).

(b) On remarque que $\forall i, \delta_{x_i}$ est une mesure par la question précédente.

(i) μ est bien une fonction de \mathcal{A} dans $[0, +\infty]$

(ii) $\mu(\emptyset) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(\emptyset) = 0$

(iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A} : A_0, A_1, \dots$:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \sum_{n \geq 0} \delta_{x_i}(A_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(A_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) . \end{aligned}$$

(6) Les ensembles $[n, n + \frac{1}{2^n}[$ sont 2 à 2 disjoints donc $\lambda(A) = \sum_{n \geq 0} \lambda([n, n + \frac{1}{2^n}[) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$ (somme de série géométrique).

(7) (a) $\forall \varepsilon > 0, \{x\} \subset [x, x + \varepsilon]$ donc $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x, x + \varepsilon]) = \varepsilon$. Donc $\lambda(\{x\}) = 0$.

(b) $\lambda(\cup_{n \geq 0} \{x_n\}) \leq \sum_{n \geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0$ par la question précédente.

(c) \mathbb{Q} est dénombrable donc on peut écrire $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ donc $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ par la question précédente. Nous avons $\lambda([0; 1]) < \infty$ donc, par la prop. 2.2.7, $\lambda([0; 1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0; 1]) - \lambda(\mathbb{Q}) = 1$.

(8) (a) On remarque que

$$\begin{aligned} A_n &= \{[x, x + 10^{-n}[: x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}\} \\ &= \bigcup_{x \in B_n} [x, x + 10^{-(n+1)}[\end{aligned}$$

où $B_n = \{x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1, 5\}\}$. On remarque que B_n est fini et que les intervalles $([x, x + 10^{-n}[)_{x \in B_n}$ sont 2 à 2 disjoints. Donc :

$$\begin{aligned} \lambda(A_n) &= \sum_{x \in B_n} \lambda([x, x + 10^{-n}[) \\ &= \text{Card}(B_n) \times 10^{-n} = 2^n \times 10^{-n} . \end{aligned}$$

(b) $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$ donc par intersection décroissante : $\lambda(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(A_n) = 0$.

(9) (a) $\mu([0, 1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$

$$\mu([0, 2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, 2]}(x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$\mu([0, 1/2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, 1/2]}(x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) dx = \int_0^{1/2} 1 dx = 1/2$$

$$\mu(\{1/2\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x) dx = 0 \text{ car } \lambda(\{1/2\}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad \mu(\mathbb{R}) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx = 1 \\
\mu(\{1\}) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x) \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x) e^{-1} dx = 0 \text{ car } \lambda(\{1\}) = 0 \\
\mu([0, 1]) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1} \\
\mu([1, +\infty[) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,+\infty]}(x) \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} dx = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \mu([0, 1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{x>0}(x) x e^{-x^2/2} dx = \int_0^1 x e^{-x^2/2} dx = \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^1 = (1 - e^{-1/2})$$

(10) On utilise à chaque fois la propriété de croissance de l'intégrale (prop. 3.2.7).

$$\text{(a)} \quad \text{Pour tout } x, 0 \leq |\cos(x)| \leq 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{e^1} \int_{[0, e^1]} (\cos(x))^2 d\lambda(x) \leq \frac{1}{e^1} \int_0^{e^1} 1 d\lambda(x) = 1.$$

$$\text{(b)} \quad \text{Pour tout } x \in [0, 2], 0 \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{e^0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ donc } 0 \leq \int_{[0,2]} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Chapitre 4

Ensembles négligeables

Définition 4.0.1. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Un élément A de \mathcal{A} est dit négligeable (pour la mesure μ) si $\mu(A) = 0$.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Elle est dite μ -presque partout nulle si $\exists A \in \mathcal{A}$ négligeable tel que $x \in A^c \Rightarrow f(x) = 0$. Une définition équivalente est : il existe B μ -négligeable tel que $\{x, f(x) \neq 0\} \subset B$.

On dira aussi que f est : presque partout nulle, μ -presque sûrement nulle, presque sûrement nulle, p.p. nulle, p.s. nulle. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A^c) = 0$. On dira que l'on est dans A pour p.t. (presque tout) x de E , μ -p.s. (presque sûrement) en $x \in E$, ...

Remarque 4.0.2. Une fonction positive d'intégrale finie est finie p.p.

On part de l'inégalité de Markov. Soit $A_n = \{x; f(x) \geq n\}$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n\mu(A_n) \leq \int f d\mu$. Comme le membre de droite est fini, on a que $\mu(A_1)$ est fini. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$ et $\mu(\{x; f(x) = +\infty\}) = \mu(\cap A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$.

Théorème 4.0.3. Espace complet.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Il existe une tribu \mathcal{B} sur E et une mesure ν sur \mathcal{B} telles que

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
- si $A \in \mathcal{A}$ alors $\mu(A) = \nu(A)$
- $\forall N \subset E$ tel que $N \subset A$ avec $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$, on a $N \in \mathcal{B}$ et $\nu(N) = 0$.

La tribu \mathcal{B} est alors appelée tribu complétée de \mathcal{A} et ν est appelée mesure complétée de μ . Un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) pour lequel

$$[N \subset A \text{ avec } A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0] \Rightarrow [N \in \mathcal{A}]$$

est appelé un espace mesuré complet.

Théorème 4.0.4. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et f fonction mesurable sur cet espace. Alors f est p.p. nulle $\Rightarrow \int_E f(x)\mu(dx) = 0$. Et la réciproque est vraie pour $f \geq 0$.

Démonstration. — Si f est p.p. nulle alors $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et f est nulle sur A^c . Dans ce cas, la partie positive de f est aussi presque partout nulle. On réalise la démonstration pour la partie positive. La partie négative se traite similairement. Soit $\mathcal{E}(f)$ l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures à f . Soit $\phi \in \mathcal{E}(f)$ et B_1, \dots, B_p partition associée à ϕ . On note $B'_i = B_i \cap A$ et $B''_i = B_i \cap A^c$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$. Les ensembles $B'_1, \dots, B'_p, B''_1, \dots, B''_p$ sont deux à deux disjoints et ϕ est constante sur chacun d'entre eux. Pour $x \in B'_i$, on note $\phi(x) = c_i$. Pour tout x dans B''_1, \dots, B''_p , $f(x) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\mu(B'_i) \leq \mu(A)$ (par proposition 2.2.7) donc $\mu(B'_i) = 0$. Donc

$$\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0 \times \mu(B''_1) + \dots + 0 \times \mu(B''_p) + c_1 \times \mu(B'_1) + \dots + c_p \times \mu(B'_p) = 0.$$

Cela est vrai pour toute $\phi \in \mathcal{E}(f)$ donc $\int_E f(x)\mu(dx) = 0$.

