Análisis Matemático III

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERIA

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO III

(PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA)

(TERCERA EDICION AMPLIADA)

- SUPERFICIES
- FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL
- FUNCIONES REALES DE VARIABLE VECTORIAL
- FUNCIONES VECTORIAL DE VARIABLE VECTORIAL
- INTEGRALES DOBLES
- INTEGRALES TRIPLES
- INTEGRALES CURVILINEAS
- INTEGRALES DE SUPERFICIES
- TEOREMA DE LA DIVERGENCIA
- TEOREMA DE STOKES

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ

3º EDICIÓN

01 – 10 – 2000

RUC	Nº 19369978
Ley de Derechos del Autor	Nº 13714
Registro comercial	Nº 10716
Escritura Publica	Nº 4484

PROLOGO

En la presente obra intitulada "Análisis Matemático III para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería" en su 3era. Edición ampliada y revisada; se expresa en forma teórica y práctica los conceptos de superficies, las funciones vectoriales de variable real, las funciones reales de variable vectorial, las funciones vectoriales de variable vectorial y sus respectivas aplicaciones, así como las integrales dobles, triples, curvilíneas en donde se ha incluido el concepto de circulación de campos vectoriales y su cálculo, las integrales de superficies y los teoremas de la divergencia y de Stokes; además variedad de ejercicios y problemas propuestas las diversas universidades.

La experiencia en la Docencia universitaria por lo señalado con la forma de expresar, resolver y ordenar los problemas resueltos y propuestos, se ha puesto especial cuidado en los gráficos, pues pensamos que un "buen dibujo" por señalar en forma natural, es el camino a seguir en la búsqueda de la solución a un problema .

• La parte teórica se desarrolla de manera metódica y en especial cuidado, tratando de no perder el rigor matemático pero tratando de no caer en el excesivo formalismo que confunde al lector.

La lectura provechosa del presente trabajo requiere del conocimiento previo del cálculo diferencial e integral, así como su geometría analítica.

La presente obra es recomendable para todo estudiantes de ciencias matemáticas, físicas, ingeniería, economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos del análisis real. Por último deseo agradecer y expresar mi aprecio a las siguientes personas por sus valiosos sugerencias y críticas.

Doctor Pedro Contreras Chamorro

Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Miembro Fundador de la Academia Nacional de Ciencias y Tecnología del Perú

Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

Lic. Sergio Leyva Haro

Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

Coordinador del Centro de Cómputo de la Facultad de Ingeniería Quimica de la UNAC.

Miembro del Tribunal de Honor de la UNAC.

Mg. Roel Vidal Guzmán

Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

Ex-Jefe de Departamento de Física y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Ex-Director de la Escuela de Pos-grado de la Facultad.

Lic. Antonio Calderón Leandro

Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

Ex-Jefe de departamento académico de Matemática de la facultad de Ingeniería Pesquera.

Jefe de Departamento de Física y Matemática de la UNAC.

Coordinador del Área de Ciencias Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Ricardo Palma.

Mg. Euclides Moreno Jara

Catedrático Principal de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

Lic. Palermo Soto Soto

Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

Lic. Juan Bernuy Barros

Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.

Eduardo Espinoza Ramos

PRESENTACIÓN

Una vez más, Eduardo Espinoza Ramos nos muestra sus avances intelectuales y, sus siempre presentes preocupaciones por dar lo mejor de sí a la juventud estudiosa universitaria. Una vez más, Eduardo me muestra que ha escuchado mis pocas y sencillas recomendaciones en el contenido, forma y presentación de los resultados matemáticos. El resultado de sus siempre renovados esfuerzos es: un texto claro, preciso y bien presentado. Felicitaciones Eduardo.

Dr. Pedro C. Contreras Ch.

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos.

RONALD, KEVIN, JORGE y DIANA

Que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser Guías de sus Prójimo

ÍNDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO VII

CAPITULO VIII

CAPITULO I

1. SUPERFICIES CUÁDRICAS.-

Pre-requisitos.- Para la comprensión adecuada de este tema de superficies, se requiere de los conocimientos previos de:

- Elementos de geometría plana: recta, circunferencia, cónicas, etc.
- Elementos de geometría del espacio: planos, secciones planas de un cuerpo, etc.

Objetivos.- Establecer los fundamentos necesarios para la intensificación de las técnicas para el trazado de las superficies a partir de sus ecuaciones como premisas así como también las curvas y regiones, para la utilizarlos en las diversas aplicaciones.

Al finalizar el estudio de este capitulo el alumno debe ser capaz de:

- Describir el procedimiento seguido en el trazado de las superficies.
- Reconocer la forma de la ecuación de las cuádricas centradas.
- Representar gráficamente las siguientes superficies: Elipsoide, Paraboloide, Hiperboloide de una y dos hojas, Paraboloide Elíptico, Paraboloide hiperbólico.
- Identificar las ecuaciones de cilindros y conos.
- Determinar: la directriz, generatriz de los cilindros y conos.
- Representar gráficamente a los cilindros y conos.

1.1 Introducción.-

Analíticamente la ecuación E(x,y) = 0, nos representa un lugar geométrico en el plano XY, a la ecuación E(x,y) = 0, extenderemos al espacio tridimensional, cuya ecuación rectangular en tres variables representaremos por:

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

También se conoce que todo plano se representa analíticamente por una única ecuación lineal de la forma:

$$\boxed{P: \quad Ax + By + Cz + D = 0}$$

De una manera más general, veremos si existe una representación analítica de una figura geométrica, al cual denominaremos superficie, tal representación consistirá en una única ecuación rectangular de la forma:

$$\boxed{F(x,y,z) = 0 \quad \dots (1)}$$

Por ejemplo, por medio de la distancia entre dos puntos se puede demostrar que la superficie esférica de radio r con centro en el origen se representa analíticamente por la ecuación:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

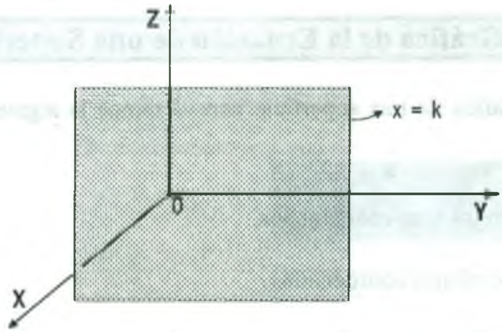
1.2 Definición.-

Llamaremos superficie al conjunto de puntos p(x,y,z) de R^3 que satisfacen una sola ecuación de la forma:

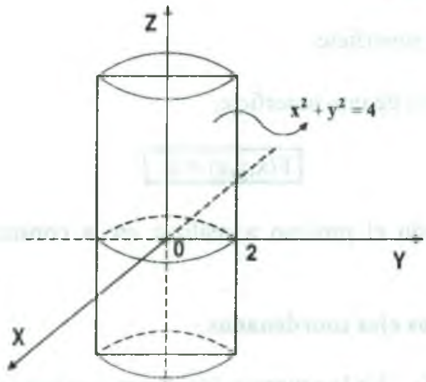
$$\boxed{F(x,y,z) = 0}$$

La ecuación F(x,y,z) = 0, contiene tres variables, sin embargo la ecuación de una superficie puede contener solamente una o dos variables.

Por ejemplo la ecuación x = k, k constante, representa un plano paralelo al plano YZ.



De igual manera la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ considerada en el espacio representa un cilindro circular recto.



Toda ecuación de la forma F(x,y,z) = 0, no necesariamente representa una superficie, por ejemplo la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 0$, no representa ningún lugar geométrico, además la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, tiene una solución real que es: x = y = z = 0, cuyo lugar geométrico está constituido por un sólo punto, el origen.

1.3 Superficies Cuádricas.-

Llamaremos superficies cuádricas a toda ecuación de segundo grado en las variables x,y,z que tiene la forma: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$ donde A, B, C, D, E, F, G, H, K son constantes, y por los menos una es diferente de cero.

1.4 Discusión de la Gráfica de la Ecuación de una Superficie.-

Para construir la gráfica de una superficie consideremos la siguiente discusión, mediante los pasos siguientes:

1) Intersección con los ejes coordenados.

2) Trazas sobre los planos coordenados.

3) Simetrías con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y el origen.

4) Secciones transversales o secciones paralelas a los planos coordenados.

5) Extensión de la superficie.

6) Construcción de la superficie.

Consideremos la ecuación de una superficie.

$$\boxed{F(x,y,z) = 0}$$

Ahora describiremos todo el proceso a realizar en la construcción de la gráfica de dicha superficie.

1º Intersección con los ejes coordenados.-

a) Con el eje X: En la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se hace $y=z=0$, es decir: $F(x,0,0)=0$

b) Con el eje Y: En la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se hace $x=z=0$, es decir: $F(0,y,0)=0$

c) Con el eje Z: En la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se hace $x=y=0$, es decir: $F(0,0,z)=0$

2º Trazas sobre los planos coordenados.-

Es la curva de intersección de la superficie $F(x,y,z) = 0$ con cada uno de los planos coordenados. Las trazas sobre los planos coordenados se obtienen de la siguiente forma:

a) La traza sobre el plano XY: En la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se hace $z = 0$, es decir: $F(x,y,0) = 0$

b) La traza sobre el plano XZ: En la ecuación $F(x,y,z) = 0$ se hace $y = 0$, es decir: $F(x,0,z) = 0$

c) La traza sobre el plano YZ: En la ecuación F(x,y,z) = 0 se hace x = 0, es decir: F(0,y,z) = 0

3º Simetrías Respecto a los Planos Coordenados, Ejes Coordenados y el origen:

a) Existe simetría respecto al:

- Plano XY, sí F(x,y,z) = F(x,y,-z)
- Plano XZ, sí F(x,y,z) = F(x,-y,z)
- Plano YZ, si F(x,y,z) = F(-x,y,z)

b) Existe simetría respecto al:

- Eje X, sí F(x,y,z) = F(x,-y,-z)
- Eje Y, si F(x,y,z) = F(-x,y,-z)
- Eje Z, si F(x,y,z) = F(-x,-y,z)

c) Con respecto al origen: Sí F(x,y,z) = F(-x,-y,-z)

4º Secciones Transversales ó Secciones paralelas a los planos Coordenados.-

Es la curva de intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados.

Las secciones Transversales se pueden obtener de la siguiente forma:

a) Sobre el plano XY: Se hace z = k es decir: F(x,y,k) = 0

b) Sobre el plano XZ: Se hace y = k es decir: F(x,k,z) = 0

c) Sobre el plano YZ: Se hace x = k es decir: F(k,y,z) = 0

5º Extensión De La Superficie.-

Consiste en determinar el dominio de la ecuación F(x,y,z) = 0

6º Construcción De La Superficie.-

Con la ayuda de la discusión de la ecuación de una superficie se construye la gráfica.

Ejemplo.- Discutir y hacer la gráfica de la superficie cuya ecuación es: $x^2+y^2-z^2=1$

Solución

1) Intersecciones con los ejes coordenados.

a) Con el eje X, se hace y = z = 0, de donde $x^2=1$ entonces x = ±1, de donde los puntos son: (1,0,0) , (-1,0,0)

b) Con el eje Y, se hace x = z = 0, de donde $y^2=1$ entonces y = ±1, de donde los puntos son: (0,1,0) , (0,-1,0)

c) Con el eje Z, se hace x = y = 0, de donde $z^2=-1$ entonces no existe intersección con el eje Z.

2) Las trazas sobre los planos coordenados.

a) La traza sobre el plano XY; se hace z = 0; $x^2+y^2=1$ es una circunferencia.

b) La traza sobre el plano XZ; se hace y = 0; $x^2-z^2=1$ es una hipérbola.

c) La traza sobre el plano YZ; se hace x = 0; $y^2-z^2=1$ es una hipérbola.

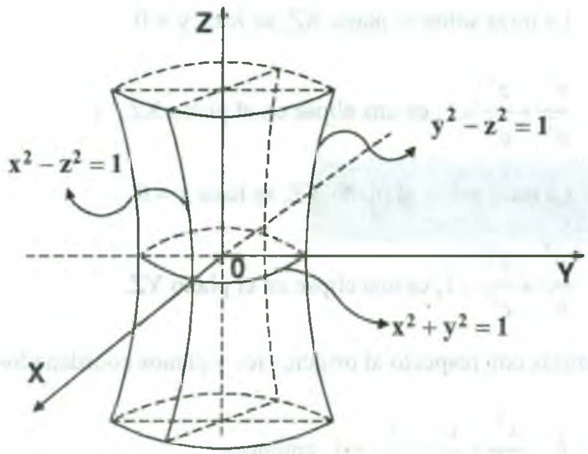
3) Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

La superficie es simétrica respecto al origen, a los ejes coordenados y a los planos coordenados, puesto que la ecuación no cambia al aplicar el criterio establecido.

4) Las secciones transversales o paralelas a los planos coordenados:

Consideremos las secciones paralelas al plano XY; sea z = k entonces $x^2+y^2=1+k^2$ es una familia de circunferencia.

5) Extensión: $z=\pm\sqrt{x^2+y^2-1}$, $x^2+y^2\geq 1$



1.5 Estudio de las Principales Superficies Cuádricas.-

A) Elipsoide.- Es el lugar geométrico de todos los puntos p(x,y,z) de R^3 que satisfacen a la ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq b,\ a \neq c \text{ ó } b \neq c.$$

Graficando el Elipsoide se tiene:

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace y= z = 0, x =±a, $A_1(a,o,o)$, $A_2(-a,o,o)$
- Con el eje Y, se hace x= z = 0, y = ±b, $B_1(o,b,o)$, $B_2(o,-b,o)$
- Con el eje Z, se hace x = y = 0, z = ±c, $C_1(o,o,c)$, $C_2(o,o,-c)$

b) Las Trazas sobre los planos coordenados.

- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, es una elipse en el plano XY.

- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$, es una elipse en el plano XZ.

- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$, es una elipse en el plano YZ.

c) Simetrías con respecto al origen, ejes y planos coordenados.

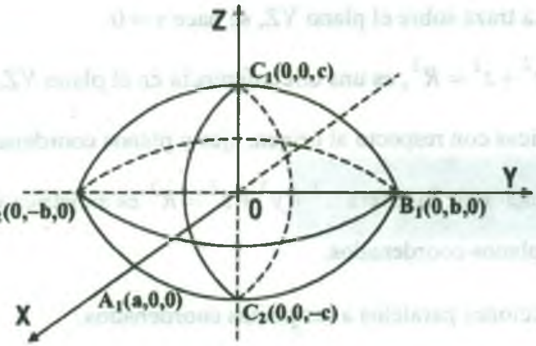
Sea $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, entonces.

- Con respecto al origen ∃; si (x,y,z)∈E ⇔ (-x,-y,-z) ∈ E
- Con respecto al eje X ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (x,-y,-z) ∈ E
- Con respecto al eje Y ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (-x,y,-z) ∈ E
- Con respecto al eje Z ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (-x,-y,z) ∈ E
- Con respecto al plano XY ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (x,y,-z) ∈ E
- Con respecto al plano XZ ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (x,-y,z) ∈ E
- Con respecto al plano YZ ∃; sí (x,y,z)∈E ⇔ (-x,y,z) ∈ E

d) Las secciones paralelas a los planos coordenados.

Los planos z = k, corta la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$, que es una familia de elipses donde -c ≤ k ≤ c

e) Extensión de la superficie de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se tiene $z=|c|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ de donde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$



B) La Esfera.- La Superficie esférica es el lugar geométrica de todos los puntos p(x,y,z) del espacio que equidistan de un punto fijo, la distancia constante se llama radio y el punto fijo centro.

Si en la ecuación del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se tiene a = b = c = R ≠ 0, el elipsoide se transforma en $x^2+y^2+z^2=R^2$, que es la ecuación de la esfera de radio R y centro el origen de coordenadas.

Graficando la esfera se tiene:

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace, y = z = 0, x = ±R, $A_1(R,o,o)$, $A_2(-R,o,o)$
- Con el eje Y, se hace, x = z = 0, y = ±R, $B_1(o,R,o)$, $B_2(o,-R,o)$
- Con el eje Z, se hace, x = y = 0, z = ±R, $C_1(o,o,R)$, $C_2(o,o,-R)$

b) Las Trazas sobre los planos coordenados.

- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0.

  $x^2+y^2=R^2$, es un circunferencia en el plano XY.

- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0.

  $x^2+z^2=R^2$, es un circunferencia en el plano XZ.

- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0.

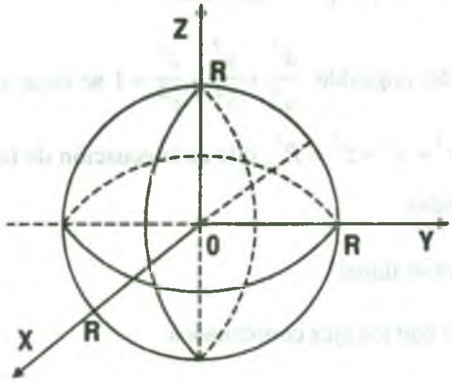
  $y^2 + z^2 = R^2$, es una circunferencia en el plano YZ.

c) Simétricas con respecto al origen, ejes y planos coordenados.

La ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ es simétrica con respecto al origen, a los ejes y planos coordenados.

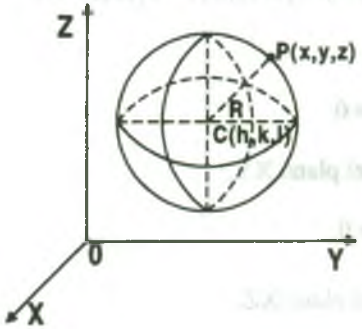
d) Las secciones paralelos a los planos coordenados.

Las secciones paralelas lo tomaremos con respecto al plano coordenado XY, es decir, z = k se tiene $x^2 + y^2 = R^2 - k^2$, $-R \leq k \leq R$, que es una familia de circunferencia.



Teorema.- La ecuación de la superficie esférica de centro el punto c(h,k,l) y de radio la constante R > 0 es: $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$

Demostración



Sea P(x,y,z) un punto cualquiera de la esfera, luego por definición de esfera se tiene :

$$E = \left\{P(x,y,z) \in R^3 \,/\, d(p,c) = R\right\}$$

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = R$ de donde:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$$

Observación.- La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=R^2$ se conoce con el nombre de la forma ordinaria de la ecuación de la esfera, si desarrollamos la ecuación de la esfera se tiene:

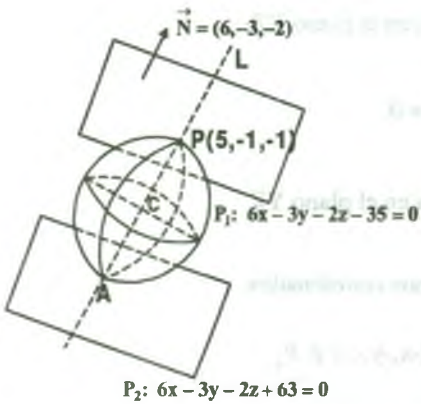
$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+h^2+k^2+l^2-R^2=0$, de donde se tiene:

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$,

luego una superficie esférica queda determinada por cuatro puntos no coplanares.

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la esfera que está en los planos paralelos 6x - 3y - 2z - 35 = 0, 6x - 3y - 2z + 63 = 0. Sabiendo que el punto P(5,-1,-1) es el punto de contacto de uno de ellos.

Solución



Sea $L = \{(5,-1,-1) + t(6,-3,-2) / t \in R\}$

Sea $A \in L \wedge P_2 \Rightarrow A \in L \wedge A \in P_2$

Si $A \in L \Rightarrow A(5 + 6t, -1 - 3t, -1 - 2t)$

para algún $t \in R$, como $A \in P_2$ entonces

$6(5 + 6t) - 3(-1 - 3t) - 2(-1 - 2t) + 63 = 0$ de donde

t = -2, A(-7,5,3), como c es punto medio de A y p se tiene: $c(\frac{5-7}{2},\frac{-1+5}{2},\frac{-1+3}{2})=c(-1,2,1)$

Además, r = d (c,p) = 7 por lo tanto: $E: (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$

C) Paraboloide Elíptico.- Es el lugar geométrico de todos los puntos p(x,y,z) de R^3 que satisfacen a la ecuación de la forma

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$, donde $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$.

Graficando el paraboloide elíptico se tiene:

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace y = z = 0, x = 0 $\Rightarrow$ A(0,0,0)

- Con el eje Y, se hace x = z = 0, y = 0 $\Rightarrow$ B(0,0,0)

- Con el eje Z, se hace x = y = 0, z = 0 $\Rightarrow$ C(0,0,0)

b) Las Trazas sobre los planos coordenados

- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ que representa un punto P(0,0,0).

- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0

$z=\frac{x^2}{a^2}$ que representa a una parábola en el plano XZ.

- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0

$z=\frac{y^2}{b^2}$ que representa a una parábola en el plano YZ.

c) Simetrías con respecto al origen, ejes y planos coordenados.

- Con respecto al origen $\nexists$ puesto que (-x,-y,-z) $\notin P_\varepsilon$

- Con respecto al eje X, $\nexists$ puesto que (x,-y,-z) $\notin P_\varepsilon$

- Con respecto al eje Y, $\nexists$ puesto que (-x,y,-z) $\notin P_\varepsilon$

- Con respecto al eje Z, $\exists$ puesto que (-x,-y,z) $\in P_\varepsilon$

- Con respecto al plano XY, $\nexists$ puesto que (x,y,-z) $\notin P_\varepsilon$

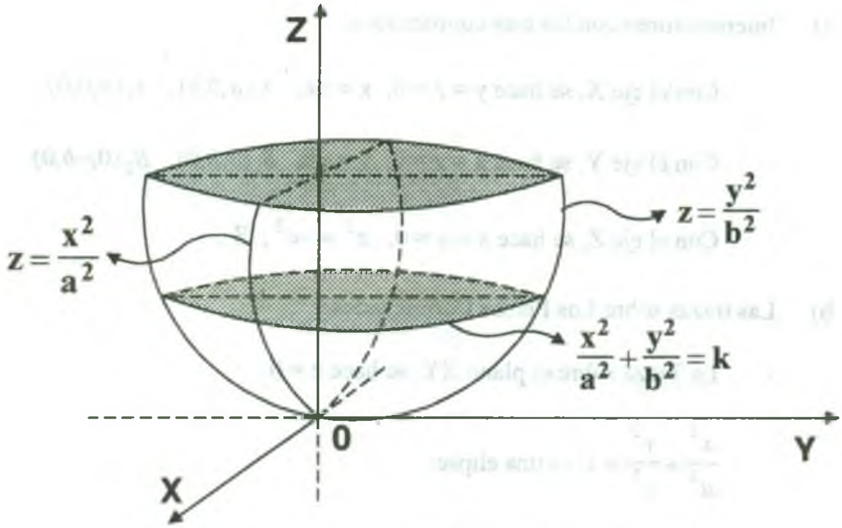
- Con respecto al plano XZ, $\exists$ puesto que (x,-y,z) $\in P_\varepsilon$

- Con respecto al plano YZ, $\exists$ puesto que (-x,y,z) $\in P_\varepsilon$

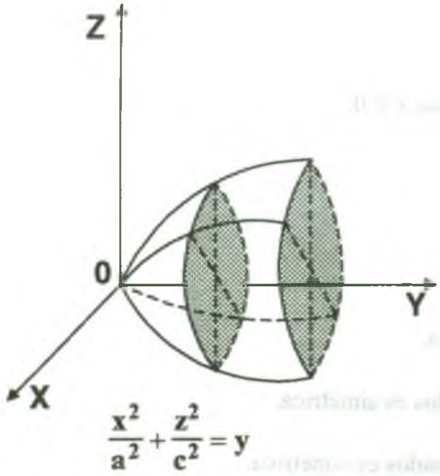
d) Secciones paralelas a los planos coordenados.

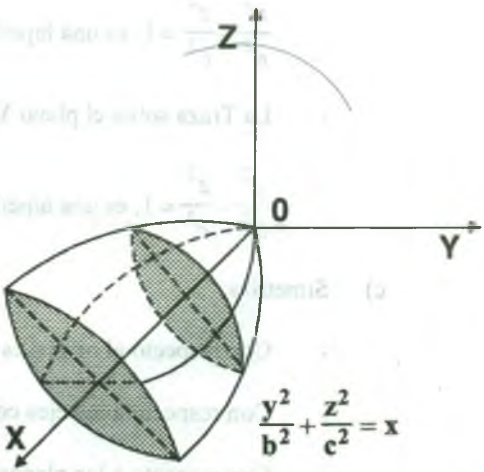
Las secciones paralelas tomaremos con respecto al plano XY para esto se tiene z = k que corta la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$ que es una familia de elipses.

e) Extensión de la superficie: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ es definido $\forall(x,y) \in R^2$



<u>Otras variantes</u>





D) Hiperboloide de una Hoja.- Es el lugar geométrico de todos los puntos P(x,y,z) de R^3 que satisfacen a la ecuación.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \text{donde}\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$$

Graficando el hiperboloide de una hoja se tiene.

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace y = z = 0, x = ±a, $A_1(a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$
- Con el eje Y, se hace x = z = 0, y = ±b, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$
- Con el eje Z, se hace x = y = 0, $z^2=-c^2$, $\nexists$.

b) Las trazas sobre Los Planos Coordenados.

- La Traza sobre el plano XY, se hace z = 0.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{es una elipse.}$$

- La Traza sobre el plano XZ, se hace y = 0.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \text{es una hipérbola.}$$

- La Traza sobre el plano YZ, se hace x = 0.

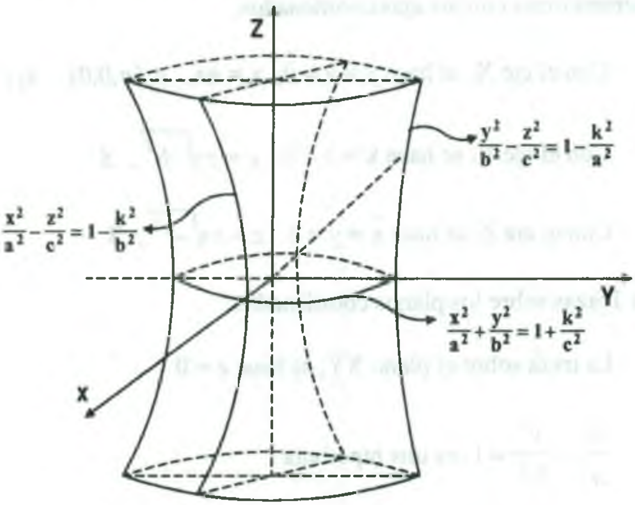
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \text{es una hipérbola.}$$

c) Simetrías.

- Con respecto al origen es simétrica.
- Con respecto a los ejes coordenados es simétrica.
- Con respecto a los planos coordenados es simétrica.

d) Secciones paralelas a los planos coordenados.

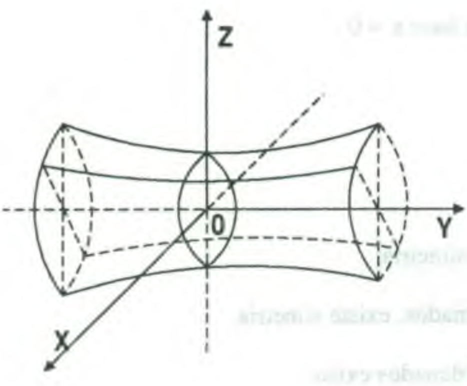
Los planos z = k corta a la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$, Que es una familia de elipses y los planos y = k corta a la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{c^2}=\frac{b^2-k^2}{b^2}$, -b < k < b, que es una familia de hipérbola.

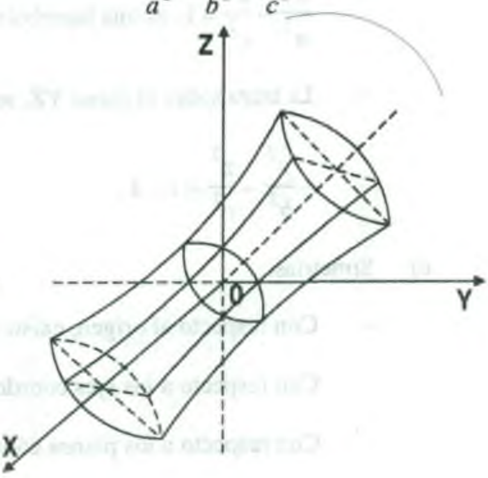


Otras variantes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$





E) Hipérboloide de Dos Hojas.- Es el lugar geométrico de todos los puntos P(x,y,z) de R^3 que satisfacen a la ecuación:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, donde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Graficando el hiperboloide de dos hojas se tiene:

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace y = z = 0, x = ±a, $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$
- Con el eje Y, se hace x = z = 0, $y=\pm\sqrt{-b^2}$, $\nexists$
- Con el eje Z, se hace x = y = 0, $z=\pm\sqrt{-c^2}$, $\nexists$

b) Las Trazas sobre los planos coordenados.

- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0

  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, es una hipérbola

- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0

  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, es una hipérbola

- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0

  $-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $\nexists$.

c) Simetrías.

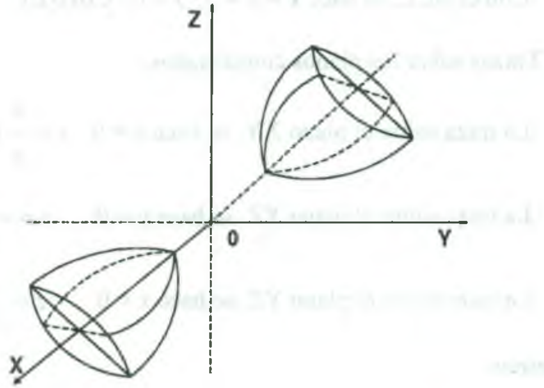
- Con respecto al origen, existe simetría.
- Con respecto a los ejes coordenados, existe simetría.
- Con respecto a los planos coordenados existe.

d) Secciones paralelas a los planos coordenados.

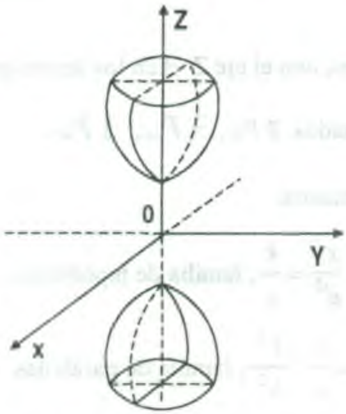
Los planos z = k, corta a la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$ es una familia de hipérbolas.

Los planos y = k, corta a la superficie en la curva $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2}$ es una familia de hipérbolas.

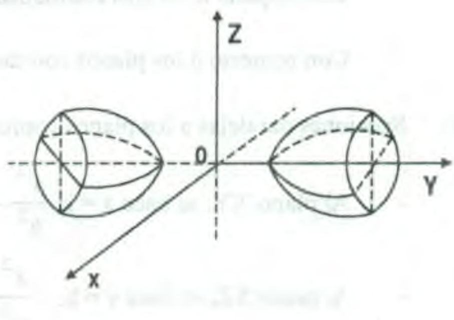
Los planos x = k, corta a la superficie en la curva $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2-a^2}{a^2}$, donde k > a ó k < -a, que es una familia de elipses.



<u>Otras Variantes</u>



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

F) Hiperboloide Parabólico.- Es el lugar geométrico de todos los puntos P(x,y,z) de R^3 que satisfacen a la ecuación de la forma: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$, donde a y b son positivos y $c \neq 0$.

Graficando el hiperboloide parabólico para el caso c > 0.

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, se hace z = y = 0, x = 0, A(0,0,0)
- Con el eje Y, se hace x = z = 0, y = 0, B(0,0,0)
- Con el eje Z, se hace x = y = 0, z = 0, C(0,0,0)

b) Las Trazas sobre los planos coordenados.

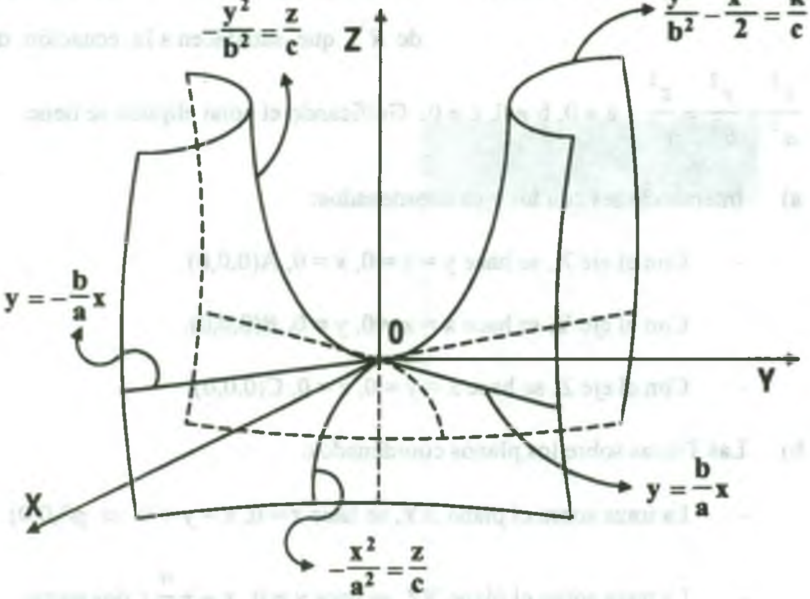
- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0, $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$, rectas.
- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0 , $z=-\frac{c}{a^2}x^2$, parábola.
- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0 , $z=\frac{c}{b^2}y^2$, parábola.

c) Simetrías.

- Con respecto al origen, $\nexists$
- Con respecto a los ejes coordenados, con el eje Z $\exists$ en los demás ejes $\nexists$.
- Con respecto a los planos coordenados $\nexists P_{xy}$, $\exists\ P_{xz}$, $\exists\ P_{yz}$.

d) Secciones paralelas a los planos coordenados.

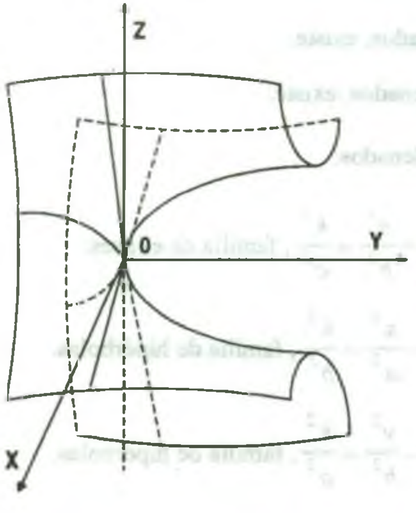
- Al plano XY, se hace z = k, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k}{c}$, familia de hipérbolas.
- Al plano XZ, se hace y = k, $-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}-\frac{k^2}{b^2}$, familia de parábolas.
- Al plano YZ, se hace x = k, $\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}+\frac{k^2}{a^2}$, familia de parábolas.

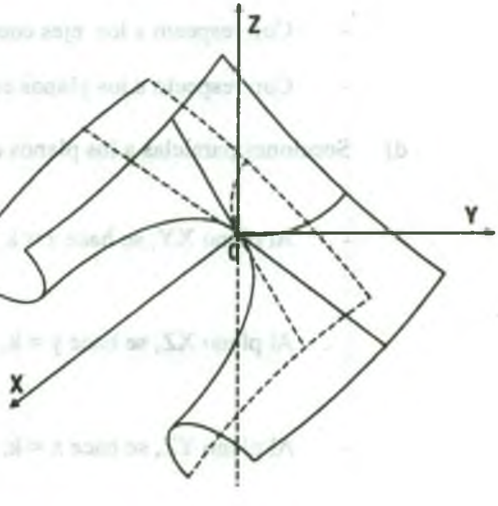


Otras variantes.

También el hiperboloide parabólico tiene las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b} \qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$$





G) El Cono Elíptico o Circular.- Es el lugar geométrico de todos los puntos p(x,y,z) de R^3, que satisfacen a la ecuación de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0. Graficando el cono elíptico se tiene:

a) Intersecciones con los ejes coordenados:

- Con el eje X, se hace y = z = 0, x = 0, A(0,0,0).
- Con el eje Y, se hace x = z = 0, y = 0, B(0,0,0).
- Con el eje Z, se hace x = y = 0, z = 0, C(0,0,0).

b) Las Trazas sobre los planos coordenados:

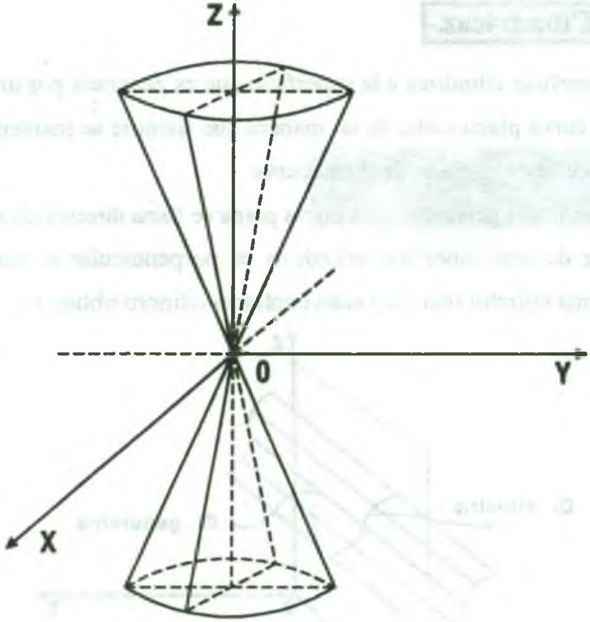
- La traza sobre el plano XY, se hace z = 0, x = y = 0 $\Rightarrow$ p0,0,0).
- La traza sobre el plano XZ, se hace y = 0, $x=\pm\frac{a}{c}z$ dos rectas.
- La traza sobre el plano YZ, se hace x = 0, $y=\pm\frac{b}{c}z$ dos rectas.

c) Simetrías:

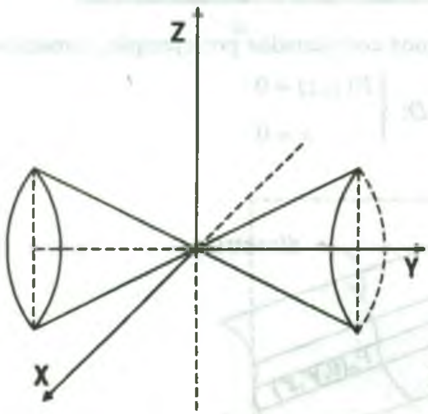
- Con respecto al origen, existe.
- Con respecto a los ejes coordenados, existe.
- Con respecto a los planos coordenados, existe.

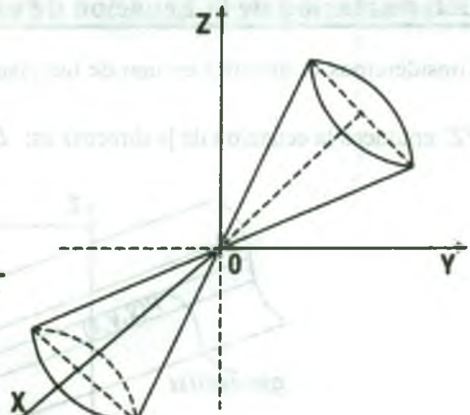
d) Secciones paralelas a los planos coordenados:

- Al plano XY, se hace z = k, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$, familia de elipses.
- Al plano XZ, se hace y = k, $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}$, familia de hipérbolas.
- Al plano YZ, se hace x = k, $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}$, familia de hipérbolas.



Otras Variantes





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

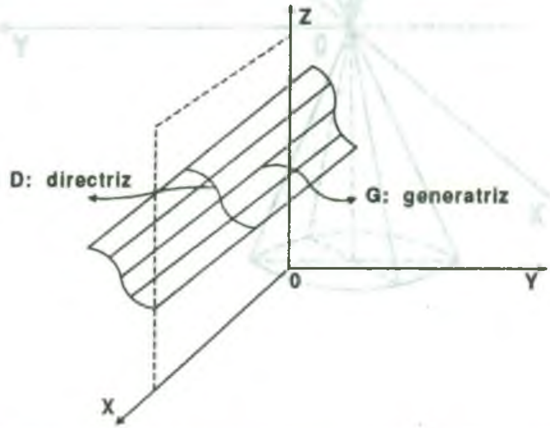
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}$$

1.6 Superficies Cilíndricas.-

Llamaremos superficie cilíndrica a la superficie que es generada por una recta que se mueve a lo largo de una curva plana dada, de tal manera que siempre se mantenga paralela a una recta fija dada que no está en el plano de dicha curva.

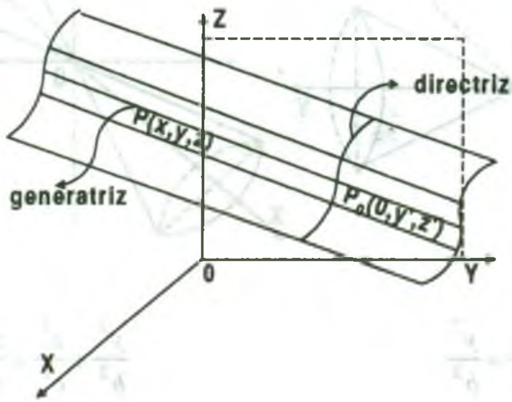
La recta móvil se llama generatriz y la curva plana se llama directriz de la superficie cilíndrica.

Si la generatriz de una superficie cilíndrica es perpendicular al plano de la directriz; la superficie se llama cilindro recto, en caso contrario cilindro oblicuo.



1.7 Determinación de la Ecuación de una Superficie Cilíndrica.-

Consideremos la directriz en uno de los planos coordenados por ejemplo, tomamos el plano YZ, entonces la ecuación de la directriz es: $D: \begin{cases} F(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$



Si p(x,y,z) es un punto cualquiera de la superficie, cuya generatriz tiene por números directores [a,b,c] y si $p'(0,y',z')$ es el punto de intersección de la directriz con la generatriz que pasa por el punto p(x,y,z) entonces el punto $p'(0,y',z')$ satisface a la ecuación de la directriz:

$$\boxed{D: \begin{cases} F(y',z')=0 \\ x'=0 \end{cases}} \quad \text{... (1)}$$

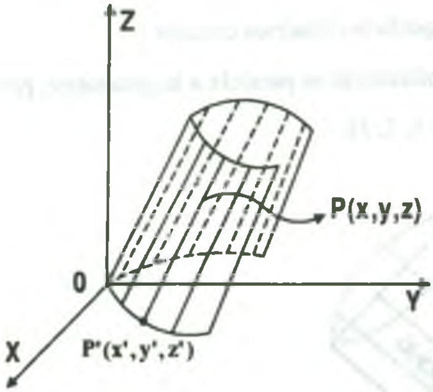
Y la ecuación de la Generatriz es dado por:

$$\boxed{G: \frac{x-0}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}} \quad \text{... (2)}$$

De las ecuaciones (1) y (2) al eliminar los parámetros x',y',z' se tiene la ecuación de la superficie cilíndrica.

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la superficie cuya directriz es la parábola $x^2=4y$, z = 0, contenida en el plano XY, y cuya generatriz tiene por números directores [1,1,3].

Solución



La ecuación de la directriz es: $D: \begin{cases} x^2=4y \\ z=0 \end{cases}$

Sea $p'(x',y',z')$ punto de intersección de la directriz y la generatriz entonces satisface a la ecuación de la directriz.

$$D: \begin{cases} x'^2=4y' \\ z'=0 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

La ecuación de la generatriz que pasa por el punto $p'(x',y',z')$con números directores [1,1,3] es: $G: \frac{x-x'}{1}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{3}$, $G: x-x'=y-y'=\frac{z}{3}$ ... (2)

Ahora eliminamos los parámetros de (1) y (2)

$$\begin{cases} x - x' = \dfrac{z}{3} \\ y - y' = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \dfrac{z}{3} = \dfrac{3x - z}{3} \\ y' = y - \dfrac{z}{3} = \dfrac{3y - z}{3} \end{cases} \quad \textbf{... (3)}$$

Reemplazando (3) en (1) se tiene: $\left(\dfrac{3x - z}{3}\right)^2 = 4\left(\dfrac{3y - z}{3}\right)$

$$\therefore 9x^2 + z^2 - 6xz + 36y + 12z = 0$$

Ejemplo.- Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$ representa a una superficie cilíndrica; Hallar las ecuaciones de su directriz y los números directores de su generatriz.

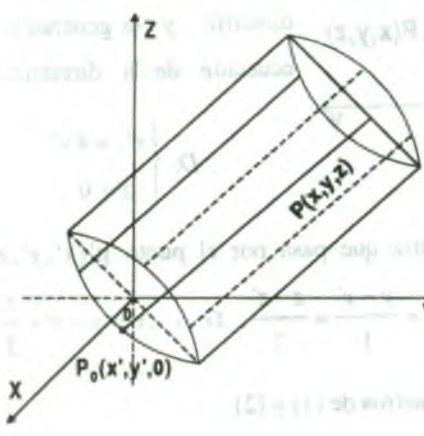
Solución

Consideremos las secciones paralelas al plano coordenado XY, z = k, obteniendo $x^2 + y^2 + 2k^2 + 2kx - 2ky = 1$. Completando cuadrado $(x+k)^2 + (y-k)^2 = 1$

Luego $(x+k)^2 + (y-k)^2 = 1$, z = k, es una familia de circunferencia caso particular k = 0, se tiene la ecuación de la directriz $x^2 + y^2 = 1$, z= 0 que es una circunferencia en el plano XY por lo tanto $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2yz = 1$ es una superficie cilíndrica circular.

La recta que une los centros (-k, k, k) de las circunferencias es paralela a la generatriz, por lo tanto los números directores de las generatriz son [-1, 1, 1].

Luego su gráfico es:



1.8 Superficie Cónica.-

Llamaremos superficie cónica a la superficie que es generada por una recta que se mueve de tal manera que siempre pasa por una curva plana dada fija y por un punto fijo que no está contenido en el plano de la curva fija dada.

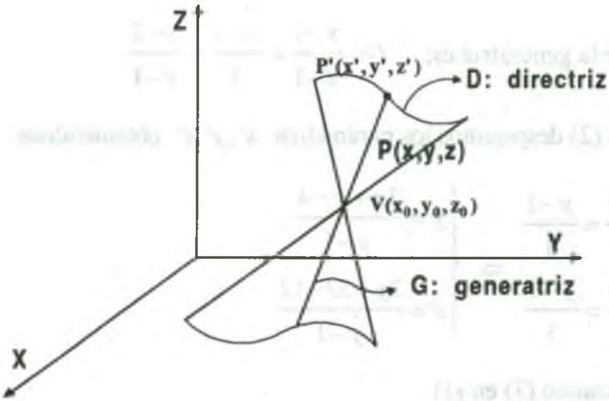
La recta móvil se llama generatriz y la curva fija dada directriz y el punto fijo se llama vértice de la superficie cónica.

El vértice divide a la superficie cónica en dos porciones cada una de los cuales se llama hoja o rama de la superficie cónica.

1.9 Determinación de la Ecuación de la Superficie Cónica.-

Consideremos la ecuación de la directriz en uno de los planos coordenados, por ejemplo en el plano YZ, cuya ecuación es:

$$D: \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{y el vértice} \quad V(x_0,y_0,z_0)$$



Como P'(x', y', z') pertenece a la directriz, por lo tanto lo satisface, es decir:

$$D: \begin{cases} F(y',z')=0 \\ x'=0 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

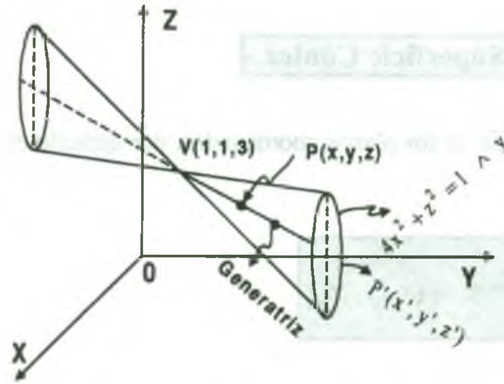
La ecuación de la generatriz que pasa por V y p' es dado por.

$$G: \frac{x-x_0}{x'-x_0}=\frac{y-y_0}{y'-y_0}=\frac{z-z_0}{z'-z_0} \qquad \dots (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) al eliminar los parámetros x',y',z' se obtiene la ecuación de la superficie cónica.

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse $4x^2+z^2=1 \wedge y=4$ y cuyo vértice es el punto V(1,1,3)

Solución



La ecuación de la directriz es:

$$D: \begin{cases} 4x^2+z^2=1 \\ y=4 \end{cases}$$ como $p'(x',y',z') \in D$,

entonces $$D: \begin{cases} 4x'^2+z'^2=1 \\ y'=4 \end{cases} \qquad \dots (1)$$

La ecuación de la generatriz es: $$G: \frac{x-1}{x'-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{z'-3} \qquad \dots (2)$$

De la ecuación (2) despejamos los parámetros x',y',z' obteniéndose:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x'-1}=\dfrac{y-1}{3} \\ \dfrac{z-3}{z'-3}=\dfrac{y-1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{3x+y-4}{y-1} \\ z'=\dfrac{3y+3z-12}{y-1} \end{cases} \qquad \dots (3)$$

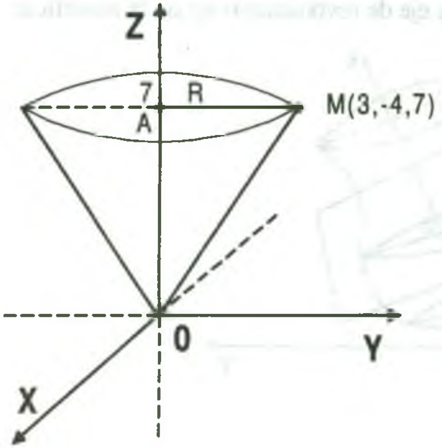
Ahora reemplazando (3) en (1)

$$4\left(\frac{3x+y-4}{y-1}\right)^2+\left(\frac{3y+3z-12}{y-1}\right)^2=1$$ de donde

$$36x^2+12y^2+9z^2+24xy+18xz-96x-102y-72z+207=0$$

Ejemplo.- El eje OZ es el eje de un cono circular que tiene el vértice en el origen de coordenadas; el punto M(3,-4,7) está situado en su superficie. Hallar la ecuación de este cono.

Solución



Sea A(0,0,7), M(3,-4,7)

$\overrightarrow{MA} = A - M = (-3,4,0)$

$R = \|\overrightarrow{MA}\| = \sqrt{9+16} = 5$ es el radio de la sección circular del cono.

$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-7)^2 = 25$

Si z = 7, entonces la directriz es:

Sea $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 7 \end{cases}$ pero como $p'(x',y',z') \in D$ entonces: $D: \begin{cases} x'^2 + y'^2 = 25 \\ z' = 7 \end{cases}$ ... (1)

Ahora calculamos la ecuación de la generatriz.

$G: \dfrac{x-0}{x'-0} = \dfrac{y-0}{y'-0} = \dfrac{z-0}{z'-0}$, de donde: $G: \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{7}$ ... (2)

De la ecuación (2) despejamos los parámetros, x', y' se tiene:

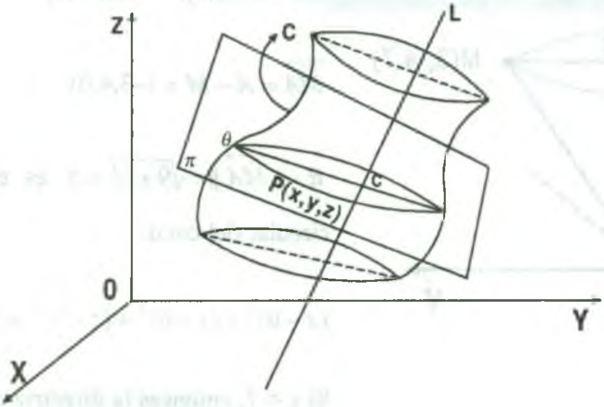
$$\begin{cases} \dfrac{x}{x'} = \dfrac{z}{7} \\ \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{7x}{z} \\ y' = \dfrac{7y}{z} \end{cases} \quad \text{... (3)}$$

Ahora reemplazando (3) en (1) se tiene: $(\dfrac{7x}{z})^2 + (\dfrac{7y}{z})^2 = 25$ de donde $49x^2 + 49y^2 = 25z^2$

1.10 Superficies de Revolución.-

Llamaremos Superficie de revolución a la superficie que es generada por la rotación de una curva plana entorno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.

La curva plana se llama generatriz y la recta fija eje de revolución ó eje de la superficie.



Por el punto p(x,y,z) se hace pasar un plano perpendicular al eje de revolución, la intersección de la superficie con el plano es una circunferencia.

Si c es el punto de intersección del plano con la recta L y Q es el punto de intersección con la curva C entonces se cumple d(P,C) = d(Q,C) que es la ecuación de la superficie de revolución.

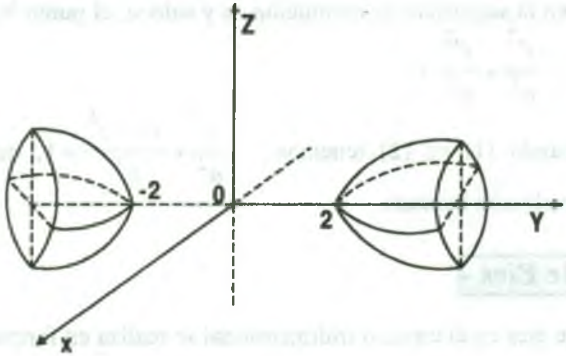
Si la superficie de revolución es obtenida por la rotación de una curva que está en uno de los planos coordenados alrededor de uno de los ejes coordenados, su ecuación se determina mediante el cuadro siguiente:

Ecuación de la Generatriz	Eje de Revolución	Ecuación de la superficie
$z = f(y);\ x = 0$	Eje Y	$x^2 + z^2 = (f(y))^2$
$x = f(y);\ z = 0$	Eje Y	$x^2 + z^2 = (f(y))^2$
$z = f(x);\ y = 0$	Eje X	$y^2 + z^2 = (f(x))^2$
$y = f(x);\ z = 0$	Eje X	$y^2 + z^2 = (f(x))^2$
$y = f(z);\ x = 0$	Eje Z	$x^2 + y^2 = (f(z))^2$
$x = f(z),\ y = 0$	Eje Z	$x^2 + y^2 = (f(z))^2$

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4$, z = 0, entorno al eje Y.

Solución

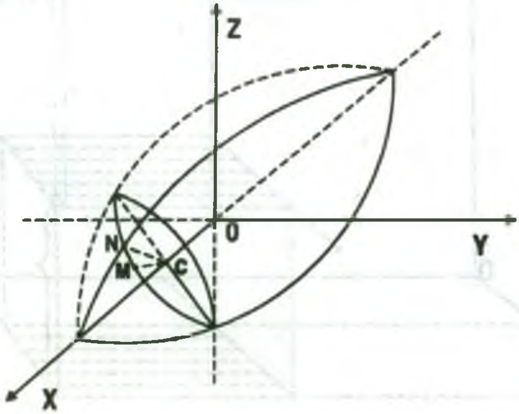
La generatriz es de la forma x = f(y), z = 0 y el eje de rotación es el eje Y, por lo tanto la ecuación de la superficie de revolución es: $x^2 + z^2 = f^2(y)$, como $y^2 - 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \dfrac{y^2-4}{4} = f^2(y)$ ahora reemplazando se tiene: $x^2 + z^2 = \dfrac{y^2-4}{4}$ de donde $4x^2 + 4z^2 - y^2 + 4 = 0$



Ejemplo.- Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la elipse.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$, alrededor del eje OX.

Solución



Consideremos un punto arbitrario en el espacio M(x,y,z) y c es el pie de la perpendicular del punto M al eje OX.

El punto M lo trasladamos al plano OXY, mediante una rotación de esta perpendicular alrededor del eje OX designemos a este punto por $N(x',y',0)$.

Luego se tiene $\overline{CM}=\overline{CN}$, de donde $\overline{CM}=\sqrt{y^2+z^2}$

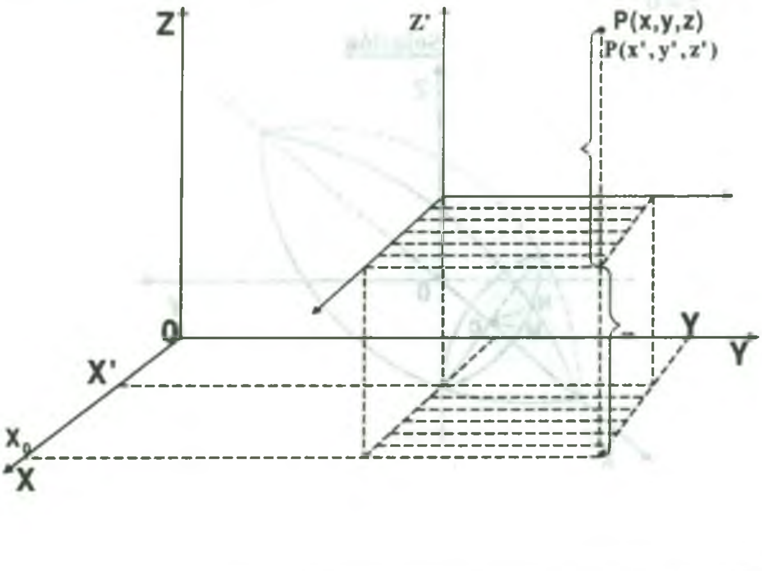
$\overline{CN}=y'$ entonces se tiene: $\begin{cases} |y'|=\sqrt{y^2+z^2} \\ x'=x \end{cases}$ ... **(1)**

M está situado en la superficie de revolución, si y solo si, el punto N está en la elipse dada, es decir: $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$ ... **(2)**

ahora reemplazando (1) en (2) tenemos: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$, que es la ecuación de la superficie de revolución buscada.

1.11 Traslación de Ejes.-

La Traslación de ejes en el espacio tridimensional se realiza en forma similar que la traslación de ejes en el plano cartesiano; si $O'(x_0,y_0,z_0)$ es un punto en el sistema cartesiano OXYZ, entonces en el punto $O'(x_0,y_0,z_0)$ construiremos el nuevo sistema $O'X'Y'Z'$ de tal manera que los rayos positivos de los nuevos ejes sean paralelos y tengan el mismo sentido que el sistema cartesiano original, es decir, en la forma:



Un punto p en el espacio correspondiente al sistema OXYZ, tiene por coordenadas a (x,y,z) es decir, p(x,y,z) y en el sistema $O'X'Y'Z'$ tiene por coordenadas a (x',y',z') es decir $p(x',y',z')$. La relación entre estas coordenadas está dado por:

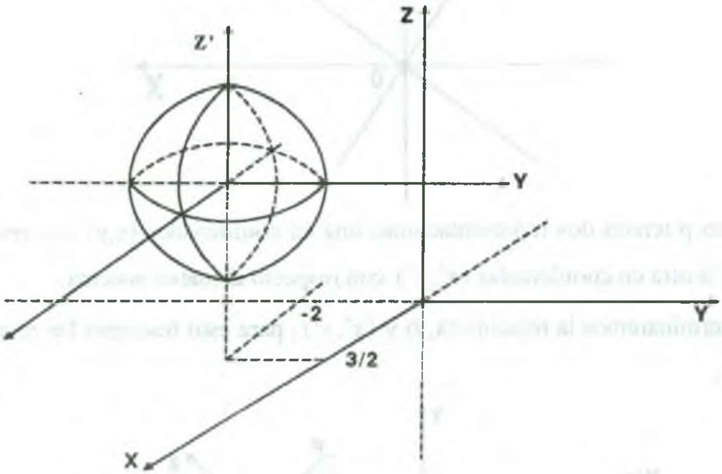
$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

Ejemplo.- Graficar la superficie mediante una traslación $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z = 0$

Solución

Completando cuadrados se tiene: $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = \frac{9}{4} + 4 + 16$

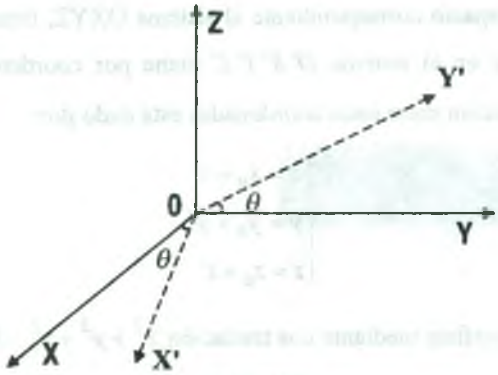
$(x - \frac{3}{2})^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = \frac{89}{4}$, $x'^2 - y'^2 + z'^2 = \frac{89}{4}$ donde $O'(\frac{3}{2}, -2, 4)$



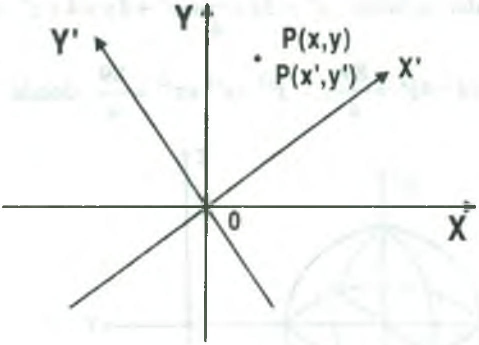
1.12 Rotación de Ejes en Uno de los Planos Coordenados.-

Veremos la rotación de los ejes de los planos coordenados manteniéndose el otro eje fijo y el mismo origen.

Suponiendo que efectuamos una transformación de coordenadas del plano XY en otro sistema $X'Y'$ en donde se mantiene fijo el origen y los ejes X' e Y' son obtenidos rotando los ejes X e Y en forma antihoraria en un ángulo θ como se ilustra en la figura.

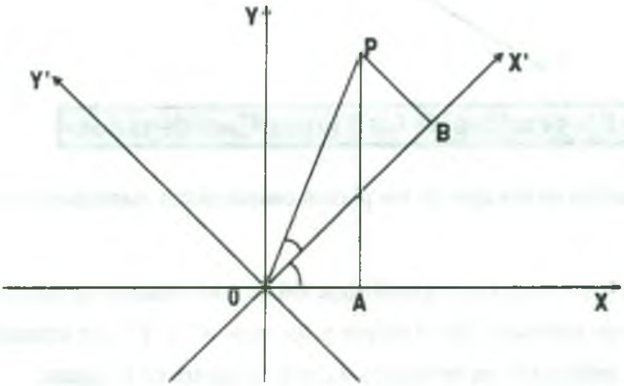


Esta transformación en el plano XY es:



Cada punto p tendrá dos representaciones una en coordenadas (x,y) con respecto al sistema original y la otra en coordenadas (x',y') con respecto al nuevo sistema.

Ahora determinaremos la relación (x,y) y (x',y'), para esto tracemos las rectas OP, AP y BP **(Ver figura).**



Se observa que $x=\overline{OA}$, $y=\overline{AP}$, $x'=\overline{OB}$, $y'=\overline{BP}$

Luego el triángulo Δ OAP se tiene: $x=\overline{OP}\cos(\theta+\alpha)$, $y=\overline{OP}\operatorname{sen}(\theta+\alpha)$, de donde

$$\begin{cases} x=\overline{OP}\cos\theta\cos\alpha-\overline{OP}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \\ y=\overline{OP}\operatorname{sen}\theta\cos\alpha-\overline{OP}\operatorname{sen}\alpha\cos\theta \end{cases} \quad \textbf{... (1)}$$

En el triángulo Δ OBP se tiene: $x'=\overline{OP}\cos\alpha$, $y'=\overline{OP}\operatorname{sen}\alpha$ **... (2)**

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta \\ y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta \end{cases}$$ al resolver el sistema se tiene:

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta \\ y'=y\cos\theta-x\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \textbf{... (3)}$$

Por tratarse del plano XOY veremos el caso de la ecuación de segundo grado:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde A,B,C no nulos simultáneamente.

como $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$, $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$ se tiene:

$$A(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)^2+B(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+$$

$$C(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)^2+D(x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta)+E(x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta)+F=0$$

desarrollando y simplificando se tiene:

$$(A\cos^2\theta+B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\operatorname{sen}^2\theta)x'^2+(A\operatorname{sen}^2\theta-B\operatorname{sen}\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)y'^2$$

$$+(B\cos 2\theta-A\operatorname{sen}2\theta+C\operatorname{sen}2\theta)x'y'+D(\cos\theta+E\operatorname{sen}\theta)x'+(E\cos\theta-D\cos\theta)y'+F=0$$

Como el coeficiente de $x'y'$ debe ser cero, entonces se tiene:

Bcos2θ - Asen2θ + Csen2θ= 0 de donde Bcos2θ = (A - C)sen 2θ $\Rightarrow \dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{A-C}{B}$ por lo tanto $c\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$ que es la relación para obtener el ángulo de rotación.

Ejemplo.- Graficar la superficie z = xy, mediante una rotación.

Solución

Se conoce que $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta - y'\cos\theta \end{cases}$, Ahora reemplazamos en la ecuación de la superficie.

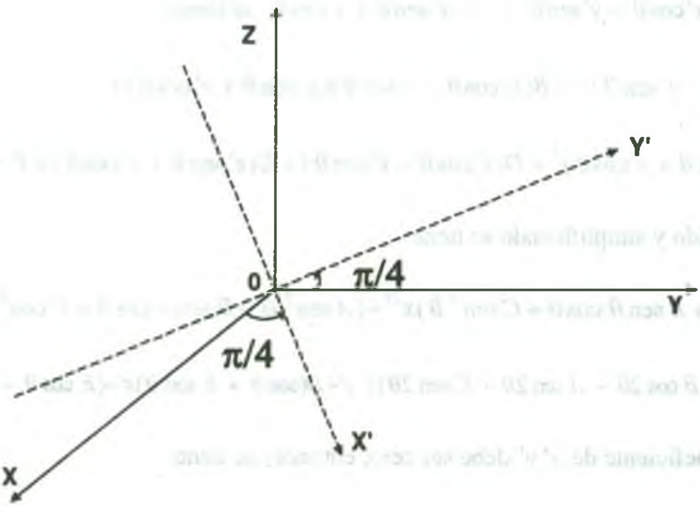
$$z = xy = (x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)$$

$$z = x'^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - x'y'\operatorname{sen}^2\theta + x'y'\cos^2\theta - y'^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$z = x'^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)x'y' - y'^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Si $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$z = x'^2 \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - y'^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} \text{ de donde } z = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$$



1.13 Ejercicios Desarrollados.-

1) Discutir y graficar la superficie $z = \frac{1}{2}\ln(x^4 + 2x^2y + y^2)$

Solución

$$z = \frac{1}{2}\ln(x^4 + 2x^2y + y^2) = \ln|x^2 + y| \Rightarrow |y + x^2| = e^z$$

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X; se hace y = z = 0; x = ± 1
- Con el eje Y; se hace x = z = 0; y = ± 1
- Con el eje Z; se hace x = y = 0; ∄ , no existe intersección

b) Las trazas sobre los planos coordenados.

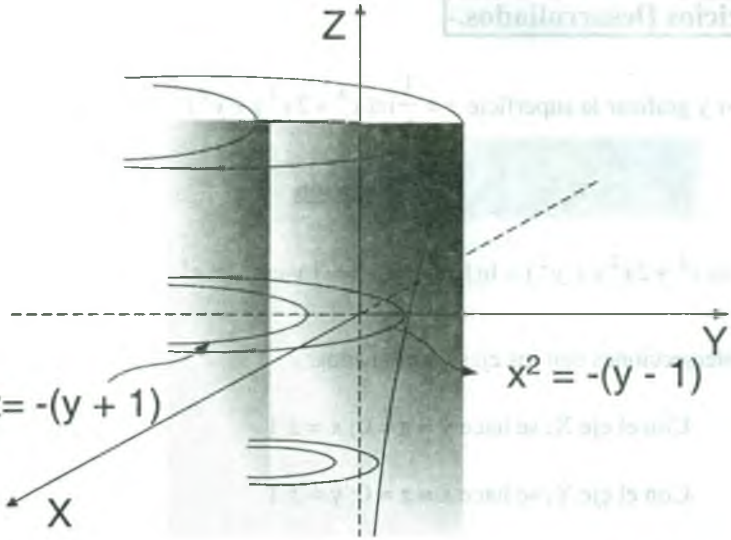
- Sobre el plano XY; z = 0; $x^2 = -(y \pm 1)$ parábola.
- Sobre el plano XZ; y = 0; $z = \ln x^2$.
- Sobre el plano YZ; x = 0; $z = \ln|y|$.

c) Simetrías en el origen, Ejes y planos coordenados.

- Con respecto al origen de coordenadas ∄
- Con respecto a los ejes coordenadas ∄
- Con respecto a los planos coordenadas es simétrico con respecto al plano YZ.

d) Secciones paralelas a los planos coordenados.

- Al plano XY; z = k, $|y + x^2| = e^k$, familia de parábolas.
- Al plano XZ; y = k, $x^2 = e^z - k$.
- Al plano YZ; x = k, $y = e^z - k^2$.



2) Discutir y graficar la superficie $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$

Solución

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

$x^2 + y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0,\ y \neq 0$

- Con el eje X; se hace y = z = 0; $\nexists$
- Con el eje Y; se hace x = z = 0; $\nexists$
- Con el eje Z; se hace x = y = 0; $\nexists$

b) Las trazas sobre los planos coordenados.

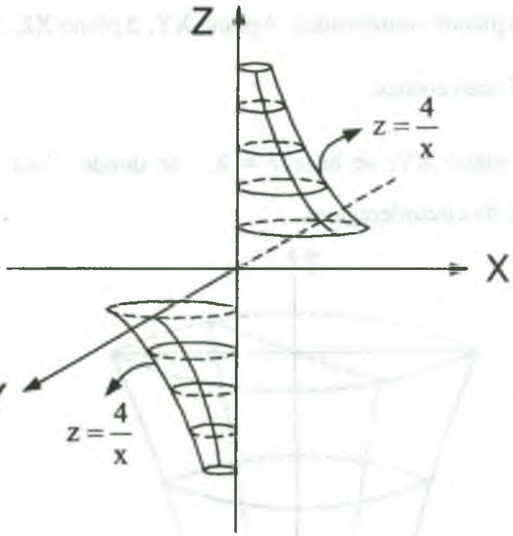
- Sobre el plano XY; se hace z = 0; x = 0, y $\in$ R.
- Sobre el plano XZ; se hace y = 0; $z = \dfrac{2}{x}$.
- Sobre el plano YZ; se hace x = 0; z = 0

c) Simetrías.

- En el origen, existe.
- En los ejes coordenadas, ∄ eje X, ∃ eje Y, ∄ eje Z.
- En los planos coordenadas, ∄ plano XY, ∃ plano XZ, ∄ plano YZ.

d) Secciones Transversales.

- En el plano XY; se hace z = k, obteniéndose $k(x^2+y^2)=2x$, familia de circunferencias de centro $(\frac{1}{k},\ 0)$ y radio $r=\frac{1}{k}$.



3) Discutir y graficar la superficie $z=\ln(x^2+y^2)$

Solución

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X; se hace y = z = 0; x = ±1
- Con el eje Y; se hace x = z = 0; y = ±1
- Con el eje Z; se hace x = y = 0; ∄ z ∈ R

b) Las trazas sobre los planos coordenados.

- Sobre el plano XY; se hace z=0, $\ln(x^2+y^2)=0$ de donde $x^2+y^2=1$ circunferencia.

- Sobre el plano XZ; se hace y = 0; $z=2\ln|x|$.

- Sobre el plano YZ; se hace x = 0; $z=2\ln|y|$.

c) Simetrías.

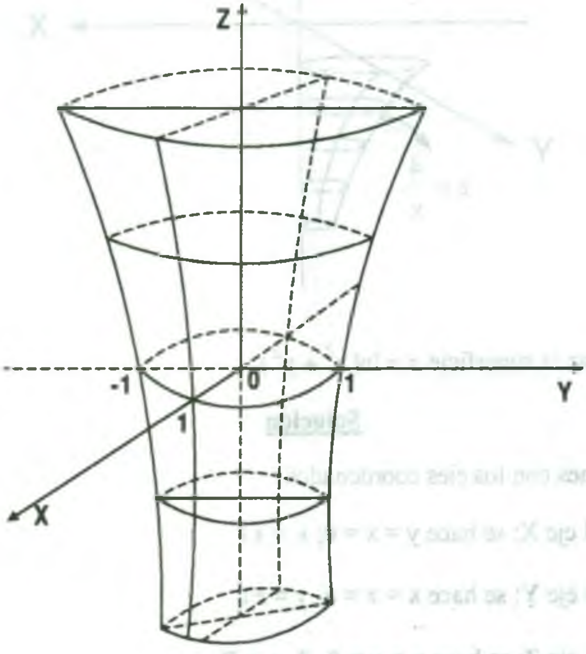
- En el origen ∄

- En los ejes coordenadas, ∄ eje X, ∄ eje Y, ∃ eje Z.

- En los planos coordenadas, ∄ plano XY, ∃ plano XZ, ∃ plano YZ.

d) Secciones Transversales.

- En el plano XY; se hace z = k, de donde $\ln(x^2+y^2)=k \Rightarrow x^2+y^2=e^k$, familia de circunferencias.



4) Discutir y graficar la superficie $|x|+|y| = 1$

Solución

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X; se hace $y = z = 0$; $x = \pm 1$
- Con el eje Y; se hace $x = z = 0$; $y = \pm 1$
- Con el eje Z; se hace $x = y = 0$; $\nexists\ z \in R$

b) Las trazas sobre los planos coordenados.

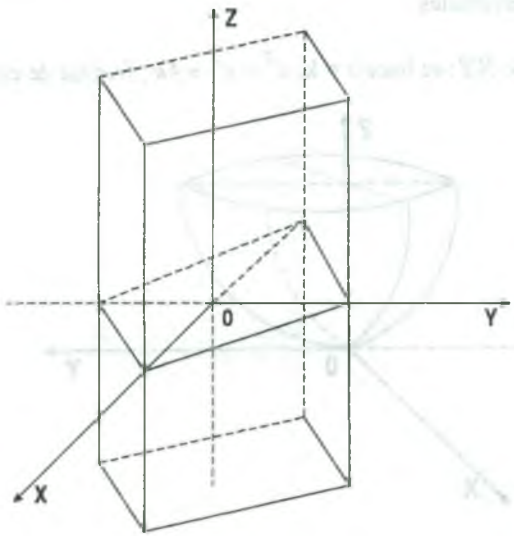
- Sobre el plano XY; se hace $z = 0$, $|x|+|y| = 1$ es un rombo.
- Sobre el plano XZ; se hace $y = 0$; $x = \pm 1$.
- Sobre el plano YZ; se hace $x = 0$; $y = \pm 1$.

c) Simetrías.

- En el origen $\nexists$
- En los ejes coordenadas, eje X $\exists$, eje Y $\exists$, eje Z $\exists$.
- En los planos coordenadas, plano XY $\exists$, plano XZ $\exists$, plano YZ $\exists$.

d) Secciones Transversales.

- En el plano XY; se hace $z = k$, $|x|+|y| = 1$



5) Discutir y graficar la superficie cuya ecuación es dada por $x^2 + y^2 - 4z = 0$

Solución

a) Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X; se hace y = z = 0; x = 0
- Con el eje Y; se hace x = z = 0; y = 0
- Con el eje Z; se hace x = y = 0; z = 0

b) Las trazas sobre los planos coordenados.

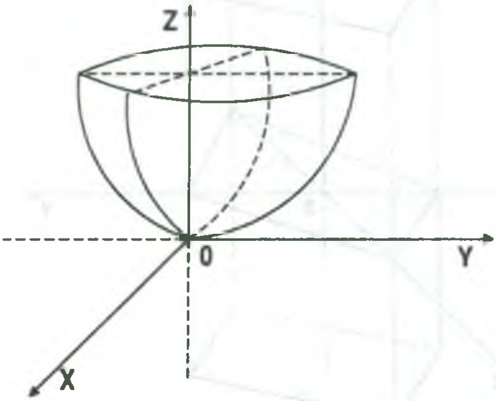
- Sobre el plano XY; se hace z = 0, $x^2 + y^2 = 0$ es un punto (0,0)
- Sobre el plano XZ; se hace y = 0; $4z = x^2$ es una parábola.
- Sobre el plano YZ; se hace x = 0; $4z = y^2$ es una parábola.

c) Simetrías.

- En el origen ∄
- En los ejes coordenadas, el eje X ∄ , eje Y ∃, eje Z ∃.
- En los planos coordenadas, plano XY ∄ , plano XZ ∃, plano YZ ∃.

d) Secciones Transversales.

- En el plano XY; se hace z = k, $x^2 + y^2 = 4k$, familia de circunferencias.



6) Trazar la superficie cuya ecuación es $x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x = 1$

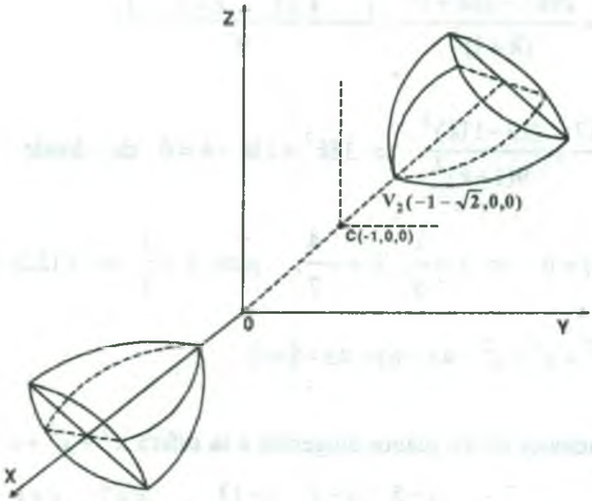
Solución

$x^2 - y^2 - 2z^2 + 2x = 1$, completando cuadrados $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$,

es un hiperboloide de dos hojas de centro en C(-1,0,0).

Su intersección en el eje x es $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$,

haciendo el traslado del origen (0,0,0) al punto C(-1,0,0) se tiene.



7) Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0$ y que es tangente al plano x + 2y - 2z = 3.

Solución

Aplicando el criterio de la familia de superficies.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 + k(x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12) = 0$$

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (1+k)z^2 - 4(k+1)x + 4(k-2)y + (6-6k)z = 12k - 12$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + \frac{4(k-2)y}{k+1} + \frac{6(1-k)}{k+1}z = \frac{12k-12}{k+1}$$, completando cuadrados

$$(x-2)^2+(y+\frac{2(k-2)}{k+1})^2+(z+\frac{3(1-k)}{k+1})^2=\frac{29k^2-26k+17}{(k+1)^2}, \text{ de donde}$$

$$C(2,\ \frac{4-2k}{k+1},\ -\frac{3(1-k)}{k+1})\ ,\quad r^2=\frac{29k^2-26k+17}{(k+1)^2}$$

como la superficie es tangente al plano P: x + 2y - 2z = 3

$$d^2(c,p)=r^2=\frac{29k^2-26k+17}{(k+1)^2}=\frac{\left|2+\frac{8-4k}{k+1}+\frac{6-6k}{k+1}-3\right|^2}{9}$$

$$\frac{29k^2-26k+17}{(k+1)^2}=\frac{(13-11k)^2}{9(1+k)^2} \Rightarrow 35k^2+13k-4=0 \quad \text{de donde}$$

$$(5k-1)(7k+4)=0 \Rightarrow k=\frac{1}{5},\ k=-\frac{4}{7}, \quad \text{para } k=\frac{1}{5} \Rightarrow C(2,3,-2),\ r^2=9$$

$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2-4x-6y+4z+8=0$$

8) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z=113$ y paralelas a las rectas $L_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$ $L_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2} \wedge z=8$

Solución

E: $x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z=113$, completando cuadrados se tiene:

E: $(x-5)^2+(y+1)^2+(z+13)^2=308$, de donde C(5,-1,-13) y $r=\sqrt{308}$

$$\text{Sea } \begin{cases} L_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2} \\ L_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2},\ z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{a}=(2,-3,2) \\ \vec{b}=(3,-2,0) \end{matrix}$$

como las rectas L_1 y L_2 son paralelas al plano tangente entonces la normal al plano P es.

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k} = (4,6,5)$$

Ahora tomamos la recta que pasa por el centro de la esfera en la dirección de la normal.

$$L = \{(5,-1,-13) + t(4,6,5) \,/\, t \in R\}$$

Sea $A \in L \Rightarrow A(4t + 5, 6t - 1, 5t - 13)$. Se sabe que $r = \overrightarrow{CA} = A - C = (4t,6t,5t)$

$\|\overrightarrow{CA}\| = r = \sqrt{16t^2 + 36t^2 + 25t^2} = \sqrt{308}$, $\quad 77t^2 = 308 \Rightarrow t = \pm 2$,

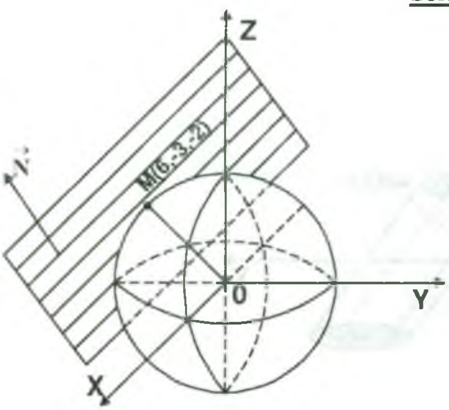
de donde $\quad A(13,11,-3)$, $A'(-3,-13,-23)$.

Las ecuaciones de los planos tangentes son:

$$\begin{cases} (4,6,5).(x-13, y-11, z+3) = 0 \\ (4,6,5).(x+3, y+13, z+23) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 5z = 103 \\ 4x + 6y + 5z = -205 \end{cases}$$

9) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el punto M(6,-3,-2)

Solución



$\overrightarrow{OM} \,//\, \bar{N}$ pero $\overrightarrow{OM} = M - O = (6,-3,2)$

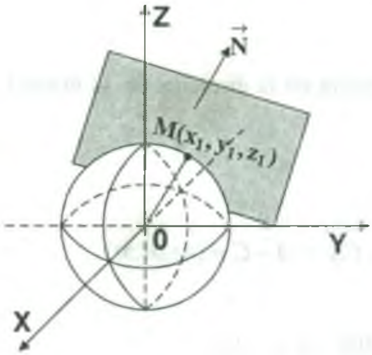
Luego $\vec{N} = (6,-3,2)$ entonces la ecuación del plano tangente en M será:

$P: \vec{N}.(x-6; y+3, z-2) = 0$

$\therefore$ P: 6x - 3y + 2z - 49 = 0

10) Demostrar que el plano 2x - 6y + 3z - 49 = 0, es tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=49$. Calcular las coordenadas del punto de contacto.

Solución



Si P: 2x – 6x + 3z – 49 = 0 es tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=49$ entonces d(C,P) = r

C: Centro de la esfera = (0,0,0)

r: radio de la esfera = 7

$$d(C,P)=\frac{|2(0)-6(0)+3(0)-49|}{\sqrt{4+36+9}}=\frac{49}{\sqrt{49}}=7$$

por lo tanto P es tangente al Plano

Para hallar el punto de contacto. Hallamos la recta que pasa por el Centro y el punto de contacto, que por definición tendrá como vector direccional el vector normal del Plano tangente:

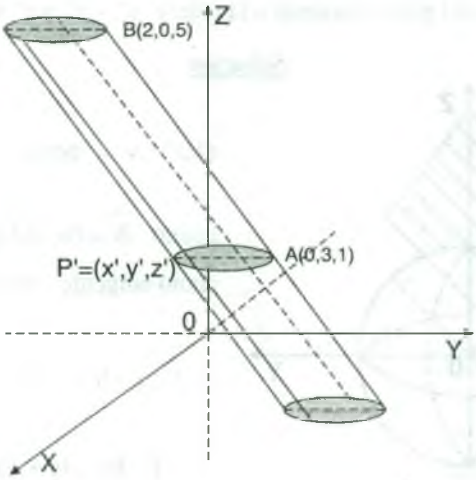
L = {t(2,-6,3) / t ∈ R} intersectando L con el plano

2(2t) – 6(-6t) + 3(3t) – 49 = 0 ⟹ 4t + 36t + 9t = 49 ⟹ t = 1 $\therefore\ P_0=(2,-6,3)$

11) Hallar la ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{a}=(2,-3,4)$, si las ecuaciones de la directriz son: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=1 \end{cases}$

Solución

Sea D: $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=1 \end{cases}$, la directriz.



Sea $P'(x',y',z') \in D$ entonces la satisface $D: \begin{cases} x'^2 + y'^2 = 9 \\ z' = 1 \end{cases}$ ... **(1)**

ahora calculamos la generatriz, es decir:

$G: \dfrac{x-x'}{2} = \dfrac{y-y'}{-3} = \dfrac{z-z'}{4}$, de donde $G: \dfrac{x-x'}{2} = \dfrac{y-y'}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ ... **(2)**

Eliminando los parámetros x', y' de las ecuaciones (1) y (2).

Luego de la ecuación (2) se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x'}{2} = \dfrac{z-1}{4} \\ \dfrac{y-y'}{-3} = \dfrac{z-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2x-z+1}{2} \\ y' = \dfrac{4y+3z-3}{4} \end{cases} \quad \text{... (3)}$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$(\frac{2x-z+1}{2})^2 + (\frac{4y+3z-3}{4})^2 = 9 \Rightarrow 4(2x-z+1)^2 + (4y+3z-3)^2 = 144$$

$$\therefore\ 16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z = 131$$

12) Sean $E: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 10z = 29$ y la recta L={(-6,-10,4)+ t (3,5,-4)/ t $\in$ R}. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuyos números directores de las generatrices resultan al efectuar el producto vectorial de los vectores normales a los planos tangentes a la esfera E en el punto de intersección de este cilindro es la curva que resulta de interceptar la esfera con el plano XZ.

Solución

$E:\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 10z = 29$, completando cuadrados

$E:\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 56$ donde C(-1,1,-5) centro de la esfera:

L = {(-6,-10,4) + t (3,5,-4) / t $\in$ R} = {(-6 + 3t, -10 + 5t, 4 -4t) / t $\in$ R}.

Sea P $\in$ L $\cap$ E entonces P $\in$ L $\wedge$ P $\in$ E. de donde

Si $P \in L \Rightarrow P(-6+3t,-10+5t,4-4t)$ para algún $t \in R$.

Como $P \in E \Rightarrow (-5+3t)^2 + (-11+5t)^2 + (9-4t)^2 = 56$, de donde

$50t^2 - 256t + 300 = 0 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 3$

para $t_1 = 2$, $P_1(1,-1,1)$; para $t_2 = 3$, $P_2(4,4,-3)$.

Los vectores normales a los planos tangentes son:

$$\overrightarrow{\mu_1} = \overrightarrow{CP_1} = P_1 - C = (2,-2,6) \quad , \quad \overrightarrow{\mu_2} = \overrightarrow{CP_2} = P_2 - C = (5,3,2)$$

calculando el producto vectorial de las normales a los planos tangentes

$$\overrightarrow{\mu_1} \times \overrightarrow{\mu_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-22,26,16)$$

La curva directriz resulta de interceptar la esfera E con el plano XZ entonces $y = 0$ por lo tanto.

$$D: \begin{cases} (x+1)^2 + (z+5)^2 = 55 \\ y = 0 \end{cases} \text{ la curva directriz}$$

Sea $P'(x',y',z')$ un punto de intersección de la directriz con la generatriz, entonces la satisface.

$$D: \begin{cases} (x'+1)^2 + (z'+5)^2 = 55 \\ y' = 0 \end{cases} \quad \ldots (1)$$

calculando la recta generatriz del cilindro. $G: \dfrac{x-x'}{-22} = \dfrac{y-y'}{26} = \dfrac{z-z'}{16}$ de donde

$$G: \frac{x-x'}{-11} = \frac{y}{13} = \frac{z-z'}{8} \quad \ldots (2)$$

de la ecuación (1) y (2) eliminamos los parámetros x', z' de la ecuación (2) se tiene.

$$\begin{cases} \dfrac{x-x'}{-11} = \dfrac{y}{13} \\ \dfrac{z-z'}{8} = \dfrac{y}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + \dfrac{11y}{13} \\ y' = z - \dfrac{8y}{13} \end{cases} \quad \ldots (3)$$

ahora reemplazamos (3) en (1) tenemos:

$$(x+\frac{11y}{13}+1)^2+(z-\frac{8y}{13}+5)^2=55, \text{ desarrollando se tiene:}$$

$$169x^2+185y^2+169z^2+286xy-208yz+338x-754y+1690z=5070$$

13) Hallar la ecuación del cilindro, si se dan las ecuaciones de la directriz $\begin{cases} x^2-y^2=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$ y la generatrices son perpendiculares al plano de la directriz.

Solución

Sea $D: \begin{cases} x^2-y^2=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$, la curva directriz.

Sea P'(x',y',z') el punto de intersección de la directriz con la generatriz, entonces si P'(x',y',z') $\in$ D se tiene:

$$D: \begin{cases} x'^2-y'^2=z' \\ x'+y'+z'=0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

como la generatriz es perpendicular al plano de la directriz, entonces el vector normal es la dirección de la generatriz es decir $\vec{a}=(1,1,1)$

ahora calculando la ecuación de la generatriz.

$$G: \frac{x-x'}{1}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{1} \quad \dots (2)$$

eliminando los parámetros x', y', z' de las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{cases} x-x'=z-z' \\ y-y'=z-z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x-z+z' \\ y'=y-z+z' \end{cases} \quad \dots (3)$$

reemplazando (3) en la ecuación $x'+y'+z'=0$ se tiene:

$$x - z + z' + y - z + z' + z' = 0 \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{2z - x - y}{3}$$

$$x' = x - z + \frac{2z - x - y}{3} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2x - z - y}{3}$$

$$y' = y - z + \frac{2z - x - y}{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2y - z - x}{3}$$

ahora reemplazando en la ecuación $x'^2 + y'^2 = z'$

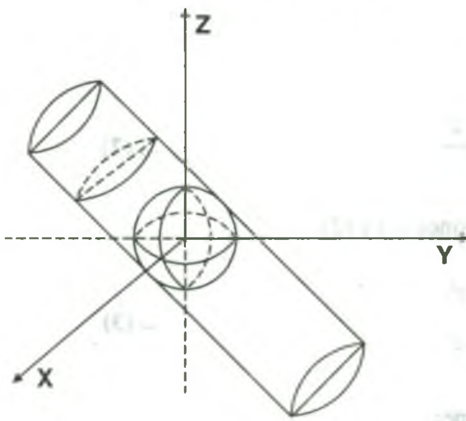
$(\frac{2x - z - y}{3})^2 - (\frac{2y - z - x}{3})^2 = \frac{2z - x - y}{3}$, desarrollando se tiene.

$$\therefore \quad x^2 - y^2 - 2xz + 2yz - 2z + x + y = 0$$

14) Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ son perpendiculares al plano x + y - 2z + 5 = 0. Hallar la ecuación de este cilindro.

Solución

Considerando la curva directriz en el plano XY para esto z = 0, por lo tanto, la directriz es dado por: $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, la curva directriz.



Sea $P'(x', y', z')$ el punto de intersección de la directriz con las generatriz entonces lo satisface.

$$D: \begin{cases} x'^2 + y'^2 = 1 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

Calculando la ecuación de la generatriz.

$$G: \frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{1} = \frac{z}{-2} \quad \text{... (2)}$$

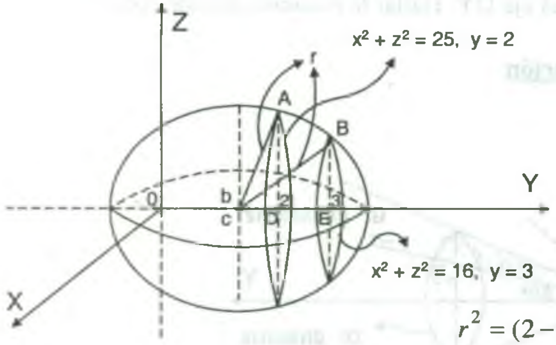
De la ecuación (1) y (2) eliminamos los parámetros x', y'.

$$\begin{cases} x - x' = \dfrac{z}{-2} \\ y - y' = \dfrac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2x+z}{-2} \\ y' = \dfrac{2y+z}{2} \end{cases} \quad \dots (3)$$

reemplazando (3) en (1) se tiene. $(\dfrac{2x+z}{2})^2 + (\dfrac{2y+z}{2})^2 = 1$, desarrollando se tiene: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 2$

15) Hallar la ecuación de la esfera que pasa por las circunferencias $x^2 + z^2 = 25$, $y = 2$; $x^2 + z^2 = 16$, $y = 3$

Solución



Con los datos haremos un gráfico para visualizar el planteamiento del problema.

$\| \overrightarrow{CA} \| = r = \sqrt{16t^2 + 36t^2 + 25t^2} = \sqrt{308}$

Del gráfico se tiene A(0,2,5) y en el Δ ACD.

$$r^2 = (2-b)^2 + 25$$

En el Δ BCE se tiene $r^2 = (3-b)^2 + 16$, por lo tanto al igualar se tiene.

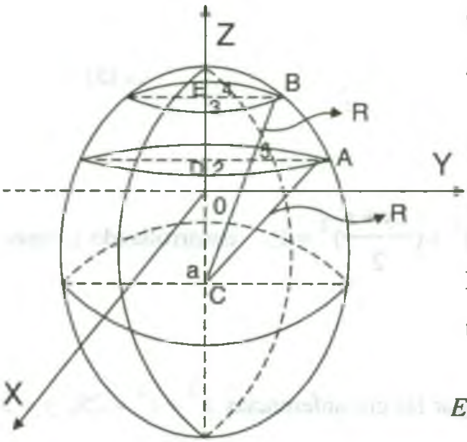
$(2-b)^2 + 25 = (3-b)^2 + 16 \Rightarrow$ b = -2. Luego el centro es C(0,-2,0) y el radio $r^2 = 41$

$$\therefore \; x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 41$$

16) Hallar la ecuación de la esfera que pasa por las circunferencias $x^2 + y^2 = 25$, z = 2 ; $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$

Solución

Con los datos del problema haremos un bosquejo del gráfico.



Sea C el centro de la esfera de Radio R luego en el Δ ACD: $R^2 = (2-a)^2 + 25$. En el ΔCBE se obtiene:

$R^2 = (3-a)^2 + 16$. Luego igualando se tiene:

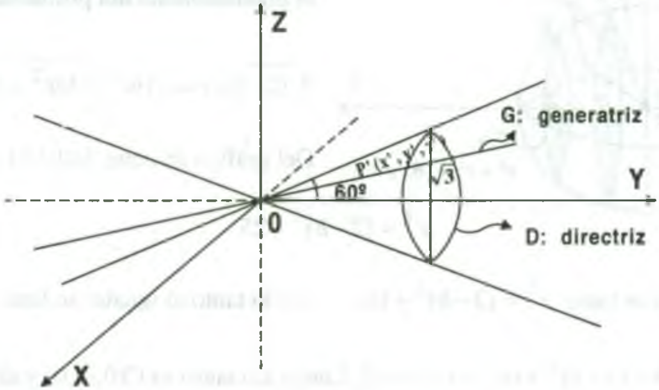
$(2-a)^2 + 25 = (3-a)^2 + 16 \Rightarrow$ 2a = -4 $\Rightarrow$ a = -2

Luego el centro es C(-2,0,0) y el radio $R^2 = 41$ por lo tanto la ecuación de la esfera es:

$$E:\ (x+2)^2 + y^2 + z^2 = 41$$

17) El eje OY es el eje de un cono circular que tiene el vértice en el origen de coordenadas, sus generatrices forman un ángulo de 60º con el eje OY. Hallar la ecuación de este cono.

Solución



Definimos a la curva directriz en el plano y = 1.

$$D: \begin{cases} x^2 + z^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$, la curva directriz

Sea $P'(x',y',z') \in D \wedge G$ entonces se tiene si $P'(x',y',z') \in D$ entonces satisface a la ecuación

$$D: \begin{cases} x'^2 + z'^2 = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

ahora calculamos la ecuación de la generatriz: G: $\dfrac{x-0}{x'-0}=\dfrac{y-0}{y'-0}=\dfrac{z-0}{z'-0}$

de donde G: $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$ ... **(2)**

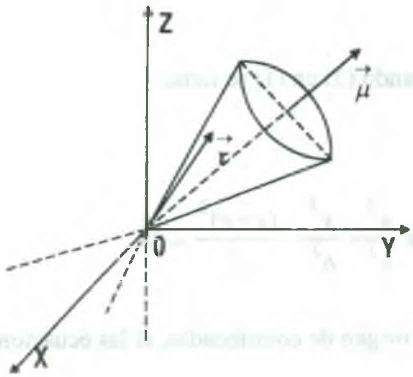
de la ecuación (1) y (2) eliminamos los parámetros x', y':

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x'}=y \\ \dfrac{z}{z'}=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{x}{y} \\ z'=\dfrac{z}{y} \end{cases} \quad \text{... (3)}$$

Reemplazando (3) en (1) se tiene: $(\dfrac{x}{y})^2+(\dfrac{z}{y})^2=3$, de donde $x^2+z^2=3y^2$

18) Encontrar la ecuación del cono, con vértice en el origen, cuyas generatrices hacen un ángulo de 30º con el vector unitario que forman ángulos iguales con los ejes X, Y, Z.

Solución



Por datos del problema se tiene $\vec{u}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, como $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \Rightarrow 3\cos^2\alpha=1$

puesto que $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

$\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vec{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

Sea $\vec{r}=(x,y,z)$ el vector de posición de un punto cualquiera del cono, como por dato se tiene entonces. $\vec{r}\cdot\vec{u}=\|\vec{r}\|\|\vec{u}\|\cos 30º$

$$(x,y,z)\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \Rightarrow 2(x+y+z)=3\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

19) Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto (0,0,C) ; si las ecuaciones de la directriz son: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0$

Solución

Sea $D: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$, la curva directriz. Si $P'(x',y',z') \in D$ entonces lo satisface.

$D: \begin{cases} \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \\ z'=0 \end{cases}$ **... (1),** ahora calculamos la ecuación de la generatriz donde V(0,0,C) es el vértice de la superficie cónica. $G: \frac{x-0}{x'-0}=\frac{y-0}{y'-0}=\frac{z-c}{z'-c}$ y como $z'=0$

$G: \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z+c}{-c}$ **... (2)**, de las ecuaciones (1) y (2) eliminamos x', y'

$$\begin{cases} \frac{x}{x'}=\frac{z-c}{-c} \\ \frac{y}{y'}=\frac{z-c}{-c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{xc}{c-z} \\ y'=\frac{cy}{c-z} \end{cases}$$ **... (3)** , reemplazando (3) en (1) se tiene:

$\frac{1}{a^2}(\frac{xc}{c-z})^2+\frac{1}{b^2}(\frac{cy}{c-z})^2=1$, simplificando se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$

20) Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el origen de coordenadas, si las ecuaciones de la directriz son: $\begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

Solución

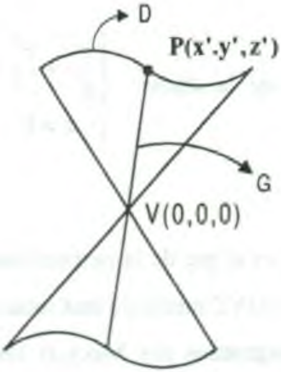
Sea $D: \begin{cases} x^2-2z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ Si $P'(x',y',z') \in D$ entonces $D: \begin{cases} x'^2-2z'+1=0 \\ y'-z'+1=0 \end{cases}$ **... (1)**

La ecuación de la generatriz es: $G: \dfrac{x-0}{x'-0} = \dfrac{y-0}{y'-0} = \dfrac{z-0}{z'-0}$

de donde $\qquad G: \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$ $\qquad$ **... (2)**

de las ecuaciones (1) y (2) eliminamos los parámetros x', y', z'

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x'} = \dfrac{z}{z'} \\ \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{xz'}{z} \\ y' = \dfrac{yz'}{z} \end{cases} \qquad \textbf{... (3)}$$



reemplazando (3) en la ecuación $y'+z'+1=0$

$$\frac{yz'}{z} - z'+1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z' = \dfrac{z}{z-y} \\ x' = \dfrac{x}{z-y} \\ y' = \dfrac{y}{z-y} \end{cases} \qquad \textbf{... (4)}$$

Ahora reemplazamos (4) en $x'^2 - 2z' + 1 = 0$, se tiene: $(\dfrac{x}{z-y})^2 - \dfrac{2z}{z-y} + 1 = 0$ simplificando

tenemos la ecuación $\qquad x^2 - z^2 + y^2 = 0$

21) Una vez comprobado que el punto M(1,3,-1) está situado en el paraboloide hiperbólico $4x^2 - z^2 = y$, hallar las ecuaciones de sus generatrices que pasa por el punto M.

Solución

Sea $H: 4x^2 - z^2 = y \Rightarrow M(1,3,-1) \in H \Rightarrow 4-1=3$

Las ecuaciones de sus generatrices que pasan por M son (2x + z)(2x - z)= y, de donde

$L_1: 2x+z=k \wedge 2x-z=\dfrac{y}{k}$ $\qquad$ **... (1)**, $\qquad L_2: 2x-z=k \wedge 2x+z=\dfrac{y}{k}$ $\qquad$ **... (2)**

de la ecuación (1) 2x + z = k $\Rightarrow$ 2 - 1 = k $\Rightarrow$ k = 1

$$L_1:\ 2x+z=1 \quad \wedge \quad 2x-z=y \ \Rightarrow\ L_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$$

de la ecuación (2), 2x - z = k $\Rightarrow$ 2 + 1 = k $\Rightarrow$ k = 3

$$L_2:\ 2x-z=3 \quad \wedge \quad 2x+z=\frac{y}{3} \ \Rightarrow\ L_2:\ z=2x-3 \quad \wedge \quad y=12x-9$$

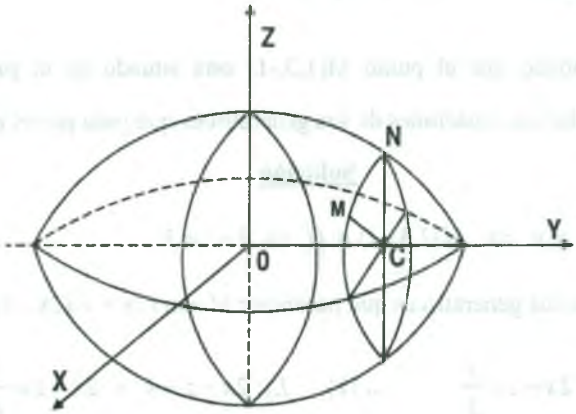
$$(x,y,z)\in L_2 \Rightarrow (x,y,z)=(x,12x-9,2x-3) = (0,-9,-3)+x(1,12,2)$$

$$L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+9}{12}=\frac{z+3}{2}$$

22) Hallar al ecuación de la superficie engendrada por rotación de la elipse $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ entorno del eje OY.

Solución

Consideremos un punto arbitrario del espacio M(x,y,z) y que C es el pie de la perpendicular bajada del punto M al eje OY al punto M lo trasladamos al plano OYZ mediante una rotación de esta perpendicular alrededor del eje OY y a este punto designamos por N(o,y,z) ahora haremos el dibujo correspondiente a la superficie, mediante el cual daremos la ecuación de dicha superficie.



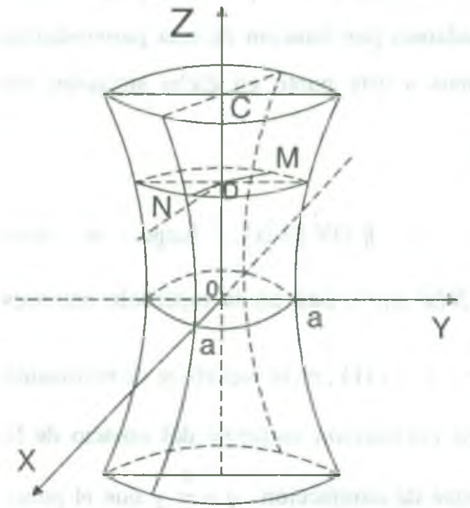
$\overline{CM} = \overline{CN}$ donde $\overline{CM} = \sqrt{x^2+z^2}$, $\overline{CN} = z_1$ de donde $|z_1| = \sqrt{x^2+z^2}$ ... **(1)**

además es evidente que $y_1 = y$ ... **(2)**

El punto M(x,y,z) está situado en la superficie de revolución si y solo si $N(o, y_1, z_1)$ está en la elipse dada, es decir: $\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$ ... **(3)**

de las igualdades (1) y (2) en (3) se tiene: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1$ que es la ecuación buscada.

23) Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, y = 0, alrededor del eje OZ.



Solución

Sea M(x,y,z) un punto en el espacio tomado arbitrariamente, y D el pie de la perpendicular trazada desde el punto M al eje OZ. El punto M lo trasladamos al plano OXZ mediante una rotación de esta perpendicular alrededor del eje OZ. Designemos este punto en dicha situación por $N(x', o, y')$.

Luego $\|\overrightarrow{DM}\| = \|\overrightarrow{DN}\|$ donde

$\|\overrightarrow{DM}\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

además $\|\overrightarrow{DN}\| = |x'|$ por lo tanto $|x'| = \sqrt{x^2+y^2}$ además $z = z'$ ... **(1)**

El punto M está situado en la superficie de revolución si y solamente si, el punto N está en la hipérbola dada, es decir: si $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ ... **(2)**

ahora reemplazamos (1) en (2) se tiene. $\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, simplificando

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$, ecuación de la superficie engendrada.

24) Demostrar que el hiperboloide de dos hojas, determinado por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

se puede tener por rotación de la hipérbola. $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ entorno al eje OZ y una sucesiva contracción uniforme del espacio al plano OXZ.

Solución

Primeramente hallaremos la ecuación de la superficie de revolución que se va a generar.

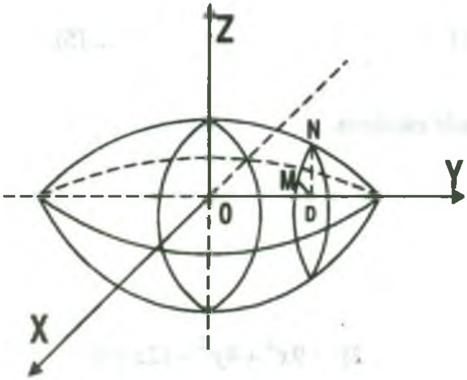
Sea M(x,y,z) un punto del espacio tomado arbitrariamente y D el pie de la perpendicular trazada desde M al eje OZ, el punto M lo trasladamos por rotación de esta perpendicular sobre el eje OZ hacia el plano OXZ. Asignamos a este punto en dicha situación por

$N(x',o,z')$.Luego $\|\overrightarrow{DM}\|=\|\overrightarrow{DN}\|$, de donde

$\|\overrightarrow{DM}\|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$ y $\|\overrightarrow{DN}\|=|x'|$, luego se tiene $|x'|=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=z'$ como en el punto $N(x',o,z')$ está en la hipérbola entonces $\frac{z'^2}{c^2}-\frac{x'^2}{a^2}=1$, por lo tanto se tiene: $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$ **... (1)** , es la superficie de revolución engendrada, suponiendo ahora que se efectúa una contracción uniforme del espacio de la superficie (1) hacia el plano OXZ con el coeficiente de contracción $q=\frac{a}{b}$ y que el punto $M'(x',y',z')$ es el punto que se traslada M(x,y,z) como MM' es perpendicular al plano OXZ tenemos que $x=x'$, $y=\frac{a}{b}y'$, $z=z'$ **... (2)** ahora reemplazando (2) en (1) se tiene. $\frac{z'^2}{c^2}-\frac{x'^2+(\frac{a}{b}y')^2}{a^2}=1$, simplificando $\frac{z'^2}{c^2}-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ $\therefore$ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=-1$

25) Demostrar que el elipsoide escaleno determinado por la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se puede obtener como resultado de una rotación de la elipse: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ alrededor del eje OX y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano OXY.

Solución



Hallaremos primero la ecuación de la superficie de revolución que se va a generar. Sea M(x,y,z) un punto del espacio tomado arbitrariamente y D el pie de la perpendicular trazado desde M al eje OX.

El punto M lo trasladamos por rotación de esta perpendicular sobre el eje OX hacia el plano OXY, designemos este punto en dicha situación por N(x,y,o) luego $\|\overrightarrow{DM}\|=\|\overrightarrow{DN}\|$, de donde:

$$\|\overrightarrow{DM}\|=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-o)^2}=\sqrt{y^2+z^2} \text{ y } \|\overrightarrow{DN}\|=|y'|$$

por lo tanto $|y'|=\sqrt{y^2+z^2}$, $\quad x=x'$ **... (1)**

como $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, contiene al punto M si y solo si, el punto N está en la elipse dada,

es decir: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ **... (2)**

ahora reemplazando (2) en (1) tenemos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ **... (3)**

La ecuación (3) es la ecuación de la superficie de revolución engendrada. Supongamos ahora que se efectúa una contracción uniforme del espacio de la superficie (3) hacia el plano OXY, con el coeficiente $q=\frac{c}{b}$, y que el punto $M'(x',y',z')$ es el punto al que se traslada M(x,y,z); como MM' es perpendicular al plano OXY, tenemos:

$$x' = x \;\;,\; y = y' \;,\; z' = \frac{c}{a} z \qquad \textbf{... (4)}$$

supongamos que M(x,y,z) es un punto arbitrario de la superficie de revolución (3) sustituyendo aquí sus valores de la ecuación (4) se tiene $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2 + (\frac{b}{c} z')^2}{b^2} = 1$, simplificando

$$\therefore \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \qquad \textbf{... (5)}$$

Luego la ecuación (5) es la ecuación del elipsoide escalena.

1.14 Ejercicios Propuestos.-

I- Discutir y graficar las siguientes superficies:

1) $|x| + |y| = 6 - z$

2) $9x^2 + 4y^2 - 12z = 0$

3) $z = \ln(x + y^2)$

4) $x^2 + y^2 = \ln z$

5) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{z^2}{25} = 4y$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$

7) $x^2 + z^2 = \operatorname{tg} y$

8) $x^2 = 2x + 4z$

9) $y^2 + z = 2$

10) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$

11) $z = \dfrac{x^2}{|x| + |y|}$

12) $xz = \dfrac{4x^2 y}{2x^3 y + 2y^3 x}$

13) $x^2 + z^2 = 4y$

14) $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$

15) $x^2 = 2y + 4z$

16) $y = |x^2| - 2|x| + 1$

17) $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 = 6$

18) $x^2 - 3y^2 - 4z = 0$

19) $y^2 + z^2 = \text{sen}^2 x$

20) $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

21) $\sqrt{x} + \sqrt{z} = 2$

22) $z = |y|$

23) $x^2 = y^2 + z^2$

24) $x^2 = |z|$

25) $z + y^2 - 2y = 0$

26) $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$

27) $z = (x+2)^2 + (y-3)^2 - 9$

28) $|x|^2 z - 2x + z|y|^2 = 0$

29) $x^2 + y^2 + z^2 - 3(x+2z) + (y+8) = 0$

30) $8x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2 = 36$

31) $2x^2 - y^2 + 8z^2 = -8$

32) $z = (x+2)^2 + (y-3)^2 + 9$

33) Discutir y graficar la superficie $|x|^2 z - 2x + z|y|^2 = 0$

34) Discutir y graficar la superficie $8x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2 = 36$

35) Discutir y graficar analíticamente la gráfica de la superficie

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 3(x+2z) + (y+8) = 0$

b) $2x^2 - y^2 + 8z^2 = -8$

36) Hacer una discusión completa del paraboloide de ecuación $x^2 - y^2 - 2x + 4y + \quad = 6$

II.-

1) Hallar la ecuación de la esfera de radio R = 3 y que es tangente al plano x + 2y + 2z = -3 en el punto P(1,1,-3). **Rpta.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$

2) Hallar la ecuación de la esfera que pasa por el origen de coordenadas y por la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Rpta. $x^2 + y^2 + z^2 - 10z + 15y - 25z = 0$

3) Hallar la ecuación de la esfera que pasa por la circunferencia $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ 5x+2y-z=3 \end{cases}$ y por el punto P(2,-1,1)

Rpta. $x^2+y^2+z^2+9y-9z+14=0$

4) Hallar la ecuación de la esfera tangente en (4,3,6) al plano 3x + y + 5z - 45 = 0 y tangente en (2,5,-4) al plano x + 3y - 5z - 37 = 0.

Rpta. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=35$

5) Hallar la ecuación de la esfera que contiene a la circunferencia $x^2+y^2+z^2+6x+4y-2z=25$; $x^2+y^2+z^2+2x-6y+12z=17$ y contiene al punto (1,-1,2).

Rpta. $17(x^2+y^2+z^2)+176x-66y+258z-950=0$

6) Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las dos superficies esféricas $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$, $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z+10=0$ y también pasa por el punto (-2,4,0).

Rpta. $x^2+y^2+z^2-19x-32y-21z+70=0$

7) Hallar la ecuación de la esfera que está en los planos paralelos π_1: $2x-y+2z+1=0$; π_2: $2x-y+2z-17=0$ conociendo que P(1,3,0) es el punto de contacto de uno de ellos.

8) Hallar la ecuación de la esfera que tiene su centro en la recta L: $2x+4y-z-7=0 \wedge 4x+5y+z-14=0$ y es tangente a los planos x + 2y - 2z - 2 = 0 , x + 2y -2z + 4 = 0.

Rpta. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=4$

9) Encuentre la ecuación de la esfera tangente en (1,-1,4) al plano P_1: $2x-y+3z-15=0$ y tangente en (1,-2,5) al plano P_2: $x-2y+4z-27=0$

10) Halle la ecuación de la esfera concéntrica a $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$ y tangente al plano π: $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

11) Halle la ecuación de la esfera cuyo centro está en el plano XY y es tangente al plano $3x + 2y - z - 6 = 0$ en (1,5,7).

12) Se dan dos puntos fijos P y Q, demostrar que el lugar geométrico de un punto P_0 que satisface a la igualdad $\| \overrightarrow{PP_0} \| = n \| \overrightarrow{QP_0} \|$ es una esfera (con n constante, $n \neq 1$).

13) Hallar la ecuación de la esfera tangente a los planos XZ y YZ en el primer octante si su radio es 5 y pasa por el punto (9,2,6).

14) Determinar el centro y radio de la circunferencia

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ \qquad 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$$

Rpta. C(-1,2,3) , R = 8

15) Calcular el radio de la esfera que es tangente a los planos $3x + 2y - 6z - 15=0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$.

Rpta. R = 5

16) Hallar la ecuación de la esfera con el centro en C(2,3,-1), que corta en la recta $5x - 4y + 3z + 20 = 0$, $3x - 4y + z - 8 = 0$, una cuerda de longitud igual a 16.

Rpta. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$

17) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2-8x-2y+2z+10=0$ y que sea paralelo al plano $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

18) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene el diámetro de la esfera $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0$, que es perpendicular al plano 5x-y + 2z -17 = 0.

Rpta. L: x = 5t - 1 , y = -t + 3 , z = 2t - 0.5

19) Hallar la ecuación canónica de la recta que contiene el diámetro de la esfera $x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0$, que es paralelo a la recta x = 2t - 1, y = -3t + 5, z = 4t - 7.

Rpta. $L: \dfrac{x-0.5}{2}=\dfrac{y+1.5}{-3}=\dfrac{z+0.5}{4}$

20) Hallar en la esfera $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)=25$ el punto M más próximo al plano 3x - 4z + 19 = 0 y calcular la distancia d del punto P a éste plano.

Rpta. M(-2,-2,7) , d = 3

21) Hallar la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de las dos esferas $2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$; $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0$.

Rpta. 5x - 8y + 5z - 7 = 0

22) El punto C(1,-1,-2) es el centro de una circunferencia que corta en la recta 2x – y+2z – 12= 0, 4x - 7y - z + 6 = 0 una cuerda de longitud igual a 8. Hallar la ecuación de la circunferencia.

Rpta. $C: \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=65 \\ 18x-22y+5z-30=0 \end{cases}$

23) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos A(3,-1,-2) , B(1,1,-2) y C(-1,3,0).

Rpta. $C: \begin{cases} (x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

24) Demostrar que el plano 2x - 6y + 3z - 49 = 0 es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, calcular las coordenadas del punto de contacto.

Rpta. (2,-6,3)

25) Hallar los valores de A para los cuales el plano x + y + z = A es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Rpta. $A = \pm 6$

26) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$ en el punto M(-1,3,0).

Rpta. 2x - y - z = -5

27) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ paralelos al plano 4x + 3z - 17 = 0

Rpta. 4x + 3z - 40 = 0 ; 4x + 3z + 10 = 0

28) Determinar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + (y-1)^2 + 4(z+2)^2 = 4$ paralelo al plano tangente de la esfera $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ en el punto $\left(-1,1,-2+\sqrt{8}\right)$.

Rpta. $3x - 6\sqrt{2}z + 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 4 = 0$.

29) Deducir la condición, según la cual el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Rpta. $A^2R^2 + B^2R^2 + C^2R^2 = D$

30) Encuentre la ecuación de la esfera tangente en (1,–2,4) el plano $\pi_1: 2x - y + 3z - 15 = 0$ y tangente en (1,–2,5) el plano $\pi_2: x - 3y + 4z - 27 = 0$.

31) Por los puntos de intersección de la recta $x = 3t - 5$, $y = 5t - 11$, $z = -4y + 9$ y la esfera $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49$ se han trazado planos tangentes a esta esfera. Hallar sus ecuaciones.

Rpta. $3x - 2y + 6z - 11 = 0$, $6x + 3y + 2z - 30 = 0$

32) Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ paralelo al plano $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

Rpta. $x + 2y - 2z - 9 = 0$, $x + 2y - 2z + 9 = 0$

33) Demostrar que por la recta $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ se puede trazar solamente un plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$ y hallar su ecuación .

Rpta. $x - y - z = 2$

34) Demostrar que se puede trazar por la recta $\begin{cases} 8x - 11y + 8z = 30 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$, dos planos tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$

35) Hallar la ecuación de la esfera que está en los planos paralelos $\pi_1 : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + 2z - 17 = 0$, conociendo que $P_0(1,3,0)$ es el punto de contacto de uno de ellos.

36) Hallar las ecuaciones de las esferas que contenga él circulo $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, x+2y+ 3z = 3 y son tangentes al plano 4x + 3y = 15.

37) Encontrar la ecuación de la esfera que es tangente al plano x – 8y + 4z + 7 = 0 y es concéntrica a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 33 = 0$.

38) Hallar la ecuación de la esfera cuyo centro esta en el eje X y pasa por los puntos $P_1(0,5,0)$ y $P_2(-2,1,0)$.

39) Encontrar la ecuación de la esfera cuyo centro esta en el plano XZ y es tangente al plano $2x - y + z - 4 = 0$ en el punto $P(1,7,4)$.

40) Hallar la ecuación del plano P que contiene a la recta $L = \{(1,2,3) + t(1,-1,0) / t \in R\}$ de modo que dicho plano sea tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

41) Determinar la ecuación de una esfera cuyo centro esta sobre la recta $\begin{cases} 2x+4y-z=7 \\ 4x+5y+z=14 \end{cases}$ y es tangente a los planos $P_1 :\ x+2y-2z=2$ y $P_2 :\ x+2y-2z+4=0$.

42) Demostrar que el elipsoide $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$, tiene un punto común con el plano $4x-3y+12z-54=0$ y hallar sus coordenadas.

Rpta. $c(6,-2,2)$

43) Demostrar que el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ tiene un punto común con el plano $5x+2z+5=0$ y hallar sus coordenadas $c(3,0-10)$.

44) Demostrar que el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=24$ tiene un punto común con el plano $2x-2y-z-10=0$ y hallar sus coordenadas.

Rpta. $c(9,5,-2)$

45) Discutir y graficar las superficies cilíndricas, rectas cuyas ecuaciones se da.

a) $x^2-4z=0$ **b)** $y^2+z^2=4$

c) $9x^2+4y^2=36$ **d)** $y^2+z=2$

e) $x^2+y^2-2y=0$ **f)** $9y^2-4z^2=36$

g) $x^{1/2}+z^{1/2}=2$ **h)** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

46) Dada la ecuación de la directriz y los números directores de las generatrices de una superficie cilíndrica. Hallar su ecuación y su gráfica.

a) $y^2=4x,\ z=0;\ [1,-1,1]$ **b)** $x^2+z^2=1,\ y=0;\ [2,1,-1]$

c) $x^2-y^2=1,\ z=0;\ [0,2,-1]$ **d)** $x^2+y=1,\ z=0;\ [2,0,1]$

e) $4x^2+z^2+4z=0,\ y=0;\ [4,1,0]$ **f)** $x^3+z^3=1,\ y=0;\ [3,1,-1]$

g) $2y^2+z^2=2,\ x=0;\ [1,2,3]$ **h)** $xz=1,\ y=0;\ [2,-1,0]$

47) Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es $y^2+z^2=1,\ x=0$ con generatriz ortogonal al plano $x+2y-2z-4=0$.

48) Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$, son paralelas a la recta **x** = 2t - 3, y = -t+7, z = -2t + 5

Rpta. $4x^2+4y^2+z^2+12y-6z+8xz-4yz=27$.

49) Las ecuaciones de una recta paralela a la generatriz de la superficie cilíndrica es x + 2y - z = 4, 2x - y + z + 6 = 0, y la ecuación de su directriz es $2x^2+y^2=4$, se pide hallar la ecuación de su superficie.

50) Encuentre la ecuación del círculo que es perpendicular al plano XY, y cuya directriz es el círculo en el plano XY con centro en c(4,-3,0) y radio 5.

55) Hallar la superficie cilíndrica cuya directriz es la intersección de las superficies $3x^2-y+3z^2=1 \wedge 2x+3y-z=0$ y cuya generatriz son paralelos a la recta $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{3}$

56) Identificar y graficar la superficie $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz=1$.

57) Graficar la superficie $x^2+y^2+5z^2-2xz+4yz=1$, ¿es una superficie cilíndrica? Es caso afirmativo hallar sus elementos.

58) Graficar la superficie $x^2+6y^2+25z^2+2xz-24yz-16=0$ en caso de ser superficie cilíndrica, hallar sus elementos.

59) Demuestre que $x^2+4y^2-2xz+8yz+5z^2=4$ es una superficie cilíndrica y conociendo sus elementos, halle su gráfica.

60) Encuentre la ecuación del cilindro de radio 2 y tiene por eje a la recta $\frac{x-1}{2}=y=3-z$

61) Halle la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es $4x^2+z^2+4z=0$, $y=0$ y la generatriz tiene como números directores [4,1,0].

62) Pruebe que la ecuación $x^2+y^2+5z^2+2xz+4yz-4=0$ representa una superficie cilíndrica. Halle la directriz y la generatriz esboce la gráfica.

63) Hallar la ecuación del cilindro circunscrito a las dos esferas $E_1:\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$, $E_2:\ x^2+y^2+z^2=25$.

64) Demostrar que la ecuación $2x^2+2y^2+4z^2+4xz-9yz=2$ representa una superficie cilíndrica, y hallar las ecuaciones de su directriz y los números directores de sus generatrices.

65) Hallar al ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{a}=(2,-3,4)$, si las ecuaciones de la generatriz son $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=1 \end{cases}$

Rpta. $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y=26z$

66) Hallar la ecuación de un cilindro circular que pasa por el punto M(2,-1,1) si la recta x = 3t + 1, y = -2t – 2, z = t + 2, en el eje del mismo.

Rpta. $5x^2+10y^2+13z^2+12xy-6xz+4yz+26x+20y-38z+3=0$

67) Demuestre que las ecuaciones dadas representan una superficie cilíndrica y hallar la ecuación de su directriz y los números directores de sus generatrices y construir su gráfica.

a) $4x^2+64y^2+z^2-32xy+4z=0$

b) $8x^2-9y^2-9z^2-6xy+22x+12y+5=0$

c) $x^2+4y^2+5z^2+2xz+4yz-4=0$

d) $17x^2+2y^2+z^2-8xy-6xz-2=0$

e) $xz+2yz-1=0$

f) $x^2+5z^2-2xz+8yz+4y^2-4=0$

g) $2x^2+4y^2-4xz+6z^2+8yz-4=0$

h) $z^2+x^2+2y^2+2yz-2xy-1=0$

i) $2x^2+y^2+3z^2-2yz+4xz-2=0$

j) $z^2+4xy+2y^2-4xz+6x^2+4=0$

68) Dadas las ecuaciones de la directriz y las coordenadas del vértice de una superficie cónica, hallar su ecuación y hacer su gráfica.

a) $x^2+y^2=4$, $z=2$, V(0,0,0) **Rpta.** $x^2+y^2=z^2$

b) $x^2=2y$, $z=-2$, V(0,0,0) **Rpta.** $x^2+yz=0$

c) $z^2=4y$, $x=0$, $V(2,0,0)$ **Rpta.** $z^2+2xy=4y$

d) $y^2 + z^2 = 9,\ x = 2,\ V(-1,1,0)$

Rpta. $8x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 6xy + 22x + 12y + 5 = 0$

e) $x^2 - 4z^2 = 4,\ y = 3,\ V(-1,1,1)$

Rpta. $4x^2 - 7y^2 - 16z^2 - 4xy + 16yz + 12x + 26y + 48z = 31$

f) $y = x^3,\ z = 2,\ V(0,0,0)$ **Rpta.** $4x^3 - y^2 = 0$

69) Hallar la ecuación del cono circular, si los ejes de coordenadas son generatrices de él.

Rpta. $xy + xz + yz = 0$

70) Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el origen de coordenadas, si la generatrices son tangentes de la esfera $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Rpta. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 4xy + 12xz - 6yz = 0$

71) Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto P (5,0,0), si las generatrices son tangentes a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Rpta. $9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 90x + 225 = 0$

72) Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el punto (3,-1,-2) si las ecuaciones de la directriz son: $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Rpta. $3x^3 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$

73) La recta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$ es el eje de un cono circular cuyo vértice está situado en el plano 0YZ. Hallar la ecuación de éste cono, si se sabe que el punto $M(1,1,-\dfrac{5}{2})$ está situado en la superficie .

Rpta. $35x^2 + 35y^2 - 52z^2 - 232xy - 116xz + 116yz + 232x - 70y - 116z + 35 = 0$

74) Hallar la ecuación de la superficie cuya directriz es la curva C: x =cos t, y =1 + sen t, z = 2 + sen t , y , y cuyo vértice es el punto V(1,1,-2).

75) Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el origen de coordenadas, si se dan las ecuaciones de su directriz.

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c$ **Rpta.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=b$ **Rpta.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

c) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=a$ **Rpta.** $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

76) Hallar las ecuaciones de las generatrices del hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, que son paralelos al plano $4x+4y+3z-17=0$.

Rpta. $G_1:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$, $G_2:\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$

77) Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{a}=(2,-1,-2)$ y tangente al paraboloide elíptico $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=2z$.

Rpta. $\pi:2x-y-2z-4=0$

78) Hallar los valores de m para los cuales la intersección del plano $\pi:x+my-2=0$ con el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$, sea

a) Una elipse. **b)** Una parábola.

Rpta. **a)** $m\neq 0,\ m>-\frac{1}{4}$, pero si $m=-\frac{1}{4}$ resulta una elipse degenerada, un punto.

b) m= 0.

79) Demuestre que las intersecciones del plano: $\pi: 4x+5y+10z-20=0$, con el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$, son generatrices de éste. Hallar las ecuaciones de estas generatrices.

Rpta. $G_1:\begin{cases} y+2z=0 \\ x+5\ \ =0 \end{cases}$, $G_2:\begin{cases} 2x-5z=0 \\ y+4\ \ =0 \end{cases}$

80) Hallar las ecuaciones de las generatrices del hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, que son paralelos al plano $6x+4y+3z-17=0$.

Rpta. $L_1: x=\frac{z}{-2},\ y=3$; $L_2: \frac{y}{3}=\frac{z}{-4},\ x=2$

81) Una vez comprobado que el punto A(-2,0,1) está situado en el paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$, determinar el ángulo agudo formado por sus generatrices que pasan por el punto A.

Rpta. $\theta = arc.\cos(\frac{1}{17})$

82) Hallar la ecuación de la superficie cónica si su vértice es (0,-β,0) y su directriz está dado por:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\beta^2 \\ y+z=\beta \end{cases}$

Rpta. $x^2+z^2-y^2-\beta z=0$

83) Hallar la ecuación del cono cuyo vértice esta en el punto (3,-1,2) si las ecuaciones de la directriz son $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

84) Un punto P que se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos (4,2,2) y (-2,0,6) es el vértice de una superficie cónica, sabiendo que la segunda componente de P es 1 y que la directriz del cono se encuentra en al intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=3$ con el plano $z=0$. Hallar la ecuación de la superficie cónica.

85) Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva dada entorno al eje indicado.

a) $C: z = e^{y}$, $x = 0$, eje y **Rpta.** $x + z = e^{2y}$

b) $C: y = 3x$, $z = 0$, eje x **Rpta.** $9x^2 - y^2 - z^2 = 0$

c) $C: y = \ln z$, $x = 0$ eje z **Rpta.** $x^2 + y^2 = \ln z$

d) $C: z^2 = 2y$, $x = 0$ eje y **Rpta.** $x^2 + z^2 - 2y = 0$

e) $C: y^2 . z^2 = 4$, $x = 0$ eje y **Rpta.** $y^2 - x^2 - z^2 = 4$

f) $C: 9x^2 + 4y^2 = 36$, $z = 0$ **Rpta.** $9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

g) $C: x^2 + 2y = 6$, $z = 0$ **Rpta.** $x^2 + z^2 + 2y = 6$

h) $C: y^2 = 2z$, $x = 0$ **Rpta.** $y^4 - 4x^2 - 4z^2 = 0$

i) $C: z = e^{x}$, $y = 0$ **Rpta.** $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$

j) $C: z = \dfrac{2|x|}{1 + x^2}$, $y = 0$ **Rpta.** $y^2 + z^2 = \dfrac{4x^2}{(1 + x^2)}$

86) Hallar la ecuación de la superficie engendrada por rotación de la elipse.

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$ entorno el eje OY. **Rpta.** $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$

87) Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la elipse.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$ alrededor del eje OX **Rpta.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$

88) Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hiperboloide

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$ alrededor del eje OZ. **Rpta.** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

89) Demostrar que el hiperboloide de una hoja determinado por la ecuación. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, se puede obtener por rotación de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ entorno del eje OZ y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano OXZ.

90) Demostrar que el hiperboloide de dos hojas, determinado por la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, se puede obtener por rotación de la hipérbola $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$, $y=0$ entorno del eje OZ y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano OXZ.

CAPITULO II

2. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL.

Pre-Requisitos.- Para la comprensión adecuada de este capítulo de funciones vectoriales de variable real se requiere del conocimiento previo de:

- Cálculo de funciones de una variable real.
- Geometría Analítica.
- Reglas básicas de diferenciación e integración para funciones de una variable real.

Objetivos.- Establecer los conocimientos necesarios para el trazado de las curvas de tal manera que en cada punto de la misma se determine el triedro móvil, así como los planos osculador, normal y rectificante.

Al término de este capítulo el estudiante debe ser capaz de:

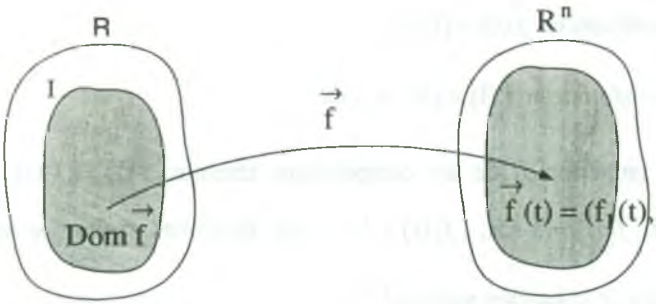
- Describir las curvas en el espacio por medio de ecuaciones paramétricas y como intersección de superficies.
- Utilizar las funciones vectoriales para describir el movimiento de un objeto a lo largo de una curva en el espacio.
- Definir el vector tangente unitario, el vector normal unitario y el vector binormal.
- Calcular los planos: osculador, normal y rectificante.
- Discutir la descomposición de la aceleración en sus componentes tangencial y normal.

2.1 Introducción.- Se ha estudiado la recta L en R^3 que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ como el conjunto $L = \{p_0 + t\vec{a} / t \in R\}$. Luego a cada número real t le corresponde el punto $p_0 + t\vec{a}$ de la recta, a tal correspondencia le llamaremos función vectorial de variable real y que denotaremos por $\vec{f}$ de donde su regla es:

$$\boxed{\vec{f}(t) = p_0 + t\vec{a} = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t,\ z_0 + a_3 t)}$$

El dominio de la función $\vec{f}(t)$ es el conjunto de los números reales y el rango de $\vec{f}(t)$ es la recta que pasa por el punto p_0 y es paralela al vector $\vec{a}$, cualquier función que tiene como dominio el conjunto de los números reales y como rango un conjunto de vectores se llama función vectorial de variable real. En este capítulo estudiaremos a este tipo de funciones.

2.2 Definición.- Sea I un subconjunto de los números reales (ICR), se llamara función vectorial de una variable real: $\vec{f}: I \to R^n$ si a cada elemento de I se le hace corresponder vía $\vec{f}$ un elemento único de R^n es decir:



donde las n funciones se denominan funciones componentes de la función vectorial $\vec{f}(t)$ y son funciones reales de variable real, donde $f_i(t)$ se denomina la i-ésima componente de la función vectorial; como caso particular daremos la siguiente definición.

2.3 Definición.- Sean $f_1, f_2, f_3: I \to R$, tres funciones reales de variable real, entonces $\forall\ t \in D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$ existe un vector definido por:

$$\boxed{\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}}$$

al vector $\vec{f}(t)$ se le llama función vectorial de variable real, al cual denotaremos por:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{f}: I \subseteq R \longrightarrow R^3, \quad \text{tal que} \\ t \longrightarrow \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \end{array}}$$

donde $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ son las componentes de la función vectorial.

Observación.- **1)** $D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} =$ Dominio de $\vec{f}$ (campo escalar)

2) Rango de $\vec{f}$ = $R_{\vec{f}} = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3}$ (campo vectorial)

Ejemplo.- La ecuación $\vec{f}(t) = (1,2,3) + t(2,5,1) = (1+2t, 2+5t, 3+t)$, $D_{\vec{f}} = R$ describe una función vectorial de variable real; el rango de esta función es una recta en R^3 y la función es una correspondencia o transformación de puntos sobre la recta real R en puntos sobre la recta que pasa por (1,2,3) paralela al vector (2,5,1).

El punto $0 \in R$ se transforma en $\vec{f}(0) = (1,2,3)$.

El punto $1 \in R$ se transforma en $\vec{f}(1) = (3,7,4)$, etc.

Si $\vec{f}(t)$ se escribe en términos de sus componentes tenemos $\vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$, donde $f_1(t) = 1+2t$, $f_2(t) = 2+5t$, $f_3(t) = 3+t$ son funciones reales de variable real, llamadas componentes de la función vectorial $\vec{f}(t)$.

En general, si el rango de $\vec{f}$ es un conjunto de vectores de R^n podemos escribir: $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, donde $f_i(t)$ es la i-ésima componente de $\vec{f}(t)$.

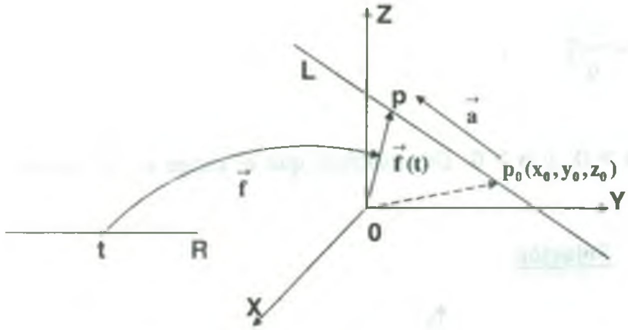
La representación de una función vectorial en términos de sus funciones componentes nos permite aplicar a las funciones vectoriales los criterio desarrollados en el cálculo de funciones reales.

Ejemplo.- Si $f_1(t) = x_0 + a_1 t$, $f_2(t) = y_0 + a_2 t$, $f_3(t) = z_0 + a_3 t$ son las funciones componentes, entonces la función vectorial $\vec{f}(t)$ es expresado en la forma:

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k} = (x_0 + a_1 t)\,\vec{i} + (y_0 + a_2 t)\,\vec{j} + (z_0 + a_3 t)\,\vec{k}$$

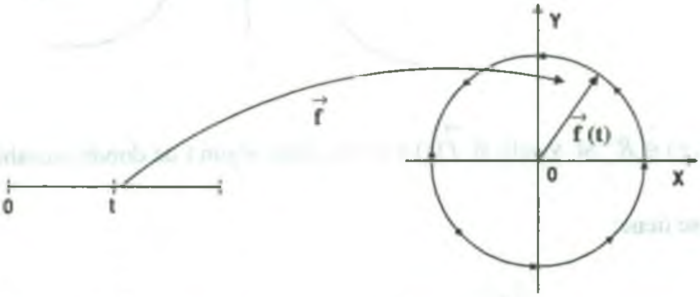
$$= (x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t, z_0 + a_3 t)$$

ésta función vectorial representa una recta que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.



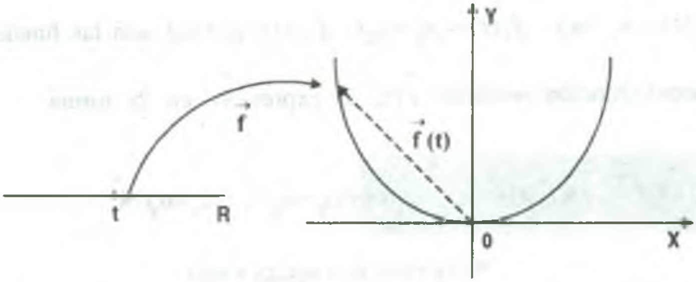
Es importante que: $t \in R$ y fue transportado por $\vec{f}$ y procesado vía regla de correspondencia de $\vec{f}$ transformándose en un vector en R^3 con origen en (0,0,0), estos vectores "trazaran" a la Recta L.

Ejemplo.- Si $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \operatorname{sen} t$, para $t \in [0,2\pi]$, la función vectorial $\vec{f}(t)$ es expresado por $\vec{f}(t) = \cos t.\,\vec{i} + \operatorname{sen} t.\,\vec{j}$, que representa una circunferencia en el plano XY.



Ejemplo.- Si $\vec{f}(t) = (3t, t^2)$ es una función vectorial. Demuéstrese que el rango de $\vec{f}$ es una parábola en R^2

Solución

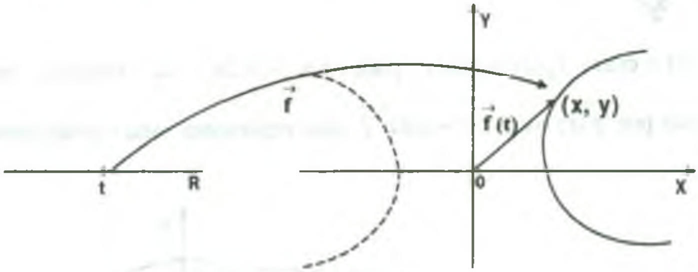


$(x,y) \in R_{\vec{f}}$ si $\vec{f}(t) = (x,y) \Rightarrow (3t,\ t^2) = (x,y)$, de donde $\begin{cases} 3t = x \\ t^2 = y \end{cases}$ entonces $y = \dfrac{x^2}{9}$

$$\therefore\quad R_{\vec{f}} = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, y = \frac{x^2}{9}\right\}$$

Ejemplo.- Si $\vec{f}(t) = (a.\cosh t, b\,\text{senh}\, t)$, a > 0 y b > 0. Demuéstrese que el rango de $\vec{f}$,es una rama de la hipérbola.

Solución



un punto $(x,y) \in R_{\vec{f}}$ si y solo si $\vec{f}(t) = (x,y)$, para algún t de donde (acosht, b senht)=(x,y),

por lo tanto se tiene:

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\,\text{senh}\, t \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cosh^2 t \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \text{senh}^2\, t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2 t - \text{senh}^2\, t = 1$$

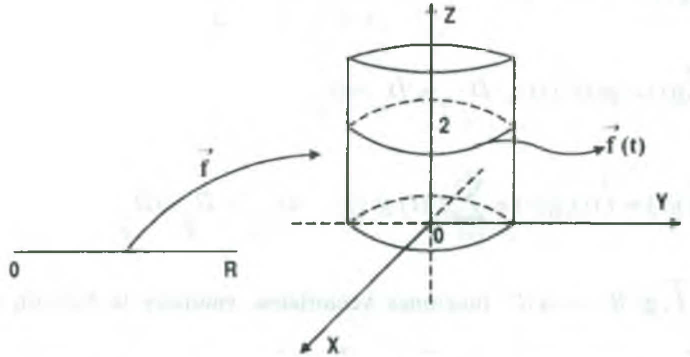
como (x,y) está sobre la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, y como x = a cos h t > 0, entonces el rango de $\vec{f}$ es una rama de la hipérbola. $R_{\vec{f}}=\{(x,y)\in R^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\}$

Ejemplo.- Trace la gráfica de la imagen de las siguientes funciones.

i) $\vec{f}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$

Solución

Sea $G_{\vec{f}}$ = la gráfica de la función vectorial, si (x,y,z) $\in G_{\vec{f}}$ entonces x = cos t, y = sen t, z = 2, para algún t. Así, $\forall$ t $\in$ R. $x^2+y^2=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$ y z = 2, esto quiere decir que la imagen de $\vec{f}(t)$ es la curva que está en la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano z = 2.



ii) $\vec{f}(t)=(2t,3t,t^2)$

Solución

Si $G_{\vec{f}}$ = la gráfica de la función vectorial entonces (x,y,z) $\in G_{\vec{f}}$ implica x = 2t, y = 3t, $z=t^2$, de donde 3x = 2y y $z=\frac{x^2}{4}$, esto quiere decir que la imagen de $\vec{f}$ es la curva de intersección de las superficies 3x = 2y, y $z=\frac{x^2}{4}$.

2.4 Operaciones Algebraicas con Funciones Vectoriales.-

Las combinaciones de funciones vectoriales ó de una función vectorial en una función real se obtienen mediante las operaciones del álgebra vectorial, las cuales son dadas mediante la siguiente definición.

Definición.- Consideremos las funciones vectoriales $\vec{f}, \vec{g}: R \longrightarrow R^n$ con dominio $D_{\vec{f}}$ y $D_{\vec{g}}$ respectivamente y sea $\varphi: R \longrightarrow R$ una función real con dominio D_φ; a las funciones $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}-\vec{g}$, $\varphi.\vec{f}$ y $\vec{f}.\vec{g}$, definiremos mediante la siguiente regla de correspondencia.

1) $(\vec{f}+\vec{g})(t) = \vec{f}(t)+\vec{g}(t)$, $\forall$ t $\in D_{\vec{f}+\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$

2) $(\vec{f}-\vec{g})(t) = \vec{f}(t)-\vec{g}(t)$, $\forall$ t $\in D_{\vec{f}-\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$

3) $(\varphi.\vec{f})(t) = \varphi(t).\vec{f}(t)$, $D_{\varphi.\vec{f}} = D_\varphi \cap D_{\vec{f}}$

4) $(\vec{f}.\vec{g})(t) = \vec{f}(t).\vec{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t).g_1(t)$, $D_{\vec{f}.\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$

5) Sea $\vec{f}, \vec{g}: R \longrightarrow R^3$ funciones vectoriales, entonces la función producto vectorial $\vec{f} \times \vec{g}$ está dado por: $(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$, $D_{\vec{f} \times \vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$

6) La función compuesta de $\varphi: R \longrightarrow R$ con $\vec{f}: R \longrightarrow R^n$ es dado por la regla de correspondencia:

$$(\vec{f} o \varphi)(t) = \vec{f}(\varphi(t)) = (f_1(\varphi(t)), f_2(\varphi(t)), \ldots, f_n(\varphi(t)))$$

$$= ((f_1 o \varphi)(t), (f_2 o \varphi)(t), \ldots, (f_n o \varphi)(t))$$

por lo tanto: $\vec{f} o \varphi = (f_1 o \varphi, f_2 o \varphi, \ldots, f_n o \varphi)$

Ejemplo.- Si $\vec{f}(t)=(t^3,t^2,t)$ y $\vec{g}(t)=(\frac{t^3}{9},\frac{t^2}{4},t)$. Hallar $(\vec{f}.\vec{g})(1)$ y $(\vec{f}\times\vec{g})(1)$

Solución

Se conoce que $(\vec{f}.\vec{g})(1)=\vec{f}(1).\vec{g}(1)=(1,1,1).(\frac{1}{9},\frac{1}{4},1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1=\frac{49}{36}$

$$(\vec{f}\times\vec{g})(1)=\vec{f}(1)\times\vec{g}(1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}=(\frac{3}{4},-\frac{8}{9},\frac{5}{36})$$

Ejemplo.- Sean $\vec{f}(t)=(t^2+1,0,t^3)$ y $\vec{g}(t)=(\operatorname{sen} t,-\cos t,0)$.

Hallar **a)** $\vec{f}(a+b)$ **b)** $\vec{g}(t-3)$ **c)** $\vec{f}(\operatorname{sen} t)\times\vec{g}(t^2+1)$

Solución

a) $\vec{f}(a+b)=((a+b)^2+1,0,(a+b)^3)=(a^2+b^2+2ab+1,0,a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

b) $\vec{g}(t-3)=(\operatorname{sen}(t-3),-\cos(t-3),0)$

c) $\vec{f}(\operatorname{sen} t)=(\operatorname{sen}^2 t+1,0,\operatorname{sen}^3 t),\ \vec{g}(t^2+1)=(\operatorname{sen}(t^2+1),\ -\cos(t^2+1),\ 0)$

$$\vec{f}(\operatorname{sen} t)\times\vec{g}(t^2+1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \operatorname{sen}^2 t+1 & 0 & \operatorname{sen}^3 t\\ \operatorname{sen}(t^2+1) & -\cos(t^2+1) & 0\end{vmatrix}$$

$$=(\operatorname{sen}^3 t.\cos(t^2+1),\operatorname{sen}^3 t.\operatorname{sen}(t^2+1),-(\operatorname{sen}^2 t+1)\cos(t^2+1))$$

2.5 Ejercicios Desarrollados.-

1) Consideremos las funciones vectoriales $\vec{f},\vec{g}: R \longrightarrow R^3$, definimos por:

$$\vec{f}(t)=(\frac{\sqrt[4]{1-[|t|]}}{t[|2t-1|]-2t},\frac{1}{\sqrt{2-t}},[|t|]),\quad \vec{g}(t)=(\frac{\sqrt{2t-1}}{[|1-t|]},[|t^2|],t[|t|]).$$

Hallar $D_{\vec{f}}, D_{\vec{g}}, D_{\vec{f}+\vec{g}}$

Solución

Calculando el dominio de $\vec{f}$; $D_{\vec{f}}=D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}$, donde $f_1(t)=\dfrac{\sqrt[4]{1-[|t|]}}{t[|2t-1|]-2t}$,

$f_2(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2-t}}$, $f_3(t)=[|t|]$. Ahora calculamos el dominio de cada función.

$f_1(t)$ está definida si:

$$1-[|t|]\geq 0 \;\wedge\; t[|2t-1|]-2t\neq 0 \;\Rightarrow\; 1-[|t|]\geq 0 \Rightarrow [|t|]\leq 1 \Rightarrow t<2$$

$$t[|2t-1|]-2t\neq 0 \Leftrightarrow t\neq 0 \;\vee\; [|2t-1|]-2\neq 0$$

como $[|2t-1|]-2=0 \Rightarrow -\dfrac{3}{2}\leq t<2$ entonces:

$$t[|2t-1|]-2t\neq 0 \Leftrightarrow t\neq 0 \;\vee\; t\notin\left[\frac{3}{2},2\right\rangle$$

Luego $D_{f_1}=<-\infty,2>\cap(<-\infty,0>\cup<0,\infty>)\cap<-\infty,3/2>\cup[2,\infty>$

$$D_{f_1}=<-\infty,0>\cup<0,3/2>$$

$f_2(t)$ está definida si $2 - t > 0 \Rightarrow t<2 \quad\Rightarrow\quad D_{f_2}=<-\infty,2>$

$f_3(t)$ está definida para $\forall$ t $\in$ R. $\Rightarrow\quad D_{f_3}=R$

$$D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = (<-\infty,0> \cup <0,3/2>) \cap (<-\infty,2>) \cap R$$

$$D_{\vec{f}} = <-\infty,0> \cup <0,3/2>$$

Calculando el dominio de $\vec{g}$; $D_{\vec{g}} = D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap D_{g_3}$, donde $g_1(t) = \dfrac{\sqrt{2t-1}}{[|1-t|]}$, $g_2(t) = [|t^2|]$, $g_3(t) = t[|t|]$. Calculamos el dominio de cada función.

$g_1(t)$ esta definida si $2t-1 \geq 0 \wedge [|1-t|] \neq 0$

$2t-1 \geq 0 \wedge [|1-t|] \neq 0 \Rightarrow t \geq \dfrac{1}{2} \wedge t \notin <0,1]$ entonces $([|1-t|] = 0 \Rightarrow 0 < t \leq 1)$, donde

$D_{g_1} = \left[\dfrac{1}{2},\infty\right) \cap (<-\infty,0] \cup <1,\infty>) = <1,+\infty>$, para $g_2(t)$, $g_3(t)$ es R. Luego $D_{\vec{g}} = <1,+\infty>$

ahora calculamos $D_{\vec{f}+\vec{g}} = D_{\vec{f}} \wedge D_{\vec{g}}$

$$D_{\vec{f}+\vec{g}} = (<-\infty,0> \cup <0,\frac{3}{2}>) \cap <1,+\infty> = <1,\frac{3}{2}>$$

2) Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}(t) = (\ln(t+1), \sqrt{t^2+2t-8})$

Solución

como $D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2}$ donde $f_1(t) = \ln(t+1)$, $f_2(t) = \sqrt{t^2+2t-8}$.

$f_1(t)$ está definido si t + 1 > 0 $\Rightarrow$ t > -1, $D_{f_1} = <-1,\infty>$

$f_2(t)$ está definido si

$t^2 + 2t - 8 \geq 0 \Rightarrow (t+4)(t-2) \geq 0$

$D_{f_2} = <-\infty,-4> \cup [2,\infty>$

$D_{\vec{f}} = <-1,\infty> \wedge (<-\infty,-4] \cup [2,\infty>) = [2,\infty> \Rightarrow D_{\vec{f}} = [2,\infty>$

3) Determinar el dominio de la función vectorial :

$$\vec{f}(t)=(\frac{\operatorname{sen} t}{|t|},\ \frac{t+\operatorname{sen} t}{t-\operatorname{sen} t},\ \frac{\operatorname{sen} 3t-\operatorname{sen} t}{\ln(t+1)})$$

Solución

Como $D_{\vec{f}}=D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}$ donde $f_1(t)=\dfrac{\operatorname{sen} t}{|t|}$, $f_2(t)=\dfrac{t+\operatorname{sen} t}{t-\operatorname{sen} t}$, $f_3(t)=\dfrac{\operatorname{sen} 3t-\operatorname{sen} t}{\ln(t+1)}$.

Ahora calculamos el dominio de cada función.

$f_1(t)$ está definida si $t\neq 0$ Luego $D_{f_1}=R-\{0\}$

$f_2(t)$ está definida si $t-\operatorname{sen} t\neq 0$, pero $t-\operatorname{sen} t=0 \Leftrightarrow t=0$ por lo tanto $D_{f_2}=R-\{0\}$

$f_3(t)$ está definida si $t+1>0 \wedge t\neq 0 \Rightarrow t\in\langle -1,0\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$ por lo tanto $D_{f_3}=\langle -1,0\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$

$$D_{\vec{f}}=D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}=\langle -1,0\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$$

4) Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}(t)=(\dfrac{1-t}{1+t^2},\ (t+2)^{-3/2},\ (t-4)^{-1})$

Solución

Como $D_{\vec{f}}=D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}$, donde :

$$\begin{cases} f_1(t)=\dfrac{1-t}{1+t^2} \\ f_2(t)=(t+2)^{-3/2} \\ f_3(t)=(t-4)^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f_1}=R \\ D_{f_2}=R-\{-2\},\ \text{como } D_{\vec{f}}=D_{f_1}\cap D_{f_2}\cap D_{f_3}=R-\{-2,4\} \\ D_{f_3}=R-\{4\} \end{cases}$$

5) Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}(t)=(\ln(1+t),\ \sqrt{t},\ \dfrac{2t}{1-t^2})$

Solución

Como $D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$ donde las funciones

$f_1(t) = \ln(1+t)$ está definida sí $1 + t > 0 \Rightarrow D_{f_1} = \langle -1, \infty \rangle$

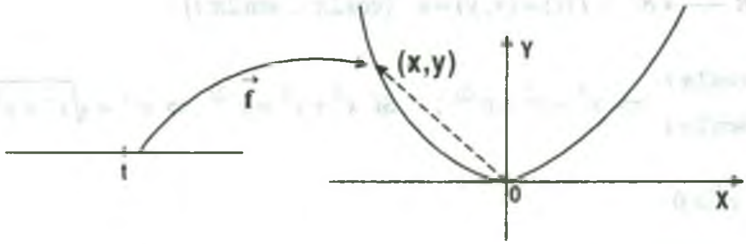
$f_2(t) = \sqrt{t}$ está definida sí $t \geq 0 \Rightarrow D_{f_2} = [0, \infty \rangle$

$f_3(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ está definida si $1 - t^2 \neq 0 \Rightarrow t \neq \pm 1 \Rightarrow D_{f_3} = R - \{-1, 1\}$

por lo tanto $D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = [0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

6) Trazar la gráfica mostrando que la función vectorial $\vec{f}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ representa una parábola.

Solución



como $\vec{f}(t) = (x, y) = (t, t^2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2$ que nos representa una parábola.

7) Sea $\vec{f}(t) = (1 - \operatorname{sen} t, -2 + \operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} t)$ tal que t ∈ R, identifique el rango de la función $\vec{f}$.

Solución

Sea $\alpha = 1 - \operatorname{sen} t$, pero como $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \operatorname{sen} t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 2 \Rightarrow \alpha \in [0, 2]$

Luego $\vec{f}(\alpha) = (\alpha, -1-\alpha, 2-2\alpha), \alpha \in [0, 2]$ ósea $\vec{f}(\alpha) = (0, -1, 2) + \alpha(1, -1, -2)$

por lo tanto $\vec{f}(\alpha)$ es un segmento de recta donde $\alpha \in [0, \alpha]$

8) Graficar el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = e^{-t}(\cos 2\pi t,\ \text{sen}\, 2\pi t),\ t \in R$

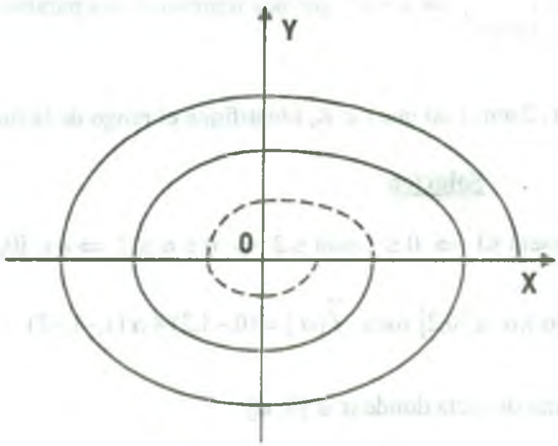
Solución

Sea $\vec{f}: R \longrightarrow R^2 \ / \ \vec{f}(t) = (x,y) = e^{-t}(\cos 2\pi t,\ \text{sen}\, 2\pi t)$

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos 2\pi t \\ y = e^{-t}\,\text{sen}\, 2\pi t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = e^{-2t} \ ; \quad \text{Sí } x^2 + y^2 = e^{-2t} \Rightarrow e^{-t} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\therefore\ x^2 + y^2 \geq 0$

cuando $t \longrightarrow +\infty,\ e^{-t} \longrightarrow 0$



t	$\vec{f}(t)$
0	(1,0)
$\frac{1}{4}$	$e^{-1/4}(0,1)$
$\frac{1}{2}$	$e^{-1/2}(-1,0)$
1	$e^{-1}(1,0)$
$\frac{5}{4}$	$e^{-5/4}(0,1)$
$\frac{3}{2}$	$e^{-3/2}(-1,0)$

9) Descríbase el rango de la función vectorial:

$$\vec{f}(t)=\left(\int\frac{\alpha}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)dt,\int\frac{\beta}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)dt\right),\quad \alpha,\beta>0$$

Solución

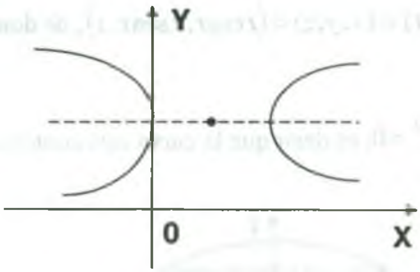
Sea:

$$\vec{f}:[a,b]\longrightarrow R^{2}\,/\,\vec{f}(t)=\left(\int\alpha\frac{\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{2}dt,\ \int\beta\frac{\left(e^{t}+e^{-t}\right)}{2}dt\right)=\int(\alpha\,\mathrm{senh}\,t\,dt,\beta\cosh t\,dt)$$

Sí $(x,y)\in R_{\vec{f}}\Rightarrow\vec{f}(t)=(x,y)=(\alpha\cosh t+c_1,\beta\,\mathrm{senh}\,t+c_2)$

$$\begin{cases}x=\alpha\cosh t+c_1\\ y=\beta\,\mathrm{senh}\,t+c_2\end{cases}\Rightarrow\ \frac{(x-c_1)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-c_2)^2}{\beta^2}=1 \text{ es hipérbola}$$

$$\therefore R_{\vec{f}}=\left\{(x,y)\in R^{2}\,/\,\frac{(x-c_1)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-1)^2}{\beta^2}=1\right\}$$



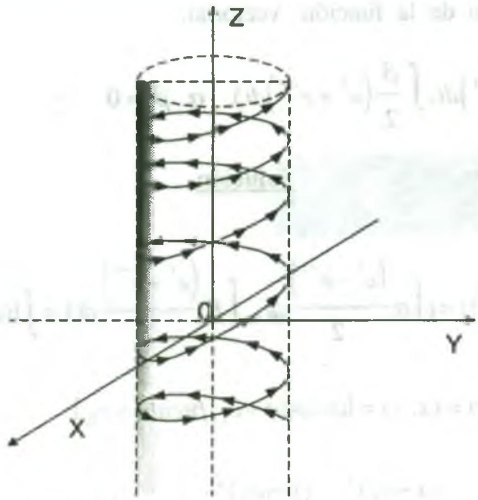
10) Descríbase el rango de la función vectorial $\vec{f}(t)=(2\cos t,\ 2\,\mathrm{sen}\,t,\ t)$

Solución

Si $(x,y,z)\in R_{\vec{f}}\Rightarrow\vec{f}(t)=(x,y,z)=(2\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t,\ t)$ entonces se tiene:

$$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\,\mathrm{sen}\,t,\quad \text{de donde}\\ z=t\end{cases}\qquad \begin{aligned}&x^2+y^2=4\\ &z=t,\quad t\in R\end{aligned}$$

Luego la curva está contenida en el cilindro circular, es decir, que es una curva hélice.



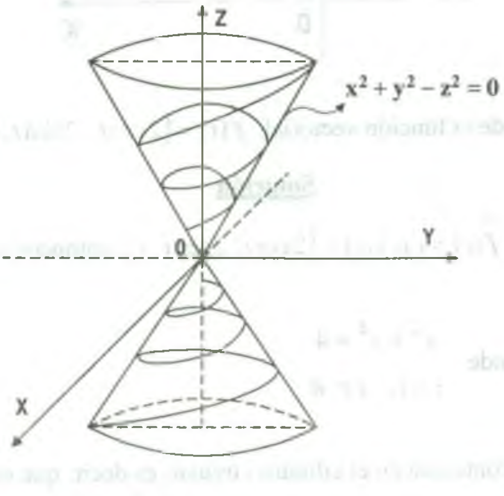
11) Descríbase el rango de la función vectorial $\vec{f}(t)=\left(t\cos t,\ t\,\text{sen}\,t,\ t\right)$

Solución

Sea $\vec{f}:[a,b]\longrightarrow R^3 \,/\, \vec{f}(t)=\left(t\cos t,\ t,\text{sen}\,t,\ t\right)$

Si $(x,y,z)\in R_{\vec{f}} \Rightarrow \vec{f}(t)=(x,y,z)=\left(t\cos t,\ t\,\text{sen}\,t,\ t\right)$, de donde

$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\,\text{sen}\,t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-z^2=0$, es decir que la curva está contenida en el cono circular.

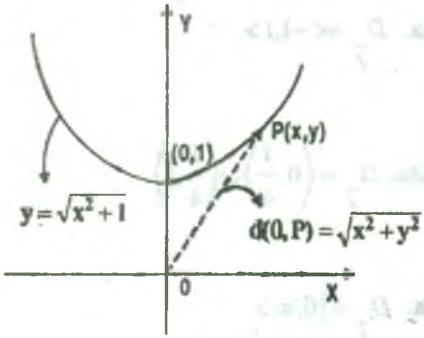


12) Un punto se mueve sobre la curva $y=\sqrt{x^2+1}$, partiendo de (0,1) en el instante $t=\dfrac{1}{4}$ y se mueve a la derecha, si la distancia del punto al origen es proporcional a t, hallar una función vectorial que describa el movimiento.

Solución

De la condición del problema se tiene d(o,p) = kt de donde $\sqrt{x^2+y^2}=kt$, debemos determinar la función $\vec{f}(t)=\big(x(t),\ y(t)\big)$ como C: $y=\sqrt{x^2+1}$, $y\ge 0$ entonces $y^2-x^2=1$ (una rama de la hipérbola).

Luego se tiene $\begin{cases} x^2+y^2=k^2t^2 \\ y^2-x^2=1 \end{cases} \Rightarrow y(t)=\sqrt{\dfrac{1+k^2t^2}{2}}$ como $y^2-x^2=1$ entonces:



$x(t)=\sqrt{\dfrac{k^2t^2-1}{2}}$ de la condición del problema se tiene

$\vec{f}(\dfrac{1}{4})=(0,1)$ y como $\vec{f}(t)=\big(x(t),\ y(t)\big)$ entonces

$x(\dfrac{1}{4})=0,\ \ y(\dfrac{1}{4})=1.$

Como $x(t)=\sqrt{\dfrac{k^2t^2-1}{2}} \Rightarrow x(\dfrac{1}{4})=\sqrt{\dfrac{\dfrac{k^2}{16}-1}{2}}=0 \Rightarrow k=\pm 4.$

Luego $x(t)=\sqrt{\dfrac{16t^2-1}{2}}$, $y(t)=\sqrt{\dfrac{16t^2+1}{2}}$, por lo tanto la función vectorial que describe el movimiento del punto es: $\vec{f}(t)=(\sqrt{\dfrac{16t^2-1}{2}},\ \sqrt{\dfrac{16t^2+1}{2}})$

2.6 Ejercicios Propuestos.-

I) Hallar el dominio de las siguientes funciones vectoriales.

1) $\vec{f}(t)=(\frac{t^2}{t+2},\ 2t^3,\ \frac{2t}{t+1})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=R-\{-2,-1\}$

2) $\vec{f}(t)=(e^{2t},\ e^{-t},\ \frac{1}{t})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=R-\{0\}$

3) $\vec{f}(t)=(\frac{1}{t^2},\ 0,\ \ln(t+1))$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=<-1,0>\cup<0,\infty>$

4) $\vec{f}(t)=(e^{-t^2},\ \ln t^2,\ t\ln\frac{1}{t})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=<0,\infty>$

5) $\vec{f}(t)=(e^{-t},\ t+\sqrt{1-t^2},\ \frac{1-\sec^2(t-1)}{(t-1)^2})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=<-1,1>$

6) $\vec{f}(t)=(\sqrt{1-t^2},\ \frac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2},\ \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{4},1\right\rangle$

7) $\vec{f}(t)=\left(\ln(1+t),\ \sqrt{t},\ \ln(1+t)\right)$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=[0,\infty>$

8) $\vec{f}(t)=(\frac{2}{t},\ \sqrt{9-t^2})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=[-3,0>\cup<0,3]$

9) $\vec{f}(t)=(t+2,\ \frac{t-1}{t+2},\ \frac{3}{t-2})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=R-\{-2,2\}$

10) $\vec{f}(t)=\left(\sqrt{t-4},\ \sqrt{4-t}\right)$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=\{4\}$

11) $\vec{f}(t)=(\ln(t+1),\ \sqrt{t^2+2t-8})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}}=\langle 2,\infty)$

12) $\vec{f}(t) = (\sqrt{2t-t^2},\ t,\ \sqrt{4-2t})$ **Rpta.** $D_{\vec{f}} = [0,2]$

II)

1) Si $\vec{f}(t) = (a\cos t,\ b\,\text{sen}\, t)$ donde a > 0, b > 0 y $D_{\vec{f}} = [0,2\pi]$. Demuéstrese que el rango de $\vec{f}$ es una elipse en R^2.

2) Mostrar que la función vectorial $\vec{f}(t) = (t+2,\ t^2+1)$ tiene por rango una parábola y hacer su gráfico. **Rpta.** $R_{\vec{f}} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = x^2 - 4x + 5\}$

3) Si $\vec{f}(t) = (h + a\cos t,\ k + b\,\text{sen}\, t)$, a > 0, b > 0 y $D_{\vec{f}} = [0,2\pi]$. Demuéstrese que e rango de $\vec{f}$ es una elipse en R^2.

4) Si $\vec{f}(\theta) = (\int \frac{\lambda}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})d\theta,\ \int \frac{\beta}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})d\theta)$ con λ,β > 0. Demostrar que e rango de $\vec{f}(\theta)$ es una hipérbola.

5) Si $\vec{f}(t) = (\frac{1-t}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2})$, descríbese el rango de $\vec{f}$.

Rpta. $R_{\vec{f}} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x - y = 0\}$

6) Encontrar el rango $\vec{f}$ y graficar.

a) $\vec{f}(t) = (2\cos t,\ \text{sen}\, t,\ \frac{t}{4})$ **b)** $\vec{f}(t) = (t,\ t,\ \text{sen}\, t)$

Rpta. **a)** $R_{\vec{f}} = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x^2 + 2y^2 = 2\}$

b) $R_{\vec{f}} = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x = y \ \wedge\ y = arc.\text{sen}\, z\}$

7) Mostrar que el rango de la función vectorial $\vec{f}$ definida por $\vec{f}(t) = (1+\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}),\ t \in [-2\pi, 2\pi]$ está sobre la esfera de radio 2 y centro en el origen y sobre el cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

8) Hallar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\vec{f}(t) = (\sqrt{t-2},\ \frac{1}{t-2})$ **b)** $\vec{f}(t) = (\frac{1}{t},\ \sqrt{4-t^2})$

c) $\vec{f}(t) = (\sqrt{4-t},\ \sqrt{t-4})$ **d)** $\vec{f}(t) = (\sqrt{t},\ \frac{1}{\sqrt{t-5}})$

e) $\vec{f}(t) = (t,\ (1-\sqrt{|t|})^2)$ **f)** $\vec{f}(t) = (t,\ t,\ \operatorname{sen} t)$

g) $\vec{f}(t) = (1+2\operatorname{sen} t,\ 2-\operatorname{sen} t,\ 5)$ **h)** $\vec{f}(t) = (\frac{1-t}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2})$

Rpta. a) $< 2,\infty >$ **b)** $< -2,0 > \cup < 0,2 >$

c) $\{4\}$ **d)** $< 5,\infty >$

9) ¿ Qué curva representa el rango de la función $\vec{f}$?

a) $\vec{f}(t) = (3\cos t + 2,\ 2\operatorname{sen} t - 3)$ **b)** $\vec{f}(t) = (2+3\operatorname{tg} t,\ 1+4\sec t)$

Rpta. a) Una elipse **b)** Una hipérbola

10) Dadas las funciones siguientes, graficar y hallar el rango.

a) $\vec{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ **b)** $\vec{f}(t) = (3\cosh t,\ 5\operatorname{senh} t)$

c) $\vec{\alpha}(t) = (t,\ \frac{t^2}{4}, \frac{t^3}{9})$ **d)** $\vec{f}(t) = (7t,\ t^2)$

e) $\vec{f}(t) = (\frac{3t}{1+t^3},\ \frac{3t^2}{1+t^3})$ **f)** $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

g) $\vec{f}(t)=\left(t^2,t+1\right)$ **h)** $\vec{f}(t)=(t,\sqrt{t(2-t)},\sqrt{2(2-t)})$

i) $\vec{f}(t)=(3t-t^2,3t^2,3t+t^3)$

j) $\vec{f}(t)=(-1+\operatorname{sen}2t\cos 3t,2+\operatorname{sen}2t\operatorname{sen}3t,-3+\cos t)$

k) $\vec{f}(t)=(\cos t+\operatorname{sen}t,\ \cos t-\operatorname{sen}t)$

11) Defina una función vectorial $\vec{f}:[-3,3]\longrightarrow R^3$ de tal manera que su rango sea el triángulo de vértice $P_0(2,-1,1)$, $P_1(1,3,-1)$ y $P_2(1,0,2)$

12) Defina una función vectorial del intervalo [a,b] sobre el segmento de recta de extremos P_0 y P_1 de R^n.

13) Defina una función vectorial del intervalo [-2,2] en R^3 cuya imagen es el triángulo de vértice A(3,2,-1) , B(2,0,1) , C(1,-2,1).

14) Proporcione una función vectorial del intervalo [0,1] sobre el segmento rectilíneo que une los puntos:

a) A(-1,2) , B(3,5) **b)** P_0 y P_1 en R^2 **c)** A(1,4,7) , B(3,-2,1)

Rpta. **a)** $\vec{f}(t)=(-1+4t,2+3t)$

b) $\vec{f}(t)=\{P_0+t\,\overrightarrow{P_0P_1}\,/\,0\le t\le 1\}$

c) $\vec{f}(t)=\{(1,4,7)+t(2,-6,6)\,/\,0\le t\le 1\}$

15) Un punto P en el primer cuadrante de R^2 se mueve de tal manera que su distancia al origen es igual a la pendiente t de la recta que va del origen a P.

Hallar una representación vectorial de la curva que describe P usando t como parámetro.

Rpta. $\vec{f}(t)=\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

16) Sea $\vec{f}(t) = (2t^{-1}, \sqrt{4-t^2})$, $\vec{g}(t) = (\ln(t+1), \sqrt{t^2+2t-8})$. Calcular $(\vec{f}+\vec{g})$ y su dominio de definición.

17) Sea la curva C definida por: $\vec{f}(t) = (\frac{4}{5}\cos t,\ 1-\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t)$, $t > 0$. Demuestre que C es una circunferencia y encuentre su centro y radio.

2.7 Límite de una Función Vectorial de Variable Real.-

El concepto de límite de una función real de variable real extenderemos para las funciones vectoriales de variable real, para esto recordemos la definición de límite de una función de una variable.

Sea f una función real de variable real y "a" un punto de acumulación de $D_{\vec{f}}$ (el punto "a" es un punto de acumulación de $D_{\vec{f}}$ si todo intervalo abierto que contiene "a" contiene un punto t en $D_{\vec{f}}$ distinto de "a"). Se dice que un número L es el límite de la función f(x) en "a" si para cada $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta > 0$, tal que siempre que $x \in D_{\vec{f}}$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Si L es el límite de f(x) en "a" escribiremos así: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

para las funciones vectoriales el concepto de límite tiene el mismo significado intuitivo.

Luego por analogía tenemos la definición de $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{b}$.

2.7.1 Definición.- Sea $\vec{f}(t)$ una función vectorial y t_0 un punto de acumulación de $D_{\vec{f}}$, se dice que el vector $\vec{b}$ es el límite de $\vec{f}(t)$ cuando t se acerca a t_0 y se expresa como $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{b}$ si y solo si, para cada número real $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $\|\vec{f}(t) - \vec{b}\| < \varepsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$, $t \in D_{\vec{f}}$.

Es decir: $\boxed{\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{b} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 / 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(t) - \vec{b}\| < \varepsilon}$

Ejemplo.- Demuestre que $\lim\limits_{t\to 2} \vec{f}(t) = (6,4)$, donde $\vec{f}(t) = (3t, t^2)$

Solución

$$\lim_{t\to 2} \vec{f}(t) = (6,4) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |t-2| < \delta \Rightarrow \| \vec{f}(t) - (6,4) \| < \varepsilon$$

$$\| \vec{f}(t) - (6,4) \| = \| (3t, t^2) - (6,4) \| = \| (3t-6, t^2-4) \| = \sqrt{(3t-6)^2 + (t^2-4)^2}$$

$$\leq \sqrt{(3t-6)^2} + \sqrt{(t^2-4)^2} \leq 3|t-2| + |t+2||t-2| \qquad \text{... (1)}$$

Sea $|t-2| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < t-2 < 1 \Rightarrow 3 < t+2 < 5 \Rightarrow |t+2| < 5$

$$\| \vec{f}(t) - (6,4) \| \leq 3|t-2| + |t+2||t-2| < 3\delta_2 + 5\delta_2 = \varepsilon$$

$8\delta_2 = \varepsilon$ de donde $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{8}$. Luego $\exists\ \delta = min\ \{1, \dfrac{\varepsilon}{8}\}$

2.7.2 Teorema.- Sea $f: I \subset R \longrightarrow R^n$, una función vectorial de variable real, entonces $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ si y solo si $\lim\limits_{t\to t_0} f_i(t) = L_i$, i = 1,2,...,n, donde $\vec{L} = (L_1, \ldots, L_n)$.

Demostración

i) Si $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ entonces $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que si t $\in$ I, $0 < |t - t_0| < \delta$ entonces

$$\| \vec{f}(t) - \vec{L} \| < \varepsilon \text{ pero } \| \vec{f}(t) - \vec{L} \| = \| (f_1(t) - L_1, f_2(t) - L_2, \ldots, f_n(t) - L_n) \|$$

$$= \sqrt{\left(f_1(t) - L_1\right)^2 + \left(f_2(t) - L_2\right)^2 + \ldots + \left(f_n(t) - L_n\right)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i - L_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$$

además $|f_i - L_i| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (f_i - L_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$, por lo tanto, $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f_i - L_i| < \varepsilon$ esto significa que $\lim\limits_{t\to t_0} f_i(t) = L_i$.

ii) • Recíprocamente.

Si $\lim_{t\to t_0} f_i(t) = L_i$, i = 1,2,...,n para cada ε > 0, entonces ∃ δ > 0 tal que si

$0<\left|t-t_0\right|<\delta$ entonces $\left\|f_i - L_i\right\| < \varepsilon_i$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\varepsilon_i = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$.

Para tal δ se tiene, t ∈ I, $0<\left|t-t_0\right|<\delta$ entonces $\| f_i(t) - L_i \| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ ∀ i = 1,2,...,n,

entonces $\| \vec{f}(t) - \vec{L} \| = (\sum_{i=1}^{n} (f_i(t) - L_i)^2)^{1/2} < (\sum_{i=1}^{n} (\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}})^2)^{1/2} = \varepsilon$, por lo tanto,

para cualquier ε > 0, existe δ > 0 tal que t ∈ I, $0 < | t - t_0 | < \delta \Rightarrow \| \vec{f}(t) - \vec{L} \| < \varepsilon$,

esto significa, que $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$

Observación.- El teorema establece, que el límite de una función vectorial es igual al vector cuyas componentes son los limites de los respectivos componentes de $\vec{f}(t)$, es decir: Si $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ entonces el limite se expresa así:

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = (\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), \lim_{t\to t_0} f_3(t))}$$

En general si $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ el limite es dado por:

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = (\lim_{t\to t_0} f_1(t), \lim_{t\to t_0} f_2(t), ..., \lim_{t\to t_0} f_n(t))}$$

Ejemplos.- Calcular los siguientes límites.

1) $\lim_{t\to 0}((\dfrac{1}{1+t})^{1/t}, \dfrac{t^3 - t}{t}, \dfrac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}}{t})$

Solución

$$\lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{1}{1+t}\right)^{1/t},\frac{t^3-t}{t},\frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t}\right)=\left(\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{1/t},\lim_{t\to 0}\frac{t^3-t}{t},\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t}\right)$$

$$=\left(\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{-t}{1+t}\right)^{\frac{1+t}{-t}}\right]^{\frac{-t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}},\ \lim_{t\to 0}t^2-1,\ \lim_{t\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}}\right)$$

$$=\left(e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-1}{1+t}},\ 0-1,\ \frac{-2}{1+1}\right)=(e^{-1},-1,-1)$$

2) $\lim\limits_{t\to 3}\vec{f}(t)$ donde $\vec{f}(t)=\dfrac{t^2-2t-3}{t-3}\vec{i}+\dfrac{t^2-5t+6}{t-3}\vec{j}$

Solución

$$\lim_{t\to 3}\vec{f}(t)=\lim_{t\to 3}\frac{t^2-2t-3}{t-3}\vec{i}+\lim_{t\to 3}\frac{t^2-5t+6}{t-3}\vec{j}$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)(t+1)}{t-3}\vec{i}+\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)(t-2)}{t-3}\vec{j}=\lim_{t\to 3}(t+1)\vec{i}+\lim_{t\to 3}(t-2)\vec{j}=4\vec{i}+\vec{j}$$

3) $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)$ donde $\vec{f}(t)=\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{i}+\dfrac{\cos t-1}{2t}\vec{j}+e^{t^2}\vec{k}$

Solución

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\vec{i}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{2t}\right)\vec{j}+\left(\lim_{t\to 0}e^{t^2}\right)\vec{k}=(1,0,1)$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n)$ donde $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(n^2+i^2)^{-1/2}$, $b_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i^2}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}(a_n,b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n,\ \lim_{n\to\infty}b_n) \qquad \ldots (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(n^2+i^2\right)^{-1/2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}.\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| \Big/_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}.\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big/_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\ln(1+\sqrt{2}), \frac{\pi}{4})$$

2.8 Propiedades de Límites de Funciones Vectoriales.-

Si $\vec{f}(t)$ y $\vec{g}(t)$ son Funciones Vectoriales de Variable Real tal que $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{b}$ y $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t)=\vec{c}$ y t_0 es un punto de acumulación de $D_{\vec{f}}\cap D_{\vec{g}}$, entonces.

1) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)+\vec{g}(t)\right] = \lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t) + \lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t) = \vec{b}+\vec{c}$

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{f}(t)-\vec{g}(t)\right] = \lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t) - \lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t) = \vec{b}-\vec{c}$

3) $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t).\vec{g}(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t).\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t) = \vec{b}.\vec{c}$

4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{f}\times\vec{g})(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t) = \vec{b}\times\vec{c}$

Demostración

Demostraremos la propiedad (1)

como $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t)=\vec{a}$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{g}(t)=\vec{b}$, entonces para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que para

$0<|t-t_0|<\delta$ entonces $\|\vec{f}(t)-\vec{a}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\|\vec{g}(t)-\vec{b}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$; aplicando la desigualdad triangular tenemos.

$$\|\vec{f}(t)+\vec{g}(t)-(\vec{a}+\vec{b})\| = \|(\vec{f}(t)-\vec{a})+(\vec{g}(t)-\vec{b})\| \le \|\vec{f}(t)-\vec{a}\|+\|\vec{g}(t)-\vec{b}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Luego $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$ tal que para $0<|t-t_0|<\delta$ entonces $\|(\vec{f}(t)+\vec{g}(t))-(\vec{a}+\vec{b})\|<\varepsilon$,

por lo tanto $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{f}(t)+\vec{g}(t))=\vec{a}+\vec{b}=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{g}(t)$

Las demás propiedades se demuestran en forma similar.

2.9 Teorema.-

Si $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{a}$ y $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=c$, entonces $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)\vec{f}(t)=c\,\vec{a}$

Demostración

Si $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{a}$ y $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=c$, entonces para $0<\varepsilon'<1$ (ε' se hallará después).

existe $\delta>0$ tal que $|t-t_0|<\delta$ entonces $\|\vec{f}(t)-\vec{a}\|<\varepsilon'$ y $|\varphi(t)-c|<\varepsilon'$, Luego se tiene.

$$|\varphi(t)|=|c+(\varphi(t)-c)|\le|c|+|\varphi(t)-c|<|c|+\varepsilon'<|c|+1$$

$$\varphi(t)\vec{f}(t)-c\vec{a}=\varphi(t)\vec{f}(t)-\varphi(t)\vec{a}+\varphi(t)\vec{a}-c\vec{a}=\varphi(t)(\vec{f}(t)-\vec{a})+(\varphi(t)-c)\vec{a}$$

$$\|\varphi(t)\vec{f}(t)-c\vec{a}\|=\|\varphi(t)(\vec{f}(t)-\vec{a})+(\varphi(t)-c)\vec{a}\|\le|\varphi(t)|\,\|\vec{f}(t)-\vec{a}\|+|\varphi(t)-c|\,\|\vec{a}\|$$

$$<(|c|+1)\varepsilon'+\varepsilon'\|\vec{a}\|=(|c|+1+\|\vec{a}\|)\varepsilon'<\varepsilon$$

Luego ε' escogemos $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{|c|+1+\|\vec{a}\|}$ y también $\varepsilon' < 1$, $\|\varphi(t)\vec{f}(t)-c\vec{a}\| < \varepsilon$ de donde

$\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t)\vec{f}(t) = c\,\vec{a}$

2.10 Continuidad de una Función Vectorial de Variable Real.-

En forma similar a lo que se hizo del concepto de límites de funciones reales de variable real se extendió al concepto de límites de funciones vectoriales, también se puede hacer en forma natural para el caso de la continuidad.

a) **Definición.-** La función $\vec{f}(t)$ es continua en el punto t_0 de $D_{\vec{f}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que: $\|\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)\| < \varepsilon$ siempre que $t \in D_{\vec{f}}$ y $|t-t_0| < \delta$. Si t_0 no es punto de acumulación de $D_{\vec{f}}$, entonces $\vec{f}(t)$ es continua en t_0, puesto que hay un $\delta > 0$, tal que "t_0" es el único punto en $D_{\vec{f}} \cap < t_0-\delta,\ t_0+\delta >$ y entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, $\|\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)\| < \varepsilon$ siempre que $t \in D_{\vec{f}} \cap < t_0-\delta,\ t_0+\delta >$.

Si t_0 es un punto de acumulación de $D_{\vec{f}}$, entonces la definición de continuidad es equivalente a decir: La función $\vec{f}(t)$ es continua en el punto t_0 si.

i) $\vec{f}(t_0)$ existe, es decir $t_0 \in D_{\vec{f}}$	ii) $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t)$, existe	iii) $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$

2.11 Teorema.-

$\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$ continua en t_0 si y solo si f_i es continua en t_0 para i=1,2,3.

