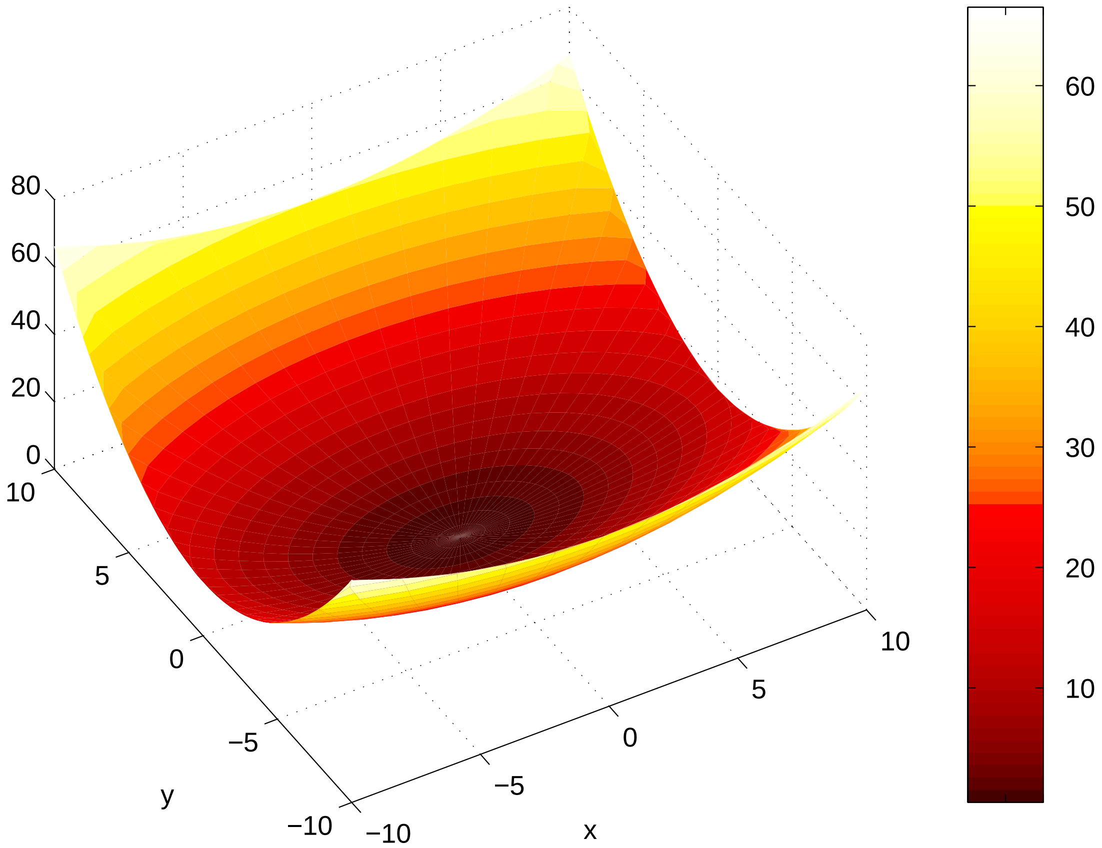
Département Sciences du Numérique

# Calcul différentiel - Optimisation sans contraintes - Premiers algorithmes

O. Cots, J. Gergaud, S. Gratton, D. Ruiz et E. Simon

22 septembre 2020



# Table des matières

# Chapitre 2

# Formes bilinéaires et quadratiques

Dans ce chapitre vous découvrirez :

- L'étude des formes quadratiques et des formes bilinéaires (Il s'agit d'une extension des notions de produit scalaire)
- Une application des notions de diagonalisation aux matrices symétriques et aux endomorphismes symétriques.

## 2.1 Forme bilinéaire – Matrice d'une forme bilinéaire

### 2.1.1 Formes bilinéaires

**Définition 2.1.1 – Formes bilinéaires**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle forme bilinéaire sur $E$, toute application $f$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tous vecteurs $\mathbf{u}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$, et $\widetilde{\mathbf{v}}$ de $E$ et tout scalaire $\lambda$ de $\mathbb{R}$ :

$$f(\mathbf{u}+\widetilde{\mathbf{u}}\,,\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) + f(\widetilde{\mathbf{u}}\,,\,\mathbf{v}) \qquad f(\lambda\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})$$
$$f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}+\widetilde{\mathbf{v}}) = f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}\,,\,\widetilde{\mathbf{v}}) \qquad f(\mathbf{u}\,,\,\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v})$$

$f$ est en fait linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.

**Définition 2.1.2 – Forme bilinéaire symétrique**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $f$ une forme bilinéaire sur $E$. On dit que $f$ est symétrique si, pour tous vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E$, on a :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})\,.$$

### 2.1.2 Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ une base de $E$. Toute forme bilinéaire $f$ est entièrement déterminée par la connaissance des réels $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, pour tout $1 \le i, j \le n$. En effet, soient $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i$ deux vecteurs de $E$. Par linéarité à gauche, et à droite, on peut écrire, après développement :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\,.$$

Introduisons alors $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ formés des composantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$, et $\mathbf{A}$ la matrice des coefficients $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \ldots & f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \ldots & f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces notations, on peut alors écrire la valeur de $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en terme du produit matriciel suivant :

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}\,.$$

**Propriété :** Si $f$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$, alors la matrice associée à $f$ dans une base quelconque de $E$ est symétrique.

### 2.1.3 Exemple dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.2 Formes quadratiques

**Définition 2.2.1 – Formes quadratiques**

On appelle forme quadratique associée à la forme bilinéaire $f$, l'application $q$ définie de $E$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \mathbf{x}\in E,\;\; q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{x})\,.$$

**Remarques :**

- On a aussi, en utilisant la matrice $\mathbf{A}$ de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$ :

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\,,$$

  où $\mathbf{X}$ est le vecteur des coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, $\mathbf{A}$ représente aussi la matrice de la forme quadratique $q$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Par contre, la représentation matricielle d'une forme quadratique n'est pas unique. En effet, pour une forme quadratique donnée, il existe plusieurs formes bilinéaires qui peuvent lui être associées.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La forme quadratique associée est

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 \quad \text{soit} \quad q(\mathbf{x}) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Mais on a aussi, du point de vue matriciel :

$$q(\mathbf{x}) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Propriétés :**

- Pour un vecteur $\mathbf{u} \in E$ donné, $q(\mathbf{u})$ est un polynôme homogène de degré 2. Ainsi, tout polynôme homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées d'un vecteur $\mathbf{u}$ de $E$ peut correspondre à une forme quadratique $q$.
- En outre, à la question "*existe-t-il une forme bilinéaire symétrique dont q soit la forme quadratique et si oui, est-elle unique ?*", la réponse est "*oui*".