- Soit maintenant $f \geq 0$. Si $\int_E f(x)\mu(dx) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $A_\varepsilon = \{x \in E : f(x) \geq \varepsilon\} = f^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$. L'ensemble $[\varepsilon, +\infty[$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ car c'est un intervalle. La fonction f est mesurable donc $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Soit ϕ étagée telle que

$$\phi(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x \in A_\varepsilon^c \\ = \varepsilon & \text{si } x \in A_\varepsilon \end{cases}.$$

L'ensemble A_ε^c appartient à \mathcal{A} . Pour tout x , $\phi(x) \leq f(x)$ donc

$$0 \leq \int_E \phi(x)\mu(dx) \leq \int_E f(x)\mu(dx)$$

donc $\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0$. Par ailleurs,

$$\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0 \times \mu(A_\varepsilon^c) + \varepsilon \times \mu(A_\varepsilon)$$

donc $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Les ensembles $A_{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient $A_{1/n} \subset A_{1/(n+1)}$. Donc par la proposition sur la réunion croissante (proposition 2.2.9), $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = \mu(\cup_{n \geq 1} A_{1/n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{1/n}) = 0$. Donc f est nulle p.p. □

Proposition 4.0.5. *Intégrale sur un ensemble négligeable.*

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $A \in \mathcal{A}$ négligeable. Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. On suppose que $\int_E f(x)\mu(dx)$ est définie (ce qui a lieu, par définition, quand f^+ et f^- sont d'intégrales finies) ainsi que $\int_E g(x)\mu(dx)$. On suppose que $f(x) = g(x)$ si $x \notin A$ (donc f et g sont presque partout égales). Alors

$$\int_A f(x)\mu(dx) = 0,$$

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \int_E g(x)\mu(dx).$$

Démonstration. — Par définition,

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\mu(dx).$$

Donc par le théorème précédent, $\int_A f(x)\mu(dx) = 0$.

- Par linéarité, $\int_E f(x)\mu(dx) - \int_E g(x)\mu(dx) = \int_E (f(x) - g(x))\mu(dx)$. La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc, par le théorème précédent $\int_E (f(x) - g(x))\mu(dx) = 0$. □

On retient de la proposition précédente que deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale.

Chapitre 5

Théorèmes limites et applications

On se donne (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré complet. On supposera à partir de maintenant, pour des raisons techniques, que E est réunion dénombrable d'éléments de \mathcal{A} de mesure finie. On dit alors que E est σ -fini.

5.1 Stabilité de la mesurabilité par passage à la limite.

Définition 5.1.1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que (f_n) converge presque partout vers f (et on note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.p.} f$) s'il existe A négligeable tel que $[x \notin A] \Rightarrow [f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)]$.

Exemple 5.1.2. Prenons $E = [0; 1]$ et $f_n(x) = x^{1/n}$ ($n \geq 1$). Pour $x \neq 0$, nous avons $f_n(x) = \exp(\log(x)/n)$. La suite $\log(x)/n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et la fonction \exp est continue donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction g définie sur $[0; 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Remarque 5.1.3. La convergence simple implique la convergence presque partout.

Corollaire 5.1.4. Si on a une suite (f_n) de fonctions $E \rightarrow [0, +\infty[$ mesurables (positives) telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.p.} f$ alors f est mesurable.

5.2 Théorèmes de convergence pour les intégrales.

Théorème 5.2.1. *Théorème de convergence monotone*

Soit (f_n) une suite croissante (c'est à dire que $\forall x, \forall n, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$) de fonctions mesurables positives $E \rightarrow [0, +\infty[$ convergeant presque partout vers une fonction f . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu(dx) .$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0, 1[$. La suite $(\int_E f_n(x) \mu(dx))$ est croissante (par croissance de l'intégrale) donc elle a une limite $l \in [0, +\infty]$. Soit pour tout n , $A_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha f(x)\}$. Pour tout n et pour tout x , $f_n(x) \geq f_n(x) \mathbf{1}_{A_n}(x)$ donc

$$\int_E f_n(x) \mu(dx) \geq \int_E f_n(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) = \int_{A_n} f_n(x) \mu(dx) \geq \alpha \int_{A_n} f(x) \mu(dx) \quad (5.2.1)$$

Montrons que

$$\int_{A_n} f(x) \mu(dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_E f(x) \mu(dx) . \quad (5.2.2)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit ϕ une fonction étagée telle que $\phi \leq f$, $\int_E \phi(x) \mu(dx) \geq \int_E f(x) \mu(dx) - \varepsilon$ (il en existe par définition de l'intégrale). Nous avons

$$\int_E \mathbf{1}_{A_n}(x) \phi(x) \mu(dx) \leq \int_E f(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) \leq \int_E f(x) \mu(dx) . \quad (5.2.3)$$

On suppose que ϕ se décompose sur une certaine partition B_1, \dots, B_p :

$$\phi(x) = \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x) .$$

Alors $\forall n$, $\phi \mathbf{1}_{A_n}$ est une fonction étagée qui se décompose en

$$\phi(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) = 0 \times \mathbf{1}_{A_n^c}(x) + \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \mathbf{1}_{B_i \cap A_n}(x) .$$

Et donc

$$\int_E \phi(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) = 0 \times \mu(A_n^c) + \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \times \mu(B_i \cap A_n) \quad (5.2.4)$$

Pour tout n , nous avons $A_n \subset A_{n+1}$ et donc $\forall i$, $B_i \cap A_n \subset B_i \cap A_{n+1}$. Par la propriété de convergence croissante de la mesure,

$$\mu(B_i \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(\cup_{n \geq 0} (B_i \cap A_n)) = \mu(B_i \cap \cup_{n \geq 0} A_n) . \quad (5.2.5)$$

On remarque que $\cup_{n \geq 0} A_n = \{x \in E : \exists n, f_n(x) \geq \alpha f(x)\} \supset \{x \in E : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\}$. Donc $\{x \in E : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\}^c \supset (\cup_{n \geq 0} A_n)^c$. Donc $0 = \mu(\{x \in E : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)\}^c) \geq \mu((\cup_{n \geq 0} A_n)^c)$. Donc $\mu((\cup_{n \geq 0} A_n)^c) = 0$, $\mu(B_i \cap (\cup_{n \geq 0} A_n)^c) \leq \mu((\cup_{n \geq 0} A_n)^c) = 0$. Puis $\mu(B_i) = \mu(B_i \cap (\cup_{n \geq 0} A_n)^c) + \mu(B_i \cap (\cup_{n \geq 0} A_n))$ donc $\mu(B_i) = \mu(B_i \cap \cup_{n \geq 0} A_n)$. On déduit donc de (5.2.4) et (5.2.5)

$$\int_E \phi(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) \mu(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \times \mu(B_i) = \int_E \phi(x) \mu(dx) .$$

