Logique des prédicats

Logique et Structure

- Objectif mathématique : Modélisation des structures algébriques
- Objectif informatique : Modélisation des données et des opérations
- Extension de la logique des propositions :
  - Univers (objets mathématiques ou informatiques) : $\mathcal{U}$
  - Algèbre de termes (représentation des objets) : constantes et opérateurs sur $\mathcal{U}$
  - Quantificateurs pour variables dans $\mathcal{U}$: $\forall$, $\exists$
  - Relations sur $\mathcal{U}$ (permet aussi de représenter les termes)
- Sémantique : Logique des propositions + Modèles des structures

Syntaxe

Vision algébrique – Eléments lexicaux

- Extension de la logique des propositions $\perp \top \neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow \mathcal{P} (\;)$
- Ensembles dénombrables de symboles :
  - Variables $\mathcal{V}$
  - Relations (prédicats) $\mathcal{R}$ munie d'une arité $\in \mathbb{N}^\star$
  - Propositions $\mathcal{P}$ (relations d'arité 0)
  - Fonctions $\mathcal{F}$ munie d'une arité $\in \mathbb{N}^\star$
  - Constantes $\mathcal{C}$ (fonctions d'arité 0)
- Lieurs : $\forall \exists$
- Paramètres des relations et fonctions : $(\, , \,)$

Syntaxe

Vision algébrique – Eléments grammaticaux

- $\mathcal{T}$ ensemble dénombrable des termes bien formés
- Φ ensemble dénombrable des formules bien formées
- Les constantes et les fonctions avec leurs paramètres sont des termes bien formés ;
- Les variables sont soit des termes bien formés, soit des relations, soit des fonctions ;
- Les relations avec leurs paramètres sont des formules bien formées ;
- Les lieurs définissant une variable dans une formule bien formée (portée de la variable) sont des formules bien formées ;
- Les lieurs sont moins prioritaires que tous les autres opérateurs ;
- Les relations et fonctions prennent comme paramètre un nombre de termes bien formés égal à leur arité.

Syntaxe

Termes : Vision déductive

Soient $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$ des ensembles dénombrables de symboles :

$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ se décompose selon l'arité du symbole (nombre de paramètres)

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes bien formés :

Déductions	Version classique
	$\dfrac{e \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}}{e \in \mathcal{T}}$
$i \in \mathbb{N}^\star$	$\dfrac{f \in \mathcal{V} \cup \mathcal{F}_i \qquad t_1 \in \mathcal{T} \qquad t_i \in \mathcal{T}}{f(t_1, \ldots, t_i) \in \mathcal{T}}$

Exemple : $\mathcal{V} = \{n\}, \mathcal{C} = \{un, deux\}, \mathcal{F}_2 = \{somme, produit\}$

$somme(produit(deux, n), un)$

Syntaxe

Prédicats : Vision déductive

Soient $\mathcal{V}, \mathcal{R}$ des ensembles dénombrables de symboles :

$\mathcal{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_i$ se décompose selon l'arité du symbole (nombre de paramètres)

Notons Φ l'ensemble des formules bien formées :

Déductions	Version classique
	$\dfrac{x \in \mathcal{V}}{x \in \Phi}$
$i \in \mathbb{N}^\star$	$\dfrac{p \in \mathcal{V} \cup \mathcal{R}_i \qquad t_1 \in \mathcal{T} \qquad t_i \in \mathcal{T}}{p(t_1, \ldots, t_i) \in \Phi}$
$q \in \{\forall, \exists\}$	$\dfrac{x \in \mathcal{V} \qquad \varphi \in \Phi}{q\, x. \varphi \in \Phi}$

Syntaxe

Précautions et Remarques

- Attention : Les notations suivantes ne font pas partie de la syntaxe des formules bien formées en logique des prédicats
  - $\vec{x} \in e$ représentée par $e(\vec{x})$
  - $\forall x \in e.\ \varphi$ représentée par $\forall x.\ e(x) \to \varphi$
  - $\exists x \in e.\ \varphi$ représentée par $\exists x.\ e(x) \wedge \varphi$
- Remarque : les constantes et les fonctions peuvent être représentées par des relations
  - Une constante $c \in \mathcal{C}$ peut être représentée par une relation r_c qui teste si une variable à la valeur c
  - Une fonction $f \in \mathcal{F}_n$ peut être représentée par une relation r_c qui satisfait : $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ r_c(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$