  Voici comment procéder : il suffit pour cela d'écrire la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ associée à ce polynôme homogène de degré 2 en plaçant, sur la diagonale, les coefficients $a_{ii}$ correspondant aux termes en $x_i^2$, et sur les termes hors diagonaux $a_{ij}$ et $a_{ji}$ la moitié des coefficients des termes en $x_i x_j$.
- Enfin, si à une même forme quadratique $q$, on peut effectivement associer diverses formes bilinéaires $f$ (de matrice associée $\mathbf{A}_f$ dans une base $\mathcal{B}$ fixée), ces formes bilinéaires ont toutes en commun **la même partie symétrique** :

$$s(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u})}{2}, \quad \text{de matrice associée} \quad \frac{\mathbf{A}_f + \mathbf{A}_f^T}{2} \quad \text{indépendante de } f.$$

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$ :

$$q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 12x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_2x_3 + 5x_3x_1 - x_2x_1\,,$$

la forme matricielle symétrique associée étant

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 12 & -4 \\ 5/2 & -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

### 2.2.1 Propriétés

Soit $f$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$, et $q$ la forme quadratique associée. Pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $E$ et tout scalaire $\lambda$, on a :

- $q(\lambda\mathbf{u}) = f(\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda^2 q(\mathbf{u})$ : $q$ n'est pas linéaire.
- $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right)$.
- $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})\right)$.
- Pour une forme quadratique $q$ donnée, la forme bilinéaire symétrique $f$ qui lui est associée est aussi appelée forme polaire de $q$.
- On définit deux ensembles : Le noyau de $q$ : $N(q) = \{\mathbf{y} \in E, \forall \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\}$
  le cône isotrope : $I(q) = \{\mathbf{x} \in E,\ q(\mathbf{x}) = 0\}$. Sauf cas particulier, ce n'est pas un espace vectoriel, mais un cône, c'est à dire un sous ensemble de vecteurs $C$ tel que si $x \in C$ alors pour tout scalaire $\lambda$, $\lambda x \in C$.

  On a $N(q) \subset I(q)$.
- $q$ est dite non dégénérée si $N(q) = \{\mathbf{0}\}$.
- $q$ est dite semi-définie positive ssi $\forall \mathbf{x} \in E$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$.
- $q$ est dite semi-définie négative ssi $-q$ est semi-définie positive.
- $q$ est dite indéfinie ssi $q$ n'est ni semi-définie positive, ni semi-définie négative.
- $q$ est dite définie positive si $\forall \mathbf{x} \in E$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$ et $q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- En dimension finie : $\dim E = \dim\ N(q) + \operatorname{rank}(q)$ le rang de $q$ est par définition le rang de la matrice de $q$.

## 2.3 Formes quadratiques définies positives

### 2.3.1 Produit scalaire

On rappelle que un **produit scalaire** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ est une forme **bilinéaire, symétrique, et définie positive**. La définie positivité d'une forme bilinéaire $f$ sur $E$ correspond en fait à la définie positivité de sa forme quadratique, à savoir :

$$\forall \mathbf{u} \in E\,,\ q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}\,.$$

Ainsi, sur un même espace vectoriel $E$, à toute forme quadratique $q$ définie positive, on peut associer un produit scalaire sur $E$ en considérant la forme bilinéaire symétrique $f$ associée à $q$ (la forme polaire de $q$). Pour un tel un produit scalaire $f$, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pourra aussi aussi être noté $\langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v} \rangle$.

**Proposition 2.3.1**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $q$ une forme quadratique définie positive sur $E$. Alors, la forme polaire de $q$, qui est une forme bilinéaire symétrique (ou à symétrie hermitienne si le corps de référence est $\mathbb{C}$) définie postive sur $E$, constitue un produit scalaire sur $E$, et pour la norme associée, $E$ est un espace* Euclidien.

**Remarques :**

- Une façon de vérifier la définie positivité d'une forme quadratique $q$ donnée consiste à la décomposer en une somme de carrés de termes du premier degré.
- Une autre façon de vérifier la définie positivité d'une forme quadratique $q$ consiste à rechercher les valeurs propres de la matrice symétrique représentant $q$ et à vérifier qu'elles sont bien toutes positives strictement.

### 2.3.2 Exemples

(i) Dans $\mathbb{R}^3$ , soit la forme quadratique $q$ définie par

$$q(\mathbf{u}) = x^2 + 6xy + 4yz + 14y^2 + z^2\,,$$

avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Voyons si $q$ est définie positive. Pour ce faire, décomposons $q$ en somme de trois carrés dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) &= x^2 + 6xy + 4yz + 14y^2 + z^2 \\ &= (x+3y)^2 - 9y^2 + 4yz + 14y^2 + z^2 = (x+3y)^2 + 5y^2 + 4yz + z^2 \\ &= (x+3y)^2 + 5(y + \frac{2}{5}z)^2 - \frac{4}{5}z^2 + z^2 = (x+3y)^2 + 5(y + \frac{2}{5}z)^2 + \frac{1}{5}z^2\,. \end{aligned}$$

Cette somme de carrés dans $\mathbb{R}$ est positive, donc la forme quadratique $q$ est semi-définie positive ($\forall \mathbf{u} \in E,\ q(\mathbf{u}) \geq 0$). De plus :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) = (x+3y)^2 + 5(y + \frac{2}{5}z)^2 + \frac{1}{5}z^2 = 0 \ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ y + \frac{2}{5}z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right. \\ &\Leftrightarrow\ x = y = z = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \mathbf{u} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