Demostración

Si $\vec{f}(t)$ es continua en t_0, entonces $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$, de donde :

$\lim\limits_{t \to t_0} (f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}) = f_1(t_0)\,\vec{i} + f_2(t_0)\,\vec{j} + f_3(t_0)\,\vec{k}$, Luego por el teorema 3.7.2

se tiene: $(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t))\,\vec{i} + (\lim\limits_{t \to t_0} f_2(t))\,\vec{j} + (\lim\limits_{t \to t_0} f_3(t))\,\vec{k} = f_1(t_0)\,\vec{i} + f_2(t_0)\,\vec{j} + f_3(t_0)\,\vec{k}$

por lo tanto, por igualdad de vectores se tiene:

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = f_1(t_0),\ \lim_{t \to t_0} f_2(t) = f_2(t_0),\ \lim_{t \to t_0} f_3(t) = f_3(t_0)$$

de donde $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$ para i = 1,2,3, esto quiere decir que $f(t)$ es continua en t_0, para cada i = 1,2,3.

Demuestre el recíproco como ejercicio.

Ejemplo.- La función $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$ definida por $\vec{f}(t) = (t^3 + t + 1,\ t^2 - 2t - 1,\ t + 3)$ es continua, pues sus funciones componentes son polinomiales y, por lo tanto, continuas.

Ejemplo.- La función $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$, definida por:

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} (t, t^2, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}) & si\ \ t \neq 0 \\ (0,0,0) & si\ \ t \neq 0 \end{cases}$$

, es discontinua en t = 0, puesto que:

$$\lim_{t \to 0} \vec{f}(t) = \lim_{t \to 0} (t, t^2, \frac{\operatorname{sen} t}{t}) = (0,0,1) \neq (0,0,0) = \vec{f}(0)$$

como $\lim\limits_{t \to 0} \vec{f}(t) \neq \vec{f}(0)$ entonces $\vec{f}(t)$ es discontinua en t = 0.

Ejemplo.- Analizar la continuidad de la Función Vectorial

$$\vec{f}(t)=\begin{cases}(\dfrac{t^m-t^n}{t^n-t^m}, \dfrac{\csc t - c\operatorname{tg} t}{\operatorname{sen} t}) & si\ \ t\neq 0\\ (-1,\dfrac{1}{2}) & si\ \ t=0\end{cases}$$

Solución

$\vec{f}(t)$ es continua en t = 0 si $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)=\vec{f}(0)$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\lim_{t\to 0}(\frac{t^m-t^n}{t^n-t^m}, \frac{\csc t - c\operatorname{tg} t}{\operatorname{sen} t})=\lim_{t\to 0}(-\frac{t^m-t^n}{t^m-t^n}, \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen}^2 t})=(-1,\frac{1}{2})=\vec{f}(0)$$

como $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)=\vec{f}(0) \Rightarrow \vec{f}(t)$ es continua en t = 0.

2.12 Teorema.-

Si φ es continua en t_0 y $\vec{f}(t)$ es continua en $\varphi(t_0)$ entonces $\vec{f}\ o\ \varphi$ es continua en t_0.

Demostración

Mediante el teorema 3.11, $\vec{f}\ o\ \varphi$ es continua t_0 si y solo si $f_i\ o\ \varphi$ (i=1,2,...,n) es continua en $t=t_0$ como φ es continua en t_0 y f_i es continua en $\varphi(t_0)$, concluimos que $f_i\ o\ \varphi$ es continua en t_0 (por las propiedades de las funciones de variable real).

2.13 Propiedades de la Continuidad.-

Sean $\vec{f},\vec{g}: I \longrightarrow R^3$ funciones vectoriales de variable real continuas en el punto $t_0\in I$, entonces:

i) $\vec{f}(t)\pm\vec{g}(t)$ es continua en t_0

ii) $(\lambda\vec{f})(t)$ es continua en t_0, ∀ λ ∈ R

iii) $(\vec{f}.\vec{g})(t)$ es continua en t_0

iv) $\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)$ es continua en t_0.

Observación.- Una función Vectorial $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$ es continua en un conjunto $I \subset D_{\vec{f}}$ si la función $\vec{f}(t)$ es continua en cada uno de los puntos de I.

2.14 Derivada de una Función Vectorial de Variable Real.-

La derivada de una función Vectorial de Variable Real $\vec{f}:[a,b] \longrightarrow R^3$, tal que $\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$, está definida por:

$$\boxed{\vec{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}}$$

siempre y cuando existe este límite.

Notación de la Derivada $\boxed{\vec{f}'(t) = D_t\,\vec{f}(t) = \frac{d}{dt}\vec{f}(t)}$

Teorema.- Si $\vec{f}(t)$ es una función vectorial dada por: $\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$, entonces: $\vec{f}'(t) = f_1'(t)\,\vec{i} + f_2'(t)\,\vec{j} + f_3'(t)\,\vec{k}$, siempre que $f_1'(t), f_2'(t), y\ f_3'(t)$ existan.

Demostración

Mediante la definición de derivada se tiene:

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}\vec{i} + \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}\vec{j} + \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h}\vec{k}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}\vec{i} + \lim_{h\to 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}\vec{j} + \lim_{h\to 0} \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h}\vec{k}$$

$$= f_1'(t)\,\vec{i} + f_2'(t)\,\vec{j} + f_3'(t)\,\vec{k} \qquad \therefore \quad \vec{f}'(t) = f_1'(t)\,\vec{i} + f_2'(t)\,\vec{j} + f_3'(t)\,\vec{k}$$

Ejemplo.- Si $\vec{f}(t)=\left(\operatorname{sen}2\pi t,\cos 2\pi t,2t-t^{2}\right)$. Calcular $f'(t)$ y $f'(0)$

Solución

$\vec{f}(t)=\left(\operatorname{sen}2\pi t,\cos 2\pi t,2t-t^{2}\right)$ su derivada es:

$\vec{f}'(t)=\left(2\pi\cos 2\pi t,-2\operatorname{sen}2\pi t,\ 2-2t\right)$, evaluando en t= 0 tenemos que $\vec{f}'(0)=\left(2\pi,0,2\right)$

Ejemplo.- Si. Calcular $f'=(\frac{3}{2})$ si $\vec{f}(t)=\ln(e^{t}+|t|)\,\vec{i}-[|\,t+\frac{1}{2}|]\,\vec{j}$

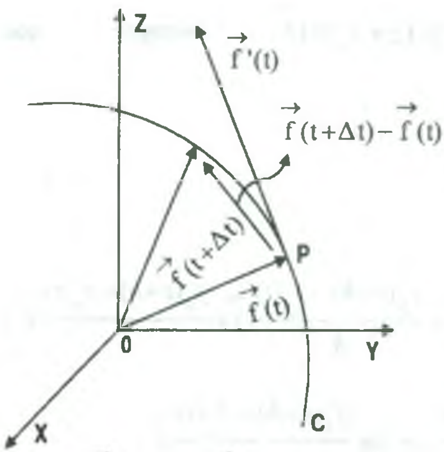
Solución

como $\frac{3}{2}\in[\frac{3}{2},2>\ \Rightarrow$ para $t\in[\frac{3}{2},2>$ se tiene: $-\frac{3}{2}\le t<2\ \Rightarrow\ 2\le t+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ [|\,t+\frac{1}{2}|]=2$

Luego $\vec{f}(t)=\ln\left(e^{t}+|t|\right)\vec{i}-2\,\vec{j}$. Entonces $\vec{f}'(t)=\dfrac{e^{t}+\frac{t}{|t|}}{e^{t}+|t|}\,\vec{i}-0\,\vec{j}\ \Rightarrow\ \vec{f}'(\frac{3}{2})=\dfrac{2e^{3/2}+2}{2e^{3/2}+3}\,\vec{i}$

2.15 Interpretación Geométrica de la Derivada.-

Consideremos las representaciones de los vectores $\vec{f}(t),\vec{f}(t+\Delta t)$ y $\vec{f}'(t)$ como en la gráfica.



La curva C es trazado por el punto final de la representación de posición de $\vec{f}(t)$ cuando t toma todos los valores en $D_{\vec{f}}$.

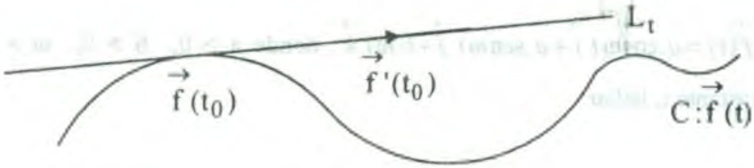
Si el vector $\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)$ lo multiplicamos por $\frac{1}{\Delta t}$ obtenemos un vector que tiene la misma dirección y cuya longitud es $\frac{1}{\Delta t}$ por la magnitud del vector $\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)$, ahora cuando $\Delta t\longrightarrow 0$, el vector $\dfrac{\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)}{\Delta t}$ se aproxima a un vector que tiene una de sus representaciones tangente a la curva C en el punto p.

Observación.-

1) El vector $\vec{f}'(t_0)$ es llamado vector tangente a la curva $C: \vec{f}(t)$ en el punto $t_0 \in I$.

La norma $\| \vec{f}'(t_0) \|$ es llamado la velocidad escalar de f en el punto t_0 y $\vec{f}'(t_0)$ vector velocidad.

2) El vector velocidad $\vec{f}'(t_0)$, cuando es diferente de cero, determina recta tangente a la curva $C: \vec{f}(t)$ en el punto $\vec{f}(t_0)$, es decir:



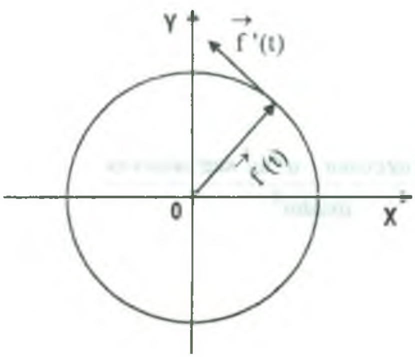
$$L_t = \{ \vec{f}(t_0) + t\, \vec{f}'(t_0) \,/\, t \in R \}$$

3) Así como al vector velocidad se ha definido por $\vec{V}(t) = \vec{f}'(t)$, el vector aceleración se define por $\vec{a}(t) = \vec{V}'(t) = \vec{f}''(t)$.

4) La rapidez de una partícula es definido como la magnitud del vector velocidad, es decir:

$$\boxed{\| \vec{V}(t) \| = \| \vec{f}'(t) \| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2}}$$

Ejemplo.- Sea $\vec{f}: R \longrightarrow R^2$, dado por $\vec{f}(t) = (3\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\, t)$.



La imagen de $\vec{f}$ es una circunferencia de radio 3 $x^2 + y^2 = 9$ para todo t $\in$ R, el vector velocidad de $\vec{f}$ es $\vec{f}'(t) = (-3\,\mathrm{sen}\, t,\ 3\cos t)$.

La velocidad escalar es constante.

$$V = \| \vec{f}'(t) \| = 3\ .$$

Ejemplo.- Hallar $\vec{f}'(t)$, cuando

a) $\vec{f}(t)=\left(t^{5/2}, (t+3)^3, \operatorname{sen}4t\right)$ **b)** $\vec{f}(t)=\left(\cos 3t, \operatorname{sen}3t, t^2\right)$

Solución

a) $\vec{f}'(t)=(\frac{5}{2}t^{3/2}, 3(t+3)^2, 4\cos 4t)$ **b)** $\vec{f}'(t)=\left(-3\operatorname{sen}3t, 3\cos 3t, 2t\right)$

Ejemplo.- Una partícula se mueve describiendo una hélice circular $\vec{f}(t)=a.\cos\omega t\,\vec{i}+a.\operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}+b.\omega t\,\vec{k}$, donde a > 0, b > 0, ω > 0, para cada instante t, hallar:

a) La velocidad **c)** La magnitud del vector aceleración

b) La aceleración **d)** El ángulo que forma los vectores aceleración y velocidad.

Solución

a) $\vec{V}(t)=\vec{f}'(t)=-a\omega\operatorname{sen}\omega t\,\vec{i}+a\omega\cos\omega t\,\vec{j}+b\omega\,\vec{k}$

b) $\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=-a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i}-a\omega^2\operatorname{sen}\omega t\,\vec{j}+0\,\vec{k}$

c) $\|\vec{a}(t)\|=\sqrt{a^2\omega^4\cos^2\omega t+a^2\omega^4\operatorname{sen}^2\omega t}=a\omega^2$

d) $\theta=\angle(\vec{V},\vec{a})$, de donde $\cos\theta=\dfrac{\vec{V}.\vec{a}}{\|\vec{V}\|\|\vec{a}\|}=\dfrac{a^2\omega^3\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t-a^2\omega^3\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t}{a\omega.a\omega^2}$

por lo tanto $\cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$

2.16 Propiedades de la Diferenciación.-

Consideremos dos funciones vectoriales $\vec{f}(t)$ y $\vec{g}(t)$ y $\alpha \in R$, entonces:

1) $D_t(\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)) = D_t\vec{f}(t) \pm D_t\vec{g}(t)$ 2) $D_t(\alpha.\vec{f}(t)) = \alpha.D_t\vec{f}(t)$

3) $D_t(\vec{f}(t).\vec{g}(t)) = \vec{f}(t).D_t\vec{g}(t) + \vec{g}(t).D_t\vec{f}(t)$

4) $D_t(\vec{f}(t) x \vec{g}(t)) = \vec{f}(t) x D_t\vec{g}(t) + D_t\vec{f}(t) x \vec{g}(t)$

2.17 Definición.-

Una función vectorial $\vec{f}(t)$ se dice que es diferenciable en un intervalo I, si $\vec{f}'(t)$ existe $\forall$ t $\in$ I.

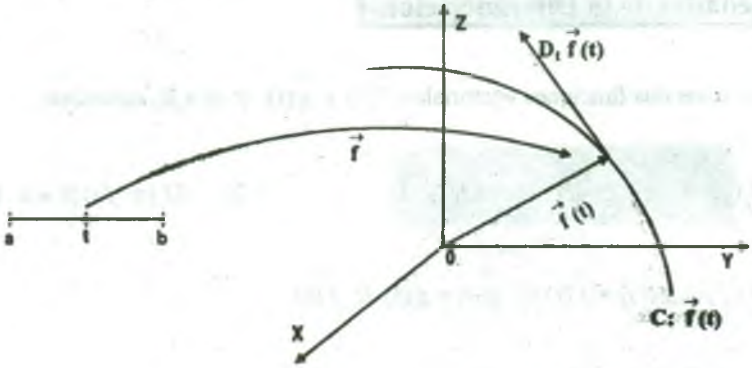
Observación.- Sea $\vec{f}: I \longrightarrow R^3$ una función vectorial diferenciable; Si $\vec{f}'(t)$ es continua, entonces se dice que $\vec{f}(t)$ es una curva de clase C', En general si $\vec{f}^{(p)}(t)$ (derivada de orden P de $\vec{f}$) es continua, entonces se dice que $\vec{f}(t)$ es una curva de clase C^P.

Ejemplo.- Para todo n > 0, la función vectorial $\vec{f}: R \longrightarrow R^2$, definida por $\vec{f}(t) = (t^{n+1}, t^n|t|)$ es de clase C^n.

2.18 Teorema.-

Si $\vec{f}(t)$ es una función vectorial diferenciable en un intervalo I y $\vec{f}(t)$ es un vector diferente de cero de magnitud constante y dirección variable $\forall$ t $\in$ I, entonces $\vec{f}(t)$ y $D_t\vec{f}(t)$ son ortogonales.

Demostración



Sea k (constante) la magnitud de $\vec{f}(t)$, entonces $\vec{f}(t).\vec{f}(t)=k^2$, luego diferenciando con respecto a t se tiene: $D_t(\vec{f}(t).\vec{f}(t))=0 \Rightarrow D_t\vec{f}(t).\vec{f}(t)+\vec{f}(t).D_t\vec{f}(t)=0$

$2\vec{f}(t).D_t\vec{f}(t)=0 \Rightarrow \vec{f}(t).D_t\vec{f}(t)=0$ como $\vec{f}(t).D_t\vec{f}(t)=0 \Rightarrow \vec{f}(t) \perp D_t\vec{f}(t)$.

Ejemplo.- La función vectorial $\vec{f}(t)=(\cos t, \text{sen}\, t)$ $\forall t \in R$, $\|\vec{f}(t)\|=1$, Luego $\vec{f}'(t)=(-\text{sen}\, t, \cos t)$, $\forall t \in R$ y como: $\vec{f}(t).\vec{f}'(t)=(\cos t, \text{sen}\, t).(-\text{sen}\, t, \cos t)=-\cos t\,\text{sen}\, t+\cos t\,\text{sen}\, t=0$

como $\vec{f}(t).\vec{f}'(t)=0$ entonces $\vec{f}(t)$ y $\vec{f}'(t)$ es ortogonal.

Observación.- Las derivadas de orden superior de las funciones vectoriales están definidas en relación con las derivadas de orden superior de las funciones reales, esto es:

Si $\vec{f}(t)$ es una función vectorial definida por:

$\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$, su primera derivada es: $\vec{f}'(t)=f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}$, la segunda derivada de $\vec{f}(t)$ es: $\vec{f}''(t)=f_1''(t)\vec{i}+f_2''(t)\vec{j}+f_3''(t)\vec{k}$, la tercera derivada de $\vec{f}(t)$ es: $\vec{f}'''(t)=f_1'''(t)\vec{i}+f_2'''(t)\vec{j}+f_3'''(t)\vec{k}$, y así sucesivamente, hasta llegar a calcular la n-ésima derivada de $\vec{f}(t)$ dado por: $\vec{f}^{(n)}(t)=f_1^{(n)}(t)\vec{i}+f_2^{(n)}(t)\vec{j}+f_3^{(n)}(t)\vec{k}$.

Ejemplo.- Encontrar $\vec{f}^{(n)}(t)$, donde $\vec{f}(t)=\dfrac{1}{2t+3}\vec{i}+\dfrac{1}{1-t}\vec{j}$

Solución

$$\vec{f}(t)=\frac{1}{2t+3}\vec{i}+\frac{1}{1-t}\vec{j} \Rightarrow \vec{f}'(t)=\frac{-2.1}{(2t+3)^2}\vec{i}+\frac{1}{(1-t)^2}\vec{j}$$

$$\vec{f}''(t)=\frac{2^2.1.2}{(2t+3)^3}\vec{i}+\frac{1.2}{(1-t)^3}\vec{j}$$

$$\vec{f}'''(t)=\frac{-2^3.1.2.3}{(2t+3)^4}\vec{i}+\frac{1.2.3}{(1-t)^4}\vec{j}$$

$$\vdots$$

$$\vec{f}^{(n)}(t)=\frac{(-2)^n.1.2.3\ldots n}{(2t+3)^{n+1}}\vec{i}+\frac{1.2.3\ldots n}{(1-t)^{n+1}}\vec{j}$$

$$\therefore\ \vec{f}^{(n)}(t)=\frac{(-2)^n.n!}{(2t+3)^{n+1}}\vec{i}+\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\vec{j}$$

2.19 Teorema.-

Si $g: I \longrightarrow R$ es una función diferenciable en I y $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$ es una función vectorial diferenciable sobre un intervalo que contiene a $g(I)=\{g(t)/t\in 1\}$, entonces $\vec{f}og$ es diferenciable sobre I y $\dfrac{d}{dt}(\vec{f}(g(t)))=\vec{f}'(g(t)).g'(t)$, $\forall$ t $\in$ I.

Demostración

Aplicando el teorema 3.15. se tiene: $\vec{f}'(g(t))=\left(f_1(g(t)),f_2(g(t)),f_3(g(t))\right)$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}'(g(t)))=(\frac{d}{dt}f_1(g(t)),\frac{d}{dt}f_2(g(t)),\frac{d}{dt}f_3(g(t)))$$

$$= \left(f_1'(g(t)).g'(t),\ f_2'(g(t)).g'(t),\ f_3'(g(t)).g'(t)\right)$$

$$= \left(f_1'(g(t)),\ f_2'(g(t)),\ f_3'(g(t))\right).g'(t), \text{ por la regla de la cadena.}$$

$$= \vec{f}'(g(t)).g'(t)\ , \quad \forall\, t \in I.$$

Ejemplo.- Sí $g(t) = e^{-\alpha t}$, $t \in [0,\infty\rangle$ y $\vec{f}(t) = (t,\ t^2,\ \frac{t^3}{3})$, $t \in \langle 0,\infty\rangle$. Hallar $\frac{d}{dt}(\vec{f}(g(t)))$.

Solución

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(g(t)) = \vec{f}(g(t)).g'(t)\,,\ \text{donde}\ \vec{f}(t) = (t,\ t^2,\ \frac{t^3}{3}) \Rightarrow \vec{f}'(t) = (1, 2t, t^2)$$

$$\vec{f}'(g(t)) = (1, 2g(t), g^2(t)) = \left(1,\ 2e^{-\alpha t},\ e^{-2\alpha t}\right)$$

$$g(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow g'(t) = -\alpha e^{-\alpha t}$$

Luego reemplazando se tiene: $\frac{d}{dt}\vec{f}(g(t)) = \vec{f}(g(t)).g'(t) = \left(1,\ 2e^{-\alpha t},\ e^{-2\alpha t}\right).\left(-\alpha\, e^{-\alpha t}\right)$

$$= -\alpha\, e^{-\alpha t}\left(1,\ 2e^{-\alpha t},\ e^{-2\alpha t}\right)$$

2.20 Ejercicios Desarrollados.-

1) Calcular si existe $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\cos t - \sqrt{1-t}}{t},\ \frac{t^2}{1-\cos^2 t}\right)$

Solución

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t - \sqrt{1-t}}{t},\ \frac{t^2}{1-\cos^2 t}\right) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - \sqrt{1-t}}{t},\ \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos^2 t}\right) \quad \text{... (1)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - \sqrt{1-t}}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{(\cos t - 1)}{t} - \frac{\left(\sqrt{1-t} - 1\right)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1-\cos t}{t} - \frac{-t}{t(\sqrt{1-t}+1)}\right)$$

$$= -0 + \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-t}+1} = \frac{1}{2} \quad \text{... (2)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}=1 \quad \text{... (3)}$$

ahora reemplazamos (2), (3) en (1). $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t-\sqrt{1-t}}{t},\frac{t^2}{1-\cos^2 t}\right)=\left(\frac{1}{2},1\right)$

2) Calcular si existe $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{1-t},\frac{t}{t+1},1\right)$

Solución

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+t}}{1-t},\frac{t}{t+1},1\right)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1+t}}{1-t},\ \lim_{t\to 0}\frac{t}{t+1},\ \lim_{t\to 0}1\right)=\left(\frac{1-1}{1-0},\frac{0}{0+1},1\right)=(0,0,1)$$

3) Sea $\vec{f}(t)=\left(\frac{\cos t-\sqrt{1-t}}{t},\frac{e^{2t}-e^t}{\operatorname{sen}2t-\operatorname{sen}t},\frac{\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}t}{\ln(1+t)}\right)$. Calcular $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$

Solución

Calculando los límites de las funciones componentes

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t}}{t}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{(1-\cos t)}{t}-\frac{\sqrt{1-t}-1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}-\frac{1-\cos t}{t}+\frac{1}{\sqrt{1-t}+1}=-0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-e^t}{\operatorname{sen}2t-\operatorname{sen}t}=\lim_{t\to 0}\frac{2e^{2t}-e^t}{2\cos 2t-\cos t}=\frac{2-1}{2-1}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{3\cos 3t-\cos t}{\frac{1}{1+t}}=\frac{3-1}{1}=2$$

por lo tanto al reemplazar en cada función compuesta

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sqrt{1-t}}{t},\ \lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-e^t}{\operatorname{sen}2t-\operatorname{sen}t},\ \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}3t-\operatorname{sen}t}{\ln(1+t)}\right)=\left(\frac{1}{2},1,2\right)$$

4) Calcular $\lim_{t\to 0}\vec{g}(t)$, cuando la función es dada por $\vec{g}(t)=(\frac{4^t-3^t}{7^t-6^t},\frac{\operatorname{tgh} t}{t},\frac{\ln(\operatorname{sen}2t)}{\ln(\operatorname{sen}t)})$

Solución

Calculando los límites de las funciones componentes.

$$\lim_{t\to 0}\frac{4^t-3^t}{7^t-6^t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{4^t-3^t}{t}}{\frac{7^t-6^t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{4^t-1}{t}-\frac{3^t-1}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{7^t-1}{t}-\frac{6^t-1}{t}}=\frac{\ln 4-\ln 3}{\ln 7-\ln 6}=\frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{7}{6}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tgh} t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^{-t}}{(e^t+e^{-t})t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^t+e^{-t}}(\frac{e^t-1}{t}-\frac{e^{-t}-1}{t})=\frac{1}{2}\left(\ln e-\ln e^{-1}\right)=\frac{1}{2}(\ln e+\ln e)=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\operatorname{sen}2t)}{\ln(\operatorname{sen}t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\cos 2t}{\operatorname{sen}2t}}{\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t}}=2\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t.\cos 2t}{\operatorname{sen}2t.\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t.\cos 2t}{\operatorname{sen}t.\cos t.\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{\cos^2 t}=1$$

Ahora reemplazamos en cada función componente

$$\lim_{t\to 0}\vec{g}(t)=(\lim_{t\to 0}\frac{4^t-3^t}{7^t-6^t},\ \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tgh} t}{t},\ \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\operatorname{sen}2t)}{\ln(\operatorname{sen}t)})=(\frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{7}{6}},1,1)$$

5) Calcular él limite si existe $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$ donde la función es dada por $\vec{f}(t)=(\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}2t)}{\operatorname{tg}(\operatorname{sen}t)},\frac{e^{at}-e^{bt}}{\operatorname{sen}at-\operatorname{sen}bt},\frac{b^t-a^t}{c^t-d^t})$

Solución

Calculando los límites de cada función componente

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}2t)}{\operatorname{tg}(\operatorname{sen}t)}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sec^2 2t.\cos\operatorname{tg}2t}{\cos t.\sec^2(\operatorname{sen}t)}=2$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{at}-e^{bt}}{\operatorname{sen} at-\operatorname{sen} bt}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{e^{at}-1}{t}-\frac{e^{bt}-1}{t}}{a.\frac{\operatorname{sen} at}{at}-b\frac{\operatorname{sen} bt}{bt}}=\frac{\ln e^{a}-\ln e^{b}}{a-b}=\frac{a\ln e-b\ln e}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{b^{t}-a^{t}}{c^{t}-d^{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{b^{t}-1}{t}-\frac{a^{2}-1}{t}}{\frac{c^{t}-1}{c}-\frac{d^{t}-1}{c}}=\frac{\ln b-\ln a}{\ln c-\ln d}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln\frac{c}{d}}$$

ahora reemplazamos en cada función componente.

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}2t)}{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} t)},\ \lim_{t\to 0}\frac{e^{at}-e^{bt}}{\operatorname{sen} at-\operatorname{sen} bt},\ \lim_{t\to 0}\frac{b^{t}-a^{t}}{c^{t}-d^{t}})=(2,\ 1,\ \frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln\frac{c}{d}})$$

6) Calcular si existe $\lim_{t\to 2}(\frac{e^{[|t|]}}{t},\ \operatorname{sen} t,\ \sqrt{1+t})$

Solución

Como $\lim_{t\to 2}[|t|]=\begin{cases}2 & para\ \ t>2\\ 1 & para\ \ t<2\end{cases}$

Luego $\nexists \lim_{t\to 2}[|t|]$, por lo tanto $\nexists \lim_{t\to 2}(\frac{e^{[|t|]}}{t},\ \operatorname{sen} t,\ \sqrt{1+t})$

7) Calcular $\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)$ si existe, donde la función es dada por

$$\vec{f}(t)=(\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^{2}(\operatorname{sen} t)},\ \frac{\cos t-\cos(\operatorname{sen} t)}{t^{2}},\ \frac{1}{t+\pi})$$

Solución

Calculando los limites de cada función componente

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{1-\cos^2(\operatorname{sen} t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{(1-\cos(\operatorname{sen} t))(1+\cos(\operatorname{sen} t))}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos(\operatorname{sen} t)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos(\operatorname{sen} t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{(1-\cos t)}{t^2}+\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{t^2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+\pi}=\frac{1}{0+\pi}=\frac{1}{\pi}$, ahora reemplazamos en cada función componente.

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} t)},\ \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos(\operatorname{sen} t)}{t^2},\ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t+\pi}\right)=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{\pi}\right)$$

8) Calcular si existe $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde $a_n=\cos(\frac{a}{2}).\cos(\frac{a}{2^2}).\cos(\frac{a}{2^3})\ldots\cos(\frac{a}{2^n})$

$$b_n=(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2})(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2})\ldots(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^n})$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n,\ \lim_{n\to\infty}b_n) \quad \ldots (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n} \quad \ldots (2)$$

como $\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a\Rightarrow\cos a=\dfrac{\operatorname{sen}2a}{2\operatorname{sen}a}$, por lo tanto

$$\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\ldots\cos\frac{a}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}a}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^2}}.\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^3}}\ldots\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^{n-1}}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}=\frac{\operatorname{sen}a}{2^n.\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}} \quad \ldots (3)$$

ahora (3) reemplazamos en (2) se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}a}{2^n.\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}=\operatorname{sen}a.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n.\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}=\frac{\operatorname{sen}a}{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2})(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^2})\dots(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2^n}) \qquad \dots (4)$$

como $\cos 2x = \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = (1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x$

$$\cos 2x = (1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x \Rightarrow 1-\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos a}{\cos^2\frac{a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2^2}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{2^2}}{\cos^2\frac{a}{2^3}}\dots\frac{\cos\frac{a}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{a}{2^n}} = \cos a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}.\cos\frac{a}{2^3}\dots\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

$$= \cos a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2^2}\dots\cos\frac{a}{2^n}} = \cos a.\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

ahora reemplazando en cada función componente en (1).

$$\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n) = (\frac{\operatorname{sen} a}{a}, \frac{a}{\operatorname{tg} a})$$

9) Calcular el límite si existe de $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde

$$a_n = \frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)\dots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)\dots(n^2+2n+1)} \quad \text{y} \quad b_n = \left[3-2(\frac{an+1}{na})\right]^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})}$$

Solución

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n)$; donde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2-2)(n^2-3)\dots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)(n^2+5)\dots(n^2+2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[(1-\frac{1}{n^2})^{-n^2}]^{-\frac{1}{n^2}}.[(1-\frac{2}{n^2})^{-\frac{n^2}{2}}]^{-\frac{2}{n^2}}\dots[(1-\frac{n}{n^2})^{-\frac{n^2}{n}}]^{-\frac{n}{n^2}}}{[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n^2}}.[(1+\frac{3}{n^2})^{\frac{n^2}{3}}]^{\frac{3}{n^2}}\dots[(1+\frac{2n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{2n+1}}]^{\frac{2n+1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}(1+2+3+...+n)}}{e^{\frac{1}{n^2}(1+3+5+...+(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}}}{e^{\frac{n(n+1)}{n^2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[3-2(\frac{na+1}{na+1})\right]^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})} = \lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{-2}{na})^{\frac{na}{2}}\right]^{\frac{-2}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})} = e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na})} = e^{\frac{4}{\pi}}$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{na+1}{na}) = \lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1+x) = -\frac{2}{\pi}$

por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n) = (e^{-3/2}, e^{4/\pi})$

10) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n}$; $b_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}$

Solución

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n, b_n\right) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n)$; donde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+...+\sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n}+e^{2/n}+e^{3/n}+...+e^{n/n}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{i/n}.\frac{1}{n} = \int_0^1 e^x dx = e-1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}).\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}.\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n) = (e-1, \ln 2)$

11) Analizar la continuidad de la siguiente función:

$$\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t-\operatorname{arctg} t}{t^3},\ \dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\beta t}}{\operatorname{sen}\alpha t-\operatorname{sen}\beta t}\right), & t\neq 0\\[2ex] \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta}\right), & t=0\end{cases}$$

Solución

La función $\vec{f}(t)$ es continua en t = 0 sí $\exists \lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)=\vec{f}(0)$

Luego $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)=\left(\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\operatorname{arctg} t}{t^3},\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\beta t}}{\operatorname{sen}\alpha t-\operatorname{sen}\beta t}\right)$

$$=\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{3(1+t^2)},\ \lim_{t\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha\cos\alpha t-\beta\cos\beta t}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta}\right)=\vec{f}(0)$$

por lo tanto $\exists \lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)=\vec{f}(0)$; luego la función $\vec{f}(t)$ es continua en t = 0.

12) Determinar si la función $\vec{f}: R\longrightarrow R^3$, dada por

$$\vec{f}(t)=\begin{cases}\left(t,\ t^2,\ \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right), & si\ \ t\neq 0\\[1ex] (0,0,0), & si\ \ t=0\end{cases}$$ es discontinua en t = 0.

Solución

La función $\vec{f}(t)$ es discontinua sí $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)\neq\vec{f}(0)$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\lim_{t\to 0}\left(t,\ t^2,\ \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)=(0,0,1)\neq\vec{f}(0)=(0,0,0)$$

por lo tanto $\vec{f}(t)$ es discontinua en t = 0.

13) Dada la función $\vec{f}(t)=\begin{cases}([|t|],\ \dfrac{\cos^2 t-1}{t^2},\ e^{-t^{-2}}), & t\in\langle 0,1\rangle\\ (1,0,1) & ,\quad t=0\end{cases}$. Hallar los punto de discontinuidad.

Solución

Los puntos críticos son 0 y 1. Analizando en el punto t = 0:

i) $\vec{f}(0)=(1,0,1)$

ii) $\lim\limits_{t\to 0^+}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to 0^+}[|t|],\ \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos^2 t-1}{t^2},\ \lim\limits_{t\to 0^+}e^{-t^{-2}})=(0,-1,0)$

$\lim\limits_{t\to 0^+}[|t|]=0$, porque $0\le t\le 1 \Rightarrow [|t|]=0$

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos^2 t-1}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}-\dfrac{\text{sen}^2\, t}{t^2}=-1$

$\lim\limits_{t\to 0^+}e^{-t^{-2}}=0$ y como $\lim\limits_{t\to 0^+}\vec{f}(t)\neq(1,0,1)$

por lo tanto $\vec{f}(t)$ es discontinua en t = 0. Ahora analizando en t = 1:

$\vec{f}(1)\ \nexists$, pues la función no está definida, se concluye que $\vec{f}(t)$ no es continua en t = 1.

14) Dada la función vectorial $\vec{f}(t)$ definida por $\vec{f}(t)=(\sqrt{1-t^2},\ \dfrac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2},\ \dfrac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}})$

a) Determinar el dominio de $\vec{f}(t)$.

b) Hallar $\lim\limits_{t\to 0}\vec{f}(t)$, si existe.

c) Determinar los puntos de discontinuidad.

d) Es posible redefinir $\vec{f}(t)$ de modo que sea continua sobre el intervalo <0,1>

Solución

a) Como el dominio de $\vec{f}$ es: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos a}{\cos^2\frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2^2}} \cdot \frac{\cos\frac{a}{2^2}}{\cos^2\frac{a}{2^3}} \cdots \frac{\cos\frac{a}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{a}{2^n}}$, donde

$$f_1(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad f_2(t) = \frac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2}, \quad D_{f_3} = \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}$$

luego $D_{f_1} = \{t \in R / 1-t^2 \geq 0\} = [-1,1]$

$$D_{f_1} = \{t \in R / 1-t^2 \geq 0\} = [-1,1]$$

$$D_{f_3} = \{t \in R / 1-e^{2\sqrt{t}} \neq 0 \wedge t \geq 0\} = R^+ - \{0\}$$

$$\therefore \quad D_{\vec{f}} = \left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{4},1\right\rangle$$

b) Se observa que: $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}} = \lim\limits_{t\to 0^+} -\frac{1}{2e^{2\sqrt{t}}} = -\frac{1}{2}$ pero $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}$, $\nexists$

por lo tanto para que $\exists \lim\limits_{t\to 0} \vec{f}(t)$, es necesario que en cada una de las funciones componentes exista el límite, por lo tanto, $\nexists \lim\limits_{t\to 0} \vec{f}(t)$

c) De la parte (a) se tiene que $\vec{f}(t)$ es discontinua en $t = \frac{1}{4}$.

d) Para que sea continua en $t = \frac{1}{4}$, se tiene que redefinir la función $\vec{f}(t)$ si es posible; para esto observamos que: $\vec{f}(\frac{1}{4}) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{4}} \vec{f}(t)$.

$$\vec{f}(\frac{1}{4})=\lim_{t\to\frac{1}{4}}\vec{f}(t)=(\lim_{t\to\frac{1}{4}}\sqrt{1-t^2},\ \lim_{t\to\frac{1}{4}}\frac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2},\ \lim_{t\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}})=(\frac{\sqrt{15}}{4},\ 1,\ \frac{1}{2(1-e)})$$

$$\therefore\quad \vec{f}(t)=\begin{cases}(\sqrt{1-t^2},\ \dfrac{1-\cos^2(t-\frac{1}{4})}{(t-\frac{1}{4})^2},\ \dfrac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}})\ , & x\in\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{4},1\right\rangle\\ (\dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 1,\ \dfrac{1}{2(1-e)}), & t=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

15) Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\vec{f}(t)=(t^3-4t)\vec{i}+(t^2+4t)\vec{j}+(8t^2-3t^3)\vec{k}$, para t = 2. Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula.

Solución

$\vec{V}(t)=\vec{f}'(t)$ = velocidad de una partícula

$\vec{V}(t)=(3t^2-4)\vec{i}+(2t+4)\vec{j}+(16t-9t^2)\vec{k}$, para t = 2 se tiene:

$\vec{V}(2)=8\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}$

$\vec{a}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{f}'''(t)$ = aceleración de una partícula

$\vec{a}(t)=6t\vec{i}+2\vec{j}+(16-18t)\vec{k}$, de donde $\vec{a}(2)=12\vec{i}+2\vec{j}-20\vec{k}$

16) Sea C una curva de ecuación vectorial $\vec{f}(t)=\{1-2t,\ t^2,\ 2e^{2(t-1)}\}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto donde el vector $\vec{f}'(t)$ es paralelo a $\vec{f}(t)$

Solución

Sea C: $\vec{f}(t)=\left(1-2t,\ t^2,\ 2e^{2(t-1)}\right)$, derivando se tiene $\vec{f}'(t)=\left(-2,\ 2t,\ 4e^{2(t-1)}\right)$, debemos de encontrar. $L_t=\left\{\vec{f}(t_0)+t\ \vec{f}'(t_0)\ /\ t\in R\right\}$

donde el punto $\vec{f}(t_0)$ debe cumplir que $\vec{f}'(t_0)\ //\ \vec{f}(t_0)$.

Si $\vec{f}'(t_0)\ //\ \vec{f}(t_0)\ \Rightarrow\ \exists\ \lambda\in R\ /\ \vec{f}(t_0)=\lambda\vec{f}'(t_0)$ es decir:

$$\left(1-2t_0,\ t_0^2,\ 2e^{2(t_0-1)}\right)=\lambda\left(-2,\ 2t_0,\ 4e^{2(t_0-1)}\right)$$

$$\begin{cases} 1-2t_0=-2\lambda \\ t_0^2=2t_0\lambda \\ 2e^{2(t_0-1)}=4\lambda e^{2(t_0-1)} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix}\lambda=\dfrac{1}{2} \\ t_0=1\end{matrix}$$

Luego: $\quad \vec{f}(1)=(-1,1,2);\quad \vec{f}'(1)=(-2,2,4)=2(-1,1,2)$

por lo tanto: $\quad L_t=\{(-1,1,2)+t\,(-1,1,2)\ /\ t\in R\}$

17) Dados los vectores $\vec{f}(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$ y $\vec{g}(t)=(1,\ t,\ 1-t)$ calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{a}.D_t\left[\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right]$ y $D_t\left[\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right]$ cuando t = 1, donde $\vec{a}=(1,1,1)$

Solución

$$\begin{cases}\vec{f}(t)=\left(t,\ t^2,\ t^3\right) \\ \vec{g}(t)=(1,\ t,\ 1-t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{f}'(t)=\left(1,\ 2t,\ 3t^2\right) \\ \vec{g}'(t)=(0,1,-1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{f}'(1)=(1,2,3) \\ \vec{g}'(1)=(0,1,-1)\end{cases}$$

además $\vec{f}(1)=(1,1,1)\ ,\ \vec{g}(1)=(1,1,0)$

$$D_t\left[\vec{f}(t).\vec{g}(t)\right]=\vec{f}(1).\vec{g}'(1)+\vec{f}'(1).\vec{g}(1)=0+1+2=3$$

$$D_t\left[\vec{f}(1)\ x\ \vec{g}(1)\right]=\vec{f}'(1)x\ \vec{g}(1)+\vec{f}(1).\vec{g}'(1)=(-5,4,0)$$

$$\vec{a}.D_t\left[\vec{f}(1).\vec{g}(1)\right]=(1,1,1)3=(3,3,3)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.D_t[\vec{f}(1).\vec{g}(1)].D_t[\vec{f}(1)x\,\vec{g}(1)]}{\|\vec{a}.D_t\,\vec{f}(1).\vec{g}(1)\|\|D_t\,\vec{f}(1)x\,\vec{g}(1)\|}=\frac{(3,3,3).(-5,4,0)}{\|(3,3,3)\|\|(-5,4,0)\|}$$

$$=\frac{-15+12}{3\sqrt{3}+\sqrt{41}}=-\frac{1}{\sqrt{123}}\quad\Rightarrow\quad\theta=\arccos(-\frac{1}{\sqrt{123}})$$

18) Sean las curvas $\vec{f}(t)=\left(e^t,e^{2t},1-e^{-t}\right)$, $\vec{g}(t)=(1-t,\cos t,\ \text{sen}\,t)$. Hallar en el punto de intersección el ángulo de intersección correspondiente.

Solución

El ángulo de intersección es el ángulo formado por los vectores tangentes a cada curva en el punto de intersección de ambos.

Sea $P\in C_1$: $\vec{f}(t)\cap C_2$: $\vec{g}(t)$, entonces

$$\text{Si}\begin{cases}P\in C_1:\ \vec{f}(t)\\ P\in C_2:\ \vec{g}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P\left(e^t,e^{2t},1-e^{-t}\right)\\ P(1-t,\cos t,\text{sen}\,t)\end{cases},\quad\text{para algún } t\in R.$$

Luego $\left(e^t,e^{2t},1-e^{-t}\right)=(1-t,\cos t,\ \text{sen}\,t)$, de donde

$$\begin{cases}e^t=1-t\\ e^{2t}=\cos t\\ 1-e^{-t}=\text{sen}\,t\end{cases}\Rightarrow t=0\ ;\ P(1,1,0)$$

ahora calculamos los vectores tangentes a las curvas en el punto t = 0.

$$\begin{cases} \vec{f}(t) = \left(e^t, e^{2t}, 1-e^{-t}\right) \\ \vec{g}(t) = (1-t, \cos t, \operatorname{sen} t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}\,'(t) = \left(e^t, 2e^{2t}, e^{-t}\right) \\ \vec{g}\,'(t) = (-1, -\operatorname{sen} t, \cos t) \end{cases}$$

para t = 0, $\vec{f}\,'(0) = (1,2,1)$, $\vec{g}\,'(t) = (-1,0,1)$, $\|\vec{f}(0)\| = \sqrt{6}$, $\|\vec{g}(0)\| = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{f}\,'(0).\vec{g}\,'(0)}{\|\vec{f}(0)\|\|\vec{g}(0)\|} = \frac{(1,2,1).(-1,0,1)}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-1+0+1}{\sqrt{12}} = 0$$

$\cos\theta = 0$ de donde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

19) Si $\vec{f}(t)$ es una función vectorial tal que $\|\vec{f}(t)\| = k$ donde k es constante. Hallar $\vec{f}(t).D_t\,\vec{f}(t)$

Solución

Como $\|\vec{f}(t)\| = k$ entonces $\vec{f}(t).\vec{f}(t) = k^2$, derivando se tiene

$$\vec{f}(t).D_t\,\vec{f}(t) + D_t\,\vec{f}(t).\vec{f}(t) = 0 \Rightarrow 2\,\vec{f}(t).D_t\,\vec{f}(t) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{f}(t).D_t\,\vec{f}(t) = 0$$

20) Hallar la ecuación de la recta tangente de la curva $\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 2\operatorname{sen} t - 1)$ en el punto de intersección con la curva $\vec{g}(t) = (\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ \cos^2 t)$, $t \in [0,2\pi]$.

Solución

Calculando el punto de intersección de las curvas.

$$P \in C_1:\ \vec{f}(t) \cap C_2:\ \vec{g}(t) \Rightarrow P \in C_1:\ \vec{f}(t) \wedge P \in C_2:\ \vec{g}(t)$$

Luego se tiene: $\vec{f}(t_1) = \vec{g}(t_2)$, de donde

$$\left(\operatorname{sen} t_1, \cos t_1, 2\operatorname{sen} t_1 - 1\right) = \left(\cos t_2, 2\operatorname{sen} t_2, \cos^2 t_2\right)$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t_1 = \cos t_2 \\ \cos t_1 = 2\operatorname{sen} t_2 \\ 2\operatorname{sen} t_1 - 1 = \cos^2 t_2 \end{cases} \qquad 2\operatorname{sen} t_1 - 1 = \operatorname{sen}^2 t_1 \Rightarrow \left(\operatorname{sen} t_1 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t_1 = 1, \quad t_1 = \frac{\pi}{2}$$

como $\cos t_2 = \operatorname{sen} t_1 \Rightarrow \cos t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 0$

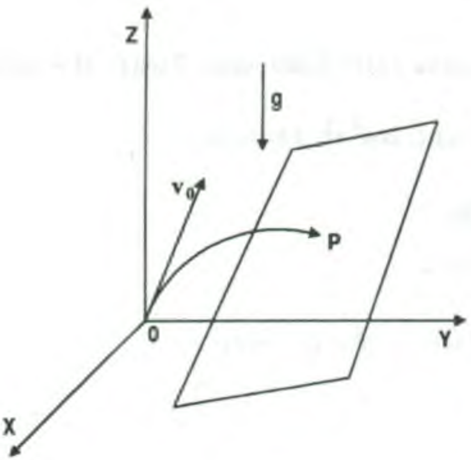
para $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $\vec{f}(\frac{\pi}{2}) = (1,0,1)$, además $\vec{f}'(t) = \left(\cos t, -\operatorname{sen} t, 2\cos t\right) \Rightarrow \vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (0,-1,0)$

La ecuación de la recta tangente, esta dado por: $L_t = \left\{ \vec{f}(\frac{\pi}{2}) + t\,\vec{f}'(\frac{\pi}{2}) \,/\, t \in R \right\}$

$\therefore \quad L_t = \{(1,0,1) + t(0,-1,0) / t \in R\}$

21) Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de $\vec{V}_0 = 10(1,2,3)$ bajo la acción de un campo gravitatorio $g = 10 mts/seg^2$, si el disparo es hecho desde el punto (0,0,0) y no se tomó en cuenta la resistencia del aire. Determinar la velocidad del proyectil y su posición cuando se encuentra en el plano P: x + y + z + 800 = 0

Solución



Las ecuaciones son:

$$\vec{f}(t) = \overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{V_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 \qquad \text{... (1)}$$

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{V_0} + \vec{g}\, t \qquad \text{... (2)}$$

donde $\overrightarrow{X_0} = (0,0,0)$

$\overrightarrow{V_0} = 10(1,2,3)$, $\vec{g} = (0,0,-10)$

reemplazando en (1) y en (2) se tiene:

$\vec{f}(t)=(0,0,0)+10(1,2,3)t+\frac{1}{2}(0,0,-10)t^2$ tenemos $\vec{f}(t)=(1't,\ 20t,\ 30t-5t^2)$... **(3)**

$\vec{v}=10(1,2,3)+(0,0,-10)t$ entonces $\vec{v}=(10,\ 20,\ 30-10t)$ ... **(4)**

Sea $p\in C\colon\ \vec{f}(t)\cap \mathbf{P}\ \Rightarrow\ p\in C\colon\ \vec{f}(t)\ \wedge\ p\in \mathbf{P}$

Si $p\in C\colon\ \vec{f}(t)\ \Rightarrow\ p(10t,\ 20t,\ 30t-5t^2)$

como $p\in \mathbf{P}\ \Rightarrow\ 10t+20t+30t-5t^2+800=0$

$t^2-12t-160=0\ \Rightarrow\ (t-20)(t+8)=0\ \Rightarrow\ t=20$

Luego el punto es P(200, 400, -1400)

$\vec{v}(20)=(10,\ 20,\ -170)$ y la rapidez es: $\|\vec{v}(20)\|=171.76\ m/seg.$

22) Sean $C_1\colon\ \vec{f}(t)=\left(1+t,\ e^{t+1},\ t^2+t\right);\ t\geq 0\ ;\ C_2\colon\ \vec{g}(t)=(\frac{3}{1+t},\ e^{4t},\ 1+2t);\ t\geq 0.$

Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva C_1 en un punto de intersección de C_1 y C_2.

Solución

Calculando el punto de intersección de C_1 y C_2.

$p\in C_1\colon\ \vec{f}(t)\cap C_2\colon\ \vec{g}(t)\ \Rightarrow\ p\in C_1\colon\ \vec{f}(t)\ \wedge\ p\in C_2\colon\ \vec{g}(t)$

Si $p\in C_1\colon\ \vec{f}(t)\ \Rightarrow\ p\left(1+t_1,\ e^{t_1+1},\ t_1^2+t_1\right)$

$p\in C_2\colon\ \vec{g}(t)\ \Rightarrow\ p(\frac{3}{1+t_2},\ e^{4t_2},\ 1+2t_2)$

$$\left(1+t_1,\ e^{t_1+1},\ t_1^2+t_1\right)=(\frac{3}{1+t_2},\ e^{4t_2},\ 1+2t_2)$$

$$\begin{cases} 1+t_1 = \dfrac{3}{1+t_2} & \ldots\ldots(1) \\ e^{t_1+1} = e^{4t_2} & \ldots\ldots(2) \\ t_1^2+t_1 = 1+2t_2 & \ldots\ldots(3) \end{cases}$$ de la ecuación (2) se tiene: $t_1+1=4t_2$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$4t_2 = \frac{3}{1+t_2} \Rightarrow 4t_2^2+4t_2-3=0 \Rightarrow t_2=\frac{1}{2}\ ,\ t_2=-\frac{3}{2}$$

como $t_2 \geq 0$, entonces $t_2=\dfrac{1}{2}$, reemplazando en (3)

$$t_1^2+t_1=2 \Rightarrow (t_1+2)(t_1-1)=0 \Rightarrow t_1=1$$

Luego $\vec{f}(1)=(2,e^2,2)$ además $\vec{f}'(1)=(1,e^2,3)$

La ecuación de la recta tangente L_t a la curva C_1 es: $L_t=\{\vec{f}(1)+t\,\vec{f}'(1)\,/\,t\in R\}$

$$\therefore\quad L_t=\{(2,e^2,2)+t\,(1,e^2,3)\,/\,t\in R\}$$

23) Considere el arco C de la hélice cilíndrica descrita por C: $\vec{f}(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t)$; $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Demuestre que en ningún punto de C: $\vec{f}'(t)$ es paralelo al vector cuyos extremos son $\vec{f}(0)$ a $\vec{f}(\dfrac{\pi}{2})$

Solución

Sea $\vec{V}(t)=\vec{f}'(t)=(-\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 1)$

para t = 0, $P_1(1,0,0)$; $t=\dfrac{\pi}{2}$, $P_2(0,1,\dfrac{\pi}{2})$

un vector en la dirección de la cuerda es $\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,1,\dfrac{\pi}{2})$

Si $\vec{v} // \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow \exists\, \lambda \in R$ tal que $\vec{v}(t) = \lambda\, \overrightarrow{P_1P_2}$, de donde

$(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) = (-\lambda, \lambda, \frac{\pi}{2}\lambda)$ de donde

$$\begin{cases} -\operatorname{sen} t = \lambda \\ \cos t = \lambda \\ 1 = \dfrac{\lambda\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{2}{\pi} \\ \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 2\lambda^2 = 1 \\ \dfrac{8}{\pi^2} = 1 \Rightarrow \pi^2 = 8 \quad \textit{falso} \end{array}$$

Luego $\nexists\, \lambda \in R \,/\, \vec{v} = \lambda\, \overrightarrow{P_1P_2}$ es decir: $\vec{v}(t) \not\parallel \overrightarrow{P_1P_2}$, $\forall\; t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

24) Considérese la hélice descrita por la función vectorial $\vec{f}(t) = (a\cos\omega t, a\operatorname{sen}\omega t, b\omega t)$, $\omega > 0$. Demuestre que la recta tangente, forma un ángulo constante con el eje Z y que el coseno de este ángulo es $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Solución

Sea $\theta = \angle(\vec{V}(t), \vec{k})$, donde $\vec{V}(t)$ es la dirección de la recta tangente y $\vec{k}$ es el vector dirección del eje Z.

$$\vec{v}(t) = \vec{f}\,'(t) = (-a\omega \operatorname{sen}\omega t, a\omega\cos\omega t, b\omega)$$

$\|\vec{v}(t)\| = \omega\sqrt{a^2+b^2}$, como $\cos\theta = \dfrac{\vec{V}(t).\vec{k}}{\|\vec{v}(t)\|\|\vec{k}\|}$

$$\cos\theta = \frac{(-a\omega\operatorname{sen}\omega t, a\omega\cos\omega t, b\omega).(0,0,1)}{\omega\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\omega}{\omega\sqrt{a^2+b^2}}$$ por lo tanto: $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

25) Sean C_1 y C_2 las curvas descritas por las ecuaciones

C_1: $\vec{f}(t)=(e^t,\ 2\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2}),\ t^2-2)$ y C_2: $\vec{g}(t)=\left(t,\ 2,\ t^2-3\right)$. Hallar el punto y el ángulo de intersección correspondiente.

Solución

Si p es el punto de intersección de C_1 y C_2, entonces

$p\in C_1$: $\vec{f}(t)\cap C_2$: $\vec{g}(t)\quad\Rightarrow\quad \vec{f}(t_1)=\vec{g}(t_2)$, es decir

$(e^{t_1},\ 2\operatorname{sen}(t_1+\frac{\pi}{2}),\ t_1^2-2)=(t_2,\ 2,\ t_2^2-3)$, de donde

$$\begin{cases} e^{t_1}=t_2 & \text{......(1)} \\ 2\operatorname{sen}(t_1+\frac{\pi}{2})=2 & \text{......(2)} \\ t_1^2-2=t_2^2-3 & \text{......(3)} \end{cases}$$

de la ecuación (2) se tiene: $2\operatorname{sen}(t_1+\frac{\pi}{2})=2$ entonces

$\cos t_1=0$ de donde $t_1=0$ al reemplazando en (1) ó (3) se tiene $t_2=1$, por lo tanto el punto de intersección es : $\vec{f}(0)=\vec{g}(1)$ de donde P(1,2,-2).

El ángulo de intersección, es el ángulo formado por los vectores tangente a cada curva en el punto de intersección.

Luego calculando los vectores tangentes.

$$\begin{cases} \vec{f}(t)=(e^t,2\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2}),t^2-2) \\ \vec{g}(t)=(t,2,t^2-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(t)=(e^t,-2\operatorname{sen}t,2t) \\ \vec{g}'(t)=(1,0,2t) \end{cases}$$

Luego $\vec{f}'(0)=(1,0,0)$; $\vec{g}'(1)=(1,0,2)$

Sea $\cos\alpha=\dfrac{\vec{f}'(0).\vec{g}'(1)}{\|\vec{f}'(0)\|\,\|\vec{g}'(1)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow \alpha=\arccos(\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

26) Demostrar que la pendiente de la recta tangente en $t=t_1$ a la cicloide $x=a(t-\text{sen}t)$; $y=a(1-\cos t)$ es $c\,\text{tg}(\dfrac{t_1}{2})$

Solución

Por demostrar que $m_{L_t}=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=t_1}=c\,\text{tg}(\dfrac{t_1}{2})$

$$\text{como: }\begin{cases} x=a(t-\text{sen}\,t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\\ \dfrac{dy}{dt}=a\,\text{sen}\,t\end{cases}$$

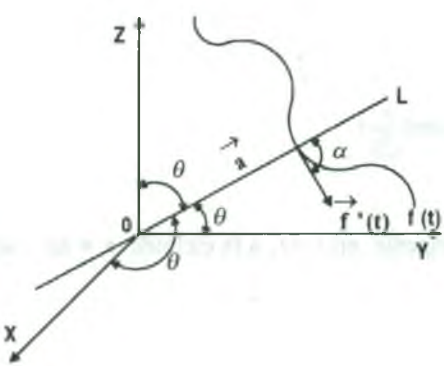
$$m_{L_t}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=t_1}=\frac{\frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_1}}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_1}}=\frac{a\,\text{sen}\,t_1}{a(1-\cos t_1)}=\frac{\text{sen}\,t_1}{1-\cos t_1}=\frac{2\,\text{sen}\frac{t_1}{2}.\cos\frac{t_1}{2}}{2\,\text{sen}^2\frac{t_1}{2}}=\frac{\cos\frac{t_1}{2}}{\text{sen}\frac{t_1}{2}}=c\,\text{tg}(\frac{t_1}{2})$$

$\therefore\quad m_{L_t}=c\,\text{tg}(\dfrac{t_1}{2})$

27) Bajo qué ángulo corta la curva $x=a(1-\cos t)$, $y=a\,\text{sen}\,t$, $z=a\,t$, a la recta que pasa por el origen y forman ángulos iguales con los tres ejes coordenados.

Solución

El ángulo buscado es el que está formado por el vector dirección de la recta L con el vector tangente a la curva en el punto de intersección, es decir:



$L=\{p_0+r\vec{a}\,/\,r\in R\}$, donde $p_0(0,0,0)$ y el vector

dirección es $\vec{a}=(\cos\theta,\cos\theta,\cos\theta)$

Sea $\vec{b}\,//\,\vec{a} \Rightarrow \vec{b}=(1,1,1) \Rightarrow \|\vec{b}\|=\sqrt{3}$

$\therefore\quad L=\{(0,0,0)+t(1,1,1)\,/\,t\in R\}$

Sea $p\in L\cap C\colon \vec{f}(t) \Rightarrow p\in L \wedge p\in C\colon \vec{f}(t)$

Si $p\in L \Rightarrow p(t,t,t)$ para algún t $\in$ R.

$$p\in C\colon \vec{f}(t) \Rightarrow \begin{cases} x=a(1-\cos t_0)=t_0 \\ y=a\operatorname{sen} t_0=t_0 \\ z=at_0=t_0 \end{cases} \Rightarrow t_0=0$$

Luego para $t_0=0$ se tiene P(0,0,0), y $\vec{f}'(t)=(a\operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ a) \Rightarrow \vec{f}'(0)=(0,a,a)$

Si $\vec{c}=\vec{f}'(0)=(0,a,a) \Rightarrow \|\vec{c}\|=\sqrt{2}a$

como $\cos\alpha=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|}=\dfrac{(1,1,1).(0,a,a)}{\sqrt{3}\sqrt{2}a}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ entonces $\therefore\quad \alpha=\arccos(\dfrac{\sqrt{6}}{3})$

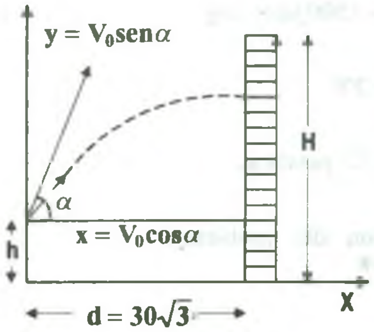
28) Un muchacho lanza una pelota con una velocidad inicial de 60 p/seg. y un ángulo de elevación de 60º hacia un muro de 50 pies de alto, que se encuentra a $30\sqrt{3}$ pies de distancia. Si la mano del muchacho se halla a 5 pies del suelo:

a) Hallar la función vectorial que describe la trayectoria de la pelota.

b) ¿Cae la pelota detrás del muro ó choca con él?. Si choca, determinar el ángulo con que choca.

Solución

Datos del problema: $V_0 = 60\ pies/seg.$, $\alpha = 60^{\circ}$, H = 50 pies



$d = 30\sqrt{3}\ pies,\quad y_0 = h = 5\ pies,\quad g = 32\ p/seg.$

$x = (v_0 \cos 60^{\circ})t \Rightarrow x = 30t$

$y = y_0 + y_0 y_1 + \dfrac{a t^2}{2}$ de donde

$y = h + v_0 \operatorname{sen} 60^{\circ} - \dfrac{g t^2}{2} = 5 + 30\sqrt{3}t - 16t^2$

a) Por lo tanto la función vectorial es: $\vec{f}(t) = (30t, 5 + 30\sqrt{3}t - 16t^2)$

b) Tenemos que: 30t = x pero para $x_0 = d = 30\sqrt{3}$. Entonces $30t = 30\sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}$

ahora como $y = 5 + 30\sqrt{3}t - 16t^2$ para $t = \sqrt{3}$, y = 5 + 90 - 48 = 47 pies.

Por lo tanto la pelota choca en el muro a 47 pies de altura, ahora para determinar el ángulo de impacto, calculamos $\vec{f}(t_0)$ con $t_0 = \sqrt{3}$ es decir: $\vec{f}'(t) = (30,\ 30\sqrt{3} - 32t)$ y,

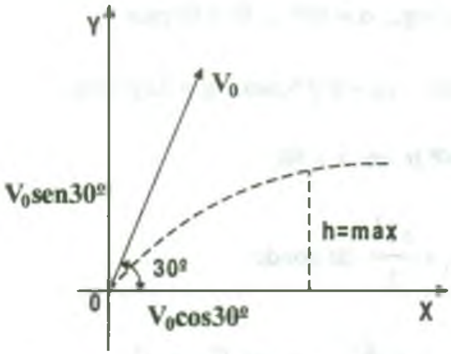
$\vec{f}'(\sqrt{3}) = (30, -2\sqrt{3})$ y como $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-\dfrac{2\sqrt{3}}{30}) = \operatorname{arctg}(-\dfrac{\sqrt{3}}{15})$

29) Un proyectil es disparado con rapidez inicial de 1,500 pies/seg. y un ángulo de elevación de 30º encuentre:

a) La velocidad en el tiempo t, **b)** Su altura máxima,

c) Su alcance, **d)** La rapidez con que choca el proyectil con el suelo.

Solución



Datos del problema:

$v_0 = 1500\, pies/seg$

$\alpha = 30^\circ$

$g = 32$ pies/seg.

por condición del problema

$$y = y_0 + v_0 y_1 - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad y_1 = \text{sen}\, 30^\circ . t$$

$$y = v_0 \,\text{sen}\, 30^\circ . t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad y = 750t - 16t^2$$

$x = v_0 \cos 30^\circ\, t = 750\sqrt{3}t$, por lo tanto: $\vec{f}(t) = \left(750\sqrt{3}t,\ 750t - 16t^2\right)$

a) $\vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = (750\sqrt{3}, 750 - 32t)$

b) Altura máxima = $y' = 750 - 32t = 0$ de donde $t = \frac{750}{32} = 23.4375$

$$y = 750t - 16t^2 \quad \Rightarrow \quad y = 750(\frac{750}{32}) - 16(\frac{750}{32})^2 = \frac{375}{32} \text{ pies de altura máxima}$$

c) Su alcance es para $t = \frac{750}{32}$. reemplazando

$$x = 750\sqrt{3}t \quad \Rightarrow x = 750\sqrt{3}(\frac{750}{32}) = 30{,}446.25 \text{ pies}$$

d) La rapidez con que choca con el suelo.

$$\| \vec{v}(t) \| = \| \vec{f}'(t) \| = \sqrt{\left(750\sqrt{3}\right)^2 + \left(750t - 16t^2\right)^2} \Rightarrow \| \vec{v}(\frac{750}{32}) \| = 756.897 \text{ pies/seg.}$$

30) Consideremos las curvas descritas por las ecuaciones

$C_1: \vec{f}(t) = (\ln(t+2),\ e^{t^2}+1,\ \frac{5}{1+t})$ y $C_2: \vec{g}(t) = (\ln 2t,\ 3t^2-1,\ \frac{5+5t}{2})$. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en cada punto de intersección de las curvas.

Solución

Calculando los puntos de intersección de las curvas.

Sea $p \in C_1: \vec{f}(t) \cap C_2: \vec{g}(t) \Rightarrow \vec{f}(t_1) = \vec{g}(t_2)$, es decir:

$(\ln(t_1+2),\ e^{t_1^2}+1,\ \frac{5}{1+t_1}) = (\ln 2t_2,\ 3t_2^2-1,\ \frac{5+5t_2}{2})$, de donde

$$\begin{cases} \ln(t_1+2) = \ln 2t_2 \\ e^{t_1^2}+1 = 3t_2^2-1 \\ \dfrac{5}{1+t_1} = \dfrac{5+5t_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+2 = 2t_2 & \ldots(1) \\ e^{t_1^2} = 3t_2^2-2 & \ldots(2) \\ \dfrac{2}{1+t_1} = 1+t_2 & \ldots(3) \end{cases}$$ de (1) se tiene $t_2 = \frac{t_1+2}{2}$ reemplazando en (3)

$$\frac{2}{1+t_1} = \frac{t_1+2}{2}+1 \Rightarrow t_1^2+5t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_1 = -5$$

para $t_1 = 0$, se tiene $t_2 = 1$ que satisface a la ecuación (2)

en cambio, $t_1 = -5$, $t_2 = 2$ no satisface a la ecuación (2), por lo tanto se considera $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ obteniendo el punto P(ln 2, 2, 5) es decir que se tiene $\vec{f}(0) = \vec{g}(1)$,

ahora calcularemos la ecuación de la recta tangente a la curva $C_1: \vec{f}(t)$ en p(ln 2, 2, 5

Luego: $L_t = \{(\ln 2, 2, 5) + t\,\vec{f}'(0) / t \in R\}$, de donde $\vec{f}'(t) = (\frac{1}{t+2},\ 2te^{t^2},\ -\frac{5}{(1+t)^2})$ com

$\vec{f}'(0) = (\frac{1}{2}, 0, -5)$ entonces: $\therefore\ L_t = \{(\ln 2, 2, 5) + t(\frac{1}{2}, 0, -5) / t \in R\}$

Calculando la recta tangente a la curva C_2: $\vec{g}(t)$.

$L_t = \{(\ln 2, 2, 5) + t\,\vec{g}\,'(1) / t \in R\}$, de donde $\vec{g}\,'(t) = (\frac{1}{t},\ 6t,\ \frac{5}{2}) \Rightarrow \vec{g}\,'(1) = (1, 6, \frac{5}{2})$

$$\therefore\quad L_t = \{(\ln 2, 2, 5) + t(1, 6, \frac{5}{2}) / t \in R\}$$

2.21 Ejercicios Propuestos.-

I.- Calcular los siguientes límites si existen

1) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{5^t - 3^t}{7^t - 8^t},\ \frac{\operatorname{tgh} t}{t})$ **Rpta.** $(\frac{\ln\frac{5}{7}}{\ln\frac{7}{8}},\ 1)$

2) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt[3]{t+1}-1},\ \frac{\sqrt[3]{t+27}-3}{\sqrt[4]{t+16}-2})$ **Rpta.** $(\frac{3}{2}, \frac{32}{27})$

3) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos t}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} t)^2}},\ (\frac{\pi}{2}-t)\operatorname{tg} t,\ \frac{1-\operatorname{sen} t}{(\frac{\pi}{2}-t)^2})$ **Rpta.** $(\frac{3}{2\sqrt{2}},\ 1,\ \frac{1}{2})$

4) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\operatorname{sen} t}{\cos t},\ \frac{1+\cos 2t}{\frac{\pi}{2}-t})$ **Rpta.** $(0,0)$

5) $\lim\limits_{t\to 1}(\frac{e^t - e}{t-1},\ \frac{\ln t}{1-t},\ 2t)$ **Rpta.** $(1, -1, 2)$

6) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\operatorname{sen} 7t}{t},\ \frac{\operatorname{sen} 5t}{\operatorname{sen} 3t},\ \frac{\operatorname{tg} 3t}{\operatorname{sen} 2t})$ **Rpta.** $(7, \frac{5}{3}, \frac{3}{2})$

7) $\lim\limits_{t\to\pi}(\frac{\operatorname{sen} t}{t-\pi},\ \frac{1+\cos t}{t},\ \frac{t}{\pi})$ **Rpta.** $(-1, 0, 1)$

8) $\lim\limits_{t\to 2}(\ln t,\ \sqrt{1+t^2},\ \frac{3t}{4-t^2})$ **Rpta.** No existe

9) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1-\cos 5t}{t^2}, \dfrac{\sqrt{1+t\,\text{sen}\,t}-1}{t^2})$ **Rpta.** $(\dfrac{25}{2}, \dfrac{1}{2})$

10) $\lim\limits_{t\to 1}(e^t, \dfrac{t^2-1}{t-1}, t^2+1)$ **Rpta.** $(e,2,2)$

11) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{t+\text{sen}\,t}{t-\text{sen}\,t}, \dfrac{\text{sen}\,3t-\text{sen}\,t}{\ln(t+1)})$ **Rpta.** $(0, 2)$

12) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1+5^t}{1-e^t}, \dfrac{\text{sen}\,2t}{\ln(1+t)})$ **Rpta.** $(\ln 5, 2)$

13) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{e^{2t}-1}{\ln(1-4t)}, \dfrac{\text{sen}^2 3t}{\ln^2(1+2t)})$ **Rpta.** $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4})$

14) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sqrt[5]{(1+t)^3}-1}{(1+t)\sqrt[3]{1+t^2}-1}, \dfrac{\sqrt[3]{8+3t}-2}{\sqrt[4]{16+5t}-2})$ **Rpta.** $(\dfrac{9}{25}, 1.6)$

15) $\lim\limits_{t\to 1}(\dfrac{t^t-1}{t\ln t}, \dfrac{\text{sen}\sqrt[3]{t}-1}{t^{2n}-1}, \dfrac{1-t^2}{\text{sen}\,\pi\, t})$

16) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{2\,\text{sen}^2 t+9\,\text{sen}^3 t}{t^2-3t^5}, \dfrac{e^{at}-e^{bt}}{\text{sen}\,at-\text{sen}\,bt}, \dfrac{1-5^t}{1-e^t})$

17) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}, \dfrac{e^t+\text{sen}\,t-1}{\ln(1+t)}, \dfrac{8^t-7^t}{6^t-5^t})$

18) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1-\cos t}{3t^2}, \dfrac{2\,\text{arcsen}\,2t}{3t}, \dfrac{1-\text{sen}(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2})}{t})$

19) $\lim\limits_{t\to 3}(\left[\!\left|5t+\dfrac{1}{2}\right|\!\right]-t^2, (t-3)\ln(t-3), \dfrac{t-3}{t^2-9})$

20) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\cos t-\sqrt{1-t}}{t}, \dfrac{e^{2t}-e^t}{\text{sen}\,2t-\text{sen}\,t}, \dfrac{\text{sen}\,3t-\text{sen}\,t}{\ln(1+t)})$

II.-

1) Calcular si existe $\lim\limits_{t\to 3}(|t|,\ t[|t|],\ \dfrac{1}{\sqrt{t+3}})$

2) Si $\vec{f}(t)=(t+\left[\left|\dfrac{t}{3}\right|\right],\ t+4,\ 7)$ determinar $\lim\limits_{t\to 6^-}\vec{f}(t)$ y $\lim\limits_{t\to 6^+}\vec{f}(t)$

3) Calcular si existe $\lim\limits_{t\to 2}\left([|t|],\ \sqrt{t+1},\ 4t\right)$

4) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n,b_n\right)$, donde $a_n=\dfrac{\ln(\frac{1+20n}{n})}{1+20n}+\dfrac{\ln(\frac{2+20n}{n})}{2+20n}+\dots+\dfrac{\ln(21)}{n+20n}$

$$b_n=(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1})\operatorname{sen}^{3/2}(\frac{2}{n})$$

Rpta. $(\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{21}{20})\ln 420,\ \dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2})$

5) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n)$, donde $a_n=\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{5}+\dots+\dfrac{n+1}{n+2})$,

$$b_n=\frac{1}{5n}(2^{1/2}+2^{3/4}+2^{7/8}+\dots+2^{\frac{2^n-1}{2^n}})$$

Rpta. $(1,\ \dfrac{2}{5})$

6) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n)$, donde $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1+9n^2}}(\dfrac{5n^2}{4+n}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{7}+\dots+\dfrac{2n}{3n+1})$

$$b_n=\sqrt[n]{\frac{n^2}{3n^2+2n+1}(\frac{1}{6})(\frac{3}{12})\dots(\frac{2n-1}{6n})}$$

Rpta. $(\dfrac{17}{9},\ \dfrac{1}{3})$

7) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde $a_n = \dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{2n^4+n-1}$,

$$b_n = \frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}$$

Rpta. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$

8) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{-1/2}, \quad b_n = \sqrt[n]{\mu_1^{\mu_1}.\mu_2^{\mu_2}\ldots\mu_n^{\mu_n}} \quad \text{con } \mu_p = 1+\frac{p}{n}$$

Rpta. $(\ln(1+\sqrt{2}), 4e^{-3/4})$

9) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{k^2+n^2}$,

$$b_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+b)(an+2b)\ldots(an+nb)}$$

Rpta. $(\frac{\pi}{4}, \dfrac{(a+b)^{1+\frac{a}{b}}}{e.a^{a/b}})$

10) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n, b_n)$, donde

$$a_n = \frac{n}{1+2n+2n^2}+\frac{n}{4+4n+2n^2}+\frac{n}{9+6n+2n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+2n(n)+2n^2}$$

$$b_n = \text{sen}(2\pi\cos\frac{2}{n})(\frac{\ln 2}{\ln 3}+\frac{\ln 3}{\ln 4}+\ldots+\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)})$$

Rpta. $(\frac{\pi}{4}-\text{arctg}\,2, 1)$

11) Usando la definición de límite demostrar que:

a) $\lim\limits_{t\to -1} (t^2-5,\, t^4,\, 1-2t) = (-4,1,3)$

b) $\lim\limits_{t\to 1} (3t^2-t^3,\, 3t^2,\, 3t+t^3) = (2,3,4)$

c) $\lim\limits_{t\to 1} (t,\, \sqrt{t(2-t)},\, \sqrt{2(2-t)}) = (1,1,\sqrt{2})$

d) $\lim\limits_{t\to 2} (\dfrac{1}{1-t^3},\, \sqrt{5t-1},\, \dfrac{t}{\sqrt{2}}) = (-\dfrac{1}{7}, 3, \dfrac{2}{\sqrt{2}})$

e) $\lim\limits_{t\to 0} (t^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{t},\, t^3\cos\dfrac{1}{t},\, t^5) = (0,0,0)$

f) $\lim\limits_{t\to t_0} (\operatorname{sen}^4 at,\, e^t,\, \cos^4 bt) = (\operatorname{sen}^4 at_0,\, e^{t_0},\, \cos^4 bt_0)$

12) Analizar si los siguientes límites existen:

a) $\lim\limits_{t\to 1} (\dfrac{2}{2-t},\, \left|t^2-[|t+1|]\right|,\, t^3)$

b) $\lim\limits_{t\to 1/2} (t^4, \sqrt{5t^2+1},\, \dfrac{t^4 \operatorname{sen}^3(\pi\,[|t|])}{t^6+1})$

c) $\lim\limits_{t\to 3} (\sqrt{t^2-1},\, \left[\left|5t+\dfrac{1}{2}\right|\right]-t,\, 1-\sqrt{t})$

d) $\lim\limits_{t\to 4} (|2t+1|[|t-3|],\, \sqrt{t^3},\, \dfrac{1}{\sqrt{5-t}})$

e) $\lim\limits_{t\to +2} (t[|t|],\, \dfrac{\sqrt{2t-1}}{[|1-t|]},\, [|t^4|])$

f) $\lim\limits_{t\to 1} (\dfrac{1}{2-t},\, \dfrac{\sqrt[4]{1-[|t|]}}{t[|2t-1|]},\, [|t|])$

III.- Analizar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales:

1) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(t, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}) & si\ t\neq 0\\ (0, 1) & si\ t=0\end{cases}$

2) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(\dfrac{t^2-1}{t-1},\ t^3) & si\ t\neq 1\\ (2, 1) & si\ t=1\end{cases}$

3) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(t^2-e, \dfrac{1-\cos t}{t}), & si\ t<0\\ (-(1+t)^{1/t}, \dfrac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t^2}), & si\ 0<t<1\\ (2, -\sqrt{2}), & si\ t>1\end{cases}$

4) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(\dfrac{2\sqrt{3}}{5}t, \dfrac{\operatorname{sen} 4\sqrt{3}t}{4\sqrt{3}t}) & si\ t\in<0,\pi>\\ (0, 1) & si\ t=0\end{cases}$

5) $\vec{f}(t)=\begin{cases}([\![t]\!], \dfrac{1}{[\![t]\!]},\ t) & si\ [\![t]\!]\ es\ par\\ (2t-\left[|t+1|,\ t,\ \dfrac{1}{|t|}\right]) & si\ [\![t]\!]\ es\ impar\end{cases}$

6) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(\operatorname{sen} t, \dfrac{t}{1-t}, 2t) & si\ t\in[0,1>\\ (-1, 0, 3) & si\ t\in[1,2]\end{cases}$

7) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(\dfrac{2\arcsen t}{3t},\ t\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}) & si\ t\in<0,1>\\ (\dfrac{2}{3}, 0, 2), & si\ t\in[1, 2]\end{cases}$

8) $\vec{f}(t)=\begin{cases}(4t^4+5, \dfrac{\arcsen t}{t},\ \operatorname{sen} t.\operatorname{sen}\dfrac{1}{t}) & si\ t\neq 0\\ (5, 0,0), & si\ t=0\end{cases}$

9) $\vec{f}(t)=(\dfrac{t-2}{|t-2|(t-1)}, \dfrac{1}{\ln(t^2-[\![t]\!])})$ en $t_0=2$

10) $\vec{f}(t) = ([\![t]\!] + [\![4-t]\!],\ \dfrac{t^2-3}{t^4+t^2+1}),\quad t \in \langle 2,4 \rangle$

11) $\vec{f}(t) = ([\![t-3]\!],\ 5^t,\ e^{5t}),\quad t \in R$

12) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (3t,\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 t - \cos t(1-\cos t)}{t^2}) & si\ 0 < t < \pi \\ (0,\ 0,\ 5) & si\ t = 0 \end{cases}$

13) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (t \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{t},\ \dfrac{2 \operatorname{arcsen} t}{3t},\ \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}), & 0 < t < 1 \\ (0,\ \dfrac{2}{3},\ 3) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

14) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t},\ \dfrac{e^t + \operatorname{sen} t - 1}{\ln(1+t)},\ \dfrac{\operatorname{arcsen} 2t}{t}) & 0 < t < 1 \\ (\dfrac{1}{3},\ 2,\ 1)\ , & t = 0 \end{cases}$

15) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (\dfrac{t^2-1}{\operatorname{sen}(t-1)},\ \dfrac{\sqrt{t}-1}{\operatorname{sen}(t-1)},\ \dfrac{\sqrt[3]{t}-\sqrt[4]{t}}{1-t})\ , & t \ne 1 \\ (1,\ \dfrac{1}{2},\ -1)\ , & t = 1 \end{cases}$

IV.- Hallar los puntos, si es que existen, donde las siguientes funciones vectoriales no son continuas.

1) $\vec{f}(t) = \left(t,\ t,\ [\![2t]\!]\right);\quad t \in [0,8]$

2) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (t,\ \dfrac{\operatorname{sen} t}{t})\ , & t \in \langle 0,\pi] \\ (0,\ 1)\ , & t = 0 \end{cases}$

3) $\vec{f}(t) = \begin{cases} (-t,\ -2t,\ t) & si\quad t \in [-2,0] \\ (t^{1/3}(t-2)^{2/3},\ \dfrac{t}{1+t^2},\ t^2)\ , & t \in \langle 0,2] \end{cases}$

4) $$\vec{f}(t)=\begin{cases}((t+3)^{1/3}(t-2)^{2/3},\ \dfrac{t+3}{t^2+2},\ 2t+6)\ , & t\le -3\\ (\dfrac{t^2+2t-3}{t^2+1},\ (t-1)\ln(t+4),\ \sqrt[5]{(t-1)(t+4)^4})\ , & -3<t\le 1\\ (3t-3,\ e^t-e,\ \operatorname{sen}\pi t)\ , & t>1\end{cases}$$

V.-

1) Hallar el punto de intersección de las curvas dadas por:

a) $\vec{f}(t)=(t^2,\ \frac{t}{3},\ \ln t),\quad \vec{g}(t)=(e^{t-2},\ \frac{1}{t+1},\ \ln(t+1))$

b) $\vec{f}(t)=(t+1, e^{t+1},\ t^2+1),\quad \vec{g}(t)=(\frac{3}{t+1},\ e^{4t},\ 2t+1),\quad t\ge 0$

c) $\vec{f}(t)=(e^{2t}, 2\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2}), t^2-2),\quad \vec{g}(t)=(t,2,t^2-3)$

d) $\vec{f}(t)=(\cos\pi t,\ t^2-2t+5,\ 5e^t),\ 0\le t\le 1$

$\vec{g}(t)=(\cos\pi t,\ t+5,\ 4+\cos t),\ 0\le t\le 1$

2) Determinar el punto de intersección de la recta $\vec{f}(t)=(9+3t,\ -10-4t, 7+2t)$ con el plano YZ.

Rpta. (0,2,1)

3) Determinar los puntos en que la curva $\vec{f}(t)=(t^2-1,\ t^2+1,\ 3t)$ corta al plano $3x-2y-z+7=0$.

Rpta. A(3,5,6) , B(0,2,3)

4) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\vec{f}(t)=(\operatorname{sen}t, 2\cos t, 2\operatorname{sen}t-1)$ en el punto de intersección de la curva $\vec{g}(t)=(\cos t,\ 2\operatorname{sen}t,\ \cos^2 t)$.

5) Formas las ecuaciones de la tangente a la curva $x = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$, $y = e^t(\operatorname{sen} t - \cos t)$, $z = e^t$ en el punto t = 0.

Rpta. $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{1} \quad \wedge \quad y = -1$

6) En la línea $\vec{f}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ e^t)$. Hallar el punto en el cual la tangente es paralela al plano $\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

Rpta. $P(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ e^{\pi/6})$

7) Hallar en la curva C: $x = t+1$, $y = t^2+1$, $z = t^3$ el punto cuya tangente es paralela al plano x + 2y + z - 1 = 0.

Rpta. $A(0,2,-1), B(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{10}{9}, -\dfrac{1}{27})$

8) Calcular $\vec{a}.\vec{b}$, donde $\vec{a} = (2,-4,1)$ y $\vec{b} = \int_0^1 (t\,e^t,\ t\operatorname{senh} 2t,\ 2t\,e^{-2t})dt$

Rpta. 0

9) Dado $\vec{r} = \vec{r}(u)$, u = φ(x) expresar las derivadas $\dfrac{d\vec{r}}{dx}, \dfrac{d^2\vec{r}}{dx^2}, \dfrac{d^3\vec{r}}{dx^3}$ por medio de $\dfrac{d\vec{r}}{du}, \dfrac{d^2\vec{r}}{du^2}, \dfrac{d^3\vec{r}}{du^3}$.

10) Dado $\vec{r}(t) = \vec{a}.\cos\omega t + \vec{b}\operatorname{sen}\omega t$, donde $\vec{a}, \vec{b}$ son vectores constantes, Demostrar que:

a) $\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \omega\,\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = \vec{0}$.

11) Demostrar que si $\vec{r}(t) = \vec{a}\,e^{-\omega t} + \vec{b}\,e^{-\omega t}$, donde $\vec{a}, \vec{b}$ son vectores constantes. Se tiene: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = \vec{0}$.

12) Sea $\vec{\alpha}$ una función vectorial definida por: $\vec{\alpha}(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$, Demostrar que el ángulo formado por $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\alpha}'(t)$ es constante, esto es independiente de t.

13) Sea $\vec{\alpha}(t)$ el vector de posición de una partícula en movimiento, donde t (t >0) es el tiempo, describir la forma geométrica de la trayectoria y encontrar el vector velocidad, aceleración y rapidez del movimiento de:

a) $\vec{\alpha}(t) = (10\cos 2\pi t, 10\,\text{sen}\, 2\pi t)$ en $t = \frac{\pi}{4}$

b) $\vec{\alpha}(t) = (1+t^3, 2t^3, 2-t^3)$ en t = 1

c) $\vec{\alpha}(t) = (\cos t^2, \text{sen}\, t^2, 2\,\text{sen}\, 3t)$

d) $\vec{\alpha}(t) = (2+3\cos 2t, 4-3\,\text{sen}\, 2t)$

14) Hallar el ángulo con que se cortan las curvas cuyas ecuaciones son: $\vec{\alpha}(t) = (1-\cos t, 4\,\text{sen}\frac{t}{2}, t-\text{sen}\, t)$ $\vec{g}(t) = (\text{sen}\, t, 1-\cos t, t)$

15) Si C tiene la representación paramétrica $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, \frac{[|2t|]}{\pi})$, $t \in [0, 4\pi]$. Determinar todos los puntos en donde C tiene un vector tangente paralelo a uno de los planos coordenados.

16) ¿Qué ángulo forma con el plano XY la tangente a la hélice x = cos t, y = sen t, $z = 2\sqrt{2}t$ en el punto $t = \frac{\pi}{4}$? **Rpta.** 70º23'

17) En el tiempo t una partícula tiene el vector posición $\vec{\alpha}(t) = (t+\cos t, t+\text{sen}\, t)$, Demostrar que: $\vec{\alpha}(t)$ tiene una magnitud constante.

18) Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que un vector $\vec{r}(t)$ no nulo, tenga módulo constante es que $\vec{r}(t).\vec{r}\,'(t)=\vec{r}(t).\dfrac{d\,\vec{r}(t)}{dt}=0$.

19) Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que un vector $\vec{r}(t)$, no nulo, tenga dirección constante es que: $\vec{r}(t)x\,\vec{r}\,'(t)=\vec{r}(t)x\dfrac{d\,\vec{r}(t)}{dt}=0$

20) Si C tiene la representación paramétrica $\vec{\alpha}(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\left[\!\left[\left|\dfrac{2t}{\pi}\right|\right]\!\right])$, t $\in$ [0, 4π]. Determinar todos los puntos en donde C tiene un vector tangente paralelo a uno de los planos coordenados.

21) Sea $\vec{\alpha}(t)$ el vector de posición de una partícula que se desplaza sobre la esfera de centro en el origen y radio r. Demostrar que el vector velocidad es perpendicular a $\vec{\alpha}(t)$ en cada instante.

22) Un proyectil se lanza con un ángulo de elevación de $\dfrac{\pi}{6}$ radianes y con velocidad inicial de 400 pies/seg. Determinar una función $\vec{f}(t)$ que describe la posición del proyectil en función del tiempo. Hallar así mismo el tiempo del recorrido.

23) Una partícula P se mueve sobre la curva descrita por la función $\vec{f}(u)=(2u,\ u^2,\ u^3)$, si en el instante t = 0 se encuentra en el punto (2,1,1) y se mueve de tal manera que la tercera coordenada de su posición se incrementa a razón de 2 unidades por segundo. Hallar el vector velocidad de P cuando se encuentra en el punto (4,4,8) ¿Qué tiempo tardará la partícula en llegar a este punto?.

24) Sea C: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, tal que $\vec{r}(t) \neq 0$ y $\vec{r}'(t)$ es paralelo a $\vec{r}(t)$. Demostrar que el vector $\dfrac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$ es constante y que la curva descrita por $\vec{r}$ está contenida en la recta que pasa por el origen de coordenadas.

25) Averiguar si la curva descrita por $\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} 2t, 2\operatorname{sen}^2 t, 2\cos t)$ yace en una esfera con centro en el origen de R^3. Encuentre el módulo de $\vec{v}(t)$ y demuestre que la proyección de éste vector en el plano XY tiene módulo constante.

26) Una partícula parte del punto (2,0) en el instante t = 1 y se mueve sobre la curva $x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$ en sentido antihorario. Volviendo a su posición inicial. Si su rapidez es constante e igual a 4, definir una función vectorial que describe el movimiento.

27) Un punto P se mueve con una velocidad constante de 13 pies/seg. en sentido horario alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ donde X e Y están expresadas en pies, cuando P pasa por el punto (4,3). Hallar la velocidad angular del segmento $\overrightarrow{AP}$ siendo A(0,2).

28) Calcular la derivada de cada una de las funciones vectoriales en $t_0 = 0$

a) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(t^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{t}, \dfrac{t}{1+e^{1/t}}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

b) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(t^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{t}, 1+t^2\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (1,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

c) $\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(e^{2t}, t^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (1,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

29) Sea $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$ una función vectorial, tal que existen $\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}'''$. Demostrar que:

a) $\frac{d}{dt}\left[\vec{f}\ \vec{f}''\ \vec{f}'''\right] = \left[\vec{f}\ \vec{f}'\ \vec{f}'''\right]$ **b)** $\vec{f}.\vec{f}' = \left\|\vec{f}\right\|\frac{d}{dt}\left\|\vec{f}\right\|$

30) ¿Si $\vec{f}(t) = (|2t+1|[|t-3|], \sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{5-t}})$, existe $\vec{f}'(4)$?

31) Si $\vec{f}(t) = ((1+t^2)\cos t, e^{at}\,\text{sen}(bt+c), \frac{1+t}{\sqrt{t}})$, calcular $\vec{f}^{(n)}(t)$

32) Sea $\vec{f}: R \longrightarrow R^3$ tal que $f_1(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$, $f_2(t) = \text{sen}^2 t$, $f_3(t) = \text{arctg}\, t$,

calcular $\vec{f}^{(n)}(0)$ si existe. Sug: Encontrar una fórmula de recurrencia para todo t en $\vec{f}^{(n)}(t)$ y luego tome límite cuando $t \to 0$.

33) Sea $\vec{f}(t) = (e^t, te^t, e^t)$, verificar que $\vec{T}(0)$ es ortogonal al vector (-1,0,1).

34) Hallar $\vec{f}'(t)$ de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\vec{f}(t) = (\text{arcsen}\, t,\ \ln(1+5t),\ t^2)$

b) $\vec{f}(t) = (\cos nt,\ \text{senh}\, 4t,\ e^{-5t})$

c) $\vec{f}(t) = (\ln(1+t^2),\ \frac{1}{1+t^2},\ \text{arctg}\, t)$

35) Para $t \geq 0$, sea $\vec{f}(t) = (2t, \sqrt{t}, e^t)$, $\vec{g}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 1-t)$, $\varphi(t) = e^{-2t}$, calcular:

a) $(\vec{f}.\vec{g})'$ b) $(\vec{f} \times \vec{g})'$ c) $(\varphi \vec{f})'$

d) $(\vec{f} o \varphi)'$ e) $\vec{f}(0) + \vec{g}'(\frac{\pi}{2})$

36) Hallar el punto donde se cortan las curvas:

$C_1: \ \vec{\alpha}(t) = (e^t, 2\,\text{sen}(t+\frac{\pi}{2}), t^2-2)$

$C_2: \ \vec{\alpha}(t) = (t, 2, t^2-3)$, así como el ángulo de intersección.

Rpta. (1,2,-2), $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

37) Dada la curva C, descrita por $\vec{f}: I \subseteq R \longrightarrow R^3$, tal que $\vec{f}'(t) = \vec{a} \times \vec{f}(t)$ y $\vec{f}(0) = \vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores unitarios. Hallar el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tal que la curvatura en t = 0 sea mínima.

38) Considerar la hélice descrita por la función vectorial $\vec{f}(t) = (a\cos\omega t, a\,\text{sen}\,\omega, b\omega t)$, ω > 0. Demostrar que la recta tangente forma un ángulo constante con el eje Z y que el coseno de dicho ángulo es $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, además demostrar que los vectores velocidad y aceleración tiene longitudes constantes y que $\frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{a}{a^2+b^2}$, $\vec{v}$ = velocidad, $\vec{a}$ = aceleración.

2.22 Integral Indefinida.-

Definición.- Si $\vec{f}: I \longrightarrow R^n$ es una función vectorial de variable real dado por $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$, la integral indefinida de $\vec{f}(t)$ es dado por:

$$\int \vec{f}(t)dt = (\int f_1(t)dt + c_1, \int f_2(t)dt + c_2, \ldots, \int f_n(t)dt + c_n)$$

$$= (\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt, \ldots, \int f_n(t)dt) + (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \vec{Q}(t) + \vec{c}$$

de donde $D_t \vec{Q}(t) = \vec{f}(t)$, para el caso de las funciones vectoriales de $\vec{f}: I \longrightarrow R^3$ dado por $\vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$, la integral indefinida es dada por:

$$\boxed{\int \vec{f}(t)dt = \left(\int f_1(t)dt + c_1\right)\vec{i} + \left(\int f_2(t)dt + c_2\right)\vec{j} + \left(\int f_3(t)dt + c_3\right)\vec{k}}$$

Observaciones.-

1) $$D_t \int \vec{f}(t)dt = (D_t(\int f_1(t)dt + c_1)\,\vec{i} + D_t(\int f_2(t)dt + c_2)\,\vec{j} + D_t(\int f_3(t)dt + c_3)\,\vec{k})$$

$$= f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k} = \vec{f}(t)$$

2) Las integrales $\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt$ y $\int f_3(t)dt$ tienen por constante de integración a c_1, c_2, c_3 respectivamente que al ser multiplicado por $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ se obtiene un vector constante al cual denotaremos por $\vec{c}$ por lo tanto $\int \vec{f}(t)dt = \vec{Q}(t) + \vec{c}$ donde $D_t \vec{Q}(t) = \vec{f}(t)$.

2.23 Propiedades de la Integral Indefinida.-

Consideremos dos funciones vectoriales $\vec{f}(t)$ y $\vec{g}(t)$, $\alpha \in R$ y $\vec{c}$ un vector constante, entonces:

1. $\int \alpha.\vec{f}(t)dt = \alpha \int \vec{f}(t)dt$

2. $\int \vec{c}.\vec{f}(t)dt = \vec{c}.\int \vec{f}(t)dt$

3. $\int (\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t))dt = \int \vec{f}(t)dt \pm \int \vec{g}(t)dt$

4. $\| \int \vec{f}(t)dt \| \leq \int \| \vec{f}(t) \| dt$

Ejemplo.- Encontrar la función vectorial más general cuya derivada es

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{1+t^2}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j} + c\,\mathrm{tg}\,t.\,\vec{k}$$

<u>**Solución**</u>

$$D_t \vec{f}(t) = \vec{R}(t) \Rightarrow \vec{f}(t) = \int \vec{R}(t)dt + \vec{c} = \int \left(\frac{1}{1+t^2}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j} + c\,\mathrm{tg}\,t\,\vec{k}\right)dt + \vec{c}$$

$$\vec{f}(t) = arc.\mathrm{tg}.t.\,\vec{i} + arc.\mathrm{sen}.t.\,\vec{j} + \ln(\mathrm{sen}.t)\,\vec{k} + \vec{c}$$

2.24 Integral Definida.-

Definición.- Consideremos una función vectorial $\vec{f}:[a,b]\longrightarrow R^n$, definida por: $\vec{f}(t)=\left(f_1(t),\ f_2(t),\dots,f_n(t)\right)$ entonces la integral definida de $\vec{f}(t)$ sobre el intervalo cerrado [a, b] está dado por:

$$\boxed{\int_a^b \vec{f}(t)dt=(\int_a^b f_1(t)dt,\int_a^b f_2(t)dt,\dots,\int_a^b f_n(t)dt)}$$

La integral $\int_a^b \vec{f}(t)dt$ siempre existe si cada uno de las integrales $\int_a^b f_i(t)dt$, i=1,2,3..,n existen.

En particular, si $\vec{f}(t)$ es continua en [a, b] entonces $\int_a^b \vec{f}(t)dt$ existe.

El primer teorema fundamental del cálculo para funciones reales de variable real: "si f es continua sobre el intervalo [a,b] y a, t $\in$ [a,b] entonces $D_t\int_a^t f(t)dt=f(t)$", puede extenderse a funciones vectoriales de variable real.

2.25 Teorema.-

Si $\vec{f}:[a,b]\longrightarrow R^n$ es una función vectorial de variable real continua sobre el intervalo [a,b] y t $\in$[a,b] entonces:

$$D_t\int_a^t \vec{f}(t)dt=\vec{f}(t),\quad \forall\ t\in[a,b]$$

<u>Demostración</u>

Aplicando el primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes.

$$D_t \int_a^t \vec{f}(t)dt = D_t(\int_a^t f_1(t)dt, \int_a^t f_2(t)dt, ..., \int_a^t f_n(t)dt)$$

$$= (D_t \int_a^t f_1(t)dt, D_t \int_a^t f_2(t)dt, ..., D_t \int_a^t f_n(t)dt) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) = \vec{f}(t)$$

$$\therefore \ D_t \int_a^t \vec{f}(t)dt = \vec{f}(t), \qquad \forall \ t \in [a,b]$$

El segundo teorema fundamental del cálculo para funciones reales de variable real: "Si F' es continua sobre un intervalo [a,b] entonces $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ ", puede extenderse a funciones vectoriales de variable real.

2.26 Teorema.-

Si $\vec{F}: [a,b] \longrightarrow R^n$, tiene derivada continua sobre el intervalo [a,b] entonces:

$$\int_a^b \vec{F}'(t)dt = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$$

Demostración

Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes

$$\int_a^b \vec{F}'(t)dt = (\int_a^b F_1'(t)dt, \int_a^b F_2'(t)dt, ..., \int_a^b F_n'(t)dt)$$

$$= \left(F_1(b) - F_1(a), \ F_2(b) - F_2(a), ..., \ F_n(b) - F_n(a)\right)$$

$$= \left(F_1(b), \ F_2(b), ..., F_n(b)\right) - \left(F_1(a), \ F_2(a), ..., F_n(a)\right) = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$$

Ejemplo.- Calcular las siguientes integrales.

1) $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t)dt$

Solución

$$\int_0^{\pi/4}(\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ \operatorname{tg} t)dt = (\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen} t\, dt,\ \int_0^{\pi/4}\cos t\, dt,\ \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} t\, dt) = (-\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ \ln\sec t)\Big/_0^{\pi/4}$$

$$= (-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ln\sqrt{2}) - (-1,0,0) = (1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ln\sqrt{2})$$

2) $\int_2^4 (\frac{t}{1+t^2},\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ 4t^3)dt$

Solución

$$\int_2^4 (\frac{t}{1+t^2},\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ 4t^3)dt = (\int_2^4 \frac{t\,dt}{1+t^2},\ \int_2^4 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}},\ \int_2^4 4t^3\,dt)$$

$$= (\frac{1}{2}\ln(1+t^2),\ \sqrt{1+t^2},\ t^4)\Big/_2^4$$

$$= (\frac{1}{2}\ln 17,\ \sqrt{17},\ 256) - (\frac{1}{2}\ln 5,\ \sqrt{5},\ 16) = (\frac{1}{2}\ln\frac{17}{5},\ \sqrt{17}-\sqrt{5},\ 240)$$

2.27 Propiedades de la Integral Definida.-

1) Sean $\vec{f}, \vec{g}: [a,b] \longrightarrow R^n$ funciones vectoriales de variable real integrable, entonces la función $\alpha.\vec{f}(t) \pm \beta\,\vec{g}(t)$, $\alpha, \beta \in R$ es integrable en [a,b] y

$$\boxed{\int_a^b (\alpha\,\vec{f}(t) \pm \beta\,\vec{g}(t))dt = \alpha\int_a^b \vec{f}(t)dt \pm \beta\int_a^b \vec{g}(t)dt}$$

2) Si $\vec{f}: [a,b] \longrightarrow R^n$ es una función vectorial de variable real y $\vec{c}$ es un vector constante entonces.

a) $\boxed{\int_a^b \vec{c}\,.\,\vec{f}(t)dt = \vec{c}\,.\int_a^b \vec{f}(t)dt}$ **b)** $\boxed{\int_a^b \vec{c}\,x\,\vec{f}(t)dt = \vec{c}\,x\int_a^b \vec{f}(t)dt}$

3) Si $\vec{f}: [a,b] \longrightarrow R^n$ es una función vectorial de variable real y $\|\vec{f}(t)\|$ es integrable en [a,b], entonces:

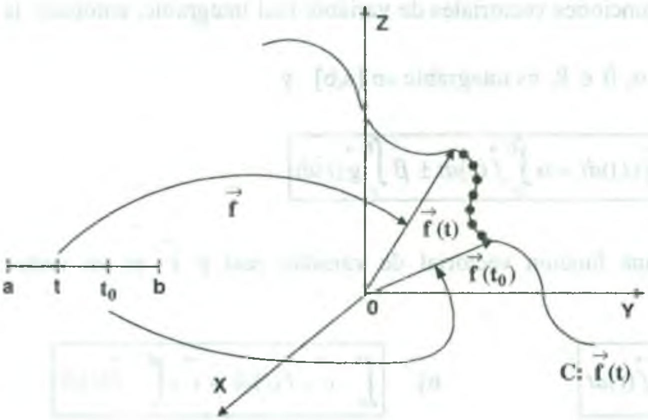
$$\boxed{\|\int_a^b \vec{f}(t)dt\| \le \int_a^b \|\vec{f}(t)\|\,dt}$$

2.28 Curvas.-

Existen muchas formas de definir una curva, así por ejemplo podemos definir a una curva como el rango de una función vectorial de variable real, también se puede definir como la trayectoria de una partícula en movimiento, por lo tanto para nuestro estudio a una curva lo representaremos por medio de una función vectorial $\vec{f}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, al cual denotaremos por $C\colon \vec{f}(t)$, donde cada valor de t_0 de t le corresponde un punto de la curva C cuyo vector de posición es $\vec{f}(t_0)$ es decir:

$$\vec{f}(t_0) = x(t_0)\,\vec{i} + y(t_0)\,\vec{j} + z(t_0)\,\vec{k} = \big(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0)\big)$$

Observación.- La pregunta que se pueden hacer es como una función Vectorial de Variable Real donde los elementos de su rango son Vectores pueden generar una grafica (Curva).



En realidad al trasladar un elemento $t \in D_{\vec{f}}$ vía $\vec{f}$ a R^3 y transformado por la Regla de Correspondencia en un vector con origen en (0,0,0) de modo que su extremo se encuentra en la curva, el "Paso" de este vector generara un punto en la curva de esta manera la traza de la Curva estará formado por las "huellas" de todos los vectores obtenidos al ser trasladados del $D_{\vec{f}}$ (imágenes de f).

También a una curva C, se puede definir por medio de las ecuaciones.

$$\boxed{C\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\quad t \in I}$$

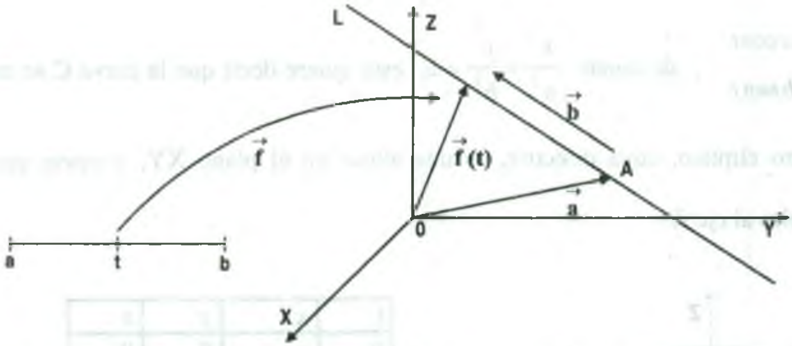
Llamadas ecuaciones paramétricas de la curva C donde la variable t se denomina parámetro.

Ejemplo.-

1) Cualquier recta L puede representarse en la forma:

$$\vec{f}(t)=\vec{a}+t\,\vec{b}=\left(a_1+b_1t\right)\vec{i}+\left(a_2+b_2t\right)\vec{j}+\left(a_3+b_3t\right)\vec{k}$$

donde $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ son vectores constantes y se dice que la recta L pasa por el punto $A\left(a_1,a_2,a_3\right)$ cuyo vector de posición es $\vec{a}$ y tiene la dirección del vector $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

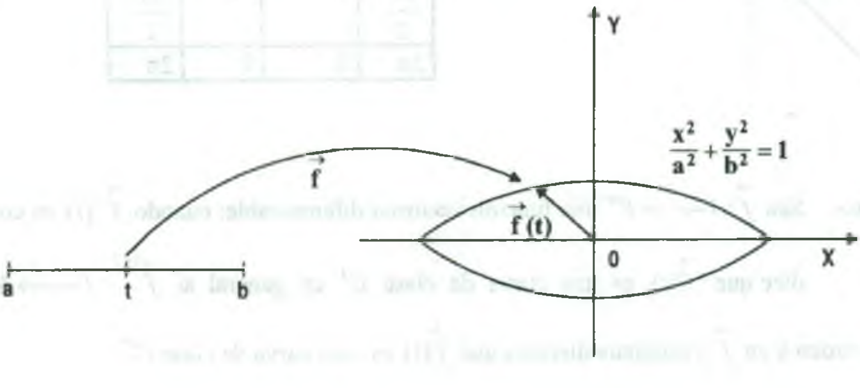


2) Discutir la gráfica de la función vectorial. $\vec{f}(t)=a.\text{sen}\,t\ \vec{i}+b.\cos t\ \vec{j}$

Solución

Las ecuaciones paramétricas de $\vec{f}(t)$ son:

$\begin{cases} x=a\,\text{sen}\,t \\ y=b\cos t\end{cases}$, de donde $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, esta ecuación nos representa una elipse.

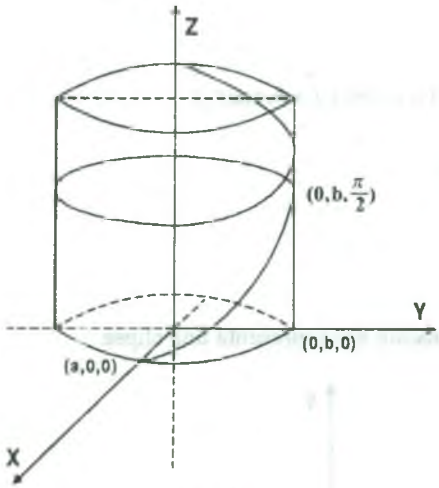


3) Discutir la gráfica de la función vectorial. $\vec{f}(t) = a.\cos t\,\vec{i} + b\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$

Solución

Las ecuaciones paramétricas de la curva son: $C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \\ z = t \end{cases}$, $t \in R$

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases}$, de donde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, esto quiere decir que la curva C se encuentra en el cilindro elíptico, cuya directriz, es una elipse en el plano XY, y cuyas generatrices son paralelas al eje Z.



t	x	y	z
0	a	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	b	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
π	-a	0	π
$\frac{3\pi}{2}$	0	-b	$\frac{3\pi}{2}$
2π	0	0	2π

Observación.- Sea $\vec{f}: I \longrightarrow R^n$ una función vectorial diferenciable, cuando $\vec{f}'(t)$ es continua se dice que $\vec{f}(t)$ es una curva de clase C^1 en general si $\vec{f}^{(k)}: I \longrightarrow R^n$ es derivable de orden k en $\vec{f}$ y continua diremos que $\vec{f}(t)$ es una curva de clase C^k.

Teorema.- Si $\vec{f}, \vec{g}: [a,b] \longrightarrow R^n$ son funciones vectoriales de clase C^1, entonces:

$$\int_a^b \vec{f}(t).\vec{g}'(t)dt = \vec{f}(t).\vec{g}(t)\Big/_a^b - \int_a^b \vec{f}'(t)\,\vec{g}(t)dt$$

Demostración

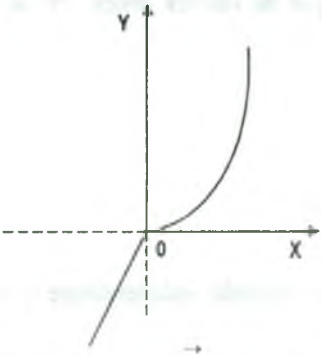
$$\begin{cases} u = \vec{f}(t) \\ dv = \vec{g}'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \vec{f}'(t)dt \\ v = \vec{g}(t) \end{cases}$$

$$\int_a^b \vec{f}(t).\vec{g}'(t)dt = \vec{f}(t)\,\vec{g}(t)\Big/_a^b - \int_a^b \vec{g}(t).\vec{f}'(t)dt$$

Definición.- Se dice que una curva $C \subset R^3$ es una curva parametrizada, si existe una función vectorial $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$, a la función vectorial $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ se denomina parametrización de la curva C.

Ejemplo.- La curva $\vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow R^2$, definida por $\vec{\alpha}(t) = (a.\cos t,\ b\,\text{sen}\,t)$ es una curva parametrizada de la curva $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo.- ¿La curva C dada por $C: y = f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & t > 0 \end{cases}$ es una curva parametrizada?



Solución

Si x ≤ 0, para x = t, y = 2t, Luego $\vec{\alpha}(t) = (t, 2t)$, t ≤ 0

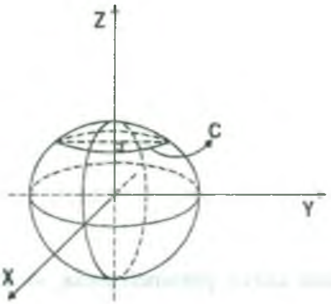
x > 0, para x = t, $y = \frac{t^2}{2}$, luego

$\vec{\alpha}(t) = (t, \frac{t^2}{2})$, t > 0

Luego la curva $\vec{\alpha}: R \longrightarrow R^2$ definida por $\vec{\alpha}(t) = \begin{cases} (t, 2t), & t \ge 0 \\ (t, \frac{t^2}{2}), & t < 0 \end{cases}$ es una parametrización de la curva C.

Ejemplo.- ¿La curva C dada por $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z=3 \end{cases}$ es una curva parametrizada?

Solución



Si proyectando al plano XY, se tiene:

$C:\ x^2+y^2=25-9=16$

$C:\ x^2+y^2=16$

parametrizando C se tiene.

x = 4 cos t, y = 4 sen t, $0 \le t \le 2\pi$

Luego $\exists\ \vec{\alpha}:[0,2\pi] \longrightarrow R^3$, tal que $\vec{\alpha}(t)=(4\cos t,\ 4\operatorname{sen} t,\ 3)$, $0 \le t \le 2\pi$

2.29 Ecuaciones Paramétricas de una Curva en el Plano.-

Consideremos una curva C dada por la ecuación cartesiana F(x,y) = 0, es decir:

$$\boxed{C:\ F(x,y)=0}$$

donde cada una de las variables es una función de una tercera variable t, es decir:

x = f(t), y = g(t), donde cada t ∈ I. Determina un par de valores reales "x" e "y" que satisface a la ecuación F(x,y) = 0;

Las ecuaciones $\boxed{C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases},\ t \in R}$

Se llama ecuaciones paramétricas de la curva C y la variable independiente t se llama parámetro.

Nota.- El intervalo I puede ser abierto, cerrado, semi-abierto ó < -∞, +∞ > = R.

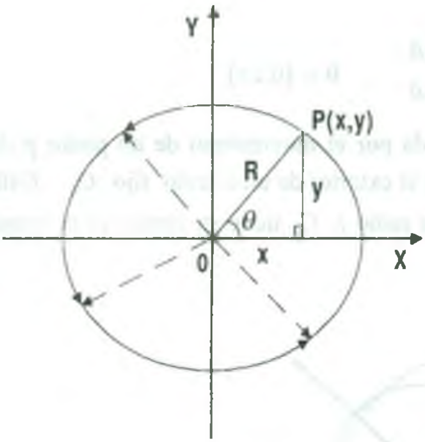
Ejemplos.- Dar una representación paramétrica de la recta, la circunferencia y las cónicas.

i) Parametrizando la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, es decir: $L = \{(x_0, y_0) + t(a_1, a_2) / t \in R\}$

como $L \subset R^2 \Rightarrow (x, y) \in L \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2)$

$$(x, y) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t)$$

$\therefore\ L: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$, $t \in R$ son las ecuaciones paramétricas de la recta L.



ii) Parametrizando la circunferencia $C: x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ se elige un ángulo θ formado por el semi eje X y el radio vector $\overrightarrow{OP}$ moviéndose en sentido antihorario, se obtiene las ecuaciones $x = R\cos\theta$, $y = R \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Luego la circunferencia dada en forma paramétrica es: $C: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $\theta \in [0,2\pi]$ donde θ es el parámetro dado en radianes.

iii) Parametrizando las parábolas de ecuaciones $y = 4px^2$, $x = 4py^2$, hay varias formas de parametrizar para $y = 4px^2$, si x = t , $y = 4pt^2$.

P: $y = 4px^2 = \begin{cases} x = t \\ y = 4pt^2 \end{cases}$, $t \in R$, para $x = 4py^2$ si y = t , $x = 4pt^2$

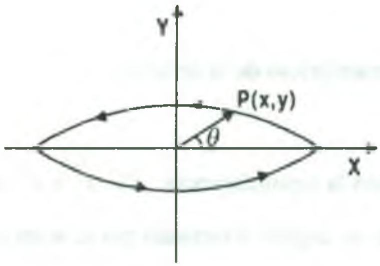
P: $x = 4py^2 = \begin{cases} 4pt^2 \\ t \end{cases}$, $t \in R$

Ejemplo.- Parametrizar la parábola $y = \frac{x^2}{2} + x$

Solución

Sea $x = t$, $y = \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow$ **P**: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} + t \end{cases}$, $t \in R$

iv) Parametrizando la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se tiene: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$

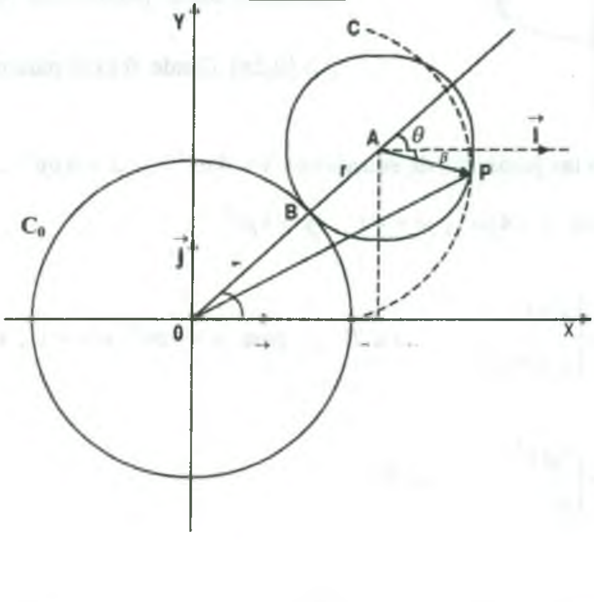


$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{array}$

$C: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $\theta \in [0,2\pi]$

Ejemplo.- La epicicloide es una curva plana engendrada por el movimiento de un punto p de la circunferencia C que rueda sin resbalar sobre el exterior de un círculo fijo C_0. Hallar una representación paramétrica de la epicicloide si C tiene radio r, C_0 tiene su centro en el origen y radio r_0 y p está situado inicialmente en $(r_0,0)$.

Solución



Sea A el centro de la circunferencia C; $\theta = \angle(\overrightarrow{OA}, \vec{i})$, $\|\overrightarrow{OB}\| = r_0$, $\|\overrightarrow{BA}\| = r$

$$\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\| \cos\theta\,\vec{i} + \|\overrightarrow{OA}\| \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (r_0 + r)\cos\theta\,\vec{i} + (r_0 + r)\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} \quad \ldots (1)$$

Sea $\beta = \angle(\overrightarrow{Ap}, \vec{i}) \Rightarrow \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) + \beta + \theta = \pi$

de donde $\beta = \pi - (\theta + \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}))$ **... (2)** $\Rightarrow$ $\overline{BP} = r\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Ap}), \overline{BS} = r_0\theta$ pero

$$\overline{BS} = \overline{BP} \Rightarrow r\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Ap}) = r_0\theta \Rightarrow \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Ap}) = \frac{r_0\theta}{r} \quad \ldots (3)$$

Ahora reemplazando (3) en (2) se tiene: $\beta = \pi - (\theta + \frac{r_0}{r}\theta) = \pi - \frac{r + r_0}{r}\theta$ **... (4)**

$$\overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AP}\| \cos\beta\,\vec{i} - \|\overrightarrow{AP}\| \operatorname{sen}\beta\,\vec{j} = r\cos\beta\,\vec{i} - r\operatorname{sen}\beta\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AP} = r\cos(\pi - \frac{r + r_0}{r}\theta)\,\vec{i} - r\operatorname{sen}(\pi - \frac{r + r_0}{r}\theta)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AP} = -r\cos(\frac{r + r_0}{r}\theta)\,\vec{i} - r\,sen(\frac{r + r_0}{r}\theta)\,\vec{j} \quad \ldots (5)$$

Si P(x,y) es el punto móvil, entonces $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ pero $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, reemplazando se tiene

$$(x, y) = (r + r_0)\cos\theta\,\vec{i} + (r + r_0)\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} - r\cos\frac{r_0 + r}{r}\theta\,\vec{i} - r\operatorname{sen}\frac{r_0 + r}{r}\theta\,\vec{j}$$

$$(x, y) = ((r + r_0)\cos\theta - r\cos\frac{r_0 + r}{r}\theta)\,\vec{i} + ((r + r_0)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}(\frac{r_0 + r}{r})\theta)\,\vec{j}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son

$$\begin{cases} x = (r + r_0)\cos\theta - r\cos(\frac{r_0 + r}{r})\theta \\ y = (r + r_0)\operatorname{sen}\theta - r\operatorname{sen}(\frac{r_0 + r}{r})\theta \end{cases}$$

2.30 Obtención de la Ecuación Cartesiana de una Curva a partir de su Representación Paramétrica.-

Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva.

$$\boxed{C:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}}$$

Se puede obtener su ecuación cartesiana F(x,y) = 0, con solo eliminar el parámetro t por métodos algebraicos o por medio de algunas identidades trigonométricas.

Ejemplo.- Hallar la ecuación cartesiana de la curva. $C: \begin{cases} x = at^2 + b \\ y = 2t + c \end{cases}$

Solución

De la ecuación y = 2t + c despejamos t.

$t = \dfrac{y-c}{2}$ reemplazando en la ecuación $x = at^2 + b$

$x = a(\dfrac{y-c}{2})^2 + b$ de donde $C: x - b = \dfrac{a}{4}(y-c)^2$, que es una parábola.

Ejemplo.- Hallar la ecuación cartesiana de la curva $C: \begin{cases} x = 2(1+\cos\theta) \\ y = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Solución

De las ecuaciones despejamos cos θ, sen θ.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \cos\theta \\ \dfrac{y}{2} = \text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{array}$$

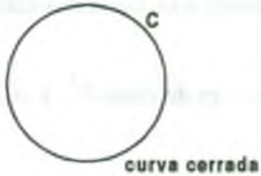
$\therefore\ C:\ (x-2)^2 + y^2 = 4$, que es una circunferencia.

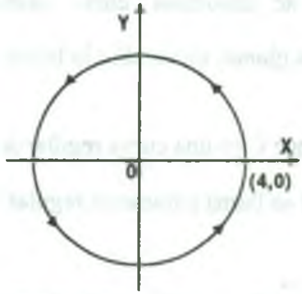
2.31 Clases de Curvas.-

Sea $C \subset R^3$ una curva parametrizada, es decir, que existe una función vectorial $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$, tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$, entonces:

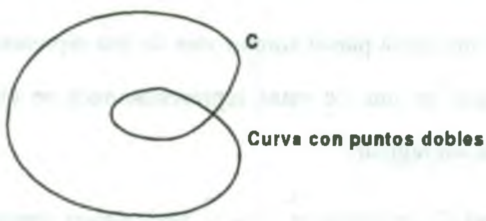
i) Diremos que C es una curva cerrada si $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b)$ en caso contrario la curva C es una curva abierta.

Ejemplo.- La curva $\vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow R^2$ definida por $\vec{\alpha}(t) = (4\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$ es una curva cerrada puesto que $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(2\pi) = (4,0)$



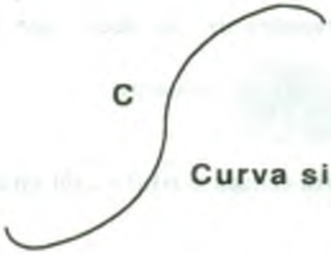


ii) Diremos que C es una curva con punto doble si $\vec{\alpha}(t_1) = \vec{\alpha}(t_2)$, $t_1 \neq t_2$



* Un punto de la curva C es un punto múltiple (doble, triple, etc.) si corresponde a dos ó más valores diferentes del parámetro t.

iii) Diremos que C es una curva simple si no posee puntos dobles.



* C se llama simple si $\vec{\alpha}$ es inyectiva.

iv) Si la curva C, está contenida en un plano, la curva C es denominada curva plana, en caso contrario se denomina curva alabeada, por ejemplo, la circunferencia, la elipse, son curvas planas, en cambio la hélice cilíndrica es una curva alabeada.

v) Diremos que C es una curva regular si $\vec{\alpha}(t)$ es de clase C^1 y $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$, $\forall$ t $\in$[a, b], en este caso t se llama parámetro regular.

Ejemplo.- La curva $\vec{\alpha}: R \longrightarrow R^3$ definida por $\vec{\alpha}(t) = (4\cos t, 4\text{sen}\, t, 5t)$ es una curva regular, puesto, que $\vec{\alpha}'(t) = (-4\,\text{sen}\, t,\ 4\cos t,\ 5) \neq (0,0,0)$, $\forall$ t $\in$ R.

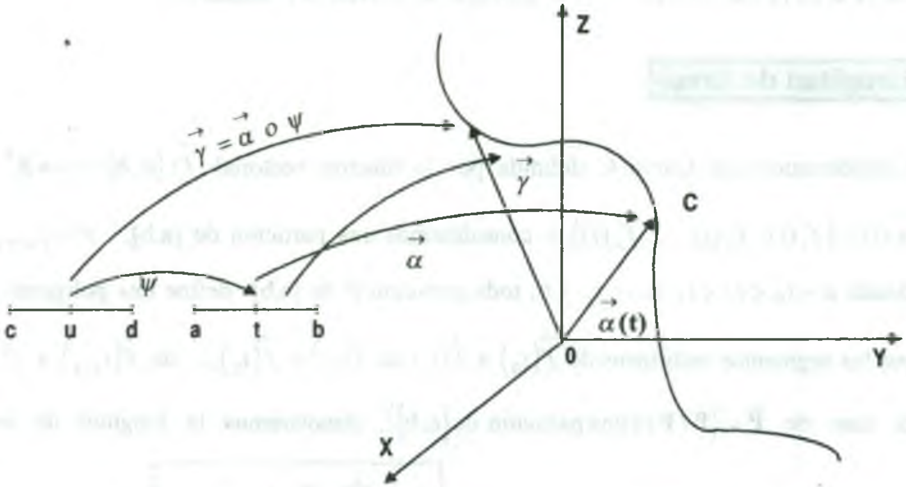
Observación.- En general una curva puede admitir más de una representación paramétrica, pero es suficiente que en una de estas representaciones se cumpla la condición de regularidad para que la curva sea regular.

Los punto p(x,y,z) de la curva C, en donde $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ para alguna representación paramétrica de la curva C se denomina puntos regulares, pero los puntos en donde $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$, se denomina puntos singulares.

2.32 Reparamatrización de una Curva Regular.-

Definición.- Sea $C \subset R^3$ una curva regular, o sea que existe una función vectorial $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$, tal que: $\vec{\alpha}([a,b]) = C$ y $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$; una reparamatrización de $\vec{\alpha}(t)$ es una curva $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \, o \, \psi: [c,d] \longrightarrow R^3$, donde $\psi: [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es una función diferenciable con $\psi'(u) \neq 0$, $\forall$ u $\in$ [c,d] y sobreyectiva, además:

$\vec{\gamma}(u) = (\vec{\alpha} \, o \, \psi)(u) = \vec{\alpha}(\psi(u))$, $\forall$ u $\in$[c,d]



Observación.

1) Si $\psi'(t) > 0$ se conserva la misma orientación en la curva reparametrizada.

2) Si $\psi'(t) < 0$ se invierte la orientación en la curva reparametriza.

3) Si la reparametrización $\vec{\gamma}: \vec{\alpha} \, o \, \psi: [c,d] \longrightarrow R^3$ es continua, entonces la curva $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ es continua .

Ejemplo.- Sea $\vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow R^2$ una curva regular definida por $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

i) Sea $\psi: [0,1] \longrightarrow [0,2\pi]$ una función real definida por $\psi(u) = 2\pi u$ entonces.

$\vec{\gamma}(u) = (\vec{\alpha} \circ \psi)(u) = \alpha(\psi(u)) = (\cos 2\pi u, \operatorname{sen} 2\pi u)$ es una reparametrización de la curva $\vec{\alpha}(t)$.

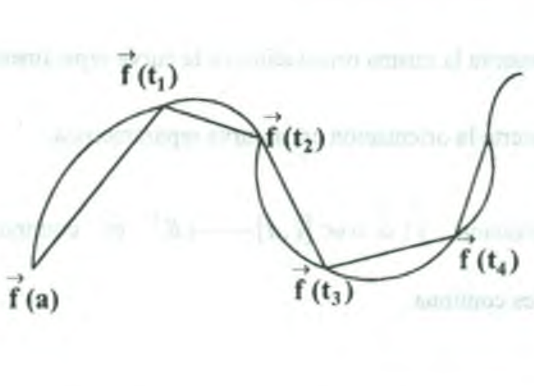
ii) Sea $\psi: [0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi]$ una función real definida por $\psi(u) = 2\pi - u$ entonces.

$\vec{\gamma}(u) = (\vec{\alpha} \circ \psi)(u) = \vec{\alpha}(\psi(u)) = (\cos(2\pi - u), \operatorname{sen}(2\pi - u))$ es una reparametrización de la curva $\vec{\alpha}(t)$, como $\psi'(u) = -1 < 0$ entonces se invierte la orientación.

2.33 Longitud de Arco.-

Consideremos una Curva C definida por la función vectorial $\vec{f}: [a,b] \longrightarrow R^n$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ y consideremos una partición de [a,b], $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$, donde $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$, toda partición P de [a,b] define una poligonal definida por los segmentos rectilíneos de $\vec{f}(t_0)$ a $\vec{f}(t_1)$ de $\vec{f}(t_1)$ a $\vec{f}(t_2)$,...., de $\vec{f}(t_{k-1})$ a $\vec{f}(t_k)$ para el caso de $\overline{\mathbf{P}} = \{\mathbf{P} / \mathbf{P} \text{ es una partición de } [a, b]\}$, denotaremos la longitud de este arco poligonal por L_P, es decir:

$$\boxed{L_P = \sum_{i=1}^{k} \| \vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1}) \|}$$



Definición.- La curva C definida por la función vectorial $\vec{f}$ de [a,b] se dice que es rectificable si $\{L_P \,/\, p \in \overline{\mathbf{P}}\}$ tiene una cota superior.

Si C es rectificable, la longitud L de C es el supremo de $\{L_P \,/\, p \in \overline{\mathbf{P}}\}$ es decir: $L = \sup.\{L_P \,/\, p \in \overline{\mathbf{P}}\}$.

Si se obtiene una partición $\mathbf{P_2}$ de [a,b] agregando algunos puntos de la partición a $\mathbf{P_1}$ de [a,b] entonces $L_{P_1} \le L_{P_2}$; a $\mathbf{P_2}$ le llamaremos refinamiento de $\mathbf{P_1}$.

2.34 Lema.-

Si $\mathbf{P_2}$ es un refinamiento de $\mathbf{P_1}$ entonces $L_{P_1} \le L_{P_2}$.

Demostración

Este lema es una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular.

Sea ψ_j el primer tiempo de $\mathbf{P_2}$ que no esta en $\mathbf{P_1}$ entonces para algún i, $t_{i-1} < \psi_j < t_i$ y

$$\| \vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1}) \| = \| \vec{f}(t_i) - \vec{f}(\psi_j) + \vec{f}(\psi_j) - \vec{f}(t_{i-1}) \|$$

$$\le \| \vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_j) \| + \| \vec{f}(\psi_j) - \vec{f}(t_{i-1}) \|$$

añadiendo todos los puntos de $\mathbf{P_2}$ a $\mathbf{P_1}$ y obtenemos. $L_{P_1} \le L_{P_2}$

2.35 Teorema.-

Si $\vec{f}$ tiene una derivada continua sobre [a,b] y la curva C descrita por $\vec{f}(t)$ es rectificable entonces la longitud de arco de la curva C es:

$$L = \int_a^b \| \vec{f}\,'(t) \| \, dt$$

Demostración

Consideremos una curva C en R^3 y $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una posición de [a,b], por el teorema del valor intermedio:

$L_p = \sum_{i=1}^{k} \| \vec{f}(t_i) - \vec{f}(t_{i-1}) \| = \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \| (f_1'(t_i'), f_2'(t_i''), f_3'(t_3''')) \|$ para algún

$t_i', t_i'', t_i''' \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, como f_1', f_2', f_3' son continuas [a,b] están acotadas sobre [a,b] supongamos $|f_1'(t)| \le M_1$, $|f_2'(t)| \le M_2$, $|f_3'(t)| \le M_3$ para toda t ∈ [a,b], entonces:

$$L_P = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\,(t_i - t_{i-1}) = (b-a)\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$$

para toda partición P de [a,b], por lo tanto $\{L_P \,/\, p \in P\}$ esta superiormente acotada y C es rectificable, sea L la longitud de C.

ahora demostraremos que $L = \int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt$

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, como $L = \sup.\{L_P \,/\, p \in P\}$ existe una partición P_1 de [a,b] tal que:

$$L - \varepsilon < L_{P_1} < L$$

como $\| \vec{f}'(t) \|$ es continua en [a,b] entonces $\exists \int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt$, es decir:

$$\int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt = \lim_{|P| \to 0} S_P = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{k} \| \vec{f}'(t_i^*) \| (t_i - t_{i-1})$$

Luego $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que $| \int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt - S_P | < \varepsilon$ siempre que $|P| < \delta_1$ ahora bien:

$$| \int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt - L | = | \int_a^b \| \vec{f}'(t) \| \, dt - S_P + S_P - L_P + L_P - L |$$

$$\le | \underbrace{\int_a^b \left| \vec{f}'(t) dt - S_P \right|}_{\varepsilon} + |S_P - L_P| + |L_P - L| |$$

Luego $\left|\int_a^b \|\vec{f}'(t)\|\,dt - L\right| < \varepsilon$, luego $L = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\|\,dt$.

Observación.- Si C: $\vec{f}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ para a ≤ t ≤ b entonces la longitud de arco de la curva C es:

$$\boxed{L = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt}$$

Ejemplo.- Encontrar la longitud de la curva C definida por C: $\vec{\alpha}(t) = a.\cos t\ \vec{i} + a.\operatorname{sen} t\ \vec{j} + c\,t\ \vec{k}$ de A(a,0,0) hasta B(a,0,2πc)

Solución

Calculando los limites de integración. $\begin{cases} \vec{f}(t_1) = (a,0,0) \\ \vec{f}(t_2) = (a,0,2\pi c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2\pi \end{cases}$

$\vec{\alpha}(t) = (a.\cos t, a\operatorname{sen} t, ct) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t) = (-a.\operatorname{sen} t, a\cos t, c)$

$$\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$$

Ejemplo.- Hallar la longitud de arco de la curva C definida por $\vec{\alpha}(t) = (a(\cos t + t\operatorname{sen} t),\ a(\operatorname{sen} y - t\cos t))$, a > 0 en [0, 2π]

Solución

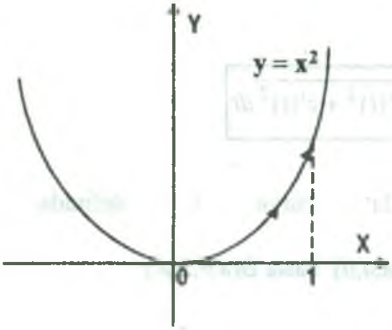
$\vec{\alpha}(t) = (a(\cos t + t\operatorname{sen} t),\ a(\operatorname{sen} t - t\cos t))$, derivando se tiene

$\vec{\alpha}'(t) = (at\cos t, at\operatorname{sen} t) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2t^2\operatorname{sen}^2 t + a^2t^2\cos^2 t} = at$

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} at\,dt = \frac{at^2}{2}\Big/_0^{2\pi} = 2\pi^2 a$$

Ejemplo.- Calcular la longitud de la parábola $y = x^2$ desde x = 0 hasta x = 1.

Solución



Parametrizando la parábola se tiene:

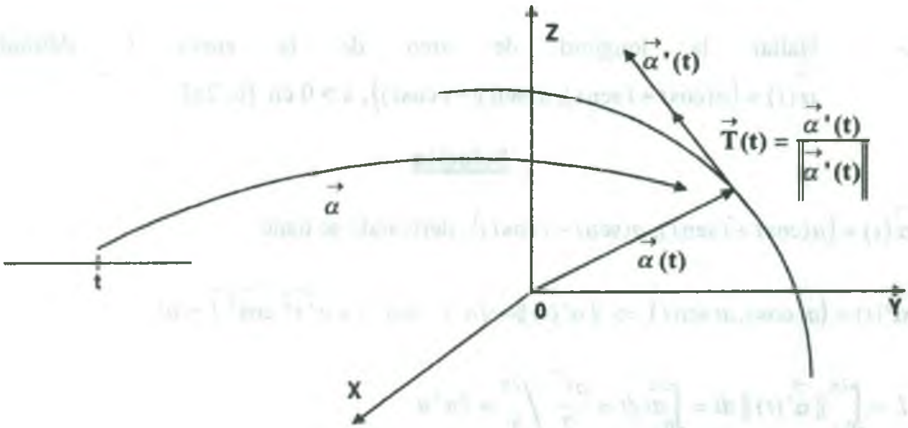
x = t, $y = t^2$ luego $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 \|\vec{\alpha}(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(1+\sqrt{5})$$

2.36 Vectores Unitarios: Tangente, Normal Principal y Binormal.-

Definición.- Sea C una curva regular dado por la función vectorial $\vec{\alpha}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. El vector tangente unitario de la curva $C: \vec{\alpha}(t)$ en la dirección de $\vec{\alpha}'(t)$ denotado por $\vec{T}(t)$ es dado por: $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}$

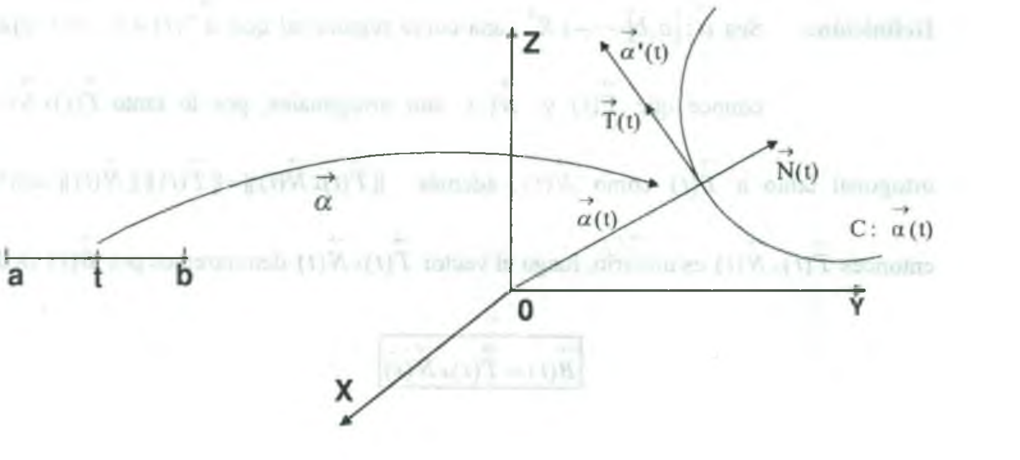


como $L(C)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$, entonces definiremos S(t) = L(C) que es una función longitud de arco. Luego $S(t)=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$, de donde al derivar se tiene. $S'(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\|\vec{\alpha}'(t)\| \Rightarrow S'(t)=\|\vec{\alpha}'(t)\|$

como $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}=\dfrac{\vec{\alpha}'(t)}{S'(t)}=\dfrac{d\vec{\alpha}}{dS} \Rightarrow \vec{T}(t)=\dfrac{d\vec{\alpha}}{dS}$

como $\vec{T}(t)$ es un vector tangente unitario, entonces $\vec{T}(t).\vec{T}(t)=1$, de donde derivando se tiene: $\vec{T}'(t).\vec{T}(t)+\vec{T}(t).\vec{T}'(t)=0 \Rightarrow \vec{T}(t).\vec{T}'(t)=0$ por lo tanto $\vec{T}(t)$ y $\vec{T}'(t)$ son ortogonales.

Definición.- Si C es una curva regular dada por C: $\vec{\alpha}(t)$, al vector unitario que tiene la misma dirección que $\vec{T}'(t)$, se denomina vector normal principal a la curva C en el punto $\vec{f}(t)$ al cual denotaremos por $\vec{N}(t)$ y es dado por $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$, siempre que $\|\vec{T}'(t)\|\neq 0$.



Observaciones.-

1) Como $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3$, es una curva regular, entonces la curva C descrita por $\vec{\alpha}$ es rectificable, la longitud de arco de C correspondiente al intervalo [a,t] será:

$$\ell(t)=\int_a^t \|\vec{\alpha}'(u)\|\,du \quad \text{entonces} \quad \ell'(t)=\|\vec{\alpha}'(t)\|$$

Luego $\ell'(t)=\|\vec{\alpha}'(u)\| \iff \vec{\alpha}'(t)=\ell'(t)\vec{T}(t)$ **...(1)**

Si la curva C descrita por $\vec{\alpha}$ es rectificable, entonces la ecuación (1) nos dice que la dirección del vector velocidad $\vec{\alpha}'(t)$ es la del vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ y la velocidad escalar o rapidez es dado por: $\ell'(t)=\|\vec{\alpha}'(t)\|$

2) Si $\vec{\alpha}'(t)$, es diferenciable en [a,b], es decir, existe $\vec{\alpha}'(t)$ en [a,b]. Entonces $\ell''(t)$ y $\vec{T}(t)$ existen en [a,b] y diferenciando tenemos :

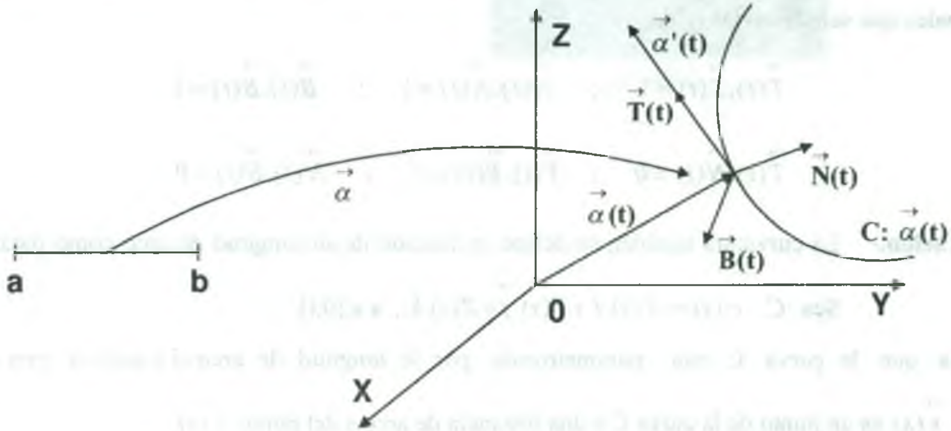
$$\vec{\alpha}''(t)=\ell''(t)\vec{T}(t)+\ell'(t)\vec{T}'(t) \quad \text{ó} \quad \vec{\alpha}''(t)=\ell''(t)\vec{T}(t)+\ell'(t)\|\vec{T}'(t)\|\vec{N}(t)$$

3) Si $\vec{T}'(t)=\vec{0}$, $\forall$ t $\in$[a,b], entonces el movimiento es lineal.

Definición.- Sea $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3$ una curva regular tal que $\vec{\alpha}''(t)\neq 0$, $\forall$ t $\in$[a,b], se conoce que $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ son ortogonales, por lo tanto $\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$ es ortogonal tanto a $\vec{T}(t)$ como $\vec{N}(t)$, además $\|\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)\|=\|\vec{T}(t)\|\,\|\vec{N}(t)\|.\text{sen}\,90^{\circ}=1$ entonces $\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$ es unitario, luego el vector $\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$ denotaremos por $\vec{B}(t)$ es decir:

$$\boxed{\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)}$$

el cual es denominado vector binormal unitario, por lo tanto, a los tres vectores unitarios $\vec{T}(t), \vec{N}(t)$ y $\vec{B}(t)$ que son ortogonales de una curva C, se denomina la TRIADA MÓVIL de C.



2.37 Vector Curvatura y Curvatura.-

Sea $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ una curva regular tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C$, al vector curvatura denotaremos por $\vec{k}(t)$ y es definido por:

$$\boxed{\vec{k}(t) = \frac{D_t \vec{T}(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|}}$$

donde $\vec{T}(t)$ es el vector tangente unitario.

Si la curva $C: \vec{\alpha}(t)$ es dos veces diferenciable y si $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, la curvatura es dado por:

$$\boxed{k(t) = \left\| \frac{D_t \vec{T}(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} \right\|}$$

también al vector normal principal unitario se define por:

$$\boxed{\vec{N}(t) = \frac{\vec{k}(t)}{\| \vec{k}(t) \|}}$$

Observación.- Los vectores $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$ que son determinados en cada punto $\vec{\alpha}(t)$ de la curva C (tiene importancia en la ciencia y la tecnología) puede tomarse como un nuevo sistema de coordenadas de referencias, puesto que son vectores mutuamente ortogonales que satisfacen las relaciones.

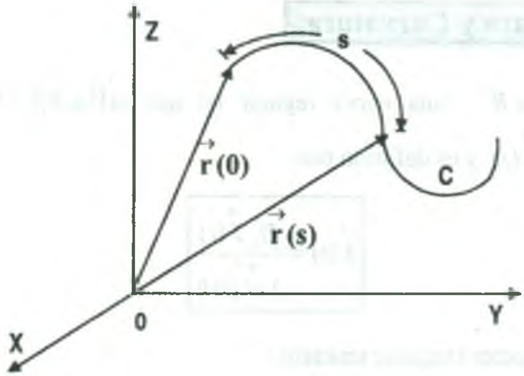
$$\vec{T}(t).\vec{T}(t)=1 \quad ; \quad \vec{N}(t).\vec{N}(t)=1 \quad ; \quad \vec{B}(t).\vec{B}(t)=1$$

$$\vec{T}(t).\vec{N}(t)=0 \quad ; \quad \vec{T}(t).\vec{B}(t)=0 \quad ; \quad \vec{N}(t).\vec{B}(t)=0$$

Observación.- La curvatura también se define en función de su longitud de arco como parámetro.

Sea C: $\vec{r}(s)=X(s)\vec{i}+Y(s)\vec{j}+Z(s)\vec{k}$, s $\in[0,l]$.

Diremos que la curva C está parametrizada por la longitud de arco si y solo si para cada s $\in[0,l]$, $\vec{r}(s)$ es un punto de la curva C a una distancia de arco s del punto $\vec{r}(s)$



Curva parametrizada por la longitud de arco, generalizando: $\int_0^s \| \vec{r}'(u) \| du =$ distancia de arco de $\vec{r}(0)$ a $\vec{r}(s)$ el parámetro es la longitud de arco si y solo si:

$$\int_0^s \| \vec{r}'(u) \| du = s \text{, donde } \| \vec{r}'(s) \| = 1$$

Luego una curva está parametrizada por la longitud de arco si y solo si el vector tangente $\vec{r}'(s)$ es de longitud constante igual a 1.

Ejemplo.- La curva, más generalmente, parametrizada por la longitud de arco es la circunferencia de radio 1.

$\vec{r}(s) = \cos(s)\,\vec{i} + \text{sen}(s)\,\vec{j}$ el parámetro es la longitud de arco $\vec{r}(s) = \rho[\cos(\frac{s}{\rho})\,\vec{i} + \text{sen}(\frac{s}{\rho})\,\vec{j}]$,

$s \in [0, 2\pi\rho]$ es una circunferencia de radio ρ y de centro en el origen de coordenadas.

Observación.- Consideremos cualquier curva parametrizada por la longitud de arco $\vec{r}(s)$; aunque la longitud del vector tangente $\vec{r}\,'(s)$ es la unidad, la dirección de este vector puede variar al variar s y el vector $\vec{r}\,''(s)$ de esta variación de dirección el cual llamaremos vector curvatura y a su magnitud $k = |\vec{r}\,''(s)|$ se denomina curvatura.

La curvatura da la variación en dirección por unidad de longitud de arco.

como $\left|\vec{r}\,'(s)\right| = 1 \Rightarrow \vec{r}\,'(s).\vec{r}\,'(s) = 1$, derivando se tiene que: $\vec{r}\,'(s).\vec{r}\,''(s) = 0$ Entonces $r'(s) \perp r''(s)$

Observación.- No siempre se puede encontrar curvas distintas de la circunferencia parametrizada por la longitud de arco. Por esto la curvatura se calcula en términos de un parámetro arbitrario t, que por conveniencia se interpreta como el tiempo.

Ejemplo.- Hallar los vectores tangente unitario y normal principal de la espiral cónica $\vec{\alpha}(t) = (a.\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.

Solución

$$\vec{\alpha}(t) = (a.\cos t, b\,\text{sen}\,t) \Rightarrow \vec{\alpha}\,'(t) = (-a.\text{sen}\,t, b\cos t) \Rightarrow \|\vec{\alpha}\,'(t)\| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}\,'(t)}{\|\vec{\alpha}\,'(t)\|} = \left(\frac{-a.\text{sen}\,t}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t}}, \frac{b.\cos t}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,t + b^2\cos^2 t}}\right)$$

$$\vec{T}\,'(t) = \left(\frac{-ab^2\cos t}{(a^2\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-a^2 b\,\text{sen}\,t}{(a^2\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow \|\vec{T}\,'(t)\| = \frac{ab}{a^2\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}=(-\frac{b.\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}},\frac{-a.\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}})$$

$$\vec{N}(t)=(-\frac{b.\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}},\frac{-a.\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}})$$

Ejemplo.- Hallar la triada móvil de la curva $y=x^2$, z = 2x en el punto x = 2.

Solución

Sea C: $\begin{cases} y=x^2 \\ z=2x \end{cases}$, la curva en forma paramétrica.

Sea $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3 / \vec{\alpha}(t)=(t,t^2,2t)$ donde $t=t_0=2 \Rightarrow \vec{\alpha}'(t)=(1,2t,2)$ entonces

$$\vec{\alpha}'(2)=(1,4,2) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(2)\|=\sqrt{21} \Rightarrow \vec{T}(2)=\frac{\vec{\alpha}'(2)}{\|\vec{\alpha}'(2)\|}=(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}})$$

La binormal también se calcula mediante la fórmula. $\vec{B}(2)=\dfrac{\vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)}{\|\vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)\|}$ de donde

$$\vec{\alpha}''(t)=(0,2,0) \Rightarrow \vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-4,0,2) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)\|=2\sqrt{5}$$

$$\vec{B}(2)=\frac{\vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)}{\|\vec{\alpha}'(2)x\vec{\alpha}''(2)\|}=(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$\vec{N}(1)=\vec{T}(1)x\vec{B}(1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}=(\frac{4}{\sqrt{105}},-\frac{5}{\sqrt{105}},\frac{8}{\sqrt{105}})$$

2.38 Planos: Osculador Normal y Rectificante.-

Consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^3$, entonces:

i) El plano que pasa por el punto $\vec{\alpha}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ que es paralelo a los vectores $\vec{T}(t_0)$ y $\vec{N}(t_0)$, se llama plano osculador, cuya ecuación es dada por:

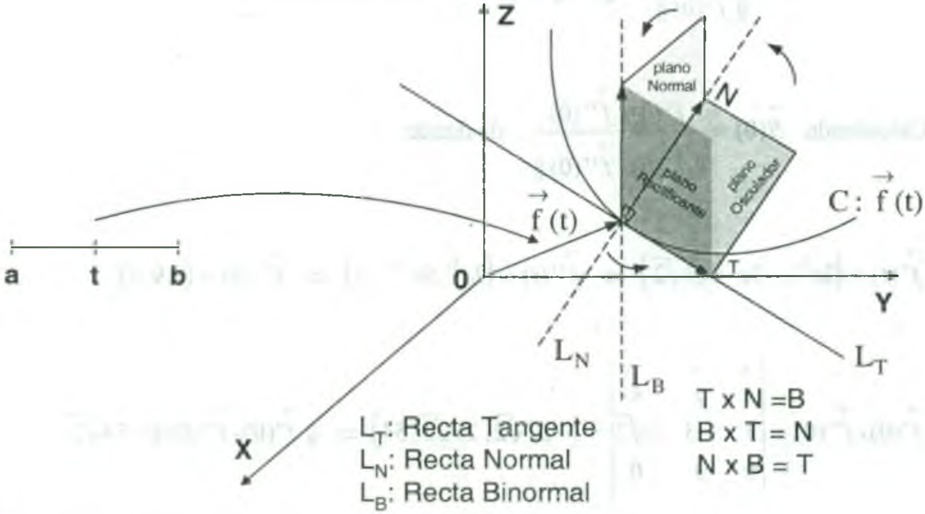
$$P_0: \vec{B}(t_0).[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)] = 0$$

ii) El plano que pasa por el punto $\vec{\alpha}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ que es paralelo a los vectores $\vec{N}(t_0)$ y $\vec{B}(t_0)$, se llama plano normal principal, cuya ecuación es dada por:

$$P_N : \vec{T}(t_0)[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)] = 0$$

iii) El plano que pasa por el punto $\vec{\alpha}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ que es paralelo a los vectores $\vec{B}(t_0)$ y $\vec{T}(t)$, se llama plano rectificante, cuya ecuación es dada por:

$$P_R: \vec{N}(t_0).[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)] = 0$$



Las rectas: tangente, normal y Binormal tiene por ecuación a:

$L_T = \{\vec{\alpha}(t_0) + t\,\vec{T}(t_0) \,/\, t \in R\}$, $L_N = \{\vec{\alpha}(t_0) + \lambda \vec{N}(t_0) \,/\, \lambda \in R\}$

$L_B = \{\vec{\alpha}(t_0) + \beta\, \vec{B}(t_0) \,/\, \beta \in R\}$

Ejemplo.- Sea la curva $C: \vec{f}(t)=\left(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t\right)$. Hallar los vectores $\vec{T}$ y $\vec{N}$ y la ecuación del plano osculador en el punto (1,1,0)

Solución

Calculando el valor de $t=t_0$ de tal manera que $\vec{f}(t_0)=(1,1,0)$

$$\left(e^{3t_0}, e^{-3t_0}, 3\sqrt{2}t_0\right)=(1,1,0) \Rightarrow t_0=0$$

Calculando $\vec{T}(0)$ para esto $\vec{f}'(t)=\left(3e^{3t}, -3e^{-3t}, 3\sqrt{2}\right)$

$$\vec{f}'(0)=\left(3,-3,3\sqrt{2}\right) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)\|=\sqrt{36}=6$$

$$\vec{T}(0)=\frac{\vec{f}'(0)}{\|\vec{f}'(0)\|}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Calculando $\vec{B}(0)=\dfrac{\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)\|}$, de donde

$$\vec{f}'(t)=\left(3e^{3t},-3e^{-3t},3\sqrt{2}\right) \Rightarrow \vec{f}''(t)=\left(9e^{3t},9e^{-3t},0\right) \Rightarrow \vec{f}''(0)=(9,9,0)$$

$$\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 3\sqrt{2} \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}=\left(-27\sqrt{2},27\sqrt{2},54\right) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)\|=54\sqrt{2}$$

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\,\vec{f}''(0)\|}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$$

2.39 Otra forma de Expresar las Ecuaciones de los Planos: Osculador, Normal y Rectificante.-

Consideremos una curva alabeada, es decir que no está contenida en un plano, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \text{siendo t un parámetro.}$$

donde su ecuación vectorial es: $\boxed{C: \vec{\alpha}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}}$

En cada punto de la curva C se puede definir un triedro trirectangular llamado INTRÍNSECO o fundamental formado por los vectores unitarios, tangente, normal principal y binormal, donde la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x_1, y_1, z_1) es:

$$\boxed{L_T: \frac{x - x_1}{x'(t)} = \frac{y - y_1}{y'(t)} = \frac{z - z_1}{z'(t)}}$$

La ecuación de la binormal a la curva C en el punto (x_1, y_1, z_1) es:

$$\boxed{L_T: \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}} \text{ siendo}$$

$$A = y'(t)z''(t) - z'(t)y''(t)\ ,\ B = z'(y)x''(t) - x'(t)z''(t)\ ,\ C = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$$

La ecuación de la normal principal a la curva C en el punto (x_1, y_1, z_1) es:

$$\boxed{L_N: \frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ C & A \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ A & B \end{vmatrix}}}$$

El plano rectificante que es determinado por la tangente y la binormal, su ecuación es:

$$\mathbf{P_R}: \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ B & C \end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ C & A \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ A & B \end{vmatrix}(z-z_1)=0$$

El plano osculador que es determinado por la normal principal y la tangente, su ecuación es:

$$\mathbf{P_0}: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}=0 \quad \text{ósea } \mathbf{P_0}: A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

El plano normal que es determinado por la normal principal u la binormal, su ecuación es:

$$\mathbf{P_N}: x'(t)(x-x_1)+y'(t)(y-y_1)+z'(t)(z-z_1)=0$$

Ejemplo.- Determinar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva.

$$C: \begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\operatorname{sen} t \\ z=\sqrt{3}e^t \end{cases}$$

en el punto correspondiente a t = 0 y la ecuación del plano osculador en el mismo punto.

Solución

para t = 0, x = 1, y = 0, $z=\sqrt{3}$. Luego $P(1,0,\sqrt{3})$

La ecuación de la recta tangente es: $L_T: \dfrac{x-x_1}{x'(0)}=\dfrac{y-y_1}{y'(0)}=\dfrac{z-z_1}{z'(0)}$, de donde

$$\begin{cases} x(t)=e^t\cos t \\ y(t)=e^t\operatorname{sen} t \\ z(t)=\sqrt{3}e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=e^t\cos t-e^t\operatorname{sen} t \\ y'(t)=e^t\operatorname{sen} t+e^t\cos t \\ z'(t)=\sqrt{3}e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0)=1 \\ y'(0)=1 \\ z'(0)=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$L_T: \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow L_T: x-1=y=\frac{z-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

La ecuación del plano normal es:

$$P_N: x'(0)(x-x_1)+y'(0)(y-y_1)+z'(0)(z-z_1)=0$$

$$P_N: (x-1)+(y-0)+\sqrt{3}(z-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore \quad P_N: \quad x+y+\sqrt{3}z=4$$

La ecuación del plano osculador es: $$P_0: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x''(0) & y''(0) & z''(0) \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases} x'(t)=e^t\cos t-e^t\operatorname{sen} t \\ y'(t)=e^t\operatorname{sen} t+e^t\cos t \\ z'(t)=\sqrt{3}e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t)=-2e^t\operatorname{sen} t \\ y''(t)=2e^t\cos t \\ z''(t)=\sqrt{3}e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(0)=0 \\ y''(0)=2 \\ z''(0)=\sqrt{3} \end{cases}$$

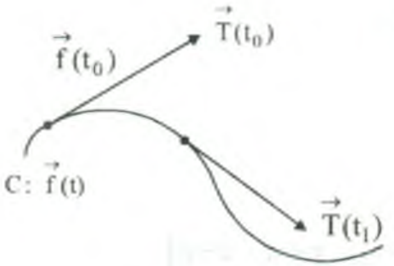
$$P_0: \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}=0 \Rightarrow P_0: \sqrt{3}x+\sqrt{3}y-2z+\sqrt{3}=0$$

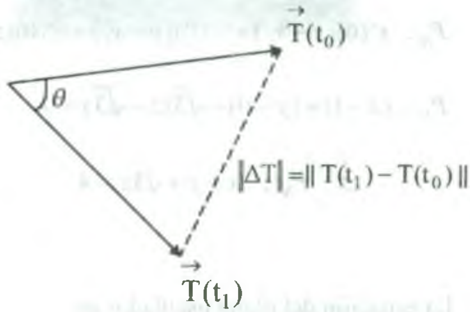
2.40 Curvatura.-

Consideremos una curva C dada por la función vectorial $\vec{f}(t)=f_1(t)\,\vec{i}+f_2(t)\,\vec{j}+f_3(t)\,\vec{k}$, llamaremos curvatura de flexión o simplemente curvatura a la razón instantánea de cambio de dirección de los puntos de la curva C, con respecto a la longitud de arco.

Si $\vec{f}(t_0)$ y $\vec{f}(t_1)$ son dos puntos de la curva C y $\vec{T}(t_0)$ y $\vec{T}(t_1)$ son las respectivas tangentes unitarias, entonces la curvatura en el punto $\vec{f}(t_0)$ es dado por $k(t_0)$.

$$k(t_0)=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\|\Delta T\|}{\Delta S}=\lim_{t_1\to t_0}\frac{\|T(t_1)-T(t_0)\|}{S(t_1)-S(t_0)}=\lim_{t\to t_0}\frac{\dfrac{\|T(t_1)-T(t_0)\|}{t_1-t_0}}{\dfrac{S(t_1)-S(t_0)}{t_1-t_0}}=\frac{\|\vec{T}'(t_0)\|}{\|\vec{f}'(t_0)\|}$$





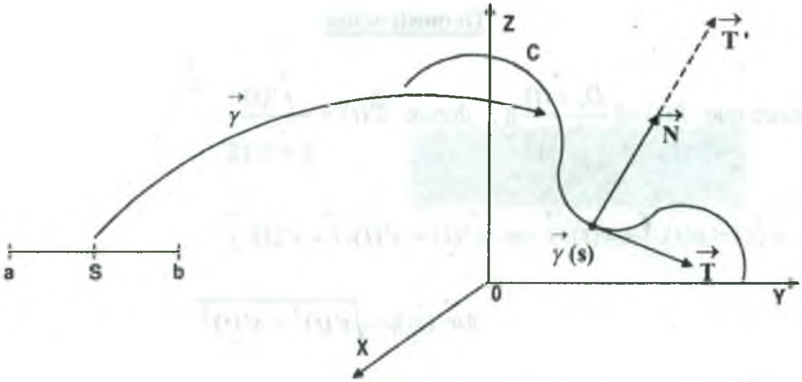
Observación.- El cambio de dirección es dado por θ pero para θ pequeño se tiene $\theta \approx \|\Delta T\|$.

2.41 Definición.-

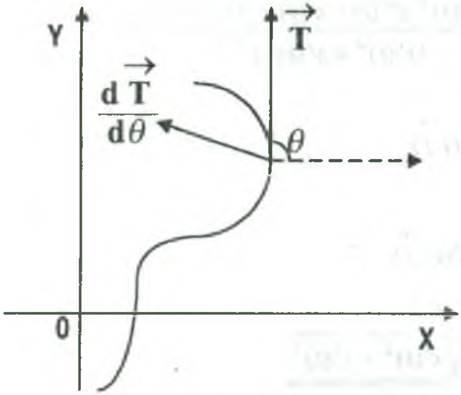
Consideremos una curva regular $C \subset R^3$ parametrizada por la longitud de arco es decir $\exists\ \vec{\gamma}:[0,L] \longrightarrow R^3$ tal que: $\vec{\gamma}([0,L]) = C$. Sea $\vec{T}(S) = \vec{\gamma}'(S)$ el vector tangente unitario a la curva en el punto $\vec{\gamma}(S)$.

A la derivada del vector $\vec{T}(S)$ se denomina vector curvatura de la curva $\vec{\gamma}$ y denotaremos por: $\vec{k}(S) = \vec{T}'(S) = \vec{\gamma}''(S)$.

Observación.- Como $\vec{T}(S)$ es unitario es decir $\|\vec{T}(S)\| = 1$ entonces el vector $\vec{T}'(S) = \vec{\gamma}''(S)$ es perpendicular a $\vec{T}(S)$, por lo tanto el vector curvatura tiene la misma dirección que el vector unitario normal principal $\vec{N}(S)$ entonces existe un número real K(S) tal que $\vec{T}'(S) = k(S)\vec{N}(S)$, luego al número k(S) se denomina curvatura de la curva en el punto $\vec{\gamma}(S)$ y es dado por $k(S) = \|\vec{k}(S)\|$



2.42 Otra forma de la Curvatura.-



Sea θ la medida del ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj desde $\vec{i}$ a $\vec{T}$ entonces $\vec{T}(\theta) = \cos\theta . \vec{i} + \text{sen}\,\theta . \vec{j}$ y por lo tanto $\frac{d\vec{T}(\theta)}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta . \vec{i} + \cos\theta . \vec{j}$ como $\frac{d\vec{T}(\theta)}{d\theta}$ es un vector unitario y $\vec{T}(\theta) . \frac{d\vec{T}(\theta)}{d\theta} = 0$ además:

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{dS} \right\| = \left\| \frac{\frac{d\vec{T}}{d\theta}}{\frac{dS}{d\theta}} \right\| = \left\| \frac{dT}{d\theta} \right\| . \left\| \frac{d\theta}{dS} \right\| = \left\| \frac{d\theta}{dS} \right\| \qquad \therefore \quad k = \left\| \frac{d\theta}{dS} \right\|$$

2.43 Teorema.-

Para una curva plana descrita por la ecuación C: $\vec{r}(t) = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$ demostrar que la curvatura viene dada por la expresión. $k(t) = \dfrac{|x'(t).y''(t) - x''(t).y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$

Demostración

Se conoce que $k(t)=\|\dfrac{D_t \vec{r}(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\|$, donde $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$

como $\vec{r}(t)=x(t).\vec{i}+y(t).\vec{j} \Rightarrow \vec{r}\,'(t)=x'(t).\vec{i}+y'(t).\vec{j}$

$$\|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{i}+\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\vec{j}$$

$$D_t\vec{T}(t)=\frac{x''(t).y'(t)^2-x'(t).y''(t).y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}\vec{i}+\frac{x'(t)^2.y''(t)-x'(t).x''(t).y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}\vec{j}$$

$$D_t\vec{T}(t)=\frac{x''(t).y'(t)-x'(t).y''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}(y'(t)\,\vec{i}-x'(t)\,\vec{j})$$

$$D_t\vec{T}(t)=-\frac{x'(t).y''(t)-x''(t).y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}(x'(t)\,\vec{i}-y'(t)\,\vec{j})$$

$$k(t)=\frac{\|D_t\vec{T}(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}=\frac{|x'(t).y''(t)-x''(t).y'(t)|}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}.\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$$

$$\therefore\quad k(t)=\frac{|x'(t).y''(t)-x''(t).y'(t)|}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}$$

2.44 Teorema.-

Si una curva plana tiene la ecuación cartesiana C: y = f(x), demostrar que la curvatura en el punto (x, f(x)) es:

$$k(x)=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$$

Demostración

Expresaremos a la curva plana en forma parametrica $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + f(t)\,\vec{j}$ de donde x (t) = t, y(t) = f(t) de donde:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x''(t) = 0 \\ y''(t) = f''(t) \end{matrix}$$

además $k(t) = \dfrac{|x'(t).y''(t) - x''(t).y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \dfrac{|y''(t)|}{(1+f'(t)^2)^{3/2}}$

de donde se tiene: $k(x) = \dfrac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$

Ejemplo.- Hallar la curvatura de la curva dado por: *C:* $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ en t = 0.

Solución

$$\begin{cases} x = e^t + e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = e^t - e^{-t} \\ y' = e^t + e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = e^t + e^{-t} \\ y'' = e^t - e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

$$k(0) = \frac{|x'(0).y''(0) - x''(0).y'(0)|}{(x'(0)^2 + y'(0)^2)^{3/2}} = \frac{|0-4|}{(0+4)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo.- Determinar la curvatura k de la curva y = ln x en el punto (e, 1).

Solución

$$y = \ln x \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow y''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

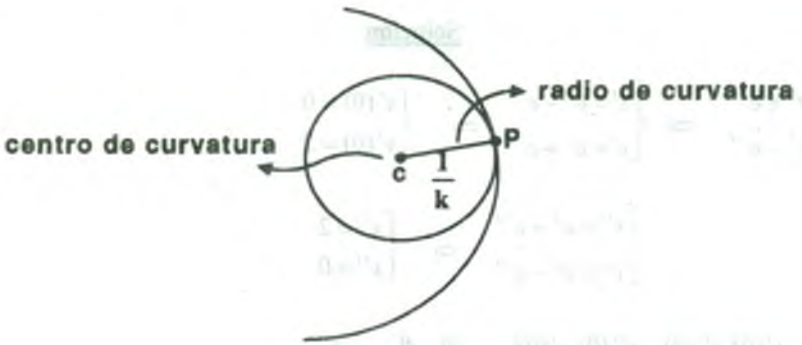
de donde $y'(e) = \dfrac{1}{e} \Rightarrow y''(e) = -\dfrac{1}{e^2}$

$$k(e)=\frac{|y''(e)|}{(1+y'(e)^2)^{3/2}}=\frac{\frac{1}{e^2}}{(1+\frac{1}{e^2})^{3/2}}=\frac{e}{(1+e^2)^{3/2}} \qquad \therefore \quad k(e)=\frac{e}{(1+e^2)^{3/2}}$$

2.45 Definición.-

Consideremos una curva $C:\vec{f}(t)$; el radio de curvatura ρ(t) en el punto $\vec{f}(t)$ de la curva C es el recíproco de la curvatura en ese punto, es decir $\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$, si $k(t)\neq 0$.

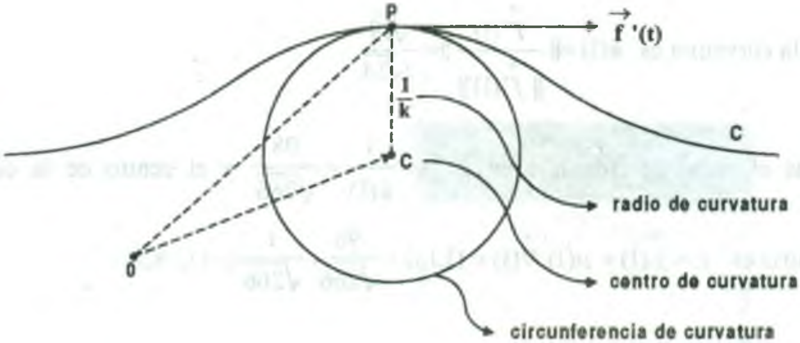
Llamaremos centro de curvatura de C en $\vec{f}(t)$ al punto $C=\vec{f}(t)+\rho(t)\vec{N}(t)$, donde $\vec{N}(t)$ es el vector normal principal.



El centro de curvatura se encuentra en el lado cóncavo de la curva.

Ahora consideremos un punto P de la curva donde k ≠ 0, considérese el círculo tangente a la curva C en P que tiene la misma curvatura.

EL círculo cuyo centro es el centro de curvatura y su radio de curvatura se llama círculo de curvatura (o círculo osculador o circunferencia osculatriz).



Ejemplo.- Hallar la circunferencia osculatriz de la curva $\vec{f}(t)=(t,t^2,t^3)$ en el punto t = 1.

Solución

Calculando la curvatura $k(1)=\left\|\dfrac{\vec{T}'(1)}{\|\vec{f}'(1)\|}\right\|$

$\vec{f}'(t)=(1,2t,3t^2) \Rightarrow \vec{f}'(1)=(1,2,3) \Rightarrow \|\vec{f}'(1)\|=\sqrt{14}$

$\|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$ de donde la tangente unitaria

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}},\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}},\frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right)$$

$$\vec{T}'(t)=\left(-\frac{4t+18t^3}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}},\frac{2-18t^4}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}},\frac{12t^3+6t}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{T}'(1)=\left(-\frac{11}{7\sqrt{14}},-\frac{8}{7\sqrt{14}},\frac{9}{7\sqrt{14}}\right) \Rightarrow \|\vec{T}'(1)\|=\frac{\sqrt{19}}{7}$$

$$\vec{N}(1)=\frac{\vec{T}'(1)}{\|\vec{T}'(1)\|}=\frac{1}{\sqrt{266}}(-11,-8,9)$$

como la curvatura es $k(1)=\|\dfrac{\vec{T}'(1)}{\|\vec{f}'(1)\|}\|=\dfrac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}$

además el radio de curvatura es $\rho(1)=\dfrac{1}{k(1)}=\dfrac{98}{\sqrt{266}}$ y el centro de la circunferencia osculatriz es $c=\vec{f}(1)+\rho(1)\vec{N}(1)=(1,1,1)+\dfrac{98}{\sqrt{266}}.\dfrac{1}{\sqrt{266}}(-11,-8,9)$

$c(-\dfrac{58}{19},-\dfrac{37}{19},\dfrac{82}{19})$

Luego la ecuación de la circunferencia osculatriz es:

$$(x+\frac{58}{19})^2+(y+\frac{37}{19})^2+(z-\frac{82}{19})^2=\frac{686}{19}$$

2.46 Torsión.-

La torsión o curvatura de torsión es un número real que indica el levantamiento de una curva C en un punto respecto de su plano osculador en dicho punto.

Este valor está determinado por la razón de cambio instantáneo del vector binormal respecto a la longitud de arco, es decir $\dfrac{\vec{B}'}{S'}$, como este vector es paralelo a la normal principal $\vec{N}$, es decir $\dfrac{\vec{B}'}{S'}$ es igual a $\vec{N}$ multiplicado por un número real; al opuesto de este número real se denomina Torsión de la curva C en $\vec{f}(t)$ y denotaremos por τ es decir:

$$\boxed{\frac{\vec{B}'}{S'}=-\tau\,\vec{N}\ \Rightarrow\ \vec{B}'=-S'\tau\,\vec{N}}$$

Observación.- Si la curva C: $\vec{f}(t)$ es plana, entonces su torsión es nula ($\tau=0$), por lo tanto $\vec{B}$ es constante, la ecuación del plano osculador es el mismo en todos los puntos, al recíproco de la Torsión se denomina radio de Torsión.

Observación.-

1) Si $\vec{\gamma}:[0,L]\longrightarrow R^3$ es una curva parametrizada en términos de la longitud de arco, entonces se tiene:

$$\boxed{\tau(S)=\frac{(\vec{\gamma}'(S)x\vec{\gamma}''(S)).\vec{\gamma}'''(S)}{\|\vec{\gamma}'(S)\|^2}}$$

2) Si $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3$ es una curva parametrizada arbitraria entonces se tiene:

$$\boxed{\tau(t)=\frac{(\vec{\alpha}'(t)x\vec{\alpha}''(t)).\vec{\alpha}'''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)x\vec{\alpha}''(t)\|^2}}$$

Ejemplo.- Hallar la Torsión de la curva $\vec{\alpha}(t)=(t^2,t,t^4)$ en el punto t = 1.

Solución

$$\vec{\alpha}(t)=(t^2,t,t^4)\Rightarrow\begin{cases}\vec{\alpha}'(t)=(2t,1,4t^3)\\ \vec{\alpha}''(t)=(2,0,12t^2)\\ \vec{\alpha}'''(t)=(0,0,24t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{\alpha}'(1)=(2,1,4)\\ \vec{\alpha}''(1)=(2,0,12)\\ \vec{\alpha}'''(1)=(0,0,24)\end{cases}$$

$$\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&4\\2&0&12\end{vmatrix}=(12,-16,-2)\text{ entonces }\|\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)\|=\sqrt{144+256+4}=\sqrt{404}$$

$$\tau(1)=\frac{\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1).\vec{\alpha}'''(1)}{\|\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)\|^2}=\frac{(12,-16,-2).(0,0,24)}{404}=-\frac{48}{404}=-\frac{12}{101}$$

2.47 Fórmula de Frenet-Serret.-

Las fórmulas de Frenet - Serret, son las que describen el movimiento del triedro móvil a lo largo de la curva C y son:

a) $\vec{T}'(t) = k(t)S'(t)\vec{N}(t)$

b) $\vec{B}'(t) = -\tau\ S'(t)\vec{N}(t)$

c) $\vec{N}(t) = -k(t)S'(t)\vec{T}'(t) + \tau\ S'(t)\vec{B}(t)$

Las dos primeras fórmulas se obtiene de las definiciones de curvatura y Torsión.

La tercera fórmula se obtiene de $\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$ de donde:

$$\vec{N}'(t) = \vec{B}'(t) \times \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \times \vec{T}'(t) = (-\tau\ S'(t)\vec{N}(t)) \times \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \times (k(t)S'(t)\vec{N}(t))$$

$$= -\tau\ S'(t)(\vec{N}(t) \times \vec{T}(t)) + k(t)S'(t)(\vec{B}(t) \times \vec{N}(t))$$

$$= \tau\ S'(t)(\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)) - k(t)S'(t)\vec{N}(t) \times \vec{B}(t)$$

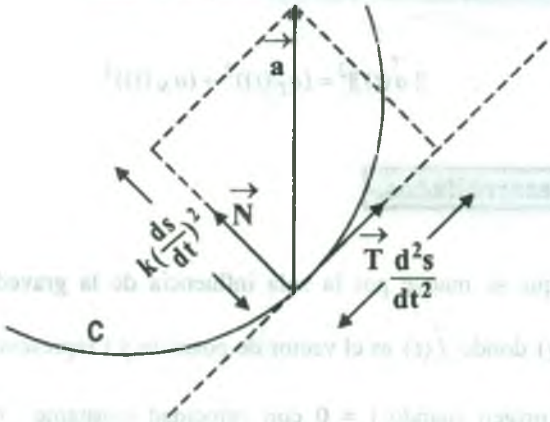
$$\therefore\ \vec{N}'(t) = \tau\ S'(t)\vec{B}(t) - k(t)S'(t)\vec{T}(t)$$

2.48 Componente Normal y Tangencial de la Aceleración.-

Consideremos un punto $P \in C$: $\vec{f}(t)$ de una curva plana, el vector unitario normal $\vec{N}(t)$ en ρ definiremos mediante. $\vec{N} = \dfrac{\dfrac{d\vec{T}}{dS}}{\left\| \dfrac{d\vec{T}}{dS} \right\|} = \dfrac{1}{k}\dfrac{d\vec{T}}{dS}$, de donde $\dfrac{d\vec{T}}{dS} = k\,\vec{N}$

ahora bien $\vec{T} = \cos\theta.\vec{i} + \operatorname{sen}\theta.\vec{j}$, de donde

$\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{d\vec{T}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dS} = (-\operatorname{sen}\theta . \vec{i} + \cos\theta . \vec{j})\frac{d\theta}{dS}$ de lo cual se sigue que $\vec{T} . \vec{N} = 0$, por lo tanto $\vec{N}$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{T}$ y que apunta al lado cóncavo de la curva.



Ahora expresaremos la aceleración vectorial $\vec{a}(t)$ en términos de $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$, es decir la descomposición del vector $\vec{a}(t)$ en sus componentes Tangencial y normal a la curva C: $\vec{f}(t)$, puesto que el vector velocidad $\vec{V}(t)$ satisface.

$$\vec{V}(t) = \| \vec{V}(t) \| \vec{T}(t) = \frac{dS}{dt} . \vec{T}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} . \vec{T}(t) + \frac{dS}{dt} . \frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} . \vec{T}(t) + \frac{dS}{dt} . \frac{d\vec{T}(t)}{dt} . \frac{dS}{dt}$$

de donde se tiene: $\vec{a}(t) = \frac{d^2S}{dt^2} . \vec{T}(t) + (\frac{dS}{dt})^2 k\, \vec{N}(t)$

Luego a $\vec{a}(t)$ expresaremos en la forma:

$\vec{a}(t) = a_T(t)\, \vec{T}(t) + a_N(t)\, \vec{N}(t)$ donde las componentes de la tangente y normal son:

$$\boxed{a_T(t)=\frac{d^2S}{dt^2} \quad \text{y} \quad a_N(t)=k(\frac{dS}{dt})^2}$$

para calcular $a_N(t)$ se necesita calcular la curvatura k, sin embargo, esto se puede evitar al advertir que $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ son perpendiculares por lo tanto:

$$\|\vec{a}(t)\|^2=(a_T(t))^2+(a_N(t))^2$$

2.49 Ejercicios Desarrollados.-

1) Una partícula que se mueve por la sola influencia de la gravedad, tiene por aceleración $\vec{f}''(t)=(0,0,-g)$ donde $\vec{f}(t)$ es el vector de posición y t representa el tiempo, si la partícula parte desde el origen cuando t = 0 con velocidad constante $\vec{V}(t)=(2,0,1)$ probar que: $\vec{f}(t)=(2t,0,t-\frac{1}{2}gt^2)$

Solución

Se conoce que $\vec{a}(t)=\vec{f}''(t)=(0,0,-g)$, además

$\vec{V}(t)=\int\vec{f}(t)dt=\int(0,0,-g)dt=(c_1,c_2,-gt+c_3)$ como

$\vec{V}(0)=(2,0,1) \Rightarrow \vec{V}(0)=(c_1,c_2,c_3)=(2,0,1)$ entonces $c_1=2$, $c_2=0$, $c_3=1$ por lo tanto

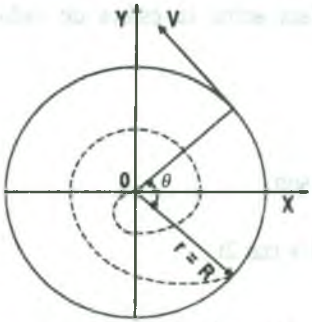
$\vec{V}(t)=(2,0,-gt+1)$ integrando $\vec{f}(t)=\int\vec{V}(t)dt=\int(2,0,1-gt)dt=(2t+c_1,c_2,t-g\frac{t^2}{2}+c_3)$

como $\vec{f}(0)=(0,0,0) \Rightarrow \vec{f}(0)=(c_1,c_2,c_3)=(0,0,0)$ entonces $c_1=c_2=c_3=0$

$$\therefore\ \vec{f}(t)=(2t,0,t-g\frac{t^2}{2})$$

2) Un móvil se mueve con velocidad constante, V > 0 siguiendo en trayectoria circular de radio r, un cohete lo persigue con velocidad también constante V partiendo del centro de la circunferencia y manteniéndose siempre en la recta que une el centro y el blanco. ¿Cuándo da en el blanco el cohete?

Solución



V cohete = V = móvil = constante

radio = constante y V = constante entonces su vector de posición será: $\vec{R} = R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y su velocidad será $\vec{V} = \vec{R}'(t) = R(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\dfrac{d\theta}{dt}$

$\|\vec{V}\| = V = R\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}\,\dfrac{d\theta}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt}$ entonces

$V = R\dfrac{d\theta}{dt}$ **... (1)** , para el cohete su vector de posición será

$$\vec{r} = r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\frac{dr}{dt} + r(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \text{V} = \text{constante}$$

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \textbf{... (2)}$$

pero de la ecuación (1) se tiene $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{V}{r}$ que reemplazando en (2) tenemos

$V^2 = \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\dfrac{V^2}{R^2}$, despejando tenemos $\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 = \dfrac{V^2}{R^2}(R^2 - r^2) \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{V}{R}\sqrt{R^2 - r^2}$

$\dfrac{R}{V}\dfrac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = dt$, integrando ambos miembros.

$$\frac{R}{V}\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=\int_0^t dt \Rightarrow \frac{R}{V}\text{arcsen}\frac{r}{R}\Big/_0^R = t \text{ de donde } \frac{R}{V}\text{arcsen}\,1 = t \Rightarrow t=\frac{R\pi}{2V}$$

donde R y V son datos y π constante.

3) Dada la curva engendrada por la función vectorial de variable real $\vec{f}(t)=(-1+\text{sen}\,2t.\cos 3t, 2+\text{sen}\,2t.\text{sen}\,3t, -3+\cos 2t)$ ¿Está sobre la esfera de radio 1 y centro (-1,2,-3)?

Solución

Las ecuaciones parametricas de la función vectorial $\vec{f}(t)$ son:

x = -1 + sen 2t. cos 3t , y = 2 + sen 2t. sen 3t , z = -3 + cos 2t

La curva C: $\vec{f}(t)$ está sobre la superficie esférica de radio 1 y centro (-1,2,-3) si al eliminar el parámetro t de las ecuaciones paramétricas se obtiene la ecuación de la esfera de radio 1 y centro (-1,2,-3).

$$\begin{cases} x=-1+sen2t.\cos 3t \\ y=2+sen2t.sen3t \\ z=-3+\cos 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (x+1)^2 = sen^2 2t.\cos^2 3t \\ (y-2)^2 = sen^2 2t.sen^2 3t \\ \underline{(z+3)^2 = \cos^2 2t} \end{array}$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = sen^2 2t(\cos^2 3t+sen^2 3t)+\cos^2 2t)$$

$$= \text{sen}^2 2t+\cos^2 2t = 1$$

$$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1$$

4) Sean C_1 y C_2 las curvas descritas por:

C_1: $\vec{f}(t)=(\int_0^t \text{sen}\,x\,dx, \cos t, \frac{2t}{\pi}-1)$, $t\in[0,\pi]$

C_2: $\vec{g}(\theta)=(e^{\theta}, 1-e^{2\theta}, 2-2e^{\theta})$, θ ∈ R

Hallar, si existe, la intersección de C_1 y C_2; en caso de que exista, hallar el ángulo de intersección.

Solución

A la curva C_1 se expresa $\vec{f}(t) = (1-\cos t, \cos t, \frac{2t}{\pi} - 1)$

Si $\exists\, p \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow p \in C_1 \colon \vec{f}(t) \wedge p \in C_2 \colon \vec{g}(\theta)$

entonces $p(1-\cos t, \cos t, \frac{2t}{\pi} - 1) = p(e^{\theta}, 1-e^{2\theta}, 2-2e^{\theta})$ para algún $t, \theta \in R$.

$$\begin{cases} 1-\cos t = e^{\theta} \\ \cos t = 1-e^{2\theta} \\ \frac{2t}{\pi} - 1 = 2-2e^{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\theta} = 1-\cos t & \ldots (1) \\ e^{2\theta} = 1-\cos t & \ldots (2) \\ e^{\theta} = \frac{3}{2} - \frac{t}{\pi} & \ldots (3) \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{g'(0)}{\| g'(0) \|} \cdot \frac{f'(\frac{\pi}{2})}{\| f'(\frac{\pi}{2}) \|}$$

igualando (1) y (2) se tiene $e^{2\theta} = e^{\theta} \Rightarrow \theta = 0$

$g'(\theta) = (e^{\theta}, -2e^{\theta}, -2e^{\theta})$

como $e^{\theta} = \frac{3}{2} - \frac{t}{\pi} \Rightarrow$ para $\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

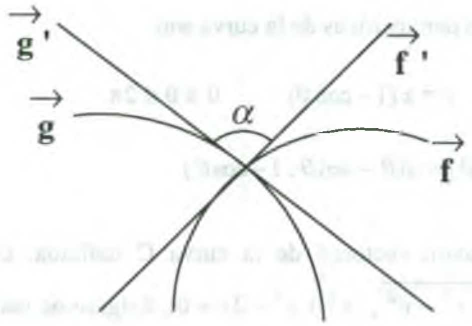
$g'(0) = (1,-2,-2)$

Luego $\vec{f}(\frac{\pi}{2}) = (1,0,0) = \vec{g}(0) \Rightarrow \exists\, p \in C_1 \cap C_2$

$f'(\frac{\pi}{2}) = (\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \frac{2}{\pi})$

ahora calcularemos el ángulo de intersección.

