

Sincronización de Peatones en Puentes Colgantes.

Joel Acosta

El modelo

En Junio del 2000 el puente colgante “Millennium Bridge” de Londres tuvo que cerrarse dos días después de su apertura al público debido a que presentaba oscilaciones laterales (del orden de los 10 cm) que no habían sido previstas. Se observó además que los peatones presentes en el puente tendían naturalmente a sincronizar su marcha durante esas oscilaciones y que todo este fenómeno ocurría para un número de peatones suficientemente grande.

En 2005 y 2007 Strogatz et. all. ([1],[2]) propusieron una serie de modelos en los cuales tanto la sincronización entre los peatones como las oscilaciones laterales del puente emergen como resultado de la dinámica misma del sistema una vez que la cantidad de peatones alcanza un valor crítico. El modelo que se utilizó en este trabajo consiste en considerar al puente como un oscilador amortiguado forzado por el movimiento de los peatones. Por lo cual su desplazamiento lateral queda descrito por

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + KX = G \sum_{i=1}^N \sin(\Theta_i) \quad (1)$$

en donde G representa la fuerza máxima que cada peatón hace lateralmente sobre el puente y Θ_i el la fase de cada peatón e incrementa en 2π cuando el peatón completó un ciclo de caminata. En principio el valor de G podría ser distinto para cada peatón (entre otras cosas depende de la masa del peatón) pero en este modelo se utiliza el mismo valor para todos los peatones.

La ecuación diferencial (1) permite, al menos de forma cualitativa, los dos regímenes que se pretenden modelar para el puente: Cuando los peatones no están sincronizados y el movimiento entre ellos no es coherente, el lado izquierdo de (1) es aproximadamente nulo y cualquier desplazamiento lateral es amortiguado. Por otro lado si todos los peatones se encuentran sincronizados la ecuación (1) es la ecuación de un oscilador amortiguado con un único forzante, la que puede dar lugar a resonancias y soluciones armónicas.

Lo que se busca del modelo es que la sincronización entre los peatones surja como resultado de la propia dinámica del problema por ese motivo se planea la siguiente ecuación para la fase de cada peatón

$$\dot{\Theta}_i = \omega_i - C \ddot{X} \sin(\Theta_i) \quad (2)$$

en donde ω_i es la frecuencia natural con la que camina cada peatón. Si solamente estuviera el primer

término los peatones caminarían en todo momento con su frecuencia natural y no habría mecanismo por el cual pudieran llegar a sincronizarse. El segundo término modela la respuesta de cada peatón al movimiento del puente y asume varias cosas:

(i) El único motivo por el cual un peatón modifica su frecuencia es por interacción con el puente. Esto quiere decir que no se contemplan fenómenos en donde los peatones puedan interactuar y sincronizarse entre ellos por otros motivos.

(ii) La única variable del puente que los peatones perciben es la aceleración lateral. El modelo no contempla la existencia que los peatones puedan reaccionar a la posición o velocidad del puente.

(iii) El factor C modela que tan sensible son los peatones a la aceleración lateral del puente. Podría ser distinta para cada peatón pero por simplicidad se considera constante. Finalmente la presencia de $\sin(\Theta_i)$ en ese término da cuenta de que los peatones no son igualmente sensibles a las aceleraciones laterales del puente durante todo el ciclo de caminata.

Simulaciones numéricas

Los factores M, B, K, G son valores estructurales del puente y valen $M = 1,13 \times 10^5 \text{ kg}$, $B = 1,10 \times 10^4 \text{ kg/s}$, $K = 4,73 \times 10^6 \text{ kg/s}^2$, $G = 30 \text{ kg m/s}^2$. La distribución de frecuencias naturales de peatones es una gaussiana con desviación estándar $\sigma = 0,1 \text{ Hz}$ y cuyo centro se encuentra muy próximo a la frecuencia natural de resonancia del puente $\Omega = \sqrt{K/M} = 1,03 \text{ Hz}$. Por este motivo las frecuencias ω_i se tomaron de forma aleatoria dentro de una distribución gaussiana centrada en Ω y con desviación σ . Con todo esto la única variable de ajuste del modelo es el valor de C que se ajusta para que el número crítico de peatones sea $N_c \sim 150$. Con esto se obtiene $C \sim 1,05 \text{ s/m}$.

