Übungsserie 12

Keine Abgabe

Die Serie wird während den Übungen der letzten zwei Wochen zusammen gelöst und die Lösungen besprochen.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Spektrum und daraus die Determinante und Spur der folgenden Matrizen

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3 Matrix $\boldsymbol{B}$ berechnet sich z.B. als

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ &= b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (vgl. Bsp. 4.22 & Aufg. 4.12):

a) Berechnen Sie die Eigenwerte, die Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

sowie den Rang der jeweiligen Koeffizientenmatrix $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3[1]:

Es sei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 9 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix diagonalisierbar ist mit

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -7 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

[1] aus [12]

b) Verwenden Sie die Diagonalisierbarkeit, um die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ anzugeben.

c) Sind zu einer diagonalisierbaren Matrix $\boldsymbol{A}$ die zugehörigen Matrizen $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

eindeutig bestimmbar? Begründen Sie.

Tipp: Multiplizieren Sie die Spalten von $\boldsymbol{T}$ mit unerschiedlichen Faktoren und berechnen Sie $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \widetilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{T}}$ erneut.

Aufgabe 4:

a) Implementieren Sie das $\boldsymbol{QR}$-Verfahren in Python in die Funktion `[Ak,Pk] = Gruppe_S12_Aufg4(A,k)`. Dabei ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{A}_k$ und $\boldsymbol{P}_k$ die Matrizen aus dem $\boldsymbol{QR}$-Verfahren nach der k-ten Iteration gemäss Skript. Verwenden sie für die benötigte $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung die Python Funktion `np.linalg.qr()`. Überprüfen Sie, dass Ihre Funktion das gleiche Resultat ergibt wie in Bsp. 4.24 im Skript für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wenden Sie Ihre Funktion jetzt auf die symmetrische Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

an. Überprüfen Sie, dass $\boldsymbol{P}_k$ orthogonal ist. Welches sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$? Schreiben Sie das als Kommentar in Ihr Skript.

c) Überprüfen Sie Ihr Resultat aus b) mit der Python-Funktion `np.linalg.eig()`. Lesen Sie die Eigenschaften dieser Funktion im Numpy-Manual nach. Was ist der Vorteil der Funktion `np.linalg.eig()` im Vergleich zu Ihrer eigenen Funktion? Schreiben Sie Ihren Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 5 (vgl. Bsp. 4.25):

Bestimmen Sie mit einem Python-Skript `Gruppe_S12_Aufg5.py` den betragsmässig grössten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Vektoriteration (von-Mises Iteration) und dem Startvektor $\boldsymbol{x} = (1,0,0)^T$. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $||\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k||_2 < 1\mathrm{e}-4$. Wie viele Male müssen Sie iterieren? Überprüfen Sie auch hier Ihr Resultat mit `np.linalg.eig()`. Stimmen die Resultate überein?