**Bilan :** cette forme quadratique est bien définie positive, et la forme bilinéaire symétrique associée

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 14x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit la forme quadratique $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_2x_1$, avec $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Voyons si $q$ est définie positive. Un rapide coup d'oeil nous permet de penser que le terme en $-2x_2^2$, terme en carré à coefficient négatif, risque de poser problème quant à la définie positivité, ne serait-ce que parce qu'on peut l'isoler (ou le sélectionner) en prenant $x_1 = 0$. En effet, il est facile de vérifier que $q$ est même **indéfinie**, c'est à dire qu'il existe des vecteurs $\mathbf{x}$ pour lesquels $q(\mathbf{x}) > 0$, et des vecteurs $\mathbf{y}$ pour lesquels $q(\mathbf{y}) < 0$. Par exemple, $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ étant la base canonique de $E$,

$$q(\mathbf{e}_1) = 1\,, \quad \text{et} \quad q(\mathbf{e}_2) = -2\,.$$

## 2.4 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

### 2.4.1 Introduction

$E$ étant un espace vectoriel euclidien, le produit scalaire sur $E$ sera noté $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$. Soit $g$ un endomorphisme de $E$ dont la matrice est symétrique dans la base canonique de $E$, $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$. Regardons si $g$ est diagonalisable.

**Prenons un exemple :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, et $g$ de matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $g$ sont 1 et -2 de multiplicités respectives 1 et 2, les espaces propres associés étant :

$$V_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{et} \qquad V_{-2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

et $g$ est donc diagonalisable.

On remarque que ces deux espaces $V_1$ et $V_{-2}$ sont orthogonaux, c'est à dire tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. De plus, on peut choisir une base orthonormée pour écrire la matrice diagonale de $g$. Il suffit, dans un premier temps, d'orthogonaliser la base de $V_{-2}$, de dimension 2, en appliquant le procédé de Schmidt. On obtient :

$$V_{-2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Enfin, il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right\}$.

**Bilan :** Dans la base orthonormée

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\},$$

la matrice de l'endomorphisme $g$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

### 2.4.2 Généralisation

**Proposition 2.4.1**

*On démontre les résultats suivants :*

- *Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable.*
- *Ses valeurs propres sont réelles.*
- *Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*
- *Il existe toujours une base orthonormée formée de vecteurs propres.*

**Remarques :**

- Il est intéressant de diagonaliser dans une base orthonormée de vecteurs propres car alors, la matrice de passage $\mathbf{U}$ de la base canonique initiale à la nouvelle base orthonormée vérifie

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T.$$

- Le fait que, dans un espace euclidien, tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormale de vecteurs propres s'écrit en termes d'algèbre linéaire sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T, \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}.$$

  C'est d'ailleurs l'un des principaux intérêts des notations matricielles, à savoir d'exprimer de manière très concise des propriétés ou des transformations.

## 2.5 Diagonalisation d'une forme quadratique

On peut associer à toute forme quadratique $q$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $E$ une forme bilinéaire symétrique $f$. De manière équivalente, cette forme bilinéaire symétrique peut être représentée sous forme matricielle par la matrice symétrique $\mathbf{A}$ des coefficients $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, où les $\mathbf{e}_k$ sont les vecteurs de la base canonique par exemple. De manière plus explicite, on a en effet :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{Y},$$

$\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ étant les vecteurs des composantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_k)_{1\leq k\leq n}$.

La matrice $\mathbf{A}$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres ($\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T$, avec $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$), et dans cette base de vecteurs propres, la matrice $\mathbf{A}$ devenant $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, la forme quadratique $q$ se transforme alors en somme élémentaire de carrés :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad q(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2,$$

où les $z_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont les composantes de $\mathbf{x}$ dans la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{u}_i \,.$$

Cette dernière égalité peut aussi s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{UZ} = \mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{X})\,,$$

avec $\mathbf{Z} = \mathbf{U}^T\mathbf{X}$ le vecteur des composantes $z_i$.

**Remarques :**

- Il est à noter que $z_i = \mathbf{u}_i^T\mathbf{X}$ n'est rien d'autre que le produit scalaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\mathbf{A}$ (i.e. la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{U}$) avec le vecteur $\mathbf{x}$. Cela correspond au calcul des composantes d'un vecteur dans une base orthonormée donnée, que l'on obtient effectivement par produit scalaire avec les vecteurs de cette base.
- D'un point de vue géométrique, l'écriture de $q$ sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$ signifie simplement que la forme quadratique $q$ se décompose en paraboles élémentaires, dirigées selon les axes des vecteurs propres $\mathbf{u}_i$, et de courbures respectives $\lambda_i$.
- De manière équivalente, on peut aussi dire que les iso-contours $q(\mathbf{x}) = C^{\text{ste}}$ sont des coniques dans $\mathbb{R}^n$ dont les axes principaux correspondent aux vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ associée à la forme quadratique $q$.
- **Cas particulier :** si la forme quadratique $q$ est définie positive, alors les valeurs propres $\lambda_i$ ci-dessus sont nécessairement toutes strictement positives, et les iso-contours $q(\mathbf{x}) = C^{\text{ste}}$ correspondent alors à des hyper-ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$.
  Par exemple, $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = C$, avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, est l'équation d'une ellipse dans $\mathbb{R}^2$, et l'équation
  $$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = C\,,$$
  avec $\lambda_{1,2,3}$ strictement positifs, représenterait une surface dans $\mathbb{R}^3$ du type "*ballon de rugby*".

**Illustration graphique :** La figure 2.1 ci-dessous illustre la forme géométrique d'une nappe quadratique, à savoir le dessin dans $\mathbb{R}^3$ d'une forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, où $(x, y)$ jouent le rôle de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ et $z = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ (avec $\mathbf{A}$ matrice $2 \times 2$ symétrique définie positive).

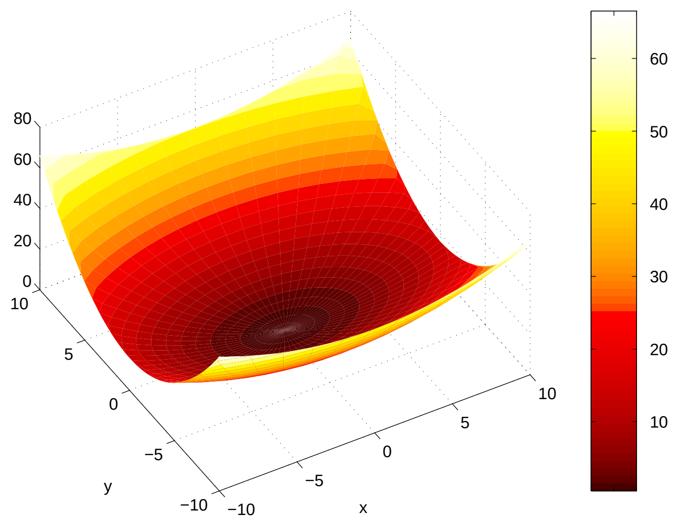



FIGURE 2.1 – Un exemple de forme quadratique en dimension 2

## 2.6 Compléments

**Définition 2.6.1 – Fonctionnelle quadratique généralisée**

On appelle **Fonctionnelle quadratique généralisée** toute application $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad , \; f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c\,,$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et $c$ une constante réelle.
On appelle **terme quadratique** associé à la fonctionnelle $f$ le terme $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}$.

