EXERCICES SUPPLEMENTAIRES CORRIGES DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
FILTRAGE

Filtrage Linéaire

Exercice 1 : Filtre intégrateur

Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $S_x(f)$. Soit :

$$y(t) = \int_t^{a+t} x(u)du, \ avec\ a > 0$$

1. Montrer que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est $x(t)$ et déterminer sa réponse impulsionnelle.
   Il existe plusieurs manières de répondre à cette question
   (a) si $x(t) = e^{j2\pi ft}$ alors $y(t) = \int_t^{a+t} e^{j2\pi fu}du = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j2\pi fa} - 1\right)e^{j2\pi ft} = H_a(f)x(t)$. On a bien une opération de filtrage linéaire entre le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$ avec un filtre de réponse en fréquence $H_a(f) = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j2\pi fa} - 1\right)$.
   (b) $y(t) = \int_t^{a+t} x(u)du = \int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_a\left(u - \left(t + \frac{a}{2}\right)\right)du = \int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_a\left(\left(t + \frac{a}{2}\right) - u\right)du = x(t) * h(t)$ avec $h(t) = \Pi_a\left(t + \frac{a}{2}\right)$
   (c) si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t) = \int_t^{a+t} \delta(u)du = 1$ si $-a < t < 0$, $= 0$ sinon. D'où $h(t) = \Pi_a\left(t + \frac{a}{2}\right)$. Il faut alors montrer que nous avons bien un filtre, c'est-à-dire que l'on a bien $y(t) = h(t) * x(t)$: $h(t) * x(t) = \Pi_a\left(t + \frac{a}{2}\right) * x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_a\left(t + \frac{a}{2} - u\right)du = \int_t^{t+a} x(u)du$: OK.
   (d) on peut également dériver : $y'(t) = \{x(t+a) - x(t)\}$, d'où par transformée de Fourier $j2\pi fY(f) = \left\{e^{j2\pi fa}X(f) - X(f)\right\}$ et donc $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{e^{j2\pi fa}-1}{j2\pi f} = ae^{j\pi fa}sinc(\pi fa)$. Ce qui donne par transformée de Fourier inverse : $h(t) = \Pi_a\left(t + \frac{a}{2}\right)$.
2. Ce filtre est-il réalisable ?
   Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est réelle (OK ici), qu'elle vérifie la condition de stabilité $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt < \infty$ (OK ici : $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt = a$) et qu'elle est causale (non OK ici : pour $t < 0$ on a $h(t) \neq 0$). Ce filtre n'est pas réalisable.
3. Calculer la moyenne de $y(t)$.
   $E[y(t)] = E\left[\int_t^{a+t} x(u)du\right] = \int_t^{a+t} E[x(u)]\,du = 0$
4. Donner la densité spectrale de puissance de $y(t)$, $S_y(f)$, en fonction de $S_x(f)$.
   $S_y(f) = |H_a(f)|^2 S_x(f) = a^2 sinc^2(\pi fa)S_x(f)$ (voir relations de Wiener Lee)

Exercice 2 : Canal de propagation multitrajets

1. Soit le signal déterministe défini par :

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad \lambda > 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

   (a) Calculer la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ (en distinguant les cas $\tau \geq 0$ et $\tau \leq 0$).
   Ce signal est déterministe à énergie finie : $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,dt = \frac{A^2}{2\lambda}$
   D'où : $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt = \frac{A^2}{2\lambda}e^{\lambda\tau} & \tau < 0 \\ \int_\tau^{+\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt = \frac{A^2}{2\lambda}e^{-\lambda\tau} & \tau \geq 0 \end{cases} = \frac{A^2}{2\lambda}e^{-\lambda|\tau|}\forall\tau$
   (b) Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$, puis sa densité spectrale de puissance et retrouver enfin l'expression de sa fonction d'autocorrélation déterminée précédemment.
   Dans ce cas $S_x(f) = |X(f)|^2$ avec $X(f) = \int_0^{+\infty} Ae^{-\lambda t}e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{\lambda+j2\pi f}$, d'où $S_x(f) = \frac{A^2}{\lambda^2+4\pi^2 f^2}$ et donc $R_X(\tau) = TF^{-1}[S_X(f)] = \frac{A^2}{2\lambda}e^{-\lambda|\tau|}$ (tables de TF). On retrouve bien le résultat précédent.

2. Considérons un système multitrajet d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k x(t-\tau_k)$$

   (a) Montrer que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$. Exprimer la réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence de ce filtre.
   $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{M} a_k \delta(t-\tau_k) * x(t)$: nous avons bien une relation de filtrage linéaire entre $x(t)$ et $y(t)$, avec $h(t) = \sum\limits_{k=1}^{M} a_k \delta(t-\tau_k)$ et $H(f) = \sum\limits_{k=1}^{M} a_k e^{-j2\pi f \tau_k}$.
   Remarque : on peut également le montrer en plaçant $x(t) = e^{-j2\pi f t}$ à l'entrée du filtre et en montrant qu'on obtient alors $y(t) = x(t)H(f)$.