Donc par (5.2.3) et en utilisant la définition de ϕ

$$\begin{aligned} \int_E f(x) \mu(dx) - \varepsilon &\leq \int_E \phi(x) \mu(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \phi(x) \mathbf{1}_{A_n}(x) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f(x) \mu(dx) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f(x) \mu(dx) \\ &\leq \int_E f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc nous avons donc montré (5.2.2). Alors, par (5.2.1),

$$l \geq \alpha \int_E f(x) \mu(dx) . \quad (5.2.6)$$

Pour presque tout x , $f_n(x) \nearrow_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ donc $f_n(x) \leq f(x)$. Soit $\forall n$, \bar{f}_n définie par

$$\bar{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } f_n(x) \leq f(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et \bar{f}_n sont égales presque partout donc leurs intégrales sont égales. La fonction \bar{f}_n vérifie $\bar{f}_n(x) \leq f(x)$ ($\forall x$) donc en particulier

$$\int_E f_n(x) \mu(dx) = \int_E \bar{f}_n(x) \mu(dx) \leq \int_E f(x) \mu(dx) .$$

Donc

$$\int_E f(x) \mu(dx) \geq l .$$

Et comme l'équation (5.2.6) est vraie pour tout $\alpha \in]0, 1[$, ceci finit la démonstration. \square

Théorème 5.2.2. *Théorème de convergence dominée (appelé aussi théorème de Lebesgue)*

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur E . Si :

- il existe g positive mesurable et intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x)$,
p.p.
- et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.p.} f$

alors

- $\int_E |f(x)| \mu(dx) < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| \mu(dx) = 0$.

Ce qui implique en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu(dx) .$$

Démonstration. Pour simplifier la démonstration, nous allons supposer que (f_n) converge simplement vers f . Nous avons alors pour tout x , $|f(x)| \leq g(x)$, donc $\int_E |f(x)| \mu(dx) < \infty$. Pour tout x , $2g(x) - |f(x) - f_n(x)| \geq 0$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g(x) - |f(x) - f_n(x)|) = 2g(x)$ donc par le lemme de Fatou

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g(x) - |f(x) - f_n(x)|) \mu(dx) \geq \int_E 2g(x) \mu(dx) .$$

Mais par linéarité de l'intégrale,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g(x) - |f(x) - f_n(x)|) \mu(dx) = \int_E 2g(x) \mu(dx) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) .$$

Donc

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) &= 0 . \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n(x) \mu(dx) - \int_E f(x) \mu(dx) \right| &= \left| \int_E f(x) - f_n(x) \mu(dx) \right| \\ (\text{par lemme 3.3.2}) &\leq \int_E |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 . \end{aligned}$$

\square

Exemple 5.2.3. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. Soit $f(k) = \frac{1}{(k+1)^2}$ et pour tout $n \geq 0$, $f_n(k) = \frac{1}{(k+1)^2} \mathbf{1}_{k \leq n}$. Pour tout k , $f_n(k) \nearrow_{n \rightarrow +\infty} f(k)$. Fixons $n \geq 0$, la fonction f_n est étagée et son intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f_n(x) \text{card}(dx) &= \frac{1}{1} \times \text{card}(\{0\}) + \frac{1}{2^2} \times \text{card}(\{1\}) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \times \text{card}(\{n\}) + 0 \times \text{card}(\{n+1, n+2, \dots\}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} . \end{aligned}$$

Par théorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{N}} f_n(x) \text{card}(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{N}} f(x) \text{card}(dx)$$

et donc

$$\int_{\mathbb{N}} f(x) \text{card}(dx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} .$$

On peut ainsi montrer que pour n'importe quelle fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{N}} g(x) \text{card}(dx) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)$$

et donc, pour l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$, calculer une intégrale d'une fonction positive revient à faire la somme d'une série.

Exemple 5.2.4. Soit l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Soient les fonctions (pour $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} f_n & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto 1 - x^{1/n} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.p.} f$ (sur $[0, 1]$) avec f la fonction nulle. Pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq 1$ qui est une fonction intégrable sur $[0, 1]$. En effet

$$\int_{[0,1]} 1 dx = 1 < \infty .$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f_n(x) \mu(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

5.3 Lien avec l'intégrale de Riemann

Théorème 5.3.1. Lien intégrale de Lebesgue/intégrale de Riemann.

Quand (E, \mathcal{A}, μ) est le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et f est mesurable et intégrable sur E , l'intégrale $\int_E f(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda(dx)$ que nous venons de définir s'appelle l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Dans le cas où f a une intégrale de Riemann sur $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$, elle admet aussi une intégrale de Lebesgue sur $[a, b]$ et nous avons l'égalité suivante entre les deux types d'intégrales

$$\int_{[a,b]} f(x) \lambda(dx) = \int_a^b f(x) dx .$$

C'est en général avec cette formule que l'on calculera les intégrales.

Démonstration partielle. On définit la subdivision régulière $x(n, k) = a + (b - a)2^{-n}k$, $k = 0, \dots, 2^n$. On définit aussi $I(n, k) =]x(n, k-1), x(n, k)]$ pour $k > 1$, et $I(n, 1) = [x(n, 0), x(n, 1)]$.

On pose aussi $u(n, k) = \inf_{x \in [x(n, k-1), x(n, k)]} f(x)$ et $v(n, k) = \sup_{x \in [x(n, k-1), x(n, k)]} f(x)$. Enfin on définit $g_n = \sum u(n, k) \mathbf{1}_{I(n, k)}$ et $h_n = \sum v(n, k) \mathbf{1}_{I(n, k)}$. On a alors les faits suivants

- (g_n) tend vers une fonction g en croissant, (h_n) tend vers une fonction h en décroissant
- Puisque f est Riemann intégrable, f est bornée. Dans ce cas, g_n et h_n , qui sont de signe quelconque sont majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. D'après la convergence dominée de Lebesgue, $\int g_n d\lambda$ tend vers $\int g d\lambda$ et $\int h_n d\lambda$ tend vers $\int h d\lambda$.
- Les fonctions h_n et g_n sont à la fois étagées et en escalier. Leurs intégrales de Riemann et de Lebesgue sont les mêmes.

— Puisque f est Riemann intégrable, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int h_n d\lambda$ (caractérisation par les sommes de Darboux). On a donc $\int (h - g) d\lambda = 0$.
 On a donc $g \leq f \leq h$, avec g et h mesurables, intégrables, et $\int (h - g) d\lambda = 0$.
 On en déduit dans un premier temps que f est mesurable pour la tribu complétée. En effet, puisque $h = g$ μ -p.p., on a $B = \{x, g(x) \neq h(x)\} \subset A$, avec $\lambda(A) = 0$. De plus, si on pose $\phi = f - g$. On a alors $f = g + \phi$, avec

$$\phi(x) : \begin{cases} = 0 & x \in B \subset A \\ > 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On vérifie alors que

$$\phi^{-1}([\alpha, +\infty[) : \begin{cases} \subset B & \text{si } \alpha > 0 \\ = E & \text{si } \alpha \leq 0, \end{cases}$$

Puisque B ($\subset A$, avec $\lambda(A) = 0$, est inclu dans un négligeable) est dans la tribu complétée, on a le résultat de mesurabilité.

