

TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
TD3 : ECHANTILLONNAGE

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
3. Tracer, entre 0 et F_e , la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
 - (a) $F_e = 30$ kHz.
 - (b) $F_e = 8$ kHz.
4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?

Exercice 2 : Echantillonneur moyennneur

L'échantillonneur moyennneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta < T$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$y(kT_e) = \frac{1}{\theta} \int_{kT_e - \theta}^{kT_e} x(u) du$$

$$x_{ech}(t) = \sum_k y(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta} \left[\Pi_{\theta}(t) * x\left(t - \frac{\theta}{2}\right) \right] \cdot \text{III}_{T_e}(t)$$

où $\Pi_{\theta}(t)$ et $\text{III}_{T_e}(t)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e .

2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}(f)$.
3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $\text{sinc}(\pi\theta f)$ peut être supposé constante sur l'intervalle $[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}]$

$$\text{sinc}(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

- (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
- (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

Rappels

Propriétés générales

|| T.F. ||

$ax(t) + by(t)$	\Rightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Rightarrow	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	\Rightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Rightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Rightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Rightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	\Rightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Rightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Rightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

|| T.F. ||

1	\Rightarrow	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\Rightarrow	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\Rightarrow	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\Rightarrow	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\Rightarrow	$\frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\Rightarrow	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\Rightarrow	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\Rightarrow	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\Rightarrow	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\Rightarrow	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\Rightarrow	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\Rightarrow	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\Rightarrow	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention!!!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T .

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T \Lambda_T(t)$$