Exploitation pour la modélisation

Logique de prédicats

- Modélisation d'énoncé en langage naturel
- Décomposition de l'énonce en prédicats combinées par les opérateurs
- Opérateurs : conjonction de coordination, de subordination
- Propositions : prédicats sans paramètres
- Prédicats : parties de l'énoncé liées par les relations (adjectifs/sujets, verbe/sujet, verbe/sujet/compléments, . . .)
- Exemples : Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme donc Socrate est mortel.
- Variables : E = un élément quelconque; S = Socrate.
- Prédicats : H = est un homme; M = est mortel.
- Formule : $\forall E.\exists S.((H(E) \rightarrow M(E)) \wedge H(S)) \rightarrow M(S)$

Syntaxe

Ordre de la logique des prédicats

- Ordre supérieur : les lieurs peuvent quantifier des termes, des relations, des propositions, des fonctions, des constantes
- Premier ordre (First Order Logic) : Les lieurs ne peuvent quantifier que des termes
- Exemple du premier ordre :
  $\mathcal{V} = \{m, n\}, \mathcal{R}_1 = \{entier\}, \mathcal{R}_2 = \{egal\}$
  $\forall m.\ (entier(m) \rightarrow (impair(m) \leftrightarrow$
  $(\exists n.\ (entier(n) \wedge egal(m, somme(produit(deux, n), un))))))$
- Exemple du second ordre :
  g muni de l'opération binaire o est un groupe

$$\forall g.\ \forall o.\ groupe(g, o) \leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x_1.\ \forall x_2.\ g(x_1) \wedge g(x_2) \rightarrow g(o(x_1, x_2)) \\ \wedge \exists e.\ g(e) \wedge \left\{ \begin{array}{l} \forall x.\ g(x) \rightarrow egal(o(x, e), x) \wedge egal(o(e, x), x) \\ \wedge \forall x_1.\ \forall x_2.\ \forall x_3.\ g(x_1) \wedge g(x_2) \wedge g(x_3) \rightarrow \\ \qquad egal(o(o(x_1, x_2), x_3), o(x_1, o(x_2, x_3))) \\ \wedge \forall x_1.\ g(x_1) \rightarrow \exists x_2.\ g(x_2) \wedge egal(o(x_1, x_2), e) \wedge egal(o(x_2, x_1), e) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Variables libres

$VL(\varphi)$: Variables de φ qui ne sont pas liées par $\forall$ ou $\exists$

$VL(c) = \emptyset$	$c \in \{\bot, \top\} \cup \mathcal{P}$
$VL((op\,\varphi)) = VL(\varphi)$	$op \in \{\neg\}$
$VL((\varphi\ op\ \psi)) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$	$op \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$VL(x) = \{x\}$	$x \in \mathcal{V}$
$VL(c) = \emptyset$	$c \in \mathcal{C}$
$VL(op(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i \in [1 \ldots n]} VL(t_i)$	$op \in \mathcal{R}_n \cup \mathcal{F}_n$
$VL(op(t_1, \ldots, t_n)) = \{op\} \cup \bigcup_{i \in [1 \ldots n]} VL(t_i)$	$op \in \mathcal{V}$
$VL((q\,x.\,\varphi)) = VL(\varphi) \setminus \{x\}$	$q \in \{\forall, \exists\}$

Exemple :

$$
\begin{aligned}
& VL(\forall x.\ (\varphi \leftrightarrow \exists y.\ \psi)) \\
& = VL(\varphi \leftrightarrow \exists y.\ \psi) \setminus \{x\} \\
& = (VL(\varphi) \cup VL(\exists y.\ \psi)) \setminus \{x\} \\
& = (VL(\varphi) \cup (VL(\psi) \setminus \{y\})) \setminus \{x\}
\end{aligned}
$$

