TD 4 – Intégrales de fonctions mesurables

▷ **Exercice 1.** Pour chacune des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} f_n \,\mathrm{d}\mu$.

1.1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=\sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

1.2. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=|\cos(x)|^{\frac{1}{n}}e^{-x}$.

1.3. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n\cos x\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

▷ **Exercice 2.** Soit F la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$$

2.1. Préciser I le domaine de définition de F.

2.2. Calculer $F(0)$.

2.3. Calculer $\lim_{t\to+\infty}F(t)$.

▷ **Exercice 3.** On pose

$$I=\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

3.1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I.

3.2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{1+x^2y}\,\mathrm{d}\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\pi}{2}.$$

3.3. En déduire que $I=\dfrac{\pi^2}{2}$.

3.4. Retrouver ce résultat directement en utilisant le changement de variables :

$$\begin{cases} v=x\sqrt{y} \\ t=\sqrt{y} \end{cases}$$