Finalement, f est intégrable, car majorée en valeur absolue (par la constante $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$) sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, on a que $\int f d\mu = \int g d\mu + \int f - g d\mu$. La conclusion provient de $0 \leq \int (f - g) d\mu \leq \int (h - g) d\mu = 0$. □

Théorème 5.3.2. *Lien intégrale de Lebesgue/intégrale de Riemann impropre.*

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On considère l'intégrale Riemann impropre en b convergente suivante $I = \int_a^b f(x) dx$.

On a encore

$$\int_{[a, b]} f(x) \mu(dx) = \int_a^b f(x) dx$$

dans les deux cas suivants :

1. la fonction f est positive sur $[a, b]$
2. la fonction f n'est pas de signe constant, mais son l'intégrale de Riemann impropre en b est absolument convergente, c'est à dire, la fonction $t \mapsto \int_a^t |f(x)| dx$ admet une limite à gauche finie en b .

Ce résultat s'adapte aisément à une intégrale de Riemann impropre en a .

Démonstration. On introduit la suite de fonctions $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{[a, n]}$.

1. La suite f_n est mesurable positive. Le théorème de la convergence monotone s'applique directement et donne le résultat.
2. La suite $|f_n|$ est mesurable positive, et converge en croissant vers $|f|$. La suite $\int |f_n| d\mu$, admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ d'après l'équivalence Riemann-Lebesgue sur un intervalle fini, et tend vers $\int |f| d\mu$. On en déduit que $|f_n|$ est dominée par $|f|$, et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue s'applique et donne le résultat escompté. □

Exemple 5.3.3. Soient les fonction suivantes définies sur $[0; \pi]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), \\ g(x) &= \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \neq \pi/2 \\ 0 & \text{si } x = \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions f et g sont égales p.p. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(x) dx &= \int_0^\pi f(x) dx \\ &= [-\cos(x)]_0^\pi = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

5.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où \mathcal{I} est un intervalle de \mathbb{R} . On définit une fonction F sur \mathcal{I} par $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u, x) \lambda(dx)$. Cette fonction F s'appelle, suivant les auteurs, une « intégrale à paramètre », « intégrale dépendant d'un paramètre », ... Dans cette partie, nous allons démontrer diverses propriétés des intégrales à paramètre à l'aide du théorème de convergence dominée.

Théorème 5.4.1. Continuité sous l'intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- (ii) $\exists u_{\infty}$ tel que pour presque tout x , $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_{∞}
- (iii) $\exists g$ positive intégrable telle que $\forall u \in \mathbb{R}, |f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout en x .

Alors la fonction F définie par $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u, x) \lambda(dx)$ est définie en tout point $u \in \mathbb{R}$ et est continue en u_{∞} .

Démonstration. Il suffit de montrer que $F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(u_{\infty})$ pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers u_{∞} . Prenons donc une telle suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Posons $\forall n, f_n(x) = f(u_n, x)$. Nous avons $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.p.} h$ avec $h(x) := f(u_{\infty}, x)$ par (ii). Les fonctions f_n sont mesurables par (i). Par (iii), nous avons $\forall n, \forall x, |f_n(x)| \leq g(x)$ avec g intégrable. Donc par théorème de convergence dominée,

$$F(u_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \lambda(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) \lambda(dx) = F(u_{\infty}).$$

□

Corollaire 5.4.2. Théorème de continuité « globale » sous l'intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall u \in \mathcal{I}, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- (ii) pour presque tout x , $u \mapsto f(u, x)$ est continue
- (iii) $\exists g$ positive intégrable telle que $\forall u \in \mathbb{R}, |f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout en x .

Alors la fonction F définie par $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u, x) \lambda(dx)$ est définie et continue en tout point $u \in \mathcal{I}$.

Remarque 5.4.3. Ces théorèmes restent vrais si on remplace $u \in \mathbb{R}$ par $u \in I$ avec I intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Exemple 5.4.4. Convolution

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue. La convolée de f et ϕ est définie par

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u - x) f(x) \lambda(dx)$$

Notons $h(u, x) = \phi(u - x) f(x)$. Pour tout x , $u \mapsto \phi(u - x) f(x)$ est continue. Pour tout u , $|\phi(u - x) f(x)| \leq \|\phi\|_{\infty} |f(x)|$ et $\int_{\mathbb{R}} \|\phi\|_{\infty} |f(x)| \lambda(dx) < \infty$ par hypothèse. On rappelle que $\|\phi\|_{\infty} := \sup_{v \in \mathbb{R}} \phi(v)$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(u - x) f(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale, $f \star \phi$ est continue sur \mathbb{R} .

Théorème 5.4.5. Dérivation sous l'intégrale

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , $u_{\infty} \in I$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est intégrable
- (ii) pour presque tout x , $\frac{\partial f}{\partial u}(u_{\infty}, x)$ existe
- (iii) $\exists g$ positive intégrable telle que $\forall u \in I, |f(u, x) - f(u_{\infty}, x)| \leq g(x)|u - u_{\infty}|$ presque partout en x .

Alors $F(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u, x) \lambda(dx)$ existe pour tout $u \in I$ et est dérivable en u_{∞} . De plus

$$F'(u_{\infty}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_{\infty}, x) \lambda(dx).$$

Démonstration. L'existence de F est assurée par (i).

En ce qui concerne la dérivation, il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers u_∞ avec $\forall n, u_n \neq u_\infty$, $\frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \lambda(dx)$. Prenons donc une telle suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Posons $\forall n$

$$\phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}.$$

Par (ii), $\phi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, \cdot)$. Par (iii), nous avons pour p.t. x , $|\phi_n(x)| \leq g(x)$. Donc par théorème de convergence dominée,

$$\frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty} \lambda(dx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \lambda(dx).$$

□

Corollaire 5.4.6. *Dérivation « globale » sous l'intégrale*

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} . Soit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall u \in I, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable
- (ii) $\exists u_0 \in I, x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable
- (iii) pour p.t. $x, u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I
- (iv) $\forall u, \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x)$ avec g intégrable presque partout en x .

Alors $F(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u, x) \lambda(dx)$ existe et est dérivable sur I . De plus

$$F'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \lambda(dx).$$

Démonstration. Pour tout $u \in I$,

$$\begin{aligned} |f(u, x)| &\leq |f(u_0, x)| + |f(u, x) - f(u_0, x)| \\ &\leq |f(u_0, x)| + |u - u_0| \sup_{v \in [u, u_0]} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(v, x) \right| \\ &\leq |f(u_0, x)| + |u - u_0| g(x). \end{aligned}$$

Donc, par (i) et (iii), F est bien définie. Pour tous $u, u_\infty \in I$, pour tout x ,

$$\begin{aligned} |f(u, x) - f(u_\infty, x)| &\leq |u - u_\infty| \sup_{v \in [u, u_\infty]} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(v, x) \right| \\ &\leq g(x) |u - u_\infty| \end{aligned}$$

par (iii). Et le théorème précédent finit la démonstration.