Las simulaciones numéricas se realizaron mediante un método de Runge-Kutta de orden 4. En todas las simulaciones el puente comenzó en reposo y los peatones con una fase inicial tomada aleatoriamente en $[0, 2\pi)$. Para medir el grado de sincronización entre peatones se utiliza el siguiente parámetro

$$R = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \exp(i\Theta_i) \right| \quad (3)$$

mientras que la amplitud total del desplazamiento (la envolvente de la curva de desplazamiento) puede evaluarse mediante

$$A^2 = X^2 + \frac{1}{\Omega^2} \dot{X}^2 \quad (4)$$

En las simulaciones se observaron dos comportamientos muy diferenciados para cantidad de peatones por debajo por encima del valor crítico N_c . En la figura 1 se muestra el desplazamiento lateral del puente y el grado de sincronización entre peatones para 130 y 300 peatones. Se ve que para el caso de 300 peatones, a medida que transcurre el tiempo cada vez más peatones se sincronizan y contribuyen a que la amplitud de oscilación sea cada vez mayor. En todos los casos con $n > N_c$ el comportamiento es muy similar aunque el tiempo que le toma al sistema en llegar al estado estacionario parece disminuir ligeramente a medida que aumenta el número de peatones.

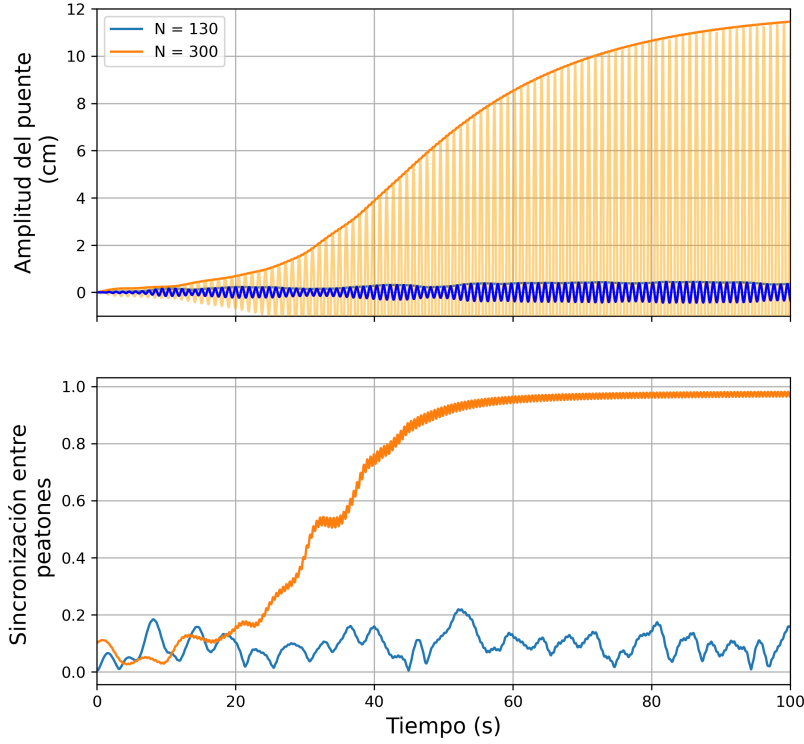


Figura 1: Amplitud del puente y grado de sincronización entre peatones en función del tiempo para el caso de 130 y 300 peatones. Estos son dos ejemplos de los dos tipos de soluciones cualitativamente distintas encontradas para numero de peatones menores y mayores al valor crítico respectivamente.

En el caso con 130 peatones se observa que estos nunca llegan a sincronizarse. Por este motivo la ecuación diferencial que rige la dinámica del puente está dominada por la parte disipativa y los desplazamientos laterales del puente tienden a desaparecer. Este comportamiento ocurre en todos los casos con $n < N_c$, en los cuales el desplazamiento del puente se asemeja a un batido y la su amplitud nunca alcanza un valor estacionario.

En la figura 2 se muestra una forma más visual de representar la sincronización entre peatones. Para construirla se tomó el $\sin(\Theta_i)$ (para tener valores entre -1 y 1) para cada peatón y se gráfico en una escala de colores en donde blanco representa -1 y azul representa 1. De esta forma puede interpretarse que blanco y azul como los “pasos” de cada peatón. Se observa nuevamente que los peatones no se sincronizan para el caso $n = 130$.