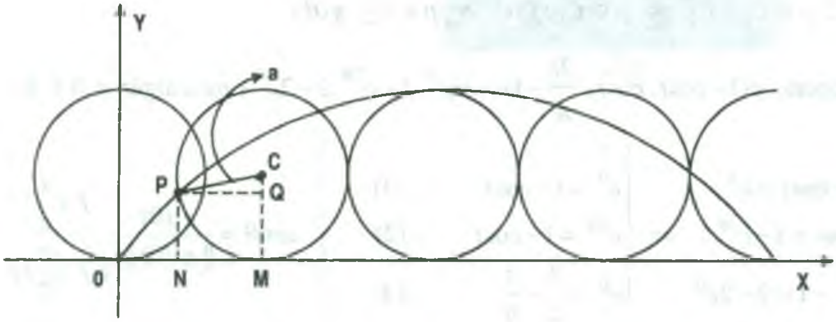
$$\cos\theta = \frac{(1,-2,-2)}{\sqrt{1+4+4}} \cdot \frac{(1,-1,\frac{2}{\pi})}{\sqrt{1+1+\frac{4}{\pi}}}$$



5) Hallar la representación paramétrica de la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a (a > 0) que rueda (sin deslizamiento) sobre una recta.

Solución

Supongamos que la curva es descrita por el punto P(x,y) y además supongamos que el punto P comienza a rodar a partir del origen de coordenadas y la recta sobre el cual rueda la circunferencia es el eje X.



Sea $\overline{OM} = arc.\,\overline{MP} = a\theta$ **... (1)**

En el Δ CQP, tenemos $\overline{PQ} = a\,\text{sen}\,\theta$ y $\overline{CQ} = a\cos\theta$

para $\overline{ON} = \overline{OM} = \overline{NM} = a\theta - \overline{PQ} = a\theta - a\,\text{sen}\,\theta$

entonces $x = a\,\theta - a\,\text{sen}\,\theta$

$y = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{MC} - \overline{CQ} = a - a\cos\theta$ entonces $y = a - a\cos\theta$

Luego las ecuaciones parametricas de la curva son

$x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

es decir: $\vec{f}(\theta) = a(\theta - \text{sen}\,\theta,\ 1 - \cos\theta)$

6) Hallar la representación vectorial de la curva C definida, como la intersección de las superficies $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$, dirigido de manera que z decrece cuando x es positiva. Luego graficar la curva C y determinar una expresión para la longitud del arco.

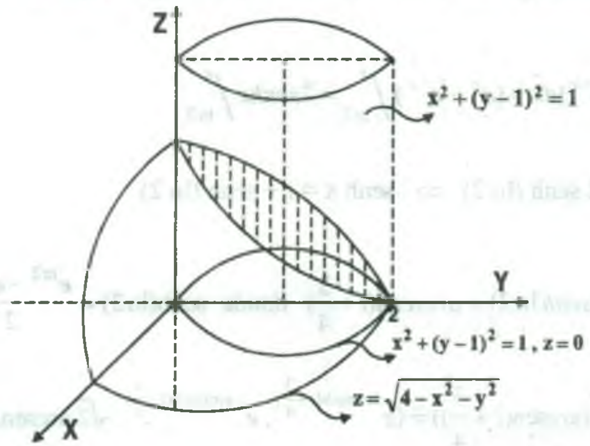
Solución

a) De la ecuación $x^2+y^2-2y=0$ se tiene $x^2+y^2=2y$ que reemplazando en $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ resulta $z=\sqrt{4-2y}$ ahora si y = t se tiene las ecuaciones parametricas de la curva, $x=\pm\sqrt{2t-t^2}$, y = t, $z=\sqrt{4-2t}$

$$\therefore\ \vec{f}(t)=(\pm\sqrt{2t-t^2},\ t,\ \sqrt{4-2t}).$$

b) De la ecuación $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ tendremos que $x^2+y^2+z^2=4$ que es la ecuación de la esfera de centro (0,0,0) y radio r = 2.

La ecuación $x^2+y^2=2y$ y se expresa $x^2+(y-1)^2=1$, (z = 0, $x^2+(y-1)^2=1$ circunferencia en el Plano XY) que viene a ser un cilindro de centro (0,1,0) y radio 1 en R^3 y generatriz al eje Z, es decir:



c) Como $\vec{f}(t)=(\pm\sqrt{2t-t^2},\ t,\ \sqrt{4-2t})$, calculamos su dominio es decir:

$2t-t^2\geq 0\ \wedge\ 4-2t\geq 0 \Rightarrow t\in[0,2]$

$$\vec{f}'(t)=(\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}},1,-\frac{1}{\sqrt{4-2t}}) \Rightarrow \|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{\frac{9t+2}{4t-2t^2}} \text{ por lo tanto } S=\int_0^2\sqrt{\frac{9t+2}{4t-2t^2}}dt$$

7) Una particular parte del punto $(2,\frac{1}{2},\sqrt{2}\ln 2)$ en el instante t = 0 y se desplaza sobre la curva de ecuación $C: \vec{f}(x)=(e^x,e^{-x},\sqrt{2}x)$, de tal manera que en cada instante t, la distancia recorrida sobre la curva es 2t. Hallar una función vectorial en términos de t que describa el movimiento.

Solución

Expresaremos x en términos de t, mediante la condición

$$2t=\int_{\ln 2}^{x}\|\vec{f}'(x)\|dx \quad \text{de donde} \quad \vec{f}(x_0)=(2,\frac{1}{2},\ln 2) \quad \text{entonces}$$

$$(e^{x_0},e^{-x_0},\sqrt{2}x_0)=(2,\frac{1}{2},\sqrt{2}\ln 2)\Rightarrow e^{x_0}=2\Rightarrow x_0=\ln 2$$

$$\vec{f}(x)=(e^x,e^{-x},\sqrt{2}x_0)\Rightarrow \vec{f}'(x)=(e^x,-e^{-x},\sqrt{2})\Rightarrow \|\vec{f}'(x)\|=\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}=e^x+e^{-x}$$

$$2t=\int_{\ln 2}^{x}(e^x+e^{-x})dx=(e^x-e^{-x})\Big/_{\ln 2}^{x}=2senhx\Big/_{\ln 2}^{x}$$

2t = 2 senh x - 2 senh (ln 2) $\Rightarrow$ senh x = t + senh (ln 2)

$$x=arcsenh(t+senh\ln 2)=arcsenh(t+\frac{3}{4}) \quad \text{donde} \quad \text{senh}(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\vec{g}(t)=\vec{f}(t)=\vec{f}(\text{arcsen}(t+\frac{3}{4}))=(e^{\text{arcsen}h(t+\frac{3}{4})},e^{-\text{arcsen}h(t+\frac{3}{4})},\sqrt{2}\,\text{arcsen}h(t+\frac{3}{4}))$$

8) Una función vectorial $\vec{f}$ satisface a la ecuación $t\vec{f}'(t)=\vec{f}(t)+t\vec{A}$, $\forall$ t $\geq$ 0, donde $\vec{A}$ es un vector fijo, calcular $\vec{f}''(1)$ y $\vec{f}(3)$ en función de $\vec{A}$ si $\vec{f}(1)=2\vec{A}$

Solución

Derivando a la ecuación $t\vec{f}'(t)=\vec{f}(t)+t\vec{A}$ se tiene:

$$\vec{f}'(t)+t\,\vec{f}''(t)=\vec{f}'(t)+\vec{A} \Rightarrow \vec{f}''(t)=\frac{\vec{A}}{t} \Rightarrow \vec{f}''(1)=\vec{A}$$ integrando $\vec{f}''(t)=\frac{\vec{A}}{t}$ se tiene.

$$\int \vec{f}''(t)dt=\int \frac{\vec{A}}{t}dt+\vec{c} \Rightarrow \vec{f}'(t)=\vec{A}\ln t+\vec{c}$$

$\vec{f}'(1)=\vec{c}$ y para calcular el vector constante $\vec{c}$ se sabe que

$t\,\vec{f}'(t)=\vec{f}(t)+t\,\vec{A} \Rightarrow \vec{f}'(t)=\dfrac{\vec{f}(t)+t\,\vec{A}}{t}$ y como $\vec{f}(1)=2\vec{A} \Rightarrow \vec{f}'(1)=\vec{f}(1)+\vec{A}$

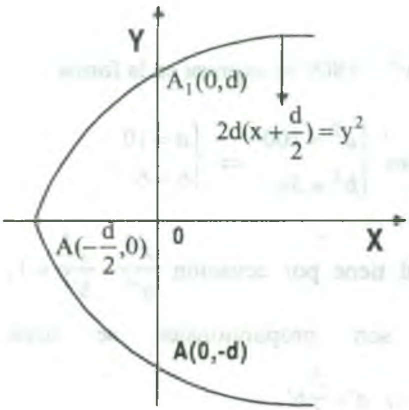
entonces $\vec{c}=3\vec{A}$ por lo tanto $\vec{f}'(t)=\vec{A}\ln t+3\vec{A}$, integrando $\vec{f}(t)=(t\ln t-t)\vec{A}+3\vec{A}t+\vec{k}$

como $\vec{f}(1)=2\vec{A} \Rightarrow \vec{f}(1)=2\vec{A}+\vec{k} \Rightarrow 2\vec{A}=2\vec{A}+\vec{k} \Rightarrow \vec{k}=0$ por lo tanto

$\vec{f}(t)=(t\ln t-t)\vec{A}+3\vec{A}t$ de donde $\vec{f}(3)=(3\ln 3+6)\vec{A}$

9) Si $\vec{f}(t)=\dfrac{d}{1-\cos t}(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $d>0$, describe una parábola, hallar el ángulo que forma los vectores $\vec{f}'(t_1)$ y $\vec{f}'(t_2)$, donde $\vec{f}(t_1)$ es el vértice y $\vec{f}(t_2)$ el extremo del lado recto.

Solución



$$\vec{f}(t)=\left(\frac{d\cos t}{1-\cos t},\frac{d\operatorname{sen} t}{1-\cos t}\right) \quad \text{... (1)}$$

$$\vec{f}'(t)=\left(-\frac{d\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)^2},\frac{-d}{1-\cos t}\right) \quad \text{... (2)}$$

Evaluando la ecuación (1)

$$\vec{f}(0)=(\infty,\infty),\ \vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,d),\ \vec{f}(\pi)=\left(-\frac{d}{2},0\right),$$

$$\vec{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=(0,d)\ ,\ \vec{f}(2\pi)=(\infty,\infty>$$

Lado recta = $LR = d(A_1, A_2)$, donde $A_1(0,d)$, $A_2(0,-d)$

$$\vec{f}(t_2) = (\frac{d\cos t_2}{1-\cos t_2}, \frac{d\,\text{sen}\,t_2}{1-\cos t_2}) = (0,d) \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}$$

como el vértice es $V = (-\frac{d}{2}, 0)$, entonces

$$\vec{f}(t_1) = (\frac{d\cos t_1}{1-\cos t_1}, \frac{d\,\text{sen}\,t_1}{1-\cos t_1}) = (-\frac{d}{2}, 0) \Rightarrow t_1 = \pi$$

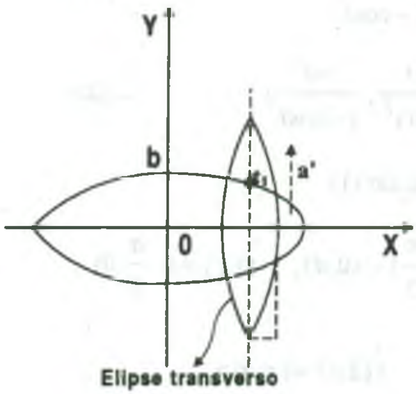
como $\vec{f}'(t) = (-\frac{d\,\text{sen}\,t}{(1-\cos t)^2}, \frac{-d}{1-\cos t}) \Rightarrow \vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{d}{2}, -d)$ y $\vec{f}'(\pi) = (0, -\frac{d}{2})$

además $\cos\theta = \dfrac{\vec{f}'(\frac{\pi}{2}).\vec{f}'(\pi)}{\|\vec{f}'(\frac{\pi}{2})\|\,\|\vec{f}'(\pi)\|} = \dfrac{\frac{d^2}{5}}{\frac{d^2\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \theta = \arccos(\frac{2\sqrt{5}}{5})$$

10) Dada la elipse $18x^2 + 50y^2 = 1800$, alrededor de esta curva se forma un sólido de manera que todas las secciones perpendiculares al eje de las X son elipses cuyos focos están sobre la elipse dada, los ejes mayor y menor de cada sección son proporcionales a los de la elipse dada. Hallar el volumen del sólido.

Solución



La elipse $18x^2 + 50y^2 = 1800$ se expresa en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ entonces } \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases}.$$

La elipse transversal tiene por ecuación $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$, como los ejes son proporcionales se tiene

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{10}{a'} = \frac{6}{b'} \Rightarrow a' = \frac{5}{3}b'.$$

Según la figura $0' f_1 = c = y = \frac{3}{5}\sqrt{100-x^2}$ ... **(1)**

y según la propiedad de la elipse:

$c'^2 + b'^2 = a'^2 \Rightarrow c'^2 = a'^2 - b'^2$ como $a'^2 = \frac{5}{3}b'$ se tiene

$$c'^2 = \frac{25b'^2}{9} - b'^2 = \frac{16}{9}b'^2 \Rightarrow b'^2 = 9c'^2 \qquad ...(2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $b'^2 = \frac{9}{16} - \frac{9}{25}(100-x^2)$

el área transversal es: $A(x) = \pi\, a'b'$

$A(x) = \pi \frac{5}{3} b'^2 = \frac{27\pi}{8}(100-x^2)$, luego

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx = 2\int_0^{10} \frac{27}{80}\pi(100-x^2)\,dx \qquad \therefore\ V = 450\pi\, u^3$$

11) Sea la curva C descrita por $\vec{f}$, que reparametrizada tiene por ecuación $\vec{h}(s) = (\frac{s}{\|\vec{f}(0)\|} + 1)\vec{f}(0)$ y se sabe que $\frac{d^2\vec{h}(s)}{ds^2} = k^2\vec{f}(0)(\frac{dt}{ds})^2 e^{kt} + k\frac{d^2 t}{ds^2}\vec{f}(0)e^{kt}$. Hallar la ecuación vectorial de la curva C en términos de t.

Solución

por determinar C: $\vec{H}(t) = H(\psi(s)) = \vec{h}(s)$

como $\vec{h}(s) = (\frac{s}{\|\vec{f}(0)\|} + 1)\vec{f}(0) \Rightarrow \vec{h}'(s) = (\frac{1}{\|\vec{f}(0)\|} + 0)\vec{f}(0)$

$$\vec{h}''(s) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{h}(s)}{ds^2} = 0 \qquad ...\ (1)$$

además $\dfrac{d^2 \vec{h}(s)}{ds^2} = k^2 \vec{f}(0)(\dfrac{dt}{ds})^2 e^{kt} + k\dfrac{d^2t}{ds^2}\vec{f}(0)e^{kt}$ ... **(2)**

de (1) y (2) se tiene:

$k^2 \vec{f}(0)(\dfrac{dt}{ds})^2 e^{kt} + k\dfrac{d^2t}{ds^2}\vec{f}(0)e^{kt} = 0$, simplificando $k(\dfrac{dt}{ds})^2 + \dfrac{d^2t}{ds^2} = 0$, resolviendo esta ecuación sea $p = \dfrac{dt}{ds} \Rightarrow \dfrac{dp}{ds} = \dfrac{d^2t}{ds^2}$ reemplazando se tiene:

$kp^2 + \dfrac{dp}{ds} = 0 \Rightarrow k\,ds + \dfrac{dp}{p^2} = 0$, integrando $ks - \dfrac{1}{p} = c \Rightarrow ks - c = \dfrac{1}{p}$, de donde

$p = \dfrac{1}{ks-c} \Rightarrow \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{ks-c} \Rightarrow dt = \dfrac{ds}{ks-c}$ integrando $t = \dfrac{1}{k}\ln(ks-c) + c_1$ entonces

$(t-c_1)k = \ln(ks-c) \Rightarrow ks - c = e^{(t-c_1)k} = Ae^{kt} \Rightarrow Ae^{kt} = ks - c$ de donde

$s = \dfrac{c + Ae^{kt}}{k} = \psi(t)$ .... **(3)** , reemplazando (3) en la función

$$\vec{h}(s) = (\frac{s}{\|\vec{f}(0)\|} + 1)\vec{f}(0) \Rightarrow \vec{H}(t) = H(\psi(t)) = \vec{h}(s)$$

$$\vec{h}(s) = \vec{h}(\frac{c+Ae^{kt}}{k}) = H(t) = (\frac{\frac{c+Ae^{kt}}{k}}{\|\vec{f}(0)\|} + 1)\vec{f}(0)$$

$$\therefore \vec{H}(t) = (\frac{c+Ae^{kt}}{k\|\vec{f}(0)\|} + 1)\vec{f}(0)$$

12) Una partícula se mueve en el plano XY, según la ecuación $x = e^{-2t}\cos 3t$, $y = e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$, encontrar la longitud de la trayectoria desde el punto t = 0 a t = π.

Solución

Sea C: $\vec{f}(t)=(e^{-2t}\cos 3t,\ e^{-2t}\operatorname{sen} 3t)$, derivando se tiene

$$\vec{f}'(t)=e^{-2t}(2\cos 3t+3\operatorname{sen} 3t,\ 3\cos 3t-2\operatorname{sen} 3t)$$

$$\|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{e^{-4t}\left[(2\cos 3t+3\operatorname{sen} 3t)^2+(3\cos 3t-2\operatorname{sen} 3t)^2\right]}=\sqrt{13}\,e^{-2t}$$

Luego $L=\int_0^{\pi}\|\vec{f}'(t)\|dt=\int_0^{\pi}\sqrt{13}e^{-2t}dt=-\frac{\sqrt{13}e^{-2t}}{2}\Big/_0^{\pi}$

$$\therefore\quad L=\frac{\sqrt{13}}{2}(1-e^{-2\pi})$$

13) Calcular la longitud de la curva cuyas coordenadas cilíndricas son $r=1,\ \theta=t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$.

Solución

Las ecuaciones de la curva en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \\ z=t \end{cases}$$

Luego C: $\vec{f}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,\ t)$, $t\in[0,2\pi]$, calculando su derivada

$\vec{f}'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t,1)$ de donde $\|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{2}$ entonces

$$L=\int_0^{2\pi}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}dt=2\sqrt{2}\pi \qquad \therefore\ L=2\sqrt{2}\pi$$

14) Hallar la longitud de arco de la curva descrita por: C: $\vec{f}(t)=(\int_0^t x\cos x\,dx,\ \int_0^t x\operatorname{sen} x\,dx,\ t)$

Solución

Por determinar $L=\int_0^{t_0}\|\vec{f}'(t)\|\,dt$, de donde

$$\vec{f}'(t)=(t\cos t,t\operatorname{sen} t,1)\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{t^2+1} \qquad \therefore\ L=\int_0^{t_0}\sqrt{t^2+1}\,dt$$

15) Encontrar la longitud de la curva definida por: C: $\vec{\alpha}(t) = (\int_0^t \frac{\cos u}{u} du, \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du, 4\sqrt{t})$ entre t = 1 y $t = t_1$, sabiendo que $\vec{\alpha}(t_1)$ es el punto donde $\vec{\alpha}'(t_1)$ es paralelo al plano YZ; $1 < t_1 < 2$

Solución

como $\vec{\alpha}(t) = (\int_0^t \frac{\cos u}{u} du, \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du, 4\sqrt{t})$, derivando se tiene:

$$\vec{\alpha}'(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \frac{2}{\sqrt{t}}) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t_1) = (\frac{\cos t_1}{t_1}, \frac{\operatorname{sen} t_1}{t_1}, \frac{2}{\sqrt{t_1}})$$

como $\vec{\alpha}'(t_1) // \text{Plano YZ} \Rightarrow \vec{\alpha}'(t_1) \perp \vec{i} = (1,0,0)$ entonces

$$\vec{\alpha}'(t_1).\vec{i} = 0 \Rightarrow (\frac{\cos t_1}{t_1}, \frac{\operatorname{sen} t_1}{t_1}, \frac{2}{\sqrt{t_1}}).(1,0,0) = 0$$

$$\frac{\cos t_1}{t_1} = 0 \Rightarrow \cos t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$$

además $\vec{\alpha}'(t) = (\frac{\cos t}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \frac{2}{\sqrt{t}}) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \frac{\sqrt{1-4t^2}}{t}$

$$L = \int_1^{\pi/2} \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_1^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+4t^2}}{t} dt = \sqrt{2\pi+1} - \sqrt{5} + \ln(\frac{(\sqrt{2\pi+1}-1)(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{2}\,\pi})$$

16) Una curva está definida por las ecuaciones parametricas $x = \sqrt{a^2 - t^2}$, $y = a\ln(\frac{a+t}{\sqrt{a^2-t^2}}) - t$, longitud de esta curva desde t = 0 hasta $t = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ es, a ln c calcular el valor de c.

Solución

Se conoce que $L = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\, dt = a\ln c$

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - t^2} \\ y = a\ln(\dfrac{a+t}{\sqrt{a^2-t^2}}) - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{a^2-t^2} \end{cases}$$

$$L = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \sqrt{\frac{t^2}{a^2-t^2} + \frac{t^4}{(a^2-t^2)^2}}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{a\,t}{a^2-t^2}\,dt = a\ln c$$

$$-\frac{a}{2}\ln(a^2-t^2) \Big/_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = a\ln c \text{ , donde}$$

$$-\frac{a}{2}[\ln\frac{a^2}{4} - \ln a^2] = a\ln c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln 4 = \ln c \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

17) Consideremos dos curvas, definidas por: $C_1 : \vec{f}(t) = (t, e^t)$, $0 \le t \le 1$, C_2: $\vec{g}(t) = (t + \ln t, t - \ln t)$, $1 \le t \le e$ donde L_1 y L_2 son sus longitudes, respectivamente, Calcular el valor de $\dfrac{L_2}{L_1}$.

Solución

La longitud de una curva está dado por: $L = \int_a^b \| \vec{f}'(t) \|\, dt$, calcularemos la longitud L_1 que corresponde a la curva C_1: $\vec{f}(t) = (t, e^t)$, $0 \le t \le 1$

$$\vec{f}'(t) = (1, e^t) \quad \Rightarrow \quad \| \vec{f}'(t) \| = \sqrt{1 + e^{2t}}$$

$$L_1 = \int_0^1 \| \vec{f}'(t) \|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt \qquad \ldots (1)$$

ahora calcularemos la longitud L_2 que corresponde a la curva C_2: $\vec{g}(t) = (t + \ln t, t - \ln t)$, $1 \le t \le e$

$$\vec{g}\,'(t)=(1+\frac{1}{t},1-\frac{1}{t}) \Rightarrow \|\vec{g}\,'(t)\|=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$$L_2=\int_1^e \|\vec{g}\,'(t)\|\,dt=\sqrt{2}\int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt \quad \text{sea} \quad t=e^u \Rightarrow dt=e^u du$$

para t = 1, $e^u=1 \Rightarrow$ u = 0 , t = e, u = 1.

$$L_2=\sqrt{2}\int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt=\sqrt{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+e^{2u}}}{e^u}.e^u du=\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+e^{2u}}\,du=\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$$

Luego $\displaystyle\frac{L_2}{L_1}=\frac{\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\,dt}{\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\,dt}=\sqrt{2} \qquad \therefore \frac{L_2}{L_1}=\sqrt{2}$

18) Hallar la longitud del arco desde t = 0 a $t=\sqrt{2}\,\pi$ de la hélice cónica de ecuación $\rho=t,\ \theta=t,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$

Solución

Sea C: $\rho=t,\quad \theta=t,\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$ la hélice cónica que expresado en coordenadas esféricas se tiene:

$$C:\begin{cases} x=\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow C:\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\cos t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\,\text{sen}\,t \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

Luego C: $\vec{f}(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(t\cos t, t\,\text{sen}\,t, t)$ de donde

$$\vec{f}\,'(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t-t\,\text{sen}\,t,\ \text{sen}\,t+t\cos t,\ 1) \Rightarrow \|\vec{f}\,'(t)\|=\sqrt{2+t^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L=\int_0^{\sqrt{2}\pi}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_0^{\sqrt{2}\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+t^2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{t}{2}\sqrt{2+t^2}+\ln|t+\sqrt{2+t^2}|]\Big/_0^{\sqrt{2}\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi\sqrt{1+\pi^2}+\ln(\pi+\sqrt{1+\pi^2})]=8.6406$$

19) Hallar la longitud de arco de la línea $\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t)$ desde el punto (1,0,1) hasta el punto correspondiente al parámetro t.

Solución

Por calcular $\int_a^t \|\vec{r}'(t)\|\,dt$, donde

$$\vec{r}(a)=(e^a\cos a, e^a\operatorname{sen} a, e^a)=(1,0,1)\Rightarrow a=0$$

$$\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t)\Rightarrow \vec{r}'(t)=(e^t\cos t-e^t\operatorname{sen} t, e^t\operatorname{sen} t+e^t\cos t, e^t)$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{3}e^t$$

$$L=\int_0^t\|\vec{r}'(t)\|\,dt=\int_0^t\sqrt{3}e^t\,dt=\sqrt{3}(e^t-1)$$

20) Consideremos la curva definida por la ecuación C_1: $\vec{f}(t)=(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t)$; C_2: $\vec{g}(t)=(t+1, t^2, t+1)$ $1\le t\le 2\pi$, en cuanto debe de incrementarse t para que la longitud de arco de C_1 se incrementa en $\sqrt{3}(e-1)$ desde el instante en que C_2 intercepta a C_1.

Solución

Calcularemos el punto de intersección de las curvas $p\in C_1$: $\vec{f}(t)\wedge C_2$: $\vec{g}(t)\Rightarrow \vec{f}(t_1)=\vec{g}(t_2)$ es decir:

$(e^{t_1}\cos t_1, e^{t_1}\operatorname{sen} t_1, e^{t_1})=(t_2+1, t_2^2, t_2+1)$, de donde:

$$\begin{cases} e^{t_1}\cos t_1 = t_2+1 & \dots (1) \\ e^{t_1}\operatorname{sen} t_1 = t_2^2 & \dots (2) \\ e^{t_1} = t_2+1 & \dots (3) \end{cases}$$

de (1) y (3) se tiene $e^{t_1}\cos t_1 = e^{t_1} \Rightarrow \cos t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = 0$.

Luego para $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ que satisface la ecuación (2).

Luego el punto de intersección es P(1,0,1), de la condición del problema se tiene

$\int_0^t \| \vec{f}'(t) \| dt = \sqrt{3}(e-1)$ de donde $\vec{f}'(t) = (e^t\cos t - e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t, e^t)$

$\Rightarrow \| \vec{f}'(t) \| = \sqrt{3}e^t$ por lo tanto $\int_0^t \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(e-1) \Rightarrow e^t \Big/_0^t = e-1$

$e^t - 1 = e - 1 \Rightarrow t = 1$, por lo tanto el incremento de t es en t = 1.

21) Consideremos la curva descrita por: $\vec{f}(t) = (t, a\cosh\frac{t}{a}, a\operatorname{senh}\frac{t}{a})$, demuestre que la distancia a largo de la curva desde (0,a,0) hasta P_0 en la curva, es proporcional a la distancia de P_0 en el plano XY.

Solución

como $\int_{t_1}^{t_2} \| \vec{f}'(t) \| dt$ de donde $\vec{f}'(t) = (1, \operatorname{senh}\frac{t}{a}, \cosh\frac{t}{a})$

como $\vec{f}'(t_1) = (0,a,0) \Rightarrow (t, a\cosh\frac{t_1}{a}, a\operatorname{senh}\frac{t_1}{a}) = (0,a,0) \Rightarrow t_1 = 0$

Luego $\int_0^{t_2} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\frac{t}{a} + \cosh^2\frac{t}{a}}\,dt = \int_0^{t_2} \sqrt{2(1+\operatorname{senh}^2\frac{t}{a})}\,dt$

$$= \sqrt{2}\int_0^{t_2} \cosh\frac{t}{a} dt = \sqrt{2}\,a\operatorname{senh}\frac{t}{a} \Big/_0^{t_2} = \sqrt{2}\,a senh\frac{t_2}{a}$$

Sea $P_0 \in C$: $\vec{f}(t) \Rightarrow P_0(t_2, a\cosh\frac{t_2}{a}, a\,\text{senh}\frac{t_2}{a})$ por lo tanto que $L = kd(p_0, P)$, k factor de proporcionalidad.

$L = \sqrt{2}a\,\text{senh}^2\frac{t}{a} = \sqrt{2}d(p_0, P)$ donde $k = \sqrt{2}$ por lo tanto L es proporcional a $d(p_0, P)$.

22) Hallar la longitud de la curva definida por C: $\vec{f}(t) = (t, 1+t^2)$, desde el punto en que $\vec{f}(t)$ y $\vec{f}'(t)$ son paralelos y de sentido contrario hasta el punto en el que los mismos vectores son ortogonales.

Solución

Para determinar $L = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{f}'(t)\|\,dt$, donde t_1 se encuentra con la condición que $\vec{f}(t_1)$ y $\vec{f}'(t_1)$ sean paralelos y de sentido contrario, es decir:

$\vec{f}(t_1) // \vec{f}'(t_1) \Rightarrow \exists \lambda \in R / \vec{f}(t) = \lambda \vec{f}'(t_1)$

de donde $(t_1, 1+t_1^2) = \lambda(1, 2t_1) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \lambda \\ 1+t_1^2 = 2\lambda t_1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 1$ ó $t_1 = -1$

para $t_1 = 1$ se tiene $\vec{f}(1) = (1,2)$ y $\vec{f}'(1) = (1,2)$ como tiene el mismo sentido no se considera $t_1 = 1$ pero para $t_1 = -1$ $\vec{f}(-1) = (-1,2)$, $\vec{f}'(-1) = (1,-2)$ tiene sentido opuestos, por lo tanto $t_1 = -1$ si se considera, ahora calcularemos t_2 con la condición que $\vec{f}(t_2)$ y $\vec{f}'(t_2)$ sean ortogonales es decir: $\vec{f}(t_2) \perp \vec{f}'(t_2) \Rightarrow \vec{f}(t_2).\vec{f}'(t_2) = 0$, de donde $(t_2, 1+t_2^2).(1, 2t_2) = 0 \Rightarrow 2t_2^3 + 3t_2 = 0$

de donde $t_2 = 0$ como $\vec{f}(t) = (t, 1+t^2) \Rightarrow \vec{f}'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$

$$L=\int_{-1}^{0}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})\right]\Big/_{-1}^{0}$$

$$=0-\frac{1}{2}\left[-\sqrt{5}+\ln(-2+\sqrt{5})\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{5}-\ln(\sqrt{5}-2)\right]$$

23) Sea C la curva en el primer octante que resulta de interceptar la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $a>0$ con el cilindro $x^2+(y-a)^2=a^2$, verificar que la longitud de la curva C está dado por la siguiente integral $L=\int_{u}^{2u}\sqrt{\frac{8a^2-t^2}{4a^2-t^2}}\,dt$

Solución

Sea $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\ x^2+(y-a)^2=a^2\end{cases}$, la curva de intersección.

Parametrizando la curva C se tiene:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\ x^2+(y-a)^2=a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}y^2+z^2-(y-a)^2=3a^2\\ z^2+2ay=4a^2\end{array}\quad\text{de donde}$$

$y=\dfrac{4a^2-z^2}{2a}$, para z = t , se tiene: $y=\dfrac{4a^2-z^2}{2a}=2a-\dfrac{t^2}{2a}\Rightarrow y(t)=2a-\dfrac{t^2}{2a}$

como $x^2=4a^2-y^2-z^2$

$$x^2=4a^2-(2a-\frac{t^2}{2a})-t^2$$

$$x=\frac{\sqrt{4a^2t^2-t^4}}{2a}\Rightarrow x(t)=\frac{\sqrt{4a^2t^2-t^4}}{2a}$$

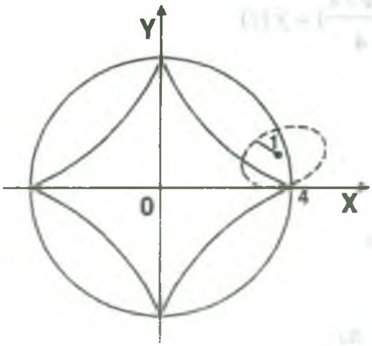
Luego $C:\vec{f}(t)=(\dfrac{\sqrt{4a^2t^2-t^4}}{2a},2a-\dfrac{t^2}{2a},t)$

$$\vec{f}'(t)=(\frac{2a^2t-t^3}{a\sqrt{4a^2t^2-t^4}},-\frac{t}{a},1)\text{ de donde } \|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{\frac{8a^2-t^2}{4a^2-t^2}}$$

$$\therefore\ L=\int_u^{2u}\sqrt{\frac{8a^2-t^2}{4a^2-t^2}}dt$$

24) Hallar una función vectorial de variable real que tenga como rango la curva trazada por un punto P, que está sobre una circunferencia de radio 1, cuando ésta rueda sobre el lado interior del círculo de radio 4. ¿Cuál es la longitud total de ésta curva?.

Solución



La ecuación cartesiana es: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ de donde

$x=4\cos^3\theta$, $y=4\operatorname{sen}^3\theta$

$x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)$

$x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$; por lo tanto se tiene:

$\vec{f}(\theta)=(4\cos^3\theta,4\operatorname{sen}^3\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$

Luego $L=4\int_0^{\pi/2}\|\vec{f}'(\theta)\|d\theta$, de donde

$$\vec{f}'(\theta)=(-12\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta,12\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(\theta)\|=12\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$L=4\int_0^{\pi/2}12\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta=24\operatorname{sen}^2\theta\Big/_0^{\pi/2}=24,\quad \therefore\ L=24\text{ u}$$

25) Sea C una curva descrita por la función vectorial

$\vec{\alpha}(t)=(\int_0^t 2\cos(\pi u^2)du,\int_0^t 2sen(\pi u^2)du,\ 2\sqrt{3}t)$, $t\geq 0$. Hallar la curvatura k de C en términos del parámetro longitud de arco S el cual se mida a partir del punto (0,0,0).

Solución

Como $\vec{\alpha}(t) = (\int_0^t 2\cos\pi u^2 du, \int_0^t 2\,\text{sen}\,\pi u^2 du, 2\sqrt{3}\,t)$, derivando

$\vec{\alpha}'(t) = (2\cos\pi t^2, 2\,\text{sen}\,\pi t^2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = 4$

parametrizando en función de longitud de arco.

$S = L(t) = \int_0^t \|\vec{\alpha}'(t)\|\, dt = 4t$

$S = L(\psi(S)) = 4\,\psi(S) \Rightarrow \psi(s) = \dfrac{S}{4}$

$\vec{\alpha}(\psi(s)) = (\int_0^{s/4} 2\cos\pi u^2 du, \int_0^{s/4} 2\,\text{sen}\,\pi u^2 du, \dfrac{2\sqrt{3}\,s}{4}) = \vec{\gamma}(s)$

$\vec{\gamma}'(s) = (\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi s^2}{16}, \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\dfrac{\pi s^2}{16}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$\vec{\gamma}''(s) = (-\dfrac{\pi s^2}{16}\,\text{sen}\dfrac{\pi s^2}{16}, \dfrac{\pi s^2}{16}\cos\dfrac{\pi s^2}{16}, 0)$ como

$k(s) = \|\vec{\gamma}''(s)\| = \sqrt{(\dfrac{\pi s}{16})^2(\text{sen}^2\dfrac{\pi s^2}{16} + \cos^2\dfrac{\pi s^2}{16})} = \dfrac{\pi s}{16}$

por lo tanto $k(s) = \dfrac{\pi s}{16}$.

26) Sea C la curva descrita por la función vectorial C: $\vec{f}(t) = (e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, e^t)$, $t \geq 0$, Describa la curva C en términos de la longitud del arco s.

Solución

Por determinar $\vec{g}(s) = f(\psi(s))$ donde $t = \psi(s)$

como $\vec{f}(t) = e^t(\cos t, \text{sen}\,t, 1) \Rightarrow \vec{f}'(t) = e^t(\cos t - \text{sen}\,t, \text{sen}\,t + \cos t, 1)$

$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{e^{2t}[(\cos t - \text{sen}\,t)^2 + (\text{sen}\,t + \cos t)^2 + 1)]} = \sqrt{3}e^t$

$$S=\int_0^{t}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_0^{t}\sqrt{3}e^{t}\,dt=\sqrt{3}(e^{t}-1)$$

como $\sqrt{3}(e^{t}-1)=s \Rightarrow e^{t}=1+\frac{s}{\sqrt{3}} \Rightarrow t=\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}})=\psi(s)$

$$\vec{g}(s)=\vec{f}(\psi(s))=(e^{\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}})}\cos\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}}),\ e^{\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}})}\operatorname{sen}\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}}),\ e^{\ln(1+\frac{s}{\sqrt{3}})})$$

$$\vec{g}(s)=(\frac{\sqrt{3}+s}{\sqrt{3}}\cos\ln(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt{3}+s}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\ln(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt{3}+s}{\sqrt{3}})$$

27) Si C es una curva definida en el espacio tridimensional y si $\vec{B}'(t)$ existe, demostrar que $\vec{B}'(t)$ es paralelo al vector normal $\vec{N}(t)$.

Solución

La derivada de un vector de módulo constante es perpendicular a dicho vector.

El producto vectorial de dos vectores paralelos es un vector nulo.

Luego tenemos $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ derivando con respecto a t

$\vec{B}'=\vec{T}'\times\vec{N}+\vec{T}\times\vec{N}'$ como $\vec{N}=\frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}$

$\vec{T}'\times\vec{N}=\vec{T}'\times\frac{\vec{T}'}{\|\vec{T}'\|}=\vec{0}$ entonces $\vec{B}'=\vec{T}'\times\vec{N}' \Rightarrow \vec{B}'\perp\vec{N}'$ como $\vec{N}'\perp\vec{N}$ entonces $\vec{B}'\perp\vec{N}$

28) Sea $\vec{\alpha}$ la trayectoria $\vec{\alpha}(t)=(2t,t^2,\ln t)$ definido para t > 0, encontrar la longitud de arco de $\vec{\alpha}$ entre los puntos A (2,1,0) y B (4,4,ln 2)

Solución

Sea C: $\vec{\alpha}(t)=(2t,t^2,\ln t)$ una curva definida para t $\geq$ 0 debemos de calcular $L=\int_a^b\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt$, entonces calcularemos los valores de a y b.

$$\begin{cases} \vec{\alpha}(a) = (2a, a^2, \ln a) = (2,1,0) \\ \vec{\alpha}(b) = (2b, b^2, \ln b) = (4,4,\ln 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ además}$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (2, 2t, \frac{1}{t}) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = 2t + \frac{1}{t}$$

$$L = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\|\, dt = \int_1^2 (2t + \frac{1}{t})dt = 3 + \ln 2$$

29) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y la ecuación del plano normal de la curva $x = 2t^2 + 1$, $y = t - 1$, $z = 3t^2$, en el punto en que corta al plano XZ.

Solución

La ecuación de la recta tangente es:

$$L = \{P_0 + t\vec{f}'(t_0) \,/\, t \in R\}, \text{ donde } P_0 \in L \wedge Pxz$$

La curva en forma vectorial es $\vec{f}(t) = (2t^2 + 1, t - 1, 3t^2)$ y $\vec{f}'(t) = (4t, 1, 6t)$ como $P_0(x,0,z)$ en $\vec{f}(t)$ entonces t = 1. Luego $P_0(3,0,3)$ y el vector tangente es $\vec{f}'(1) = (4,1,6)$.

$$\therefore \quad L = \{(3,0,3) + t(4,1,6) \,/\, t \in R\}$$

La ecuación del plano normal es: $P_N: \vec{f}'(1).(x-3, y, z-3) = 0$

$$\therefore \quad P_N: 4x + y + 6z = 30$$

30) Sea C la curva de ecuación vectorial $C: \vec{f}(t) = (t, \ln(\sec t), \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto en el que la curva C corta al plano XZ.

Solución

Sea Pxz : plano coordenado XZ.

$$p \in C: \vec{f}(t) \wedge \mathbf{P}xz \Rightarrow p \in C: \vec{f}(t) \wedge p \in \mathbf{P}xz$$

Sea $p \in C$: $\vec{f}(t) \Rightarrow p(t, \ln\sec t, \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$ para algún t real.

y si $p \in$ **Pxz** $\Rightarrow \ln\sec t = 0 \Rightarrow \sec t = 1 \Rightarrow t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots,$

Luego para $t = 0$, $P(0,0,0)$.

Como $\mathbf{P}_0$: $\vec{B}(0).((x,y,z)-(0,0,0)) = 0$ entonces calculamos el vector binormal $\vec{B}(0)$.

$\vec{f}(t) = (t, \ln\sec t, \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$, derivando

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = (1, tgt, \sec t) \\ \vec{f}''(t) = (0, \sec^2 t, \sec t.tgt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(0) = (1,0,1) \\ \vec{f}''(0) = (0,1,0) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\| = \sqrt{2}$$

Además $\vec{B}(0) = \dfrac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|} = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Luego $\mathbf{P}_0$: $\vec{B}(0).(x-0, y-0, z-0) = 0$

$$\mathbf{P}_0: \frac{1}{\sqrt{2}}.(-1,0,1)(x,y,z) = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{P}_0: x - z = 0$$

31) Dada la curva C: $\vec{\alpha}(t) = (t^2+1, 8t, t^2-3)$, hallar el vector tangente unitario en t=1, escriba la ecuación del plano normal, plano osculador y plano rectificante en $\vec{\alpha}(1)$.

Solución

Como $\vec{\alpha}(t)=(t^2+1,8t,\ t^2-3) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t)=(2t,8,2t)$

$$\Rightarrow\ \vec{\alpha}'(1)=(2,8,2) \ \Rightarrow\ \|\vec{\alpha}'(1)\|=6\sqrt{2}$$

$$\vec{T}(1)=\frac{\vec{\alpha}'(1)}{\|\vec{\alpha}'(1)\|}=\frac{1}{6\sqrt{2}}(2,8,2)=(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$$

$$\vec{\alpha}'(t)=(2t,8,2t) \Rightarrow \vec{\alpha}''(t)=(2,0,2) \Rightarrow \vec{\alpha}''(1)=(2,0,2)$$

$$\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(16,0,-16) \ \Rightarrow\ \|\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)\|=16\sqrt{2}$$

$$\vec{B}(1)=\frac{\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)}{\|\vec{\alpha}'(1)x\vec{\alpha}''(1)\|}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$$

$$\vec{N}(1)=\vec{B}(1)x\vec{T}(1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{4\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{vmatrix}=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

$\mathbf{P_N}$: $\vec{T}(1).((x,y,z)-(2,8,-2))=0$ entonces $\mathbf{P_N}$: $\frac{\sqrt{2}}{6}(1,4,1).(x-2,y-8,z+2)=0$

$$\therefore\ P_N:\ x+4y+z=32$$

$\mathbf{P_R}$: $\vec{N}(1).((x,y,z)-(2,8,-2))=0$ entonces $\mathbf{P_R}$: $\frac{1}{3}(2,-1,2).(x-2,y-8,z+2)=0$

$$\therefore\ P_N:\ 2x-y+2z+8=0$$

$\mathbf{P_0}$: $\vec{B}(1).((x,y,z)-(2,8,-2))=0$ entonces $\mathbf{P_0}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1).(x-2,y-8,z+2)$

$\therefore \ P_0: x - z = 4$

32) Dada la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t) = (3t^2 - 5, 5 - t, 5 + 3t^2)$, hallar la ecuación de la recta paralela al vector curvatura y que pasa por el punto $\vec{\alpha}(1)$ en donde el radio de curvatura es mínima.

Solución

Como $\vec{\alpha}(t) = (3t^2 - 5, 5 - t, 5 + 3t^2) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t) = (6t, -1, 6t)$

$$\Rightarrow \ \| \vec{\alpha}'(t) \| = \sqrt{72t^2 + 1} \Rightarrow \vec{T}(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} = \frac{1}{\sqrt{72t^2 + 1}}(6t, -1, 6t)$$

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{6}{(72t^2 + 1)^{3/2}}, \frac{72t}{(72t^2 + 1)^{3/2}}, \frac{6}{(72t^2 + 1)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} = \frac{1}{(72t^2 + 1)^2}(6, 72t, 6) \quad \text{entonces} \quad k(t) = \| \vec{k}(t) \| = \frac{\sqrt{72}}{(72t^2 + 1)^{3/2}}$$

como $R(t) = \dfrac{1}{k(t)} = \dfrac{(72t^2 + 1)^{3/2}}{\sqrt{72}}$, Luego el radio de curvatura mínima estará dado por la curvatura máxima esto se dará para t = 0, aplicando el criterio de la derivada.

Luego $K_{max} = \sqrt{72}$, para t = 0 se tiene $\vec{\alpha}(0) = (0,5,5)$ el vector curvatura $\vec{k}(t) = (6,0,6)$

Un vector en al dirección de $\vec{k}(0)$ es $\vec{a} = (1,0,1)$ por lo tanto la ecuación de la recta paralela a $\vec{k}(0)$ es: $\quad L = \{(0,5,5) + t\,(1,0,1) \,/\, t \in R\}$

33) Determinar la longitud de la curva C dado por: C: $x = \dfrac{t^4}{2}$, $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{5} t^{5/4}$, z = 3t, desde cuando el vector binormal a C es paralelo al plano 2x - 3z = 0, hasta cuando es paralelo al plano 18x - z = 0.

Solución

Solución

Calculando el vector binormal $\vec{B}(t)=\dfrac{\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|}$

como $\vec{f}(t)=(\frac{t^4}{2},\frac{4\sqrt{3}}{5}t^{5/2},3t) \Rightarrow \vec{f}'(t)=(2t^3,2\sqrt{3}\,t^{3/2},3)$

$\Rightarrow \vec{f}''(t)=(6t^2,3\sqrt{3}\,t^{1/2},0)$

$$\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t^3 & 2\sqrt{3}\,t^{3/2} & 3\\ 6t^2 & 3\sqrt{3}\,t^{1/2} & 0\end{vmatrix}=(-9\sqrt{3}\,t^{1/2},18t^2,6\sqrt{3}\,t^{7/2})$$

Sea $P_1: 2x-3z=0$ de donde $\vec{N}_1=(2,0,-3)$

$\vec{B}(t)//\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)$ como $\vec{B}//P_1 \Rightarrow \vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)//P_1$ entonces

$\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\perp\vec{N}_1 \Rightarrow \vec{N}_1.\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)=0$

$(2,0,-3).(-9\sqrt{3}\,t^{1/2},18t^2,6\sqrt{3}\,t^{7/2})=0$, efectuando

$-18\sqrt{3}t^{1/2}+18\sqrt{3}t^{7/2}=0 \Rightarrow t^{1/2}(1-t^3)=0 \Rightarrow t_1=1$

Sea $P_2: 18x-z=0$ de donde $\vec{N}_2=(18,0,-1)$

como $\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)//P_2 \Rightarrow \vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\perp\vec{N}_2$ entonces

$\vec{N}_2.\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)=0 \Rightarrow (18,0,-1).(-9\sqrt{3}\,t^{1/2},18t^2,6\sqrt{3}\,t^{7/2})=0$

$-16\sqrt{3}\,t^{1/2}+6\sqrt{3}\,t^{7/2}=0 \Rightarrow t^{1/2}(-27+t^{3/2})=0 \Rightarrow$ t = 3

Luego $S=\int_{t_1}^{t_2}\|\vec{f}'(t)\|\,dt$ donde $\vec{f}'(t)=(2t^3,2\sqrt{3}t^{3/2},3)$ entonces

$$\| \vec{f}'(t) \| = \sqrt{4t^6 + 12t^3 + 9} = 2t^3 + 3$$

$$S = \int_1^3 (2t^3 + 3)dt = (\frac{t^4}{2} + 3t) \Big/_1^3 = 46$$

34) Sea C una curva definida por la función vectorial C: $\vec{f}(t) = (1 - \frac{4t^3}{3}, 1 - 2t^2, t)$. Hallar la ecuación del plano osculador de la curva, paralelo al plano x = -2.

Solución

Se conoce que $\mathbf{P_0}$: $\vec{B}(t_0).((x,y,z) - \vec{f}(t_0)) = 0$, es la ecuación del plano osculador.

Sea $\mathbf{P}$: x = -2 de donde $\vec{N} = \vec{i} = (1,0,0)$, normal del plano

como $\mathbf{P_0} // \mathbf{P}$ entonces $\vec{B}(t_0) // \vec{i}$ y como $\vec{B}(t_0) // \vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)$ entonces $\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0) // \vec{i}$, luego calculamos $\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)$

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = (-4t^2, -4t, 1) \\ \vec{f}''(t) = (-8t, -4, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(t_0) = (-4t_0^2, -4t_0, 1) \\ \vec{f}''(t_0) = (-8t_0, -4, 0) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4t_0^2 & -4t_0 & 1 \\ -8t_0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (4, -8t_0, -16t_0)$$

$\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0) = \lambda \vec{i}$, de donde $(4, -8t_0, -16t_0) = \lambda(1,0,0) \Rightarrow t_0 = 0$, $\vec{f}'(0) = (1,1,0)$

$$\vec{f}'(0) \times \vec{f}''(0) = (4,0,0) \Rightarrow \| \vec{f}'(0) \times \vec{f}''(0) \| = 4$$

por lo tanto $\vec{B}(0) = \dfrac{\vec{f}'(0) \times \vec{f}''(0)}{\| \vec{f}'(0) \times \vec{f}''(0) \|} = (1,0,0)$

$\mathbf{P_0}$: $(1,0,0).((x,y,z) - (1,1,0)) = 0$ $\therefore$ $\mathbf{P_0}$: $x = 1$

35) Sea C una curva descrita por $\vec{f}: I \longrightarrow R^3$, tal que $\vec{f}''(t) = (0, \sec^2 t, \sec t . \operatorname{tg} t)$, $\vec{f}'(0) = (1,0,1)$, $\vec{f}(0) = (0,0,0)$. Hallar la ecuación del plano osculador y el plano rectificante en el instante en que C corta al plano x = 2π.

Solución

$\vec{f}''(t) = (0, \sec^2 t, \sec t . \operatorname{tg} t)$, integrando $\vec{f}'(t) = (c_1, \operatorname{tg} t + c_2, \sec t + c_3)$

$\vec{f}'(0) = (c_1, c_2, 1 + c_3) = (1,0,1) \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$

$\vec{f}'(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t)$, integrando $\vec{f}(t) = (t + c_1, \ln|\sec t| + c_2, \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + c_3)$

$\vec{f}(0) = (c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\vec{f}(t) = (t, \ln \sec t, \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$, derivando :

$\vec{f}'(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t + \sec^2 t} = \sqrt{2} \sec t$

como la curva corta al plano x = 2π ⇒ t = 2π

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t) \\ \vec{f}''(t) = (0, \sec^2 t, \sec t . \operatorname{tg} t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{f}'(2\pi) = (1,0,1) \\ \vec{f}''(2\pi) = (0,1,0) \end{array}$$

$$\vec{f}'(2\pi) x \vec{f}''(2\pi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{f}'(2\pi) x \vec{f}''(2\pi)\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{B}(2\pi) = \frac{\vec{f}'(2\pi) x \vec{f}''(2\pi)}{\|\vec{f}'(2\pi) x \vec{f}''(2\pi)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathbf{P_0}: \vec{B}(2\pi).((x,y,z)-(2\pi,0,0))=0 \quad \text{entonces} \quad \mathbf{P_0}: (-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}).(x-2\pi,y,z)=0$$

$$\therefore \quad \mathbf{P_0}: \quad x-z=2\pi$$

$$\mathbf{P_R}: \vec{N}(2\pi).((x,y,z)-(2\pi,0,0))=0$$

$$\vec{N}(2\pi)=\vec{B}(2\pi)x\vec{T}(2\pi)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}=(0,1,0)$$

$\mathbf{P_R}$: $(0,1,0).(x-2\pi,y,z)=0$ $\quad\therefore$ $\mathbf{P_R}$: $y=0$, que es el plano XZ.

36) Formar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva C: $x=a\,\text{sen}^2 t$, y = b sent.cos t, $z=c.\cos^2 t$, en el punto $t=\frac{\pi}{4}$.

Solución

Para $t=\frac{\pi}{4}$, $x_0=\frac{a}{2}$, $t_0=\frac{b}{2}$, $z_0=\frac{c}{2} \Rightarrow P_0(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$

$$\begin{cases} x(t)=a\,\text{sen}^2 t \\ y(t)=b\,\text{sen}\,t\cos t \\ z(t)=c\cos^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=2a\,\text{sen}\,t\cos t \\ y'(t)=-b\,\text{sen}^2 t+b\cos^2 t \\ z'(t)=-2c\cos t.\text{sen}\,t \end{cases}$$

para $t=\frac{\pi}{4}$, $x'(\frac{\pi}{4})=a$, $y'(\frac{\pi}{4})=0$, $z'(\frac{\pi}{4})=-c$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\therefore \quad L_t: \frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c} \wedge y=\frac{b}{2}$$

La ecuación del plano normal es:

$$\mathbf{P_N}:\ x'(\frac{\pi}{4}).(x-\frac{a}{2})+y'(\frac{\pi}{4}).(y-\frac{b}{2})+z'(\frac{\pi}{4}).(z-\frac{c}{2})=0 \qquad \therefore\ \mathbf{P_N}:\ ax-cz=\frac{a^2-c^2}{2}$$

37) Sea C la curva definida por la función vectorial $C:\ \vec{f}(t)=(e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, t\,e^t)$, determinar los vectores $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ y la ecuación del plano osculador cuando t = 0.

Solución

$$\vec{T}(0)=\text{ vector tangente unitario }=\frac{\vec{f}'(0)}{\|\vec{f}'(0)\|}$$

$$\vec{f}(t)=(e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, t\,e^t),\ \text{derivando}\ \ \vec{f}'(t)=(e^t(\cos t-\text{sen}\,t), e^t(\text{sen}\,t+\cos t), e^t(t+1))$$

$$\vec{f}'(0)=(1,1,1)\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(0)\|=\sqrt{3} \qquad \therefore\ \vec{T}(0)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\vec{N}(0)=\text{ vector normal principal unitario }=\frac{\vec{T}'(0)}{\|\vec{T}'(0)\|}$$

$$\vec{N}(0)=\vec{B}(0)\,x\,\vec{T}(0),\ \text{donde}\ \ \vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}$$

$$\vec{f}'(t)=(e^t(\cos t-\text{sen}\,t), e^t(\text{sen}\,t+\cos t), e^t(t+1))\Rightarrow \vec{f}'(0)=(1,1,1)$$

$$\vec{f}''(t)=(2\,\text{sen}\,t.e^t, 2\cos t.e^t, 2e^t+t\,e^t)\Rightarrow \vec{f}''(0)=(0,2,2)$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(0,-2,2)\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=2\sqrt{2}\text{ , por lo tanto:}$$

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\vec{N}(0)=\vec{B}(0)\,x\,\vec{T}(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$$

plano osculador $\mathbf{P_0}$: $\vec{B}(0).(p-\vec{f}(0))=0$ donde $\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$, $\vec{f}(0)=(1,0,0)$

$\therefore\ \mathbf{P_0}:\ x-y-z=1$

38) Determinar el plano osculador en $\vec{f}(0)$ para la curva C descrita por la función $\vec{f}(t)=(t-\operatorname{sen}t,\,1-\cos t,t)$

Solución

La ecuación del plano osculador es: $\mathbf{P_0}:\vec{B}(0).(P-\vec{f}(0))=0$ donde $\vec{f}(0)=(0,0,0)$ y

$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}$ de donde $\vec{f}(t)=(t-\operatorname{sen}t,\,1-\cos t,\,t)$, derivando

$\vec{f}'(t)=(1-\cos t,\,\operatorname{sen}t,\,1)\ \Rightarrow\ \vec{f}'(0)=(0,0,1)$

$\vec{f}''(t)=(\operatorname{sen}t,\,\cos t,0)\ \Rightarrow\ \vec{f}''(0)=(0,1,0)$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,0,0)\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=1$$

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}=(-1,0,0)$$

$\mathbf{P_0}:\vec{B}(0).((x,y,z)-(0,0,0))=0$ entonces $\mathbf{P_0}:(-1,0,0).(x-0,y.-0,z-0)=0$

$\therefore \mathbf{P_0}:x=0$

39) Hallar las ecuaciones de los planos osculadores, normal y rectificante para la curva determinado por $x^2+y^2+z^2=6$, $x^2-y^2+z^2=4$ en el punto $(1,1,2)$

Solución

Sea $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2-y^2+z^2=4\end{cases}$ la curva de intersección de las superficies

ahora parametrizando la curva C.

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2-y^2+z^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\pm1\\z=\pm\sqrt{5-x^2}\end{cases}$, por lo tanto si x = t, se tiene

$\vec{\alpha}:R\longrightarrow R^3$ tal que $\vec{\alpha}(t)=(t,1,\sqrt{5-t^2})$

ahora calcularemos $t=t_0$ para que $\vec{\alpha}(t_0)=(1,1,2)$, luego $(t_0,1,\sqrt{5-t_0^2})=(1,1,2)\Rightarrow t_0=1$

$$\begin{cases}x(t)=t\\y(t)=1\\z(t)=\sqrt{5-t^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=1\\y'(t)=0\\z'(t)=-\dfrac{t}{\sqrt{5-t^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''(t)=0\\y''(t)=0\\z''(t)=\dfrac{-5}{(5-t^2)^{3/2}}\end{cases}$$

$x'(1)=1$, $y'(1)=0$, $z'(1)=-\dfrac{1}{2}$

$x''(1)=0$, $y''(1)=0$, $z''(1)=-\dfrac{5}{8}$

$$\begin{cases} A = y'(1)z''(1) - z'(1)y''(1) = 0 \\ B = z'(1)x''(1) - x'(1)z''(1) = \frac{5}{8} \\ C = x'(1)y''(1) - y'(1)x''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{5}{8} \\ c = 0 \end{cases}$$

de acuerdo a **3.39,** se tiene: $\mathbf{P_0}:\ A(x - x(1)) + B(y - y(1)) + c(z - z(1)) = 0$

$$\mathbf{P_0}:\ 0(x-1) + \frac{5}{8}(y-1) + 0(z-2) = 0 \qquad \therefore\ \mathbf{P_0}:\ y = 1$$

$$\mathbf{P_N}:\ x'(1)(x - x(1)) + y'(1)(y - y(1)) + z'(1)(z + z(1)) = 0$$

$$\mathbf{P_N}:\ 1(x-1) + 0(y-1) - \frac{1}{2}(z-2) = 0 \qquad \therefore\ \mathbf{P_N}:\ 2x - z = 0$$

$$\mathbf{P_R}:\ \begin{vmatrix} y'(1) & z'(1) \\ B & C \end{vmatrix}(x - x(1)) + \begin{vmatrix} z'(1) & x'(1) \\ C & A \end{vmatrix}(y - y(1)) + \begin{vmatrix} x'(1) & y'(1) \\ A & B \end{vmatrix}(z + z(1)) = 0$$

$$\mathbf{P_R}:\ \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix}(x-1) + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} \end{vmatrix}(z-2) = 0 \qquad \therefore\ \mathbf{P_R}:\ x + z = 3$$

40) Formar las ecuaciones del plano osculador, la normal principal y binormal a la línea $y^2 = x$, $x^2 = z$ en el punto $(1,1,1)$.

Solución

Sea $C: \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$ La línea de intersección de las superficies dadas.

ahora parametrizando la curva C, se tiene:

para $y = t$, $x = t^2$, $z = t^4$. luego $C: \vec{f}(t) = (t^2, t, t^4)$

calculando $t = t_0$ tal que $\vec{f}(t_0) = (1,1,1)$ se tiene $(t_0^2, t_0, t_0^4) = (1,1,1) \Rightarrow t_0 = 1$, además

$$\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=t \\ z(t)=t^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=2t \\ y'(t)=1 \\ z'(t)=4t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(t)=2 \\ y''(t)=0 \\ z''(t)=12t^2 \end{cases}$$

para $t_0 = 1$, $x'(1)=2$, $y'(1)=1$, $z'(1)=4$

$$x''(1)=2 \ , \ y''(1)=0 \ , \ z''(1)=12$$

$$\begin{cases} A = y'(1)z''(1)-y''(1)z'(1)=12 \\ B = z'(1)x''(1)-x'(1)z''(1)=-16 \\ C = x'(1)y''(1)-x''(1)y'(1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=12 \\ B=-16 \\ C=-2 \end{array}$$

$\mathbf{P_0}$: $A(x-1)+B(y-1)+c(z-1)=0$ entonces $\mathbf{P_0}$: $12(x-1)-16(y-1)-2(z-1)=0$

$\therefore$ $\mathbf{P_0}$: $6x-8y-z=3$

$$L_N: \frac{x-1}{\begin{vmatrix} y'(1) & z'(1) \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} z'(1) & x'(1) \\ C & A \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} x'(1) & y'(1) \\ A & B \end{vmatrix}} \text{ de donde } L_N: \frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$$

$$L_B: \frac{x-1}{A}=\frac{y-1}{B}=\frac{z-1}{C} \Rightarrow L_B: \frac{x-1}{12}=\frac{y-1}{16}=\frac{z-1}{2}, \text{ de donde } L_B: \frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{1}$$

41) Sea C la curva de intersección del cono $z=\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}$ con el cilindro $x^2-(y-1)^2=1$ en el primer octante. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de la curva C con el plano y = 1 que contiene a los vectores $\vec{T}$ y $\vec{B}$ en dicho punto.

Solución

Sea $C: \begin{cases} z=\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2-(y-1)^2=1 \end{cases}$ La curva de intersección de las superficies dadas.

como C debe de estar en el primer octante entonces x,y,z ≥ 0 ahora parametrizando la curva C se tiene:

$$\begin{cases} x=\cosh t \\ y=1+\operatorname{senh} t \end{cases} \text{ además } \begin{array}{l} z=\sqrt{2}-\sqrt{2\cosh^2 t+2\operatorname{senh}^2 t} \\ z=\sqrt{2}-\sqrt{2\cosh^2 t+2\operatorname{senh}^2 t} \end{array}$$

Luego la función vectorial es dada por:

$$\vec{f}(t)=(\cosh t,\ 1+\text{senh}\,t,\sqrt{2}-\sqrt{2\cosh^2 t+2\,\text{senh}^2 t})$$

ahora interceptando con el plano y = 1 se tiene: y = 1 + senh t = 1 $\Rightarrow$ senh t = 0 $\Rightarrow$ t = 0

Luego $\vec{f}(0)=(1,1,0)$ es el punto de intersección calculando la derivada de $\vec{f}(t)$

$$\vec{f}'(t)=(senht,\cosh t,\frac{-2senht\cosh t-2\cosh t}{\sqrt{2\cosh^2 t+2senh^2 t}})$$

$$\vec{f}''(t)=(\cosh t,senht,-\frac{(2\cosh^2 t+2senht)(2+4senh^2 t+senht)-(2senht\cos t+\cosh t)^2}{(2\cosh^2 t+2senh^2 t)^{3/2}})$$

$$\vec{f}''(0)=(1,0,-\frac{3\sqrt{2}}{4})$$

Sabemos que $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$ y $\vec{B}(t)=\dfrac{\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|}$

$$\vec{f}'(0)=(0,1,-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)\|=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4}\end{vmatrix}=(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},1) \text{ entonces } \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=\frac{\sqrt{42}}{4}$$

$$\vec{T}(0)=(0,\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ y } \vec{B}(0)=(-\frac{3}{\sqrt{21}},-\frac{2}{\sqrt{21}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}})$$

como $\vec{T}(0)$ y $\vec{B}(0)$ están contenidos en el plano pedido, entonces la normal de dicho plano es:

$$\vec{N}(0)=\vec{T}(0)\times\vec{B}(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{3}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{7}}(2,-3,3\sqrt{2})$$

P: $\vec{N}(0).((x,y,z)-\vec{f}(0))=0$ de donde P: $\frac{1}{3\sqrt{7}}(2,-3,3\sqrt{2}).(x-1,\ y-1,z)=0$

$\therefore$ P: $2x-3y+3\sqrt{2}\,z+1=0$

42) Dada la curva $C:\vec{f}(t)=(\operatorname{sen} t-2,t^2+2,t^2+2\operatorname{sen} t-1)$. Hallar la torsión en cualquier punto y determinar la ecuación de los planos osculadores en t = 0, $t=\frac{\pi}{4}$, y $t=\frac{\pi}{2}$.

Solución

La Torsión se determina mediante la expresión: $\tau(t)=\frac{(\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)).\vec{f}'''(t)}{\|\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)\|^2}$

como $\vec{f}(t)=(\operatorname{sen} t-2,\ t^2+2,\ t^2+2\operatorname{sen} t-1)$, derivando se tiene

$\vec{f}'(t)=(\cos t,\ 2t,\ 2t+2\cos t)\ \Rightarrow\ \vec{f}''(t)=(-\operatorname{sen} t,\ 2,\ 2-2\operatorname{sen} t)$

$\vec{f}'''(t)=(-\cos t,\ 0,\ -2\cos t)$

$$\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos t & 2t & 2t+2\cos t\\ -\operatorname{sen} t & 2 & 2-2\operatorname{sen} t\end{vmatrix}=(-4t\operatorname{sen} t-4\cos t,\ 2t\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t,\ 2\cos t+2t\operatorname{sen} t)$$

$\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t).\vec{f}'''(t)=(-4t\operatorname{sen} t-4\cos t,\ 2t\operatorname{sen} t+\operatorname{sen} 2t,\ 2\cos t+2t\operatorname{sen} t).(\cos t,0,2\cos t)$

$=4t\operatorname{sen} t\cos t+4\cos^2 t-4t\operatorname{sen} t\cos t-4\cos^2 t=0 \quad \therefore \quad \tau(t)=0$

ahora calculamos el plano osculador, que tiene como normal al vector $\vec{B}$ donde:

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|}$$

como $\vec{f}'(t)\,x\,\vec{f}''(t)=(-4t\operatorname{sen}t-4\cos t,\ 2t\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}2t,\ 2\cos t+2t\operatorname{sen}t)$

$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=(-4,0,2) \quad\Rightarrow\quad \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=2\sqrt{5}$

Luego $\vec{B}(0)=(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$ además $\vec{f}(0)=(-2,2,1)$

la ecuación del plano osculador es dado por: $\mathbf{P_0}:\ \vec{B}(0).((x,y,z)-\vec{f}(0))=0$, de donde

$\mathbf{P_0}:\ (\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}).(x+2,\ y-2,z+1)=0 \qquad \therefore\ \mathbf{P_0}:\ 2x-z+3=0$

43) Consideremos la curva descrita por la ecuación C: $\vec{f}(t)=(\sqrt{1+t^2},\ 1,\ t-\ln(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}))$ y los planos **P**: x + z = 1 y **Q**: x - z = 1, hallar la curvatura y Torsión en el punto de intersección de la curva C y los planos **P** y **Q**.

<u>**Solución**</u>

Interceptando $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q} \Rightarrow \vec{\alpha}(t)=(1,t,0)$

ahora hallaremos el punto de intersección con la curva C: $\vec{f}(t)$ es decir:

$p_0\in\vec{\alpha}(t)\cap\vec{f}(t) \Rightarrow \vec{\alpha}(t_1)=\vec{f}(t_2)$ es decir $(1,t_1,0)=(\sqrt{1+t_2^2},\ 1,\ t_2-\ln(\frac{1+t_2}{\sqrt{1+t_2^2}}))$

$$\begin{cases}\sqrt{1+t_2^2}=1\\ 1=t_1\\ t_2-\ln(\frac{1+t_2}{\sqrt{1+t_2^2}})=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1=1\\ t_2=0\end{cases}$$

como $k(0)=\dfrac{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|}$ y $\tau(0)=\dfrac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|^2}$

$$\begin{cases} \vec{f}'(t)=(\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}},0,\dfrac{t^2}{t^2-1}) \\ \vec{f}''(t)=(-\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}},0,\dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}) \\ \vec{f}'''(t)=(\dfrac{3t}{(1-t^2)^{5/2}},0,\dfrac{6t^2+2}{(t^2-1)^3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{f}'(0)=(0,0,0) \\ \vec{f}''(0)=(-1,0,0) \\ \vec{f}'''(0)=(0,0,-2) \end{array}$$

además $\|\vec{f}'(0)\|=0$ y $\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=0$ por lo tanto $k(0)=\dfrac{0}{a}$ y lo mismo para τ (0) = 0

por lo tanto para hallar la curvatura y la torsión cuando t = 0 se hace de la siguiente manera.

$k(0)=\lim\limits_{t\to 0} k(t)$ y $\tau(0)=\lim\limits_{t\to 0}\tau(t)$

$$\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} & 0 & \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ -\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}} & 0 & -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2} \end{vmatrix}=(0,-\dfrac{t^2}{(1-t^2)^{5/2}},0)$$

$$\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|=\frac{t^2}{(1-t^2)^{5/2}} \quad , \quad \|\vec{f}'(t)\|=\frac{|t|t}{1-t^2}$$

$k(t)=\dfrac{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|^3}=\dfrac{(1-t^2)^3}{|t|(1-t^2)^{5/2}}=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$ entonces $k(0)=\lim\limits_{t\to 0}k(t)=\infty$

Calculando $\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t).\vec{f}'''(t)=0$ por lo tanto τ (t) = 0 entonces $\tau(0)=\lim\limits_{t\to 0}\tau(t)=0$ es decir que es una curva plana.

44) Sea C la curva definida por $\vec{f}(t) = (2\sqrt{\rho t},\ t,\ 1)$, siendo ρ una constante positiva. En qué punto de C el radio de curvatura alcanza su valor mínimo, cuál es este valor.

Solución

Como el radio de curvatura es $\rho = \dfrac{1}{k}$, entonces calcularemos la curvatura:

$$k = \frac{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|^3}$$

$$\vec{f}'(t) = (\sqrt{\rho}\,t^{-1/2}, 1, 0) \Rightarrow \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{\frac{\rho}{t}+1} \quad \text{además} \quad \vec{f}''(t) = \left(-\frac{\sqrt{\rho}\,t^{-3/2}}{2}, 0, 0\right)$$

$$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{\rho}\,t^{-1/2} & 1 & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{\rho}\,t^{-3/2}}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\rho}\,t^{-3/2}}{2}(0,0,1) \ ; \quad \|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\| = \frac{\sqrt{\rho}}{2}t^{-3/2},$$

$$\|\vec{f}'(t)\|^3 = \left(\frac{\rho}{t}+1\right)^{3/2} \quad \text{como} \quad \rho = \frac{1}{k} = \frac{\|\vec{f}'(t)\|^3}{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|} = \frac{2}{\sqrt{\rho}}t^{3/2}\left(\frac{\rho}{t}+1\right)^{3/2}$$

para hallar el mínimo derivamos respecto a t.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{4}{\sqrt{\rho}}t^{1/2}\left(\frac{\rho}{t}+1\right)^{1/2}\left[\frac{\rho}{t}+1-\frac{\rho}{t^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0,\ t = -\rho$$

descartamos $t = -\rho$, entonces para $t = 0$, $\rho = 0$. $\quad \therefore \quad \vec{f}(0) = (0,0,1)$

45) Sea C la curva descrita mediante la función vectorial $C\colon\ \vec{f}(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t,\ 4\operatorname{sen}\frac{t}{2})$, calcular la curvatura y torsión en un punto de C donde el plano normal es paralelo al plano $z = 1$.

Solución

La ecuación del plano normal es: $\mathbf{P_N} : \vec{T}(t_0)((x,y,z) - \vec{f}(t_0)) = 0$

donde el vector tangente unitario $\vec{T}(t_0)$ es la normal del plano $\mathbf{P_N}$.

Si $\mathbf{P_N}$ // Plano z = 1 $\Rightarrow$ $\vec{f}'(t_0) // \vec{k} = (0,0,1)$ entonces $\exists\ \lambda \in R$ tal que $\vec{f}'(t_0) = \lambda(0,0,1)$

de donde $\vec{f}'(t) = (1-\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos\frac{t}{2})$ entonces:

$(1-\cos t,\ sent,\ 2\cos\frac{t}{2}) = (0,0,\lambda) \Rightarrow t = 0$ y $\lambda = 2$

por lo tanto el punto donde el plano $\mathbf{P_N}$ es // al plano z = 1 es $\vec{f}(0) = (0,0,0)$

ahora calcularemos la curvatura k y la torsión τ que está dado por las expresiones

$$k = \frac{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|^3} \quad ; \quad \tau = \frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|^2}$$

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = (1-\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos\frac{t}{2}) \\ \vec{f}''(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen}\frac{t}{2}) \\ \vec{f}'''(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, -\frac{\cos t}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(0) = (0,0,2) \\ \vec{f}''(0) = (0,1,0) \\ \vec{f}'''(0) = (1,0,-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,0,0) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\| = 2$$

$$(\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)).\vec{f}'''(0) = (-2,0,0).(1,0,-\frac{1}{2}) = -2$$

$$k = \frac{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\tau = \frac{\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{2}$$

46) Si la curva descrita por C_1: $\vec{f}(u)$, corta a la curva C_2: $\vec{g}(u) = (\frac{3}{1+u}, e^{4u}, 1+2u)$, además $\vec{f}(0) = (1,e,1)$, $\vec{f}'(0) = (1,e,0)$, $\vec{f}''(0) = (0,e,2)$, $\vec{f}'''(u) = (0,e^{u+1},0)$. Hallar la torsión τ de C_1 en el punto de intersección de C_1 y C_2.

Solución

$$\vec{f}'''(u) = (0,e^{u+1},0) \Rightarrow \vec{f}''(u) = (c,e^{u+1}+k,r)$$

$\vec{f}''(0) = (c,e+k,r) = (0,e,2) \Rightarrow c=0,\ k=0,\ r=2$. Luego $\vec{f}''(u) = (0,e^{u+1},2)$

$$\vec{f}'(u) = (c,e^{u+1}+k,2u+r)$$

$$\vec{f}''(0) = (c,e+k,r) = (1,e,0) \Rightarrow c=1,\ k=0,\ r=0$$

$$\vec{f}'(u) = (1,e^{u+1},2u) \Rightarrow \vec{f}(u) = (u+c,e^{u+1}+k,u^2+r)$$

$$\vec{f}'(0) = (c,e+k,r) = (1,e,1) \Rightarrow c=1,\ k=0,\ r=1$$

$$\therefore\ C_1:\ \vec{f}(u) = (u+1,e^{u+1},u^2+1)$$

Sea $P_0 \in C_1: \vec{f}(u) \cap C_2: \vec{g}(u) \Rightarrow \vec{f}(u_1) = \vec{g}(u_2)$

$$(u_1+1),e^{u_1+1},u_1^2+1) = (\frac{3}{u_2+1},e^{4u_2},1+2u_2)$$

$$\begin{cases} u_1+1 = \dfrac{3}{u_2+1} \\ e^{u_1+1} = e^{4u_2} \\ u_1^2+1 = 1+2u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} e^{4u_2} = e^{u_1+1} \Rightarrow 4u_2 = u_1+1 \\ \text{pero } 1+2u_2 = u_1^2+1 \Rightarrow u_2 = \dfrac{u_1^2}{2} \end{array}$$

Luego $2u_1^2 = u_1 + 1 \Rightarrow u_1 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2}$

para $u_1 > 0 \Rightarrow u_1 = 1$. Luego $\vec{f}(1) = (2, e^2, 2)$

$\vec{f}\,'(1) = (1, e^2, 2)$, $\vec{f}\,''(1) = (0, e^2, 2)$, $\vec{f}\,'''(1) = (0, e^2, 0)$

$$\vec{f}\,'(1)\times\vec{f}\,''(1).\vec{f}\,'''(1) = \begin{vmatrix} 1 & e^2 & 2 \\ 0 & e^2 & 2 \\ 0 & e^2 & 0 \end{vmatrix} = 2e^2$$

$$\vec{f}\,'(1)\times\vec{f}\,''(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & e^2 & 2 \\ 0 & e^2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 2, -e^2) \text{ entonces } \|\vec{f}\,'(1)\times\vec{f}\,''(1)\| = 4 + e^4$$

$$\tau = \frac{\vec{f}\,'(1)\times\vec{f}\,''(1).\vec{f}\,'''(1)}{\|\vec{f}\,'(1)\times\vec{f}\,''(1)\|^2} = \frac{2e^2}{4+e^4}$$

47) Sea C la curva definida por la función vectorial C: $\vec{f}(s) = (\dfrac{s - \operatorname{sen} s}{2}, \dfrac{1-\cos s}{2}, 2\operatorname{sen}\dfrac{s}{2})$, s ≥ 0. Hallar la torsión en un punto en donde la longitud de arco sea 2π.

Solución

El punto donde se va ha calcular la torsión es en donde el valor del parámetro es 2π.

Es decir $\vec{f}(2\pi)$ y como $\tau = \dfrac{\vec{f}\,'(2\pi)\times\vec{f}\,''(2\pi).\vec{f}\,'''(2\pi)}{\|\vec{f}\,'(2\pi)\times\vec{f}\,''(2\pi)\|^2}$

$$\begin{cases} \vec{f}\,'(s) = (\dfrac{1-\cos s}{2}, \dfrac{\operatorname{sen} s}{2}, \cos\dfrac{s}{2}) \\ \vec{f}\,''(s) = (\dfrac{\operatorname{sen} s}{2}, \dfrac{\cos s}{2}, -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{s}{2}) \\ \vec{f}\,'''(s) = (\dfrac{\cos s}{2}, -\dfrac{\operatorname{sen} s}{2}, -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{s}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}\,'(2\pi) = (0, 0, -1) \\ \vec{f}\,''(2\pi) = (0, \dfrac{1}{2}, 0) \\ \vec{f}\,'''(2\pi) = (\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(2\pi)\times\vec{f}''(2\pi).\vec{f}'''(2\pi)=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$\vec{f}'(2\pi)\times\vec{f}''(2\pi)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=(\frac{1}{2},0,0) \text{ entonces } \|\vec{f}'(2\pi)\times\vec{f}''(2\pi)\|=\frac{1}{2}$$

$$\tau=\frac{\vec{f}'(2\pi)\times\vec{f}''(2\pi).\vec{f}'''(2\pi)}{\|\vec{f}'(2\pi)\times\vec{f}''(2\pi)\|^2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=1 \quad\Rightarrow\quad \tau=1$$

48) Sea C la curva en coordenadas polares descrita por la ecuación $r=e^{\theta}$, dibujar el círculo osculador indicando centro, radio y una porción de C en un punto donde el vector normal principal es paralelo al vector (-1,1).

Solución

La relación de las coordenadas cartesianas y polares es x = r cos θ , y = r sen θ pero $r=e^{\theta}$ entonces la curva C es expresado por:

$$C:\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\ y=e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\end{cases}, \quad \text{La curva en forma parametrizada}$$

$C:\ \vec{f}(\theta)=(e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\operatorname{sen}\theta)$, derivando se tiene $\vec{f}'(\theta)=e^{\theta}(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$

La curvatura en coordenadas polares es:

$$k=\frac{\|\vec{f}^{\,2}(\theta)+\frac{d\vec{f}(\theta)}{d\theta}-\vec{f}(\theta).\frac{d\,f(\theta)}{d\theta}\|}{|\vec{f}^{\,2}(\theta)+(\frac{d\vec{f}(\theta)}{d\theta})^2|^2}=\frac{|e^{2\theta}+2e^{2\theta}-e^{2\theta}|}{(e^{2\theta}+e^{2\theta})^{3/2}} \qquad \therefore\ k=\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\theta}}$$

pero como $\rho(\theta)=\dfrac{1}{k(\theta)} \Rightarrow \rho(\theta)=\sqrt{2}\ e^{\theta}$ radio de la circunferencia osculatriz de acuerdo a las condiciones del problema debemos de calcular el vector normal principal

$$\vec{N}(\theta)=\vec{T}'(\theta) \text{ donde } \vec{T}(\theta)=\frac{\vec{f}'(\theta)}{\|\vec{f}'(\theta)\|} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{f}'(\theta)\|=\sqrt{2}e^{\theta}$$

$$\vec{T}(\theta)=\frac{\vec{f}'(\theta)}{\|\vec{f}'(\theta)\|}=\frac{e^{\theta}(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{2}e^{\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$$

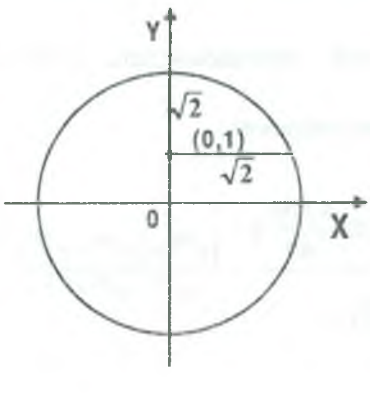
$$\vec{T}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta,\ \cos\theta-\operatorname{sen}\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta-\cos\theta)$$ ahora

determinaremos el valor de θ con la condición que $\vec{N}(\theta)\,//\,\vec{a}=(-1,1) \Rightarrow \exists\ \lambda\in R$ tal que $\vec{N}(\theta)=\lambda(-1,1)$ entonces se tiene $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta-\cos\theta)=(-\lambda,\lambda)$ entonces:

$$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\\[2ex] \lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\end{cases} \Rightarrow\ 2\operatorname{sen}\theta=0\ \Rightarrow\ \theta=0$$

Luego el punto $\vec{f}(0)=(1,0)$, como $\theta=0 \Rightarrow \rho(0)=\sqrt{2}$ radio del círculo osculador

$$C=\vec{f}(0)+\rho(0)\vec{N}(0)=(1,0)+\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow C=(0,1) \text{ centro del círculo osculador}$$



49) Sea C una curva definida por la ecuación: $\vec{W}(t)=b\int_a^t \vec{f}(t)x\vec{f}'(t)dt$, b constante diferente de cero, en donde $\vec{f}(t)$ es una función vectorial que cumple con la condición de que $\|\vec{f}(t)\|=1$ y $[\vec{f}(t).\vec{f}'(t).\vec{f}''(t)]\neq \vec{0}$. Hallar la torsión.

Solución

como $\tau=\dfrac{[\vec{f}'(t).\vec{f}''(t).\vec{f}'''(t)]}{|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)|^2}=\dfrac{\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t).\vec{f}'''(t)}{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|^2}$, donde

$C:\vec{W}(t)=b\int_a^t \vec{f}(t)x\vec{f}'(t)dt$, con $b\neq 0$ y $\|\vec{f}'(t)\|=1$; $[\vec{f}(t).\vec{f}'(t).\vec{f}''(t)]\neq 0$

$\vec{W}(t)=b\int_a^t \vec{f}(t)x\vec{f}'(t)dt \Rightarrow \vec{W}'(t)=b.\vec{f}(t)x\vec{f}'(t)$

$\vec{W}''(t)=b\,\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}''(t)+b\,\vec{f}'(t)\,x\,\vec{f}'(t)=b\,\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}''(t)$

$\vec{W}''(t)=b\,\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}''(t) \Rightarrow \vec{W}'''(t)=b\,\vec{f}'(t)\,x\,\vec{f}''(t)+b\,\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}'''(t)$

como $\|\vec{f}(t)\|=1 \Rightarrow \vec{f}(t)\perp\vec{f}'(t)$ y además (A x B).(C x D) = (A.C)(B.D) - (A.D).(B.C)

(A x B) x (C X D) = [ABD]C - [ABC]D

$\vec{W}'(t).\vec{W}'(t)=b^2(\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}'(t)).(\vec{f}(t)\,x\,\vec{f}'(t))$

$=b^2[(\vec{f}(t).\vec{f}(t))(\vec{f}'(t).\vec{f}'(t))-(\vec{f}(t).\vec{f}'(t))(\vec{f}'(t).\vec{f}(t))]$

$=b^2\,\|\vec{f}'(t)\|^2$ puesto que $\|\vec{f}(t)\|^2=1$

$\vec{W}'(t).\vec{W}'(t)=b^2\,\|\vec{f}'(t)\|^2$

$$\vec{W}'(t)x\vec{W}''(t) = b^2(\vec{f}(t)x\vec{f}'(t))x(\vec{f}(t)x\vec{f}''(t))$$

$$= b^2[(\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t))\,\vec{f}(t) - (\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}(t))\,\vec{f}''(t)] = b^2[\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t)]\,\vec{f}(t)$$

$$[\vec{W}'(t)\vec{W}''(t)\,\vec{W}'''(t)] = (\vec{W}'(t)x\vec{W}''(t)).\vec{W}'''(t)$$

$$= (b^2[\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t)]\,\vec{f}(t))(b\,\vec{f}(t)x\vec{f}'''(t) + b\,\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t))$$

$$= b^3[\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t)]^2$$

$$\tau = \frac{[\vec{W}'(t)\,\vec{W}''(t)\,\vec{W}'''(t)]}{(\vec{W}'(t)x\vec{W}''(t)).(\vec{W}'(t)x\vec{W}''(t))} = \frac{b^3[\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t)]^2}{b^4[\vec{f}(t)\,\vec{f}'(t)\,\vec{f}''(t)]^2} \quad \therefore \quad \tau = \frac{1}{b}$$

50) Sea C la curva definida por la función vectorial $C: \vec{f}(t) = (1-\sqrt{t}, \sqrt{t}, |t^2-1|)$. Hallar la torsión en el punto de intersección de la curva con el plano x + y + z = 4.

Solución

Calcularemos el valor de $t = t_0$ en donde se obtiene el punto de intersección de la curva

$C: \vec{f}(t)$ y el plano **P**: x + y + z = 4.

Sea $p \in C : \vec{f}(t) \;\wedge\; p \;\Rightarrow\; p \in C : \vec{f}(t) \;\wedge\; p \in \mathbf{P}$

Si $p \in C : \vec{f}(t) \Rightarrow p(1-\sqrt{t}, \sqrt{t}, |t^2-1|)$ para algún t ∈ R pero como

$p \in \mathbf{P} \;\Rightarrow\; 1-\sqrt{t}+\sqrt{t}+|t^2-1| = 4$ entonces $|t^2-1| = 3 \;\Rightarrow\; t^2 = 4 \vee t^2 = -2$ pero $\nexists\; t \in R$

tal que $t^2 = -2 \;\Rightarrow\; t^2 = 4 \;\Rightarrow\; t = \pm 2$, como el dominio de la función $\vec{f}(t)$ es para t ≥ 0

entonces t = 2, además $|t^2-1| = t^2-1$, $\forall\; t \in D_{\vec{f}}$ entonces: $C: \vec{f}(t) = (1-\sqrt{t}, \sqrt{t}, t^2-1)$

$$\begin{cases} \vec{f}'(t) = (-\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t) \\ \vec{f}''(t) = (\frac{1}{4t^{3/2}}, -\frac{1}{4t^{3/2}}, 0) \\ \vec{f}'''(t) = (-\frac{3}{8t^{5/2}}, \frac{3}{8t^{5/2}}, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(2) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 4) \\ \vec{f}''(2) = (\frac{1}{8\sqrt{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}, 2) \\ \vec{f}'''(2) = (-\frac{3}{32\sqrt{2}}, \frac{3}{32\sqrt{2}}, 0) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(2) \times \vec{f}''(2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 4 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & -\frac{1}{8\sqrt{2}} & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$\vec{f}'(2)\times\vec{f}''(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1,1,0) \Rightarrow \|\vec{f}'(2)\times\vec{f}''(2)\| = \frac{3}{2}$$

$$\vec{f}'(2)\times\vec{f}''(2).\vec{f}'''(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(1,1,0).\frac{3}{32\sqrt{2}}(-1,1,0) = 0$$

La torsión está dado por la expresión

$$\tau(2) = \frac{\vec{f}'(2)\times\vec{f}''(2).\vec{f}'''(2)}{\|\vec{f}'(2)\times\vec{f}''(2)\|^2} = \frac{0}{(\frac{3}{2})^2} = 0 \qquad \therefore\ \tau(2) = 0$$

51) Sea C una curva definida por la función vectorial $\vec{f}: I \subset R \longrightarrow R^3$ y sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios constantes que forman un ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, si $\vec{f}'(t) = \vec{a} \times \vec{f}(t)$ y $\vec{f}(0) = \vec{b}$. Hallar la curvatura k(0) en función de θ ¿para qué valor de θ la curvatura k(θ) es mínima y cual es este valor?.

Solución

como $\vec{f}'(t) = \vec{a} \times \vec{f}(t)$ entonces $\vec{f}'(0) = \vec{a} \times \vec{f}(0) = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{f}'(t) = \vec{a} \times \vec{f}(t) \Rightarrow \vec{f}''(t) = \vec{a} \times \vec{f}'(t) \Rightarrow \vec{f}''(0) = \vec{a} \times \vec{f}'(0)$$

$\vec{f}''(0)=\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{f}(0))$, además se tiene:

$\vec{f}''(0)=\vec{a}\times\vec{f}'(0) \Rightarrow \vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)=\vec{f}'(0)\times(\vec{a}\times\vec{f}'(0))$

como el vector $\vec{a}\times\vec{f}'(0)$ es ortogonal al vector $\vec{f}'(0)$ entonces

$$\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|=\|\vec{f}'(0)\times(\vec{a}\times\vec{f}'(0))\|=\|\vec{f}'(0)\|\,\|\vec{a}\times\vec{f}'(0)\|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\|\vec{f}'(0)\|.\|\vec{a}\times\vec{f}'(0)\|$$

como $\vec{f}'(0)=\vec{a}\times\vec{f}(0)=\vec{a}\times\vec{b}$ entonces: $\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|=\|\vec{f}'(0)\|\,\|\vec{a}'\times(\vec{a}\times\vec{b})\|$ **... (1)**

como $\vec{a}\times\vec{b}$ es ortogonal al vector $\vec{a}$ entonces:

$$\|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta \quad \textbf{... (2)}$$

ahora a reemplazando (2) en (1) se tiene

$$\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|=\|\vec{f}'(0)\|\,\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta \quad \textbf{... (3)}$$

también $\|\vec{f}'(0)\|=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta$ **... (4)**

$$k(0)=\frac{\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|^3}=\frac{\|\vec{f}(0)\|\,\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta}{\|\vec{f}'(0)\|\,\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{1}{\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta}=F(\theta)$$

$$F(\theta)=\frac{1}{\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow F'(\theta)=-\frac{\operatorname{cosec}\theta.\operatorname{ctg}\theta}{\|\vec{f}(0)\|}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=0 \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$F''(\theta)=-\frac{\operatorname{cosec}\theta.\operatorname{ctg}^2\theta+\operatorname{cosec}^3\theta}{\|\vec{f}(0)\|} \Rightarrow F''(\frac{\pi}{2})=1>0 \text{ entonces } \exists \text{ minimo para } \theta=\frac{\pi}{2}$$

por lo tanto: $$k(0)=\frac{1}{\|\vec{f}(0)\|}$$

52) Sea C la curva descrita por la función vectorial $C: \vec{f}(s) = (\frac{s}{2} - \text{sen}(\frac{s}{2}),\ 1 - \cos(\frac{s}{2}),\ 4\,\text{sen}(\frac{s}{4}))$, $s \geq 0$ siendo s la longitud de arco de C. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto en donde la longitud de la curva C es π y en la dirección del vector curvatura en dicho punto.

Solución

El punto por donde pasa la recta es cuando el valor del parámetro s es π es decir $s = \pi$.

Osea $\vec{f}(\pi) = (\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ además $\vec{k}(s) = \vec{f}''(s)$ donde

$$\vec{f}'(s) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\text{sen}\frac{s}{2},\ \cos\frac{s}{4}) \quad y \quad \vec{f}''(s) = (\frac{1}{4}\text{sen}\frac{s}{2},\ \frac{1}{4}\cos\frac{s}{2},\ -\frac{1}{4}\text{sen}\frac{s}{4})$$

$$k(\pi) = \vec{f}''(\pi) = (\frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{8}) = \frac{1}{8}(2,0,-\sqrt{2})$$

Luego $L = \{\vec{f}(\pi) + t\,\vec{k}(0) \,/\, t \in R\}$

$$\therefore \quad L = \{(\frac{\pi}{2} - 1,\ 1,\ 2\sqrt{2}) + t(2,0,-\sqrt{2}) \,/\, t \in R\}$$

53) Encontrar la curvatura k, radio de curvatura ρ y el centro del círculo de curvatura C de la curva definida por la función vectorial.

$$C: \vec{f}(t) = (\int_0^t \cos\frac{\pi u^2}{2}du,\ \int_0^t \text{sen}\frac{\pi u^2}{2}du,\ 1)$$

Solución

Se conoce que $k(t) = \frac{\| \vec{f}'(t) x \vec{f}''(t) \|}{\| \vec{f}'(t) \|^3}$, entonces

$$\vec{f}'(t) = (\cos\frac{\pi t^2}{2},\ \text{sen}\frac{\pi t^2}{2},\ 0) \Rightarrow \vec{f}''(t) = (-t\pi\,\text{sen}\frac{\pi t^2}{2},\ \pi t\cos\frac{\pi t^2}{2},\ 0)$$

$$\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\frac{\pi t^2}{2} & \operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2} & 0\\ -t\pi\operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2} & t\pi\cos\frac{\pi t^2}{2} & 0\end{vmatrix}=(0,0,\pi t)$$

$\|\vec{f}'(t)\|=1$ y $\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|=\pi t$. Luego $k(t)=\pi t$ como $\rho(t)=\frac{1}{k(t)}=\frac{1}{\pi t}$

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)x\vec{f}''(t)\|}=(0,0,1)$$

$$\vec{N}(t)=\vec{B}(t)x\vec{T}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\frac{\pi t^2}{2} & \operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2} & 0\end{vmatrix}=(-\operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2},\cos\frac{\pi t^2}{2},0)$$

el centro del círculo de curvatura es: $C=\vec{f}(t)+\rho(t)\vec{N}(t)$ de donde

$$C=(\int_0^t\cos\frac{\pi t^2}{2}du,\int_0^t\operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2}du,1)+\frac{1}{\pi t}(-\operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2},\cos\frac{\pi t^2}{2},0)$$

$$C=(\int_0^t\cos\frac{\pi u^2}{2}-\frac{1}{\pi t}\operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2},\int_0^t\operatorname{sen}\frac{\pi u^2}{2}du+\frac{1}{\pi t}\cos\frac{\pi t^2}{2},1)$$

54) Sea C una curva en R^3 descrita por la función $\vec{x}=\vec{\alpha}(t)$, t > 0, si $\|\vec{\alpha}'(t)\|=\frac{1}{t+1}$ y $\vec{B}'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}(-1,-1,\frac{1-t}{\sqrt{2t}})$ para t > 0 y la torsión τ (t) en cada punto $\vec{\alpha}(t)\in C$ es positiva, determina τ (t), a medida que t crece ¿La curva C se tuerce más o menos? justifique.

Solución

de acuerdo a la fórmula de Frenett-Serrett

$\vec{B}'(t) = -S'(t)\tau(t)\vec{N} = \| \vec{\alpha}'(t) \| \tau(t) \vec{N}(t)$ de donde:

$$\frac{\vec{B}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} = -\tau(t)\vec{N}(t) \Rightarrow \| \frac{\vec{B}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} \| = |\tau(t)| \, \| \vec{N}(t) \| \quad \text{pero}$$

$$\| \vec{N}(t) \| = 1 \Rightarrow \| \frac{\vec{B}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t) \|} \| = |\tau(t)|$$

como $\| \vec{\alpha}'(t) \| = \frac{1}{t+1}$ y $\vec{B}'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}(-1,-1,\frac{1-t}{\sqrt{2t}})$

$$\tau(t) = \| \frac{\vec{B}'(t)}{\| \vec{\alpha}'(t)} \| = \| \frac{1}{1+t}(-1,-1,\frac{1-t}{\sqrt{2t}}) \| = \sqrt{\frac{(t+1)^2}{2t(t+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2t}} \qquad \therefore \; \tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

cuando t crece, τ(t) decrece menos.

55) Determina la ecuación del plano osculador y la curvatura para la curva C descrita por la función vectorial $C: \vec{f}(t) = (\ln(t+\sqrt{1+t^2}, \frac{t}{1+t}, \ln(1+t))$ en un punto donde el vector tangente tiene la dirección de la recta x - 1 = y - 2 = z - 5, también hallar la torsión.

Solución

$\vec{f}(t) = (\ln(t+\sqrt{1+t^2}, \frac{t}{1+t}, \ln(1+t))$, derivando $\vec{f}'(t) = (\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{(1+t)^2}, \frac{1}{1+t})$

el valor de $t = t_0$ se calcula con la condición que $\vec{f}'(t) // \vec{a}$ donde $\vec{a} = (1,1,1)$ que es la dirección de la recta $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$, como $\vec{f}'(t) // \vec{a} \Rightarrow \vec{f}'(t) \times \vec{a} = 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \frac{1}{(1+t)^2} & \frac{1}{1+t} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0) \Rightarrow (-\frac{t}{(1+t)^2}, \frac{1}{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{(1+t)^2}) = (0,0,0)$$

de donde por igualdad se tiene t = 0, como $\mathbf{P_0}: \vec{B}(0).(p - \vec{f}(0)) = 0$, donde

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|} \quad \text{y} \quad \vec{f}(0)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \vec{f}'(t)=(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\dfrac{1}{(1+t)^2},\dfrac{1}{1+t}) \\ \vec{f}''(t)=(\dfrac{-t}{(1+t^2)^{3/2}},\dfrac{-2}{(1+t)^3},\dfrac{-1}{(1+t)^2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'(0)=(1,1,1) \\ \vec{f}''(0)=(0,-2,-1) \end{cases}$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,-2) \Rightarrow \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=\sqrt{6}$$

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$\mathbf{P_0}:\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)((x,y,z)-(0,0,0))=0 \qquad \therefore \quad \mathbf{P_0}=x+y-2z=0$$

ahora calculamos la curvatura $\quad k(0)=\dfrac{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|^3}$ donde $\|\vec{f}'(0)\|=\sqrt{3}$

$$k(0)=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^3}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \ k(0)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

encontrando la torsión $\quad \tau(0)=\dfrac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|^2}$

$\vec{f}''(t)=(\dfrac{-t}{(1+t^2)^{3/2}},\dfrac{-2}{(1+t)^3},\dfrac{-1}{(1+t)^2})$, derivando

$$\vec{f}'''(t)=(\frac{-1+2t^2}{(1+t^2)^{3/2}},\frac{6}{(1+t)^4},\frac{2}{(1+t)^3}) \Rightarrow \vec{f}'''(0)=(-1,6,2)$$

$$\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)=(1,1,-2).(-1,6,2)=-1+6-4=1$$

$$\tau(0)=\frac{\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)\times\vec{f}''(0)\|^2}=\frac{1}{6} \qquad \therefore \ \tau(0)=\frac{1}{6}$$

56) La curva C es la intersección del cilindro $x^2+y^2+2(y-x)=2$ con el plano x - y - 2z - 2 = 0, determinar la curvatura y torsión, así como el plano osculador en el punto (3,-1,1).

Solución

Sea $C: \begin{cases} x^2+y^2+2(y-x)-2=0 \\ x-y-2z-2=0 \end{cases}$ La curva de intersticio de las superficies dadas parametrizando la curva se tiene: $x-y-2z-2=0 \Rightarrow z=\dfrac{x-y-2}{2}$ ... **(1)**

además $x^2+y^2+2(y-x)-2=0$, expresamos en la forma $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

$$\begin{cases} x-1=2\cos\theta \\ y+1=2\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \ \theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=-1+2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \ \theta\in[0,2\pi] \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $z=\dfrac{1+2\cos\theta+1-2\operatorname{sen}\theta-2}{2}=\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$

Luego $\vec{f}(\theta)=(1+2\cos\theta,\ -1+2\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta-\operatorname{sen}\theta)$ además $\vec{f}(\theta)=(3,-1,1) \Rightarrow \theta=0$

$$\vec{f}'(\theta)=(-2\operatorname{sen}\theta,\ 2\cos\theta,\ -\operatorname{sen}\theta-\cos\theta) \Rightarrow \vec{f}'(0)=(0,2,-1)$$

$$\vec{f}''(\theta)=(-2\cos\theta,\ -2\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\theta-\cos\theta) \Rightarrow \vec{f}''(0)=(-2,0,-1)$$

$$\vec{f}'''(\theta)=(2\operatorname{sen}\theta,\ -2\cos\theta,\ \cos\theta-\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow \vec{f}'''(0)=(0,-2,1)$$

$$\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2,2,4) \quad\Rightarrow\quad \|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|=\sqrt{24}$$

$\vec{f}'(0)=(0,2,-1) \quad\Rightarrow\quad \|\vec{f}'(0)\|=\sqrt{5}$ calculando la curvatura $k(0)=\dfrac{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}{\|\vec{f}'(0)\|^3}=\dfrac{\sqrt{24}}{5\sqrt{5}}$

calculando la torsión $\tau(0)=\dfrac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0).\vec{f}'''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|^2}=\dfrac{(-2,2,4).(0,-2,1)}{(\sqrt{24})^2}=\dfrac{0-4+4}{24}=0$

para determinar el plano osculador se tiene: $\mathbf{P_0}: \vec{B}(0).(p-\vec{f}(0))=0$, donde $\vec{f}(0)=(3,-1,1)$

$$\vec{B}(0)=\frac{\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)}{\|\vec{f}'(0)x\vec{f}''(0)\|}=\frac{1}{\sqrt{24}}(-2,2,4)=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$$

$\mathbf{P_0}: \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)[(x,y,z)-(3,-1,1)]=0 \qquad \therefore \quad \mathbf{P_0}: \; x-y-2z=2$

57) El salto de un sapo es descrita por la función vectorial $\vec{f}(t)=(t^2,|t|)$, calcular la longitud recorrida en el intervalo $-1 \le t \le 1$, la curvatura y torsión en $(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$

<u>Solución</u>

Se debe calcular $L=\int_{-1}^{1}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=2\int_{-1}^{0}\|\vec{f}'(t)\|\,dt$

como $\vec{f}(t)=\begin{cases}(t^2,t) & \text{para } t\ge 0\\ (t^2,-t) & \text{para } t<0\end{cases}$, derivando se tiene: $\vec{f}'(t)=\begin{cases}(2t,1) & \text{para } t\ge 0\\ (2t,-1) & \text{para } t<0\end{cases}$

$$L=\int_{-1}^{1}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_{-1}^{0}\|\vec{f}'(t)\|\,dt+\int_{0}^{1}\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_{-1}^{0}\sqrt{4t^2+1}\,dt+\int_{0}^{1}\sqrt{4t^2+1}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}[t\sqrt{4t^2+1}+\ln|2t+\sqrt{4t^2+1}|]\Big/_{-1}^{0}+\frac{1}{2}[t\sqrt{4t^2+1}+\ln|2t+\sqrt{4t^2+1}|]\Big/_{0}^{1}$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2})=\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)$$

$$\vec{f}''(t)=\begin{cases}(2,0)\,,t\geq 0\\(2,0)\,,t<0\end{cases}\Rightarrow\ \|\vec{f}''(t)\|=2\quad\text{como}\quad\vec{f}(t_0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})\ \Rightarrow\ t_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{f}'(\frac{1}{\sqrt{2}})=(\sqrt{2},1)\quad,\quad\vec{f}''(\frac{1}{\sqrt{2}})=(2,0)$$

$$\text{como}\ k(\frac{1}{\sqrt{2}})=\left\|\frac{\vec{T}'(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\|\vec{f}'(\frac{1}{\sqrt{2}})\|}\right\|\quad\text{donde}\quad\|\vec{f}'(\frac{1}{\sqrt{2}})\|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$$

$$\vec{f}'(t)=(2t,1)\quad\text{para}\ \ t>0\ \Rightarrow\ \|\vec{f}'(t)\|=\sqrt{4t^2+1}$$

$$\vec{T}(t)=(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}},\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}),\ \text{derivando}\ \ \vec{T}'(t)=(\frac{2}{(4t^2+1)^{3/2}},\frac{-4t}{(4t^2+1)^{3/2}})$$

$$\vec{T}'(\frac{1}{\sqrt{2}})=(\frac{2}{3\sqrt{3}},-\frac{4}{3\sqrt{6}})\quad\text{entonces}\quad k(\frac{1}{\sqrt{2}})=\left\|\frac{\vec{T}'(\frac{1}{\sqrt{2}})}{\|\vec{f}'(\frac{1}{\sqrt{2}})\|}\right\|=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}$$

2.50 Ejercicios Propuestos.-

I.-

1) Calcular $\vec{a}.\vec{b}$, sí $\vec{a}=(2,-4,1)$ y $\vec{b}=\int_0^1(t\,e^{2t},t\cosh 2t,\,2t\,e^{-2t})\,dt$

Rpta. 0

2) Calcular las siguientes integrales.

a) $\int (4\operatorname{sen} t\ \vec{i} + 3\cos t\ \vec{j})\,dt$ b) $\int (t\,e^{-t^2}\ \vec{i} + t\ \vec{j})\,dt$

c) $\int_0^1 (t, t^{1/2}, e^t)\,dt$ d) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t)\,dt$

e) $\int_0^1 (\sqrt{t}, \sqrt{t+1})\,dt$ f) $\int_0^3 (e^t, t\,e^t)\,dt$

3) Hallar la función vectorial $\vec{f}$, continua en el intervalo $< 0,+\infty >$ tal que $\vec{f}(x) = xe^x\,\vec{A} + \frac{1}{x}\int_1^x \vec{f}(t)\,dt$ $\forall$ x > 0, siendo $\vec{A}$ un vector fijo no nulo.

Rpta. $\vec{f}(x) = e^x(x+1)\,\vec{A} - e\,\vec{A}$

4) Una función vectorial $\vec{f}$, que nunca es cero y tiene derivada continua $\vec{f}'(t)$, $\forall$ t, siempre es paralela a su derivada, demostrar que existe un vector constante $\vec{A}$ y una función real positiva ψ tal que $\vec{f}(t) = \psi(t)\,\vec{A}$, $\forall$ t.

5) Una función vectorial $\vec{f}$ satisface la ecuación $t\,\vec{f}'(t) = \vec{f}(t) + t\,\vec{A}$ $\forall$ t >0, donde $\vec{A}$ es un vector fijo. Calcular $\vec{f}''(1)$ y $\vec{f}(3)$ en función de $\vec{A}$ sí $\vec{f}(1) = 2\,\vec{A}$.

Rpta. $\vec{f}''(1) = \vec{A}$, $\vec{f}(3) = (6 + 3\ln 3)\,\vec{A}$

6) Dado un vector $\vec{V} \neq \vec{0}$ y una función vectorial $\vec{f}$, tal que: $\vec{f}(t).\vec{V} = t$, $\forall$ t $\in$ R y tal que el ángulo formado por $\vec{f}'(t)$ y $\vec{V}$ es constante. Demostrar que $\vec{f}''(t)$ es ortogonal a $\vec{f}'(t)$.

7) Sea una curva C descrita por una partícula móvil en R^3. Dar una demostración o poner un contra ejemplo.

a) Si el vector velocidad es constante, la curva es plana.

b) Si el vector aceleración es constante, la curva es plana.

c) Si el vector velocidad es perpendicular al vector aceleración la curva es plana.

8) Determine una función $\vec{f}: I \subset R \longrightarrow R^2$ que parametrice la curva indicada.

a) La recta y = 2x, recorrida del tercero al primer cuadrante.

b) La cuarta parte del circulo $x^2 + y^2 = 3$ que se encuentra en el segundo cuadrante, corrido en sentido antihorario.

c) El cuadrado $|x| + |y| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

d) El segmento de la curva $y = |1 - |x||$ comprendido entre x = -2 y x = 2 recorrido de izquierda a derecha.

e) El segmento de la curva $y = |x^2 - 1|$ comprendido entre x = -2 y x = 2 recorrido de derecha a izquierda.

9) Determine una función $\vec{f}: I \subset R \longrightarrow R^3$ que parametrice la curva indicada.

a) La parte de la recta y = 2x = 3z que se encuentra en el primer octante, comenzando en el origen.

b) La parte de la recta que resulta de la intersección de los dos planos x + 2y -z = 0, 3x - y + 5z = 0, correspondiente a $z \geq 0$, comenzando en el origen.

c) Él circulo que resulta de la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 4$ comenzando en el punto (0,2,4) con el sentido de recorrido (0,2,4) →(-2,0,4)→(0,-2,4)→(2,0,4)→(0,2,4).

10) Encuentre una representación paramétrica de las siguientes curvas dadas.

a) $C: \begin{cases} z^2 = 2ax \\ 9y^2 = 16xz \end{cases}$ **Rpta.** $C: \vec{\alpha}(t) = (\frac{t^2}{2a}, \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{2a}}, t)$

b) $C: x^2 + y^2 = 9\ ,\ z = 0$ **Rpta.** $C: \vec{\alpha}(t) = (3\cos t,\ 3\operatorname{sen} t, 0)$

c) $C: y = 3x^2\ ,\ z = 0$ **Rpta.** $C: \vec{\alpha}(t) = (t,\ 3t^2, 0)$

d) $C: x^2 = 4y\ ,\ x^3 = 24z$ **Rpta.** $C: \vec{\alpha}(t) = (t, \frac{t^2}{4}, \frac{t^3}{24})$

e) $C: (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4\ ,\ z = 0$

Rpta. $\vec{\alpha}(t) = (1 + 2\cos t,\ 2 + \operatorname{sen} t, 0)$

f) $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a(x+y) \\ x + y = a \end{cases}$

Rpta. $C: \vec{\alpha}(\theta) = (\frac{a}{2}(1 - \cos\theta), \frac{a}{2}(1 + \cos\theta), \frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\theta)$

11) Dadas las siguientes curvas, encontrar su representación paramétrica.

a) [GCM1] $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0\ ,\ z = 0$

Rpta. $\vec{f}(t) = (3 + \cos t,\ 2 + \operatorname{sen} t, 0)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4\ ,\ x + y - z = 0$

Rpta. $\vec{f}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta))$

c) $y^2 + z^2 = 25\ ,\ x^2 + y^2 = 10$ **Rpta.** $\vec{f}(t) = (\pm\sqrt{10 - t^2},\ t, \pm\sqrt{25 - t^2})$

12) Sea $\vec{\alpha}$ la trayectoria $\vec{\alpha}(t) = (2t,\ t^2, \ln t)$ definida para t > 0. Encontrar la longitud de arco de $\vec{\alpha}$ entre los puntos (2,1,0) y (4,4,ln2). **Rpta.** 3 + ln 2

13) Hallar la longitud de arco de las líneas que se indican.

a) $\vec{f}(t)=(t\cos t,\ t\,\text{sen}\,t, t)\quad , t\in[0,2]$

b) $\vec{f}(t)=((1+\cos t)\cos t,\ (1+\cos t)\text{sen}\,t)\ ,\ t\in[0,2]$

c) $y=\text{arcsen}\dfrac{x}{a}\ ,\ z=\dfrac{a}{4}\ln(\dfrac{a+x}{a-x})$ desde $(0,0,0)$ hasta $(\dfrac{a}{2},\dfrac{a\pi}{6},\dfrac{a}{4}\ln 3)$.

Rpta. $L=\dfrac{a}{2}(1+\dfrac{1}{2}\ln 3)$

d) $\vec{f}(t)=(a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t, a\ln\cos t)$ desde $(0,0,0)$ hasta $(\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\dfrac{a\sqrt{2}}{2},-\dfrac{a}{2}\ln 2)$

14) Hallar la longitud de arco de las siguientes curvas

a) $\vec{f}(t)=(2\,\text{sen}^2 t, \text{sen}\,2t, 2\ln(\cos t),\quad t\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$

b) $\vec{f}(t)=(t^2,|t|)\ ,\ t\in[-1,1]$

15) Hallar la longitud de arco de la curva descrita por $\vec{f}(t)=(2\,\text{sen}^2 t,\ \text{sen}\,2t, 2\ln\cos t)$ desde el punto $(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\ln(\dfrac{\sqrt{3}}{2}))$ hasta el punto $(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\ln\dfrac{1}{2})$.

Rpta. $2\ln(3+2\sqrt{3})$

16) Hallar la longitud del arco de la hélice cónica C: $\vec{\alpha}(t)=(a\,e^t\cos t,\ ae^t\,\text{sen}\,t, a\,e^t)$ desde el punto O(0,0,0) hasta el punto A(a,0,a).

Rpta. $L=a\sqrt{3}$

17) Calcular $L_{\vec{\alpha}}$ para la función vectorial definida por: $\vec{\alpha}(t)=(a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t, ct)$ en $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

18) Encontrar la longitud de la curva definida por $\vec{f}(t)=(\int_0^t \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta, \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta, 4\sqrt{t})$ entre t = 1 y $t=t_1$, sabiendo que $\vec{f}(t_1)$ es el punto donde $\vec{f}'(t_1)$ es paralelo al plano YZ ($1<t_1<2$).

Rpta. $2\sqrt{5}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-1)$

19) Una partícula se mueve en el plano XY según la ecuación $x=e^{-2t}\cos 3t$, y $y=e^{-2t}\operatorname{sen}3t$, encuentre la longitud de la trayectoria desde t = 0 a t = π.

20) Considere la curva descrita por $\vec{f}(t)=(t, a\cosh(\frac{t}{a}), a\operatorname{senh}(\frac{t}{a}))$ demuestre que la distancia a lo largo de la curva desde (0,a,0) hasta P_0 en la curva es proporcional a la distancia de P_0 al plano XY.

21) Sea la función r = g(θ) con derivada continua en < a,b >. Demuestre que la longitud de la curva es $L=\int_a^b \sqrt{g^2+(g')^2}\,d\theta$.

22) Sea la elipse descrita por x = a cos t, y = b cos t, t ∈[0,2π], 0 < b < a. Demostrar que la longitud de la elipse es: $L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$, donde e es la excentricidad de la elipse.

23) Hallar la longitud de arco de la línea C: $x^2=3y$, 2xy = 9z desde el punto (0,0,0) hasta el punto (3,3,2).

Rpta. L = 5

24) Hallar la longitud de arco de la línea C: $z^2=2ax$, $9y^2=16xz$ desde el punto (0,0,0) hasta el punto $(2a, \frac{8a}{3}, 2a)$.

Rpta. L = 4a

25) Encontrar la longitud de arco de las siguientes curvas:

a) $\vec{\alpha}(t)=(a(t-\operatorname{sen}t),1-\cos t)$, $a>0$ longitud total

b) $\vec{\alpha}(t)=(a(t-\operatorname{sen}t),1-\cos t,4\operatorname{sen}\frac{t}{2})$, $t\in[0,2\pi]$

c) $\vec{\alpha}(t)=(a\cos^3 t,a\operatorname{sen}^3 t)$, $a>0$ longitud total.

d) $\vec{\alpha}(t)=(t-a\operatorname{tgh}\frac{t}{a},a\operatorname{sec}h(\frac{t}{a}))$ desde $t=-a$ hasta $t=2a$

26) Encontrar la longitud de arco de las curvas

a) $\vec{\alpha}(t)=(t,\ln\sec t,\ln(\sec t+\operatorname{tg}t))$, $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$ **Rpta.** $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

b) $\vec{\alpha}(t)=(e^t\cos t,e^t\operatorname{sen}t)$, $t\in[0,2]$ **Rpta.** $\sqrt{2}(e^2-1)$

c) $\vec{\alpha}(t)=(t,\ln\sec t,3)$ desde $t=0$ a $t=\frac{\pi}{4}$ **Rpta.** $\ln(1+\sqrt{2})$

d) $\vec{\alpha}(t)=(a(\cos t+t\operatorname{sen}t),a(\operatorname{sen}t-t\cos t))$, $a>0$ en $[0,2\pi]$

Rpta. $2a\pi^2$

e) $\vec{\alpha}(t)=(\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t)$ en $[0,2\pi]$ donde $c^2=a^2-b^2$, $0<b<a$

Rpta. $\dfrac{4(a^3-b^3)}{ab}$

f) $\vec{\alpha}(t)=(a(\operatorname{senh}t-t),a(\cosh t-1))$, $0\le t\le T$, $a>0$

Rpta. $2a(\cosh\frac{T}{2}\sqrt{\cosh T}-1)-\sqrt{2}a\ln(\dfrac{\sqrt{2}\cosh\frac{T}{2}+\sqrt{\cosh T}}{1+\sqrt{2}})$

27) Sea C la curva descrita por la función vectorial $\vec{f}(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 4\operatorname{sen}\frac{t}{2})$ con a > 0. Hallar la longitud de arco de C desde el punto $a(\frac{\pi - 2}{2}, 1, 2\sqrt{2})$ hasta el punto a(π,2,4)

28) La porción de una partícula en el instante t es: x(t) = 1 - cos t , y(t) = t - sent. Hallar el recorrido de la partícula entre t = 0 y t = 1.

29) Halle la longitud de arco de la epicicloide como función de φ a lo largo de la curva

$$\vec{\alpha}(\varphi) = ((r_0 + r)\cos\varphi - r\cos(\frac{r_0 + r}{r}), (r_0 + r)\operatorname{sen}\varphi - r\operatorname{sen}(\frac{r_0 + r}{r}\varphi))$$

Rpta. $L = \frac{4r(r_0 - r)}{r_0}(1 - \cos\frac{r_0}{2r}\theta)$

30) Hallar la longitud de arco de la línea C: $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a\ln(\frac{2a}{2a - x})$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x,y,z).

Rpta. $L = a\ln\left|\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x}}\right|$

31) Hallar la longitud de arco de la línea C: $4ax = (y + z)^2$, $4z^2 + 3y^2 = 3z^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto (x,y,z).

Rpta. $L = \sqrt{2}z$

32) Dado $\vec{f}(t) = (\int_{\operatorname{ctg}\sqrt{t}}^{\operatorname{tg} t} \frac{dx}{1 + x^2}, \int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx, \int_1^t \frac{\cos x}{x}dx)$ y $\vec{g}(t) = (1 - 2t, t^2, 2e^{2(t-1)})$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Hallar la longitud de la curva a lo largo de $\vec{f}$ desde $t = t_0$ hasta $t = \frac{1}{2}$ donde t_0 es el punto en el que $\vec{g}\,'(t)$ es paralelo a $\vec{g}(t)$.

33) Calcular la longitud del arco y parametrice la curva en el parámetro S donde la curva es dada por las ecuaciones $x^2+y^2+z^2=a(x+y)$, $x+y=a$.

34) Hallar la distancia que recorre una partícula que se desplaza sobre la curva C: $x^2+y^2+z^2=1 \wedge x+z=1$ desde el punto A(1,0,0) hasta el punto $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$

Rpta. $L=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

35) **a)** Hallar la representación paramétrica de la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a (a > 0) que rueda (sin deslizamiento) sobre una recta.

b) Hallar la longitud de arco de la curva encontrada en a)

36) Sea C una curva descrita por la función $\vec{\alpha}:[0,1]\longrightarrow R^3$ si $\vec{\alpha}'(0)=(1,2,2)$ y $\vec{\alpha}''(t)=2t\,\vec{T}(t)+\lambda(t)\,\vec{N}(t)$ calcular la longitud de la curva.

Rpta. $L=\frac{10}{3}$

37) Si C es una curva en R^3 descrita por $\vec{\alpha}(t)=(t-\operatorname{sen}t, 1-\cos t, -4\cos\frac{t}{2}), t\in[0,2\pi]$.

Hallar la longitud de arco C entre el punto de curvatura máxima y el punto de curvatura mínima. **Rpta.** $L=4\sqrt{2}$

38) Sea C una curva de ecuación vectorial $\vec{f}(t)=(t-\operatorname{sen}t, 1-\cos t, -4\operatorname{sen}\frac{t}{2}), t\in[0,2\pi]$.

Hallar la longitud del arco C entre el punto de curvatura máxima y el punto de curvatura mínima. **Rpta.** $L=4\sqrt{2}$

39) Sea C una curva de R^3 cuyas ecuaciones paramétricas en coordenadas cilíndricas son: C: $r=f_1(t)$, $\theta=f_2(t)$, $z=f_3(t)$. Demostrar que la longitud de arco de C, desde el punto t = a hasta el punto t = b es: $L=\int_a^b\sqrt{(D_t r)^2+r^2(D_t\theta)^2+(D_t z)^2}\,dt$

40) En la ecuación de la curva $y^2 = x^3$, hallar la longitud de arco que une los puntos A(1,-1) a B(1,1).

41) Sea g una función real derivable en [a,b] y sea C la gráfica polar r = g(θ). Entonces C esta descrita por $\vec{f} = g.\vec{u}$ sobre [a,b], donde $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ pruebe que: $\vec{f}\,'(\theta) = g'\,\vec{u} + g\,\vec{u}\,'$

42) Un movimiento circular de una barra $\overline{OA}$ alrededor del punto fijo O, está definida por la relación $\theta = 0.15t^2$ donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Un bloque B se desliza a lo largo de la barra de acuerdo a al relación, $r = 3 - 0.40t^2$ donde r es la distancia al punto fijo O, expresada en pies y t en segundos. Determinar la velocidad total y la aceleración total del bloque B, después que la barra $\overline{OA}$ ha rotado 30º.

Rpta. $\|\vec{v}\| = 1.74\, pies/seg$, $\|\vec{a}\| = 1.80\, pies/seg^2$

43) Sea $\vec{a} = \vec{a}(u)$ la función vectorial del escalar u donde u a su vez es una función escalar del escalar básico t, suponiendo que $\vec{a}(u)$ y u = u(t) son diferenciables tantas veces como sea necesario. Hallar la expresión para las derivadas de la función compuesta: $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t}$

44) Hallar la trayectoria del movimiento para el cual el radio vector del punto móvil satisface a la condición $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a} \times \vec{r}$, donde $\vec{a}$ es un vector constante.

Rpta. La trayectoria es una circunferencia cuyo plano es perpendicular al vector $\vec{a}$

45) Demostrar que la curva C: $x = 1 + 3t + 2t^2$, $y = 2 - 2t + 5t^2$, $z = 1 + t^2$, es plana. Hallar el plano en que se encuentra.

Rpta. P: 2x + 3y + 19z = 27

46) Averiguar si es plana la curva. C: $\begin{cases} x = 3t^4 + t^2 - 3 \\ y = 3t^3 + t^2 + 1 \\ z = t^4 + 2t^3 + t^2 \end{cases}$ Si es plana determinar el plano a que pertenece. **Rpta.** x + 2y - 3z + 1 = 0

47) Una partícula se mueve sobre $C \subset R^3$ de tal manera que su aceleración en cualquier instante t es $\vec{a}\,\text{sen}\,t + \vec{b}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores constantes, si se parte del punto $(-\frac{2}{5}, 2, 2)$ con velocidad inicial (2,-1,2).

a) Por diferenciación calcular aproximadamente la distancia de la partícula al origen en t = 0.2 seg.

b) Si $\vec{a} = (-2,1,-2)$ y $\vec{b} = (\frac{2}{5}, -2, -2)$ bosqueje a la trayectoria de la partícula.

Rpta. $\|\vec{f}(0.2)\| = 3$

48) La curva $\vec{\gamma}$ esta determinado por $\vec{\gamma}(t) = (be^{bt}, be^{bt}\cos t, be^{bt}\,\text{sen}\,t)$.

a) Determinar el rango de la curva e identificarlo (graficar).

b) Halle la longitud de arco desde el punto A(0,0,0) hasta B(b,b,0).

c) Parametrice la curva respecto a la longitud de arco.

49) Consideremos la elipse descrita por la transformación $\vec{f}(\varphi) = (\alpha\,\text{sen}\,\varphi, \beta\cos\varphi)$ con $0 \le \varphi \le 2\pi$, demuestre que la longitud de arco de tal elipse es $4\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\varphi}\;d\varphi$

II.-

1) Sea $\vec{f}(t)=(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t)$, $P_0=\vec{f}(0)$

a) Hallar $\vec{T}(0)$, $\vec{N}(0)$, $\vec{B}(0)$ **b)** Los planos fundamentales en t = 0.

2) Determinar $\vec{T},\vec{N},\vec{B},k,\tau$ para la curva C descrita por la función vectorial $\vec{f}(t)=(c^2\cos t, c^2\operatorname{sen} t, d^2 t)$ en cualquier punto c y d son constantes.

3) Determinar $\vec{T},\vec{N}$ y $\vec{B}$ para cada una de las siguientes curva.

a) $\vec{f}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$ **b)** $\vec{f}(t)=(t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$

c) $\vec{f}(t)=(3t^2, 2+8t^2, -5t^2)$ en t = 0 **d)** $\vec{f}(t)=(9\cos t, 9\operatorname{sen} t, 3)$

4) Dado la función vectorial $\vec{f}(t)=(a\cos\omega t, a\operatorname{sen}\omega t)$; donde a > 0, b > 0.Determinar $\vec{T},\vec{N},\vec{B},k,\tau$, ∀ t.

5) Determinar $\vec{T},\vec{N}$ y $\vec{B}$ y los planos osculador, normal y rectificante en $\vec{f}(0)$ para las siguientes curvas:

a) $\vec{f}(t)=(t-\operatorname{sen}, 1-\cos t, t)$ **b)** $\vec{f}(t)=(t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$

c) $\vec{f}(t)=(t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$ en t = 1 **d)** $\vec{f}(t)=(t, 1-t, t+t^2)$ en (1,0,2)

6) Dada la curva $\vec{f}(t)=(t^2+1, 8t, t^2-3)$. Hallar el vector tangente unitario en t = 1, escriba la ecuación del plano normal, plano osculador y el plano rectificante en el punto $\vec{f}(1)$.

7) Hallar la ecuación de los planos osculador, normal y rectificante a la curva $\vec{\alpha}(t)=(e^t+1, e^{-t}-1, t)$ en t = 0.

Rpta. $\mathbf{P_N}: x-y+z=2$, $\mathbf{P_R}: x+y=2$, $\mathbf{P_0}: x-y-2z=2$

8) Sea C una curva de ecuación vectorial $\vec{\alpha}(t) = (t, \ln\sec t, \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$. Hallar los vectores $\vec{T}, \vec{N}$ y $\vec{B}$ y la ecuación del plano osculador en el punto en que la curva corta al plano YZ.

Rpta. $\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\vec{N}(0) = (0,1,0)$, $\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, $\mathbf{P_0}$: $x - z = 0$

9) Formar las ecuaciones del plano osculador, la normal principal y la binormal de la línea $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un punto cualquiera.

10) Hallar la ecuación del plano osculador a la curva $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ en el punto (6,9,9).

11) Sea C la curva descrita por la función vectorial $\vec{f}(t) = a(x - \operatorname{sen} x, 1 - \cos x, 4\operatorname{sen}\frac{x}{2})$, a constante. Hallar la ecuación de la recta tangente y el plano normal a la curva en el plano (2π,0,0).

12) Hallar la ecuación del plano osculador a la curva C descrita por $\vec{f}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$, para t = 2. **Rpta.** $\mathbf{P_0}$: $12x - 6y + z - 8 = 0$

13) Dada la función vectorial $\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t - 2, t^2 + 2, t^2 + 2\operatorname{sen} t - 1)$. Hallar la torsión en cualquier punto y determinar la ecuación del plano osculador en t = 0, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$, explique su respuesta. **Rpta.** $\tau = 0$, $\mathbf{P_0}$: $2x + y - z + 1 = 0$

14) Hallar el vector normal y una ecuación del plano osculador para $t_0 = \frac{1}{2}$ cuando $\vec{f}(t) = (\operatorname{arcsen} t, t, -(1-t)^{1/2})$.

15) Hallar la intersección del plano XY con el plano normal a la curva $\vec{f}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ en el punto $t=\dfrac{\pi}{2}$

16) Sea la curva C: $\vec{f}(t)=(\cosh t,\ \operatorname{senh} t, t)$. Hallar la ecuación del plano osculador en el punto donde el radio de curvatura es mínima.

17) Sean C y **P** la curva y el plano definido por: C: $\vec{f}(t)=(\cos 4t,\ \operatorname{sen} 4t, t)$ y **P**: x + 4z - 3 = 0. Determine en que punto de la curva, el plano osculador es paralelo a **P**. Hallar también la ecuación del plano osculador.

Rpta. $p(0,1,\dfrac{\pi}{8})$; $\mathbf{P_0}$: $x+4z=\dfrac{\pi}{2}$

18) Si C es una curva con representación parametrica $\vec{\alpha}(t)=(t,\dfrac{1+t}{t},\dfrac{1-t^2}{t})$.

a) Calcular su torsión.

b) Determinar la ecuación del plano osculador en el punto t = 1.

Rpta. a) $\tau=0$ b) $\mathbf{P_0}$: $x-y+z+1=0$

19) Determinar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal para la línea dadas en los puntos indicados:

a) $\vec{f}(\theta)=(a\cos\theta,\ a\operatorname{sen}\theta,\ \dfrac{k\theta}{2\pi})$ en $p(\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\dfrac{k}{8})$

b) $\vec{f}(t)=(\dfrac{t^4}{4},\dfrac{t^3}{3},\dfrac{t^2}{2})$, en un punto cualquiera además demostrar que la tangente en todos los puntos de la curva C forma un mismo ángulo con el eje OZ.

Rpta. **a)** $L_t: \dfrac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{z-\frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}$, $\mathbf{P_N}: -x+y+\dfrac{kz}{\pi\alpha\sqrt{2}}=\dfrac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\dfrac{z-\frac{t^2}{2}}{\frac{\pi}{a}}$, $\mathbf{P_N}: t^2x+ty+z=\dfrac{t^6}{4}+\dfrac{t^4}{3}+\dfrac{t^2}{2}$

20) Hallar las ecuaciones de la tangente, del plano normal y el plano osculador de la curva $\vec{\alpha}(t)=(t,t^2,t^3)$ en el punto (2,4,8).

Rpta. $L_t: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-8}{12}$, $\mathbf{P_N}: x+4y+12z=144$, $\mathbf{P_0}: 12x-6y+z-8=0$

21) Dada la curva $\vec{\alpha}(t)=((t^2+1)\vec{i}, 8t\vec{j}, (t^2-3)\vec{k})$. Hallar el vector tangente unitario en t = 1, escriba la ecuación del plano normal, plano osculador y plano rectificante en el punto $\vec{\alpha}(1)$.

22) Hallar los vectores $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$, la curvatura k, las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano osculador a las curvas dadas en el punto indicado.

a) $\vec{\alpha}(t)=(e^t\cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$, t = 0

b) $\vec{\alpha}(t)=(2\cosh\frac{t}{2}, 2\operatorname{senh}\frac{t}{2}, 2t)$, t = 0

Rpta. **a)** $k=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\mathbf{P_0}: x+y-2z+1=0$

b) $k=\dfrac{1}{10}$, $\mathbf{P_0}: 2y-z=0$

23) Formar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x=\frac{e^t \operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}$, $y=1$, $z=\frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$ en el punto t = 0.

Rpta. $L_t:\ \frac{x}{1}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \wedge y=1$, $P_N:\ 2x+2z-\sqrt{2}=0$

24) Dada la ecuación de la hélice $C:\ \vec{\alpha}(t)=(a\cos t, a\operatorname{sen} t, \sqrt{R^2-a^2}\,t)$. Hallar las ecuaciones de los planos osculador, rectificante y normal en cualquier punto.

Rpta. $\mathbf{P_0}:\sqrt{R^2-a^2}\operatorname{sen} t.x-\sqrt{R^2-a^2}\cos t.y+az=a\sqrt{R^2-a^2}\,t$

$\mathbf{P_R}:\ \cos t.x+\operatorname{sen} t.y=a$

$\mathbf{P_N}:\ a\operatorname{sen} t.x-a\cos t.y-\sqrt{R^2-a^2}z+(R^2-a^2)t=0$

25) Dada la curva C: x = 6t , $y=3t^2$, $z=t^3$, en el punto t = 1, hallar la curvatura k, la torsión τ, plano osculador, plano rectificante y el plano normal.

Rpta. $k(1)=\frac{2}{27}$, $\tau(1)=\frac{2}{27}$, $\mathbf{P_0}: x-2y+2z=2$, $\mathbf{P_R}: 2x-y-2z=7$, $\mathbf{P_N}: 2x+2y+z-19=0$

26) Sea la curva alabeada $C: x=e^t\operatorname{sen}2t$, $y=e^t\cos 2t$, $z=2e^t$, para el punto P(0,1,2). Hallar la curvatura k, los planos normal rectificante y osculador y las rectas tangentes, normal y binormal.

Rpta. $k=\frac{2\sqrt{5}}{9}$, $\mathbf{P_N}:\ 2x+y+2z=5$, $\mathbf{P_R}:\ x-2y+2=0$, $\mathbf{P_0}:\ 4x+2y-5z+8=0$

$L_t:\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$, $L_N:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2} \wedge z=0$, $L_B:\ \frac{x}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-5}$

27) Formar las ecuaciones del plano osculador, la normal principal y binormal a las líneas dadas en los puntos indicados.

a) $C:\ y^2 = x\ ,\ x^2 = z$ en el punto (1,1,1)

b) $C:\ x^2 = 2az\ ,\ y^2 = 2bz$ en un punto cualquiera-

c) $C:\ \vec{\alpha}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ en el punto $(e, e^{-1}, \sqrt{2})$

Rpta.

a) $P_0:\ 6x - 8y - z + 3 = 0,\ L_N:\ \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-1}{-8} = \dfrac{z-1}{-1}\ ,\ L_B:\ \dfrac{x-1}{31} = \dfrac{y-1}{26} = \dfrac{z-1}{-22}$

b) $P_0:\ \sqrt{b}(x - x_0) - \sqrt{a}(y - y_0) = 0,\ L_N:\ \dfrac{x - x_0}{\sqrt{b}} = \dfrac{y - y_0}{-\sqrt{a}} \wedge z = z_0\ ,$

$L_B:\ \dfrac{x - x_0}{\sqrt{2az_0}} = \dfrac{y - y_0}{\sqrt{2bz_0}} = \dfrac{z - z_0}{-(a+b)}$

c) $P_0:\ \dfrac{1}{e}x - ey - \sqrt{2}z + 2 = 0\ ,\ L_N:\ \dfrac{x-e}{-1/e} = \dfrac{y - 1/e}{e} = \dfrac{z - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ ,$

$L_B:\ \dfrac{x-e}{1} = \dfrac{y - 1/e}{1} = \dfrac{z - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\text{senh}\,1}$

28) Demostrar que la tangente en todos los puntos de la línea forma un mismo ángulo con el eje OZ y hallar la tangente y el plano normal.

a) $C:\ x = at\ ,\ y = \dfrac{at^2}{2}\ ,\ z = \dfrac{at^3}{3}$, en el punto (6a, 8a, 72a)

b) $C:\ x = t - \text{sen}\,t\ ,\ y = 1 - \cos t\ ,\ z = 4\,\text{sen}\dfrac{t}{2}$, en el punto $(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$

c) C: $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$, en el punto (-2,1,6)

d) C: $x^3+z^3=a^3$, $y^3+z^3=b^3$, en un punto cualquiera.

Rpta. **a)** $L_t: \ x-6a=\dfrac{y-8a}{6}=\dfrac{z-72a}{36}$, P_N: $x+6y+36z=2706a$

b) $L_t: \ \dfrac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $P_N: x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4$

c) $L_t: \ \dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}$, P_N: $27x+28y+4z+2=0$

d) $L_t: \ \dfrac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\dfrac{y-y_0}{x_0^2z_0^2}=\dfrac{z-z_0}{x_0^2y_0^2}$, P_N: $\dfrac{x-x_0}{x_0^2}+\dfrac{y-y_0}{y_0^2}+\dfrac{z-z_0}{z_0^2}=0$

29) Mostrar que las tangentes, las normales principales y binormal de la línea $\vec{\alpha}(t)=(e^t\cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t)$ forman ángulos constantes con el eje Z.

30) Mostrar que la línea $\vec{\alpha}(t)=(2t+3,\ 3t-1,\ t^2)$ tiene entre los puntos un mismo plano osculador. Interpretar este hecho desde un punto de vista geométrico.

Rpta. P_0: $3x-2y-11=0$ en todo punto de $\vec{\alpha}(t)$

31) Hallar las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en un punto arbitrario de la curva C: $x=\dfrac{t^4}{4}$, $y=\dfrac{t^3}{3}$, $z=\dfrac{t^2}{2}$, Hallar los puntos en que la tangente a ésta curva es paralela al plano x + 3y + 2z - 10 = 0.

Rpta $L_t: \ \dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\dfrac{z-t^2}{1}$, $L_N: \ \dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{t^3+2t}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{1-t^4}=\dfrac{z-\frac{t^2}{2}}{-2t^3-t}$,

$L_B: \ \dfrac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\dfrac{y-\frac{t^3}{3}}{-2t}=\dfrac{z-\frac{t^2}{2}}{t^2}$, $M(\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

32) Hallar las ecuaciones de la tangente, del plano osculador, de la normal principal y de la binormal de la curva x = t, y = -t, $z = \frac{t^2}{2}$ en el punto t = 2. Calcular los cosenos de la binormal en este punto.

Rpta. $L_t : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$, $P_0 : x + y = 0$, $L_N : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$,

$L_B : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{0}$

33) Calcular el plano rectificante y el plano normal de la curva C: $x = \operatorname{sen} t$, $y = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}$, $z = \frac{1}{2}(t - \operatorname{sen} t \cos t)$ en el punto t = π. **Rpta.** P_R: $y = 0$, P_N: $x = 0$

34) Una curva C en el espacio está definida por: C: x = arctg (s), $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s^2+1)$, z = s - arctg s donde s es la longitud de arco. Hallar

a) Los vectores $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$

b) El radio de la curvatura y el radio de torsión.

Rpta.

a) $\vec{T} = \frac{\vec{i} + \sqrt{2}s\,\vec{j} + s^2\,\vec{k}}{s^2+1}$, $\vec{N} = \frac{-\sqrt{2}s\,\vec{i} + (1-s^2)\,\vec{j} + \sqrt{2}s\,\vec{k}}{s^2+1}$, $\vec{B} = \frac{s\,\vec{i} - \sqrt{2}s\,\vec{j} + \vec{k}}{s^2+1}$

b) $R = \frac{\sqrt{2}}{2}(ass^2+1)$, $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}(s^2+1)$

35) Hallar los planos osculador, normal y rectificante para la curva determinada por: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ en el punto (1,1,2).

Rpta. P_N: $2x - z = 0$, P_0: $y - 1 = 0$, P_R: $x + 2z - 5 = 0$

36) Si C esta descrita por $\vec{f}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, [|\frac{2t}{\pi}|])$, $t\in[0,4\pi]$. Halle todos los puntos de C donde tiene un vector tangente paralelo a los planos coordenados.

37) Sea C una curva descrita por la función vectorial $\vec{f}(s)=(\frac{4}{s}\cos s, 1-\operatorname{sen} s, -\frac{3}{s}\cos s)$.

Hallar $\|\vec{N}(\frac{\pi}{2})+\vec{T}(\frac{\pi}{2})+\vec{B}(\frac{\pi}{2})\|+k(s)+\tau(\frac{\pi}{2})$

38) Hallar las ecuaciones de la tangente, ecuación del plano osculador de la curva $x^2+3y^2=1,\ x^2+3y^2+z^2=5$ en el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$.

Rpta. $L_t: \dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} \wedge z=2$, $\mathbf{P_0}: z-2=0$

39) Dada la curva $C: x^2-2yz=0 \wedge y+z-\sqrt{2}x-1=0$.

a) Hallar la ecuación del plano osculador en el punto $(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

b) Hallar la curvatura y la torsión en dicho punto.

40) Un punto se mueve en el espacio según la ecuación vectorial $\vec{\alpha}(t)=(4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4\cos t)$.

a) Probar que la trayectoria es una elipse y hallar la ecuación del plano que contiene a dicho elipse.

b) Probar que el radio de curvatura es $2\sqrt{21}(1+\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}$

41) Hallar el ángulo formado por el plano tangente a la curva $x = 2t - \frac{t^3}{3}$, $y = t^2$, $z = 2t + \frac{t^3}{3}$ en el punto t = 1, con el plano rectificante, de la misma curva en el punto t = 2.

Rpta. $\theta = \arccos(\frac{71}{91}) = 38^{\circ}7'$

42) Formar las ecuaciones de la recta tangente, el plano normal, la binormal, el plano osculador, la normal principal y el plano rectificante a las líneas dadas en los puntos indicados.

a) C: $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ en el punto (1,0,1)

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ en el punto (1,1,1)

c) C: $\vec{\alpha}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t)$ en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

d) C: $\vec{\alpha}(t) = (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16)$ en el punto correspondiente al valor del parámetro t = 2.

Rpta. **a)** $L_t : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$, $\mathbf{P_N}: 2x - y + 3z - 5 = 0$

$L_B: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$, $\mathbf{P_0}: 3x + 3y - z - 2 = 0$

$L_N: \frac{x-1}{8} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{-9}$, $\mathbf{P_R}: 8x - 11y + 9z + 1 = 0$

b) $L_t: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} \wedge z = 1$, $\mathbf{P_N}: x - y = 0$

$L_B: x = 1, y = 1$, $\mathbf{P_0}: z = 1$

$L_N: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} \wedge z = 1$, $\mathbf{P_R}: x + y - 2 = 0$

c) $L_t: \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z-1}{4}$, $\mathbf{P_N}: \sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=0$

$L_B: \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{z-1}{1}$, $\mathbf{P_0}: \sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0$

$L_N: \dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{13} = \dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-3} = \dfrac{z-1}{-4\sqrt{2}}$, $\mathbf{P_R}: -13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0$

d) $L_t: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-13}{3} = \dfrac{z}{6}$, $\mathbf{P_N}: 2x+3y+6z=27$

$L_B: \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-13}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $\mathbf{P_0}: 6x+2y-3z=20$

$L_N: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-13}{-6} = \dfrac{z}{2}$, $\mathbf{P_R}: 3x-6y+2z=-81$

43) Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las siguientes curvas.

a) $C:\ z=x^2+y^2$, $y=x$ en el punto (1,1,2)

b) $C:\ x^2+y^2+z^2=25$, $x+z=5$ en el punto $(2,2\sqrt{3},3)$

44) Hallar la ecuación del plano normal a la curva $z=x^2-y^2$, $y=x$ en el origen de coordenadas. **Rpta.** $P_N:\ x+y=0$

45) Hallar las ecuaciones de los planos osculador a las curvas dadas en el punto indicado.

a) $C:\ x^2+y^2+z^2=9$, $x^2-y^2=3$ en el punto (2,1,2)

b) $C:\ x^2=4y$, $x^3=24z$ en el punto (6,9,9)

c) $C:\ x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$ en cualquier punto a la curva (x_0,y_0,z_0)

Rpta. **a)** 4x - y - z = 9 **b)** 9x – 6y + 2z = 18

c) $b^2x_0^3x - a^3y_0^3y + (a^2 - b^2)z_0^3z = a^2b^2(a^2 - b^2)$

45) Hallar las ecuaciones del plano osculador a la curva C: $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$ en el punto (1,1,1)

46) En qué punto del plano XY hará impacto una partícula de la cual se sabe que para el tiempo t = 0 estaba situada en el punto (0,0,1600) y que su velocidad está dada por $\vec{V}(t) = (500, 1000, -32t)$, donde t representa al tiempo. Determinar también el radio de curvatura o de la trayectoria de la partícula cuando t = 5.

Rpta. Punto de impacto P(5000, 1000, 0) $\dfrac{\sqrt{266'240{,}000}}{(1'275{,}600)^{3/2}}$

47) Un hombre observa que un insecto se posa en el extremo del minutero de un reloj, de radio r, al medio día y empieza a caminar hacia el centro del reloj con una rapidez V constante. Si el reloj funciona normalmente, hallar la curvatura de la trayectoria del insecto, observada por el hombre, después de t segundos.

48) Determinar las constantes reales a y b de manera que las curvas $C_1: 4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 10y + 11 = 0$, $C_2: (y + bx - 1 - b)^2 - a(by - x + 1 - b) = 0$ se corta ortogonalmente en (1,1) y tengan la misma curvatura en ese punto.

49) Sea $\vec{f}(t) = (t^2 + 1, \int_0^t \operatorname{sen} u^2 du, t)$ una curva. Hallar la torsión de la curva en el punto t = 0.

50) Demuestre que si $\vec{R}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ es la ecuación vectorial de la curva C y k(t) es la curvatura de C, entonces. $k(t) = \dfrac{\| D_t \vec{R}(t) \times D_t^2 \vec{R}(t) \|}{\| D_t \vec{R}(t) \|^3}$

51) Sea C la curva descrita por $\vec{f}(t)=(2t^2, 1-t, 3+2t^2)$ y P_0 el centro de curvatura de C en el punto donde la curvatura es máxima. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P_0 paralela al vector curvatura. **Rpta.** $L=\{(\frac{1}{8},1,\frac{25}{8})+t(-4,0,4)\,/\,t\in R\}$

52) Sea C_1 la curva descrita por la función $\vec{f}(x)=(x+1, e^{3-x}, \ln(x^2+2x+1)-\ln 4)$ y C_2 la curva descrita por $\vec{g}(x)=(\frac{1}{x}, 4\sqrt{|x|}-1, -\ln x)$. Hallar la torsión de la curva C_1 en el punto de intersección de estas curvas.

53) Hallar la curvatura k(π) y la torsión τ (π) para la curva C descrita por: $\vec{f}(s)=(\frac{4}{s}\cos s, 1-\operatorname{sen} s, -\frac{3}{s}\cos s)$ siendo s la longitud de arco de curva C sobre que superficie se encuentra la curva C. **Rpta.** k(π) = 1, τ (π) = 0 , 3x + 4z = 0

54) Hallar la curvatura k y la torsión τ de la curva descrita por la función $\vec{f}(t)=(a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$

55) Sean las curvas dadas por: C_1: $\vec{f}(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ t∈R, C_2: $\vec{g}(s)=(a\cos\frac{s}{c}, a\operatorname{sen}\frac{s}{c}, \frac{bs}{c})$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, C_3: $\vec{h}(t)=(a\cos t, b\operatorname{sen} t)$. Hallar la suma de los valores de la curvatura total de las curvas.

56) Sea la curva C definida por: $\vec{f}(t)=(\frac{4}{5}\cos t, 1-\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t)$, t > 0. Demuestre que C es una circunferencia y encontrar su centro y radio.

57) Una partícula se desplaza en el plano R^2 a lo largo de la curva C de ecuación $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, x ≥ 1 con rapidez constante $\frac{\sqrt{3}}{3}\,mts/seg$ y parte del punto (1,0) en el instante t = 0. Hallar la ecuación de la circunferencia de curvatura de C en el punto en que se encuentra la partícula después de haber transcurrido 2 seg. desde su partida.

58) Hallar la curvatura k y la torsión τ de la curva descrita por $\vec{f}(\theta)=(a^2\cos\theta, a^2\operatorname{sen}\theta, b^2\theta)$ en cualquier punto, con a,b constantes.

59) Hallar el círculo de curvatura de la curva descrita por $C:\vec{f}(t)=(\cos t+t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t-t\cos t)$, t > 0 en un punto de donde el vector tangente es paralelo al eje X.

60) Sea C una curva de ecuación vectorial $\vec{\alpha}(t)=(2t,\frac{t^2}{\sqrt{2}},\frac{t^3}{3})$.

a) Hallar el centro de la circunferencia de curvatura en $\vec{\alpha}(0)$

b) ¿Cuál de los puntos $p_1(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $p_2(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$ y $p_3(\sqrt{2},0,0)$ pertenece a la circunferencia de curvatura?

Rpta. **a)** $C(0,2\sqrt{2},0)$ **b)** solamente p_2

61) Dada la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(t)=(\frac{1-2t}{2},\int_0^t e^{\operatorname{sen} x}dx, t)$. Hallar la circunferencia de curvatura de C en el punto donde la curva intercepta al plano $x+y+z=\frac{1}{2}$.

Rpta. $C(2,3,-\frac{3}{2})$, radio $R=\frac{3}{2}\sqrt{6}$

62) Hallar el radio de curvatura de la curva $\vec{\alpha}(t)=(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ en el punto (-2,12,14).

63) Sea la curva C: $\vec{\gamma}(s)=(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)(\cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1), \operatorname{sen}(\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1)), 1)$ donde s es el parámetro de longitud de arco. Determinar, para el punto (1,0,1) $\in$ C, las coordenadas del centro del circulo de curvatura ¿están los puntos $p_1(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{4})$, $p_2(0,2,-1)$ sobre él circulo de curvatura?

Rpta. $C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1)$, p_1 está

64) Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la curva C_1 descrita por $\vec{g}(t)=(t^3+6,\ 3t+4,\ t^2)$ en un punto de intersección con la curva C_2 descrita por $\vec{f}(t)=(t^2-3,\ 3t-5,\ \ln(e^{4t}+t-1))$.

65) Hallar el centro de la circunferencia de curvatura y el plano osculador de la curva C: $\vec{\alpha}(t)\in R^3$, t∈R en $\vec{\alpha}(0)=(0,0,1)$, si se sabe que $\vec{\alpha}'(0)=(0,0,2)$ $\vec{T}'(1)=\frac{2}{9}(9,1,-2)$, $\vec{T}'(t)$ es paralela a $(-t,\frac{t^2}{9}-1,t)$ y $\vec{\alpha}''(t)=2t\,\vec{T}(t)+2\,\vec{N}(t)$.

Rpta. C(0,2,1) , $\mathbf{P_0}$: $x=0$

66) Si una curva plana tiene por ecuación cartesiana, y = f(x), demuestre que el centro de curvatura C(m,n) en un punto p(x,y) de la curva es:

$$n=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\quad,\quad m=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

67) Probar que, la curvatura y la torsión de la curva alabeada $\vec{r}(t)=e^t\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{2}t\,\vec{k}$ son $k=-\tau=\frac{\sqrt{2}}{4}\sec h^2 t$

68) Demostrar que la torsión dada por la fórmula $\tau=\frac{1}{k^2}(\vec{T}(t).(\vec{T}'(t)\times\vec{T}''(t))$ donde k es la curvatura y $\vec{T}$ es la tangente unitaria.

69) Dada la curva parametrizada por $\vec{\alpha}(\theta)=(\theta-\operatorname{sen}\theta,\ 1-\cos\theta)$ $0<\theta<2\pi$ y sea L la recta que pasa por el centro de a circunferencia de curvatura de la curva en $\theta=\frac{\pi}{3}$, en la dirección del vector curvatura. Hallar la intersección de L con el eje X.

Rpta. $(\frac{\pi}{3},0)$

70) Si un punto se mueve dé manera que los vectores aceleración y velocidad, siempre tiene módulo constante, probar que la curvatura es constante en todos los puntos del camino y expresarla en función $\|\vec{V}\|$ y $\|\vec{a}\|$. **Rpta.** $k = \dfrac{\|\vec{a}\|}{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

71) Demostrar que el radio de curvatura de la curva cuyas ecuaciones parametricas son x = x(s) , y = y (s) , z = z (s) es dado por: $\rho = (\dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{d^2z}{ds^2})^{-\frac{1}{2}}$

72) Hallar el radio de torsión de la línea $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cosh t)$

Rpta. $\dfrac{\cosh^2 t}{\operatorname{senh} t}$

73) Hallar el radio de curvatura de la línea $\vec{\alpha}(t) = (\ln\cos t, \ln\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\,t)$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, mostrar que la torsión en cualquier punto suyo es igual a la curvatura en este punto.

Rpta. $\rho = \sqrt{2}\csc 2t$

74) Demostrar, que si a curvatura de torsión es igual a cero en todo los puntos de una curva, está es una curva plana.

75) Hallar los puntos donde la espiral r = θ, tiene curvatura máxima, justifique su respuesta.

Rpta. (0,0,0)

76) Si C es una curva descrita por la ecuación vectorial $\vec{f}(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t,\ -4\cos\dfrac{t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$. Hallar el centro de curvatura en el punto donde el radio de curvatura es máxima.

Rpta. C(π,-6,0)

77) Una partícula se desplaza en el plano R^2 a lo largo de la curva C de ecuación $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, x > 1, con rapidez constante $\frac{\sqrt{3}}{2}$mts/seg. y parte el punto (1,0) en el instante t = 0. Hallar la ecuación del circulo de curvatura de C en el punto en que se encuentra la partícula de haber transcurrido 2 seg. después de su partida.

Rpta. $x^2+(y+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\ln(3+2\sqrt{2}))^2=81$

78) Demostrar que la curvatura de la curva y = ln x, en cualquier punto (x,y) es $\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$. Demostrar también que la curvatura máxima absoluta es $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ lo cual ocurre en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\ln 2}{2})$.

79) Sean f > 0 y g > 0 funciones diferenciables arbitrarios de valores reales, definidas en $I \subseteq R$, considérese la curva:

C: $\vec{F}(t)=(\int f(t)\operatorname{sen} t\,dt, \int f(t)\cos t\,dt, \int g(t)f(t)\,dt)$.Hallar la curvatura y la torsión de C.

80) Sea C la curva descrita por $\vec{f}$, demostrar: $k=\frac{\sqrt{\|\vec{f}'(t)\|^2\|\vec{f}''(t)\|^2-(\vec{f}'(t)\cdot\vec{f}''(t))^2}}{\|\vec{f}'(t)\|^3}$

81) Sea r = f(θ) es la ecuación polar, demostrar que su curvatura es dado por la fórmula.

$$k=\frac{\left|f^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)+2f'^2\right|}{(f^2(\theta)+f'^2(\theta))^{3/2}}$$

82) Si C es una curva en R^3, descrita por $\vec{f}$. Demostrar que:

a) $k = \dfrac{\| \vec{f}'(t) x \vec{f}''(t) \|}{\| \vec{f}'(t) \|^3}$ b) $\tau = \dfrac{\vec{f}'(t) x \vec{f}''(t) . \vec{f}'''(t)}{\| \vec{f}'(t) x \vec{f}''(t) \|^2}$

c) $\vec{B}(t) = \dfrac{\vec{f}'(t) x \vec{f}''(t)}{\| \vec{f}'(t) x \vec{f}''(t) \|}$ d) $\vec{N} = \dfrac{(\vec{f}'(t) x \vec{f}''(t)) x \vec{f}'''(t)}{\| (\vec{f}'(t) x \vec{f}''(t)) x \vec{f}'''(t) \|}$

83) Si la trayectoria de una partícula está definida por $x = t^2 - 1$, $y = 2t^2 - 1$, $z = t^2 + 5t$, $t \geq 0$ donde t = tiempo, encuentre los componentes tangencial y normal de la aceleración.

84) Una partícula se mueve en el espacio sobre una curva C de manera que su vector de posición $\vec{f}(t)$ en cualquier instante satisface la ecuación $\vec{f}(t).\vec{c} = e^{2t}$ donde $\vec{c}$ es un vector constante y su vector velocidad $\vec{V}(t)$ forma un ángulo constante θ con $\vec{c}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Hallar la componente tangencial de la ecuación en el instante t.

85) Encontrar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t = 2 para el movimiento de una partícula descrita por la curva $\vec{\alpha}(t) = (\ln(t^2+1), 2\,\text{arctg}\, t, 2\sqrt{t^2+1})$. **Rpta.** $a_T = 0$, $a_N = \dfrac{12}{5\sqrt{30}}$

86) Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\vec{\alpha}(t) = (t^3 - 4t, t^2 + 4t, 8t^2 - 3t^3)$ para t = 2, hallar la componente tangencial y la componente normal de la aceleración.

Rpta. $a_T = 16$, $a_N = 2\sqrt{73}$

87) Una partícula parte del reposo del punto P(2,2,3) con una aceleración $\vec{a}(t) = 2t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$ calcular después de un segundo de la partida.

a) La trayectoria de la partida.

b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.

c) Las coordenadas del centro de curvatura.

Rpta. **a)** $\vec{\alpha}(t)=(\frac{t^3}{3}+2,\frac{2t^3}{3}+2,\frac{t^3}{3}+3)$

b) $a_T=\sqrt{29}$, $a_N=0$

88) Una partícula se mueve sobre la curva $x=3t^2$, $y=2t^3$, z = 3t, encontrar para t=1.

a) La curvatura y torsión

b) Los componentes tangencial y normal de la aceleración-

Rpta. **a)** $k=\frac{2}{27}$, $\tau=\frac{2}{27}$ **b)** $a_T=12$, $a_N=6$

89) Una partícula P desliza sin rozamiento a lo largo de un alambre arrollado en forma de hélice circular recta. Si tomamos el semieje positivo Z hacia abajo, las coordenadas cilíndricas de P en el instante t son r = a, z = bθ en donde a y b son constantes positivas. Si la partícula parte de r = 0, θ = 0 con velocidad inicial nula y cae por acción de la gravedad, la ley de la conservación de la energía nos dice que su velocidad después de haber descendido una distancia vertical Z está dado por $\sqrt{2gz}$

a) Calcúlese la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$ para θ = 2π.

b) exprésese θ y Z en función del tiempo t.

c) Dígase si hay componente de la aceleración en la dirección de la binormal.

Rpta. **a)** $W=\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{2g\theta b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **b)** $\theta=\frac{1}{2}(\frac{gbt^2}{a^2+b^2})$, $z=\frac{1}{2}\frac{(gb^2t^2)}{a^2+b^2}$

c) Como la aceleración esta contenida en el plano osculador, nunca existe componente de la aceleración en la dirección de la binormal.

90) Demostrar que $\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}x\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{\tau}{\rho^2}$

91) Demostrar que la aceleración $\vec{a}$ de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio con velocidad $\vec{V}$ viene dada por: $\vec{a}=\frac{dv}{dt}.\vec{T}+\frac{V^2}{\rho}\vec{N}$, donde $\vec{T}$ es el vector tangente unitario a la curva, $\vec{N}$ la normal principal y ρ es el radio de curvatura.

92) Sea $\vec{f}(t)=(\cos wt, \operatorname{sen} wt, e^{Awt})$; A, w constantes reales:

a) Calcular la curvatura y torsión en el punto $t = 0$.

b) Calcular el vector normal y binormal en el punto $t = 0$.

93) Encontrar la curvatura de la curva C definida por: $x(t)=\int_0^t \cos\frac{\pi u^2}{2}du$, $y(t)=\int_0^t \operatorname{sen}\frac{\pi u^2}{2}du$

94) Sea S el sólido encerrado por el cilindro parabólico $z=4-y^2$ y por el paraboloide elíptico $z=x^2+3y^2$ y C la curva de intersección de ambas superficies. Hallar la longitud y la curvatura de C.

95) Sea $\vec{f}(t)=(t-\frac{t^3}{3}, t^2, t+\frac{t^3}{3})$

a) Calcular $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$

b) Evaluar $\vec{T}(0)$, $\vec{N}(0)$, $\vec{B}(0)$

c) Hallar los planos fundamentales en $t = 0$.

96) Calcular la torsión en cualquier punto de la curva, que se obtiene al interceptar las superficies. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+y^2=z \end{cases}$

97) Sea $C_1: \vec{f}(t)=(t^2,\frac{1}{3},\ln t)$ y $C_2: \vec{g}(t)=(e^{t-2},\frac{1}{t+1},\ln(t-1))$, hallar las ecuaciones del plano osculador, normal y rectificante de C_1 en el punto de intersección de C_1 y C_2.

98) Sea la curva descrita por $\vec{f}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,\cosh t)$. Hallar la curvatura y torsión para cualquier t.

99) Una partícula se mueve en la trayectoria $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=\sqrt{2}t$ para t = 0, hallar:

a) La curvatura y torsión de la trayectoria.

b) Los componentes tangencial y normal de la aceleración.

Rpta. a) $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $T=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $a_T=0$, $a_N=\sqrt{2}$

100) Demostrar que si la ecuación vectorial $\vec{g}(s)$ esta dado por $C: \vec{g}(s)=(x(s),y(s),z(s))$, donde s es la longitud de arco, entonces la torsión en el punto donde a longitud de arco es s, esta dado por: $\Im(s)=(P^2(s))(\vec{g}'(s)x\,\vec{g}''(s)).\vec{g}'''(s)$, así:

$$\Im(s)=(x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2)^{-1}\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s)\end{vmatrix}$$ donde P(s) es el radio de curvatura.

CAPITULO III

3. FUNCIONES REALES DE VARIABLE VECTORIAL

Pre-Requisitos.- Para la comprensión adecuada de este capítulo de funciones reales de variable vectorial se requiere de los conocimientos previos de:

- Rectas y planos en R^3.
- Superficies.
- Cálculo diferencial de funciones reales de variable real.

Objetivos.-

- Definir las derivadas parciales de una función de dos ó más variables.
- Proporcionar una interpretación geométrica de las derivadas parciales.
- Discutir el criterio de las derivadas parciales de segundo orden para extremos relativos.
- Utilizar la diferencial total como aproximación de Δz.
- Mostrar la relación del gradiente con la derivada direccional.
- Mostrar el uso del gradiente para hallar el plano tangente a un superficie.

3.1 Introducción

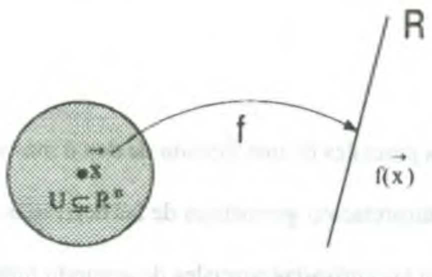
Sea $f: I \subseteq R \longrightarrow R$, una función real de variable real donde el rango y dominio son números reales. Ahora veremos funciones cuyo rango son números reales, pero el dominio será un sub-conjunto de R^n, es decir, funciones del tipo $f: U \subseteq R^n \longrightarrow R$, llamada función real de n variables reales ó bien funciones reales de variable vectorial (a los elementos de R^n lo veremos como vectores), ó bien campos escalares.

Tenemos pues que una función $f: U \subseteq R^n \longrightarrow R$ es una regla que asocia a cada n-ada ordenada de números reales $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U$, donde el conjunto U es el dominio de f y su rango de f es el conjunto de z ∈ R, para los cuales existe $\vec{x} \in U$ tal que $z = f(\vec{x})$ es decir: rango de $f = \{z \in R / z = f(\vec{x}), \vec{x} \in U\}$, se observa que cada una de estas funciones está constituida por:

1. Su dominio $U \subseteq R^n$

2. Una regla que asocia a cada $\vec{x} \in U$ el número $f(\vec{x}) \in R$, imagen de $\vec{x}$ bajo f.

Esquemáticamente se tiene:



Usaremos indistintamente las notaciones $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o $f(\vec{x})$ para denotar la imagen bajo f del vector $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$.

3.2 Definición.

Una función real de variable vectorial f ó de n variables es una correspondencia de un conjunto A de vectores de R^n, a un conjunto B de números reales y denotaremos por $f\colon A\subseteq R^n \longrightarrow B\subseteq R$, tal que, para cada vector $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in A$, existe uno y sólo un elemento $f(\vec{x})\in B$.

El valor real de la función f se denota por $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ donde las variables $x_1,x_2,...,x_n$,se denominan variables independientes de la función f y z variable dependiente.

3.3 Dominio y Rango de una Función Real de Variable Vectorial.

Consideremos la función $f\colon R^n \longrightarrow R$,el dominio de existencia de la función f, denotaremos por D_f , y es el conjunto definido por:

$$D_f=\{\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n \,/\, \exists\ z\in R \wedge z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$$

al rango de la función f denotaremos por R_f y es el conjunto definido por:

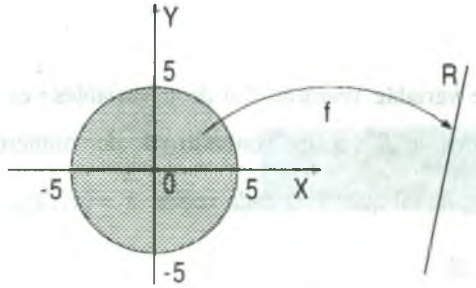
$$\boxed{R_f=\{z\in R \,/\, \exists\ \vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n \wedge z=f(\vec{x})\}}$$

Ejemplo.- Determinar el dominio y rango de la función $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$

Solución

Como $z=f(x,y) \Rightarrow z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, luego z es real si, $25-x^2-y^2\geq 0$, entonces $x^2+y^2\leq 25$, que representa a una circunferencia y el interior de la misma.

Luego $D_f=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2\leq 25\}$, cuya representación gráfica es:



Ahora determinaremos el rango, como $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ entonces $z\geq 0\wedge\ z^2=25-x^2-y^2$, de donde $x^2+y^2=25-z^2\geq 0,\quad \forall(x,y)\in R^2$.

$25-z^2\geq 0 \Rightarrow z^2\leq 25 \Leftrightarrow -5\leq z\leq 5$, pero como $z\geq 0 \Rightarrow \quad \therefore\quad R_f=\{z\in R/0\leq z\leq 5\}$

Observación.- Sea $f: A\subset R^n\to R$, una función con dominio A, definamos la gráfica de f como el sub-conjunto de R^{n+1} denotado por:

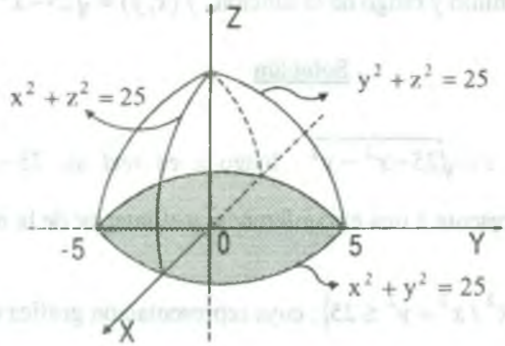
gráfica de $f=G_f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,f(x_1,x_2,\ldots,x_n))/(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D\}\subseteq R^{n+1}$, para el caso de la función $f: R^2\to R$ tal que $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ su gráfica es en el espacio R^3.

$z=f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$, $z\geq 0 \Rightarrow z^2=25-x^2-y^2$, es decir, para $z\geq 0$, $x^2+y^2+z^2=25$.

para $y=0$, $x^2+z^2=25$ es semicircunferencia en el plano XZ.

$x=0$, $y^2+z^2=25$ es semicircunferencia en el plano YZ.

$z=0$, $x^2+y^2=25$ es semicircunferencia en el plano XY.



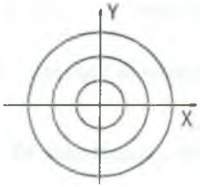
Observación.- Una manera muy práctica de visualizar la gráfica de una función de n variables es a través de las curvas de nivel, para esto consideremos la función $f: R^2 \to R$ tal que z = f(x,y), cuya gráfica de esta función es una superficie en R^3. Supongamos que la superficie z = f(x,y) se corta mediante una familia de planos paralelos al plano coordenado XY, que son de la forma z = f(x,y) = k (k = 0, ±1, ±2,..., ±n) cuyas intersecciones son curvas, que al proyectarlo sobre el plano XY, tiene por ecuación f(x,y) = k, a estas curvas se le llaman curvas de nivel de la función f en k y al conjunto de curvas de nivel se llama mapeo de contorno.

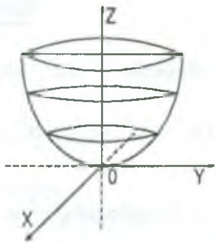
En forma similar para el caso $f: R^3 \to R$, se obtienen f(x,y,z) = k llamadas superficies de nivel.

Ejemplo.- Sea $f: R^2 \to R$ tal que $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, hallar las curvas de nivel y hacer la gráfica de esta superficie.

Solución

Determinaremos las curvas de nivel, haciendo z = k, es decir $x^2 + y^2 = k$ que son familias de circunferencias.





3.4 Operaciones con Funciones de Varias Variables.

Definición.- Consideremos dos funciones de n variables $f, g: R^n \to R$, con dominios D_f y D_g, respectivamente, entonces definimos las operaciones siguientes:

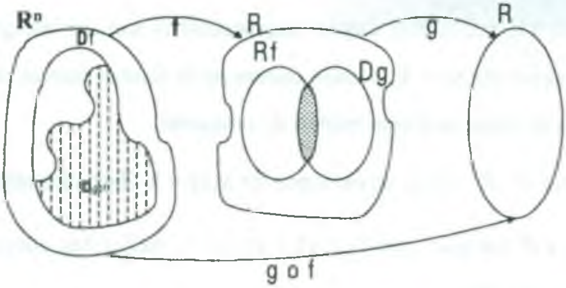
i) $(f \pm g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \pm g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

ii) $(f.g)(\vec{x}) = f(\vec{x}).g(\vec{x}), \forall \vec{x} \in D_{f.g} = D_f \cap D_g$

iii) $(\frac{f}{g})(\vec{x}) = \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{\vec{x} / g(\vec{x}) = 0\}$

Definición.- Consideremos $f: R^n \longrightarrow R$ y $g: R \longrightarrow R$ dos funciones con dominios D_f y D_g, respectivamente, entonces definimos la función compuesta por:

$$(g\ o\ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(f(x_1, x_2, \dots, x_n)), \text{ donde } D_{gof} = \{\vec{x} \in D_f \,/\, f(\vec{x}) \in R_f \cap D_g\}$$



Ejemplo.- Dado g(x) = arc.cos x, y $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$, encontrar la función g o f y su dominio.

Solución

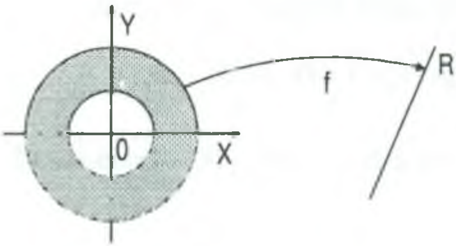
Calculando el dominio de las funciones g y f donde $D_g = [-1,1]$ y $D_f = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 - 16 \geq 0\}$, calculando la función g o f es decir:

$(g o f)(x,y) = g(f(x,y)) = \arccos\sqrt{x^2 + y^2 - 16}$, calculando el dominio de g o f es decir:

$$D_{gof} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, f(x,y) \in D_g\} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, \sqrt{x^2 + y^2 - 16} \in [-1,1]\}$$

$$= \{(x,y) \in R^2 \,/\, -1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 - 16} \leq 1\} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 \leq x^2 + y^2 - 16 \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in R^2 \,/\, 16 \leq x^2 + y^2 \leq 17\}$$

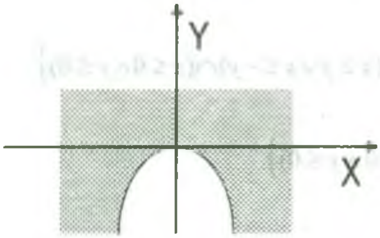


3.5 Ejercicios Desarrollados

Hallar y representar gráficamente el dominio de las ocho funciones siguientes:

1) $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

Solución

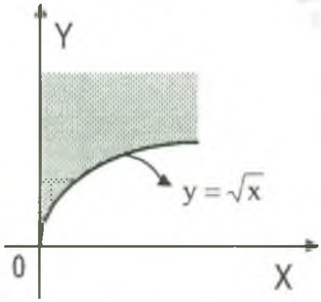


La función z = f(x,y) está bien definida, si se cumple, $x^2 + y > 0$, que nos representa la parte del plano por encima de la parábola $y = -x^2$.

Luego $D_f = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y > 0\}$

2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

Solución



La función z = f(x,y) está bien definida, sí $y - \sqrt{x} > 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$, de donde $y > \sqrt{x} \quad \wedge \quad x \geq 0$, que nos representa la parte del plano sobre la rama de la parábola $y = \sqrt{x}$, y a la derecha del eje Y sin incluirlo.

Luego: $D_f = \{(x,y) \in R^2 / y > \sqrt{x}\}$

3) $z = f(x,y) = \left|\sqrt{x^2 - y^2}\right| + \left|\sqrt{xy}\right|$

Solución

Sea $z = f(x,y) = h(x,y) + g(x,y) = |\sqrt{x^2 - y^2}| + |\sqrt{xy}|$, donde $h(x,y) = |\sqrt{x^2 - y^2}|$ y $g(x,y) = \left|\sqrt{xy}\right|$ luego su dominio son:

$$D_h = \{(x,y) \in R^2 / x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in R^2 / x \geq y \ \vee \ x \leq -y\}$$

$$D_g = \{(x,y) \in R^2 / xy \geq 0\} = \{(x,y) \in R^2 / (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \ \vee \ (x \leq 0 \ \wedge \ y \leq 0)\}$$

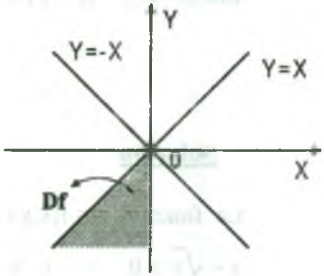
y el dominio de z = f(x,y) es $D_f = D_h \cap D_g$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 / x \geq y \vee x \leq -y\} \cap \{(x,y) \in R^2 /(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 /(x \geq y \vee x \leq -y) \cap ((x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0))\}$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 /(x \geq y \vee x \leq -y) \cap (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq y \vee x \leq -y) \cap (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$$

$$\therefore D_f = \{(x,y) \in R^2 /(x \geq y \vee x \leq -y) \cap (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$$



4) $z = f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$, a > 0

Solución

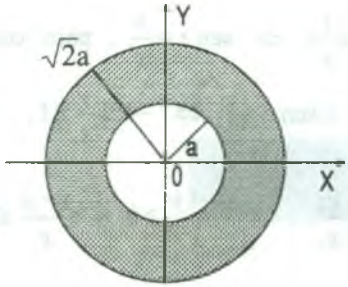
La función z = f(x,y) está bien definida si se cumple que $(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0$, de donde se tiene:

$$(x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \wedge 2a^2 - x^2 - y^2 \geq 0) \vee (x^2 + y^2 - a^2 \leq 0 \wedge 2a^2 - x^2 - y^2 \leq 0)$$

$$(x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2a^2) \vee (x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \geq 2a^2)$$

$$(a^2 \leq x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2a^2) \vee \phi = (a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2)$$

$$\therefore D_f = \{(x,y) \in R^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$$



5) $z = f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2 - 16}}$

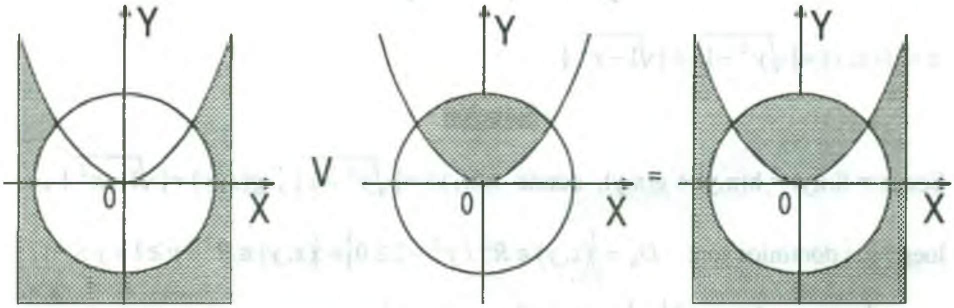
Solución

La función z = f(x,y) está bien definida si se cumple $\dfrac{x^2 - y}{x^2 + y^2 - 16} \geq 0$, luego la solución de esta inecuación se obtiene de la manera siguiente:

$$\frac{x^2 - y}{x^2 + y^2 - 16} \geq 0 \iff (x^2 - y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 16 > 0) \vee (x^2 - y \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 16 < 0)$$

$$\iff (y \leq x^2 \wedge x^2 + y^2 > 16) \vee (x^2 \leq y \wedge x^2 + y^2 < 16)$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2 / (y \leq x^2 \wedge x^2 + y^2 > 16) \vee (x^2 \leq y \wedge x^2 + y^2 < 16)\}$$



6) $z = f(x,y) = \text{arcsen}(\dfrac{y}{x})$

Solución

Como $z = f(x,y) = \text{arcsen}(\frac{y}{x}) \Leftrightarrow \text{sen}\, z = \frac{y}{x}$, pero como la variación de sen z, está entre -1 y 1, se tiene: $-1 \le \text{sen}\, z \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{y}{x} \le 1$, desarrollando la inecuación

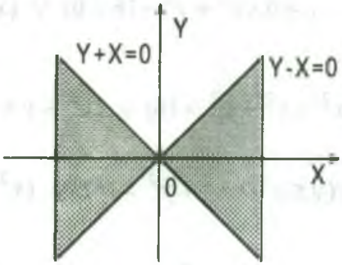
$$-1 \le \frac{y}{x} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{y}{x} \wedge \frac{y}{x} \le 1 \Rightarrow \frac{x+y}{x} \ge 0 \wedge \frac{y-x}{x} \le 0$$

Luego $D_f = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, \frac{x+y}{x} \ge 0 \wedge \frac{y-x}{x} \le 0\right\}$

Sí $\frac{x+y}{x} \ge 0 \Leftrightarrow (y+x \ge 0 \wedge x > 0) \vee (y+x \le 0 \wedge x < 0)$ **... (A)**

Sí $\frac{y-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow (y-x \le 0 \wedge x > 0) \vee (y-x \ge 0 \wedge x < 0)$ **... (B)**

Graficando la región se tiene:



7) $z = f(x,y) = |\sqrt{y^2 - 1}| + |\sqrt{1-x^2}|$

Solución

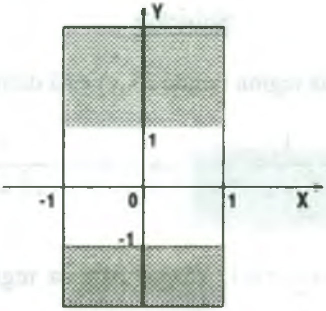
Sea z = f(x,y) = h(x,y) + g(x,y), donde $h(x,y) = |\sqrt{y^2-1}|$, $g(x,y) = |\sqrt{1-x^2}|$,

luego sus dominios son: $D_h = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y^2 - 1 \ge 0\} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y \ge 1 \vee y \le -1\}$

$D_g = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 1 - x^2\} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, -1 \le x \le 1\}$,

y el dominio de la función z = f(x,y) es:

$D_f = D_h \cap D_g = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y \ge 1 \vee y \le -1\} \cap \{(x,y) \in R^2 \,/\, -1 \le x \le 1\}$



8) $z = f(x,y) = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$

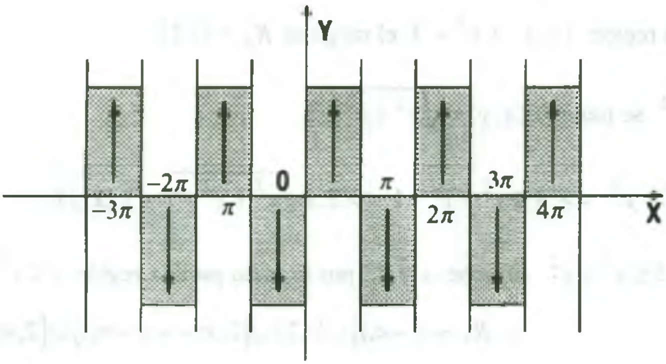
Solución

La función z = f(x,y) está bien definida si se cumple:

$y \operatorname{sen} x \geq 0 \iff (y \geq 0 \ \wedge \ \operatorname{sen} x \geq 0) \ \vee \ (y \leq 0 \ \wedge \ \operatorname{sen} x \leq 0)$

$\iff (y \geq 0 \ \wedge \ 2\pi n \leq x \leq (2n+1)\pi) \ \vee \ (y \leq 0 \ \wedge \ (2n+1)\pi \leq x \leq (2n+2)\pi)$

$D_f = \{(x,y) \in R^2 \,/\, (y \geq 0 \ \wedge \ 2\pi n \leq x \leq (2n+1)\pi) \ \vee \ (y \leq 0 \ \wedge \ (2n+1)\pi \leq x \leq (2n+2)\pi)\}$



9) Determinar el rango de la función f(x,y) definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{x^2+y^2} & si \ 0 < x^2+y^2 \leq 1 \\ [\![x^2+y^2]\!] & si \ 1 < x^2+y^2 < 3 \\ \sqrt{x^2+y^2-1} & si \ 5 \leq x^2+y^2 \end{cases}$$

Solución

Calcularemos el rango en cada región donde f(x,y) está definida.

Sí $0 < x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{x^2+y^2} < \infty \Rightarrow -\infty < -\frac{1}{x^2+y^2} \le -1$

$-\infty < 2 - \frac{1}{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow -\infty < z \le 1$, luego para la región $0 < x^2 + y^2 \le 1$ el rango es $R_f = <-\infty, 1]$.

Si $1 < x^2 + y^2 < 3 \Rightarrow f(x,y) = [|x^2 + y^2|]$, entonces redefiniendo la función f(x,y) considerando el máximo [| |] entero en la región $1 < x^2 + y^2 < 3$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ 1 < x^2 + y^2 < 2 \\ 2 & si\ 2 \le x^2 + y^2 < 3 \end{cases}$$

Luego para la región $1 < x^2 + y^2 < 3$ el rango es $R_f = \{1,2\}$

Si $5 \le x^2 + y^2$ se tiene $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

Luego $5 \le x^2 + y^2 \Rightarrow 4 \le x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow 2 \le \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = f(x,y)$

Luego para $5 \le x^2 + y^2$ se tiene $z \ge 2$, por lo tanto para la región $5 \le x^2 + y^2$ el rango es $R_f = [2, \infty>$ $\therefore R_f = <-\infty, 1] \cup \{1,2\} \cup [2, \infty> = <-\infty, 1] \cup [2, \infty>$

10) Sea $f: R^2 \longrightarrow R$ una función definida por $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Hallar su dominio, rango y graficar.

Solución

La función z = f(x,y) está definida sí $1 - x^2 - y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1$

Luego $D_f = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$ Calculando el rango de $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$:

Como $x^2+y^2 \leq 1$ y $\forall$ x,y$\in$R, $x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2+y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x^2-y^2 \leq 0$

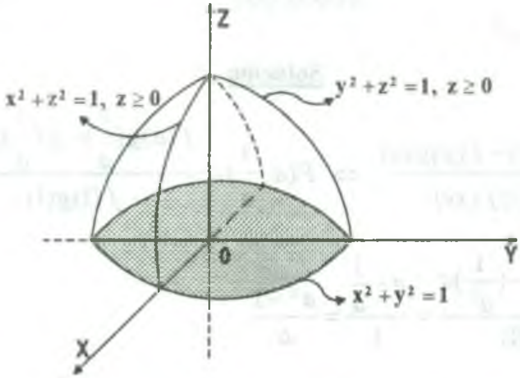
$0 \leq 1-x^2-y^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow z \in [0,1]$, de donde $R_f = [0,1]$.

Para graficar: Como $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z \geq 0$ de donde $x^2+y^2+z^2=1$, se tiene:

$z=0$, $x^2+y^2=1$ circunferencia en el plano XY.

$y=0$, $x^2+z^2=1$ semi-circunferencia en el plano XZ.

$x=0$, $y^2+z^2=1$ semi-circunferencia en el plano YZ.



11) Sea $z = x\, f(\frac{y}{x})$, determinar las funciones f y z, sí $z=\sqrt{1+y^2}$. Para x = 1

Solución

Como $z=\sqrt{1+y^2}$ para x = 1, entonces $z = f(y) = \sqrt{1+y^2}$

Luego sí $z = x\, f(\frac{y}{x})$ y $f(y)=\sqrt{1+y^2}$, entonces

$$z = x\, f(\frac{y}{x}) = x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = x\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} \qquad \therefore \quad z = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}$$

12) Determinar F(x), sí $F(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, x, y > 0.