**Remarque :** On peut toujours se ramener au cas où la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique, car on a :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \;, \quad \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{u} \;=\; \mathbf{u}^T\left(\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}\right)\mathbf{u}\,.$$

**Illustration graphique :** Considérons le cas $n = 2$ et posons

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Q^T, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La figure 2.2 illustre les formes des courbes de niveaux de $q$ pour les divers choix suivants pour les valeurs propres de $A$ :

(i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3/2$ (la matrice $A$ est définie positive) ;
(ii) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3/2$ (la matrice $A$ est indéfinie) ;
(iii) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3/2$ (la matrice $A$ est définie négative).

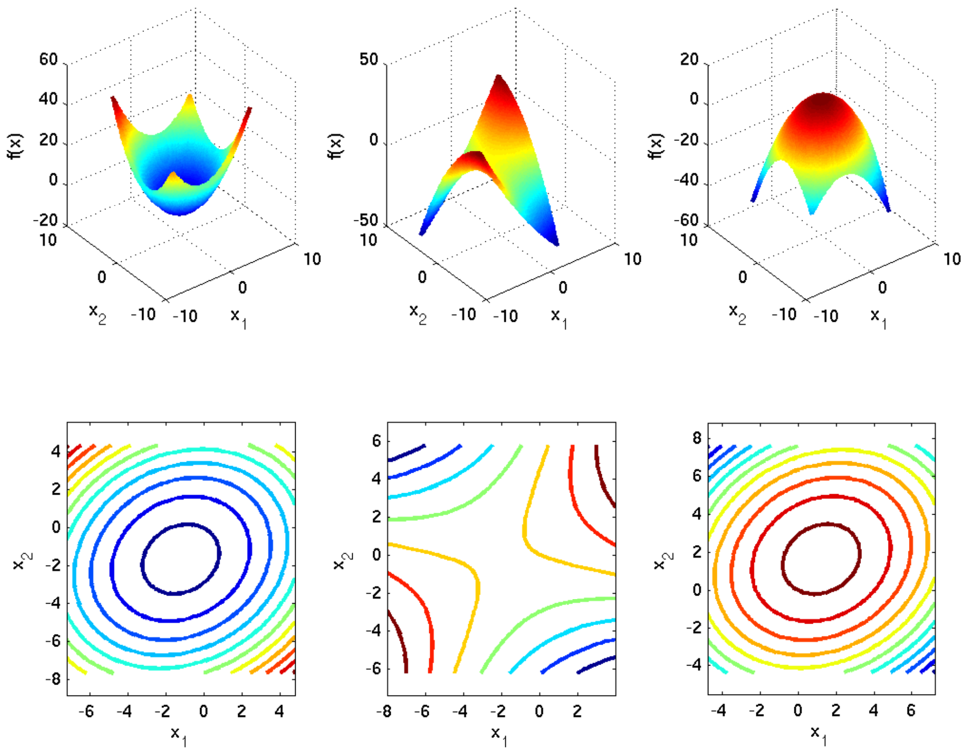



Figure 2.2 – *Cas où* $\mathrm{rank}(A) = 2$ *et* $\theta = \pi/6$.

Supposons maintenant que le rang de $A$ est 1 ($\lambda_2 = 0$ par exemple). La figure 2.3 illustre alors la forme des courbes de niveaux de $q$ pour $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ dans le premier cas, et $b = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}^T$ dans le deuxième cas (le vecteur $b$ est dans l'image de la matrice $A$).

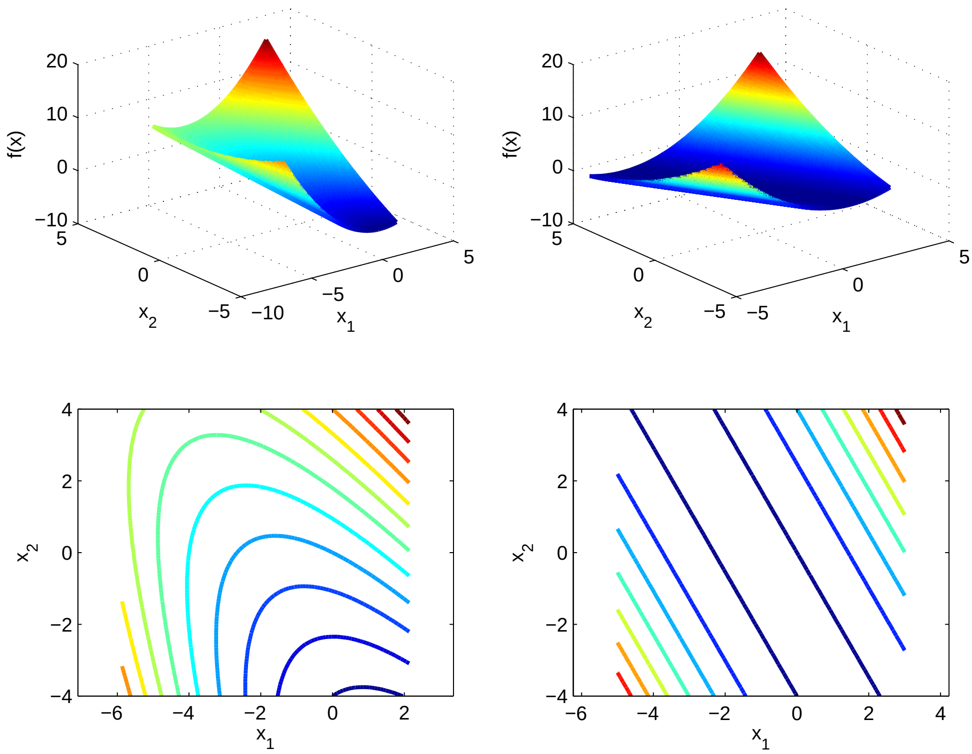



FIGURE 2.3 – *Cas où* $\mathrm{rank}(A) = 1$ *et* $\theta = \pi/6$.