□

Exemple 5.4.7. Soit, pour $u > 0$, $F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t} dt$. La fonction $t \mapsto e^{-1 \times t} \times \frac{\sin(t)}{t}$ est L -intégrable sur $]0, +\infty[$ car $\left| e^{-1 \times t} \times \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq e^{-t}$ (car $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1$) et $t \mapsto e^{-t}$ est L -intégrable sur $]0, +\infty[$ (équivalence dans le cas de fonction positive avec Riemann généralisé du théorème 5.3.2). Pour tout $t > 0$, $u \mapsto e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial}{\partial u} \left(e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t} \right) = -e^{-ut} \sin(t)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $u > \varepsilon$, $|-e^{-ut} \sin(t)| \leq e^{-\varepsilon t}$ (car $|\sin(t)| \leq 1$) qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc par théorème de dérivation globale, nous avons pour $u > \varepsilon$

$$F'(u) = \int_{[0, +\infty[} -e^{-ut} \sin(t) d\mu(t).$$

L'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty} -e^{-ut} \sin(t) dt$ est Riemann généralisée en $+\infty$, absolument convergente. Cela est vrai $\forall \varepsilon > 0$ donc $\forall u > 0$, on a donc, d'après le Théorème 5.3.1, $F'(u) = \int_0^{+\infty} -e^{-ut} \sin(t) dt$. Calculons

$$\begin{aligned} F'(u) &= [e^{-ut} \cos(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u e^{-ut} \cos(t) dt \\ &= -1 + [u e^{-ut} \sin(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u^2 e^{-ut} \sin(t) dt \\ &= -1 - u^2 F'(u) . \end{aligned}$$

Donc $F'(u) = \frac{-1}{1+u^2}$. Donc il existe une constante C telle que $F(u) = C - \arctan(u)$. Posons pour $n \in \mathbb{N}^$, $f_n(t) = \exp(-nt) \frac{\sin(t)}{t}$. Les fonctions f_n sont mesurables. Pour tout $t > 0$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|f_n(t)| \leq e^{-t} \times 1$ qui est L -intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc, par théorème de convergence dominée, $F(n) = \int f_n(t) \mu(dt) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$ donc $C = \frac{\pi}{2}$. Donc*

$$F(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u) .$$

5.5 Exercices

5.5.1 Énoncés

1) Correspondance Riemann-Lebesgue. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{x^2 n^2+1} dx$ (exercice type)

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx$

(e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^2 n(x)} e^{-|x|} dx$.

(f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(x/n) e^{-x} dx$

2) On pose : $I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (exercice type).

(a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbf{1}_{x \leq n}$. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g_n(x) = (n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.)

(b) En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α .

3) Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour toute suite positive $(u_n)_{n \geq 0}$, on a : $\sum_{n \geq 0} u_n = \int_{\mathbb{N}} u_n \mu(dn)$.

(a) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \right]$.

(b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right]$.

4) Inégalité de Jensen.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ convexe et dérivable deux fois (et donc $\phi'' \geq 0$). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et telle que $\int_E f(x) d\mu(x) < +\infty$.

(a) Montrer que $\forall z, y \in I$, $\phi(y) \geq \phi(z) + \phi'(z)(y - z)$

(b) En prenant $z = \int_E f(t) d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$\phi\left(\int_E f(x) d\mu(x)\right) \leq \int_E \phi \circ f(x) d\mu(x).$$

- (c) En déduire que pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{[0,1]} |f(x)| \mu(dx) < +\infty$:

$$\left(\int_{[0,1]} |f(x)| \mu(dx) \right)^2 \leq \int_{[0,1]} f(x)^2 \mu(dx).$$

- 5) (a) Montrer que $\forall z \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.
 (b) En déduire que $\forall y > 0, x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 (c) Pour tout $y > 0$, on pose

$$F(y) = \int_{[0, +\infty]} \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \mu(dx).$$

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(y)$. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2.$$

- (d) En déduire $F(y)$ à une constante près.
 (e) Calculer cette constante en regardant $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(1/n)$.
 6) On considère pour $n \geq 0$ la série $\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$ avec $u_{n,k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{2n^2 + 6n + 1}{n^2 + 5n + \pi} \right)^k$.
 (a) Montrer que cette série est convergente ($\forall n \geq 0$). On notera I_n sa limite.
 (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

5.5.2 Corrigés

- (1) (a) — **Exercice type. Cet exercice fixe la méthodologie que vous devez suivre. Les autres corrections ci-après fournissent des "indices".**

On veut calculer $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{x^2 n^2 + 1} dx$. On note $f_n(x)$ la fonction à intégrer.

- i. Faire le lien avec l'intégrale de Lebesgue. Pour tout $x \geq 1$, $|f_n(x)| = \frac{n^2 + 1}{x^2 n^2 + 1} \leq \frac{n^2 + 1}{x^2 n^2} \leq \frac{n^2 + n^2}{x^2 n^2} \leq \frac{2}{x^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ est **absolument** R-intégrable au sens généralisé (avec pb en $+\infty$), donc f_n est à son tour L- et R- intégrable sur $[1, +\infty]$, et les deux intégrales coïncident. On est donc ramené à la recherche de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, +\infty]} \frac{n^2 + 1}{x^2 n^2 + 1} d\mu(x)$
- ii. Recherche du bon théorème. Ici il semble facile d'après la question précédente de procéder par le théorème de la convergence dominée. Il faut vérifier les deux hypothèses : domination (p.p.) et convergence simple (p.p.). Convergence simple : pour tout x , $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x^2}$, avec $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ Lebesgue intégrable d'après la question précédente. De plus pour tout n on a le majorant indépendant de n suivant : $|f_n(x)| \rightarrow \frac{1}{x^2}$. D'après ce qui précède, $\frac{1}{x^2}$ est L-intégrable.
- iii. Application de la convergence dominée : $I = \int_{[1, +\infty]} \frac{1}{x^2}$. Cette intégrale est associée à une intégrale généralisée de Riemann absolument convergente. On a donc identité entre les deux intégrales et on obtient $I = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\alpha = 1$

qui est intégrable sur $[1; +\infty[$.

— Pour tout $x \geq 1$, $\frac{n^2 + 1}{x^2 n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$.

Donc, par théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{x^2 n^2 + 1} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-1/x \right]_1^{+\infty} = 1$.

- (b) — $\forall x \in]0, 1]$, $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(1/nx) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $[0, 1]$

— $\forall x \in]0, 1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(1/nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par convergence dominée à argumenter, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx = 0$

(c) — $\forall x \in [0, 1]$, $\left|1 - \frac{x}{n}\right|^n \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$.