Solución

Como $F(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{(\frac{y}{x})^2}}$, haciendo $u = \frac{y}{x}$

se tiene $F(u) = \sqrt{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2+1}}{|u|}$ $\qquad \therefore\ F(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$

13) Dada la función $F(x,y) = \frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{g(xy)f(xy)}$. Hallar $F(a,\frac{1}{a})$; en particular, poner $f(u)=u^3,\ g(u)=u^2$

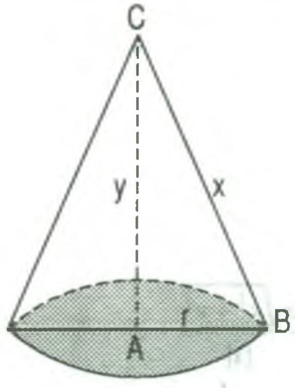
Solución

$$F(x,y) = \frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{g(xy)f(xy)} \Rightarrow F(a,\frac{1}{a}) = \frac{f(a)g(\frac{1}{a})-f(\frac{1}{a})g(a)}{f(1)g(1)}$$

$$F(a,\frac{1}{a}) = \frac{a^3(\frac{1}{a})^2-(\frac{1}{a^3})a}{(1)(1)} = \frac{a-\frac{1}{a}}{1} = \frac{a^2-1}{a} \qquad \therefore\ F(a,\frac{1}{a}) = \frac{a^2-1}{a}$$

14) Expresar el volumen z del cono en función de su generatriz x y la altura y.

Solución



Por Pitágoras en el Δ ABC se tiene $x^2 = r^2 + y^2$ **... (1)**

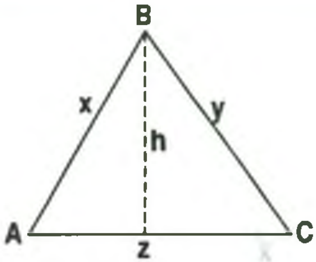
de donde $r^2 = x^2 - y^2$, además h = y = altura, el volumen del cono es: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ entonces:

$$V = \frac{\pi}{3}(x^2-y^2)y = \frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$$

$$\therefore\ z = V(x,y) = \frac{\pi}{3}(x^2y-y^3).$$

15) Expresar el área S del triángulo en función de sus tres lados x, y, z.

Solución



El perímetro del triángulo ABC es: $2p = x + y + z$

$$p = \frac{x+y+z}{2} \qquad \text{... (1)}$$

Luego el área S en función del semiperímetro p es:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \qquad \text{... (2)}$$

ahora reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$S = \sqrt{\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)}$$

$$\therefore\ W = S(x,y,z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)}$$

16) La función z =f(x,y), que satisface idénticamente la relación $f(mx,\ my) = m^k f(x,y)$ para cualquier m, es llamada función homogénea de k-ésimo orden, mostrar que la función de k-ésimo orden z = f(x, y) siempre puede ser representada en forma $z = x^k F(\frac{y}{x})$

Solución

Sea $m = \frac{1}{x}$. Reemplazando en la función $f(mx,\ my) = m^k f(x,y)$, se tiene

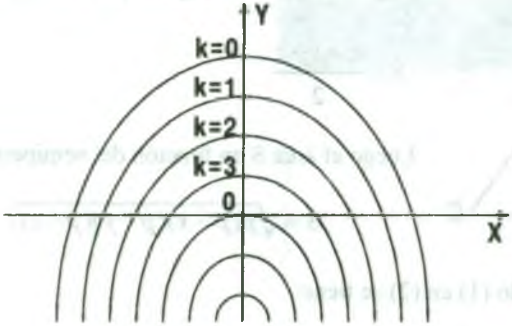
$f(1, \frac{y}{x}) = \frac{1}{x^k} f(x,y)$, de donde $f(x,y) = x^k f(1, \frac{y}{x})$. Como $f(1, \frac{y}{x})$ depende de $\frac{y}{x}$, entonces $F(\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$. Luego, $f(x,y) = x^k f(1, \frac{y}{x}) = x^k F(\frac{y}{x})$.

17) Construir las curvas de nivel de la función $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y$.

Solución

f(x,y) = k, es una curva de nivel para cada k $\in$ Z. Luego $8-x^2-2y=k$, entonces

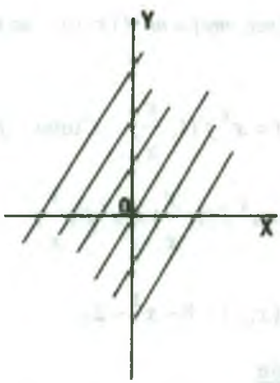
$x^2=-(2y+k-8) \Rightarrow x^2=-2(y+\frac{k-8}{2})$, representa parábolas que son las curvas de nivel.



18) Hallar el dominio, rango y construir las curvas. De nivel, para k = 0 y k = 1, de la función f(x, y) = sen (y - x).

Solución

Sea z = f(x, y) = sen(y - x) en donde las variables x, y no tienen ninguna restricción, por lo tanto $D_f = R^2$. Además $-1 \le \text{sen}(y-x) \le 1 \Rightarrow -1 \le z \le 1$, por lo tanto $R_T = [-1,1]$, para las curvas de nivel se tiene: sen (y - x) = k, de donde para k = 0 se tiene sen(y - x) = 0 $\Rightarrow$ y - x = nπ por lo tanto las curvas de nivel para k = 0 es un conjunto de rectas y para k = 1 se tiene sen(y - x) = 1 $\Rightarrow$ $y-x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, las curvas de nivel es un conjunto de rectas.



Líneas de nivel k = 0

Líneas de nivel k = 1

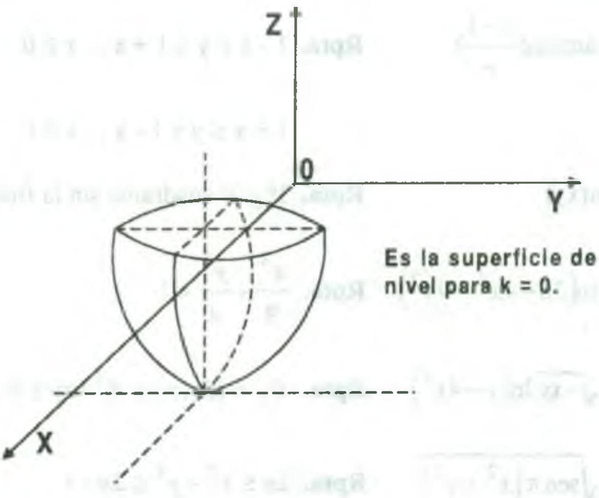
19) Dado $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}$, hallar el dominio de f, rango y construir la superficie de nivel para k = 0 y k = 1.

Solución

Sea $\omega=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}$, la función es bien definida si $x^2+y^2-4z-2x\geq 0$, luego: $D_f=\{(x,y,z)\in R^3 / x^2+y^2\geq 4z+2x\}$ como $x^2+y^2-4z-2x\geq 0 \Rightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}\geq 0 \Rightarrow \omega\geq 0$. Luego $R_f=[0,\infty>$

La superficie de nivel son ω = f(x, y, z) = k , k ∈ z. para el caso en que k = 0 se tiene $\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}=0$, de donde $x^2+y^2-4z-2x=0$ completando cuadrado se tiene $(x-1)^2+y^2=4(z+\frac{1}{4})$ es un paraboloide elíptico.

Ahora la superficie de nivel para k = 1 es $\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}=1$ entonces $x^2+y^2-4z-2x=1$ de donde $(x-1)^2+y^2=4(z+\frac{1}{2})$ es un paraboloide elíptico.



20) Hallar las superficies de nivel de la función $u=\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Solución

Sea u = c entonces $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=c$ levantando el logaritmo se tiene:

$$\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=e^c=k \;\Rightarrow\; 1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$(1+k)\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k-1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{k-1}{k+1} \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2=\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$$

Las superficies de nivel son esferas de centro en el origen.

3.6 Ejercicios Propuestos.

I.- Hallar y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2\geq y\}$

2) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{y-1}{x}\right)$ **Rpta.** $1-x\leq y\leq 1+x,\ \ x\geq 0$

$1+x\leq y\leq 1-x,\ \ x<0$

3) f(x, y) = ln(xy) **Rpta.** 1º y 3º cuadrante sin la frontera

4) $f(x,y)=\ln(36-4x^2-9y^2)$ **Rpta.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1$

5) $f(x,y)=\sqrt{-xy}\,\ln(y-4x^2)$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y)\in R^2 \,/\, xy\leq 0 \wedge y>4x^2\}$

6) $f(x,y)=\sqrt{\operatorname{sen}\pi(x^2+y^2)}$ **Rpta.** $2n\leq x^2+y^2\leq 2n+1$

7) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}(\frac{x^2+y^2}{2})+arc\sec(x^2+y^2)$ **Rpta.** $1\le x^2+y^2\le 4$

8) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(\frac{x-y}{1+x^2y^2})$ **Rpta.** $D_f=R^2$

9) $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$

10) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{xy}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y)\in R^2\ /\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

11) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}(\frac{x}{x+y})$

Rpta. $D_f=\{(x,y)\in R^2\ /\ y\ge 0\ \wedge\ y\ge -2x\}\cup\{(x,y)\ /\ y\le 0\ \wedge\ y\le -2x\}$

12) $f(x,y)=\frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y)\in R^2\ /\ x\ne 0,\ x^2+y^2\le 25\}$

13) $f(x,y,z)=(x+y)\sqrt{z-2}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ z\ge 2\}$

14) f(x,y,z) = arcsen x + arcsen y + arcsen z

Rpta. $D_f=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ -1\le z\le 1\}$

15) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y)\in R^2\ /\ x^2+y^2<25\}$

16) f(x, y, z) = ln(xyz) **Rpta.** I, III, VI, VIII octantes (excluyendo fronteras)

17) f(x, y, z) = arcsen x + arcsen y + arctg z

Rpta. $D_f=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ |x|\le 1\ ,\ |y|\le 1\}$

18) f(x, y) = ln(x ln (y - x)) **Rpta.** $y>x+1\ ;\ x\ge 0$

$x<y<x+1\ ;\ x<0$

19) $f(x,y)=\ln\left(xy-x^3-y^3+x^2y^2\right)$

Rpta. $D_f=\left\{(x,y)/0\le x\le 1 \wedge x^2<y<\sqrt{x}\right\}\cup\left\{(x,y)/x\ge 1 \wedge \sqrt{x}<y<x^2\right\}$

$\cup\left\{(x,y)/x<0 \wedge y<x^2\right\}$

20) $f(x,y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$ **Rpta.** $D_f=\left\{(x,y)\in R^2/|x|\ge 2 \wedge |y|\le 2\right\}$

21) f(x, y) = ln x - ln (sen y)

Rpta. $D_f=\left\{(x,y)/x>0 \wedge 2\pi n<y<2(n+1)\pi\right\},\ n\in z$

22) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}}$ **Rpta.** $D_f=\left\{(x,y)/x-2y>0 \wedge y-2x>0\right\}$

23) $f(x,y)=\text{arcsen}\left[2y\left(1+x^2\right)-1\right]$

Rpta. Parte del plano comprendido entre la linea $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ y su asíntota, incluyendo la frontera.

24) $f(x,y)=\text{arctg}(\sqrt{x^2-y^2})$ **Rpta.** $D_f=\left\{(x,y)/x\ge y \vee x\le -y\right\}$

25) $f(x,y)=[|x|]+\sqrt{1-y^2}$ **Rpta.** $D_f=\left\{(x,y)\in R^2/-1\le y\le 1\right\}$

26) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}+\ln\left(9-x^2-y^2-z^2\right)$

Rpta. $D_f=\left\{(x,y,z)/4\le x^2+y^2+z^2\le 9\right\}$

27) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ **Rpta.** $D_f=\left\{(x,y)/x^2+y^2<1\right\}$

28) f(x, y) = arc sen (x + y)

Rpta. La banda comprendida entre las rectas paralelas x + y = 1 y x + y = -1

29) $f(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$ **Rpta.** $D_f=\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$

30) $f(x,y,z)=\text{arcsen}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}})$ **Rpta.** La región del espacio exterior al cono

$x^2+y^2-z^2=0\ ;\ -\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2}$

31) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$

Rpta. El interior de la esfera $x^2+y^2+z^2<1$, excepto el origen de coordenadas.

32) $f(x,y)=\left[\left|\sqrt{x^2-y^2}\right|\right]+[|\sqrt{xy}|]$

33) $f(x,y)=[|x|]+\left[\left|\sqrt{1-y^2}\right|\right]$

II.- Determinar las curvas de nivel y graficar las funciones siguientes:

1) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ **Rpta.** Familia de parábolas $ky=\sqrt{x}$

2) $f(x,y)=\ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ **Rpta.** Familia de rectas que pasan por el origen en el 1º y 3º cuadrante $y=e^{2k}x$

3) $z=\sqrt{x^2-y^2}$ **Rpta.** Hipérbolas equiláteras $x^2-y^2=k$

4) $z=\sqrt{xy}$ **Rpta.** Hipérbolas equiláteras xy = k

5) $z=1-|x|-|y|$ **Rpta.** Contorno de rombos $|x|+|y|=1-k$

6) $z=\ln(x^2+y)$ **Rpta.** Parábolas $y=k-x^2$

7) z = arc sen xy **Rpta.** Hipérbolas xy = k, $|k|\leq 1$

8) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ **Rpta.** Familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2kx$

9) $z = e^{x^2 + y^2}$ **Rpta.** Familia de circunferencias $x^2 + y^2 = \ln k$, $k \geq 1$

10) $z = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$ **Rpta.** Familia de Elipses.

III.- Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones:

a) $u = x + y + 3z$ **Rpta.** Familia de planos $x + y + 3z = k$

b) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ **Rpta.** Familia de esferas $x^2 + y^2 + z^2 = k$, $k > 0$.

c) $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$ **Rpta.** Familia de Paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = kz$

d) $u = \ln(\frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$

Rpta. Familia de esferas $x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{c-1}{c+1})^2$

e) $u = sig(\text{sen}(x^2 + y^2 + z^2))$ **Rpta.** Familia de esferas

f) $u = x^2 + y^2 - z^2$ **Rpta.** Familia de hiperboloides

IV.-

1) Expresar el volumen V de una pirámide cuadrangular regular en función de su altura "x" y de su arista lateral "y".

Rpta. $V = \frac{2x}{3}(y^2 - x^2)$

2) Expresar el área S de la superficie lateral de un tronco de la pirámide hexagonal regular en función de los lados x e y de las bases y de la altura z.

Rpta. $S = \frac{2(x+y)}{3}\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}$

3) Probar que la función z = F(x, y) = xy satisface a la ecuación:

F(ax + bu, cy + dv) = ac F(x, y) + bc F(u,y) + ad F(x,v) + bd F(u,v).

4) Probar que la función z = F(x, y) = lnx.lny, satisface a la ecuación:

F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v) , x,y,u,v > 0.

5) Hallar los valores que toma la función f(x, y) = 1 + x - y, en los puntos de la parábola $y = x^2$ y construir la gráfica de la función $F(x) = f(x, x^2)$

6) Construir las curvas de nivel de la función $z = \operatorname{arctg}(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}), a > 0$

Rpta. Familia de circunferencias.

3.7 Conjuntos Abiertos y Cerrados.

a) **Distancia entre Dos puntos.-** A la distancia entre los puntos $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de R^n, definiremos por:

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}}$$

b) **Bola Abierta en R^n.-** Una bola abierta de centro en el punto a $\in R^n$ y radio r > 0, denotado por B(a,r) es definido por el conjunto:

$$\boxed{B(a,r) = \{x \in R^n \,/\, d(x,a) < r\}}$$

c) **Bola Reducida en R^n.-** Una bola reducida de centro en el punto a $\in R^n$ y radio r > 0, denotado por $B'(a,r)$ es definido por el conjunto:

$$\boxed{B'(a,r) = \{x \in R^n \,/\, 0 < d(x,a) < r\} = B(a,r) - \{a\}}$$

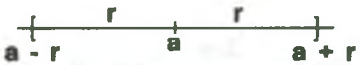
d) **Bola Cerrada en R^n.-** $\boxed{\overline{B}(a,r) = \{x \in R^n \,/\, d(x,a) \le r\}}$

Observación.- Entenderemos por una vecindad de un punto a $\in R^n$, a una bola abierta con centro en el punto a.

Ejemplo.- En el espacio n-dimensional se tiene:

1.- Para n = 1, se tiene la recta real R.

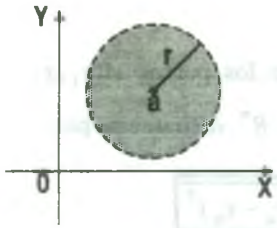
$, \quad B(a,r) = \langle a-r, a+r \rangle$



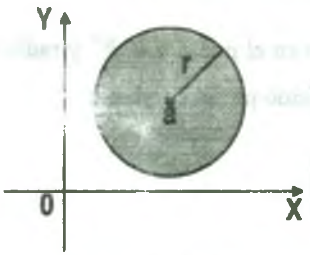
$, \quad \overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$.

$, \quad B'(a,r) = \langle a-r, a+r \rangle - \{a\}$

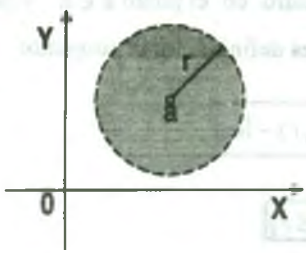
2.- Para n = 2, se tiene el plano R^2



$$B(a,r) = \{(x,y) \in R^2 \,/\, (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}$$



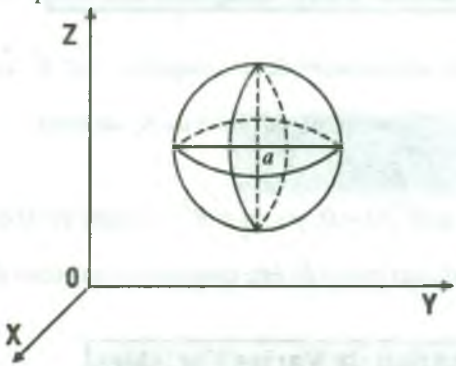
$$\overline{B}(a,r) = \{(x,y) \in R^2 \,/\, (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2\}$$



$$B'(a,r) = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 < (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}$$

$$= B(a,r) - \{a\}$$

3.- Para n = 3, se tiene el espacio R^3.



$$B(a,r)=\left\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, (x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2<r^2\right\}$$

3.8 Conjunto Abierto en R^n

Un conjunto $A\subset R^n$ es abierto en R^n, si y solo si, $\forall$ x $\in$A,$\exists$ δ > 0, tal que B(x,δ)$\subset$ A.

Ejemplos.-

1) A = <a,b>, intervalo abierto es un conjunto abierto en **R**.

2) $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x<0\}$ es un conjunto abierto en R^2.

3) $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y\geq 0\}$ no es un conjunto abierto.

4) R^n y ϕ son conjuntos abiertos en R^n.

3.9 Conjunto Cerrado en R^n

Un conjunto $A\subset R^n$ es cerrado en R^n, si y solo si, C A es abierto en R^n.

Ejemplos.-

1) A = [a,b] $\subset$ R, es cerrado. 2) A = [a,b> $\subset$ R , no es cerrado.

3) $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, xy\leq 1\}$, es cerrado puesto que , $CA=R^2-A$ es abierto.

4) $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, a\leq x\leq b \wedge c\leq y\leq d\}$, es un conjunto cerrado.

3.10 Punto de Acumulación de un Conjunto En R^n.

Llamaremos punto de acumulación de un conjunto $A \subset R^n$, a un punto $p_0 \in R^n$, si toda bola reducida $B'(p_0,r)$ contiene algún punto de A; es decir: $B'(p_0,r) \cap A \neq \phi$, $\forall\ r > 0$.

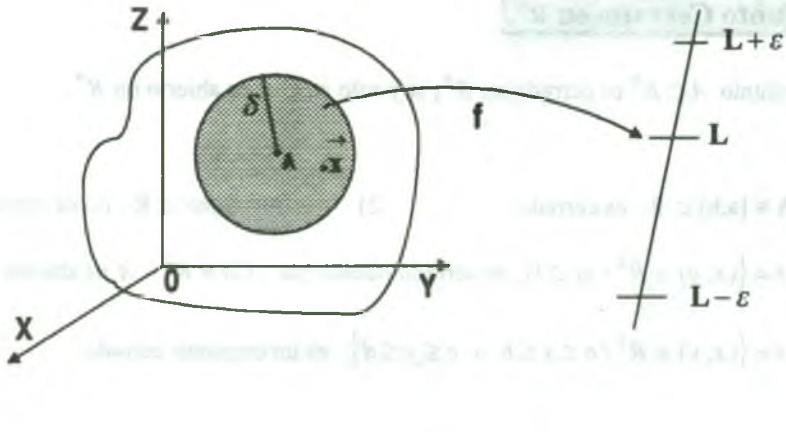
Ejemplo.- Sea $A = \{(x,y) \in R^2 / x < 0,\ y < 0\} \subset R^2$, el punto (0,0) es un punto de acumulación de A, y además cualquier punto de éste conjunto es un punto de acumulación.

3.11 Límite de una Función de Varias Variables.

Definición.- Sea $f: D \subset R^n \longrightarrow R$, una función de n variables definida en un conjunto abierto $D \subset R^n$ y A un punto de acumulación de D, entonces el límite de la Función $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ se aproxima al punto A ($\lim\limits_{\vec{x} \to A} f(\vec{x}) = L$), es el número real L, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, si $0 < \| \vec{x} - A \| < \delta$ entonces $| f(\vec{x}) - L | < \varepsilon$, es decir: $\lim\limits_{\vec{x} \to A} f(\vec{x}) = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / si 0 < \| \vec{x} - A \| < \delta \Rightarrow | f(\vec{x}) - L | < \varepsilon$

Esta definición en términos de vecindad es :

$$\lim_{\vec{x} \to A} f(\vec{x}) = L \iff \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall\ \vec{x} \in B'(A,\delta) \subset D_f \Rightarrow f(\vec{x}) \in B(L,\varepsilon)$$

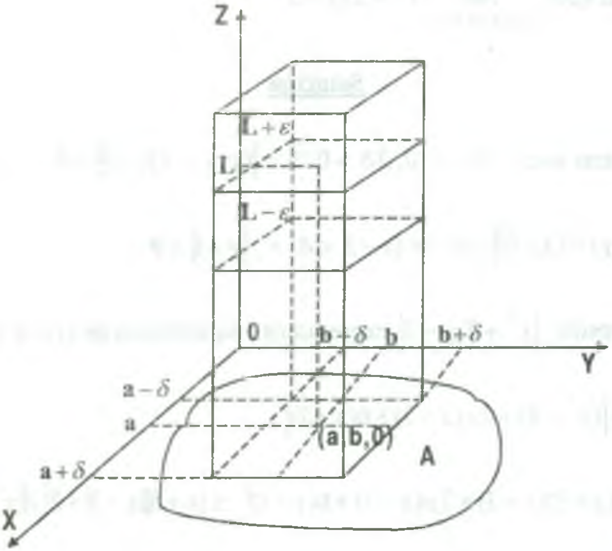


3.12 Interpretación Geométrica del Límite de una Función de Dos Variables.

Consideremos $f: A \subset R^2 \longrightarrow R$, una función definida en el conjunto $A \subset R^2$ y sea $(a,b) \in R^2$ un punto de acumulación de A, por definición de límite se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$$

Además $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Leftrightarrow |x-a| < \delta \wedge |y-b| < \delta$



Ejemplo.- Demostrar que: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 3x+2y = 12$

Solución

Se debe demostrar que: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(2,3)\| < \delta \Rightarrow |3x+2y-12| < \varepsilon$

para esto se tiene que: $0 < \|(x,y)-(2,3)\| < \delta \Rightarrow |x-2| < \delta \wedge |y-3| < \delta$ **... (1)**

Luego operando en la forma: $|3x+2y-12| = |3(x-2)+2(y-3)| \leq 3|x-2| + 2|y-3|$ **... (2)**

por lo tanto de (1) y (2) se tiene: $|3x+2y-12| \le 3|x-2|+2|y-3| < 3\delta+2\delta = 5\delta = \varepsilon$

es decir, que es suficiente tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ de donde:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{5} \,/\ 0 < \|(x,y)-(2,3)\| < \delta \ \Rightarrow\ |3x+2y-12| < \varepsilon$$

lo cual demuestra que: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 3x+2y = 12$

Ejemplo.- Demostrar que: $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x^2+2xy = 3$

Solución

Se debe demostrar que: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta \ \Rightarrow |x^2+2xy-3| < \varepsilon$

como $0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta \ \Rightarrow |x-3| < \delta \ \wedge\ |y+1| < \delta$

ahora a la expresión $|x^2+2xy-3|$ expresamos en términos de $|x-3|$ y $|y+1|$, esto es:

$$|x^2+2xy-3| = |(x^2-9)+2y(x-3)+6(y+1)|$$

$$= |(x+3)(x-3)+2y(x-3)+6(y+1)| \le |x+3||x-3|+2|y||x-3|+6|y+1| \quad \textbf{... (1)}$$

Sea $|x-3| < \delta_1 = 1 \ \Rightarrow\ -1 < x-3 < 1 \ \Rightarrow\ 5 < x+3 < 7 \ \Rightarrow\ |x+3| < 7$

$|y+1| < \delta_1 = 1 \ \Rightarrow\ -1 < y+1 < 1 \ \Rightarrow\ -2 < y < 0 < 2 \ \Rightarrow\ |y| < 2$

ahora reemplazamos en (1), se tiene: $|x^2+2xy-3| < 7\delta_2 + 4\delta_2 + 6\delta_2 = 17\delta_2 = \varepsilon \Rightarrow \delta_2 = \frac{\varepsilon}{17}$

por lo tanto si escogemos $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{17}\}$, se tiene que $|x^2+2xy-3| < \varepsilon$ siempre que $0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta$ por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x^2+2xy = 3$

Ejemplo.- Si $f(x,y)=\dfrac{xy}{|x|+|y|}$, $\forall$ (x,y) $\neq$ (0,0), probar que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

Solución

Se debe demostrar que: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0\,/\ \ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta\ \Rightarrow\ |\dfrac{xy}{|x|+|y|}-0|<\varepsilon$

como $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta\ \Leftrightarrow |x|<\delta\ \wedge\ |y|<\delta$

ahora a la expresión $|\dfrac{xy}{|x|+|y|}-0|$ expresamos en términos de $|x|$, $|y|$, es decir:

$$|\frac{xy}{|x|+|y|}-0|=|\frac{xy}{|x|+|y|}|=\frac{|x||y|}{|x|+|y|} \qquad \text{... (1)}$$

por otro lado se tiene $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$, $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$

$$\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=|x|+|y|\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{|x|+|y|}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{... (2)}$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$|\frac{xy}{|x|+|y|}-0|=\frac{|x||y|}{|x|+|y|}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|=2\delta=\varepsilon$$

por lo tanto, si elegimos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, se tiene que: $|\dfrac{xy}{|x|+|y|}-0|<\varepsilon$, siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, lo cual demuestra que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$

Ejemplo.- Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2+y^2=5$

Solución

Se debe demostrar que: $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0/0<\|(x,y)-(1,2)\|<\delta$ entonces $|x^2+y^2-5|<\varepsilon$

como $0<\|(x,y)-(1,2)\|<\delta \Leftrightarrow |x-1|<\delta \wedge |y-2|<\delta$

ahora a la expresión $|x^2+y^2-5|$ expresaremos en términos de $|x-1|$, $|y-2|$, es decir:

$$|x^2+y^2-5|=|(x^2-1)+(y^2-4)|=|(x+1)(x-1)+(y+2)(y-2)|$$

$$\leq |x+1||x-1|+|y+2||y-2| \quad \text{... (1)}$$

Sea $|x-1|<\delta_1=1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 1<x+1<3 \Rightarrow |x+1|<3$

$$|y-2|<\delta_2=1 \Rightarrow -1<y-2<1 \Rightarrow 3<y+2<5 \Rightarrow |y+2|<5$$

ahora reemplazando en (1) se tiene:

$$|x^2+y^2-5|<3\delta_2+5\delta_2=8\delta_2=\varepsilon \Rightarrow \delta_2=\frac{\varepsilon}{8}$$

por lo tanto, si se escoge $\delta=min\{1,\frac{\varepsilon}{8}\}$ se tiene que $|x^2+y^2-5|<\varepsilon$ siempre que

$0<\|(x,y)-(1,2)\|<\delta$, lo cual demuestra que: $\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2+y^2=5$

3.13 Propiedades de Límites.

Si $f,g: R^n \longrightarrow R$, son funciones tal que: $\lim\limits_{\vec{x}\to A} f(\vec{x})$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to A} g(\vec{x})$ existen y sí A es punto de acumulación de $D_f \cap D_g$ entonces:

1) $\lim\limits_{\vec{x}\to A} (f(\vec{x})\pm g(\vec{x}))=\lim\limits_{\vec{x}\to A} f(\vec{x})\pm \lim\limits_{\vec{x}\to A} g(\vec{x})$

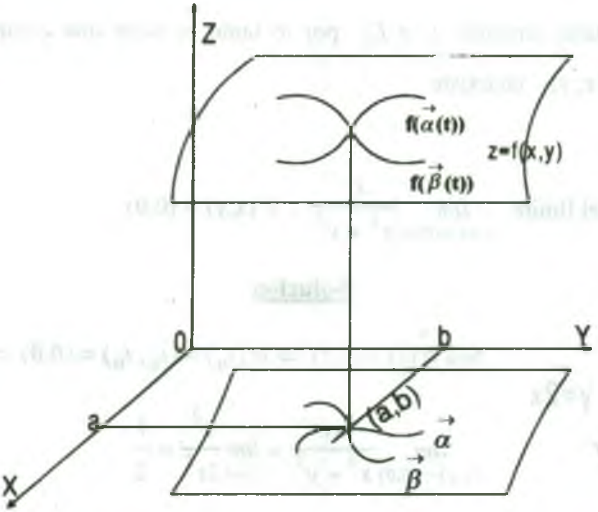
2) $\lim\limits_{\vec{x}\to A} f(\vec{x}).g(\vec{x})=\lim\limits_{\vec{x}\to A} f(\vec{x}).\lim\limits_{\vec{x}\to A} g(\vec{x})$

3) $\lim\limits_{\vec{x}\to A} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=\dfrac{\lim\limits_{\vec{x}\to A} f(\vec{x})}{\lim\limits_{\vec{x}\to A} g(\vec{x})}$, si $\lim\limits_{\vec{x}\to A} g(\vec{x})\neq 0$

Nota.- La demostración de estas propiedades es lo mismo que las propiedades correspondientes para las funciones reales de variable real. (Ver Análisis Matemático I para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería).

3.14 Teorema.

Suponiendo que la función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, está definida en todos los puntos de una bola abierta de centro (a,b) excepto posiblemente en (a,b), entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall$ curva $\vec{\alpha}(t) = (x(t),\ y(t))$ que pasa por (a,b), (es decir $\vec{\alpha}(t_0) = (x(t_0),\ y(t_0)) = (a,b)$) se tiene: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = L$



Nota.- Este teorema es muy útil en el sentido: Si encontramos dos curvas $\vec{\alpha}(t) = (x(t),\ y(t))$ y $\vec{\beta}(t) = (x(t),\ y(t))$ que pasan por (a,b), (es decir $\vec{\alpha}(t_0) = (x(t_0),\ y(t_0)) = (a,b)$; $\vec{\beta}(t_1) = (x(t_1),\ y(t_1)) = (a,b)$) tales que: $\lim\limits_{t\to t_0} f(\vec{\alpha}(t)) = L_1$ y $\lim\limits_{t\to t_1} f(\vec{\beta}(t)) = L_2$ donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

3.15 Teorema.

Si la función $f: R^2 \longrightarrow R$, tiene límites diferentes cuando (x,y) se aproxima a (x_0,y_0) a través de dos conjuntos diferentes que tienen a (x_0,y_0) como punto de acumulación, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ no existe}$$

Demostración

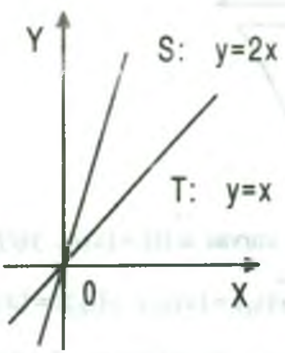
Sean T y S, dos conjuntos diferentes de R^2 que tiene a (x_0,y_0) como punto de acumulación y sean: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_2$.

Supongamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe, entonces por el teorema **4.14** se tiene $L_1 = L_2$, pero por hipótesis tenemos $L_1 \neq L_2$ por lo tanto se tiene una contradicción, por lo tanto.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ no existe}$$

Ejemplo.- Calcular el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\forall$ (x,y) $\neq$ (0,0)

Solución



Sea $\vec{\alpha}(t)=(t,t) \Rightarrow \vec{\alpha}(t_0)=(t_0,t_0)=(0,0) \Rightarrow t_0=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

Sea $\beta(t)=(t,2t) \Rightarrow \beta(t_0)=(0,0) \Rightarrow t_0=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{5t^2} = \frac{2}{5},$$

como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Ejemplo.- Determinar si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, donde $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Solución

Tomamos dos caminos diferentes que tenga (0,0) como punto de acumulación.

$$S=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=x\} \quad \text{y} \quad T=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=4x\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{16x^4}{17x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{17}=0$$

de acuerdo al teorema **4.14**, no se puede afirmar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$,

es decir , tenemos que demostrar este límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \,/\, 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

además $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Leftrightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|=|x|^2<\delta^2$$

luego tomando $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ se tiene:

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \quad \text{siempre que } 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

por lo tanto queda demostrado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

3.16 Continuidad de una Función de Varias Variables.

A) Definición de Continuidad para una Función de dos Variables.

Una función f de dos variables es continua en un punto (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ está definido y es igual al límite de f(x,y) cuando (x,y) tiende a (x_0, y_0), es decir, si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

La función f es continua en la región abierta R si es continua en todos los puntos de R.

B) Propiedades de las Funciones Continuas de dos Variables.-

Sea k constante, f y g funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las siguientes funciones son continuas en (x_0, y_0):

1) k.f

2) f ± g

3) f.g

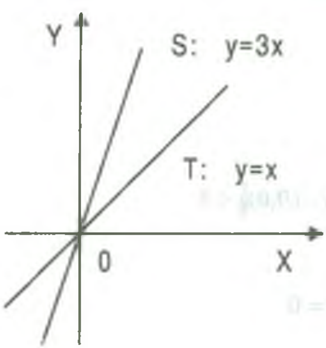
4) $\frac{f}{g}$ con $g(x_0, y_0) \neq 0$

Ejemplo.- Determinar si f es continua en (0,0) donde:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

Primeramente f(0,0) = 0, ahora veremos si se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, para esto calculamos el límite por caminos.



T: $y = x$, $\vec{\alpha}(t) = (t,t)$

$$\vec{\alpha}(t_0) = (t_0, t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{2} = 0$$

S: $y = 3x$, $\vec{\beta}(t) = (t, 3t)$

$$\vec{\beta}(t_0) = (t_0, 3t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{4|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{3|t|}{4} = 0$$

como $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} = \lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y) = 0$, entonces demostraremos que efectivamente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, para esto $\forall \in > 0, \exists \delta > 0$ tal que sí $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ entonces $|f(x,y)-0| < \in$, de donde $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Leftrightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$.

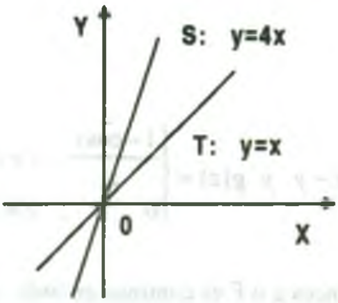
$\left| f(x,y)-0 \right| = \left| \dfrac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| = \left| \dfrac{xy}{|x|+|y|} \right| \le |x||y| = \delta^2 = \in$, por lo tanto es suficiente tomar $\delta = \sqrt{\in}$, de donde $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, se concluye que es continua en (0,0).

Ejemplo.- Determinar sí la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{es continua en } (0,0)$$

Solución

Como f(0,0) = 0, f está definida en (0,0), ahora veremos si se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, para esto calculamos el límite por caminos.



$$T: \vec{\alpha}(t) = (t,t) \Rightarrow \vec{\alpha}(t_0) = (t_0, t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

$$S: \vec{\beta}(t) = (t,4t) \Rightarrow \vec{\beta}(t_0) = (t_0, 4t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{4t^2}{17t^2} = \frac{4}{7}, \text{ como}$$

$\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ por lo tanto f(x,y) es discontinua en (0,0).

C) Definición de continuidad para una función de Varias Variables.-

Una función f de varias variables es continua en un punto $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de una región abierta D de R^n sí $f(\vec{a}) = f(a_1, a_2, ..., a_n)$ está definida y es igual al límite de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cuando $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tiende a $(a_1, a_2, ..., a_n)$,es decir, sí

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

La función f es continua en la región D si es continua en todos los puntos de D.

D) Continuidad de una Función Compuesta.-

Si g es continua en (x_0, y_0) y f es continua en $g(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$es continua en (x_0, y_0)es decir $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f(g(x_0, y_0))$.

Ejemplo.- Consideremos la función f definida por :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x-y)}{x-y} & , \; para \; x \neq y \\ 0 & , \; para \; x = y \end{cases}$$. Probar que f es continua en todo R^2

Solución

Sea $f(x,y) = goF(x,y) = g(F(x,y))$, donde $F(x,y) = x - y$ y $g(z) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos z}{z}, & z \neq 0 \\ 0 \quad , & z = 0 \end{cases}$

F es continua en todo R^2 y g es continua en todo R entonces g o F es continua en todo R^2.

3.17 Ejercicios Desarrollados.

I. Mediante la definición de límite demostrar que:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

Solución

Consideremos $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, entonces

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall \in > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-0| < \in$.

Además $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Leftrightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$ entonces

$|f(x,y)-0| = |(x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}| \leq |x||\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}| + |y||\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}| \leq |x| + |y|$ es decir:

$|f(x,y)-0| \leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta = \in \Rightarrow \delta = \dfrac{\in}{2}$. Luego si tomamos $\delta = \dfrac{\in}{2}$ tenemos

$|f(x,y)-0| \leq |x| + |y| < 2\delta = 2(\dfrac{\in}{2}) = \in$, siempre que $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, lo cual

demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

2) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{xz} - \sqrt{y} + \sqrt{x} = 2$

Solución

Consideremos $f(x,y,z) = \sqrt{xz} - \sqrt{y} + \sqrt{x}$, entonces

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{xz} - \sqrt{y} + \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \forall \in > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y,z)-(1,4,9)\| < \delta$ donde

$|\sqrt{xz} - \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2| < \in$. Como $0 < \|(x,y,z)-(1,4,9)\| < \delta \Leftrightarrow |x-1| < \delta |y-4| < \delta |z-9| < \delta$

se tiene: $\left|\sqrt{xz}-\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\right| = \left|\sqrt{x}(\sqrt{z}-3)+4(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{y}-2)\right|$

$|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}+3}(z-9)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}(x-1)-\frac{y-4}{\sqrt{y}+2}|$ y por la desigualdad triangular se tiene:

$$|f(x,y,z)-2| \le |\sqrt{x}||\frac{1}{\sqrt{z}+3}||z-9|+|\frac{4}{\sqrt{x}+1}||x-1|+|\frac{1}{\sqrt{y}+2}||y-4| \qquad \text{...(1)}$$

como:
$$\left.\begin{array}{l} |x-1|<\delta_1 = 1 \ \Rightarrow\ -1<x-1<1 \\ 0<x<2 \ \Rightarrow\ \left|\sqrt{x}\right|<\sqrt{2}<2 \\ 0<\sqrt{x}<\sqrt{2} \\ 1<\sqrt{x}+1<\sqrt{2}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}<\frac{1}{\sqrt{x}+1}<1 \ \Rightarrow\ |\frac{1}{\sqrt{x}+1}|<1 \end{array}\right\} \qquad \text{... (2)}$$

$|y-4|<\delta_2 = 1 \Rightarrow -1<y-4<1$ entonces $3<y<5$

$$\sqrt{3}<\sqrt{y}<\sqrt{5} \qquad \text{... (3)}$$

$$\sqrt{3}+2<\sqrt{y}+2<\sqrt{5}+2$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}<\frac{1}{\sqrt{y}+2}<\frac{1}{\sqrt{3}+2}<1 \ \Rightarrow\ |\frac{1}{\sqrt{y}+2}|<1$$

$$|z-9|<\delta_3 = 1 \ \Rightarrow\ -1<z-9<1$$

$$8<z<10 \ \Rightarrow\ \left|\sqrt{x}\right|<\sqrt{2}<2$$

$$2\sqrt{2}<\sqrt{z}<\sqrt{10} \qquad \text{... (4)}$$

$$2\sqrt{2}+3<\sqrt{z}+3<\sqrt{10}+3$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}+3}<\frac{1}{\sqrt{z}+3}<\frac{1}{2\sqrt{2}+3}<1 \ \Rightarrow\ |\frac{1}{\sqrt{z}+3}|<1$$

reemplazando (2),(3) y (4) en (1)

$$|f(x,y)-2| < 2\delta_2 + 4\delta_2 + \delta_2 = \in \;\Rightarrow\; \delta_2 = \frac{\in}{7}. \quad \text{Luego } \exists\delta = min\{1, \frac{\in}{7}\}.$$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x^2 + y^2 - 4x + 2y = -4$

Solución

Consideremos $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(3,-1)} f(x,y) = -4 \Leftrightarrow \forall \in > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)+4| < \in$$

además $0 < \|(x,y)-(3,-1)\| < \delta \Leftrightarrow |x-3| < \delta \wedge |y+1| < \delta$

$$|f(x,y)+4| = |x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4| = |(x-3)(x+1) + (y+1)(y+1)|$$

$$\leq |x+1||x-3| + |y+1||y+1| \qquad \text{... (1)}$$

ahora acotando las funciones $|x+1|$ y $|y+1|$ se tiene como

$|x-3| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1$

$$3 < x+1 < 5 \Rightarrow |x+1| < 5 \qquad \text{... (2)}$$

$$|y+1| < \delta_1 \Longrightarrow |y+1| < 1 \qquad \text{...(3)}$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$|f(x,y)+4| < 5\delta_2 + \delta_2 = \in \Rightarrow \delta_2 = \frac{\in}{6} \text{ por lo tanto } \exists\delta = min\{1, \frac{\in}{6}\}$$

4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z} + \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 7$

Solución

Consideremos $f(x,y,z) = \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z} + \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$, entonces

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,4,9)} f(x,y,z)=7 \Leftrightarrow \forall \in >0, \exists \delta>0 \,/\, 0<\|(x,y,z)-(1,4,9)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y,z)-7|<\in$$

además $0<\|(x,y,z)-(1,4,9)\|<\delta \Leftrightarrow |x-1|<\delta \wedge |y-4|<\delta \wedge |z-9|<\delta$

$$|f(x,y,z)-7|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-7|$$

$$=|\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{z}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{z}(\sqrt{y}-2)+2(\sqrt{z}-3)+(\sqrt{x}-1)|$$

$$\leq|\sqrt{y}||\sqrt{x}-1|+|\sqrt{z}||\sqrt{x}-1|+|\sqrt{z}||\sqrt{y}-2|+2|\sqrt{z}-3|+|\sqrt{x}-1|$$

$$\leq|\sqrt{y}||\frac{1}{\sqrt{x}+1}||\sqrt{x}-1|+|\sqrt{z}||\frac{1}{\sqrt{x}+1}||x-1|+|\sqrt{z}||\frac{1}{\sqrt{y}+2}||y-4|+$$

$$+|\frac{2}{\sqrt{z}+3}||z-9|+|\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}| \qquad \textbf{... (1)}$$

ahora acotando a las funciones $\sqrt{y}$, $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $\sqrt{z}$, $\frac{1}{\sqrt{y}+2}$, $\frac{2}{\sqrt{z}+3}$ como:

$|x-1|<\delta_1=1 \;\Rightarrow\; -1<x-1<1$

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<2 \;\Rightarrow\; |\sqrt{x}|<\sqrt{2}<2 \\ 0<\sqrt{x}<\sqrt{2} \\ 1<\sqrt{x}+1<\sqrt{2}+1 \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{x}-1}<1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{x}+1}|<1 \end{array}\right] \qquad \textbf{... (2)}$$

$|y-4|<\delta_1=1 \;\Rightarrow\; -1<y-4<1$

$$\left.\begin{array}{l} 3<y<5 \\ \sqrt{3}<\sqrt{y}<\sqrt{5} \;\Rightarrow\; |\sqrt{y}|<\sqrt{5}<3 \\ \sqrt{3}+2<\sqrt{y}+2<\sqrt{5}+2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}+2}<\frac{1}{\sqrt{y}+2}<\frac{1}{\sqrt{3}+2}<1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{y}+2}|<1 \end{array}\right\} \qquad \textbf{... (3)}$$

$$|z-9|<\delta_1=1 \quad \Rightarrow \quad -1<z-9<1$$

$$\left.\begin{array}{l} 8<z<10 \\ 2\sqrt{2}<\sqrt{z}<\sqrt{10}<4 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{z}|<4 \\ 2\sqrt{2}+3<\sqrt{z}+3<\sqrt{10}+3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}+3}<\dfrac{1}{\sqrt{z}+3}<\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}<1 \Rightarrow |\dfrac{1}{\sqrt{z}+3}|<1 \end{array}\right\} \quad \ldots (4)$$

además $|x-1|<\delta_2$, $|y-4|<\delta_2$, $|z-9|<\delta_2$ **... (5)**

reeemplazando (2),(3),(4) y (5) en (1) se tiene:

$$|f(x,y,z)-7|<2\delta_2+4\delta_2+4\delta_2+2\delta_2+\delta_2=\in$$

de donde $13\delta_2=\in$ entonces $\delta_2=\dfrac{\in}{13}$ por lo tanto $\exists\delta=min\{1,\dfrac{\in}{13}\}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} x^2\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6$

<u>Solución</u>

Consideremos $f(x,y)=x^2\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)}=6 \Leftrightarrow \forall \in>0,\exists\delta>0/0<\|(x,y)-(1,4)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-6|<\in$$

Además $0<\|(x,y)-(1,4)\|<\delta \Leftrightarrow |x-1|<\delta \wedge |y-4|<\delta$

$$|f(x,y)-6|=|x^2\sqrt{y}+y\sqrt{x}-6|=|x^2(\sqrt{y}-2)|+2(x^2-1)+y(\sqrt{x}-1)+(y-4)$$

$$=|x^2\frac{1}{\sqrt{y}+2}(y-4)+2(x+1)(x-1)+y\frac{1}{\sqrt{x}+1}(x-1)+(y-4)|$$

$$\le|x|^2|\frac{1}{\sqrt{y}+2}||y-4|+2|x+1||x-1|+|y||\frac{1}{\sqrt{x}+1}||x-1|+|y-4| \ldots (1)$$

Como $|x-1|<\delta_1=1 \Rightarrow -1<x-1<1$

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<2 \Rightarrow |x|<2,\ |x+1|<3 \\ 0<\sqrt{x}<\sqrt{2} \\ 1<\sqrt{x}+1<\sqrt{2}+1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}<\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}<1 \Rightarrow |\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}|<1 \end{array}\right| \quad \ldots (2)$$

$|y-4|<\delta_1=1 \Rightarrow -1<y-4<1$

$$\left.\begin{array}{l} 3<y<5 \Rightarrow |y|<5 \\ \sqrt{3}<\sqrt{y}<\sqrt{5} \\ \sqrt{3}+2<\sqrt{y}+2<\sqrt{5}+2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}<\dfrac{1}{\sqrt{y}+2}<|\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}|<1 \Rightarrow |\dfrac{1}{\sqrt{y}+2}|<1 \end{array}\right| \quad \ldots (3)$$

como $|x-1|<\delta_2$, $|y-4|<\delta_2$ ... (4)

reemplazando (2), (3), (4) en (1) tenemos:

$|f(x,y)-6|<4\delta_2+6\delta_2+5\delta_2+\delta_2=\in$ de donde $16\delta_2=\in \Rightarrow \delta_2=\dfrac{\in}{16}$

por lo tanto $\exists\delta=min\{1,\dfrac{\in}{16}\}$

6) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,1)} \sqrt{-x}-\sqrt{yz}=0$

Solución

Consideremos $f(x,y,z)=\sqrt{-x}-\sqrt{yz}$, entonces

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,1)} f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \forall\in>0,\exists\delta>0/0<\|(x,y,z)-(-1,1,1)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y,z)-0|<\in$$

Además $0 < \|(x,y,z)-(-1,1,1)\| < \delta \Leftrightarrow |x+1| < \delta \wedge |y-1| < \delta \wedge |z-1| < \delta$

$$|f(x,y,z)-0| = |\sqrt{-x}-\sqrt{yz}-0| = |(\sqrt{-x}-1)-\sqrt{y}(\sqrt{z}-1)-(\sqrt{y}-1)|$$

$$=|\frac{1}{\sqrt{-x}-1}(-x-1)-\sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{z}+1}(z-1)-\frac{1}{\sqrt{y}+1}(y-1)|$$

$$\leq |\frac{1}{\sqrt{-x}+1}||x+1|+|\sqrt{y}||\frac{1}{\sqrt{z}+1}||z-1|+|\frac{1}{\sqrt{y}+1}||y-1| \quad \textbf{... (1)}$$

Ahora acotando las funciones $\frac{1}{\sqrt{-x}+1}$, $\sqrt{y}$, $\frac{1}{\sqrt{z}+1}$, $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$

como $|x+1| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1$

$$\left.\begin{array}{l} -2 < x < 0 \\ 0 < -x < 2 \\ 0 < \sqrt{-x} < \sqrt{2} \\ 1 < \sqrt{-x}+1 < \sqrt{2}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{-x}+1} < 1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{-x}+1}| < 1 \end{array}\right. \quad \textbf{... (2)}$$

$|y-1| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < y-1 < 1$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < y < 2 \Rightarrow |\sqrt{y}| < \sqrt{2} < 2 \\ 0 < \sqrt{y} < \sqrt{2} \\ 0 < \sqrt{y}+1 < \sqrt{2}+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{y}+1} < 1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{y}+1}| < 1 \end{array}\right\} \quad \textbf{... (3)}$$

$|z-1| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < z-1 < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{z}+1} < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{z}+1}\right| < 1 \quad \textbf{... (4)}$$

como $|x+1|<\delta_2$, $|y-1|<\delta_2$, $|z-1|<\delta_2$ ... **(5)**

reemplazando (2), (3), (4) y (5) 4 en (1)

$|f(x,y,z)-0|<\delta_2+2\delta_2+\delta_2=\epsilon \Rightarrow \delta_2=\frac{\epsilon}{4}$ por lo tanto $\exists\delta=min\{1,\frac{\epsilon}{4}\}$

7) $\lim\limits_{(x,y,z,\omega)\to(1,4,9,16)} \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{\omega}=6$

Solución

Consideremos $f(x,y,z,\omega)=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{\omega}$, entonces

$$\lim_{(x,y,z,\omega)\to(1,4,9,16)} f(x,y,z,\omega)=6 \Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0/0<\|(x,y,z,\omega)-(1,4,9,16)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y,z,\omega)-6|<\epsilon$$

como $0<\|(x,y,z,\omega)-(1,4,9,16)\|<\delta \Leftrightarrow |x-1|<\delta \wedge |y-4|<\delta \wedge |z-9|<\delta \wedge |\omega-16|<\delta$

$$|f(x,y,z,\omega)-6|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{\omega}-6|=|(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{y}-2)+(\sqrt{z}-3)+(\sqrt{\omega}-4)|$$

$$=|\frac{1}{\sqrt{x}+1}(x-1)-\frac{1}{\sqrt{y}+2}(y-4)+\frac{1}{\sqrt{z}+3}(z-9)+\frac{1}{\sqrt{\omega}+4}(\omega-16)|$$

$$\leq|\frac{1}{\sqrt{x}+1}||x-1|+|\frac{1}{\sqrt{y}+2}||y-4|+|\frac{1}{\sqrt{z}+3}||z-9|+|\frac{1}{\sqrt{\omega}+4}||\omega-16| \quad \textbf{... (1)}$$

Ahora acotando las funciones $\frac{1}{\sqrt{x}+1},\frac{1}{\sqrt{y}+2},\frac{1}{\sqrt{z}+3},\frac{1}{\sqrt{\omega}+4}$ como:

$$\left.\begin{array}{l} \leq|x-1|<\delta_1=1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{x}+1}|<1 \\ |y-4|<\delta_1=1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{y}+2}|<1 \\ |z-9|<\delta_1=1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{z}+3}|<1 \\ |\omega-16|<\delta_1=1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{\omega}+4}|<1 \end{array}\right\} \quad \textbf{... (2)}$$

como $|x-1|<\delta_2,\ |y-4|<\delta_2,\ |z-9|<\delta_2,\ |\omega-16|<\delta_2$ **... (3)**

reemplazando (2), (3) en (1) se tiene.

$$|f(x,y,z,\omega)-6|<\delta_2+\delta_2+\delta_2+\delta_2=\epsilon \Rightarrow \delta_2=\frac{\epsilon}{4} \text{ por lo tanto } \exists\delta=min\{1,\frac{\epsilon}{4}\}$$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|}=0 \quad , \quad \forall(x,y)\neq(0,0)$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}=0 \Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0\ /\ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |\frac{xy}{|x|+|y|}-0|<\epsilon$$

Además $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Leftrightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$

$$|\frac{xy}{|x|+|y|}-0|=|\frac{xy}{|x|+|y|}|=\frac{|x||y|}{|x|+|y|}\leq\frac{|y|(|x|+|y|)}{|x|+|y|}=|y|<\delta=\epsilon$$

Luego tomando $\delta=\epsilon$ se tiene $|\dfrac{xy}{|x|+|y|}|<\epsilon$

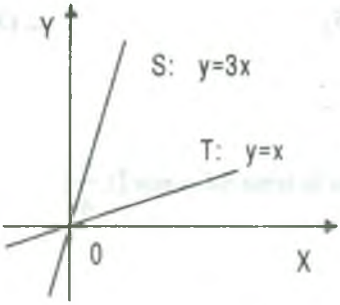
Siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, con lo que se demuestra que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

II. Cálculo de Límites

1) Calcular el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, si existe

Solución

Para ver si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, tomaremos dos camino, si estos límites son iguales, intentamos demostrar y en el caso de ser diferentes diremos que no existe el límite.



$T: \vec{\alpha}(t) = (t, t)$ de donde $\vec{\alpha}(t_0) = (t_0, t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

$S: \vec{\beta}(t) = (t, 3t)$ de donde $\vec{\beta}(t_0) = (t_0, 3t_0) = (0,0) \Rightarrow t_0 = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{10t^2} = \frac{3}{10} \text{ como:}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

2) Hallar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si existe, donde $f(x,y) = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

Solución

A la función f(x,y) expresaremos en la forma

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right| \le |y|\left|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \quad \text{... (1)}$$

Además $x^4 = (x^2)^2 \le (x^2+y^2)$; $y^4 = (y^2)^2 \le (x^2+y^2)^2$

$$x^4+4x^2y^2+y^4 \le (x^2+y^2)^2 + 4(x^2+y^2)(x^2+y^2) + (x^2+y^2) = 6(x^2+y^2)^2 \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene

$$|f(x,y)| \le |y| \frac{(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \le 6|y| \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 6|y|$$

por lo tanto $0 \le |f(x,y)| \le 6|y|$, de donde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 6|y|$

$0 \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le 0$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$, de donde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y+4x^2y+y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

3) Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$ no existe, para la función $f(x,y) = \ln(\frac{a-x}{a-y})$ donde x < a, y < a.

Solución

Para demostrar que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$, es suficiente tomar dos líneas que pasan por el punto (a,a) y que los límites sean diferentes.

$L_1 = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = 2x-a\}$ y $L_2 = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = 4x-3a\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ L_1}} f(x,y) = \lim_{x\to a} \ln(\frac{a-x}{a-2x+a}) = \lim_{x\to a} \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ L_2}} f(x,y) = \lim_{x\to a} \ln(\frac{a-x}{a-4x+3a}) = \lim_{x\to a} \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ L_1}} f(x,y) \ne \lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ L_2}} f(x,y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$$

4) Sea $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\frac{1}{x} & , x \ne 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Determinar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y verificar dicho límite, mediante la definición.

Solución

Observamos que la función está definida en todo R^2. Luego tomaremos dos caminos.

$S = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x = 0\}$ y $T = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = x\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in T}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$$

por lo tanto intentamos demostrar que el límite existe y vale cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \iff \forall \in>0, \exists\delta>0 \,/\, 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

$$|f(x,y)-0|=|xy\operatorname{sen}\frac{1}{x}|=|x||y||\operatorname{sen}\frac{1}{x}|\le|x||y|<\delta^2=\varepsilon$$

Luego tomamos $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ y así se tiene que $|xy\operatorname{sen}\frac{1}{x}|<\varepsilon$ siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, lo cual demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

5) Comprobar que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$

Solución

Tomaremos dos caminos que pasen por (0,0)

$S=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2 \,/\, y=0\}$ y $T=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2 \,/\, x=y^2-y\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{(y^2-y)[(4y^2-3)(y^2-y)^2]}{(y^2-y)^2-y^2}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)(1+6y-3y^2)}{y-2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0-3x^3}{x^2-0}=\lim_{x\to 0} -3x=0$$

como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \dfrac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}\neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \dfrac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$, entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$

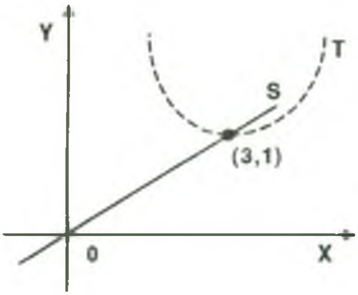
6) Calcular si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y)$ donde $f(x,y)=\dfrac{x^2y-6xy-x^2+6x-9y-9}{(x-3)^4+(y-1)^2}$

Solución

A la función f(x,y) expresaremos en forma factorizada.

$$f(x,y)=\frac{x^2y-6xy-x^2+6x+9y-9}{(x-3)^4+(y-1)^2}=\frac{x^2(y-1)-6x(y-1)+9(y-1)}{(x-3)^4+(y-1)^2}$$

$$f(x,y)=\frac{(x^2-6x+9)(y-1)}{(x-3)^4+(y-1)^2}=\frac{(x-3)^2(y-1)}{(x-3)^4+(y-1)^2}$$



Tomemos dos caminos que pasen por el punto (3,1)

$S=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,y=\frac{x}{3}\}$

$T=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,y=1+(x-3)^2\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,1)\\ S}} f(x,y)=\lim_{x\to3} f(x,\frac{x}{3})=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2(\frac{x}{3}-1)}{(x-3)^4+(\frac{x}{3}-1)^2}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)^3}{9(x-3)^4+(x-3)^2}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)}{9(x-3)^2+1}=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,1)\\ T}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(3,1)\\ T}} f(x,1+2(x-3)^2)=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)^4}{(x-3)^4+4(x-3)^4}=\frac{2}{5}$$

Luego como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(3,1)\\ T}} f(x,y)\neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(3,1)\\ S}} f(x,y)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y)$

7) Comprobar que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$.

Solución

Tomaremos dos caminos que pasen por (0,0)

$S=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,y=0\}$ y $T=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,x=y^2-y\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2-y)(4y^2-3)(y^2-y)^2 3(x-3)}{(y^2-y)^2-y^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y-1)(1+6y-3y^2)}{y-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0-3x^3}{x^2-0} = \lim_{x\to 0} -3x = 0$$

como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$, entonces $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2-3x^3}{x^2-y^2}$

III. Ejercicios Sobre Continuidad

1) Analizar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & si\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Solución

a) Si $(x_0, y_0) \neq (0,0) \Rightarrow f(x_0, y_0) = \dfrac{e^{-(x_0^2+y_0^2)}}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0, y_0)$ de donde

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ entonces f(x,y) es continua en $R^2 - \{(0,0)\}$

b) Veamos si f es continua en (0,0). Sí (x,y) → (0,0) $\Rightarrow x^2 + y^2 = 0^+$.

Sea $u = x^2 + y^2 \Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0^+} \frac{e^{-u}}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{ue^u} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Luego $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0 \quad \therefore$ f no es continua en (0,0)

2) Analizar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{y}}{|x|+|y|}, & si\ (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0\quad , & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución

Para que la función esté bien definida, $y \geq 0$

a) f no es continua en $S = \{(x, y) \in R^2 / Y < 0\}$

puesto que sí, $y < 0 \Rightarrow \nexists\sqrt{y}$ y por lo tanto $\nexists$ f(x, y)

b) f es continua en $T=\{(x,y)\in R^2 / y>0\}$ puesto que si $(x_0,y_0) \in T$ entonces

$$f(x_0,y_0)=\frac{x_0\sqrt{y_0}}{|x_0|+|y_0|} \text{ y por lo tanto } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

c) Ahora veremos si f es continua en (0, 0).

Sea $C=\{(x,y)\in R^2 / y=x, y\geq 0\}$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sqrt{y}}{|x|+|y|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{2|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{2}=0,$$ ahora demostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall \in>0, \exists\delta>0/0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\in$$

$$0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$$

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x\sqrt{y}}{|x|+|y|}\right|=\frac{|x||\sqrt{y}|}{|x|+|y|}\leq\frac{|x||\sqrt{y}|}{|x|}=|\sqrt{y}|=\sqrt{|y|}=\in$$ de donde

$$|y|<\varepsilon^2 \Rightarrow \exists\delta=\varepsilon^2$$

$\therefore$ f es continua en (0, 0) puesto que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, por lo tanto f es continua en $\{(x,y)\in R^2 / y\geq 0\}$

3) Analizar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2}, & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución

a) Para $(x_0,y_0)\neq(0,0) \Rightarrow f(x_0,y_0)=\dfrac{x_0\cos\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x_0}{x_0^2+y_0^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x_0\cos\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{\operatorname{sen}^2 x_0}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0)$$

Luego, como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, entonces f es continua en todo $R^2-\{(0,0)\}$, ahora analizaremos si es continua en (0, 0).

Sea S = {(x, y) ∈ R^2 / y = 0 }

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos|x|}{|x|}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

$=\begin{cases} 0 & si\ x>0 \\ -2 & si\ x<0 \end{cases}$ por lo tanto $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, luego la función f(x,y) es discontinua en (0, 0)

4) Si $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Determinar si f es continua en (0,0)

Solución

La función f(x, y) es continua en (0, 0) si y solo si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, por lo tanto, calcularemos el límite de la función f(x, y)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(0,0) = 0$, para que sea continua, para esto tomaremos dos caminos diferentes.

Sea $S = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in R^2 / y = 5x\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x)}{\sqrt{x^2+4x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{\sqrt{x^2+25x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sqrt{26}} = 0$$

ahora para decir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; debemos demostrarlo, es decir:

$\forall \in > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \in$

Además $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Leftrightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |y| < \varepsilon$$

Luego tomamos $\delta = \in$, tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow f(x,y)$ es continua en (0,0).

5) Dada la función f definida por: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & si\ (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Determinar el conjunto de puntos donde f es continua.

Solución

Si $(x_0,y_0)\neq(0,0)\Rightarrow f(x_0,y_0)=\dfrac{4x_0y_0^4}{(x_0^2+y_0^2)^2}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x_0y_0^{\,4}}{(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})^2}=f(x_0,y_0)$$

Luego como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, la función f(x,y) es continua $\forall$ (x,y)≠(0,0).

Ahora veremos si es continua en (0,0), es decir que veremos que si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ para esto tomaremos dos caminos que pasen por (0,0).

Sea $S=\{(x,y)\in R^2\,/\,y=x\}$ y $T=\{(x,y)\in R^2\,/\,y=0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ s}} =\lim_{x\to 0}\frac{4x^5}{x^4}=\lim_{x\to 0}4x=0 \quad y \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ T}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{4x(0)}{(x^2+0)^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

Luego demostraremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$\forall \in>0,\exists\delta>0\,/\,0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \|f(x,y)-0\|<\varepsilon$

Además $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Leftrightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$.

$$|f(x,y)-0|=|\frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}|=\frac{4|x||y^4|}{(x^2+y^2)^2}\leq\frac{4|x||x^2+y^2|^2}{(x^2+y^2)^2}=4|x|<\varepsilon$$

por lo tanto $|x|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, luego tomamos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ de tal manera que $|\dfrac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}-0|<\varepsilon$, siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ lo cual demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ y por lo tanto f(x,y) es continua en todo R^2.

6) Dada la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$. Determinar si f es continua en (0,0).

Solución

Para que f(x,y) sea continua en (0,0) debe cumplir:

i) $(0,0)\in D_f$, o que esté definida en (0,0) es decir f(0,0) = 0, existe.

ii) Que $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y para esto primeros tomaremos dos caminos $S=\{(x,y)\in R^2 / x=0\}$ y $T=\{(x,y)\in R^2 / x=y^3\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^6}=\lim_{y\to 0} 0=0 \quad y \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^6}{y^6+y^6}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} f(x,y)\neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ T}} f(x,y)$

entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, luego f(x,y) no es continua en (0,0).

7) Dada la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{y^2+x^4} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$. Determinar si f es continua en (0,0).

Solución

Para que f sea continua en (0,0) debe cumplir:

i) Que f(0,0) = 0 existe, es decir $(0,0)\in D_f$

ii) $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; para esto tomamos dos caminos que pasan por (0,0) tales como:

$$S=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=0\} \quad y \quad T=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=x^2\}$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(0)}{0+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

por lo tanto como $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y)\neq \lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y)$

entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, luego f(x,y) no es continua en (0,0).

8) Dada la función f definida por: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & , \; si \;\; y\neq x\\ x+y & , \; si \;\; y=x\end{cases}$. Analizar la continuidad en todo su dominio.

Solución

La función dada f(x,y) tiene su dominio en todo R^2 analizaremos la continuidad en la forma siguiente:

i) Si $y\neq x \Rightarrow f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$ analizando la continuidad en la región $y\neq x$ se tiene si (x_0,y_0) es un punto de la región $y\neq x$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=x_0+y_0=f(x_0,y_0)$ entonces f(x,y) es continua en la región $y\neq x$.

ii) Ahora analizaremos la continuidad en todo los puntos sobre la recta y = x, sea (x_0,y_0) puntos sobre la recta y = x.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = \lim_{x\to x_0} x+x = 2x_0.$$

Luego para $x_0 \neq 0$, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, por lo tanto f(x,y) no es continua en

y = x, x ≠ 0 para x = 0, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, lo cual demostraremos,

es decir, ∀ ε > 0, ∃ δ>0, tal que, $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-0| < \varepsilon$

además $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$

$|f(x,y)-0| = |x+y| \leq |x|+|y| < \delta+\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego tomamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ tal que, $|f(x,y)-0| < \varepsilon$, siempre que $0 < |(x,y)-(0,0)| < \delta$, lo cual demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, entonces la función f es continua en (0,0), por lo tanto diremos que la función es continua en todos los puntos en que y = x y en el origen.

$\therefore$ f(x,y) es continua en todo R^2

9) Dada la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & , \ si\ 0 < x^2+y^2 < 1 \\ 1 & , \ si\ x^2+y^2 = 1 \\ x^2+y^2 & , \ si\ x^2+y^2 > 1 \ \acute{o}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad de la función f sobre su dominio.

Solución

De acuerdo a la definición de la función su dominio es todo (x,y) de R^2.

Analizando para la región $0 < x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$ es función racional, entonces es continua en la región $0 < x^2 + y^2 < 1$. Ahora analizaremos en la región $x^2 + y^2 > 1$, es decir la parte exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y como la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ es polinómica, es continua en todo su dominio, en particular en la región $x^2 + y^2 > 1$.

Ahora analizaremos la continuidad en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, es decir, veremos si existe el límite en cualquier punto (x_0, y_0) sobre la circunferencia, o sea $x_0^2 + y_0^2 = 1$, para esto consideremos dos caminos $S = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 > 1\}$, si nos acercamos al punto (x_0, y_0) a través del conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 > 1\}$ y sea $T = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ y si nos acercamos al punto (x_0, y_0) a través de este conjunto $T = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(x_0,y_0)} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = 1 \qquad \text{... (1)}$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(x_0,y_0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \frac{2x_0^2y_0^2}{x_0^2+y_0^4} = \frac{2x_0(1-x_0^2)}{x_0^2+(1-x_0^2)^2} \qquad \text{... (2)}$$

y por lo tanto de (1) y (2) se concluye que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, luego la función f(x,y) no es continua sobre la circunferencia. Analizando la continuidad en (0,0), se tiene:

i) f(0,0) = 0, la función está bien definida.

ii) Ahora veremos si $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, para esto tomaremos dos caminos diferentes que pasan por (0,0) sea, $S = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x = y^2\}$ entonces:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2y^4}{y^4+y^4}=1$$ y sea $T=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=0\}$, entonces

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x(0)}{x^2+0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0.$$ Por lo tanto como

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y)\neq \lim_{(x,y)\xrightarrow[T]{}(0,0)} f(x,y)$$

entonces $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, luego la función f(x,y) no es continua en (0,0), por lo tanto la función es discontinua en la circunferencia $x^2+y^2=1$ y en el origen (0,0).

10) Dada la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{yx^3}{x^4+y^2} & , \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$. Determinar si f es continua en (0,0)

Solución

La función f(x,y) es continua en (0,0) si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, para esto consideremos $S=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=mx\}$ una familia de rectas que pasan por el punto (0,0), entonces:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\xrightarrow[S]{}(0,0)}\left(x^2+\frac{yx^3}{x^4+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{mx^4}{x^4+m^2x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{mx^2}{x^2+m^2}\right)=0$$

para decir que $\exists \lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)=0$, debemos demostrar dicho limite, es decir:

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0 \,/\, 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

además $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$

$$|f(x,y)-0|=|x^2+\frac{yx^3}{x^4+y^2}|\le|x|^2+\frac{|x|^2|y||x|}{x^4+y^2}\le|x|^2+\frac{|x|^2|y||x|}{x^4+y^2} \quad \text{... (1)}$$

además se tiene $(x^2-|y|)^2\ge 0 \Rightarrow x^4+y^2\ge 2|y||x|^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2|y||x|^2}\ge\frac{1}{x^4+y^2} \text{ es decir } \frac{1}{x^4+y^2}\le\frac{1}{2|x|^2|y|} \quad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$|f(x,y)-0|\le|x|^2+\frac{|x|^2|y||x^2|}{x^4+y^2}\le|x|^2+\frac{|x|^2}{2}=\frac{3}{2}|x|^2<\varepsilon$$

entonces $|x|<\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}}=\delta$. Luego tomamos $\delta=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}}$ tal que:

$$|f(x,y)-0|\le\frac{3}{2}|x|^2<\frac{3}{2}.\frac{2}{3}\varepsilon=\varepsilon$$

siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, lo cual demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

La función f(x,y) es continua en (0,0)

11) Analizar la continuidad de la función $f(x,y)=[|x^2-x+y|]$

Solución

$f(x,y)=[\![x^2-x+y]\!]=[|(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{4})|]$, cuando se tiene $(x-\frac{1}{2})^2+y-\frac{1}{4}=k$, k $\in$ z, la función no es continua, para esto tomamos un punto en la parábola $(x-\frac{1}{2})^2+y-\frac{1}{4}=k$ y consideremos una curva C_1 en el interior de la parábola, es decir:

$$(x-\frac{1}{2})^2+y-\frac{1}{4}<k \Rightarrow [|(x-\frac{1}{2})+(y-\frac{1}{4})|]=k-1 \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=k-1 \qquad \text{... (1)}$$

en forma similar tomaremos la curva C_2 en el exterior de la parábola, es decir en

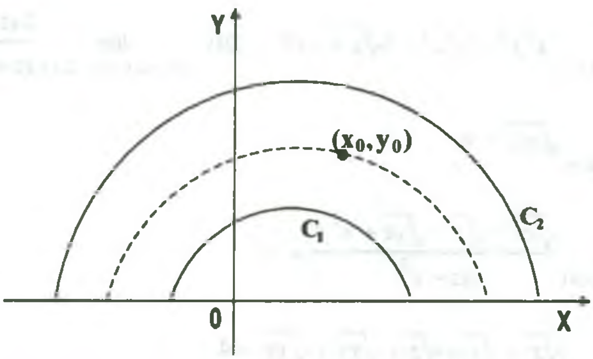
$$(x-\frac{1}{2})^2+y-\frac{1}{4}>k \Rightarrow [|(x-\frac{1}{2})^2+y-\frac{1}{4}|]=k$$

por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=k$ ... (2)

de (1) y (2) se tiene que: $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(x_0,y_0)} f(x,y)\neq \lim\limits_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(x_0,y_0)} f(x,y)$ entonces

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ por lo tanto la función f(x,y) es continua en la región

$R^2-\{(x,y)\in R^2 / x^2-x+y=k\}$, gráficamente sería:



3.18 Ejercicios Propuestos.

I. Mediante la definición de límite demostrar que:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} x^2+2x-y=4$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} 3x^2-4y^2=-4$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2=2$ 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} x^2-y^2+2x-4y=10$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} x^2+y^2-4x+y=4$ 6) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 2x^2-y^2=-1$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} x^2+2x-y=4$ 8) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2-2x+2y=2$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} e^{\ln x^2}-e^{\ln y^2}+4x-8y=3$ 10) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \sqrt{y^2-x^2}=\sqrt{5}$

11) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$ 12) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,1)} \sqrt{-x}-\sqrt{yz}=0$

13) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{xz}-\sqrt{y}+\sqrt{x}=2$ 14) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$

15) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} x^2\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6$ 16) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \sqrt{-x\sqrt{-y}}=1$

17) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt{xy}+5y^2}{x+2y}=2$ 18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}=0$

19) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-3,1,4)} x^2y^2-y^2z^2-5\sqrt{z}=-17$ 20) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,-2,1)} \dfrac{2xz-y}{yz+x^2}=-\dfrac{4}{11}$

21) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{xyz}=6$

22) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,4)} \dfrac{\sqrt{xy}-\sqrt{y}-\sqrt{yz}+x^2y}{xz-y^2}=-1$

23) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,4,9)} \sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}=4$

24) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-4,-1,1)} x^2+2\sqrt{xy}+z^2+2x=13$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,6,3)} 2x^2y+z^2+\sqrt{z+1}+\sqrt{y-2}=25$

26) $\lim\limits_{(x,y,z,t)\to(1,1,1,1)} (xyzt)^{1/3}-(yzt)^{1/3}+t^{1/3}=1$

27) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,1,1)} \dfrac{x^2y^2z^2-9yz^3-\sqrt{y}+1}{yz+x^2}=0$

28) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-2,4)} \dfrac{y^2\sqrt{x}+zx^2-y\sqrt{z}}{3z+4y}=3$

29) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\sqrt{3},2,\sqrt{2})} xyz-2xz-\sqrt{2}xy-\sqrt{3}yz+2\sqrt{2}x-\sqrt{6}y+2\sqrt{3}z=-2\sqrt{6}$

30) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy=1$

II. Calcular los siguientes límites si existen:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ **Rpta.** 2

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ **Rpta.** 0

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{x}$ **Rpta.** 2

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ **Rpta.** 0

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos xy-\cos(\operatorname{sen} 2xy)}{x^2y^2}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{2}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ **Rpta.** 1

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\sqrt{xy-2}+x^3y^3-8}{\sqrt{x^2y^2-4}}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^3y+\operatorname{sen}(\frac{\pi\, xy}{2})}{\sqrt{y^2x-\cos 2\pi\, x}}$ **Rpta.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\text{sen}(\frac{1}{xy})$ **Rpta.** 0

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ **Rpta.** $\nexists$

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$ **Rpta.** 0

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,k)} (1+\frac{y}{x})^x$ **Rpta.** e^k

13) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **Rpta.** $\nexists$

14) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ **Rpta.** 0

15) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ **Rpta.** $\nexists$

16) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\text{sen}\,4xy)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3xy)}$ **Rpta.** $\frac{8}{9}$

17) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\text{senh}(x+y))}{\text{sen}^2(\text{senh}(2x+2y))}$ **Rpta.** $\frac{1}{8}$

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\text{sen}(x+y))-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ **Rpta.** 0

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+\ln(1+xy)}{1+x+y}$ **Rpta.** $\frac{2}{3}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\text{arcsen}(xy-2)}{\text{arctg}(3xy-6)}$ **Rpta.** $\frac{1}{3}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\,\text{sen}\dfrac{1}{x}\,\text{sen}\dfrac{1}{y}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{xy+y}$

25) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y+z}{x+z}$

26) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{xy}\left(\dfrac{1}{1-xy}-\dfrac{1}{1+xy+x^2y^2}\right)$

27) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2z^2+2}{x^2+y^2+z^2}$

28) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$

29) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \dfrac{x+y-z}{5x^2+y^2-z^2}$

30) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)} x^2\,\text{sen}\dfrac{y}{x}$

31) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}+z^2)+x^3y^3z}{\ln(1+xyz)}$

32) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2-1}+\dfrac{x^2+xy^2}{x^2+y^3}\right)$

33) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y^2)\,\text{sen}\dfrac{x}{y^2}.\cos\dfrac{y}{x^2}$

34) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{2}$

35) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\text{sen}^3(xy-z^2)}{(x^2y^2-z^4)^3}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{8}$

36) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y^2}{x^3+y^3}$

37) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

III. Problemas sobre continuidad

1) Determinar si f es continua en (0,0), donde:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y^2} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Rpta. Discontinuidad en (0,0)

2) Determinar si la función f es continua ó no, donde:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{|x|+|y|} & , \ para \ |x|+|y|\neq 0\\ 0 & , \ para \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Rpta. Continua en todo R^2

3) Averiguar si es continua la función: $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & , \ si \ x^2+y^2\leq 1\\ 0 & , \ si \ x^2+y^2>1\end{cases}$

Rpta. Es continua en todo R^2

4) Determinar si f es continua en (0,0), donde

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) Determinar si f es continua en (0,0), donde $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y}{|x|+|y|} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

6) Determinar si f es continua en (0,0), donde $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

7) Determinar si la función f es continua en todo R^2 donde:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} & , \; para \;\; (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & , \; para \;\; x=0 \;\vee\; y=0\end{cases}$$

8) Analizar la continuidad de la función

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & , \; si \;\; (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & , \; si \;\; (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

9) Sea: $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3-3\operatorname{sen}(\frac{x^2+y^2+z^2+\pi}{2})}{(x^2+y^2+z^2)^2} & , \; (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \dfrac{3}{8} & , \; (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

Analizar la continuidad de f en el punto (0,0).

10) Estudiar la continuidad de la función en todo R^2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

11) Analizar la continuidad de la función f en (0,0) donde:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+y^2} & , \; si \;\; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \; si \;\; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

12) Analizar la continuidad de la función f en (0,0) donde:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

13) Determinar la región de discontinuidad, si: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & , si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

14) Estudiar la continuidad de la función $f(x,y)=\begin{cases} 2-\dfrac{1}{x^2+y^2} & , si\ 0<x^2+y^2\leq 1 \\ [\![x^2+y^2]\!] & , si\ 1<x^2+y^2<3 \\ \sqrt{x^2+y^2-1} & , si\ 5\leq x^2+y^2 \end{cases}$

15) Dada la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & si\ \ 0<x^2+y^2<1 \\ 1 & , si\ \ x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2, & si\ \ x^2+y^2>1\ \ ó\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

16) Determinar la región de continuidad de la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

17) Determinar la región de continuidad de la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(y-x^2)}{y-x^2} & ,\ si\ \ y\neq x^2\\ 1 & ,\ si\ \ y=x^2\end{cases}$$

18) Determinar los puntos donde la función dada es discontinuidad y la región donde la función es continua.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(\ln 3^{x-y})}{\ln 3^{|x+y|}} & ,\ si\ \ |x+y|\neq 0\\ -1 & ,\ si\ \ |x+y|=0\end{cases}$$

19) Si: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}(3x-3y)}{|3x|+|3y|} & ,\quad (x,y)\neq(0,0)\\ -1 & ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Analizar si la función f es continua ó no en el punto (0,0).

20) Analizar la continuidad de la función f(x,y) en el punto (0,0) donde:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y^2}{x^3+y^3}\operatorname{sen}\pi\dfrac{(x^2-xy+1)}{2} & ,\ si\ \ x\neq -y\\ 0 & ,\ si\ \ x=-y\end{cases}$$

21) Analizar la continuidad de la función f(x,y) si:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x^3\cos y^3+\cos x^3.\operatorname{sen}y^3}{x^2+y^2} & ,\ si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

22) Estudiar la continuidad de la función en todo R^2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{|x^3|+|y|^3} & ,\ si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

23) Sea la función: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Analizar la continuidad de f en el punto (0,0)

24) Sea: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2(y+1)}{x^3(1-y^3)} & , si\ x\neq 0\ ,\ y\ ,\ y+x^2\leq 0\\ \dfrac{(y+1)x}{y^2+y+1} & , si\ 0<y+x^2\ ,\ \acute{o}\ x=0\end{cases}$

¿En qué puntos sobre el eje Y, es f continua?

¿En qué puntos sobre la parábola $y+x^2=0$, f continua?

25) Es la función: $f(x,y,z,u)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2+u^2} & , si\ (x,y,z,u)\neq(0,0,0,0)\\ 0 & , si\ (x,y,z,u)=(0,0,0,0)\end{cases}$

Continua en el origen?. Justifique su respuesta.

26) Determinar los puntos en los que la función es continua

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{|x|+|y|} & , si\ |x|+|y|\neq 0\\ 0 & , si\ x=y=0\end{cases}$$

27) Analizar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-|y^2|)}{|x^2+y^2|}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}.\operatorname{sen}\dfrac{1}{y^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

28) Analizar la continuidad de la función g(x,y) en (0,0) donde:

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{2xy})^2}{x^3+y^3} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \operatorname{tg}(-\pi) & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

29) Estudiar la continuidad de la función $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2}+\cos^2\dfrac{\pi y}{2}}$

30) Analizar si la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Es continua en (0,0) ¿es continua en todo R^2?

31) Demostrar que la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Es continua en el punto (0,0).

32) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(\operatorname{sen}4xy)}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}3xy)} & si \quad \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}3xy)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

¿f(x,y) es continua en (0,0)? Justifique su respuesta.

3.20 Derivadas Parciales.

Para las funciones de una variable $f\colon I\subseteq R\longrightarrow R$, definidas en el intervalo abierto I de R, se ha definido la derivada de f en $x_0\in I$, denotado por $f'(x_0)$ como el valor del límite

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

cuando este límite existe.

Si $f'(x_0)$ existe, su valor nos da la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función y = f(x) en el punto $(x_0, f(x_0))$ por lo tanto las funciones importantes a estudiar son las funciones diferenciables por darnos información a partir de su derivada, el simple hecho que $f'(x_0)$ existe nos habla del comportamiento suave de la gráfica de la función alrededor del punto $(x_0, f(x_0))$, el signo de $f'(x_0)$ nos habla del crecimiento y/o decrecimiento de las funciones alrededor de un punto etc. por lo tanto el concepto de diferenciabilidad también es importante para funciones de varias variables.

Luego a continuación trataremos de las derivadas parciales.

3.21 Definición.

Consideremos la función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, de dos variables definida en un conjunto abierto $D \subset R^2$, entonces las primeras derivadas parciales de f se define:

i) La derivada parcial de f con respecto a x, es la función denotada por $D_1 f$, tal que su valor en el punto $(x,y) \in D$ está dado por:

$$D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

siempre y cuando exista el límite.

ii) La derivada parcial de f con respecto a y, es la función denotada por $D_2 f$, tal que su valor en el punto $(x,y) \in D$ está dado por:

$$D_2 f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando exista el límite

Ejemplo.- Calcular $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ si $f(x,y) = 2x^2 y + xy^2 + x - 5y$

Solución

$$D_1 f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(x+\Delta x)^2 y + (x+\Delta x)y^2 + (x+\Delta x) - 5y) - (2x^2 y + xy^2 + x - 5y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4xy.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + y^2 \Delta x + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4xy + 2\Delta x + y^2 + 1 = 4xy + y^2 + 1$$

$$\therefore \quad D_1 f(x,y) = 4xy + y^2 + 1$$

En forma similar que $D_2 f(x,y) = 2x^2 + 2xy - 5$

Observación.- La definición de derivada parcial dada indica que si z = f(x,y), entonces para calcular $D_1 f(x,y)$ consideramos que y es constante y derivamos con respecto a x, en forma similar para calcular $D_2 f(x,y)$ consideramos que x es constante y derivamos con respecto a y.

Ejemplo.- Calcular $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ para $f(x,y) = 5x - 3x^2 y^2 + 3x^3 y$

<u>Solución</u>

Para calcular $D_1 f(x,y)$ consideramos a y como constante es decir:

$$D_1 f(x,y) = 5 - 6xy^2 + 9x^2 y$$

para calcular $D_2 f(x,y)$ consideramos a **x** como constante es decir:

$$D_2 f(x,y) = -6x^2 y + 3x^3.$$

Observación.- Al proceso de encontrar una derivada parcial se llama diferenciación parcial.

3.22 Notación para las Primeras Derivadas Parciales.

Si z = f(x,y) es una función de dos variables, entonces las derivadas parciales $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$, se denotan.

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x$$, derivada parcial de f con respecto a x.

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y$$, derivada parcial de f con respecto a y.

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto p(a,b) se denotan por:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P(a,b)} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{P(a,b)} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P(a,b)} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{P(a,b)} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = f_y(a,b)$$

Ejemplo.- Hallar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ y evaluar en el punto p(1, ln 2) para la función $f(x,y) = xe^{x^2 y}$

Solución

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2 y} + 2x^2 y e^{x^2 y} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 e^{x^2 y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{P(1,\ln 2)} = e^{\ln 2} + 2\ln 2 e^{\ln 2} = 2 + 4\ln 2 \\ \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{P(1,\ln 2)} = e^{\ln 2} = 2 \end{cases}$$

3.23 Derivadas Parciales de una Función de Tres o más Variables.

El concepto de derivada parcial para funciones de dos variables puede extenderse para funciones de tres o más variables en una forma natural.

Si w = f(x,y,z) es una función de tres variables, entonces se tiene tres derivadas parciales, los cuales se obtienen considerando cada vez dos de las variables constantes, es decir:

Para definir la derivada parcial de w con respecto a x, consideramos que y, z son constantes,

o sea. $$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

Para definir la derivada parcial de w con respecto a y, consideramos que x, z son constantes,

o sea. $$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

Para definir la derivada parcial de w con respecto a z, consideramos que x e y son constantes,

o sea. $$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

En general si $f: D \subseteq R^n \longrightarrow R$ es una función definida en el conjunto abierto $D \subseteq R^n$, entonces hay n derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, con respecto a la primera, segunda, tercera,..., n-ésima variable y denotaremos por:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = f_{x_i}(\bar{x})$$

donde i = 1,2,3,...,n

Para hallar las derivadas parciales con respecto a una de las variables consideramos las otras como constante y derivamos con respecto a la variable indicada.

Ejemplo.- Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ donde $w = xz^2 + yx^2 + zy^2$

Solución

$$w = xz^2 + yx^2 + zy^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = z^2 + 2xy \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2xz + y^2$$

Ejemplo.- Hallar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ donde $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + xy)$

Solución

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + xy) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + y^2 + xy} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y + x}{x^2 + y^2 + xy}$$

Ejemplo.- Hallar $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$ si existen, donde:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

aplicando la definición de derivada.

$$D_1 f(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x.(0)}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0.\Delta y}{0 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Ejemplo.- Hallar $D_1f(0,y)$ y $D_2f(x,0)$ si existen, donde:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Solución

a) Si $y \neq 0$ entonces, por definición se tiene.

$$D_1f(0,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta xy.(\Delta x^2-y^2)}{\Delta x^2+y^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x^2-y^2)}{\Delta x^2+y^2}=\frac{y(0-y^2)}{0+y^2}=-y$$

Si $y = 0$, $D_1f(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$ como $D_1f(0,y)=-y$ si $y\neq 0$ y $D_1f(0,0)=0$ entonces se tiene $D_1f(0,y)=-y$ para todo y.

b) Si $x \neq 0$, entonces por definición se tiene:

$$D_2f(x,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y.x.(x^2-\Delta y^2)}{x^2+\Delta y^2}-\dfrac{0x(x^2-0)}{x^2+0}}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y.x(x^2-\Delta y^2)}{\Delta y(x^2+\Delta y^2)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(x^2-\Delta y^2)}{x^2+\Delta y^2}=\frac{x(x^2-0)}{x^2+0}=x$$

Sí $x = 0$, $D_2f(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ como $D_2f(x,0)=x$ para $x\neq 0$ y $D_2f(0,0)=0$ entonces: $D_2f(x,0)=x$ para todo x.

3.24 Interpretación Geométrica de las Derivadas parciales de una Función de Dos Variables.

Sea $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, una función definida en un conjunto abierto $D\subset R^2$, cuya gráfica es la superficie $G_f = \{(x,y,f(x,y))\in R^3 \,/\, z=f(x,y) \;,\; \forall(x,y)\in D\}\subset R^3$.

Si $(x_0,y_0)\in D$, entonces la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0,y_0) por definición es:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

en donde $y=y_0$ se mantiene como una constante, pero $y=y_0$ es un plano paralelo al plano coordenada XZ que pasa por el punto $Q(x_0,y_0,0)\in D$ y que al interceptar a la superficie z = f(x,y) se obtiene una curva $\vec{\alpha}$ que pasa por el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in G_f$ ahora calculando la pendiente de la recta secante L_s que pasa por P_0 y P en el plano $y=y_0$, es decir:

$$mL_s = \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

de donde la pendiente de la recta tangente L_t es:

$$mL_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

Luego $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente L_t a la curva $\vec{\alpha}$ en el punto $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Entonces la ecuación de la recta tangente L_t será:

$$L_t:\; z-z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) \quad \wedge \quad y=y_0$$

Expresado en forma simétrica se tiene: $L_t: \dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{z-z_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} \quad \wedge \quad y = y_0$

de donde el vector dirección de L_t es:

$\vec{a}\, L_t = (1,0,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x})$, En la misma forma, para la derivada parcial de f(x,y) con respecto a y en el punto (x_0,y_0).

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = mL_t'$$

Luego $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ es la pendiente de la recta tangente L_t' a la curva $\vec{\beta}$ en el punto $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, en la definición $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ a $x = x_0$ se mantiene como una constante, pero $x = x_0$ es un plano paralelo al plano coordenado YZ, Lugo la ecuación de la recta tangente L_t' será: $L_t' = z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0) \quad \wedge \quad x = x_0$

Expresado en forma simétrica se tiene: $L_t': \dfrac{y-y_0}{1} = \dfrac{z-z_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} \quad \wedge \quad x = x_0$

de donde su vector dirección de L_t' es: $\vec{a}\, L_t' = (0,1,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(3x-3y)}{|3x|+|3y|} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.25 Plano Tangente.

Consideremos la ecuación de una superficie z = f(x,y), el plano tangente a la superficie en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es determinado por las rectas tangentes L_t y L_t', cuyo vector normal es:

$$\vec{N}=\vec{a}_{L'_t}\times\vec{a}_{L_t}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\ 1 & 0 & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\end{vmatrix}=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},-1)$$

Luego la ecuación del plano tangente a la superficie z = f(x,y) en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es dado por: $P_T:\ \vec{N}.((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))=0$

$$P_T:\ (\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},-1).(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

$$P_T:\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

Ejemplo.- Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=3x^2+y^2+2$ en el punto (-1,2,9).

Solución

Calculando el vector normal $\vec{N}=(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P,-1)$

$$z=3x^2+y^2+2\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6x\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P=-6\\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P=4\end{cases}\Rightarrow\ \vec{N}=(-6,4,-1)$$

$P_T:\ \vec{N}.((x,y,z)-(-1,2,9))=0$, ecuación del plano.

$P_T:\ (-6,4,-1).(x+1,\ y-2,\ z-9)=0$, de donde $\therefore\ P_T:\ 6x-4y+z+5=0$

Ejemplo.- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ en el punto $P_0(a,b,c)$ donde $c=\sqrt{1-a^2-b^2}$.

Solución

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}=-\dfrac{a}{c} \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=\dfrac{-b}{\sqrt{1-a^2-b^2}}=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

La ecuación del plano es: $P_T: \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x-a)+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y-b)-(z-c)=0$, de donde

$$P_T:\ -\frac{a}{c}(x-a)-\frac{b}{c}(y-b)-(z-c)=0 \qquad \therefore\ P_T:\ a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$$

Ejemplo.- Encontrar los puntos de la superficie z = xy(1 - x - y) donde el punto tangente es paralelo al plano coordenado XY.

Solución

Como el plano tangente debe ser paralelo al plano coordenado XY entonces la normal del plano tangente es un múltiplo de (0,0,1) por lo tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1-2x-y)=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x(1-x-2y)=0 \end{cases}$$ resolviendo el sistema se tiene.

los puntos $(0,0),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(1,0)$ y $(0,1)$, por lo tanto se tiene cuatro planos tangentes horizontales a la superficie en los puntos. $(0,0,0)$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{27})$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$

3.26 Ecuación de la Recta Tangente a la intersección de Dos Superficies En un Punto Dado.

Consideremos las ecuaciones de dos superficies z = f(x,y) y z = g(x,y) de tal manera que se cortan en una curva C.

La recta tangente a la intersección de las dos superficies en el punto P_0 de la curva C, es por definición la recta de intersección de los planos tangentes a z = f(x,y) y z = g(x,y) en el punto P_0.

Para hallar la ecuación de la recta tangente a la intersección de dos superficies en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, se determina el vector normal al plano tangente a la superficie z = f(x,y) en el punto P_0.

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\vec{j} + (-1)\vec{k}}$$

y el vector normal al plano tangente a la superficie z = g(x,y) en el punto P_0,

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\vec{j} + (-1)\vec{k}}$$

La recta de intersección de estos planos tangentes es perpendicular a sus normales $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$ y como los vectores $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, entonces el vector $\vec{\mu} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{\mu}$ y $\vec{v}$ de donde $\vec{w} = \vec{\mu} \times \vec{v} = (a,b,c)$ luego la recta de intersección de los planos tangentes es:

$$\boxed{L: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la intersección de las dos superficies $z = x^2 + 2y^2$, $z = 2x^2 - 3y^2 + 1$ en el punto (2,1,6).

Solución

calculando las normales a cada una de las superficies

$$\vec{\mu} = (\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P, -1) = (4,4,-1) \quad y \quad \vec{v} = (\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P, -1) = (8,-6,-1)$$

ahora calculamos el vector dirección de la recta tangente:

$$\vec{a} = \vec{\mu} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & -1 \\ 8 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -2(5,2,28)$$

Luego la ecuación de la recta es: $L_t: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-6}{28}$

3.27 Derivada Parcial de Orden Superior.

En forma similar que las derivadas ordinarias, es posible hallar derivadas parciales de una función de Varias Variables de segundo, tercer ordenes y superiores, siempre y cuando tales derivadas existen.

A las derivadas parciales de orden superior denotamos por el orden de su derivada.

Por ejemplo hay cuatro derivadas parciales de segundo orden de z = f(x,y):

1º Derivar dos veces con respecto a x. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

2º Derivar dos veces con respecto a y. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

3º Derivar primero con respecto a x y a continuación con respecto a y.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

4º Derivar primero con respecto a y y a continuación con respecto a x.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

El **3º** y **4º** caso se conoce como derivadas parciales cruzadas.

Se debe observar que hay dos tipos de notación para las derivadas parciales cruzadas.

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, orden es de derecha a izquierda indica que primero se deriva con respecto a x.

$(f_y)_x = f_{yx}$, orden es de izquierda a derecha indica que primero se deriva con respecto a y.

3.28 Definición.

Si $f: D\subset R^n \longrightarrow R$ es una función definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$, entonces la derivada parcial de f con respecto a la i-ésima componente (i = 1,2,3...n) es:

$$\boxed{D_i f(x_1,x_2,...,x_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,x_2,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)}{\Delta x_i}}$$

Si $D_i f: D\subset R^n \longrightarrow R$, es una función definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$, entonces la derivada parcial de $D_i f$ con respecto a la j-esima variable se le llama derivada parcial de segundo orden y denotaremos por:

$$D_j(D_i f(x_1,x_2,...,x_n)) = D_{ji} f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i y_i}(x_1,x_2,...,x_n)$$

donde i = 1,2,....,n y j = 1,2,....,n.

Si $D_{ji} f: D\subset R^n \longrightarrow R$, es una función definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$, entonces la derivada parcial de $D_{ji} f$ con respecto a la k-ésima componente se le llama derivada parcial de tercer orden de f y denotaremos por:

$$D_k(D_{ji} f(x_1,x_2,...,x_n)) = D_{kji} f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{\partial^3 f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{x_i y_i}(x_1,x_2,...,x_n)$$

donde i = 1,2,....,n , j = 1,2,....,n. y k = 1,2,3....,n

En esta misma forma se puede hallar las derivadas parciales de orden superior si es que existe.

Ejemplo.- Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ sí $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

Solución

$$z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 6xy^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 6y^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y + 4y^3 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x^2 + 12y^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy$$

3.29 Definición.

La función $f: R^2 \longrightarrow R$, se llama función armónica, si verifica la ecuación de Laplace, es decir, sí:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0}$$

Ejemplo.- Probar que la función $f(x,y) = x^3y - xy^3$ es armónica

Solución

$$f(x,y) = x^3y - xy^3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6xy \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -6xy \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

por lo tanto la función f(x,y) es armónica.

3.30 Teorema.- (Igualdad de las Derivadas Parciales Cruzadas).

Si $f: D\subseteq R^2 \longrightarrow R$, es una función continua para lo cual $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ son continuas en la región abierta $D\subset R^2$, entonces para cada (x,y) ∈ D se cumple.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}}$$

Demostración

Sea $h(x,y)=f_y(x,y)$, ∀ (x,y) ∈ D, entonces si y_0 es una constante cualquiera tal que $(x,y_0)\in D$

Tenemos $f(x,y)=f(x,y_0)+f(x,y)-f(x,y_0)=f(x,y_0)+\int_{y_0}^{y} h(x,t)dt$.

Luego derivando con respecto a x se tiene: $f_x(x,y)=f_x(x.y_0)+\int_{y_0}^{y} h_x(x,t)dt$

derivando ahora con respecto a y, para lo cual usamos el teorema fundamental del cálculo, se tiene $f_{xy}(x,y)=h_x(x,y)=f_{yx}(x,y)$ $\therefore\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

Observación.- Una consecuencia de este teorema es que se puede intercambiar el orden de la derivación de una función de varias variables.

Sí por ejemplo: $f: R^2 \longrightarrow R$, es una función que tiene derivadas parciales de orden superior continuas en algún conjunto abierto de R^2, entonces:

$f_{211}=f_{121}=f_{112}$, $f_{2211}=f_{2121}=f_{1221}$ y así sucesivamente.

Observación.- La igualdad $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ puede ser falsa si las derivadas mixtas no son continuas.

Ejemplo.- Sea $z = \ln(x^2 + y^2)$, Hallar las segundas derivadas parciales.

Solución

$$z = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

3.31 Incremento y Diferencial de una Función.

Los incrementos de la función y = f(x) y de la variable x se ha definido por:

$$\Delta x = dx \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

también se ha definido el diferencial de la función y = f(x) por $dy = f'(x)dx$, en forma similar daremos los conceptos de incremento y diferencial para las funciones de dos o más variables.

Definición.- Consideremos la función $f: R^2 \longrightarrow R$ tal que z = f(x,y), entonces el incremento de la función f en el punto $(x_0, y_0) \in D_f$ que denotaremos por $\Delta f(x_0, y_0)$ está expresado por:

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}$$

para el caso de las funciones $f: R^3 \longrightarrow R$ tal que w = f(x,y,z), el incremento de la función f en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$ es:

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0,\ z_0)}$$

donde $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$

3.32 Funciones Diferenciables.

Definición.- La función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si existen $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ de manera que todo vector $(\Delta x, \Delta y)$ tal

Que $(x_0,y_0)+(\Delta x,\Delta y) \in D$ se tiene: $\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

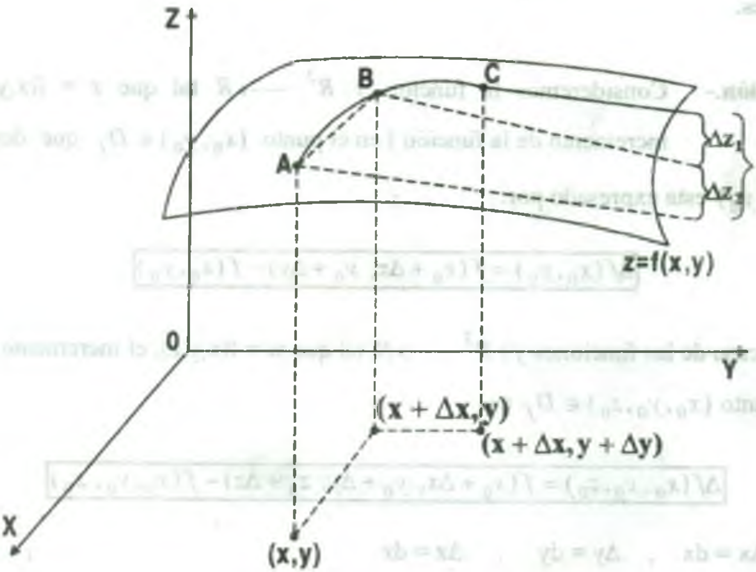
donde ambos ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x,\Delta y) \to (0,0)$ y diremos que f es diferenciable en la región D si es diferenciable en todo punto de $D \subset R^2$.

3.33 Teorema.- (Condición Suficiente para la Diferenciabilidad).

Si f es una función de x e y, con f, f_x, f_y continuas en una región abierta $D \subset R^2$, entonces f es diferenciable en D.

Demostración

Sea S: z= f(x,y) la ecuación de una superficie donde f, f_x, f_y son continuas en (x,y).



Sean A, B y C puntos de la superficie como se muestra en la figura; del gráfico veremos la variación de la función f desde el punto A hasta el punto C que es dado por.

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right] + \left[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\right] = \Delta z_1 + \Delta z_2$$

Entre A y B, y es constante mientras que x varía, por lo tanto por el teorema del valor medio, hay un valor x_1 entre x y $x+\Delta x$ tal que $\Delta z_1 = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = f_x(x_1, y)\Delta x$ **... (1)**

En forma similar, entre B y C se fija x, mientras que y varía, luego un valor y_1, entre y, y, y + Δy tal que $\Delta z_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = f_y(x+\Delta x, y_1)\Delta y$ **... (2)**

Luego de (1) y (2) se tiene: $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = f_x(x_1, y)\Delta x + f_y(x+\Delta x, y_1)\Delta y$

Si definimos ε_1 y ε_2 por $\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x,y)$ y $\varepsilon_2 = f_y(x+\Delta x, y_1) - f_y(x,y)$ se deduce qué: $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = \left[\varepsilon_1 + f_x(x,y)\right]\Delta x + \left[\varepsilon_2 + f_y(x,y)\right]\Delta y$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Entonces por la continuidad de f_x y de f_y y, además, $x \le x_1 \le x+\Delta x$ e $y \le y_1 \le y+\Delta y$, se sigue que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando Δx $\to$0 , Δy $\to$ 0 en consecuencia por definición se tiene que f es diferenciable.

3.34 Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad).

Si $f\colon D \subset R^2 \longrightarrow R$ es una función diferenciable en un punto $P_0(x_0, y_0)$ entonces f es continua en $P_0(x_0, y_0)$.

Demostración

Como f es diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$ entonces

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ambos ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ sin embargo, por definición, sabemos que $\Delta f(x_0, y_0)$ viene dado por:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Luego haciendo $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, obtenemos

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \varepsilon_1 (x - x_0) + \varepsilon_2 (y - y_0)$$

ahora tomando limite cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$

se tiene: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0$, dé donde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0).

Observación.- Si una función $f\colon R^2 \longrightarrow R$ es continua en un punto, esto no implica que f sea diferenciable en este punto.

Ejemplo.- Demostrar que la función $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es continua en (0,0) pero no es diferenciable en (0,0).

Solución

i) f(0,0) = 0 , **ii)** $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{x^3 + y^3} = 0$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

por lo tanto f es continua en (0,0), por otro lado

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

no existe en (0,0), luego f no es diferenciable en (0,0).

3.35 Diferencial Total y Aproximación.

Definición.- Si $f: R^2 \longrightarrow R$ es una función diferenciable en $(x,y) \in R^2$ entonces la diferencial total de f es la función df(x,y) que es expresado por:

$$\boxed{df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy}$$

donde $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

En forma similar para la función $f: R^3 \longrightarrow R$, donde f es diferenciable en $(x,y,z) \in R^3$ entonces la diferencial total es la función df(x,y,z) que es expresado por:

$$\boxed{df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz}$$

ahora haremos una comparación entre $\Delta f(x,y)$ y $df(x,y)$ para esto se tiene:

Si $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ es una función diferenciable en el punto $P_0(x_0,y_0) \in D$, entonces

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad \textbf{... (1)}$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y \qquad \textbf{... (2)}$$

Luego de (1) y (2) se tiene: $\boxed{\Delta f(x_0,y_0) \cong df(x_0,y_0)}$ ($\cong$ aproximadamente igual)

pero como $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y, \text{ entonces}$$

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\cong\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\cong f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y}$$

En forma similar para el caso de la función $f: D\subset R^3 \longrightarrow R$ se tiene

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\cong f(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\Delta z$$

Además, también se tiene: error relativo $=\frac{\Delta f}{f}\cong\frac{df}{f}$, error porcentual $=100\frac{\Delta f}{f}\cong 100\frac{df}{f}$

Ejemplo.- Hallar el valor aproximado de $\sqrt{(5.02)^2+(11.97)^2}$

Solución

Sea $z=\sqrt{x^2+y^2}$, x = 5 , y = 12 , Δx = 0.02 , Δy = -0.03

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\cong f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\ \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f(5,12)}{\partial x}=\dfrac{5}{13}\\[2mm] \dfrac{\partial f(5,12)}{\partial y}=\dfrac{12}{13}\end{cases}$$

$$f(5+0.02,\ 12-0.03)\cong f(5,12)+\frac{\partial f(5,12)}{\partial x}(0.02)+\frac{\partial f(5,12)}{\partial y}(-0.03)$$

$$\sqrt{(5+0.02)^2+(12-0.03)^2}\cong\sqrt{25+144}+\frac{5}{13}(0.02)-\frac{12}{13}(0.03)$$

$$\sqrt{(5.02)^2+(11.97)^2}\cong 13+\frac{1.0-0.36}{13}=13+\frac{0.64}{13}=13.05\qquad \therefore\quad \sqrt{(5.02)^2+(11.97)^2}\cong 13.05$$

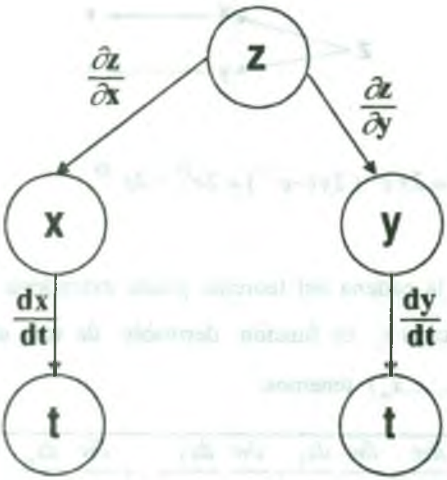
3.36 Derivación de la Función Compuesta.

Teorema (Regla de La Cadena).-

Sea $f: R^2 \longrightarrow R$ una función dada por z = f(x,y), donde f es una función diferenciable de x e y. Si x = g(t) e y = h(t) siendo g y h funciones derivables de t, entonces z es una función derivable de t y $\boxed{\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}}$

Demostración

Hacemos un diagrama para la regla de la cadena de una variable independiente.



como g y h son funciones derivables de t, sabemos que Δx y Δy tiende a cero, cuando Δt → 0, y como f es una función diferenciable de x e y.

$$\Delta z = \Delta f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando (Δx, Δy) → (0,0)

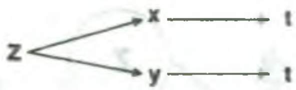
Luego para $\Delta t \neq 0$, tenemos $$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1.\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2.\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

de donde se deduce que: $$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + 0(\frac{dx}{dt}) + 0(\frac{dy}{dt}) = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo.-.- Hallar $\frac{dz}{dt}$ si $z = x^2 + y^2$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$

Solución



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 2xe^t + 2y(-e^{-t}) = 2e^{2t} - 2e^{-2t} \qquad \therefore \quad \frac{dz}{dt} = 2e^{2t} - 2e^{-2t}$$

Observación.- La regla de la cadena del teorema puede extenderse a un número cualquiera de variables, si cada x_i es función derivable de una sola variable t entonces para $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tenemos:

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}.\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}.\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}.\frac{dx_n}{dt}}$$

Observación.- Si $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ es una función tal que z = f(x,y) es diferenciable en x e y . donde y = φ(x), entonces la derivada total de z respecto a x es calculado mediante la expresión siguiente:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx}}$$

3.37 Teorema (Regla De La Cadena: Dos Variables Independientes).

Sea $f: R^2 \longrightarrow R$ una función dada por z = f(x,y) , donde f es una función diferenciable de x e y si x = g(s,t) e y = h(s,t) donde $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ existen todas, entonces $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ existen y están dadas por: $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$ **... (1)** $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$ **... (2)**

Demostración

Demostraremos la parte (1), la demostración de la parte (2) es semejante:

si se mantiene a t fijo y s cambia en cantidad Δs, entonces Δx = g(s + Δs,t) - g(s,t),

Δy = h(s + Δs,t) - h(s,t) como f es diferenciable, entonces:

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ **... (α)** donde $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ cuando (Δx,Δy) →(0,0)

además, pedimos que $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ cuando Δx = Δy = 0 ponemos como requisito para que ε_1 y ε_2 que son funciones de Δx y Δy sean continuas en (Δx,Δy) = (0,0), ahora a (α) dividimos entre Δs ≠ 0, tenemos $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s}$

tomando límites en ambos lados cuando Δs se aproxima a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

tenemos $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta s, y) - f(x,y)}{\Delta s} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s}$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{g(s+\Delta s, t) - g(s,t)}{\Delta s} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{h(s+\Delta s, t) - h(s,t)}{\Delta s} = \frac{\partial h(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s}$$

como $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$ existen y g, h son continuas con respecto a la variable S, por tanto, tenemos.

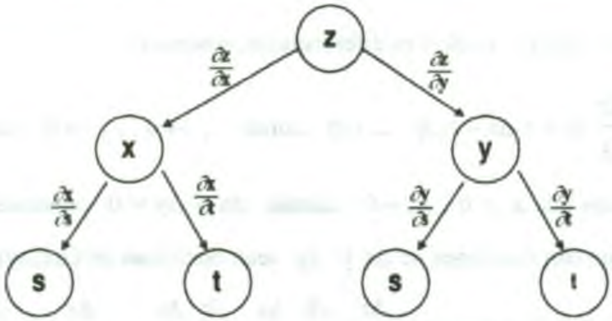
$$\lim_{\Delta s \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta s \to 0} g(s+\Delta s,t) - g(s,t) = g(s,t) - g(s,t) = 0$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta s \to 0} h(s+\Delta s,t) - h(s,t) = h(s,t) - h(s,t) = 0$$

por lo tanto cuando Δs se aproxima a cero Δx, Δy se aproxima a cero, entonces $\lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon_1 = 0$,

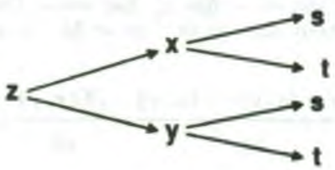
$\lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon_2 = 0$. Luego $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial s}$

haremos un diagrama para la regla de la cadena de dos variables independientes



Ejemplo.- Hallar $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$ si $z = x^2 + y^2$, $x = \frac{s+1}{t}$, $y = \frac{t+1}{s}$

Solución



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial s} = 2x.\frac{1}{t} + 2y(-\frac{t+1}{s^2}) = \frac{2(s+1)}{t^2} - \frac{2(t+1)^2}{s^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial t} = 2x.(-\frac{s+1}{t^2}) + 2y.\frac{1}{s} = -\frac{2(s+1)^2}{t^3} - \frac{2(t+1)}{s^2}$$

3.38 Teorema (Regla De La Cadena General).

Supongamos que $f: D \subset R^n \longrightarrow R$ es una función diferenciable en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y que cada x_i es una función de m variables $y_1, y_2, \dots, y_m$ es decir $x_i = x(y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\forall$ i = 1,2,3,...,n

Supongamos que cada derivada parcial $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}$, i = 1,2,3,...,n , j = 1,2,...m existen, entonces u es una función de $y_1, y_2, \dots, y_m$; y

$$\boxed{\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\
\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\
\vdots \\
\frac{\partial u}{\partial y_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial y_m}
\end{gathered}}$$

La demostración de este teorema es una extensión del teorema anterior.

Ejemplo.- Sí z = f(x,y) donde x = r cos θ , y = r sen θ; probar que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

Solución

mediante la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r},\ \text{como}\ \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta,\ \text{entonces se tiene:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial y},\ \text{elevando al cuadrado se tiene:}$$

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^2=\cos^2\theta(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\operatorname{sen}^2\theta(\frac{\partial z}{\partial y})^2 \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\theta},\ \text{como}\ \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\operatorname{sen}\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,\ \text{entonces se tiene:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=-r\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y},\ \text{dividiendo entre r.}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}=-\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y},\ \text{elevando al cuadrado se tiene}$$

$$\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial\theta})^2=\operatorname{sen}^2\theta(\frac{\partial z}{\partial x})^2-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}+\cos^2\theta(\frac{\partial z}{\partial y})^2 \qquad \text{... (2)}$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$(\frac{\partial z}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial\theta})^2=(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)(\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

$$\therefore\quad (\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=(\frac{\partial z}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial\theta})^2$$

3.39 Derivada Implícita.

Una de las aplicaciones de la regla de la cadena es en la determinación de la derivada de una función definida implícitamente.

Supongamos que x e y están relacionados mediante la ecuación F(x,y) = 0, donde se supone que y = f(x) es una función derivable en x.

Para hallar $\dfrac{dy}{dx}$ usaremos la regla de la cadena: z = F(x,y) = F(x,f(x))

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r] & x \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} \text{ como } \frac{dz}{dx}=0 \text{ entonces } \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}=0 .$$

Sí $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ de donde $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Un procedimiento análogo puede usarse para hallar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

Definición.- Sea $F\colon D\subset R^2 \longrightarrow R$, una función definida en el conjunto abierto $D\subset R^2$. Se dice que la ecuación F(x,y,z) = 0, define z implícitamente como una función de x e y, cuando existe una función $F\colon U\subset R^2 \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $U\subset R^2$, tal que F(x,y,z) = 0 $\Leftrightarrow$ z = f(x,y), $\forall$(x,y) $\in$ U.

Ejemplo.-.- La ecuación $x^2+4y^2+z^2=25$, representa implícitamente a las funciones.

$$z=f(x,y)=\sqrt{25-x^2-4y^2} \quad , \quad z=g(x,y)=-\sqrt{25-x^2-4y^2}$$

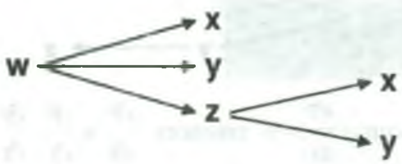
3.40 Teorema.

Si la ecuación F(x,y,z) = 0, define a z = f(x,y) implícitamente como función diferenciable de x e y, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0}$$

Demostración

Sea $w = F(x,y,z) = 0$, y $Z = f(x,y)$ entonces su diagrama es:



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{como } \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{como } \frac{dw}{dy} = 0 \text{ , entonces}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente con un número cualquiera de variables.

3.41 Teorema De La Función Implícita.

Sea $F: U \subset R^{n+1} \longrightarrow R$, una función con derivadas parciales continuas hasta el orden k > 1, definida en el conjunto abierto U, si un punto $x = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, x'_{n+1}) \in U$ es tal que $F(\vec{x}) = 0$ y $\dfrac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_{n+1}} \neq 0$, entonces se tiene: $\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} = -\dfrac{\dfrac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_{n+1}}}$ $\forall$ i = 1,2,3,...,n

donde la función $x_{n+1} = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está definida implícitamente por la ecuación: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = f(\vec{x})$

Ejemplo.-.- Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ donde: x cos y + y cos z + z cos x = 1

Solución

Sea F(x,y,z) = x cos y + y cos z + z cos x - 1, calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x - z \operatorname{sen} y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = -x \operatorname{sen} y + \cos z,\ \frac{\partial F}{\partial z} = -y \operatorname{sen} z + \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\cos y - z \operatorname{sen} x}{-y \operatorname{sen} z + \cos x} = \frac{z \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - y \operatorname{sen} z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-x \operatorname{sen} y + \cos z}{-y \operatorname{sen} z + \cos x} = \frac{x \operatorname{sen} y - \cos z}{\cos x - y \operatorname{sen} z}$$

3.42 Ejercicios Desarrollados.

I. Hallar las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones.

1) $z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

Solución

$$z=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)=\ln(\sqrt{x^2+y^2}-x)-\ln(\sqrt{x^2+y^2}+x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}-x}-\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}-x}-\frac{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

2) $z=f(x,y)=\int_x^y e^{\operatorname{sen} t}\,dt$

Solución

$$z=\int_x^y e^{\operatorname{sen} t}\,dt=-\int_y^x e^{\operatorname{sen} t}\,dt\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=-e^{\operatorname{sen} x}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{\operatorname{sen} y}$$

3) $\omega=(x^2+y^2+z^2)\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Solución

$$\omega=(x^2+y^2+z^2)\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=x\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\quad\therefore\quad\frac{\partial\omega}{\partial x}=x+x\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=y\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\quad\therefore\quad\frac{\partial\omega}{\partial y}=y+y\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=z\ln(x^2+y^2+z^2)+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\quad\therefore\quad\frac{\partial\omega}{\partial z}=z+z\ln(x^2+y^2+z^2)$$

4) $z=f(x,y)=e^{x+y}\cos(x-y)$

Solución

$$z=e^{x+y}\cos(x-y)\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}\cos(x-y)-e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x+y}\cos(x-y)+e^{x+y}\operatorname{sen}(x-y)$$

5) $\omega=f(x,y,z)=e^{xyz}+\operatorname{arctg}(\frac{3xy}{z^2})$

Solución

$$\omega=e^{xyz}+\operatorname{arctg}(\frac{3xy}{z^2})\ \Rightarrow\ \frac{\partial\omega}{\partial x}=yze^{xyz}+\frac{3yz^2}{z^4+9x^2y^2}\ ,\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=xze^{xyz}+\frac{3xz^2}{z^4+9x^2y^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=xye^{xyz}+\frac{6xyz}{z^4+9x^2y^2}$$

6) $z=\operatorname{arctg}(\ln(xy))$

Solución

$$z=\operatorname{arctg}(\ln(xy))\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2(xy)}=\frac{1}{x(1+\ln^2 xy)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\ln^2(xy)}=\frac{1}{y(1+\ln^2 xy)}$$

7) Sí $z=\int_x^y \operatorname{sen} t\,dt$. Hallar z_x-z_y

Solución

$$z=\int_x^y \operatorname{sen} t\,dt=-\int_y^x \operatorname{sen} t\,dt \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=z_x=-\operatorname{sen} x \;,\; \frac{\partial z}{\partial y}=z_y=\operatorname{sen} y$$

$$z_x-z_y=-\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y$$

8) Si $u=xz^2+yx^2+zy^2$, probar que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=(x+y+z)^2$

Solución

$$u=xz^2+yx^2+zy^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=z^2+2xy \\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2yz \\ \frac{\partial u}{\partial z}=2xz+y^2 \end{cases} \quad \text{sumando se tiene:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=(x+y+z)^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=(x+y+z)^2$$

9) Calcular $\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}$ si $u=\int_x^y \cos t^2 dt \;,\; v=\int_x^y \operatorname{sen} t^2 dt$

Solución

$$u=\int_x^y \cos t^2\,dt=-\int_y^x \cos t^2 dt \Rightarrow u_x=-\cos x^2 \;,\; u_y=\cos y^2$$

$$u=\int_x^y \operatorname{sen} t^2\,dt=-\int_y^x \operatorname{sen} t^2 dt \Rightarrow v_x=-\operatorname{sen} x^2 \;,\; v_y=\operatorname{sen} y^2$$

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\cos x^2 & -\operatorname{sen} x^2 \\ \cos y^2 & \operatorname{sen} y^2 \end{vmatrix}=\cos x^2 \operatorname{sen} y^2+\operatorname{sen} x^2 \cos y^2=\operatorname{sen}(x^2-y^2)$$

II.

1) Demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$, sí $z=\ln(x^2+y^2+xy)$

Solución

$$z=\ln(x^2+y^2+xy) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+y}{x^2+y^2+xy} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+x}{x^2+y^2+xy}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2+xy}{x^2+y^2+xy}+\frac{2y^2+xy}{x^2+y^2+xy}=\frac{2(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy}=2 \qquad \therefore\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

2) Demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ si $z=xy+xe^{y/x}$

Solución

$$z=xy+xe^{y/x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=y+e^{y/x}-\frac{y}{x}e^{y/x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+e^{y/x}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xe^{y/x}-ye^{y/x}+xy+ye^{y/x}=xy+xy+xe^{y/x}=xy+z$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

3) Demostrar que, z = f(x+ay), donde f es una función diferenciable, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Solución

Sea z = f(u) donde u = x + ay

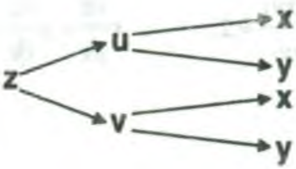
$$\begin{tikzcd} & & x \\ z = f(u) \arrow[r] & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}=f'(u) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial u}=af'(u)$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}=af'(u) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=af'(u) \quad \text{entonces} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$$

4) Si z = f(u) F(v), donde u = x + y , v = y/x y ambas son funciones arbitrarias, demuestre que: $\qquad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=u\,f'(u)F(v)$

Solución



aplicando la regla de la cadena para $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ de donde } \frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \text{ de donde } \frac{\partial u}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad \text{... (2)}$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial v}+y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial v}=f'(u)F(v)=(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}, \text{ de donde se tiene:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f'(u)F(v)$$

por lo tanto $\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}=u\,f'(u)F(v)$

$$\therefore \quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=u\,f'(u)F(v)$$

5) La sustitución $x = e^s$, $y = e^t$ transforma f(x,y) en g(s,t); siendo $g(s,t) = f(e^s, e^t)$, si se sabe que f satisface la ecuación en derivadas parciales.

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \text{ demostrar que } \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

Solución

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r] & s \\ g(s,t) = f(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = x\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{donde } x = e^S \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = e^S = x$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r] & s \\ \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = \frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial f}{\partial x} + x(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}) = x\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = x\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = y\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{donde } y = e^t \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = e^t = y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial t}.\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial f}{\partial y}) = y\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r] & s \\ \frac{\partial f}{\partial y} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial f}{\partial d}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial g}{\partial t} = y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{por lo tanto} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = y\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{... (2)}$$

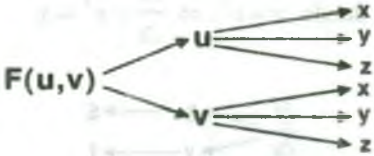
sumando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad \therefore \quad \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0$$

6) Dado $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$, probar que: $(y-x)+(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Solución

$$F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=F(u,v) \text{ donde } u=x+y+z \ , \qquad v=x^2+y^2+z^2$$



se debe calcular las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ por derivación implícita, es decir:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}+2x\frac{\partial F}{\partial v} \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}+2y\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2x\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}} \ , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2y\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}}$$

$$(y-x)+(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=(y-x)+(y-z)[-(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2x\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}})]+(z-x)[-(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2y\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}})]$$

$$=(y-x)+(z-y)(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2x\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}})+(x-z)(\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2y\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}})$$

$$=(y-x)+\frac{(z-y+x-z)\frac{\partial F}{\partial u}+(2x(z-y)+2y(x-z))\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}}$$

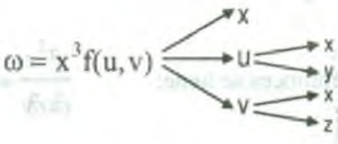
$$=(y-x)+\frac{(x-y)\frac{\partial F}{\partial u}+2z(x-y)\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}}=(y-x)+(x-y)\frac{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}+2z\frac{\partial F}{\partial v}}=y-x+y-y=0$$

$$\therefore\ (y-x)+(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

7) Si $\omega=x^3 f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$. Demostrar que: $x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=3x^3 f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$

Solución

Sea $\omega=x^3 f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=x^3 f(u,v)$, $u=\frac{y}{x}$, $v=\frac{z}{x}$



$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=3x^2 f(u,v)+x^3\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+x^3\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2 f(u,v)-xy\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-xz\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}=3x^3 f(u,v)-x^2 y\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-x^2 z\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=x^3\,\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\,\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \quad \text{entonces} \quad y\frac{\partial\omega}{\partial y}=x^2 y\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=x^3\,\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z}=x^2\,\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \quad \text{entonces} \quad z\frac{\partial\omega}{\partial z}=x^2 z\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \qquad \text{... (3)}$$

sumando (1), (2) y (3) se tiene:

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=3x^3 f(u,v)=3x^3 f(u,v)$$

8) Dado $z=u(x,y)e^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$. Hallar a y b. tal que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$

Solución

$$z=u(x,y)e^{ax+by} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}(\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)),\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)e^{ax+by},\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}(\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=ae^{ax+by}(\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y))+e^{ax+by}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}(a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x})$$

pero como $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, entonces se tiene: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}(a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)+b\frac{\partial u}{\partial x})$

como $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$, entonces reemplazamos

$$e^{ax+by}(a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)+b\frac{\partial u}{\partial x})-e^{ax+by}(\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)-$$

$$-e^{ax+by}(\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y))+u(x,y)e^{ax+by}=0$$

$e^{ax+by}[(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}(ab-a-b-1)u(x,y)]=0$ de donde

$(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}(ab-a-b-1)u(x,y)=0$ por igualdad

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-1=0 \\ ab-a-b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}$$

9) Demostrar que la función $z=e^{y}\phi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ satisface a la ecuación.

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

Solución

Sea $z=e^{y}\phi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})=e^{y}\phi(u)$ donde $u=ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & \mathbf{x} \\ \phi(\mathbf{u}) \arrow[r] & \mathbf{u} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \mathbf{y} \end{tikzcd}$$

aplicando la regla de la cadena se tiene: $\dfrac{\partial\phi(u)}{\partial x}=\dfrac{\partial\phi(u)}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$, donde $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}$.

$$\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}=\frac{\partial\phi(u)}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)$$

$\dfrac{\partial\phi(u)}{\partial y}=\dfrac{\partial\phi(u)}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$, donde $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\dfrac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{2y^2}}$

$$\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}=\frac{\partial\phi(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=(e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{2y^2}})\phi'(u)$$

como $z=e^{y}\phi(u)$, entonces: $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y}\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}=\frac{x}{y}.e^{y}.e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}\phi(u)+e^{y}\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}=e^{y}\phi(u)+e^{y}(e^{\frac{x^2}{2y^2}}-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{2y^2}})\phi'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}\phi(u)+e^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)-\frac{x^2}{y^2}e^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)$$

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^3e^{y}}{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)-xye^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u) \qquad \textbf{... (1)}$$

$$xy\frac{\partial z}{\partial y}=xye^{y}\phi(u)+xye^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u)-\frac{x^3}{y}e^{y}e^{\frac{x^2}{2y^2}}\phi'(u) \qquad \textbf{... (2)}$$

sumando (1) y (2) se tiene:

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xye^{y}\phi(u)=xye^{y}\phi(y.e^{\frac{x^2}{2y^2}})=xyz$$

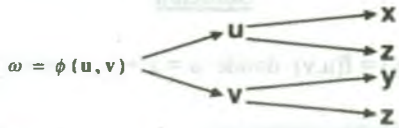
$$\therefore\quad (x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

10) Calcular el valor de la expresión $E=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$ si $\phi(cx-za,\ cy-bz)=0$.

Solución

Sea $\omega=\phi(cx-az,\ cy-bz)=\phi(u,v)$, donde u = cx - az , v = cy - bz, además

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c\ ,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-a\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=c\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}=-b$$



como la función ϕ es implícita entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial z}}\quad,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial z}}$$

Luego calculando $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial v}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}$, se tiene mediante regla de la cadena.

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}=c\frac{\partial\omega}{\partial u}\ ;\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=c\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}=-a\frac{\partial\omega}{\partial u}-b\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial z}}=-\frac{c\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{-a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}-b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}=\frac{c\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial z}}=-\frac{c\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{-a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}-b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}=\frac{c\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}$$

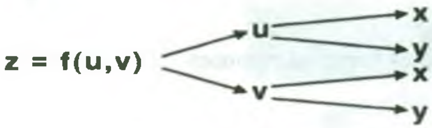
$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ac\dfrac{\partial\omega}{\partial u}}{a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}+\frac{bc\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}{a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}=\frac{c(a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v})}{a\dfrac{\partial\omega}{\partial u}+b\dfrac{\partial\omega}{\partial v}}=c\ \therefore\ a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

11) Si $z = f(x + y,\ x - y)$ y f es una función que tiene derivadas parciales continuas,

Demostrar que: $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial z}{\partial y}=(\dfrac{\partial f}{\partial u})^2-(\dfrac{\partial f}{\partial v})^2$

Solución

Si z = f(x + y, x - y) = f(u,v) donde u = x + y , v = x - y.



aplicando la regla de la cadena

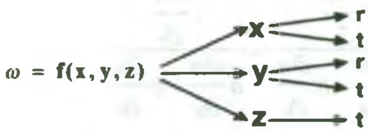
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{entonces} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v} \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{entonces} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v} \qquad \ldots (2)$$

multiplicando (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}).(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$

12) Si $\omega=f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, $x=e^r\cos t$, $y=e^r\operatorname{sen} t$, $z=e^t$. calcular: $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ y $\frac{\partial\omega}{\partial t}$

Solución



aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=\frac{\partial\omega}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial x}{\partial r}=e^r\cos t \;,\; \frac{\partial y}{\partial r}=e^r\operatorname{sen} t$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=2xe^r\operatorname{sen} t+2ye^r\operatorname{sen} t=2e^{2r}\cos^2 t+2e^{2r}\operatorname{sen}^2 t \quad ; \quad \frac{\partial\omega}{\partial r}=2e^{2r}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\omega}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}\ ,\text{ donde }\ \frac{\partial x}{\partial t}=-e^{t}\operatorname{sen}t\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}=e^{t}\cos t\ ,\ \frac{\partial zz}{\partial t}=e^{t}$$

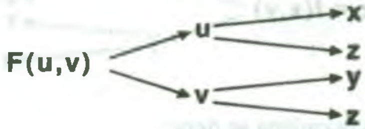
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=2x(-e^{t}\operatorname{sen}t)+2ye^{t}\cos t-2ze^{t}=-2e^{2t}\operatorname{sen}t\cos t+2e^{2t}\operatorname{sen}t\cos t-2e^{2t}=-2e^{2t}$$

13) Demostrar que la función z, determinada por la ecuación F(x - az, y - bz) = 0, donde F es una función diferenciable cualquiera de dos argumentos, satisface: $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Solución

Como F(x - az, y - bz) = F(u,v) = 0 donde u = x -az , v = y – bz

de donde $\frac{\partial u}{\partial x}=1\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1\ ,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-a\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}=-b$



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\quad,\quad\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}=-a\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{-a\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v}}\quad\text{entonces}\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}}\qquad\textbf{... (1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{-a\frac{\partial F}{\partial u}-b\frac{\partial F}{\partial v}}\quad\text{entonces}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}}\qquad\textbf{... (2)}$$

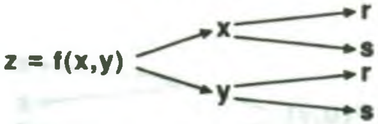
multiplicando (1) y (2) por a y b respectivamente

$$a\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a\dfrac{\partial F}{\partial u}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}} \quad , \quad b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{b\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a\dfrac{\partial F}{\partial u}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}+\frac{b\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}=\frac{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}=1 \qquad \therefore a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

14) Si $z=f(x,y)$, $x=\varphi(r,s)$, $y=\psi(r,s)$ hallar fórmulas para $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

Solución

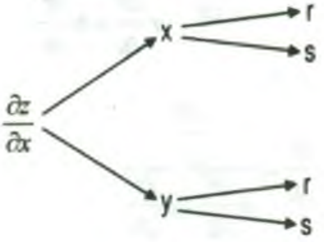


aplicando la regla de la cadena se tiene:

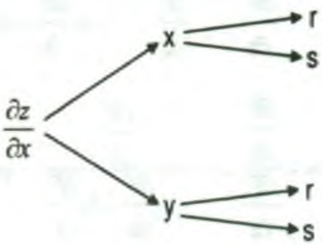
$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial r}$, a esta expresión derivamos con respecto a r, se tiene.

$\dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{\partial z}{\partial r})=\dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial r})$, efectuando

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}+\frac{\partial x}{\partial r}.\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial r}.\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}) \qquad \ldots (1)$$



,



aplicando la regla de la cadena para calcular

$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x})$ y $\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y})$ se tiene: $\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}) = y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial y}{\partial r}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial xx}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\frac{\partial y}{\partial rr} \qquad \textbf{... (2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial rr}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial ry^2}.\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \textbf{... (3)}$$

reemplazando (2), (3) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}.\frac{\partial z}{\partial x} + .\frac{\partial x}{\partial r}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial ry^2}.\frac{\partial y}{\partial r})$$

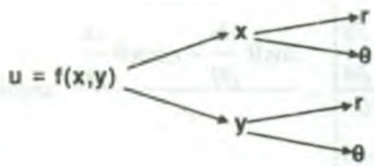
$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}(\frac{\partial x}{\partial r})^2 + .\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial r})^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

en forma similar para el caso de $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ se tiene.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial s})^2 + .\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial s})^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

15) Si f es una función diferenciable de x e y, además $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, muestre que. $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}$

Solución



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}, \text{ donde } \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta \, , \frac{\partial y}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta}, \text{ donde tenemos que:}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}\theta \, , \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}\theta.\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene el siguiente sistema:

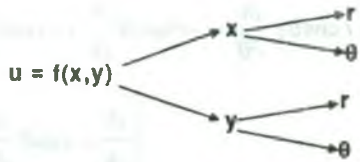
$$\begin{cases} \cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+r\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r} \\ -r\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \quad \text{despejando } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ se tiene}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & r\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}=\frac{r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial r}-r\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}}{} \text{ entonces } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ -r\operatorname{sen}\theta & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}=\frac{\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}+r\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u}{\partial r}}{r} \text{ entonces } \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r}}$$

16) Si f y g son diferenciables de x e y, u = f(x,y), v= g(x,y) tales que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, entonces si $x = r\cos\theta$, y rsen θ, muestra que: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

Solución



mediante la regla de la cadena se tiene:

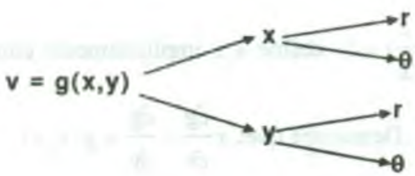
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},\ \text{donde}\ \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta\,.\frac{\partial u}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},\ \text{donde}\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta r}=r\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{... (2)}$$

Luego de (1) y (2) se tiene: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial u}{\partial x}\,r\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$ ... (α)



mediante la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}, \text{ donde } \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\text{sen}\,\theta;\ \frac{\partial v}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta}, \text{ donde tenemos que:}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta;\ \frac{\partial v}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots (4)$$

Luego de (3) y (4) se tiene el sistema
$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial v}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases} \quad \ldots (\beta)$$

Como $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$, entonces se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=-\text{sen}\,\theta(-\frac{\partial u}{\partial y})+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}=r(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial y})$$

$\frac{\partial v}{\partial \theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}$, por lo tanto se tiene: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}=-r\,\text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial y}+r\cos\theta(-\frac{\partial v}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial \theta}=$$

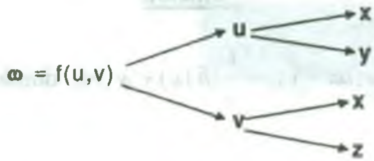
$$=-r(\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial y})=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

por lo tanto: $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

17) La ecuación $f(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$, define a z implícitamente como función de x e y, sea esa función $z=g(x,y)$. Demuestre que: $x\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=g(x,y)$.

Demostración

Sea $\omega = f(\frac{y}{x},\frac{z}{x}) = f(u,v)$ donde $u = \frac{y}{x},\ v = \frac{z}{x}$



aplicando la regla de la cadena se tiene: $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$, donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}(y\frac{\partial\omega}{\partial u} + z\frac{\partial\omega}{\partial v})$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y},\ \text{donde}\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\quad \text{entonces}\ \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z},\ \text{donde}\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{x}\quad \text{entonces}\ \frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\frac{\partial\omega}{\partial z}} = -\frac{-\frac{1}{x^2}(y\frac{\partial\omega}{\partial u} + z\frac{\partial\omega}{\partial v})}{\frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial v}} = \frac{1}{x}(y\frac{\partial\omega}{\partial u} + z\frac{\partial\omega}{\partial v}).\frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial v}};\quad x\frac{\partial z}{\partial x} = (y\frac{\partial\omega}{\partial u} + z\frac{\partial\omega}{\partial v})\frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial v}} \ ...(1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\frac{\partial\omega}{\partial z}} = -\frac{\frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\frac{1}{x}\frac{\partial\omega}{\partial v}} = -\frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\frac{\partial\omega}{\partial v}},\quad y\frac{\partial z}{\partial y} = -y\frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\frac{\partial\omega}{\partial v}} \qquad ...(2)$$

sumando (1) y (2) se tiene

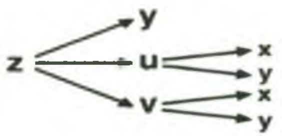
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (y\frac{\partial\omega}{\partial u} + z\frac{\partial\omega}{\partial v})\frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial v}} - y\frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}}{\frac{\partial\omega}{\partial v}} = z = g(x,y) \qquad \therefore\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = g(x,y)$$

18) Si $z=\frac{1}{y}(\delta(\alpha x+y)+\psi(\alpha x-y))$, mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2\frac{\partial z}{\partial y})$

Solución

$$z=\frac{1}{y}(\delta(\alpha x+y)+\psi(\alpha x-y))=\frac{1}{y}(\delta(u)+\psi(v)) \text{ donde } u=\alpha x+y,\ \ v=\alpha x-y.$$

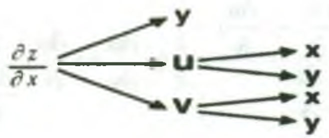
$$z=\frac{1}{y}(\delta(u)+\psi(v)),\ u=\alpha x+y,\ \ v=\alpha x-y$$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{ donde } \frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\alpha$$

como $z=\frac{1}{y}(\delta(u)+\psi(v)) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{y}\delta'(u), \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{y}\psi'(v).$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\alpha}{y}(\delta'(u)+\psi'(v)).$$



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\alpha}{y}\delta''(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\alpha}{y}\psi''(v),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\,,\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial z}{\partial x})\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\alpha^2}{y}\delta''(u)+\frac{\alpha^2}{y}\psi''(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha^2}{y}(\delta''(u)+\psi''(v)) \qquad \text{... (1)}$$

aplicando la regla de la cadena en el diagrama (*)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}(\delta(u)+\psi(v))+\frac{1}{y}[\frac{\partial}{\partial u}(\delta(u)+\psi(v))\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}(\delta(u)+\psi(v))\frac{\partial v}{\partial y}]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}(\delta(u)+\psi(v))+\frac{1}{y}(\delta'(u)-\psi'(v)) \quad y^2\frac{\partial z}{\partial y}=-\delta(u)-\psi(v)+y(\delta'(u)-\psi'(v))$$

$$+y(\delta''(u)\frac{\partial u}{\partial y}-\psi''(v)\frac{\partial v}{\partial y})=-\delta'(u)+\psi'(v)+\delta'(u)-\psi'(v)+y(\delta''(u)+\psi''(v)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2\frac{\partial z}{\partial y})=y(\delta''(u)+\psi''(v))$$

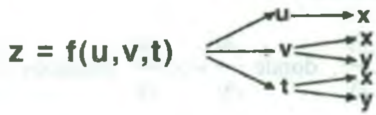
$$\frac{\alpha^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\alpha^2}{y}(\delta''(u)+\psi''(v)) \qquad \text{... (2)}$$

de (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2\frac{\partial z}{\partial y})$

19) Si $z=f(x^2,x\operatorname{sen}y,x+y)$, Hallar $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

Solución

Si $z=f(x^2,\ x\operatorname{sen}y,\ x+y)=f(u,v,t)$ donde $u=x^2$, $v=x\operatorname{sen}y$, $t=x+y$



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x},\ \text{donde}\ \frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{sen}y,\ \frac{\partial t}{\partial x}=1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+\operatorname{sen} y\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial t}$$

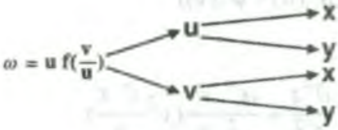
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}, \quad \text{donde } \frac{\partial v}{\partial y}=x\cos y \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y.\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial t}$$

20) Una función es definida por una ecuación de la forma $\omega = xy\, f(\frac{x+y}{xy})$ probar que satisface a la ecuación. $x^2\frac{\partial \omega}{\partial x}-y^2\frac{\partial \omega}{\partial y}=G(x,y)\omega$ y encontrar G(x,y).

<u>**Solución**</u>

Sea $\omega = xy\, f(\frac{x+y}{xy})=u\, f(\frac{v}{u})$, donde u = xy , v = x + y.



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial \omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{donde } \frac{\partial u}{\partial x}=y, \frac{\partial v}{\partial x}=1 \quad \text{entonces } \frac{\partial \omega}{\partial x}=y\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial v}$$

$$\boxed{x^2\frac{\partial \omega}{\partial x}=x^2y\frac{\partial \omega}{\partial u}+x^2\frac{\partial \omega}{\partial v}} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{donde } \frac{\partial u}{\partial y}=x, \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{entonces } \frac{\partial \omega}{\partial y}=x\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial v}$$

$$\boxed{y^2\frac{\partial \omega}{\partial y}=xy^2\frac{\partial \omega}{\partial u}+y^2\frac{\partial \omega}{\partial v}} \quad \ldots (2)$$

restando (1) y (2) se tiene:

$$x^2\frac{\partial\omega}{\partial x}-y^2\frac{\partial\omega}{\partial y}=(x^2y-xy^2)\frac{\partial\omega}{\partial u}+(x^2-y^2)\frac{\partial\omega}{\partial v}=xy(x-y)\frac{\partial\omega}{\partial u}+(x-y)(x+y)\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$=(x-y)[xy\frac{\partial\omega}{\partial u}+(x+y)\frac{\partial\omega}{\partial v}] \qquad \textbf{... (3)}$$

pero $\dfrac{\partial\omega}{\partial u}=f(\dfrac{v}{u})-\dfrac{v}{u}f'(\dfrac{v}{u}),\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v}=f'(\dfrac{v}{u})$ **... (4)**

reemplazando (4) en (3) se tiene:

$$x^2\frac{\partial\omega}{\partial x}-y^2\frac{\partial\omega}{\partial y}=(x-y)[u(f(\frac{v}{u})-\frac{v}{u}f'(\frac{v}{u}))+vf'(\frac{v}{u})]=(x-y)uf(\frac{v}{u})=G(x,y)\omega$$

de donde g(x,y) =x – y.

21) Dada la función $z=f(x,y)$, $x=e^u\cos v$, $y=e^u\operatorname{sen} v$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Solución

Mediante el resultado del ejercicio (14) se tiene.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial u})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial u})^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \qquad \textbf{... (1)}$$

$$\begin{cases} x=e^u\cos v \\ y=e^u\operatorname{sen} v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=e^u\cos v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}=e^u\operatorname{sen} v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=e^u\cos v \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}=e^u\operatorname{sen} v\end{cases} \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=e^{2u}(\cos^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\operatorname{sen}^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})+e^{2u}\operatorname{sen} 2v\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+e^u(\cos v\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{sen} v\frac{\partial z}{\partial y}) \qquad \textbf{... (3)}$$

en la misma forma para $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, es decir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial x}{\partial v})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial y}{\partial v})^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \qquad \text{... (4)}$$

$$\begin{cases} x=e^u \cos v \\ y=e^u \operatorname{sen} v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v}=-e^u \operatorname{sen} v \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}=e^u \cos v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-e^u \cos v \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}=-e^u \operatorname{sen} v \end{cases} \qquad \text{... (5)}$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=e^{2u}(\operatorname{sen}^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\cos^2 v\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})+e^{2u}\operatorname{sen}2v\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-e^u(\cos v\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{sen} v\frac{\partial z}{\partial y}) \qquad \text{... (6)}$$

sumando (3) y (6) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=e^{2u}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}), \text{ de donde } \quad \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{-2u}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}).$$

22) Aplicando la regla de la cadena, hallar $\frac{\partial u}{\partial s}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ si $u=\frac{x-y}{1+xy}$, x = tg s , y = tg t, cuando $s=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{\pi}{4}$

Solución

Mediante el diagrama se tiene:

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & s \\ u \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

y mediante la regla de la cadena.

$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}$, donde $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-(1+y)^2}{(1+xy)^2}$, $\frac{\partial x}{\partial s}=\sec^2 s$, cuando s = t= $\frac{\pi}{4}$, se tiene: x=1, y=1

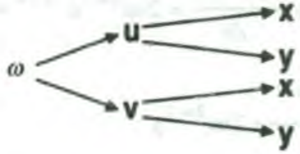
Luego $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial x}{\partial s}=2$, entonces $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{1}{2}(2)=1$ $\therefore \frac{\partial u}{\partial s}=1$

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$, de donde $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-(1+x)^2}{(1+xy)^2},\frac{\partial u}{\partial t}=\sec^2 t$ cuando s= t = $\frac{\pi}{4}$, se tiene: x=1, y=1

Luego $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$. $\frac{\partial y}{\partial t}=2$ entonces $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=(-\frac{1}{2})(2)=-1$; $\therefore\ \frac{\partial u}{\partial t}=-1$

23) Aplicando la regla de la cadena, hallar $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ y $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ si $\omega=u^2+v^2$, $u=\frac{x+1}{y}$, $v=\frac{y+1}{x}$, cuando x = 1; y = 2.

Solución



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial \omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$, donde $\frac{\partial \omega}{\partial u}=2u$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial v}=2v$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y+1}{x^2}$

$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{2u}{y}-\frac{2v(y+1)}{x^2}$, cuando x = 1, y = 2, se tiene u = 1, v = 3 entonces

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=1-18=-17$$

$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\partial \omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$ donde $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+1}{y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial u}=2u$, $\frac{\partial \omega}{\partial v}=2v$

cuando x = 1, y = 2, u = 1, v = 3, entonces $\frac{\partial \omega}{\partial y}=2(-\frac{1}{2})+6(1)=-1+6=5$

24) Sea $f(x,y)=x^{2n}e^{-y/4x}$. Hallar un valor de la constante n tal que f satisfaga a la siguiente ecuación: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$

Solución

$$f(x,y)=x^{2n}e^{-y/4x} \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{x^{2n}}{4x}e^{-y/4x} \quad =-\frac{x^{2n-1}}{4}e^{-y/4x}$$

$$y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{yx^{2n-1}}{4}e^{-y/4x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})=-\frac{x^{2n-1}}{4}e^{-y/4x}+\frac{yx^{2n-2}}{16}e^{-y/4x}$$

$$4\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})=e^{-y/4x}(y\frac{x^{2n-2}}{4}-x^{2n-1}) \qquad \text{... (1)}$$

$$f(x,y)=x^{2n}e^{-y/4x} \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2nx^{2n-1}e^{-y/4x}+\frac{yx^{2n-2}}{4}e^{-y/4x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{-y/4x}(\frac{yx^{2n-2}}{4}+2nx^{2n-1}) \qquad \text{... (2)}$$

igualando (1) y (2) se tiene:

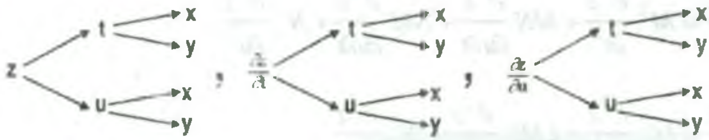
$$e^{-y/4x}(y\frac{x^{2n-2}}{4}-x^{2n-1})=e^{-y/4x}(y\frac{x^{2n-2}}{4}+2nx^{2n-1})$$

$$x^{2n-2}e^{-y/4x}(\frac{y}{4}-x)=x^{2n-2}e^{-y/4x}(\frac{y}{4}+2nx)\text{, simplificando}$$

$$\frac{y}{4}-x=\frac{y}{4}+2nx \Rightarrow (2n+1)x=0 \Rightarrow 2n+1=0 \qquad \therefore\ n=-\frac{1}{2}$$

25) Dada la ecuación $A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, siendo A,B y C constantes, determinar M y N también constantes para que al efectuar el cambio de variables t = x + My, u = x + Ny, resulta una expresión de la forma $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

Solución



aplicando la regla de la cadena, se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}$, donde $\frac{\partial t}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u}, \text{ entonces } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad \text{... (3)}$$

reemplazando (2), (3) en (1) se tiene: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad \text{... (4)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ donde } \frac{\partial t}{\partial y} = M \ , \frac{\partial u}{\partial y} = N, \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial y} = M\frac{\partial z}{\partial t} + N\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(M\frac{\partial z}{\partial t} + N\frac{\partial z}{\partial u}\right) = M\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + N\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{... (5)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + N\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + N\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} \text{...(6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = M\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + N\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = M\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + N\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \text{...(7)}$$

reemplazando (6), (7) en (5)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = M^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + MN \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + NM \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + N^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = M^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2MN \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + N^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad \text{... (8)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(M \frac{\partial z}{\partial t} + N \frac{\partial z}{\partial u}\right) = M \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + N \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{... (9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} \quad \text{... (10)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} \quad \text{... (11)}$$

reemplazando (10), (11) en (9) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = M\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t}\right) + N\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + M \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + N \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + N \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad \text{... (12)}$$

por lo tanto de (4), (8) y (12) se tiene:

$$\begin{cases} A \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2A \dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + A \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ 2B \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2BM \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2BM \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial z} + 2BN \dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + 2BN \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \quad \text{sumando se tiene:} \\ C \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = CM^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2MNC \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} + CN^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{cases}$$

$$(A+2BM+CM^2)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+(2A+2BM+2MNC+2BN)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial t}+(A+2BN+CN^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0$$

como $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial t}=0$, entonces se tiene: $CM^2+2BM+A=0$ y $CN^2+2BN+A=0$

$$M=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4AC}}{2C}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{C}$$

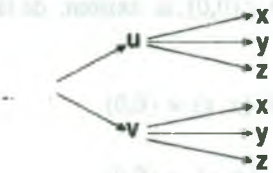
$$N=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4AC}}{2C}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{C}$$

26) Si ω es una función de u y v donde $u^2=x^2+y^2+z^2$, $z\operatorname{tg}v=\sqrt{x^2+y^2}$, Demostrar que: $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u\frac{\partial\omega}{\partial u}$

Solución

Como $z\operatorname{tg}v=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \operatorname{tg}v=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, de donde:

$v=\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})$, $u^2=x^2+y^2+z^2$



aplicando la regla de la cadena se tiene:

$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}$, de donde $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{u}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xz}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{x}{u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{xz}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{\partial\omega}{\partial v}\quad\Rightarrow\quad x\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{x^2}{u}.\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{x^2z}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{\partial\omega}{\partial v}\qquad\text{... (1)}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}, \text{ de donde } \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{u}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{yz}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{y}{u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{yz}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{\partial\omega}{\partial v} \Rightarrow y\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{y^2}{u}.\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{y^2z}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{\partial\omega}{\partial v} \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z}, \text{ de donde } \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{u}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{z}{u}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}.\frac{\partial\omega}{\partial v} \Rightarrow z\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{z^2}{u}.\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}.\frac{\partial\omega}{\partial v} \quad \text{... (3)}$$

sumando (1), (2) y (3) se tiene:

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{x^2+y^2+z^2}{u}.\frac{\partial\omega}{\partial u}+\left(\frac{x^2z+y^2z}{u^2\sqrt{x^2+y^2}}.-\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$=\frac{u^2}{u}.\frac{\partial\omega}{\partial u}+\left(\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}.-\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{u^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$\therefore\ x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=u\frac{\partial\omega}{\partial u}$$

27) Hallar $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$, si existen, de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución

$$D_1f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3-0}{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}=\lim_{h\to 0}1=1.$$

$$\therefore D_1f(0,0)=1.$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0-k^3}{0+k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} -\frac{k^3}{k^3} = \lim_{k\to 0} -1 = -1.$$

$$\therefore D_2 f(0,0) = -1.$$

28) Hallar $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$, si existen, de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0}-0}{h} = o$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0}{0+k^2}-0}{k} = 0.$$

29) Hallar $D_1 f(1,-1)$ y $D_2 f(1,-1)$, de la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy^2}{x+y} & , \ si \ \ x+y \neq 0 \\ 1 & , \ si \ \ x+y = 0 \end{cases}$$

Solución

$$D_1 f(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,-1)-f(1,-1)}{h}, \text{ es por definición de derivada}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^2-(1+h)1}{1+h-1}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1-h-h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$D_2 f(1,-1) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1,-1+k)-f(1,-1)}{k}$$, es por definición de derivada

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1-(-1+k)^2-1}{1+k-1} = \lim_{k\to 0}\frac{-1+2k-k^2}{k} = \lim_{k\to 0}\left(-\frac{1}{k}+2-k\right) = \infty$$

Luego $D_1 f(1,-1) = 1$ y $\nexists D_2 f(1,-1)$

30) Dada la función f(x,y) definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^x+e^y+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}, \text{ hallar } \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \ y \ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$$

Solución

En estas derivadas parciales se tienen dos casos: cuando (x,y)≠(0,0) y cuando (x,y)=(0,0).

Si $(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f(x,y)=e^x+e^y+\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, de donde $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x+\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^y+1-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

por lo tanto: $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} e^x+\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Luego $$\frac{\partial^2 f(0,0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \text{ por lo tanto: } \frac{\partial^2 f(0,0)}{x^2}=1$$

En forma similar para calcular $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$. Si$(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^y+\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

y $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$$

por lo tanto: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases} e^{y}+\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{x^3}{x^4}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=+\infty$$

31) Dada la función f(x,y) definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad , & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

muestre que: **a)** $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y$, para toda y

b) $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=-x$, para toda x.

Solución

a) i) si $y\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=-\frac{y^3}{y^2}=-y$$

ii) si $y=0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

por lo tanto $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y$ si $y\neq 0$ y $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ si y = 0 se concluye que $\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = -y$, para toda y

b) **i)** si $x \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{xy(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})-0}{y}$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{x^2} = x$$

ii) si $x = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$

por lo tanto $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = x$ si $x \neq 0$, y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ si $x = 0$

se concluye que $\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = x$, para toda x.

32) Dada la función f(x,y) definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) & , si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Determinar si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en (0,0). Es diferenciable en (0,0)?.

Solución

Haciendo las mismas operaciones del ejercicio (30) se tiene las derivadas parciales siguientes:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}) & , si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}) & , \ si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

La función $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ es continua en (0,0),si $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f(0,0)=0$.Ahora calculando el $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, A través de un camino que pase por (0,0), $S=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=x\}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{x\to 0} x=0$, por lo tanto para S este límite existe, debe valer cero.

Luego lo demostraremos:

Dado $\varepsilon>0$, $\exists\delta=?\ /\ si\ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-0|<\varepsilon$, además

$0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Leftrightarrow |x|<\delta \wedge |y|<\delta$

$$|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-0|=|\frac{y(x^4 4x^2y^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}|\leq|y||\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}|$$

además $\begin{cases}x^4=(x^2)^2\leq(x^2+y^2)^2\\ y^4=(y^2)^2\leq(x^2+y^2)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2\leq x^2+y^2\\ Y^2\leq x^2+y^2\end{cases}$, de donde $x^2y^2\leq(x^2+y^2)^2$

Luego $x^4+4x^2y^2+y^4\leq(x^2+y^2)^2+4(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2=6(x^2+y^2)^2$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-0|\leq|y||\frac{6(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)}|=6|y|<\varepsilon \Rightarrow |y|<\frac{\varepsilon}{6}=\delta$$

por lo tanto es suficiente tomar $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$ para que se tenga $|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-0|<\varepsilon$, siempre que $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, con lo que se demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$, luego concluimos que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ es continua en (0,0).

en forma similar se demuestra que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ es continua en (0,0), y por lo tanto la función f es diferenciable en (0,0).

33) Dada la función f (x,y) definida por: $f(x,y)=\begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & , si \ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si \ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Determinar si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en (0,0).¿Es f diferenciable en (0,0)?.

Solución

Para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ se considera dos caso :

Si (x,y) ≠ (0,0), y si (x,y) = (0,0)

i) si $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{6xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{3x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

ii) si (x,y) = (0,0), calcularemos $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,o)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

por lo tanto se tiene las derivadas parciales.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} \frac{6xy^3)}{(x^2+y^2)^2}), & si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases} \frac{3x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & si \ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , si \ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Las funciones $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en (0,0), si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$, y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$.

consideremos dos caminos que pasen por (0,0): **i)** $S=\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,y=x\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^4}{(2x^2)^2}=\frac{3}{2}\neq 0,\text{Luego } \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ no es continua en } (0,0).$$

iii) $T\{(x,y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,y=2x\}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2(x^2-4x^2)}{(x^2+4x^2)^2}=-\frac{9}{25}\neq 0$

Luego $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ no es continua en (0,0).

por lo tanto si las derivadas parciales no son continuas no se puede concluir nada sobre la diferenciabilidad.

Lo cual puede ser ó no diferenciable en (0,0).

Como $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=\frac{3(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, además $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$ y $\frac{\partial f(0,0)}{\partial Y}=0$

entonces se puede escribir: $\Delta f(0,0)=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$, aquí se tiene dos posibilidades que $\varepsilon_1=\frac{3\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ y $\varepsilon_2=0$ o $\varepsilon_1=0$ y $\varepsilon_2=\frac{3(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

ahora es suficiente considerar una de las dos posibilidades:

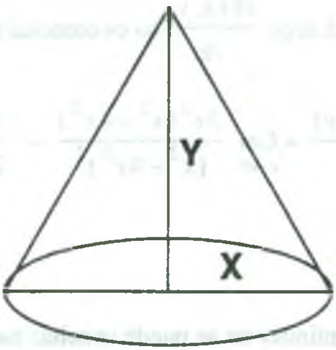
$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x.\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ para esto consideramos el camino siguiente:

$S=\{(\Delta x,\Delta y)\,\varepsilon\, R^2\,/\,\Delta y=\Delta x)\}$; $\quad \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2}{2\Delta x^2}=\frac{3}{2}\neq 0$

por lo tanto f no es diferenciable en (0,0).

34) La altura de un cono circular es de 30 pulg. en un cierto instante y crece a razón de 2 pulg./seg, el radio de la base en ese mismo instante es de 20 pulg./seg. y crece a razón de 1 pulg./seg. Aqué velocidad crece el volumen en aquel instante?

Solución



Datos del problema:

altura = y = 30 pulg.

radio = x = 20 pulg.

$\frac{dx}{dt} = 1$ pulg./seg. , $\frac{dy}{dt} = 2$ pulg./seg.

Volumen del cono: $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi x^2 y}{3}$

además nos pide calcular $\frac{dv}{dt}$ velocidad con que crece el volumen

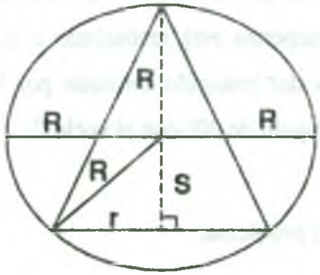
$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$, reemplazando los datos.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi\, x\, y}{3}.\frac{dx}{dt} + \frac{\pi\, x^2}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{240\pi}{3}(1) + \frac{400\pi}{3}(2) = 400\pi + \frac{800\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{200}{3}\pi \ pu\lg.^3/seg.$$

35) El radio de una esfera disminuye a razón de 2cm/seg. y el radio de un cono recto inscrito en dicha esfera aumenta a razón de 1 cm/seg. Calcular la rapidez con que varía el volumen del cono cuando el radio de la esfera es 10 cm. y el radio de la base del cono 6 cm.

Solución



Datos del problema:

radio de la esfera = R =10 cm.

radio de la base del cono = r = 6 cm.

$\frac{dR}{dt} = -2\, cm/seg.,\quad \frac{dr}{dt} = 1\ cm/seg.$

volumen de la esfera $= V = \frac{4}{3}\pi R^3$, volumen del cono $= V = \frac{\pi}{3}\pi^2 h$

Del gráfico se tiene: h = altura del cono = R+5 **... (1)**

además $S^2 = R^2 - r^2$ de donde $S = \sqrt{R^2 - r^2}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $h = R + \sqrt{R^2 - r^2}$ **... (3)**

reemplazando en el volumen del cono, $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2}{3}(R + \sqrt{R^2 - r^2})$

como nos piden $\frac{dv}{dt}$ se tiene: $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{dr}{dt} + \frac{\partial v}{\partial R}.\frac{dR}{dt}$, de donde al calcular se tiene.

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{2\pi r}{3}(R + \sqrt{R^2 - r^2}) - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}}\right)\frac{dr}{dt} + \frac{\pi r^2}{3}\left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)\frac{dR}{dt}$$

reemplazando los datos del problema se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi 6}{3}[20 + 18 - \frac{36}{8}](1) + \frac{\pi(36)}{3}[1 + \frac{10}{8}](-2).$$

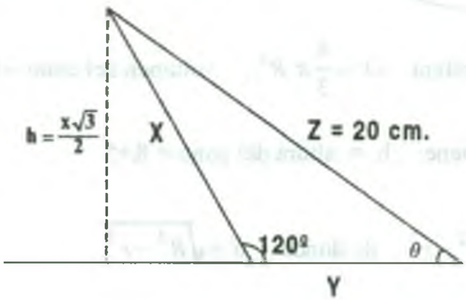
$$\frac{dv}{dt} = 2\pi[\frac{63}{2}] + 12\pi[1 + \frac{5}{4}](-2) = 63\pi - 54\pi = 9\pi$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dt} = 9\pi\ cm^3/seg.$$

36) Una pared hace un ángulo de 120º con el suelo, una escalera de 20 cm. de longitud está recargada contra la pared y su parte superior está resbalando a la rapidez de 3 cm/seg. Qué rápido está cambiando el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo cuando la escalera hace un ángulo de 30º con el suelo.?

Solución

Haremos el gráfico de acuerdo a los datos del problema.



Área del triángulo $= A = \frac{y}{2}\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$, nos piden calcular $\frac{dA}{dt} = ?$, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{4}y \,, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}x}{4}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}y.\frac{dx}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{4}x.\frac{dy}{dt} \qquad \textbf{... (1)}$$

se conoce que cuando $\theta = 30°$, $\frac{dx}{dt} = -3\ cm/seg$ y x = y, luego debemos calcular $\frac{dy}{dt}$ y para esto se tiene mediante la ley de cosenos. $z^2 = x^2 + y - 2xy\cos 30º$

$20 = x^2 + y^2 - xy$ derivando implícitamente respecto a t, se tiene:

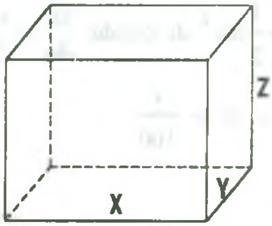
$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ de donde $(2x - y)\frac{dx}{dt} + (2y - x)\frac{dy}{dt} = 0$ como x = y

entonces $\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt}$

por lo tanto $\frac{dA}{dt} = (\frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4}x)\frac{dx}{dt}$, pero x = y $\Rightarrow$ $\therefore \frac{dA}{dt} = 0$.

37) La longitud de una caja rectangular crece a razón de 3 cm/seg., su ancho decrece a razón de 2 cm/seg. y su altura crece a razón de 1 cm/seg. ¿Cuál es la rapidez de variación del volumen $(\frac{dv}{dt})$ en el instante en que la longitud es 15 cm. ancho, 10 cm. y altura 8 cm.?

Solución



Datos del problema:

x = longitud = 15 cm.

y = ancho = 10 cm.

z = altura = 8 cm.

además $\frac{dx}{dt} = 3\,cm/seg.,\ \frac{dy}{dt} = -2\,cm/seg.,\ \frac{dz}{dt} = 1\ cm/seg.$

el volumen de la caja es: V=xyz, donde su derivada total con respecto a t es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = yz,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = xz,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = xy \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{dv}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt}$ ... (3)

reemplazando los datos en (3) se tiene:

$\frac{dv}{dt} = 80(3) + 120(-2) + 150(1) = 240 - 240 + 150$, por lo tanto tenemos:

$$\therefore\ \frac{dv}{dt} = 150\ cm^3/seg.$$

38) La energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v es $k = \frac{1}{2}mv^2$. Si el error máximo al medir m es del 1% y al medir v es de 3%, calcular cuál sería aproximadamente, el error máximo al calcular k.

Solución

El error máximo de m al medirlo es 1% de $m = \frac{m}{100}$, el error máximo de v al medirlo es de 3% de $V = \frac{3v}{100}$, el error máximo de k se obtendrá cuando los errores en las mediciones sean máximas. Por lo tanto como $k = \frac{1}{2}mv^2$ de donde $\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{v^2}{2}$ y $\frac{\partial k}{\partial v} = mv$

además $dk = \frac{v^2}{2}dm + mvdv$ como $dm = \frac{m}{100}$ y $dv = \frac{v}{100}$

$$dk = \frac{v^2}{2}.\frac{m}{100} + mv\frac{(3v)}{100} = \frac{v^2m}{2}(\frac{1}{100} + \frac{6}{100})$$

$$dk = k.\frac{7}{100} \Rightarrow dk = 7\%\ de\ k.$$

entonces el error máximo que se cometería, sería de 7% del valor de k.

3.43 Ejercicios Propuestos.

1) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $z = \arcsen\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ **Rpta.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2y\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$$

b) $z = \ln(xy^2 + yx^2 + \sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2})$ **Rpta.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy+y^2}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy+x^2}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$$

c) $z = xye^{\text{sen}(\pi xy)}$ **Rpta.** $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{\text{sen}(\pi xy)}(1+\pi xy\cos\pi xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{\text{sen}(\pi xy)}(1+\pi xy\cos\pi xy)$$

d) $z = (x^2+y^2)\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ **Rpta.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}2$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}2y$$

e) $z = \sqrt{1-(\frac{x+y}{xy})^2} + \text{arcsen}(\frac{x+y}{xy})$ **Rpta.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$$

2) Si: $z = \frac{xy}{x+y}$, verifique, que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

3) Si: $z = \text{arcsen}(\frac{x-y}{x+y})$, verifique, que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4) Si: $z = x^3 - 3x^2y - 2y^3$, verifique, que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$

5) Si: $u = \text{sen}(\frac{x+y}{z})$, verifique, que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

6) Si: $u = x^2y + y^2z + z^2x$, verifique, que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x+y+z)^2$

7) Si: $z = \frac{1}{x^2+y^2-1}$. Demostrar que: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z(1+z)$

8) Si: $u=\dfrac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$. Demostrar que: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

9) Demostrar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$ si $z=Ln(x^2+y^2+xy)$

10) Demostrar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ si $z=xy+xe^{y/x}$

11) Si: $u=\dfrac{z}{xy+yz+xz}$, probar que: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}+u=0$.

12) Si: $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}$, probar que: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

13) Si: $u=y^2+\operatorname{tg}(ye^{1/x})$, probar que: $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y^2$.

14) Si: $u=\dfrac{e^{xyz}}{e^x+e^y+e^z}$, probar que: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=u(xy+xz+yz-1)$.

15) Si: $u=(\dfrac{x-y+z}{x+y-z})^n$, probar que: $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

16) Si: u = (x - y)(y - z)(x - z), probar que: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

17) Si: $u=\dfrac{z}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, probar que: $3(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z})=u$.

18) Si: $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$, probar que: $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$.

19) Demostrar que la función $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ satisface la ecuación $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{y}$.

20) Demostrar que la función $z=y^{y/x}\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}$, satisface la ecuación $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$

21) Si: $z = e^{x}(x\cos y - y\operatorname{sen} y)$. Demostrar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

22) Demostrar que la ecuación $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, se satisface por $z = Ln\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x})$

23) Si: $V = \operatorname{arctg}(\dfrac{2x}{x^2-y^2})$, Demostrar que:

i) $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ **ii)** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

24) Demostrar que la ecuación $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$ se satisface por $V=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

25) Demostrar que $\phi = Ae^{-kt/2}\operatorname{sen} pt.\cos qx$, satisface a la ecuación $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}+k\dfrac{\partial \phi}{\partial t})$ siempre que $p^2=c^2q^2-\dfrac{k^2}{4}$

26) Si: u = (1 + x) sen h (5x - 2y), comprobar que $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+20\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

27) Demostrar que la función z =f (x).g(y), satisface la ecuación $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial z}{\partial y}$

28) Demostrar que la función $z = g(x)+yg'(x)$, satisface la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

29) Si: $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, mostrar que $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$

30) Si: $r = Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, mostrar que: $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$, $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}$

31) Si: u = A cos (m(x + at)) + B sen (n(x - at)), probar que: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\forall$ A,B,n,a constantes.

32) Si: z = (x - y) Ln (x + y) verifique que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

33) Si: $z = ye^x + xe^y$ probar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$

34) Si: $u=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-y}$, mostrar que: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x})=0$

35) Si: $z = Ln(e^x+e^y)$, mostrar que: $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ y que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0$

36) Demostrar que si z = 2xy + xf (y/x) entonces: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-2xy$

37) Si: $z=f(\frac{x}{y})$; demostrar que: $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

38) Si: $z=(x+y)f(\frac{y}{x})$, donde f es una función arbitraria, demostrar que: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

39) Si: $V(x,y)=xf(\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$, donde f y g son funciones arbitrarias de $\frac{y}{x}$, demuestre que:

$$x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

40) Si f(x,y) es una función de x e y donde x = cos h (u + v) , y = sen h (u - v) demuestre que:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial v^2} = 4\sqrt{(x^2-1)(y^2+1)}\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

41) Si: $z = \frac{1}{y}\left[f(\alpha x + y) + g(\alpha x - y)\right]$ mostrar que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\alpha^2}{y^2}.\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \frac{\partial z}{\partial y})$

42) Si: f(x,y) = 0. Demostrar que: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_y)^3}$

43) Probar que si f(x - aω, y - bω, z - cω) = 0 entonces $a\omega_x + b\omega_y + c\omega_z = 1$

44) Demostrar que la función $z = f(xy) + \sqrt{xy}\,g(\frac{y}{x})$ satisface a la ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

45) Dada la función z = f(x,y) donde $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

46) Sea la función $F(x,y,z) = xy^2 z^3 + (x-3)^5 (y+2)^7 (z-1)^{11}$. hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en los puntos de la superficie de nivel de F que pasa por el punto (3,-2,1).

47) Si: y = f(x - at) + g(x + at), mostrar que: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ cualesquiera que sean las funciones f y g derivables dos veces.

48) Mostrar que la función $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, donde x = u + v, y = u - v, satisface la relación

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{v^2 + u^2}$$

49) Si: u = senx + f(seny - senx), mostrar que $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x+\frac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$ cualquiera que sea la función derivable F.

50) Mostrar que la función $z=f(x^2+y^2)$, donde f(u) es una función derivable, satisface la relación $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

51) $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, mostrar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ cualquiera que sea la función derivable f.

52) Si: F(x,y,z) = 0. Demostrar que: $\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}=1$, $\frac{\partial y}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y}=-1$.

53) Si: $u=f(x)+g(y)+(x-y)g'(y)$, comprobar que $(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$, (f,g son funciones derivables dos veces).

54) Si: $z=y\,f(x^2-y^2)$, comprobar que: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ (f es la función derivable)

55) Si: z = x f(x + y) + y g(x + y), mostrar que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

56) Dado $z=f(y^2-x^2,\ y-x)$, una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Halle: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

57) Dada la función $f(x,y)=e^{ax+by}g(x,y)$, donde $g_x(x,y)=g_y(x,y)=1$. Hallar los valores de las constantes a y b tales que $f_x(x,y)=f_y(x,y)$, $1+f_{xx}(x,y)=a+f_{xy}(x,y)$.

58) La ecuación sen (x+y+ z) + sen xz = 1, define z como una función implícita de x e y Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

59) Si: z, u y v dependen de x e y, hallar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$, siendo $u+v^2=x,\ v+\omega^2=y,$ $\omega+u^2=z$.

60) Sea la superficie S: $z=\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)^{3/2}$ y $\vec{N}=\vec{N}(x,y,z)$ un vector normal a la superficie S en cualquier punto (x,y,z) ≠ (0,0,0), si θ es el ángulo formado por el vector $\vec{N}$ y el eje Z. Hallar $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \cos\theta$

61) Si: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}}$, calcular $f_{x_1x_1}+f_{x_2x_2}+\dots+f_{x_nx_n}$

62) Dada la función z = f(x,y) donde $x=e^u\cos v,\ y=e^u \operatorname{sen} v$, calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

63) Si: u = F(x,y), x = r cos h s, y = r sen h s, calcular: $u_{xx}-u_{yy}$

64) Sea $f(x,y)=xye^{x/y}$. Hallar el valor de la constante "n" tal que satisfaga:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=e^{x/y}\left(n-\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

65) Sea f: $R^2 \longrightarrow R$, una función diferenciable. Hallar la expresión en la que se transforma la ecuación $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, mediante el cambio de valores $x=e^u+e^v,\ y=e^{-u}-e^v$.

66) Sean $u=e^x\cos y,\ v=e^x \operatorname{sen} y$ y ω = ω(u,v), una función de c^2. Si $\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$, pruebe que $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0$

67) Si z = f(x,y) es solución de la ecuación F(x + y + z, Ax + By) = 0, A y b son constantes. Demuestre que $B\frac{\partial z}{\partial x}-A\frac{\partial z}{\partial y}=c$, c constante. Hallar el valor de c.

68) Sea $G(x,y)=\int_{xy}^{x+y}\frac{\text{sen}((x+y)t)}{t}dt$. Halle $\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$

69) Dado $u=xyz\,f(x^2y+z,\ y^2z+x,\ z^2x+y)$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$

70) Si $x+y=(u+v)^n$, $x-y=(u-v)^n$ pruebe que:

$(u^2-v^2)(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})=n^2(x^2-y^2(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$ donde f es cualquier función de x e y.

71) Sea la función z dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2=f(ax+by+cz)$ donde f es una función cualquiera diferenciable y a,b,c constantes. Demostrar que: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

72) Demostrar que la función z, determinada por la ecuación F(x - az, y - bz) = 0, donde F es una función diferenciable cualquiera satisface a la ecuación: $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$

73) Demostrar que la función z, determinada por la ecuación y = x f(z) + g(z) satisface a al ecuación: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{\partial z}{\partial x})^2=0$

74) Si $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , si\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , si\ (x,y)=0\end{cases}$ probar que $f_{12}(0,0)=-1,\ f_{21}(0,0)=1$

75) Dada la función: $f(x,y)=\begin{cases}e^x+e^y+\frac{xy}{x^2+y^2} & , si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & , si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Hallar $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$ **Rpta.** $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=1,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=+\infty$

76) Sea $f(x,y)=\begin{cases} x^2\operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x})-y^2\operatorname{arctg}(\dfrac{x}{y}) & , \ si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ probar que $f_{12}(0,0)=-1$, $f_{21}(0,0)=1$

77) Hallar $f_x(-1,1)$ y $f_y(-1,1)$ de la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{y^2+x} & , \ si \ y^2+x\neq 0 \\ 0 & , \ si \ y^2+x=0\end{cases}$

Rpta. $f_x(x_0,y_0)=-1$, $f_y(x_0,y_0)=6y_0^2$ para (x_0,y_0) puntos de $x=y^2$

78) Dada la función f definida por $f(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & , \ si \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

79) Sea la función F(x + z, 2x + 2y) = 0, donde z = f(x,y). Si F es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas, halle la expresión en términos de las derivadas parciales de F para calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

80) Dada la función f definida por: $f(x,y,z)=\begin{cases} yz+\dfrac{x^2+xz}{x^2+y^2} & , \ si \ x\neq 0 \ , \ y\neq 0 \\ z^2 & , \ si \ x=0 \ , \ y=0\end{cases}$

Hallar $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial z}))(0,0,0)$.

81) Si $\omega=F(xy,\sqrt{x^2+z^2})$, halle $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y\partial z}$

82) Dada la función f definida por: $f(x,y)=\begin{cases} xy(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) & , \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Determinar $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ si existen.

Rpta. $D_{12}f(0,0)=-1$, $D_{21}f(0,0)=1$

83) Si la función f es definida por: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & , \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Determinar $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ si existen.

Rpta. $D_{12}f(0,0)=0$, $D_{21}f(0,0)=0$

84) Demostrar que si la ecuación implícita F(x,y) = 0 define y = y(x) se verifica que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(F_y)^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

85) Considerando la función f(x,y) definida por:

$f(x,y)=\begin{cases} 3xy(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) & , \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \ si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$. Hallar: $f_{xy}(x,y)$ y $f_{xy}(0,0)$

86) Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}$, donde f es la función dada por:

a) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\dfrac{y}{x}+\arccos\dfrac{x}{y}$

b) $f(x,y)=x\ln y-y\ln x$

c) $f(x,y,z)=xy\operatorname{sen}z+xz\cos y+yz\operatorname{tg}x$

87) Si $z = \phi(x,y)$ es una función real de variable real, diferenciable en R. Demuestre que la función dada satisface la expresión indicada.

a) $f(x,y) = x^2\phi(x^2 y)$, $x\frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 2z$

b) $f(x,y) = y\phi(x+y)$, $y(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}) = z$

c) $f(x,y) = x^2\phi(3x+y^2)$, $2xy\frac{\partial f}{\partial x} - 3x\frac{\partial f}{\partial y} = 4yz$

d) $f(x,y) = x\phi(xy^3)$, $3x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 3z$

e) $f(x,y) = e^{x+y}\phi(xe^y)$, $x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = z(x-1)$

88) Constate que la función $z = \text{sen}(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

89) Constate que la función $u = (x-at)^2 + (x+at)^2$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (ecuación del calor).

90) Sea $z = g(x^2 + y^2)$, donde g es una función real de variable real, dos veces derivable.

Demuestre que: $$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

91) Sea $z = x\,\phi(x+y) + y\,\psi(x-y)$ donde ϕ, ψ son funciones reales de variable real, dos veces derivable, demuestre que: $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

92) Sea $f: R^2 \longrightarrow R$ una función de clase C^2, considere la función $F(u,v) = f(uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$. Demuestre que $(u^2+v^2)[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2] = (\frac{\partial F}{\partial u})^2 + (\frac{\partial F}{\partial v})^2$

93) Sea $f(x_1,x_2,...,x_n)=\ln(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$. Calcular $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(1,1,...,1)$

94) Sea $f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+...+\frac{x_{n-1}}{x_n}$. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$

95) Si $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\text{sen}\,x+\text{sen}\,y}$, hallar $\frac{\partial Z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para x = y = 0.

96) Si $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$, hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ para x = y = z = 1

97) Hallar $\frac{\partial f(3,4)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(3,4)}{\partial y}$ si $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$

98) Dada $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Determinar $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

Rpta. $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$

99) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Calcular $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

100) Sea $w=(x+z)e^{y+z}$ donde z = f(x,y).

Demostrar que $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=(1+x+z)(1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})e^{y+z}$

101) Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4x - 15 = 0$

b) $z = (x^2 + y^2)\operatorname{sen} xz$

c) $ye^{xyz}\cos 3xz = 5$

d) $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

102) Dado $w = \operatorname{sen}(\frac{r}{t}) + \ln(\frac{t}{r})$ compruebe que $t\frac{\partial w}{\partial t} + r\frac{\partial w}{\partial r} = 0$.

103) Si $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = r \cos \varphi$.

Calcular $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$.

104) Si $z = x^2 y - y^2 x$, donde $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$.

Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

105) Dada la función $u(x, y, t) = e^{-(m^2+n^2)kt} \operatorname{sen} mx.\cos ny$. Verificar que satisface a la ecuación $u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$ para cualquier elección de las constantes m y n.

106) Si G(x,y), se transforma en H(u,v) mediante la transformación $x = u + v$, $y = uv^2$. Hallar:

i) $\frac{\partial^2 H(u,v)}{\partial u \partial v}$ ii) $\frac{\partial^2 H(1,1)}{\partial u \partial v}$

Si $G_x = G_{yy} = G_{xy} = G_{xx} = G_{yx} = 1$

107) Una función $f: R^n \longrightarrow R$ es homogénea de grado $r \in R$, si para cualquier $t \in R$, $f(t, \vec{x}) = t^r f(\vec{x})$, si $z = f(x,y)$ es una función homogénea de grado $r > 1$ y de clase C^2, probar que: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r(r-1)z$.

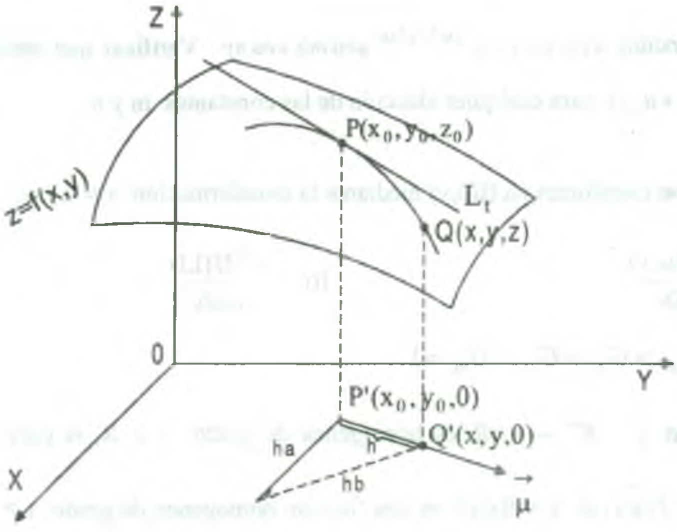
3.44 Derivada Direccional y Gradiente de una Función de Varias Variables.

Para z = f(x,y) se ha definido las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ de la siguiente forma.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

que representa la pendiente de las rectas tangentes en dos direcciones diferentes, en la dirección del eje X y en la dirección del eje Y respectivamente. Luego para determinar la pendiente de la recta tangente en una dirección arbitraria, definiremos un nuevo tipo de derivada llamada "Derivada Direccional" para esto tomemos z = f(x,y) la ecuación de una superficie y $P'(x_0,y_0) \in D_f$, la pendiente de la recta tangente en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = (a,b)$ arbitrario, la cual mostraremos en el gráfico.