Substitution

Opérateurs et termes

$[t/x]\,\varphi$ remplace $x \in \mathcal{V}$ par $t \in \mathcal{T}$ dans $\varphi \in \Phi$

$([t/x]\,c) = c$	$c \in \{\bot, \top\} \cup \mathcal{P}$
$([t/x]\,(op\,\varphi)) = op([t/x]\,\varphi)$	$op \in \{\neg\}$
$([t/x]\,(\varphi\ op\ \psi)) = ([t/x]\,\varphi)\ op\ ([t/x]\,\psi)$	$op \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$([t/x]\,x) = t$	
$([t/x]\,y) = y$	$x \neq y$
$([t/x]\,c) = c$	$c \in \mathcal{C}$
$([t/x]\,op(t_1, \ldots, t_n)) = op([t/x]\,t_1, \ldots, [t/x]\,t_n)$	$op \in \mathcal{R}_n \cup \mathcal{F}_n$
$([t/x]\,x(t_1, \ldots, t_n)) = t([t/x]\,t_1, \ldots, [t/x]\,t_n)$	$t \in \mathcal{R}_n \cup \mathcal{F}_n \cup \mathcal{V}$

Substitution

Quantificateurs

$[t/x]\,\varphi$ remplace $x \in \mathcal{V}$ par $t \in \mathcal{T}$ dans $\varphi \in \Phi$

$([t/x]\,(q\,x.\,\varphi)) = q\,x.\,\varphi$	$q \in \{\forall, \exists\}$
$([t/x]\,(q\,y.\,\varphi)) = q\,y.\,([t/x]\,\varphi)$	$\begin{cases} q \in \{\forall, \exists\} \\ x \neq y \\ y \notin VL(t) \end{cases}$
$([t/x]\,(q\,y.\,\varphi)) = q\,z.\,([t/x]\,([z/y]\,\varphi))$	$\begin{cases} q \in \{\forall, \exists\} \\ x \neq y \\ z \text{ inutilisée} \end{cases}$

Substitution

Exemple

$$
\begin{aligned}
&[f(x,y)/x]\,((x \to y) \land \exists y.\ (x \lor ((\forall x.\ \varphi) \to y)))\\
&= ([f(x,y)/x]\,(x \to y)) \land ([f(x,y)/x]\,(\exists y.\ (x \lor ((\forall x.\ \varphi) \to y))))\\
&= (([f(x,y)/x]\,x) \to ([f(x,y)/x]\,y)) \land ([f(x,y)/x]\,(\exists y.\ (x \lor ((\forall x.\ \varphi) \to y))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land ([f(x,y)/x]\,(\exists y.\ (x \lor ((\forall x.\ \varphi) \to y))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ ([f(x,y)/x]\,[z/y]\,(x \lor ((\forall x.\ \varphi) \to y))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ ([f(x,y)/x]\,(([z/y]\,x) \lor ([z/y]\,((\forall x.\ \varphi) \to y)))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ ([f(x,y)/x]\,(x \lor (([z/y]\,(\forall x.\ \varphi)) \to ([z/y]\,y)))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ ([f(x,y)/x]\,(x \lor ((\forall x.\ ([z/y]\,\varphi)) \to z))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ (([f(x,y)/x]\,x) \lor ([f(x,y)/x]\,((\forall x.\ ([z/y]\,\varphi)) \to z))))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ (f(x,y) \lor (([f(x,y)/x]\,(\forall x.\ ([z/y]\,\varphi))) \to ([f(x,y)/x]\,z)))\\
&= (f(x,y) \to y) \land (\exists z.\ (f(x,y) \lor ((\forall x.\ ([z/y]\,\varphi)) \to z)))
\end{aligned}
$$

Sémantique

Théorie des modèles

- Extension de la logique des propositions
- Tables de vérité pour la partie logique des propositions
- Modèle sémantique $\mathcal{M}$ pour les constantes, fonctions et prédicats
  - L'univers $\mathcal{U}$ contient les objets représentés par les termes
  - $\mathcal{M}(c) \in \mathcal{U}$ est la sémantique de la constante $c \in \mathcal{C}$
  - $\mathcal{M}(f) \in \mathcal{U}^n \mapsto \mathcal{U}$ est la sémantique de la fonction $f \in \mathcal{F}_n$
  - $\mathcal{M}(p) \subseteq \mathcal{U}^n$ est la sémantique de la relation $p \in \mathcal{R}_n$
- Expansion pour les quantificateurs :