— On a $\forall x \in [0, 1]$, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp(n \log(1 - \frac{x}{n})) = \exp(n(-x/n + o(1/n))) = \exp(-x + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}$ par continuité de la fonction exponentielle.

Par convergence dominée, on sait directement que

$$\int_{[0,1]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

(d) — $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $] -\infty, +\infty[$,

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

Par convergence dominée à argumenter,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

(e) — $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^{1+\cos^2 n(x)} e^{-|x|} \leq e^{2-|x|}$$

qui est une fonction intégrable sur \mathbb{R} .

— Pour p.t. $x \in \mathbb{R}$, $e^{1+\cos^2 n(x)} e^{-|x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1-|x|}$.

Par convergence dominée à argumenter,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^2 n(x)} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|} dx = 2e.$$

(f) — $\forall x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \leq (\pi/2)e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

— Pour tout $x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(x/n)e^{-x} dx = 0.$$

(2) (a) On a pour $0 \leq x \leq n$, $f_{n+1}(x)/f_n(x) = \exp(g_n(x))$ et

$$g'_n(x) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{x}{(1-x/n)(1-x/(n+1))} \geq 0$$

pour $0 \leq x \leq n$ donc g_n croissante sur $[0, n]$. $g_n(0) = 0$ donc $g_n(x) \geq 0 \forall x \in [0, n]$. Donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \forall x \in [0, n]$. C'est également vrai sur $[n, +\infty]$ donc f_n suite de fonctions croissante.

(b) On a $\int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} d\mu(x) = \int_{[0,n]} f_n(x) d\mu(x)$. De plus, $\forall x \geq 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x+\alpha x}$ donc par convergence monotone, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} f_n(x) d\mu(x) = \int_{[0,+\infty]} e^{-x+\alpha x} d\mu(x)$.

On va à présent calculer cette intégrale en passant par une intégrale de Riemann généralisée. Soit $\alpha \neq 1$, puisque la fonction $g(x) = e^{-x+\alpha x}$ est positive et Riemann intégrable sur tout intervalle $[0, n]$, on a directement que $I = \int_{[0,+\infty]} e^{-x+\alpha x} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x+\alpha x}}{1-\alpha}\right]_0^n$, on a donc :

$$I(\alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (3) (a) Pour tout n, k , $0 \leq \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n , $\frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n}$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

- (b) Pour tout n, k , $\left| \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n , $\frac{\sin(n/k)}{2^n} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n} \right] = 0.$$

- (4) Inégalité de Jensen.

- (a) $\forall z, y \in I$ avec $z \leq y$, $\phi(y) - \phi(z) = \int_z^y \phi'(t) dt \geq \int_z^y \phi'(z) dt$ (car ϕ convexe), donc $\phi(y) - \phi(z) \geq \phi'(z)(y - z)$
 (b) On prend $z = \int_E f(t) d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inégalité précédente et on a :

$$\phi(f(x)) \geq \phi \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) + \phi' \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) (y - z).$$

On intègre ensuite par rapport à $d\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \int \phi(f(x)) d\mu(x) &\geq \int \phi \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) d\mu(x) \\ &\quad + \int \phi' \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) (y - z) d\mu(x) \\ &= \phi \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) \\ &\quad + \phi' \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right) \left(\int f(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x) \right) \\ &= \phi \left(\int_E f(t) d\mu(t) \right). \end{aligned}$$

- (c) La fonction $\phi : x \in [0, 1] \mapsto x^2$ est convexe. Donc par le résultat précédent, pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable,

$$\left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

- (5) (a) $0 \leq 1 - e^{-z} = \int_0^z e^{-t} dt \leq \int_0^z 1 dt = z$
 (b) Par la question précédente, $\forall y > 0$, $0 \leq \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \leq y$ et $\leq \frac{1}{x^2}$ donc $0 \leq \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \leq \inf(y, 1/x^2)$ donc $x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable
 (c) Soit $\varepsilon > 0$,

- $\forall y > \varepsilon$, $x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable
- $\forall x > 0$ (et donc pour presque tout $x \geq 0$), $y \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est dérivable
- $\forall x > 0$, $\forall y > \varepsilon$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} \right) = e^{-x^2 y}$ et $|e^{-x^2 y}| \leq e^{-\varepsilon x^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$

Donc (théorème de dérivation globale et équivalence entres intégrales impropres dans le cas de fonctions positives) F est dérivable sur $]\varepsilon, +\infty[$ et F' vaut :

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx$$

Cela est vrai $\forall \varepsilon > 0$ donc cette dérivée est valable pour tout $y \in]0, +\infty[$. Par changement de variable ($u = \sqrt{y}x$), $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

(d) On en déduit $F(y) = \sqrt{\pi y} + C$ pour une certaine constante C .

(e) $F(1/n) = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ avec $f_n(x) = \frac{1-e^{-x^2/n}}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \inf(1, 1/x^2)$ (voir question 1). Donc, par théorème de convergence dominée :

$$F(1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $C = 0$.

- (6) (a) Pour $n \geq 0$, $0 \leq \frac{2n^2+6n+1}{n^2+5n+\pi} \leq 6n^2 + 6n + 6n^2 + n + 1 = 6$. Donc $0 \leq u_{n,k} \leq 6^k/k!$ et cette dernière quantité est le terme général d'une série convergente (quand on somme sur k) (série exponentielle). Donc $\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$ est convergente.
- (b) On sait par l'exercice 3 que I_n peut être vue comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage sur \mathbb{N} .
- Pour tout k , $u_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2^k/k!$.
 - Pour tout k , $u_{n,k} \leq 6^k/k!$ qui est sommable.
- Donc par théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} 2^k/k! = e^2$.

Chapitre 6

Mesure produit et théorèmes de Fubini

On se donne deux espaces mesurés (E, \mathcal{A}, μ) et (E', \mathcal{A}', μ') .

6.1 Théorèmes de Fubini et Fubini-Tonelli

Théorème 6.1.1. *Sur l'ensemble $E \times E'$, il existe une « plus petite tribu » \mathcal{C} contenant tous les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$. On note $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$.*

Il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \mu'$ sur \mathcal{C} telle que, si $(A, A') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$, $\mu \otimes \mu'(A \times A') = \mu(A)\mu'(A')$.

Définition 6.1.2. *La mesure $\mu \otimes \mu'$ définie par le théorème ci-dessus s'appelle la mesure produit de μ et μ' . La tribu \mathcal{C} définie par le théorème ci-dessus s'appelle la tribu produit.*

Définition 6.1.3. *On notera $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ (produit d fois).*

La mesure $\lambda \otimes \lambda$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesure les aires, la mesure $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ mesure les volumes, ...