El punto $P(x_0,y_0,z_0)$ se encuentra en la superficie S: z = f(x,y), la recta tangente L_t a la curva C es la razón de cambio de z en la dirección de $\vec{\mu}$.

Si Q(x,y,z) es otro punto de C y P', Q' son las proyecciones de P y Q en el plano XY, entonces el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo al vector $\vec{\mu}$, entonces $\overrightarrow{P'Q'} = h\,\vec{\mu} = (h\,a, h\,b)$ para algún h real por lo tanto $(x-x_0,\ y-y_0) = (h\,a, h\,b)$, de donde

$$\begin{cases} x-x_0 = h\,a \\ y-y_0 = h\,b \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{array}{l} x = x_0 + ha \\ y = y_0 + hb \end{array}, \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z-z_0}{h} = \frac{f(x_0+h\,a, y_0+h\,b) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si se toma limite cuando h → 0, se obtiene la razón de cambio de z (con respecto a la distancia) en la dirección de $\vec{\mu}$, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de $\vec{\mu}$.

Definición.- La derivada direccional de f en el punto $P(x_0, y_0)$ en la dirección de un vector unitario $\vec{\mu} = (a,b)$ es:

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\,a, y_0+h\,b) - f(x_0, y_0)}{h}} \quad \text{si este límite existe.}$$

Definición.- La derivada parcial de f en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección de un vector unitario $\vec{\mu} = (a,b,c)$ es

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\,a, y_0+h\,b,\ z_0+h\,c) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}} \quad \text{si este límite existe.}$$

Generalizando y usando la notación vectorial.

Definición.- La derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$, en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$ es: $\boxed{D_{\vec{\mu}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}) - f(\vec{x}_0)}{h}}$, si este límite existe.

Ejemplo.- Hallar la derivada de la función $f(x,y)=x^3-xy-2y^2$ en el punto P(1,2) y en la dirección que va desde este punto al punto N(4,6).

<u>**Solución**</u>

Sea $\vec{a}=\overrightarrow{PN}=N-P=(4,6)-(1,2)=(3,4) \Rightarrow \|\vec{a}\|=5$

el vector unitario es $\vec{\mu}=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$, por definición de derivada direccional se tiene:

$$D_{\vec{\mu}}f(1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f((1,2)+h\vec{\mu})-f(1,2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{3h}{5},2+\frac{4h}{5})-f(1,2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[(1+\frac{3h}{5})^3-(1+\frac{3h}{5})(2+\frac{4h}{5})-2(2+\frac{4h}{5})^2]-(1-2-8)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(\frac{27}{125}h^3+\frac{12}{25}h^2-\frac{37}{5}h)\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}(\frac{27}{125}h^2+\frac{12}{25}h-\frac{37}{5})=-\frac{37}{5}$$

Observación.-

1) La derivada direccional da la razón de cambio de los valores de la función f(x,y) con respecto a la distancia en el plano XY, medida en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}=(a,b)$.

2) La derivada direccional $D_{\vec{\mu}}f(P_0)$ representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva $\vec{\alpha}$ en el punto P_0.

3) Si el vector unitario se toma $\vec{\mu}=\vec{i}=(1,0)$ se tiene

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}$$

es decir que se obtiene la derivada parcial de f con respecto a x.

4) Si el vector unitario se toma $\vec{\mu} = \vec{j} = (0,1)$ se tiene

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

es decir , se obtiene la derivada parcial de f con respecto a y.

Ejemplo.- Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en el punto P(4,3) en la dirección $\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$

<u>Solución</u>

Como $\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, por definición de derivada direccional.

$$D_{\vec{\mu}} f(4,3) = \lim_{h\to 0} \frac{f((4,3) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) - f(4,3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(4 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 3 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(4,3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(4+\frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (3+\frac{h}{\sqrt{2}})^2] - [4^2 - 3^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(7+\sqrt{2}h) - (7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2}h}{h} = \sqrt{2}$$

3.45 Definición.

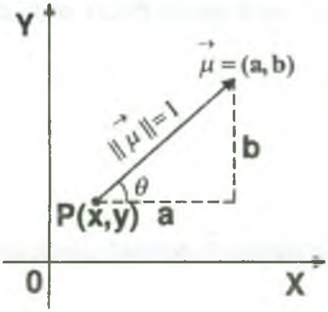
Sea f una función de dos variables x e y y sea $\vec{\mu} = \cos\theta . \vec{i} + \operatorname{sen}\theta . \vec{j}$ un vector unitario, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{\mu}$ se denota por $D_{\vec{\mu}} f$ y es expresado por:

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x,y)}{h}}$$

3.46 Teorema.

Si f es una función diferenciable de x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = \cos\theta.\vec{i} + \operatorname{sen}\theta.\vec{j}$ es:

$D_{\vec{\mu}} f(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$ donde θ es el ángulo formado por el vector $\vec{\mu}$ con el eje OX.



Demostración

$\|\vec{\mu}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ por ser unitario $\vec{\mu}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{1} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

si se define una función g de una variable h mediante $g(h) = f(x_0 + ha,\, y_0 + hb)$ entonces por definición de derivada se tiene.

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,\, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h} = D_{\vec{\mu}} f(x_0,y_0) \qquad \text{... (1)}$$

por otra parte podemos escribir g(h) = f(x,y) en donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, luego por la regla de la cadena se tiene.

$$g'(h) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.\frac{dy}{dh}$$

$$= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.b = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.\operatorname{sen}\theta$$

si se sustituye h = 0 se tiene $x = x_0$, $y = y_0$

$$g'(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.\cos\theta + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.\operatorname{sen}\theta \qquad \ldots (2)$$

comparando (1) y (2) se tiene:

$$D_{\vec{\mu}} f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \quad D_{\vec{\mu}} f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo.- Hallar la derivada de la función $z = f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ en el punto P(1,2) y en la dirección que forma con el eje X un ángulo de 60º.

Solución

$$D_{\vec{\mu}} f(1,2) = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}\cos 60º + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}\operatorname{sen} 60º$$

$$f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - y \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 2 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -1 - 8 = -9 \end{cases}$$

$$D_{\vec{\mu}} f(1,2) = 0(\frac{1}{2}) - 9\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

3.47 Teorema.

Si f es una función diferenciable de x, y, z, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = \cos\alpha.\vec{i} + \cos\beta.\vec{j} + \cos\gamma.\vec{k}$, es:

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma}$$

donde α, β y γ son los ángulos directores de $\vec{\mu}$

Demostración

La demostración, es similar al teorema anterior, se deja como ejercicio.

Ejemplo.- Hallar la derivada de la función $f(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz$ en el punto p(1,1,2) en la dirección que forma ángulos de 60º, 45º y 60º respectivamente, con los ejes coordenadas.

Solución

$$D_{\vec{\mu}}f(1,1,2)=\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial x}\cos 60^{\circ}+\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial y}\cos 45^{\circ}+\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial z}\cos 60^{\circ}$$

$$f(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=y^2-yz \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=2xy-xy \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=3z^2-xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(1,1,2)}{\partial x}=-1 \\ \frac{\partial f(1,1,2)}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial f(1,1,2)}{\partial z}=11 \end{cases}$$

ahora reemplazando se tiene:

$$D_{\vec{\mu}}f(1,1,2)=(-1)(\frac{1}{2})+0.\frac{\sqrt{2}}{2}+11(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+\frac{11}{2}=5 \qquad \therefore \quad D_{\vec{\mu}}f(1,1,2)=5$$

Ejemplo.- ¿Cuál es el valor del ángulo θ para el cual la derivada direccional de $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ en el punto p(1,2) es mínimo, y cuál es éste valor mínimo.

Solución

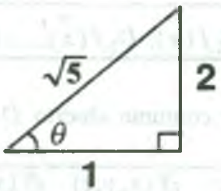
Sea $\vec{\mu}=(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)$ el vector unitario, entonces:

$$D_{\vec{\mu}}f(1,2)=\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \qquad \ldots (1)$$

$$f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}=-\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

ahora reemplazando estos datos en (1)

$D_{\overrightarrow{\mu}} f(1,2) = -\dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{5}} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}} = F(\theta) \Rightarrow F'(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{5}} - \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{5}} = 0$ para obtener los números críticos $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{5}} - \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = 2 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} 2$



$F''(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{5}} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}}$, evaluando en $\theta = \operatorname{arc\,tg} 2$.

como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$F''(\operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > 0$$

por lo tanto $\theta = \operatorname{arctg} 2$ corresponde a un valor mínimo. Luego el valor mínimo de la derivada direccional es: $D_{\overrightarrow{\mu}} f(1,2) = -\dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{5}} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{1}{2}$

3.48 Propiedades de la Derivada Direccional.

Si $f, g: D \subset R^n \longrightarrow R$, son funciones diferenciables en el conjunto abierto $D \subset R^n$, entonces se tiene:

1) $D_{\overrightarrow{\mu}} (f \pm g)(\vec{x}) = D_{\overrightarrow{\mu}} f(0\,\vec{x}) \pm D_{\overrightarrow{\mu}} g(\vec{x})$

2) $D_{\overrightarrow{\mu}} (f.g)(\vec{x}) = f(\vec{x}).D_{\overrightarrow{\mu}} g(\vec{x}) + g(\vec{x}) D_{\overrightarrow{\mu}} f(\vec{x})$

3) $D_{\overrightarrow{\mu}} (\dfrac{f}{g})(\vec{x}) = \dfrac{g(\vec{x}) D_{\overrightarrow{\mu}} f(\vec{x}) - f(\vec{x}).D_{\overrightarrow{\mu}} g(\vec{x})}{g(\vec{x})^2}$, si $g(\vec{x}) \neq 0$, $\forall\, \vec{x} \in D$

3.49 Gradiente de una Función.

Si la función $f: D\subset R^n \longrightarrow R$ es definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$ en donde $D_1 f(\vec{x}), D_2 f(\vec{x}),\ldots D_n f(\vec{x})$ existen, entonces el vector gradiente de f es denotado por $\nabla f(\vec{x}) = \text{gra } f(\vec{x})$ y es definido por: $\boxed{\text{gra } f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = (D_1 f(\vec{x}), D_2 f(\vec{x}),\ldots, D_n f(\vec{x}))}$

para el caso de la función $f: D\subset R^3 \longrightarrow R$ definida en un conjunto abierto $D\subset R^3$, en donde $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ existen, se tiene: $\boxed{\nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z})}$

3.50 Propiedades del Gradiente.

Si las funciones $f, g: D\subset R^n \longrightarrow R$, son diferenciables en D, entonces se tiene:

1) $\nabla(f \pm g)(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \pm \nabla g(\vec{x})$

2) $\nabla(\alpha . f(\vec{x})) = \alpha \nabla f(\vec{x})$

3) $\nabla(f.g)(\vec{x}) = f(\vec{x}).\nabla g(\vec{x}) + g(\vec{x}).\nabla f(\vec{x})$

4) $\nabla(\frac{f}{g})(\vec{x}) = \frac{g(\vec{x}).\nabla f(\vec{x}) - f(\vec{x}).\nabla g(\vec{x})}{(g(\vec{x}))^2}$, si $g(\vec{x}) \neq 0$

3.51 Forma Alternativa de la Derivada Direccional.

i) Si f es una función diferenciable de x e y, la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$ es.

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{\mu}}$$

ii) Si f es una función diferenciable de x,y,z, la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{\mu}$ es.

$$\boxed{D_{\vec{\mu}} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).\vec{\mu}}$$

Ejemplo.- Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y)=(x-1)y^2e^{xy}$ en $(0,1)$ en la dirección hacia (-1,3).

Solución

Como $D_{\vec{\mu}} f(0,1) = \nabla f(0,1).\vec{\mu}$, entonces calculamos

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (y^2e^{xy} + (x-1)y^2e^{xy},\ 2(x-1)ye^{xy} + x(x-1)y^2e^{xy}) \quad \text{de donde}$$

$$\nabla f(0,1) = (1-1,\ -2+0) = (0,-2) \Rightarrow \nabla f(0,1) = (0,-2)$$

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,3)-(0,1) = (-1,2)$ donde A(0,1) y B(-1,3)

como $\vec{a} = (1,2) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{5}$

Si $\vec{\mu} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, ahora calculando $D_{\vec{\mu}} f(0,1) = \nabla f(0,1).\vec{\mu} = (0,-2).(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$$D_{\vec{\mu}} f(0,1) = 0 - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{de donde} \quad \therefore \quad D_{\vec{\mu}} f(0,1) = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Ejemplo.- Hallar la derivada direccional de la función f(x,y,z) = xy + yz + xz en el punto p(1,1,1) y en la dirección del vector $\vec{a} = (2,1,-1)$.

Solución

Como $\vec{a}=(2,1,-1) \Rightarrow \|\vec{a}\|=\sqrt{6}$, entonces un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ es

$$\vec{\mu}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}) \Rightarrow \nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(y+z,x+z,x+y)$$

además $\nabla f(1,1,1)=(2,2,2)$ como $D_{\vec{\mu}}f(1,1,1)=\nabla f(1,1,1).\vec{\mu}$

$$=(2,2,2).(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \therefore \quad D_{\vec{\mu}}f(1,1,1)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Observación.- Si α es el ángulo entre $\nabla f(\vec{x})$ y $\vec{\mu}$ entonces.

$$D_{\vec{\mu}}f(\vec{x})=\nabla f(\vec{x}).\vec{\mu}=\|\nabla f(\vec{x})\|\,\|\vec{\mu}\|\cos\alpha=\|\nabla f(\vec{x})\|\cos\alpha$$

es decir: $D_{\vec{\mu}}f(\vec{x})=\|\nabla f(\vec{x})\|\cos\alpha$ además sabemos: $-1\le \cos\alpha\le 1$

$$-\|\nabla f(\vec{x})\|\le\|\nabla f(\vec{x})\|\cos\alpha\le\|\nabla f(\vec{x})\|$$

por lo tanto en cada punto $\vec{x}$ el valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(\vec{x})\|$ y el valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(\vec{x})\|$.

Entre todas las direcciones a lo largo de las cuales la función f crece, la dirección del gradiente es la del crecimiento mas rápido, mientras que el gradiante cambiado de signo señala la dirección de máxima disminución.

Ejemplo.- Para la función $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$, en el punto (3,2), hallar la mínima derivada direccional y el vector unitario en esa dirección.

Solución

Calculando el gradiente de f, es decir:

$$\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(\frac{y}{(x+y)^2},\frac{-x}{(x+y)^2}) \Rightarrow \nabla f(3,2)=(\frac{2}{25},-\frac{3}{25})$$

La derivada direccional mínima se produce cuando el vector unitario $\vec{\mu}$ y el vector gradiente $\nabla f(3,2)$ tienen sentidos opuestos, es decir: $\vec{\mu}=-\frac{\nabla f(3,2)}{\|f(3,2)\|}$

como $\nabla f(3,2)=(\frac{2}{25},-\frac{3}{25}) \Rightarrow \|\nabla f(3,2)\|=\frac{\sqrt{13}}{25}$

$$\vec{\mu}=-\frac{\nabla f(3,2)}{\|f(3,2)\|}=-(\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}})=(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$$

y la derivada direccional mínima es: $D_{\vec{\mu}}f(3,2)=-\|\nabla f(3,2)\|=-\frac{\sqrt{13}}{25}$

Ejemplo.- La distribución de temperatura de una placa metálica está dada por la función $T(x,y)=xe^{2y}+y^3e^x$.

i) ¿En qué dirección aumenta la temperatura más rápidamente en el punto (2,0)? ¿Cuál es el coeficiente de variación?.

ii) ¿En qué dirección decrece la temperatura más rápidamente?

Solución

i) En el punto (2,0) la temperatura aumenta más rápidamente en la dirección del gradiente $\nabla T(2,0)$.

$$\nabla T(x,y)=(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y})=(e^{2y}+y^3e^x,\ 2xe^{2y}+3y^2e^x)$$

$\nabla T(2,0)=(1+0,\ 4+0)=(1,4)$. El coeficiente de variación es $\|\nabla T(2,0)\|=\sqrt{17}$

ii) La temperatura disminuye más rápidamente en la dirección de $-\nabla T(2,0)=(-1,-4)$

Ejemplo.- Hallar la derivada de la función z = arc.tg(xy) en el punto (1,1) en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

Solución

Como la dirección del vector unitario es la bisectriz del primer ángulo coordenado, entonces el vector unitario es $\vec{\mu}=(\cos 45^{\circ},\operatorname{sen}45^{\circ})=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

sea z = f(x,y) = arc.tg (xy), calculando el gradiente

$$\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(\frac{y}{1+x^2y^2},\frac{x}{1+x^2y^2}) \Rightarrow \nabla f(1,1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

Luego $D_{\vec{\mu}}f(1,1)=\nabla f(1,1).\vec{\mu}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}).(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejemplo.- La ecuación de la superficie de un cerro es $z=900-2x^2-2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje X apunta al Este, y el eje Y apunta al Norte.

Un hombre está en el punto correspondiente a $(6,-\sqrt{14},800)$.

i) ¿Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada?.

ii) Si el hombre se mueve en la dirección NOR-ESTE ¿está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es la rapidez?

iii) Si el hombre se mueve en la dirección SUR-OESTE ¿está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez?

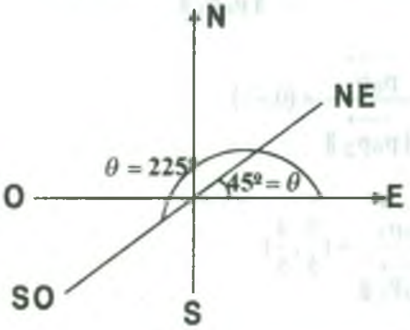
Solución

i) La dirección de la ladera más pronunciada es la dirección del gradiente de donde el vector unitario en la dirección del gradiente $\nabla f(6,-\sqrt{14})$ es $\vec{\mu}=\frac{\nabla f(6,-\sqrt{14})}{\|f(6,-\sqrt{14})\|}$ de donde

$\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(-4x,-4y)$ y $\nabla f(6,-\sqrt{14})=(-24,4\sqrt{14})$ de donde

$\vec{\mu}=(-\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{7}}{5})$ es la dirección de la ladera más pronunciada.

ii) Graficando de acuerdo a los datos se tiene.



Para la dirección Noreste tenemos $\theta = 45°$, entonces

$\vec{\mu} = (\cos 45°, \operatorname{sen} 45°) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ como

$$\nabla f(6, -\sqrt{14}) = (-24, 4\sqrt{14})$$

$$D_{\vec{\mu}} f(6, -\sqrt{14}) = \nabla f(6, -\sqrt{14}).\vec{\mu}$$

$$D_{\vec{\mu}} f(6, -\sqrt{14}) = (-24, 4\sqrt{14}).(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -12\sqrt{2} + 2\sqrt{28} = -12\sqrt{2} + 4\sqrt{7} \cong -6.39$$

por lo tanto , el hombre esta bajando con una rapidez de 6.39 m/seg.

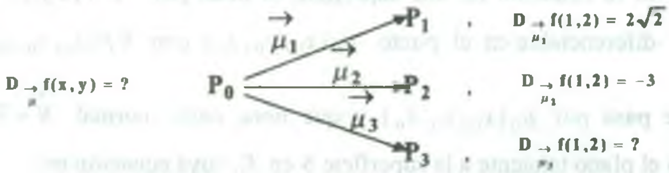
iii) Para este caso se tiene $\theta = 225°$, entonces $\vec{\mu} = (\cos 225°, \operatorname{sen} 225°) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

por lo tanto $D_{\vec{\mu}} f(6, -\sqrt{14}) = (-24, 4\sqrt{14}).(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{7} \cong 9.44$

por lo tanto , el hombre esta bajando con una rapidez de 9.44 m/seg.

Ejemplo.- La derivada direccional de una función z = f(x,y) en el punto $p_0(1,2)$, en la dirección hacia $p_1(2,3)$ es $2\sqrt{2}$, y en la dirección hacia $p_2(1,0)$ es -3. Calcular la derivada direccional en $p_0(1,2)$, en la dirección hacia $p_3(4,6)$.

<u>**Solución**</u>



calculando $\overrightarrow{p_0p_1}=(1,1) \Rightarrow \|\overrightarrow{p_0p_1}\|=\sqrt{2}$ entonces $\overrightarrow{\mu_1}=\dfrac{\overrightarrow{p_0p_1}}{\|\overrightarrow{p_0p_1}\|}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

$\overrightarrow{p_0p_2}=(0,-2) \Rightarrow \|\overrightarrow{p_0p_2}\|=2$ entonces $\overrightarrow{\mu_2}=\dfrac{\overrightarrow{p_0p_2}}{\|\overrightarrow{p_0p_2}\|}=(0,-1)$

$\overrightarrow{P_0P_3}=(3,4) \Rightarrow \|\overrightarrow{P_0P_3}\|=5$ entonces $\overrightarrow{\mu_3}=\dfrac{\overrightarrow{p_0p_3}}{\|\overrightarrow{P_0P_3}\|}=(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$

como $D_{\overrightarrow{\mu}}f(x,y)=\nabla f(x,y).\overrightarrow{\mu}$, entonces tomemos $\nabla f(1,2)=(a,b)$, de donde

$$D_{\overrightarrow{\mu_1}}f(1,2)=\nabla f(1,2).\overrightarrow{\mu_1}=(a,b)(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow a+b=4 \quad \text{... (1)}$$

$$D_{\overrightarrow{\mu_2}}f(1,2)=\nabla f(1,2).\overrightarrow{\mu_2}=(a,b)(0,-1)=0-b=-3 \Rightarrow b=3 \text{ de donde } a=1$$

por lo tanto $D_{\overrightarrow{\mu_3}}f(1,2)=\nabla f(1,2).\overrightarrow{\mu_3}=(1,3)(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=\frac{3}{5}+\frac{12}{5}=3$ $\therefore D_{\overrightarrow{\mu_3}}f(1,2)=3$

3.52 Planos Tangentes y Normales a las Superficies.

Definición.- Si la ecuación de una superficie S es dado por S: F(x,y,z) = 0, donde F_x, F_y, F_z son continuas y no todos ceros en el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ de S, entonces un vector normal a la superficie S en el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ es $\overrightarrow{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$.

Definición.- Si la ecuación de una superficie es dado por S: F(x,y,z) = 0, donde F es diferenciable en el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ con $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Entonces el plano que pasa por $p_0(x_0,y_0,z_0)$ y que tiene como normal $\overrightarrow{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se conoce como el plano tangente a la superficie S en P_0 cuya ecuación es:

$$\boxed{P: \vec{N}.[(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)]=0}$$

como $\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0))$

$$P: (F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0)).(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

$$\boxed{P: F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$$

Definición.- La recta normal a la superficie S: F(x,y,z)= 0 en el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ es la recta que pasa a través del punto p_0 y sigue la dirección del vector normal el plano tangente a la superficie S en el punto p_0 y su ecuación simétrica de la recta normal a S en $p_0(x_0,y_0,z_0)$ es:

$$\boxed{L_n: \frac{(x-x_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

Ejemplo.- Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^{3/2}+y^{3/2}+z^{3/2}-17$ en el punto (4,4,1).

Solución

Sea $F(x,y,z)=x^{3/2}+y^{3/2}+z^{3/2}-17$ donde la normal del plano tangente a la superficie es

$\vec{N}=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=(\frac{3}{2}\sqrt{x},\frac{3}{2}\sqrt{y},\frac{3}{2}\sqrt{z})$ en el punto (4,4,1) se tiene $\vec{N}=\frac{3}{2}(2,2,1)$

P: $\vec{N}.((x,y,z)-(4,4,1))=0$ entonces P: $(2,2,1).(x-4,\ y-4,\ z-1)=0$

$\therefore$ P: $2x+2y+z=17$, $L_N=\{(4,4,1)+t(2,2,1)/t\in R\}$

Ejemplo.- Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $4x^2+y^2-16z=0$ en el punto (2,4,2).

Solución

Sea $F(x,y,z)=4x^2+y^2-16z$, donde la normal del plano tangente a la superficie es

$\vec{N}=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=(8x,\ 2y,\ -16)$ en el punto (2,4,2) es $\vec{N}=(16,\ 8,\ -16)=8(2,1,-2)$

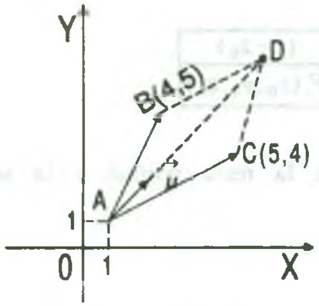
P: $\vec{N}.((x,y,z)-(2,4,2))=0 \Rightarrow$ P: $(2,1,-2).(x-2,\ y-4,\ z-2)=0$

$\therefore$ P: $2x+y-2z=4$, $L_N=\{(2,4,2)+t(2,1,-2)\,/\,t\in R\}$

3.53 Ejercicios Desarrollados.

1) Sean los puntos A(1,1), B(4,5), C(5,4). Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y)=\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}y+5$ en la dirección de la bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$ en A.

Solución



$\vec{AB}=B-A=(3,4)$

$\vec{AC}=C-A=(4,3)$

$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}=(7,7) \Rightarrow \|\vec{AD}\|=7\sqrt{2}$

$\vec{\mu}=\frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(2\sqrt{2}x,2\sqrt{2})\Rightarrow \nabla f(1,1)=(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

$D_{\vec{\mu}}f(1,1)=\nabla f(1,1).\vec{\mu}=(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}).(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=2+2=4 \qquad \therefore\ D_{\vec{\mu}}f(1,1)=4$

2) Sea $f(x,y,z)=100(e^{xy}+\ln z)$, Hallar la derivada direccional de f en la dirección $\vec{a}=(2,0,1)$.

Solución

Calculando el vector unitario en la dirección de $\vec{a}=(2,0,1)$; es decir:

$$\vec{\mu}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=100(ye^{xy},xe^{xy},\frac{1}{z}),\text{ como } D_{\vec{\mu}}f(x,y,z)$$

$$\nabla f(x,y,z).\vec{\mu}=100(ye^{xy},xe^{xy},\frac{1}{z}).(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{200ye^{xy}}{\sqrt{5}}+0+\frac{100}{\sqrt{5}z}=\frac{100}{\sqrt{5}}(2ye^{xy}+\frac{1}{z})$$

3) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,;\,si(x,y)\neq(0,0)\\ 1\;;\,si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Hallar los vectores $\vec{\mu}$ en los cuales existe la derivada direccional $D_{\vec{\mu}}f(0,0)$.

Solución

Consideremos el vector unitario $\vec{\mu}=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$D_{\vec{\mu}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\,\vec{\mu})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta,\,h\operatorname{sen}\theta)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{h^2\cos^2\theta+h^2\operatorname{sen}^2\theta}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}2\theta-1}{h}$$

Luego $D_{\vec{\mu}}f(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}2\theta-1}{h}$ existe si sen 2θ - 1 = 0 y en este caso $D_{\vec{\mu}}f(0,0)=0$, es decir, la derivada direccional existe, si sen 2θ - 1 = 0, de donde $\operatorname{sen}2\theta=1 \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}$ ó $2\theta=\frac{5\pi}{2}$ o sea $\theta=\frac{\pi}{4}$ ó $\theta=\frac{5\pi}{4}$, como el vector unitario es $\mu=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ entonces

$$\vec{\mu}=(\cos\frac{\pi}{4},\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\text{ ó }\vec{\mu}=(\cos\frac{5\pi}{4},\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

4) Si $f: R^n \longrightarrow R$ es una función tal que $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})f(\vec{y})$ y $D_{\vec{\mu}} f(\vec{0}) = 1$ y $f(\vec{0}) = 1$, Demostrar que $D_{\vec{\mu}} f(\vec{x}) = f(\vec{x})$

Solución

$$D_{\vec{\mu}} f(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{\mu}) - f(\vec{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}).f(h\vec{\mu}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(\vec{x})(\frac{f(h\vec{\mu})-1}{h}) = f(\vec{x}).\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{0}+h\vec{\mu})-f(\vec{0})}{h} = f(\vec{x})D_{\vec{\mu}} f(\vec{0}) = f(\vec{x}).1 = f(\vec{x})$$

$$\therefore\ D_{\vec{\mu}} f(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

5) Sea la función $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ y C la curva de intersección de las superficies $2x + y + z = 2$; $2x^2 + y - z = 0$.

Hallar la derivada direccional de f en el punto (0,0,0) y en la dirección del vector curvatura de C ,en el punto (0,1,1).

Solución

Sea $C:\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x^2+y-z=0 \end{cases}$; la curva de intersección de las dos superficies.

Ahora parametrizaremos la curva C.

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x^2+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow\ y = 1-x-x^2\ ,\ z = 1-x+x^2$$

Luego para x = t, $y = 1-t-t^2$, $z = 1-t+t^2$

por lo tanto la curva C en forma vectorial es: $C: \vec{\alpha}(t) = (t, 1-t-t^2, 1-t+t^2)$, derivando se tiene: $\vec{\alpha}'(t) = (1, -1-2t, -1+2t)$, $\vec{\alpha}''(t) = (0,-2,2)$ como $\vec{\alpha}(t_0) = (0,1,1) \Rightarrow t_0 = 0$ de donde: $\vec{\alpha}'(0) = (1, -1, -1)$, $\vec{\alpha}''(t) = (0,-2,2)$.

El vector curvatura $\vec{k}(0)$ tiene la dirección de la normal $\vec{N}(0)$, de donde

$$\vec{N}(0)=\frac{\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)}{\|\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)\|}\text{, entonces } \vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(-4,-2,-2)$$

$$\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(0,-6,6) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)\|=6\sqrt{2}$$

$$\vec{N}(0)=\frac{\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)}{\|\vec{\alpha}'(0)x\vec{\alpha}''(0)x\vec{\alpha}'(0)\|}=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

por lo tanto el vector unitario en la dirección del vector curvatura es $\vec{\mu}=\vec{N}(0)=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, además $f(x,y,z)=e^{x+y+z}$ entonces $\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$

$$\nabla f(x,y,z)=(e^{x+y+z},e^{x+y+z},e^{x+y+z}) \Rightarrow \nabla f(0,0,0)=(1,1,1)$$

calculando $D_{\vec{\mu}}f(0,0,0)=\nabla f(0,0,0).\vec{\mu}=(1,1,1).(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=0-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

$$\therefore \quad D_{\vec{\mu}}f(0,0,0)=0$$

6) Hallar los valores de las constantes a,b y c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ en el punto (1,2,-1) tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje Z.

Solución

La derivada direccional máxima se produce cuando el vector unitario $\vec{\mu}$ y el vector $\nabla f(x,y,z)$ tienen la misma dirección, y como el valor de la derivada direccional tiene el valor máximo 64, en la dirección paralela al eje Z, entonces $\nabla f(1,2,-1)$ // eje Z.

$$\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(ay^2+3cx^2z^2,\ 2axy+bz,\ by+2cx^3z)$$

$$\nabla f(1,2,-1)=(4a+3c,\ 4a-b,\ 2b-2c)$$

como $\nabla f(1,2,-1)//(0,0,1) \Rightarrow \exists\lambda\in R$ tal que $\nabla f(1,2,-1)=\lambda(0,0,1)$

$$\left(4a+3c,\ 4a-b,\ 2b-2c\right)=(0,0,\lambda)$$

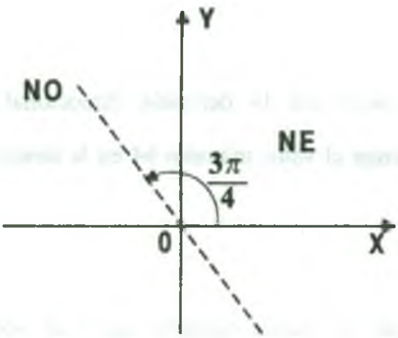
$$\begin{cases}4a+3c=0\\4a-b=0\\2b-2c=\lambda\end{cases}\Rightarrow\ \begin{matrix}b=4a\\c=-\dfrac{4a}{3}\end{matrix}$$

además $\|\nabla f(1,2,-1)\|=\sqrt{(4a+3c)^2+(4a-b)^2+(2b-2c)^2}=64$

$=\sqrt{0+0+(8a+\frac{8a}{3})^2}=64$ entonces 32a = 196 $\Rightarrow$ a = 6, b = 24, c =-8

7) La ecuación de una colina es $f(x,y)=74-x^2-7xy-4y^2$, el eje Y, señala hacia el norte y el eje x hacia el este; un hombre está en el punto (-1,5,8) sobre la colina y se mueve hacia el Nor-Oeste ¿Está subiendo ó bajando? ¿En qué dirección descenderá más rápidamente?.

Solución



Calculando el gradiente de f(x,y) en el punto (-1,5)

$\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=(-2x-7y,\ -7x-8y)$, de donde

$\nabla f(-1,5)=(-33,\ -33)$

Si el hombre se mueve hacia el Nor-Oeste, entonces el ángulo que da su dirección es $\frac{3\pi}{4}$ y por lo tanto el vector unitario en esta dirección es $\vec{\mu}=(\cos\frac{3\pi}{4},\ \text{sen}\frac{3\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y la derivada direccional de f en el punto (-1,5) es:

$D_{\vec{\mu}} f(-1,5) = \nabla f(-1,5).\vec{\mu} = (-33,-33).(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{33\sqrt{2}}{2} - \frac{33\sqrt{2}}{2} = 0$ es decir $D_{\vec{\mu}} f(-1,5) = 0$, como la derivada direccional es cero, esto quiere decir que no hay variación en la función, por lo tanto el hombre al caminar hacia el Nor-oeste no sube ni baja, es decir que se desplaza siguiendo la trayectoria de una curva de nivel.

El hombre descenderá más rápidamente si se mueve en la dirección contraria al vector gradiente, es decir en la dirección del vector (33, 33).

8) Consideremos la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demostrar que f tiene derivada direccional en cualquier dirección en (0,0) pero no es diferenciable en ese punto.

Solución

Consideremos el vector unitario $\vec{\mu} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h\,\vec{\mu}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos^2\theta . h\operatorname{sen}\theta - 0}{h(h^4 \cos^4\theta + h^2 \operatorname{sen}^2\theta)} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \cos^2\theta . \operatorname{sen}\theta}{h^3 (h^2 \cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2\theta . \operatorname{sen}\theta}{h^2 \cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \text{ si sen } \theta \neq 0$$

Si sen 0 = 0 entonces $D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\cos\theta, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$

por lo tanto a la derivada direccional expresaremos así:

$$D_{\vec{\mu}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} & si \quad \operatorname{sen}\theta \neq 0 \\ 0 & si \quad \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Luego la función f tiene derivada direccional en toda dirección.

Ahora veremos si f es continua en (0,0), para esto se debe tener $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

Luego tomaremos un camino que contenga a (0,0) como punto de acumulación.

$S = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, y = x^2\right\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

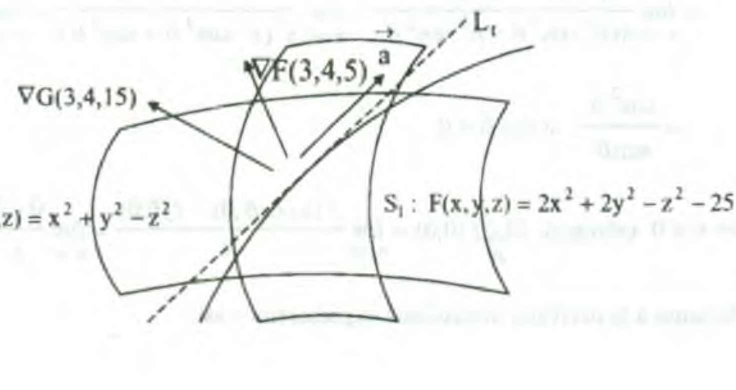
por lo tanto f no es continua en (0,0), Luego concluimos que f no es diferenciable en ese punto.

9) Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \;\wedge\; x^2 + y^2 = z^2$ en el punto (3,4,5).

Solución

Por calcular $D_{\vec{\mu}} f(3,4,5) = \nabla f(3,4,5).\vec{\mu}$, donde $\vec{\mu} = \dfrac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$ siendo

$\vec{a} = \nabla F(3,4,5) \times \nabla G(3,4,5)$ y $F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 25$, $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$



$$\begin{cases} \nabla F(x,y,z)=(4x,4y,-2z)=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}) \\ \nabla G(x,y,z)=(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z})=(2x,2y,-2z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla F(3,4,5)=(12,16,-12) \\ \nabla G(3,4,5)=(6,8,-10) \end{cases}$$

$$\vec{a}=\nabla F(3,4,5)x\nabla G(3,4,5)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 16 & -10 \\ 6 & 8 & -10 \end{vmatrix}=20(-4,3,0) \Rightarrow \|\vec{a}\|=100$$

$$\vec{\mu}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0) \Rightarrow \vec{\mu}=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0)$$

$$\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(2x,4y,-2z) \Rightarrow \nabla f(3,4,5)=(6,16,-10)$$

$$D_{\vec{\mu}}f(3,4,5)=\nabla f(3,4,5).\vec{\mu}=(6,16,-10).(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0)=-\frac{24}{5}+\frac{48}{5}+0=\frac{24}{5}$$

$$\therefore \quad D_{\vec{\mu}}f(3,4,5)=\frac{24}{5}$$

10) Si la ecuación F(x,y,z) = 0 define implícitamente a una superficie S, entonces el vector ∇F(x,y,z) es un vector normal a la superficie S en el punto (x,y,z). Halle, la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=x^2+xy+y+y^2$ en el punto (1,2,1) y en la dirección de un vector ortogonal a la superficie $z=2x^2-3y^2+1$ en (2,1,6).

Solución

El vector ortogonal a la superficie S_1: $F(x,y,z)=2x^2-3y^2-z+1$ es:

$$\nabla F(2,1,6)=(\frac{\partial F(2,1,6)}{\partial x},\frac{\partial F(2,1,6)}{\partial y},\frac{\partial F(2,1,6)}{\partial z})$$

$$\nabla F(x,y,z)=2x^2-3y^2-z+1 \Rightarrow \nabla F(x,y,z)=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=(4x,-6y,-1)$$

$\nabla F(2,1,6)=(8,-6,-1) \Rightarrow \|\nabla F(2,1,6)\|=\sqrt{101}$

como $\vec{\mu}=\dfrac{\nabla F(2,1,6)}{\|\nabla F(2,1,6)\|}=(\dfrac{8}{\sqrt{101}},\dfrac{-6}{\sqrt{101}},\dfrac{-1}{\sqrt{101}})$

$\nabla f(x,y,z)=x^2+xy+y+z^2 \Rightarrow \nabla f(x,y,z)=(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z})=(2x+y,x+1,2z)$ de donde

$\nabla f(1,2,1)=(4,2,2)$.

$$D_{\vec{\mu}}F(1,2,1)=\nabla F(1,2,1).\vec{\mu}=(4,2,2).(\frac{8}{\sqrt{101}},\frac{-6}{\sqrt{101}},\frac{-1}{\sqrt{101}})$$

$$=\frac{32}{\sqrt{101}}-\frac{12}{\sqrt{101}}-\frac{2}{\sqrt{101}}=\frac{18}{\sqrt{101}}$$

$$\therefore D_{\vec{\mu}}f(1,2,1)=\frac{18}{\sqrt{101}}$$

11) Sea la función $f(x,y,z)=x^2+\cos(x+y)-z^2$. Halle la derivada direccional de f en el punto $p_0(1,-1,1)$ y en la dirección de un vector ortogonal a la superficie de nivel de f que contiene a p_0.

Solución

Primeramente hallaremos la superficie de nivel de f que contiene a p_0 es decir:

$c=x^2+\cos(x+y)-z^2$ la superficie de nivel, como contiene al punto $p_0(1,-1,1)$, entonces

c = 1+ 1 – 1 ⇒ C = 1. Por lo tanto la superficie de nivel de f que contiene al punto p_0 es:

$F(x,y,z)=x^2+\cos(x+y)-z^2-1$

ahora calculamos el vector ortogonal a la superficie de nivel $\nabla F(x,y,z)=(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z})$

$\nabla F(x,y,z)=(2x-\operatorname{sen}(x+y),-\operatorname{sen}(x+y),-2z)$ de donde $\nabla F(1,-1,1)=(2,0,-2)$ tomando

el vector unitario $\vec{\mu}=\dfrac{\nabla F(1,-1,1)}{\|\nabla F(1,-1,1)\|}=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

$f(x,y,z)=x^2+\cos(x+y)-z^2 \Rightarrow \nabla f(x,y,z)=(2x-\text{sen}(x+y),-\text{sen}(x+y),-2z)$ de donde $\nabla f(1,-1,1)=(2-0,\ 0,\ -2)=(2,0,-2)$

$$D_{\vec{\mu}} f(1,-1,1)=\nabla f(1,-1,1).\vec{\mu}=(2,0,-2).(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad D_{\vec{\mu}} f(1,-1,1)=2\sqrt{2}$$

12) Mostrar que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en cualquier punto suyo $M(x_0,y_0,z_0)$ tiene la siguiente forma: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$

Solución

Sea $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$. La normal al plano tangente en el punto $M(x_0,y_0,z_0)$ es:

$\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$, de donde, $\nabla F(x,y,z)=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$

$\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2})$, la ecuación del plano tangente esta dado por:

$$P:\ \vec{N}((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))=0$$

$$P:\ (\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}).(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

$$P:\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{z^2}=1 \qquad \therefore\ \mathbf{P}:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

13) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=e^y\ \text{sen}(x+z)$ en el punto en que el plano tangente es paralelo al plano π: 2x + z - 5 = 0

Solución

Consideremos la función $F(x,y,z)=z-e^{y}\operatorname{sen}(x+z)$.

La normal del plano tangente a la superficie es: $\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ donde

$$\nabla F(x,y,z)=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=(-e^{y}\cos(x+z),-e^{y}\operatorname{sen}(x+z),1-e^{y}\cos(x+z))$$

$$\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(-e^{y_0}\cos(x_0+z_0),-e^{y_0}\operatorname{sen}(x_0+z_0),1-e^{y_0}\cos(x_0+z_0))$$

como π: 2x + z - 5 = 0 su normal es $\vec{N_1}=(2,0,1)$ además el plano pedido P es paralelo al plano π entonces $\nabla F(x_0,y_0,z_0)//\vec{N_1}\Rightarrow\exists\lambda\in R$, tal que :

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\lambda(2,0,1)-e^{y_0}\cos(x_0+z_0),-e^{y_0}\operatorname{sen}(x_0+z_0),1-e^{y_0}\cos(x_0+z_0))=(2\lambda,0,\lambda)$$

$$\begin{cases}-e^{y_0}\cos(x_0+z_0)=2\lambda\\-e^{y_0}\operatorname{sen}(x_0+z_0)=0 & \Rightarrow x_0+z_0=0\\1-e^{y_0}\cos(x_0+z_0)=\lambda\end{cases}$$

$$\text{como } x_0+z_0=0\Rightarrow\begin{cases}-e^{y_0}=2\lambda\\1-e^{y_0}=\lambda\end{cases}\Rightarrow e^{y_0}=2\Rightarrow y_0=\ln 2$$

además $z=e^{y}(x+z)\Rightarrow z_0=2\operatorname{sen}0=0\Rightarrow z_0=-x_0=0$ por lo tanto el punto de tangencia es $p_0(0,\ln 2,0)$

P: $\vec{N}.((x,y,z)-(0,\ln 2,0))=0$ entonces P: $(2,0,1).(x,y-\ln 2,z)=0$ $\therefore$ P: $2x+z=0$

14) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por x = ucosv, y = usenv, z = 2u, en el punto en que u = 1, $v=\dfrac{\pi}{4}$

Solución

La ecuación de la superficie dada por S: x = u cos v, y = u sen v, z = 2u, expresaremos en forma cartesiana.

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\operatorname{sen} v \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = u^2\cos^2 v \\ y^2 = u^2\operatorname{sen}^2 v \\ z^2 = 4u^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + y^2 = u^2 \\ z^2 = 4u^2 \end{matrix}$$

Luego $S: z^2 = 4(x^2 + y^2)$, definido en forma implícita es $S: F(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$

además para u = 1, $v = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, z = 2

$\vec{N} = \nabla F(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ donde $\nabla F(x,y,z) = (8x, 8y, -2z)$

$\nabla F(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2) = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -4)$

La ecuación del plano tangente es: P: $\vec{N}.((x,y,z) - (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)) = 0$

P: $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -4).(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}, z-2) = 0$ $\quad\therefore\quad$ P: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 0$

15) Hallar el valor de k para que se verifique que en todo punto de intersección de las dos esferas $(x-k)^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$, los correspondientes planos tangentes sean perpendiculares uno al otro.

Solución

A las ecuaciones de la esfera expresaremos por:

$F(x,y,z) = (x-k)^2 + y^2 + z^2 - 4$; $G(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 1$ y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ el punto de intersección de ambas superficies .

Sean π_1 y π_2 los planos tangentes a las superficies donde

$\vec{N_1} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2(x_0 - k), 2y_0, 2z_0)$ y $\vec{N_2} = \nabla G(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2(y_0 - 1), 2z_0)$

como $\pi_1 \perp \pi_2$ son ortogonales entonces $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \perp \nabla G(x_0,y_0,z_0)$ donde $\nabla F(x_0,y_0,z_0).\nabla G(x_0,y_0,z_0)=0$

$(2(x_0-k),2y_0,2z_0).(2x_0,2(y_0-1),2z_0)=0$ de donde : $x_0^2+y_0^2+z_0^2=k\,x_0+y_0$ **... (1)**

además $P(x_0,y_0,z_0)$ está en las dos superficies esféricas :

$$(x_0-k)^2+y_0^2+z_0^2=4 \quad \textbf{... (2)} \qquad ; \qquad x_0^2+(y_0-1)^2+z_0^2=1 \quad \textbf{... (3)}$$

por lo tanto de (1) y (2) se tiene $2k\,x_0+4-k^2=k\,x_0+y_0$, de donde $y_0=k\,x_0-k^2+4$ **... (4)**

de (1) y (3) se tiene $2y_0=k\,x_0+y_0$ de donde $y_0=k\,x_0$ **... (5)**

de (4) y (5) se tiene $k^2=4 \Rightarrow k=\pm 2$

por lo tanto los planos tangentes son ortogonales cuando k toma los valores $k=\pm 2$.

16) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{9}+z^2=1$ que es paralelo al plano que pasa por los puntos (2,-2,3), (3,3,-2) y es perpendicular al plano 2x + y - z = 0.

Solución

Sea **P**: $\vec{N}.(p-p_0)=0$, el plano pedido.

P$_1$: el plano que pasa por (2,-2,3) y (3,3,-2) de donde $\vec{a}=(3,3,-2)-(2,-2,3)=(1,5,-5)$

P$_2$: $2x+y-z=0$, con normal $\vec{N_2}=(2,1,-1)$ como $\begin{matrix} \mathbf{P}//\mathbf{P_1} \\ \mathbf{P}\perp\mathbf{P_2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{a}//\mathbf{P} \\ \vec{N_2}//\mathbf{P} \end{matrix} \Rightarrow \vec{a},\ \vec{N_2}//\mathbf{P}$

por lo tanto la normal de **P** es $\vec{N}=\vec{a}\times\vec{N_2}$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-9(0,1,1)$$

Si $F(x,y,z)=\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{9}+z^2-1$ si $P(x_0,y_0,z_0)$ es el punto de tangencia

entonces $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(\frac{2}{5}(x_0-2),\frac{2}{9}(y_0+3),2z_0)$ como $\nabla F(x_0,y_0,z_0)//\vec{N} \Rightarrow \exists \lambda \in R$

tal que $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\lambda \vec{N}$ $(\frac{2}{5}(x_0-1),\frac{2}{9}(y_0+3),2z_0)=\lambda(0,1,1)$ de donde

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0-1)=0 & x_0=1 \\ \frac{2}{9}(y_0+3)=\lambda & \Rightarrow \quad y_0=-3\pm\frac{9}{5}\sqrt{2} \\ 2z_0=\lambda & z_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

P: $(0,1,1).(x-1,\ y+3\pm\frac{9}{5}\sqrt{2},\ z\pm\frac{\sqrt{2}}{5})=0$ $\therefore$ $\mathbf{P_1}$: $y+z+3-2\sqrt{2}=0$ y $\mathbf{P_2}$: $y+z+3+2\sqrt{2}=0$

17) Demostrar que los planos tangentes a la superficie xyz = m (m es una constante) forma con los planos coordenados tetraedros de volumen constante.

<u>Solución</u>

A la superficie definiremos por F(x,y,z) = xyz - m. y sea $p_0(x_0,y_0,z_0)$ un punto de la superficie $\Rightarrow$ $x_0,y_0,z_0=m$, además la normal del plano es $\vec{N}=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})$ de donde el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ es $\vec{N}=(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0)$.

Luego la ecuación del plano tangente es: $\mathbf{P}$: $\vec{N}.(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$

$\mathbf{P}$: $(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0).(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0 \Rightarrow \mathbf{P}$: $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z-3x_0y_0z_0=0$

como $V=\frac{1}{6}|\frac{D^3}{ABC}|$, donde $A=y_0z_0,\ B=x_0z_0,\ C=x_0y_0,\ D=-3x_0y_0z_0$

$V=\frac{1}{6}|\frac{(-3x_0y_0z_0)^3}{y_0z_0x_0z_0x_0y_0}|=\frac{27}{6}A|\frac{(x_0y_0z_0)^3}{(x_0y_0z_0)^2}|=\frac{9}{2}|x_0y_0z_0|=\frac{9}{2}m$ $\therefore$ $V=\frac{9}{2}m$ es una constante.

18) Determinar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2+(y-1)^2+4(z+2)^2=4$ que sea paralelo al plano tangente de la esfera $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ en el punto $(-1, 1, -2+\sqrt{8})$.

Solución

A la superficie definiremos por la función $F(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+(z+2)^2-9$, de donde la normal al plano tangente es $\overrightarrow{N_1}=\nabla F(-1, 1, -2+\sqrt{8})$ de donde $\overrightarrow{N_1}=(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$

$\overrightarrow{N_1}=(2x, 2(y-1), 2(z+2))$ en el punto $(-1, 1, -2+\sqrt{8})$ se tiene: $\overrightarrow{N_1}=\left(-2, 0, 2\sqrt{8}\right)$ que es la normal del plano tangente a la esfera en el punto $(-1, 1, -2+\sqrt{8})$.

Sea $G(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+4(z+2)^2-4$, de donde

$\overrightarrow{N}=\nabla G(x_0,y_0,z_0)=(2x_0, 2(y_0-1), 8(z_0+2))$ es la normal del plano tangente al elipsoide, como los planos tangentes son paralelos es decir:

$\overrightarrow{N_1}//\overrightarrow{N} \Rightarrow \exists\lambda\in R$ tal que $\overrightarrow{N}=\lambda\overrightarrow{N_1}$, de donde $(2x_0, 2(y_0-1), 8(z_0+2))=\lambda(-2,0,2\sqrt{8})$ por lo tanto:

$$\begin{cases} 2x_0=-2\lambda \\ 2(y_0-1)=0 \\ 8(z_0+2)=2\sqrt{8}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-x_0 \\ y_0=1 \\ z_0=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda \end{cases}$$

como $p(x_0,y_0,z_0)$ está en el elipsoide se tiene: $x_0^2+(y_0+1)^2+4(z_0+2)^2=4$, por lo tanto

$$\lambda^2+2\lambda^2=4 \Rightarrow \lambda^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Luego $x_0=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $y_0=1$, $z_0=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

como $\vec{N} = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z})$ en el punto $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 1, -2+\frac{\sqrt{2}}{3})$ es $\vec{N} = \frac{4}{\sqrt{3}}(-1, 0, 2\sqrt{2})$ de

donde se tiene: **P**: $\vec{N}.(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$ de donde **P**: $x-2\sqrt{2}z+2\sqrt{3}-4\sqrt{2}=0$

19) Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{A}$ interceptan en los ejes coordenados segmentos cuya suma es constante.

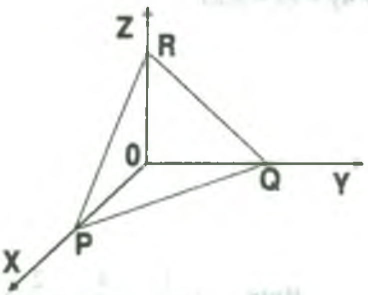
Solución

Calculando el plano tangente a la superficie en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$

Sea $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{A}$ donde la normal al plano tangente a la superficie en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es: $\vec{N}=(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}})$, la ecuación del plano es:

P: $\vec{N}.((x+y+z)-(x_0,y_0,z_0))=0$ entonces **P**: $\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{A}$

Ahora encontraremos los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados.



Sea p $\in$ P $\cap$ eje X $\Rightarrow$ y = z = 0

$x=\sqrt{Ax_0} \Rightarrow P(\sqrt{Ax_0}, 0, 0)$

Sea Q $\in$ P $\cap$ eje Y $\Rightarrow$ x = z = 0

$y=\sqrt{Ay_0}$ de donde $Q(0,\sqrt{Ay_0},0)$

Sea R $\in$ P $\cap$ eje Z $\Rightarrow$ x = y = 0

de donde $z=(\sqrt{Az_0}$, $R(0,0,\sqrt{Az_0})$ de la condición del problema se tiene:

$\|\vec{OP}\|+\|\vec{OQ}\|+\|\vec{OR}\|=$ es una constante, es decir:

$$\|\overrightarrow{OP}\|+\|\overrightarrow{OQ}\|+\|\overrightarrow{OR}\|=\sqrt{Ax_0}+\sqrt{Ay_0}+\sqrt{Az_0}=\sqrt{A}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{A}\sqrt{A}=A$$

$$\therefore\quad \|\overrightarrow{OP}\|+\|\overrightarrow{OQ}\|+\|\overrightarrow{OR}\|=A \text{ es una constante}$$

20) Dada la función $x^2+2y^2+3z^2=21$, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano x+ 4y + 6z = 0

Solución

Sea $\vec{N}=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ la normal al plano tangente **P** donde $\vec{N}=(2x_0,4y_0,6z_0)$ y sea π:x+4y+6z=0 donde $\overrightarrow{N_1}=(1,4,6)$ como **P** // π $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda \in$ **R** tal que $\vec{N}=\lambda\overrightarrow{N_1}$ entonces

$$(2x_0,4y_0,6z_0)=\lambda(1,4,6) \Rightarrow x_0=\frac{\lambda}{2},\ y_0=\lambda,\ z_0=\lambda$$

como $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4}+2\lambda^2+3\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\pm 2$

Luego el punto de tangencia es $p_0(\pm 1,\pm 2,\pm 2)$.

La ecuación del plano tangente es: P: $\vec{N}.((x,y,z)-(\pm 1,\pm 2,\pm 2))=0$

P: (1,4,6).(x ±1, y ± 2, z ± 2) = 0 $\quad\therefore\quad$ P: x + 4y + 6z = ± 21

3.54 Ejercicios Propuestos.

I) Gradiente y derivada direccional.

1) Hallar el gradiente de f, en el punto indicado:

a) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad P(1,4,2)\quad$ **Rpta.** $(\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}})$

b) $f(x,y)=\ln\sqrt[3]{x^2+y^2}$, $\quad P(1,2)\quad$ **Rpta.** $(\frac{2}{15},\frac{4}{15})$

c) $f(x,y,z)=xe^{yz}$, $\quad P(1,4,2)\quad$ **Rpta.** $(e^8,2e^8,4e^8)$

d) $f(x,y,z) = sen3x.\cos^2 x.tgx,\ P(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ **Rpta.** (0,0,0)

e) $f(x,y,z) = x^z + z^x + y^z + z^y,\quad P(2,1,1)$ **Rpta.** (1, 1, 2 + 2 ln 2)

f) Hallar $\nabla f(4,2)$ si $f(x+y, x-y) = xy + y^2$ **Rpta.** (3,-2)

g) Si $f(x-y-z, y-x-z, z-x-y) = xy + y^2 + yz$. Calcular ∇ f(2,2,2)

h) Si f(x + y, x − 2y + 3z, 3x − 2z, w − 1) = xyz + z. Hallar el gradiente de f en (1,2,1,-2). **Rpta.** $(\frac{569}{450},\frac{829}{450},-\frac{388}{450},0)$

i) Calcular ∇ F(4,2) si $F(x+y, x-y) = x^2 y + y^2$

2) En cada ejercicio calcular $D_{\vec{\mu}} f$ en el punto P para el cual $\vec{\mu}$ es un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$:

a) f(x,y,z) = ln(x + y + z) , P(1,0,0), Q(4,3,1)

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, P(1,1,1), Q(7,8,0)

c) $f(x,y) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x$, P(1,0), Q(-3,2)

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$, P(1,2), Q(1,3)

e) $f(x,y) = e^x \operatorname{arctg} y$, P(0,2), Q(-2,5)

3) Hallar la derivada de la función $z = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ en el punto $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ perteneciente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ en la dirección de la tangente a ésta. **Rpta.** $\frac{1}{2}$

4) Calcular la derivada de la función $w = \operatorname{arcsen}(\frac{z}{x^2 + y^2})$ en el punto M(1,1,1) en la dirección del vector $\overrightarrow{MN}$ siendo N(3,2,3). **Rpta.** $-\frac{1}{6}$

5) Hallar la derivada de la función $z = \ln(e^x + e^y)$ en el punto $(1,2)$ perteneciente a la parábola $y^2 = 4x$, en la dirección de ésta. **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6) Calcular la derivada de la función $z = x^2 - y^2$ en el punto $M(1,1)$ en la dirección del vector que forma un ángulo de 60º con el sentido positivo del eje X.

Rpta. $1-\sqrt{3}$

7) Hallar la derivada direccional de $z = 3x^4 - xy + y^3$ en el punto $(1,2)$ siguiendo la dirección que forma con el eje X un ángulo de 60º, la tangente a esta.

Rpta. $5+11\sqrt{\frac{3}{2}}$

8) Sea $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Hallar la derivada direccional de f en el punto $(1,3,2)$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies S_1: $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$ y S_2: $x^2 + y^2 - 5z^2 = 0$, si al mirar éste, desde el origen de coordenadas, el sentido es horario. **Rpta.** $D_{\vec{\mu}} f(1,3,2) = \frac{36}{7\sqrt{194}}$

9) Sea $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$. Hallar la derivada direccional de f en el punto (2,-1,1) en la dirección de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies S_1: $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$ y S_2: $x^2 + y^2 - 5z^2 = 0$, en el punto $(1,3,2)$ y en la dirección en que disminuya.

10) La temperatura en el punto (x,y,z) en un trozo de metal viene dada por la fórmula $f(x,y,z) = e^{2x+y+3z}$ grados, ¿En qué dirección, en el punto (0,0,0), crece más rápidamente la temperatura? **Rpta.** En la dirección (2,1,3)

11) Si C es la curva de intersección de las superficies $S_1: z = x^2 + 2y^2$ y $S_2: z = 2x^2 - 4y^2 + 2$. Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \cos\pi\, xy$, en el punto (2,1,6) a los largo de la curva C.

Rpta. $D_{\vec{\mu}} f(2,1,6) = -\frac{206}{\sqrt{266}}$

12) Si C es la curva de intersección de dos superficies $S_1: x^2 + y^2 = z^2$ y $S_2: 25 + z^2 = 2x^2 + 2y^2$. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, en el punto (3,4,5) a los largo de la curva C.

Rpta. $D_{\vec{\mu}} f(3,4,5) = 0$

13) Sea C la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$, en el primer octante. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, a los largo de la curva en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Rpta. $D_{\vec{\mu}} f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

14) Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 yz^3$ en el punto (1,1,-1) y en la dirección de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano x = 2 en el punto (2,-1,14). **Rpta.** $D_{\vec{\mu}} f(2,-1,14) = \pm\frac{7}{\sqrt{5}}$

15) Hallar la mínima derivada direccional y el vector unitario en esa dirección para $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ en (3,2). **Rpta.** $D_{\vec{\mu}} f(3,2) = \frac{\sqrt{13}}{25}$

16) Dada la función $f(x,y,z) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + 3(z-2)^2 - 6$, encontrar la derivada direccional de la función en el punto (2,0,1) en la dirección del vector $\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Rpta. $D_{\vec{\mu}} f(2,0,1) = -\frac{14}{\sqrt{6}}$

17) Hallar la derivada de la función $\mu = \frac{1}{r}$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, en la dirección del gradiente. **Rpta.** $\frac{1}{r^2}$.

18) Dada la distribución de temperatura $T(x,y) = 48 - \frac{4x^2}{3} - 3y^2$. Hallar la razón de cambio de temperatura.

i) En (1,-1) en la dirección del enfriamiento máximo.

ii) En (1,2) en la dirección de $\vec{i}$.

iii) En (2,2) en la dirección que se aleja del origen.

19) Si u = xy + yz + xz encontrar la razón de cambio de u en el punto (-1,1,7).

i) En la dirección del punto (-1,1,7) al punto (7,7,7). **Rpta.** 10

ii) En la dirección del punto (-1,1,7) al punto (1,3,8).

iii) En la dirección perpendicular al plano 3x + 4y - 12z = 12.

20) La temperatura es T grados en cualquier punto (x,y,z) en el espacio R^3 y $T = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$, la distancia se mide en pulgadas.

i) Encontrar la rapidez de cambio de la temperatura en el punto (3,-2,2) en la dirección del vector $-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ **Rpta.** $\frac{36}{35}$

ii) Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de T en (3,-2,2). **Rpta.** $(-\frac{9}{10}, \frac{6}{10}, -\frac{c}{10})$, $\frac{153}{100}$

21) El cambio de temperaturas correspondiente a los diversos puntos (x,y) de una placa está dado por $T(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Hallar la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (3,4). **Rpta.** $\frac{1}{625}(7,-24)$

22) La temperatura distribuida en el espacio está dada por la función f(x,y) = 10 + 6 cosx cosy + 3 cos 2x + 4 cos 3y, en el punto $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$. Encontrar la dirección de mayor crecimiento de la temperatura y en la dirección de mayor decrecimiento en la temperatura.

Rpta. Mayor crecimiento en la dirección $(-\frac{9\sqrt{3}}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$

Mayor decrecimiento en la dirección $(\frac{9\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$

23) Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z)=3x^2+yz+z^3$ en el punto (1,1,1) según la dirección de la recta de pendiente más pronunciada (mayor pendiente) que caracteriza la superficie $z=2+3y^2\cos x+x^3$ en el punto $(\pi,\frac{2\pi}{3},z_0)$

Rpta. $D_{\vec{\mu}}f(1,1,1)=\frac{14+100\pi^2}{5\sqrt{1+25\pi^2}}$

24) Hallar la mayor razón de cambio de la función $f(x,y,z)=e^{(x-3)^2}\cos(\pi(x+2y))+3^{x+y-z}$, en el punto $\overrightarrow{x_0}$, donde $\overrightarrow{x_0}$ es el punto en el primer octante de la superficie $z^2=x^2-2y^2+3y-6$ en el que el plano tangente es paralelo al plano $3x-\frac{5}{2}y-z+8=0$. **Rpta.** $\|\nabla f(3,2,1)\|=151.97$

25) Calcular el valor de la derivada direccional de la función z = ln(x + y) según la dirección de la pendiente, mas pronunciada que caracteriza la superficie $2z=\ln(e^x+e^y)$ cuando $z=1$. **Rpta.** $D_{\vec{\mu}}f(x,y)=\frac{e}{\sqrt{e^4-2e^e}}$

26) Sea $f(x,y)=x^2y$ ¿Qué ángulo forma el vector dirección con el eje X positivo, si la derivada direccional en (-1,-1) es 2?.

27) El potencial eléctrico es V voltios en cualquier punto (x,y) en el plano XY y $V = e^{-2x}\cos 2y$, la distancia se mide en pies.

I) Encontrar la rapidez de cambio de potencial en el punto $(0,\frac{\pi}{4})$ en la dirección del vector unitario $\vec{\mu} = \cos\frac{\pi}{6}\vec{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\vec{j}$ **Rpta.** -1

II) Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de V en $(0,\frac{\pi}{4})$. **Rpta.** (0,-1) , $\|\nabla V\| = 2$

28) Si $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$, encuentre la dirección en el punto (2,1) para la cual la derivada direccional de f tiene el valor cero. **Rpta.** $\pm\frac{1}{\sqrt{145}}(9,-8)$

29) Si $f(x,y) = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$, encuentre la dirección en el punto (3,4) para la cual la derivada direccional de f tiene el valor cero. **Rpta.** $\pm\frac{1}{5}(4,-3)$

30) En qué dirección es que la función $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2$ crece más rápidamente en el punto P(2,-1,2) ¿Cuál es la razón instantánea de cambio f por unidad de distancia en esta dirección.

Rpta. dirección (-10,4,10), máx = $\|\nabla f\| = \sqrt{216}$

31) El potencial eléctrico V en el punto P(x,y,z) en un sistema coordenado rectangular, está dado por $V = x^2 + 9y^2 + 4z^2$, calcular la razón de cambio de V en P(2,-1,3) en la dirección de P al origen.

¿Encuentre la dirección en la que la razón de crecimiento de V es máxima en P? ¿Cuál es la razón de crecimiento mínimo?.

32) Un objeto está situado en un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que la temperatura T en el punto P(x,y,z) está dado por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, calcular la razón de cambio de T en el punto P(4,-2,1) en al dirección del vector $2\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. En qué dirección a partir de P aumenta más rápidamente T?. ¿Cuál es la razón de cambio máximo en P?.

33) La ecuación de la superficie de un cerro es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje X apunta al este y el eje Y apunta al norte, un hombre está en el punto correspondiente a (-10, 5, 850).

i) ¿Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada?

Rpta. $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

ii) Si el hombre se mueve en dirección del este, ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez? **Rpta.** Subiendo a 60 m/seg.

iii) Si el hombre se mueve la dirección del Sureste ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez?. **Rpta.** Bajando a $20\sqrt{2}$ m/seg.

34) Una función $f: R^2 \longrightarrow R$ definida en el punto (3,4) tiene las siguientes derivadas direccionales o 3 en la dirección al punto (4,4); 1 en la dirección al punto (3,2). Determinar ∇ f(3,4). **Rpta.** ∇ f(3,4) = (3,-1)

35) Una función $f: R^2 \longrightarrow R$ tal que z = f(x,y), tiene en el punto (1,2) derivadas direccionales 2 en la dirección al punto (2,2) y -2 en la dirección al punto (1,1). Calcule la derivada direccional de f en (1,2) en dirección al punto (4,6).

36) La función f(x,y,z) tiene en el punto P(2,-3,5) las derivadas direccionales $\frac{1}{3}$ en la dirección al punto A(0,1,9), $-\frac{3}{5}$ en la dirección al punto B(5,-3,1) y $\frac{1}{4}$ en la dirección al punto C(4,-2,7). Calcular la derivada direccional de f en la dirección al punto D(1,3,6). **Rpta.** $D_{\vec{\mu}} f(2,-3,5) = \frac{-25}{52\sqrt{38}}$

37) La superficie exterior de una montaña se describe mediante la ecuación $h(x,y) = 400 - 0.01x^2 - 0.04y^2$. Supóngase que un alpinista está en el punto (500, 300, 3390). ¿En qué dirección debe moverse el alpinista para ascender al mayor ritmo posible?

38) Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2 + y - z^2$ en el punto (1,1,1), en la dirección del producto vectorial de la normal a la superficie $S: 2x + y^2 - z = 2$ en el punto (1,1,1) y el vector $\vec{a} = (1,0,1)$.

39) Hallar la derivada direccional de $F(x,y,z) = x^2yz^3$ en el punto (1,1,-1) y en la dirección de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano x = 2 en el punto (2,-1,14). **Rpta.** $D_{\vec{\mu}} f(2,1,-1) = \pm\frac{7}{\sqrt{5}}$

40) Sea $f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 5x + 3y - 2$

i) ¿En qué dirección crece mas rápidamente en el punto (1,1)?

ii) ¿Cuál es la derivada direccional de f en esta dirección y en ese punto?.

41) Demuestre que la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ si \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

tiene la derivada direccional en toda dirección en el punto (0,0) pero no es diferenciable en (0,0).

42) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\text{sen}\,y + \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & , \ para \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ para \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

En qué dirección existe la derivada direccional en el punto (0,0).

43) Un avión se mueve según su plano de equilibrio con la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, si hay un viento cuya dirección es $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

i) ¿Cuál es la velocidad del avión con dirección al viento?

ii) Si el viento cambia de dirección en 45º en sentido horario ¿Cuál es ahora su nueva velocidad con respecto al viento?.

44) Demostrar que la derivada de la función $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en cualquier punto M(x,y,z) en la dirección que va desde el origen de coordenadas es igual a $-\frac{2u}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

45) Será F una función diferenciable con dominio en R^3 tal que $F(y, \frac{z}{x}, \ln|f(xz^2)|) = 0$, $F_1(3, \sqrt{2}, 0) = 1$, $F_2(3, \sqrt{2}, 0) = 2$, $F_3(3, \sqrt{2}, 0) = 1$; f una función diferenciable con dominio en R tal que $f(2) = f'(2) = 1$.

46) Halle la derivada direccional de f(x,y,z) = xsenπyz + 2ytgπx en el punto (1,2,3) y en la dirección de la recta tangente a la curva dada por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, x + 2y - z = 0.

47) ¿Qué ángulo forma la tangente de la línea $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, x = 1 en el punto $(1,1,\sqrt{3})$ con la dirección positiva del eje de coordenadas?

48) ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$, y = 4 en el punto (2,4,5) con la dirección positiva del eje de abscisas?.

49) Hallar la mínima derivada direccional y la dirección del vector unitario en la que se obtiene para $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ en (3,2). Hallar también dos vectores unitarios para los cuales la derivada direccional es cero.

Rpta. $\vec{\mu}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)$, $\vec{\mu}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$, $\vec{\mu}=(-3,-2)\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

50) Determinar los puntos (x,y) y las direcciones para los cuales tiene su valor máximo la derivada direccional de $f(x,y)=3x^2+y^2$, si (x,y) es un punto de la derivada $x^2+y^2=1$.

51) Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=xe^{yz}+ye^{xz}+ze^{xy}$ en el punto $P_0(1,0,2)$ en la dirección que va de P_0 al punto $P_1(5,3,3)$.

52) Demostrar que la derivada de la función u = f(x,y,z) en la dirección de su gradiente es igual al modulo de este.

53) ¿En que dirección la derivada direccional de $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en (1,1) es igual a cero?.

54) La distribución de temperatura de una placa metálica viene dada por la función $T(x,y)=xe^{2y}+y^3e^x$.

a) ¿En que dirección aumenta la temperatura de una placa metálica en el punto (2,0)?

b) ¿En que dirección decrece la temperatura mas rápidamente?

Rpta. a) $\nabla T(2,0)=(1,4)$ b) $-\nabla T(2,0)=(-1,-4)$

55) Hallar la derivada de la función $u = xy^2 + z^3 - xyz$ en el punto M(1,1,2) en la dirección que forma ángulos de 60°, 45°, 60° respectivamente con los ejes coordenados.

Rpta. 5

II. Planos Tangentes a una Superficie.

1) Escriba las ecuaciones de los plano tangentes y las normales en los puntos indicados, para las superficies dadas.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ en el punto (3,4,-7)

Rpta. P: $17x + 12y + 5z = 64$, $L: \dfrac{x-3}{17} = \dfrac{y-4}{11} = \dfrac{z+7}{5}$

b) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ en el punto $(1,1,,\dfrac{\pi}{4})$

Rpta. $P: x - y + 2z = \dfrac{\pi}{2}$, $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z - \frac{\pi}{2}}{2}$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \dfrac{b\sqrt{3}}{2}, \dfrac{c\sqrt{3}}{2})$

Rpta. $P: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \sqrt{3}$, $L: a(x - \dfrac{a\sqrt{3}}{3}) = b(y - \dfrac{b\sqrt{3}}{3}) = c(z - \dfrac{c\sqrt{3}}{3})$

d) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ en el punto (1,2,-1)

Rpta. P: $x + 11y + 5z - 18 = 0$, $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{5}$

e) $3x^4 - 4y^3z + 4xyz^2 - 4xz^3 + 1 = 0$ en el punto (1,1,1)

Rpta. P: $3x - 2y - 2z + 1 = 0$, $L: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

f) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ en el punto $(1,1,2)$

Rpta. P: $2x + y + 11z = 25$, $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$

g) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ en el punto $(2,3,6)$

Rpta. P: $5x + 4y + z = 28$, $L: \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$

h) $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$ en el punto $(4,1,1)$

Rpta. $x + 2y + 2z = 8$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$

i) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$ en el punto $(-8,27,1)$

Rpta. P: $3x - 2y - 6z + 84 = 0$, $L: \frac{x+8}{3} = \frac{y-27}{-2} = \frac{z-1}{-6}$

j) $x^2 + y^2 - 3z = 2$ en el punto $(-2,-4,9)$

Rpta. P: $4x + 8y + 3z + 22 = 0$, $L: \frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-6}{3}$

2) Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ de tal modo que sea paralelo al plano $x - y + 2z = 0$.

Rpta. $x - y + 2z = \sqrt{\frac{11}{2}}$; $x - y + 2z = -\sqrt{\frac{11}{2}}$

3) Sea S una superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$, por el punto $(1,1,2)$ de S pasa el plano $x + y - z = 0$ y la superficie $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ que originan las curvas de intersección con S respectivamente. Hallar la ecuación del plano que pasa por las tangentes a dichas curvas en el punto dado.

Rpta. $x - y + z = 2$

4) Encuentre una ecuación del plano tangente en cualquier punto (a,b,c) de las superficie $S\colon x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=k^{1/2}$, y luego muestre que la suma de las intersecciones de este plano tangente con los ejes coordenados es una constante.

5) Sea la superficie $S\colon z=\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}$. Demostrar que todos los planos tangentes, en cualquier punto de S, tiene un punto en común.

6) Escribir la ecuación del plano tangente perpendicular a la recta $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, para la superficie z = xy.

Rpta. P: 2x + y - z = 2

7) Trazar un plano tangente a la superficie $x^2-y^2=3z$, de tal modo que pasa por el punto A(0,0,-1) y que sea paralelo a la recta $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Rpta. 4x - 2y - 3z + 3 = 0

8) En la superficie $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$. Hallar los puntos en los cuales los planos tangentes sean paralelos a los planos coordenados.

Rpta. En el plano XY , (0,3,3), (0,3,-7)

En el plano YZ , (5,3,-2), (-5,3,-2)

En el plano XZ , (0,-2,-2), (0,8,-2)

9) Mostrar que el plano tangente a la superficie $xyz=a^3$, en cualquier punto cuya forma es un tetraedro de volumen constante con los planos coordenados.

10) Mostrar que las superficies x + 2y - ln z + 4 = 0 y $x^2-xy-8x+z+5=0$, son tangentes, esto es, tiene un plano común tangente en el punto (2,-3,1).

11) Demostrar que las superficies $x^2+y^2+z^2=ax$ y $x^2+y^2+z^2=by$ son ortogonales entre si.

12) Trazar el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, de tal modo que corte segmentos de igual longitud en los semi ejes positivos.

Rpta. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

13) Determinar la ecuación de los planos que pasan por la recta $L=\{(1,\frac{1}{2},0)+t(1,-1,0)\ /\ t\in R\}$ tangentes a la superficie $2x^2+4y^2-z=0$.

Rpta. P: $z=0$

14) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{2}+y^2+7z^2=126$, que es ortogonal a la recta tangente en (2,1,6) a la curva de intersección de las superficies $z=x^2+2y^2$, $z=2x^2-3y^2+1$

Rpta. $5x+2y+28z\pm 166\sqrt{\frac{63}{83}}=0$

15) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{9}+z^2=1$, que es paralela al plano que pasa por los puntos (2,-2,3), (3,3,-2) y perpendicular al plano 2x + y - z = 0.

16) Sea S la superficie definida por la ecuación $F(y^2-x,z-y,\sqrt{x^2+y^2})=0$, por P(1,2,1) de S se trazan planos perpendiculares a los ejes X e Y determinando sobre S dos curvas, hallar el plano que pasa por las rectas tangentes a dichas curvas si $D_1F(3,-1,\sqrt{2})=-1$, $D_2(3,-1,\sqrt{2})=3$, $D_3(3,-1,\sqrt{2})=\sqrt{2}$

17) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2+y^2-z^2=1$, que contiene a la recta de intersección de los planos P_1: $x+y+z=1$, P_2: $x+3y-3z=3$.

18) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $6x^2 - y^2 - 3z^2 + 4 = 0$, que pasan por la recta 4x - 3z = 0, y = 4.

19) Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ que es tangente $z = 3x^2 + \frac{y^2}{4}$ en el punto (2,a,b) y es ortogonal al plano y + z = 0.

Rpta. 12x + y - z = 13

20) Dada la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y la ecuación de la recta $L = \{(4,0,0) + t(-1,1,1) / t \in R\}$. Determinar un plano que pasa por L y sea tangente a la esfera.

Rpta. $2x + (1-\sqrt{5})y + (1+\sqrt{5} = 8$.

21) Trazar a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$, los planos tangentes paralelos al plano x+ y + z = 1.

Rpta. $x + y + z \pm \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$

22) ¿En qué punto del gráfico de la ecuación $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$, son los planos tangentes paralelos al plano XZ?.

Rpta. (2,2,0) y (-2,-2,0)

23) Formar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ y paralelo x + 4y + 6z = 0.

Rpta. x + 4y + 6z ± 21 = 0

24) Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = 24$ en el punto (4,4,4).

Rpta. P: x + y + z = 12 , L: x - 4 = y - 4 = z - 4

25) Determinar el plano tangente a la superficie $x^2+(y-1)^2+4(z+2)^2=4$ que es paralela al plano tangente a la esfera $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$ en el punto $(1,-1,2+\sqrt{8})$.

Rpta. $x+2\sqrt{2}z+2\sqrt{2}=0$, $x+2\sqrt{2}z+6\sqrt{2}=0$

26) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2-4y^2-4z=0$, que intercepta al plano XY según la recta $x+4y+\frac{3}{2}=0$.

27) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+z^2=1$, que es paralelo al plano que pasa por los puntos (1,-1,2), (2,2,-1) y perpendicular al plano x + y - z = 0.

28) Demostrar que una ecuación del plano tangente a la superficie $z=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es $z+z_0=\frac{2x_0}{\alpha^2}x+\frac{2y_0}{\beta^2}y$.

29) Determinar la ecuación del plano tangente que pasando por la recta $L=\{(4,2,1)+t(4,-3,0)\,/\,t\in R\}$, es tangente al elipsoide $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$.

30) Sean las superficies S_1: $x^2y^2+2x+z^3=16$, S_2: $3x^2+y^2-2z=9$, S_1 y S_2, se interceptan con la superficie S: $x^2+3y^2+2z^2=15$. Determinando dos curvas C_1 y C_2, respectivamente, las que pasan por el punto (2,1,2). Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas tangentes a estas curvas en dicho punto.

31) Determinar el valor de m para que el plano x - 2y - 2z + m = 0 sea tangente a la superficie de ecuación $x^2+4y^2+16z^2-144=0$.

32) Sea S una superficie de ecuación $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$. Por el punto (1,1,2) de S pasa el plano x + y - z = 0 y la superficie $3x^2+2y^2-2z=1$ que origina las curvas de intersección con S respectivamente. Hallar la ecuación del plano que pasa por las tangentes de dichas curvas en el punto dado.

Rpta. x - y + z = 2

33) Sea C la curva en el plano YZ definida por la función z = ln y, y ≥ 1, se rota la curva C alrededor del eje Y generando una superficie S.

Halle la ecuación del plano tangente a S en el punto $(\sqrt{2},e^2,\sqrt{2})$

Rpta. $\sqrt{2}x-\frac{2}{e^2}y+\sqrt{2}z=2$

34) Sea P un plano tangente a la superficie $x^2+3y^2+4z^2=8$ en el punto (a,b,1) y sea x + 3y = 8, la ecuación de la intersección del plano **P** con el plano XY, se pide hallar el punto (a,b,1) y la ecuación del plano **P**.

Rpta. x + 3y + 4z = 8

35) Sea $x_0(2,1,7)$ un punto que pertenece a la superficie S descrita por $z=x^2+xy+y^3$, y L la recta tangente a S en x_0, de mayor pendiente. Halle la ecuación del plano que contiene a L y es paralelo al vector normal de S en x_0.

36) ¿En qué punto del elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$, la normal forma ángulos iguales con los ejes de coordenados?.

Rpta. $x=\pm\frac{4}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}$, $z=\pm\frac{1}{3}$

37) Encontrar el ángulo entre la recta L= {(-2,5,12) + t (4,1,-3)/ t ∈ R} y la normal a la esfera $x^2+y^2+z^2=121$, en el punto de intersección de la recta y la esfera.

Rpta. $\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{13}{11}}$

38) Las tres ecuaciones F(u,v) = 0 , u = xy , $v=\sqrt{x^2+y^2}$ definen una superficie en el espacio XYZ. Hallar un vector normal a esa superficie en el punto x = y = 1, $z=\sqrt{3}$, si se sabe que: $D_1F(1,2)=1$ y $D_2F(1,2)=2$.

39) La superficie $z=2x^2+y^2$ es cortada por la curva $x=-\frac{2}{t}$, y = t - 1, $z=t^2-1$, en el punto (-1,1,3) cuál es el ángulo formado entre la normal a la superficie y la tangente a la curva?

40) Hallar el plano tangente y normal al hiperboloide $x^2+y^2-z^2=18$ en (3,5,-4).

41) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $S:\ e^{yz}\operatorname{sen}x+e^{xz}\operatorname{sen}+e^{xy}\operatorname{sen}z=0$ en el punto $P_0(0,\pi,2\pi)$.

42) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $F(x,y,z)=yze^{\operatorname{sen}x}+xze^{\operatorname{sen}y}+xye^{\operatorname{sen}z}$ en el punto $P_0(\pi,0,0)$.

43) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z=e^x\cos(y+z)$, en el punto donde el plano tangente es paralelo al plano P: y + 2z – 3 = 0.

44) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ con el plano y = 1 en el punto (1,1,1).

45) Escribir la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2+2y^2+z^2=1$ de tal modo que sea paralelo al plano x – y + 2z = 0.

46) Hallar el plano tangente a la superficie $z=e^y\operatorname{sen}(x+z)$ en el punto en el que este plano es paralelo al plano π: 2x + z – 5 = 0. **Rpta.** 2x + z = 0

3.55. Aplicaciones de las Derivadas Parciales. Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables.

a) **Definición.-** La función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $D\subset R^2$, tiene un valor máximo absoluto sobre el conjunto $D\subset R^2$, si existe un punto $P(x_0,y_0)\in D$ tal que $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$, $\forall (x,y)\in D$, en este caso $f(x_0,y_0)$ es el valor máximo absoluto de f en D.

b) **Definición.-** La función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $D\subset R^2$, tiene un valor mínimo absoluto sobre el conjunto $D\subset R^2$, si existe un punto $P(x_0,y_0)\in D$ tal que $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$, en este caso $f(x_0,y_0)$ es el valor mínimo absoluto de f en D.

Observación.- Si la función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, es continua en un conjunto cerrado $D\subset R^2$, entonces existe al menos un punto P $\in$ D donde f tiene un valor máximo absoluto y al menos un punto Q $\in$ D, donde f tiene un valor mínimo absoluto.

c) **Definición.-** La función $f: D\subset R^n \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$, tiene un valor mínimo relativo en el punto $\vec{x}_0\in D$, si existe una bola abierta $B(\vec{x}_0,\varepsilon)\subset D$ tal que $f(\vec{x}_0)\leq f(\vec{x})$, $\forall \vec{x}\in B(\vec{x}_0,\varepsilon)\subset D$.

d) **Definición.-** La función $f: D\subset R^n \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $D\subset R^n$, tiene un valor máximo relativo en el punto $\vec{x}_0\in D$, si existe una bola abierta $B(\vec{x}_0,\varepsilon)\subset D$, tal que : $f(\vec{x})\leq f(\vec{x}_0)$, $\forall \vec{x}\in B(\vec{x}_0,\varepsilon)\subset D$.

Observación.- A los valores máximo y mínimos relativos de la función $f: D\subset R^n \longrightarrow R$ le llamaremos extremos de la función f.

3.56 Teorema.

Si la función $f: D \subset R^n \longrightarrow R$, definida en un conjunto abierto $D \subset R^n$, tiene un valor extremo en $\vec{x}_0 \in D$ y $D_k f(\vec{x}_0)$ existe, entonces $D_k f(\vec{x}_0) = 0$, $\forall$ k = 1,2,3,...,n

Demostración

Si la función f tiene un valor máximo relativo en $\vec{x}_0 \in D$ entonces $\exists$ $B(\vec{x}_0, \varepsilon) \subset D$ tal que:

$f(\vec{x}) \le f(\vec{x}_0)$, $\forall$ $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$, luego $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) - f(\vec{x}_0)}{h} \le 0$ donde

$\vec{\mu}_k = (0,0,...,1,0,...)$ esto es debido a que, para cada $\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k \in B(\vec{x}_0, \varepsilon)$ se tiene

$f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) \le f(\vec{x}_0)$, esto nos implica que si h > 0 se tiene $\dfrac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) - f(\vec{x}_0)}{h} \le 0$

ahora si h < 0, entonces $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) - f(\vec{x}_0)}{h} \ge 0$, como $D_k f(\vec{x}_0)$ existe se tiene que:

$$D_k f(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) - f(\vec{x}_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\vec{x}_0 + h\,\vec{\mu}_k) - f(\vec{x}_0)}{h} = 0 \text{ donde } D_k f(\vec{x}_0) = 0.$$

por lo tanto, los valores extremos de una función, $f: D \subset R^n \longrightarrow R$, definida en el conjunto abierto D puede ocurrir en puntos donde las primeras derivadas parciales de f son ceros.

3.57 Definición.

Sea la función $f: D \subset R^n \longrightarrow R$, definida en un conjunto de abierto $D \subset R^n$. Los puntos $\vec{x}_0 \in D$ donde todas las derivadas parciales de primer orden de f son ceros o no existen, se llaman puntos estacionarios o puntos críticos de f.

Ejemplo.- Hallar los puntos críticos o estacionarios de la función: $f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \end{cases}$$, para calcular los puntos críticos o estacionarios

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy^2-10x-8y=0 \quad ....(1) \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x^2y-8x-10y=0 \quad ....(2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) despejamos $x=\dfrac{8y}{2y^2-10}=\dfrac{4y}{y^2-5}$ ahora reemplazamos en (2)

$2y(\dfrac{4y}{y^2-5})^2-8(\dfrac{4y}{y^2-5})-10y=0$, simplificando $y(y^4-10y^2+9)=0$ entonces:

$y(y^2-9)(y^2-1)=0$, de donde y = 0 , y = ± 1 , y = ± 3

para y = 0, x = 0, (0,0); para y = 1, x = -1, (-1,1)

y = -1, x = 1, (1,-1) , y = -3 , x = -3 , (-3,-3)

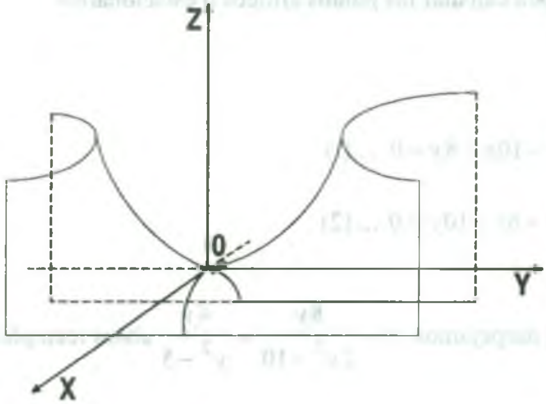
y = 3 , x = 3 , (3,3)

Luego los puntos críticos son (0,0), (-1,1), (1,-1), (-3,-3), (3,3)

Observación.- La condición necesaria para que una función tenga extremo relativo en un punto, donde sus derivadas parciales existen, es que este punto sea un punto estacionario o crítico, sin embargo esta condición no es suficiente, por ejemplo, la función $f(x,y)=y^2-x^2$ cuyas derivadas parciales son:

$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$ de donde $x = y = 0$,

a pesar de esto la función no tiene máximo ni mínimo relativo, en este caso, a este tipo de puntos se denominan puntos de silla.



Observación.- Un punto crítico que no es de un máximo ó mínimo relativo es llamado punto silla (ó de monitor).

3.58 Criterio de la Segunda Derivada.

Sea $f: D \subset R^2 \to R$ una función definida en el conjunto abierto D de tal manera que las derivadas parciales primeras y segundas de f sean continuas en la región abierta D que contiene un punto (a,b) tal que $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$.

Para determinar si en dicho punto hay un extremo relativo de f, definimos la cantidad

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}\right)^2}$$

i) Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$, entonces f (a,b) es un valor mínimo relativo.

ii) Si $\Delta > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$, entonces f (a,b) es un valor máximo relativo.

iii) Si $\Delta < 0$, entonces (a,b, f (a,b)) es un punto silla.

iv) Si $\Delta = 0$, este criterio no da información.

Nota.- En forma práctica se puede recordar la fórmula Δ en el criterio de la segunda derivada y que viene dado por el determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{siendo} \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo.- Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

Solución

Calculando los puntos críticos ó estacionarios

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow p(4,-2)$$

Luego el punto crítico es p (4,-2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial X^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial y^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial y \partial X} = 1 \end{cases}$$

Ahora aplicando el criterio de la segunda derivada

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial y \partial x}\right)^2$$

$$\Delta = (2)(2) - (1)^2 = 4 - 1 - 3 \;\Rightarrow\; \Delta = 3$$

como $\Delta = 3 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f(4,-2)}{\partial x^2} = 2 > 0$, entonces en el punto P (4,-2) hay un mínimo relativo, cuyo valor mínimo es f (4,-2) = 10.

3.59 Matriz Hessiana de una Función de Varias Variables.

a) Definición.- Una forma cuadrática $F : R^n \to R$, es una función cuyo valor en $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es dado por:

$F(\alpha) = \sum_{i=j}^{n} \sum_{j=i}^{n} h_{ij}\, \alpha_i\, \alpha_j$ donde $H = \left[h_{ij}\right]_{nxn}$ es una matriz simétrica de orden n x n, esto es:

$$H = \left[h_{1j}\right]_{nxn} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad y \quad H^t = H$$

En forma simétrica la forma cuadrática está definida por:

$$F(\alpha) = \alpha\, H\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, \alpha_i\, \alpha_j$$

Observación.- Se observa que el desarrollo de una forma cuadrática en términos de las variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, corresponde a un polinomio homogéneo de grado 2, en donde los coeficientes de los términos cuadráticos (α_i^2) son los elementos de la diagonal de la matriz simétrica H, y cada coeficiente de un término rectangular $\alpha i \alpha j$ es el doble del elemento h_{ij} de la misma matriz $(i \neq j)$.

Ejemplo.- Hallar la matriz correspondiente a la forma cuadrática $F: R^2 \to R$ definida por $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2$

Solución

Observar que h_{12} es la mitad del coeficiente (-1) es decir $h_{12} = -\frac{1}{2}$, como la matriz es simétrica $h_{12} = h_{21}$

Luego $H = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

Ejemplo.- Hallar la matriz correspondiente a la forma cuadrática $F: R^3 \to R$ definida por: $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1x_2 + 2x_{13} + 6x_2x3.$

Solución

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Definición.- Sea $f: D \in R^n \to R$, una función definida en el conjunto abierto D. Entonces la diferencial de segundo orden con respecto a las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es cero, es decir: $dz = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$

$$d^2z = d^2f = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)dx_2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2dx_2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

La matriz correspondiente a esta forma cuadrática es: $H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$

Esta matriz H será simétrica si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$

c) **Definición.-** Consideremos la función $f\colon D \subset R^n \to R$ definida en el conjunto abierto D tal que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $\forall\, p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

La forma hessiana de la función f en el punto $p \in D$, denotado por H (f (p)) está definida por:

$$H(f(p)) = d^2 f(p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

Luego a la matriz hessiana de la función en el punto p será:

$$H(f(p)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_1 & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ejemplos.- Hallar la matriz hessiana de la función: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-7xy+5x-3z$

Solución

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-7y+5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-7x \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=2z-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-7, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-7, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0 \end{cases}$$

$$H(f(x,y,z))=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.60 Criterio de la Matriz Hessiana para los Máximos y Mínimos.

Consideremos la función $f: D\subset R^n \to R$, en donde sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en un conjunto abierto $D\subset R^n$ y sea $x_0 \in D$ un punto para el cuál $D_1f(x_0)=0,\ D_2f(x_0)=0,\dots,D_nf(x_0)=0$, supongamos que el determinante de la matriz, Hessiana $H(f(x_0))$ se denota por:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} D_{11}f(x_0) & D_{12}f(x_0) & \dots & D_{1n}f(x_0) \\ D_{21}f(x_0) & D_{22}f(x_0) & \dots & D_{2n}f(x_0) \\ \vdots & & & \\ D_{n1}f(x_0) & D_{n2}f(x_0) & \dots & D_{22}f(x_0) \end{vmatrix}$$

Entonces:

i) x_o corresponde a un mínimo relativo si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0,\ldots,\Delta_n > 0$ cuyo calor mínimo es $f(x_0)$.

ii) x_0 corresponde a un máximo relativo si $\Delta_1 < 0,\ \ \Delta_2 > 0,\ \ \Delta_3 < 0,\ldots,$cuyo valor máximo es $f(x_0)$.

Ejemplo.- Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = 4x + xy - x^2 - y^2 - z^2 - yz$

Solución

Hallaremos los puntos críticos de la función f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4 + y - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \Rightarrow p(3,2,-1) \\ z = -1 \end{cases} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -1$$

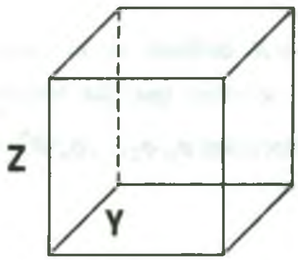
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -4 < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en el punto p (3,2,-1) y su valor es f (3,2,-1)=6.

Ejemplo.- Hallar las dimensiones de una caja rectangular (cerrada) de máximo volumen cuya superficie total es $A\,m^2$

<u>Solución</u>



Sean x,y,z las dimensiones de la caja rectangular, por lo tanto el volumen de la caja es V=xyz

El área total de la caja rectangular es:

$$A = 2xy + 2xz + 2yz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{A-2xy}{2x+2y}$$

como $V = xyz = \dfrac{xy(A-2xy)}{2x+2y}$, $\quad x > 0,\ y > 0,\ xy \le A$.

el cual se desea que sea máximo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{y^2(2A-8xy-4x^2)}{(2x+2y)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x^2(2A-8xy-4y^2)}{(2x+2y)} = 0 \end{cases}$$ resolviendo el sistema de ecuaciones

$x = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$, $y = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$ es un punto crítico de V que corresponde a un máximo relativo cuyo

valor máximo es: $\quad V = \dfrac{A}{6}\sqrt{\dfrac{A}{6}}\,u^3$

Luego las dimensiones de la caja son: $\quad x = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$, $y = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$, $z = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$

3.61 Extremos Condicionados.

Muchos problemas de optimización tiene restricciones o ligaduras en los valores que pueden usarse para lograr la solución óptima, tales ligaduras tienden a complicar los problemas de optimización ya que la solución óptima puede ocurrir fácilmente en un punto frontera del dominio., para superar estas dificultades usaremos una técnica que se conoce con el nombre de "**método de los multiplicadores de Lagrange**" y para esto daremos las definiciones siguientes:

a) Definición.- Consideremos una función $f: D \subset R^n \to R$ definida en el conjunto abierto D y sea $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, se dice que las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisface condiciones de enlace si, existen funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : R^n \to R$ tal que:

$$(*) \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2 \dots, x_n) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad , m < n \end{cases}$$

b) Definición.- Consideremos una función $f: D \subset R^n \to R$ definida en el conjunto abierto D. Diremos que el punto $P_0 \in D$ corresponde a un máximo condicionado de f (mínimo condicionado de f) si $f(p) \le f(p_0)$ $(f(p_0) \le f(p))$ $\forall\, p$ y p_0 que cumplan las condiciones de enlace (*).

3.62 Método de los Multiplicadores de Lagrange.

Supongamos que se maximiza o minimiza, una función de dos variables z = f(x,y) en donde las variables están sujetas a la restricción g (x,y)=0.

Luego se construye una función introduciendo una incógnita λ llamada el multiplicador de Lagrange.

$$\boxed{F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)} \qquad \dots (1)$$

Ahora determinaremos los puntos críticos o estacionarios de F, es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{... (2)}$$

al resolver el sistema (2) se obtienen los puntos críticos o estacionarios, luego se evalúa la función f en cada uno de los puntos críticos, el mayor valor de f es el máximo de f sujeto a la restricción y el menor valor de f es el mínimo de f sujeto a la restricción.

Ejemplo.- Maximizar la función $f(x,y) = e^{xy}$ sometida a la restricción $x^2 + y^2 - 8 = 0$

Solución

Calculando los puntos críticos, para esto definimos la función F introduciendo la incógnita λ.

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$ de donde $F(x,y,\lambda) = e^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = ye^{xy} + 2\lambda x = 0 & \lambda = -\dfrac{ye^{xy}}{2x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + 2\lambda y = 0 & \Rightarrow \lambda = -\dfrac{xe^{xy}}{2y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0 & x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$-\dfrac{ye^{xy}}{2x} = \dfrac{xe^{xy}}{2y} \Rightarrow x^2 = y^2$, de donde $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, $y = \pm 2$

Luego los puntos críticos son $P_1(\pm 2, \pm 2)$, $P(\mp 2, \pm 2)$ y como $f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow f(\pm 2, \pm 2) = e^4$

$f(\mp 2, \pm 2) = e^{-4}$

Luego el valor máximo es $f(\pm 2, \pm 2) = e^4$

Observación.- En algunos casos las ecuaciones de las restricciones pueden reemplazarse en la función que se va maximizar o minimizar así el problema se reduce a los máximos y mínimo sin restricciones. Sin embargo este procedimiento no siempre es factible, especialmente si la función que se va a maximizar o minimizar tiene mas de dos variables y varias restricciones.

Entonces para estos casos se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange del modo siguiente:

Sea $f: D \subset R^n \longrightarrow R$ una función definida en el conjunto abierto D tal que existen derivadas parciales de f hasta el segundo orden inclusive, para obtener los extremos condicionados de $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeta a las condiciones de enlace:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad , \quad m < n$$

se procede del siguiente modo:

i) Construimos la función de Lagrange.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se llaman multiplicadores de Lagrange.

ii) Los extremos incondicionados de F (condicionados de f) se obtiene ha partir de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases}$$

Sea P_0 uno de estos puntos

iii) Se construye la forma cuadrática: $B(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-m}) = \sum_{k=1}^{n-m}\sum_{l=1}^{n-m} b_{kl}\, dx_k\, dx_l$ lo cual se obtiene a partir de: $A(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = d^2F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ y de las diferenciales de las condiciones de enlace.

$d\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$d\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$d\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

iv) Asociar a B su matriz correspondiente y estudiar el comportamiento en cada punto crítico.

Ejemplo.- Hallar los extremos condicionados de f(x,y,z) = xyz, estando ligados las variables x,y,z por las relaciones $\varphi_1(x,y,z) = x+y-z-3$, $\varphi_2(x,y,z) = x-y-z-8$

Solución

Definiendo la función de Lagrange

$F(x,y,z,\lambda,\beta) = f(x,y,z)+\lambda\varphi_1(x,y,z)+\beta\varphi_2(x,y,z)$

Calculando los puntos críticos

$F(x,y,z,\lambda,\beta) = xyz + \lambda(x + y - z - 3) + \beta(x - y - z - 8)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz+\lambda+\beta = 0 & ...(1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz+\lambda-\beta = 0 & ...(2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy-\lambda-\beta = 0 & ...(3) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x+y-z-3 = 0 & ...(4) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = x-y-z-8 = 0 & ...(5) \end{cases}$$

de la ecuación (1) y (3) eliminamos λ y β.

$yz + xy = 0 \Rightarrow y(x+z) = 0 \Rightarrow y = 0 \lor x+z = 0$

si $y = 0$, no existe solución, luego suponemos para $y \neq 9$ se tiene $z = -x$ reemplazando en la ecuación (4) y (5) se tiene.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11}{4}, \; y = -\frac{5}{2}, \; z = -\frac{11}{4}$$

por lo tanto $P(\frac{11}{4},-\frac{5}{2},-\frac{11}{4})$ es un punto crítico.

Luego $A(dx,dy,dz) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \quad (x_1 = x \; , \; x_1 = y \; , \; x_3 = z)$

$$\left.\begin{array}{l} d\varphi_1(x,y,z) = dx + dy - dz = 0 \\ d\varphi_2(x,y,z) = dx - dy - dz = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad dy = 0, dx = dz \qquad \text{... (1)}$$

ahora reemplazando (1) en A(dx, dy, dz) se tiene

$$A(dx,dy,dz) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dxdx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}dzdx + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dzdz$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dxdx + (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x})dxdx + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dxdx = (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2})dxdx$$

= (0 + 2y + 0) dx dx = 2y dx dx = B(dx)

por lo tanto B(dx) = 2y dx dx, entonces

B(dx)(p) = -5 dx dx $\Rightarrow$ $\Delta_{11} = -5 < 0$. Luego $P(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4})$ corresponde un máximo condicionado de f.

3.63 Ejercicios Desarrollados

1) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y$.

Solución

Calculando los puntos críticos de f(x,y)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 18x + 15 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 6y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \text{... (1)}$$

resolviendo el sistema se tiene:

$$\begin{cases} 3(x+1)(x+5) = 0 \\ 3(y+1)(y-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \ , \ x = -5 \\ y = -1 \ , \ y = 3 \end{cases}$$

Los puntos críticos son: $P_1(-1,-1)$, $P_2(-1,3)$, $P_3(-5,-1)$, $P_4(-5,3)$.

Calculando las segundas derivadas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x+18$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y-6$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$

aplicando el criterio de la segunda derivada: $\Delta = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x})^2$

para $P_1(-1,-1)$, $\Delta = (12).(-12) - 0 = -144 < 0$

Luego se tiene en $P_1(-1,-1)$ un punto silla para $P_2(-1,3)$, $\Delta = (12).(12) - 0 = 144 > 0$ y como $\frac{\partial^2 f(-1,3)}{\partial x^2} = 12 > 0$ entonces se tiene un mínimo $P_2(-1,3)$ cuyo valor mínimo es f(-1,3) = -34

para $P_3(-5,-1)$, $\Delta = (-12).(-12) - 0 = 144 > 0$ y como $\frac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x^2} = -12 < 0$, entonces se tiene un máximo en $P_3(-5,-1)$ cuyo valor máximo es f(-5,-1) = 30, para $P_4(-5,3)$, $\Delta = (-12).(12) - 0 = -144 < 0$ entonces se tiene en el punto $P_4(-5,3)$ un punto silla.

2) Hallar los extremos relativos de la función $z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$.

Solución

Calculando los puntos críticos de la función f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 15y = 0 & \ldots(1) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 15x = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) se tiene $y = \frac{x^2}{5}$, reemplazando en (2)

$$3(\frac{x^4}{25}) - 15x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 125) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 5$$

para x = 0, y = 0, $P_1(0,0)$ punto crítico , x = 5, y = 5, $P_2(5,5)$ punto crítico calculando las segundas derivadas $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = -15$

aplicando el criterio de la segunda derivada

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x})^2$$

para $P_1(0,0)$, $\Delta|_{P_1(0,0)} = (0)(0) - (-15)^2 = -225 < 0$, entonces $P_1(0,0)$ un punto silla

para $P_2(5,5)$, $\Delta|_{P_2(5,5)} = (30)(30) - 225 = 650 > 0$ y como $\dfrac{\partial^2 f(5,5)}{\partial x^2} = 30 > 0$, entonces $\exists$ mínimo relativo en el punto $P_2(5,5)$ cuyo valor mínimo es f(5,5) = -125.

3) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = 4x + xy - yz - x^2 - y^2 - z^2$

Solución

Para encontrar los puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 4 + y - 2x = 0 \quad ....(1) \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x - y - 2y = 0 \quad ....(2) \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = -y - 2z = 0 \quad ....(3) \end{cases}$$

de las ecuaciones (1) y (3) se tiene : $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow z = 2 - x$

en la ecuación (2) reemplazamos y = 2x - 4 , z = 2 - x

x - (2 - x) - 2(2x - 4) = 0 $\Rightarrow$ x = 3 para x = 3 , y = 2 , z = -1 $\Rightarrow$ P(3,2,-1) punto critico.

$\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = -2$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\partial x} = -1$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}=-2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}=-2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}=-1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}=-2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0 \quad , \Delta_2 = 3 > 0 \quad , \Delta_3 = -4 < 0$$

Luego f tiene un máximo relativo en $P_0(3,2,-1)$ y su valor máximo es f(3,2,-1) = 6.

4) Hallar los extremos relativos de la función (máximo y mínimo) de la función.

$$z = f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)$$

Solución

Para encontrar los puntos críticos, cada una de las derivadas parciales igualaremos a cero.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = x[e^{-(x^2+y^2)}(2-2x^2-2y^2)-2]=0$$

$$\Rightarrow \quad x = y = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = y[e^{-(x^2+y^2)}(2-2x^2-2y^2)-2]=0$$

Luego P(0,0) es punto crítico, ahora aplicamos el criterio de la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left[4x^4+4x^2y^2-10x^2-2y^2+2\right]-2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}\left[4y^4+4x^2y^2-10y^2-2x^2+2\right]-2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=xe^{-(x^2+y^2)}\left[4x^3+4x^2y-8y\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_P=0 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_P=0 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\right|_P=0$$

$$\Delta=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_P-\left.\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\right)^2\right|_P=0-0=0$$

como $\Delta=0$ puede ocurrir que exista extremos o no, entonces para esto se tiene:

$\forall(x,y)\in R^2$, $x^2+y^2>0 \Rightarrow -(x^2+y^2)\le 0$

de donde $0\le e^{-(x^2+y^2)}\le 1$, multiplicando por

$x^2+y^2 \Rightarrow 0\le(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\le x^2+y^2$, restamos

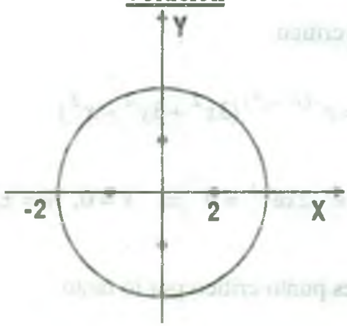
$-(x^2+y^2) \Rightarrow -(x^2+y^2)\le(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}-(x^2+y^2)\le 0$

como $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}-(x^2+y^2)\le 0$ entonces $f(x,y)\le 0$ $\forall(x,y)\in R^2$

entonces en (0,0) existe máximo y cuyo valor máximo es $f(0,0)=0$.

5) Hallar los valores máximos y mínimos de la función $x=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ en el circulo $x^2+y^2\le 4$.

Solución



encontraremos los puntos críticos en el interior de la región.

Es decir haciendo cero a cada una de las derivadas parciales.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)}\left[2-2x^2-3y^2\right] = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)}\left[3-2x^2-3y^2\right] = 0 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

el sistema (1) es equivalente al sistema siguiente.

$$\begin{cases} x(2-2x^2-3y^2) = 0 \\ x(3-2x^2-3y^2) = 0 \end{cases} \quad \text{de donde se tiene:} \quad \begin{cases} x = 0 \ \vee \ 2-2x^2-3y^2 = 0 \\ y = 0 \ \vee \ 3-2x^2-3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \wedge y = 0 \\ x = 0 \wedge 3-3x^2-3y^2 = 0 \\ 2-2x^2-3y^2 = 0 \wedge y = 0 \\ 2-2x^2-3y^2 = 0 \wedge 3-2x^2-3y^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1(0,0) \\ P_2(0,\pm 1) \\ P_3(\pm 1,0) \end{cases}$$

puntos críticos en la región interior del circulo ahora hallaremos los puntos críticos en la frontera de la región $x^2+y^2=4$.

$$z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+2y^2+y^2)$$

$$z = e^{-4}(8-y^2) \ \Rightarrow \ \frac{dz}{dy} = 2ye^{-4} = 0 \ \Rightarrow \ y = 0, \ x = \pm 2$$

Luego $P_4(\pm 2,0)$ es punto crítico

$$z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2) = e^{-(x^2+y^2)}(3x^2+3y^2-x^2)$$

$$z = e^{-4}(12-x^2) \ \Rightarrow \ \frac{dz}{dx} = -2xe^{-4} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0, \ y = \pm 2$$

Luego $P_5(0,\pm 2)$ también es punto crítico por lo tanto

$$z = f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2+3y^2)$$

$$f(0,0) = 0 \ , \ f(0,\pm 1) = \frac{3}{e} \ , \ f(\pm 1,0) = \frac{2}{e} \ , \ f(\pm 2,0) = \frac{8}{e^4} \ , \ f(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$$

El valor mínimo es f(0,0) = 0 y se encuentra en el punto (0,0) el valor máximo es $f(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$ y se encuentra en el punto $(0,\pm 1)$.

6) Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y$

Solución

Encontrando los puntos críticos de f(x,y).

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 18x + 15 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 6y - 9 = 0 \end{cases} \quad \ldots (1)$$

resolviendo el sistema se tiene:

$$\begin{cases} 3(x+1)(x+5) = 0 \\ 3(y+1)(y-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \ , \ x = -5 \\ y = -1 \ , \ y = 3 \end{matrix}$$

los puntos críticos se obtienen combinando las soluciones:

$$P_1(-1,-1) \ , \ P_2(-1,3) \ , \ P_3(-5,-1) \ , \ P_4(-5,3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x + 18 \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y - 6 \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2} = 12 \\ \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2} = -12 \\ \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y \partial x} = 0 \end{matrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y \partial x})^2 = -144 < 0$$

Luego se tiene $P_1(-1,-1)$ es punto silla.

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(-1,3)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(-1,3)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(-1,3)}{\partial y \partial x})^2 = (12)(12) - 0 = 144 > 0$$

como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(-1,3)}{\partial x^2} = 12 > 0$ entonces en el punto $P_2(-1,3)$ se tiene un mínimo relativo, cuyo valor mínimo es: f(-1,3) = -34

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial y \partial x})^2 = (-12)(-12) = 144 > 0$$

como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(-5,-1)}{\partial x^2} = -12 < 0$ entonces en el punto $P_3(-5,-1)$ se tiene un máximo relativo, cuyo valor mínimo es: f(-5,-1) = 30.

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(-5,3)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f(-5,3)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(-5,3)}{\partial y \partial x})^2 = (-12)(12) = -144 < 0$$

como $\Delta < 0$, se tiene que $P_4(-5,3)$ es punto silla.

7) Hallar los puntos estacionarios de la función $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$ que satisfagan la condición x > 0, y > 0, y analizar su carácter.

Solución

$$z = f(x,y) = x^3 y^2 (12 - x - y) = 12x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 36x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{... (1)}$$

el sistema (1) es equivalente escribir en la forma.

$$\begin{cases} x^2y^2(36-4x-3y)=0 \\ x^3y(24-2x-3y)=0 \end{cases}, \quad \text{como } x>0,\ y>0$$

se puede simplificar el sistema

$$\begin{cases} 36-4x-3y=0 \\ 24-2x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=6\ ,\ y=4 \text{ por lo tanto P(6,4) es punto estacionario}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 72xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 72x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 24x^3 - 24x^4 - 6x^3y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f(6,4)}{\partial x^2} = -2{,}304 \\ \dfrac{\partial^2 f(6,4)}{\partial y^2} = -1728 \\ \dfrac{\partial^2 f(6,4)}{\partial y^2} = -2590 \end{matrix}$$

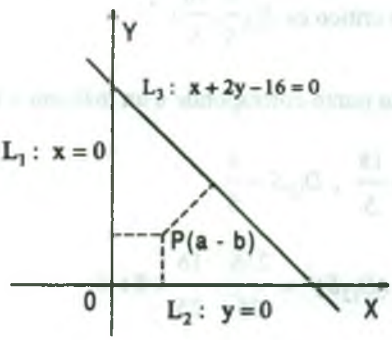
$$\Delta = \frac{\partial^2 f(6,4)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(6,4)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(6,4)}{\partial y \partial x} = (-2304)(-2590) - (-1728)^2$$

$$\Delta = 2985984 > 0 \text{ y como } \frac{\partial^2 f(6,4)}{\partial x^2} = -2304 < 0$$

Entonces en el punto P(6,4) existe un máximo.

8) En el plano OXY hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que miden entre las tres rectas x = 0, y = 0, x + 2y - 16 = 0 y el punto buscado sea el menor posible.

Solución



Sabemos que la distancia de un punto a la recta esta dado por: $d_{(P,L)}=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Luego calculando las distancias se tiene:

$$d_{(P,L_1)}=|a| \Rightarrow d^2_{(P,L_1)}=a^2 \ , \ d_{(P,L_2)}=|b| \Rightarrow d^2_{(P,L_2)}=b^2$$

$$d_{(P,L_3)}=\frac{|a+2b-16|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow d^2_{(P,L_3)}=\frac{(a+2b-16)^2}{5}$$

por condiciones del problema se tiene:

$$S=d^2_{(P,L_1)}+d^2_{(P,L_2)}+d^2_{(P,L_3)} \Rightarrow S=a^2+b^2+\frac{(a+2b-16)^2}{5}$$

ahora calculando los puntos críticos.

$$D_1S=2a+\frac{2}{5}(a+2b-16)=0 \qquad \dots (1)$$

$$D_2S=2b+\frac{4}{5}(a+2b-16)=0 \qquad \dots (2)$$

de la ecuación (1) se tiene: b = 8 – 3a ... (3)

de la ecuación (2) se tiene: 2a + 9b – 32 = 0 ... (4)

reemplazando (3) en (4) se tiene: $2a+9(8-3a)-32=0 \Rightarrow a=\frac{8}{5}, b=\frac{16}{5}$

por lo tanto el punto crítico es $P_0(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$

ahora veremos si este punto corresponde a un máximo o a un mínimo.

$$D_{11}S=\frac{12}{5},\ D_{22}S=\frac{18}{5}\ ,\ D_{12}S=\frac{4}{5}$$

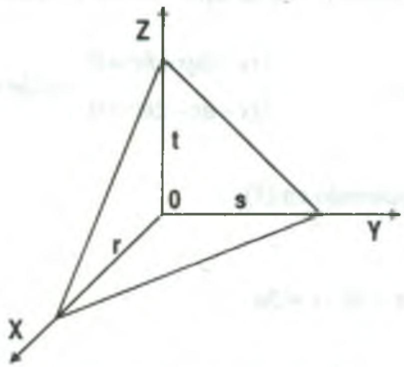
$$\Delta|_{P_0}=D_{11}S.D_{22}S-(D_{12}S)^2=\frac{216}{25}-\frac{16}{25}=8>0$$

entonces existe extremo, pero como $D_{11}S\Big|_{p_0} = \frac{12}{5} > 0$ entonces el punto $p_0(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$ corresponde a un mínimo, por lo tanto el punto buscado es $p_0(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$.

9) **Trazar un plano que pase por el punto (a,b,c) y que el volumen del tetraedro recortado por dicho plano del triedro coordenado sea el menor posible.**

Solución

Consideremos la ecuación simétrica del plano.



P: $\frac{x}{r}+\frac{y}{s}+\frac{z}{t}=1$ como p(a,b,c) $\in$ **P** entonces:

$$\frac{a}{r}+\frac{b}{s}+\frac{c}{t}=1 \text{ de donde } t=\frac{rsc}{rs-as-br} \qquad \textbf{... (α)}$$

sabemos que el volumen del tetraedro es: $V=\frac{1}{6}rst$ (de la figura).

sustituyendo el valor de t se tiene: $V(r,s)=\dfrac{r^2s^2c^2}{6(rs-as-br)}$

ahora calcularemos el punto critico.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2rs^2c(rs-as-br)-(s-b)r^2s^2c}{(rs-as-br)^2}\right) = 0 & \ldots(1) \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2r^2sc(rs-as-br)-(r-a)r^2s^2c}{(rs-as-br)^2}\right) = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) se tiene: r > 0, s > 0, c > 0 y

$(rs-as-br)^2 > 0 \Rightarrow 2(rs-as-br)-(s-b)r = 0$ de donde rs - 2as - br = 0 **... (3)**

de la ecuación (2) se tiene:

r > 0, s > 0, c > 0, $(rs-as-br)^2 > 0 \Rightarrow 2(rs-as-br)-s(r-a) = 0 \Rightarrow rs-as-2br = 0$ **... (4)**

Luego (3) y (4) se tiene: $\begin{cases} rs-2as-br=0 \\ rs-as-2br=0 \end{cases} \Rightarrow br-as=0 \Rightarrow br = as$

de donde $r = \dfrac{as}{b}$ reemplazando en (3).

$$\frac{as^2}{b} - 2as - as = 0 \Rightarrow s = 3b\ ,\ r = 3a$$

entonces $p_0(r,s) = p_0(3a,3b)$ es un punto crítico reemplazando $p_0(3a,3b)$ en (α) se tiene t = 3c además $V_{min.} = \dfrac{81a^2b^2c}{18ab} = \dfrac{9}{2}abc$ y la ecuación del plano pedido es:

P: $\dfrac{x}{3a}+\dfrac{y}{3b}+\dfrac{z}{3c} = 1$ ∴ P: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 3$

10) Sean dados n puntos $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, ..., $A_n(x_n,y_n,z_n)$. En el plano OXY hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que miden entre todos los puntos dados buscado sea la menor posible.

Solución

Consideremos un punto en el plano OXY, P(x,y,0) por condición del problema se tiene:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d^2(P,A_i)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+...+(0-z_i)^2\right]$$

ahora encontramos los puntos críticos o estacionarios.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)=0 & ...(1) \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}2(y-y_i)=0 & ...(2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) se tiene: $\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)=2\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=0$

$$\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)=\sum_{i=1}^{n}x-\sum_{i=1}^{n}x_i=nx-\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \text{ de donde } x=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

de la ecuación (2) se tiene $\sum_{i=1}^{n}2(y-y_i)=2\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)$

$$\sum_{i=1}^{n}(y-y_i)=\sum_{i=1}^{n}y-\sum_{i=1}^{n}y_i=ny-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

de donde $y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$. Luego el punto $P(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n},0)$ es punto crítico

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}=2n \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=2n \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=0$$

$$\Delta|_P \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x})=4n^2>0$$

como $\Delta|_P > 0 \Rightarrow \exists$ extremo en P pero como $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} = 2n > 0$, Luego la función F(x,y)

tiene un mínimo en el punto. $P(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, 0)$

11) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de la ecuación siguiente $x+y+z+xy-x^2-y^2=0$, en el punto de la función representada por dicha superficie tenga un valor extremo ¿Qué clase de extremo es?

Solución

Sea $z = f(x,y) = x^2+y^2-x-y-xy$, ecuación de la superficie encontraremos los puntos criticos de f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x-1-y=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y-1-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \quad \text{de donde } P(1,1) \text{ punto critico}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 \;,\; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 \;,\; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -1$$

$\Delta|_P \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} . \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - (\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x})^2 = 4-1=3>0$ entonces existe extremo relativo y

como $\left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_P > 0$, entonces en el punto P(1,1) existe un mínimo.

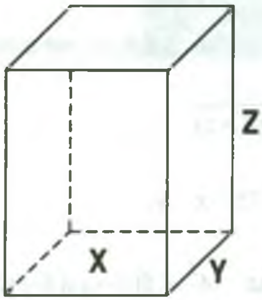
para x = y = 1 $\Rightarrow$ z = -1 $\Rightarrow$ Q(1,1,-1)

$\vec{N} = \nabla F(x,y,z) = (2x-y-1,\ 2y-x-1,\ -1)$ entonces $\vec{N} = \nabla F(1,1,-1) = (0,0,-1)$

$\mathbf{P_T}$: $\vec{N}.(x-1,y-1,z+1)=0$ entonces $\mathbf{P_T}$: $(0,0,-1).(x-1,y-1,z+1)=0 \;\therefore\;$ $\mathbf{P_T}$: $z+1=0$

12) Una caja rectangular sin tapa deberá tener un volumen fijo. ¿Cómo deberá hacerse la caja para emplear en su manufactura la cantidad mínima de material?

Solución



Sean x,y,z las dimensiones de la caja de volumen fijo V. V = xyz

de la condición del problema, el área lateral de la caja está dado por: **A= xy+2xz+2yz ...(1)**

como $V = xyz \Rightarrow z = \dfrac{V}{xy}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $A = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = x = \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$ **... (α)**

al resolver el sistema (α) se tiene: $x = y = \sqrt[3]{2V}$.

Luego el punto $P(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$es punto crítico y mediante el criterio de la segunda derivada corresponde a un mínimo, además $z = \dfrac{V}{xy}$ de donde para $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{2V}$ por lo tanto las dimensiones de la caja deben ser $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{2V}$

13) Determinar entre los triángulos de perímetro dado el de área máxima.

Solución

Sean x,y,z los lados del triángulo, cuyo perímetro es: 2S = x + y + z

además el área de un triángulo en función de su perímetro y lado es:

$$A = \sqrt{S(S-x)(S-y)(S-z)} \qquad \ldots (1)$$

como 2S = x + y + z $\Rightarrow$ z = 25 – x – y ... **(2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: $A^2 = S(S-x)(S-y)(x+y-S) = f(x,y)$

Luego f(x,y) = S(S - x)(S - y)(x + y - s)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2S^3 - 2S^2x - 3S^2y + 2Sxy + Sy^2 = 0 & \ldots(1) \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3S^2x + Sx^2 + 2S^3 - 2yS^3 + 2Sxy = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

restando (1) y (2) se tiene: $Sx - Sy - x^2 + y^2 = 0$ de donde

$$y^2 - Sy = x^2 - Sx \Rightarrow (y - \frac{S}{2})^2 = (x - \frac{S}{2})^2 \Rightarrow x = y$$

Luego y = x reemplazando en (1)

$2S^3 - 2S^2x - 3S^2x + 2Sx^2 + Sx^2 = 0$ simplificando $3x^2 - 5Sx + 2S^2 = 0$

$$x = \frac{5S \pm \sqrt{25S^2 - 24S^2}}{6} \Rightarrow x = S \nexists \;,\; x = \frac{2}{3}S \;,\; z = 2S\text{-}x\text{-}y \text{ para } x = y = \frac{2}{3}S \;,\; z = \frac{2S}{3}$$

que mediante el criterio de la segunda derivada se tiene un área máxima, para $x = y = z = \dfrac{2S}{3}$

es decir el triángulo de perímetro dado de área máxima es un triángulo equilátero.

14) Hallar el máximo y mínimo de $z = f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, estando ligados las variables x e y por la relación $y - x = \frac{\pi}{4}$

Solución

Sea $g(x,y) = y - x - \frac{\pi}{4}$ la restricción de x e y definimos la función F(x,y,λ) por:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(y - x - \frac{\pi}{4})$$

ahora encontramos los puntos críticos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial x} = -2\cos x \operatorname{sen} x - \lambda = 0 & \dots(1) \\ \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial y} = -2\cos y \operatorname{sen} y + \lambda = 0 & \dots(2) \\ \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = y - x - \dfrac{\pi}{4} = 0 & \dots(3) \end{cases}$$

de (1) y (2) se tiene: $\begin{cases} \lambda = -2\operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x \\ \lambda = 2\operatorname{sen} y \cos y = \operatorname{sen} 2y \end{cases}$

restando estas ecuaciones se tiene: sen 2x + sen 2y = 0 ... (4)

de la ecuación (3) $y = x + \frac{\pi}{4}$, que reemplazando en 4 se tiene $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$, de donde sen 2x + cos 2x = 0 ⇒ sen 2x = - cos 2x, por lo tanto. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1$, despejando tenemos que:

$$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}, k \in Z^+$$

Luego $P_k(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})$, $k \in Z^+$ son puntos críticos, ahora aplicaremos el criterio

para los extremos condicionados: $d^2F = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_i} = dx_i dx_j (x_1 = x, x_2 = y)$

dg(x,y) = dy - dx = 0 $\Rightarrow$ dy = dx

además $B(dx) = (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2})dx dx$ = (-2 cos 2x - 2 cos 2y) dx dx

$$B(dx)\Big|_{P_k} = -2\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k\right| dx\,dx = (-1)^k 2\sqrt{2}\, dx\,dx$$

por lo tanto: si k es impar $\Delta_{11} > 0 \Rightarrow$ al punto P_k le corresponde un mínimo condicionado.

si k es par $\Delta_{11} < 0 \Rightarrow$ al punto P_k le corresponde a un máximo condicionado.

3.64 Ejercicios Propuestos.

1) Determinar los valores extremos relativos de f si existen.

a) $f(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$

b) $f(x,y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$

c) $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy$

e) $f(x,y) = \frac{2x+2y+1}{x^2+y^2+1}$

f) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$

g) $z = \frac{xy}{2}(47 - x - y)(\frac{x}{3} + \frac{y}{4})$

h) $z = xy^2(1 - x - y)$

i) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

j) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$

k) $f(x,y)=\sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$

l) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

ll) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

m) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

n) $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ **o)** $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{2/3}$

p) $f(x,y)=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ **q)** $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$, x > 0, y > 0

r) $f(x,y)=4-(x^2+y^2)^{2/3}$ **s)** $f(x,y)=x^3-3xy^2+2y^3$

t) $f(x,y)=e^{\frac{1}{2+x^2+\cos^2 y-\cos y}}$

u) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy^2-18(x+y)$

2) Calcular los valores extremos de la función $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$.

3) Determinar los extremos relativos de la función f(x,y) = (x - y)(xy - 1) si existen.

4) Hallar los extremos de la función si existen $f(x,y)=x^2+y^3-6xy+3x+6y-2$.

5) Hallar los valores extremos relativos o puntos de ensilladura de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=x^3+6x^2-y^2+9x+8$ **b)** $f(x,y)=x^2-3xy^2+2y^4$

6) Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=Ln(x^2+y^2+1)$ **b)** $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$

c) $f(x,y)=x-2y+Ln\sqrt{x^2+y^2}+3arc.\text{tg}\,\frac{y}{x}$, x > 0.

7) Hallar los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $f(x,y,z)=4x+xy-yz-x^2-y^2-z^2$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{x^3}{3}-3xy-3xz-3y^2+\dfrac{3}{2}z^2-5x-2$

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

d) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$

e) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2+xy-2z-7x+12$

f) $f(x,y,z)=x^2+xz-y+y^2+yz+3z^2$

g) $f(x,y,z)=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z)$

8) Hallar los valores máximos y mínimos de la función $z=x^2+2xy-4x+8y$ en el rectángulo limitado por las rectas x = 0, y = 0, x = 1, y = 2.

9) Determinar el máximo y mínimo absoluto de las funciones.

a) $f(x,y)=x^2y$ b) $f(x,y)=x^2-y^2$ en la región $x^2+y^2\le 1$.

10) Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ en la región $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

11) Hallar los valores máximos de la función $z=x^2y(4-x-y)$ en el triángulo limitado por las rectas x = 0, y = 0, x + y= 6.

12) Hallar los valores máximos y mínimos de la función z = sen x + sen y + sen (x + y) en el rectángulo, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$.

13) Determinar el menor y mayor valor de la función $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ en el triángulo cuyo borde son las rectas x = 1, y = 1, x + y = 1.

14) Determinar el mayor y menor valor de la función z = xy + x + y en el rectángulo cuyo borde son las rectas x = 1, x = 2, y = 2, y = 3.

15) Determinar el menor y mayor valor de la función $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ en el dominio cerrado cuyo borde son las rectas x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0.

16) Determinar el menor y el mayor valor de la función $z = 1 - x^2 - y^2$ en él circulo $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

17) Determinar el menor y mayor valor de la función z = sen x + sen y + cos (x + y) en el dominio $0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

18) Determinar el menor o mayor valor de la función z = cos y + cos (x + y) en el dominio $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

19) Un disco circular tiene la forma de la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ si T grados es la temperatura de cualquier punto (x,y) del disco y $T = 2x^2 + y^2 - y$, encontrar los puntos más calientes y mas fríos en el disco.

20) Hallar los valores mínimos de la función $z = x^2 + y^2$ en el círculo $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 \leq 9$

21) Si la temperatura en cualquier punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, está dado por $T = 3x^{1/3}y^{2/3}z^{1/3}$. Hallar los puntos más fríos y mas calientes de la esfera.

22) La temperatura en grados centígrados en cualquier punto de la región limitada por las rectas x = 0, y = 0, x + y = 3, está dada por $f(x,y)=8x^2 ,4xy+5y^2 -4x-8y$. Determinar la máxima y mínima temperatura en la región incluida las líneas fronteras.

23) Hallar los valores máximos y mínimos de la función $z = x^2 - y^2$ en él circulo $x^2 + y^2 \leq 4$.

24) Sea la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 5y$. Determinar los extremos de f en la región encerrada por las curvas $|y| = x+2$; $x=0$.

25) Hallar los extremos de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y + \cos(x-y)$ en la región definida por $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

26) Determinar entre los triángulos inscritos en una circunferencia el de mayor área.

27) En el plano XOY, hay que hallar un punto M(x,y) tal que la suma de los cuadrados de sus distancias hasta las tres rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$, sea la menor posible.

28) Determinar entre los rectángulos de área S dada, el de menor perímetro.

29) Desarrollar el número "a" en tres sumandos positivos de modo que el producto de estos tenga el valor máximo.

30) Representar al número "a" en la forma de producto de cuatro factores positivos cuya suma sea la menor posible.

31) Trazar un plano de modo que pase por el punto (a,b,c) y que el volumen del tetraedro recortado por dicho plano del triedro coordenado sea el menor posible.

32) Dados tres puntos A(0,0,12), B(0,0,4) y C(8,0,8) en el plano 0XY. Hallar un punto D tal que la esfera que pase por estos tres puntos tenga el menor radio posible.

33) Inscribir en la esfera dada de diámetro 2R un paralelopídedo rectangular que tenga el mayor volumen posible.

34) En el plano $x + y - 2z = 0$, hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que miden entre dichos puntos y los planos $x + 3z = 6$; $y + 3z = 2$, sea la menor posible.

35) Hallar la ecuación del plano que contiene el punto (1,2,1) y que corta en un tetraedro de volumen mínimo en el primer octante.

36) ¿Cuál es el volumen del mayor paralelepípedo que puede ser inscrito en un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

37) Se quiere construir una cisterna metálica abierta para agua, con un triángulo rectángulo como base y lados verticales. Si el volumen de la cisterna debe ser de $2m^3$. ¿Qué diseño redundará en el área del metal.?

38) Encontrar la distancia mínima entre el punto (0,-2,4) y los puntos del plano x + y - 4z = 5.

39) Un paralelepídedo rectangular tiene tres de sus caras en los planos coordenados y el vértice opuesto al origen en el primer octante y en el plano 2x + y + 3z = 6. Encontrar el volumen máximo que puede tener este paralelepípedo.

40) Encontrar las constantes α y β de tal manera que:

$F(\alpha,\beta)=\int_0^{\pi}(\operatorname{sen} x-(\alpha x^2+\beta x))^2\,dx$, sea mínimo.

41) ¿En qué punto de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, la tangente a ésta, forma con los ejes coordenados el triángulo de menor área.?

42) Hallar el paralelopípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

43) Demostrar que en el interior del triángulo ABC, hay un punto P tal que:

$(d(P,A))^2+(d(P,B))^2+(d(P,C))^2$, es mínimo, identificar el punto.

44) Encontrar las distancias máximas y mínimo desde el origen hasta la superficie $(\frac{x}{a})^4 + (\frac{y}{b})^4 + (\frac{z}{c})^4 = 1$, donde $a > b > c > 0$.

45) Encontrar el volumen maximado por los planos x = 0, y = 0, z = 0 y un plano tangente a la elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, en el primer octante.

46) Encontrar los extremos relativos de la función dada en cada uno de los casos, sujeta a las restricciones dadas.

a) $z = xy$ para $x^2 + y^2 = 2a^2$

b) $z = x^m + y^m (m > 1)$ para $x + y = 2,\ (x \geq 0,\ y \geq 0)$

c) $x = x^2 + y^2$ para $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

d) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ para $y - x = \frac{\pi}{4}$

e) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ para $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

f) $z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ para $y - x = \frac{\pi}{4}$

g) $z = 25 - x^2 - y^2$ para $x^2 + y^2 - 4y = 0$

h) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ para $x^2 + y^2 - 2y = 0$

i) $z = x^2 + y$ para $x^2 + y^2 = 9$ **j)** $z = xy$ para $x^2 + y^2 = 4$

47) Encontrar los extremos relativos de la función dada en cada uno de los casos sujeta a las restricciones dadas.

a) f(x, y, z) = $x^3+y^3+z^3$ para x + y + z = 1

b) f(x, y, z) = $x^2+y^2+z^2$ para $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$

c) f(x, y, z) = xy^2z^3 para $x+y+z=12$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$

d) f(x, y, z) = xyz para $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

e) f(x, y, z) = $a(a-x)(a-y)(a-z)$ para $x+y+z=2a$ $(a>0)$

f) f(x, y, z) = $x^2+y^2+z^2$ para $3x-2y+z-4=0$

g) f(x, y, z) = xyz para $x^2+2y^2+4z^2=4$

h) f(x, y, z) = y^3+xz^2 para $x^2+y^2+z^2=1$

i) f(x, y, z) = $x^2+y^2+z^2$ para $xyz=1$

j) f(x, y, z) = xyz para $x^2+y^2+z^2=1$

k) f(x, y, z) = $x+y+z$ para $x^2+y^2+z^2=9$

48) Sea C la curva de ecuaciones $x^2+z=8$, $x^2+8y^2-z=0$ $x>0$. Hallar el punto de C más alejado del plano z=10.

49) Hallar las distancias máximas y mínimas de un punto de la elipse $x^2+4y^2=4$ a la recta x + y = 4.

50) Sea C la curva de intersección de las superficies $x^2+z^2=2y$, $x-y+z+3=0$, encontrar el punto , en la curva C, que esté más alejado del plano xz.

51) Sea C la curva de intersección de las superficies $y=1+(z-1)^{\frac{3}{2}}$; x = 1, hallar el punto de la curva más próximo al plano XY.

52) Calcular las dimensiones exteriores que deberá tener un cajón rectangular abierto, del que se dan el espesor de las paredes δ y la capacidad (interior)V; para que al hacerlo se gaste la menor cantidad posible de material.

53) Determinar las constantes a y b para que la integral $\int_0^1 (ax+b-f(x))^2 dx$, tome el menor valor posible si: **a)** $f(x)=x^2$; **b)** $f(x)=(x^2+1)^{-1}$.

54) Encontrar los puntos en la curva de intersección del elipsoide $x^2+4y^2+4z^2=4$ y el plano $x+4y-z=0$ que estén más cercanos al origen y encontrar la distancia mínima.

55) La sección transversal de una batea es un trapecio isósceles.

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-3x+5y$$

Si la batea se construye doblando los lados de una franja de metal de 18 pulg. de ancho, ¿Cuáles serían las dimensiones, para que el área de la sección transversal sea máxima.? siendo h, L las variables independientes.

56) Los hiperplanos $x+y-z-2\omega=1$, $x-y+z+\omega=2$, se cortan en el conjunto j en R^4 Encontrar el punto de j que diste menos al origen.

57) Supongamos que tenemos una curva definida por la ecuación $G(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-1=0$. Encontrar la distancia máxima y mínima de la curva al origen.

58) Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y=-x^2$ y el plano $2x+y+z=4$.

59) En el plano $3x-2z=0$, hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que median entre dichos puntos y los puntos $A(1,1,1)$ y $B(2,3,4)$ sea la mayor posible.

60) Encuentre las distancias más corta del origen a la curva dada por la intersección de las superficies $xyz = a$, $y = bx$, $a > 0$, $b > 0$.

61) En la superficie $x^2 + 96y^2 + 96z^2 = 96$, hallar los puntos cuyas distancias a, $3x + 4y + 12z = 288$, sea la menor posible y la mayor posible.

62) Hallar la distancia más corta entre el elipsoide de $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ y el plano $2x + y + z + 4 = 0$.

63) Encuéntrese los puntos más cercanos al origen de la intersección del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y el plano $2x + y + z = 0$.

64) En la parábola $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$, hallar el punto más próximo a la recta $9x - 7y + 16 = 0$.

65) Dados los puntos A(4,0,4), B(4,4,4), C(4,4,0). Hallar un punto M en la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ de modo que el volumen de la pirámide MABC sea el mayor posible.

Rpta. M(-2,0,0)

66) Una fabrica produce taladros y sierras cuyos precios por unidad son S/. 500.00 y S/. 70.00 respectivamente. El costo de producir "x" sierras, "y" taladros es $C(x, y) = 45x + 32y - \frac{xy}{30} + \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{80}$. Halle los valores x e y para que la utilidad sea máxima.

Rpta. x = 9102, y = 12288

67) Hallar los puntos sobre la superficie $z = x^2 + y^2$ que están más próximo al punto (3,-6,4).

68) En que punto de la curva $x = a \text{ sen } t$, $y = b\cos t$, $t \in [0,2\pi]$ la recta tangente a esta curva forma con los ejes coordenados un triángulo de área máxima.

3.65 Funciones Homogéneas y Diferencial Exacta.

a) **Definición.-** La función $f: D \subset R^n \to R$, definida por $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se llama homogénea de grado k, si para cualquier número real λ, si se cumple:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Ejemplo.- Las funciones siguientes son homogéneas:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, homogénea de grado 2

2) $f(x,y) = x \operatorname{sen}\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x}$, homogénea de grado 1

3) $f(x,y) = x^3 e^{\frac{y}{x}} + y^3 \operatorname{sen}\frac{y}{x}$, homogénea de grado 3

4) $f(x,y,z) = arc.\operatorname{tg}\frac{y}{x} + arco.\operatorname{sen}\frac{y}{x}$, homogénea de grado cero

b) **Propiedades de las Funciones Homogéneas**

1ero. Sea $z = f(x,y)$ una función homogénea de grado λ, entonces

$z = x^\lambda \phi(\frac{y}{x}) = y^\lambda \psi(\frac{x}{y})$, donde φ y ψ son funciones de una sola variable.

Demostración

Como $z = f(x,y)$ es de grado λ, podemos escribir:

$z = f(x.1, x.\frac{y}{x})$ y por homogeneidad (λ . x).

$z = x^\lambda f(1,\frac{y}{x})$, llamemos $\phi(\frac{y}{x}) = f(1,\frac{y}{x})$ tenemos $z = x^\lambda \phi(\frac{y}{x})$; en forma similar puede hacerse con la variable y.

2do. Si z = f(x,y) es una función homogénea de grado λ, entonces cualquiera de las derivadas parciales de primer orden es una función homogénea de grado λ - 1.

Demostración

Por la propiedad 1era. tenemos que $z = x^{\lambda}\,\phi\,(\frac{y}{x})$, derivando como producto y aplicando la regla de la cadena: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lambda x^{\lambda-1}\phi(\frac{y}{x}) + x^{\lambda}\phi'(-\frac{y}{x^2}) = \lambda x^{\lambda-1}\phi(\frac{y}{x}) - x^{\lambda-2}y\phi'(\frac{y}{x})$ ahora si reemplazamos (x,y) por (r x, r y), ϕ y ϕ' no se verán alterados de modo que en los factores $x^{\lambda-1}$ y $x^{\lambda-2}$ será posible factorizar $r^{\lambda-1}$, lo cual prueba que $\frac{\partial z}{\partial x}$ es homogénea de grado λ - 1.

3ero. Teorema de Euler.- Si $z = f(x,y)$ es una función homogénea de grado λ, entonces $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$

Demostración

Como $z = x^{\lambda}\,\phi(\frac{y}{x})$, derivando se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lambda x^{\lambda-1}\phi(\frac{y}{x}) - x^{\lambda-2}y\phi'(\frac{y}{x}), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{\lambda-1}\phi'(\frac{y}{x})$$

multiplicando por x a $\frac{\partial z}{\partial x}$ se tiene: $x\frac{\partial z}{\partial x} = \lambda x^{\lambda}\,\phi(\frac{y}{x}) - x^{\lambda-1}y\phi'(\frac{y}{x})$ **... (1)**

multiplicando por y a $\frac{\partial z}{\partial x}$ se tiene: $y\ \frac{\partial z}{\partial x} = x^{\lambda-1}y\phi'(\frac{y}{x})$ **... (2)**

sumando (1) y (2) se tiene: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda x^{\lambda}\,\phi(\frac{y}{x}) = \lambda z$ $\quad \therefore x\frac{\partial z}{\partial x} = + \frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$

4to. Teorema de Euler.- Una condición necesaria y suficiente para que una función $f(x_1,x_2,...,x_n)$, definida y diferenciable en una región abierta $D\subset R^n$, sea homogénea de grado λ es que la función f debe satisfacer la relación de Euler: $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+...x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1,x_2,..x_n)$

5to. Si $z=f(x,y)$ es una función homogénea de grado λ, entonces.

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\lambda(\lambda-1)z$$

Demostración

Como el teorema de Euler establece una igualdad de funciones, tenemos: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\lambda z$.

Calculando las derivadas parciales, se tiene:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda z)\\ \frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(\lambda z)\end{cases}$$

efectuando estas derivadas parciales se tiene:

$$\begin{cases}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}=\lambda\frac{\partial z}{\partial x}\\ x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=\lambda\frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

multiplicando por x a la primera ecuación y por y a la segunda ecuación.

$$x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\,\frac{\partial z}{\partial x}+xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}=\lambda x\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+y^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\lambda y\,\frac{\partial z}{\partial y}$$ sumando las dos ecuaciones.

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\lambda(\frac{x\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+$$

$$+2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda z=\lambda^2 z$$

$$\therefore\quad x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\lambda(\lambda-1)z$$

3.66 Diferencial Exacta.

1) Una expresión de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ se denomina diferencial exacta si existe una función $f:D\subset R^2\to R$ tal que $df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

2) Una expresión de la forma $p(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ se denomina diferencial exacta si existe una función $f:D\subset R^3\to R$ tal que $df(x,y,z)=p(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

3) **Teorema.-** Supongamos que M y N, son funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en D. Entonces la expresión $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una diferencial exacta sí y solo sí $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x},\forall(x,y)\in D$

Ejemplo.- Examinar si $(e^x\operatorname{sen} y-2y\operatorname{sen} x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy$ es una diferencial exacta.

Solución

$$M = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^x coy - 2\operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow$$

$$N = e^x \cos y + 2\cos x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ **,es una diferencial exacta.**

4) Teorema.- Supongamos que P, Q, y R, son funciones continuas en D entonces, $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, es una diferencial exacta en $D \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Ejemplo.- Determinar si la diferencial dada es exacta $(2xy + z^2)dx + (2yz + x^2)dy + (2xz + y^2)dz$

Solución

$$\begin{cases} P = 2xy + z^2 \\ Q = 2yz + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial P}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} P = 2xy + z^2 \\ R = 2xz + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial p}{\partial z} = 2z \\ \frac{\partial R}{\partial x} = 2z \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\begin{cases} Q = 2yz + x^2 \\ R = 2xz + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y \\ \frac{\partial R}{\partial y} = 2y \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

por lo tanto la expresión dada es una diferencial exacta.

Observación.- Suponiendo que $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta entonces, $\exists f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$; se puede tomar cualquiera de estas dos ecuaciones, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$, derivando respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y)$$

$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$, integrando $g(y)=\int [N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy$

$$\therefore f(x,y)=\int M(x,y)dx+\int [N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy$$

Ejemplos.- Demostrar que la diferencial dada es exacta y hallar la función f de la cual es diferencial total.

1) $(3x^2\operatorname{tg}y-\frac{2y^3}{x^3})dx+(x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2})dy$

<u>Solución</u>

$$\begin{cases} M=3x^2\operatorname{tg}y-\frac{2y^3}{x^3}+z^2 \\ N=x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=3x^2\sec^2 y-\frac{6y^2}{x^3} \\ \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2\sec^2 y-\frac{6y^2}{x^3} \end{cases}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, es exacta, entonces $\exists f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M = 3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3} \text{ integrado } f(x,y) = \int (3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3})dx + g(y)$$

$f(x,y) = x^3 \operatorname{tg} y + \dfrac{y^3}{x^2} + g(y)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 \sec^2 y + \frac{3y^2}{x^2} + g'(y) = N = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}$$

$g'(y) = 4y^3 \Rightarrow g(y) = y^4$ entonces $f(x,y) = x^3 \operatorname{tg} y + \dfrac{y^3}{x^2} + y^4$

2) $(2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2)dx + (x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1)dy + (x^2y - 3xy^2 + 3)dz$

Solución

$$\begin{cases} P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2 \\ Q = x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xz - 6yz + 16xy \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xz - 6yz + 16xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2 \\ R = x^2yz - 3xy^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2xy - 3y^2 \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = 2xy - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\begin{cases} Q = x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1 \\ R = x^2y - 3xy^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x^2 - 6xy \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = x^2 - 6xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

por lo tanto la deferencial dada es exacta, ahora calcularemos la función f (x,y)

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2 \text{, integrado}$$

$$f(x,y,z) = \int (2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2)dx + g(y,z)$$

$f(x,y,z)=x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+g(y,z)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2z-6xyz+8x^2y+g_y(y,z)=Q=x^2z-6xyz+8x^2y+1$$

$$g_y(y,z)=1\Rightarrow g(y,z)=y+h(z)$$

$f(x,y,z)=x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+h(z)$, derivando

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=x^2y-3xy^2+h(z)=R=x^2y-3xy^2+1$$

$$h(z)=1\Rightarrow h(z)=z \qquad\qquad \therefore\ f(x,y,z)=x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+z$$

3.67 Ejercicios Propuestos.

1) Probar que las siguientes funciones son homogéneas y hallar su grado:

a) $f(x,y)=ax^3+by^3$ **b)** $f(x,y)=4x^{1/5}y^{3/5}+z^{1/5}$

c) $f(x,y)=\dfrac{axy^2+bx^2y}{x+y}$ **d)** $f(x,y)=\ln(\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3})$

e) $f(x,y)=Ax^2+2By+cy^2$ **f)** $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

2) Mostrar que la función homogénea de orden cero $z=f(y/x)$ satisface la relación $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

3) Si $f(x,y)=x\ln(\dfrac{y}{x})$, probar que: $x^2\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}+y^2\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$

4) Mostrar que la función homogénea de k-ésima orden $u=x^kF(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{z})$, donde F es una función derivable satisface la relación $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=ku$.

5) Demostrar que $z=(ax+by)^{\alpha}(cx+dy)^{1-\alpha}$ y $z=ax^{\alpha}y^{1-\alpha}+bx^{\beta}y^{1-\beta}$ son funciones homogéneas y comprobar en cada caso , el teorema de Euler.

6) Demostrar que si ϕ (x,y) es una función homogénea de grado n y $\varphi(x,y)$ es una función homogénea de grado 1-n, entonces la función $f(x,y)=\phi(x,y)+\varphi(x,y)$ (que en general no es homogénea), satisface la relación.

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f$$

7) Para la función homogénea $z=ax^{\alpha}y^{\beta}$, demuestre que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=(\alpha+\beta)z$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\alpha+\beta-1)z.$$

8) Si $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ es una función homogénea de grado r, demuestre que:

$y=x_1{}^r\phi(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1})$, siendo ϕ una determinada función de (n-1) variables. Deducir que la derivadas parciales son homogéneas de grado (r-1) y que $x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial y}{\partial x_2}+...+x_n\frac{\partial y}{\partial x_n}=ry$.

9) Determinar cuales de las diferenciales son exactas, en caso que sea una diferencial exacta, hallar la función para la cual es diferencial total.

a) $(x^3+3x^2y)dx+(x^3+y^3)dy$

b) $(2y-\frac{1}{x})dx+(2x+\frac{1}{y})dy$

c) $(ye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy$

d) $(x^2+2xy)dx+(y^3-x^2)dy$

e) $(x+\cos x\operatorname{tg} y)dx+(y^3-x^2)dy$

f) $(3x^2\ln y-x^3)dx+(x+\operatorname{tg}x.\cos y)dy$

g) $(2x\ln y+\dfrac{1}{xy})dx+(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{\ln x}{y^2})dy$

h) $(e^y+\cos x\cos y)dx-(\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y-xe^y)dy$

i) $(2x-y+3z)dx+(3y+2z-x)dy+(2x+3y-z)dz$

j) $(2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2xz+y^2)dz$

k) $(\dfrac{1}{yz}-\dfrac{y}{x^2z}-\dfrac{z}{x^2y})dx+(\dfrac{1}{xz}-\dfrac{x}{y^2z}-\dfrac{z}{xy^2})dy+\dfrac{1}{xy}-\dfrac{x}{yz^2}-\dfrac{y}{xz^2})dz$

10) Demostrar que la diferencial dada es exacta y hallar la función f de la cual es diferencial total.

a) $(\operatorname{sen}y+y\operatorname{sen}x+\dfrac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y})dy$

b) $(\dfrac{1}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1)dx+(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2})dy$

c) $(3x^2\operatorname{tg}y-\dfrac{2y^3}{x^3})dx+(x^3\sec^2y+4y^3+\dfrac{3y^2}{x^2})dy$

d) $\left[a\cos(ax+by)-b\operatorname{sen}(dx+ay)\right]dx+\left[b\cos(ax+by)-a\operatorname{sen}(bx+ay)\right]dy$

e) $\dfrac{y+\operatorname{sen}x\cos^2xy}{\cos^2xy}dx+(\dfrac{x}{\cos^2xy}+\operatorname{sen}y)dy$

f) $(x\ln y+y\ln x+y)dx+(\dfrac{x^2}{2y}+x\ln x)dy$

g) $(e^x\operatorname{sen}y-2y\operatorname{sen}x)dx+(e^x\cos y+2\cos x)dy=0$

h) $(2xy^3+y\cos x)dx+(3x^2y^2+\operatorname{sen}x)dy$

i) $(\dfrac{y}{1+x^2}+arc.\operatorname{tg}y)dx+(\dfrac{x}{1+y^2}+arc.\operatorname{tg}x)dy$

11) Demostrar que la diferencial dada es exacta, y hallar la función f de la cual es diferencial total.

a) $(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2})dx+(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2})dy+(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2})dz$

b) $(2xyz-3y^2z+8xy^2+2)dx+(x^2z-6xyz+8x^2y+1)dy+(x^2y-3xy^2+3)dz$

c) $(x^2-y)dx-(x-3z)dy+(z+3y)dz$

d) $yzdx+xzdy+xydz$

e) $(ze^x+e^y)dx+(xe^y-e^z)dy+(-ye^z+e^x)dz$

f) $(2x\cos y-3)dx-(x^2\operatorname{sen} y+z^2)dy-(2yz-z)dz$

g) $(2y^3-8xz^2)dx+(6xy^2+1)dy-(8x^2z+3z^2)dz$

12) Determinar la constante a para que la diferencial sea exacta.

a) $(x+ye^{2xy})dx+axe^{2xy}dy$

b) $(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})dx+\frac{ax+1}{y^3}dy$

c) $(e^{ax+y}+3x^2y^2)dx+(2yx^3+e^{ax+y})dy$

CAPITULO IV

4. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIAS VARIABLES.

Pre-requisitos.- Para la comprensión adecuada de este capitulo de las funciones vectoriales de varias variables se requiere del conocimiento previo de:

- Calculo diferenciales e integral.
- Funciones vectoriales de variable real.
- Funciones de varias variables.
- Superficies.

Objetivos.- Establecer los fundamentos necesarios para la interpretación del gradiente de una función de varias variables, la divergencia, el rotacional, de tal manera que al concluir el estudio del presente capitulo el estudiante debe ser capaz de:

- Utilizar estos conceptos en las integrales Curvilíneas.
- En el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes.
- Las aplicaciones en física, química e ingeniería.
- Las aplicaciones de la integral de superficie para la determinación de la masa de una superficie y la densidad de flujo de un campo de velocidad a través de una superficie.

Se ha estudiado las funciones reales de variable real o funciones reales de una variable $f: R \longrightarrow R$, así mismo se ha estudiado las funciones vectoriales de variable real $\vec{f}: R \longrightarrow R^n$, también se ha estudiado las funciones reales de varias variables $f: R^n \longrightarrow R$, ahora estudiaremos las funciones vectoriales de varias variables que denotaremos por $\vec{f}: R^n \longrightarrow R^m$.

4.1 Definición.

Una función vectorial de variable vectorial es una correspondencia de un conjunto A de vectores a un conjunto B de vectores de tal manera que para cada vector $\vec{x} \in A$ existe un vector $f(\vec{x}) \in B$, es decir, es una transformación del conjunto A en el conjunto B.

Si A es un conjunto de R^n y B es un conjunto de R^m entonces diremos que $\vec{f}$ es una función de R^n en R^m cuya notación es $\vec{f}: R^n \longrightarrow R^m$.

Ejemplo.- Las funciones $\vec{f}: R \longrightarrow R^n$ y $\vec{f}: R^n \longrightarrow R$ son funciones de este tipo de funciones.

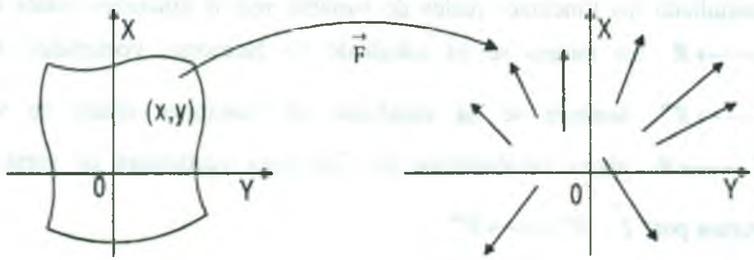
Ejemplo.- La función $\vec{F}$ definida por $\vec{F}(x,y) = (x+4,\ y+5)$ es una función vectorial de dos variables.

Ejemplo.- El gradiente de una función de R^n en R es una función de R^n en R^n. Sí, $f(x,y,z) = x^2 y + yz \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, de donde $\nabla f(x,y,z) = (2xy,\ x^2+z,\ y)$.

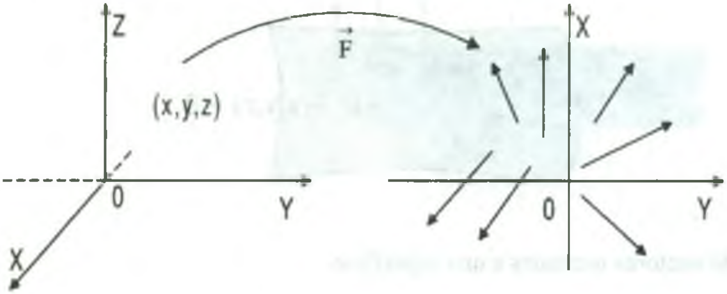
Luego $\vec{F}: R^3 \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = (2xy,\ x^2+z,\ y)$

Observación.- Las funciones vectoriales de una parte del plano R^2 o del espacio con rango un conjunto de vectores de R^2 es definido por:

$\vec{F}: D \subset R^2 \longrightarrow R^2$ tal que $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\ \vec{i} + Q(x,y)\ \vec{j}$



$\vec{F}: D \subset R^3 \longrightarrow R^2$ tal que $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j}$



Si el rango de la función vectorial es un conjunto de vectores de R^3, estas funciones son definidas por:

$\vec{F}: D \subset R^2 \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} + R(x,y)\,\vec{k}$

$\vec{F}: D \subset R^3 \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$

donde P, Q y R se denominan funciones componentes o funciones coordenadas.

En los problemas físicos, a las funciones vectoriales $\vec{F}$ de R^n en R^m le llaman campos vectoriales.

Ejemplo.- La función $\vec{V}: R^3 \longrightarrow R^3$ es el campo de velocidades de una corriente estacionaria de un fluido (es decir, con velocidad independiente del tiempo).

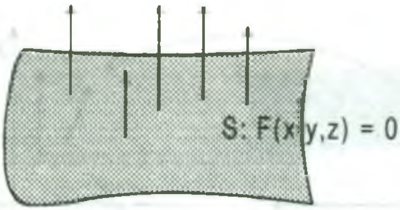
A cada punto (x,y,z) del fluido corresponde un vector $\vec{V}(x,y,z)$ velocidad de una partícula en el punto $\vec{x}$. $\vec{V}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\,\vec{i} + V_2(x,y,z)\,\vec{j} + V_3(x,y,z)\,\vec{k}$

Ejemplo.- Consideremos la curva.

$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$

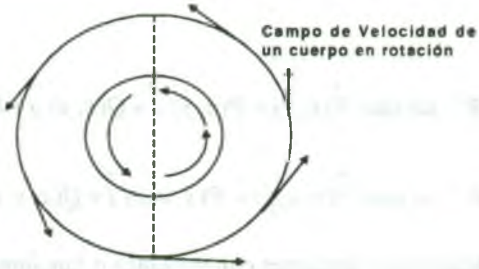
campo de vectores tangentes a la curva.

Ejemplo.- Sea S: F(x,y,z) = 0 una superficie.



Campo de vectores normales a una superficie.

Ejemplo.-



Campo de velocidad de un cuerpo en rotación.

Ejemplo.- Suponga que un objeto esférico de masa M (por ejemplo la tierra) tiene su centro en el origen.

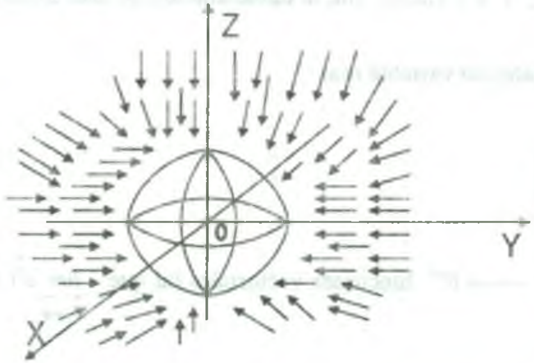
Deduzca la formula del campo gravitacional de la fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ ejercida por esta masa sobre un objeto ubicado en el punto (x,y,z) del espacio.

<u>**Solución**</u>

Supongamos que se puede manejar el objeto de masa M como un punto de masa situado en el origen.

Sea $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ entonces, la magnitud de $\vec{F}$ sea $\|\vec{F}\| = \frac{g\,n\,m}{\|\vec{r}\|^2}$, $\vec{F}$ esta dirigida hacia el origen, es decir, $\vec{F}$ tiene la dirección del vector unitario $-\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ concluimos que

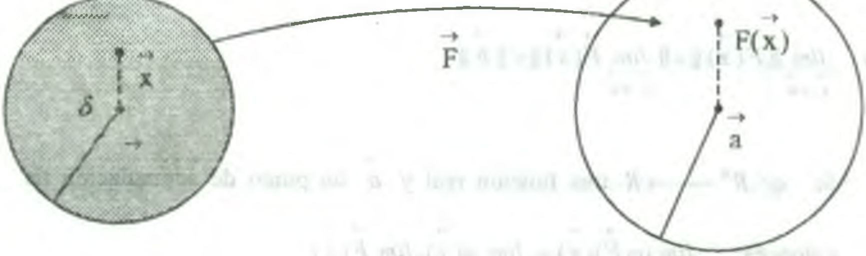
$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{g\,n\,m}{\|\vec{r}\|^2}\left(-\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right) = -g\,M\,m\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$



4.2. Limite de una Función Vectorial de Varias Variables.

Estas definiciones son extensiones de las definiciones de las funciones estudiadas.

Definición.- Se dice que el vector $\vec{b}$ es él limite de la función $\vec{F}$ en $\vec{a}$ y escribiremos $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$ si para cada numero $\varepsilon > 0$, existe un numero $\delta > 0$, tal que $\vec{x} \in D_{\vec{F}}$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ entonces $\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$.



4.3. Teorema.

Sea $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_m)\in R^m$, $\vec{F}=(F_1,F_2,...,F_m)$ una función de $\vec{F}: R^n \longrightarrow R^m$ y $\vec{a}$ es un punto de acumulación de $D_{\vec{F}}$ entonces $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x})=\vec{b}$ sí y solo sí $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} F_k(\vec{x})=b_k$, $\forall$ k = 1,2,3,...,m; la demostración de este teorema es similar al caso de las funciones vectoriales de variable real.

4.4. Propiedades.

Sean $\vec{F},\vec{G}: R^n \longrightarrow R^m$ funciones vectoriales tal que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x})=\vec{b}$ y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{G}(\vec{x})=\vec{c}$, entonces:

I) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda\vec{F}(\vec{x})=\lambda \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda\vec{F}(\vec{x})=\lambda\vec{b}$, λ es un escalar

II) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{F}(\vec{x})\pm\vec{G}(\vec{x}))=\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x})\pm \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{G}(\vec{x})=\vec{b}\pm\vec{c}$

III) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}).\vec{G}(\vec{x})=\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}).\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{G}(\vec{x})=\vec{b}.\vec{c}$

IV) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \|\vec{F}(\vec{x})\|=\|\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x})\|=\|\vec{b}\|$

v) Sí $\varphi: R^n \longrightarrow R$ una función real y $\vec{a}$ un punto de acumulación de $D_{\vec{F}}\cap D_{\varphi}$

entonces: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (\varphi\vec{F})(\vec{x})=\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \varphi(\vec{x}).\lim\limits_{\vec{x}\to 0} \vec{F}(\vec{x})$

4.5 Continuidad de una Función Vectorial de Varias variables.

Definición.- La función $\vec{F}$ es continua en el punto $\vec{a}$ de $D_{\vec{F}}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que: $\| \vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a}) \| < \varepsilon$, siempre que $\vec{x} \in D_{\vec{F}}$ y $\| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta$

4.6 Teorema.

La función $\vec{F}$ es continua en $\vec{a}$ si y solo si cada una de sus funciones componentes es continua en $\vec{a}$. La demostración es similar al de las funciones vectoriales de variable real, por lo tanto se deja como ejercicio.

4.7 Derivadas Parciales de Funciones Vectoriales de más de una Variable.

Sea $\vec{F}: R^3 \longrightarrow R^3$ una función vectorial definida por:

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

La derivada parcial de $\vec{F}$ con respecto a x se define por:

$$\boxed{\vec{F}_x(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{F}(x+\Delta x, y, z) - \vec{F}(x,y,z)}{\Delta x}}$$

siempre que él limite exista.

De modo similar definimos las derivadas parciales de $\vec{F}$ con respecto a y,z así:

$$\vec{F}_y(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{F}(x, y+\Delta y, z) - \vec{F}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\vec{F}_z(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{F}(x, y, z+\Delta z) - \vec{F}(x,y,z)}{\Delta z}$$

siempre que estos limites existan.

Las derivadas parciales de orden superior se pueden definir de esta manera.

$$\vec{F}_{xx}(x,y,z)=\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\right), \qquad \vec{F}_{xy}(x,y,z)=\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\right)$$

$$\vec{F}_{yy}(x,y,z)=\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\right)$$

4.8 Regla de las Derivadas Parciales de Funciones Vectoriales.

Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ funciones vectoriales diferenciables de x, y, z, y φ es una función escalar diferenciable de x,y,z entonces.

i) $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}+\vec{G})=\vec{F}_x+\vec{G}_x$, **ii)** $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \vec{F})=\varphi.\vec{F}_x+\varphi_x \vec{F}$

iii) $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}.\vec{G})=\vec{F}.\vec{G}_x+\vec{F}_x.\vec{G}$ **iv)** $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}\,x\,\vec{G})=\vec{F}\,x\,\vec{G}_x+\vec{F}_x\,x\,\vec{G}$

(mantener el orden de los factores)

4.9 Teorema.

Si $\vec{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\vec{i}+F_2(x,y,z)\vec{j}+F_3(x,y,z)\vec{k}$. Entonces su derivada parcial esta dado por:

$$\boxed{\vec{F}_x=\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\vec{k}}$$

Demostración

Por definición de derivada parcial se tiene:

$$\vec{F}_x(x,y,z)=\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{F}(x+\Delta x,y,z)-\vec{F}(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{F_1(x+\Delta x, y, z) - F_1(x,y,z)}{\Delta x} \vec{i} + \frac{F_2(x+\Delta x, y, z) - F_2(x,y,z)}{\Delta x} \vec{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{F_3(x+\Delta x, y, z) - F_3(x,y,z)}{\Delta x} \vec{k} \right]$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \vec{k}, \qquad \therefore \; \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \vec{k}$$

Ejemplo.- Si $\vec{F}(x,y) = e^{xy} \vec{i} + (x-y) \vec{j} + x \operatorname{sen} y \vec{k}$, calcular $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_x \times \vec{F}_y$

<u>Solución</u>

$\vec{F}(x,y) = e^{xy} \vec{i} + (x-y) \vec{j} + x \operatorname{sen} y \vec{k}$ de donde se tiene:

$$\vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}(x-y) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x} x \operatorname{sen} y \vec{k} = ye^{xy} \vec{i} + \vec{j} + \operatorname{sen} y \vec{k}$$

$$\vec{F}_y = \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial y} x \operatorname{sen} y \vec{k} = xe^{xy} \vec{i} - \vec{j} + x \cos y \vec{k}$$

$$\vec{F}_x \times \vec{F}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ye^{xy} & 1 & \operatorname{sen} y \\ xe^{xy} & -1 & x \cos y \end{vmatrix} = (x \cos y + \operatorname{sen} y) \vec{i} + x(\operatorname{sen} y - y \cos y) \vec{j} - (x+y)e^{xy} \vec{k}$$

4.10 Definición.

Si $\vec{F}: R^n \longrightarrow R^m$ es una función vectorial diferenciable en $\vec{x}$ entonces cada una de las funciones componentes F_i, es diferenciable en $\vec{x}$, luego a la función matricial definiremos por:

$$\vec{D}\vec{F}(\vec{x})=\begin{pmatrix} D_1F_1(\vec{x}) & D_2F_1(\vec{x}) & \dots & D_nF_1(\vec{x}) \\ D_1F_2(\vec{x}) & D_2F_2(\vec{x}) & \dots & D_nF_{2|}(\vec{x}) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ D_1F_m(\vec{x}) & D_2F_m(\vec{x}) & \dots & D_nF_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

se llama matriz jacobiana de la función $\vec{F}$ de R^n en R^m.

Ejemplo.- Hallar el valor de la matriz jacobiana en el punto (x,y,z) de la función $\vec{F}(x,y,z)=(xy,\ y^2,\ x^2z)$.

Solución

$$D\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(xy) & \frac{\partial}{\partial y}(xy) & \frac{\partial}{\partial z}(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2) & \frac{\partial}{\partial z}(y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2z) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

4.11 Definición.

Sea $\vec{F}$ una función de R^n en R^m, si la matriz jacobiana de $\vec{F}$ es continua sobre un conjunto abierto $D\subset R^n$ entonces $\vec{F}$ es diferenciable sobre D.

Ejemplo.- Sí $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+yz,\ z\operatorname{sen}xy)$. Demuestre que $\vec{F}$ es diferenciable en cualquier $(x,y,z)\in R^3$.

Solución

El valor de la matriz jacobiana de $\vec{F}$ en cualquier punto (x,y,z) es dado por:

$$D\vec{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+yz) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+yz) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2+yz) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z\,\text{sen}\,xy) & \frac{\partial}{\partial y}(z\,\text{sen}\,xy) & \frac{\partial}{\partial z}(z\,\text{sen}\,xy) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & z & y \\ yz\cos xy & xz\cos xy & \text{sen}\,xy \end{pmatrix}$$

la matriz Jacobiana es continua en todo (x,y,z) de R^3 entonces $\vec{F}$ es diferenciable en (x,y,z).

4.12 Gradiente de una Función Escalar

Sea ϕ(x,y,z) una función escalar; al gradiente de la función escalar ϕ (x,y,z) denotaremos por grad (ϕ), y es el vector definido por:

$$\boxed{\text{gra d}(\phi)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}}$$

Ejemplo.- Si ϕ (x,y,z) = xy + yz + xz Hallar el grad ϕ(1,1,3)

Solución

Si ϕ(x,y,z) = xy + yz +xz sus derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)=y+z \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)=x+z \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(1,1,3)=4 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(1,1,3)=4 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(1,1,3)=2 \end{cases}$$

$$\text{gra}\,d(\phi(1,1,3))=\frac{\partial\phi(1,1,3)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi(1,1,3)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi(1,1,3)}{\partial z}\vec{k}, \quad \therefore \quad \text{gra}\,d(\phi(1,1,3))=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

4.13 El Operador ∇

El operador vectorial diferencial es dada por:

$$\boxed{\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

El operador vectorial diferencial no es un vector, sino un operador, sin embargo puede considerarse como un vector simbólico. Si $\phi(x,y,z)$ es un campo escalar, entonces $\phi\ \nabla$ es un operador, mientras que $\nabla\ \phi$ da la importante función vectorial llamada gradiente, en forma similar si $\vec{f}$ es una función vectorial diferenciable, entonces $\vec{f}.\nabla$ y $\vec{f}x\nabla$ son operadores, mientras $\nabla.\vec{f}$ y $\nabla x\vec{f}$ da importantes funciones escalares y vectoriales respectivamente.

Nota.- El operador diferencial ∇ se lee NABLA.

4.14 Introducción del Operador Diferencial ∇ al Gradiente.

Como $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, entonces: $\text{gra d}(\phi) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

4.15 Propiedades del Gradiente.

Sean ϕ y ψ funciones escalares diferenciables y c una constante.

1) $\nabla(c,\phi) = c\nabla\phi$

2) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

3) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

4) $\nabla f(u,v,w) = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial f}{\partial w}\nabla w$

Ejemplo.- Para un vector arbitrario constante $\vec{a}$, mostrar que: $\nabla(\vec{a},\vec{r}) = \vec{a}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición.

Solución

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{r} = (x,y,z) \Rightarrow \vec{a}.\vec{r} = a_1x + a_2y + a_3z$

$$\nabla(\vec{a},\vec{r}) = \frac{\partial(\vec{a},\vec{r})}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\vec{a},\vec{r})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\vec{a},\vec{r})}{\partial z}\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1,a_2,a_3) = \vec{a}$$

$$\therefore\ \nabla(\vec{a},\vec{r}) = \vec{a}$$

Ejemplo.- Sí $\phi = \phi(x,y,z,)$ Mostrar que $\nabla\phi.d\vec{r} = d\phi$

Solución

Sea $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, su diferencial $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, calculando el gradiente de ϕ

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla\phi.d\vec{r} = (\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

$$\therefore \quad \nabla\phi.d\vec{r} = d\phi$$

4.16 Divergencia de una Función Vectorial

Si una función vectorial es $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, donde f_1, f_2, f_3 son funciones escalares, entonces el producto escalar de la función vectorial $\vec{f}$ y el vector simbólico ∇ es decir: $\nabla\vec{f}$ se denomina la divergencia de la función vectorial y se denota por $div(\vec{f}) = \nabla.\vec{f}$ es decir:

$$\boxed{div(\vec{f}) = \nabla.\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$$

a) Teorema.- Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son dos funciones vectoriales, mostrar que $\nabla.(\vec{f} + \vec{g}) = \nabla.\vec{f} + \nabla.\vec{g}$

Demostración

Sí $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ y $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, entonces $\vec{f} + \vec{g} = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3)$

$$\nabla(\vec{f} + \vec{g}) = \frac{\partial}{\partial x}(f_1 + g_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f_2 + g_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f_3 + g_3) = (\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) + (\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z})$$

$$= \nabla.\vec{f} + \nabla.\vec{g}$$

b) Teorema.- Si ϕ es una función escalar, entonces la divergencia del gradiente de ϕ es

$$div(\text{gra}\, d\phi)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Demostración

Como $\text{gra}\, d(\phi)=\nabla.\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \text{gra}\, d(\phi)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

$$div(\text{gra}\, d(\phi))=\nabla.(\nabla\phi)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\phi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\phi}{\partial z})=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

La divergencia del gradiente $\nabla.\nabla$ se escribe como ∇^2. Entonces $\nabla.(\nabla\phi)$ se escribe como $\nabla.\nabla\phi=\nabla^2\phi$. Al operador ∇^2 le llamamos el Laplaciano, es decir:

Laplaciano = $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ entonces se tiene:

$$\nabla^2\phi=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

4.17 Definición.

Una función escalar ϕ se dice armónica si es continua, tiene segundas derivadas continuas y satisface a la ecuación de Laplace.

$$\boxed{\nabla^2\phi=0}$$

Ejemplo.- Mostrar que la función $\frac{1}{r}$, donde $r=\|\vec{r}\|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ es una función armónica siempre que $r\neq 0$

Solución

Claramente $\frac{1}{r}$ es continua, puesto que x^2, y^2, z^2 y r son continuas entonces el Laplaciano es:

$$\nabla^2(\frac{1}{r})=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \quad \dots (1)$$

de donde la primera y segunda derivada parciales de $\frac{1}{r}$ con respecto a x son:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

en forma similar, las derivadas parciales de $\frac{1}{r}$ con respecto a las variables x,y,z.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

Luego al momento de reemplazar en (1) se tiene:

$$\nabla^2(\frac{1}{r})=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+$$

$$+3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}=0$$

Como satisface la ecuación de Laplace, la función $\frac{1}{r}$ es armónica.

4.18 Rotacional de una Función Vectorial.

Si una función vectorial $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3)$ donde f_1,f_2,f_3 son funciones escalares con primeras derivadas continuas entonces su producto vectorial o cruz con el vector simbólico ∇ es:

$$\nabla x\,\vec{f}=(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})x(f_1\,\vec{i}+f_2\,\vec{j}+f_3\,\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z})\,\vec{i}+(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x})\,\vec{j}+(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y})\,\vec{k}$$

Llamamos a esta función el rotacional $(rot\ \vec{f})$ de la función vectorial $\vec{f}$ es decir:

Rotacional $\vec{f}=\nabla x\,\vec{f}$

Nota.- $\nabla x\,\vec{f}$ no necesariamente es perpendicular a $\vec{f}$.

4.19 Propiedades.

1) Sean $\vec{f}$ y $\vec{g}$ funciones vectoriales entonces:

$$\nabla x(\vec{f}+\vec{g})=\nabla x\,\vec{f}+\nabla x\,\vec{g}$$

2) Sea ϕ una función escalar con segundas derivadas continuas entonces:

$$\nabla x(\nabla(\phi))=\vec{0}$$

3) Sea $\vec{f}$ una función vectorial con segundas derivadas continuas entonces:

$$\nabla.(\nabla x\,\vec{f})=0$$

4) Sean $\vec{f}$ y $\vec{g}$ funciones vectoriales, entonces:

$$(\vec{f}\, x\nabla)\vec{g} = \vec{f}.(\nabla x\, \vec{g})$$

4.20 Ejercicios Desarrollados.

1) Sí $\phi = \phi(u)$ donde $u = u(x,y)$ entonces mostrar que $\nabla\phi = \nabla\phi(u) = \phi'(u)\nabla u$

Solución

Como el gradiente de ϕ es: $\nabla\phi = \nabla\phi(u) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

$$= \phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \phi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \phi'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \phi'(u)(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}) = \phi'(u)\nabla u$$

2) Si $r = \|\vec{r}\| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Hallar ∇r^n y $\nabla(\frac{1}{r})$, donde n es cualquier numero real.

Solución

Sea $\phi = \phi(r) = r^n$, por el ejercicio anterior se tiene:

$$\nabla r^n = \frac{d}{dr}(r^n)\nabla r = nr^{n-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k})$$

$$= nr^{n-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = nr^{n-2}.\vec{r}$$

para n se tiene: $\nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$

3) Hallar la divergencia de $\vec{f}(x,y,z) = xyz\,\vec{i} + x^2y^2z\,\vec{j} + yz^3\,\vec{k}$

Solución

$$div(\vec{f}) = \nabla.\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = yz + 2x^2yz + 3yz^2$$

4) Hallar el rotacional de $\vec{f}(x,y,z) = xyz\,\vec{i} + x^2y^2\,\vec{j} + yz^3\,\vec{k}$

Solución

Como el rotacional es dado por:

$$\nabla x\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2y^2z & yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(yz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2)]\,\vec{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(yz^3)]\,\vec{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz)]\,\vec{k}$$

$$= (z^3 - x^2y^2)\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + (2xy^2z - xz)\,\vec{k}$$

5) Hallar $(\vec{f}.\nabla)\phi$ y $(\vec{f}.\nabla)\vec{g}$ en $(1,1,1)$ sí $\vec{f}(x,y,z) = (-y,x,z)$, $\vec{g}(x,y,z) = 3xyz^2\,\vec{i} + 2xy^3\,\vec{j} - x^2yz\,\vec{k}$ y $\phi(x,y,z) = xyz$.

Solución

Como $\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\vec{k} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$

tenemos $(\vec{f}.\nabla)\phi = \vec{f}.\nabla\phi = -y(yz) + x(xz) + z(xy) = -y^2z + x^2z + xyz$

Por tanto, en $(1,1,1)$, $(\vec{f}.\nabla)(1,1,1) = -1 + 1 + 1 = 1$; ahora calculando $(\vec{f}.\nabla).\vec{g}$

$$(\vec{f}.\nabla).\vec{g} = \vec{f}.(\nabla\,\vec{g}) = -y\frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2\,\vec{i} + 2xy^3\,\vec{j} - x^2yz\,\vec{k}) + x\frac{\partial}{\partial y}(3xyz^2\,\vec{i} + 2xy^3\,\vec{j} - x^2yz\,\vec{k})$$

$$+ z\frac{\partial}{\partial z}(3xyz^2\,\vec{i} + 2xy^3\,\vec{j} - x^2yz\,\vec{k})$$

$$= -3yz^2 \vec{i} - 2y^4 \vec{j} + 2xy^2z\vec{k} + 3x^2z^2 \vec{i} + 6x^2y^2\vec{j} - x^3z\vec{k} + 6xyz^2\vec{i} - x^2yz\vec{k}$$

$$= (-3y^2z^2 + 3x^2z^2 + 6xyz^2)\vec{i} + (-2y^4 + 6x^2y^2)\vec{j} + (2xy^2z - x^3z - x^2yz)\vec{k}$$

por lo tanto en (1,1,1) se tiene: $(\vec{f}.\nabla).\vec{g}(1,1,1) = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k} = (6,4,0)$

6) Mostrar que: $(d\vec{r}.\nabla)\vec{f} = d\vec{f}$

Solución

$$d\vec{r}.\nabla = (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}).(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}) = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(d\vec{r}.\nabla)\vec{f} = dx\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + dy\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + dz\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}dz = d\vec{f}$$

7) Demostrar que: $\nabla.(\phi.\vec{f}) = \phi\nabla\vec{f} + \vec{f}.\nabla\phi$

Solución

$$\nabla.(\phi.\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_3) = \phi\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial f_3}{\partial z} + f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \phi(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) + (f_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + f_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + f_3\frac{\partial\phi}{\partial z}) = \phi\nabla.\vec{f} + \vec{f}.\nabla\phi$$

8) Hállese el gradiente de la función $\varphi = u^2v - \frac{1}{\sqrt{w}}$. Si $u = 3xe^x + y$, $v^2 = x^2 + 1 - y$, $w = 3x^2 + 1 + z$.

Solución

Por propiedad de gradiente se tiene:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\nabla w = 2uv\nabla u + u^2\nabla v + \frac{1}{2w\sqrt{w}}\nabla w \quad \textbf{... (1)}$$

donde $\nabla u = (3xe^x + 3e^x)\vec{i} + \vec{j}$, $\nabla v = 2x\vec{i} - \vec{j}$, $\nabla w = 6x\vec{i} + \vec{k}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\nabla\varphi = 2(3xe^x + y)(x^2+1-y)[(3xe^x+3e^x)\vec{i}+\vec{j}]+3(3xe^x+y)^2(2x\vec{i}-\vec{j})$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3x^2+1+z(3x^2+1+z)}}(6x\vec{i}+\vec{k})$$

9) Demostrar que: $(\frac{d\vec{r}}{dt}.\nabla)u = \frac{du}{dt}-\frac{\partial u}{\partial t}$, sí u = u(x,y,z,t)

Solución

Si u = u(x,y,z,t) la diferencia total es:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial t}dt \Rightarrow \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=(\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial u}{\partial z})u+\frac{\partial u}{\partial t}=(d\vec{r}.\nabla)u+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \therefore\ (d\vec{r}.\nabla)u=\frac{du}{dt}-\frac{\partial u}{\partial t}$$

10) Determínese la divergencia y el rotacional de la función vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\cos z\,\vec{i}+y\ln x\,\vec{j}-z^2e^x\,\vec{k}$

Solución

Calculando la divergencia de $\vec{f}$ se tiene:

$$div(\vec{f})=\nabla\vec{f}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos z)+\frac{\partial}{\partial y}(y\ln x)+\frac{\partial}{\partial z}(-z^2e^x)=\cos z+\ln x-2ze^x$$

Calculando el rotacional de función vectorial $\vec{f}$

$$Rot(\vec{f})=\nabla x\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x\cos z & y\ln x & -z^2e^x\end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial(-z^2e^x)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(y\ln x)]\vec{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(x\cos z) - \frac{\partial}{\partial x}(-z^2e^x)]\vec{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(y\ln x) - \frac{\partial(x\cos z)}{\partial y}]\vec{k}$$

$$= (0-0)\vec{i} + (-x\,\text{sen}\,z + z^2e^x)\vec{j} + (\frac{y}{x} - 0)\vec{k} = 0\,\vec{i} + (z^2e^x + x\,\text{sen}\,z)\vec{j} + \frac{y}{x}\vec{k}$$

11) Siendo $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} + 2yz\,\vec{k}$. Hallar $rot(rot\,\vec{f})$

Solución

$$rot(rot\,\vec{f}) = \nabla x(\nabla x\,\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla x[(2x+2z)\vec{i} - (x^2+2z)\vec{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -(x^2+2z) \end{vmatrix} = (2x+2)\,\vec{i}$$

12) Sí $\vec{f}(x,y,z) = 2yz\,\vec{i} - x^2y\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k}$ y $\phi(x,y,z) = 2x^2yz^3$

Hallar a) $(\vec{f}\,x\nabla)\phi$ b) $\vec{f}\,x(\nabla\phi)$

Solución

a) $$(\vec{f}\,x\nabla)\phi = [(2xyz\,\vec{i} - x^2y\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k})x(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k})]\phi$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2xy & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\phi = [\vec{i}(-x^2y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}) + \vec{j}(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}) + \vec{k}(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x})]\phi$$

$$= -(x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}+xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y})\vec{i}+(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z})\vec{j}+(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x})\vec{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^2+2x^3z^5)\vec{i}+(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3)\vec{j}+(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3)\vec{k}$$

b) $\vec{f}\,x(\nabla\phi)=(2yz\,\vec{i}-x^2y\,\vec{j}+xz^2\,\vec{k})x(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k})$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2yz & -x^2y & xz^2\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}=(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z}-xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y})\vec{i}+(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x}-2yz\frac{\partial\phi}{\partial z})\vec{j}+(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y}+x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x})\vec{k}$$

$$= -(6x^4y^2z^2+2x^3z^5)\vec{i}+(4x^2yz^5-12x^2y^2z^3)\vec{j}+(4x^2yz^4+4x^3y^2z^3)\vec{k}$$

4.21 Ejercicios Propuestos.

I.- Escriba la matriz Jacobiana de la función en el punto indicado.