$\mathcal{U} \neq \emptyset$	$\forall x.\ \varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{U}} \varphi$	$\exists x.\ \varphi = \bigvee_{x \in \mathcal{U}} \varphi$
$\mathcal{U} = \emptyset$	$\forall x.\ \varphi = \top$	$\exists x.\ \varphi = \bot$

- Problème : Expansion infinie si $\mathcal{U}$ est infini requiert raisonnement symbolique
- $\mathcal{M} \models \varphi$: φ est valide pour l'interprétation donnée par le modèle $\mathcal{M}$

Sémantique

Relation d'équivalence

$\varphi = \psi$ si et seulement si φ et ψ sont valides pour les mêmes modèles
$\forall \mathcal{M}. (\mathcal{M} \models \varphi) \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \psi)$

$$
\begin{array}{rl}
\forall x.\ \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\exists x.\ \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset \\
\forall x.\ \varphi = \forall y.\ [y/x]\,\varphi & y \text{ inutilisée} \\
\exists x.\ \varphi = \exists y.\ [y/x]\,\varphi & y \text{ inutilisée} \\
\forall x.\ (\forall y.\ \varphi) = \forall y.\ (\forall x.\ \varphi) & \\
\exists x.\ (\exists y.\ \varphi) = \exists y.\ (\exists x.\ \varphi) & \\
\neg(\forall x.\ \varphi) = \exists x.\ (\neg\varphi) & \\
\neg(\exists x.\ \varphi) = \forall x.\ (\neg\varphi) & \\
\forall x.\ (\varphi \rightarrow \psi) = (\exists x.\ \varphi) \rightarrow \psi & x \notin VL(\psi) \\
\forall x.\ (\varphi \rightarrow \psi) = \varphi \rightarrow (\forall x.\ \psi) & x \notin VL(\varphi) \\
\exists x.\ (\varphi \rightarrow \psi) = (\forall x.\ \varphi) \rightarrow \psi & x \notin VL(\psi) \\
\exists x.\ (\varphi \rightarrow \psi) = \varphi \rightarrow (\exists x.\ \psi) & x \notin VL(\varphi) \\
\forall x.\ (\varphi \wedge \psi) = (\forall x.\ \varphi) \wedge (\forall x.\ \psi) & \\
\forall x.\ (\varphi \vee \psi) = (\forall x.\ \varphi) \vee \psi & x \notin VL(\psi) \\
\exists x.\ (\varphi \vee \psi) = (\exists x.\ \varphi) \vee (\exists x.\ \psi) & \\
\exists x.\ (\varphi \wedge \psi) = (\exists x.\ \varphi) \wedge \psi & x \notin VL(\psi)
\end{array}
$$

Sémantique

Formes normales

- Forme normale prénexe : les règles précédentes permettent de remonter les quantificateurs en tête de formule

$$
\begin{aligned}
&(\forall x.\ \varphi) \rightarrow (\exists x.\ \psi)\\
&= (\forall x.\ \varphi) \rightarrow (\exists y.\ [y/x]\,\psi)\\
&= \forall x.\ \varphi \rightarrow (\exists y.\ [y/x]\,\psi)\\
&= \forall x.\ \exists y.\ \varphi \rightarrow [y/x]\,\psi
\end{aligned}
$$

- Transformation de Skolem :
  - Soit $\vec{y} = VL(\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ \exists z.\ \varphi)$
  - Soit f_n^{SK} un nouveau symbole fonctionnel d'arité $n = \mid \vec{x} \mid + \mid \vec{y} \mid$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.\ \exists z.\ \varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n.\ [f_n^{SK}(\vec{x},\vec{y})/z]\,\varphi \text{ avec } \vec{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