**Définition 2.6.2**

Si la matrice $\mathbf{A}$ introduite dans la définition précédente est **symétrique définie positive**, alors la la fontionnelle quadratique généralisée est dite **associée à une forme quadratique définie positive sur** $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas des fonctionnelles quadratiques généralisées associées à une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.6.3**

*Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle quadratique généralisée associée à une forme quadratique définie positive sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors :*

*(i)* $f$ *admet un minimum global unique sur* $\mathbb{R}^n$, *noté* $\hat{\mathbf{x}}$.

*(ii)* $\hat{\mathbf{x}}$ *est l'unique solution du système linéaire* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

*(iii)* $\hat{\mathbf{x}}$ *est le centre de symétrie d'un réseau d'ellipsoïdes homothétiques* $(E_\alpha)$ *definis par :*

$$E_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ f(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \ , \ \ \forall \alpha \geq f(\hat{\mathbf{x}}) \ .$$

*(iv) Le minimum de* $f$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *vaut*

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \ = \ -\frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c \ .$$

*(v) Pour tout vecteur* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *on a :*

$$f(\mathbf{x}) \ = \ f(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \ .$$

**Remarque :** On peut noter qu'il y a une certaine dualité entre la recherche du minimum d'une fonctionnelle quadratique associée à une forme quadratique définie positive et la résolution d'un système linéaire associé à une matrice symétrique définie positive.

**Remarque :** La matrice $\mathbf{A}$ étant symétrique définie positive, elle définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ par l'égalité

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} \;=\; \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}\,.$$

Cette norme est dite ellipsoïdale, car les iso-contours $\left\{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = C^{ste}\right\}$ forment des ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$ (c.f. figure 2.1). De plus, cette norme est associée au produit scalaire suivant :

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_{\mathbf{A}} \;=\; \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}\,.$$

Chapitre 3

# Différentiabilité – Convexité

## 3.1 Dérivées de fonctions à plusieurs variables

Rappelons tout d'abord qu'une fonction d'une seule variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dérivable en un point $x$ de $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $a$ noté $f'(x)$ tel que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)-at}{t} = 0 \ .$$

Cette définition s'étend de façon naturelle dans le cas de fonctions de $n$ variables réelles, et de manière plus générale dans le cas de fonctions définies sur un espace vectoriel normé $E$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$.

### 3.1.1 Dérivée première

**Définition 3.1.1 – Différentiabilité au sens de Frêchet**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f$ une application définie sur le domaine $D \subset E$ et à valeurs dans $F$. L'application $f$ est dite **F-différentiable** (ou différentiable au sens de Frêchet, ou encore différentiable au sens fort) en un point $\mathbf{x}$ de l'intérieur du domaine $D$, s'il existe un opérateur linéaire continu $f'(\mathbf{x})$ de $E$ dans $F$ ($f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E,F)$), tel que

$$\forall \mathbf{h} \in E \ , \ f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|_E \, \varepsilon(\mathbf{h}) \ , \ \text{avec} \lim_{\|\mathbf{h}\|_E \to 0} \|\varepsilon(\mathbf{h})\|_F = 0 \ . \quad (3.1)$$

**Remarque :** On dira aussi que $f$ est dérivable au point $\mathbf{x}$ sans autre précision pour signifier qu'elle est différentiable au sens de Frêchet (au sens fort).

**Proposition 3.1.2**

*La F-dérivée de $f$ au point $\mathbf{x}$ (qui correspond à l'opérateur $f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E,F)$ dans la définition ci-dessus), si elle existe, est unique.*

**Proposition 3.1.3**

*Si l'application $f$ est F-différentiable (dérivable) au point $\mathbf{x}$, elle est alors continue au point $\mathbf{x}$.*

**Définition 3.1.4**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, et $\Omega \subset E$ un ouvert de $E$. On dit que **l'application** $f : \Omega \subset E \to F$ **est dérivable dans** $\Omega$ si elle est dérivable en tout point $\mathbf{x}$ de $\Omega$. On peut alors définir l'application

$$f' \ : \ \mathbf{x} \in \Omega \subset E \to f'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E,F) \ ,$$

appelée **application dérivée de** $f$. Si l'application dérivée $f' : \Omega \subset E \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue, on dit que **l'application** $f : \Omega \subset E \to F$ **est (une fois) continûment dérivable dans** $\Omega$, et on écrit

$$f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \ .$$

**Théorème 3.1.5 – Différentiabilité des applications composées**

*Soient $E$, $F$, et $G$, trois espaces vectoriels normés. Soit $f : \Omega \subset E \to F$ une application dérivable en un point $\mathbf{x} \in \Omega$ ($\Omega$ ouvert de $E$), et soit $g : \widetilde{\Omega} \subset F \to G$ une application dérivable au point $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \widetilde{\Omega}$ ($\widetilde{\Omega}$ ouvert de $F$). On suppose $f(\Omega) \subset \widetilde{\Omega}$. Alors l'application composée*

$$g \circ f \ : \ \Omega \subset E \to G$$

*est dérivable au point $\mathbf{x} \in \Omega$ et*

$$\forall \mathbf{h} \in E \ , \ \ (g \circ f)'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \ = \ g'(f(\mathbf{x})) \cdot (f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}).$$

### 3.1.2 Dérivée seconde

**Définition 3.1.6**

Soit $f : \Omega \subset E \to F$ une application dérivable sur l'ouvert $\Omega \subset E$. Si l'application dérivée

$$f' : \Omega \subset E \to \mathcal{L}(E, F)$$

est elle même dérivable (i.e. F-différentiable) en un point $\mathbf{x} \in \Omega$, sa dérivée, notée

$$f''(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} (f')'(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \ \ ,$$

est appelée **dérivée seconde de l'application $f$ au point $\mathbf{x}$**, et on dit que **l'application $f$ est deux fois dérivable au point $\mathbf{x}$**.

