

Serie 70

A7 a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 73 \\ 5 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Diagonaldominanz

$$8 > 5+2$$

$$9 > 5+7$$

$$7 > 9+2 \quad \checkmark$$

b) $x^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x = -D^{-1}(L+R)x + D^{-1}b \equiv F(x)$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -0,33 \\ 9,57 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 7,44 \\ -7,20 \\ 3,66 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2,27 \\ -0,65 \\ 9,3 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 7,68 \\ -7,75 \\ 3,78 \end{pmatrix} \quad \dots \quad x_\infty = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c)

$$\|x^{(n)} - \bar{x}\| \leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \text{a-priori Abschätzung}$$

$$\|x^{(n)} - \bar{x}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \quad \text{a-posteriori Abschätzung}$$

$$\|x_3 - x_4\|_\infty = 0,465$$

d) $\|x^n - \bar{x}\| \leq \frac{\|B\|^n}{1 - \|B\|} \|x^1 - x^0\| \quad B = -D^{-1}(L+R), \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

e) $47 - 9 = 38 \text{ Iterationen}$

A2

a) $x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Rx^{(k)} + (D+L)^{-1}b$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -7,02 \\ 3,86 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2,05 \\ -7,07 \\ 3,97 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2,07 \\ -7,005 \\ 3,993 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 2,065 \\ -7,002 \\ 3,997 \end{pmatrix}$$

c) $\|x_3 - x_4\|_\infty = 0,0096$

d) 9

e) $9 - 2 = 7$