   (b) Exprimer la fonction d'intercorrélation entre $y(t)$ et $x(t)$ notée $R_{yx}(\tau)$ en fonction de $R_x(\tau)$.
   $R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{M} a_k R_x(\tau - \tau_k)$ (utilisation d'une des relations de Wiener Lee)

   (c) Si le signal déterministe de la question 1 est mis à l'entrée du système multitrajet, à quelle(s) condition(s) sur λ et les τ_k peut-on alors identifier les paramètres du systèmes $\{a_k, \tau_k\}_{k=1,M}$ à partir de la fonction d'intercorrélation $R_{yx}(\tau)$?
   La détection de la position et de la hauteur des pics qui apparaissent dans $R_{yx}(\tau)$ permet de retrouver les a_k et τ_k qui caractérisent le canal multitrajet et pourrait donc permettre de corriger les distorsions introduites.

Exercice 3 : Calcul de la puissance d'un bruit filtré

Soit un signal aléatoire stationnaire $X(t)$, de densité spectrale de puissance $S_X(f)$ représentée en vert sur la figure 1. Ce signal est bruité par un bruit blanc, $B(t)$, de densité spectrale de puissance $S_B(f) = \alpha \ \forall f$, α étant une constante. Le signal bruité, $X(t) + B(t)$, passe dans un filtre linéaire de type passe-bas idéal, de fréquence de coupure f_c : voir figure 1, où $H(f)$ représente la réponse en fréquence du filtre passe-bas.

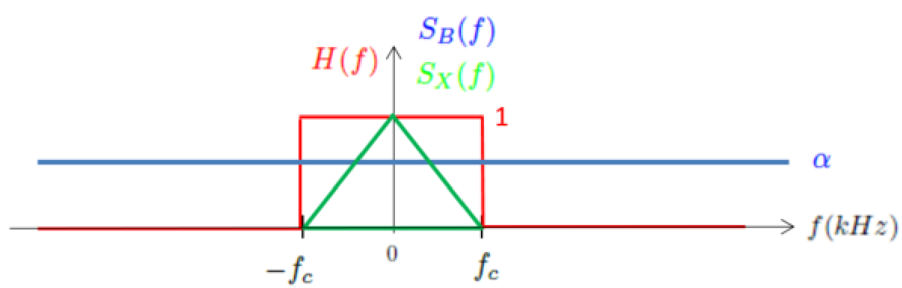

FIGURE 1 –

1. Calculer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre.
   Le signal n'est pas abimé par le filtre. La puissance du signal en sortie du filtre est donc identique à celle en entrée et est donnée par $\int_{\mathbb{R}} S_X(f)df = f_c$. La densité spectrale de puissance du bruit en sortie du filtre est donnée par $|H(f)|^2 S_B(f)$ (voir relations de Wiener Lee), d'où sa puissance : $\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 S_B(f)df = 2\alpha f_c$. Le rapport signal sur bruit est donc donné par $RSB = \frac{f_c}{2\alpha f_c} = \frac{1}{2\alpha}$.
2. Evaluer le rapport signal sur bruit en sortie du filtre en décibels pour $\alpha = 1V^2/Hz$.
   $RSB_{dB} = 10\log_1 0SNR = 10\log_{10}\frac{1}{2} = -3dB$.
3. Que signifie un rapport signal sur bruit négatif en décibels ?
   Qu'il y a plus de bruit que de signal. La puissance du bruit est deux fois plus grande que celle du signal pour un rapport signal sur bruit de -3 dB

Exercice 4 : Annulateur de bruit

Soit $X(t)$ un bruit blanc stationnaire, réel, de densité spectrale de puissance $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$ $\forall f$ (N_0 est une constante), attaquant le système décrit par la figure 2, où $H_1(f)$ est un filtre passe-bande défini par :

$$\begin{aligned} H_1(f) &= 1 \qquad \textit{pour} \qquad |f| \in \left[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}\right] \\ &= 0 \qquad \textit{ailleurs} \end{aligned}$$

et $H_2(f)$ une ligne à retard T réglable définie par :