1) $\vec{f}: R^2 \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{f}(x,y)=(a_1x+b_1y,\ a_2x+b_2y)$ en $P(x_0,y_0)$

2) $\vec{f}: R^3 \longrightarrow R^3 \,/\, \vec{f}(x,y,z)=(x,\ x+y,\ x+y+z)$ en $P(x_0,y_0,z_0)$

3) $\vec{f}: R^2 \longrightarrow R \,/\, \vec{f}(x,y)=(\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} x\cos y,\ \cos y)$ en $P(0,\frac{\pi}{2})$

4) $\vec{f}: R^3 \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{f}(x,y)=(\frac{1+x^2}{1+z^2},(z+x^2)(z+y^2))$ en P(1,1,1)

5) $\vec{f}: R \longrightarrow R^4 \,/\, \vec{f}(t)=(t,t^2,t^3,t^4)$ en P(1)

6) $\vec{f}: R^2 \longrightarrow R^5 \,/\, \vec{f}(x,y)=(x^y,y^x,e^{xy},xe^y,ye^x)$ en P(1,2)

II.- Demuéstrese que $\vec{f}$ es diferenciable en todos los puntos (x,y,z) de $D_{\vec{f}}$ y determínese $D\vec{f}(x,y,z)$

1) $\vec{f}(x,y,z) = (xz,\ y+z)$ **2)** $\vec{f}(x,y,z) = (xy,\ y^2,\ x^2 z)$

3) $\vec{f}(x,y,z) = (\frac{x}{y},\ 2y+1,\ xz^2)$ **4)** $\vec{f}(x,y,z) = (x^2 y,\ ze^x,\ x+z)$

III.- Gradiente, divergente y rotacional.

1) Si $\phi(x,y,z) = xy + yz + zx$. Hallar $\nabla\phi$ en (1,1,3). **Rpta.** (4,4,2)

2) Hallar la divergencia y el rotacional de la función

$$\vec{f}(x,y,z) = (x-y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}\ ,\ y$$

$$\vec{g}(x,y,z) = (x^2+yz)\vec{i} + (y^2+xz)\vec{j} + (z^2+xy)\vec{k}$$

Rpta. $\nabla.\vec{f} = 3$, $\nabla x\vec{f} = (1,1,1)$, $\nabla.\vec{g} = 2(x+y+z)$, $\nabla x\vec{g} = \vec{0}$

3) Si $\phi(x,y,z) = 3x^2 - yz$ y $\vec{f}(x,y,z) = 3xyz^2\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\vec{k}$. Hallar en (1,-1,1)

a) $\nabla\phi$ **b)** $\nabla.\vec{f}$ **c)** $\nabla x\vec{f}$ **d)** $\vec{f}.\nabla\phi$

e) $\nabla.(\phi\vec{f})$ **f)** $\nabla x(\phi\vec{f})$ **g)** $\nabla^2\phi$

Rpta. **a)** (6,-1,1) **b)** 4 **c)** (-1,-8,-5) **d)** -15 **e)** 1

f) (-3,-41,-35) **g)** 6

4) Siendo $\phi(x,y,z) = 2xz^4 - x^2 y$. Hallar $\nabla\phi$ y $\|\nabla\phi\|$ en el punto (2,-2,-1)

Rpta. $10\vec{i} - 4\vec{j} - 16\vec{k}$, $2\sqrt{93}$

5) Siendo $\vec{f}(x,y,z)=2x^2\vec{i}-3yz\vec{j}+xz^2\vec{k}$ y $\phi(x,y,z)=2z-x^3y$

Hallar $\vec{f}.\nabla\phi$ y $\vec{f}x\nabla\phi$ en el punto (1,-1,1)

Rpta. 5, $7\vec{i}-\vec{j}-11\vec{k}$

6) Hallar $\nabla\psi$ siendo $\psi=(x^2+y^2+z^2)e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **Rpta.** $(2+r)e^r\vec{r}$

7) Siendo $\nabla\phi=2xyz^3\vec{i}+x^2z^3\vec{j}+3x^2yz^2\vec{k}$, hallar $\phi(x,y,z)$ sabiendo que $\phi(1,-2,2)=4$

Rpta. $\phi(x,y,z)=x^2yz^3+20$

8) Siendo $\nabla\phi=(y^2-2xyz^3)\vec{i}+(3+2xy-x^2z^3)\vec{j}+(6z^3-3x^2yz^2)\vec{k}$, hallar ϕ.

Rpta. $\phi=xy^2-x^2yz^3+3y+\frac{3}{2}z^4+c$

9) Hallar $div(2x^2z\vec{i}-xy^2z\vec{j}+3yz^2\vec{k})$ **Rpta.** 4xz – 2xyz + 6yz

10) Hallar $\phi=3x^2yz-y^2z^3+4x^3y+2x-3y-5$, hallar $\nabla^2\phi$

Rpta. $\nabla^2\phi=6yz+24xy-2z^3-6y^2z$

11) Siendo $\vec{f}(x,y,z)=3xyz^2\vec{i}+2xy^3\vec{j}-x^2yz\vec{k}$ y $\phi=3x^2-yz$. Hallar

a) $\nabla.\vec{f}$ **b)** $\vec{f}.\nabla\phi$ **c)** $\nabla.(\phi\vec{f})$ **d)** $\nabla.(\nabla\phi)$ en el punto (1,-1,1)

Rpta. **a)** 4 **b)** -15 **c)** 1 **d)** 6

12) Siendo $\vec{f}(x,y,z)=2xz\vec{i}-yz\vec{j}+3xz^3\vec{k}$ y $\phi=x^2yz$

Hallar **a)** $\nabla x\vec{f}$ **b)** $rot(\phi\vec{f})$ **c)** $\nabla x(\nabla x\vec{f})$ **d)** $\nabla[\vec{f}.rot(\vec{f})]$

e) $rot(grad(\phi\vec{f}))$ en el punto (1,1,1)

Rpta. **a)** $\vec{i}+\vec{j}$ **b)** $5\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ **c)** $5\vec{i}+3\vec{k}$ **d)** $-2\vec{i}+\vec{j}$ **e)** $\vec{0}$

13) Siendo $F = x^2yz$, $G = xy - 3z^2$. Hallar:

a) $[\nabla F.\nabla G]$ **b)** $\nabla.[\nabla F x \nabla G]$ **c)** $\nabla x[\nabla F x \nabla G]$

Rpta. **a)** $(2y^2z + 3x^2z - 12xyz)\vec{i} + (4xyz - 6x^2z)\vec{j} + (2xy^2 + x^3 - 6x^2y)\vec{k}$

b) 0

c) $(x^2z - 24xyz)\vec{i} - (12x^2z + 2xyz)\vec{j} + (2xy^2 + 12yz^2 + x^3)\vec{k}$

14) Calcular: **a)** ∇r^2 **b)** $\nabla(r^4 + r^7)$ **c)** $\nabla[f(r) + g(\frac{1}{r})]$,

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y f(r), $g(r) = \frac{1}{r}$ son funciones arbitrarios de r y $\frac{1}{r}$

Respectivamente.

Rpta. **a)** $2\vec{r}$ **b)** $r^2(4 + 7r^2)\vec{r}$ **c)** $r^{-3}[r^2 f'(r) - f'(\frac{1}{r})]\vec{r}$

15) Siendo $\vec{f}(x,y,z) = yz^2\vec{i} - 3xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ y $g(x,y,z) = (3x,\ 4z,\ -xy)$ y $\phi = xyz$

Hallar **a)** $\vec{f}x(\nabla\phi)$ **b)** $(\vec{f}x\nabla)\phi$ **c)** $(\nabla x\vec{f})x\vec{g}$

Rpta. **a)** $-5x^2yz^2\vec{i} + xy^2z^2\vec{j} + 4xyz^3\vec{k}$

b) $-5x^2yz^2\vec{i} + xy^3z^2\vec{j} + 4xyz^3\vec{k}$

c) $-16z^3\vec{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\vec{j} + 32xz^2\vec{k}$

16) Calcular: **a)** $\nabla(\vec{a}.\vec{r})$ **b)** $\nabla f(r)(\vec{a}.\vec{r})$ **c)** $\nabla[(\vec{a}.\vec{r})(\vec{b}.\vec{r})]$

donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores constantes y $\vec{f}(r)$ una función arbitraria de r.

Rpta. **a)** $\vec{a}$ **b)** $f(r)\vec{a} + f'(r)(\vec{a}.\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}$ **c)** $(\vec{a}.\vec{r})\vec{b} + (\vec{b}.\vec{r})\vec{a}$

17) Si $\vec{f}(x,y,z) = 2z\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + x\,\vec{k}$ y $\phi = 2x^2y^2z^2$. Hallar $(\vec{f}\,x\nabla)\phi$ en el punto (1,-1,1).

Rpta. (-8,-4,4)

18) Calcular:

a) $div(x^3y\,\vec{i} + y^3z\,\vec{j} + z^2\,\vec{k})$ **b)** $div[(x^2+y^2+z^2)(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})]$

Rpta. **a)** $3x^2y + 3y^2z + 2z$ **b)** $2(2x^2 + 2y^2 + z^2 - z)$

19) Dado $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + (4xz + y^2)\,\vec{j} + (5z^2 + xy^2)\,\vec{k}$, calcular $rot(\vec{f})$ y hallar su valor en los puntos (1,1,1) y (1,2,3).

Rpta. $2x(y-2)\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + (4z - x^2)\,\vec{k}$; $-2\,\vec{i} - \vec{j} + 3\,\vec{k}$; $-4\,\vec{j} + 11\,\vec{k}$

20) Si $\vec{A} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$, $\vec{B} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ calcular:

a) $(\vec{A}\,x\nabla)x\,\vec{B}$ **b)** $(\vec{B}\,x\nabla)x\,\vec{A}$

Rpta. **a)** $-2\,\vec{A}$ **b)** $-2x(y+z)\,\vec{i} - 2y(z+x)\,\vec{j} - 2z(x+y)\,\vec{k}$

21) Dado $\vec{V} = xz^3\,\vec{i} - 4x^2yz\,\vec{j} + 3xz^3\,\vec{k}$. Hallar $rot(rot\,\vec{V})$

Rpta. $z(19z - 14x)\,\vec{i} + 8yz\,\vec{j} + (3z^2 - 4x^2)\,\vec{k}$

22) Si $\phi = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, $\vec{V} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, calcular:

a) rot(grad ϕ) **b)** $div(rot\,\vec{V})$

Rpta. **a)** $\vec{0}$ **b)** 0

23) Hallar la divergencia de cada una de los siguientes campos vectoriales.

a) $f(r)\vec{r}$ **b)** $(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}$ **c)** $r^n f(\frac{1}{r})\vec{r}$

d) $(x\vec{i}+y\vec{j})x\vec{r}$ **e)** $\vec{a}\,x\,\vec{r}$ **f)** $(x\vec{i}+y\vec{j})x(z\vec{j}+x\vec{k})$

donde $f(\frac{1}{r})$ es una función arbitraria de $\frac{1}{r}$, $\vec{a}$ es un vector constante, $n\in z^+$

Rpta. **a)** $3f(r)+r\,f'(r)$ **b)** $4(\vec{a}.\vec{r})$

c) $(3+n)r^n f(\frac{1}{r})-r^{n-1}f'(\frac{1}{r})$ **d)** 0 **e)** 0

f) y + x

24) Usar la identidad: $div(\phi\vec{V})=\nabla.(\phi\vec{V})=\phi div(\vec{V})+\vec{V}.(\nabla\phi)$, para hallar:

a) $\nabla.(r^n\vec{r})$ **b)** $\nabla.[(\vec{a}.\vec{r})\vec{r}]$ **c)** $\nabla[r(\nabla r^2)]$

donde $\vec{a}$ es un vector constante.

Rpta. **a)** $(n+3)r^n$ **b)** $4(\vec{a}.\vec{r})$ **c)** 8r

25) Se definen las funciones escalares ϕ y ψ mediante las ecuaciones $\phi=\vec{a}.\nabla r^3$, $\psi=\vec{b}.\nabla r^{-3}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores constantes, calcular:

a) $\vec{b}.rot(\phi\vec{r})-r^6\vec{a}.rot(\psi\vec{r})$

b) $\vec{b}.rot[div(r^3\vec{r})(\vec{a}\,x\,\vec{r})]+5r^4\vec{a}.rot[div(r^{-2}\vec{r})(\vec{b}\,x\,\vec{r})]$

c) $rot(\phi\psi\vec{r})$

Rpta. **a)** 0 **b)** $20r^2(\vec{a}.\vec{b})$ **c)** $-9r^{-4}[(\vec{a}.\vec{r})(\vec{b}\,x\,\vec{r})+(\vec{b}.\vec{r})(\vec{a}\,x\,\vec{r})]$

26) Por medio de la identidad $\nabla^2\phi = \nabla.\nabla\phi$. Hallar: **a)** $\nabla^2(r^4)$ **b)** $\nabla^2(\ln r)$

Rpta. **a)** $12r^2$ **b)** $3r^{-2}$

27) Demuestre que $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi.\nabla\psi + \psi\nabla^2\phi$, donde ϕ y ψ son funciones escalares.

28) Demuestre que el campo vectorial $\vec{V} = (xyz)^m(x^n\,\vec{i} + y^n\,\vec{j} + z^n\,\vec{k})$ es Solenoidal solamente si m + n = 0.

29) Demuestre que $(yz\,\vec{i} + zx\,\vec{j} + xy\,\vec{k})$ es a la vez irrotacional y Solenoidal.

30) Si las segundas derivadas parciales de las funciones ϕ y ψ existen, entonces, demostrar que:

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$$

31) Si $\nabla x\,\vec{f} = \vec{0}$, donde $\vec{f}(x,y,z) = (xyz)^m(x^n\,\vec{i} + y^n\,\vec{j} + z^n\,\vec{k})$, mostrar que m = 0 o bien n = -1.

32) Demostrar que $\nabla f(r) = \dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$

CAPITULO V

5. INTEGRALES DOBLES

Pre-Requisitos.- Para la comprensión adecuada de éste capítulo de las integrales múltiples se requiere del conocimiento previo de:

- Métodos de integración.
- Geometría analítica.
- Superficies.
- Coordenadas polares.

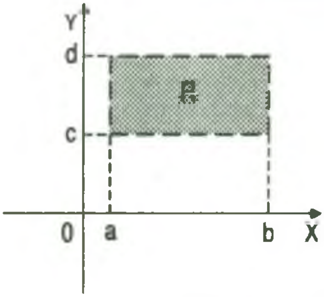
Objetivos- Establecer los fundamentos necesarios para la interpretación y aplicación de la integral doble, al finalizar éste capítulo el alumno debe estar en capacidad de utilizar la integral doble en el cálculo de áreas, volumen, centro de masa, etc., así como también el cálculo en coordenadas polares y emplear los jacobianos.

5.1 Introducción

En el estudio de las integrales ordinarias $\int_a^b f(x)dx$, la función f(x) es definida en un intervalo cerrado [a,b], ahora estudiaremos las integrales dobles de la función f(x,y) definida sobre una región R, al cual denotaremos por $\iint_R f(x,y)dxdy$

5.2 La Integral Doble sobre un Rectángulo.

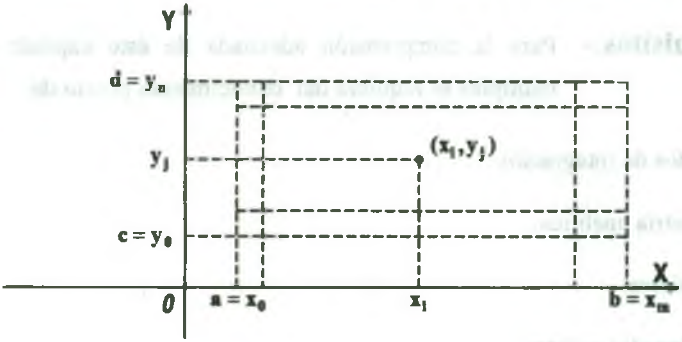
Consideremos una función f definida en el rectángulo:



$R = \{(x,y) \in R \times R / a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$

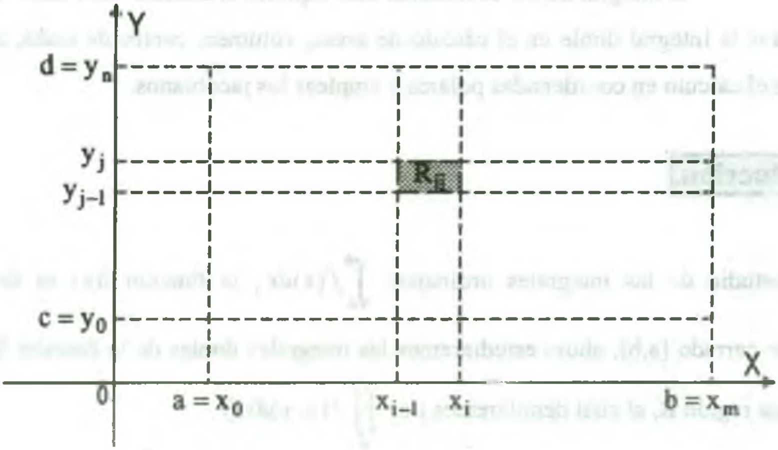
Consideremos una partición p del rectángulo R y para esto sea $p_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ una partición de [a,b] y $p_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ una participación de [c,d], llamaremos partición de R a un conjunto de la forma:

$$P = p_1 x p_2 = \{(x_i, y_j) \in RxR / x_i \in p_1 \wedge y_j \in p_2\}$$



La partición P del rectángulo R, descompone al rectángulo R en m x n rectángulos, es decir:

$$R_{ij} = \{(x,y) \in R^2 / x_{i-1} \le x \le x_i \wedge y_{j-1} \le y \le y_j\}$$



En cada rectángulo R_{ij}, la función f toma un valor máximo M_{ij} y un valor mínimo m_{ij};

Luego se tiene:

$$M_{ij}(\text{área de } R_{ij}) = M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = M_{ij}\ \Delta x_i . \Delta y_j$$

$m_{ij}(\text{área de } R_{ij}) = m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = m_{ij}\ \Delta x_i . \Delta y_j$ ahora formando las suma se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta x_i . \Delta y_j \quad ; \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} . \Delta x_i . \Delta y_j \, ,$$

que reciben los nombres de suma superior p de f, y se denota por:

$$\boxed{U_f(p) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij} . \Delta x_i . \Delta y_j}$$

y suma inferior p de f, y se denota por:

$$\boxed{L_f(p) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} . \Delta x_i . \Delta y_j}$$

En forma similar del caso de las funciones de una variable se tiene:

Si f es una función continua, existe un número I que satisface la desigualdad.

$L_f(p) \le I \le U_f(p)$, para toda partición p de R.

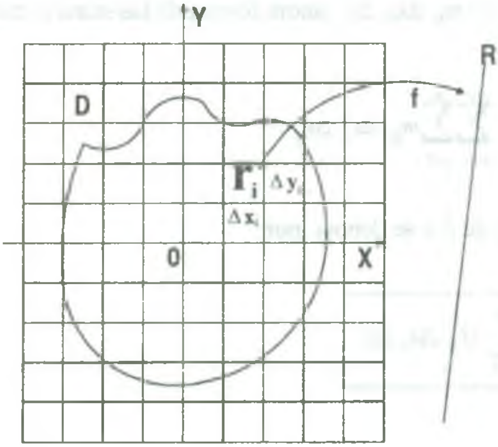
5.3 Definición.

El único número I que satisface la desigualdad $L_f(p) \le I \le U_f(p)$ para toda partición p de R, se denomina la integral doble de f sobre R y que simbolizaremos por:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy}$$

5.4 Funciones Integrables.

Definición 1.- Una función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, es acotada en D, si existen r, s $\in$ R, tal que: $r \leq f(x,y) \leq s$, $\forall$ $(x,y) \in D$.



Sea $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, una función acotada en la región cerrada D del plano y $f(x,y) \geq 0$, $\forall$ $(x,y) \in D$. Trazaremos rectas paralelas a los ejes y denotaremos por $r_1, r_2, \ldots, r_n$ los rectángulos contenidos en $D \subset R^2$.

Luego el conjunto $p = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ constituye una partición de la región D.

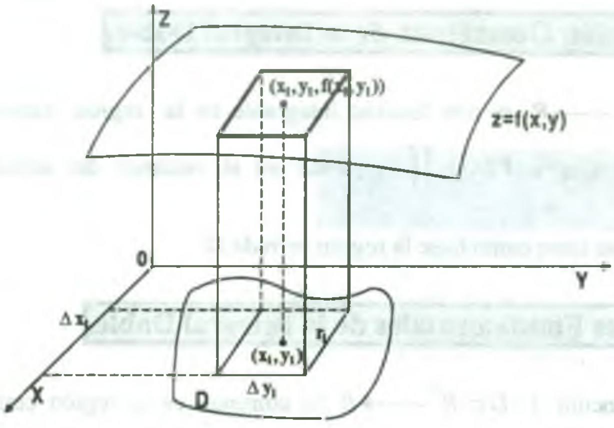
La norma de la partición p representada por $|P|$ se define como la longitud de la diagonal mayor de los rectángulos contenidos en D.

Consideremos el i-ésimo rectángulo r_i, i =1,2,...,n contenido en D, el área es $A(r_i) = \Delta x_i . \Delta y_i$, y sea (x_i, y_i) un punto del rectángulo r_i.

Luego la suma de Riemann de la función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, asociada a la partición p será:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A(r_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) . \Delta x_i . \Delta y_i$$

Geométricamente la suma de Riemann representa el volumen aproximado del sólido bajo la superficie z = f(x,y) y que tiene como base la región cerrada D.



Definición 2.- Consideremos una función acotada en la región cerrada D, $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, el límite de la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)A(r_i)$ es un número L, sí $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$, tal que: $|\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)A(r_i) - L| < \varepsilon$, para toda partición con $|\mathbf{p}| < \delta$ y $(x_i, y_i) \in r_i$, que lo representaremos por:

$$\boxed{L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)A(r_i)}$$

siempre y cuando el límite existe.

Definición 3.- Una función acotada $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, es integrable sobre la región cerrada D, si existe el número real, $L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)A(r_i)$. A éste número L se le llama integral doble de f en D y se representa por:

$$\boxed{L = \iint_D f(x, y)dA = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)A(r_i)}$$

5.5 Interpretación Geométrica de la Integral Doble.

Si $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, es una función integrable en la región cerrada D y f(x,y) ≥ 0, ∀(x,y)∈ D, entonces $V(S)=\iint\limits_D f(x,y)dA$ es el volumen del sólido S bajo la superficie z = f(x,y) y que tiene como base la región cerrada D.

5.6 Propiedades Fundamentales de la Integral Doble.

1º Si la función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$ es continua en la región cerrada D, entonces f es integrable en D.

2º Si la función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$ es integrable en la región cerrada D y k ∈ R, entonces kf es integrable en D y $\iint\limits_D k\,f(x,y)dA = k\iint\limits_D f(x,y)dA$

3º Si las funciones $f,g: D\subset R^2 \longrightarrow R$, son integrables en la región cerrada D, entonces f ± g es integrables en D, y

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]dA = \iint\limits_D f(x,y)dA \pm \iint\limits_D g(x,y)dA$$

4º Las funciones $f,g: D\subset R^2 \longrightarrow R$, son integrable en la región cerrada D y f(x,y) ≥ g(x,y), ∀(x,y) ∈D, entonces: $\iint\limits_D f(x,y)dA \geq \iint\limits_D g(x,y)dA$

5º Si la función $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, es integrable en la región cerrada D y m y M, son respectivamente los valores mínimo y máximo absoluto de f en D, es decir: m ≤ f(x,y) ≤ M, ∀(x,y) ∈ D, entonces $m\,A(D)\leq \iint\limits_D f(x,y)dA \leq M\,A(D)$, donde A(D) = área de la región cerrada D.

6º Si la función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, es continua en la región cerrada D y $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 regiones cerradas disjuntas, entonces.

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

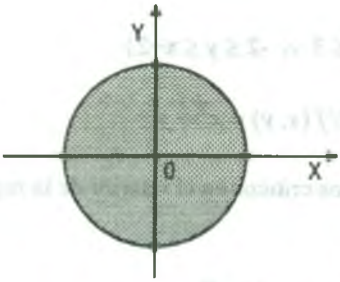
7º Si f(x,y) ≥ 0, ∀(x,y) ∈ Ω y D ⊂ Ω entonces $\iint_D f(x,y)dA \leq \iint_\Omega f(x,y)dA$

8º Si la función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, es continua en la región cerrada entonces:

$$\left|\iint_D f(x,y)dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dA$$

Ejemplo.- Hallar m y M de la propiedad (5) en la integral doble $\iint_D (x^2+4y^2+9)dxdy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leq 4$.

Solución



Calculamos los puntos críticos en el interior de la región $f(x,y) = x^2+4y^2+9$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Luego el punto critico es $P_1(0,0)$ ahora calculamos los puntos críticos en el borde como

$$x^2+y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow F(x) = f(x,y) = x^2+4(4-x^2)+9$$

$$F(x) = -3x^2+25 \Rightarrow F'(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = \pm 2 \Rightarrow P_2(0,\pm 2)$$

para $x^2 = 4-y^2 \Rightarrow F(y) = f(x,y) = 4-y^2+4y^2+9$

$F(y)=3y^2+13 \Rightarrow F'(y)=6y=0 \Rightarrow y=0,\ x=\pm 2 \Rightarrow P_3(\pm 2,0)$

$f(0,0)=9$, $f(\pm 2,0)=13$, $f(0,\pm 2)=25$

Luego el valor mínimo es $f(0,0) = 9$ y el valor máximo es $f(0, \pm 2)= 25$ de acuerdo a la propiedad 5 se tiene.

$$mA(D) \le \iint_D (x^2+4y^2+9)dxdy \le M\,A(D)$$

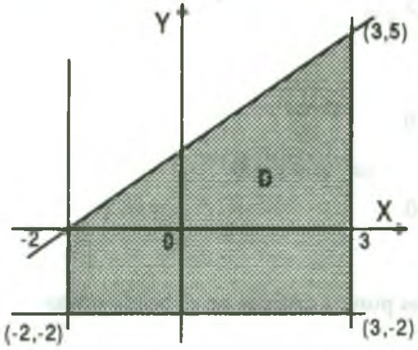
$$9(4\pi) \le \iint_D (x^2+4y^2+9)dxdy \le 25(4\pi)$$

$$36\pi \le I \le 100\pi$$

Ejemplo.- Hallar m y M de la propiedad (5) en la integral doble $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, donde D está limitada por las rectas $x=-2$, $y=3$, $y=x+2$, $y=-2$

Solución

Graficando la región D.



$D=\{(x,y) \,/\, -2 \le x \le 3 \ \wedge\ -2 \le y \le x+2\}$

$f: D \subset R^2 \longrightarrow R \,/\, f(x,y)=x^2+y^2$

calculando los puntos críticos en el interior de la región.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,0)$$

ahora calculamos los puntos críticos en el borde de D.

para $x=-2$, $F(y)=f(-2,y)=4+y^2$ entonces

$F'(y)=2y=0 \Rightarrow y=0$ entonces $P_2(-2,0)$.

para x = 3 , $F(y) = f(3,y) = 9 + y^2 \Rightarrow F'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$ entonces $p_3(3,0)$.

para y = -2 , $F(x) = f(x,-2) = x^2 + 4 \Rightarrow F'(x) = 2x \Rightarrow x = 0$ entonces $p_4(0,-2)$.

para y = x + 2, $F(x) = f(x,x+2) = x^2 + (x+2)^2 = 2x^2 + 4x + 4 \Rightarrow F'(x) = 4x + 4 = 0$

entonces x= -1, y = 1, entonces $P_5(-1,1)$; para x = 3, y = 5 $\Rightarrow p_6(3,5)$

ahora evaluamos la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en los puntos críticos f(0,0) = 0, f(-2,0) = 4, f(3,0) = 9, f(0,-2) = 4, f(-1,1) = 2, f(3,5) = 34.

Luego el valor mínimo es f(0,0) = 0 = m y el valor máximo es f(3,5) = 34 = M, de tal manera que: m ≤ f(x,y) ≤ M , como el área de D es $A(D) = 22.5u^2$

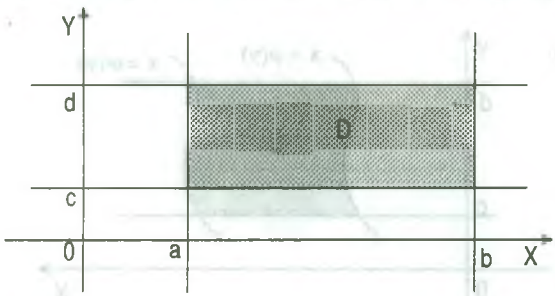
Luego por la propiedad (5) se tiene: $mA(D) \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M\,A(D)$

$$0(22.5) \le \iint_D (x^2 + y^2)dxdy \le 34(22.5) \quad \text{entonces} \quad 0 \le \iint_D (x^2 + y^2)dxdy \le 765$$

5.7 Cálculo de Integrales Dobles por Medio de Integrales Iteradas.

Consideremos tres casos para el cálculo de las integrales dobles.

1º Caso.- Si $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, es una función continua sobre D, donde $D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$ es un rectángulo.

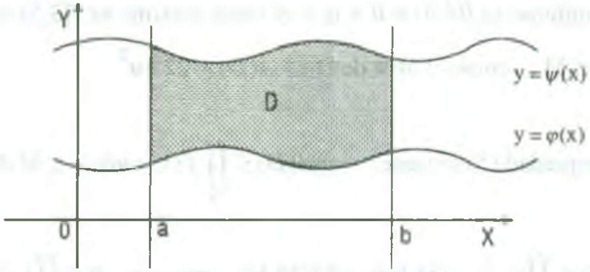


$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx \quad \textbf{... (1)}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx = dy \quad \textbf{... (2)}$$

a las integrales de (1) y (2) se llaman integrales iteradas de f.

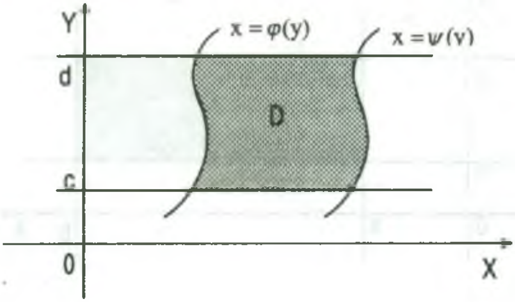
2º Caso.- Si $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, es una función continua sobre D, donde $D = \{(x,y)\in R^2 \,/\, a\le x\le b \wedge \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}$ es una región cerrada en R^2 y $\varphi,\psi: [a,b]\longrightarrow R$ son funciones continuas en [a,b], tal que $\varphi(x)\le\psi(x)$, $\forall x\in[a,b]$.



La integral iterada de f sobre D es:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx}$$

3º Caso.- Si $f: D\subset R^2 \longrightarrow R$, es una función continua sobre D, donde $D = \{(x,y)\in R^2 \,/\, c\le y\le d \wedge \varphi(y)\le x\le \psi(y)\}$ es una región cerrada en R^2 donde $\varphi,\psi: [c,d]\to R$ son funciones continuas en [c,d], tal que, $\varphi(y)\le\psi(y)$, $\forall y\in[c,d]$.

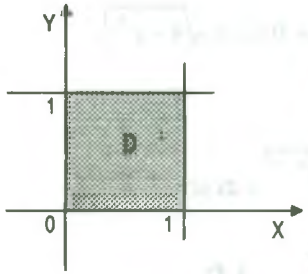


La integral iterada de f sobre D es:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dydx = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_D \frac{x^2 dx\,dy}{1+y^2}$, donde D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

Solución

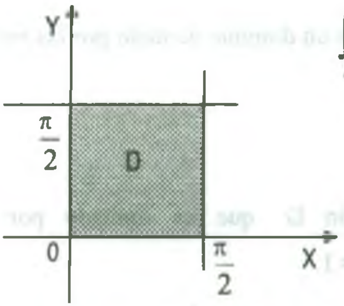


$$\iint_D \frac{x^2 dx\,dy}{1+y^2} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{3(1+y^2)}\Big/_0^1 dy = \int_0^1 \frac{dy}{3(1+y^2)} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y \Big/_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_D x^2 y \cos xy^2 dxdy$ donde D: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le 2$

Solución



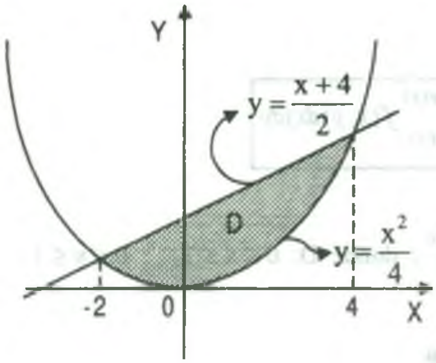
$$\iint_D x^2 y \cos xy^2 dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 xy \cos xy^2 dy\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{x \operatorname{sen} xy^2}{2}\Big/_0^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{x \operatorname{sen} 4x}{2} dx = -\frac{\pi}{16}$$

Ejemplo.- Calcular $\iint_D 2x\,dxdy$ donde D es la región limitada por $4y = x^2$, x-2y +4= 0.

Solución



Calculando los puntos de intersección

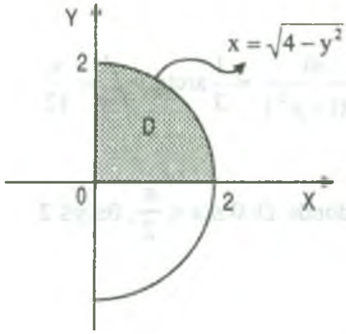
$$\begin{cases} 4y = x^2 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \ , \ x = 4$$

$$\iint_D 2x\,dx\,dy = \int_{-2}^{4} \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x+4}{2}} 2x\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{4} (x(x+4) - \frac{x^3}{2}) dx = 18$$

Ejemplo.- Calcular $\iint_D x dA$, donde $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le y \le 2 \wedge 0 \le x \le \sqrt{4-y^2} \right\}$.

<u>Solución</u>



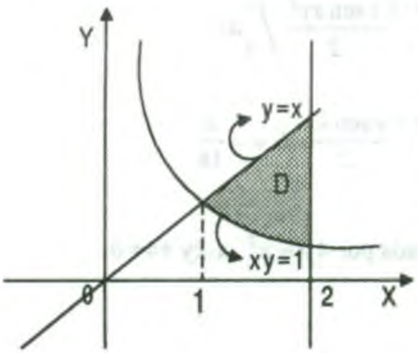
$$\iint_D x\,dA = \int_0^2 (\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} \Big/_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} (4y - \frac{y^3}{3}) \Big/_0^2 = \frac{8}{3}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx\,dy$ donde D es un dominio acotado por las rectas x = 2, y = x y la hipérbola xy = 1.

<u>Solución</u>

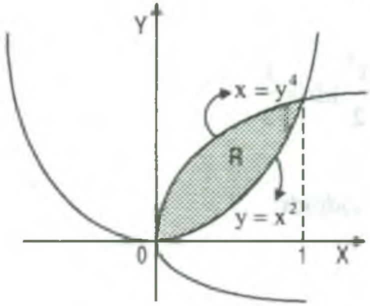


Graficando la región D que es limitado por las líneas x = 2, y = x, xy = 1.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx\,dy = \int_1^2 (\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy) dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{y} \Big/_{1/x}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx$$

$$= (\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}) \Big/_1^2 = \frac{9}{4} \qquad \therefore \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx\,dy = \frac{9}{4}$$

Ejemplo.- Evaluar la integral doble $\iint_D (x^{1/2}-y^2)dxdy$, donde R está limitada por $y=x^2$, $x=y^4$



Solución

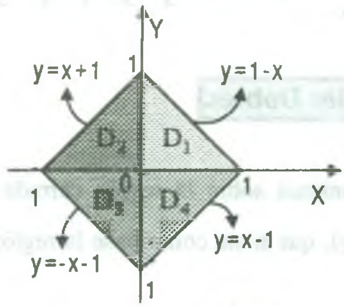
Graficando la región R y calculando los puntos de intersección

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x = y^4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x^8 \Rightarrow x=0,\ x=1$$

$$\iint_R (x^{1/2}-y^2)dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^4}^{\sqrt{y}} (x^{1/2}-y^2)dx\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^{3/2}-y^2x\right)\Big/_{y^4}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^{3/4}-y^{5/2}+\frac{y^6}{3}\right)dy = \frac{1}{7}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$



Solución

Sea $D = \{(x,y)\ /\ |x|+|y| \le 1\}$. Graficando la región D se tiene.

Se observa que: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

$$\iint_D (|x|+|y|)dxdy = \iint_{D_1} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_2} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_3} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_4} (|x|+|y|)dxdy \quad \textbf{...(1)}$$

ahora calculando cada una de las integrales.

$$\iint_{D_1} (|x|+|y|)dx\,dy = \iint_{D_1} (x+y)dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big/_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{3} \qquad \textbf{... (2)}$$

$$\iint_{D_2}(|x|+|y|)dxdy=\iint_{D_2}(-x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}(\int_{0}^{x+1}(-x+y)dy)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-xy+\frac{y^2}{2})\Big/_{0}^{x+1}dx=\int_{-1}^{0}(\frac{1}{2}-\frac{x^3}{2})dx=\frac{1}{3} \qquad ...(3)$$

$$\iint_{D_3}(|x|+|y|)dx\,dy=\iint_{D_3}(-x-y)dx\,dy=\int_{-1}^{0}(\int_{-x-1}^{0}(-x-y)dy)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-xy-\frac{y^2}{2})\Big/_{-x-1}^{0}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(1-x^2)dx=\frac{1}{3} \qquad ...(4)$$

$$\iint_{D_4}(|x|+|y|)dx\,dy=\iint_{D_4}(x-y)dx\,dy=\int_{0}^{1}(\int_{x-1}^{0}(x-y)dy)dx=\frac{1}{3} \qquad ...(5)$$

ahora reemplazamos (2), (3) y (4) en (1): $\displaystyle\iint_{D}|x|+|y|\,dx\,dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

5.8 Cálculo de Areas y Volúmenes por integrales Dobles.

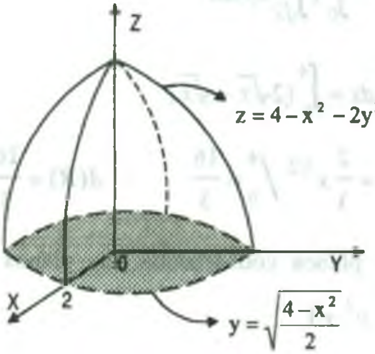
1º Consideremos la función $f:D\subset R^2 \longrightarrow R$, continua sobre la región cerrada D. El volumen del sólido S bajo la superficie z = f(x,y), que tiene como base la región D es dado por la expresión:

$$\boxed{V(S)=\iint_{D}f(x,y)dA}$$

2º Consideremos la función $f:D\subset R^2 \longrightarrow R$, continua en la región cerrada D, tal que: f(x,y) = 1, $\forall(x,y)\in D$, entonces el área de la región plana D es dado por:

$$\boxed{A(D)=\iint_{D}f(x,y)dA=\iint_{D}dA}$$

Ejemplo.- Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e inferiormente por el plano XY.



Solución

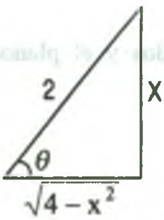
Proyectando al plano XY, se tiene z = 0 de donde:

$x^2 + 2y^2 = 4$, y = 0, $y = \pm\sqrt{2}$, x = 0, x = ± 2

$$V = 4\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} z\,dy\right)dx = 4\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (4 - x^2 - 2y^2)dy\right)dx$$

$$= 4\int_0^2 [(4 - x^2)y - \frac{2}{3}y^3] \Big/_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx = 4\int_0^2 (4 - x^2 - \frac{2}{3}y^2)y \Big/_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx$$

$$= 4\int_0^2 [4 - x^2 - \frac{2}{3}(\frac{4-x^2}{2})]\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\,dx = 4\int_0^2 \frac{2}{3}(4 - x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^2 (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}\,dx$$



$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{2}$

$x = 2\,\text{sen}\,\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$2\cos\theta = \sqrt{4 - x^2}$

$4\cos^2\theta = 4 - x^2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta.2\cos\theta.2\cos\theta\, d\theta$$

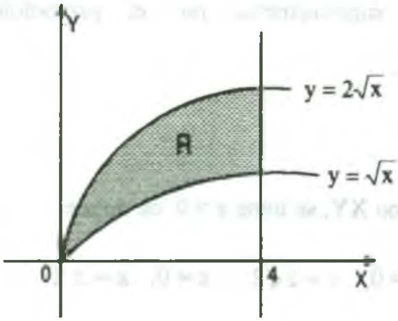
$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{64\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} (\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2\, d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2})d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2} (\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2})d\theta$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}(\frac{3x}{2} + \text{sen}\,2\theta + \frac{\text{sen}\,4\theta}{8}) \Big/_0^{\pi/2} = 4\sqrt{2}\,\pi\, u^3$$

Ejemplo.- Hallar el área por integración doble de la región limitada por las parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y la recta x = 4.



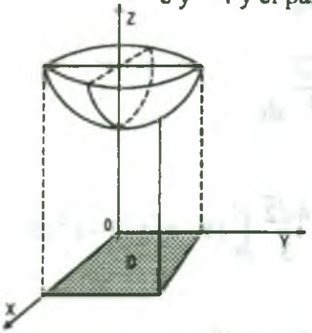
Solución

$$A(R)=\iint_R dxdy \;=\int_0^4 (\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy)dx$$

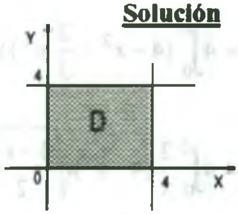
$$=\int_0^4 y \Big/_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx=\int_0^4 (2\sqrt{x}-\sqrt{x})$$

$$=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx \quad =\frac{2}{3}x^{3/2}\Big/_0^4=\frac{16}{3} \qquad \therefore\; A(R)=\frac{16}{3}u^2$$

Ejemplo.- Hallar el volumen del cuerpo limitado por los planos coordenados, los planos x = 4 e y = 4 y el paraboloide de revolución $z=x^2+y^2+1$



Solución

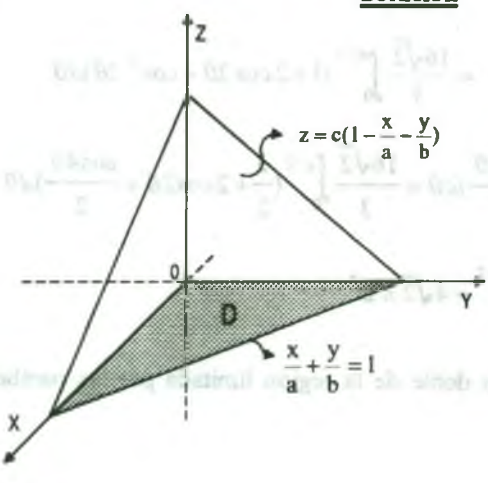


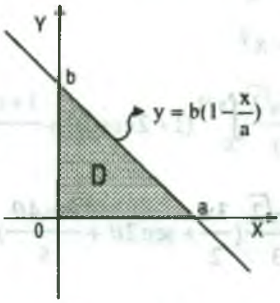
$$V=\iint_D zdxdy=\iint_D (x^2+y^2+1)dxdy$$

$$=\int_0^4 (\int_0^4 (x^2+y^2+1)dy)dx=186^{2/3}u^3$$

Ejemplo.- Hallar el volumen del cuerpo limitado por los planos coordenados y el planos $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Solución





$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\iint_D c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\,dx\,dy=\int_0^a\left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dy\right)dx$$

$$=\int_0^a c(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b})\Big/_0^{b(1-\frac{x}{a})}dx=c\int_0^a b(1-\frac{x}{a})\left[1-\frac{x}{a}-\frac{1}{2}(1-\frac{x}{a})\right]dx=\frac{bc}{2}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^2\,dx$$

$$=\frac{bc}{2}[-\frac{a}{3}(1-\frac{x}{a})\Big/_0^a]=-\frac{abc}{6}[0-1]=\frac{abc}{6}u^3$$

5.9 Cambio del Orden de Integración.

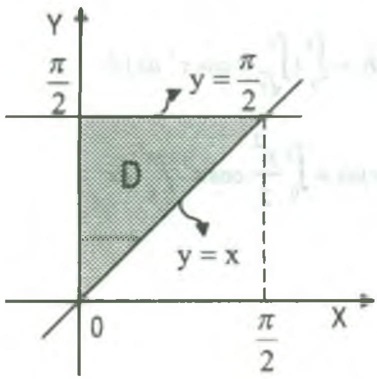
En muchos casos una integral iterada puede evaluarse más fácilmente si se invierte el orden de las variables en la integración. Esto se obtiene conociendo perfectamente la región.

Ejemplo.- Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^y \cos 2y\sqrt{1-P^2\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,dy$, $0<P^2<1$

Solución

Sea $\begin{cases}0\le x\le y\\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow D=\{(x,y)\in R^2 / 0\le x\le y \wedge 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$

Graficando la región de integración D se tiene.



$$\iint_D \cos 2y\sqrt{1-P^2\operatorname{sen}^2}\,dxdy=$$

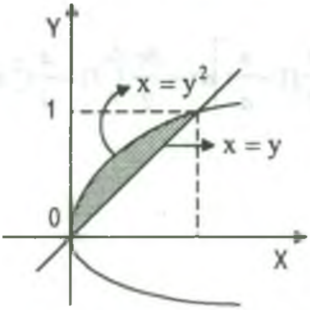
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^y \cos 2y\sqrt{1-P^2\operatorname{sen}^2 x}\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}2y}{2}\sqrt{1-P^2\operatorname{sen}^2 x}\Big/_x^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}2x\sqrt{1-P^2\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

$$=\frac{1}{3P^2}(1-P^2\operatorname{sen}^2 x)^{3/2}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad =\frac{1}{3P^2}\left[(1-P^2)^{3/2}-1\right]$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\int_0^1\int_{y^2}^{y}\frac{y\,e^x}{x}\,dx\,dy$



Solución

Sea $D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le y \end{cases}$ Graficando la región D.

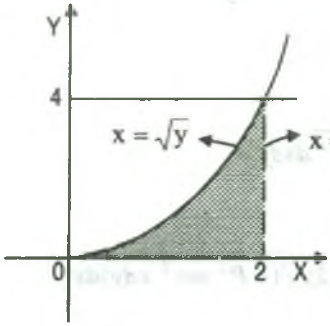
$$\int_0^1\int_{y^2}^{y}\frac{y\,e^x}{x}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{y^2}^{y}\frac{y\,e^x}{x}\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{y\,e^x}{x}\,dy\right)dx = \int_0^1\frac{y^2e^x}{2x}\Big/_x^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(e^x - x\,e^x)\,dx = \frac{1}{2}(2e^x - x\,e^x)\Big/_0^1 = \frac{e-2}{2}$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos x^5\,dx\,dy$

Solución



Sea $D: \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 \end{cases}$ Graficando la región D.

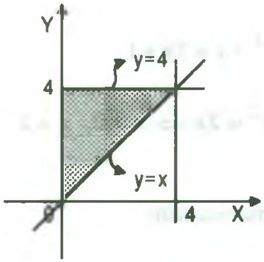
$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos x^5\,dx\,dy = \int_0^4\left(\int_{\sqrt{y}}^{4} y\cos x^5\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^2\left(\int_0^{x^2} y\cos x^5 dy\right)dx = \int_0^2\frac{y^2}{2}\cos x^5\Big/_0^{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\cos x^5 dx = \frac{\operatorname{sen} x^5}{10}\Big/_0^2 = \frac{\operatorname{sen} 32}{10}$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\int_0^4\int_x^4 e^{-y^2}\,dy\,dx$

Solución



Sea $D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ x \le y \le 4 \end{cases}$ Graficando la región D.

$$\int_0^4 \int_x^4 e^{-y^2}\,dy\,dx = \int_0^4 \left(\int_0^y e^{-y^2}\,dx\right)dy$$

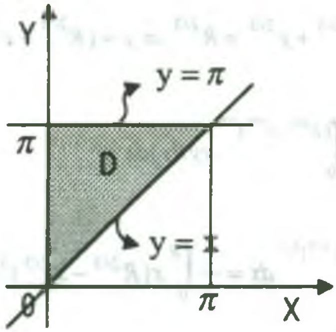
$$= \int_0^4 x e^{-y^2} \Big/_0^y dy = \int_0^4 y e^{-y^2}\,dy = -\frac{e^{-y^2}}{2} \Big/_0^4 = -\frac{1}{2}(e^{-16} - 1)$$

$$\therefore \int_0^4 \int_x^4 e^{-y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-16})$$

5.10 Ejercicios Desarrollados.

1) Calcular la integral doble $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, donde D es un dominio acotado por las rectas x = 0, y = π, y = x.

Solución



$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_x^\pi \cos(x+y)\,dy\right)dx$$

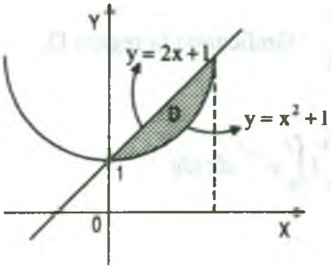
$$= \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y) \Big/_x^\pi dx = \int_0^\pi (\operatorname{sen}(x+\pi) - \operatorname{sen} 2x)\,dx$$

$$= \left(-\cos(x+\pi) + \frac{\cos 2x}{2}\right) \Big/_0^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\therefore \iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy = -2$$

2) Calcular la integral doble $\iint\limits_D x^2 y\,dA$, donde D esta limitado por y = 2x + 1, $y = x^2 + 1$.

Solución



$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 2x + 1$$

$$x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, \ x = 2$$

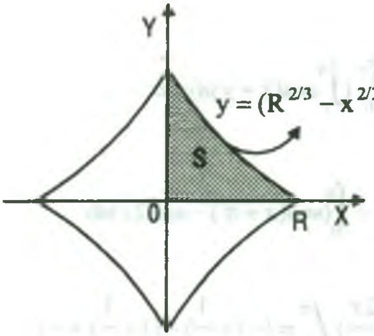
son los puntos de intersección

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_0^2 (\int_{x^2+1}^{2x+1} x^2 y\, dy) dx = \int_0^2 \frac{x^2 y^2}{2} \Big/_{x^2+1}^{2x+1} dx$$

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\left[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2\right] dx = \int_0^2 (2x^3 + x^4 - \frac{x^6}{2}) dx = \frac{184}{35}$$

3) Calcular la integral doble $\iint_S xy dx dy$ en la que el recinto de integración S está limitado por los ejes de coordenadas y por el Astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Solución



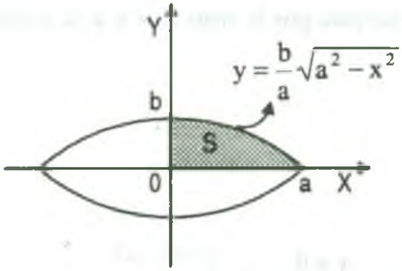
$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\operatorname{sen}^3 t \end{cases} \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3} \Rightarrow y = (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$$

$$\iint_S xy\, dx\, dy = \int_0^R (\int_0^{(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} xy\, dy) dx$$

$$= \int_0^R \frac{x y^2}{2} \Big/_0^{(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^R x(R^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R x(R^2 - 3R^{4/3}x^{2/3} + 3R^{2/3}x^{4/3} - x^2) dx = \frac{R^4}{80}$$

4) Calcular la integral doble $\iint_D xy dx dy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y situado en el primer cuadrante.



Solución

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ de donde } 0 \le x \le a \;\wedge\; 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

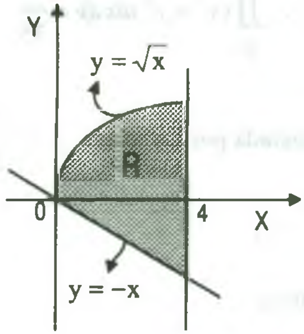
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy \right)dx$$

$$= \int_0^a \frac{x\,y^2}{2}\Big/_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a \frac{x}{2}.\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (a^2x-x^3)dx$$

$$= \frac{b^2}{2a^2}\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]\Big/_0^a = \frac{b^2}{2a^2}\left[\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right] = \frac{a^4b^2}{8a^2} = \frac{a^2b^2}{8} \qquad \therefore \iint_S xy\,dx = \frac{a^2b^2}{8}$$

5) Calcular la integral doble $\iint_R (xy+2x^2)dA$, siendo R: $y=\sqrt{x}$, y = -x, x = 0, x = 4.

Solución



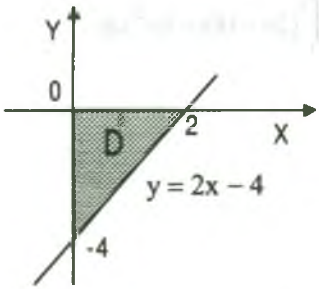
Graficando la región R se tiene:

$$\iint_R (xy+2x^2)\,dA = \int_0^4 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (xy+2x^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{xy^2}{2}+2x^2y\right)\Big/_{-x}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x^3+\frac{x^2}{2}+2x^{5/3}\right)dx = 179.81$$

6) Calcular $\iint_D \frac{2y-1}{x+1}dx\,dy$, donde D está limitado por las rectas x = 0, y = 0, 2x - y=4.

Solución



Graficando la región D se tiene:

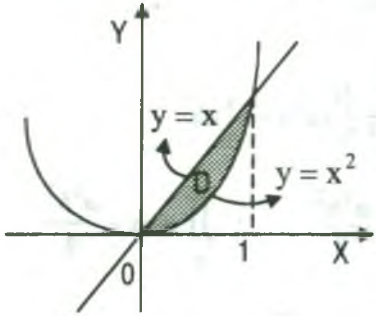
$$\iint_D \frac{2y-1}{x+1}dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{2x-4}^0 \frac{2y-1}{x+1}dy\right)dx = \int_0^2 \frac{y^2-y}{x+1}\Big/_{2x-4}^{0} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{4x^2-18x+20}{x+1}dx = 36-42\ln 3$$

7) Calcular $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, donde D es la región acotada por la recta y = x y la parábola $y=x^2$.

Solución

Graficando la región D se tiene:



$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}, \quad D: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le x \end{cases}$$

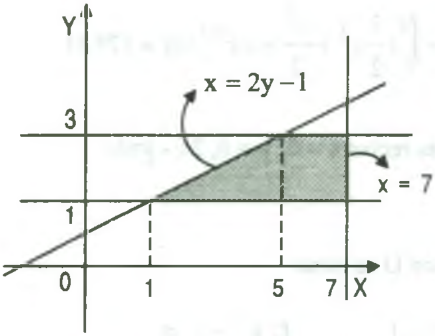
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big/_{x^2}^{x} dx=\int_0^1\left(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Big/_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{3}{35} \qquad \therefore \iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy=\frac{3}{35}$$

8) Calcular la integral $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, donde D es la región limitada por las rectas $y=\frac{x+1}{2}$, y = 3, y = 1, x = 7.

Solución



Graficando la región D se tiene:

$$\iint\limits_D (x+2y)dx\,dy=\int_1^3\left(\int_{2y-1}^{7}(x+2y)\,dx\right)dy$$

$$=\int_1^3\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big/_{2y-1}^{7} dy=\int_1^3(24+18y-6y^2)dy$$

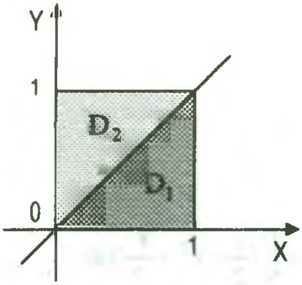
$$=(24y+9y^2-2y^3)\Big/_1^3=(72+81-54)-(24+9-2)=68$$

$$\therefore \iint\limits_D (x+2y)dxdy=68$$

9) Hallar la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 |x-y|\,dx\,dy$

Solución

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow D = \{(x,y) \in R^2 / 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$$



Graficando la región D se tiene:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \ge y \\ y-x & \text{si } x < y \end{cases} \quad \text{Luego } D = D_1 \cup D_2$$

$$\iint_D |x-y|\,dxdy = \iint_{D_1} |x-y|\,dxdy + \iint_{D_2} |x-y|\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} (x-y)\,dxdy + \iint_{D_2} (y-x)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 (\int_0^x (x-y)dy)dx + \int_0^1 (\int_x^1 (y-x)dy)dx$$

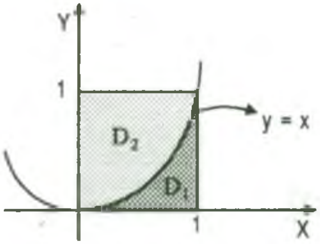
$$\iint_D |x-y|\,dx\,dy = \int_0^1 (xy - \frac{y^2}{2}) \Big/_0^x dx + \int_0^1 (\frac{y^2}{2} - xy) \Big/_x^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2})\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \iint_D |x-y|\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

10) Calcular el valor de la integral $\int_0^1 \int_0^1 |y-x^2|\,dx\,dy$

Solución

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow D = \{(x,y) \in R^2 / 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$$



Graficando la región D se tiene:

$$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2 & \text{si } \; y \ge x^2 \\ x^2-y & \text{si } \; y < x^2 \end{cases}$$

por lo tanto: $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint_D |y-x^2|\,dxdy = \iint_{D_1} |y-x^2|\,dxdy + \iint_{D_2} |y-x^2|\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2-y)dy\right)dx + \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (y-x^2)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 (x^2y - \frac{y^2}{2}) \Big/_0^{x^2} dx + \int_0^1 (\frac{y^2}{2} - x^2 y) \Big/_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx + \int_0^1 (\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}) dx$$

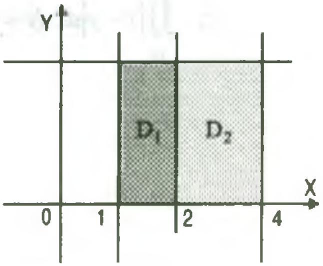
$$= \int_0^1 (x^4 - x^2 + \frac{1}{2}) dx \quad = (\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}) \Big/_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{30} \quad \therefore \iint_D |y-x^2|\,dx\,dy = \frac{11}{30}$$

11) Calcular la integral $\int_0^{\pi} \int_1^4 |x-2| \operatorname{sen} y \, dx\, dy$

Solución

Ubiquemos la región D de integración.

$$\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D = \{(x,y) / 1 \le x \le 4 \;\wedge\; 0 \le y \le \pi\}.$$



Graficando la región D se tiene:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } \; x \ge 2 \\ 2-x & \text{si } \; x < 2 \end{cases}$$

por lo tanto $D = D_1 \cup D_2$ entonces

$$\iint_D |x-2| \operatorname{sen} y dxdy = \iint_{D_1} |x-2| \operatorname{sen} y dxdy + \iint_{D_2} |x-2| \operatorname{sen} y dxdy$$

$$\iint_D |x-2|\operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi (2-x)\operatorname{sen} y\,dy\right)dx + \int_2^4 \left(\int_0^\pi (x-2)\operatorname{sen} y\,dy\right)dx$$

$$= \int_1^2 (x-2)\cos y \Big/_0^\pi dx + \int_2^4 (2-x)\Big/_0^\pi dx = \int_1^2 (4-2x)\,dx + \int_2^4 (2x-4)\,dx$$

$$= (4x-x^2)\Big/_1^2 + (x^2-4x)\Big/_2^4 \quad = 4 - 3 + 0 - (4 - 8) = 1 + 4 = 5$$

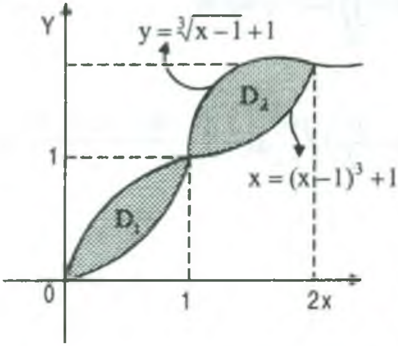
$$\therefore \int_0^\pi \int_1^4 |x-2|\operatorname{sen} y\,dx\,dy = 5$$

12) Calcular la integral $\iint_D (x-y+1)dxdy$, donde D es la región limitada por las curvas $y=(x-1)^3+1$, $y=1+\sqrt[3]{x-1}$

Solución

Graficando la región D, y para esto calcularemos los puntos de intersección.

$$\begin{cases} y=(x-1)^3+1 \\ y=\sqrt[3]{x-1}+1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (x-1)^3=\sqrt[3]{x-1} \;\Rightarrow\; x=1 \text{ de donde } y=1 \\ (x-1)^9=x-1 \;\Rightarrow\; (x-1)^8=1 \end{array}$$



$x - 1 = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = 2$, $x = 0$. Luego la región D es:

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$\iint_D (x-y+1)dxdy = \iint_{D_1} (x-y+1)dxdy + \iint_{D_2} (x-y+1)dxdy \quad \textbf{...(1)}$$

ahora calculamos cada una de las integrales dobles

$$\iint_{D_1} (x-y+1)dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1+\sqrt[3]{x-1}}^{(x-1)^3+1} (x-y+1)dy\right)dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}(x-y+1)^2 \Big/_{1+\sqrt[3]{x-1}}^{1+(x-1)^3} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[(-x^3+3x^2-2x+1)^2 - (x-\sqrt[3]{x-1})^2\right]dx = \frac{3}{7}+\frac{1}{2}=\frac{13}{14} \qquad \textbf{... (2)}$$

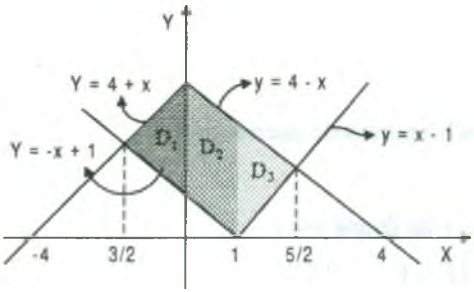
$$\iint\limits_{D_2}(x-y+1)dx\,dy=\int_1^2(\int_{1+(x-1)^3}^{1+\sqrt[3]{x-1}}(x-y+1)dy)dx\ =\int_0^1-\frac{1}{2}(x-y+1)^2\Big/_{1+(x+1)^3}^{1+\sqrt[3]{x-1}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2\left[(x-\sqrt[3]{x-1})^2-(x-(x-1)^3)^2\right]dx=\frac{1}{14} \qquad \text{... (3)}$$

ahora reemplazamos (2), (3) en (1): $\displaystyle\iint\limits_D(x-y+1)\,dx\,dy=\frac{13}{14}+\frac{1}{14}=1$

13) Calcular la integral doble $\displaystyle\iint\limits_D(2x-y)dxdy$, sobre la región D por arriba de $y=|x-1|$ y debajo de $y=4-|x|$

Solución



Graficando la región D, de donde se observa que:

$D=D_1\cup D_2\cup D_3$

Luego a la integral doble expresaremos en la forma

$$\iint\limits_D(2x-y)dx\,dy=\iint\limits_{D_1}(2x-y)dx\,dy+\iint\limits_{D_2}(2x-y)dx\,dy+\iint\limits_{D_3}(2x-y)dx\,dy \qquad \text{... (1)}$$

$$\iint\limits_{D_1}(2x-y)dx\,dy=\int_{-3/2}^0(\int_{1-x}^{4+x}(2x-y)dy)dx=\int_{-3/2}^0(2xy-\frac{y^2}{2})\Big/_{1-x}^{4+x}dx=\int_{-3/2}^0\frac{8x^2+2x-15}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{8x^3}{3}-x^2-15x)\Big/_{-3/2}^0=-\frac{45}{8}$$

$$\iint\limits_{D_2}(2x-y)dx\,dy=\int_0^1(\int_x^{4-x}(2x-y)dy)dx=\int_0^1(2xy-\frac{y^2}{2})\Big/_{1-x}^{4-x}dx=\int_0^1\frac{18x-15}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[9x^2-15x\right]\Big/_0^1=-3$$

$$\iint\limits_{D_3}(2x-y)dx\,dy=\int_1^{5/2}(\int_{x-1}^{4-x}(2x-y)dy)dx=\int_1^{5/2}(2xy-\frac{y^2}{2})\Big/_{x-1}^{4-x}dx$$

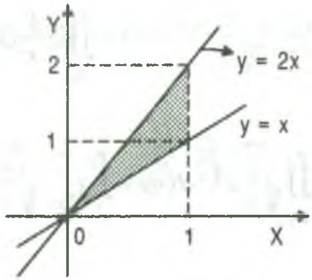
$$=\frac{1}{2}\int_1^{5/2}(-8x^2+26x-15)dx=\frac{1}{2}(-\frac{8x^3}{3}+13x^2-15x)\Big/_1^{5/2}$$

$$=\frac{25}{24}-(-\frac{7}{3})=\frac{25}{24}+\frac{7}{3}=\frac{27}{8}$$

14) Evaluar $\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^{y}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dxdy+\int_1^2\int_{\frac{y}{2}}^{1}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dxdy$

Solución

Ubicando la región sobre el cual se realiza la integral



$$\int_0^1(\int_{\frac{y}{2}}^{y}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dx)dy+\int_1^2(\int_{\frac{y}{2}}^{1}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dx)dy=\int_0^1(\int_x^{2x}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dy)dx$$

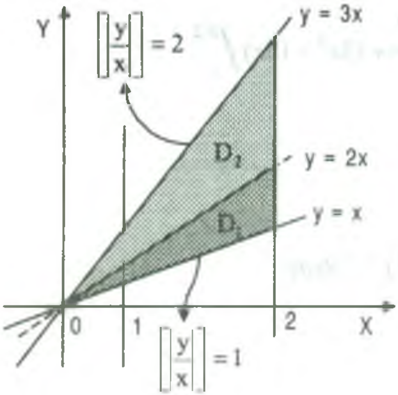
$$=\int_0^1\frac{2x}{3}(x^3+y^3)^{1/3}\Big/_x^{2x}=\frac{2}{3}\int_0^1(3x^{5/2}-\sqrt{2}x^{5/2})dx=\frac{4(3-\sqrt{2})}{21}$$

$$\therefore\quad\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^{y}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dx\,dy+\int_1^2\int_{\frac{y}{2}}^{1}xy^2(x^3+y^3)^{-1/2}dx\,dy=\frac{4(3-\sqrt{2})}{21}$$

15) Calcular la integral $\iint\limits_D[|\frac{y}{x}|]\sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dxdy$, donde D es la región plana limitada por las rectas $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=3x$.

Solución

Graficando la región D.



Ahora definimos el máximo entero de $[|\frac{y}{x}|]$ en la región D_1

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le \frac{y}{x} < 2 \Rightarrow [|\frac{y}{x}|] = 1$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 2 \\ \frac{y}{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \le \frac{y}{x} < 3 \Rightarrow [|\frac{y}{x}|] = 2$$

$$\iint_D [|\frac{y}{x}|]\sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dxdy = \iint_{D_1} [|\frac{y}{x}|]\sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dxdy + \iint_{D_2} [|\frac{y}{x}|]\sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dx\,dy + 2\iint_{D_2} \sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dx\,dy = \int_1^2 (\int_x^{2x} \sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dy)dx + 2\int_1^2 (\int_{2x}^{3x} \sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dy)dx$$

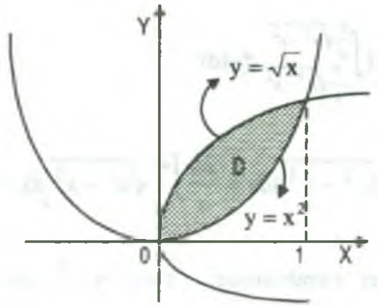
$$= \int_1^2 2xe^{\sqrt{\frac{y}{x}}} \Big/_x^{2x} dx + 2\int_1^2 2xe^{\sqrt{\frac{y}{x}}} \Big/_{2x}^{3x} dx = \int_1^2 (2xe^{\sqrt{2}} - 2xe)dx + 4\int_1^2 (xe^{\sqrt{3}} - xe^{\sqrt{2}})dx$$

$$= (e^{\sqrt{2}} - e)x^2 \Big/_1^2 + 2(e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}})x^2 \Big/_1^2 = 6e^{\sqrt{3}} - 3e^{\sqrt{2}} - 3e$$

$$\therefore \iint_D [|\frac{y}{x}|]\sqrt{\frac{x}{y}}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dxdy = 3(2e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}} - e)$$

16) Calcular el área de la región comprendida por: D: $y = x^2$, $y^2 = x$, por integración doble.

Solución



$$A(D)=\iint_D dxdy=\int_0^1(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy)dx$$

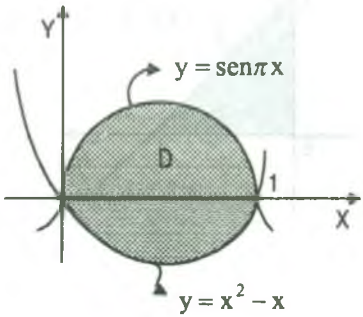
$$=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3})\Big/_0^1=(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

$$\therefore A(D)=\frac{1}{3}u^2$$

17) Hallar el área de la región R limitada por las curvas $y=x^2-x$, $y=\text{sen}\,\pi\,x$

Solución

Dibujando la región R.



Luego la región R es dado por.

$$R=\{(x,y)/0\le x\le 1 \ \wedge \ x^2-x\le y\le \text{sen}\,\pi\,x\}$$

Luego el área es dado por:

$$A(R)=\iint_R dxdy$$

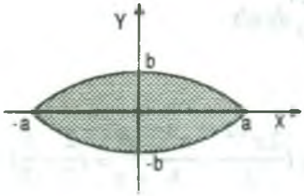
$$=\int_0^1(\int_{x^2-x}^{\text{sen}\,\pi x}dy)dx=\int_0^1(\text{sen}(\pi x)-x^2+x)dx$$

$$=(-\frac{\cos\pi\,x}{\pi}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big/_0^1=(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2})-(-\frac{1}{\pi}-0)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{6}=\frac{\pi+12}{6\pi}u^2$$

18) Hallar el área de la región R encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, a,b > 0.

Solución

Luego la región R descrita por $R=\{(x,y)/-a\le x\le a \ \wedge \ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\}$

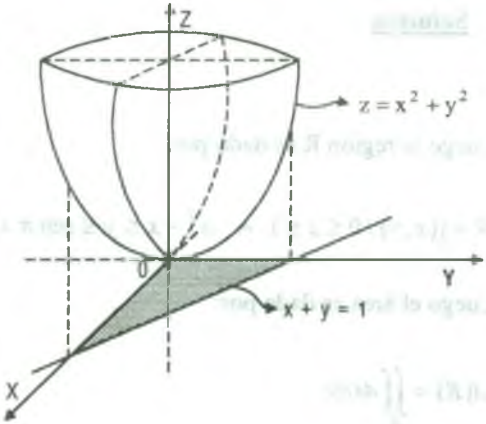


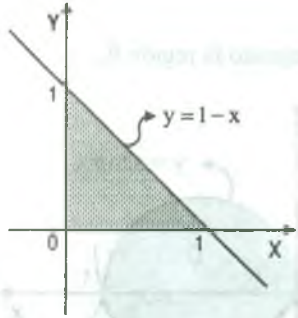
$$= A(R) = \iint_R dx\,dy = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ab\pi$$

19) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano x + y = 1.

Solución





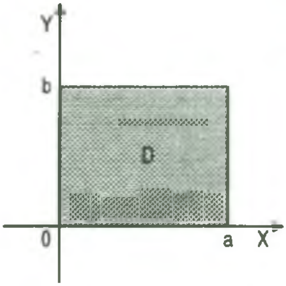
$$V = \iint_D z\,dx\,dy = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big/_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{-4x^3+6x^2-3x+1}{3}dx = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad V = \iint_D z\,dx\,dy = \frac{1}{6}u^3$$

20) Hallar el volumen del cuerpo limitado por los planos coordenados y los planos x = a, y = b y el paraboloide elíptico $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

Solución



$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\iint_D \left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy$$

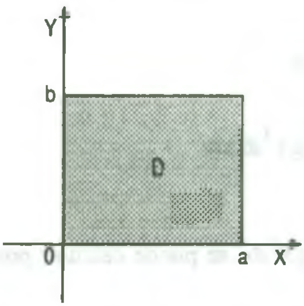
$$V=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\int_0^b\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}\right)dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{b}{p}x^2+\frac{b^3}{3q}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3b}{3p}+\frac{ab^3}{3q}\right)$$

$$\therefore\quad V=\iint_D z\,dx\,dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)u^3$$

21) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$

Solución

Calculando el volumen de octava parte del cuerpo dado en la figura.



$$\frac{V}{8}=\iint_D z\,dx\,dy,\text{ de donde}$$

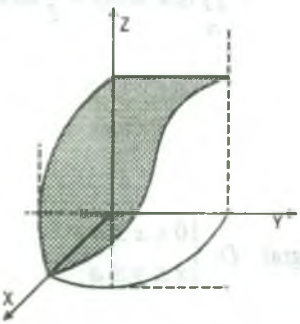
$$V=8\iint_D z\,dx\,dy=8\iint_D\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy$$

$$=8\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\right)dx=8\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\;y\Big/_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=8\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big/_0^a=8\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{16a^3}{3}$$

$$\therefore\quad V=8\iint_D z\,dx\,dy=\frac{16a^3}{3}u^3$$

22) Hallar el volumen limitado por las superficies $y^2=x$, $z+x=1$, $z=0$



Solución

Proyectando al plano XY, se tiene.

$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\iint_D(1-x)dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(1-x)dy\right)dx$$

$$V=\int_0^1(1-x)y\Big/_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1(1-x)\sqrt{x}\,dx=2\int_0^1(x^{1/2}-x^{3/2})dx$$

$$= 2[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}] \Big/_0^1 = 2[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}] - 0 = 2(\frac{4}{15}) = \frac{8}{15}$$

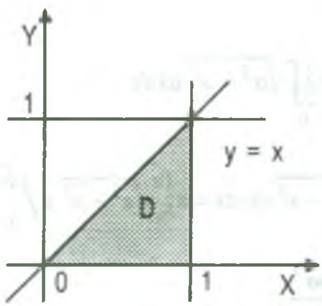
$$\therefore\ V = \iint_D z\,dx\,dy = \frac{8}{15}u^3$$

23) Calcular la integral $\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{tg} x^2 dx\,dy$

Solución

Ubicando la región D sobre el cual se calcula la integral

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow D = \{(x,y) / 0 \le y \le 1 \ \wedge \ y \le x \le 1\}$$



Graficando la región D.

$$\iint_D \operatorname{tg} x^2 dx\,dy = \int_0^1 (\int_y^1 \operatorname{tg} x^2 dx) dy$$

como la integral $\int_y^1 \operatorname{tg} x^2 dx$ se puede calcular por ningún método de integración, en este caso se cambia el orden de integración.

$$\iint_D \operatorname{tg} x^2 dx\,dy = \int_0^1 (\int_y^1 \operatorname{tg} x^2 dx) dy = \int_0^1 (\int_0^x \operatorname{tg} x^2 dy) dx$$

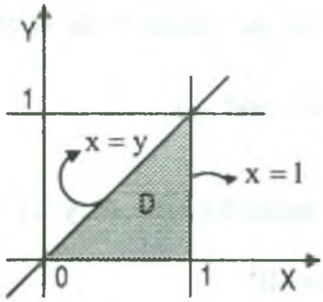
$$= \int_0^1 x \operatorname{tg} x^2 dx = \frac{1}{2} \ln \sec x^2 \Big/_0^1 = \frac{1}{2} \ln|\sec 1| \qquad \therefore \iint_D \operatorname{tg} x^2 dx\,dy = \frac{1}{2}\ln(\sec 1)$$

24) Evaluar la integral $\int_0^a \int_x^a \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dy\,dx$

Solución

Ubicando la región D sobre el cual se realiza la integral $D: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ x \le y \le a \end{cases}$

Graficando la región D.



$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^a \left(\int_x^a \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^y \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = \int_0^a \sqrt{x^2+y^2}\,\Big/_0^y\,dy$$

$$= \int_0^a (\sqrt{2}y - y)\,dy = \frac{\sqrt{2}-1}{2}y^2 \Big/_0^a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$$

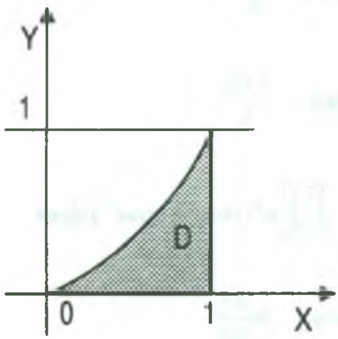
25) Calcular la integral $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\,dx\,dy$

Solución

Ubicando la región se tiene:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow D = \{(x,y)\,/\,0 \le y \le 1 \;\wedge\; \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

Graficando la región.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{y/x}\,dy\right)dx = \int_0^1 x\,e^{y/x} \Big/_0^{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 (x\,e^x - x)\,dx = ((x-1)e^x - \frac{x^2}{2}) \Big/_0^1$$

$$= (0 - \frac{1}{2}) - (-1 - 0) = \frac{1}{2}$$

5.11 Ejercicios Propuestos.

1) Calcular la integral sobre $\iint_D e^{x+\text{sen}\,y}\cos y\,dxdy$, si la región D es el rectángulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. **Rpta.** $(e-1)(e^{\pi}-1)$

2) Calcular la integral doble $\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, donde D es la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Rpta. $(e-1)^2$

3) Calcular la integral $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, donde D es la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Rpta. $\ln(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}})$

4) Calcular la integral $\iint_D x^2 y e^{xy}\,dxdy$, donde D es la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Rpta. 2

5) Calcular las siguientes integrales.

a) $\int_0^2 \int_1^3 |x-2|\,\text{sen}\,y\,dx\,dy$ **Rpta.** **2(1 - cos 2)**

b) $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{11}{6}$

c) $\int_0^2 \int_0^2 (8x^2+2y)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{152}{3}$

d) $\int_0^2 \int_0^1 e^x \cos(y+e^x)\,dy\,dx$ **e)** $\int_0^2 \int_0^1 e^x(\cos y+\cos e^x)\,dy\,dx$

f) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{x+y+1}$ **Rpta.** $\ln\frac{27}{16}$

g) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\cos xy|\,dx\,dy$ **Rpta.** 2π

h) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen}^2 y\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{\pi^2}{4}$

6) Calcular la integral doble $\iint_D |x+y|dxdy$, donde D: [-1,1]x[-1,1].

Rpta. $\frac{8}{3}$

7) Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$, donde D: $|x| \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Rpta. $\frac{20+3\pi}{12}$

8) Calcular $\iint_D f(x,y)dxdy$, donde D: [-π,6]x[-2,2]

$$f(x,y)=\begin{cases}|y-\operatorname{sen}x| & \text{si } -\pi \le x \le \pi \ \wedge \ -2 \le y \le 2\\ x+y & \text{si } x \le 5+y^2\\ 1 & \text{si } x > 5+y^2\end{cases}$$

Rpta. $61+\frac{73}{15}+8\pi-\pi^2$

9) Calcular $\iint_D f(x,y)dxdy$, donde $D: [-1,2]x\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ siendo

$$f(x,y)=\begin{cases}|x-\operatorname{tg}y| & \text{si } |x| \le 1 \ \wedge \ |y| \le \frac{\pi^2}{16}\\ 1 & \text{si } y \ge \frac{\pi x}{2}-\frac{3\pi}{4}\\ x & \text{si } y+\frac{3\pi}{4} \le \frac{\pi x}{2}\end{cases}$$

Rpta. $2+\frac{2}{3}\pi$

10) Calcular la integral doble $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, si la región D está limitada por las líneas y = x, x = 0, y = 1, y = 2. **Rpta.** 5

11) Calcular $\iint_D (3x^2 - 2xy + y)dxdy$, si la región D está limitada por las líneas x = 0, $x = y^2$, y = 2. **Rpta.** $\frac{244}{21}$

12) Calcular $\iint_D \frac{2y-1}{x^2+1}dx\,dy$, donde D está limitada por $y = 4 - x^2$, y = 0.

Rpta. $4\operatorname{arctg}2 - \frac{80}{3}$

13) Calcular $\iint_D \frac{\operatorname{sen} x.dx\,dy}{4-\operatorname{sen}^2 y}$, donde $D = \{(x,y)/0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le y \le x\}$

Rpta. $\frac{1}{4}\ln 3$

14) Calcular $\iint_D \cos(x+y)dxdy$, donde D es un trapezoide limitado mediante segmentos de rectas de los puntos $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\pi,\frac{\pi}{2})$, $(-\pi,\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2},0)$.

Rpta. $\frac{\pi}{2}$

15) Calcular $\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dxdy$, donde D es un triángulo de vértices en los puntos O(0,0), A(10,1) y B(1,1). **Rpta.** 6

16) Calcular $\iint_D e^{x+y}dxdy$, donde D es el interior del triángulo de vértice (-7,-6), (5,3), (0,0).

Rpta. $\frac{3e^8}{56} + \frac{3e^{-13}}{91} + \frac{41}{24}$

17) Calcular $\iint_D y\ln x dxdy$, si la región D esta limitado por las líneas xy = 1, $y = \sqrt{x}$, x = 2.

Rpta. $\frac{5(2\ln 2 - 1)}{8}$

18) Calcular $\iint_D (2xy - 3x^2)dxdy$, donde D es limitado por $y = \ln|x|$, y = 0, y = -2.

19) Calcular $\iint_D (x+y)dA$, donde D es la región limitada por $xy = a^2$, 2(x + y) = 5a.

Rpta. $\frac{9a^3}{8}$

20) Calcular $\iint_D (3x+y)dxdy$, si la región D se define por las desigualdades $x^2+y^2 \le 9$, $y \ge \frac{2x}{3}+3$. **Rpta.** $-\frac{432}{169}$

21) Calcular $\iint_D \left||x|-|y|-1\right|dxdy$, donde $D = D_1 \cup D_2$ siendo $D_1 = [0,3]x[-2,2]$ y D_2 el triángulo formado por las rectas x = 0, y = 2, y = 8 - 2x. **Rpta.** $\frac{142}{3}$

22) Calcular la integral doble $\iint_D \text{sig}(x^2-y^2+2)dxdy$, donde D es la región limitada por $x^2+y^2 \le 4$. **Rpta.** $\frac{4\pi}{3}+8\ln(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$

23) Calcular $\iint_D \sqrt{[\![y-x^2]\!]}\,dx\,dy$, donde D: $x^2 \le y \le 4$

Rpta. $\frac{4}{3}(4-3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

24) Demuéstrese que sí f(x,y) = g(x) h(y) entonces

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = (\int_a^b g(x)dx)(\int_c^d h(y)dy)$$

25) Hallar el valor de $\iint_D x^2y\sqrt[3]{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, donde D es la región limitada por las líneas x ≥ 0, y ≥ 0, $x^3+y^3 \le 1$. **Rpta.** $\frac{\pi}{27\sqrt{3}}$

26) Calcular $\iint_D x^2y^2(a^3-x^3-y^3)^{1/2}dxdy$, donde D es la región limitada por x ≥ 0, y ≥ 0, $x^3+y^3 \le a^3$. **Rpta.** $\frac{4a^{15/2}}{135}$

27) Calcular $\iint_D y\,dxdy$, donde D es el recinto dado por: $x^2+y^2-2y\leq 0$.

Rpta. π

28) Calcular $\iint_D xy^2\,dxdy$, donde D es el recinto dado por $x^2+y^2-2x\leq 0$.

Rpta. $\frac{\pi}{8}$

29) Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\int_1^2\int_x^{2x} dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

b) $\int_0^1\int_0^x y\operatorname{sen}\pi x\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi^2-4}{2\pi^3}$

c) $\int_1^2\int_0^y e^{x+y}dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{e^4-3e^2+2e}{2}$

d) $\int_0^{\pi/2}\int_{-y}^{y}\operatorname{sen}x.dx\,dy$ **Rpta.** 0

e) $\int_{-1}^1\int_0^{|x|} dy\,dx$ **Rpta.** 1

f) $\int_0^1\int_1^{e^x}(x+y)dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{e^2-2}{2}$

g) $\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dxdy$ **Rpta.** $\frac{e^{-3}-1}{3}+\frac{e^2-1}{2}+\frac{1}{e}$

h) $\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{3e^{x^2}} x\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{3}{2}e^4-\frac{25}{6}$

i) $\int_2^4\int_x^{x^2}\frac{1}{x}\sec h^2(\frac{y}{x})\,dy\,dx$ **Rpta.** $\ln(\frac{\csc h4}{\csc h2})-2\operatorname{tgh}1$

j) $\int_0^\pi\int_0^{1+\cos x} y^2\operatorname{sen}x\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{4}{3}$

k) $\int_{0}^{\pi/2}\int_{\cos x}^{1} y^4\,dy\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{15\pi-16}{150}$

l) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{3\cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y\,dx\,dy$ **Rpta.** $\dfrac{12}{5}$

30) Calcular la integral doble $\iint_D x\sqrt{y}\,dxdy$, donde D es la región encerrada por $y=x^2$, $y=-x^2+1$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{15\sqrt{2}}$

31) Calcular $\iint_D (2x+2y)dxdy$, donde D es la región acotada por las curvas $y=x^3$, $x=y^2$.

Rpta. $\dfrac{53}{70}$

32) Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{2}{3}a^3$

b) $\int_{1}^{e}\int_{x}^{x^2} \ln y\,dy\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{4e^3+9e^2-7}{36}$

33) Calcular $\iint_D (1+x)\operatorname{sen} y\,dxdy$, donde D es el trapezoide de vértice (0,0), (1,0), (1,2), (0,1).

Rpta. $\dfrac{3}{2}+\cos 1+\operatorname{sen} 1-\cos 2-2\operatorname{sen} 2$

34) Calcular $\iint_D e^{x+y}dxdy$, donde $D=\{(x,y)\,/\,|x|+|y|\le 1\}$

Rpta. $e-\dfrac{1}{e}$

35) Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{y}(x^2y+xy^2)dy\,dx$ **Rpta.** $\dfrac{1}{3}$

b) $\int_0^1\int_0^{1-x^2}(x+y)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{31}{60}$

c) $\int_1^2\int_0^{\sqrt{y}} yx^2\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{16\sqrt{2}-2}{21}$

d) $\int_0^2\int_0^{x^2} xy^2\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{32}{3}$

e) $\int_0^1\int_0^x y\,\text{sen}(\pi x)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi^2-4}{2\pi^3}$

f) $\int_1^2\int_0^y e^{x+y}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{e^4-3e^2+2e}{2}$

g) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} 3y\,dy\,dx$ **Rpta.** a^3

h) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\text{sen}\,x}(1+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}})\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi^2+8}{8}$

36) Calcular $\iint_D x\cos(x+y)dxdy$, donde D es el triángulo cuyos vértices son (0,0), (π,0), (π,π).

Rpta. $-\frac{3\pi}{2}$

37) Calcular $\iint_D \cos(x+y)dx\,dy$, sobre el trapezoide definido al conectar mediante rectas los puntos $(\pm\pi,\frac{\pi}{2})$ y $(\pm\frac{\pi}{2},0)$. **Rpta.** 0

38) Calcular $\iint_D (x^2+y)dx\,dy$, donde D es un dominio acotado por las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$. **Rpta.** $\frac{33}{140}$

39) Calcular la integral doble $\iint_D |x+y|\,dx\,dy$, donde D: [-1,1]x[-1,1].

40) Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$, donde D: $|x| \le 1$, $0 \le y \le 2$.

41) Calcular la integral $\iint_R y^3 e^{xy}\,dx\,dy$, donde R esta limitada por $x = y^2$, $x = 4y^2$, x = 4.

42) Evaluar $\iint_D |x^2+y^2|\,dx\,dy$ donde D: $0 \le x$, $0 \le y$, $x + y = 1$.

43) Calcular las siguientes integrales:

a) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde la región D esta limitada por las rectas y = x, x + y = 2a, x = 0. **Rpta.** $\frac{4a^4}{3}$

b) $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$, donde la región D esta limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ **Rpta.** $\frac{9}{20}$

c) $\iint_D (4-y)\,dx\,dy$, donde la región D esta limitada por las curvas $x^2 = 4y$, y = 1, x = 0, (x > 0). **Rpta.** $\frac{68}{15}$

d) $\iint_D \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, donde la región D esta limitada por las curvas $y^2 - x^2 = a^2$, x = a, x = 0, y = 0, (y > 0). **Rpta.** $\frac{4a^3}{3}$

44) Calcular la integral $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, donde la región D esta limitada por las curvas $y = e^x$, x = 0, y = 2. **Rpta.** e

45) Calcular la integral $\iint\limits_{D} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde la región D esta limitada por las curvas y = x tg x, y = x. **Rpta.** $\frac{\pi^2}{32}$

46) Calcular la integral $\iint\limits_{D} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, donde D es el trapecio con vértice A(1,1), B(5,1), C(10,2), D(2,2). **Rpta.** $\frac{112}{9}$

47) Calcular la integral $\iint\limits_{D} y\,dx\,dy$, donde D es un triángulo con vértices O(0,0), A(1,1), B(0,1).

Rpta. $\frac{1}{3}$

48) Calcular el área limitada por las líneas $y^2 = 4x - x^2$, $y^2 = 2x$ (fuera de la parábola)

Rpta. $(2\pi - \frac{16}{3})u^2$

49) Calcular el área de la región limitada por las líneas $x = y^2 - 2y$, x + y = 0

Rpta. $\frac{1}{6}u^2$

50) Encontrar el área de la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $x^2 = 4y$, $x^2 = 8 - 4y$. **Rpta.** $\frac{16}{3}u^2$

51) Hallar el área de la región limitada por las líneas $y^2 = 4(1-x)$, $x^2 + y^2 = 4$ (fuera de la parábola). **Rpta.** $(2\pi - \frac{8}{3})u^2$

52) Hallar el área de la región encerrada por las gráficas de $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$, x + y = 3, y = 3. **Rpta.** $(4\sqrt{3} - \frac{53}{12})u^2$

53) **Hallar el área de la región acotada por las líneas**

a) $y = x^2 + 2,\ y = x + 4$ **Rpta.** $\frac{9}{2}u^2$

b) $y = x^2,\ y = x + 2$ **Rpta.** $\frac{9}{2}u^2$

c) $x = y^2,\ x = 2y - y^2$ **Rpta.** $\frac{1}{3}u^2$

d) $y^2 = x,\ x - y = 2$ **Rpta.** $\frac{9}{2}u^2$

e) $y = |x|,\ 4y = 4x^2 + 1$ **Rpta.** $\frac{1}{12}u^2$

f) $x = y - y^2,\ x + y = 0$ **Rpta.** $\frac{4}{3}u^2$

g) $x^2 = 4y,\ 2y - x - 4 = 0$ **Rpta.** $9u^2$

h) $y = x^3 - 2x,\ y = 6x - x^3$ **Rpta.** $16u^2$

i) $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 - 4y = 0$ **Rpta.** $(\pi - \frac{4}{3})u^2$

j) $y = x^2 - 9,\ y = 9 - x^2$ **Rpta.** $72\ u^2$

k) $y = 4x - x^2,\ y = x$ **Rpta.** $\frac{9}{2}u^2$

l) $y^2 = 9 + x,\ y^2 = 9 - 3x$ **Rpta.** $36\ u^2$

ll) $y + 12 = x^2,\ y = |x|$ **Rpta.** $68\ u^2$

m) $y = e^x,\ y = \ln x, x = 1, x = 2$ **Rpta.** $(e^2 - 2\ln 2 + 1 - e)u^2$

n) $y = e^x,\ y = -x^2, x = -2,\ x = 2$ **Rpta.** $(\frac{16}{3} + e^2 - e^{-2})u^2$

54) Hallar el área de la región plana limitada por la parte de arriba por $x^2+y^2=2$, y en la parte de abajo por $y=x^2$. **Rpta.** $(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3})u^2$

55) Calcular el área de la región del plano XY, acotado por las gráficas de las curvas $x=y^3$, $x+y=2$, $y=0$. **Rpta.** $\frac{5}{4}u^2$

56) Por medio de la integral doble, hallar el área de la región D comprendida entre las curvas $y^2=4-x$ y $y^2=4-4x$. **Rpta.** $8\ u^2$

57) Por integrales dobles, calcular el área de la región D acotado por las curvas $y=x^4$, $y=7-6x^2$. **Rpta.** $\frac{48}{5}u^2$

58) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$. **Rpta.** $\frac{88}{105}u^2$

59) Calcular el Volumen del sólido cuya base de la región en el plano XY acotada por las curvas $y=4-x^2$, $y=3x$ y cuyo techo es el plano $z=x+4$.

Rpta. $\frac{625}{12}$

60) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide hiperbólico $z=x^2-y^2$ y los planos $z=0$, $x=3$. **Rpta.** $V=27u^3$

61) Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies del paraboloide hiperbólico $z=xy$, el cilindro $y=\sqrt{x}$ y los planos $x+y=2$, $y=0$, $z=0$.

Rpta. $V=\frac{3}{8}u^3$

62) Hallar el volumen del sólido en el primer octante limitado por las superficies $x+z^2=1$, $x=y$, $x=y^2$. **Rpta.** $\frac{15\pi-32}{120}u^3$

63) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2+4y^2+z=1$, $z=0$.

Rpta. $\frac{\pi}{4}u^3$

64) Hallar el volumen del sólido indicado.

a) El tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano $z = 6 - 2x - 3y$.

Rpta. $6u^3$

b) El tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $3x + 4y + z - 2 = 0$

Rpta. $20u^3$

c) El sólido del 1er octante limitado por la superficie $9x^2+4y^2=30$ y el plano $9x + 4y - 6z = 0$. **Rpta.** $10\ u^3$

65) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies.

a) $z=4-y^2$, $y + z = 2$, $x = 0$, $x = 2$ **Rpta.** $9u^3$

b) $z = y$, $z=x^2+y^2$. **Rpta.** $\frac{\pi}{32}$

66) Hallar el volumen encerrado entre las superficies $x^2+3y^2-z=0$, $4-y^2=z$

Rpta. $4\pi\ u^3$

67) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $z=x^2$, $z=4-x^2$, $z + 2y - 4 = 0$, $y = 0$. **Rpta.** $\frac{27\sqrt{2}}{10}$

68) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $y = 2x$, $y=2x^2$, $x + y + z = 3$, $x + y + z = 4$. **Rpta.** $\frac{1}{3}u^3$

69) Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z = 6$. **Rpta.** $18u^3$

70) Hallar el volumen de la región limitado por el cilindro $x^2 + z = 1$ y por los planos $x + y = 1$, $y = 0$ y $z = 0$. **Rpta.** $\frac{4}{3}u^3$

71) Hallar el volumen del sólido limitado por la gráfica de $z = 1 - x^2 - 4y^2$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + 4y^2 - 4z = 1$. **Rpta.** $\frac{5\pi}{16}u^3$

72) Hallar el volumen del sólido limitado arriba por $y^2 = a^2 - az$ y abajo por $z = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 = a^2$. **Rpta.** $\frac{3}{4}\pi a^3 u^3$

73) Hallar el volumen del espacio comprendido debajo del plano $x + y + z = 8$, arriba de $z = 0$ y entre los planos $x + 2y = 8$, $x - 2y = 8$. **Rpta.** $170\frac{2}{3}u^3$

74) Hallar el volumen del sólido en el primer octante limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos coordenados. **Rpta.** $2\pi u^3$

75) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide $2x^2 + 4y^2 = 4 - z$ e inferiormente por el paraboloide $2x^2 + 4y^2 = 4 + 4z$. **Rpta.** $\frac{5\pi}{\sqrt{2}}$

76) Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de $z = 4 - y^2$ arriba de $z = 0$ y dentro de las superficies cilíndricas $y^2 - 2x = 0$, $y^2 = 8 - 2x$. **Rpta.** $\frac{512}{15}u^3$

77) Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de $z = 2x + a$, arriba de $z = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 = 2ax$. **Rpta.** $3\pi a^3 u^3$

78) El plano XY y la superficie $y^2 = 16 - 4z$ cortan al cilindro $x^2 + y^2 = 4x$. Hallar el volumen de la región limitada por estas superficies. **Rpta.** $15\pi\, u^3$

79) Calcular el volumen de la región sobre el plano XY dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y debajo de paraboloide $2z + x^2 + y^2 = 16$. **Rpta.** $28\pi\, u^3$

80) Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de $4z = 16 - 4x^2 - y^2$ arriba de $z = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 = 2x$. **Rpta.** $\dfrac{43}{16}\pi\, u^3$

81) Hallar el volumen del sólido limitado por $x + y^2 = az$ y $x^2 + y^2 = 2ax$, en el primer octante. **Rpta.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$

82) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide $2x^2 + 4^2 = 4 - z$ e inferiormente por el paraboloide $2x^2 + 4y^2 = 4 + 4z$. **Rpta.** $\dfrac{5\pi}{\sqrt{2}}$

83) Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\, dx\, dy$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{4 - \operatorname{sen}^2 y}\, dy\, dx$ **Rpta.** $\dfrac{\ln 3}{2}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{e^x}^{e} \frac{1+x}{e^x}\, dy\, dx$ **Rpta.** $\dfrac{4e-9}{2}$

d) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\ln y}^2 \frac{x}{y}\, dx\, dy$ **Rpta.** $\dfrac{8}{3}$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_x^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx$ **Rpta.** 1

f) $\int_0^1\int_y^1 ye^{x^3}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{e-1}{6}$

g) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}(\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \operatorname{tg} x^2)\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{\ln 2}{4}$

h) $\int_1^2\int_0^{\ln x}(x-1)\sqrt{1-e^{2y}}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}[2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1})-\frac{1}{6}(5^{3/2}-2^{3/2})]$

i) $\int_0^1(\int_y^1\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx)dy$ **Rpta.** $1-\cos 1$

84) Cambiar el orden de integración:

a) $\int_0^1(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx)dy$

b) $\int_{-1}^1(\int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)dx)dy$

c) $\int_{-1}^1(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy)dx$

d) $\int_0^4(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy)$

e) $\int_0^2(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy)dx$

f) $\int_0^a(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy)dx$

g) $\int_1^2(\int_x^{2x} f(x,y)dy)dx$

h) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx)dy$

i) $\int_0^r(\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy)dx$

j) $\int_{-1}^6(\int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy)dx$

k) $\int_{-2}^2(\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy)dx$

l) $\int_0^R(\int_0^x f(x,y)dy)dx$

85) Representar en una sola integral iterada a la suma de las siguientes integrales.

$\int_{-9}^{-1}\int_{-2}^{\frac{y+5}{2}} x\,dx\,dy+\int_{e^{-2}}^{e^2}\int_{\ln y}^{2} x\,dx\,dy+\int_{-1}^{e}\int_{-2}^{2} x\,dx\,dy$ **Rpta.** $\int_{-2}^{2}\int_{2x-5}^{e^x} x\,dy\,dx$

86) Representar en una sola integral iterada a la suma de las integrales

$$\int_{-6}^{2/3}\int_{\frac{y^2}{4}+y-1}^{-y/3} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{2/3}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}+y-1}^{2} f(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\int_{2}^{6}\int_{-2-\sqrt{16-(x-2)^2}}^{-2+\sqrt{16-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{-6}^{2/3}\int_{-y/3}^{-2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Rpta. $\displaystyle\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2+4y-4}{4}}^{2+\sqrt{16-(y+2)^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

87) Representar en una sola integral iterada a la suma de las integrales.

$$\int_{0}^{a}\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a}(x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy+\int_{0}^{a}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy\ ,\quad a>0$$

Rpta. $\displaystyle\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)^{1/2}\,dy\,dx$

88) Representar en una sola integral iterada a la suma de las integrales.

$$\int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}}\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$ **Rpta.** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}}\int_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

89) Demostrar que: $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{\sqrt{x}}^{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx+\int_{2}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dy\,dx=\frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$

90) Calcular a siguiente integral doble. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y}(x^2+y^2)\,dx\,dy+\int_{1}^{2}\int_{0}^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$

Rpta. $\dfrac{4}{3}$

91) Calcular la siguiente integral doble

$$\int_{1}^{2}\int_{x}^{x^3} e^{x}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\,dx+\int_{2}^{8}\int_{x}^{8} e^{x}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\,dx$$ **Rpta.** $4e^{8}+\dfrac{2e}{3}$

92) Cambiar el orden de integración escribiendo la expresión dada en forma de una integral iterada de segundo orden.

a) $\int_0^1 (\int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx)dy + \int_1^3 (\int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx)dy$

b) $\int_0^1 (\int_0^x f(x,y)dy)dx + \int_1^2 (\int_0^{2-x} f(x,y)dy)dx$

c) $\int_0^1 (\int_0^{x^2} f(x,y)dy)dx + \int_1^3 (\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy)dx$

d) $\int_{-2}^2 (\int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy)dx + \int_2^{\frac{10}{3}} (\int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy)dx$

e) $\int_3^7 (\int_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)dy)dx + \int_7^9 (\int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)dy)dx$

f) $\int_0^1 (\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)dy)dx + \int_1^2 (\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy)dx$

93) Hallar el valor de $\int_0^1 (\int_0^y (x^2+y^2)dx)dy + \int_1^2 (\int_0^{2-y} (x^2+y^2)dx)dy$.

94) Sea $\int_1^4 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, calcular en función M, el valor de:

$\int_0^1 \int_{1+y}^2 \frac{\sec x}{x} dx\,dy + \int_0^1 \int_2^4 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\,dy + \int_1^3 (\int_{y+1}^3 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx)dy$.

95) Calcular $\int_1^2 (\int_1^y \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx)dy + \int_2^4 (\int_{\frac{y}{2}}^2 \frac{\ln x}{x} dx)dy$.

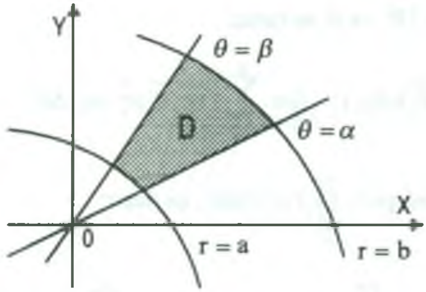
96) Calcular $\int_{-1}^0 (\int_{-\sqrt{9+9x}}^{\sqrt{9+9x}} y^2 dy)dx + \int_0^{15} (\int_{x-3}^{\sqrt{9+9x}} y^2 dy)dx$

97) Calcular la integral $\iint_R y^3 e^{xy} dxdy$, donde R esta limitada por $x = y^2$, $x = 4y^2$.

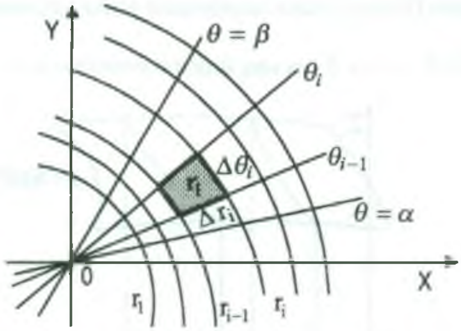
5.12 Integrales Dobles Mediante Coordenadas Polares.

En ésta sección veremos cómo se realiza el cambio de variables de una función f(x,y) de las coordenadas (x,y) a las coordenadas polares (r,θ). La transformación de las cartesianas a las polares se ha estudiado en el libro de Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencia e Ingeniería, aquí veremos su efecto sobre las integrales dobles.

Consideremos una región $D \subset R^2$ acotada por $\alpha \le \theta \le \beta$ y $a \le r \le b$; es decir:



Trazando rectas a través del polo y círculos con centro en el polo, se obtiene una partición P de la región D, que viene a ser una red de "n" regiones llamadas rectángulos curveados.



A la norma de la partición representaremos por $|P|$ y es la longitud de la diagonal más grande de los rectángulos curveados.

El área del i-ésimo rectángulo curveado r_i es igual a la diferencia de las áreas de los sectores circulares, es decir:

$$A(r_i) = \frac{r_i^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{r_{i-1}^2}{2}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}) = \overline{r_1}.\Delta r_i.\Delta\theta_i$$

donde $\overline{r_i} = \dfrac{r_i + r_{i-1}}{2}$, $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

Consideremos una función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ continua sobre D y sea $(\overline{r_i}, \overline{\theta_i})$ un punto en la i-ésima sub-región con $\theta_{i-1} \le \overline{\theta_i} \le \theta_i$, luego formando la suma de Riemann se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) A(r_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) \overline{r_i} . \Delta r_i . \Delta \theta_i$$

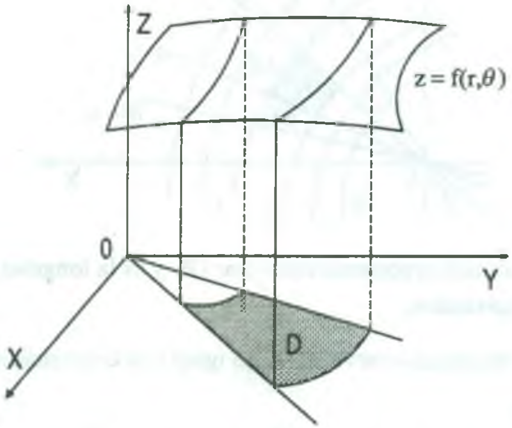
tomando límite cuando $|P| \to 0$ se tiene:

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) A(r_i) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) \overline{r_i} . \Delta r_i . \Delta \theta_i$$

a este límite denotaremos por $\iint_D f(r, \theta) dA$, es decir:

$$\iint_D f(r,\theta) dA = \iint_D f(r,\theta) r\, dr\, d\theta = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}, \overline{\theta_i}) \overline{r_i} . \Delta r_i . \Delta \theta_i$$

Observación.- Sobre la región D en el plano coordenado polar situaremos una superficie z = f(r,θ), donde $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ es una función continua sobre D con $f(r,\theta) \ge 0$, en D.



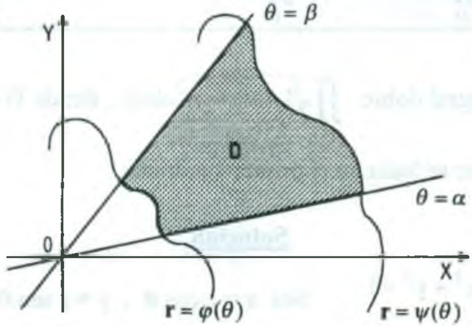
Luego el sólido comprendido en la región D y la superficie z = f(r,θ) tiene un volumen V dado por:

$$\boxed{V(s) = \iint_D f(r, \theta) r\, dr\, d\theta}$$

5.13 Integrales Iteradas en Coordenadas Polares

Consideremos dos casos para el cálculo de las integrales mediante coordenadas polares.

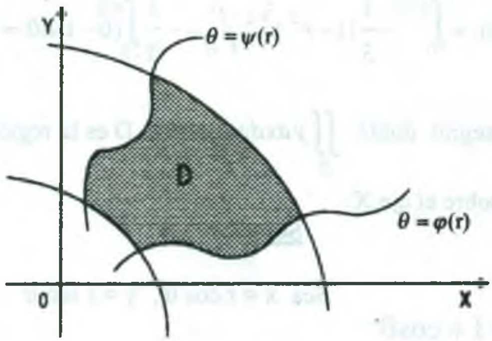
1er Caso.- Consideremos la región polar D dado por: $D=\{(r,\theta)/\ \alpha \leq \theta \leq \beta \wedge \varphi(\theta) \leq r \leq \psi(\theta)\}$ y sea $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, una función continua sobre D.



Luego la integral en coordenadas polares es:

$$\boxed{\iint_D f(r,\theta)dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(r,\theta)r\,dr\right)d\theta}$$

2do Caso.- Consideremos la región polar D dado por: $D=\{(r,\theta)\ /\ a \leq r \leq b \wedge \varphi(r) \leq \theta \leq \psi(r)\}$ y sea $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, una función continua sobre D.



Luego la integral doble en coordenadas polares es:

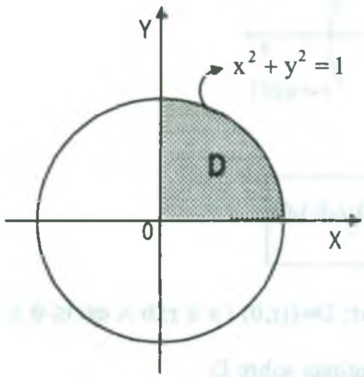
$$\boxed{\iint_D f(r,\theta)dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi(r)}^{\psi(r)} f(r,\theta)r\,d\theta\right)dr}$$

Observación.- Para pasar de una integral doble en coordenadas cartesianas a una integral doble en coordenadas polares se tiene la relación:

$x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, por lo tanto:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,drd\theta}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, donde D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2 \le 1$, que se halla en el primer cuadrante.



Solución

Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

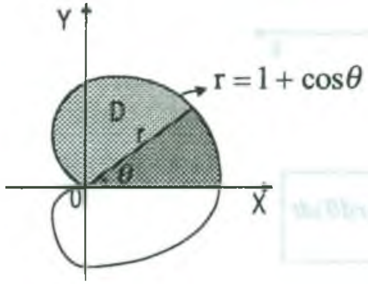
$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\;r\,dr)d\theta$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} \Big/_0^1 = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(0-1)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint_D y\,dxdy$, donde D es la región encerrada por la cardiode $r = 1+\cos\theta$, sobre el eje X.

Solución



Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1+\cos\theta \end{cases}$$

Ahora calculamos la integral doble, mediante coordenadas polares.

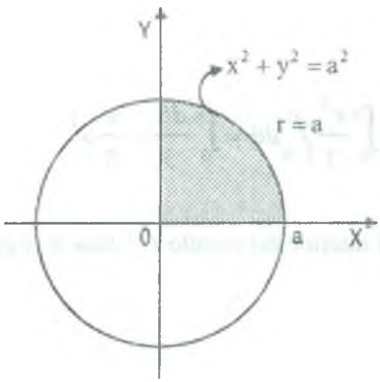
$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_D r\,\text{sen}\,\theta . r\,dr . d\theta = \iint_D \text{sen}\,\theta . r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{1+\cos\theta} r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr \right) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta \Big/_0^{1+\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\frac{(1+\cos\theta)^4}{12} \Big/_0^{\pi} = -\frac{1}{12}[0-16] = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo.- Calcular $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, donde D es la región en el primer cuadrante acotado por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados.

Solución



Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$$

$$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le a \end{cases}$$

Luego cambiando a coordenadas polares mediante la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ se tiene:

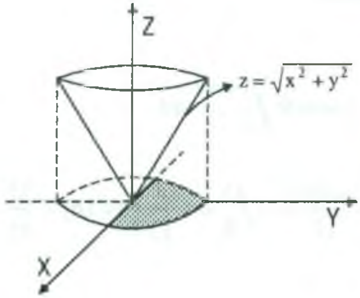
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_D e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr \right) d\theta$$

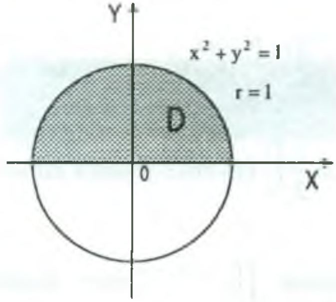
$$= \int_0^{\pi/2} -\frac{e^{-r^2}}{2} \Big/_0^a d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1)\,d\theta$$

$$= -\frac{e^{-a^2} - 1}{2}\theta \Big/_0^{\pi/2} = -\frac{e^{-a^2} - 1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}(e^{-a^2} - 1) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

Ejemplo.- Hallar el volumen de la región en el espacio limitado superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el eje X.

Solución





Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = r$

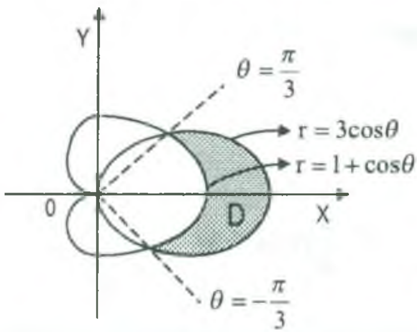
$$D: \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D0} r.r\,dr.d\theta = \int_2^{\pi}(\int_0^1 r^2 dr)d\theta = \int_0^{\pi}\frac{r^3}{3}\Big/_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{3} = \frac{\pi}{3}u^3$$

Ejemplo.- Hallar el área de la región plana D ubicada en el interior del círculo $r = 3\cos\theta$ y en el exterior de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Solución

Graficando la circunferencia, la cardioide.



Calculando las intersecciones para obtener los limites para θ

$$\begin{cases} r = 3\cos\theta \\ r = 1+\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3\cos\theta = 1+\cos\theta \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3} \end{matrix}$$

$$A(D) = \iint\limits_D dx\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}(\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} r\,dr)d\theta =$$

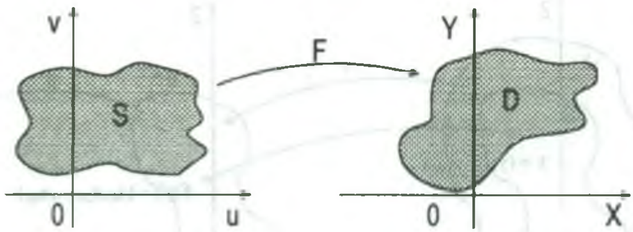
$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{r^2}{2}\Big/_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[9\cos^2\theta - (1+\cos\theta)^2]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(4(1+\cos 2\theta) - 2\cos\theta - 1)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(4\cos 2\theta - 2\cos\theta + 3)d\theta = \frac{1}{2}(2\,\text{sen}\,2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + 3\theta)\Big/_{-\pi/3}^{\pi/3} = \pi\, u^2$$

8.14 Jacobiano de una función de n Variables.

a) Definición.- Sea $F: S \subset R^2 \longrightarrow D \subset R^2$ una función (transformación) continuamente diferenciable dado por F(u,v) = (x,y), donde x=x(u,v), y = y(u,v).



El Jacobiano de F es dado por:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo.- La función $F: R^2 \longrightarrow R$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dado por F(r,θ) = (x,y) donde x = r cos θ, y = r sen θ entonces el Jacobiano de F es:

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

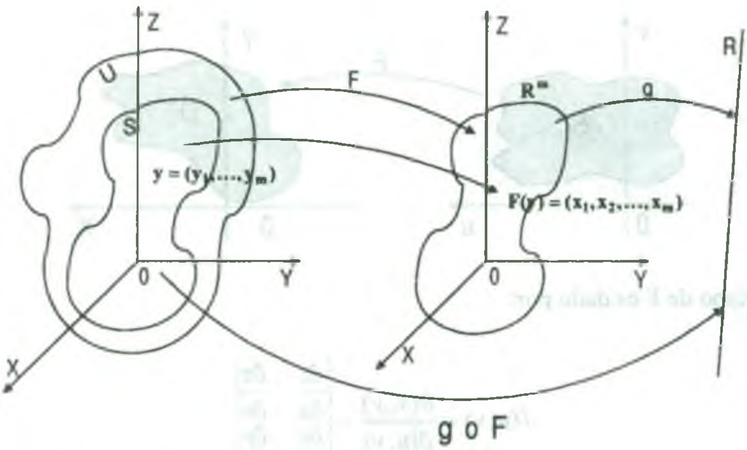
ahora daremos la definición en forma más general.

b) Definición.- Consideremos una función g definida en un conjunto cerrado D, es decir: $g: D \subset R^m \longrightarrow R$.

Supongamos que $F: U \subset R^m \longrightarrow R^m$ es una función continuamente diferenciable y uno a uno en un conjunto abierto U.

Si S es un conjunto cerrado contenido en U tal que g es la imagen de F en S; es decir:

$$F(s) = D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m / (x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(y_1, y_2, \ldots, y_m) = = (F_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), F_2(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots, F_m(y_1, y_2, \ldots, y_m))\}$$



Como las funciones coordenadas son $x_1 = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_m), \ldots\ldots, x_m = F_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)$

entonces el Jacobiano de F es:

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \frac{\partial x_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Ejemplo.- Sea $F: R^3 \longrightarrow R^3$ una transformación definida por $F(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,x_3)$ donde $x_1 = 2y_1 - 3y_2$, $y_2 = 3y_2$, $x_3 = y_2 - y_3$, entonces el Jacobiano de F es:

$$J(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

5.15 Cambio de Variables en las Integrales Dobles

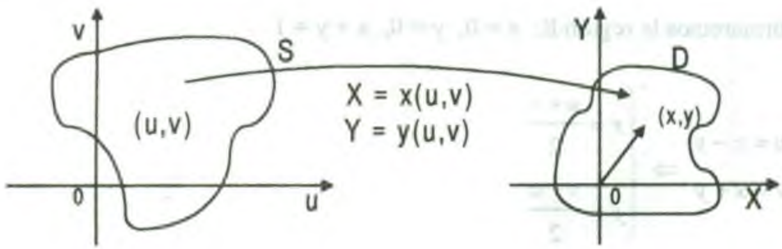
En las integrales ordinarias el método de sustitución nos permitía calcular integrales complicadas, transformándola en otras más sencillas, es decir:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t)).g'(t)dt}$$

En forma similar existe un método para las integrales dobles, es decir, que se transforma una integral doble de la forma $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, extendida a una región D del plano XY en otra integral doble $\iint\limits_S F(u,v)dudv$ extendida a una región S del plano uv.

Para esto se verá la relación entre las regiones D y S y los integrandos f(x,y) y F(u,v).

El método de sustitución en las integrales dobles es más laborioso que en las integrales simples, puesto que en lugar de una función ahora se tiene dos funciones X e Y que relacionan a x,y con u,v en la forma siguiente X = x(u,v) , Y = y (u,v).



Geométricamente, puede considerarse que las dos ecuaciones definen una "aplicación" que hace corresponder a un punto (u,v) del plano uv, el punto imagen (x,y) del plano XY y que la aplicación puede expresarse mediante una función vectorial.

En el plano trazamos el radio vector $\vec{r}$ que une el origen (0,0) con el punto (x,y) de la región D, el vector $\vec{r}$ depende de u y v, y se puede considerar como una función vectorial de dos variables definida por la ecuación:

$$\boxed{\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} \quad \text{Si } (u,v) \in S}$$

esta ecuación se llama ecuación vectorial de la aplicación. Como (u,v) recorre puntos de S, el vector $\vec{r}(u,v)$ describe puntos de D.

La fórmula para la transformación de integrales dobles puede escribirse así.

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv}$$

donde el factor J(u,v) es el Jacobiano de la aplicación.

Ejemplo.- Sea R la región triangular del plano XY limitado por: x = 0, y = 0, x + y = 1, encontrar el valor de $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$

Solución

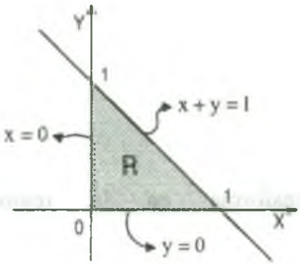
Transformaremos la región R: x = 0, y = 0, x + y = 1

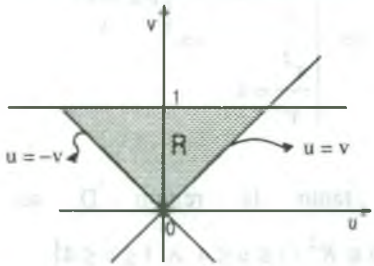
$$\text{Sea } \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

para $x = 0 = \frac{u+v}{2} \Rightarrow v = -u$; $y = 0 = \frac{v-u}{2} \Rightarrow v = u$

$x + y = v = 1 \Rightarrow v = 1$

D = {(u,v) / v = -u , v = u, v = 1}





Calculando el Jacobiano $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ se tiene

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy = \iint\limits_R e^{\frac{u}{v}} |J(u,v)|\,du\,dv = \frac{1}{2}\iint\limits_D e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du)dv = \frac{1}{2}\int_0^1 v\,e^{\frac{u}{v}} \Big/_{-v}^{v}\,dv$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2}\int_0^1 v\,dv = \frac{e-e^{-1}}{4}$$

Ejemplo.- Calcular la integral doble $\iint\limits_D \frac{y^2 \cos xy}{x}\,dA$, donde D es la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$, $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$

Solución

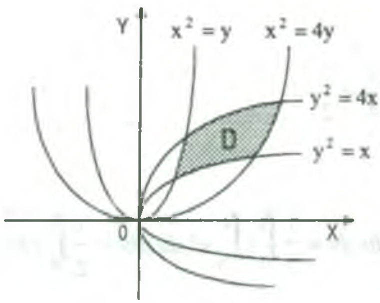
Transformando la región D: $y = x^2$, $x = y^2$, $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ para esto hacemos el cambio de variable siguiente:

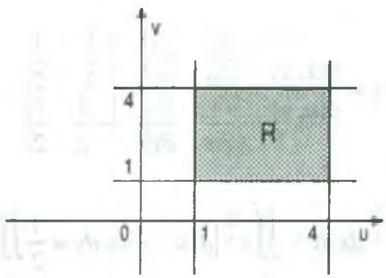
$$\begin{cases} x = y^2 \\ 4x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} = 1 \\ \dfrac{y^2}{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 4y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 1 \\ \dfrac{x^2}{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

por lo tanto la región D se transforma en la región R, donde $R = \{(u,v) \in R^2 / 1 \le u \le 4 \ \wedge \ 1 \le v \le 4\}$

Graficando las regiones se tiene:





Ahora calculamos el Jacobiano

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{1/3} v^{2/3} \\ y = u^{2/3} v^{1/3} \end{cases} \Rightarrow xy = uv$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \dfrac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \\ \dfrac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \dfrac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\iint_D \frac{y^2 \cos xy}{x} dA = \iint_R u \cos uv |J(u,v)| du\,dv = \frac{1}{3}\iint_R u \cos uv\, du\,dv = \frac{1}{3}\int_1^4 (\int_1^4 u \cos uv\, dv) du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4 \operatorname{sen} uv \Big/_1^4 du = \frac{1}{3}\int_1^4 (\operatorname{sen} 4u - \operatorname{sen} u) du = \frac{1}{3}\left[-\frac{\cos 4u}{4} + \cos u\right] \Big/_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\cos 4 - \frac{\cos 16}{4}) - (-\frac{\cos 4}{4} + \cos 1)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{5}{4}\cos 4 - \frac{\cos 16}{4} - \cos 1\right]$$

$$= \frac{1}{12}[5\cos 4 - \cos 16 - 4\cos 1]$$

5.16 Aplicaciones de la Integral Doble.

1ro. Centro de Masa de una Lámina.-

Consideremos una lámina que tiene la forma de una región cerrada R en el plano XY, y sea ρ la medida de la densidad de área de la lámina en cualquier punto (x,y) de R, donde $\rho\colon R \subset R^2 \longrightarrow R$ es una función continua sobre R.

Entonces la masa total de la lámina R está dado por:

$$\boxed{M = \iint_R \rho(x,y) dA}$$

i) El momento de masa de una lámina R con respecto al eje X es:

$$\boxed{M_x = \iint_R y\rho(x,y) dA}$$

ii) El momento de masa de una lámina R con respecto al eje Y es:

$$\boxed{M_y = \iint_R x\rho(x,y) dA}$$

Luego el centro de masa de la lámina es el punto $P(\bar{x},\bar{y})$ donde:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_R x\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA} \quad ; \quad \bar{y}=\frac{\iint_R y\rho(x,y)dA}{\iint_R \rho(x,y)dA}$$

2do. Momento de Inercia de una Lámina.-

Consideremos una partícula de masa m que se encuentra a una distancia d unidades de una recta L, entonces llamaremos momento de inercia de la partícula respecto a L al número.

$$I=m\,d^2$$

El momento de masa de una partícula, usualmente se le llama el primer momento y el momento de inercia el segundo momento de la partícula respecto a L.

Consideremos un sistema de n partículas de masas $m_1,m_2,...,m_n$ situados a distancias $d_1,d_2,...,d_n$ respectivamente desde una recta L, tiene un momento de inercia I que se define como la suma de los momentos de las partículas individuales.

$$\boxed{I=\sum_{i=1}^{n} m_i d_i}$$

El momento de inercia de una lámina que tiene la forma de una región plana S y una función densidad ρ: $S\subset R^2 \longrightarrow R$ continua, puede encontrarse respecto a cualquier recta L.

En particular, los momentos de inercia de la lámina respecto a los ejes X e Y están dados por:

$$\boxed{I_x=\iint_S y^2\rho(x,y)dA \quad , \quad I_y=\iint_S x^2\rho(x,y)dA}$$

El momento polar de inercia alrededor del origen O está dado por:

$$\boxed{I_0=I_x+I_y=\iint_S (x^2+y^2)\rho(x,y)dA}$$

Observación.- Consideremos en el plano XY una lámina S que tiene una densidad continua $\rho: S \subset R^2 \longrightarrow R$, entonces los primeros momentos M_1, M_2 de S respecto a las rectas x = a, y = b, están dadas respectivamente por:

$$\boxed{M_1^a = \iint_S (x-a)\rho(x,y)dA \quad ; \quad M_2^b = \iint_S (y-b)\rho(x,y)dA}$$

Observación.- Los momentos de inercia de la lámina S respecto a las rectas $L_1: x = a,\ z = 0$; $L_2: y = b,\ z = 0$; $L_3: x = a,\ y = b$ son respectivamente.

$$I_1^a = \iint_S (x-a)^2 \rho(x,y)dA \quad ; \quad I_2^b = \iint_S (y-b)^2 \rho(x,y)dA$$

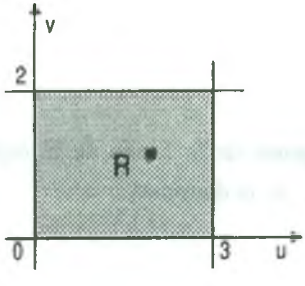
$$I_0^{a,b} = \iint_S \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]\rho(x,y)dA$$

Observación.- El radio de giro de un objeto respecto de un eje L es el número R definido por $R = \sqrt{\dfrac{I}{M}}$ donde I es el momento de inercia respecto de L y M es la masa total del objeto.

Ejemplo.- Encontrar la masa y el centro de masa de la lámina en la forma de una región rectangular acotada por las rectas x = 3, y = 2 y los ejes coordenados.

Si la densidad de área en cualquier punto es xy^2 Slups/p^2

Solución



Sea $\rho(x,y) = xy^2$

$$M = \iint_R \rho(x,y)dA = \iint_R xy^2 dxdy$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^2 xy^2\, dy\right)dx = \int_0^3 \frac{xy^3}{3}\Big/_0^2 dx = \frac{8}{3}\int_0^3 x\, dx = 12\ slups$$

$$M_x=\iint_R y\,\rho(x,y)dA=\iint_R xy^3dx\,dy=\int_0^3(\int_0^2 xy^3dy)dx=\int_0^3\frac{xy^4}{4}\Big/_0^2dx=4\int_0^3 x\,dx=18$$

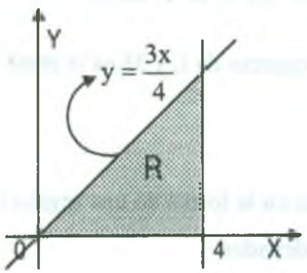
$$M_y=\iint_R x\,\rho(x,y)dA=\iint_R x^2y^2dx\,dy=\int_0^3(\frac{x^2y^3}{3})\Big/_0^2)dx=\frac{8}{3}\int_0^3 x^2dx=24$$

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{24}{12}=2\\[2mm] \bar{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{18}{12}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=2\\[2mm] \bar{y}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Luego el centro de masa es $(\bar{x},\bar{y})=(2,\frac{3}{2})$

Ejemplo.- Encontrar el momento de inercia de la lámina homogénea de la forma de la región acotada por $4y=3x$, $x=4$ y el eje X, correspondiente al eje Y, si la densidad de área es ρ slugs/p^2

Solución



$$I_y=\iint_R x^2\rho(x,y)dA \quad \text{donde } \rho(x,y)=\rho$$

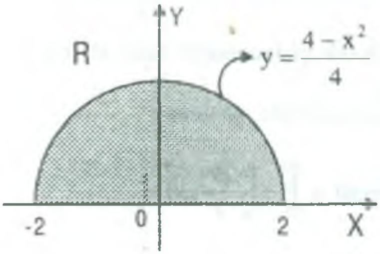
$$I_y=\iint_R x^2\rho\,dx\,dy=\int_0^4(\int_0^{\frac{3x}{4}}x^2\rho\,dy)dx$$

$$=\rho\int_0^4 x^2y\Big/_0^{\frac{3x}{4}}dx=\frac{3\rho}{4}\int_0^4 x^3dx$$

$$I_y=\frac{3\rho}{4}x^4\Big/_0^4=48\rho\ \text{slugs}/p^2.$$

Ejemplo.- Encontrar el momento de inercia de la lámina homogénea de la forma de la región acotada por la parábola $x^2=4-4y$ y el eje X, sí la densidad de área es ρ slugs/p^2

Solución



$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)dA = \iint_R y^2 \rho\, dx\, dy$$

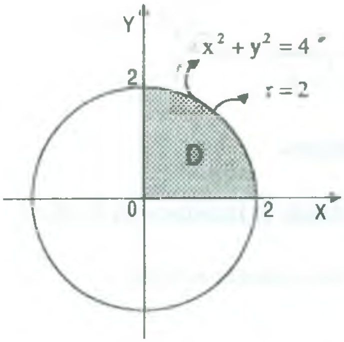
$$= \rho\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\frac{4-x^2}{4}} y^2\, dy\right)dx = \frac{\rho}{3}\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-x^2}{4}\right)^3 dx$$

$$I_x = \frac{\rho}{192}\int_{-2}^{2}(64-48x^2+12x^4-x^6)dx = \frac{173}{280}\rho$$

5.17 Ejercicios Desarrollados.

1) Calcular la integral doble $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotado por el círculo $x^2+y^2=4$ y los ejes coordenados.

Solución



Pasando a coordenadas polares

x = r cos θ , y = r sen θ, donde el Jacobiano es J(r,θ) = r.

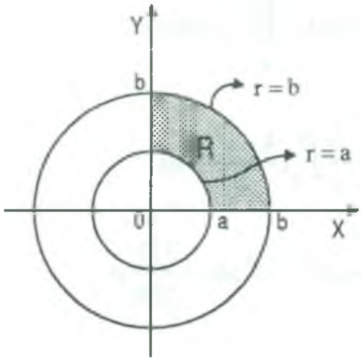
ahora sustituyendo en la integral dada, se tiene:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/2} -\frac{e^{-r^2}}{2}\Big/_0^2 d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{-4}-1)d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-4})$$

2) Dada la región R en el primer cuadrante entre los círculos $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$, $0<a<b$. Calcular el valor de la integral doble $\iint_R \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$

Solución



Graficando la región R, pasando a coordenadas polares.

x = r cos θ , y = r sen θ , donde el Jacobiano es J(r,θ) = r.

ahora sustituimos en la integral doble, se tiene:

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^b \frac{r}{r^2}\,dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^b \frac{dr}{r}\right)d\theta$$

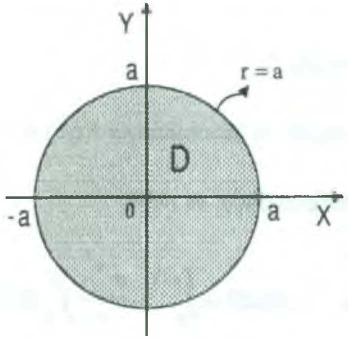
$$= \int_0^{2\pi} \ln r \Big/_a^b d\theta = \ln\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3) Calcular la integral doble graficando la región sobre el cual se calcula

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2+y^2)-2a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

Solución

Ubicando la región sobre el cual se realiza la integral



$$D: \begin{cases} -a \le x \le a \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ x = \pm a \end{cases}$$

pasando a coordenadas polares

x = r cos θ, y = r sen θ , donde el Jacobiano es J(r,θ) = r.

ahora pasando a coordenadas polares se tiene:

$$\iint_D \frac{3(x^2+y^2)-2a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2+y^2)-2a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx$$

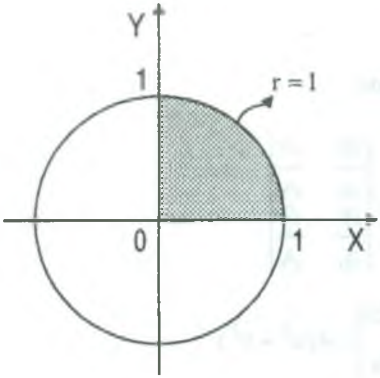
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \frac{3r^2-2a}{\sqrt{a^2-r^2}}.r\,dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a \frac{3r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr - \int_0^a \frac{2ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}(3r^2-2a)-2(a^2-r^2)^{3/2}\right]\Big/_0^a d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(2a^3-2a^2)\,d\theta = 8(a^3-a^2)\frac{\pi}{2} = 4\pi(a^3-a^2)$$

4) Calcular la integral doble $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, donde D es dado por las desigualdades $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0, y \ge 0$.

Solución



Graficando la región D, pasando a coordenadas polares

x = r cos θ , y = r sen θ , de donde el Jacobiano es

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$$

ahora reemplazando en la integral dada se tiene:

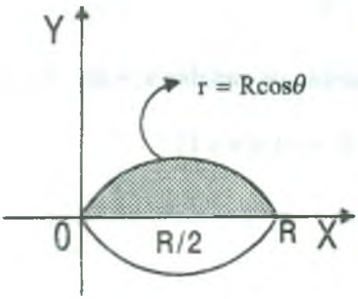
$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \left(\frac{r}{\sqrt{1-r^4}}-\frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}\right)dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} r^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\right)\Big/_0^1\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

5) Calcular la integral doble pasando a coordenadas polares $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ donde D es el círculo $x^2+y^2 \le Rx$

Solución



Graficando la región D: $x^2+y^2=Rx$, completando cuadrado $(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{4}$

pasando a coordenadas polares: x = r cos θ, y = r sen θ,

donde el Jacobiano es $J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$

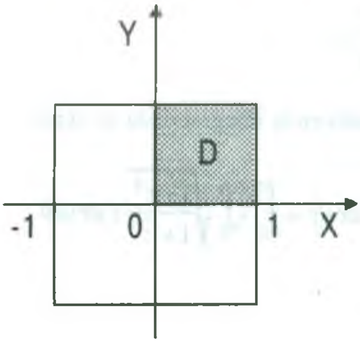
$(u^2+1)(v^2-1)=0 \Rightarrow v=\pm 1$

para $y^2=-4(x-1) \Rightarrow 4u^2v^2=-4(u^2-v^2-1)$

$u^2v^2=-u^2+v^2+1 \Rightarrow u^2(v^2+1)=v^2+1$ de donde $(u^2-1)(v^2+1)=0 \Rightarrow u=\pm 1$

Luego D = {(u,v) / -1 ≤ u ≤ 1 ∧ -1 ≤ v ≤ 1}

Como $x=u^2-v^2$, y = 2 u v, calculando el Jacobiano



$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}-2u & -2v\\ 2v & 2u\end{vmatrix}=4(u^2+v^2)$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}=(u^2+v^2)$$

ahora reemplazando en la integral doble

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\iint_D (u^2+v^2)|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=4\iint_D (u^2+v^2)^2\,du\,dv=16\int_0^1\left(\int_0^1 (u^2+v^2)^2\,dv\right)du=16\int_0^1 (u^4v+\frac{2}{3}u^2v^3+\frac{v^5}{5})\Big/_0^1\,du$$

$$=16\int_0^1 (u^4+\frac{2}{3}u^2+\frac{1}{5})du=\frac{448}{45} \qquad \therefore \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\frac{448}{45}$$

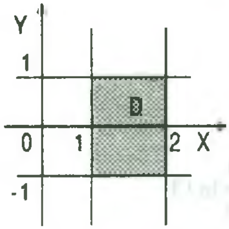
11) Calcular $\iint_R \sqrt{4x^2+y^2}\,dx\,dy$, utilizando el siguiente cambio de variable x = uv, $y=u^2-v^2$ donde R es la imagen de la región D= {(u,v) / 1 ≤ u ≤ 2 ∧ -1 ≤ v ≤ 1}

Solución

Calculando el Jacobiano $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es decir:

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 2u & -2V\end{vmatrix}=-2(v^2+u^2)$$

$\sqrt{4x^2+y^2}=\sqrt{4u^2v^2+(u^2-v^2)^2}=u^2+v^2$, ahora reemplazando en la integral doble



$$\iint_R \sqrt{4x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_D (u^2+v^2)|J(u,v)|du\,dv$$

$$=\iint_D 2(u^2+v^2)^2\,du\,dv=2\int_1^2\left(\int_{-1}^{1}(u^2+v^2)dv\right)du=\frac{14.32}{45}$$

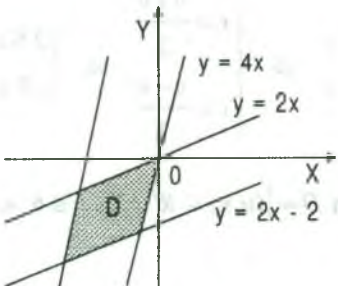
12) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{(2x-y)^2\,dx\,dy}{1-4x+y}$, si D es la región en el plano XY, limitado por las rectas y = 2x, y = 12 + 4x, y = 4x, y + 2 = 2x.

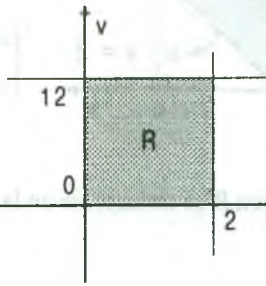
Solución

Transformando la región D: y = 2x, y = 2x - 2, y = 4x, y = 4x + 12 para esto hacemos el cambio de variable siguiente.

$$\begin{cases}2x-y=u\\ y-4x=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le u\le 2\\ 0\le v\le 12\end{cases}, \text{ de donde } R=\{(u,v)\in RxR\,/\,0\le u\le 2 \wedge 0\le v\le 12\}$$

Luego la región D del plano XY se transformando en la región R del plano uv, cuyo gráfico es:





Ahora calculamos el Jacobiano

$$\begin{cases} 2x-y=u \\ y-4x=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{u+v}{2} \\ y=-(2u+v) \end{cases} \Rightarrow J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

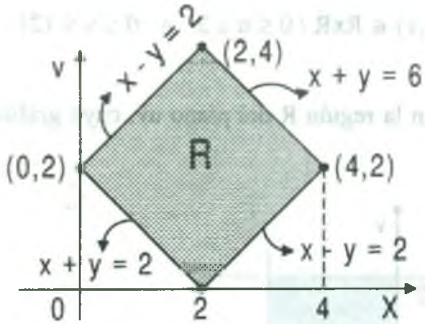
$$\iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y}dx\,dy=\iint_R \frac{u^2}{1+v}|J(u,v)|du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^{12}\frac{u^2\,dv}{1+v}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2\ln(1+v)\Big/_0^{12}du=\frac{\ln 13}{2}\int_0^2 u^2\,du=\frac{4}{3}\ln 13$$

$$\therefore \iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y}dxdy=\frac{4}{3}\ln 13$$

13) Hallar la integral doble $\iint_R \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{13+x^2-y^2}}$, donde R es el cuadrilátero de vértices (2,0), (4,2), (2,4), (0,2).

Solución



Graficamos R y hallamos las ecuaciones de los lados del paralelogramo.

Transformando la región R en otra región mediante el cambio de variable.

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\le u\le 6 \\ -2\le v\le 2 \end{cases}$$

Luego la región R se transforma en la región $D=\{(u,v)\in R^2 \,/\, 2\le u\le 6 \wedge -2\le v\le 2\}$ cuya gráfica es:

ahora calculamos el Jacobiano

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+2v}{5} \\ y = \dfrac{v-2u}{5} \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Luego reemplazando en la integral doble

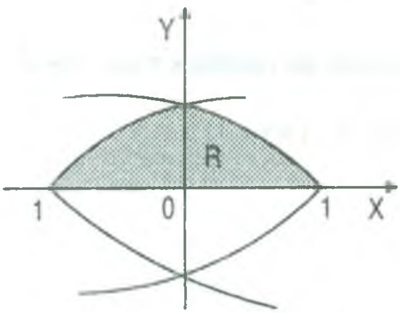
$$\iint_R (x-2y+3)^2 e^{2x+y+1} dxdy = \iint_D (u+3)^2 e^{v+1} |J(u,v)| dudv = \frac{1}{5}\iint_D (u+3)^2 e^{v+1} dudv$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^3 (\int_{-1}^3 (u+3)^2 e^{v+1} dv) du = \frac{1}{5}\int_0^3 (u+3)^2 [e^4 - 1] du = \frac{e^4-1}{15}(u+3)^3 \Big/_0^3$$

$$= \frac{e^4-1}{15}[216-27] = \frac{63}{5}(e^4-1) \qquad \therefore \iint_R (x-2y+3)^2 e^{2x+y+1} dx\,dy = \frac{63}{5}(e^4-1)$$

10) La región R se encuentra en el semiplano superior del plano XY y está limitada por las parábolas $y^2 = 4(1 \pm x)$ y el eje X, calcular $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA$, haciendo el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, y = 2 u v.

Solución



Graficando la región R $\Rightarrow$ $y^2 = 4(1 \pm x)$ de donde

$y^2 = 4(x+1)$; $y^2 = 4(x-1)$

Transformando la región R, a otra región.

$y^2 = 4(x+1) \Rightarrow 4u^2v^2 = 4(1+u^2-v^2)$

$u^2v^2 = 1+u^2-v^2 \Rightarrow u^2(v^2-1) = 1-v^2$

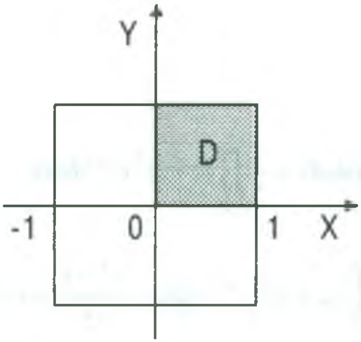
$(u^2+1)(v^2-1)=0 \Rightarrow v=\pm 1$

para $y^2=-4(x-1) \Rightarrow 4u^2v^2=-4(u^2-v^2-1)$

$u^2v^2=-u^2+v^2+1 \Rightarrow u^2(v^2+1)=v^2+1$ de donde $(u^2-1)(v^2+1)=0 \Rightarrow u=\pm 1$

Luego $D=\{(u,v)\,/\,-1\le u\le 1 \wedge -1\le v\le 1\}$

Como $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, calculando el Jacobiano



$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}-2u & -2v\\ 2v & 2u\end{vmatrix}=4(u^2+v^2)$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}=(u^2+v^2)$$

ahora reemplazando en la integral doble

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\iint_D (u^2+v^2)|J(u,v)|\,du\,dv$$

$$=4\iint_D (u^2+v^2)^2\,du\,dv=16\int_0^1\left(\int_0^1 (u^2+v^2)^2\,dv\right)du=16\int_0^1 \left(u^4v+\frac{2}{3}u^2v^3+\frac{v^5}{5}\right)\Big/_0^1\,du$$

$$=16\int_0^1 \left(u^4+\frac{2}{3}u^2+\frac{1}{5}\right)du=\frac{448}{45} \qquad \therefore \iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\frac{448}{45}$$

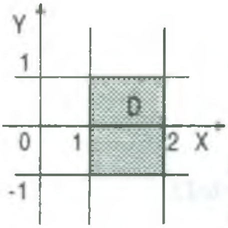
11) Calcular $\iint_R \sqrt{4x^2+y^2}\,dx\,dy$, utilizando el siguiente cambio de variable $x=uv$, $y=u^2-v^2$ donde R es la imagen de la región $D=\{(u,v)\,/\,1\le u\le 2 \wedge -1\le v\le 1\}$

Solución

Calculando el Jacobiano $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es decir:

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 2u & -2V\end{vmatrix}=-2(v^2+u^2)$$

$\sqrt{4x^2+y^2}=\sqrt{4u^2v^2+(u^2-v^2)^2}=u^2+v^2$, ahora reemplazando en la integral doble



$$\iint_R \sqrt{4x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_D (u^2+v^2)|J(u,v)|du\,dv$$

$$=\iint_D 2(u^2+v^2)^2\,dudv=2\int_1^2(\int_{-1}^1(u^2+v^2)dv)du=\frac{14.32}{45}$$

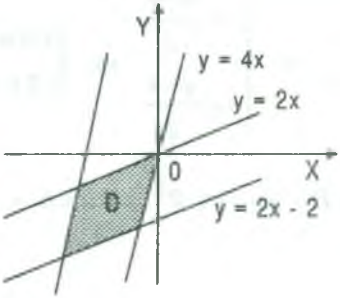
12) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{(2x-y)^2\,dx\,dy}{1-4x+y}$, si D es la región en el plano XY, limitado por las rectas y = 2x, y = 12 + 4x, y = 4x, y + 2 = 2x.

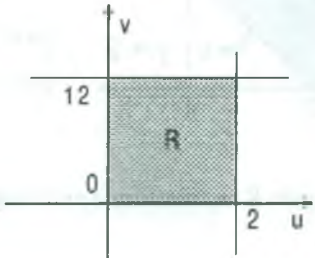
<u>Solución</u>

Transformando la región D: y = 2x, y = 2x - 2, y = 4x, y = 4x + 12 para esto hacemos el cambio de variable siguiente.

$$\begin{cases}2x-y=u\\ y-4x=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le u\le 2\\ 0\le v\le 12\end{cases}$$, de donde $R=\{(u,v)\in RxR\,/\,0\le u\le 2\ \wedge\ 0\le v\le 12\}$

Luego la región D del plano XY se transformando en la región R del plano uv, cuyo gráfico es:





Ahora calculamos el Jacobiano

$$\begin{cases} 2x - y = u \\ y - 4x = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{u+v}{2} \\ y = -(2u+v) \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

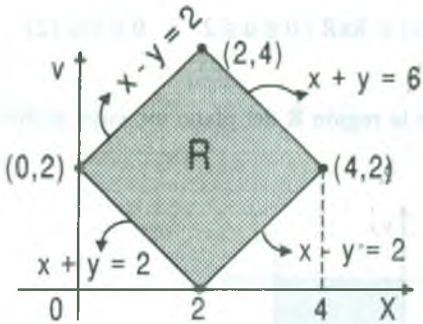
$$\iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y} dx\,dy = \iint_R \frac{u^2}{1+v} |J(u,v)| du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2 (\int_0^{12} \frac{u^2\,dv}{1+v}) du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 u^2 \ln(1+v) \Big/_0^{12} du = \frac{\ln 13}{2}\int_0^2 u^2\,du = \frac{4}{3}\ln 13$$

$$\therefore \iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y} dxdy = \frac{4}{3}\ln 13$$

13) Hallar la integral doble $\displaystyle\iint_R \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{13+x^2-y^2}}$, donde R es el cuadrilátero de vértices (2,0), (4,2), (2,4), (0,2).

Solución

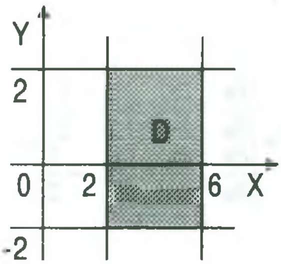


Graficamos R y hallamos las ecuaciones de los lados del paralelogramo.

Transformando la región R en otra región mediante el cambio de variable.

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le u \le 6 \\ -2 \le v \le 2 \end{cases}$$

Luego la región R se transforma en la región $D = \{(u,v) \in R^2 \,/\, 2 \le u \le 6 \ \wedge\ -2 \le v \le 2\}$ cuya gráfica es:



Calculando el Jacobiano

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

por lo tanto reemplazando en la integral dada se tiene.

$$\iint_R \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{13+x^2-y^2}}=\iint_D \frac{v}{\sqrt{13+uv}}|J(u,v)|\,du\,dv=\frac{1}{2}\iint_D \frac{v\,du\,dv}{\sqrt{13+uv}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(\int_2^6 \frac{v\,du}{\sqrt{13+uv}}\Big)dv=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(13+uv)^{1/2}\Big/_2^6\,dv$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{13+6v}-\sqrt{13+2v}\right]dv=\frac{51\sqrt{17}-205}{9}$$

$$\therefore\ \iint_D \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{13+x^2-y^2}}=\frac{51\sqrt{7}-205}{9}$$

14) Calcular $\iint_D 2\pi(x^2-y^2)\operatorname{sen}\pi(x-y)^2\,dA$, donde $D=\{(x,y)\in R^2\,/\,|x|+|y|\le 1\}$

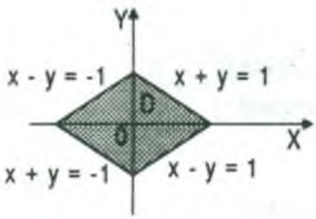
Solución

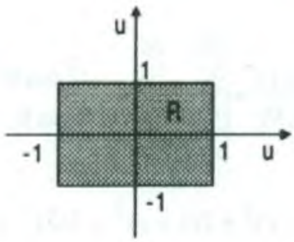
Transformando la región D, mediante el siguiente cambio de variable se tiene:

$$\begin{cases} u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le u\le 1\\ -1\le v\le 1\end{cases}$$

Luego la región D se transforma en la región R donde R = {(u,v) / -1 ≤ u ≤ 1 ∧ -1 ≤ v ≤ 1}

ahora graficamos las regiones.





Ahora calculamos el Jacobiano

como $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$

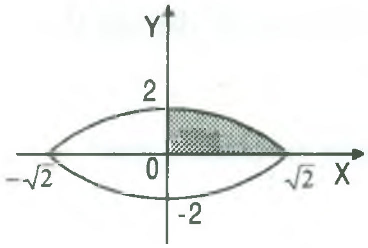
Luego sustituiremos en la integral dada.

$$\iint_D 2\pi(x^2 - y^2)\text{sen}\,\pi(x-y)^2\,dA = \iint_R 2\pi uv\text{sen}\,\pi v^2\,du dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} \pi\, uv\,\text{sen}\,\pi\, v^2\,dv\right)du = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u\cos\pi\, v^2 \Big/_{-1}^{1} du = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(\cos\pi\, u - \cos\pi)\,du = 0$$

15) Calcular la integral doble $\iint_D \cos[(2x-y)^2 + 2(x+y)^2]dA$, siendo D la región en el primer cuadrante acotada por $2x^2 + y^2 = 4$ y los ejes coordenados.

Solución



Dibujando la región D acotada por $2x^2 + y^2 = 4$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

cambiando de variable se tiene.

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,r\cos\theta \\ y = 2r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$, Ahora calculando el Jacobiano

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}r\text{sen}\,\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\,r$$

además $(2x-y)^2 + 2(x+y)^2 = 3(2x^2 + y^2) = 4r^2$

Luego reemplazando en la integral dada

$$\iint_D \cos\left[(2x-y)^2+2(x+y)^2\right]dA=\iint_D \cos 3(2x^2+y^2)dxdy$$

$$=\iint_D \cos 12r^2 |J(r,\theta)| dr d\theta=\iint_D \cos 12r^2\, 2\sqrt{2}\, r dr d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \cos 12r^2 . r\, dr\right)d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} 12r^2}{24}\Big/_0^1 d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} 12\, d\theta=\frac{\sqrt{2}\,\pi\operatorname{sen} 12}{24}$$

16) Calcular la integral doble $\iint_R \cos(\frac{x-y}{x+y})\,dx\,dy$, donde D es la región limitada por las rectas x + y = 1, x + y = 4, x = 0, y = 0.

Solución

Transformando la región D: x + y = 1, x + y = 4, x = 0, y = 0 para esto hacemos la sustitución siguiente:

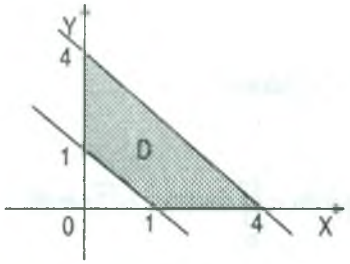
$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

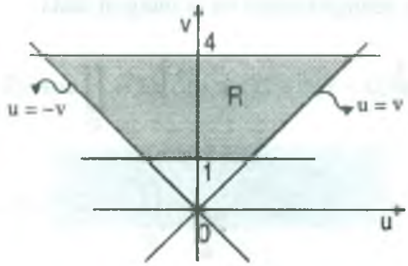
para $x=0=\dfrac{u+v}{2}\Rightarrow v=-u$; $y=0=\dfrac{v-u}{2}\Rightarrow v=u$

$$x+y=v \Rightarrow 1\le v\le 4$$

Luego la región D se ha transformado en la región $R=\{(u,v)\in R^2 / v=-u, v=u,\ 1\le v\le 4\}$

Graficando las regiones se tiene:





Calculando el Jacobiano se tiene

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

Ahora sustituiremos en la integral dada

$$\iint_D \cos(\frac{x-y}{x+y})dx\,dy=\iint_R \cos\frac{u}{v}|J(u,v)|du\,dv=\frac{1}{2}\iint_D \cos(\frac{u}{v})=du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4(\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}du)dv=\frac{1}{2}\int_1^4 v\,\mathrm{sen}\frac{u}{v}\Big/_{-v}^{v}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 v(\mathrm{sen}\,1-\mathrm{sen}(-1)dv=\int_1^4 v\,\mathrm{sen}\,1\,dv=\mathrm{sen}\,1.\frac{v^2}{2}\Big/_1^4=8\,\mathrm{sen}\,1-\frac{\mathrm{sen}\,1}{2}=\frac{15\,\mathrm{sen}\,1}{2}$$

17) Calcular la integral $\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$, donde D es un dominio limitado por la línea $(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3})^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ situado en el primer cuadrante.

Solución

Cambiando de variable se tiene:

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\,u \\ y=\sqrt{3}\,v \end{cases} \Rightarrow \quad xy=\sqrt{6}\,uv \quad \text{como} \quad (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3})^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$$

entonces $(u^2+v^2)^4=uv$, además tenemos

$$\sqrt{xy} = \sqrt[4]{6}\sqrt{uv} = \sqrt[6]{6}(u^2+v^2)^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = \sqrt[6]{6}(u^2+v^2)^2$$

Ahora calculamos el Jacobiano : $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{6} \Rightarrow J(u,v) = \sqrt{6}$$

Luego reemplazando en la integral dada

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint_R \sqrt[4]{6}(u^2+v^2)^2 |J(u,v)|\,du\,dv = \sqrt[4]{6^3}\iint_R (u^2+v^2)^2\,du\,dv$$

ahora pasando a coordenadas polares se tiene:

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow (u^2+v^2)^2 = r^4$$

como R: $(u^2+v^2)^2 = uv \Rightarrow r^8 = r^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, de donde $r = 0, r = \sqrt[6]{\dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}}$, reemplazando la integral

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt[4]{6^3}\,r^4 |J(r,\theta)|\,dr\,dr = \sqrt[4]{6^3}\iint_R r^5\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt[4]{6^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt[6]{\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}}} r^5\,dr\right)d\theta = \sqrt[4]{6^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^6}{6}\Big/_0^{\sqrt[6]{\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}}} d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\,d\theta = -\frac{\cos 2\theta}{4\sqrt[4]{6}}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{6}}[-1-1] = \frac{1}{2\sqrt[4]{6}}$$

$$\therefore \iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{1}{2\sqrt[4]{6}}$$

18) Calcular la integral $\iint_D e^{-(2x^2-2xy+5y^2)}\operatorname{arctg}(\frac{x+y}{x-2y})dA$, donde:

$$D=\{(x,y)/1\le 2x^2-2xy+5y^2\le 9,(1-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{3})y\le 0,\ \sqrt{3}(x+y)\ge x-2y\}$$

Solución

Haciendo el cambio de variable se tiene:

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=x^2+2xy+y^2 \\ v^2=x^2-4xy+4y^2 \end{cases}$$

$$u^2+v^2=2x^2-2xy+5y^2$$

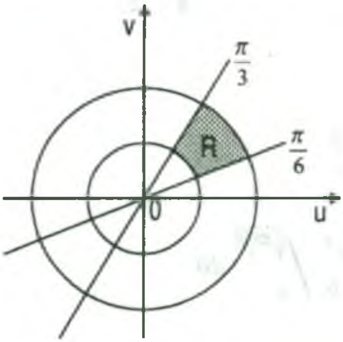
como $1\le 2x^2-2xy+5y^2\le 9 \Rightarrow 1\le u^2+v^2\le 9$

$$(1-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{3})y\le 0 \Rightarrow u\le\sqrt{2}\,v$$

$$\sqrt{3}(x+y)\ge x-2y \Rightarrow \sqrt{3}\,u\ge v$$

Luego la región D se ha transformado en la región R donde :

$$R=\{(u,v)/u\le\sqrt{2}\,v \wedge \sqrt{3}\,u\ge v \wedge 1\le u^2+v^2\le 9\}$$



Graficando la región: Suponiendo que:

$$u=\frac{1}{\sqrt{3}}v \Rightarrow \operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$u=\sqrt{3}v \Rightarrow \operatorname{tg}\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

ahora reemplazando en la integral dada.

$$\iint_D e^{-(2x^2-2xy+5y^2)}\operatorname{arctg}(\frac{x+y}{x-2y})dA=\iint_R e^{-(u^2+v^2)}\operatorname{arctg}(\frac{u}{v})|J(u,v)|du\,dv$$

calculando el Jacobiano $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Luego $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{2u+v}{3} \\ y = \dfrac{u-v}{3} \end{matrix}$ entonces $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3}$

$$\iint_D e^{-(2x^2-2xy+5y^2)} \operatorname{arctg}(\frac{x+y}{x-2y})dA = \frac{1}{3}\iint_R e^{-(u^2+v^2)} \operatorname{arctg}(\frac{u}{v})du\,dv$$

pasando a coordenadas polares se tiene: $\begin{cases} u = r\operatorname{sen}\theta \\ v = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J(r,\theta) = r\,,\ \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 3 \end{cases}$

$$\iint_D e^{-(2x^2-2xy+5y^2)} \operatorname{arctg}(\frac{x+y}{x-2y})dA = \frac{1}{3}\iint_R e^{-(u^2+v^2)} \operatorname{arctg}(\frac{u}{v})du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\iint_R e^{-r^2} \operatorname{arctg}(\frac{r-\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta})\,|\,J(r,\theta)\,|\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\int_1^3 e^{-r^2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta)r\,dr)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\int_1^3 e^{-r^2}\theta\, r\,dr)d\theta = \frac{1}{3}\int -\frac{e^{-r^2}}{2}\theta \Big/_1^3 d\theta = -\frac{e^{-9}-e^{-1}}{6}.\frac{\theta^2}{2}\Big/_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{e^{-1}-e^{-9}}{12}(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}) = \frac{e^{-1}-e^{-9}}{144}\pi^2$$

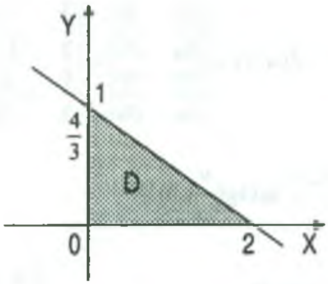
19) Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{\dfrac{2x+3y}{x+y}}\, e^{\sqrt{\frac{x+y}{2x+3y}}}\,dx\,dy$, donde D es el triángulo limitado por $y = \dfrac{4-2x}{3}$ y los ejes coordenadas.

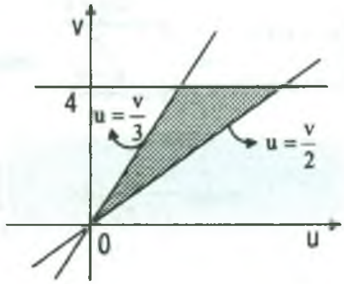
Solución

Haciendo la sustitución por: $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u-v \\ y = v-2u \end{cases}$

ahora transformando la región D se tiene: $\begin{cases} x = 0 = 3u-v \\ y = 0 = v-2u \\ 2x+13y = 4 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 3u \\ v = 2u \\ v = 4 \end{cases}$

Luego la región D se transforma en la región R = {(u,v) / 2u $\le$ v $\le$3u, v= 4}





Calculando el Jacobiano $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3-2=1$$

ahora reemplazando en la integral dada.

$$\iint_D \sqrt{\frac{2x+3y}{x+y}}\,e^{\sqrt{\frac{x+y}{2x+3y}}}\,dx\,dy=\iint_R \sqrt{\frac{v}{u}}\,e^{\sqrt{\frac{u}{v}}}\,|J(u,v)|\,du\,dv=\iint_R \sqrt{\frac{v}{u}}\,e^{\sqrt{\frac{u}{v}}}\,du\,dv=\int_0^4\Big(\int_{\frac{v}{3}}^{\frac{v}{2}}\sqrt{\frac{v}{u}}\,e^{\sqrt{\frac{u}{v}}}du\Big)dv$$

$$=\int_0^4 2v\,e^{\sqrt{\frac{u}{v}}}\Big/_{\frac{v}{3}}^{\frac{v}{2}}dv=2(e^{\sqrt{\frac{1}{3}}}-e^{\sqrt{\frac{1}{3}}})\int_0^4 v\,dv=16(e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}-e^{\sqrt{\frac{1}{3}}})$$

20) Calcular $\iint_F \sqrt{xy}\,dx\,dy$ donde $F=\{(x,y)/(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})^2\le\frac{x}{6}\}$, $y\ge 0$.

Solución

como $y\ge 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{x}{6}}\le\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\le\sqrt{\frac{x}{6}}$, $x\ge 0$

$$\Rightarrow\ 2x+y\le 4\sqrt{\frac{x}{6}}\ \Rightarrow\ y\le -2x+4\sqrt{\frac{x}{6}}\ \Rightarrow\ -2x+4\sqrt{\frac{x}{6}}\ge 0\ \Rightarrow\ x\le 2\sqrt{\frac{x}{6}}\ \Rightarrow 0\le x\le\frac{2}{3}$$

$$\iint_F \sqrt{xy}\,dx\,dy=\int_0^{3/2}\Big(\int_0^{-2x+4\sqrt{\frac{x}{6}}}\sqrt{x}\sqrt{y}\,dy\Big)dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}\sqrt{x}\Big(-2x+4\sqrt{\frac{x}{6}}\Big)^{3/2}dx$$

sea $x = 6t^2 \Rightarrow dx = 12t\,dt$ para $x = 0, t = 0$; $x = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{3}$

$$\iint_{F6} \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int_0^{3/2} \sqrt{x}(-2x + 4\sqrt{\frac{x}{6}})^{3/2} dx = \frac{2}{3}\int_0^{1/3} \sqrt{6}t(-12t^2 + 4t)^{3/2}\, 12t\,dt$$

$$= 8\sqrt{6}\int_0^{1/3} t^2(-12t^2 + 4t)^{3/2} dt = 64\sqrt{6}\int_0^{1/3} (1-3t)^{3/2} t^3 \sqrt{t}\,dt \qquad \text{... (1)}$$

Sea $3t = \text{sen}^2\theta \Rightarrow dt = \frac{2}{3}\text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$

$$\int t^3\sqrt{t}(1-3t)^{3/2} dt = \int \frac{\text{sen}^6\theta}{27}(1-\text{sen}^2\theta)^{3/2}\frac{2}{3}\text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{2}{81}\int \text{sen}^7\theta.\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{81}\int (-\cos^{10}\theta - 3\cos^8\theta + 3\cos^6\theta + \cos^4\theta)\,\text{sen}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{81}\cos^5\theta[\frac{\cos^6\theta}{11} + \frac{\cos^4\theta}{3} - \frac{3\cos^2\theta}{7} - \frac{1}{5}]$$

$$= \frac{2}{81}(1-3t)^{5/2}[\frac{(1-3t)^3}{11} + \frac{(1-3t)^2}{3} - \frac{3(1-3t)}{7} - \frac{1}{5}] \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1)

$$\iint_F \sqrt{xy}\,dx\,dy = \frac{64\sqrt{6}}{81}(2)(1-3t)^{5/2}[\frac{(1-3t)^3}{11} + \frac{(1-3t)^2}{3} - \frac{3(1-3t)}{7} - \frac{1}{5}] \Big/_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{128\sqrt{6}}{81}[0(0-\frac{1}{5}) - (\frac{1}{11} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} - \frac{1}{5})] = \frac{128\sqrt{6}}{81}(\frac{236}{33x35}) = \frac{32\sqrt{2}}{81}$$

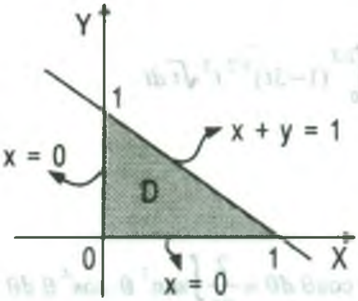
21) **Calcular la integral doble** $\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx$

Solución

Ubiquemos la región sobre el cual se realiza la integración.

Sea $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$, graficando la región

Para $y = 1 - x \Rightarrow x + y = 1$



Aplicando Jacobiano se tiene:

$$\begin{cases} x + y = u \\ y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases}$$

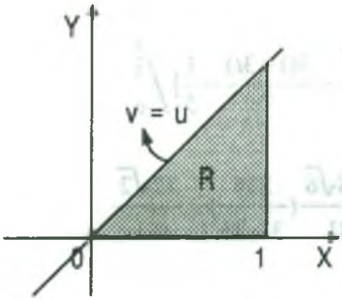
$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Calculando la región R en el plano uv, teniendo en cuenta la transformación $x = u - v$, $y = v$

Para $\begin{cases} y = 0, \quad v = 0 \\ x = 0, \quad v = u \\ x + y = u = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \end{cases}$, luego se tiene:

$$R = \{(u,v) \in R^2 \,/\, v = u,\ v = 0,\ u = 1\}$$

Graficando la región R se tiene:



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy\, dx = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx\, dy$$

$$= \iint_R e^{\frac{v}{u}} \,|\, J(u,v) \,|\, du\, dv = \int_0^1 (\int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv) du$$

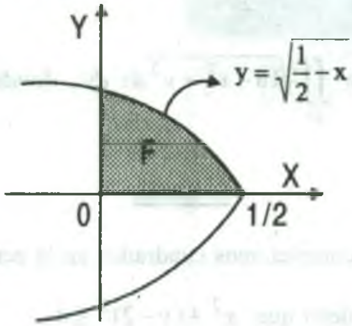
$$= \int_0^1 (ue - u) du = (e-1)\frac{u^2}{2} \Big/_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

22) Calcular $\iint_F \frac{2xy(2-3x)}{x^2 + 2y^2} dx\, dy$, donde $F = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ y^2 \le \frac{1}{2} - x\}$

Solución

La función no es continua en (0,0), pero es acotada en D, puesto que $0 \le \frac{2xy(2-3x)}{x^2+y^2} \le 1$, es pues integrable.

Graficando la región F se tiene.



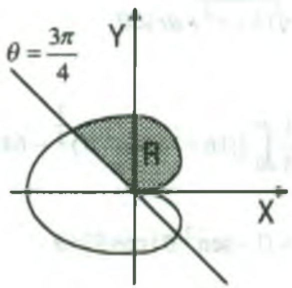
$$\iint_F \frac{2xy(2-3x)}{x^2+2y^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x}} \frac{2xy(2x-3x)}{x^2+2y^2}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(2-3x)}{2}\ln(x^2+2y^2)\Big/_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(2-3x)}{2}\left[\ln(1-x^2)-\ln x^2\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x(2-3x)\left[\ln(1-x)-\ln x\right]dx = \frac{1}{8}$$

23) Una región R en la parte superior del eje X esta limitada por la izquierda por la recta $y = -x$ y por la derecha por la curva $3(x^2+y^2)^{1/2} - 3x = x^2+y^2$. Hallar su área.

Solución



$$A(R) = \iint_R dxdy$$

pasando a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow J(r,\theta) = r$$

como $3(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - 3x = x^2+y^2 \Rightarrow 3r - 3r\cos\theta = r^2$ de donde $r = 0$, $r = 3 - 3\cos\theta$

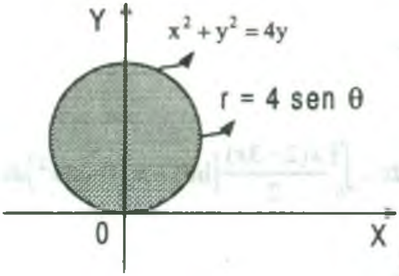
$$A(R)=\iint_R dxdy=\iint_R |J(r,\theta)|drd\theta=\iint_R rdrd\theta=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(\int_0^{3-3\cos\theta} r\,dr)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} r^2\Big/_0^{3-3\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(3-3\cos\theta)^2d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=(\frac{81\pi}{16}-\frac{9\sqrt{2}}{2}-\frac{9}{9})u^2$$

24) Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde D es la región limitada por la inecuación $x^2+y^2\le 4y$

Solución

Para graficar la región D completamos cuadrados en la ecuación $x^2+y^2-4y=0$ es decir: $(y^2-4y+4)+x^2=4$ es decir que: $x^2+(y-2)^2\le 4$.



Pasando a coordenadas polares

$x = r\cos\theta,\quad y = r\,\text{sen}\,\theta,\quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$x^2+y^2=4y\quad\Rightarrow\quad r^2=4r\,\text{sen}\,\theta\quad\Rightarrow\quad r=4\,\text{sen}\,\theta$$

La región D es coordenadas polares es: $D=\{(r,\theta)\,/\,0\le\theta\le\pi\ \wedge\ 0\le r\le 4\,\text{sen}\,\theta\}$

Reemplazando en la integral $\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$ se tiene:

$$\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy=\iint_D \sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}(\int_0^{4\,\text{sen}\,\theta}\sqrt{16-r^2}\,r\,dr)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}-\frac{1}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big/_0^{4\,\text{sen}\,\theta}d\theta=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}[(16-16\,\text{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}-64]d\theta$$

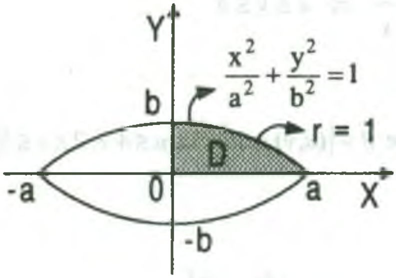
$$=-\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(\cos^3\theta-1)d\theta=\frac{64}{3}\int_0^{\pi}[1-(1-\text{sen}^2\theta)\cos\theta]d\theta$$

$$=\frac{64}{3}[\theta-\text{sen}\,\theta+\frac{\text{sen}^3\theta}{3}]\Big/_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi$$

25) Calcular la integral $\iint_D xy\,dx\,dy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante.

Solución

Graficando la región $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



A la ecuación de la elipse expresamos $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$ pasando a coordenadas polares se tiene:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=r\cos\theta\\ \frac{y}{b}=r\operatorname{sen}\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\operatorname{sen}\theta\end{cases}$$

Calculando el Jacobiano $J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ra\operatorname{sen}\theta\\ b\operatorname{sen}\theta & br\operatorname{sen}\theta\end{vmatrix}$ de donde J(r,θ) = abr

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\iint_D ar\cos\theta.br\operatorname{sen}\theta.|J(r,\theta)|\,dr\,d\theta$$

$$=ab\iint_D r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta.abr\,dr\,d\theta=a^2b^2\iint_D r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$

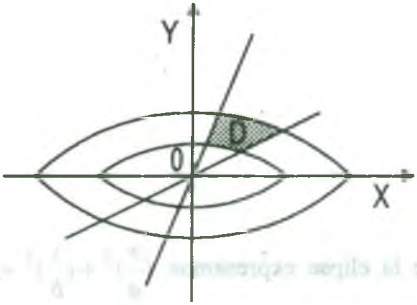
$$=a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1 r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr)d\theta$$

$$=\frac{a^2b^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^2b^2}{8}\operatorname{sen}^2\theta\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2b^2}{8}$$

26) Encontrar el área de la región en el primer cuadrante del plano XY limitado por las curvas $x^2+2y^2=1$, $x^2+2y^2=4$, y = 2x, y = 5x.

Solución

Dibujando la región acotada.



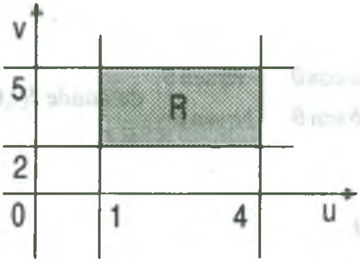
cambiando las variables se tiene

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases} \Rightarrow u=x^2+2y^2 \Rightarrow 1\le u\le 4$$

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=2 \\ \dfrac{y}{x}=5 \end{cases} \Rightarrow v=\frac{y}{x} \Rightarrow 2\le v\le 5$$

Luego la región D se transforma en la región R, donde $R=\{(u,v)\in R^2 \,/\, 1\le u\le 4 \wedge 2\le v\le 5\}$

ahora calculando el Jacobiano



$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 4y \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=2+4\left(\frac{y}{x}\right)^2=2+4v^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2+4v^2}$$

por lo tanto $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2+4v^2}$

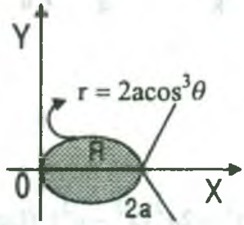
$$A(D)=\iint_D dx\,dy=\iint_R |J(u,v)|\,du\,dv=\iint_R \frac{du\,dv}{2+4v^2}=\int_2^5\left(\int_1^4 \frac{du}{2+4v^2}\right)dv=\int_2^5 \frac{3}{2+4v^2}\,dv$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,r)\Big/_2^5=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}5\sqrt{2}-\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\right]u^2$$

27) Hallar el área de la región limitada por la línea $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$

Solución

Dibujando la región comprendida pasando a coordenadas polares



$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; J(r,\theta) = r$

$r^4 = 2ar^3\cos^3\theta \;\Rightarrow\; r = 0,\; r = 2a\cos^3\theta$

$$A(R) = \iint_R dxdy = \iint_R |J(r,\theta)|drd\theta = \iint_R rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\cos^3\theta} r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \Big/_0^{2a\cos^3\theta} d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{3}{2}\text{sen}\,2\theta + \frac{3\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,4\theta}{8} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{2} - \frac{\text{sen}^3 2\theta}{6}\right]\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right] = \frac{5\pi a^2}{8}$$

$$\therefore\; A(R) = \frac{5\pi a^2}{8}u^2$$

28) Hallar el área limitada por la línea $(x^2+y^2)^3 = x^4 + y^4$

Solución

pasando a coordenadas polares se tiene.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow\; x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{y} \quad J(r,\theta) = r$$

$(x^2+y^2)^3 = x^4 + y^4 \;\Rightarrow\; r^6 = r^4(\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta)$ de donde

$r = \theta$, $r = \sqrt{\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le \sqrt{\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta}$

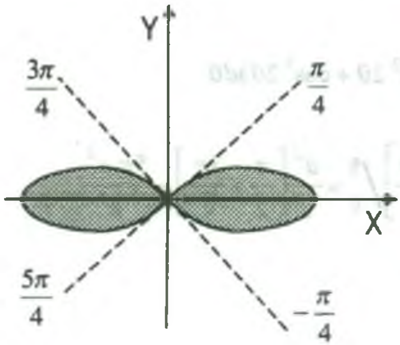
$$A(R)=\iint_R dxdy=\iint_R |J(r,\theta)|drd\theta=\iint_R rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta}} r\,dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big/_0^{\sqrt{\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta)d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(3+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{8}(3\theta+\frac{\operatorname{sen}4\theta}{4})\Big/_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}u^2$$

$$\therefore\ A(R)=\iint_R dx\,dy=\frac{3\pi}{4}u^2$$

29) Hallar el área de la región limitada por la línea $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (Lemniscata de Bernoulli)

Solución



Dibujando la región comprendida y pasando a coordenadas polares.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=r^2 \text{ y } J(r,\theta)=r$$

como $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2) \Rightarrow r^4=2a^2r^2\cos 2\theta$

de donde

$r=0$, $r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $0\le r\le a\sqrt{2\cos 2\theta}$

$$A(R)=\iint_R dxdy=\iint_R |J(r,\theta)|drd\theta=\iint_R rdrd\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\Big/_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\theta\,d\theta=a^2\operatorname{sen}2\theta\Big/_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=a^2(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}-\frac{\pi}{2})=a^2(1+1)=2a^2$$

$$\therefore\ A(R)=\iint_R dxdy=2a^2u^2$$

30) Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XY, el paraboloide $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}$

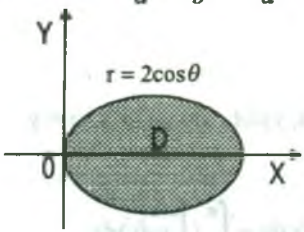
Solución

$V=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\,dx\,dy$, aplicando coordenadas polares, se tiene:

x = a r cos θ , y = b r sen θ, donde el Jacobiano es:

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\,r\,\text{sen}\,\theta\\ b\,\text{sen}\,\theta & -b\,r\cos\theta\end{vmatrix}=a\,b\,r$$

además como $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a} \Rightarrow$ r = 2 cos θ



$$V=\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dx\,dy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2\cos\theta} r^2|J(r,\theta)|dv\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{2\cos\theta} abr^3dr)d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \Big/_0^{2\cos\theta} d\theta$$

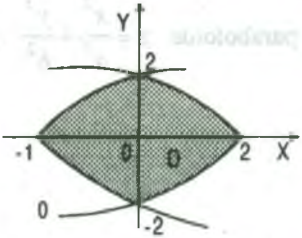
$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cos^4\theta\,d\theta=8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2 d\theta$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2})d\theta$$

$$=2ab(\frac{3\theta}{2}+\text{sen}\,2\theta+\frac{\text{sen}\,4\theta}{8})\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3ab\pi}{2}u^3$$

31) Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las líneas $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$

Solución



Como la figura es simétrica con respecto a x $\Rightarrow$ $\bar{y}=0$, luego nos queda calcular $\bar{x}$ calculando el área de la figura

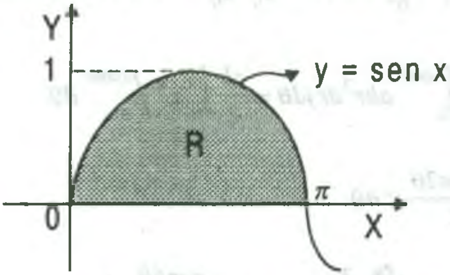
$$S=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}dx\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=8$$

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{S}=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}x\,dx\right)dy=\frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\Big/_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}}dy=\frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{4-y^2}{2}\right)^2-\left(\frac{y^2-4}{4}\right)^2\right]dy$$

$$\bar{x}=\frac{1}{64}\int_{-2}^{2}\left[(4-y^2)^2-\frac{(y^2-4)^2}{4}\right]dy=\frac{2}{5}.\quad \text{Luego}\quad (\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{2}{5},0\right)$$

32) Encontrar la masa y el centro de masa de la lámina en la forma de una región acotada por la curva y = sen x y el eje X de x = 0 a x = π, si la densidad de área varía con la distancia al eje X.

Solución



$$M=\iint\limits_R \rho(x,y)dA,\ \text{donde } \rho(x,y)=y$$

$$M=\iint\limits_R y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\operatorname{sen}x}y\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{y^2}{2}\Big/_0^{\operatorname{sen}x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{4}.\qquad \text{Luego}\quad M=\frac{\pi}{4}\ \text{slugs}$$

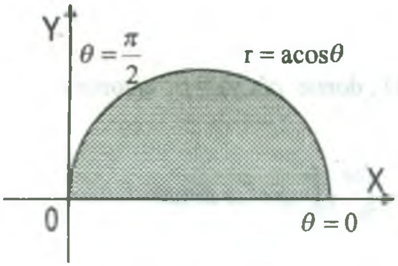
$$M_x=\iint\limits_R y\,\rho(x,y)dx\,dy=\iint\limits_R y^2\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\operatorname{sen}x}y^2\,dy\right)dx=\frac{4}{9}$$

$$M_y=\iint\limits_R x\,\rho(x,y)dx\,dy=\iint\limits_R xy\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\operatorname{sen}x}xy\,dy\right)dx=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\frac{\pi^2}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \bar{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{16}{9\pi} \end{array}\right| \Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) = (\frac{\pi}{2},\frac{16}{9\pi})$$

33) Encontrar la masa de la lámina que tiene la forma de la región dentro del semi círculo $r = a\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, además encontrar el centro de masa de la lámina cuya medida de densidad de área en cualquier punto es proporcional a la medida de su distancia al polo (masa en slugs y la distancia en pies).

Solución



La densidad $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, calculando la masa se tiene:

$$M = \iint_R \rho(x,y)dx\,dy = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$M = k\iint_D r.|J(r,\theta)|dr\,d\theta = k\iint_D r^2 dr\,d\theta$$

$$M = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{a\cos\theta} r^2\,dr)d\theta = \frac{k\,a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$M = \frac{k\,a^3}{3}(1-\frac{1}{3}) = \frac{2\,k\,a^3}{3} \text{ slugs}$$

calculando el centro de masa $(\bar{x},\bar{y})$, el momento de masa con respecto al eje X.

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)dxdy = \iint_D r\operatorname{sen}\theta.k\,r.rdrd\theta$$

$$= k\iint_D r^3\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{a\cos\theta} r^3\operatorname{sen}\theta\,dr)d\theta = \frac{k}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\theta.\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{k\,a^4}{20}$$

el momento de masa con respecto al eje Y.

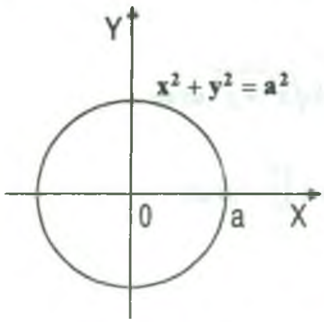
$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy = \iint_D r\cos\theta . k r . r dr d\theta = k\iint_D r^3 \cos\theta dr d\theta$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} r^3 \cos\theta\, dr\right) d\theta \ = \frac{k}{4}\int_0^{\pi/2} a^4 \cos^5\theta\ d\theta = \frac{2k a^4}{15}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{M_y}{M} \\ \bar{y} = \dfrac{M_x}{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{3a}{5} \\ \bar{y} = \dfrac{3a}{40} \end{cases} \Rightarrow p\left(\frac{3a}{5}, \frac{3a}{40}\right) \quad \text{centro de masa.}$$

34) Encontrar el momento de inercia de la lámina homogénea de la forma de la región acotada por un círculo de radio "a" unidades con respecto a su centro, si la densidad de área es ρ slugs/ p^2.

Solución



$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x,y)dA$, donde ρ(x,y) = ρ entonces:

$$I_0 = \iint_R \rho(x^2 + y^2)dxdy \ = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \rho r^2 . r\, dr\right) d\theta$$

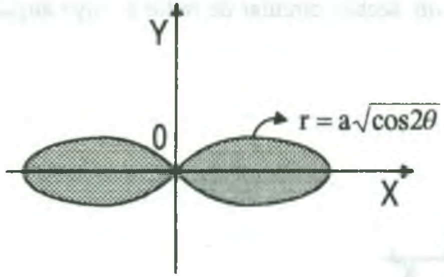
$$= \frac{\rho}{4}\int_0^{2\pi} a^4 d\theta = \frac{\rho a^4}{4}.2\pi \ \Rightarrow \ I_0 = \frac{\rho a^4 \pi}{2} slugs / p^2$$

35) Determinar el momento de inercia de una lámina en la forma de la región encerrada por la Lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ respecto al eje polar. La densidad de área varía con la distancia desde el polo.