La figura 3 es similar que la anterior pero para el caso de 300 peatones. En ella se ve que los peatones se van sincronizando a medida que pasa el tiempo, a medida que esto sucede el desplazamiento lateral del puente se incrementa. Si bien las frecuencias naturales de cada peatón se eligió de forma aleatoria, en el figura 3 se ordenaron los peatones en orden creciente en su frecuencia natural, lo que quiere decir que los peatones cercanos al índice 150 tienen frecuencia natural muy próxima al la frecuencia natural del puente. Se ve que justamente estos son los primeros que se sincronizan y que los peatones con frecuencia natural alejada de Ω demoran más tiempo en sincronizarse.

En la figura 4 se comparan la fuerza que le ejerce un peatón (dado que están todos sincronizados es la misma para todos) al puente, la amplitud y la velocidad lateral del puente en un intervalo

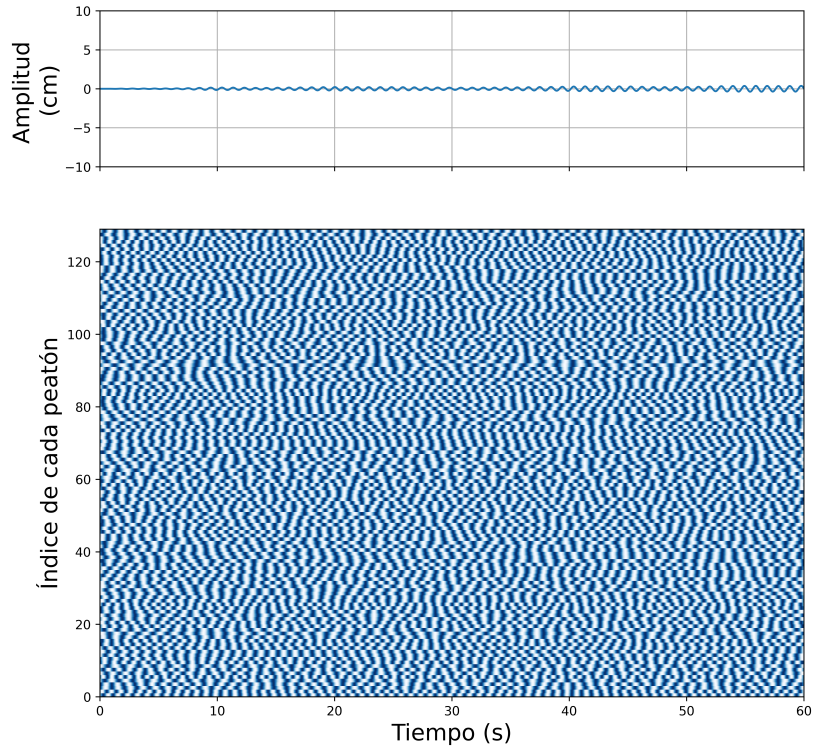


Figura 2: Sincronización en un grupo de 130 peatones. Los colores blancos y azules pueden interpretarse como pasos izquierdos y derechos de cada uno de los peatones. Se observa que los peatones no se sincronizan y el puente se desplaza con amplitudes pequeñas.