**Notation :** Il est facile de remarquer que l'application

$$\mathbf{B} \ : \ (\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in E \times E \to ((f''(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{k}) \in F \ ,$$

est linéaire séparément en chacune des variables $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$, et est de ce fait **bilinéaire**. En d'autres termes, il existe une interprétation naturelle permettant d'identifier l'application dérivée seconde de $f$ au point $\mathbf{x}$, $f''(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, à une application de l'espace $\mathcal{L}_2(E \times E, F)$), espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans $F$. On écrira alors

$$\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E \ , \ \ f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = (f''(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}) \cdot \mathbf{k}.$$

**Proposition 3.1.7**

*Si l'application $f : \Omega \subset E \to F$ est deux fois dérivable au point $\mathbf{x}$ de l'ouvert $\Omega \subset E$, alors l'application dérivée seconde de $f$ au point $\mathbf{x}$ est une* **application bilinéaire symétrique** *en ce sens que*

$$\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E \ , \ \ f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = f''(\mathbf{x})(\mathbf{k}, \mathbf{h}).$$

**Définition 3.1.8**

On dit que **l'application $f : \Omega \subset E \to F$ est deux fois dérivable dans $\Omega$** si elle est deux fois dérivable en tout point $\mathbf{x}$ de $\Omega$. On peut alors définir **l'application dérivée seconde de $f$**

$$f'' \ : \ \mathbf{x} \in \Omega \subset E \to f''(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_2(E \times E, F) \ \ .$$

Si cette dernière application est continue, l'application $f$ est dite **deux fois continûment dérivable dans $\Omega$**, et on écrit

$$f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \ \ .$$

**Remarque :** En ce qui concerne le **calcul** effectif des dérivées secondes, on utilise le résultat suivant, qui permet de se ramener à des calculs de dérivées premières :
étant donné deux vecteurs quelconques $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in E$, l'élément $f''(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in F$ est égal à la dérivée au point $\mathbf{x} \in \Omega$ de l'application $\mathbf{v} \in \Omega \to f'(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} \in F$, appliquée au vecteur $\mathbf{h}$.

### 3.1.3 Formule des accroissements finis - Formules de Taylor

**Théorème 3.1.9 – Formules de Taylor pour les applications une fois dérivables**

*Soient $f : \Omega \subset E \to F$ et $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ un segment fermé contenu dans $\Omega$ ($\Omega$ ouvert de $E$).*

*(i)* *Si $f$ est dérivable en $\mathbf{a}$, alors*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|_E\, \varepsilon(\mathbf{h}) \;\; , \;\; \text{avec} \lim_{\|\mathbf{h}\|_E \to 0} \|\varepsilon(\mathbf{h})\|_F \;=\; 0 \;\; .$$

*(ii)* **Formule des accroissements finis :** *si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $f$ est dérivable en tout point du segment ouvert $]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[$, alors*

$$\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\|_F \leq \sup_{\mathbf{x} \in ]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[} \|f'(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|\mathbf{h}\|_E \;\; .$$

*(iii)* **Formule de Taylor-Maclaurin :** *si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $f$ est dérivable en tout point du segment ouvert $]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[$, et si $F = \mathbb{R}$, alors*

$$\exists \theta \in ]0,1[ \;\; \textit{tel que} \;\; f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \; .$$

*(iv)* **Formule de Taylor avec reste intégral :** *si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $F$ est un espace complet, alors*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \int_0^1 \left\{ f'(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \right\} dt \;\; .$$

**Théorème 3.1.10 – Formules de Taylor pour les applications deux fois dérivables**

*Soit $f : \Omega \subset E \to F$ et $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ un segment fermé contenu dans $\Omega$ ($\Omega$ ouvert de $E$).*

*(i)* **Formule de Taylor-Young :** *si $f$ est dérivable dans $\Omega$, et si $f$ est deux fois dérivable au point $\mathbf{a}$, alors*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_E^2\, \varepsilon(\mathbf{h}) \;\; , \;\; \text{avec} \lim_{\|\mathbf{h}\|_E \to 0} \|\varepsilon(\mathbf{h})\|_F \;=\; 0 \, .$$

*(ii)* **Formule des accroissements finis généralisée :** *si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $f$ est deux fois dérivable en tout point du segment ouvert $]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[$, alors*

$$\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}\|_F \leq \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{x} \in ]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[} \|f''(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2(E \times E, F)} \|\mathbf{h}\|_E^2 \;\; .$$

*(iii)* **Formule de Taylor-Maclaurin :** *si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $f$ est deux fois dérivable en tout point du segment ouvert $]\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}[$, et si $F = \mathbb{R}$, alors*

$$\exists \theta \in ]0,1[ \;\; \textit{tel que} \;\; f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} f''(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) \; .$$

*(iv)* **Formule de Taylor avec reste intégral :** *si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et $F$ est un espace complet, alors*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \int_0^1 (1-t) \left\{ f''(\mathbf{a}+t\mathbf{h})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) \right\} dt \;\; .$$

**Remarques :**

- Alors que la formule (i) du théorème 3.1.3 est exactement la définition de la différentiabilité première, la formule (i) du théorème 3.1.3 n'est pas égale à la définition de la différentiablilité seconde en un point.
- On sait qu'il existe au moins un nombre $\theta \in ]0,1[$ tel que les formules de Taylor-Maclaurin soient vraies, mais en général on n'a aucun autre renseignement sur $\theta$ ; on rappelle au passage qu'il est indispensable de se restreindre au cas $F = \mathbb{R}$ pour les formules (3).
- Pour que les formules (iv) aient un sens, il faut savoir intégrer les fonctions impliquées dans ces formules, et c'est pourquoi on suppose que ces fonctions sont continues et que l'espace $F$ est complet.

### 3.1.4 Dimension finie et dérivées partielles

La donnée d'une application
$$f : \Omega \subset E \to F = \mathbb{R}^p$$
revient à se donner $p$ applications composantes $f_i : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le p$, de telle façon que
$$\forall \mathbf{x} \in E \ , \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad .$$

**Proposition 3.1.11**

*On établit facilement que* **l'application $f$ est dérivable en un point $\mathbf{a} \in \Omega$ si et seulement si chaque application composante l'est aussi**, *et on a alors :*
$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f'_1(\mathbf{a}) \\ f'_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f'_p(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad f'_i(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \ , \quad 1 \le i \le p \quad .$$

Considérons ensuite une application
$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (on dira aussi que $f$ est une **fonctionnelle**). Soit $\mathbf{a}$ un point de $\Omega$ de composantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ l'un des indices.

Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert $\Omega_k \subset \mathbb{R}$ tel que tous les points de composantes $(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ appartiennent à l'ouvert $\Omega$ lorsque le réel $x_k$ appartient à l'ouvert $\Omega_k$. Par suite, on peut étudier la dérivabilité éventuelle sur $\Omega_k \subset \mathbb{R}$ de **l'application partielle**
$$\begin{array}{rcl} \Omega_k \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_k & \longrightarrow & f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \end{array} \quad .$$
Si cette application est dérivable (au sens classique des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) au point $a_k \in \Omega_k \subset \mathbb{R}$, on note
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$$
sa dérivée, appelée **dérivée partielle de la fonctionnelle $f$ au point a, par rapport à la $k$-ième variable**.

**Remarque :** L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (matrices $1 \times 1$) s'identifiant à $\mathbb{R}$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$ de la fonctionnelle $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ peuvent être effectivement considérées commes des nombres réels.

**Proposition 3.1.12**

*Si une fonctionnelle*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

*est dérivable en un point* $\mathbf{a} \in \Omega$*, on établit aisément qu'elle possède des dérivées partielles par rapport à chacune des variables et que, de plus,*

$$f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) h_k \ , \quad \textit{pour tout} \ \ \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

⚠ La réciproque est par contre inexacte. On a cependant le résultat suivant :

**Proposition 3.1.13**

*Une fonctionnelle* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continûment dérivable dans* $\Omega$ *si et seulement si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$, $1 \leq k \leq n$, *existent en tout point* $\mathbf{a} \in \Omega$ *et si les applications dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \ \ \mathbf{a} \in \Omega \ \longrightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$$

*sont continues dans* $\Omega$*.*

Supposons enfin que $E = \mathbb{R}^n$ et que $F = \mathbb{R}^p$, de sorte qu'une application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est déterminée par la donnée de $p$ fonctionnelles $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$, de $n$ variables chacune. Alors la relation

$$\mathbf{k} = f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \ , \ \ \text{avec} \ \ \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \ \text{et} \ \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} .$$

La matrice "*p lignes, n colonnes*" ci-dessus représente donc l'application linéaire

$$f'(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \ .$$

En ce qui concerne l'expression de la matrice dérivée d'applications composées en dimension finie, on a le résultat suivant en relation avec le théorème 3.1.1 :

**Proposition 3.1.14**

*Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application dérivable en un point $\mathbf{a} \in \Omega$ ($\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$), et soit $g : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ une application dérivable au point $\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \in \widetilde{\Omega}$ ($\widetilde{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{R}^m$). On suppose $\widetilde{\Omega} \subset f(\Omega)$. Alors l'application composée*

$$h = g \circ f \ : \ \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

*est dérivable au point $\mathbf{a} \in \Omega$ et la dérivée de l'application $h$ au point $\mathbf{a}$ s'exprime matriciellement de la façon suivante :*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_m}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, précisons quelques *notations* particulières aux fonctionnelles $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En tout point $\mathbf{a} \in \Omega$ où cette application est une fois, ou deux fois, dérivable, on introduit le *vecteur* $\nabla f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ et la *matrice* $\nabla^2 f(\mathbf{a}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis respectivement par les relations

$$f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = < \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{h} > \quad \text{pour tout} \ \ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,$$
$$f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = < \nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{h}, \mathbf{k} > = < \mathbf{h}, \nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{k} > \quad \text{pour tout} \ \ \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n.$$

$< \cdot, \cdot >$ désignant comme d'habitude le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Le vecteur

$$\nabla f(\mathbf{a}) \ = \ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

s'appelle le **gradient** de l'application $f$ au point $\mathbf{a}$, et la matrice (symétrique)

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) \ = \ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

s'appelle le **Hessien** de l'application $f$ au point $\mathbf{a}$.

Pour illustrer ces considérations, voici trois façons équivalentes d'écrire (par exemple) la formule de Taylor-Young pour une fonctionnelle $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable :

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} f''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_2^2 \, \varepsilon(\mathbf{h})$$
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + < \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{h} > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{h}, \mathbf{h} > + < \mathbf{h}, \mathbf{h} > \varepsilon(\mathbf{h})$$
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (\nabla f(\mathbf{a}))^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{h} \, \varepsilon(\mathbf{h}).$$

## 3.2 Convexité des fonctionnelles

### 3.2.1 Ensembles convexes - fonctionnelles convexes

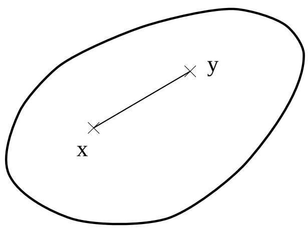
On indique dans ce paragraphe quelques propriétés de base d'une classe très importante de fonctionnelles.

**Définition 3.2.1 – Ensembles convexes**

L'ensemble $D_0$ est dit **convexe** si et seulement si

$$\forall \mathbf{x} \in D_0,\ \forall \mathbf{y} \in D_0,\ \forall \alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R} \ \text{ on a } \ \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in D_0\ .$$

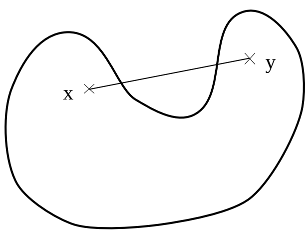
**Remarque :**




autrement dit, si $\mathbf{x} \in D_0$ et $\mathbf{y} \in D_0$, alors le segment qui joint ces deux points est également contenu dans $D_0$, le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ étant défini par

$$\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \iff \exists \alpha \in [0,1] \text{ t.q. } \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}\ .$$

**Exemple d'ensemble non convexe**




Remarque : la notion d'ensemble convexe correspond en fait à une propriété de régularité du domaine $D_0$ considéré

**Définition 3.2.2 – Fonctionnelles convexes**

Une fonctionnelle $f : D_0 \subset E \to \mathbb{R}$ est **convexe** sur le domaine convexe $D_0 \subset E$ ($E$ espace vectoriel normé) si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0,\ \forall \alpha \in [0,1], \quad f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y})\ .$$

La fonctionnelle $f$ est **strictement convexe** sur le domaine convexe $D_0$ si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y},\ \forall \alpha \in ]0,1[, \quad f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) < \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y})\ .$$

La fonctionnelle $f$ est **uniformément convexe** sur le domaine convexe $D_0$ si il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0,\ \forall \alpha \in ]0,1[, \\ &\qquad \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) - f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \ \geq\ c\,\alpha\,(1-\alpha) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E^2\ . \end{aligned}$$

**Remarques :**

(i) Il est clair que la *convexité uniforme* entraine la *convexité stricte* qui à son tour entraine la *convexité*.