Solución

El momento de inercia con respecto al polo es

$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy$, donde ρ(x,y) = ρ



$$I_0 = \iint_R \rho(x^2 + y^2)dxdy = \rho\iint_R r^2.rdrd\theta$$

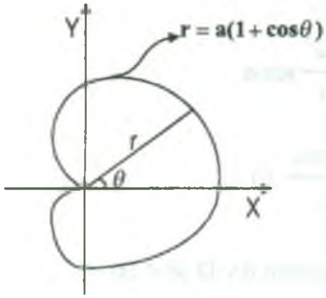
$$= 2\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\, dr)d\theta = \frac{\rho a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\rho a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)\,d\theta \;= \frac{\rho a^4}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]\Big/_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_0 = \frac{\rho\pi a^4}{16}$$

36) Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r = a\,(1 + \cos\theta)$

Solución



$$M = 2\int_0^{\pi} (\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$ por la simetría del eje X

se tiene $\bar{y} = 0$

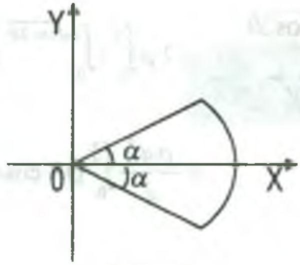
$$M_y = 2\int_0^{\pi} (\int_0^{a(1+\cos\theta)} \cos\theta.r^2\, dr)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \cos\theta a^3(1+\cos\theta)^3\, d\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi} [\cos\theta + 3(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta + \frac{3}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}]d\theta$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi} [4\cos\theta - 3\operatorname{sen}^2\cos\theta + \frac{7}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{8}]d\theta = \frac{5\pi a^3}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{5a}{6} \;\Rightarrow\; (\frac{5a}{6}, 0)$$

37) Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a, cuyo ángulo central es igual a 2α (ver figura)



Solución

Usando coordenadas polares se tiene: $M = 2\int_0^{\alpha}(\int_0^{a} r\,dr)d\theta = 2\int_0^{\alpha}\frac{r^2}{2}\Big/_0^a d\theta = a^2\alpha$

por ser simétrica con respecto a X se tiene $\bar{y} = 0$

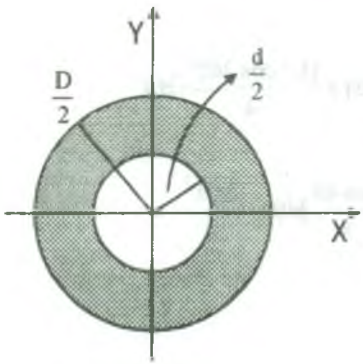
$$M_y = 2\int_0^{\alpha}(\int_0^{a} r^2\cos\theta.dr)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\alpha} r^3\cos\theta\Big/_0^a d\theta = \frac{2a^3}{3}\operatorname{sen}\alpha$$

Lugo $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2a\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$ por lo tanto $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{2a\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha},0)$

38) Hallar el momento de inercia de un anillo circular de diámetro d y D (d < D)

a) Con respecto a su propio centro , **b)** Con respecto a su diámetro.

Solución



a) $I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$

$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, donde ρ(x,y) = 1, por ser momentos de inercia de figuras planas, ahora usando coordenadas pclares x = r cos θ , y = r sen θ, se tiene:

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_{d/2}^{\frac{D}{2}} r^3 dr\right)d\theta = \frac{D^4-d^4}{32}\pi$$

b) $$I_x = \iint_D r^3 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\, dr = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^3 \operatorname{sen}^2\theta\, dr\right)d\theta = \frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$$

36) En una lámina de lado "a", la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices, calcular el momento de inercia de dicha lámina con respecto a los lados que pasan por este vértice.

Solución

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$\rho(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$, el momento de inercia se determina con respecto al eje X.

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy = \iint_D r^2\operatorname{sen}^2\theta . kr^2 drd\theta$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sec\theta} r^4\operatorname{sen}^2\theta\, dr\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\operatorname{cosec}\theta} k\,r^4\operatorname{sen}^2\theta\, dr\right)d\theta$$

$$= \frac{k}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^5\operatorname{sen}^2\theta \Big/_0^{a\sec\theta} d\theta + \frac{k}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^5\operatorname{sen}^2\theta \Big/_0^{a\operatorname{cosec}\theta} d\theta$$

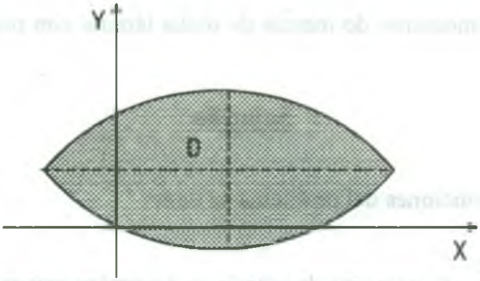
$$= \frac{k a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^5\theta\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + \frac{k a^5}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cosec}\theta .\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \quad = \frac{k a^5}{40}\left[7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2})\right]$$

39) Determine la masa de lamina delgada que tiene la forma de la región limitada por la gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = x+y$ si su densidad en cada punto es $\rho(x,y) = |\,x-\dfrac{a^2}{2}\,|$

Solución

Para graficar la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=x+y$ se debe completar cuadrados, es decir en la forma

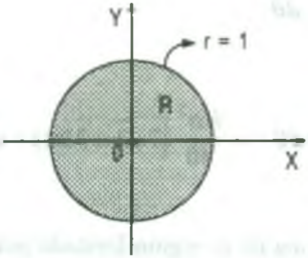
$\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{\frac{a^2}{4}(a^2+b^2)}+\frac{(y-\frac{b^2}{2})^2}{\frac{b^2}{4}(a^2+b^2)}=1$, que es una elipse de centro el punto $C(\frac{a^2}{2},\frac{b^2}{2})$ y su gráfica es:



Pasando a coordenadas polares se tiene:

$$\begin{cases} x-\frac{a^2}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\cos\theta \\ y-\frac{b^2}{2}=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\cos\theta \\ y=\frac{b^2}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

La ecuación de la elipse en forma polar es r = 1 es decir se transforma en un circulo.



Calculando el Jacobiano

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\frac{ab}{4}(a^2+b^2)r$$

La masa de la lamina es $M=\iint_D \rho(x,y)dx\,dy=\iint_D |x-\frac{a^2}{2}|\,dx\,dy$

Pasando a coordenadas polares modificadas se tiene:

$$M=\iint_D |x-\frac{a^2}{2}|\,dx\,dy=\iint_R |\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\cos\theta\,||J(r,\theta)|\,dr\,d\theta$$

$$=\iint_R |\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,r\cos\theta\,|\frac{ab}{4}(a^2+b^2)r\,dr\,d\theta=\frac{a^2b}{8}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}(\int_0^1|\cos\theta\,|r^2dr)d\theta$$

$$=\frac{a^2b}{2}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr)d\theta=\frac{a^2b}{6}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{a^2b}{6}(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}$$

5.18 Ejercicios Propuestos

1) Evaluar la integral doble $\iint_D e^{x^2+y^2}dA$, donde D es la región encerrada por $x^2+y^2\le 4$.

Rpta. $\pi(e^4-1)$

2) Calcular $\iint_D \frac{dx\,dy}{(4-x^2-y^2)^{1/2}}$, donde D es el recinto dado por $x^2+y^2-2x\le 0$.

Rpta. $2\pi+2$

3) Calcular $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, donde D es la región acotada por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$.

Rpta. $\pi\, e(e^8-1)$

4) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{x^2y^2\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, donde D es el anillo $1\le x^2+y^2\le 4$.

Rpta. $\frac{3\pi}{8}$

5) Evaluar la integral $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ a > 0, b >0, donde D es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rpta. $\frac{2\pi\, ab}{3}$

6) Calcular la integral $\iint\limits_D xy\,dxdy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante. **Rpta.** $\frac{a^2b^2}{8}$

7) Calcular $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+4}}$, a > 0, b > 0, y D es la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rpta. $2\pi\,ab(\sqrt{5}-2)$

8) Calcular $\iint\limits_D \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$, donde D es el disco acotado por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

9) Calcular $\iint\limits_D (x^2+y^2)dA$, donde D es la región limitada por $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=6y$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

10) Calcular $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, donde D esta limitado por la hoja de Lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$. **Rpta.** $[\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}]\frac{a^3}{2}$

11) Evaluar la integral $\iint\limits_F \frac{xy^2dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{3/2}}$, donde F es la región limitada por la curva $x^2+y^2=2y$.

12) Calcular $\iint\limits_D \frac{(x^2+y^2-a^2)^{3/2}dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, donde $D=\{(x,y)/x+y-a\sqrt{2}\ge 0, y-x+a\sqrt{2}\ge 0\}$

13) Calcular la integral doble $\iint\limits_D dxdy$, donde el recinto D está limitado por la curva $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ **Rpta.** $ab\left[(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2})\text{arctg}(\frac{ak}{bh})+\frac{ab}{kh}\right]$

14) Calcular $\iint\limits_D f(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}})dx\,dy$, donde D es una parte de anillo elíptico limitada por los elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante.

Rpta. $ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_1^2 f(r\cos\theta\,,\,r\operatorname{sen}\theta)r\,dr)d\theta$

15) Mediante coordenadas polares calcular $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy\,dx$

Rpta. $\frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right]$

16) Calcular $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi a^3}{6}$

17) Calcular $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{4\pi}{3}$

18) Calcular $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{4}(1-e^{-4})$

19) Calcular $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi a^3}{6}$

20) Calcular $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)^{-1/2}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\sqrt{2}-1$

21) Calcular $\int_0^3\int_{-\sqrt{18-y^2}}^{-y}\operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{\pi}{8}(1-\cos 18)$

22) Calcular $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi a^2}{2}$

23) Calcular $\int_{-2}^2\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}}\sqrt{16-x^2-y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{64\pi}{3}+\frac{4}{9}$

24) Calcular $\int_0^1\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}{5}$

25) Calcular $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(x^2+y^2)^7}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{9}$

26) Calcular la integral doble $J(a,R)=\iint_F \frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^a}$ sobre el disco circular $F=\{(x,y)/x^2+y^2\le R^2\}$. Determinar los valores de "a" para los cuales J(a,R) tiene límite cuando R → + ∞.

27) Evaluar la integral $\int_0^b\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} \sqrt{b^2-y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{2b^3}{3}$

28) Evaluar la integral $\iint_F \frac{2yx(\operatorname{sen}^2 x-x^2+\cos^2 x)^{1/2}}{y^2+x^2}dA$ siendo F la región acotada por las curvas $x\ge 0$, $y\ge 0$ y $x^2+y^2-1\le 0$ **Rpta.** $\frac{8}{15}$

29) Usando coordenadas polares calcular $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{6}$

30) Calcular la integral doble $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2-y^2)^{1/2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{2a^3}{3}$

31) Calcular $\iint_F \ln(xy+x^2+y^2+xy\cos\pi)dx\,dy$, siendo F la región en el primer cuadrante entre las circunferencias $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ con $0<a<b$.

Rpta. $\frac{\pi}{2}[b^2(\ln b-\frac{1}{2})-a^2(\ln a-\frac{1}{2})]$

32) Expresar como una sola integral y evaluar (a > 0)

$\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^a (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy+\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{16a^3}{9}$

33) Calcular la integral $\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{3a^4\pi}{4}$

34) Calcular $\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{a^4\pi}{8}$

35) Calcular $\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $\sqrt{2}-1$

36) Calcular $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$, donde D es el triángulo limitado por la recta x + y = 2 y los ejes coordenados. **Rpta.** $e-e^{-1}$

37) Calcular $\iint_D 4(x^2+y^2)\cos(x^2+2xy-y^2)dA$, donde D es la región en el primer cuadrante, limitado por las curvas $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=1$, $xy=2$.

Rpta. cos 5 - cos 6 + cos 4 - cos 3

38) Calcular $\iint_D e^{\sqrt{x+2y}}\,dxdy$, donde D es la región limitada por las rectas x + 2y = 4, x - 2y = 0 y el eje X. **Rpta.** e^2+3

39) Calcular la integral $\int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{1}{9}$

40) Sea $f(x,y)=(x+y)^2e^{x^2-y^2}$; D es una región en XY limitada por x = 0, y = x, x + y = 1, x + y = 2. Calcular $\iint_D f(x,y)dydx$ **Rpta.** $\frac{1}{2}[3+\frac{e^{-4}}{2}-\frac{e^{-1}}{2}]$

41) Graficar la región de integración y calcular la integral $\int_0^a\int_{3x}^{4a-x}\frac{x+y}{(3x-y+8a)^2}\,dy\,dx$

Rpta. $(2\ln 2-\frac{5}{4})a$

42) Calcular $\int_0^1\int_0^{2-2y} e^{\frac{x-2y}{x+2y}}\,dx\,dy$ **Rpta.** $2(e-e^{-1})$

43) Calcular $\iint_R (x-y)^2\,\text{sen}^2(x+y)\,dx\,dy$, donde R es el paralelogramo con vértice $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ **Rpta.** $\frac{\pi^4}{3}$

44) Calcular $\iint_D e^{\frac{y-2x}{y+2x}}\,dx\,dy$ donde $D:\begin{cases} 0\le x \\ 0\le y \\ 2x+y\le 2\end{cases}$ **Rpta.** $\frac{e-e^{-1}}{2}$

45) Evaluar la integral $\iint_D (2x+y)e^{x-y}\,dx\,dy$ sobre el paralelogramo determinado por los vectores (1,1) y (1,-2) eligiendo un cambio lineal de variable apropiado.

Rpta. $\frac{3(e^3-1)}{2}$

46) Sea D el paralelogramo con vértice (0,0), (1,1), (1,-1) y (2,0). Hallar $\iint_D \left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{1}{3}$

47) Calcular $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+x}}$, donde D es el interior del cuadrilátero curvilíneo limitado por las parábolas $y^2=4(x+1)$, $y^2=2(x+\frac{1}{2})$, $y^2=6(\frac{3}{2}-x)$, $y^2=4(1-x)$.

Rpta. $8(\sqrt{6}-1-\sqrt{2})$

48) Calcular el valor de $\iint_D e^{-\alpha(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$ extendida a todo el espacio.

Rpta. $\frac{\pi\,\alpha}{\alpha^2+1}$

49) Calcular $\iint\limits_D \frac{2xy\sqrt{1-x^2}}{x^2+y^2}dx\,dy$, donde $D=\{(x,y)/x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$

Rpta. $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\ln 2$

50) Calcular $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, donde D = $\{(x,y)/ax^2\leq y\leq bx^2,\ \frac{c}{x}\leq y\leq\frac{d}{x}\}$ como $0 < a < b,\ 0 < c < d$. **Rpta.** $\frac{3}{4}(b^{4/3}-c^{4/3})(\frac{1}{b^{1/3}}-\frac{1}{a^{1/3}})+\frac{3}{5}(a^{5/3}-c^{5/3})(a^{1/3}-b^{1/3})$

51) Calcular $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, donde $D=\{(x,y)/x\geq 0,\ y^2+2x\leq 1\}$

Rpta. $\frac{6}{35}$

52) Calcular $\iint\limits_D \sqrt{\frac{x-y}{x(x^2+y^2)}}dx\,dy$, donde D $=\{(x,y)/x^2+y^2-2y\leq 0,\ y\leq x\}$

53) Calcular $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, donde D $=\{(x,y)/x^2+y^2-2y\leq 0,\ y\leq x\}$

54) Calcular $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$, donde D es el cuadrado limitado por las rectas $x + y = 1,\ x - y = 1,\ x + y = 3,\ x - y = -1$ **Rpta.** $\frac{20}{3}$

55) Calcular $\iint\limits_D \frac{dx\ dy}{x^2+y^2+1}$, si D esta limitado por la semicircunferencia $y=\sqrt{1-x^2}$ y el eje X.

Rpta. $\frac{\pi}{2}\ln 2$

56) Calcular $\iint\limits_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$, donde D está limitado por las líneas $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$. **Rpta.** 3π

57) Calcular $\iint_D dxdy$, donde D esta limitado por las líneas xy = 1, xy = 2, y = x, y = 3x.

Rpta. $\frac{\ln 3}{2}$

58) Calcular $\iint_D x^2y^2 dxdy$, donde D es la región acotada entre las dos hipérbolas xy = 1, xy = 2 y las líneas rectas y = x, y = 4x. **Rpta.** $\frac{2}{3}\ln 2$

59) Calcular $\iint_D e^{x-y} dxdy$, donde D es el interior del triángulo encerrado por los ejes coordenados y la recta de ecuación x + y =1.

60) Evaluar la integral $\int_0^a \int_0^x \frac{\sec^2 x}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy\, dx$, a > 0.

61) Calcular el valor de la integral $\iint_D xydxdy$, donde D es la región acotada por las curvas y - 2x = 0, y - 2x + 2 = 0, x - y = 0, y = x + 1.

62) Evaluar la integral graficando la región de integración $\int_0^2 \int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy\, dx$

63) Calcular la integral $\iint_D (4x+y)e^{16x^2-y^2} dxdy$, donde D es la región limitada por el cuadrilátero de vértice (0,0), $(\frac{1}{2},2)$, (1,0), $(\frac{1}{2},-2)$. **Rpta.** $\frac{e^{16}-17}{4}$

64) Evaluar $\iint_D (x-4y)^2 \operatorname{sen}(x^2-16y^2)dxdy$, donde D es el rombo de vértices (0,0), (4,-1), (8,0), (4,1).

65) Evaluar $\iint_R \sqrt{36-(x-y)^2-\frac{y^2}{2}}\, dxdy$, donde R es la región limitada por las curvas

$C_1: 4(x-y)^2 + y^2 - 24x + 24y = 0$, $C_2: 4(x-y)^2 + y^2 \geq 36$

66) Calcular $\int_0^a \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy\,e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dy\,dx$ **Rpta.** $-\frac{1}{4}(e^{a^2}+\frac{e^{a^2}+1}{a^2})$

67) Calcular $\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, sobre la región D encerrada por las rectas x = 1, y = x, y = -x (sug. x = u, y = u sen v) **Rpta.** $\frac{\pi}{6}$

68) Calcular $\iint_D f(x,y)dxdy$, donde D es la región limitada por las curvas $C_1:\ y=1-\sqrt{2x-x^2}$, $C_2:\ y=1+2\sqrt{2x-x^2}$ y la función f(x,y) dado por

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\,, & y\le 1\\ \sqrt{4-4(x-1)^2-(y-1)^2}\,, & y>1\end{cases}$$

Rpta. $\frac{11\pi}{9}-\frac{2}{\sqrt{3}}$

69) Evaluar $\iint_D \operatorname{sen} y^3\,dA$, donde D es la región limitada por $y=\sqrt{x}$, y = 2, x = 0.

Rpta. $\frac{1-\cos 8}{3}$

70) Calcular $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, donde D esta limitada por la elipse $(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3})^2=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ situado en el primer cuadrante. **Rpta.** $\frac{\pi}{8\sqrt[4]{6}}$

71) Calcular la integral doble pasando a coordenadas polares $\int_0^a (\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy)dx$.

Rpta. $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$

72) Calcular $\iint_D x(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})dx\,dy$ donde D es la región $D=\{(x,y)\in R^2\,/\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le 2^{\frac{2}{3}},\ x\ge 0\}$. **Rpta.** $(\frac{384}{385})2^{\frac{2}{3}}$

73) Calcular la integral doble $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\, dx\, dy$, donde la región D es un anillo entre dos circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=25$. **Rpta.** $\frac{128}{3}\pi$

74) Calcular la integral doble $\iint_D (x^2+y^2)dx\, dy$, donde la región D esta limitada por las curvas $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, y = 0 (y > 0). **Rpta.** $\frac{45}{64}\pi a^4$

75) **Calcular la integral doble** $\int_0^a (\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})dy$. **Rpta.** a

76) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ (c > 1) donde la región D esta limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (pase a coordenadas polares generalizadas x = ar cos θ, y = br sen θ).

Rpta. $2\pi ab(c-\sqrt{c^2-1})$

77) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, donde la región D es una parte del circulo de radio a con el centro en el punto O(0,0) la cual esta situada en el primer cuadrante.

Rpta. $\frac{\pi a}{2}$

78) Calcular la integral doble $\iint_D \frac{x\, dx\, dy}{x^2+y^2}$, donde la región D esta limitada por las curvas $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, y = 0 (x > 0, a > 0). **Rpta.** $\frac{a}{2}(2-\ln 2)$

79) Calcular la integral doble $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde la región D esta limitada por el pétalo de la LEMNISCATA $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (x ≥ 0). **Rpta.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$

80) Hallar los limites de integración de $\iint_D f(x,y)dx\,dy$, donde D esta limitada superiormente por $y = 2+\sqrt{1-x^2}$ e inferiormente por y = 2 |x|.

81) Sea D la región limitada por las rectas x – 2y = 0, x – 2y = -4, x + y = 4, x + y = 1, calcular la integral doble $\iint_D 3xy\,dx\,dy$.

82) Calcular la integral doble $\int_0^a \left(\int_y^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{(4a^2+x^2+y^2)}\right)dy$

83) Calcular $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, donde D es el triángulo de Vértices $(0,0), (2,0), (1,\sqrt{3})$.

84) Calcular el valor de la integral $\iint_F x\,dx\,dy$, donde D es la región acotada por las líneas y – 2x = 0, y – 2x + 2 = 0, x – y = 0, y = x + 1.

85) Hallar el área de la región limitada por las curvas xy = 4, xy = 8, $xy^3 = 15$, $xy^3 = 5$.

Rpta. $2\ln 3.u^2$

86) Hallar el área limitada por la elipse. $(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2 = 100$

Rpta. $10\pi\ u^2$

87) Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de las parábolas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ $(0 \le a \le b,\ 0 \le \alpha \le \beta)$ **Rpta.** $\frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{3}u^2$

88) Hallar el área de la región limitada por las líneas $(\frac{x}{a})^{2/3}+(\frac{y}{b})^{2/3} = 1$, $(\frac{x}{a})^{2/3}+(\frac{y}{b})^{2/3} = 4$, xb = ay, 8bx = ay, a > 0, b > 0. **Rpta.** $\frac{189}{16}\text{arctg}\frac{1}{3}+\frac{12ab}{25}$

89) Hallar el área de la región limitada por la parte exterior del círculo $(x-4)^2+y^2=16$ e interior a la circunferencia $(x-6)^2+y^2=36$.

90) Hallar el área de la región limitada por la línea $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$. **Rpta.** $\frac{3\pi}{4}u^2$

91) Hallar el área de la región limitada por la línea $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=\frac{xy}{c^2}$. **Rpta.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}u^2$

92) Hallar el área de la región limitada por la línea $(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2=\frac{x^2+y^2}{25}$ **Rpta.** $\frac{39\pi}{25}u^2$

93) Hallar el área de la región limitada por la línea $(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ **Rpta.** $6u^2$

94) Hallar el área de la región limitada por la curva $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$, x = 0, y = 0, a > 0, b > 0. **Rpta.** $\frac{ab}{70}u^2$

95) Hallar el área de la región limitada por las líneas $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, y = x, y = 0. **Rpta.** $(\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2})u^2$

96) Calcular $\iint_D xdxdy$ sobre la región encerrada por las parábolas $y=x^2$, $x=y^2$, y - 1 = (x - 1), $(y-1)^2=x-1$ **Rpta.** $-\frac{1}{3}$

97) Encontrar el área de la región en el cuadrante positivos del plano XY limitada por las curvas $x^2+2y^2=1$, $x^2+2y^2=4$, y = 2x, y = 5x.

98) Hallar el área de la región acotada por la curva $y^2=x^4(x+4)$.

99) Hallar el área de la región limitada por la curva $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=\frac{x^2}{c^2}$. **Rpta.** $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$

100) Hallar el área de la región limitada por el buche de la curva $(x+y)^4=ax^2$ y que se encuentra en el primer cuadrante (a > 0). **Rpta.** $\frac{a^2}{210}$

101) Hállese el área de la figura limitada por las curvas $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=abx$, y = x, y = 0 (0 < a < b). **Rpta.** $\frac{b^2-a^2}{4}(\pi+2)$

102) Hállense el área limitada por las curvas $y^2=4ax+4a^2$ y x + y = 2a (a > 0).

Rpta. $\frac{64}{3}a^2$

103) Hállense el área de la figura limitada por las curvas $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, x = 2y, x = 0 (a > 0).

Rpta. $a^2(\pi-1)$

104) Hállense el área de la figura limitada por las curvas $y^2=px$, y = ax, y = bx (0 < p < q, 0 < a < b). **Rpta.** $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$

105) Encontrar el volumen del sólido del primer octante bajo el paraboloide $z=x^2+y^2$ y dentro del cilindro, $x^2+y^2=9$ **Rpta.** $\frac{81}{8}\pi\, u^3$

106) Hallar el volumen del sólido S limitado por el cono $z^2=x^2+y^2$ y el paraboloide $3z=x^2+y^2$ **Rpta.** $\frac{9\pi}{2}u^3$

107) Encontrar el volumen de la región situada sobre el disco $x^2+(y-1)^2 \le 1$ y acotada por arriba de la función $z=x^2+y^2$ **Rpta.** $\frac{3\pi}{2}u^3$

108) Hallar el volumen limitado por las superficies $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$

Rpta. $\frac{\pi a^3}{3}u^3$

109) Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XY, la superficie $z=ae^{-(x^2+y^2)}$ y el cilindro, $x^2+y^2=R^2$ **Rpta.** $\pi a(1-e^{-R^2})u^3$

110) Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $2az=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$ (se sobre entiende el volumen situado dentro del paraboloide).

Rpta. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)u^3$

111) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies z = x + y, xy = 1, xy = 2, y = x, y = 2x, z = 0 (x > 0, y > 0) **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)u^3$

112) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro, $x^2+y^2=ax$

Rpta. $\frac{a^3}{36}(9\pi-16)u^3$

113) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=1$

Rpta. $\frac{2}{3}(8-3\sqrt{3})\pi\, u^3$

114) Hallar el volumen del cuerpo limitado por los cilindros $x^2+y^2=R^2$, $z=\frac{x^3}{a}$ y el plano $z=0,\ x\geq 0.$ **Rpta.** $\frac{4R^5}{15a}u^3$

115) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y los planos $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$, $(x\geq 0)$ **Rpta.** $\frac{abc}{3}u^3$

116) Hallar el volumen del sólido comprendido dentro de la superficie $z=xy$, $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $z=0$. **Rpta.** $(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3})u^3$

117) Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $z=\frac{x}{2}$, $z=x$. **Rpta.** $\frac{a^2b}{3}u^3$

118) Hallar el volumen del sólido limitado inferiormente por el plano XY, superiormente por el elipsoide de revolución $b^2x^2+b^2y^2+a^2z^2=a^2b^2$ y lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=ay$ **Rpta.** $\frac{2a^2b}{9}(3\pi-4)u^3$

119) Encontrar el volumen encerrado por las superficies definidas por las ecuaciones $x^2+y^2=cz$, $x^2+y^2=ax$, $z=0$. **Rpta.** $\frac{3\pi a^4}{32c}u^3$

120) Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cono $2(x^2+y^2)-z^2=0$ y el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=-a^2$ **Rpta.** $\frac{4a^3\pi}{3}(\sqrt{2}-1)u^3$

121) Hallar el volumen del sólido D, en el primer octante limitada por:

$$D:\begin{cases} x^2+z=64 \\ 3x+4y=24 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

122) Encontrar el volumen acotado por las superficies $z=x^2+y^2$ y $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

Rpta. $\frac{\pi}{4}u^3$

123) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies. $x^2+y^2=2x$, $2-x^2-y^2-z=0$ y $z=0$. **Rpta.** $\frac{3\pi}{4}u^3$

124) Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2+y^2+z^2=9c^2$ y $x^2+y^2=4c^2$, interior al cilindro.

125) Calcular el volumen V del cuerpo acotado por la superficies esférica $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el cilindro $x^2+y^2-2ay=0$ **Rpta.** $V=\frac{16a^3}{9}(3\pi-4)$

126) Hallar el volumen de la región sólida S limitada superiormente por $z=1-x^2-y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$.

127) Hallar el volumen del sólido comprendido por debajo de $z=8-y^2$, por encima de $z = 0$ y dentro de las superficies $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$

128) Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z=\frac{a^2-x^2-4y^2}{a}$ y el plano $z = 0$. **Rpta.** $\frac{a^3\pi}{4}u^3$

129) Encontrar el volumen del sólido que se obtiene cortando la superficie $\frac{z^2}{c}+\frac{y^2}{b}=2x$ por un plano paralelo al plano YZ, x = a. **Rpta.** $a^2\sqrt{ac\pi}\,u^3$

130) Hallar el volumen del sólido limitado por el plano XY, el cono $z^2=x^2+y^2$ y el cilindro, $x^2+y^2=2ax$ **Rpta.** $\frac{32}{9}a^3\,u^3$

131) Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado por el cono $a^2y^2=h^2(x^2+z^2)$ y entre y = 0, y = h **Rpta.** $\frac{a^2h\pi}{12}u^3$

132) Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado por lo cilindros parabólicos $z=9-x^2$, $x=3-y^2$, y = 0, x = 0. **Rpta.** $\frac{486\sqrt{3}}{35}u^3$

133) Encontrar el volumen del sólido comprendido dentro del paraboloide de $a^2z=H(a^2-x^2-y^2)$ y el plano XY. **Rpta.** $\frac{\pi Ha^2}{2}u^3$

134) Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y los cilindros $a^2y=b(a^2-x^2)$, $a^2z=c(a^2-x^2)$ **Rpta.** $\frac{8abc}{15}u^3$

135) Hallar el volumen del sólido en el interior del cilindro $x^2+y^2=a^2$, entre z = 0, y $a^2z=h(x^2+y^2)$ **Rpta.** $\frac{\pi a^2h}{2}u^3$

136) Hallar el volumen del sólido comprendido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y cilindro $x^2+(y-a)^2=a^2$ **Rpta.** $\frac{16a^3}{9}(3\pi-4)$

137) Hallar el volumen del sólido comprendido en el interior del prisma acotado por los planos $y = x$, $y = 0$, $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y entre el plano $z = 0$ y el cono $z = h\sqrt{x^2 + y^2}$

Rpta. $\dfrac{a^2 h}{12}[1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})]$

138) Calcular la masa y el centro de masa de la lámina indicada para la densidad que se proporciona.

a) Lámina: Triangular con vértice (0,0), (0,a), (a,0) densidad $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Rpta. $\dfrac{a^4}{6}, (\dfrac{2a}{5}, \dfrac{2a}{5})$

b) Lámina: Región limitada por $y = x^2$, $y^2 = x$, densidad proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

Rpta. $\dfrac{6}{35}K, (\dfrac{275}{432}, \dfrac{275}{432})$

139) Calcular la masa de una placa cuadrada de lado "a", cuya densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia entre este punto y uno de los vértices del cuadrado.

Rpta. $\dfrac{2}{3}a^4 k$, k= coeficiente de proporcionalidad.

140) Calcular la masa de una placa circular de radio r, si su densidad es inversamente proporcional a la distancia entre un punto y el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

Rpta. $2\pi\ r^2 \delta$

141) Encontrar el centro de masa de una lámina que tiene la forma de una región limitada por la curva: $x^2 + y^2 = 64$, de densidad $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ en cada punto (x,y).

142) Encontrar la masa de una región plana acotada por un arco de la curva $y = \text{sen}\, x$, y el eje X, si al densidad es proporcional a la distancia desde el eje X.

Rpta. $\dfrac{\pi k}{4}$

143) Encontrar la masa y el centro de masa de la región de la forma de un cuadrado de vértices (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) y de densidad $\rho(x,y)=|x|+|y|$

Rpta. 4, centro en (0,0)

144) Encontrar la masa y el centro de masa de la región comprendida por las líneas $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 1$.

Rpta. $\frac{\pi}{4}$, $(\frac{12}{7\pi},\frac{12}{7\pi})$

145) Determinar la masa y el centro de masa de la lámina si la densidad de área es como se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

a) Una lámina en forma de la región limitada por la parábola $x^2=8y$, la recta $y=2$, y el eje Y, la densidad de área varía con la distancia desde la recta $y=-1$

Rpta. $\frac{176}{15}k\ kg$, $(\frac{35}{22}, \frac{102}{77})$

b) Una lámina en forma de la región en el primer cuadrante, limitada por la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ y los ejes coordenados, la densidad de área varía con la suma de las distancias, desde las aristas rectas.

Rpta. $\frac{2k}{3}kg$, $(\frac{3a}{32}(2+\pi), \frac{3a}{32}(2+\pi))$

146) Determinar la masa de la lamina que tiene forma de la región limitada por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=\pi$ sabiendo que su densidad en cada punto $P(x,y)$ es $\rho(x,y)=e^{x-y}\operatorname{sen}(x+y)$.

Rpta. $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{4}$

147) La densidad en cualquier punto de una lamina semicircular de radio R es proporcional de su distancia al origen. Encontrar el centro de masa de la lamina.

Rpta. $(\bar{x},\bar{y})=(0,\frac{3R}{2\pi})$

148) Hallar la masa de la lamina correspondiente a la región del primer cuadrante del circulo $x^2 + y^2 = R^2$, siendo la densidad en cualquier punto interior proporcional a la distancia entre el punto y el centro. **Rpta.** $M = \frac{kR^3\pi}{6}$

149) Calcular el momento de inercia respecto al eje X, de una lamina delgada limitada en el plano XY, por las curvas $y = \sqrt{2x}$, y = 0, x = 2. La densidad en un punto cualquiera de la lamina es $\rho(x,y) = |x - y|$. **Rpta.** $I_x = \frac{24}{35}$

150) Una lamina delgada tiene la forma del triángulo de Vértice A(0,0), B(π,π) y C(2π,0). Halle la masa de la lamina sabiendo que su densidad en cada punto es $\rho(x,y) = (x+y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$. **Rpta.** $M = \pi^2 - \frac{\operatorname{sen} 4\pi^2}{4}$

151) Calcular el centro de masa de la lamina delgada representada por la región R que se encuentra por encima del eje X y entre las gráficas de las ecuaciones y = x, y = - x, $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 6y$; y > 0 siendo la densidad en cada punto P(x,y) de la lamina $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. **Rpta.** $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{1677}{380})$

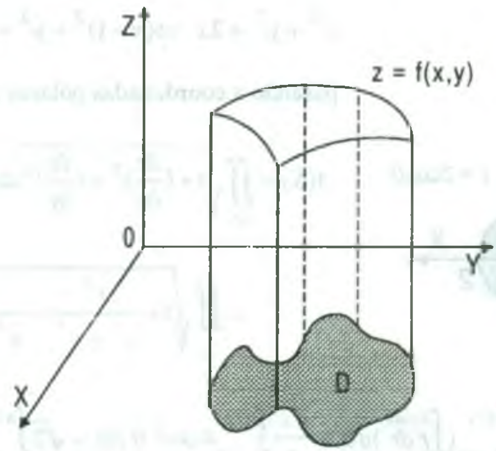
152) Una lamina delgada tiene la forma de la región R y con densidad $\rho(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Hallar la masa de la lamina, si R es la región que es interior a la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 4$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Rpta. $M = \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

5.19. Cálculo del Área de una Superficie.

Si la función $z = f(x,y)$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en una región cerrada D del plano XY, entonces el área de la superficie S: $z = f(x,y)$ sobre D viene dado por:

área de la superficie $S = A(S) = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2}\, dxdy$ donde D es la proyección de la superficie dada sobre el plano XY.



Si la superficie está definida por la ecuación $x = f(y,z)$ entonces:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2}\, dydz$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano YZ.

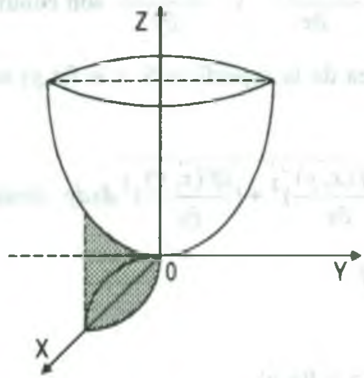
Si la ecuación de la superficie está definida por $y = f(x,z)$, entonces:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2}\, dxdz$$

donde D es la proyección de la superficie sobre el plano XZ

Ejemplo.- Hallar el área de la parte del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ comprendida dentro del cilindro $x^2+y^2=2x$

Solución

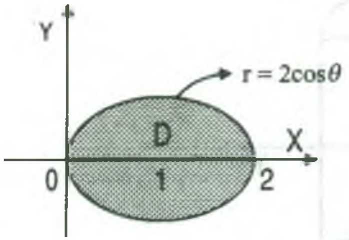


como $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

la región D es el círculo limitado por la ecuación

$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

pasando a coordenadas polares x = r cos θ , y = r sen θ



$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{2}\iint_D dx\,dy=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\int_0^{2\cos\theta} r\,dr\,)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\cos^2\theta\,d\theta=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}[\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta}{2}]\Big/_{-\pi/2}^{\pi/2}=\sqrt{2}[(\frac{\pi}{2}+0)-(-\frac{\pi}{2}+0)]=\sqrt{2}\pi u^2$$

Ejemplo.- Calcular el área de la parte superior del paraboloide $x=1-y^2-z^2$ cortada por el cilindro $y^2+z^2=1$

Solución

La región de integración es la circunferencia $y^2+z^2=1$ situada en el plano YZ.

ahora de la ecuación del paraboloide se tiene: $x=1-y^2-z^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}=-2y\,,\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-2z$

$$A(s)=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial y})^2}\,dxdy=\iint_D \sqrt{1+4y^2+4z^2}\,dydz$$

pasando a coordenadas polares se tiene:

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr)d\theta=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}(5\sqrt{5}-1)\,d\theta=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi\ \mu^2$$

Ejemplo.- Calcular el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=2ay$ que es cortada por un manto del cono $y^2=x^2+z^2$

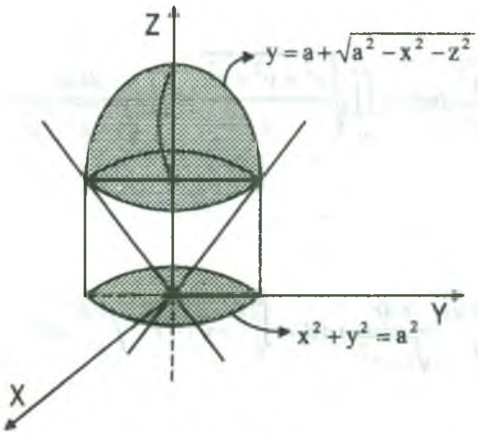
Solución

Como la esfera es $x^2+y^2+z^2=2ay$ entonces $x^2+(y-a)^2+z^2=a^2$ cuyo centro es (0,a,0).

La ecuación de la mitad de la superficie es $y=a+\sqrt{a^2-x^2-z^2}$, La proyección de la superficie en el primer octante, es la región.

$$D=\left\{(x,z)/0\le x\le a\ \wedge\ 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2}\right\}$$

cuya gráfica es:



$$y=a+\sqrt{a^2-x^2-z^2}$$

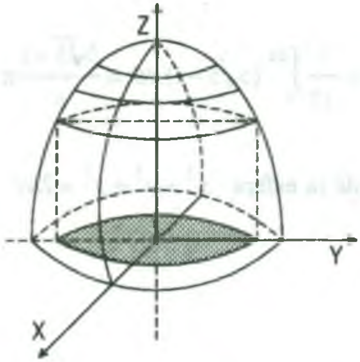
$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}$$

$$1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2=\frac{a^2}{a^2-x^2-z^2}$$

$$A(S)=4\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\,dx\,dz \qquad \therefore\quad A(S)=2\pi a^2\mu^2$$

Ejemplo.- Hallar el área de la superficie S que es parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ dentro del cono $x^2+y^2=z^2$, para z > 0.



Solución

S: $x^2+y^2+z^2=1$ la esfera ahora veremos la variación de z y esto corresponde a la intersección de:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$$

para este valor de z la superficie se encuentra sobre el disco $x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ en el plano XY.

por lo tanto S: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, para $\frac{1}{\sqrt{2}}\le z\le 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Fx}{Fz}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Fy}{Fz}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}$$

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

pasando a coordenadas polares se tiene:

$$A(S)=\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}=\iint_D\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}}=\int_0^{2\pi}(\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}})\,d\theta=\int_0^{2\pi}-\sqrt{1-r^2}\Big/_0^{1/\sqrt{2}}\,d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)\,d\theta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}2\pi\;=(2-\sqrt{2})\pi\;\mu^2$$

5.20 Ejercicios Propuestos.

I. Áreas de Superficies.

1) Calcular el área de la parte del plano 6x + 3y + 2z = 12 que está situada en el primer octante. **Rpta.** $26u^2$

2) Hallar el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 8y$ que está dentro del paraboloide $y^2 = x^2 + z^2$. **Rpta.** 40π

3) Hallar el área de la función del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ comprendida entre el plano z = 5x el plano XY. **Rpta.** $80u^2$

4) Hallar el área de la superficie $y = x^2 + z^2$ cortada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y situada en el primer octante. **Rpta.** $\frac{5\sqrt{5}-1}{24}\pi u^2$

5) Hallar el área de la superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 8y$, interceptada por el cilindro parabólico $y^2 = 2x$ y el plano x = 6. **Rpta.** $\frac{224a^2}{9}\pi u^2$

6) Hallar el área de la superficie que se forma cuando los planos x = 0, x = 1, y = 0, y = 1 cortan al plano 2x + y + z = 4. **Rpta.** $\sqrt{6}\, u^2$

7) Hallar el área de la parte de la superficie z = 2xy cortada por los planos x = 1, y = 4, z = 0. **Rpta.** $40\sqrt{\frac{2}{3}}u^2$

8) Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$. **Rpta.** $4a^2(\frac{\pi}{2} - 1)u^2$

9) Hallar el área de la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ cortada por el cilindro $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. **Rpta.** $\frac{16\pi}{3}u^2$

10) Hallar el área de la porción de la superficie que se forma al cortar la esfera $x^2+y^2+z^2=4x$ por una hoja del cono $y^2+z^2=x^2$. **Rpta.** 8π

11) Hallar el área de la parte del plano z = x encerrado dentro del cilindro $x^2+y^2=4$ por encima del plano z = 0. **Rpta.** $2\sqrt{2}\,\pi\,u^2$

12) Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $z=x^2$ cortada por los planos $x+y=\sqrt{2}$, x =0, y = 0. **Rpta.** $[\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+2\sqrt{2})]u^2$

13) Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2+y^2=a^2$ (z ≥ 0) comprendida entre los planos z = 5x y z = 2x. **Rpta.** $12a^2$

14) Calcular el área de la superficie del cono situada dentro del cilindro $x^2+y^2=1$.
Rpta. $\pi\,u^2$

15) Calcular el área de la superficie del cilindro $x^2+z^2=4$ situada dentro del cilindro $x^2+y^2=4$. **Rpta.** $32u^2$

16) Calcular el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2+y^2=2ax$ comprendida entre el plano XY y el cono $x^2+y^2=z^2$. **Rpta.** $8a^2$

17) Hallar el área de la parte del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ comprendida entre los planos coordenados. **Rpta.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

18) Hallar el área de la parte de la superficie del cono $x^2 = y^2$, situado dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. **Rpta.** $3a^2\pi u^2$

19) Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cortada por el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Rpta.** $8a^2 \operatorname{arcsen}(\frac{b}{a})$

20) Hallar el área de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cortada por el cilindro $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$. **Rpta.** $\sqrt{2}\, a^2 u^2$

21) Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y que está dentro del paraboloide $3z = x^2 + y^2$. **Rpta.** $4\pi u^2$

22) Hallar el área de la parte de la superficie $z^2 = 4x$ recortada por el cilindro $y^2 = 4x$ y el plano x = 1. **Rpta.** $\frac{16}{3}(\sqrt{8} - 1)u^2$

23) Hallar el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano XY y recortada por el plano $z = \sqrt{2}(\frac{x}{2} + 1)$. **Rpta.** $8\pi u^2$

24) Calcular el área de la parte de la superficie del cono $x^2 - y^2 = z^2$, situada en el primer octante y limitada por el plano y + z = a. **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 u^2$

25) Calcular el área de la parte de superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$, comprendida dentro del cilindro $y^2 = ax$ y el plano x = a. **Rpta.** $\frac{\pi a^2}{2}(3\sqrt{3} - 1)u^2$

26) Demostrar que las áreas de las partes de las superficies de los paraboloides $x^2 + y^2 = 2az$ y $x^2 - y^2 = 2az$ cortadas por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ son iguales.

27) Hallar el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=ax$. **Rpta.** $2a^2(\pi-2)u^2$

28) Hallar el área de la parte de la superficie del cono $x^2=y^2+z^2$ situado dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$. **Rpta.** $3\pi a^2u^2$

29) Hallar el área de la parte del cono $z^2=x^2+y^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$.

Rpta. $3\pi a^2\sqrt{2}u^2$

30) Hallar el área total de la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=2ay$.

Rpta. $a^2(\pi-2)$

31) Hallar él área cortada de la superficie $az=y^2-x^2$ por el cilindro $x^2+y^2=a^2$.

Rpta. $(5\sqrt{5}-1)\dfrac{\pi a^2}{6}u^2$

32) Hallar el área total de la parte del cilindro $x^2+z^2=a^2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=ax$.

33) Hallar el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=2a^2$ que está cortada por la rama superior del cono $z^2=x^2+y^2$. **Rpta.** $2a^2(2-\sqrt{2})\pi u^2$

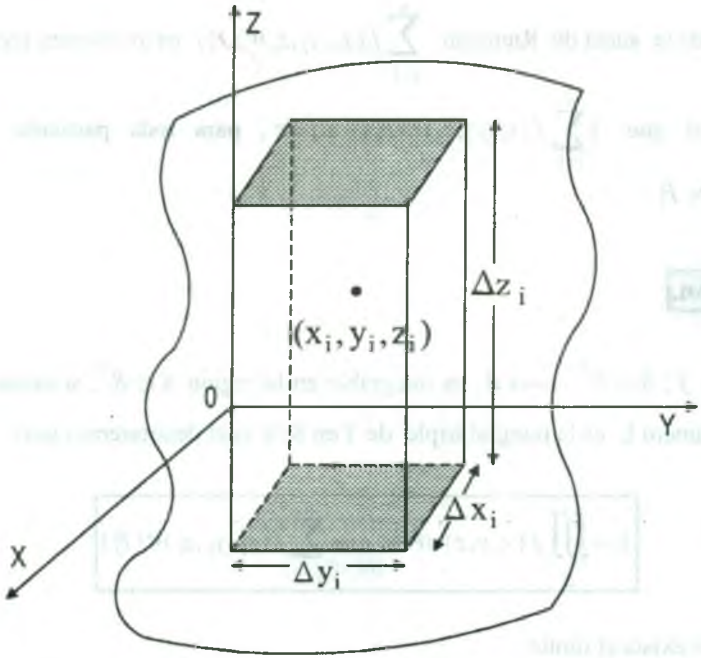
34) Hallar el área de la porción de la superficie $x^2+y^2=z^2$ situada por encima del plano XY y limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2ax$. **Rpta.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}u^2$

CAPITULO VI

6. INTEGRALES TRIPLES.

Conociendo las integrales dobles $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, estudiaremos las integrales triples $\iiint\limits_{S} f(x,y,z)dxdydz$, cuya diferencia está, en lugar de tratar con funciones de dos variables continuas en una región del plano D, trataremos con funciones de tres variables continuas en una porción S del espacio.

Consideremos una función f acotada en una región $S \subset R^3$, es decir $f: S \subset R^3 \longrightarrow R$, trazamos planos paralelos a los planos coordenados, obteniéndose paralelepípedos $P_1,\ P_2, \ldots, P_n$ que están contenidos en S.



6.1 Definición.

Consideremos una partición de la región S al conjunto $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, donde la norma de esta partición es $|P|$ que es la diagonal mayor de los paralelepípedos que forman la partición.

Sea $V(P_i) = \Delta x_i . \Delta y_i . \Delta z_i$ el volumen del i-ésimo paralelepípedo P_i, i = 1,2,...,n y (x_i, y_i, z_i) un punto arbitrario escogido en P_i.

La suma de Riemann asociado a la partición P de la función f es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i . \Delta y_i . \Delta z_i$$

6.2 Definición.

El límite de la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(P_i)$ es un número real L, sí $\forall$ ε > 0, $\exists$ δ > 0, tal que: $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(P_i) - L\right| < \varepsilon$, para toda partición P con $|P| < \delta$, $(x_i, y_i, z_i) \in P_i$

6.3 Definición.

La función $f: S \subset R^3 \longrightarrow R$, es integrable en la región $S \subset R^3$, si existe un número L, donde el número L es la integral triple de f en S, al cual denotaremos por:

$$\boxed{L = \iiint_S f(x, y, z)\, dV = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) V(P_i)}$$

siempre que exista el límite.

6.4 Propiedades de la Integral Triple.

1) $\iiint\limits_S k\,f(x,y,z)dV = k\iiint\limits_S f(x,y,z)dV$

2) $\iiint\limits_S [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \iiint\limits_S f(x,y,z)dV \pm \iiint\limits_S g(x,y,z)dV$

3) $\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{S_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{S_2} f(x,y,z)dV$

siendo S la unión de dos subconjuntos disjuntos S_1 y S_2.

Observación.- La función $f\colon S \subset R^3 \longrightarrow R$ es integrable en la región $S \subset R^3$, si f es continua en una región cerrada $S \subset R^3$.

6.5 Cálculo de Integrales Triples Mediante Integrales Iteradas.

En el cálculo de la integral triple por medio de integrales iteradas se presentan seis órdenes:

dx dy dz , dy dx dz , dz dx dy

dx dz dy , dy dz dx , dz dy dx

Describiremos una región que se considera simple con respecto al orden dz dy dx, los otros cinco órdenes se describen en forma similar.

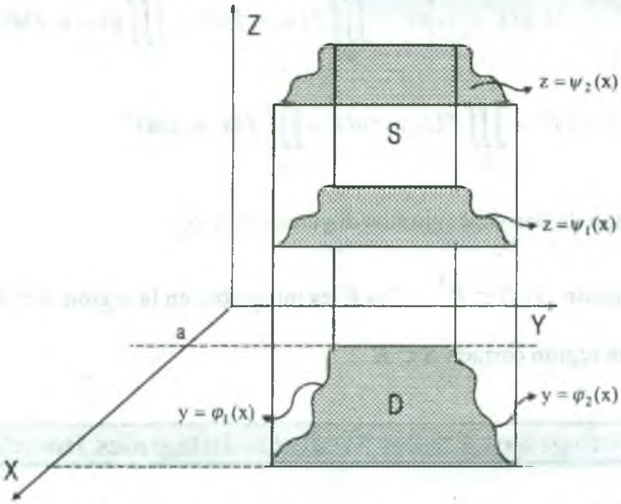
Para calcular la integral triple en el orden dz dy dx, consideremos una región cerrada en el plano XY. $D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, a \le x \le b \;\wedge\; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ donde $\varphi_1, \varphi_2\colon [a,b] \longrightarrow R$ son funciones continuas y además $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $\forall$ x $\in$ [a,b].

Si $\psi_1, \psi_2\colon D \subset R^2 \longrightarrow R$ son funciones continuas en la región cerrada D y $\psi_1(x,y) \le \psi_2(x,y)$, $\forall$ (x,y) $\in$ D, consideremos una región cerrada S de R^3 dado por:

$S = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, a \le x \le b \;\wedge\; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \wedge \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$

Si $f: S \subset R^3 \longrightarrow R$, es una función continua en S, entonces la integral iterada de f es:

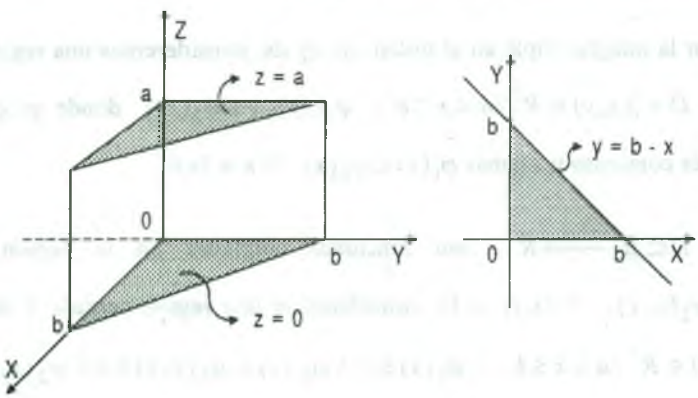
$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx}$$



Ejemplo.- Calcular $\iiint_T (2x+3y-z)dxdydz$, si el dominio T es un prisma triangular limitado por los planos z = 0, z = a, x = 0, y = 0, x + y = b $(a \geq 0,\ y \geq b)$.

<u>**Solución**</u>

$T = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, 0 \leq x \leq b \ \wedge\ 0 \leq y \leq b-x \ \wedge\ 0 \leq z \leq a\}$, ahora graficando esta región:



$$\iiint_T (2x+3y-z)dx\,dy\,dz = \int_0^b (\int_0^{b-x} (\int_0^a (2x+3y-z)dz)dy)dx$$

$$= \int_0^b (\int_0^{b-x} \left[(2x+3y)z - \frac{z^2}{2} \right] \Big/_0^a dy)dx = \int_0^b (\int_0^{b-x} \left[(2x+3y)a - \frac{a^2}{2} \right] dy)dx$$

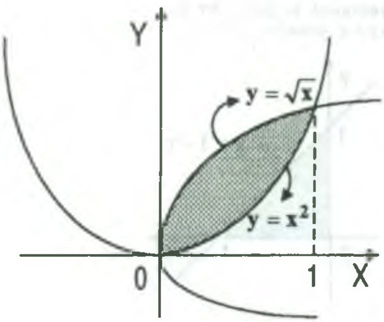
$$= \int_0^b (2axy + \frac{3ay^2}{2} - \frac{a^2 y}{2}) \Big/_0^{b-x} dx = \int_0^b [(2ax - \frac{a^2}{2})(b-x) + \frac{3a}{2}(b-x)^2]dx$$

$$= \int_0^b [\frac{3ab^2 - a^2 b}{2} + (\frac{a^2}{2} - ab)x - \frac{ax^2}{2}]dx = \frac{ab^2}{12}(10b-3a)$$

Ejemplo.- Calcular la integral $\iiint_T xyzdxdydz$, donde T es la región limitada por $x = y^2$, $x^2 = y$, z=xy, z = 0.

Solución

$$T = \{(x,y,z) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 1 \ \wedge \ x^2 \le y \le \sqrt{x} \ \wedge \ 0 \le z \le xy\}$$



$$\iiint_T xyz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (\int_0^{xy} xyz\,dz)dy)dx$$

$$= \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{xyz^2}{2} \Big/_0^{xy} dy)dx = \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x^3 y^3}{2} dy)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3 y^4}{8} \Big/_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (x^5 - z^{11})dx = \frac{1}{96}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint_S f(x,y,z)dV$, donde f(x,y,z) = 1 y

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, -2 \le x \le 2 \ \wedge \ -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \ \wedge \ x^2 + 3y^2 \le z \le 4 - y^2\}$$

Solución

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_S dxdydz = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{x^2+3y^2}^{4-y^2} dz\right)dy\right)dx$$

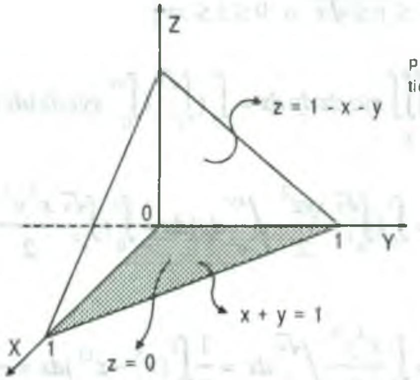
$$= \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}(4-y^2-x^2-3y^2)dy\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}(4-x^2-4y^2)dy\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}(4y-x^2y-\frac{4}{3}y^3)\Big/_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} dx = 2\int_0^2 [(4-x^2-\frac{4}{3}.\frac{4-x^2}{4})(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2})]dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 (4-x^2)^{3/2}dx = 2\pi \qquad \therefore \iiint_S f(x,y,z)dV = 2\pi$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint_T zdxdydz$, si la región T está limitada por los planos x + y + z = 1, z = 0, y = 0, x = 0.

Solución



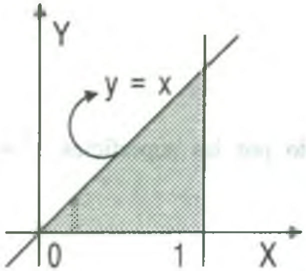
$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} z\,dz\right)dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x-y)^3 \Big/_0^{1-x} dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \left[0-(1-x)^3\right]dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3dx = -\frac{1}{24}(1-x)\Big/_0^1 = -\frac{1}{24}(0-1) = \frac{1}{24}, \therefore \iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{24}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint\limits_T xy^2z^2\,dxdydz$, si el dominio T está limitado por las superficies z = xy, y = x, x = 1, z = 0.

Solución



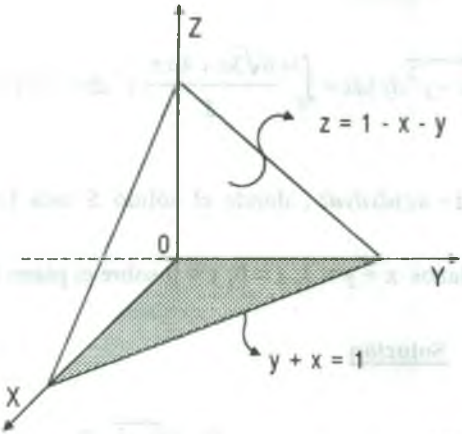
$$\iiint\limits_T xy^2z^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy}xy^2z^2\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x \frac{xy^2z^3}{3}\Big/_0^{xy}dy\right)dx$$

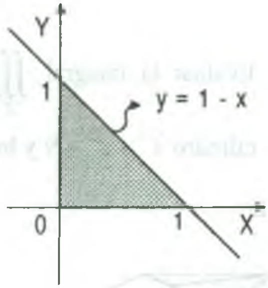
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\int_0^x x^4y^5\,dy\right)dx=\frac{1}{18}\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{198}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, donde T es el recinto de integración que está limitada por los planos coordenados y por el plano x + y + z = 1

Solución



Proyectando al plano XY se tiene z = 0 entonces y = 1 - x



$$\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z+1)^3}\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}-\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\Big/_0^{1-x-y}dy\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y}{4}+\frac{1}{x+y+1}\right)\Big/_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4}-\frac{x}{4}-\frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{8}-\ln(x+1)\right)\Big/_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\ln 2\right)-0\right] = \frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint_S x^2\,dxdydz$, donde S está limitado por las superficies $y^2+z^2=4ax$, $y^2=ax$, x = 3a.

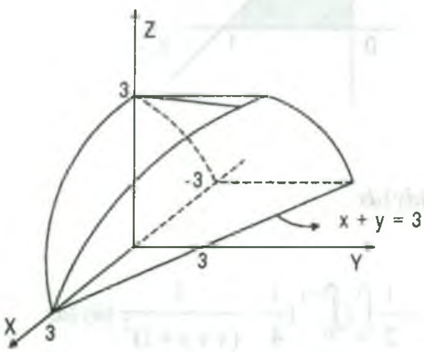
Solución

$$S = \left\{(x,y,z)/\,0\le x\le 3a \ \wedge\ -\sqrt{ax}\le y\le\sqrt{ax} \ \wedge\ -\sqrt{4ax-y^2}\le z\le\sqrt{4ax-y^2}\right\}$$

$$\iiint_S x^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^{3a}\left(\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}\left(\int_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} x^2\,dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^{3a}\left(\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} 2x^2\sqrt{4ax-y^2}\,dy\right)dx = \int_0^{3a}\frac{6\sqrt{3}a+4a\pi}{3}x^3\,dx = 27a^5\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{2}\right)$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\iiint_S (3z+xz)dxdydz$, donde el sólido S está limitado por el cilindro $x^2+z^2=9$ y los planos x + y = 3, z = 0, y = 0 sobre el plano XY.



Solución

$$\iiint_S (3z+xz)dxdydz = \int_{-3}^{3}\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\left(\int_0^{3-x}(3z+zx)dy\right)dz\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{3}(9-x^2)\frac{z^2}{2}\Big/_0^{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)^2\,dx = \frac{648}{5}$$

Ejemplo.- Calcular la integral triple $\int_0^2 dx\int_0^{2\sqrt{x}} dy\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz$

Solución

Sea D: $0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\sqrt{x} \wedge 0\le z\le \sqrt{\dfrac{4x-y^2}{2}}$

$$\int_0^2 dx\int_0^{2\sqrt{x}} dy\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz=\int_0^2\left(\int_0^{2\sqrt{x}}\left(\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz\right)dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_0^{2\sqrt{x}} x\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}dy\right)dx$$

$$=\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2}}\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x-y^2}+\frac{4x}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y}{2\sqrt{x}}\right]\Big/_0^{2\sqrt{x}} dx=\int_0^2\frac{\pi\sqrt{2}x^2}{2}dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

Ejemplo.- Calcular la integral triple $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\dfrac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

Solución

$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Big/_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right)dx=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)dx=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\Big/_0^a=0+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}1+0=\frac{a^2\pi}{4}$$

Ejemplo.- Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\frac{\pi}{2x}}\int_0^{y\sqrt{x}}\dfrac{xz}{y}\cos\dfrac{z^2}{y}\,dzdydx$

Solución

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{\frac{\pi}{2x}}\int_{0}^{y\sqrt{x}}\frac{xz}{y}\cos\frac{z^2}{y}\,dzdydx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{1}^{\frac{\pi}{2x}}\left(\int_{0}^{y\sqrt{x}}\frac{xz}{y}\cos\frac{z^2}{y}\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{1}^{\frac{\pi}{2x}}\frac{x}{2}\,\text{sen}\frac{z^2}{y}\Big/_{0}^{y\sqrt{x}}dy\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{1}^{\frac{\pi}{2x}}\frac{x}{2}\,\text{sen}\,yx\,dy\right)dx$$

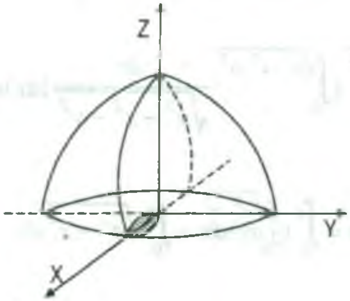
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos yx}{2}\Big/_{1}^{\frac{\pi}{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(0-\cos x)dx=\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x\Big/_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{1}{4}$$

6.6 Volúmenes Mediante Integrales Triples.

Consideremos una función f definida en una región cerrada $S\subset R^3$, es decir $f: S\subset R^3 \longrightarrow R$, tal que f(x,y,z) = 1, ∀ (x,y,z) ∈ S entonces el volumen del sólido S es dado por:

$$\boxed{V(S)=\iiint_S dV=\iiint_S dxdydz}$$

Ejemplo.- Encontrar el volumen del sólido limitado por arriba, por el paraboloide $z=4-x^2-y^2$, y por abajo por el plano z = 4 - 2x

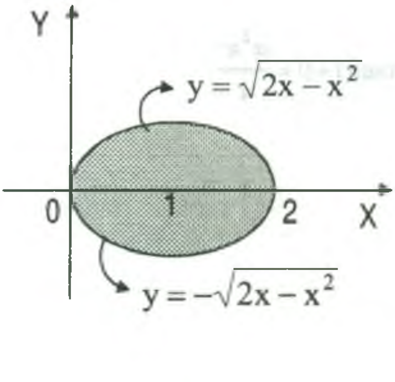


Solución

$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ z=4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2+2x+y^2=0 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{matrix}$$

es la proyección de la intersección de las superficies.

Dibujando la intersección



$$V=\int_0^2\left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\left(\int_{4-2x}^{4-x^2-y^2}dz\right)dy\right)dx$$

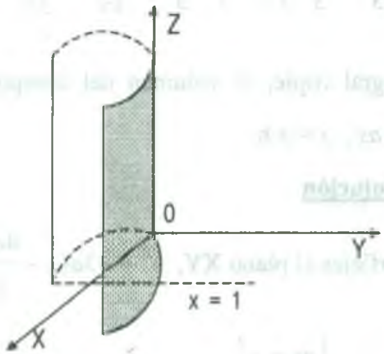
$$=\int_0^2\left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}(2x-x^2-y^2)dy\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{4}{3}(2x-x^2)^{3/2}dx=\frac{\pi}{2}u^3$$

Ejemplo.- Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado inferiormente por el plano XY, superiormente por el plano z = y, lateralmente por el cilindro $y^2 = x$ y el plano x = 1.

Solución

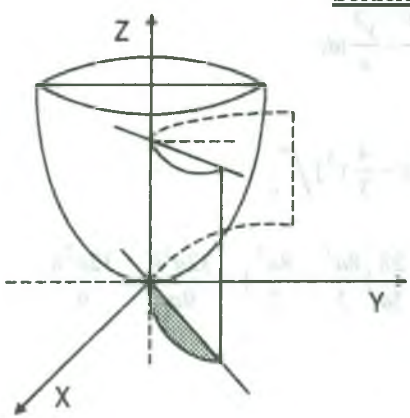
Dibujando la región correspondiente se tiene:

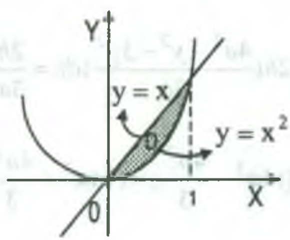


$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^y dz\right)dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big/_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} \Big/_0^1 = \frac{1}{4}\text{u}^3$$

Ejemplo.- Encontrar el volumen en el primer octante, acotado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y^2 = x$ y los planos y = x, z = 0.

Solución





$$V=\int_0^1(\int_{x^2}^{x}(\int_0^{x^2+y^2}dz)dy)dx=\int_0^1(\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy)dx=\int_0^1(x^2y+\frac{y^3}{3})\Big/_{x^2}^{x}dx$$

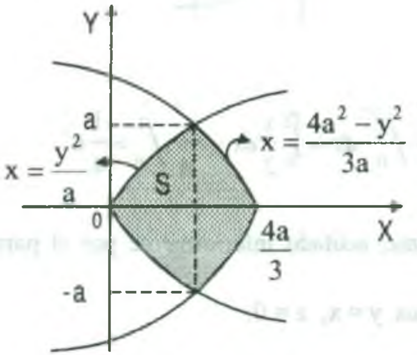
$$=\int_0^1\left[(x^3+\frac{x^3}{3})-(x^4+\frac{x^6}{3})\right]dx=\int_0^1(\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{4}{3}x^3)dx$$

$$=(-\frac{x^7}{21}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{3})\Big/_0^1=\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10-7}{35}=\frac{3}{35}u^3$$

Ejemplo.- Calcular por medio de una integral triple, el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$, $z=\pm h$.

Solución

Proyectando la intersección de las superficies al plano XY, $y^2=-3a(x-\frac{4a}{3})$, $y^2=ax$



$$\begin{cases}ax=y^2\\3ax=4a^2-y^2\end{cases}\quad\text{de donde}$$

$$3y^2=4a^2-y^2\Rightarrow y=\pm a$$

$$V=\iiint_S dxdydz=\int_{-a}^{a}(\int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2-y^2}{3a}}(\int_{-h}^{h}dz)dx)dy$$

$$V=\int_{-a}^{a}(\int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2-y^2}{3a}}2h\,dx)dy=\int_{-a}^{a}(2h(\frac{4a^2-y^2}{3a}-\frac{y^2}{a})dy$$

$$V=\int_{-a}^{a}2h(\frac{4a^2-y^2-3y^2}{3a})dy=\frac{2h}{3a}[4a^2y-\frac{4}{3}y^3]\Big/_{-a}^{a}$$

$$V=\frac{2h}{3a}[(4a^3-\frac{4a^3}{3})-(-4a^3+\frac{4a^3}{3})]=\frac{2h}{3a}[\frac{8a^3}{3}+\frac{8a^3}{3}]=\frac{32a^3h}{9a}=\frac{32a^2h}{9}$$

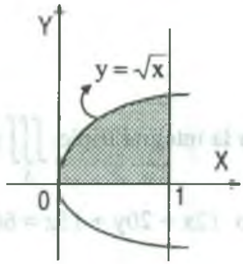
$$V=\frac{32}{9}a^2hu^3$$

Ejemplo.- Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado inferiormente por el plano XY, superiormente por el plano z = y, lateralmente por el cilindro $y^2 = x$ y el plano x = 1.

Solución

$$V=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{y}dz)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x}}y\,dy\right)dx=\int_0^1\frac{y^2}{2}\Big/_0^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Big/_0^1=\frac{1}{4}u^3$$

Proyectando al plano XY se tiene

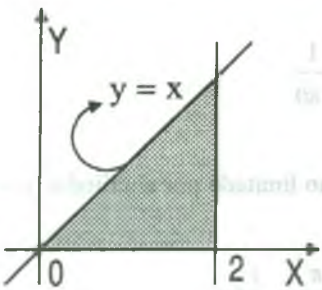


Ejemplo.- Hallar el volumen en el primer octante del sólido acotado por el cilindro $z=\frac{8}{x^2+4}$ y los planos y = x, x = z, y = 0, z = 0.

Solución

El sólido S acotado por el cilindro y los planos es :

$S=\{(x,y,z)/0\le x\le 2\ \wedge\ 0\le y\le x\ \wedge\ 0\le z\le\frac{8}{x^2+4}\}$, Proyectando al plano XY se tiene:



$$V=\int_0^2\left(\int_0^x\left(\int_0^{\frac{8}{x^2+4}}dz\right)dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_0^x\frac{8}{x^2+4}dy\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{8y}{x^2+4}\Big/_0^x dx=\int_0^2\frac{8x}{x^2+4}dx$$

$$V=4\ln(x^2+4)\Big/_0^2=4\ln 8-4\ln 4=4\ln 2\,u^3$$

6.7 Ejercicios Propuestos.

1) Calcular $\iiint_T xy^2z^3\,dxdydz$, si la región T está limitada por las superficies z = xy, y = x, x = 1, z = 0. **Rpta.** $\frac{1}{364}$

2) Calcular $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, si la región T es el paralelepípedo rectangular definido por las desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$

Rpta. $abc(\frac{a^2+b^2+c^2}{3})$

3) Evaluar la integral triple $\iiint_S y\,dxdydz$, si S es la región limitada por el tetraedro formado por el plano 12x + 20y + 15z = 60 y los planos coordenados.

Rpta. $\frac{15}{2}$

4) Calcular $\iiint_T xy\,dxdydz$, si el dominio T está limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y los planos x = 0, y = 0, z = 0. **Rpta.** $\frac{1}{15}$

5) Calcular $\iiint_D xy\,dxdydz$, donde D es un dominio limitado por el paraboloide hiperbólico z = xy, y los planos x + y = 1, z = 0 (z ≥ 0). **Rpta.** $\frac{1}{180}$

6) Calcular $\iiint_D y\cos(x+z)dxdydz$, donde D es un dominio limitado por el cilindro $y=\sqrt{x}$, y los planos y = 0, z = 0, $x+z=\frac{\pi}{2}$. **Rpta.** $(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2})u^3$

7) Calcular $\iiint_S z\,dx\,dy\,dz$, donde S es el recinto limitado por el cono $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ y por el plano z = h. **Rpta.** $\frac{h^2R^2\pi}{6}$

8) Calcular $\iiint_T x\,dx\,dy\,dz$, donde D es el recinto de todos los puntos que cumplen $0 \le z \le 3$, $x^2+y^2 \le z$. **Rpta.** 0

9) Calcular $\iiint_D dx\,dy\,dz$, donde D es la región limitada por las superficies $z = x + y$, $z = 27-2x^2-2y^2$ **Rpta.** $\frac{243\pi}{2}$

10) Calcular $\iiint_D e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$, donde D es el tetraedro de vértices (0,0,0), (3,2,0), (0,3,0) y (0,0,2). **Rpta.** $\frac{3}{5}(e^5-5e^3+5e^2-1)$

11) Calcular $\iiint_D x^2y\,dx\,dy\,dz$, donde D es el sólido limitado por $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le a$, $0 \le x \le y\cos z$. **Rpta.** $\frac{2a^5}{45}$

12) Hallar $\iiint_D e^{ay}\,dx\,dy\,dz$, donde D es el sólido limitado por las superficies $y^3+z=4$, $y + z = 2$, $z = 0$, $z = 2$. **Rpta.** $\frac{9}{2a}(e^{2a}-1)$

13) Calcular $\iiint_S \frac{y\,dx\,dy\,dz}{y^2+z^2}$, donde D es el sólido limitado por $2 \le x \le 3$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le y$. **Rpta.** $\frac{5\pi}{8}$

14) Calcular $\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\,dz\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{729}{4}$

15) Calcular $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} x\,dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{1}{10}$

16) Calcular $\int_0^1\int_0^{x}\int_0^{x+y} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{7}{8}$

17) Calcular $\int_0^{\pi/2}\int_z^{\pi/2}\int_0^{xz} \cos\frac{y}{z}\,dy\,dx\,dz$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}-1$

18) Calcular $\int_1^2\int_y^{y^2}\int_0^{\ln x} y e^z\,dz\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{47}{24}$

19) Calcular $\int_2^4\int_{1/z}^{1}\int_0^{\sqrt{yz}} xyz\,dx\,dy\,dz$ **Rpta.** $\frac{28}{9}+\frac{\ln 2}{6}$

20) Calcular las siguientes integrales triples.

a) $\int_0^1\int_0^{z}\int_0^{y} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ **Rpta.** $\frac{1}{90}$

b) $\int_{-1}^0\int_0^{y}\int_1^{x} (z^2-y)\,dz\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{77}{120}$

c) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\operatorname{sen} yz\,dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi^3-\pi\operatorname{sen}\pi^2}{2}$

d) $\int_1^2\int_x^{2x}\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2xy}} \frac{z\,dz\,dy\,dx}{x^2+y^2+z^2}$ **Rpta.** $\ln\frac{81\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{4}$

e) $\int_1^2\int_0^{x}\int_0^{\sqrt{3}x} \frac{y}{y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

f) $\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

g) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dz\,dy\,dx$ **Rpta.** $\frac{\pi a^4}{8}$

21) Calcular $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_0^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz$ **Rpta.** 2e − 5

22) Calcular la integral triple $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{y} dz\,dx\,dy$ **Rpta.** $\frac{\pi}{32}$

23) Calcular $\iiint_T (2x+3y-z)dx\,dy\,dz$, donde D = {(x,y,z)/ 0 ≤ x ≤ b, 0 ≤ y ≤ b − x, 0 ≤ z ≤ a}

Rpta. $\frac{ab^2(10b-3a)}{12}$

24) Calcular $\iiint_T (x+y+z)dx\,dy\,dz$, donde T es un tetraedro limitada por los planos x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0. **Rpta.** $\frac{a^4}{8}$

25) Calcular $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, donde la región T esta limitada por las superficies $y = x^2$, $x = y^2$, z = xy, z = 0. **Rpta.** $\frac{1}{96}$

26) Calcular $\iiint_T (x+y+z)dx\,dy\,dz$, donde T es la región limitada por 1 ≤ x ≤ 3, 1 ≤ y ≤ 3, 1 ≤ z ≤ 3.

27) Calcular $\iiint_T x\,dx\,dy\,dz$, donde T es la región comprendida entre los planos coordenados y el plano x + 2y + z = 4 en el primer cuadrante.

28) Calcular $\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x+y+z+2}}$, donde T = [0,2]x[0,1]x[-1,4]

Rpta. $\frac{1688}{15}$

29) Encontrar el volumen del sólido acotado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano z = 2y. **Rpta.** $\frac{\pi}{2}u^3$

30) Hallar el volumen del sólido S limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$

Rpta. 11π

31) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el plano z = y e inferiormente por $z = x^2 + y^2$ **Rpta.** $\frac{\pi}{32}$

32) Hallar el volumen encerrado entre las superficies $x^2 + 3y^2 - z = 0$, $4 - y^2 - z = 0$

Rpta. 4π

40) Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x - x^2$ y los planos $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, z = 0 en el primer octante. **Rpta.** 4 ln 3 - 2

41) Hallar el volumen del sólido limitado por los tres planos coordenados, las superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano x + y = 1. **Rpta.** $\frac{1}{6}u^3$

42) Calcular el volumen entre las superficies y = 2x, $y = 2x^2$, x + y + z = 3, x + y + z = 4.

Rpta. $\frac{1}{3}$

43) Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 2y^2$ y los planos y = x, y = 2x , x = 1. **Rpta.** $\frac{7}{12}u^3$

44) Encontrar el volumen del sólido acotado por los cilindros $y = x^2$, $y = x^3$ y los planos z = 0, z = 1 + 3x + 2y. **Rpta.** $\frac{61}{210}u^3$

45) Hallar el volumen en el primer octante, del sólido acotado por $z+x^2-64=0$, 3x + 4y - 24 = 0, x = 0, y = 0, z = 0. **Rpta.** 1280

46) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $(x-1)^2+y^2=z$ y el plano 2x + z = 2. **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

47) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $z=4-x^2$

6.8 Cambio de Variables para Integrales Triples.

Sea T: $R^3 \longrightarrow R^3$ una transformación tal que: (x,y,z)=T(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) continuamente diferenciable y uno a uno en D y con Jacobiano no nulo, es decir: $J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$.

Sea $S \subset D \subset U\ V\ W$ un conjunto cerrado y acotado y sea T(S) = E la imagen del conjunto S vía la transformación T, entonces: si es integrable sobre E, la imagen $f_0 T(u,v,w)=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ es integrable sobre S

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw}$$

Cuando f(x,y,z) = 1, $\forall$ (x,y,z) $\in$ E se tiene el volumen del sólido E, es decir:

$$\boxed{V(E)=\iiint_E dxdydz=\iiint_S |J(u,v,w)|dudvdw}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint_E x^2\,dxdydz$, donde E: $-1\leq x-z\leq 1$, $0\leq y+z\leq 2$, $0\leq x+z\leq 1$

Solución

$$\text{Sean } \begin{cases} x - z = u \\ y + z = v \\ x + z = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u+w) \\ y = v - \dfrac{1}{2}(w-u) \\ z = \dfrac{1}{2}(w-u) \end{cases}$$

Luego la nueva región es D: $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$, $0 \le w \le 1$

Calculando el Jacobiano se tiene:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto la integral triple

$$\iiint_E x^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_D \frac{1}{4}(u+w)^2 |J(u,v,w)| du\, dv\, dw = \frac{1}{8}\iiint_D (u+w)^2 \, dudvdw$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(\int_0^2(\int_0^1 (u+w)^2 dw)dv)du = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(\int_0^2 \frac{(u+w)^3}{3} \Big/_0^1 dv)du$$

$$= \frac{1}{24}\int_{-1}^{1}(\int_0^2((u+1)^3 - u^3)dv)du = \frac{1}{12}\int_{-1}^{1}((u+1)^3 - u^3)du = \frac{1}{3}$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\iiint_S (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)dxdydz$, donde S es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 0$, $x + y - z = 0$, $x - y - z = 0$ y $2x - y = 1$.

Solución

Transformando él integrando se tiene

$$\text{Sean} \begin{cases} u = x+y+z \\ v = x+y-z \\ w = x-y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+w}{2} \\ y = \dfrac{v-w}{2} \\ z = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad J(u,v,w) = -\frac{1}{4}$$

Transformando la región S se tiene

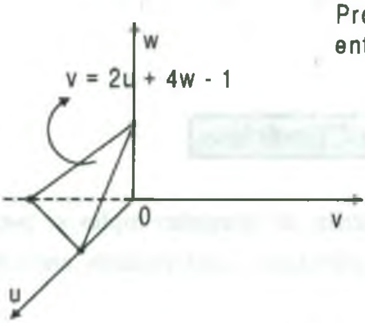
$$x+y+z = \frac{u+w}{2} + \frac{v-w}{2} + \frac{u-v}{2} = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x+y-z = \frac{u+w}{2} + \frac{v-w}{2} - \frac{u-v}{2} = 0 \Rightarrow v = 0$$

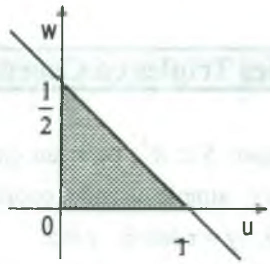
$$x-y-z = \frac{u+w}{2} - \frac{v-w}{2} - \frac{u-v}{2} = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$2x-y = 1 = u+w-\frac{v-w}{2} = 1 \Rightarrow 2u-v+4w = 1$$

Luego D = {(u,v,w) / u = 0, v = 0, w = 0, 2u - v + 4w = 1 }



Proyectando al plano uw v = 0
entonces 2u + 4w = 1

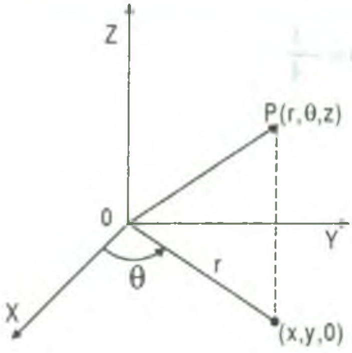


$$\iiint_S (x+y+z)(x-y-z)\,dxdydz = \iiint_D uvw\left|J(u,v,w)\right| dudvdw$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1-2u}{4}} \left(\int_0^{2u+4w=-1} wuv\,dwdv\right)dw\right)du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1-2u}{4}} w\frac{uv^2}{2} \Big/_0^{2u+4w-1} dw\right)du$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1-2u}{4}} wu(2u+4w-1)^2\,dw\right)du = \frac{1}{18}$$

6.9 Coordenadas Cilíndricas.



A las coordenadas cilíndricas de un punto p del espacio denotaremos por p(r,θ,z) donde (r,θ) es la coordenada polar de la proyección de p sobre el plano polar y z es la distancia dirigida del plano polar al punto p.

Un punto p del espacio tiene dos representaciones una en coordenadas cartesianas p(x,y,z) y la otra en coordenadas cilíndricas p(r,θ,z). La relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas cilíndricas es:

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r \operatorname{sen}\theta \ , \quad z = z$$

donde las coordenadas cilíndricas r, θ son las coordenadas polares del punto (x,y,0) en el plano XY, que es la proyección ortogonal del punto p sobre el plano XY.

Calculando el Jacobiano de las coordenadas cilíndricas:

$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \text{mod}\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow J(r,\theta,z) = r$$

6.10 Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas.

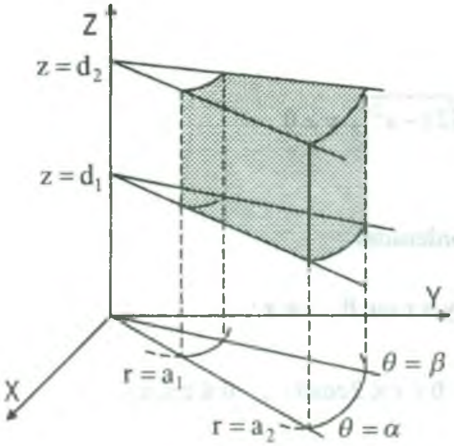
Si una región $S \subset R^3$, tiene un eje de simetría, las integrales triples se pueden calcular en forma muy simple usando coordenadas cilíndricas, cuya relación entre las cartesianas es $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$.

Si $f: S \subset R^3 \longrightarrow R$ es una función continua sobre S, entonces la transformación de la integral triple $\iiint_S f(x,y,z)dxdydz$ en coordenadas cilíndricas es dado por:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)|J(r,\theta,z)|dzdrd\theta}$$

donde $J(r,\theta,z)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$, es el Jacobiano, por lo tanto se tiene:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dxdydz=\iiint_S f(r\cos\theta,r\,\text{sen}\,\theta,z)rdzdrd\theta}$$



un sólido en coordenadas cilíndricas es un conjunto de la forma:

$S=\{(r,\theta,z)/\,a_1\le r\le a_2\wedge\alpha\le\theta\le\beta\ \wedge\ d_1\le z\le d_2\}$

que geométricamente es una cuña cilíndrica.

Suponiendo que S es un sólido en coordenadas cilíndricas y que f(r,θ,z) representa la densidad en cada punto (r,θ,z), entonces la masa del cilindro S se calcula mediante la integral triple, es decir:

$$\boxed{M=masa\ de\ S=\iiint_S f(r,\theta,z)rdzdrd\theta}$$

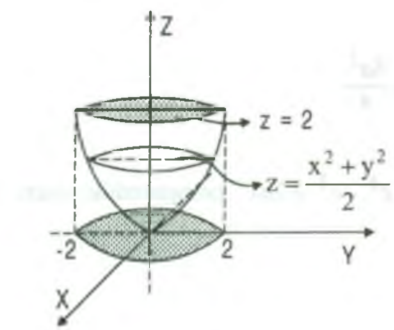
Cuando la densidad f(r,θ,z) = 1 ∀ (r,θ,z) ∈ S, se obtiene el volumen del sólido S, es decir:

$$\boxed{V(S)=\iiint_S rdrd\theta dz}$$

Ejemplo.- Calcular $\iiint_T(x^2+y^2)dxdydz$, donde el dominio T está limitado por las superficies $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=2$.

<u>Solución</u>

Pasando a coordenadas cilíndricas $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$, $z=z$



$$T=\{(r,\theta,z)/\,0\le r\le 2\ \wedge\ 0\le\theta\le 2\pi\ \wedge\ \frac{r^2}{2}\le z\le 2\}$$

$$\iiint_T(x^2+y^2)dx\,dy\,dz=\int_0^2(\int_0^{2\pi}(\int_{r^2/2}^2 r^2.r\,dz)d\theta)dr$$

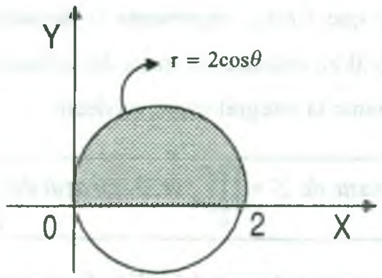
$$=\int_0^2(\int_0^{2\pi}r^3(2-\frac{r^2}{2})d\theta)dr=\int_0^2 2\pi(2r^3-\frac{r^5}{2})dr$$

$$=2\pi[\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}]\Big/_0^2=\frac{16}{3}\pi$$

Ejemplo.- Calcular $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$, transformando previamente a las coordenadas cilíndricas.

Solución

$$\text{Sea } D: \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2} \\ 0\le z\le a\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=0 & , & z=a \\ y=0 & , & y=2\sqrt{2x-x^2}\ ,\ y\ge 0 \\ x=0 & , & x=2\end{matrix}$$



pasando a coordenadas

x = r cos θ , y = r sen θ , z = z

$$0\le\theta<\frac{\pi}{2}\quad,\quad 0\le r\le 2\cos\theta\quad,\quad 0\le z\le a$$

además J(r,θ,z) = r

$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz=\int_0^{\pi/2}(\int_0^{2\cos\theta}(\int_0^a z.r.r\,dz)dr)d\theta$$

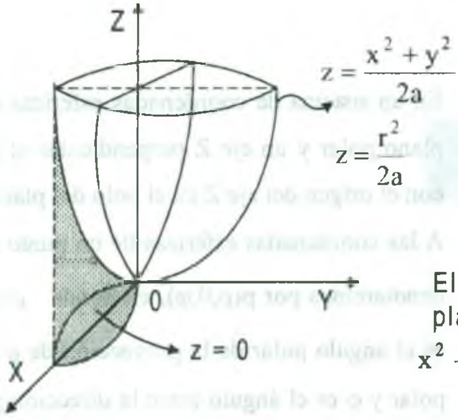
$$=\int_0^{\pi/2}(\int_0^{2\cos\theta} r^2\frac{z^2}{2}\Big/_0^a dr)d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(\int_0^{2\cos\theta} r^2 dr)d\theta$$

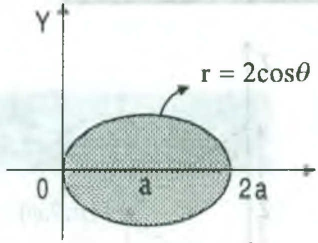
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\Big/_0^{2\cos\theta} d\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac{4a^2}{3}\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{8a^2}{9}$$

Ejemplo.- Calcular el volumen de la parte del cilindro $x^2+y^2=2ax$, comprendido entre el paraboloide $x^2+y^2=2az$ y el plano XY.

Solución





El plano de la proyección al plano XY

$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$

como $V = \iiint\limits_S dxdydz$, pasando a coordenadas cilíndricas

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z \Rightarrow J(r,\theta,z) = r$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax \\ z = \dfrac{x^2+y^2}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \ , \ r = 2a\cos\theta \\ z = \dfrac{r^2}{2a} \end{cases}$$

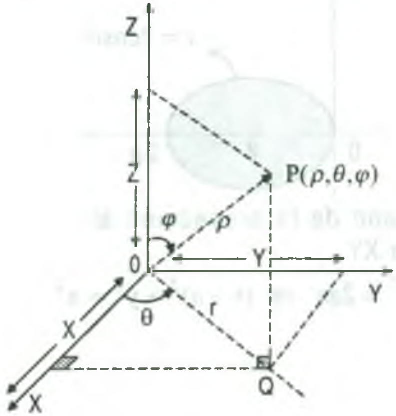
$$V = 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\theta}\left(\int_0^{r^2/2a} r\,dz\right)dr\right)d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\theta}\frac{r^3}{2a}dr\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{r^4}{4}\Big/_0^{2a\cos\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{16a^4}{4}\cos^4\theta\,d\theta = 4a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 4a^3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = a^3\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$= a^3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2}\right)d\theta = a^3\left[\frac{3\theta}{2}+\text{sen}\,2\theta+\frac{\text{sen}\,4\theta}{2}\right]\Big/_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4}a^3u^3$$

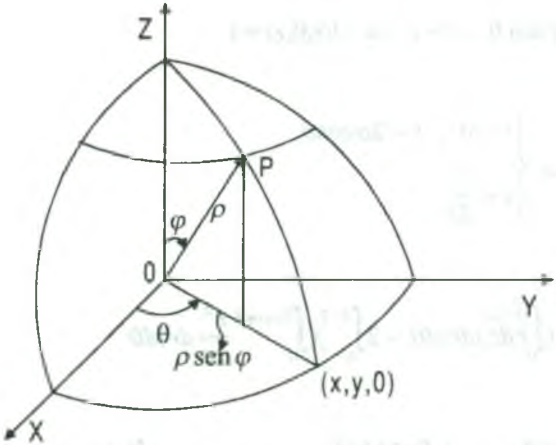
6.11 Coordenadas Esféricas.



En un sistema de coordenadas esféricas se tiene: un plano polar y un eje Z perpendicular al plano polar con el origen del eje Z en el polo del plano polar.

A las coordenadas esféricas de un punto del espacio denotaremos por p(ρ,θ,φ), en donde $\rho = |\overline{op}| > 0$, θ es el ángulo polar de la proyección de p en el plano polar y φ es el ángulo entre la dirección positiva del eje Z y el radio vector $\overline{op}$.

La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas es: $x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, $\rho > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.



Calculando el Jacobiano de las coordenadas esféricas se tiene:

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \text{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

$$J(\rho,\theta,\varphi)=\text{mod}\begin{vmatrix}\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi & -\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi\\ \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi & \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi & \rho\,\text{sen}\,\theta s\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\,\text{sen}\,\varphi\end{vmatrix}=\rho^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$J(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\,\text{sen}\,\varphi$$

6.12 Integrales Triples en Coordenadas Esféricas.

Si una región $S\subset R^3$, tiene un eje de simetría, las integrales triples también se pueden calcular en forma muy simple, usando coordenadas esféricas y cuya relación entre las coordenadas cartesianas es:

$$\boxed{x=\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\quad,\quad y=\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\quad,\quad z=\rho\cos\varphi}$$

Si $f\colon\ S\subset R^3\longrightarrow R$ es una función continua sobre S, entonces la transformación de la integral triple $\iiint\limits_S f(x,y,z)dxdydz$ en coordenadas esféricas es dado por:

$$\boxed{\iiint\limits_S f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_S f(\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\rho\cos\varphi)|J(\rho,\theta,\varphi|d\rho d\varphi d\theta}$$

donde $J(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\,\text{sen}\,\varphi$, por lo tanto.

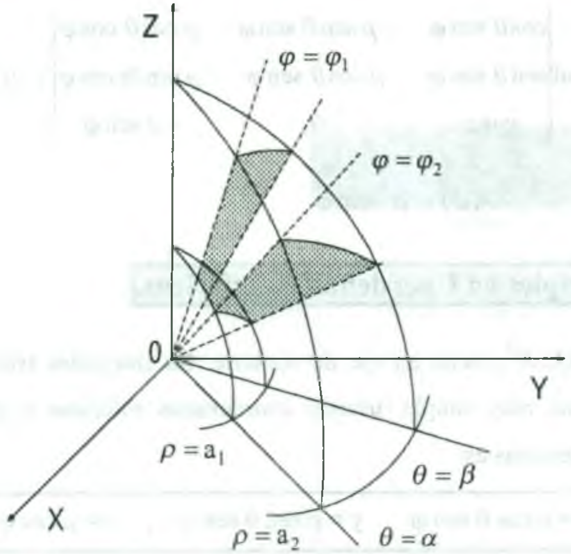
$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_S f(\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi,\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\rho\cos\varphi)\rho^2\,\text{sen}\,\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Cuando $f(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \rho\cos\varphi)=1$ se tiene el volumen del sólido S, es decir:

$$\boxed{V(S)=\iiint\limits_S \rho^2\,\text{sen}\,\varphi d\rho d\varphi d\theta}$$

un sólido en coordenadas esféricas es un conjunto de la forma:

$S=\{(\rho,\theta,\varphi)/a_1\le\rho\le a_2\ \wedge\ \alpha\le\theta\le\beta\ \wedge\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\}$ que geométricamente representa una cuña esférica



Ejemplo.- Calcular $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$, transformando previamente a coordenadas esféricas.

Solución

Como $0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ viene ha ser el recinto V y su proyección sobre el plano XY es $x^2+y^2=R^2$, ahora pasando a coordenadas esféricas se tiene: $x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$ donde $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, siendo el Jacobiano $J(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R (\rho^2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi)(3\operatorname{sen}\varphi d\rho)d\varphi\right)d\theta\right.$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R (\operatorname{sen}^3\varphi.\rho^4 d\rho)d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^5}{5}\operatorname{sen}^3\varphi d\varphi\right)d\theta\right.$$

$$= \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi\right)d\theta = \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big/_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$= \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)d\theta = \frac{4R^5}{15}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4R^5}{15}\pi$$

Ejemplo.- Evaluar la integral $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\frac{dz\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2}$, usando coordenadas esféricas.

Solución

$$D:\begin{cases}0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

pasando a coordenadas esféricas

x = ρ cos θ sen φ

y = ρ sen θ sen φ

z = ρ cos φ

$$D:\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\quad,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\quad,\quad 0\le\rho\le 2$$

además el Jacobiano $J(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\frac{dz\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2\frac{\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\rho^2}\right)d\rho\right)d\varphi\Big)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}2\,\mathrm{sen}\,\varphi)d\varphi\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}-2\cos\varphi\Big/_0^{\pi/2}d\theta = \int_0^{\pi/2}2d\theta = \pi$$

Ejemplo.- Encontrar el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, usando coordenadas esféricas.

Solución

Usando coordenadas esféricas se tiene:

$$0\le\rho\le a\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\ \text{y}\ J(\rho,\theta,\varphi)=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$V = \iiint_S dxdydz = \iiint_S |J(\rho,\theta,\varphi)| d\rho d\varphi d\theta = \iiint_S \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} (\int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho) d\varphi) d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}\varphi \Big/_0^a d\varphi) d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi) d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} -\cos\varphi \Big/_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} -(0-1) d\theta = \frac{4a^3}{3}\pi u^3$$

6.13 Centro de Masa y Momento de Inercia de un Sólido.

Sea $\rho: D \subset R^3 \longrightarrow R$ una función continua sobre $D \subset R^3$, siendo $\rho(x,y,z)$ la densidad en el punto (x,y,z), entonces:

1º La masa total del sólido D está dado por:

$$\boxed{M = \iiint_D \rho(x,y,z) dxdydz}$$

2º Los momentos de masa, respecto a los planos coordenados, del sólido D, con función densidad $\rho: D \subset R^3 \longrightarrow R$, son expresados por:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)dxdydz \,, M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)dxdydz \,, M_{yz} = \iiint_D x\rho(x,y,z)dxdydz$$

y el centro de masa del sólido D es el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ dado por:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz} \,, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz} \,, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz}$$

3º Los momentos de inercia del sólido $D \subset R^3$, respecto a los ejes coordenados, se definen por:

$$I_x = \iiint_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \text{ , respecto al eje X.}$$

$$I_y = \iiint_D (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \text{ , respecto al eje Y.}$$

$$I_z = \iiint_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz \text{ , respecto al eje Z.}$$

Ejemplo.- Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2+y^2=2az$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$ (z > 0) si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas.

Solución

Usando coordenadas cilíndricas se tiene:

x = r cos θ , y = r sen θ , z = z donde J(r,θ,z) = r

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=\sqrt{3a^2-r^2} \\ z=\dfrac{r^2}{2a} \end{matrix} \text{ , además } \rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2az \\ x^2+y^2+z^2=3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{proyectando al plano XY} \\ z^2+2az-3a^2=0 \quad \Rightarrow \quad z=a \end{matrix}$$

Luego $x^2+y^2=2a^2 \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{2}a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\dfrac{r^2}{2} \le z \le \sqrt{3a^2-r^2}$

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint_D (r^2+z^2)rdzdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2}a}(\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)rdz)dr)d\theta = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2}a}(r^3z+\frac{rz^3}{3})\Bigg/_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} dr)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} (r^3 + \frac{r}{3} z^2) z \Big/_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2 - r^2}} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} [(\frac{2}{3} r^3 + 3a^2)\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^5}{2} + \frac{r^7}{24}] dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\frac{97}{60} a^5 + \frac{54\sqrt{3}}{30} a^5) d\theta = \frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}) \qquad \therefore \quad M = \frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$$

Ejemplo.- Determine el momento de inercia alrededor de un diámetro del sólido que está entre dos esferas concéntricas cuyos radios son "a" pies y 2a pies, la densidad del volumen varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro y se mide en slugs por pie cúbico.

Solución

Sea $\rho(x,y,z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$, la función densidad, donde k es el factor de proporcionalidad.

como $I_z = \iiint\limits_S (x^2 + y^2)\rho(x,y,z) dxdydz$ entonces $I_z = \iiint\limits_S (x^2 + y^2) \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} dx\, dy\, dz$

Transformando a coordenadas esféricas se tiene:

x = ρ cos θ sen φ , y = ρ sen θ sen φ , z = ρ cos φ

donde $J(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$, S: $a \le \rho \le 2a$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$I_z = \iiint\limits_S \frac{k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2} dx\, dy\, dz = 8\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_a^{2a} \frac{k\, \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \,.\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi}{\rho^2} d\varphi \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_a^{2a} k\, \rho^2 \operatorname{sen}^3 \varphi\, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = 8k \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}^3 \varphi \Big/_a^{2a} d\varphi \right) d\theta$$

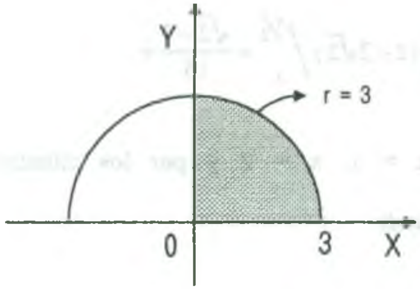
$$= \frac{56k\, a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \right) d\theta = \frac{56k\, a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (-\cos\varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3}) \Big/_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{56k\, a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (0 - (-1 + \frac{1}{3})) d\theta = \frac{56k\, a^3}{9} \int_0^{\pi/2} 2\, d\theta = \frac{56k\, a^3 \pi}{9} \; slugs / \rho^3$$

6.14 Ejercicios Desarrollados.

1) Evaluar la integral $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydxdz$, usando coordenadas cilíndricas.

Solución



Sea $D: \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{9-x^2} \\ 0 \le x \le 3 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$

pasando a coordenadas cilíndricas se tiene:

$$0 \le r \le 3 \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le z \le 4$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \quad J(r,\theta,z) = r$$

$$\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydxdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^3 (\int_0^4 r.rdz)dr)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^3 r^2\, z \Big/_0^4 dr)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^3 4r^2 dr)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4r^3}{3} \Big/_0^3 d\theta = 36\theta \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = 18\pi$$

2) Calcular $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dzdxdy$

Solución

$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2} \end{cases}$

pasando a coordenadas cilíndricas se tiene

$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$

$\Rightarrow J(r,\theta,z) = r$

Luego: $\quad D\!: \; r \le z \le \sqrt{2-r^2} \quad , \quad 0 \le r \le 1 \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

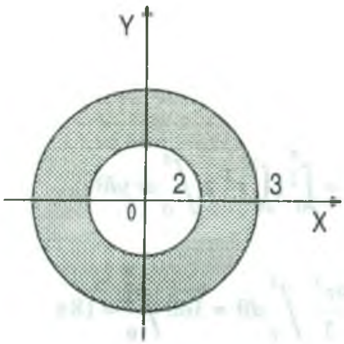
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dzdxdy = \int_0^{\pi/2}(\int_0^1(\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 rdz)dr)d\theta = \int_0^{\pi/2}(\int_r^1 \frac{z^3 r}{3} \bigg/_r^{\sqrt{2-r^2}} dr)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\int_0^1[\frac{r}{3}(2-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{3}]dr) = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}[-\frac{1}{5}(2-r^2)^{5/2} - \frac{r^5}{5}] \bigg/_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{15}\int_0^{\pi/2}[(1+1)-2^{5/2}-0]d\theta = -\frac{1}{15}(2-2\sqrt{2}) \bigg/_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}-1}{15}\pi$$

3) Si D es la región limitada por dos planos x = 1, x = 2 y por los cilindros $y^2+z^2=4$, $y^2+z^2=9$ calcular $\iiint_D e^x\sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz$

Solución



Pasando a coordenadas cilíndricas

$y = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\theta$, $x = x \Rightarrow J(r,\theta,x) = r$

$$\iiint_D e^x\sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}(\int_2^3(\int_1^2 e^x r.rdx)dr)d\theta$$

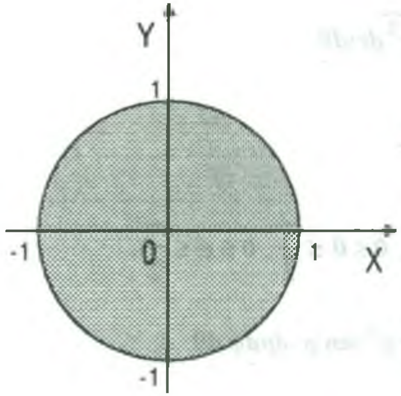
$$= \int_0^{2\pi}(\int_2^3 r^2 e^x \bigg/_1^2 dr)d\theta$$

$$= (e^2-e)\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\bigg/_2^3 d\theta = (e^2-e)\int_0^{2\pi}(9-\frac{8}{3})d\theta$$

$$= \frac{19}{3}(e^2-e).2\pi = \frac{38}{3}(e^2-e)\pi$$

4) Calcular $\iiint_D \frac{dxdydz}{x^2+y^2+(z-2)^2}$, donde D es el cilindro $x^2+y^2 \le 1$, $-1 \le z \le 1$

Solución



pasando a coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow J(r,\theta,z) = r \\ z = z \end{cases}$$

$$D = \{(r,\theta,z) / 0 \le r \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge -1 \le z \le 1\}$$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} = \int_0^{2\pi}(\int_{-1}^{1}(\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}})dz)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\int_{-1}^{1}\sqrt{r^2+(z-2)^2}\Big/_0^1 dz)d\theta = \int_0^{2\pi}(\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1+(z-2)^2}-(-(z-2))\right]dz)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}[\frac{z-2}{2}\sqrt{1+(z-2)^2}+\frac{1}{2}\ln|z-2+\sqrt{z^2-4z+5}|\frac{z^2}{2}-2z]\Big/_{-1}^{1} d\theta$$

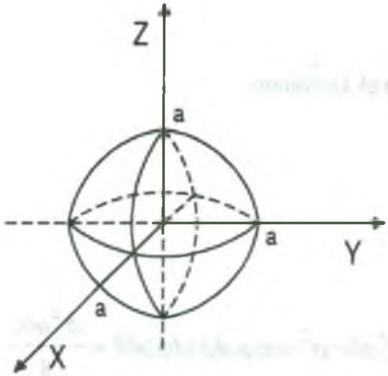
$$= \int_0^{2\pi}[\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}|-\frac{3}{2}]d\theta = [(3\sqrt{10}-\sqrt{2}-3)+\ln|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}|]\pi$$

5) Encontrar el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ usando.

a) Coordenadas cilíndricas.

b) Coordenadas esféricas.

Solución



a) Usando coordenadas cilíndricas

$$0 \le r \le a$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le z \le \sqrt{a^2-r^2}$$

$$V = \iiint_S dxdydz = \iiint_S |J(r,\theta,z)|dzdrd\theta = \iiint_S rdzdrd\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz\right)dr\right)d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\right)d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(a^2-r^2)^{3/2}\Big/_0^a d\theta = \frac{8a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4a^3\pi}{3}$$

b) Usando coordenadas esféricas: $0 \le p \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$V = \iiint_S dxdydz = \iiint_S |J(p,\theta,\varphi)|dpd\theta d\varphi = \iiint_S p^2 \operatorname{sen}\varphi\ \ dpd\varphi\, d\theta$$

$$= 8\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} p^2 \operatorname{sen}\varphi\ d\varphi\right)d\theta\right)dp = 8\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2} -p^2\cos\varphi\Big/_0^{\pi/2} d\theta\right)dp$$

$$= 8\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2}(0+p^2)d\theta\right)dp = 8\int_0^a p^2\theta\Big/_0^{\pi/2}dp = 4\pi\,\frac{p^3}{3}\Big/_0^a = \frac{4a^3\pi}{3}$$

6) Calcular $\iiint_S \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2} dxdydz$ donde S es la región encerrada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>**Solución**</u>

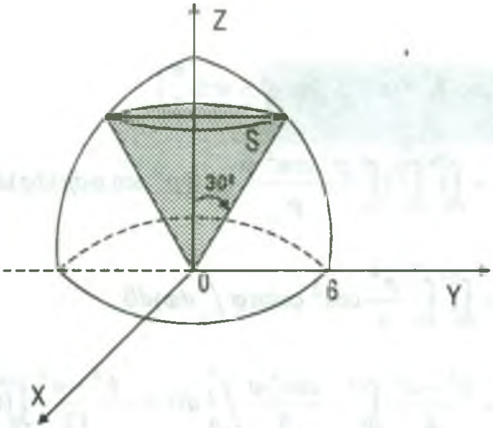
Usando coordenadas esféricas se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \frac{y}{b} = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow J(\rho,\theta,\varphi) = abc\rho^2\operatorname{sen}\varphi \text{ , es el Jacobiano} \\ \frac{z}{c} = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

donde $0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$

$$\iiint_S \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2}abc\,\rho^2\operatorname{sen}\varphi.d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = \frac{\pi^2 abc}{8}$$

7) Hallar el volumen del cono de helado seccionado en una esfera de radio 6 por un cono con un semiángulo de 30º, tal como se muestra en la figura.



Solución

En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es $\rho = 6$ y el cono $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ por lo tanto el sólido es: $S = \{(\rho,\theta,\varphi) / 0 \le \rho \le 6,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, además $J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ entonces el volumen de S es.

$$V = \iiint_S dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \left(\int_0^6 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho\right) d\varphi\right) d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}\varphi \Big/_0^6 d\varphi\right) d\theta$$

$$= 72\int_0^{2\pi} -\cos\varphi \Big/_0^{\pi/6} d\theta \;=\; -72\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) d\theta$$

$$= 72\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)2\pi = 72(2-\sqrt{3})\pi$$

8) Mediante coordenadas esféricas, calcula el valor de la integral $\iiint_S \dfrac{z^2\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde S es la región por arriba del plano XY y entre las esferas de radios respectivamente a y b centradas en el origen (0< a<b).

Solución

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \;\operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \;\operatorname{sen}\varphi \quad \Rightarrow \quad J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$S = \{(\rho,\varphi,\theta) / a \le \rho \le b,\; 0 \le \theta \le 2\pi,\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$$

$$\iiint_S \frac{z^2 dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_a^b \frac{p^2\cos^2\varphi}{p}.p(((p^2 \operatorname{sen}\varphi dp)d\varphi)d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^4}{4}\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi \Big/_a^b d\varphi)d\theta$$

$$= \frac{b^4-a^4}{4}\int_0^{2\pi} -\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -\frac{b^4-a^4}{12}\int_0^{2\pi}(0-1)d\theta = \frac{b^4-a^4}{6}\pi$$

9) Calcular el volumen de la región limitada por la superficie $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$

Solución

Pasando a coordenadas esféricas se tiene: $x = \rho\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$

$$(\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi) + \rho^2\cos^2\varphi)^2 = a^3\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$\rho^4 = a^3\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \rho = a^{3}\sqrt[4]{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}$$

Luego $S = \{(\rho,\theta,\varphi)/0 \le \rho \le a\sqrt[3]{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi} \wedge 0 \le \varphi \le \pi \wedge 0 \le \theta \le 2\pi\}$

además se tiene $J(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$

$$V = \iiint_S dxdydz = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}(\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho)d\varphi)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\varphi \Big/^{a\sqrt[3]{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}} d\varphi)d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi = d\varphi)d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\cos\theta\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi)d\theta = \frac{a^3}{6}\int_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi - \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2})\Big/_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^3}{6}\int_0^{2\pi}\pi\cos d\theta = \frac{4a^3\pi}{6}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{2a^3\pi}{3}\operatorname{sen}\theta\Big/_0^{\pi/2} = \frac{2a^3\pi}{3}$$

10) Hallar $\iiint\limits_D \frac{z^3 dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ donde D es la región acotada por el plano XY en la parte inferior y entre las esferas de radio 4 y 1 respectivamente centrados en el origen.

Solución

Usando coordenadas esféricas tenemos: $x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=\rho\cos\varphi$ entonces $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, además $J(\rho,\varphi,\theta)=-\rho^2\operatorname{sen}\varphi$,

$$\Delta=\{(\rho,\varphi,\theta)\,/\,1\le\rho\le 4,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le \pi/2\}$$

$$\iiint\limits_D \frac{z^3 dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\rho^3\cos^3\varphi}{\rho}\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho$$

$$=\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\rho^4\cos^3\varphi.\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho=\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}-\frac{\rho^4\cos^4\varphi}{4}\Big/_0^{\pi/2}d\theta\right)d\rho$$

$$=\int_1^4\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}d\theta=\int_1^4\rho^4\frac{\pi}{2}d\rho=\frac{\pi\rho^5}{10}\Big/_1^4=\frac{1023\pi}{10}\right.$$

11) Encontrar el momento de inercia con respecto al eje Z del sólido homogéneo acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$. La densidad del volumen en cualquier punto es $k\ slug\,/\,p^3$.

Solución

Aplicar simetría, tenemos en el primer

$$D=\{(\rho,\theta,\varphi)\,/\,0\le\rho\le 2,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$$

$$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad z=\rho\cos\varphi,\quad J(\rho,\theta,\varphi)=p^2\operatorname{sen}\varphi$$

$$I_z=\iiint\limits_D(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$=8\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(\rho^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi)\kappa\rho^2\operatorname{sen}\varphi d\varphi\right)d\theta\right)d\rho$$

$$= 8\kappa\int_0^2 (\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} \rho^4 \operatorname{sen}^3 \varphi d\varphi) d\theta) d\rho = 8\kappa\int_0^2 (\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \rho^4 d\theta) d\rho = \frac{16\kappa}{3}\int_0^2 \frac{\pi}{2} \rho^4 d\rho$$

$$= \frac{8\kappa\pi}{3} . \frac{\rho^5}{5} \Big/_0^2 = \frac{256}{15} \kappa\pi$$

12) Encontrar la masa de un sólido esférico de radio "a" sí la densidad de volumen en cualquier punto es proporcional a la distancia del punto al centro de la esfera. La densidad de volumen se mide en $slug / p^3$.

Solución

La densidad es $p(x,y,z) = \kappa\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_D \kappa\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} (\int_0^a (\kappa\rho. \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho) d\varphi) d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{4} \operatorname{sen}\varphi d\varphi) d\theta = 2a^4 \kappa\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= 2a^4 \kappa(\frac{\pi}{2}) = \pi a^4 \kappa \qquad \therefore\ M = \pi\kappa a^4$$

13) Encontrar el momento de inercia con respecto al eje Z del sólido homogéneo dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$, p es la densidad del volumen constante es $\kappa\, su\lg / p^3$.

Solución

$$I_z = \iiint_D \kappa(x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 \int_{r^2}^{r} \kappa r^3 dz) dr) d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} (\int_0^1 \int_{r^2}^{r} \kappa r^3 (r - r^2) dr) d\theta = k\int_0^{2\pi} (\int_0^1 (r^4 - r^5) dr) d\theta = k\int_0^{2\pi} (\frac{r^5}{5} - \frac{r^6}{6}) \Big/_0^1 d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) d\theta = \frac{k}{30} . 2\pi = \frac{k\pi}{15}$$

14) Encontrar el centro de masa del sólido dentro del paraboloide $x^2+y^2=z$ y fuera del cono $x^2+y^2=z^2$, p es la densidad de volumen constante es k $slug/p^3$.

Solución

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow z^2=z \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$$ .Luego pasado a coordenadas cilíndricas

$D=\{(r,\theta,z/0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ \ r^2\le z\le r\}$ hallados los momentos de masa.

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}(\int_0^1(\int_{r^2}^r zkrdz)dr)d\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^1\frac{k}{2}(r^3-r^5)dr)d\theta$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6})(\int_0^1(\int_{r^2}^r zkrdz)dr)d\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^1\frac{k}{2}(r^3-r^5)dr)d\theta$$

$$M_{xz}=\int_0^{2\pi}(\int_0^1(\int_{r^2}^r r^2\cos\theta kdz)dr)d\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^1 k\cos\theta r^2(r-r^2)dr)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(k\cos\theta(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5})\Big/_0^1 d\theta=\frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\frac{k}{20}\operatorname{sen}\theta\Big/_0^{2\pi}=\frac{k}{20}(0-0)=0$$

$$M_{zx}=\int_0^{2\pi}(\int_0^1(\int_{r^2}^r r\operatorname{sen}\theta.rkdz)dr)d\theta=k\int_0^{2\pi}(\int_0^1\operatorname{sen}\theta r^2)(r-r^2)dr)d\theta$$

$$=k\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5})\Big/_0^1 d\theta=\frac{k}{20}(-\cos\theta)\Big/_0^{2\pi}=-\frac{k}{20}(1-1)=0$$

$$M=\int_0^{2\pi}(\int_0^1(\int_{r^2}^r krdz)dr)d\theta=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(\int_0^1 r(r-r^2)dr)d\theta$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(\int_0^1(r^2-r^3)dr)d\theta=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4})\Big/_0^1 d\theta=\frac{k}{240}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{k\pi}{12}$$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{0}{\frac{\pi k}{12}}=0,\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M}=0,\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\frac{\pi k}{12}}{\frac{\pi k}{12}}=1$$

El centro de masa es (0,0,1)

6.15 Ejercicios Propuestos.

I.

1) Calcular la integral triple $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, donde D es el sólido limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$ **Rpta.** $\frac{\pi}{6}$

2) Calcular $\iiint_D \cos(x^2+y^2+z)dxdydz$, donde D es el sólido acotado por las superficies $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=4$

Rpta. $\pi(\cos 4-\cos 8+\cos 6-\cos 2)$

3) Calcular $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$, donde la región T está limitada por las superficies $z=\frac{x^2+y^2}{2}$; $z=2$ **Rpta.** $\frac{16\pi}{3}$

4) Calcular $\iiint_D x\,dxdydz$, donde D es el recinto de todos los puntos que cumplen $0\le z\le 3$, $x^2+y^2\le z$ **Rpta.** 0

5) Calcular $\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$, donde el dominio D viene determinado por las desigualdades $z\ge 0$, $r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2$ **Rpta.** $\frac{4\pi}{15}(R^5-r^5)$

6) Calcular $\iiint_T dxdydz$, donde la región T es la esfera $x^2+y^2+z^2\le r^2$.

Rpta. $\frac{4\pi r^3}{3}$

7) Calcular $\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ si el dominio T está limitado por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos $y=0$, $y=1$ **Rpta.** $\frac{3\pi}{2}$

8) Calcular $\iiint\limits_T (x+y+z)^2 dxdydz$, donde la región T es la parte común del paraboloide $z \geq \dfrac{x^2+y^2}{2a}$ y de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$ **Rpta.** $\dfrac{\pi a^2}{5}(18\sqrt{3}-\dfrac{97}{6})$

9) Calcular $\iiint\limits_V z dxdydz$, siendo V el sólido definido por las desigualdades $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x^2+y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$ **Rpta.** $\dfrac{\pi}{8}$

10) Calcular $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dxdydz$, si T es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Rpta. $\dfrac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$

11) Calcular $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde D es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Rpta. $\dfrac{2\pi}{3}$

12) Calcular $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$ **Rpta.** $\dfrac{16a^2}{9}$

13) Calcular $\int_0^2 \int_{\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2R-x^2}} \int_0^{\sqrt{4R-x^2-y^2}} dzdydx$ **Rpta.** $\dfrac{8R^3}{3}(\pi - 4/3)$

14) Calcular $\iiint\limits_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, donde D es la esfera unitaria con centro en el origen

Rpta. $\dfrac{4\pi(e-1)}{3}$

15) Calcular $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdydx$ **Rpta.** $\dfrac{\pi}{8}$

16) Calcular $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)}$, donde D es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+z^2 = b^2$, $0 < b < a$ **Rpta.** $4\pi\, Ln(\dfrac{a}{b})$

17) Calcular $\iiint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz$, donde D es el sólido limitado por el elipsoide

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **Rpta.** $\frac{4abc\pi}{5}$

18) Calcular $\iiint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, donde D está definido por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

Rpta. $\frac{abc\pi^2}{4}$

19) Calcular $\iiint\limits_D e^{\frac{x^2+y^2}{z}}dxdydz$, donde D es el sólido interior a la superficie $\sqrt{x^2+y^2}=z$,

limitado por los planos $x+y=0$, $z=a$, $a>0$

Rpta. $\frac{\pi}{2}[e^a(a-1)-\frac{a^2}{2}+1]$

20) Calcular $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)^{3/2}dxdydz$, donde D está limitado por : $x^2+y^2+z^2=1$

Rpta. $\frac{2\pi}{3}$

21) Calcular $\iiint\limits_D \frac{xyz\ dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde D es el primer octante de la esfera

$x^2+y^2+z^2\leq a^5$ **Rpta.** $\frac{a^5}{40}$

22) Probar que la integral triple $\iiint\limits_D \frac{|xyz|\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, sobre el sólido D acotado por el

elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, tiene el valor $\frac{8a^2b^2c^2}{15}\cdot\frac{(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

23) Calcular $\iiint\limits_D \left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]^{-\frac{1}{2}} dxdydz$, donde D es el sólido esférico de radio R y centro en el origen, y (a,b,c) es un punto fijo fuera de la esfera.

Rpta. $\frac{4}{3}\pi R^3(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$

24) Calcular $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, donde D es el sólido limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=3$

Rpta. $(27\sqrt{2}-\frac{27}{2})\pi$

25) Calcular $\iiint\limits_D x\,dxdydz$, donde D es el sólido limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente por el paraboloide $6z=x^2+y^2$

Rpta. 0

26) Calcular $\iiint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, donde D es el sólido exterior al cilindro $x^2+y^2-2y=0$ y limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=z+12$, $x+y\geq 0$

Rpta. 410.31

27) Calcular la integral $\int_{-a}^{a}(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(\int_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h}\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}})dy)dx$ pasando a coordenadas cilíndricas.

Rpta. $\frac{4}{3}\pi ah$

28) Calcular la integral $\int_{-2}^{2}(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz)dy)dx$

Rpta. $\frac{256}{5}(\sqrt{2}-1)\pi$

29) Calcular la integral $\int_{-R}^{R}(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{z}})dy)dx$ pasando a coordenadas esféricas. **Rpta.** $\frac{8}{5}\pi R^{\frac{5}{2}}$

30) Calcular la integral $\int_0^{2b}(\int_{-\sqrt{2bx-x^2}}^{\sqrt{2bx-x^2}}(\int_0^{\sqrt{4b^2-x^2-y^2}}dz)dy)dx$, b > 0.

31) Utilice coordenadas cilíndricas para las integrales triples:

a) Evalúe $\iiint_T (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$ en donde T es la región limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos z = -1, z = 2. **Rpta.** 24π

b) Evalúe $\iiint_T y\,dx\,dy\,dz$ en donde T es el sólido que se encuentra comprendido entre los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ sobre el plano XY y debajo del plano z = x + 2.

Rpta. 0

c) Evalúe $\iiint_T x^2dx\,dy\,dz$, en donde T es el sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, arriba del plano z = 0, y debajo del cono $z^2=4x^2+y^2$.

Rpta. $\frac{2\pi}{5}$

d) Evalúe $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ en donde T es el sólido limitado por el paraboloide $z=9-x^2-y^2$ y el plano XY.

e) Evalúe $\iiint_T xz\,dx\,dy\,dz$, en donde T es el sólido limitado por los planos z = 0, z = y, y el cilindro $x^2+y^2=1$ en el semiplano y ≥ 0.

f) $\int_{-1}^{1}(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dz)dy)dx$

g) $\int_{0}^{1}(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}xyz\,dz)dy)dx$

32) Utilice coordenadas polares de las integrales triples:

a) Evalúe $\iiint_S (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$, en donde S es la esfera sólida unitaria $x^2+y^2+z^2 \le 1$. **Rpta.** $\frac{4\pi}{5}$

b) Evalúe $\iiint_S y^2 dx\,dy\,dz$, en donde S es la porción de la esfera sólida unitaria $x^2+y^2+z^2 \le 1$ que se encuentra en el primer octante.

Rpta. $\frac{\pi}{30}$

c) **Evalúe $\iiint_D (x^2+y^2)dx\,dy\,dz$, en donde S es la región hemisférica situada arriba del plano XY y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.**

d) **Evalúe** $\iiint_S xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dx\,dy\,dz$, en donde S es el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante.

e) $\int_{-3}^{3}(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz)dy)dx$

f) $\int_{0}^{3}(\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz)dx)dy$

33) Calcular $\iiint\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz$, donde T esta limitada por las superficies $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=3z^2$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

II. Problemas de Aplicación

1) Calcular el volumen del cuerpo limitado por el plano $z=0$, la superficie cilíndrica $x=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ (en el interior del cilindro).

Rpta. $\frac{8}{9}(3\pi-4)$

2) Encontrar el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4a$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$. **Rpta.** $4\pi a^3(\frac{8-3\sqrt{3}}{3})$

3) Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado por el paraboloide $z=x^2+y^2$, el cilindro $y=x^2$ y los planos $y=x$, $z=0$. **Rpta.** $\frac{3}{35}$

4) Encontrar el volumen del paraboloide $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ cortado por el plano $z=0$.

Rpta. $\frac{\pi abc}{2}$

5) Encontrar el volumen acotado inferiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ $z=x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z=2y$. **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

6) Encontrar el volumen del sólido dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$ entre el plano $z=0$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **Rpta.** $\frac{32a^3}{9}$

7) Calcular el volumen del sólido encerrado por las superficies $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $x^2+y^2=2ay$. **Rpta.** $\dfrac{16a^2(3\pi-4)}{9}$

8) Hallar el volumen de la región limitada por los cilindros hiperbólicos $xy=1,\ xy=9,\ xz=4,\ xz=36,\ yz=25,\ yz=49$.

Rpta. 64

9) Hallar el volumen del sólido bajo la superficie $z=4-x^2-y^2$, interior al cilindro $x^2+y^2=1$ y sobre el plano xy. **Rpta.** $\dfrac{7}{2}\pi$

10) Hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloide elíptico $3x^2+y^2=z$ y bajo el cilindro $x^2+z=4$. **Rpta.** $4\pi u^3$

11) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies del paraboloide $z=x^2+y^2$ y $z=x^2+2y^2$ y los planos $y=x,\ y=2x,\ x=1$. **Rpta.** $\dfrac{2}{12}$

12) Hallar el volumen del sólido limitado por encima de la superficie $\dfrac{z^2}{h^2}=\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$ y por debajo del plano z = h con $x^2+y^2\le a^2$. **Rpta.** $\dfrac{a^2h\pi}{3}$

13) Hallar el volumen del sólido limitado por los cilindros $z=Ln(x+2)$ y $z=\ln(6-x)$ y los planos $x=0,\ x+y=2, x-y=2$.

Rpta. $4(4-3\ln 3)$.

14) Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $(x-1)^2+y^2=z$ y el plano $2x+z=2$. **Rpta.** $\dfrac{\pi}{2}$

15) Hallar el volumen del sólido comprendido entre paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy$. **Rpta.** $\frac{\pi}{96}$ el paraboloide

16) Hallar el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide $y^2 + z^2 = 4a(x+a)$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ $(c \geq a)$. **Rpta.** $2\pi a(c^2 - \frac{a^2}{2})$

17) Hallar el volumen del sólido limitado por: $(x^2 + y^2 + z^2) = axyz$.

Rpta. $\frac{a^3}{360}$

18) Hallar el volumen del sólido limitado por: $(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 z^4$

Rpta. $\frac{4\pi a^3}{21}$

19) Hallar el volumen del sólido limitado por: $(x^2 + y^2 + z^2) = a^2(x^2 + y^2)^2$.

Rpta. $\frac{64a^3\pi}{105}$

20) Hallar el volumen del sólido limitado por: $(x^2 + y^2)^2 = a^3 z$.

Rpta. $\frac{a^3\pi^2}{6}$

21) Hallar el volumen del sólido limitado por: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$

Rpta. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi$

22) Encuentre el volumen de la región D limitada por las paraboloides $z = x^2 + y^2$, y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$. **Rpta.** $162\,\pi$

23) Obtenga el volumen del sólido limitado por le paraboloide $x^2+y^2+z=12$ y el plano z = 8. **Rpta.** 8π

24) Determine el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2+y^2+z=1$ y el plano XY.

25) Determine el volumen del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=2y$, el paraboloide $x^2+y^2=2z$ y el plano XY.

26) Obtengo el volumen del sólido que esta en el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ y arriba del paraboloide $x^2+y^2=z$.

27) Hallar el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z=5x^2+5y^2$, $z=6-7x^2-y^2$.

28) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2+y^2=z$, $z^2=4(x^2+y^2)$.

29) Determinar el volumen del sólido acotado por el cilindro $x^2+z^2=4$ y las superficies $x=z^2$, $x-6=(z-2)^2$.

30) Hallar el volumen común de las esferas $x^2+y^2+z^2=9$ y $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

31) Hallar el volumen del sólido que es exterior a la superficie $z^2=x^2+y^2$ e interiormente a la superficie $x^2+y^2+z^2=2ax$

32) Calcular la masa del cubo $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ si la densidad del cubo en el punto (x,y,z) es $p(x,y,z)=x+y+z$. **Rpta.** $\dfrac{3a^4}{2}$

33) Encontrar la masa del sólido acotado por una esfera de radio a sí la densidad de volumen varía con el cuadrado de la distancia al centro. **Rpta.** $\frac{4}{5}a^5\pi$

34) Encontrar la masa del sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$, si la densidad del volumen en cualquier punto es $k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Rpta. $65k\pi$

35) Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2+y^2=2az$, y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$ $(z>0)$ si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de sus coordenadas. **Rpta.** $\frac{a^5\pi}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6})$

36) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. **Rpta.** $(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{7}{30})$

37) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$. **Rpta.** $(3,3,\frac{45}{32})$

38) Obtenga el momento de inercia con respecto al eje Z del sólido homogéneo que está dentro del cilindro $x^2+y^2-2x=0$, debajo del cono $x^2+y^2=z^2$ y arriba del plano XY, la densidad de volumen en un punto cualquiera es $k(en\ kg/m^3)$

Rpta. $\frac{512}{75}k\ kg-m^2$

39) Calcular el momento de inercia del cubo $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$, respecto de su arista. **Rpta.** $\frac{2a^5}{3}$

40) Hallar el momento de inercia respecto al eje Z del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, con función de densidad $p(x,y,z)=1$. **Rpta.** $\frac{4abc\pi}{12}(a^2+b^2)$

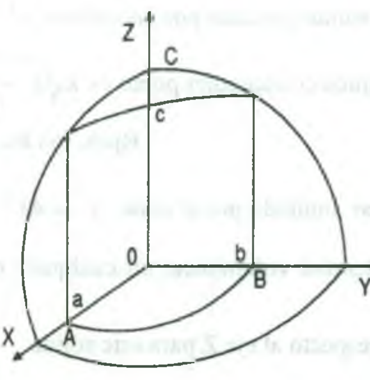
41) Hallar el momento de inercia del paralelepídedo recto homogéneo de aristas a,b, y a con respecto a cada una de las mismas cuya masa es igual a M.

Rpta. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2)$, $\frac{1}{3}M(c^2+a^2)$, $\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$.

42) Si S es el sólido en el primer octante limitado por los planos coordenados, la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el plano $x+y=1$, si la densidad en cada punto (x,y,z) es igual a su distancia al plano XY, hallar la masa de este sólido. **Rpta.** $\frac{11}{12}$

43) Hallar el centro de masa del tetraedro de vértices (0,0,0), $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$, $(a,b,c \geq 0)$ si la densidad en cada punto (x,y,z) es yz. **Rpta.** $(\frac{a}{2},\frac{2b}{3},\frac{2}{3}c)$

44) Del octante de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq c^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, se ha cortado el cuerpo OABC, limitado por los planos de coordenadas y por el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a \leq c,\ b \leq c)$. Ver figura.



Hallar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x,y,z) es igual a la cota z del mismo. **Rpta.** $\frac{ab}{24}(6c^2-a^2-b^2)$.

45) Hallar el momento de inercia del cilindro circular, que tiene por altura h y por radio de la base a, con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.

Rpta. $(3a^2+4h^2)\frac{a^2h\pi}{12}$

46) Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h, por radio de la base a y de densidad p, con respecto al diámetro de su base.

Rpta. $\frac{a^2hp\pi}{60}(3a^2+2h^2)$

47) Encuentre la masa y el centro de masa del sólido S limitado por el paraboloide $z=4x^2+4y^2$, y el plano z = a (a > 0). Si S tiene densidad constante k.

Rpta. $\frac{\pi ka^2}{8}$, (0,0,2a)

48) Encuentre la masa de un hemisferio sólido H de radio a sí la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al centro de la base.

Rpta. $\frac{\pi ka^4}{2}$, k = constante

49) Obtenga la masa del sólido limitado por las esferas $x^2+y^2+z=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$ si la densidad voluminica en cualquier punto es $k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Rpta. 65 kπ kg.

50) El sólido homogéneo limitado pro el cono $z^2=4x^2+4y^2$ entre los planos z = 9 y z = 4 tiene una densidad voluminica, en cualquier punto de k (en $\frac{kg}{m^3}$) calcule el momento de inercia respecto al eje Z para este sólido. **Rpta.** $\frac{32}{5}k\pi\ kg/m^2$

CAPITULO VII

7. INTEGRALES CURVILÍNEAS O DE LINEA.

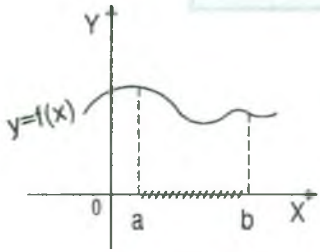
Pre-requisitos.- Para la comprensión adecuada de este capítulo de las integrales curvilíneas se requiere del conocimiento previo de:

- Cálculo diferencial e integral.
- Funciones vectoriales de variable real.
- Funciones de varias variables.
- Superficies.
- Parametrización de curvas.

Objetivos.- Establecer los fundamentos necesarios para la identificación de los tipos de integrales curvilíneas así como sus respectivas aplicaciones. Al finalizar él estudio de este capítulo, el alumno debe ser capaz de:

- Identificar los tipos de integrales curvilíneas.
- Utilizar las integrales curvilíneas en las diversas aplicaciones.

7.1 Introducción.

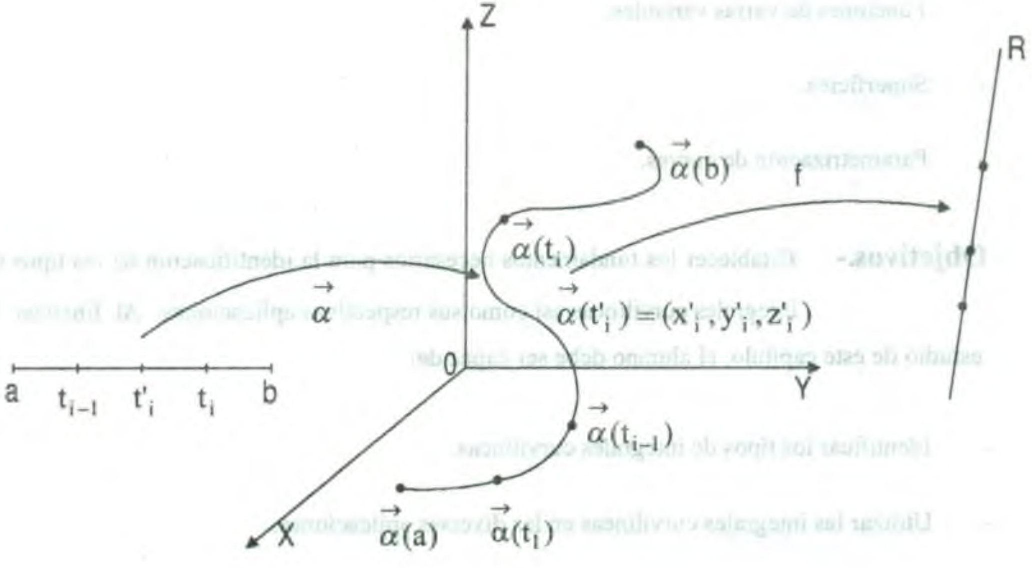


Si $f: [a,b] \longrightarrow R$, es una función continua en [a,b] entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ (integral definida); es decir, que la integral se realiza sobre el intervalo cerrado [a,b].

Ahora generalizaremos ésta integral, en donde la función f sea continua sobre la curva $C: \vec{\alpha}(t)$ y a estas integrales le llamaremos integrales curvilíneas ó de línea y denotaremos por $\int_C f\,ds$, es decir:

Consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$, tal que: $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^3$ es su imagen de $\vec{\alpha}$. Sea $f: C \subset R^3 \longrightarrow R$, una función definida sobre la curva $C \subset R^3$.

Cuya representación gráfica haremos de la siguiente manera:



Consideremos una partición del intervalo [a,b], $P=\{t_0,t_1,t_2,....,t_n\}$ tal que $a=t_0<t_1<....<t_n=b$, estos puntos determinan una partición en la curva C por medio de los puntos: $\vec{\alpha}(a)=\vec{\alpha}(t_0)$, $\vec{\alpha}(t_1)$, $\vec{\alpha}(t_2),....,\vec{\alpha}(t_n)=\vec{\alpha}(b)$. Ahora en cada sub intervalo $[t_{i-1},t_i]$, i = 1,2,...,n, tomamos un punto arbitrario t_i' tal que $\vec{\alpha}(t_i')=(x_i',y_i',z_i')\in C$, enseguida formemos la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i',y_i',z_i')\Delta S_i$, donde ΔS_i es la longitud de arco de la curva C de $\vec{\alpha}(t_{i-1})$ a $\vec{\alpha}(t_i)$ y sea $|\Delta S_i|$ la máxima longitud de arco correspondiente a la partición considerada.

7.2 Definición.

Si existe un número L tal que $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$ y $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i',y_i',z_i')\Delta S_i - L\right|<\varepsilon$, para toda partición con $|\Delta S_i|<\delta$, entonces existe la integral curvilínea de f con respecto a la longitud de arco ΔS_i y lo representaremos por:

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)dS=\lim_{|\Delta S_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i',y_i',z_i')\Delta S_i = L}$$

7.3 Propiedades Fundamentales de la Integral Curvilínea.

1º Consideremos una curva regular $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3$ definida por $\vec{\alpha}(t)=(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t))$ tal que $\vec{\alpha}([a,b])=C\subset R^3$ es la imagen de $\vec{\alpha}$ Sí $f:\ C\subset R^3\longrightarrow R$, una función continua sobre C, entonces

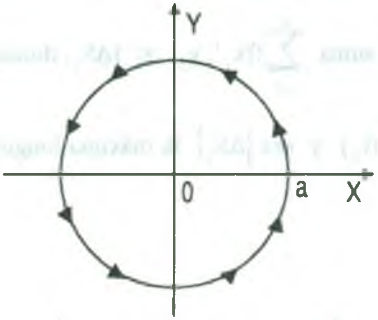
$$\int_C f(x,y,z)dS=\int_a^b f(\vec{\alpha}(t)).\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt=\int_a^b f(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt$$

donde $\|\vec{\alpha}'(t)\|=\sqrt{\alpha_1'(t)^2+\alpha_2'(t)^2+\alpha_3'(t)^2}$

esta integral recibe el nombre de integral curvilínea de primera especie.

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2+y^2)^n\,dS$, donde C es la circunferencia x = acost, y = a sen t.

Solución



La curva C en forma paramétrica es dado por:

$C: \vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t),\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\alpha}'(t) = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = a$

como $dS = \|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt \Rightarrow dS = a\,dt$

$$\int_C (x^2+y^2)^n\,dS = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t)^n .a\,dt = \int_0^{2\pi} a^{2n+1}dt = a^{2n+1}t \Big/_0^{2\pi} = 2a^{2n+1}\pi$$

$$\therefore \int_C (x^2+y^2)^n\,dS = 2a^{2n+1}\pi$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2+y^2+z^2)dS$ donde la curva es definida por

$C: \vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ 0 \le t \le 2\pi.$

Solución

Como $C: \vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow R^3$ es una curva regular definida por:

$\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2}$

como $dS = \|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt \Rightarrow dS = \sqrt{2}\,dt$, entonces

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)dS = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1+t^2)dt = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2)$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, donde C es la primera espira de la hélice circular x = a cos t, y = a sen t, z = b t

Solución

Sea $\vec{\alpha}:[0,2\pi]\longrightarrow R^3 \;/\; \vec{\alpha}(t)=(a\cos t,\, a\,\text{sen}\,t, bt)$, la curva parametrizada donde

$dS=\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt \;\Rightarrow\; dS=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$, entonces

$$\int_C \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt}{a^2\cos^2 t+a^2\,\text{sen}^2\,t+b^2t^2}=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Big/_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi b}{a}\right)$$

Observación.- Cuando se tiene una curva plana y = φ(x) , a ≤ x ≤ b y f(x,y) es una función continua, entonces la integral curvilínea se calcula mediante la fórmula.

$$\boxed{\int_C f(x,y)dS=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx}$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C y^2\,\text{sen}^3\,x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dS$, donde C es el arco de la curva y = sen x, desde el punto (0,0) hasta el punto $(\frac{\pi}{2},1)$.

Solución

Como la curva es plana C: y = sen x, 0 ≤ x ≤ π/2, $dS=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$$\int_C y^2 sen^3 x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dS=\int_0^{\pi/2} sen^2 x.sen^3 x\sqrt{1+\cos^2 x}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2} sen^5 x(1+\cos^2 x)dx=\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)^2(1+\cos^2 x)senx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^6 x - \cos^4 x - \cos^2 x + 1)\,\text{sen}\, x dx$$

$$= \left(-\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right) \Big/_0^{\pi/2}$$

$$= (0+0) - \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{64}{105}$$

2º Consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ definida por $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^3$ es la imagen de $\vec{\alpha}$.

Si P,Q,R: $C \subset R^3 \longrightarrow R$ son funciones continuas sobre C, entonces:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b [P(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))\alpha_1'(t) + \\ &+ Q(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))\alpha'_2(t) + R(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))\alpha'_3(t)]dt\end{aligned}}$$

Estas integrales reciben el nombre de integrales curvilíneas de segunda especie.

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C y dx + x dy$, donde C es el 1º cuadrante de la circunferencia x = R cos t, y = R sen t desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Solución

Sea $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t)$ para $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ la curva parametrizada.

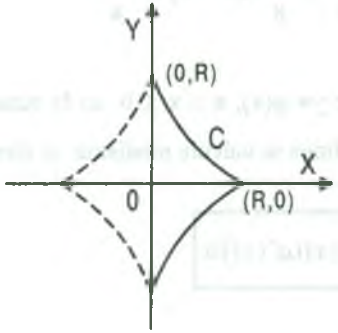
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -R\,\text{sen}\, t\; d t \\ dy = \;R\cos t\; d t \end{cases}$$

$$\int_C y\,dx + x\,dy = \int_0^{\pi/2} R\,\text{sen}\, t(-R\,\text{sen}\, t)dt + R\cos t . R\cos t\; d t$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \text{sen}^2 t) d t = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos 2t\, d t = R^2 \frac{\text{sen} 2t}{2} \Big/_0^{\pi/2} = R^2(0-0) = 0$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{x^2 dy + y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, donde C es la cuarta parte de la astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\,\text{sen}^3 t$, desde el punto (R,0) hasta el punto (0,R).

Solución



La curva parametrizada es dado por.

$$\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{\alpha}(t) = (R\cos^3 t, R\,\text{sen}^3 t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$C: \begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\,\text{sen}^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3R\cos^2 .\text{sen}\, t\ dt \\ dy = 3R\,\text{sen}^2 t.\cos t\ dt \end{cases}$$

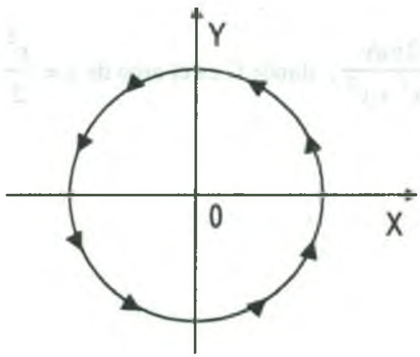
$$\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \cos^6 t(3R\,\text{sen}^2 t.\cos t) + R^2\,\text{sen}^6 t(-3R\cos^2 t\,\text{sen}\, t)}{R^{5/3}\cos^5 t + R^{5/3}\,\text{sen}^5 t} dt$$

$$= 3R^{4/3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^7 t\,\text{sen}^2 t + \text{sen}^7 t\cos^2 t}{\cos^5 t + \text{sen}^5 t} dt = 3R\sqrt[3]{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^5 t + \text{sen}^5 t)\,\text{sen}^2 t.\cos^2 t}{\cos^5 t + \text{sen}^5 t} dt$$

$$= 3R\sqrt[3]{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 t.\cos^2 t\,dt = 3R\sqrt[3]{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{8} dt = \frac{3R\sqrt[3]{R}}{8}\left(t - \frac{\text{sen}\,4t}{4}\right)\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3R\sqrt[3]{R}\pi}{16}$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{xy^2 dy}{x^2 + y^2}$, a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido antihorario.

Solución



Parametrizando la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se tiene $x = a\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\theta$

Luego la curva C en forma parametrizada es dada por:

$$C:\ \vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{\alpha}(\theta) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta)$$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_C \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a.\cos\theta.a^2\operatorname{sen}^2\theta.a\cos\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta} = a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta.\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta = \frac{a^2}{8}(\theta - \frac{\operatorname{sen}4\theta}{4})\Big/_0^{2\pi} = \frac{a^2}{8}(2\pi - 0) = \frac{a^2\pi}{4}$$

Observación.- Si P(x,y) y Q(x,y) son funciones continuas e y= φ(x), a ≤ x ≤ b es la ecuación de una curva plana C, entonces la integral curvilínea se calcula mediante la fórmula:

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x)).\varphi'(x)]dx}$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C y^2dx + x^2dy$, donde C es el segmento de la recta y = 2x + 3, de A(-1,1) hasta B(2,7).

Solución

Sea C: y = 2x + 3 , -1 ≤ x ≤ 2 curva plana

$$\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = \int_{-1}^2 [(2x+3)^2 + x^2(2)]dx = \int_{-1}^2 (6x^2+12x+9)dx = (2x^3+6x^2+9x)\Big/_{-1}^2$$

$$= (16 + 24 + 18) - (-2 + 6 - 9) = 63$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{2y\,dy}{4x^2+y^2}$, donde C es el arco de $y = \frac{x^2}{2}$ de (θ,θ) hasta (2,2).

Solución

Sea C: $y = \frac{x^2}{2}$, 0 ≤ x ≤ 2 curva plana

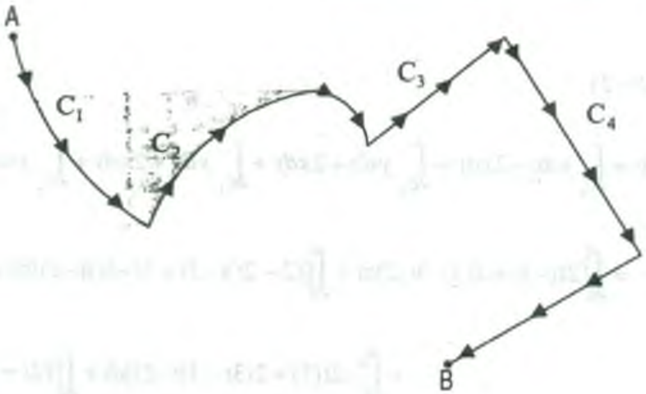
$$\int_C \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{2y}{4x^2+y^2}dy=\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-\frac{x^4}{4}}}+\frac{x^2}{4x^2+\frac{x^4}{4}}.\frac{2x}{2}dx$$

$$=\int_0^2 \left(\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x}{16+x^2}\right)dx=\left[-2\sqrt{4-x^2}+2\ln|16+x^2|\right]\Big/_0^2$$

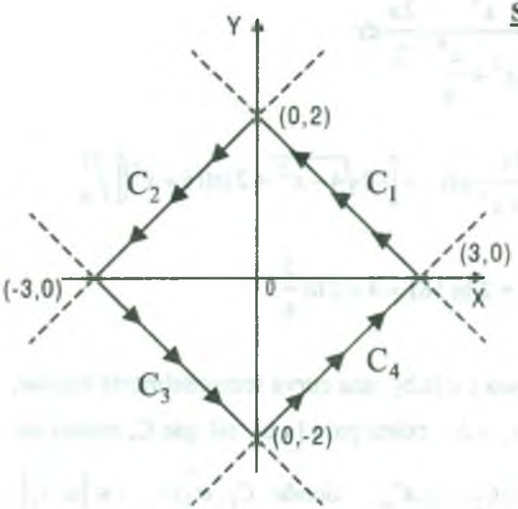
$$=(0+2\ln 20)-(-4+2\ln 16)=4+2\ln\frac{5}{4}$$

3º Si la curva C: $\vec{\alpha}(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$ para $t\in[a,b]$ una curva seccionalmente regular, entonces una partición $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$, existe para [a,b] tal que C, resulta ser la unión de las curvas regulares : $C=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_n$, donde C_1: $\vec{\alpha}_1(t)$, $t\in[a,t_1]$, C_2: $\vec{\alpha}_2(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, ..., C_n: $\vec{\alpha}_n(t)$, $t\in[t_{n-1},b]$ y sea f: $C\subset R^3\longrightarrow R$, una función definida en C, entonces se tiene:

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)dS=\int_{C_1} f(x,y,z)dS+\int_{C_2} f(x,y,z)dS+\ldots+\int_{C_n} f(x,y,z)dS=\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(x,y,z)dS}$$



Ejemplo.- Encontrar la integral curvilínea $\int_C ydx+2xdy$, si C es el contorno de un rombo en sentido inverso al de las agujas de un reloj y cuyos lados son las rectas $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-1$



Solución

Sea $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ ahora tomemos

$C_1: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, parametrizando

$$\vec{\alpha}_1(t) = (3-3t, 2t), \quad 0 \le t \le 1$$

$C_2: \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = -1$, parametrizando se tiene:

$$\vec{\alpha}_2(t) = (-3t, 2-2t), \quad 0 \le t \le 1$$

$C_3: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1$, parametrizando se tiene:

$$\vec{\alpha}_3(t) = (3t-3, -2t), \quad 0 \le t \le 1$$

$C_4: \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$, parametrizando se tiene:

$$\vec{\alpha}_4(t) = (3t, 2t-2)$$

$$\int_C y\,dx + 2x\,dy = \int_{C_1} y\,dx + 2x\,dy + \int_{C_2} y\,dx + 2x\,dy + \int_{C_3} y\,dx + 2x\,dy + \int_{C_4} y\,dx + 2x\,dy$$

$$= \int_0^1 [2t(-3) + 2(3-3t)2]dt + \int_0^1 [(2-2t)(-3) + 2(-3t)(-2)]dt +$$

$$+ \int_0^1 [-2t(3) + 2(3t-3)(-2)]dt + \int_0^1 [(2t-2)3 + 6t(2)]dt$$

$$= \int_0^1 (12-18t)dt + \int_0^1 (18t-6)dt + \int_0^1 (12-18t)dt + \int_0^1 (18t-6)dt$$

$$= \int_0^1 12\,dt = 12t \Big/_0^1 = 12$$

Notación.- Dada una curva C parametrizada por $\vec{\alpha}(t)$ con una cierta orientación, cuando se le reparametriza por una función $\vec{\omega}(t)$ que le invierte la orientación, entonces se le denota por C_.

Al estudiar las integrales de línea nos interesa no solamente el conjunto de puntos que une a la curva C, si no la manera como ha sido orientada, es decir, la parametrización $\vec{\alpha}(t)$.

7.4 Definición.

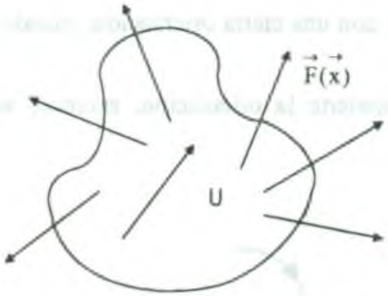
A una curva C con una parametrización $\vec{\alpha}(t)$ se le llama camino o trayectoria. A las integrales de línea se le ha dado muchas notaciones, por ejemplo sí un campo vectorial $\vec{F}$ en R^n es una función definida sobre un conjunto abierto $U \subset R^n$ y con valores en R^n, es decir.

$$\vec{F}: U \subset R^n \longrightarrow R^n, \text{ tal que:}$$

$$F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) \text{ donde } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

para n = 2 denotaremos $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{F}(\vec{x}) = (P(\vec{x}), Q(\vec{x}))$

n = 3 denotaremos $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{F}(\vec{x}) = (P(\vec{x}), Q(\vec{x}), R(\vec{x}))$



Campo vectorial $\vec{F}$ sobre el conjunto abierto $U \subset R^n$

Luego sí $\vec{F}: R^3 \longrightarrow R^3$ tal que :

$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ y

$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ donde $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ a la

integral curvilínea denotaremos por:

$$\int_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r} = \int_C (P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}).(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k})$$

$$= \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Observación.- En una integral de línea, la curva a lo largo del cual se realiza la integración se denomina camino o trayectoria de integración, si el camino de integración es una curva cerrada se denota de la manera siguiente.

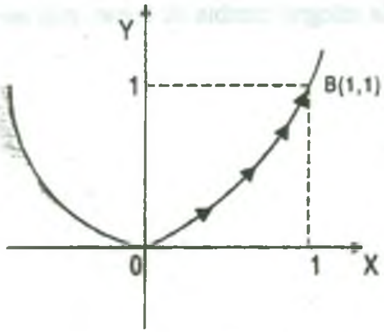
$\oint_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r}$
(antihorario)

$\oint_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r}$
(horario)

Ejemplo.- Calcular la integral de línea del campo $\vec{F}(x,y) = (x^2, y^2)$ sobre la parábola C: $y = x^2$ desde A(0,0) hasta B(1,1).

Solución

Parametrizando la curva C: $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2)$, t $\in [0,1]$



como $\vec{F}(x,y)=(x^2,y^2)$

$$\vec{F}(\vec{\alpha}(t))=F(t,t^2)=(t^2,t^4)$$

$$\int_C F(x,y).(dx,dy)=\int_0^1 (t^2,t^4)(dt,\ 2t\,dt)$$

$$=\int_0^1 (t^2+2t^5)dt=(\frac{t^3}{3}+\frac{t^6}{3})\Big/_0^1=\frac{2}{3}$$

ahora reparametrizando la misma curva C por otra función

$\vec{\omega}(t)=(\frac{\sqrt{t}}{2},\frac{t}{4})$, $t\in[0,4]$; $\vec{F}(x,y)=(x^2,y^2)$ entonces $\vec{F}(\vec{\omega}(t))=\vec{F}(\frac{\sqrt{t}}{2},\frac{t}{4})=(\frac{t}{4},\frac{t^2}{16})$.

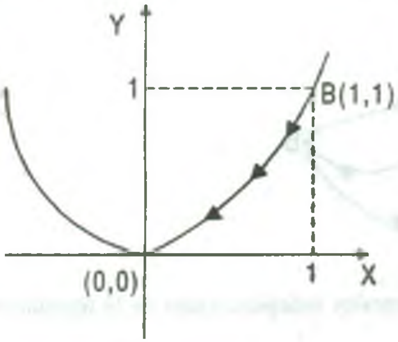
$$\int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r}=\int_0^4 (\frac{t}{4},\frac{t^2}{16}).(\frac{1}{4\sqrt{t}},\frac{1}{4})dt=\int_0^4 (\frac{\sqrt{t}}{16}+\frac{t^2}{64})dt=\frac{2}{3}$$

por lo tanto se observa que para una curva fija C el valor de la integral no varia $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ si es que la curva está descrita por varias parametrizaciones que preservan la orientación original.

Ejemplo.- Calcular la integral de línea de $\vec{F}(x,y)=(x^2,y^2)$ a lo largo de la parábola $y=x^2$ desde el punto B(1,1) hasta el punto A(0,0).

Solución

Observamos que es la misma curva del ejemplo anterior, pero recorrida en sentido opuesto de modo que denotaremos por C_; parametricemos C_ mediante:



$C\_$: $\vec{\omega}(t)=(1-t,(1-t)^2)$, $t\in[0,1]$

$$\int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r}=\int_0^1 F(1-t,(1-t)^2)dt$$

$$=\int_0^1 (((1-t)^2,(1-t)^4).(-1,-2(1-t)))dt$$

$$=\int_0^1 \left[-(1-t)^2-2(1-t)^5\right]dt=(\frac{(1-t)^3}{3}+\frac{(1-t)^6}{3})\Big/_0^1=-\frac{2}{3}$$

observamos que al invertir la orientación, el valor de la integral cambia de signo, más no de magnitud.

Observación.- Sean $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\omega}(t)$ dos caminos de la curva C.

i) Si $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\omega}(t)$ originan la misma orientación de C.

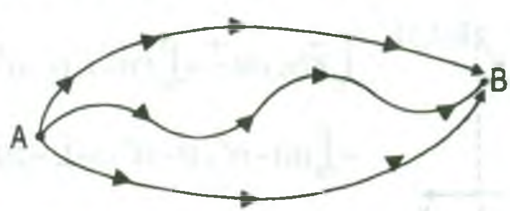
$$\int_C \vec{F}(\vec{\alpha}(t))d\vec{\alpha}(t) = \int_C \vec{f}(\vec{\omega}(t))d\vec{\omega}(t)$$

ii) Si $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\omega}(t)$ originan orientaciones opuestas de C.

$$\int_{C_-} \vec{F}(\vec{\alpha}(t))d\vec{\alpha}(t) = -\int_C \vec{F}(\vec{\omega}(t))d\vec{\omega}(t)$$

7.5 Independencia de la Trayectoria en Integrales Curvilíneas.

En general, el valor de una integral curvilínea depende del integrando, de los dos extremos y del arco que los une, sin embargo, existen casos especiales en los cuales el valor de una integral curvilínea depende solamente del integrando y de los extremos, más no de la trayectoria sobre el cual se realiza la integración, esto ocurre, cuando la forma diferencial que se pretende integrar P(x,y)dx + Q(x,y)dy es exacta, es decir, que existe una función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$ tal que: df(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy, en estos casos las integrales curvilíneas sólo dependen de los extremos, bajo estas condiciones, decimos que la integral curvilínea es "independiente de la trayectoria".



El siguiente teorema establece la relación entre las integrales independientes de la trayectoria y las diferenciales exactas.

7.6 Teorema.

Supongamos que P(x,y)dx + Q(x,y)dy sea una diferencial exacta, es decir: existe una función $f: D \subset R^2 \longrightarrow R$, tal que: df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y) dy y consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2$ definida por $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^2$ es la imagen de $\vec{\alpha}$ entonces:

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = f(\alpha_1(b), \alpha_2(b)) - f(\alpha_1(a), \alpha_2(a))}$$

Demostración

Definiremos la función F(t) mediante: $F(t) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $a \leq t \leq b$

calculando su derivada por medio de la regla de la cadena

$F'(t) = f_1'(\alpha_1(t), \alpha_2(t)).\alpha_1'(t) + f_2'(\alpha_1(t), \alpha_2(t)).\alpha_2'(t)$, de donde

$F'(t) = P(\alpha_1(t), \alpha_2(t)).\alpha_1'(t) + Q(\alpha_1(t), \alpha_2(t)).\alpha_2'(t)$

integrando miembro a miembro tenemos:

$\int_a^b F'(t)dt = \int_a^b P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(b) - F(a)$, por lo tanto

$$\int_a^b P(x,y)dx + Q(x,y)dy = f(\alpha_1(b), \alpha_2(b)) - f(\alpha_1(a), \alpha_2(a))$$

7.7 Corolario.

Supongamos que P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, sea una diferencial exacta, es decir que existe una función $f: R^3 \longrightarrow R$ tal que: df(x,y,z) = P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz y consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ definida por: $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ tal que: $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^3$ es la imagen de $\vec{\alpha}$ entonces:

$$\boxed{\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dy = f(\alpha_1(b), \alpha_2(b), \alpha_3(b)) - f(\alpha_1(a), \alpha_2(a), \alpha_3(a))}$$

Demostración

Definiremos la función F(t) mediante: $F(t)=f(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t))$, $a\le t\le b$

calculando su derivada por medio de la regla de la cadena

$$F'(t)=f_1'(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_1'(t)+f_2'(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_2'(t)+$$

$$+f'_3(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha'_3(t)$$

$$F'(t)=P(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_1'(t)+Q(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_2'(t)+R(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_3'(t)$$

integrando miembro a miembro se tiene:

$$\int_a^b\left[P(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_1'(t)+Q(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_2'(t)+R(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)).\alpha_3'(t)\right]dt$$

$$=\int_a^b F'(t)dt=F(b)-F(a)$$

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=F(b)-F(a)$$

$$=f(\alpha_1(b),\alpha_2(b),\ \alpha_3(b))-f(\alpha_1(a),\alpha_2(a),\alpha_3(a))$$

Observación.- La expresión P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz es una diferencial exacta, si se cumple:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}}$$

ahora si P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, es una diferencial exacta, quiere decir que existe una función f(x,y,z) tal que :

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z),\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z),\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z)}$$

Luego para encontrar la función f(x,y,z) se sigue el procedimiento siguiente, siempre y cuando reúna las condiciones necesarias.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z)$, integrando con respecto a x,

$$f(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + g(y,z) \qquad \text{... (1)}$$

ahora derivamos con respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx + \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = Q(x,y,z)$$

$\frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx$, integrando respecto a y

$$g(y,z) = \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy + h(z) \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$f(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy + h(z) \qquad \text{... (3)}$$

ahora derivando respecto a z a la ecuación (3)

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy] + h'(z) = R(x,y,z)$$

$h'(z) = R(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}[\int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy]$, integrando

$$h(z) = \int [R(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}[\int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy]]dz \qquad \text{... (4)}$$

por último reemplazando (4) en (1)

$$f(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy +$$

$$+ \int [R(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}[\int P(x,y,z)dx + \int [Q(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx]dy]dz]$$

Observación.- Si $P,Q,R,: U \subset R^3 \longrightarrow R$ son funciones continuas en U, y sea C una curva regular cerrada contenida en U con representación paramétrica $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ tal que: $\vec{\alpha}([a,b]) = C$ y $\vec{\alpha}(a) = \vec{\alpha}(b)$ y si P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz es una diferencial exacta entonces:

$$\boxed{\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0}$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea

$$\int_C (x^2 y\cos x + 2xy\,\text{sen}\,x - y^2 e^x)dx + (x^2\,\text{sen}\,x - 2ye^x - y)dy \text{ donde C: x+y = 1, } 0 \le x \le 1$$

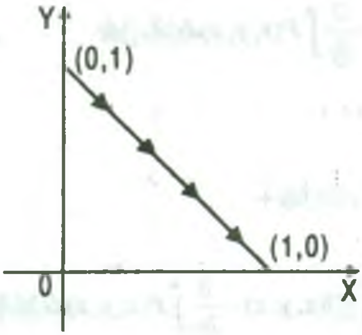
Solución

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 y\cos x + 2xy\,\text{sen}\,x - y^2 e^x \\ Q(x,y) = x^2\,\text{sen}\,x - 2ye^x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = x^2\cos x + 2x\,\text{sen}\,x - 2ye^x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x^2\cos x + 2x\,\text{sen}\,x - 2ye^x \end{cases}$$

de donde $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, es exacta, entonces

$\exists\ f: R^2 \longrightarrow R$, tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = x^2 y\cos x + 2xy\,\text{sen}\,x - y^2 e^x$, integrando respecto a y



$$f(x,y) = \int (x^2 y\cos x + 2xy\,\text{sen}\,x - y^2 e^x)dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \int d(x^2 y\,\text{sen}\,x - y^2 e^x) + g(y)$$

$$f(x,y) = x^2 y\,\text{sen}\,x - y^2 e^x + g(y)$$

derivando con respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen} x - 2ye^x + g'(y) = Q(x,y)$$

$$x^2 \operatorname{sen} x - 2ye^x + g'(y) = x^2 \operatorname{sen} x - 2ye^x - y \text{ entonces } g'(y) = -y \Rightarrow g(y) = -\frac{y^2}{2}$$

$$\therefore f(x,y) = x^2 y \operatorname{sen} x - y^2 e^x - \frac{y^2}{2}, \text{ por el teorema (6.6) se tiene}$$

$$\int_C (x^2 y \cos x + 2xy \operatorname{sen} x - y^2 e^x)dx + (x^2 \operatorname{sen} x - 2ye^x - y)dy = \int_{(0,1)}^{(1,0)} d\, f(x,y)$$

$$= f(x,y) \Big/_{(0,1)}^{(1,0)} = f(1,0) - f(0,1) = 0 - (0 - 1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Ejemplo.- Calcular $\int_C e^x \cos y dx - e^x \operatorname{sen} y dy$ donde C es cualquier arco de (1,0) a (0,1).

Solución

$$\begin{cases} P(x,y) = e^x \cos y \\ Q(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces la expresión $e^x \cos y\, dx - e^x \operatorname{sen} y\, dy$ es un diferencial exacta, entonces $\exists\ f: R^2 \longrightarrow R$, tal que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = e^x \cos y, \text{ integrando respecto a x.}$$

$$f(x,y) = \int e^x \cos y dx + g(y) = e^x \cos y + g(y), \text{ calculando la derivada respecto a y.}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y + g'(y) = Q(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y \;,\; g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\therefore\ f(x,y) = e^x \cos y$$

Aplicando el teorema (6.6) se tiene

$$\int_C e^x \cos y\,dx - e^x \operatorname{sen} y\,dy = \int_{(1,0)}^{(0,1)} d\,f(x,y) = f(x,y)\Big/_{(1,0)}^{(0,1)} = \text{f}(0,1) - \text{f}(1,0) = \cos 1 - \text{e}$$

Ejemplo.- Demostrar que la siguiente integral

$\int_C 2xyz^2\,dx + (x^2z^2 + z\cos yz)dy + (2x^2yz + y\cos yz)dz$ es independiente de la trayectoria C; y evaluarla para cuando C va de (0,0,1) hasta $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$.

Solución

$$\begin{cases} P = 2xyz^2 \\ Q = x^2z^2 + z\cos yz \\ R = 2x^2yz + y\cos yz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz^2 \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x^2z + \cos yz - yz\operatorname{sen} yz \\ \frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz \ , \ \frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2z + \cos yz - yz\operatorname{sen} yz \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

como es una diferencial exacta, entonces $\exists\ f: R^3 \longrightarrow R$, tal que $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z)$,

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z)$; $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z)$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = 2xyz^2$, integrando respecto a x $\Rightarrow f(x,y,z) = \int 2xyz^2\,dx + g(y,z)$

$f(x,y,z) = x^2yz^2 + g(y,z)$, derivando respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2z^3 + g_y'(y,z) = Q(x,y) = x^2z^2 + z\cos yz$$

$g_y'(y,z) = z\cos yz$, integrando respecto a y

$$g(y,z)=\int z\cos yz\,dy+h(z)$$

$g(y,z)=\operatorname{sen} yz+h(z)$ reemplazando en f(x,y,z)$\Rightarrow f(x,y,z)=x^2yz^2+\operatorname{sen} yz+h(z)$

derivando respecto a z. $\Rightarrow\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=2x^2yz+y\cos yz+h'(z)=R(x,y,z)$

$2x^2yz+y\cos yz+h'(z)=2x^2yz+y\cos yz\ \Rightarrow\ h'(z)=0\ \Rightarrow\ h(z)=c$, por lo tanto

$$f(x,y,z)=x^2yz^2+\operatorname{sen} yz$$

$$\int_C 2xyz^2\,dx+(x^2z^2+z\cos yz)dy+(2x^2yz+y\cos yz)dz=\int_{(0,0,1)}^{(1,\frac{\pi}{4},2)} d\,f(x,y,z)$$

$$=f(x,y,z)\Big/_{(0,0,1)}^{(1,\frac{\pi}{4},2)}=f(1,\frac{\pi}{4},2)-f(0,0,1)=(\pi+1)-(0+0)=\pi+1$$

Ejemplo.- Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_{(a,b,c)}^{(d,e,f)}\frac{-x\,dx-y\,dy-z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

Solución

La expresión $\dfrac{-x\,dx-y\,dy-z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ es la diferencial total de la función

$f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, por lo tanto

$$\int_{(a,b,c)}^{(d,e,f)}\frac{-xdx-ydy-zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\int_{(a,b,c)}^{(d,e,f)} d(f(x,y,z))=f(x,y,z)\Big/_{(a,b,c)}^{(d,e,f)}=\text{f(d,e,f) - f(a,b,c)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d^2+e^2+f^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

7.8 Ejercicios Desarrollados.

1) Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{z^2 dS}{x^2+y^2}$, donde C es la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = a t$

Solución

La curva C parametrizada es dado por:

$C: \vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow R^3 \ / \ \vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, at)$, $0 \le t \le 2\pi$ como

$dS = \| \vec{\alpha}'(t) \| dt \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, a)$ y su módulo es:

$$\| \vec{\alpha}'(t) \| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2} = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\int_C \frac{z^2 dS}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2t^2.a\sqrt{2}\,dt}{a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{a\sqrt{2}\,t^3}{3} \Big/_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}\,a\pi^3}{3}$$

2) Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, donde C es un segmento de la recta que une entre si los puntos $0(0,0)$ y $A(1,2)$

Solución

Parametrizando el segmento $\vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow R^2$ tal que $\vec{\alpha}(t) = (t,2t) \Rightarrow \vec{\alpha}'(t) = (1,2)$

entonces $\| \vec{\alpha}'(t) \| = \sqrt{5}$, como $dS = \| \vec{\alpha}'(t) \| dt = \sqrt{5}dt \quad \Rightarrow \quad dS = \sqrt{5}dt$, entonces

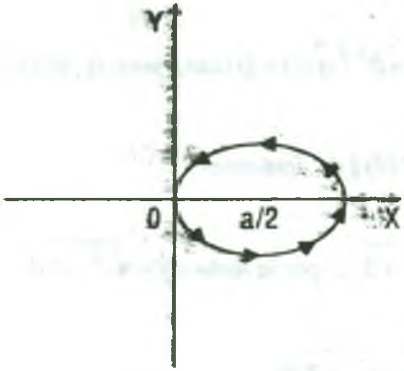
$\vec{\alpha}(a) = (0,0) = (a,2a) \Rightarrow a = 0$ y $\vec{\alpha}(b) = (1,2) = (b,2b) \Rightarrow b = 1$

$$\int_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dt}{\sqrt{t^2+4t^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}\,dt}{\sqrt{5t^2+4}} = \ln(\sqrt{5}\,t + \sqrt{5t^2+4}) \Big/_0^1$$

$$= \ln\left|\sqrt{5}+3\right| - \ln\sqrt{4} = \ln(\frac{\sqrt{5}+3}{2})$$

3) **Calcular la integral curvilínea** $\int_C (x-y)dS$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=ax$

Solución



Sea C: $x^2+y^2=ax$, completando cuadrados se tiene:

$C: (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ ahora parametrizamos la curva C.

$$\begin{cases} x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Luego la curva parametrizada es expresado por:

$$\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^2 \;/\; \vec{\alpha}(\theta)=(\frac{a}{2}(1+\cos\theta),\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta),\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{\alpha}'(\theta)=(-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta,\frac{a}{2}\cos\theta) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(\theta)\|=\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta}=\frac{a}{2}$$

como $dS=\|\vec{\alpha}'(\theta)\|\,d\theta=\frac{a}{2}d\theta \Rightarrow dS=\frac{a}{2}d\theta$

$$\int_C (x-y)dS=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{a}{2}(1+\cos\theta)-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta)\frac{a}{2}d\theta=\frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}[\theta+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta]\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}\left[(\frac{\pi}{2}+1+0)-(-\frac{\pi}{2}-1+0)\right]=\frac{a^2}{4}(\pi+2)$$

$$\therefore \int_C (x-y)dS=\frac{a^2}{4}(\pi+2)$$

4) Calcular la integral curvilínea $\int_C (2z-\sqrt{x^2+y^2})dS$, donde C es la primera espira de la línea helicoidal cónica x = t cos t, y = t sen t, z = t

Solución

La curva parametrizada es dado por: $C: \vec{\alpha}:[a,b] \longrightarrow R^3 \,/\, \vec{\alpha}(t)=(t\cos t, t\,\text{sen}\,t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\alpha}'(t)=(\cos t - t\,\text{sen}\,t, \text{sen}\,t + t\cos t, 1)$ como $dS = \|\vec{\alpha}'(\theta)\|\,dt$ entonces

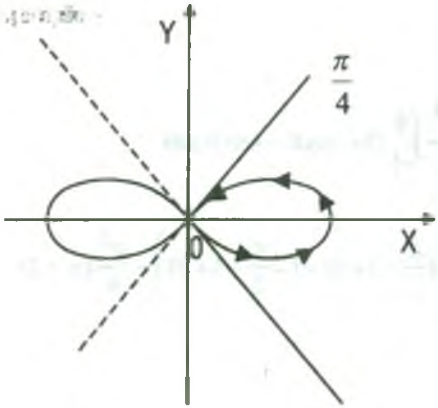
$\|\vec{\alpha}'(\theta)\| = \sqrt{(\cos t - t\,\text{sen}\,t)^2 + (\text{sen}\,t + t\cos t)^2} = \sqrt{t^2+2}$, por lo tanto $dS = \sqrt{t^2+2}\,dt$

$$\int_C (2z-\sqrt{x^2+y^2})dS = \int_0^{2\pi} (2t-\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\,\text{sen}^2\,t})\sqrt{t^2+2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2} \Big/_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(2\pi^2+1)^{3/2}-1\right]$$

5) Calcular la integral curvilínea $\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\,dS$, donde C es una linea dada por la ecuación $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (x ≥ 0, mitad de la LEMNISCATA)

Solución



Sea, $C: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $x \ge 0$ pasando a coordenadas polares se tiene: x = r cos θ, y =r sen θ ...(1)

$$(r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta)^2 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta)$$

$r^2 = a^2\cos 2\theta$ de donde $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ... (2)

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y = a\sqrt{\cos 2\theta}\,\text{sen}\,\theta$

por lo tanto la curva parametrizado es dado por:

$$C: \vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2 \; / \; \vec{\alpha}(\theta) = (a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, a\sqrt{\cos 2\theta}\,\text{sen}\,\theta), \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

como $dS = \|\vec{\alpha}'(\theta)\| d\theta$, calculando la derivada de $\vec{\alpha}(\theta)$.

$$\vec{\alpha}'(\theta) = a\left(-\frac{\text{sen}\,2\theta.\cos\theta + \text{sen}\,\theta.\cos 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \frac{\cos\theta.\cos 2\theta - \text{sen}\,2\theta.\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)$$

$$\|\vec{\alpha}'(\theta)\| = a\sqrt{\left(-\frac{\text{sen}\,2\theta.\cos\theta + \text{sen}\,\theta.\cos 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta.\cos 2\theta - \text{sen}\,2\theta.\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\|\vec{\alpha}'(\theta)\| = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} \Rightarrow dS = \frac{a\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\int_C x\sqrt{x^2 - y^2}\, dS = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta.\cos 2\theta - a^2\cos 2\theta.\text{sen}^2\theta}\,\frac{a\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos\theta\, a\cos 2\theta\, d\theta = a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 3\theta + \cos\theta)\,d\theta$$

$$= a^3\left(\frac{\text{sen}\,3\theta}{3} + \text{sen}\,\theta\right)\Big/_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$$

6) Calcular la integral curvilínea $\int_C xyz\,dS$, donde C es una cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ situada en el primer octante.

Solución

Sea $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 & \ldots.(1) \\ x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{4} & \ldots.(2) \end{cases}$ parametrizando la curva C se tiene: de la ecuación (2) proyectamos al plano XY.

$$\begin{cases} x = \dfrac{R}{2}\cos\theta \\ y = \dfrac{R}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} , \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \textbf{...(3)}$$

ahora reemplazando (3) en (1) tenemos: $\dfrac{R^2}{4}\cos^2\theta + \dfrac{R^2}{4}\operatorname{sen}^2\theta + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

Luego la curva parametrizada es dado por:

$$\vec{\alpha} : [a,b] \longrightarrow R^3 \ / \ \vec{\alpha}(\theta) = (\frac{R}{2}\cos\theta, \frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}R) \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

de donde $\vec{\alpha}'(\theta) = (-\dfrac{R}{2}\operatorname{sen}\theta, \dfrac{R}{2}\cos\theta) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(\theta)\| = \dfrac{R}{2}$

y como $dS = \|\vec{\alpha}'(\theta)\|\, d\theta = \dfrac{R}{2}d\theta \Rightarrow dS = \dfrac{R}{2}d\theta$

$$\int_C xyz\,dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3\sqrt{3}}{8}\operatorname{sen}\theta.\cos\theta.\frac{R}{2}d\theta = \frac{R^4\sqrt{3}}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta.\cos\theta.d\theta$$

$$= \frac{R^4\sqrt{3}}{16}.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4\sqrt{3}}{32}$$

7) Calcular la integral $\int_C (x+y)dS$, donde C es una cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, y = x situada en el primer optante.

Solución

$$\text{Sea } C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases} \quad \textbf{... (1)}$$

interceptando las dos superficies tenemos: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{z^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$ (elipse)

parametrizando tenemos. $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$, z = R sen θ como $y = x \Rightarrow y = \dfrac{R\cos\theta}{\sqrt{2}}$, luego la curva parametrizada es expresado por:

$$\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3 \;/\; \vec{\alpha}(\theta) = \left(\frac{R\cos\theta}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta\right),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

de donde $\vec{\alpha}'(\theta) = \left(-\dfrac{R\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}, -\dfrac{R\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}, R\cos\theta\right) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(\theta)\| = R$

como $dS = \|\vec{\alpha}'(0)| d\theta = R d\theta \Rightarrow dS = R d\theta$

$$\int_C (x+y)\,dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2R}{\sqrt{2}}\cos\theta . R\,d\theta = \sqrt{2}R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta . d\theta = \sqrt{2}R^2 \operatorname{sen}\theta \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}R^2$$

$$\therefore \quad \int_C (x+y)dS = \sqrt{2}R^2$$

8) Hallar $\int_C [(3x^2+6y)\cos\alpha - 14yz\cos\beta + 20xz^2\cos\gamma]dS$, siendo C: $\vec{x}(t) = (t, t^2, t^3)$; $t \in [0,1]$, α, β, γ los ángulos directores de vector tangente unitario a C.

Solución

C: $\vec{x}(t) = (t, t^2, t^3) \Rightarrow \vec{x}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ el vector tangente unitario es:

$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ además $dS = \|\vec{x}'(t)\|\,dt$ y $\vec{x}'(t) = \vec{T}(t).\|\vec{x}'(t)\|$

$$\int_C [(3x^2+6y)\cos\alpha - 14yz\cos\beta + 20xz^2\cos\gamma]dS$$

$$= \int_C (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2)(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)dS$$

$$= \int_C (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2).\frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|}.\|\vec{x}'(t)\|dt$$

$$= \int_C (3x^2+6y,-14yz,20xz^2).\vec{x}'(t)dt = \int_0^1 (3t^2+6t^2,-14t^5,20t^7)(1,2t,3t^2)dt$$

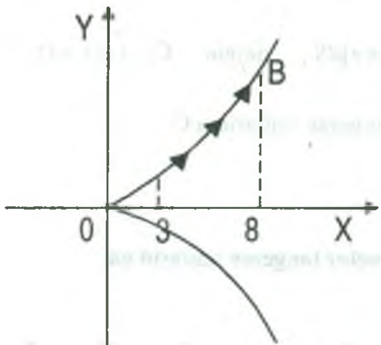
$$= \int_0^1 (9t^2,-14t^5,20t^7)(1,2t,3t^2)dt$$

$$= \int_0^1 (9t^2-28t^5+60t^9)dt = (3t^3-4t^7+6t^{10})\Big/_0^1 = 3 - 4 + 6 = 5$$

$$\therefore \int_C [(3x^2+6y)\cos\alpha - 14yz\cos\beta + 20xz^2\cos\gamma]dS = 5$$

9) Calcular la integral curvilínea $\int_{\overline{AB}} \frac{y}{x} dS$ si $\overline{AB}$ es el arco de la parábola semi cúbica $y^2 = \frac{4x^3}{9}$ que une los puntos de $A(3,2\sqrt{3})$ y $B(8,\frac{32\sqrt{3}}{3})$

Solución



$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 3 \le x \le 8 \Rightarrow \quad y' = x^{1/2} \Rightarrow (y')^2 = x$$

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+x}\,dx \Rightarrow dS = \sqrt{1+x}\,dx$$

$$\int_C \frac{y}{x} dS = \int_3^8 \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{x}\sqrt{1+x}\,dx$$

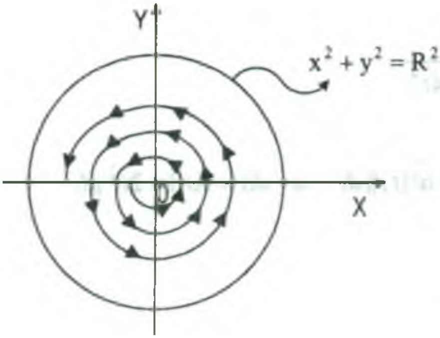
$$= \frac{2}{3}\int_3^8 \sqrt{x}\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\int_3^8 \sqrt{x+x^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_3^8 \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}\,dx = \frac{2}{3}[\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{x^2+x} + \frac{1}{8}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}|]\Big/_3^8$$

$$= \frac{20}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\ln|\frac{17+16\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}}|$$

10) Calcular la integral curvilínea $\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dS$, donde C es una parte de la espiral de Arquímedes $\rho = 2\varphi$, comprendida dentro de un circulo de radio R con el centro en el origen de coordenadas.

Solución



Parametrizando la espiral de Arquímedes se tiene:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$ como $\rho = 2\varphi$, $x = 2\varphi\cos\varphi$,

$y = 2\varphi\,\text{sen}\,\varphi$. Luego la curva parametrizada es dado por:

$\vec{\alpha}:[a,b]\to R^2\,/\,\vec{\alpha}(\varphi)=(2\varphi\cos\varphi,2\varphi\,\text{sen}\,\varphi)$

ahora parametrizando la ecuación $x^2+y^2=R^2$

$x = R\cos\varphi$, $y = R\,\text{sen}\,\varphi$

interceptando la circunferencia y la espiral

$R\cos\varphi = 2\varphi\cos\varphi \Rightarrow R = 2\varphi \Rightarrow \varphi=\dfrac{R}{2}$ por lo tanto $\varphi\in[0,\dfrac{R}{2}]$

$$\vec{\alpha}(\varphi)=(2\varphi\cos\varphi,2\varphi\,\text{sen}\,\varphi)\,,\quad 0\le\varphi\le\frac{R}{2}$$

$\vec{\alpha}\,'(\varphi)=(2(\cos\varphi-\varphi\,\text{sen}\,\varphi),\,2(\text{sen}\,\varphi+\varphi\cos\varphi))$, de donde

$dS=\|\vec{\alpha}\,'(\varphi)\|d\varphi=2\sqrt{(\cos\varphi-\varphi\,\text{sen}\,\varphi)^2+(\text{sen}\,\varphi+\varphi\cos\varphi)^2}\,d\varphi$ entonces $dS=2\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$

$$\int_C \text{arctg}\frac{y}{x}\,dS=\int_0^{R/2}\text{arctg}(\frac{2\varphi\,\text{sen}\,\varphi}{2\varphi\cos\varphi})2\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\int_0^{R/2}2\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}(1+\varphi^2)^{3/2}\Big/_0^{R/2}=\frac{1}{12}\left[(R^2+4)^{3/2}-8\right]$$

11) Encontrar el valor de la integral curvilínea $\displaystyle\int_C\frac{yz\,dS}{x^2+y^2}$, a lo largo del arco de curva sumergida en el espacio de tres dimensiones de ecuaciones $x = 3at$, $y=3at^2$, $z=2a(1+t^3)$ comprendida entre los puntos para los que $t = 0$, $t = 1$.

Solución

Sea $\vec{\alpha}(t) = (3at, 3at^2, 2a(1+t^3))$, $0 \le t \le 1$

$\vec{\alpha}'(t) = (3a, 6at, 6at^2) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = 3a\sqrt{1+4t^2+4t^4}$

$\|\vec{\alpha}'(t)\| = 3a\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3a(1+2t^2)$ como $dS = \|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt \Rightarrow dS = 3a(1+2t^2)dt$

$$\int_C \frac{yz}{x^2+y^2}dS = \int_0^1 \frac{3at^2.2a(1+t^3).3a(1+2t^2)}{9at^2+9a^2t^4}dt$$

$$= 2a\int_0^1 \frac{(1+t^3)(1+2t^2)}{t^2+1}dt = 2a\int_0^1 (2t^3 - t + 2 - \frac{t+1}{t^2+1})dt$$

$$= 2a\left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t\right]\Big/_0^1 = 2a\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \operatorname{arctg} 1\right]$$

$$= 4a - a\ln 2 - \frac{a\pi}{2}$$

12) Deducir la fórmula para calcular la integral curvilínea $\int_C F(x,y)dS$ en coordenadas polares y la línea C viene dado por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

Solución

Como C: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

además $dS = \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\varphi})^2}\,d\varphi = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$

$$\int_C F(x,y)dS = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho\cos\varphi, \rho\,\text{sen}\,\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

14) Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, donde C es el arco de la curva $x = 2t$, $y = 2t + 1$, $z = t^2 + t$, que une los puntos $P_1(0,1,0)$ y $P_2(2,3,2)$.