Théorème 6.1.4. *Théorème de Fubini-Tonelli*

Soit $f : E \times E' \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive. On définit les fonctions ϕ et ψ sur E et E' respectivement par

$$\phi(x) = \int_{E'} f(x, y) \mu'(dy), \quad \psi(y) = \int_E f(x, y) \mu(dx) .$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_E \phi(x) \mu(dx) = \int_{E \times E'} f(x, y) \mu \otimes \mu'(dx, dy) = \int_{E'} \psi(y) \mu'(dy)$$

(et cette quantité $\in [0, +\infty]$).

On retient que pour des fonctions positives, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

Théorème 6.1.5. *Théorème de Fubini (ou Fubini-Lebesgue)*

Soit $f : E \times E' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une fonction mesurable. On définit les fonctions f_1 et f_2 sur E et E' respectivement par

$$f_1(x) = \int_{E'} |f(x, y)| \mu'(dy), \quad f_2(y) = \int_E |f(x, y)| \mu(dx) .$$

(i) Si l'une des fonctions f_1 ou f_2 est intégrable alors l'autre l'est aussi et dans ce cas, f , ϕ et ψ sont intégrables. De plus, nous avons alors

$$\int_E \phi(x) \mu(dx) = \int_{E \times E'} f(x, y) \mu \otimes \mu'(dx, dy) = \int_{E'} \psi(y) \mu'(dy) .$$

(ii) Si f est intégrable (contre la mesure $\mu \otimes \mu'$) alors f_1 et f_2 sont intégrables et nous avons encore l'égalité ci-dessus.

Exemple 6.1.6. Soit

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{x+y \leq 1} . \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable positive. Par Fubini-Tonelli (et équivalence Riemann-Lebesgue dans le cas de fonctions continues sur un intervalle borné),

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \lambda \otimes \lambda(dx, dy) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x, y) \lambda(dx) \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_0^1 e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{x+y \leq 1} dx \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_0^1 e^{-x} \mathbf{1}_{x+y \leq 1} dx \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{[0,1]} e^{-y} \left(\int_0^{1-y} e^{-x} dx \right) \lambda(dy) \\ &= \int_0^1 e^{-y} \left(1 - e^{-(1-y)} \right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y} - e^{-1} dy \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} . \end{aligned}$$

Notation 6.1.7. Intégrale multiple

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, on notera indifféremment

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) \lambda^{\otimes d}(dx_1, \dots, dx_d) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) du \end{aligned}$$

(on a remplacé, dans cette écriture, (x_1, \dots, x_d) par u).

Définition 6.1.8. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La mesure μ est dite avoir pour densité la fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ (par rapport à $\lambda^{\otimes d}$) si $\forall \phi$ mesurable positive $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f(x) \lambda^{\otimes d}(dx) .$$

Ceci implique, en particulier, que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mu(B) = \int_B f(x) \lambda(dx) .$$

Exemple 6.1.9. Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy} . \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable et n'est pas de signe constant. Calculons pour tout $y > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx &= \int_0^{+\infty} 2e^{-2xy} - e^{-xy} dx \\ &= \left[\frac{-e^{-2xy} + e^{-xy}}{y} \right]_0^{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc pour p.t. $y \in [0, 1]$, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 0$ donc, par le théorème 4.0.4,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = 0 .$$

Calculons pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \left[\frac{-e^{-2xy} + e^{-xy}}{x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} . \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, $\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} > 0$. Nous avons pour p.t. $x \in [0, 1]$, $\int_0^1 f(x, y) dx = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} > 0$ donc, par le théorème 4.0.4,

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy > 0 .$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy .$$

Exemple 6.1.10. *Interversion de somme et d'intégrale*

Soit $f : E \times E' \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable positive. Nous supposons dans cet exemple que $(E', \mathcal{A}', \mu') = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 5.2.3, pour toute fonction g positive sur E' ,

$$\int_{E'} g(x) \mu'(dx) = \sum_{k \geq 0} g(k) .$$

Par Fubini-Tonelli, nous avons alors

$$\int_E \left(\sum_{k \geq 0} f(x, k) \right) \mu(dx) = \sum_{k \geq 0} \left(\int_E f(x, k) \mu(dx) \right) .$$

6.2 Changement de variable

Définition 6.2.1. Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^d . Un difféomorphisme ϕ de U dans V est une bijection $\phi : U \rightarrow V$ qui est \mathcal{C}^1 telle que ϕ^{-1} est \mathcal{C}^1 aussi.

Rappel : \mathcal{C}^1 veut dire que la fonction est continue et ses dérivées partielles du premier ordre existent et sont continues. De manière plus explicite, la fonction

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (u_1, \dots, u_d) &\mapsto (\phi_1(u_1, \dots, u_d), \dots, \phi_d(u_1, \dots, u_d)) \end{aligned}$$

est \mathcal{C}^1 si ϕ_1, \dots, ϕ_d sont continues et $\forall i, j$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}$ existe et est continue.

Définition 6.2.2. Si ϕ est un difféomorphisme de U dans V (deux ouverts de \mathbb{R}^d), on appelle matrice jacobienne la matrice suivante (fonction de (u_1, \dots, u_d))

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_d) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u_1, \dots, u_d) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_d) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_d}(u_1, \dots, u_d) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u_1, \dots, u_d) & \dots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u_1, \dots, u_d) \end{bmatrix}$$

Théorème 6.2.3. *Théorème de changement de variable.*

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^d . Soit $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme. Soit f une fonction intégrable $V \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la fonction $f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V f(y) dy = \int_U (f \circ \phi)(x) \times |\det(J_\phi(x))| dx$$

(Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans les calculs.)

Remarque 6.2.4. *Lien avec le changement de variable en dimension 1.*

Soient $]a, b[,]c, d[$ deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit $\phi :]a, b[\rightarrow]c, d[$ un difféomorphisme tel que $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow b} \phi(x) = d$. Nous connaissons le changement de variable pour les intégrales de Riemann, pour $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f \circ \phi(y) \phi'(y) dy .$$

Et d'après le théorème précédent,

$$\int_{[c,d]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f \circ \phi(y) |\phi'(y)| dy$$

car la matrice jacobienne est ici une matrice 1×1 . Supposons $a \leq b$, $c \geq d$. La fonction ϕ est donc monotone décroissante donc $\forall y, \phi'(y) \leq 0$. D'après le Théorème 5.3.1,

$$\int_c^d f(x) dx = - \int_{[c,d]} f(x) dx$$

ce qui est cohérent avec le fait que

$$\int_a^b f \circ \phi(y) \phi'(y) dy = - \int_{[a,b]} f \circ \phi(y) |\phi'(y)| dy .$$

Donc, en dimension 1, on peut faire le changement de variable avec le théorème ci-dessus ou directement sur l'intégrale de Riemann.