(ii) La convexité indique une certaine régularité de la fonctionnelle. En dimension finie, par exemple, la convexité peut induire des propriétés de continuité (c.f. proposition suivante).

**Proposition 3.2.3**

*Soit $f : D_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe sur l'ouvert convexe $D_0 \subset \mathbb{R}^n$. Alors $f$ est continue sur $D_0$.*

Les définitions de base de la convexité (large, stricte, ou uniforme) peuvent parfois s'avérer d'un emploi peu commode. Le but des paragraphes qui suivent est de mettre en avant des propriétés qui s'y rapportent, exploitant la différentiabilité d'une fonctionnelle, et plus faciles à manipuler.

### 3.2.2 Convexité et dérivée première

**Théorème 3.2.4 – Caractérisation de la convexité à l'aide de la dérivée première**

*On suppose que la fonctionnelle $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$. On a alors :*

*(i) $f$ est convexe sur $D_0$ si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq f'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, .$$

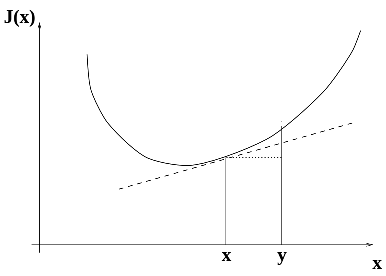
*(ii) $f$ est strictement convexe sur $D_0$ si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) > f'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, .$$

*(iii) La fonctionnelle $f$ est uniformément convexe sur $D_0$ si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq f'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + c \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_E^2 \, .$$

**Interprétation géométrique**




L'interprétation géométrique de

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq f'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, ,$$

est que le graphe de la fonctionnelle convexe $f$ est toujours au dessus de son plan tangent en un point quelconque du domaine $D_0$.

**Définition 3.2.5**

Soit une fonctionnelle $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'ouvert $\Omega$.
L'application dérivée $f' : \Omega \subset E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est dite **monotone sur le sous-ensemble** $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad (f'(\mathbf{y}) - f'(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0 \, .$$

L'application dérivée $f'$ est dite **strictement monotone sur le sous-ensemble** $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (f'(\mathbf{y}) - f'(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) > 0 \, .$$

L'application dérivée $f'$ est dite **fortement monotone sur le sous-ensemble** $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad (f'(\mathbf{y}) - f'(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 2 \, c \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_E^2 \, .$$

**Proposition 3.2.6 – Relations entre convexité et monotonie de la dérivée première**

*On suppose que la fonctionnelle $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\Omega$. On a alors :*

*(i) La fonctionnelle $f$ est convexe sur le sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si l'application dérivée $f'$ est monotone sur $D_0$.*

*(ii) La fonctionnelle $f$ est strictement convexe sur le sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si l'application dérivée $f'$ est strictement monotone sur $D_0$.*

*(iii) La fonctionnelle $f$ est uniformément convexe sur le sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si l'application dérivée $f'$ est fortement monotone sur $D_0$ (la constante $c > 0$ intervenant dans la définition de la convexité uniforme correspondant à la constante $c > 0$ introduite dans la définition de la forte monotonie de la dérivée).*

### 3.2.3 Convexité et dérivée seconde

**Théorème 3.2.7 – Relations entre convexité et positivité de la dérivée seconde**

*On suppose que la fonctionnelle $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable dans un ouvert $\Omega$ de l'espace vectoriel normé $E$, et soit $D_0$ une partie convexe de $\Omega$.*

*(i) La fonctionnelle $f$ est convexe sur le sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 0 \, .$$

*(ii) Si*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) > 0 \, ,$$

*alors la fonctionnelle $f$ est strictement convexe sur $D_0$.*

*(iii) La fonctionnelle $f$ est uniformément convexe sur le sous-ensemble convexe $D_0 \subset \Omega$ si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0, \quad f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \geq 2\,c\,\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|_E^2 \, .$$

⚠ La condition (ii) ci-dessus n'est qu'une condition suffisante, la réciproque étant inexacte.

**Théorème 3.2.8 – Cas $\Omega$ ouvert convexe**

*On suppose que la fonctionnelle $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable dans un ouvert convexe $\Omega$ de l'espace vectoriel normé $E$.*

*(i) La fonctionnelle $f$ est convexe sur le sous-ensemble convexe $\Omega$ si et seulement si $\forall \mathbf{x} \in \Omega, f''(\mathbf{x})$ est semi-définie positive.*

*(ii) Si $\forall \mathbf{x} \in \Omega, f''(\mathbf{x})$ est définie positive, alors la fonctionnelle $f$ est strictement convexe sur $\Omega$.*

*(iii) En dimension finie, la stricte convexité est équivalente à l'uniforme convexité.*

✍ **Exercice 3.2.1**.

**1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $f$ soit convexe sur $\mathbb{R}^2$.

**2.** L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 3|$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbb{R}^2$ ?

**3.** L'application $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbb{R}^n$ ?
□

# Bibliographie


[1] Carpentier. Cours de 3ième année enseeiht, filière informatique et mathématiques appliquées. INPT-ENSEEIHT, 1983. ↩ 12.

[2] Gerard Cornuejols and Reha Tütüncü. *Optimization Methods in Finance*. Cambridge University Press, 2007. ↩ 11.

[3] J.E. Dennis and Jr. Robert B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, 1996. ↩ 56.

[4] J.M. Devos. Fermat "le premier homme du monde". France 3, IREM de Toulouse, CRDP Midi-Pyrénées, 1995. Casette vidéo. ↩ 4.

[5] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. *L'Optimisation*. Que sais-je. Presses Universitaires de France, 1996. ISBN : 2 13 047981 2. ↩ 50.