$$H_2(f) = e^{-i2\pi T f}$$

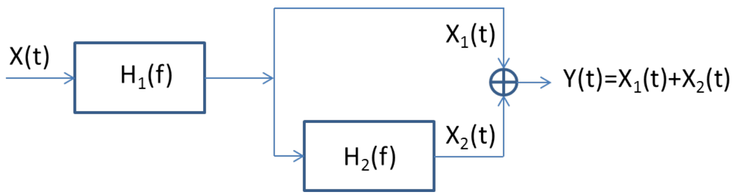

FIGURE 2 – Annulateur de bruit

1. Calculer la puissance du signal de sortie, $Y(t)$, en fonction de la puissance et de l'autocorrélation du signal $X_1(t)$, respectivement notées P_{X_1} et $R_{X_1}(\tau)$.
   $P_Y = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[(X_1(t) + X_2(t))^2\right] = E\left[X_1^2(t)\right] + E\left[X_2^2(t)\right] + 2E\left[X_1(t)X_2(t)\right] = P_{X_1} + P_{X_2} + 2R_{X_1X_2}(0)$
   Ecrivons $X_2(t)$ en fonction de $X_1(t)$:
   $H_2(f) = e^{j2\pi f T}$, d'où $h_2(t) = \delta(t-T)$ et donc $X_2(t) = X_1(t) * h_2(t) = X_1(t-T)$ (on a bien une ligne à retard)
   On a donc : $R_{X_1X_2}(0) = E\left[X_1(t)X_2(t)\right] = E\left[X_1(t)X_1(t-T)\right] = R_{X_1}(T)$ et $P_{X_1} = P_{X_2}$ car $S_{X_2}(f) = |H_2(f)|^2 S_{X_1}(f) = S_{X_1}(f)$, d'où : $P_Y = 2\left(P_{X_1} + R_{X_1}(T)\right)$
2. Calculer P_{X_1} en fonction de N_0 et de Δf.
   $P_{X_1} = \int_{\mathbb{R}} S_{X_1}(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_1(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \times 2\Delta f = N_0 \Delta f$
3. Calculer $R_{X_1}(\tau)$ en fonction de N_0 et de Δf.
   $R_{X_1}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{X_1}(f)\right] = TF^{-1}\left[\frac{N_0}{2}\left(\prod_{\Delta f}(f - f_0) + \prod_{\Delta f}(f + f_0)\right)\right] = N_0 \Delta f sinc(\pi \Delta f \tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$
4. En déduire l'expression de la puissance de $Y(t)$ en fonction de N_0, Δf et T.
   $P_Y = 2N_0\Delta f\left(1 + sinc(\pi\Delta f T)\cos(2\pi f_0 T)\right)$
5. Que se passe-t-il lorsque :
   - $T \approx \frac{1}{2f_0}$?
     $\cos(2\pi f_0 T) \simeq -1$ et $sinc(\pi \Delta f T) \simeq 1$, d'où $P_Y \simeq 0$: grâce au filtre de réponse en fréquence $H_2(f)$ on a donc annulé le bruit $X(t)$
   - $T \gg \frac{1}{\Delta f}$?
     $sinc(\pi\Delta f T) \simeq 0$, d'où $P_Y \simeq 2N_0\Delta f = P_{X_1} + P_{X_2}$: $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont décorrélés.

Filtrage non linéaire

Exercice 1 : Filtre quadrateur

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = X^2(t)$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près.
   On prend $X_1(t) = X(t)$, $Y_1(t) = X^2(t) = Y(t)$ et $X_2(t) = X(t-\tau)$, $Y_2(t) = X^2(t-\tau) = Y(t-\tau)$
   En utilisant le théorème de Price on arrive alors à $\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = 4R_X(\tau)$ et donc $R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$, où K est une constante.

2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire Z gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :

   $$E\left[Z^{2n}\right] = (2n)!!\sigma^{2n} \; avec \; (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1$$

   En déduire le constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.
   $R_Y(0) = 2R_X^2(0)+K = 2\left(\sigma^2\right)^2+K = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[X^4(t)\right] = (4)!!\sigma^4 = 3\sigma^4$, d'où $K = \sigma^4$ et donc $R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau)+\sigma^4$.

Exercice 2 : Filtre non linéaire de type cubique

On considère le filtre non linéaire sans mémoire d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = X^3(t)$$

On suppose que $X(t)$ est un processus aléatoire, réel, Gaussien, stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

1. En utilisant le théorème de Price, donner une équation différentielle liant la fonction d'autocorrélation de $Y(t)$, notée $R_Y(\tau)$, et $R_X(\tau)$. En déduire une expression de $R_Y(\tau)$ en fonction de $R_X(\tau)$ à une constante additive près.
   on prend $X_1(t) = X(t)$, $Y_1(t) = X^3(t) = Y(t)$ et $X_2(t) = X(t-\tau)$, $Y_2(t) = X^3(t-\tau) = Y(t-\tau)$
   En utilisant le théorème de Price on arrive alors à $\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = 9R_{X^2}(\tau) = 9\left(2R_X^2 + R_X^2(0)\right)$ (voir filtre quadrateur) et donc $R_Y(\tau) = 6R_X^3(\tau) + 9R_X^2(0)R_X(\tau) + K$, où K est une constante.

2. On rappelle le résultat suivant, valable pour une variable aléatoire Z gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :

   $$E\left[Z^{2n}\right] = (2n)!!\sigma^{2n} \; avec \; (2n)!! = (2n-1) \times (2n-3) \times ... \times 3 \times 1$$

   En déduire le constante additive intervenant dans la relation entre $R_Y(\tau)$ et $R_X(\tau)$.
   $R_Y(0) = 15R_X^3(0) + K = 15\left(\sigma^2\right)^3 + K = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[X^6(t)\right] = (6)!!\sigma^6 = 15\sigma^6$, d'où $K = 0$ et donc $R_Y(\tau) = 6R_X^3(\tau) + 9R_X^2(0)R_X(\tau)$.

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t}\rightleftharpoons\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{Ш}_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\,\text{Ш}_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$