Exemple 6.2.5. *Changement de variables en coordonnées polaires.*

Soit

$$\begin{aligned} \phi :]0, +\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho, \theta) &\rightarrow (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) . \end{aligned}$$

L'application ϕ est un difféomorphisme (on l'admet sans démonstration). Calculons sa matrice jacobienne

$$J_\phi(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

Nous avons donc $|\det J_\phi|(\rho, \theta) = |\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta)| = |\rho|$. Donc, par le théorème 6.2.3

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty]} \int_{[0,+\infty]} e^{-(x^2+y^2)} \mu(dx) \mu(dy) &= \int_{[0,+\infty]} \int_{[0,\pi/2]} e^{-\rho^2} |\rho| \mu(d\theta) \mu(d\rho) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \mu(d\rho) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty]} \int_{[0,+\infty]} e^{-(x^2+y^2)} \mu(dx) \mu(dy) &= \int_{[0,+\infty]} e^{-x^2} \left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} \mu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} \mu(dy) \right) \times \int_{[0,+\infty]} e^{-x^2} \mu(dx) \\ &= \left(\int_{[0,+\infty]} e^{-y^2} \mu(dy) \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^2 . \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \quad (6.2.1)$$

Exemple 6.2.6. *Convolution*

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Rappelons que la convolée de f et g est $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mu(dy)$. Montrons que cette fonction est bien définie (c'est à dire que $f \star g < \infty$ p.p.). Nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)|\mu(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mu(dy) \right| \mu(dx) \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \times |g(x-y)|\mu(dy)\mu(dx) \\
 \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \times |g(x-y)|\mu(dx) \right) \mu(dy) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\mu(dx)\mu(dy) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\mu(dx) \right) \mu(dy) .
 \end{aligned}$$

Pour y fixé, nous avons par changement de variable en dimension 1 ($u = x - y$, $x = u + y$, $dx = du$)

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\mu(dx) &= \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\mu(dx) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |g(u)|\mu(du)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)|\mu(dx) &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)|\mu(du) \right) \mu(dy) \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)|\mu(du) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mu(dy) \right) < \infty
 \end{aligned}$$

car f et g sont intégrables. Par la remarque 4.0.2, $|f \star g|$ est donc finie presque partout, donc $f \star g$ est p.p. finie.

Fixons x et opérons un changement de variable $y = x - u$ dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mu(dy) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)(-du) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)du \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)du .
 \end{aligned}$$

Donc

$$f \star g = g \star f .$$

Exemple 6.2.7. *Volume de la boule unité*

On note $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ la boule unité de \mathbb{R}^2 . Calculons

$$\begin{aligned}
 \mu \otimes \mu(B) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_B(x, y) \mu \otimes \mu(dx, dy) \\
 (\text{Fubini-Tonelli}) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{x^2+y^2 \leq 1} \mu(dy) \right) \mu(dx) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} 1_{|x| \leq 1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \right) \mu(dx) \\
 &= \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-x^2} dx \\
 (\text{changement de variable } x = \sin u) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(u) \cos(u) du \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) + 1 du \\
 &= \left[\frac{\sin(2u)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \\
 &= \pi .
 \end{aligned}$$

Exemple 6.2.8. Calculons $I = \int_{[0, +\infty[\times [0, +\infty[} e^{-(x+y)^2 - (x-y)^2} \mu(dx) \mu(dy)$. Changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} , \quad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} .$$

Le difféomorphisme est $\phi : (u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, |v| \leq u\} \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Sa matrice jacobienne est

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Donc

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, |v| \leq u} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} \mu(du) \mu(dv) \\
 (\text{Fubini-Tonelli et Théorème 5.3.1}) &= \int_{u \in [0, +\infty[} \frac{e^{-u^2}}{2} \left(\int_{-u}^u e^{-v^2} dv \right) \mu(du) .
 \end{aligned}$$

Posons $F(u) = \int_{-u}^u e^{-v^2} dv = 2 \int_0^u e^{-v^2} dv$ (par symétrie). Nous avons $F'(u) = 2e^{-u^2}$. Donc (lien Riemann généralisé / Lebesgue pour l'intégrale d'une fonction positive du Théorème 5.3.2)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} F'(u) F(u) du \\
 &= \left[\frac{1}{8} F(u)^2 \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{8} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right)^2 \\
 (\text{par l'égalité 6.2.1}) &= \frac{\pi}{8} .
 \end{aligned}$$

6.3 Exercices

6.3.1 Énoncés

1) (a) Montrer que pour tout $y > 0$:

$$\int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dx) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{[0,+\infty]} \left(\int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dx) \right) \mu(dy) = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Montrer que pour tout $x > 0, x \neq 1$:

$$\int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dy) = \frac{2 \log(x)}{x^2 - 1}.$$

(d) En déduire que :

$$\int_{[0,+\infty]} \frac{\log(x)}{x^2 - 1} \mu(dx) = \frac{\pi^2}{4}.$$

2) On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mu(dx) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En utilisant le changement de variable $u = x+y$, $v = x-y$, calculer :

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} \mu(dx) \mu(dy).$$

6.3.2 Corrigés

(1) (a) D'après l'équivalence Riemann Lebesgue impropre dans le cas de fonction positive en $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx &= \frac{1}{(1+y)} \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \arctan(x\sqrt{y}) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}. \end{aligned}$$

(b) D'après Fubini-Tonelli et l'équivalence Riemann Lebesgue impropre en $+\infty$ dans le cas de fonction positive, l'intégrale vaut

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty]} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) \mu(dy) &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+u^2} 2du \\ &= \pi [\arctan(u)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

où l'on a fait un changement de variable en $u = \sqrt{y}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$.

(c) Pour tout $x > 0, x \neq 1$, on a, en utilisant l'équivalence Riemann Lebesgue impropre en $+\infty$ dans le cas de fonction positive, et par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y} dy \\ &= \frac{1}{1-x^2} [\log(1+y) - \log(1+x^2y)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\log \left(\frac{1+y}{1+x^2y} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \log \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{2 \log(x)}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

- (d) Par Fubini-Tonelli et puisque $\int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dy) = \frac{2 \log(x)}{x^2-1}$ pour p.t. $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty]} \int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dx) \mu(dy) &= \int_{[0,+\infty]} \int_{[0,+\infty]} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mu(dy) \mu(dx) \\ \frac{\pi^2}{2} &= \int_{[0,+\infty]} \frac{2 \log(x)}{x^2-1} \mu(dx) \\ \frac{\pi^2}{4} &= \int_{[0,+\infty]} \frac{\log(x)}{x^2-1} \mu(dx) . \end{aligned}$$

- (2) Changement de variable :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} . \end{cases}$$

L'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) \end{aligned}$$

est bijective. On calcule le jacobien (c'est à dire que l'on écrit dans une matrice les dérivées partielles de ϕ en u et v) :

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

On fait le changement de variable dans l'intégrale et on utilise Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} \mu(dx) \mu(dy) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} |\det(J(u, v))| \mu(du) \mu(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} \mu(du) \mu(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \mu(du) \\ &= \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$