2020-2021

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES CORRIGES DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
SIGNAUX ET SPECTRES

Exercice 1 : Etude d'un signal constant sur la durée T

On considère dans cet exercice le signal suivant (figure 1) :

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 \quad t \in [-T/2, T/2] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

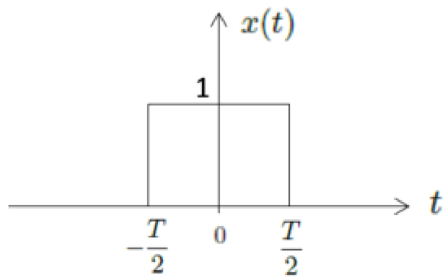

FIGURE 1 –

Préciser la classe à laquelle appartient le signal $x(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ (en distinguant les cas $\tau > 0$ et $\tau < 0$) et sa densité spectrale de puissance ou d'énergie $S_x(f)$.

Le signal est déterministe à énergie finie : $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T < \infty$

Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par : $R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt$

Pour $\tau > 0$: si $\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2}$, soit $\tau > T$, on a $R_x(\tau) = 0$ (supports des portes disjoints), si $\tau - \frac{T}{2} \leq \frac{T}{2}$, soit $0 < \tau \leq T$, on a $R_x(\tau) = \int_{\tau-T/2}^{T/2} dt = T - \tau$. Par symétrie on obtient alors $R_x(\tau) = T \bigwedge_T(\tau)$ (figure 2), où $\bigwedge_T(\tau)$ représente le triangle de 1/2 base T et de hauteur 1.

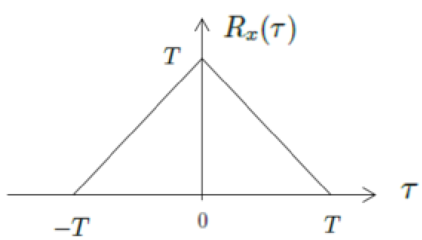

FIGURE 2 –

Sa DSE est donnée par : $S_x(f) = TF\left[R_x(\tau)\right] = T \times T sinc^2(\pi f T) = T^2 sinc^2(\pi f T)$

Remarque : on retrouve bien $S_x(f) = |X(f)|^2$ (signal à énergie finie), si $X(f)$ représente la transformée de Fourier de $x(t)$

Exercice 2 : Etude d'un signal périodique

On considère dans cet exercice le signal $x(t)$ présenté dans la figure 3.

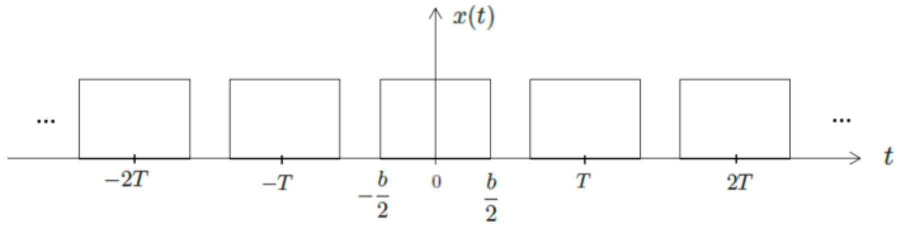

FIGURE 3 –

Déterminer la transformée de Fourier du signal $X(f)$, sa fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance ou d'énergie $S_x(f)$.

On peut écrire le signal de la manière suivante : $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Pi_b\left(t - kT\right) = \Pi_b(t) * \text{Ш}_T\,(t)$, où $\text{Ш}_T\,(t)$ représente le peigne de Dirac de largeur T : $\text{Ш}_T\,(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$. On a alors $X(f) = bsinc(\pi f b) \times \frac{1}{T}.\,\text{Ш}_{\frac{1}{T}}\,(f) = \frac{b}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc(\pi b\frac{k}{T})\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$.

Le signal est déterministe à puissance finie périodique, de période T. Sa fonction d'autocorrélation s'écrit donc : $R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$. C'est une fonction paire et périodique de période T : $R_x(\tau + kT) = R_x(\tau)$. On peut donc se limiter au calcul sur une période. Ce calcul a été réalisé dans l'exercice précédent. On obtient donc ici, en périodisant : $R_x(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} b\bigwedge_b(\tau - kT)$.

Sa DSP est donnée par : $S_x(f) = TF\left[R_x(\tau)\right] = TF\left[\frac{b}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\bigwedge_b(\tau) * \delta\left(\tau - kT\right)\right] = \frac{b}{T}TF\left[\bigwedge_b(\tau) * \text{Ш}_T\,(\tau)\right] = \frac{b}{T}bsinc^2(\pi b f)\times \frac{1}{T}.\,\text{Ш}_{\frac{1}{T}}\,(f) = \frac{b^2}{T^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc^2\left(\pi\frac{bk}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$.

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$\left(i2\pi f\right)^n X(f)$
$\left(-i2\pi t\right)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta\left(f - nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\, Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$$