Solución

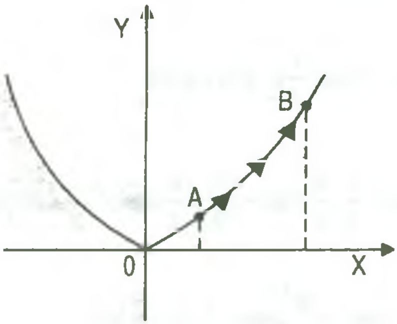
La curva parametrizada esta dada por: $\vec{\alpha}(t) = (2t,\ 2t+1,\ t^2+t)$

$$\begin{cases} \vec{\alpha}(a) = (2a,\ 2a+1,\ a^2+a) = (0,1,0) \\ \vec{\alpha}(b) = (2b,\ 2b+1,\ b^2+b) = (2,3,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^1 \frac{2t.2+(2t+1)2+(t^2+t)(2t+1)}{4t^2+(2t+1)^2+(t^2+t)^2}dt = \int_0^1 \frac{2t^3+3t^2+9t+2}{t^4+2t^3+9t^2+4t+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^4+2t^2+9t^2+4t+1\right| \Big/_0^1 = \frac{1}{2}\ln 17$$

15) Calcular la integral curvilínea $\int_{\overline{AB}} (x^2-2xy)dx + (2xy+y^2)dy$, donde $\overline{AB}$ es el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde el punto A(1,1) hasta el punto B(2,6).



Solución

Como $C: y = x^2,\ 1 \le x \le 2$ es una curva plana entonces se tiene: $\int_{\overline{AB}} (x^2-2xy)dx + (2xy+y^2)dy$

$$= \int_1^2 \left[x^2 - 2x^3 + (2x^3+x^4)2x\right]dx$$

$$= \int_1^2 (x^2-2x^3+4x^4+2x^5)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{3}\right)\Big/_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}-8+\frac{128}{5}+\frac{64}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right) = 24-8+\frac{124}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1219}{30} = 40\frac{19}{30}$$

16) Calcular la integral curvilínea $\int_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, donde C es la línea de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ y del cilindro $x^2+y^2 = Rx$,(R > 0, Z≥0), siendo recorrida en el proceso de integración, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde el origen de coordenadas.

Solución

Sea C: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases}$, R > 0, Z ≥ 0, la curva de intersección, ahora parametrizando la

curva se tiene: $x^2+y^2=Rx \Rightarrow (x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, de donde

$$\begin{cases} x-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$$

como $x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow z^2=R^2-x^2-y^2=R^2-Rx$

$$z^2=R^2-R(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t)=\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{2}\cos t=R^2\,\frac{1-\cos t}{2} \Rightarrow z^2=R^2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \Rightarrow z=R\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

Sea $\vec{\alpha}:[a,b]\longrightarrow R^3 \,/\, \vec{\alpha}(t)=(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t,\ \frac{R}{2}\operatorname{sen} t,\ R\operatorname{sen}\frac{t}{2}),\ 0\le t\le 2\pi$

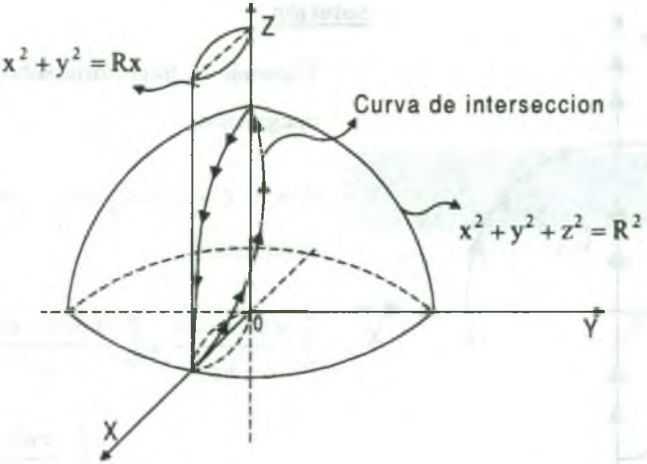
$$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz=\int_0^{2\pi}[\frac{R^2}{4}\operatorname{sen}^2 t(-\frac{R}{2}\operatorname{sen} t)+R^2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}.\frac{R}{2}\cos t+(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t)^2\frac{R}{2}.\cos\frac{t}{2}]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[-\frac{R^3}{8}\operatorname{sen}^3 t+\frac{R^3}{2}\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}.\cos t+\frac{R^3}{2}\cos^4\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}]dt$$

$$=\frac{R^3}{2}\int_0^{2\pi}[-\frac{\operatorname{sen}^3 t}{4}+\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}.\cos t+\cos^5\frac{t}{2}]dt$$

$$=\frac{R^3}{2}[\frac{\cos t}{4}-\frac{\cos^3 t}{12}+\frac{\operatorname{sen} t}{2}-\frac{t}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2t}{8}+2\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}+\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5\frac{t}{2}]\Big/_0^{2\pi}$$

$$=\frac{R^3}{2}(-\frac{\pi}{2})=-\frac{R^3\pi}{4} \qquad \therefore \int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz=-\frac{R^3\pi}{4}$$



17) Calcular la integral curvilínea $\int_C (xy^2, x)d\vec{r}$, donde $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ y C es el arco de la elipse $x = \cos t,\ y = 3\,\text{sen}\,t,\ t \in [0,\pi]$

Solución

Sea $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{\alpha}(t) = (\cos t,\ 3\,\text{sen}\,t),\quad 0 \le t \le \pi$

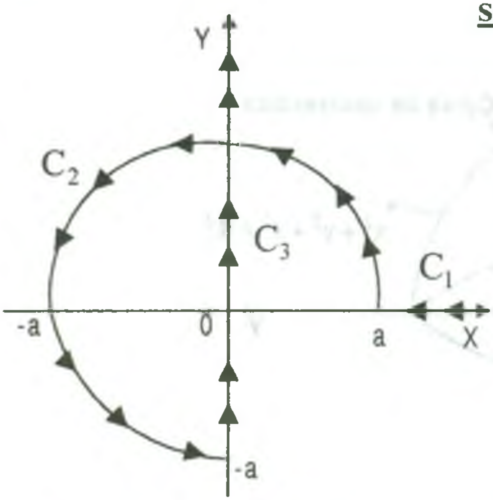
$$\int_C (xy^2, x)d\vec{r} = \int_C (xy^2, x)(dx, dy) = \int_C xy^2 dx + x dy$$

$$= \int_0^\pi [\cos t.9\,\text{sen}^2 t(-\text{sen}\,t) + \cos t.3\cos t]dt = \int_0^\pi (-9\,\text{sen}^3 t.\cos t + 3\cos^2 t)dt$$

$$= \int_0^\pi [-9\,\text{sen}^3 t.\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t)]dt = (-\frac{9}{4}\text{sen}^4 t + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4}\text{sen}\,2t)\Big/_0^\pi$$

$$= (0 + \frac{3\pi}{2} + 0) - 0 = \frac{3\pi}{2}$$

18) Calcúlese $\int_C \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2}$ siendo C la parte del eje X comprendido entre $+\infty$ y el punto (a,0),mas el arco del círculo $x^2+y^2=a^2$ sobre el primer, segundo y tercer cuadrante, desde (a,0) hasta (0,-a), más la parte del eje Y comprendida entre (0,-a) y $+\infty$.



Solución

Trazando la trayectoria sobre el cual se realiza la integración.

Como $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, por lo tanto la integral expresamos.

$$\int_C \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{C_1} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} + \int_{C_2} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} + $$

$$+\int_{C_3} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} \qquad \textbf{... (1)}$$

ahora parametrizando cada una de las curvas: C_1: $\alpha_1(t) = (a-t,\ 0)$, $-\infty < t \le 0$

$$\int_{C_1} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{((a-t)(0)+0)dt}{(a-t)^2} = 0 \qquad \textbf{... (2)}$$

C_2: $\vec{\alpha}_2(t) = (a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t)$, $0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$

$$\int_{C_2} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{a\cos t . a\cos t + a\,\text{sen}\,t(-a\,\text{sen}\,t)}{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2\,t}\,dt$$

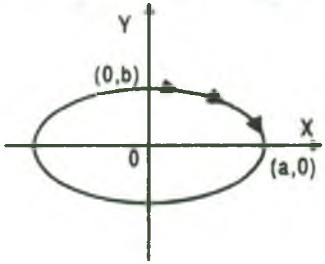
$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\cos^2 t - \text{sen}^2\,t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\ dt = \frac{\text{sen}\,2t}{2} \Big/_0^{\frac{3\pi}{2}} = 0 \qquad \textbf{... (3)}$$

C_3: $\vec{\alpha}_3(t) = (0,\ t)$, $-a \le t < \infty \Rightarrow \int_{C_3} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{-a}^{\infty} \frac{0+0}{0+t^2}\,dt = 0$ **... (4)**

reemplazando (2), (3), (4) en (1) se tiene: $\int_C \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = 0$

19) Calcular la integral curvilínea $\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ en el sentido de las agujas del reloj a lo largo del cuarto de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que se encuentra en el primer cuadrante.

Solución



Se observa que la expresión

$\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ es la diferencial total de la función

$$f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$\int_C \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_{(b,0)}^{(a,0)} d\,f(x,y) = f(x,y)\Big/_{(0,b)}^{(a,0)} = \text{f(a,0) - f(0,b)} = \sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$$

20) Hallar la integral de línea $\int_C \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$, siendo

C: x = 2 - 2t , y = -1 + 4t , t ∈ [0,1]

Solución

Sea $\vec{\alpha}: [0,1] \longrightarrow R^2 \,/\, \vec{\alpha}(t) = (2-2t,\ -1+4t)$, para t = 0, A(2,-1) ; t = 1, B(0,3)

$$\text{Sea} \begin{cases} P(x,y) = \dfrac{2x}{y^3} \\ Q(x,y) = \dfrac{y^2-3x^2}{y^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{6x}{y^4} \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{6x}{y^4} \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ es una diferencial exacta

entonces ∃ f(x,y) tal que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

Si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \dfrac{2x}{y^3}$, integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int \dfrac{2x}{y^3}dx + g(y) = \dfrac{x^2}{y^3} + g(y)$, derivando respecto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + g'(y) = Q(x,y)\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow g(y) = -\frac{1}{y} \text{ de donde}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\int_C \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = \int_{(2,-1)}^{(0,3)} df(x,y) = f(x,y) \Big/_{(2,-1)}^{(0,3)}$$

$$= f(0,3) - f(2,-1) = (0 - \frac{1}{3}) - (-4+1) = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \int_C \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = \frac{8}{3}$$

21) Calcular la integral curvilínea $\int_C (2xy^2 + 2x^3 + 3)dx + (3x^2y^2 - y^3 + 1)dy$, cuando C es el arco de la cicloide $x = t - \text{sen}\, t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0,2\pi]$

Solución

Sea $\vec{\alpha}: [0,2\pi] \longrightarrow R^2 / \vec{\alpha}(t) = (t - \text{sen}\, t,\ 1 - \cos t)$, $t = 0$, $A(0,0)$ y $t = 2\pi$, $B(2\pi,0)$

$$\begin{cases} P(x,y) = 2xy^3 + 2x^3 + 3 \\ Q(x,y) = 3x^2y^2 - y^3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 6xy^2 \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 6xy^2 \end{cases}$$

como $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ es una diferencial exacta $\Rightarrow \exists$ f(x,y) tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 2xy^3 + 2x^3 + 3$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(2xy^3+2x^3+3)dx+g(y)\ =x^2y^3+\frac{x^4}{2}+3x+g(y),\text{ derivando respecto a y.}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2+g'(y)=Q(x,y)=3x^2y^2-y^3+1\Rightarrow g'(y)=-y^3+1\ \Rightarrow\ g(y)=-\frac{y^4}{4}+y$$

$$f(x,y)=x^2y^3+\frac{x^4}{2}+3x-\frac{y^4}{4}+y$$

$$\int_C(2xy^3+2x^3+3)dx+(3x^2y^2-y^3+1)dy=\int_{(0,0)}^{(2\pi,0)}df(x,y)=f(x,y)\Big/_{(0,0)}^{(2\pi,0)}$$

$$=f(2\pi,0)-f(0,0)=8\pi^4+6\pi$$

$$\therefore\int_C(2xy^3+2x^3+3)dx+(3x^2y^2-y^3+1)dy=8\pi^4+6\pi$$

22) Hallar la integral curvilínea $\displaystyle\int_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(1,0)}(xe^x\cos y-ye^x\operatorname{sen}y)dy+(xe^x\operatorname{sen}y+ye^x\cos y)dx$

<u>Solución</u>

Veremos si es una diferencial exacta

$$\begin{cases}P(x,y)=xe^x\operatorname{sen}y+ye^x\cos y\\ Q(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\operatorname{sen}y\end{cases}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=xe^x\cos y+e^x\cos y-ye^x\operatorname{sen}y\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=xe^x\cos y+e^x\cos y-ye^x\operatorname{sen}y\end{array}\right.$$

como $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ es una diferencial exacta, entonces existe una función f(x,y) tal que: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$

Si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=P(x,y)=xe^x\operatorname{sen}y+ye^x\cos y$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(xe^x\operatorname{sen}y+ye^x\cos y)dx+g(y)=xe^x\operatorname{sen}y-e^x\operatorname{sen}y+ye^x\cos y+g(y)$$

derivando respecto a y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^x \cos y - e^x \cos y + e^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y + g'(y) = Q(x,y)$$

$$xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y + g'(y) = xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y, \text{ de donde}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

por lo tanto $f(x,y) = xe^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y$

$$\int_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(1,0)} (xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y)dy + (xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)dx = \int_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(1,0)} d(f(x,y))$$

$$= f(x,y) \Big/_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(1,0)} = f(1,0) - f(0,\frac{\pi}{2}) = (0 - 0 + 0) - (0 - 1 + 0) = 1$$

$$\therefore \int_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(1,0)} (xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y)dy + (xe^x \operatorname{sen} y + ye^x \cos y)dx = 1$$

23) Calcular la integral curvilínea $\int_{(1,1)}^{(2,3)} \frac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy$

Solución

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2} \\ Q(x,y) = \dfrac{2y+x}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

como $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ es una diferencial exacta, entonces existe una función f(x,y), tal

que: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$, integrando respecto a x.

$f(x,y)=\int \frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+g(y)=\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+g(y)$ derivando respecto a y se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}+g'(y)=Q(x,y)=\frac{2y+x}{x^2+y^2}\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=c$$

por lo tanto: $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy=\int_{(1,1)}^{(2,3)}df(x,y)=f(x,y)\Big/_{(1,1)}^{(2,3)}$$

$$=f(2,3)-f(1,1)=\ln\frac{13}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy=\ln\frac{13}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$$

24) Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,2)}(2xy+\frac{y}{1+x^2}+\operatorname{sen}^2\pi y)dx+(x^2+\operatorname{arctg}x+\pi x\operatorname{sen}2\pi y)dy$

Solución

$$\begin{cases}P(x,y)=2xy+\dfrac{y}{1+x^2}+\operatorname{sen}^2\pi y\\[2mm] Q(x,y)=x^2+\operatorname{arctg}x+\pi x\operatorname{sen}2\pi y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x+\dfrac{1}{1+x^2}+2\pi\operatorname{sen}\pi y\cos\pi y\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{1+x^2}+\pi\operatorname{sen}2\pi y\end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ es una diferencial exacta, entonces ∃ f(x,y) tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=P(x,y)\ \text{ y }\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$$

Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=P(x,y)=2xy+\frac{y}{1+x^2}+\operatorname{sen}^2\pi y$, integrando respecto a x.

$$f(x,y)=\int(2xy+\frac{y}{1+x^2}+\operatorname{sen}^2\pi y)dx+g(y)=x^2y+y\operatorname{arctg}x+x\operatorname{sen}^2\pi y+g(y)$$

derivando respecto a y se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \operatorname{arctg} x + 2x\pi \operatorname{sen} \pi y \cos \pi y + g'(y) = Q(x,y)$$

$$x^2 + \operatorname{arctg} x + x \operatorname{sen} 2\pi y + g'(y) = x^2 + \operatorname{arctg} x + x \operatorname{sen} 2\pi\, y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

por lo tanto $f(x,y) = x^2 y + y \operatorname{arctg} x + x \operatorname{sen}^2 \pi\, y$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xy + \frac{y}{1+x^2} + \operatorname{sen}^2 \pi\, y)dx + (x^2 + \operatorname{arctg} x + x \operatorname{sen} 2\pi\, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,2)} d(f(x,y))$$

$$= f(x,y) \Big/_{(0,0)}^{(1,2)} = f(1,2) - f(0,0) = (2 + 2\operatorname{arctg} 1 + 0) = 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+4}{2}$$

$$\therefore \int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xy + \frac{y}{1+x^2} + \operatorname{sen}^2 \pi\, y)dx + (x^2 + \operatorname{arctg} x + x \operatorname{sen} 2\pi y)dy = \frac{\pi+4}{2}$$

25) Evaluar la integral $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2 y^2)dy$ donde C es la parábola $2x = \pi\, y^2$ desde el punto (0,0) hasta $(\frac{\pi}{2},1)$

Solución

$$\begin{cases} P(x,y) = 2xy^3 - y^2 \cos x \\ Q(x,y) = 1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2 y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y \cos x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cos x + 6xy^2 \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es una diferencial exacta, entonces ∃ f(x,y) tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 2xy^3 - y^2 \cos x$, integrando respecto a x.

$f(x,y) = \int (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + g(y) = x^2 y^3 - y^2 \operatorname{sen}(x) + g(y)$, derivando respecto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2y\,\text{sen}\,x + g'(y) = Q(x,y) = 1 - 2y\,\text{sen}\,x + 3x^2y^2, \text{ de donde}$$

$$g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y \quad \text{por lo tanto} \quad f(x,y) = x^2y^3 - y^2\,\text{sen}\,x + y$$

$$\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\,\text{sen}\,x + 3x^2y^2)dy = \int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},1)} d(f(x,y))$$

$$= f(\frac{\pi}{2},1) - f(0,0) = \frac{\pi^2}{4} - 1 + 1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \int_C (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\,\text{sen}\,x + 3x^2y^2)dy = \frac{\pi^2}{4}$$

26) Calcular la integral de línea $\int_C (2x + y - z)dx + (x - 2y + 2z + 3)dy + (2y - x + 4z - 2)dz$, donde C es un arco arbitrario de (0,2,-1) a (1,-2,4)

Solución

Como el arco es arbitrario, comprobaremos que es una diferencial exacta

$$\begin{cases} P = 2x + y - z \\ Q = x - 2y + 2z + 3 \\ R = 2y - x + 4z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \;,\; \dfrac{\partial P}{\partial z} = -1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \;,\; \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2 \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = -1 \;,\; \dfrac{\partial R}{\partial y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{como } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \;;\; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \;;\; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

por lo tanto es independiente de la trayectoria. Como es una diferencial exacta, entones

$$\exists\, f: R^3 \longrightarrow R \text{ tal que } \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z),\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} Q(x,y,z),\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} R(x,y,z),$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z) = 2x + y - z, \quad \text{integrando respecto a x,}$$

$$f(x,y,z)=\int(2x+y-z)+g(y,z)=x^2+xy-xz+g(y,z) \qquad \text{... (1)}$$

ahora derivando con respecto a y se tiene: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+g'_y(y,z)=Q(x,y)=x-2y+2z+3$

$g'_y(y,z)=-2y+2z+3$, integrando respecto a y

$$g(y,z)=\int(-2y+2z+3)dy+h(z) \quad =-y^2+2yz+3y+h(z) \qquad \text{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$f(x,y,z)=x^2+xy-xz-y^2+2yz+3y+h(z)$, derivando a z

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=-x+2y+0+h'(z)=R(x,y,z)=2y-x+4z-2$, de donde

$h'(z)=4z-2 \quad \Rightarrow \quad h(z)=2z^2-2z$

por lo tanto $f(x,y,z)=x^2+xy-xz-y^2+2yz+2z^2-2z+3y$

$$\int_C(2x+y-z)dx+(x-2y+2z+3)dy+(2y-x+4z-2)dz=\int_{(0,2,-1)}^{(1,-2,4)}d(f(x,y,z))$$

$$=f(x,y,z)\Big/_{(0,2,-1)}^{(1,-2,4)}=f(1,-2,4)-f(0,2,-1)$$

$$=(1-2-4-4-16+32-8)-(0+0-0-4-2+2+2)=-1+2=1$$

7.9 Ejercicios Propuestos.

1) Calcular la integral curvilínea $\int_C(x^2+y^2)dS$, donde C es la curva x = a(cos t+ t sen t), y = a (sent - t cos t), $0\le t\le 2\pi$ **Rpta.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$

2) Calcular la integral curvilínea $\int_C\sqrt{2y^2+z^2}\,dS$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, x = y. **Rpta.** $2\pi a^2$

3) Calcular la integral de línea $\int_C (x^2+y^2+z^2)dS$, donde C recorre una sola vez la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, con el plano z = 1.

Rpta. $8\sqrt{3}\pi$

4) Calcular $\int_C x^2yzdS$, donde C recorre la intersección de los planos coordenados con el plano 2x + y + z = 1. **Rpta.** 0

5) Determine $\int_C (x^2+y^2)dS$, donde C es la semi circunferencia formada por el eje X y la mitad superior de la circunferencia $x^2+y^2=4$.

Rpta. 8π

6) Calcular $\int_C xyzdS$, donde C es la parte de la recta x + y + z = 1, y = z que se encuentra en el primer octante. **Rpta.** $\frac{\sqrt{6}}{96}$

7) Calcular la integral curvilínea $\int_C r\,dS$ siendo r el radio vector.

a) A lo largo de una vuelta completa de la hélice cónica de ecuaciones paramétricas. x = a t cos t , y = a t sen t , z = c t

b) A lo largo de la recta x = a t , z = c t

Rpta. a) $\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{3a^2}\left[(a^2+c^2+4\pi^2a^2)^{3/2}-(a^2+c^2)^{3/2}\right]$, **b)** $2\pi^2(a^2+c^2)$

8) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2+y^2)^2dS$, donde C es el arco de la espiral logarítmica $r=ae^{m\theta}$ (m > 0) desde el punto A(0,a) hasta el punto B(-∞,0),

Rpta. $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{4m}(e^{4m\pi}-e^{2m\pi})$

9) Calcular la integral curvilínea a lo largo de la curva en el espacio $\int_C (x^2+y^2+z^2)dS$, donde C es la parte de la hélice circular x = a cos t , y = a sen t , z = b t, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta. $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$

10) Calcular la integral curvilínea $\int_C z\,dS$, donde C es el arco de la curva $x^2+y^2=z^2;\quad y^2=ax$ desde el punto O(0,0,0) hasta $A(a,a,a\sqrt{2})$.

Rpta. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln(\frac{25+4\sqrt{38}}{17})\right]$

11) Calcular la integral curvilínea $\int_C x^2 dS$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2+z^2=a^2$, x + y + z = 0. **Rpta.** $\frac{2\pi a^3}{3}$

12) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^{4/3}+y^{4/3})dS$, donde C es el arco de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **Rpta.** $4a^{7/3}$

13) Calcular la integral curvilínea $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

Rpta. $\sqrt{2}a^2$

14) Calcular la integral curvilínea $\int_C |y|dS$, donde C es el arco de la Lemniscota $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. **Rpta.** $2a^2(2-\sqrt{2})$

15) Calcular $\int_C (x^2+y^2)dS$ a lo largo de los caminos indicados.

a) El triángulo con vértice (0,0), (0,1) y (1,1) recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) El circulo $x^2+y^2=1$ desde (1,0) a (0,1) recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj. **Rpta. a)** $\frac{2\sqrt{2}+5}{3}$, **b)** $\frac{\pi}{2}$

16) Calcular $\int_C y^2 dS$, donde C: $\vec{\alpha}(t)=(a(t-\operatorname{sen} t), a(1-\cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta. $\frac{256a^3}{15}$

17) Calcular $\int_C xydS$, donde C es el contorno del cuadrado $|x|+|y|=2$.

Rpta. 0

18) Calcular $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, dS$, donde C es el arco de la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta. $\frac{a^3}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$

19) Calcular la integral curvilínea $\int_C xy\,dS$, donde C es la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ situada en el primer cuadrante. **Rpta.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

20) Evaluar la integral curvilínea $\int_C (x^2+xy)dx+(y^2-xy)dy$, donde C es dado por $x^2=2y$ del origen al punto (2,2). **Rpta.** $\frac{62}{15}$

21) Evalúe la integral de línea $\int_C yx^2dx+(x+y)dy$, donde la curva C es dado por $y=-x^3$ del origen al punto (1,-1). **Rpta.** $-\frac{5}{12}$

22) Calcular la integral curvilínea $\int_C y^2dx - xdy$, donde C es la curva $y^2 = 4x$ desde A(0,0) hasta B(1,2). **Rpta.** $\frac{4}{3}$

23) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2 - 2y)dx + (2x + y^2)dy$, donde C es el arco de $y^2 = 4x - 1$ de $A(\frac{1}{4},0)$ hasta $B(\frac{5}{4},2)$ **Rpta.** $\frac{143}{48}$

24) Calcular la integral curvilínea $\int_C yz\,dx + xzdy + xydz$, donde C es una arco de la hélice x = R cos t , y = R sen t , $z = \frac{a\,t}{2\pi}$ desde el punto de intersección de la hélice con el plano z = 0 hasta el punto de intersección con el plano z = a.

Rpta. 0

25) Encontrar la integral curvilínea $\int_C (x^2 + y^2)dx + xydy$, si el camino que une A(1,1) y B(3,4) es un segmento de recta. **Rpta.** $11\frac{1}{6}$

26) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x + y)dx + (x - y)dy$.

a) A lo largo de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ donde O(0,0), A(2,0) , B(2,1).

b) A lo largo del segmento $\overline{OB}$.

Rpta. a) $\frac{11}{2}$, **b)** $\frac{7}{2}$

27) Calcular la integral curvilínea $\int_C ydx - (y + x^2)dy$, si C es el arco de la parábola $y = 2x - x^2$ situada sobre el eje X y recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

Rpta. 4

28) Calcular el valor de la integral de línea dado por: $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta. -2π

29) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x-y)^2 dx+(x+y)^2 dy$, si C es una línea quebrada OAB donde O(0,0), A(2,0) y B(4,2) **Rpta.** $\frac{136}{3}$

30) Evaluar $\int_C xy\,dx+x^2dy$, alrededor del cuadrado con vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1) en ese orden **Rpta.** $\frac{1}{2}$

31) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, donde C es la parábola $y=x^2$ $(-1 \le x \le 1)$ **Rpta.** $-\frac{14}{15}$

32) Calcular $\int_C yzdx+xydy+xzdz$ entre los puntos, A(0,0,0) y B(1,1,1) a lo largo de los siguientes caminos .

a) La curva C: $x=y^2$, z = 0 desde A hasta (1,1,0) y la recta L: x = 1 $\wedge$ y = 1 desde (1,1,0) hasta B.

b) Siguiendo el segmento rectilíneo $\overline{AB}$. **Rpta.** **a)** $\frac{1}{4}$, **b)** 1

33) Calcular la integral curvilínea $\int_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, donde C es la curva $y=1-|1-x|$, $0 \le x \le 2$. **Rpta.** $\frac{4}{3}$

34) Calcular la integral curvilínea $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$, donde C es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta. 0

35) Calcular la integral curvilínea $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, donde C es el contorno del cuadrado ABCD siendo A(1,0) , B(0,1) , C(-1,0) , D(0,-1) **Rpta.** 0

36) Calcular la integral curvilínea $\int_C x^2ydx-x^3dy$, si C es el contorno limitado por las parábolas $y^2=x$, $x^2=y$, recorrido en sentido inverso a las agujas del reloj.

Rpta. $\frac{12}{35}$

37) Calcular la integral curvilínea $\int_C 3xydx+(xy^2+y)dy$, donde C es el arco de la curva $x-y^4=0$ desde (1,1) a (0,0). **Rpta.** $-\frac{83}{42}$

38) Calcular $\int_C (x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy-xydz$, donde C es la curva dada por las ecuaciones x = t, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{t^4}{2}$ desde A(0,0,0) a $B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Rpta. $\frac{1}{8}$

39) Calcular el valor de la integral curvilínea $\int_C yx^2dx+ydy$, siendo C la curva de ecuación $y^2+2x^2-2Rx=0$. **Rpta.** $\frac{5\pi R^4\sqrt{2}}{64}$

40) Calcular $\int_C xydx+(x^2-y^2)dy$, a lo largo de la elipse $x^2+2y^2=4$ recorrida en sentido directo. **Rpta.** 0

41) Calcular $\int_C (x^2-2y)dx+(2x+y^2)dy$, donde C es el arco de la parábola $y^2=4x-1$, desde $(\frac{1}{4},0)$ a $(\frac{5}{4},2)$. **Rpta.** 7.98

42) Calcular $\int_C ydx+(x^2+y^2)dy$, donde C es el arco de la circunferencia $y=\sqrt{4-x^2}$ de (-2,0) a (0,2). **Rpta.** $\pi+8$

43) Calcular $\int_C x^2dy$, a lo largo de la curva $y=x^3-3x^2+2x$ desde (0,0) a (2,0).

Rpta. $\frac{8}{15}$

44) Calcular $\int_C (y-x)dx+x^2ydy$, a lo largo de la curva $y^2=x^3$, desde (1,-1) a (1,1).

Rpta. $\frac{4}{5}$

45) Calcular $\int_C \frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}dx+\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$ donde C es el arco de la curva $x^2-y^2=9$ de (3,0) a (5,4). **Rpta.** $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}$

46) Calcular la integral $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, donde C es una espira de la hélice circular x = a cos t , y = a sen t , z = b t, correspondiente a la variación del parámetro t, desde 0 hasta 2π. **Rpta.** $-2\pi a(a+b)$

47) Calcular la integral $\oint_C ydx+zdy+xdz$, donde C es la circunferencia x = R cos α - cos t, y = R cos α . sen t , z = R sen α (α = constante) recorrido en el sentido del crecimiento del parámetro. **Rpta.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$

48) Calcular la integral curvilínea $\oint_C \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$, donde C es el lazo derecho de la Lemniscota $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, que sigue en el sentido contrario de las agujas del reloj.

Rpta. 0

49) Hallar $\int_C ydx + zdy + xdz$, donde C es la intersección de las superficies x + y = 2, $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. La curva es recorrida de tal manera que mirando desde el origen el sentido es el de las agujas del reloj. **Rpta.** $-2\sqrt{2}\pi$

50) Calcular $\int_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = \frac{-x}{\|\vec{r}\|^3}\vec{i} - \frac{y}{\|\vec{r}\|^3}\vec{j} - \frac{z}{\|\vec{r}\|^3}\vec{k}$, donde C es la curva de intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cilindro $x^2 + 2y^2 = 4$, recorrida de manera que, mirando desde el eje Z^+, el sentido es antihorario. **Rpta.** 0

51) Calcular $\int_C xdy$, donde C es un segmento de recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, desde el punto de intersección con el eje de abscisa hasta el punto de intersección con el eje de ordenada.

Rpta. $\frac{ab}{2}$

52) Calcular la integral de línea $\int_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y, z)$ y la curva C está formada por las intersecciones de las superficies S_1: $x^2 + y^2 = 9$ con S_2: $x^2 + y^2 + z^2 = 6x$ y S_1: $x^2 + y^2 = 9$ con S_3: $x = \sqrt{\frac{z^2}{3} + \frac{y^2}{3}}$, de manera que si se observa desde el origen de coordenadas el sentido es antihorario.

Rpta. 0

53) Calcular $\int_C \vec{F}(x,y,z).d\vec{r}$, si $\vec{F}(x,y,z) = (y, -z, x)$, donde C es la curva definida por las ecuaciones $\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = a^2$, y = x, en sentido horario vista desde el eje z positivo.

54) Calcular la integral curvilínea $\int_C x e^{-y^2} dx + (\frac{1}{x^2+y^2} - x^2 y e^{-y^2})dy$ siendo el contorno del cuadrado de lado 2a determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$

Rpta. 0

55) Calcular la integral de línea de la función vectorial $\vec{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2-2x+1}, \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1})$ a lo largo de la curva cerrada formada por las partes de las rectas x + y + 2 = 0 , x - y + 2 = 0 y la parábola $x + y^2 = 4$, recorrida en sentido horario. **Rpta.** -2π

56) Evaluar $\int_C (e^y, -\operatorname{sen} \pi x).(dx,dy)$ donde C es el triángulo de vértices (1,0), (0,1), (-1,0) recorrido en sentido antihorario. **Rpta.** $4 - 2e - (\frac{4}{\pi})$

57) Hallar la integral curvilínea $\int_C (x^2, -xy)(dx, dy)$ sobre la parábola $y = x^2$ desde (1,-1) hasta (1,1) **Rpta.** 0

58) Hallar la integral curvilínea $\int_C \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)(dx,dy)$ alrededor del circulo de radio a > 0, en sentido antihorario desde (a,0) hasta $(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2})$ centro en (0,0).

Rpta. $\frac{\pi}{6}$

59) Hallar la integral curvilínea $\int_C x^2 dx + xy dy$, donde C es el camino cerrado formado por el segmento de la parábola $y = x^2$ entre (0,0) y (1,1) y el segmento de recta desde (1,1) hasta (0,0) **Rpta.** $\frac{1}{15}$

60) Calcular la integral $\int_C x^2y^2dx + xy^2dy$, donde C es el camino cerrado, formado por la recta x = 1 y la parábola $y^2 = x$ (antihorario) **Rpta.** $\frac{16}{15}$

61) Hallar la integral de línea del campo vectorial dado por: $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2e^{x^2}\operatorname{sen} y + e^{x^2}\operatorname{sen} y,\ xe^{x^2}\cos y - 2y^2z,\ -\frac{2y^3}{3})$ a lo largo de C, la poligonal que une los puntos: A(0,0,9), B(ln 2, -π, 6), C(ln 3, π, -3) y D(ln e, 2π, 1) desde A hasta D.

Rpta. $-\frac{16\pi^3}{3}$

62) Calcular la integral $\int_C x^2dy + y^2dz + z^2dx$ donde C es el arco $x^2 - 2yz = 0$, $y + z - \sqrt{2}x = 1$ entre los puntos A(0,0,1) y B(0,1,0).

63) Evaluar la integral $\int_C (2xy - z)dx + yzdy + xdz$, donde C es la curva $x = t^2$, $y = 2t^3$, $z = t^2 - 1$, $0 \le t \le 1$. **Rpta.** $\frac{23}{14}$

64) Evaluar $\int_C xydx + e^ydy$, donde C es el arco de la curva $y + 2 = |x + 2|$, desde el punto (0,0) al punto (-4,0) **Rpta.** $2e^{-4} - 2e^{-2} - \frac{40}{3}$

65) Calcular la integral $\int_C x(\frac{1-x^2}{x^2+z^2})^{1/2}dx + y(\frac{1-y^2}{y^2+z^2})^{1/2}dy + z(\frac{1-z^2}{2x^2+z^2})^{1/2}dz$, donde C. está en el primer octante y es la curva de intersección del plano x = y con el cilindro $2x^2 + z^2 = 1$, recorrida en el sentido antihorario. **Rpta.** 85

66) Hallar el valor de la integral curvilínea de la función $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2 + y)$ según la curva $C: \vec{\alpha}(t) = (\ln(t+2), \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}, t^2 + \frac{2}{3})$ desde el punto A del plano x = 0 al punto B del plano $z = \frac{2}{3}$; A, B pertenecen a C. **Rpta.** $\frac{1}{3}\ln^3(2) - \frac{10}{9} + \frac{8}{\pi}$

67) Evaluar la integral curvilínea $\int_C (2xy^2 - y^3)dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2)dy$ desde A(-3,-1) a B(1,2). **Rpta.** -4

68) Calcular $\int_C (2y - \frac{1}{x} + \cos 3x)dy + (\frac{y}{x^2} - 4x^3 - 3y \operatorname{sen} 3x)dx$ donde C va de (0,2) a (1,0) siguiendo el camino $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. **Rpta.** $+\infty$

69) Calcular la integral curvilíneas siguientes.

a) $\int_{(-1,-1)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$ **Rpta.** 5 **b)** $\int_{(0,2)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2 dy$ **Rpta.** 4

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$ Rpta . 2 **d)** $\int_{(1,6,-3)}^{(6,4,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$ **Rpta.** -20

e) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (por un camino que no corta al eje x) **Rpta.** $\frac{3}{2}$

f) $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$ **Rpta.** $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy$

g) $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración)

Rpta. $\ln(\frac{13}{5})$

h) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ **Rpta.** 60

i) $\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ (el camino de integración no se corta con la recta y = -x)

Rpta. $(\frac{1}{4} + \ln 2)^2$

j) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (\frac{x}{x^2+y^2}+y)\,dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy$ **Rpta.** $1+\sqrt{2}$

k) $\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ **Rpta.** abc - 1

l) $\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **Rpta.** $5\sqrt{2}$

70) Evaluar $\int_{(0,0,0)}^{(-1,2,\pi)} ye^{xy}\cos z\,dx+xe^{xy}\cos z\,dy-e^{xy}\operatorname{sen} z\,dz$

Rpta. $-e^{-2}-1$

71) Evaluar $\int_C \frac{1+y^2}{x^2}dx-\frac{y+x^2}{x^2}dy$, donde

a) C: desde (1,0) hasta (5,2) cualquier curva. **Rpta.** $-\frac{8}{5}$

b) C: desde (-3,0) hasta (-1,4) cualquier curva. **Rpta.** $-\frac{148}{9}$

72) Evaluar $\int_C e^x \operatorname{sen} y\,dx-e^x\cos y\,dy$, donde C es

a) La porción $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}$, con x > 0, orientada de tal manera que parte de $(0,-\frac{\pi}{2})$ y termina en $(0,\frac{\pi}{2})$ **Rpta.** 2

b) La porción $x^2+y^2=4\pi^2$, con $x<0$, orientada de tal manera que va de (0, -2π) a (0,2π). **Rpta.** 0

73) Evaluar las integrales de línea

a) $\int_C \operatorname{tg} x dx + x\sec^2 y dy$, de A(-2,0) a $B(4,\frac{\pi}{4})$ **Rpta.** 4

b) $\int_C \frac{2x}{(xy+1)^2} dx + \frac{2x}{(xy+1)^2} dy$, de A(0,2) a B(1,0) **Rpta.** 0

74) Calcular la integral curvilínea de la función vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = (\frac{1}{z} - \frac{z}{x^2})\vec{i} + (\frac{1}{x} + \frac{z}{y^2})\vec{j} - (\frac{1}{y} + \frac{x}{z^2})\vec{k}$ donde C es cualquier curva de (1,2,-1) al punto (2,-1,-2)

75) Evaluar las integrales de línea.

a) $\int_C (\operatorname{tg} y + 2xy\sec z)dx + (x\sec^2 y + x^2\sec z)dy + \sec z(x^2 y \operatorname{tg} z - \sec z)dz$ de $A(2,\frac{\pi}{4},0)$ al punto B(3, π, π).

b) $\int_C (2x\cos y - 3)dx - (x^2 \operatorname{sen} y + z^2)dy - (2yz - 2)dz$ de A(-1,0,3) al punto B(1,π,0)

Rpta. -14

c) $\int_C (2y^3 - 8xz^2)dx + (6xy^2 + 1)dy - (8x^2 z + 3z^2)dz$, desde A(2,0,0) hasta B(3,2,1)

d) $\int_C (e^x \operatorname{sen} y + yz)dx + (e^x \cos y + z\operatorname{sen} y + xz)dy + (xy - \cos y)dz$ desde A(2,0,1) hasta B(0,π,3). **Rpta.** 4

e) $\int_C (2x\ln yz - 5ye^x)\,dx - (5e^x - \frac{x^2}{y})\,dy + (\frac{x^2}{z} + 2z)dz$, desde A(2,1,1) hasta B(3,1,e)

f) $\int_C \frac{x\,dx}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y\,dy}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$, desde A(1,0,0) hasta B(1,2,3).

Rpta. $\frac{1}{2}\ln 14$

76) Calcular $\int_C x(\frac{1-y^2}{y^2+z^2})^{1/2}dx$, desde (0,0,1) a $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ a lo largo de la curva (en el primer optante) de intersección del plano x = y , y el cilindro $2y^2+z^2=1$

Rpta. $\frac{1}{4}$

77) Calcular las integrales curvilíneas

a) $\int_C (x^2+2y)dx+(y-x)dy$, donde C es la frontera de la región limitada por las gráficas de x = 0, y = 0, $2y=(x-4)^2$, 2y = x + 2

b) $\int_{(1,0,1)}^{(2,1,4)} \ln x.dx+x^2dy+\frac{x}{z}dz$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies y = x - 1, $z=x^2$. **Rpta.** $2(\ln 2+\frac{5}{3})$

78) Calcular la integral curvilínea

$\int_C [ye^{xy}(\cos xy-\operatorname{sen} xy)+\cos x]dx+[xe^{xy}(\cos xy-\operatorname{sen} xy)+\operatorname{sen} y]dy$, donde C es una arco arbitrario de (0,0) a (3,-2). **Rpta.** $e^{-6}\cos 6+\operatorname{sen} 3-\cos 2$

79) Calcular $\int_C (\frac{2y^2x}{1+x^2}+3)dx+(2y\ln(1+x^2)-2)dy$, donde C es cualquier arco de curva que une los puntos (0,2) a (5,1).

80) Evaluar $\int_C (x^2+y^2)dx+2xydy$ donde C es el arco de la parábola entre (0,0) y (1,1). La parábola tiene su vértice en (0,0) y el eje focal es el eje y.

81) Calcular el valor de la integral $\oint_C (x^2+3y+5z)dx+(3x-4z+y)dy+(5x-4y+z^2)dz$ donde C es la curva de intersección de las superficies $x^2+y^2=z^2$, z = 3,

82) Calcular $\int_C (3x^2-3yz+2xz)dx+(3y^2-3xz+z^2)dy+(3z^2-3xy+2yz)dz$, donde C es la curva $\vec{\alpha}(t)=(-1+4t^2,\ 2\cos^2\pi t+4t^2,\ 3-4\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t)$, $0\le t\le 1$

83) Calcular la integral $\int_{P_1}^{P_2}\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, donde los puntos P_1 y P_2 están situados sobre las circunferencias concéntricas cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y los radios son iguales a R_1 y R_2 respectivamente (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración). **Rpta.** R_2-R_1

84) Calcular $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)}(6xy^3+2z^2)dx+9x^2y^2dy+(4xz+1)dz$ **Rpta.** -31

85) Hallar el valor de la integral de línea $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$

86) Calcular $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$

87) Sea C la curva plana de la ecuación $\vec{f}(t)=(e^t\cos t,e^t\operatorname{sen}t)$ calcular la integral curvilinea $\int_C\frac{x\,dx+y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ a los largo del arco de C de extremos (1,0) y $(e^{2\pi},0)$.

Rpta. $1-e^{-2\pi}$

88) Evaluar $\int_C(4x+e^x\cos y)dx-(y^2+e^x\operatorname{sen}y)dy$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y alrededor del paralelogramo cuyos vértices son (0,0), (2,0), (3,1) y (1,1).

7.10 Aplicaciones de la Integral Curvilínea.

1º Consideremos una curva regular $\vec{\alpha}: [a,b] \longrightarrow R^3$ tal que $\vec{\alpha}([a,b]) = C \subset R^3$ es la imagen de $\vec{\alpha}$.

Sea $f: C \subset R^3 \longrightarrow R$, una función continua sobre C tal que f(x,y,z)=1,∀(x,y,z)∈ C.

Si C es un alambre, entonces $\boxed{L = \int_C f(x,y,z)dS = \int_C dS}$ que representa la longitud del alambre.

2º Si $\rho: C \subset R^3 \longrightarrow R$, es la función densidad de la masa del alambre, entonces la masa del alambre recorrido por la curva C es $M = \int_C \rho(x,y,z)dS$, de donde el centro de masa del alambre es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ siendo:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x,y,z)dS}{M};\ \bar{y} = \frac{\int_C y\rho(x,y,z)dS}{M};\ \bar{z} = \frac{\int_C z\rho(x,y,z)dS}{M}}$$

3º Si d(x,y,z) es la distancia desde el punto (x,y,z) del alambre a una recta ó plano, entonces el momento de inercia correspondiente a la curva C, con función de densidad de masa $\rho: C \subset R^3 \longrightarrow R$, está dado por:

$$\boxed{I = \int_C d^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dS}$$

como caso particular se tiene los momentos de inercia del alambre con respecto a los ejes X, Y, Z respectivamente, las cuales son:

$$I_x = \int_C (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS,\quad I_y = \int_C (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS,\quad I_z = \int_C (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$$

4º

i) Consideremos una fuerza $\vec{F}: R^2 \longrightarrow R^2$ tal que $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ y C un arco de la curva en R^2 y suponiendo que una partícula se mueve a lo largo de C.

El trabajo total realizado por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva C es:

$$\boxed{W=\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy}$$

ii) Para un movimiento en el espacio con la fuerza dado por un vector $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$, el trabajo total realizado está dado por:

$$\boxed{W=\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz}$$

Definición.- Un campo de fuerza $\vec{F}$ definido en un conjunto abierto D, se dice que es conservativo, si el trabajo realizado a lo largo de toda curva cerrada es cero.

Ejemplo.- Hallar el trabajo realizado cuando un objeto recorre el arco parabólico $C\colon \vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}$, $t\in[0,1]$ sometido a una fuerza $\vec{F}(x,y)=xy\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}$

Solución

$$W=\int_C \vec{F}(\vec{r}(t))d\vec{r}(t)=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)dt=\int_0^1 \vec{F}(t,t^2).(1,2t)dt=\int_0^1 (t^3,t^4).(1,2t)dt$$

$$=\int_0^1 (t^3+2t^5)dt=(\frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{3})\Big/_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

Ejemplo.- Una partícula se mueve en el plano XY a lo largo de una recta que va desde A(a,b) al punto B(c,d), debido a la fuerza $\vec{F}(x,y)=(\frac{-x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la recta $\overline{AB}$.

Solución

como $W = \int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r} = \int_C (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}).(dx,dy)$

$$= \int_C \frac{-x\,dx}{x^2+y^2} - \frac{y\,dy}{x^2+y^2} = -\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\int_{(a,b)}^{(c,d)} d(\ln(x^2+y^2))$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big/_{(a,b)}^{(c,d)} = -\frac{1}{2}\left[\ln(c^2+d^2) - \ln(a^2+b^2)\right] = \frac{1}{2}\ln(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2})$$

Ejemplo.- Determine la masa y el centro de masa del alambre en forma de hélice que recorre la curva: $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, si la densidad es $\rho(x,y,z) = z$. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje Z.

Solución

$M = \int_C \rho(x,y,z)dS$ donde $dS = \|\alpha'(t)\|\,dt$, donde $\vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$

$$M = \int_C \rho(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi} t.\|\vec{\alpha}(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{\sqrt{2}\,t^2}{2}\Big/_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\,\pi^2$$

El momento de inercia respecto al eje Z es:

$I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\sqrt{2}\,t^2$, el centro de masa es $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ donde:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\,\rho(x,y,z)dS}{M} = \frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt}{2\sqrt{2}\,\pi^2} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\,\rho(x,y,z)dS}{M} = \frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\operatorname{sen} t\,dt}{2\sqrt{2}\,\pi^2} = \frac{(-t\cos t - \operatorname{sen} t)\Big/_0^{2\pi}}{2\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_C z\,\rho(x,y,z)dS}{M} = \frac{\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,t^2\,dt}{2\sqrt{2}\,\pi^2} = \frac{t^3}{6\pi^2}\Big/_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

Luego el centro de masa del alambre es $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0, -\frac{1}{\pi}, \frac{4\pi}{3})$

Ejemplo.- Hallar la longitud del arco de la hélice cónica: $x = a e^t \cos t$, $y = a e^t \operatorname{sen} t$, $z = a e^t$, desde el punto O(0,0,0) hasta el punto A(a,0,a).

Solución

Como $L = \int_C dS = \int_C \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt$, donde $C: \vec{\alpha}(t) = (a e^t \cos t, a e^t \operatorname{sen} t, a e^t)$ entonces

$$\begin{cases} x = a e^t \cos t \\ y = a e^t \operatorname{sen} t \\ z = a e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a e^t (\cos t - \operatorname{sen} t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) \\ \dfrac{dz}{dt} = a e^t \end{cases}$$

además $\vec{\alpha}(t_1) = (a e^{t_1} \cos t_1, a e^{t_1} \operatorname{sen} t_1, a e^{t_1}) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a e^{t_1} \cos t_1 = 0 & -1 \le \operatorname{sen} t_1 \le 1 \\ a e^{t_1} \operatorname{sen} t_1 = 0 \Rightarrow & -a e^{t_1} \le a e^{t_1} \operatorname{sen} t_1 \le a e^{t_1} \\ a e^{t_1} = 0 & \text{cuando } t_1 \to -\infty,\ a e^{t_1} \operatorname{sen} t_1 \to 0 \end{cases}$$

por lo tanto $\vec{\alpha}(t_1) = (0,0,0)$, cuando $t_1 \to -\infty$

$\vec{\alpha}(t_2) = (a e^{t_2} \cos t_2, a e^{t_2} \operatorname{sen} t_2, a e^{t_2}) = (a,0,a)$

$$\begin{cases} a e^{t_2} \cos t_2 = a \\ a e^{t_2} \operatorname{sen} t_2 = 0 \\ a e^{t_2} = a \end{cases} \Rightarrow t_2 = 0$$

$$L = \int_C dS = \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 e^{2t} (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + a^2 e^{2t} (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + a^2 e^{2t}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 a e^t \sqrt{3}\, dt = a\sqrt{3}\, e^t \Big/_{-\infty}^{0} = a\sqrt{3} - 0 = a\sqrt{3} \qquad \therefore\ L = \int_C dS = \sqrt{3}\, a$$

Ejemplo.- Determinar la masa del contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si su densidad lineal en cada punto M(x,y) es igual a $|y|$.

Solución

Como $M=\int_C \rho(x,y)dS$, donde $\rho(x,y)=|y|$, ahora parametrizando la elipse C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

x = a cos t , y = b sen t entonces: $\vec{\alpha}[a,b]\longrightarrow R^2 / \vec{\alpha}(t)=(a\cos t, b\,\text{sen}\, t)$

$\vec{\alpha}'(t)=(-a\,\text{sen}\, t, b\cos t) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\|=\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\, t+b^2\cos^2 t}$

como $dS=\|\vec{\alpha}'(t)\|\,dt=\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\, t+b^2\cos^2 t}\,dt$

$$M=\int_C \rho(x,y)dS=\int_C |y|dS=\int_0^{2\pi}|b\,\text{sen}\, t|\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\, t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$M=b\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,|\text{sen}\, t|\,dt \;=b\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2}\,|\text{sen}\, t|\,dt$$

$$M=b[\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2}\,|\text{sen}\, t|\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2}\,|\text{sen}\, t|\,dt]$$

$$M=b[\int_0^{\pi}\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2}\,\text{sen}\, t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2}\,\text{sen}\, t\,dt]$$

$$M=b[b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arcsen}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}]$$

$$\therefore\quad M=2b[b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arcsen}(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a})]$$

Ejemplo.- Hallar la masa de la primera espira de la hélice circular x = a cos t, y = a sen t, z = b t, si la densidad en cada punto es igual al radio vector del mismo.

Solución

Como $M = \int_C \rho(x,y,z)dS$, donde $dS = \| \vec{\alpha}'(t) \| dt$, y $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y sea

$\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t, bt)$, $\vec{\alpha}'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t, b) \Rightarrow \| \vec{\alpha}'(t) \| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$M = \int_C \rho(x,y,z)dS = \int_C \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2t^2}\,dt$$

$$M = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\left[\frac{bt}{2}\sqrt{a^2+b^2t^2} + \frac{a^2}{2}\ln|bt+\sqrt{a^2+b^2t^2}|\right]\Big/_0^{2\pi}$$

$$M = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}[\pi b\sqrt{a^2+4b^2\pi^2} + \frac{a^2}{2}\ln|2\pi b+\sqrt{a^2+4b^2\pi^2}| - \frac{a^2}{2}\ln a]$$

$$M = \sqrt{a^2+b^2}[\pi\sqrt{a^2+4b^2\pi^2} + \frac{a^2}{2b}\ln(\frac{2b\pi+\sqrt{a^2+4b^2\pi^2}}{a})]$$

Ejemplo.- Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semi arco de la cicloide

$x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le \pi$

Solución

Sea $\vec{\alpha}'(t) = (a(t-\text{sen}\,t), a(1-\cos t))$, $0 \le t \le \pi$

$\vec{\alpha}'(t) = a(1-\cos t, \text{sen}\,t) \Rightarrow \| \vec{\alpha}'(t) \| = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2a\,\text{sen}\frac{t}{2}$

como $dS = \| \vec{\alpha}'(t) \| dt = 2a\,\text{sen}\frac{t}{2}dt \Rightarrow dS = 2a\,\text{sen}\frac{t}{2}\,dt$

$$M = 2a\int_0^{\pi} \text{sen}\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big/_0^{\pi} = 4a$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi} a(t-\text{sen}\,t)2a\,\text{sen}\frac{t}{2}dt}{4a} = \frac{4a}{3}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{\pi} a(1-\cos t)2a\,\text{sen}\frac{t}{2}dt}{4a} = \frac{4a}{3}$$

Luego las coordenadas del centro de gravedad es. $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{4a}{3},\frac{4a}{3})$

Ejemplo.- Determine la masa y el centro de masa del alambre en forma de hélice que recorre la curva: $\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Si la densidad es $\rho(x,y,z) = z$ encuentre el momento de inercia con respecto al eje Z.

Solución

Como $\vec{\alpha}'(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, derivando

$$\vec{\alpha}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2}\text{, como } dS = \|\vec{\alpha}'(t)\|\, dt = \sqrt{2}\, dt$$

$$M = \int_C \rho(x,y,z)\,dS = \int_C z\,dS = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\; dt = 2\sqrt{2}\;\pi^2$$

Luego $M = 2\sqrt{2}\;\pi^2$, el momento de inercia respecto al eje Z es:

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\sqrt{2}\;\pi^2,$$ el centro de masa es $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ donde:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x,y,z)\,ds}{M} = \frac{2\int_0^{2\pi} t\cos dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\rho(x,y,z)\,ds}{M} = \frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t\,dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow \bar{y} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_C z\rho(x,y,z)\,ds}{M} = \frac{\int_0^{2\pi} \sqrt{2}t^2\,dt}{2\sqrt{2}\pi^2} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \bar{z} = \frac{4\pi}{3}$$

Luego el centro de masa del alambre es. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0, -\frac{1}{\pi}, \frac{4\pi}{3})$

7.11 Ejercicios Propuestos.

1) Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}(x,y)=(2a-y,x)$ que mueve una partícula sobre un arco de la cicloide $\vec{\alpha}(t)=(at-a\,\text{sen}\,t, a-a\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Rpta. $-2\pi a^2$

2) Determine el trabajo efectuado por una partícula que se mueve de (0,0) hasta (2,0) sobre una curva C que recorre el conjunto $S=\{(x,y)./y=1-|1-x|\}$ si la fuerza es $\vec{F}(x,y)=(y^2,x)$

Rpta. $-\frac{1}{3}$

3) Hallar el trabajo total realizado por desplazar una partícula en un campo de fuerza dado por: $\vec{F}(x,y,z)=3xy\,\vec{i}-5z\,\vec{j}+10x\,\vec{k}$ a lo largo de la curva: $x=t^2+1$, $y=2t^2$, $z=t^3$ desde t = 1 a t = 2 **Rpta.** 303

4) Si $\vec{F}(x,y,z)=(xy,yz,xz)$, determine el trabajo efectuado por esta fuerza que mueve una partícula sobre una recta (1,-1,1) hasta (2,1,3) **Rpta.** $\frac{43}{6}$

5) Hallar el trabajo realizado al desplazarse una partícula en el campo de fuerza $\vec{F}(x,y,z)=3x^2\,\vec{i}+(2xz-1)\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ a lo largo de:

a) La recta que une los puntos (0,0,0) y (2,1,3) **Rpta.** w = 15.5

b) La curva $x=2t^2$, $y=t$, $z=4t^2-1$ desde t = 0, a, t = 1 **Rpta.** $\frac{193}{15}$

6) Halle el trabajo realizado por el campo $\vec{F}(x,y,z)=(2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4z)$, al desplazarse en sentido antihorario una partícula alrededor de una circunferencia C del plano XY, cuyo centro es el origen y de radio 3 **Rpta.** 18π

7) Un campo de fuerza está dado por $\vec{F}(x,y,z)=(yz,xz,x(y+1))$ calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover una partícula sobre el contorno del triángulo C de vértice (0,0,0) , (1,1,1) y (-1,1,-1) recorrida una vez y en ese sentido. **Rpta.** 0

8) Sea $\vec{F}(x,y,z)=(6xy^3z+4y^2z^3,\ 9x^2y^2z+8xyz^3+z^4,\ 3x^2y^3+12xy^2z^2+4yz^3)$ un campo de fuerza. Hallar el trabajo que realiza. $\vec{F}$ al mover una partícula desde el origen hasta el punto (1,1,1) siguiendo la trayectoria compuesta por $C=C_1\cup C_2\cup C_2$ donde C_1: semi circunferencia en el plano XY que une los puntos (0,0,0) con (0,2,0), x ≥ 0 C_2: Semi circunferencia en el plano XY que une los puntos (0,2,0) con (0,4,0), z ≥ 0. C_3: la recta que une (0,4,0) con (1,1,1). **Rpta.** 8

9) El módulo de una fuerza es inversamente proporcional a la distancia entre su punto de aplicación y el plano XY. Si esta fuerza siempre está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerza al desplazarse una partícula a lo largo de la recta $x=\sqrt{2}\,y=\sqrt{2}\,z$ desde el punto $(\sqrt{2},1,1)$ al punto $(2\sqrt{2},2,2)$

Rpta. -2k ln 2

10) Hallar la función potencial (o sea la diferencial exacta) del vector fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(e^x\cos y+zy,\ xz-e^x\operatorname{sen} y,\ xy+z)$ y calcular el trabajo realizado desde (1,0,2) hasta (0,π,2). **Rpta.** -(1 + e)

11) ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}=\vec{r}\ x\operatorname{grad}(x,y,z)$ a lo largo del camino cerrado de O a P; de P a Q; de Q a R; de R a O siendo O(0,0,0), P(1,1,1), Q(1,1,0), R(1,0,0)?

Rpta. $\frac{1}{2}$

12) Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y)=(3y^2+2,\ 16x)$ al moverse una partícula desde (-1,0) hasta (1,0), siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ¿para qué valor de b el trabajo será mínimo?

13) Una partícula se mueve sobre una curva definida por las ecuaciones $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$. Por la acción de la fuerza $\vec{F}(x,y,z) = (3x^2, 2xz - y, 2z)$. Hallar el trabajo realizado al moverse la partícula del punto A(0,0,0) al punto B(4,4,24).

14) Una partícula se mueve a lo largo de una recta en el espacio que une los puntos P(a,b,c) y Q(r,s,t) debido a la fuerza

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

15) Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\vec{j}$; para mover una partícula a lo largo de la curva: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que se encuentra en el primer cuadrante en sentido horario.

Rpta. $\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1-a^2}$

16) Una partícula da una vuelta alrededor del circulo unitario contrario al de las manecillas de reloj, mientras está sujeta a la fuerza $\vec{F}(x,y) = (e^x - \ln e^{y^3})\,\vec{i} + (\cos y + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x^3))\,\vec{j}$ encontrar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$.

17) Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ que mueve una partícula sobre la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$ en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se le ve desde arriba de la esfera. **Rpta.** 0

18) Hallar la masa del arco de la línea $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a t = 0 hasta un punto cualquiera, si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto (1,0,1) es igual a 1.

Rpta. $M = \sqrt{3}\,(1 - e^{-t_0})$

19) Encuentre el momento de inercia sobre el eje y de un alambre semi circular que tiene la forma $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, si la densidad es $P(x,y) = |x| + |y|$. Determine también la masa y el centro de masa del alambre. **Rpta.** $M = 4$, $(\bar{x},\bar{y}) = (0,\frac{\pi+2}{8})$

20) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$. **Rpta.** $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{8}{3},\frac{4}{3})$

21) Una alambre tiene la forma de la curva $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. La densidad del alambre es $k\sqrt{y}$ ¿Cual es el momento de inercia del alambre con respecto a y?

Rpta. $\frac{k}{4}[\frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{15}]$

22) Calcular la masa del arco de circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$, si su densidad lineal en el punto (x,y) es igual a y. **Rpta.** 2

23) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva homogénea $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $\infty < t \leq 0$. **Rpta.** $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$

24) Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva homogénea y = cos h, $0 \leq x \leq \ln 2$. **Rpta.** $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{3\ln 2 - 1}{3},\frac{16\ln 2 + 15}{24})$

25) Hallar la masa de la primera espiral de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = b\,t$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado de la distancia de este punto al origen.

Rpta. $(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3})\sqrt{a^2 + b^2}$

26) Calcular la masa de la primera espiral de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} y$, $z = t$, si la densidad en cada punto es igual al radio vector en dicho punto.

Rpta. $\sqrt{2}[\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$

27) Hallar la masa de un fragmento de la catenaria $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ comprendido entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$ y $x_2 = a$, si la densidad de la línea en cada punto siendo la densidad en el punto (0,a) es igual a δ. **Rpta.** δ a

28) Hallar las coordenadas de gravedad de la primera semi espira de la hélice x = a cos t, y = a sen t, z = b t considerando la densidad constante. **Rpta.** $(\frac{2a}{\pi}, \frac{2a}{\pi}, \frac{b\pi}{2})$

29) Un alambre de densidad constante k tiene la forma |x| + |y| = a, encuentre sus momentos de inercia con respecto al eje Y y con respecto al eje Z.

Rpta. $I_y = \frac{4\sqrt{2}a^3k}{3}$, $I_z = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3k$

30) Hallar el centro de masa de una pieza de alambre de densidad constante enrollada en la forma de la hélice $\vec{\alpha}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t)$, t ∈ [0,π]

Rpta. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{8}{\pi}, \frac{8}{\pi}, \frac{3\pi}{2})$

31) Hallar la masa total de un alambre cuya forma es de la curva y = |x| con - 1 ≤ x ≤ 1, si la densidad de cada punto P de el es igual al valor absoluto del producto de las coordenadas del punto. **Rpta.** $M = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

32) Un objeto recorre una elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en sentido antihorario y se encuentra sometida a la fuerza $\vec{F}(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$. Hallar el trabajo realizado.

Rpta. ab π

33) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - 3z^2, 2xz - 4y^2)$ al mover una partícula alrededor de la curva cerrada $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 2$ en sentido antihorario. **Rpta.** w = 0

34) Calcular el trabajo para mover una partícula desde el origen hasta el punto $P(1,1,\sqrt{2})$ siguiendo al curva de intersección de las superficies $x^2+y^2=z^2$, $y^2=x$.

Rpta. w = 2

35) Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=(-y,x,e^{-z^2})$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $z \geq 0$ recorrida en sentido antihorario vista desde la parte positiva del eje Z.

Rpta. w = ab π

36) Determinar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y,z)=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+zx\,\vec{k}$ sobre la recta que une los puntos P(1,-1,1), Q(2,1,3). **Rpta.** $\frac{43}{6}$

37) Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z)=2xy\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}-x^2\,\vec{k}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la sección del paraboloide $x^2+y^2-2z^2=2a^2$ por el plano y = x, del punto (a,a,0) al punto $(a\sqrt{2},a\sqrt{2},a)$.

Rpta. $(2\sqrt{2}-\frac{7}{3})a^3$

38) Un campo de fuerza es dado por $\vec{F}(x,y,z)=(yz,xz,x(y+1))$. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover una partícula sobre el contorno del triángulo de vértices (0,0,0), (1,1,1) y (-1,1,-1) recorrida una vez y en ese orden. **Rpta.** $\frac{3}{2}$

7.12. Circulación del Campo Vectorial y su Cálculo.

Definición.- La integral de línea tomada a lo largo de la curva cerrada orientada Γ se denomina circulación C del campo vectorial $\vec{F}$ de tal manera según la definición se tiene:

$$\boxed{C = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\,\vec{r}}$$

donde el simbolo $\oint_{\Gamma}$ significa la integral por la curva cerrada Γ.

Si el campo vectorial $\vec{F}$ se prolija en la forma de coordenadas $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ entonces la circulación del campo vectorial $\vec{F}$ será igual a:

$$\boxed{C = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\,\vec{r} = \oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz}$$

Ejemplo.- Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = -y^3\,\vec{i} + x^3\,\vec{j}$ a lo largo de la elipse $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, en dirección contraria a las agujas de un reloj.

<u>Solución</u>

Aplicando la definición de circulación tenemos:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\,\vec{r} = \oint_{\Gamma} -y^3dx + x^3dy \qquad \text{... (1)}$$

parametrizando a la elipse se tiene:

$$\Gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\, t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad \text{... (2)}$$

de aqui dx = -a sen t dt, dy = b cos t dt **... (3)**

reemplazando (2), (3) en (1) tenemos

$$C=\int_0^{2\pi}[-b^3 sen^3 t(-a\,\text{sen}\,t)+a^3\cos^3 t.b\cos t]dt$$

$$=ab\int_0^{2\pi}(b^3\,\text{sen}^4\,t+a^2\cos^4 t)dt=ab\int_0^{2\pi}[\frac{b^2(1-\cos 2t)^2}{4}+\frac{a^2(1+\cos 2t)^2}{4}]dt$$

$$=\frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}[(a^2+b^2)+b^2\cos^2 2t+a^2\cos^2 2t+2(a^2-b^2)\cos 2t]dt$$

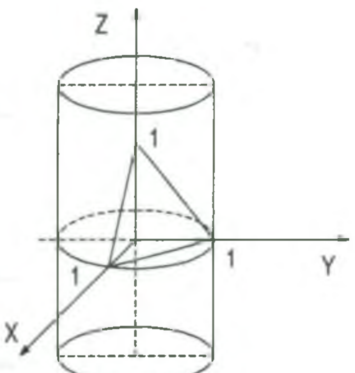
$$=\frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}[(a^2+b^2)+\frac{b^2}{2}(1+\cos 4t)+\frac{a^2}{2}(1+\cos 4t)+2(a^2-b^2)\cos 2t]dt$$

$$=\frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}[\frac{3}{2}(a^2+b^2)+\frac{a^2+b^2}{2}\cos 4t+2(a^2-b^2)\cos 2t]dt$$

$$=\frac{ab}{4}[\frac{3}{2}(a^2+b^2)t+\frac{a^2+b^2}{8}\text{sen}\,4t+(a^2-b^2)\,\text{sen}\,2t]\Big/_0^{2\pi}=\frac{3ab}{4}(a^2+b^2)\pi$$

Ejemplo.- Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k}$ a lo largo de la curva de intersección $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ en la dirección correspondiente al recorrido de la proyección Γ en el plano XY en sentido antihorario.

Solución



Aplicando la definición de circulación tenemos.

$$C=\oint_\Gamma \vec{F}\,d\,\vec{r}=\oint_\Gamma xy\,dx+yz\,dy+xz\,dz \qquad \textbf{... (1)}$$

parametrizando Γ que es una elipse que se obtiene como resultado de la sección del cilindro $x^2+y^2=1$ con el plano x + y + z = 1

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad \textbf{... (2)}$$

de aquí dx = -sen t dt, dy = cos t dt **... (3)**

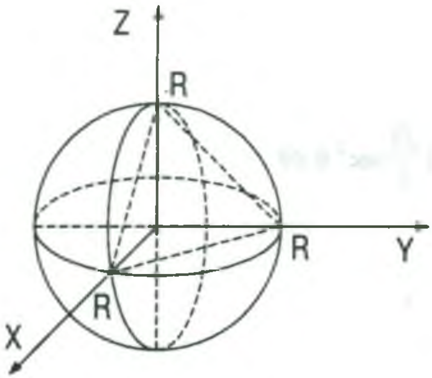
ahora reemplazando (2), (3) en (1)

$$C = \int_0^{2\pi} [-\cos t \operatorname{sen}^2 t + ent(1 - \cos t - \operatorname{sen} t)\cos t + \cos t(1 - \cos t - \operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t - \cos t)]dt$$

$$C = \int_0^{2\pi} [-3\cos t \operatorname{sen}^2 t - 2\operatorname{sen} t \cos^2 t + 3\operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t + \cos^3 t]dt = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -\pi$$

Ejemplo.- Calcúlese la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$, a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, x + y + z = R en sentido positivo respecto al vector $\vec{k}$.

Solución



Aplicando la definición de la circulación tenemos:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \oint_{\Gamma} z\,dx + x\,dy + y\,dz \qquad \textbf{... (1)}$$

parametrizando la circunferencia

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = R \end{cases}$$

$z = R - x - y \Rightarrow x^2 + y^2 + (R - x - y)^2 = R^2$

de donde $x^2 + xy + y^2 = R(x + y)$

hacemos y = tx de donde $x = \dfrac{R(1+t)}{1+t+t^2}$, $y = \dfrac{Rt(1+t)}{1+t+t^2}$, $z = \dfrac{-Rt}{1+t+t^2}$; $-\infty < t < +\infty$

$$dx = -\frac{R(2t+t^2)}{(1+t+t^2)^2}dt\ ,\quad dy = \frac{Rt(1+t)}{1+t+t^2}dt\ ,\quad dz = \frac{R(t^2-1)}{1+t+t^2}dt$$

reemplazando en la ecuación (1) tenemos:

$$C = R^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t(2t+t^2)+(1+t)(1+2t)-t(t^2-1)}{(1+t+t^2)^3}dt$$

$$= R^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+4t+4t^2}{(1+t+t^2)^3}dt = R^2\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{(1+t+t^2)^2}+\frac{3t(1+t)}{(1+t+t^2)^3}]dt$$

$$= R^2\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{[(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}+\frac{3t(t+1)}{[(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^3}]dt$$

hacemos $t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

para $t = -\infty \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$; $t = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$C = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{\frac{9}{16}\sec^4\theta}+\frac{3(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{2})}{\frac{27}{64}\sec^6\theta}]\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= R^2[\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta+\frac{8\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\operatorname{tg}^2\theta-1}{\sec^4\theta}d\theta]$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}R^2[(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4})\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta-4\cos^4\theta)d\theta]$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}R^2[\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-4(\frac{3\pi}{8})] = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^2$$

7.13 Ejercicios Propuestos.

1) Calcular la circulación C del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(xz+y)\,\vec{i}+(yz-x)\,\vec{j}-(x^2+y^2)\,\vec{k}$ a lo largo de la línea $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=3\end{cases}$ en la dirección correspondiente al recorrido de la proyección Γ en el plano XY en sentido antihorario. **Rpta.** -2π

2) Calcúlese la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y)=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}$ a lo largo de la circunferencia $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ en sentido negativo.

Rpta. $2\pi R^3$

3) Calcular la circulación C del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=y^2\,\vec{i}+z^2\,\vec{j}+x^2\,\vec{k}$ a lo largo de la línea $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2=Rx\end{cases}$, $z\geq 0$ en la dirección correspondiente al recorrido de la proyección Γ en el plano XY en sentido antihorario.

Rpta. $-\dfrac{\pi R^3}{4}$

4) Calcúlese la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=y\,\vec{i}-z\,\vec{j}+x\,\vec{k}$ a lo largo de la elipse $\dfrac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2$, $y=x$ en dirección positiva respecto al vector $\vec{i}$.

Rpta. $2\pi a^2$

5) Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=ye^{xy}\,\vec{i}+xe^{xy}\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ a lo largo de la línea Γ la que se obtiene por la intersección del cono $x^2+y^2=(z-1)^2$ con los planos coordenados en la dirección positiva. **Rpta.** 0

6) Calcular la circulación C del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(2x+z)\,\vec{i}+(2y-z)\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ a lo largo de la línea Γ que es la intersección del paraboloide de revolución $x^2+y^2=1-z$ con los planos coordenados. **Rpta.** $\frac{4}{3}$

7) Encuentre la circulación C del campo vectorial $\vec{F}(x,y)=(x-y)\,\vec{i}+x\,\vec{j}$ alrededor del circulo $\vec{\alpha}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}$, $0\le t\le 2\pi$. **Rpta.** 2π

8) Encuentre la circulación C de $\vec{F}(x,y,z)=2x\,\vec{i}+2z\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$ alrededor de la trayectoria cerrada que consiste en las siguientes tres curvas recorridas en la dirección de t creciente.

$$C_1:\ \vec{\alpha}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}+t\,\vec{k},\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

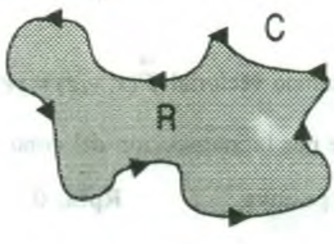
$$C_2:\ \vec{\alpha}(t)=\vec{j}+\frac{\pi}{2}(1-t)\,\vec{k},\ \ 0\le t\le 1$$

$$C_3:\ \vec{\alpha}(t)=t\,\vec{i}+(1-t)\,\vec{j},\ \ 0\le t\le 1$$

Rpta. 0

7.14 Fórmula de Green

Para la fórmula de Green se considera curvas cerradas simples seccionalmente regular, parametrizada en sentido antihorario, que constituirán la frontera (o borde) de una región acotada R del plano, como en la siguiente figura.



La fórmula de Green es un resultado que expresa una integral doble sobre una región R como una integral de línea a lo largo de la curva cerrada C que constituye la frontera de R.

Todo esto lo expresaremos en el siguiente teorema

7.15 Teorema de Green.

Sea R una región simplemente conexa, con frontera C suave a trozos, orientada en sentido contrario al de las agujas de un reloj (esto es, C recorre una vez de manera tal que la región R quede siempre a la izquierda) si M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ son continuas en una región abierta que contiene a R, entonces:

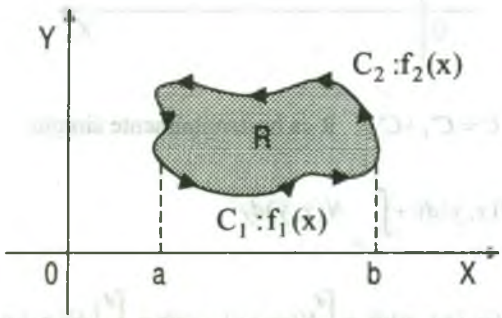
$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

Demostración

Daremos una demostración solamente para una región que es a la vez verticalmente simple y horizontalmente simple.

Luego la región R se describe en las dos formas.

$R = \{(x,y) / a \le x \le b \ , \ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, $R = \{(x,y) / c \le x \le d \ , \ g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$



$C = C_1 + C_2$, R verticalmente simple.

La integral de línea $\int_C M(x,y)dx$ puede escribirse como

$$\int_C M(x,y)dx = \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx = \int_a^b M(x,f_1(x))dx + \int_b^a M(x,f_2(x))dx$$

$$= \int_a^b \left[M(x,\ f_1(x)) - M(x,\ f_2(x))\right]dx$$

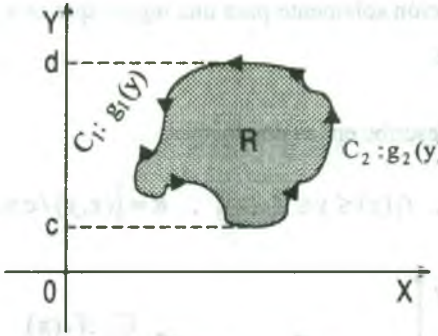
por otra parte, tenemos:

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}dA = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}dy\right)dx = \int_a^b M(x,y) \Big/_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx = \int_a^b \left[M(x,\ f_2(x)) - M(x,\ f_1(x))\right]dx$$

$$= -\int_a^b \left[M(x,\ f_1(x)) - M(x,\ f_2(x))\right]dx$$

En consecuencia se tiene: $\int_C M(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}dA$

En forma similar para el caso:



$C = C'_1 + C'_2$, **R es horizontalmente simple**

$$\int_C N(x,y)dy = \int_{C_1} N(x,y)dy + \int_{C'_2} N(x,y)dy$$

$$= \int_d^c N(g_1(y),\ y)dy + \int_c^d N(g_2(y),\ y)dy = \int_c^d \left[N(g_2(y),\ y) - N(g_1(y),\ y)\right]dy$$

por otra parte, tenemos:

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) dy = \int_c^d N(x,y) \Big/_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy = \int_c^d [N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y)] dy$$

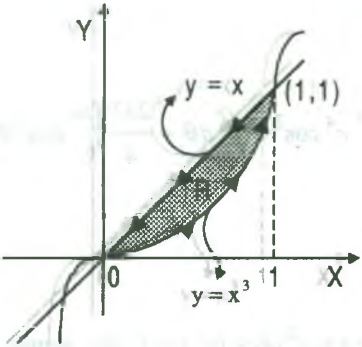
En consecuencia: $$\int_C N(x,y)dy = -\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

Luego: $$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA + \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Ejemplo.- Usar el teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$, donde C es el camino de (0,0) a (1,1) sobre la gráfica de $y = x^3$ y de (1,1) a (0,0) sobre la gráfica $y = x$.

Solución

Graficando se tiene:



aplicando el teorema de Green.

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde se tiene. $\begin{cases} M = y^3 \\ N = x^3 + 3xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}$

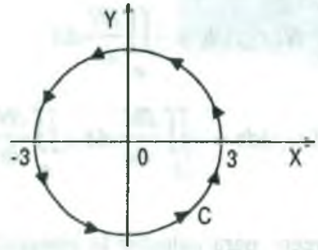
$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dx\,dy = \iint_R 3x^2 dx\,dy$$

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R 3x^2 dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x} 3x^2\, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2}\right) \Big/_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \frac{1}{4}$$

Ejemplo.- Mientras está bajo la acción de una fuerza $\vec{F}(x,y)=y^3\,\vec{i}+(x^3+3xy^2)\,\vec{j}$, una partícula da una vuelta a la circunferencia de radio 3 que se muestra en la figura, usar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por $\vec{F}$.



Solución

$$W=\int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r}=\int_C (y^3,\ x^3+3xy^2).(dx,dy)$$

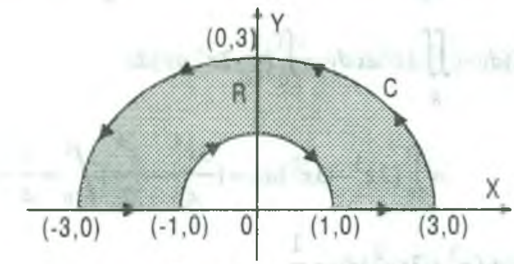
$$=\int_C y^3dx+(x^3+3xy^2)\,dy=\iint_D 3x^2dx\,dy \quad \text{(por el ejercicio anterior)}$$

pasando a coordenadas polares r = 3, 0 ≤ θ ≤ 2π

$$W=\iint_R 3x^2dx\,dy=\int_0^{2\pi}(\int_0^3 3r^2\cos^2\theta.r\,dr)d\theta=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} r^4\cos^2\theta \Big/_0^3 d\theta=\frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{243}{8}[\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}]\Big/_0^{2\pi}=\frac{243}{8}[2\pi+0]=\frac{243\pi}{4}$$

Ejemplo.- Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C (\operatorname{arctg} x+y^2)dx+(e^y y-x^2)dy$, donde C es el camino que encierra la región anular que se muestra en la figura.



C es suave a trazos

Solución

En coordenadas polares R está dado por $1 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 3$

$$\text{además} \begin{cases} M = \operatorname{arctg} x + y^2 \\ N = e^y y - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2x \end{cases}$$

Luego por el teorema de Green se tiene:

$$\int_C (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y y - x^2)dy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dx\,dy = \iint_R (-2x - 2y)dx\,dy$$

pasando a coordenadas polares se tiene: $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\int_C (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y y - x^2)dy = -2\iint_R (x, y)dxdy$$

$$= -2\int_0^{\pi} (\int_1^3 (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)r\,dr)d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\pi} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)26d\theta = -\frac{52}{3}[\operatorname{sen}\theta - \cos\theta] \Big/_0^{\pi}$$

$$= -\frac{52}{3}\left[(0+1) - (0-1)\right] = -\frac{104}{3}$$

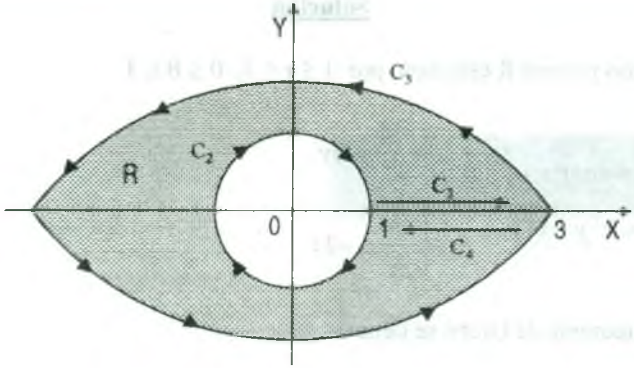
Observación.- El teorema de Green puede extenderse para cubrir regiones que no son simplemente conexas.

Ejemplo: (El teorema de Green extendido a una región con un agujero).-

Sea R la región interior de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, calcular la integral de línea $\int_C 2xydx + (x^2 + 2x)dy$ donde $C = C_1 + C_2$ es el contorno de R.

Solución

Construyendo al figura y luego introduciendo los segmentos rectos C_3 y C_4.



donde $\quad C_3$: $y = 0$, $1 \le x \le 3$, $\quad C_4$: $y = 0$, $1 \le x \le 3$

como C_3 y C_4 son de orientación opuesta, la integral de línea sobre ellos se cancelan además se puede aplicar el teorema de Green a la región R con frontera $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)dy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dx\,dy$$

$$= \iint_R (2x + 2 - 2x)dx\,dy = 2\iint_R dx\,dy = 2 \text{ (área de R) } = 2\left[(3)(2)\pi - (1)^2 \pi\right]$$

$$= 2(6\pi - \pi) = 10\,\pi$$

Ejemplo.- Con ayuda de la fórmula de Green, transformar la integral curvilínea $\oint_C \left[x + \ln(x^2 + y^2)\right]dx + y\ln(x^2 + y^2)dy$, donde el contorno C limita la región D.

Solución

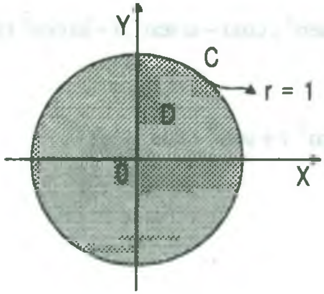
$$\begin{cases} P = x + \ln(x^2 + y^2) \\ Q = y\ln(x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\oint_C \left[x + \ln(x^2 + y^2)\right]dx + y\ln(x^2 + y^2)dy = \iint_D (\frac{\partial \vartheta}{\partial x}) - (\frac{\partial \rho}{\partial y})dxdy$$

$$= \iint_D (\frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2})dxdy = \iint_D \frac{2xy - 2y}{x^2 + y^2}dxdy$$

Ejemplo.- Mediante la fórmula de Green calcular la integral $\oint_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ donde C es él circulo $x^2 + y^2 = 1$

Solución



$$\oint_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\,dy, \text{ donde}$$

$$\begin{cases} P = 2x^3 - y^3 \\ Q = x^3 + y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases}$$

$$\oint_C (2x - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y})dx\,dy = \iint_D 3(x^2 + y^2)dxdy \text{ donde } D\text{: } x^2 + y^2 \leq 1$$

pasando a coordenadas polares x = r eos θ , y = r sen θ

$$\oint_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \iint_D 3(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 3r^2.r\,dr)d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

7.16 Cálculo de Áreas Mediante la Integral de Línea.

Si R es una región plana, limitada por una curva plana cerrada simple suave a trozos C, entonces el área de R viene dada por:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

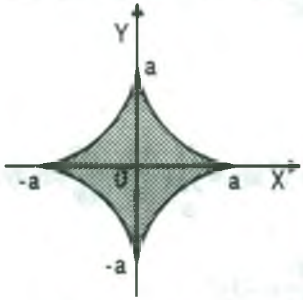
El contorno de integración es recorrido de modo que la región limitada por el mismo queda a la izquierda (sentido positivo)

Ejemplo.- Calcular el área limitada por la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\text{sen}^3 t$, construyendo previamente la curva.

Solución

Sea $\vec{\alpha}(t) = (a\cos^3 t,\ a\,\text{sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

cuya gráfica es:



$$A=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t.3a.\operatorname{sen}^2 t\cos t-a\operatorname{sen}^3 t(-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t)\right]dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\operatorname{sen}^2 t+\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t)dt$$

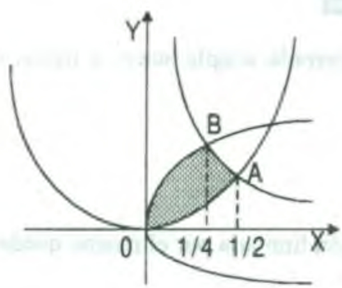
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)dt$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}.\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3a^2}{16}[t-\frac{\operatorname{sen}4t}{4}]\Big/_0^{2\pi}=\frac{3a^2}{16}(2\pi-0)=\frac{3a^2\pi}{8}\mu^2$$

Ejemplo.- Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y=x^2$, $x=y^2$, $8xy=1$ (se tiene en cuenta el área adyacente al origen de coordenadas).

Solución



$$\begin{cases} y=x^2 \\ 8xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{1}{2},1)$$

$$\begin{cases} x=y^2 \\ 8xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

$$A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx$$

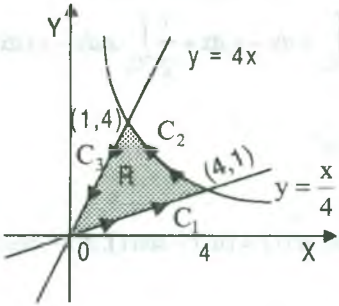
$$A=\frac{1}{2}\int_{OA}x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int_{AB}x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int_{BO}x\,dy-y\,dx$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}x^2\,dx-\frac{1}{8}\int_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\mu^2$$

Ejemplo.- Si R es la región del primer cuadrante del plano XY limitado por las curvas 4y = x, y = 4x, xy = 4. Hallar el área de R.

Solución

Ubicando la región R.



tenemos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

donde las parametrizaciones de C_1, C_2, C_3 son respectivamente

$\vec{\alpha}_1(t) = (4t, t)$, $0 \le t \le 1$, $\vec{\alpha}_2(t) = (5-t, \dfrac{4}{5-t})$, $1 \le t \le 4$

$\vec{\alpha}_3(t) = (1-t, 4-4t)$, $0 \le t \le 1$

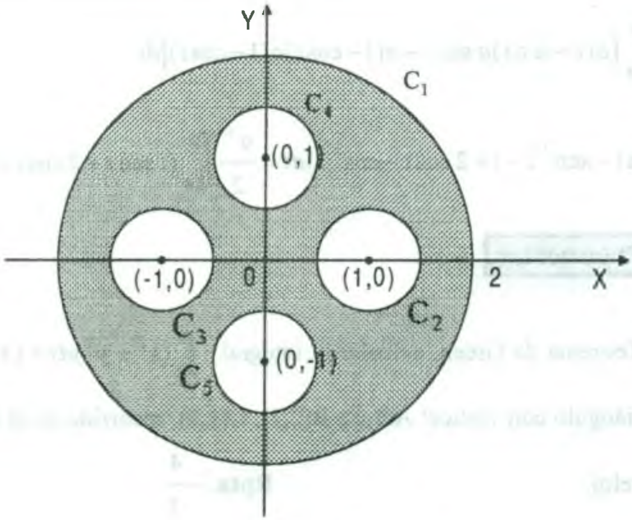
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{C_1} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_2} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_3} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (4t-4t)dt + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{8}{5-t}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 (-4+4t+4-4t)dt = 0 - 4\ln(5-t)\Big/_1^4 = 4\ln 4\, u^2$$

Ejemplo.- Calcular el área de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y exterior a las circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$

Solución

Construyendo la región cuya área vamos a calcular.



como $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, entonces

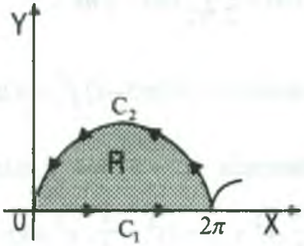
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{C_1} x\,dy - y\,dx - (\frac{1}{2}\int_{C_2} x\,dy - y\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{C_3} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_4} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_5} x\,dy - y)\,dx$$

$$= 4\pi - (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = 4\pi - \pi = 3\pi\, u^2$$

Ejemplo. Hallar el área de la región limitada por la cicloide $\vec{\alpha}(t) = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$, $0 \le t \le 2\pi$ y el eje X.

Solución



$C = C_1 \cup C_2$, donde las parametrizaciones de C_1 y C_2.

$\vec{\alpha}_1(t) = (t, 0)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\vec{\alpha}_2 = (a(t - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t))$ de 2π a 0

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{C_1} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_2} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 0 + \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} [a(t - \operatorname{sen} t)a \operatorname{sen} t - a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)]dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} (t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t)dt = \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} (t \operatorname{sen} t + 2\cos t - 2)dt = 3\pi\, a^2 u^2$$

7.17 Ejercicios Propuestos.

1) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral $\oint_C (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, si C es el contorno del triángulo con vértice: A(1,1), B(2,2), C(1,3) recorrido en el sentido contrario de las agujas del reloj. **Rpta.** $-\frac{4}{3}$

2) Aplicando el Teorema de Green, calcular al integral $\oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Rpta. $\frac{R^2 \pi}{2}$

3) Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral $\oint_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy$, donde C es el contorno del rectángulo $1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$. **Rpta.** 8

4) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral $\oint_C (1 - x^2) y dx + x(1 + y^2) dy$, donde C es el contorno dado por $x^2 + y^2 = R^2$. **Rpta.** $\frac{R^4 \pi}{2}$

5) Aplicando el Teorema de Green, Evaluar la integral $\oint_C (2x - y^3) dx - xydy$, siendo C el contorno de la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Rpta. 60π

6) Aplicando el Teorema de Green, calcular al integral $\oint_C e^x dx + xydy$, siendo C la curva definida por $|x| + |y| \le 2$. **Rpta.** 0

7) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral $\oint_C [x \ln(1 + y^2) - x^2 (y - 1)]dx + [\frac{x^2}{1 + y^2} + y^2 (x + 1)]dy$, siendo C la porción de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante y en el sentido del punto (a,0) hasta el punto (0,a). **Rpta.** $\frac{\pi a^4}{8} + \frac{2a^3}{3}$

8) Utilice el Teorema de Green para calcular la integral $\oint_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. **Rpta.** $\frac{3\pi}{2}$

9) Utilice el Teorema de Green para calcular la integral $\oint_C -ydx + xdy$, donde C es el anillo $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ donde 0 < a < b. **Rpta.** $2\pi(b^2 - a^2)$

10) Utilice el Teorema de Green para calcular la integral $\oint_C (3x^2e^y - x^2y - \frac{y^2}{3})dx + (x^3e^y + \cos y)dy$, alrededor de $x^2 + y^2 = 1$.

Rpta. $\frac{\pi}{2}$

11) Aplicando el Teorema de Green, calcular la integral $\oint_C (4y - e^x \cos y)dx - (y^2 + e^x \operatorname{sen} y)dy$, en sentido antihorario y alrededor del paralelogramo cuyo vértices son (0,0), (2,0), (3,1) y (1,1). **Rpta.** -8

12) Mediante el Teorema de Green, calcular al integral

$\oint_C (\operatorname{sen}^4 x + e^{2x})dx + (\cos^3 y - e^y)dy$, donde C es la curva $x^4 + y^4 = 16$. **Rpta.** 0

13) Calcular la integral aplicando el Teorema de Green $\oint_C (e^x - x^2y)dx + 3x^2ydy$, donde C es la curva cerrada determinada por $y = x^2$, $x = y^2$. **Rpta.** $\frac{41}{70}$

14) Por los puntos A(1,0) y B(2,3) se ha trazado una parábola AmB, cuyo eje coincida con el eje OY, y su cuerda es AnB. Hallar $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$, directamente aplicando el teorema de Green. **Rpta.** $-\frac{1}{3}$

15) Aplicando el Teorema de Green, calcular las integrales indicadas (antihorario) alrededor de la curva C.

a) $\oint_C (e^x - e^x \cos y)dx + (\operatorname{sen} y - y)dy$, donde C: circuito que encierra la región R: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \operatorname{sen} x$. **Rpta.** $\dfrac{1-e^{\pi}}{5}$

b) $\oint_C xy^2\,dx - x^2 y\,dy$ donde C: $x^2 + y^2 = a^2$ **Rpta.** $\dfrac{a^4\pi}{2}$

c) $\oint_C e^{y^2-x^2} \cos 2xy\,dx + e^{y^2-x^2} \operatorname{sen} 2xy\,dy$ y donde C: $x^2 + y^2 = a^2$ **Rpta.** 0

d) $\oint_C (x+y)dx + (y-x)dy$, donde C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **Rpta.** $-2\pi ab$

e) $\oint_C e^x \operatorname{sen} y - my, e^x \cos y - m).(dx,dy)$, donde C es la parte superior de $x^2 + y^2 = ax$ y el eje X. **Rpta.** $\dfrac{a^2\pi m}{8}$

16) Aplicando el Teorema de Green, calcular al integral $\oint_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$, donde C es el contorno de un triángulo, cuyos vértices están en los puntos A(1,1), B(2,2) y C(1,3) y que se recorre en sentido positivo. **Rpta.** $-\dfrac{4}{3}$

17) Calcular la integral de línea aplicando el Teorema de Green $\oint_C (\operatorname{senh} x - 1)\operatorname{sen} y\,dx - (\cosh x - \cos y)dy$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del rectángulo $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ **Rpta.** 2

18) Mediante el Teorema de Green, calcular la integral $\oint_C x^2ydx + xy^2dy$, donde C es la frontera de la región S en el primer cuadrante limitado por las gráficas $y = x$, $y^3 = x^2$.

Rpta. $\frac{1}{198}$

19) Calcular la integral aplicando el Teorema de Green $\oint_C (x + y^2)dx + x^2ydy$ (en el sentido positivo) donde S es la región limitada por la curva $y^2 = x$, $|y| = 2x - 1$

20) Calcular la integral aplicando el Teorema de Green $\oint_C (x^2 + y^2)dx + (2x + y^2)dy$, donde C es la frontera del cuadrado con vértice (1,1), (2,1), (2,2) y (1,2). **Rpta.** -1

21) Calcular $\int_C (y - x)dx + (2x - y)dy$, sabiendo que C es frontera de la región limitada por las gráficas $y = x$ e $y = x^2 - x$. **Rpta.** $\frac{4}{3}$

22) Si R es la región interior a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ calcular la integral de línea $\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)dy$. **Rpta.** 16π

23) Evaluar $\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, donde C es él circulo unitario.

Rpta. $\frac{3\pi}{2}$

24) Calcular $\oint_C (2y^2 - x^2)dx + (3x^2 - y^2)dy$, donde C es él circulo de ecuación $y^2 + (x - a)^2 = a^2$.

25) Calcular la integral de línea aplicando la formula de Green.

a) $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, donde C es el contorno formado por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje X. **Rpta.** $2r^2$

b) $\oint_C (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, donde C es el contorno formado por la sinusoide y = sen x y el segmento del eje X para $0 \le x \le \pi$. **Rpta.** -4π

c) $\oint_C (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, donde C es el triángulo con vértice O(0,0), A(1,0) y B(0,1). **Rpta.** $-\frac{1}{3}$

26) Utilice el teorema de Green para evaluar $\int_C (1 + \operatorname{tg} y)dx + (x^2 + e^y)dy$, en donde C es la frontera orientada positivamente de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, x = 1, y = 0.

27) Calcular $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ en donde $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ y C consta de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ de (2,0) a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y los segmentos rectilíneos de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a (0,0) y de (0,0) a (2,0). **Rpta.** $\pi + \frac{16}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)$

28) Verificar el Teorema de Green en el plano para $\oint_C (x^2 - xy^3)dx + (y^4 - 2xy)dy$ donde C es un cuadrado cuyos vértices son (0,0), (2,0), (2,2), (0,2). **Rpta.** 8

29) Comprobar el Teorema de Green en el plano para $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, donde C es el contorno de un triángulo cuyos vértices están en los puntos A(1,1), B(2,2), C(1,3) y que se recorre en sentido positivo. **Rpta.** $-\frac{4}{3}$

30) Hallar el valor de la integral curvilínea de la función $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2+y)$ según la curva $C:\ \vec{\alpha}(t)=(\ln(t+2),\text{sen}\frac{\pi}{2}t,t^2+\frac{2}{3})$ desde el punto A del plano x = 0 al punto B del plano $z=\frac{2}{3}$ A, B pertenecen a C. **Rpta.** $\frac{\ln^3 2}{3}-\frac{10}{9}+\frac{8}{\pi^2}$

31) Calcular el área limitada por las parábolas $y^2=x$, $x^2=y$.

Rpta. $\frac{1}{3}u^2$

32) Calcular el área limitada por la elipse x = a cos t, y = b sen t.

Rpta. π ab

33) Calcular el área del cuadrilátero que tiene por vértice (0,1, (4,5), (1,6), (-1,1).

Rpta. $\frac{45}{3}u^2$

34) Calcular el área de la figura limitada por el contorno OABCO si A(1,3), B(0,4), C(-1,2), O(0,0), $\overline{OA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CO}$ son los segmentos de las rectas y AB es el arco de la parábola $y=4-x^2$. **Rpta.** $\frac{25}{6}u^2$

35) Calcular el área limitada por la cardioide x=2r cos t - r cos 2t. y =2r sen t - r sen 2t.

Rpta. $6\pi r^2$

36) Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^3+y^3=axy$.

Rpta. $\frac{a^2}{6}u^2$

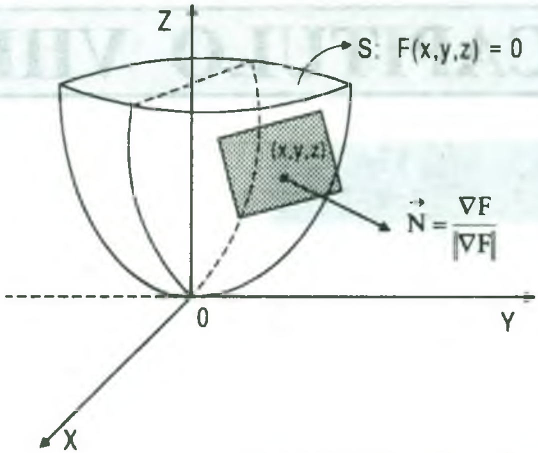
CAPITULO VIII

8. INTEGRAL DE SUPERFICIE.

8.1 Representación Implícita y Explícita de Superficies.

Se conoce que una superficie S se puede representar en la forma S: F(x,y,z) = 0, por ejemplo: $2x^2+3y^2-z=0$, donde x, y, z son coordenadas cartesianas de R^3, además $2x^2+3y^2-z=0$ es una superficie de nivel cero de la función escalar $F(x,y,z)=2x^2+3y^2-z$.

También conocemos que el gradiente ∇ F(x,y,z) es un vector normal a la superficie S en (x,y,z) ∈ S siempre que ∇ F(x,y,z) ≠ 0; y para que la superficie S tenga una única normal en cada punto, la función F debe de ser de clase C^1 (es decir sus primeras derivadas parciales deben ser continuas) y por lo menos una de estas tres derivadas parciales debe de ser diferente de cero. Luego un vector normal unitario a S es $\vec{N}=\dfrac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ así como también $-\vec{N}=-\dfrac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$, bajo estas condiciones dadas a F también asegura la existencia de un plano tangente a la superficie S en el punto (x, y, z) ∈ S



A la expresión S: F(x,y,z) = 0 se denomina una representación implícita de la superficie S.

También es posible hallar una representación explícita de la superficie S de la forma:

$$\boxed{S:\ z = g(x,y)}$$

a la cual siempre es posible asociarle una representación implícita.

$$\boxed{S:\ F(x,y,z) = 0}$$

definiendo la función F como F(x,y,z) = g(x,y) - z

8.2 Representación Paramétrica de una Superficie.

Sabemos que una curva en el plano puede ser representada por una ecuación de la forma:

$$C:\ f(x,y) = 0,$$

por ejemplo, la circunferencia unitaria

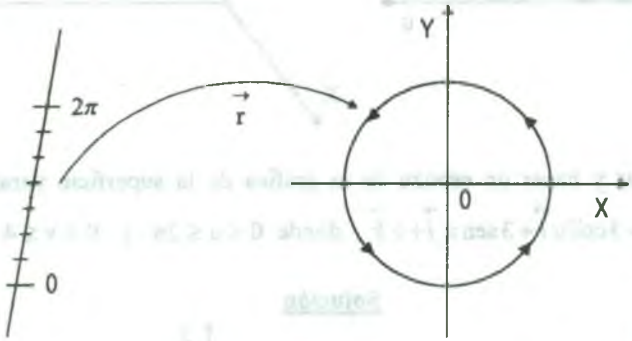
$$C:\ x^2 + y^2 = 1,$$

que resulta ser una curva de nivel cero de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

También sabemos que es posible expresar la curva C mediante una representación paramétrica como:

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi];$$

esta representación paramétrica determina una función vectorial continua $\vec{r}(t)$ de variable t definida por $\vec{r} : [0,2\pi] \longrightarrow R^2$, tal que: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$



En forma similar se puede representar paramétricamente curvas en R^3,

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, por ejemplo; la hélice circular $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

En forma similar es para el caso de las superficies que pueden representarse paramétricamente, pero en este caso debe estar en términos de dos parámetros.

8.3 Definición de Superficie Paramétrica.

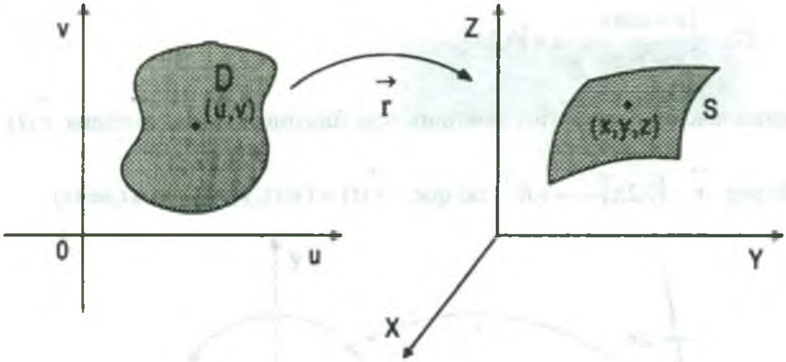
Sean x, y, z funciones de u y v continuas en su dominio D del plano u v.

La superficie S es el conjunto de puntos (x, y, z) dado por:

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$, que se llama una superficie paramétrica.

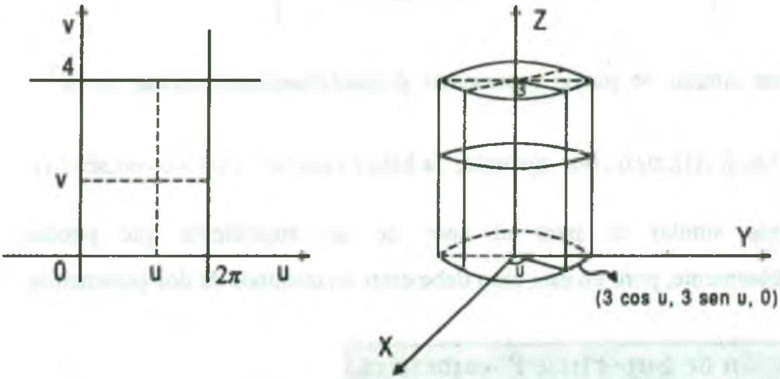
Las ecuaciones x = x (u,v) , y = y (u,v) , z = z (u,v) son las ecuaciones paramétricas de la superficie S.

Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial $\vec{r}$ entonces S es recorrida por el vector de posición $\vec{r}(u,v)$ cuando el punto (u,v) se mueve en el dominio D.



Ejemplo.- Identificar y hacer un esbozo de la gráfica de la superficie paramétrica S dado por $\vec{r}(u,v) = 3\cos u\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$, donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 4$

Solución



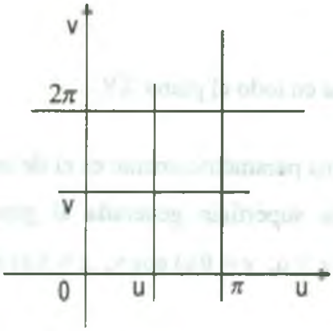
Como x = 3 cos u , y = 3 sen u, para cada punto (x,y,z) de la superficie; x e y están relacionados por al ecuación $x^2 + y^2 = 9$, es decir que cada sección de S paralela al plano XY es un circulo de radio 3 centrados en el eje Z, al ser z = v, con $0 \le v \le 4$ la superficie es un cilindro circular recto de altura 4.

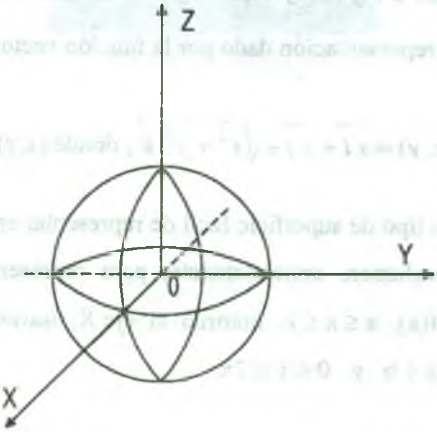
Nota.- En forma similar a lo que ocurría en las representaciones paramétricas de las curvas, en las superficies hay muchos conjuntos de ecuaciones paramétricas que representan a una superficie.

Ejemplo.- Identificar y dibujar la superficie paramétrica S dada por:

$$\vec{r}(u,v) = \operatorname{sen} u.\cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v\,\vec{j} + \cos u\,\vec{k} \quad \text{donde} \quad 0 \le u \le \pi \quad y \quad 0 \le v \le 2\pi$$

Solución





Para identificar la superficie, utilizaremos identidades trigonométricas con el fin de eliminar el parámetro $x^2 + y^2 + z^2 = \operatorname{sen}^2 u.\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u.\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u$

$$= \operatorname{sen}^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$$

por lo tanto cada punto de S está en la esfera unitaria centrada en el origen

8.4 Hallar Ecuaciones Paramétricas para las Superficies.

En los ejemplos anteriores se pedía identificar la superficie dada por unas ecuaciones paramétricas. Ahora el problema es inverso, es decir dada la ecuación de una superficie se tiene que encontrar las ecuaciones paramétricas, un caso sencillo es cuando una superficie es dada en forma explícita z = f(x,y) su representación paramétrica es:

$$\vec{r}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x,y)\,\vec{k}$$

Ejemplo.- Escriba las ecuaciones paramétricas para el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Solución

Como $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ entonces x e y son los parámetros por lo tanto el cono tiene una representación dado por la función vectorial.

$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$, donde (x,y) varía en todo el plano XY.

Otro tipo de superficie fácil de representar en forma paramétricamente es el de las superficies de volumen, concretamente, para representar la superficie generada al girar la gráfica $y = f(x)$, $a \le x \le b$ entorno al eje X, usaremos: $x = u$, $y = f(u)\cos v$, $z = f(u)\operatorname{sen} v$, donde $a \le u \le b$ y $0 \le v \le 2\pi$

Ejemplo.- Escribir las ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida al hacer girar $f(x)=\frac{1}{x}$, $1 \le x \le 10$ entorno al eje X.

Solución

$x = u$, $y=\frac{\cos v}{u}$, $z=\frac{\operatorname{sen} v}{u}$, donde $1 \le u \le 10$, $0 \le v \le 2\pi$

Daremos las representaciones paramétricas de las siguientes superficies:

1) Para la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ sus ecuaciones paramétricas son:

$\vec{r}(u,v)=(R\operatorname{sen} u.\cos v, R\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v, R\cos u)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$

2) Del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$S:\begin{cases} x=a\operatorname{sen} v.\cos u \\ y=a\operatorname{sen} v.\operatorname{sen} u \\ z=c\cos u \end{cases},\quad \begin{matrix} 0\le u\le 2\pi \\ 0\le v\le \pi \end{matrix}$$

3) Del hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$S:\begin{cases} x = a\cosh v.\cos u \\ y = b\cosh v.\operatorname{sen} u \\ z = c\operatorname{senh} u \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ v \in R \end{matrix}$$

4) Del hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$S:\begin{cases} x = a\operatorname{senh} v.\cos u \\ y = b\operatorname{senh} v.\operatorname{sen} u \\ z = c\cosh v \end{cases}, \quad \begin{matrix} 1 \le u \le 2\pi \\ v \in \langle -\infty, \infty \rangle \end{matrix}$$

5) Del paraboloide elíptico $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = av.\cos u \\ y = bv.\operatorname{sen} u \\ z = v^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} u \in [0,2\pi] \\ v \in [0,\infty \rangle \end{matrix}$$

6) Del paraboloide hiperbólico $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$S:\begin{cases} x = av.\cos u \\ y = bv.\operatorname{sen} u \\ z = v^2\cos 2u \end{cases}, \quad \begin{matrix} u \in [0,2\pi] \\ v \in [0,\infty \rangle \end{matrix}$$

7) Del cilindro elíptico recto $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$S:\begin{cases} x = a.\cos u \\ y = b.\operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}, \quad \begin{matrix} u \in [0,2\pi] \\ v \in \langle -\infty, \infty \rangle \end{matrix}$$

8.5 Vectores Normales y Planos Tangentes.

Sea S una superficie paramétrica dado por: $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$ sobre una región abierta D en la que x, y, z tienen derivadas parciales continuas, las derivadas parciales de $\vec{r}$ con respecto a u y v se define así:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\vec{k} \quad ; \quad \vec{r}_v = \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\vec{k}$$

cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial interpretada geométricamente en términos de vectores tangentes, es decir:

si $v = v_0$ se mantiene constante, entonces $\vec{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un único parámetro y define una curva C_1 en la superficie S.

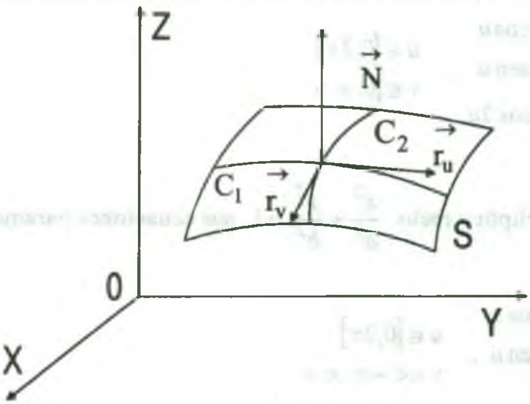
El vector tangente a C_1 en el punto $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ viene dada por:

$$\boxed{\vec{r}_u(u_0,v_0) = \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u}\vec{k}}$$

en forma análoga si $u = u_0$ se mantiene constante $\vec{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un único parámetro que describe una curva C_2 en la superficie S.

El vector tangente a S en el punto $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ viene dado por:

$$\boxed{\vec{r}_v(u_0,v_0) = \frac{\partial x(u_0,y_0)}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v}\vec{k}}$$



Si el vector normal $\vec{r}_u x \vec{r}_v$ no es $\vec{0}$ para algún (u,v) ∈ D, la superficie S, se dice que es suave y tendrá plano tangente.

Nota.- Una superficie es suave si no tiene puntos angulosos ó de tipo cúspide, por ejemplo: la esfera, el elipsoide y los paraboloides son suaves, mientras que el cono no lo es.

8.6 Vector Normal a una Superficie Paramétrica Suave.

Sea S una superficie paramétrica suave $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$, definida sobre una región abierta D del plano UV. Sea (u_0, v_0) un punto de D, un vector normal en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ viene dado por:

$$\vec{N} = \vec{r}_u(u_0, v_0) x \vec{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo.- Hallar una ecuación del plano tangente a la superficie $\vec{r}(u,v) = 2u\cos v\,\vec{i} + 3u\,\text{sen}\,v\,\vec{j} + u^2\,\vec{k}$ en el punto (0,6,4).

<u>**Solución**</u>

El punto del plano UV que se aplica en el punto (x, y, z) = (0,6,4) es $(u,v) = (2, \frac{\pi}{2})$; la derivada parcial de $\vec{r}$ es :

$$\begin{cases} \vec{r}_u = 2\cos v\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,v\,\vec{j} + 2u\,\vec{k} \\ \vec{r}_v = -2u\,\text{sen}\,v\,\vec{i} + 3u\cos v\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_u(2, \frac{\pi}{2}) = (0,3,4) \\ \vec{r}_v(2, \frac{\pi}{2}) = (-4,0,0) \end{cases}$$

el vector normal es: $\vec{N} = \vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-16,12) = -4(0,4,-3)$

P: $\vec{N}.(x-0, y-6, z-4) = 0$ de donde **P:** (0,4,-3).(x, y - 6, z - 4) = 0

∴ **P:** 4y -3z = 12

8.7 Área de una Superficie Paramétrica.

Sea S una superficie paramétrica suave $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ definida sobre una región abierta D del plano UV, si cada punto de S corresponde exactamente a un punto del dominio D, el área de la superficie S se define como:

$$\boxed{\text{Área de la superficie} = \iint_S dS = \iint_D \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| \, dA,} \quad \text{donde: } \begin{cases} \vec{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \\ \vec{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\vec{k} \end{cases}$$

para el caso de una superficie dada por la ecuación z = f(x,y), cuya parametrización es la función vectorial $\vec{r}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+f(x,y)\,\vec{k}$ definida sobre la región R del plano XY de donde $\vec{r}_x(x,y)=\vec{i}+f_x(x,y)\vec{k}$, $\vec{r}_y(x,y)=\vec{j}+f_y(x,y)\vec{k}$

$$\text{Se observa que: } \vec{r}_x x \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{vmatrix} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$

$\| \vec{r}_x x \vec{r}_y \| = \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}$, de donde el área de la superficie S es:

$$A(S)=\iint_R \| \vec{r}_x x \vec{r}_y \| \, dA = \iint_R \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}\, dA$$

Ejemplo.- Hallar el área de la esfera unitaria dada por la ecuación siguiente:

$\vec{r}(u,v)=\operatorname{sen}u.\cos v\,\vec{i}+\operatorname{sen}u.\operatorname{sen}v\,\vec{j}+\cos u\,\vec{k}$, donde el dominio D esta dada por $0\le u\le \pi$, $0\le v\le 2\pi$.

Solución

Calculando las derivadas parciales de $\vec{r}(u,v)$:

$$\vec{r}_u(u,v) = \cos u.\cos v\,\vec{i} + \cos u.\operatorname{sen} v\,\vec{j} - \operatorname{sen} u\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_v(u,v) = -\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v\,\vec{i} + \operatorname{sen} u.\cos v\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

el producto vectorial de estos dos vectores es:

$$\vec{r}_u x\vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u\cos v & \cos u\operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u.\cos v & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 u.\cos v\,\vec{i} + \operatorname{sen}^2 u.\operatorname{sen} v\,\vec{j} + \operatorname{sen} u.\cos u\,\vec{k}$$

$$\| \vec{r}_u x\vec{r}_v \| = \sqrt{\operatorname{sen}^4 u.\cos^2 v + \operatorname{sen}^4 u.\operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u.\cos^2 u}$$

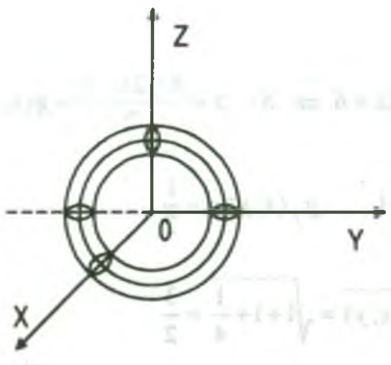
$$= \sqrt{\operatorname{sen}^4 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u.\cos^2 u} = \sqrt{\operatorname{sen}^4 u + \operatorname{sen}^2 u.\cos^2 u}$$

$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2 u(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)} = \operatorname{sen} u \quad , \ \operatorname{sen} u > 0 \ \text{para} \ 0 \le u \le \pi$$

$$A = \iint_D \| \vec{r}_u x\vec{r}_v \| \, dA = \iint_D \operatorname{sen} u\, du\, dv = \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u du) dv = 4\pi u^2$$

Ejemplo.- Hallar el área de la superficie del toro dado por la ecuación:

$\vec{r}(u,v) = (2+\cos u)\cos v\,\vec{i} + (2+\cos u)\operatorname{sen} v\,\vec{j} + \operatorname{sen} u\,\vec{k}$, donde el dominio D viene determinado por $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$.



Solución

Calculando sus derivadas parciales de $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$.

$$\vec{r}_u = -\operatorname{sen} u.\cos v\,\vec{i} - \operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v\,\vec{j} + \cos u\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_v = -(2+\cos u)\operatorname{sen} v\,\vec{i} + (2+\cos u)\cos v\,\vec{j} + 0\vec{k}$$

el producto vectorial de estos vectores es:

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen} u.\cos v & -\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v & \cos u \\ -(2+\cos u) & (2+\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| = (2+\cos u)\sqrt{\cos^2 v.\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 v.\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u} = 2+\cos u$$

$$A = \iint_D \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| \, dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (2+\cos u) du \right) dv = \int_0^{2\pi} (2u + \operatorname{sen} u) \Big/_0^{2\pi} dv = \int_0^{2\pi} 4\pi dv = 8\pi^2$$

8.8 Integrales de Superficies.

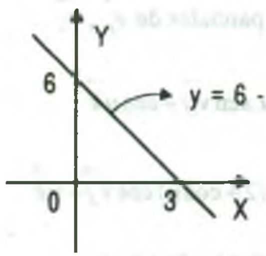
Definición.- Sea S una superficie de ecuación z = g(x, y) y R es la proyección sobre el plano XY, cuya parametrización de la superficie S es:

$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ y sea f una función continua en S entonces la integral de superficie de f sobre S es:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| \, dudv = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2(x,y)+g_y^2(x,y)}\,dxdy}$$

Ejemplo.- Evaluar la integral de superficie $\iint_S (y^2 + 2yz)dS$ siendo S la parte del plano 2x + y + 2z = 6 en el primer octante.

Solución



Como S: 2x + y + 2z = 6 $\Rightarrow$ $S:\ z = \dfrac{6-2x-y}{2} = g(x,y)$

donde $g_x(x,y) = -1$, $g_y(x,y) = -\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{1+g_x^2(x,y)+g_y^2(x,y)} = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\iint_S (y^2+2yz)dS = \iint_R \left[y^2 + 2y(\frac{6-2x-y}{2}) \right] \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} dx\, dy$$

$$= \frac{3}{2}\iint_R (6y-2xy)dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^3 (\int_0^{6-2x} 6y-2xy)dy)dx = \frac{3}{2}\int_0^3 (3y^2-xy^2)/_0^{6-3x}\, dx$$

$$= 6\int_0^3 (3-x)^3 dx = -\frac{6}{4}(3-x)^4 /_0^3 = \frac{243}{2}$$

Ejemplo.- Calcular $\iint_S dS$ sobre la parte $z>0$, de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Solución

La ecuación paramétrica de la esfera es: $\vec{r}(u,v) = a \operatorname{sen} u.\cos v\, \vec{i} + a \operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v\, \vec{j} + a\cos u\, \vec{k}$

como z > 0, entonces $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 2\pi$ el elemento diferencial dS del área de la superficie es $dS = \vec{r}_u x \vec{r}_v\, du dv$ de donde: $\vec{r}_u = a\cos u \cos v\, \vec{i} + a\cos u \operatorname{sen} v\, \vec{j} - a\operatorname{sen} u\, \vec{k}$

$\vec{r}_v = -a\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \vec{i} + a\operatorname{sen} u\cos v\, \vec{j} + 0\vec{k}$

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos u.\cos v & a\cos u.\operatorname{sen} v & -a\operatorname{sen} u \\ -a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v & a\operatorname{sen} u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_u x\vec{r}_v = a^2\operatorname{sen}^2 u\cos v\, \vec{i} - a^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen} v\, \vec{j} + (a^2\operatorname{sen} u\cos u\cos^2 v + a^2\operatorname{sen} u\cos u\operatorname{sen}^2 v)\vec{k}$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2 u(\cos v\, \vec{i} - \operatorname{sen} v\, \vec{j}) + a^2\operatorname{sen} u\cos u\, \vec{k}$$

$$\| \vec{r}_u x\vec{r}_v \| = \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4 u\cos^2 v + a^4\operatorname{sen}^4 u\operatorname{sen}^2 v + a^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4 u(\cos^2 v+\operatorname{sen}^2 v) + a^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4 u + a^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u} = \sqrt{a^4\operatorname{sen}^2 u(\operatorname{sen}^2 u+\cos^2 u)} = a^2\operatorname{sen} u$$

entonces $ds = \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| du dv = a^2 \operatorname{sen} u\, du dv$

$$\iint_S ds = \iint_R \| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \| du dv = \iint_R a^2 \operatorname{sen} u\, du dv$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \operatorname{sen} u\, du \right) dv = -a^2 \int_0^{\pi} \cos u \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} dv = -a^2 \int_0^{\pi} (0-1) dv = a^2 \pi$$

Si la función f definida sobre la superficie S es simplemente f(x, y, z) = 1, entonces la integral de superficie proporciona el área de las superficie S.

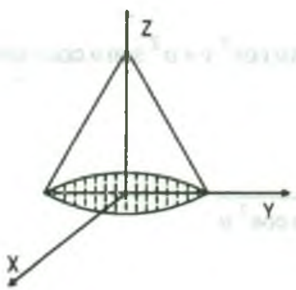
$$\boxed{\text{Área de la superficie} = \iint_S ds}$$

por otra parte, si S es una lámina de densidad variable y ρ(x, y, z) es la densidad en el punto (x, y, z) entonces la masa de la lámina viene dada por

$$\boxed{\text{Masa de la lámina} = \iint_S \rho(x,y,z) ds}$$

Ejemplo.- Una lámina superficial S viene dada por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$. En cada punto de S la densidad es proporcional a la distancia del punto al eje Z, calcular la masa de la lámina.

Solución



Proyectando la superficie S sobre el plano XY se obtiene R: $x^2 + y^2 \le 4$ y $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$ usando la integral de superficie se tiene

$$m = \iint_S \rho(x,y,z) ds = \iint_R k\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1 + g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)}\, dA$$

donde $g(x,y) = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow g_x(x,y) = -\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow g_y(x,y) = -\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)ds = k\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$= k\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{5x^2+5y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = k\iint_R \sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= k\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r.r\,dr\right)d\theta = k\sqrt{5}\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}d\theta = \frac{16\sqrt{5}k}{3}\pi$$

8.9 Orientación de una Superficie.

Al usar integrales curvilíneas para calcular el trabajo, desarrollaremos la forma vectorial de una integral de línea $\int_C \vec{F}.\vec{T}.ds$, donde el vector tangente unitario $\vec{T}$ indica la orientación positiva a lo largo de C, en forma similar usaremos vectores normales unitarios para indicar una orientación sobre un superficie S en el espacio.

a) **Definición.-** Una superficie es "orientable" si se puede definir en todo punto de S que no esté en la frontera un vector normal unitario $\vec{N}$ de modo tal que los vectores varíen de forma continua sobre la superficie S.

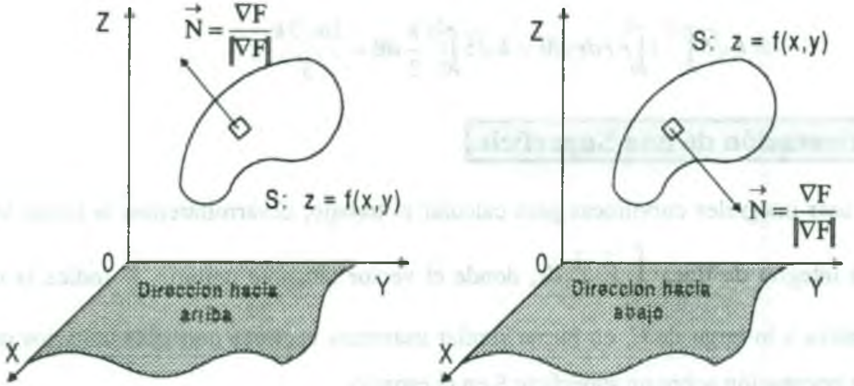
Una superficie orientable S tiene dos caras distintas, orientar a la superficie consiste en escoger uno de los dos posibles vectores normales unitarios.

Si S es una superficie cerrada, tal como una esfera, se suele escoger como vector normal unitario $\vec{N}$ el que apunta hacia fuera.

Las superficies más comunes, esfera, elipsoide, paraboloide y planos son orientables, además en una superficie orientable el vector gradiente proporciona un método conveniente para hallar un vector unitario para una superficie orientable S dada por z = f(x,y), sea F(x,y,z) = z - f(x,y), entonces S admite las dos orientaciones asociadas a los dos vectores normales unitarios.

$$\vec{N}=\frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}=\frac{-f_x(x,y)\,\vec{i}-f_y(x,y)\,\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$, normal unitario hacia arriba.

$$\vec{N}=-\frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}=\frac{f_x(x,y)\,\vec{i}+f_y(x,y)\,\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$, normal unitario hacia abajo.



En forma similar, podemos usar los vectores gradientes

$\nabla F(x, y, z)$, $F(x, y, z) = y - f(x,z)$; $\nabla F(x, y, z)$, $F(x, y, z) = x - f(yz)$

para orientar superficies dadas por $y = f(x,z)$ ó $x = f(y,z)$

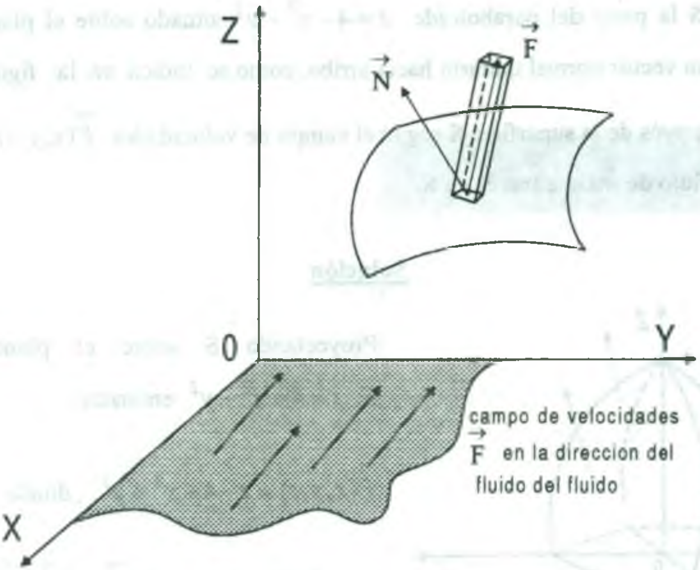
8.10 Integrales de Flujo.

Una de las aplicaciones principales que permite la forma vectorial de las integrales de superficies, tiene que ver con el flujo de un fluido a través de una superficie S. Supongamos una superficie S inmersa en un fluido que tiene un campo de velocidades continuas $\vec{F}$.

Sea ΔS el área de un trozo pequeño de la superficie S sobre el cual $\vec{F}$ es aproximadamente constante.

Entonces, la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo viene aproximada por el volumen de la columna de altura $\vec{F}.\vec{N}$, esto es

ΔV = (altura)(área de la base) = $(\vec{F}.\vec{N})\Delta S$



por lo tanto el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (conocido como flujo de $\vec{F}$ a través de S) viene dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

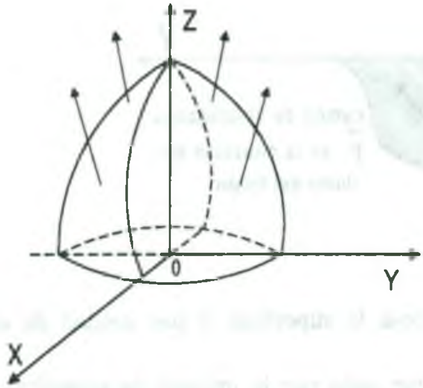
8.11 Definición de Integral de Flujo.

Sea $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$, donde P, Q, R tienen derivadas parciales primeras continuas en la superficie S orientada mediante un vector normal unitario $\vec{N}$. La integral de flujo de $\vec{F}$ a través de S viene dado por: $\iint\limits_S \vec{F}.\vec{N}\,ds$

Geométricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la componente normal de $\vec{F}$. Si ρ(x, y, z) es la densidad del fluido en (x, y, z) entonces la integral de flujo $\iint\limits_S \rho\,\vec{F}.\vec{N}\,ds$ representa la masa de fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Ejemplo.- Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situado sobre el plano XY, orientado por un vector normal unitario hacia arriba, como se indica en la figura, un fluido de densidad ρ fluye a través de la superficie S según el campo de velocidades $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Hallar la razón de flujo de masa a través de S.

Solución



Proyectando S sobre el plano XY tenemos

S: $z = 4 - x^2 - y^2$ entonces

$F(x,y,z) = z - 4 + x^2 + y^2$, donde R: $x^2 + y^2 \le 4$

$$\vec{N} = \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|} = \frac{2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

como S: $z = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

de donde $g_x(x,y) = -2x$, $g_y(x,y) = -2y$

$$ds = \sqrt{1 + g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)}\,dA = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA$$

$$\iint_S \rho\,\vec{F}.\vec{N}\,ds = \rho \iint_R \frac{2x^2 + 2y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dA$$

$$= \rho \iint_R (2x^2 + 2y^2 + z)dA = \rho \iint_R (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \rho \iint_R (4 + x^2 + y^2)dA = \rho \int_0^{2\pi} (\int_0^2 (4 + r^2)r\,dr)d\theta = \rho \int_0^{2\pi} (2r^2 + \frac{r^4}{4}) \Big/_0^2 d\theta = 12\pi\ \rho$$

Nota.- A las integrales de flujo podemos escribir en forma simplificada.

8.12 Definición. Cálculo de Integrales de Flujo.

Sea S una superficie orientada dado por z = g(x,y) y sea R su proyección sobre el plano XY.

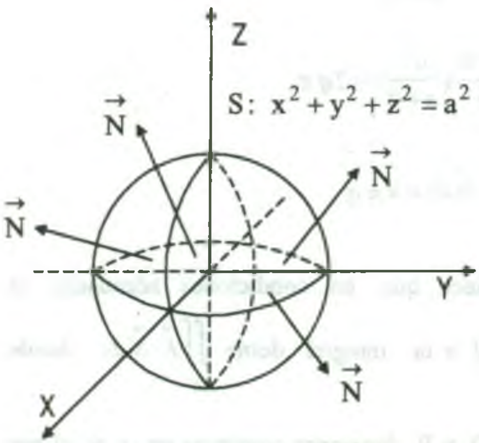
i) $\iint\limits_{S} \rho \vec{F}.\vec{N}\, ds = \iint\limits_{S} \vec{F}.(-g_x(x,y)\,\vec{i} - g_y(x,y)\,\vec{j} + \vec{k})dA$ (orientada hacia arriba)

ii) $\iint\limits_{S} \vec{F}.\vec{N}\, ds = \iint\limits_{S} \vec{F}.(g_x(x,y)\,\vec{i} + g_y(x,y)\,\vec{j} - \vec{k})dA$ (orientada hacia abajo)

Ejemplo.- Hallar el flujo a través de la esfera S dada por: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde $\vec{F}$ es el campo cuadrático inverso $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{q}{\|\vec{r}\|^2} . \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \dfrac{q\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$.

Supongamos S orientada hacia afuera, como en la figura.

Solución



Sólo es necesario calcular el flujo por el hemisferio superior $z = g(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ puesto que la esfera y el campo son simétricas respecto al origen.

La proyección de este hemisferio sobre el plano XY es la región circular R dado por: $x^2 + y^2 \le a^2$, además como las derivadas parciales

$$g_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, g_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

no son continuas en la frontera de R.

Consideremos una región circular más pequeña R_b dada por: $x^2 + y^2 \le b^2$ donde 0 < b <a,

Luego: $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{q(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\dfrac{q(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})}{a^3}$, entonces el flujo del hemisferio superior es flujo $=\lim\limits_{b\to\bar{a}}\iint\limits_{R_b}\dfrac{q(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})}{a^3}\left(\dfrac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\vec{k}\right)dA$

$$=\lim_{b\to\bar{a}}\iint_{R_b}\left(\frac{q(x^2+y^2)}{a^3\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{q\,z}{a^3}\right)dA$$

$$=\lim_{b\to\bar{a}}\iint_{R_b}\left(\frac{q(x^2+y^2)}{a^3\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{q\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a^3}\right)dA$$

$$=\lim_{b\to\bar{a}}q\iint_{R_b}\frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^3\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dA=\lim_{b\to\bar{a}}\frac{q}{a}\iint_{R_b}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=\lim_{b\to\bar{a}}\frac{q}{a}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^b\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\right)d\theta=\lim_{b\to\bar{a}}\frac{q}{a}\int_0^{2\pi}-\sqrt{a^2-r^2}\Big/_0^b d\theta$$

$$=\lim_{b\to\bar{a}}\frac{q}{a}\int_0^{2\pi}(-\sqrt{a^2-r^2}+a)d\theta=\lim_{b\to\bar{a}}\frac{q}{a}(a-\sqrt{a^2-b^2})2\pi$$

$$=\frac{2q\pi}{a}\lim_{b\to\bar{a}}\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2q\pi}{a}\left(\frac{a^2}{a+0}\right)=2q\pi$$

por lo tanto el flujo sobre toda la esfera es $\iint\limits_S\vec{F}.\vec{N}\,ds=4\pi q$

Observación.- El teorema de la divergencia establece que, en condiciones adecuadas, la integral triple $\iiint\limits_D div\,\vec{F}.dv$ es igual a la integral doble $\iint\limits_S\vec{F}.\vec{N}\,ds$, donde $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ con P,Q, y R funciones continuas en (x, y, z) que tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y},\dfrac{\partial R}{\partial z}$ de primer orden continuas.

8.13 Teorema de la Divergencia.

Sea D una región sólida limitada por una superficie cerrada S orientada por un vector normal unitario dirigido al exterior de D.

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en D, entonces:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,ds = \iiint_D div\,\vec{F}.dv$$

Demostración

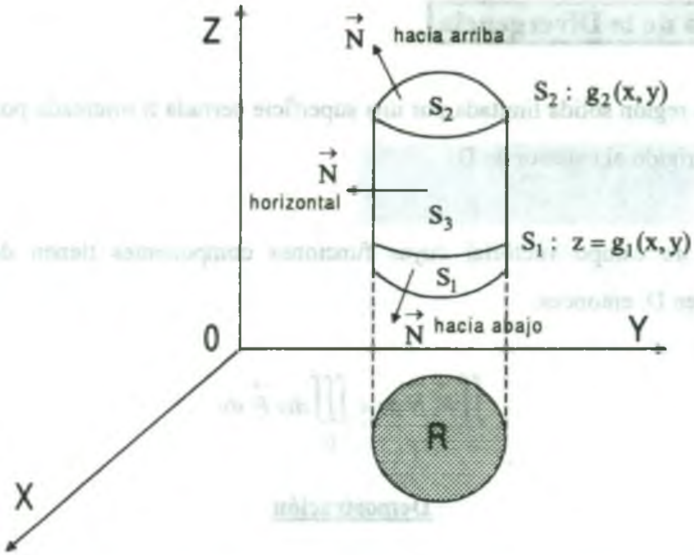
Si hacemos $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ el teorema de la divergencia adquiere la forma: $\iint_S (p\,\vec{i}.\vec{N} + Q\,\vec{j}.\vec{N} + R\,\vec{k}.\vec{N})ds = \iiint_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dVS$ podemos demostrar este resultado verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas.

$$\iint_S P\,\vec{i}\,\vec{N}\,ds = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}dV$$

$$\iint_S Q\,\vec{j}\,\vec{N}\,ds = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}dV$$

$$\iint_S R\,\vec{k}\,\vec{N}\,ds = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}dV$$

Como la comprobación de las tres ecuaciones son similares, trataremos solamente de la tercera, por la tanto restringiremos la demostración a una región sólida simple con superficie superior $z = g_2(x,y)$ y superficie inferior $z = g_1(x,y)$, cuyas proyecciones en el plano XY coinciden y forman la región R.



Si D tiene una superficie lateral semejante a S_3 en la figura, entonces un vector normal es horizontal, por tanto $R\,\vec{k}\,\vec{N} = 0$. En consecuencia tenemos:

$$\iint_S R\,\vec{k}\,\vec{N}\,ds = \iint_{S_1} R\,\vec{k}\,\vec{N}\,ds + \iint_{S_2} R\,\vec{k}\,\vec{N}\,ds + 0$$

En la superficie superior S_2 la normal hacia el exterior se dirige hacia arriba, mientras que la superficie inferior S_1 la normal hacia el exterior esta orientada hacia abajo, por la parte (9.9) tenemos: $\iint_{S_1} R\,\vec{k}\,\vec{N}\,ds = \iint_R R(x,y,z)\,\vec{k}.(\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{j} - \vec{k})dA$

$$= -\iint_R R(x,y,z)dA = -\iint_R R(x,y,g_1(x,y))dA$$

$$\iint_{S_2} R\,\vec{k}.\vec{N}\,ds = \iint_R R(x,y,z)\,\vec{k}(-\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\vec{j} + \vec{k})dA$$

$$= \iint_R R(x,y,z)dA = \iint_R R(x,y,g_2(x,y))dA$$

sumando estos dos resultados se tiene:

$$\iint_S R\vec{k}\,\vec{N}\,ds=\iint_R R(x,y,g_2(x,y))\,dA-\iint_R R(x,y,g_1(x,y))\,dA$$

$$=\iint_R\left[R(x,y,g_2(x,y))-R(x,y,g_1(x,y))\right]dA=\iint_R\left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dZ\right]dA=\iiint_D\frac{\partial R}{\partial z}.dV$$

$$\iint_S R\vec{k}.\vec{N}\,ds=\iiint_D\frac{\partial R}{\partial z}dV \qquad \dots(\alpha)$$

análogamente para las integrales

$$\iint_S p\,\vec{i}.\vec{N}\,ds=\iiint_D\frac{\partial p}{\partial x}dV \qquad \dots(\beta)$$

$$\iint_S Q\,\vec{j}\,\vec{N}\,ds=\iiint_D\frac{\partial Q}{\partial y}dV \qquad \dots(\gamma)$$

al sumar (α), (β), (γ) se tiene:

$$\iint_S P\vec{i}.\vec{N}\,ds+\iint_S Q\vec{j}\,\vec{N}\,ds+\iint_S R\vec{k}\,\vec{N}\,ds=\iiint_D\frac{\partial P}{\partial x}dV+\iiint_D\frac{\partial Q}{\partial y}dV+\iiint_D\frac{\partial R}{\partial z}dV$$

$$\iint_S(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}).\vec{N}\,ds=\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$\therefore\quad \iint_S\vec{F}(x,y,z).\vec{N}\,ds=\iiint_D div\,\vec{F}(x,y,z)dV$$

Ejemplo.- Verifique el teorema de la divergencia para la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.

<u>Solución</u>

$$div(\vec{F})=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3$$

$$\iiint_D div(\vec{F}).dv = \iiint_D 3dv = 3(\frac{4}{3}\pi a^3) = 4a^3\pi \qquad \text{... (1)}$$

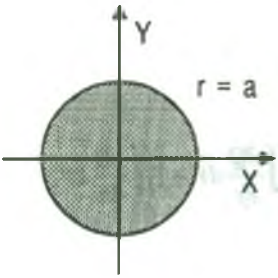
La normal unitaria exterior a S: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a$ es

$$\vec{N} = \frac{\Delta F(x,y,z)}{\|\Delta F(x,y,z)\|} = \frac{2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,ds = \iint_S (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}ds = \frac{1}{a}\iint_S (x^2+y^2+z^2)ds = \iint_S a\,ds = a\iint_S ds$$

Como S: $x^2+y^2+z^2 = a^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dA$

Tomando la parte superior de la esfera.



$$Z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \end{cases}$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA \text{ , de donde}$$

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dA \text{, tomando toda la esfera se tiene}$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}ds = a[2\iint_S \frac{a\,dA}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}] = 2a^2\iint_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad \text{(En coordenadas polares)}$$

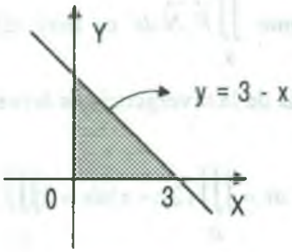
$$= 2a^2\int_0^{2\pi}(\int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}})d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi} -\sqrt{a^2-r^2}\,\Big/_0^a d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi} a\,d\theta = 4\pi a^3 \qquad \text{... (2)}$$

Luego de (1), (2) se tiene: $\therefore \iint_S \vec{F}.\vec{N}.ds = \iiint_D div\,\vec{F}.dv$

Ejemplo.- Sea D la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$ y sea $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, hallar $\iint_S \vec{F}.\vec{N}.dS$, de donde S es la parte superficie de D.

Solución

Por el teorema de divergencia se tiene:



$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,dS = \iiint_D div\,\vec{F}.dv = \iiint_D (1+2y+1)\,dv$$

$$= 2\iiint_D (y+1)dy = 2\int_0^3 (\int_0^{3-x} (\int_0^{6-2x-2y} (y+1)dz)dy)dx$$

$$= 2\int_0^3 (\int_0^{3-x} (y+1)(6-2x-2y)dy)dx = \frac{63}{2}$$

Ejemplo.- Aplicando el teorema de Gauss. Hallar el flujo del campo

$\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ Hacia fuera de la superficie S: $x^2+y^2+z^2=4$

Solución

$$\text{Flujo} = \iint_S \vec{F}.\vec{N}.dS = \iiint_D div\,\vec{F}.dv = \iiint_D (3x^2+3y^2+3z^2)dv = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Aplicando coordenadas esféricas se tiene $x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$ donde $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$, y además $J(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$

$$\text{Flujo} = \iint_S \vec{F}.\vec{N}.dS = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\iiint_D \rho^2 |J(\rho,\theta,\varphi)| d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

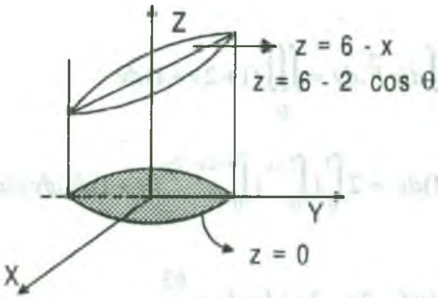
$$= 3\iiint_D \rho^4\,\text{sen}\,\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \quad = 3\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\int_0^2 \rho^4\,\text{sen}\,\varphi\, d\rho)d\varphi)d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\text{sen}\,\varphi \Big/_0^2 d\varphi)d\theta \; = \frac{96}{5}\int_0^{2\pi} -\cos\varphi \Big/_0^{\pi} d\theta = \frac{192}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \; = \frac{384}{5}\pi$$

Ejemplo.- Sea D el sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$, el plano x + z = 6 y el plano XY. Hallar $\iint_S \vec{F}.\vec{N}.dS$, donde S es la superficie de D y

$$\vec{F}(x,y,z)=(x^2+\operatorname{sen} z)\,\vec{i}+(xy+\cos z)\,\vec{j}+e^y\,\vec{k}$$

Solución



Calculando directamente $\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,ds$ es muy difícil, sin embargo por el teorema de la divergencia es favorable.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}.dS=\iiint_D div\,\vec{F}.dv=\iiint_D (2x+x)dv=3\iiint_D xdv$$

Mediante coordenadas cilíndricas se tiene:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,dS=3\iiint_D x\,dx\,dy\,dz=3\int_0^{2\pi}(\int_0^2(\int_0^{6-r\cos\theta} r\cos\theta.rdz)dr)d\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}(\int_0^2\cos\theta.r^2(6-r\cos\theta)dr)d\theta=3\int_0^{2\pi}(16\cos\theta-4\cos^2\theta)d\theta=-12\pi$$

8.14 Teorema.

Si $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z,)\,\vec{i}+Q(x,y,z,)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$, y D la región limitada por una superficie cerrada S, mostrar que el teorema de la divergencia expresado en coordenadas cartesianas es:

$$\boxed{\iiint_D (\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oint\!\!\oint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy}$$

Demostración

Si escribimos $\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$, y $\vec{N}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\delta\,\vec{k}$

en general para cualquier superficie S.

$$\vec{N}.\vec{i}\,ds = \cos\alpha\, ds = dy\,dz,\quad \vec{N}.\vec{j}\,ds = \cos\beta\, ds = dz\,dx,\quad \vec{F}.\vec{k}\,ds = \cos\gamma\, ds = dx\,dy$$

como la divergencia de $\vec{F}$ es $\quad \nabla\ \vec{F} = \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

$$\iiint_D \nabla\vec{F}.dv = \iiint_R \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \quad \text{como} \quad \oiint_S \vec{F}.d\vec{s} = \oiint_S (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}).\vec{N}.ds$$

$$= \oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

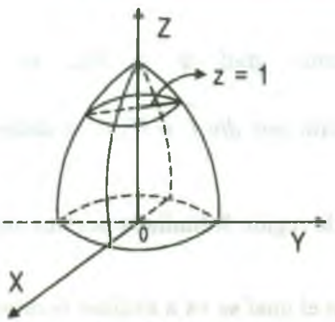
$$\oiint_S \vec{F}.d\vec{s} = \oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

$$\oiint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iiint_V div\vec{F}.dv = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$\boxed{\therefore \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy}$$

Ejemplo.- Usando el teorema de la divergencia calcular $\iint_S xdydz + ydzdx + 2zdxdy$ donde S es una superficie que consiste de la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = 1 - z$, $0 \le z \le 1$ y el disco $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$.

Solución



Graficando la superficie S.

$$\oiint_S xdydz + ydzdx + 2zdxdy = \iiint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)dx\,dy\,dz$$

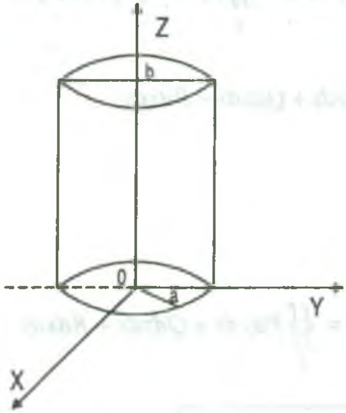
$$= \iiint_R (1+1+2)dx\,dy\,dz = 4\iiint_R dx\,dy\,dz$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} r\,dz\right)dr\right)d\theta = 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r - r^3)dr\right)d\theta = 4\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4} = 2\pi$$

Ejemplo.- Usando el teorema de la divergencia. Calcular: $\iint\limits_S x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy$, donde

S es la superficie cerrada que consiste en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le b$.

Solución



Por el teorema de la divergencia

$$\oiint\limits_S x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy$$

$$= \iiint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}x^2 y + \frac{\partial}{\partial z}x^2 z\right)dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint\limits_D (3x^2 + x^2 + x^2)dxdydz = 5\iiint\limits_D x^2 dxdydz$$

$$= 5\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_0^b r^2\cos^2\theta . r\,dz\right)dr\right)d\theta = 5\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a br^3\cos^2\theta\,dr\right)d\theta = 5b\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\cos^2\theta \Big/_0^a d\theta$$

$$= \frac{5a^4b}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{5a^4b}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{5a^4b}{8}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)\Big/_0^{2\pi} = \frac{5a^4b\pi}{4}$$

8.15 Definiciones Alternas Del Gradiente, Divergencia y Rotacional.

El gradiente de una función escalar ϕ, escrito grad ϕ ó $\nabla\phi$, se define: $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$. La divergencia de $\vec{f}$, escrito por $div\,\vec{f}$ ó $\nabla.\vec{f}$ se define como

$\nabla.\vec{f} = \lim\limits_{\nabla V \to 0}\frac{1}{\Delta y}\oiint\limits_S \vec{f}.d\vec{s}$ donde ΔV es el volumen de la región R limitada por una superficie cerrada S. El volumen ΔV contiene siempre el punto en el cual se va a evaluar la divergencia $\nabla.\vec{f}$ cuando ΔV tiende a cero.

El rotacional de $\vec{f}$, escrito $rot\ \vec{f}$ ó $\nabla x \vec{f}$ se define como:

$$\nabla x\ \vec{f} = \vec{N}_{max} \lim_{\nabla S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{f}\, d\,\vec{r}$$

donde ΔS es la superficie limitada por una curva cerrada simple C y $\vec{N}_{max}$ es el vector normal unitario asociado con ΔS tal que la orientación del plano de ΔS dé un valor máximo.

Observación.- El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green en forma vectorial para superficies y curvas en tres dimensiones, establece que la integral de línea $\oint_C \vec{F}.d\,\vec{r}$ es igual a la integral de la superficie $\iint_S rot(\vec{F})\,d\,\vec{s}$ con restricciones apropiadas al vector $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ a la curva cerrada simple C.

x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) , $0 \le t \le 1$ y a la superficies S: $\phi(x,y,z) = 0$ acotada por C.

8.16 Teorema de Stokes.

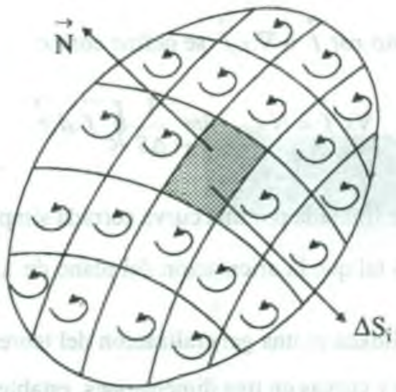
Sea S una superficie orientada con vector normal unitario $\vec{N}$, cuyo contorno es una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta D, que contiene S y C entonces:

$$\boxed{\int_C \vec{F}.d\,\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}).\vec{N}\,d\,\vec{s}}$$

Demostración

Consideremos una superficie S limitada por una curva cerrada simple. Se divide S en N sub-regiones tan pequeñas que pueden considerarse planas con áreas $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, En los puntos (x_i, y_i, z_i) de ΔS_i, de la definición del rotacional de (9.15) de:

$$\vec{N}.\nabla x\,\vec{F}\,\Delta S_i = \oint_{C_i} \vec{F}.d\,\vec{r} + \varepsilon_i \Delta S_i$$



donde $\varepsilon_i \to 0$, cuando $\Delta S_i \to 0$ y $\vec{N}$ es el vector normal unitario asociado con ΔS_i (ver figura). La suma sobre la superficie total S da:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{N}.\nabla x \vec{F}\, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{F}.d\vec{r} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \Delta S_i$$

Ahora consideremos el límite de esta expresión cuando N $\to \infty$. La frontera C_i de cada ΔS_i consiste en pedazos que son ó parte de la frontera C ó parte de las fronteras de las dos sub-regiones adyacentes. Las integrales de línea a lo largo de curvas fronteras adyacentes se cancelan, pues los vectores $d\vec{r}$ tienen direcciones opuestas; así queda sobre la integral de línea a lo largo de C por consiguiente:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{N}.\nabla x \vec{F}\, \Delta S_i = \iint_S \vec{N}.\nabla \vec{F}.ds = \iint_S \nabla x \vec{F}.d\vec{s}$$

$$\lim_{N\to\infty} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{F}(t).d\vec{r} = \oint_C \vec{F}.d\vec{r} \;; \quad \text{así que cuando } N \to \infty$$

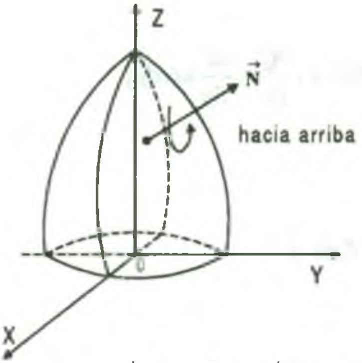
$$\iint_S \nabla x \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_S \vec{F}.d\vec{r} + \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \Delta S_i \;; \quad \text{para el término restante}$$

$$|\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i \Delta S_i| \le \sum_{i=1}^{N}|\varepsilon_i|\Delta S_i \le |\varepsilon_m|\sum_{i=1}^{N}\Delta S_i = \varepsilon_m S\,, \quad \text{donde } \varepsilon_m = max\{\varepsilon_i\} \text{ pero } \varepsilon_m \to 0$$

cuando N $\to \infty$, $\Delta S_i \to 0$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\,\Delta S_i \to 0$

$$\therefore \iint_S \nabla \vec{F}\, d\vec{s} = \oint_C \vec{F}.d\vec{r}\ , \quad d\vec{s} = \vec{N}ds$$

Ejemplo.- Comprobar el teorema de Stokes para $\vec{F}(x,y,z) = 2z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$, donde S es la superficie del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y C es la traza de S en el plano XY.



Solución

$z = g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, como el vector normal $\vec{N}$ es orientado hacia arriba

$$\vec{N} = (-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{N} = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y & 1 \end{vmatrix} = 2y\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\iint_S rot\,\vec{F}.\vec{N}.ds = \iint_S (2y\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k})(2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + \vec{k})dA = \iint_S (4xy + 4y + 1)dxdy$$

$$= \int_{-2}^{2}(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4xy + 4y + 1)dx)dy = \int_{-2}^{2}\left[2x^2y + (4y+1)x\right]\Big/_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_{-2}^{2}(8y\sqrt{4-y^2} + 2\sqrt{4-y^2})dy$$

$$= [-\frac{8}{3}(4-y^2)^{3/2} + y\sqrt{4-y^2} + 4\,\text{arctg}\,\frac{y}{2}]\Big/_{-2}^{2} = 4\,\pi$$

para la integral de línea, parametrizando la línea $C: \vec{\alpha}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{\alpha}(t))\,\vec{\alpha}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (0, 2\cos t, 4\,\text{sen}^2\,t).(-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t, 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0 + 4\cos^2 t + 0)dt = 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt = 2(t + \frac{\text{sen}\,2t}{2}) \Big/_0^{2\pi} = 4\pi$$

8.17 Teorema de Stokes para Coordenadas Cartesianas.

Si $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$, entonces

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy]$$

Demostración

Si $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ entonces $\vec{F}\,d\,\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ y

$$\nabla x \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\,\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\vec{k}$$

por el teorema **(9.16)** se tiene: $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S \nabla x \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \nabla x \vec{F}.\vec{N}.ds$ **... (1)**

$$\oint_C (P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k})(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz \quad \text{... (2)}$$

$$\oint_C \nabla x\vec{F}d\vec{s} = \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\vec{k}](\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})ds$$

$$= \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha ds + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta ds + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma ds]$$

$$= \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy] \quad \text{... (3)}$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy]$$

8.18 Ejercicios Desarrollados.

1) Calcular el área de la superficie sobre la porción del plano

$\vec{r}(u,v) = 2u\,\vec{i} - \frac{v}{2}\vec{j} + \frac{v}{2}\vec{k}$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 1$.

Solución

Área de la superficie $\iint_S ds = \iint_D \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| dA$

$\vec{r}(u,v) = 2\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$, $\vec{r}_v(u,v) = 0\,\vec{i} - \frac{i}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (0,-1,-1) \Rightarrow \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| = \sqrt{2}$$

$$A(s) = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{2}\,dudv = \sqrt{2}\int_0^2 (\int_0^1 dv) = \sqrt{2}\int_0^2 du = 2\sqrt{2}$$

2) Calcular el área de la superficie sobre la porción del paraboloide.

$\vec{r}(u,v) = 4u\cos v\,\vec{i} + \frac{u^2}{2}\vec{j} + 4u\,\text{sen}\,v\,\vec{k}$ donde $o \le u \le 4$ y $0 \le v \le 2\pi$.

Solución

$$A(s)=\iint_S ds=\iint_D \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| \; dudv, \text{ donde}$$

$$\vec{r}_u = 4\cos v\,\vec{i} + u\,\vec{j} + 4\operatorname{sen} v\,\vec{k} \quad , \quad \vec{r}_v = -4u\operatorname{sen} v\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 4u\cos v\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_u x \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\cos v & u & 4\operatorname{sen} v \\ -4u\operatorname{sen} v & 0 & 4u\cos v \end{vmatrix} = (4u^2\cos v, -16u, 4u^2\operatorname{sen} v)$$

$$\| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| = \sqrt{16u^4\cos^2 v + 256u^2 + 16u^4\operatorname{sen}^2 v} = \sqrt{16u^4 + 256u^2} = 4u\sqrt{u^2+16}$$

$$A(s) = \iint_S ds = \iint_D \| \vec{r}_u x \vec{r}_v \| dudv = \iint_D 4u\sqrt{u^2+16}\,dudv = 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4 u\sqrt{u^2+16}du\right)dv$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(u^2+16)^{3/2}\Big/_0^4 dv = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}(32\sqrt{32}-64)dv = \frac{256(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$$

3) Calcular $\iint_S (x^2+y^2-3z^2)ds$, siendo S la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está por encima del plano $z=0$.

Solución

Sobre la superficie S se tiene que:

$$z^2 = 4-x^2-y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

donde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\iint_S (x^2+y^2-3z^2)ds = \iint_R \left[x^2+y^2-3(4-x^2-y^2)\right]\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\text{dxdy}$$

donde R es el círculo $x^2+y^2 \le 4$. Simplificando

$$\iint_S (x^2+y^2-3z^2)ds = \iint_R 8(x^2+y^2-3)\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

pasando a coordenadas polares se tiene: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $J(r,\theta) = r$

$$\iint_S (x^2+y^2-3z^2)ds = 8\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (r^2-3)\frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}\right)d\theta$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 [-r\sqrt{4-r^2}+\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}]dr\right)d\theta \quad = -\frac{32}{3}\pi$$

4) Calcular $\iint_S (x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ donde S es la esfera de centro 0 y radio a.

<u>Solución</u>

Mediante el teorema de Gauss.

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

luego $p(x,y,z) = x^3$, $Q(x,y,z) = y^3$, $R(x,y,z) = z^3$

$$\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

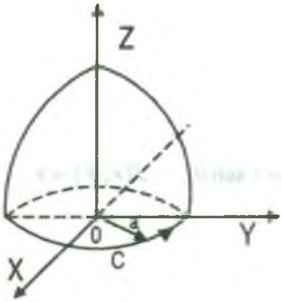
donde V es el volumen encerrado por la esfera S.

En la integral triple pasamos a coordenadas esféricas

$$\iiint_V 3p^4 \operatorname{sen}\varphi dp d\varphi d\theta = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a p^4 \operatorname{sen}\varphi dp\right)d\varphi\right)d\theta = \frac{12}{5}\pi a^5$$

5) Si $\vec{F}(x,y,z)=4y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+2z\,\vec{k}$, calcular $\iint_S \vec{r}\ x\ \vec{F}.d\,\vec{s}$, sobre el hemisferio $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$.

Solución



La forma de la integral es de la integral de superficie, luego por el teorema de stokes se tiene: $\iint_S \nabla x\,\vec{F}\,d\,\vec{s}=\oint_c \vec{F}.d\,\vec{r}=\oint_c 4ydx+xdy+2zdz$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, dirigido como se muestra en la figura.

La representación paramétrica de C es x = a cos t, y = a sen t, z = 0, donde $0\leq t\leq 2\pi$.

$$\iint_S \nabla\ x\ \vec{F}.d\ \vec{s}=\oint_c 4ydx+xdy+2zdz=\int_0^{2\pi}(4a\,\text{sen}\,t.(-a\,\text{sen}\,t)+a\cos t.a\cos t)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-4a^2\,\text{sen}^2\,t+a^2\cos^2 t dt=a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t.4\,\text{sen}^2\,t)dt=a^2\int_0^{2\pi}[\frac{1+\cos^2 t}{2}-2(1-\cos^2 t)]dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(-3+5\cos^2 t)dt=-3a^2\pi$$

6) **Hallar** $\iint_S \vec{F}.\vec{N}.ds$, siendo $\vec{F}(x,y,z)=4xz\,\vec{i}-y^2\,\vec{j}+yz\,\vec{k}$ y S la superficie del cubo limitado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

Solución

Por el teorema de la divergencia se tiene: $\iint_S \vec{F}.\vec{N}.ds=\iiint_V \nabla.\vec{F}.dv$

$$=\iiint_V[\frac{\partial}{\partial x}(4xz)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)]dv$$

$$=\iiint_V(4z-y)dv=\int_0^1(\int_0^1\int_0^1(4z-y)dz)dy)dx)=\int_0^1(\int_0^1(2-y)dy)dx=\frac{3}{2}$$

7) Hallar $\iint_S \vec{r}.\vec{N}.ds$, siendo S una superficie cerrada.

Solución

Por el teorema de la divergencia se tiene:

$$\iint_S \vec{r}.\vec{N}.ds = \iiint_V \nabla.\vec{r}.dv = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})dv$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dv = 3\iiint_V dv = 3v\,,$$ donde V es el volumen limitado por S

8) Demostrar $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dv = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)d\vec{s}$

Solución

Sea $A = \phi\nabla\psi$ en el teorema de la divergencia de Gauss.

$$\iiint_V \nabla(\phi\nabla\psi)dv = \iint_S (\phi\nabla\psi)\vec{N}.ds = \iint_S (\phi\nabla\psi)d\vec{s}$$

ahora bien $\nabla(\phi\nabla\psi) = \phi(\nabla.\nabla\psi)+(\nabla\phi)+(\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)(\nabla\psi)$

con lo que $\iiint_V [\nabla(\phi\nabla\psi)dv = \iiint_V \phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)(\nabla\psi)]dv$

ó bien $\iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\nabla\phi)(\nabla\psi)] = \iint_S (\phi\nabla\psi)d\vec{s}$ ... **(1)**

que demuestra la primera identidad de Gauss, cambiando ϕ por ψ en (1).

$$\iiint_V [\psi\nabla^2\phi + (\nabla\psi)(\nabla\phi)]dv = \iint_S (\psi\nabla\phi).d\vec{s}$$

restando (2) de (1) se tiene: $\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dv = \iint_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi).d\vec{s}$

9) Demostrar $\iiint\limits_V \nabla\phi dv = \iint\limits_S \phi \vec{N}\, ds$

Solución

En el teorema de la divergencia, haremos $\vec{A} = \phi\, \vec{c}$, siendo $\vec{c}$ un vector constante, entonces

$$\iiint\limits_V \nabla(\phi\, \vec{c})dv = \iint\limits_S \phi\, \vec{c}.\vec{N}\, ds$$

como $\nabla(\phi\, \vec{c}) = (\nabla\phi).\vec{c} = \vec{c}.\nabla\phi$ y $\phi\, \vec{c}.\vec{N} = \vec{c}(\phi\, \vec{N})$

$\iiint\limits_V \vec{c}\, \nabla\phi dv = \iint\limits_S \vec{c}(\phi\, \vec{N})ds$, sacando $\vec{c}$ fuera de la integral $\vec{c}\iiint\limits_V \nabla\phi dv = \vec{c}\iint\limits_S \phi\, \vec{N}\, ds$

como $\vec{c}$ es un vector constante arbitrario por lo tanto $\iiint\limits_V \nabla\phi dv = \iint\limits_S \phi\, \vec{N}\, ds$

10) Hallar $\iint\limits_S \vec{r}.d\vec{s}$, donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución

En el punto P(x,y,z) de la superficie de la esfera S, el vector de posición $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y el vector unitario exterior $\vec{N}$ normal a la superficie S apuntan directamente hacia el lado opuesto del origen, es decir $\vec{N} = \vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, entonces para partir de la superficie

$\vec{r}.\vec{N} = \vec{r}.\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \dfrac{\|\vec{r}\|^2}{\|\vec{r}\|} = \|\vec{r}\| = a$, y como el área de la superficie de una esfera es $4\pi a^2$

$$\iint\limits_S \vec{r}.d\vec{s} = \iint\limits_S \vec{r}.\vec{N}\, ds = a\iint\limits_S ds = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

8.19 Ejercicios Propuestos.

1) Evaluar la integral de superficie dada:

a) $\iint_S y\,dS$, en donde S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ comprendida en el primer octante. **Rpta.** $3\sqrt{14}$

b) $\iint_S x\,dS$, en donde S es la superficie $y = x^2 + 4z$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 2$.

Rpta. $\dfrac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6}$

c) $\iint_S x\,dS$, en donde S es la porción del plano $z = y + 3$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. **Rpta.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

d) $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\,dS$, en donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

Rpta. 16π

e) $\iint_S (x^2 y + z^2)\,dS$, en donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ comprendida entre los planos $z = 0$, $z = 2$ **Rpta.** 16π

f) $\iint_S yz\,dS$, en donde S es la superficie con ecuación parametrica $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$, $u^2 + v^2 = 1$ **Rpta.** 0

g) $\iint_S z\,dS$, en donde S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 4$. **Rpta.** $\pi(\dfrac{391\sqrt{17} + 1}{60})$

h) $\iint_S (x^2z + y^2z)dS$, en donde S es la porción del plano $z = 4 + x + y$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

2) Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$ del campo vectorial $\vec{F}$ dado y la superficie orientada S indicada. En otras palabras, encuentre el flujo de $\vec{F}$ atraves de S para superficies cerradas, utilice la orientación positiva (hacia fuera).

a) $\vec{F}(x,y,z) = e^y\,\vec{i} + ye^x\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$; S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra arriba del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ y tiene orientación hacia arriba.

Rpta. $\dfrac{11-10e}{6}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Rpta. 108π

c) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$; S consta del paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \le y \le 1$ y el disco $x^2 + z^2 = 1$, y = 1. **Rpta.** 0

d) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$; S es el cubo con vértice $(\pm1, \pm1, \pm1)$.

Rpta. 48

e) $\vec{F}(x,y,z) = xz\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 3x\,\vec{k}$, S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con orientación hacia fuera. **Rpta.** $-\dfrac{64\pi}{3}$

f) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano z = 1 con orientación hacia fuera.

3) Hállese el flujo de la función $\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$ atraves de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, x ≥ 0, y ≥ 0, 0 ≤ z ≤ H, en dirección de la normal exterior.

Rpta. $\frac{\pi R^2 H}{4}$

4) Hállese el flujo de la función $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) = z$, z ≤ H, en dirección de la normal interior.

Rpta. $\frac{\pi R^2 H^2}{3}$

5) Hállese el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$ cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y orientada según la dirección del versor $\vec{k}$.

6) Hállese el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, -y^2, z^2)$ a través de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0, en dirección de la normal exterior.

Rpta. $\frac{\pi R^4}{8}$

7) Hállese el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ a través de un parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por los planos z = 0, x = R, x = 0 y orientada según la dirección del versor $\vec{k}$. **Rpta.** $-\frac{R^2 H}{3}$

8) Hállese el flujo de $\vec{F}(X,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$ a través de toda la superficie del cubo x = ± a, en dirección de la normal exterior. **Rpta.** 0

9) Hállese el flujo de $\vec{F}(x,y,z)=2x^2\,\vec{i}+3y^2\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2R^2-x^2-y^2}$ en dirección de la normal exterior.

Rpta. πR^4

10) Utilice el teorema de STOKES para evaluar $\int_C \vec{F}.d\,\vec{r}$, en donde $\vec{F}(x,y,z)=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+zx\,\vec{k}$ y C es el triángulo con vértices (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) con orientación contraria a la de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

Rpta. $-\frac{1}{2}$

11) Aplique el teorema de STOKES para evaluar $\int_C \vec{F}.d\,\vec{r}$ en cada caso, C esta orientada en sentido opuesto al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

a) $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}+3xy\,\vec{k}$, C es la frontera de la porción del plano $3x+y+z=3$ contenida en el primer octante. **Rpta.** 3.5

b) $\vec{F}(x,y,z)=2z\,\vec{i}+4x\,\vec{j}+5y\,\vec{k}$, C es la curva de intersección del plano $z=x+4$ y el cilindro $x^2+y^2=4$. **Rpta.** -4π

c) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\,\vec{i}+\frac{x^3}{3}\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, C es la curva de intersección del paraboloide hiperbólico $z=y^2-x^2$ y el cilindro $x^2+y^2=1$. **Rpta.** π

12) Utilice el teorema de STOKES para evaluar $\iint_S rot(\vec{F})d\,\vec{S}$:

a) $\vec{F}(x,y,z)=xyz\,\vec{i}+x\,\vec{j}+e^{xy}\cos z\,\vec{k}$, S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ \ge\ 1$ orientado hacia arriba. **Rpta.** π

b) $\vec{F}(x,y,z) = yz^3\,\vec{i} + \text{sen}(xyz)\,\vec{j} + x^3\,\vec{k}$, S es la porción del paraboloide $y = 1 - x^2 - z^2$ que se encuentra a la derecha del plano XZ orientada hacia el plano XZ.

Rpta. $\frac{3\pi}{4}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = xyz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + x^2yz\,\vec{k}$, S consta de la cara superior y las cuatro caras laterales (pero no la base) del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ orientada hacia fuera.

Rpta. 0

13) Aplicando el Teorema de STOKES hállese la circulación de $\vec{F}(x,y,z) = z^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$, por la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano x + y + z = R en el sentido positivo respecto al versor $\vec{k}$. **Rpta.** $\frac{4}{3}\pi R^3$

14) Hállese la circulación de $\vec{F}(x,y,z) = z^3\,\vec{i} + x^3\,\vec{j} + y^3\,\vec{k}$, por la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano x + y = 0 en el sentido positivo respecto al versor $\vec{i}$. Verifique aplicando el teorema de STOKES.

Rpta. $\frac{3}{2}\pi R^4$

15) Hállese la circulación de $\vec{F}(x,y,z) = y^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + (x^2 + y^2)\,\vec{k}$ a lo largo del contorno cortado en el primer octante del paraboloide $x^2 + y^2 = Rz$ por lo planos x = 0, y = 0, z = R, en dirección positiva respecto a la normal exterior del paraboloide. Verifique con ayuda del Teorema de STOKES.

16) Aplique el Teorema de la Divergencia para calcular la integral superior $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, esto es calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de S.

a) $\vec{F}(x,y,z)=-xz\vec{i}-yz\vec{j}+z^2\vec{k}$, S es el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Rpta. 0

b) $\vec{F}(x,y,z)=3y^2z^3\vec{i}+9x^2yz^2\vec{j}-4xy^2\vec{k}$, S es la superficie del cubo con vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$. **Rpta.** 8

c) $\vec{F}(X,y,z)=z\cos y\,\vec{i}+x\,\text{sen}\,z\,\vec{j}+xz\vec{k}$, S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $2x+y+z=2$. **Rpta.** $\frac{1}{6}$

d) $\vec{F}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$, S es la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

Rpta. $\frac{12\pi}{5}$

e) $\vec{F}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+yz\vec{j}+zx^2\vec{k}$, S es la superficie del sólido comprendido entre los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ y entre los planos $z=1$ y $z=3$.

Rpta. 27π

f) $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ a través del elipsoide $4x^2+9y^2+6z^2=36$ en dirección hacia fuera.

17) Si $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, calcular $\iint_S \vec{F}.d\vec{s}$, donde S es la superficie cilíndrica representada por $\vec{r}=\cos u\,\vec{i}+\text{sen}\,u\,\vec{j}+v\vec{k}$, $0\le u\le 2\pi$, $0\le v\le 1$, $d\vec{s}=\vec{N}.ds$ y $\vec{N}$ es el vector unitario normal exterior. **Rpta.** 2π

18) Si $\vec{F}(x,y,z)=4xt\,\vec{i}+xyz^2\vec{j}+3z\vec{k}$, calcular $\iint_S \vec{F}.d\vec{s}$, donde S es la superficie limitada por $z^2=x^2+y^2$, $z=0$, $z=4$, $d\vec{s}=\vec{N}ds$ y $\vec{N}$ es el vector unitario normal exterior.

Rpta. 320

19) Hallar $\iint_S \vec{F}.\vec{N}\,ds$ siendo $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} + yz^2\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ y s

a) La superficie del paralelepípedo limitado por x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 1, y z = 3

b) La superficie de la región limitada por x = 0, y = 0, y = 3, z = 0, y x + 2z = 6

Rpta. a) 30 b) $\frac{351}{2}$

20) Comprobar el teorema de la divergencia para $\vec{F}(x,y,z) = 2x^2y\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + 4xz^2\,\vec{k}$ extendida a la región del primer octante limitada por $y^2 + z^2 = 9$ y $x = 2$.

Rpta. 180

21) Si $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\,\vec{i} + (z+x)\,\vec{j}\,`(x+y)\,\vec{k}$, S es la superficie del cubo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Calcular: a) $\iint_S \vec{F}.ds$ b) $\iint_S \vec{F}\,x\,d\,\vec{s}$

Rpta. a) 0 b) 0

22) Si $\vec{F} = ax\,\vec{i} + by\,\vec{j} + cz\,\vec{k}$, calcular $\oint\!\!\oint_S \vec{F}.d\,\vec{s}$ sobre cualquier superficie cerrada S que encierra una región de volumen V. **Rpta.** $(a+b+c)$b

23) Si $\vec{F} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, calcular $\iiint_R \nabla\,\vec{F}.dv$, donde R es la región limitada por $z = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, y $z = 0$. **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

24) Usando el teorema de la divergencia, calcular $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $\vec{N}$ es el vector unitario normal exterior.

Rpta. 4π

25) Si $\vec{F} = (x^2 + y^2 - 4)\,\vec{i} + 3xy\,\vec{j} + (2xz + z^2)\,\vec{k}$, calcular $\iint_S \nabla\,x\,\vec{F}.d\,\vec{s}$, donde S es la superficie definida por $z = 4 - (x^2 + y^2)$ y $\vec{N}$ es el vector unitario normal exterior. **Rpta.** -4π

26) Demostrar que $\iiint\limits_V \frac{dv}{r^2} = \iint\limits_S \frac{\vec{r}.\vec{N}}{r^2}\, ds$

27) Hallar $\iint\limits_S (\nabla x\, .\vec{F}).\vec{N}\, ds$, siendo $\vec{F} = (x^2 + y - 4)\,\vec{i} + 3xy\,\vec{j} + (2xz + z^2)\,\vec{k}$ y S la superficie de:

a) La semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ por encima del plano XY.

b) El paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ por encima del plano XY.

Rpta. a) -16π **b)** -4π

28) Siendo $\vec{F} = 2yz\,\vec{i} - (x + 3y - 2)\,\vec{j} + (x^2 + z)\,\vec{k}$, hallar $\iint\limits_S (\nabla x\,\vec{F}).\vec{N}\, ds$ extendida a la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$, situada en el primer octante. **Rpta.** $-\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$

29) Aplicar el teorema de la divergencia para calcular $\iint\limits_S \vec{A}.d\vec{s}$, donde "S" es la superficie total del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = 9$ y $\vec{A}$ está dado por $\vec{A} = (3x + y)\,\vec{i} - x\,\vec{j} + (y - z)\,\vec{k}$. **Rpta.** 81π

30) "S" es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Hallar el valor de $\iint\limits_S \vec{A}.d\vec{s}$, cuando:

a) $\vec{A} = x\,\vec{i} + 3y\,\vec{j} + 4z\,\vec{k}$, **b)** $\vec{A} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$

Rpta. a) 200 π **b)** $\frac{50(20 + 3\pi)}{3}$

31) Demuestre que: $\iint\limits_S \phi\,\vec{p}.ds = \iiint\limits_V \vec{p}.\text{grad}(\phi)dv + \iiint\limits_V \phi dv\,\vec{p}dv$, donde φ es una función escalar puntual, $\vec{p}$ una función vectorial y "V" el volumen limitado por una superficie cerrada "S".

32) Hallar el valor de $\iint\limits_S \nabla\phi . d\vec{s}$; siendo "S" la parte no plana del casquete elipsoidal definido por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z \ge 0$ y $\phi=(x+1)^2+2(y-1)^2+z^2$. Use el teorema de la divergencia para calcular $\iint\limits_S \nabla\phi\, d\vec{s}$ sobre la cara plana $z=0$ del casquete.

Rpta. $\frac{16\pi\, abc}{3}$

33) Por el teorema de la divergencia, demuestre haciendo $\vec{A}=\phi\,\vec{m}$, donde $\vec{m}$ es un vector constante y compruebe este resultado cuando $\phi=3(x^2+y^2)+z$ y V es la parte finita del paraboloide $x^2+y^2=4-z$, o el ser cortado por el plano $z=0$ [En la superficie elaborada del paraboloide $d\vec{s}=ds.\vec{N}$, donde $ds=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$, $\vec{N}=\frac{2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$, integrando sobre el círculo $x^2+y^2=4$.

34) Sea "S" una superficie cerrada simple que limita el volumen V, $\vec{N}$ un vector unitario normal a S y $\vec{A}=a(x\,\vec{i}+by\,\vec{j}+cz\,\vec{k}$, donde a,b,c son constantes, Demuestre que:

a) $\iiint\limits_V div(\vec{N})dv=s$, **b)** $\iint\limits_S (\vec{A}.\vec{N})ds=(a+b+c)v$, **c)** $\iiint\limits_V r^2 dv=\iint\limits_S [(\vec{r}.\vec{N})r^2]ds.$

35) Calcular $\iint\limits_S rot.(\vec{A}).ds$, sobre la parte de la superficie $x^2+4y^2+z^2-2z=4$ que está sobre el plano $z=0$ siendo $\vec{A}=(x^3-y^3)\,\vec{i}-xyz\,\vec{j}+y^3\,\vec{k}$. **Rpta.** $\frac{3\pi}{2}$

36) Siendo $\vec{A}=2y(1-x)\,\vec{i}+(x-x^2+y^2)\,\vec{j}+(x^2+y^2+z^2)\,\vec{k}$, hallar el valor de $\iint\limits_S \vec{N}.rot(\vec{A})ds$, tomada sobre la superficie dado por $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, donde $\vec{N}$ es un vector unitario de dirección la de la normal y sentido hacia el exterior en el punto donde está situado ds. **Rpta.** $-\pi$

37) Apartir del teorema de Stokes $\oint_C \vec{A}.d\vec{r} = \iint_S (\nabla x \vec{A})d\vec{s}$, demuestre, haciendo $\vec{A} = \phi\,\vec{V}$, donde ϕ es una función escalar y $\vec{V}$ un vector arbitrario constante, que $\oint_C \phi\, d\vec{r} = \iint_S (d\vec{s}\, x \nabla\phi$.

38) Calcular la integral $\iint_S rot(\vec{A}).d\vec{s}$, para la función vectorial $\vec{A} = (2y^2+3z^2-x^2)\,\vec{i} + (2z^2+3x^2-y^2)\,\vec{j} + (2x^2+3y^2-z^2)\,\vec{k}$, sobre la parte de la superficie $x^2+y^2-2ax+az=0$ que está por encima de $z=0$. **Rpta.** $6\pi a^3$

39) Usar el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S \vec{F}.\vec{N}ds$ y hallar el flujo $\vec{F}$ a través de la superficie del sólido acotado por los gráficos de las ecuaciones.

a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$

$S: z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$ **Rpta.** 0

b) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$S: x^2+y^2+z^2 = k$ **Rpta.** 32π

c) $F(x,y,z) = x^3\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + x^2.ey\,\vec{k}$

$S: 4-y,\ z=0,\ x=0,\ x=6,\ y=0$ **Rpta.** 2304

40) Usar el teorema de stokes para calcular $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$

a) $\vec{F}(x,y,z) = z^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$

$S: z = 4-x^2-y^2,\ z \geq 0$ **Rpta.** 0

b) $\vec{F}(x,y,z) = z^2\,\vec{i} + y\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$

$S: z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ **Rpta.** 0

BIBLIOGRAFÍA

1) Cálculo Avanzado,.. por: **Murray R. Spiegel.**

2) Matemática Superior para Ingeniería,............ por: **C. R. Wylie. J. R.**

3) Matemática Superior para Matemáticos, Físicos e Ingenieros, volumen II,.................. por: **R. ROTHE.**

4) Cálculo Avanzado,.. por: **Wilfred Kaplan.**

5) Matemáticas para Ingeniería y Ciencias, Tomo III,IV... por: **A.C. Bajpai I. M. Calus.**

6) Cálculo Avanzado,.. por: **Gonzalo Zubieta Russi.**

7) Matemática Avanzada para Ingeniería, Vol..I, por: **Erwin Kreyszig.**

8) Cálculo Avanzado,...................................... por: **Louis BRAND.**

9) Cálculo Vectorial,.. por: **Claudio Pita Ruiz.**

10) Cálculo, volumen 2,....................................... por: **Larzon - Hostetler.**

11) Cálculus, volumen II,....................................... por: **Tom. Apóstol.**

12) Análisis Matemático,.. por: **Protter/Morrey.**

13) Análisis Matemático, tomo II,......................... por: **L.D. Kudriavtsev.**

14) Análisis Matemático, volumen II,.................. por: **Hasser-Lasalle- Sullivan.**

15) Cálculo con Geometría Analítica,.................. por: **Louis Leithold.**

16) Cálculo de una y Varias Variables,................ por: **Saturnino L-Sales, Einar Hile.**

17) Cálculo con Geometría,.................................. por: **Edwin J. Purcell.**

18) Ejercicios y Problemas de Matemática Superior, tomo II,... por: **P. Danko Popov.**

19) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, por: **B. Deminovich.**

20) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, por: **G. N. Berman.**

21) Matemática Superior, tomo III, IV,................ por: **J. Quinet.**

22) Cálculo Vectorial,.. por: **Marsden Tromba.**

23) Análisis Matemático,....................................... por: **M.N. Bentobol, J.Margolef.**

24) Análisis Vectorial... por: **Davis Snider.**

25) Análisis Vectorial.. por: **Hwei p. Hsu.**

26) Principios de Análisis Matemático,............... por: **E. LINES.**

27) Análisis Vectorial,... por: **HARRY LASS.**

28) Problemas de Cálculo Infinitesimal,.............. por: **Moya Moreno.**

29) Cálculo Dos,... por: **F.J.FLANIGAN J.L. KAZDAN**

30) Introducción al Análisis Lineal,.................... por: **Kreider - Kuller.**

PEDIDOS AL POR MAYOR Y MENOR

AV. GERARDO UNGER N° 247 OF. 202

Urbanización Ingeniería (Frente a la UNI)

Teléfono: 388-8564 - 852- 0506 - 853-3465

LIMA – PERU

IMPRESO EN:

EDITORIAL SERVIVIOS GRAFICOS J.J

OBRAS DEL AUTOR

- Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones
- Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencia é Ingeniería
- Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencia é Ingeniería
- Análisis Matemático III para estudiantes de Ciencia é Ingeniería
- Transformada de Laplace
- Sucesiones y Series Infinitas
- Geometría Analítica
- Funciones Vectoriales de Variable Real
- Funciones de Varias Variables
- Integrales Curvilíneas y Múltiples
- Vectores y sus Aplicaciones
- Rectas - Planos y Superficies
- Matrices y Determinantes
- Números Complejos y Polinomios
- Solucionarlo de Makarenko (Ecuaciones Diferenciales)
- Solucionarlo de Leithold 2da Parte
- Solucionarlo de Análisis Matemático III de G. Berman
- Solucionarlo de Análisis Matemático I por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático II por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático III por Deminovich
- Solucionarlo de Matemática para Administración y Economía por Weber