  - La transformation de Skolem permet de remplacer les quantificateurs existentiels dans une forme normale prénexe par des termes exprimant la dépendance de la variable quantifiée avec les autres variables

$$
\begin{aligned}
&\forall x.\ \exists y.\ \varphi \rightarrow [y/x]\,\psi\\
&= \forall x.\ [f^{SK}(x,\vec{z})/y]\,\varphi \rightarrow [y/x]\,\psi \text{ avec } \vec{z} = VL(\forall x.\ \exists y.\ \varphi \rightarrow [y/x]\,\psi)\\
&= \forall x.\ \varphi \rightarrow [f^{SK}(x,\vec{z})/x]\,\psi
\end{aligned}
$$

Déduction naturelle

Logique constructive

- Quantificateur universel :
  - Introduction
    $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x.\ \varphi}\ I_{\forall}(\Gamma;\ x;\ \varphi)\ (x \notin VL(\Gamma))$$
  - Élimination
    $$\frac{\Gamma \vdash \forall x.\ \varphi}{\Gamma \vdash [t/x]\,\varphi}\ E_{\forall}(\Gamma;\ x;\ \varphi;\ t)$$
- Quantificateur existentiel :
  - Introduction
    $$\frac{\Gamma \vdash [t/x]\,\varphi}{\Gamma \vdash \exists x.\ \varphi}\ I_{\exists}(\Gamma;\ x;\ \varphi)$$
  - Élimination par Skolemisation
    $$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\ \varphi}{\Gamma \vdash [f(\vec{x})/x]\,\varphi}\ E_{\exists}^{SK}(\Gamma;\ x;\ \varphi)\ (\vec{x} = VL(\Gamma) \cup VL(\exists x.\ \varphi))$$
  - Élimination par Modus Ponens
    $$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\ \varphi \qquad \Gamma,\ \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_{\exists}^{MP}(\Gamma;\ x;\ \varphi)\ (x \notin VL(\Gamma) \cup VL(\psi))$$

Déduction naturelle

Exemple

- Montrer que $\forall x.\ \varphi \to (\neg \exists x.\ \neg\varphi)$ est un théorème.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\exists x.\ \neg\varphi, \forall x.\ \varphi \vdash \forall x.\ \varphi}\ \mathit{Hyp}(\exists x.\ \neg\varphi;\ \forall x.\ \varphi)
}{\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi \vdash [f(\vec{x})/x]\,\varphi}\ E_{\forall}(\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi;\ x;\ \varphi;\ f(\vec{x}))
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\forall x.\ \varphi,\ \exists x.\ \neg\varphi \vdash \exists x.\ \neg\varphi}\ \mathit{Hyp}(\forall x.\ \varphi;\ \exists x.\ \neg\varphi)
}{\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi \vdash [f(\vec{x})/x]\,\neg\varphi}\ E_{\exists}^{SK}(\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi;\ x;\ \neg\varphi)\ (\vec{x}
}{\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi \vdash \bot}\ I_{\bot}(\forall x.\ \varphi, \exists x.\ \neg\varphi;\ )
}{\forall x.\ \varphi \vdash \neg\exists x.\ \neg\varphi}\ I_{\neg}(\forall x.\ \varphi;\ \exists x.\ \neg\varphi)
}{\vdash \forall x.\ \varphi \to (\neg\exists x.\ \neg\varphi)}\ I_{\to}(;\ \forall x.\ \varphi;\ (\neg\exists x.\ \neg\varphi))
$$

Logique des prédicats

Conclusion

La logique des prédicats d'ordre supérieur est :

- Suffisamment expressive pour les mathématiques et l'informatique
- Complète et consistante sémantiquement
- Pas d'axiomatique complète et consistante (théorème de Gödel d'incomplétude de l'arithmétique)
- Indécidable mécaniquement
- Etude de fragments complets, consistants, décidables, semi-décidables, ...

La logique des prédicats du premier ordre est :

- Complète, consistante et correcte axiomatiquement
- Semi-décidable mécaniquement par énumération des théorèmes
- Mais Typage par prédicats couteux et Raisonnement par égalité complexe
- Introduction du typage et des équations : Spécifications algébriques