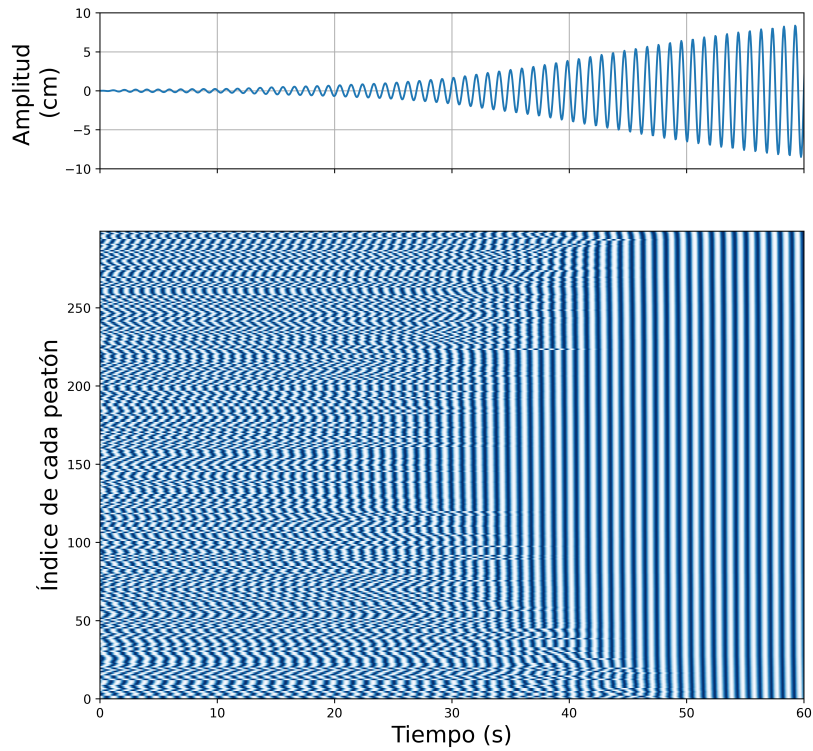


Figura 3: Similar a la figura 2 pero en este caso para 300 peatones. Se observa que los peatones se sincronizan entre ellos. Los peatones están ordenados en orden creciente de frecuencia natural, por lo que los peatones con índice ~ 150 tienen frecuencia natural similar a Ω

de tiempo en donde el sistema se encuentra en su régimen estacionario. Todas las funciones están normalizadas a para poder compararlas. Se puede ver (no se muestra en este gráfico) que en el régimen estacionario el desplazamiento del puente es muy similar a un oscilador armónico con frecuencia Ω igual a la frecuencia natural del puente. Se ve que la fuerza que ejercen los peatones está en fase con la velocidad lateral del puente. Esto coincide con el hecho de que en un resorte amortiguado de frecuencia ω_0 forzado armónicamente con una frecuencia ω , el desfase ϕ entre la velocidad y la fuerza es

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right), \quad (5)$$

por lo que al forzar al sistema con la frecuencia de resonancia del puente, el forzante termina estando en fase con la velocidad.

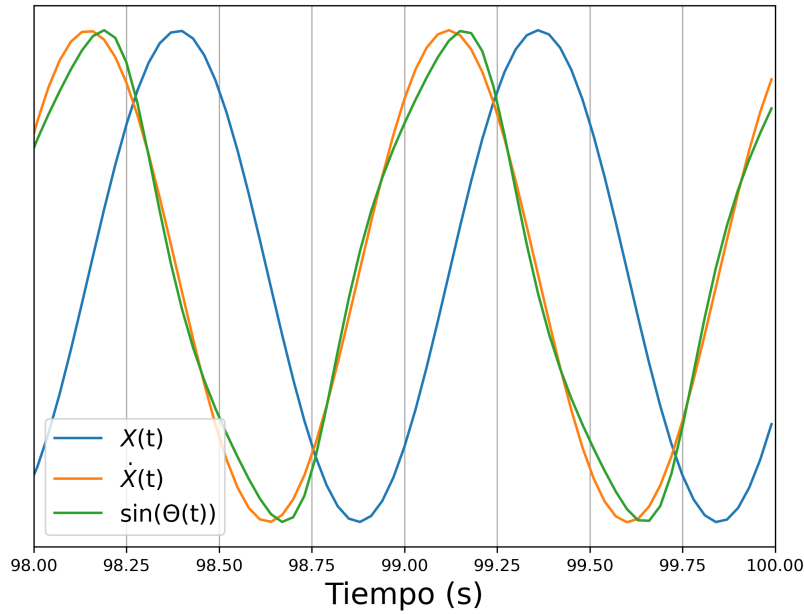


Figura 4: Desplazamiento lateral del puente, velocidad lateral del puente y fuerza ejercida por los peatones en función del tiempo para el caso de 300 peatones. Los peatones se encuentran sincronizados y las funciones están normalizadas. Se observa que la fuerza ejercida por los peatones está en fase con la velocidad lateral y no con el desplazamiento del puente.

Por último en la figura 5 se muestra la amplitud del régimen estacionario en función de la cantidad de peatones. En cada una de estas simulaciones el intervalo de tiempo utilizado fue de aproximadamente 1000s y se utilizaron solamente los últimos 100s para evaluar las amplitudes. Se observa un brusco cambio de comportamiento cerca de los 150 peatones a partir de donde los peatones tienden a estar fuertemente sincronizados y el desplazamiento del puente pasa a ser significativo. En ese rango la amplitud es lineal en la cantidad de peatones, hecho que nuevamente condice con lo que sucede forzado armónicamente. En dicho caso cuando la frecuencia del forzante es la frecuencia natural del resorte la amplitud es

$$A = \frac{F}{B\omega_0} = \frac{G}{B\Omega}n \sim 0,042 \frac{\text{cm}}{\text{personas}}n \quad (6)$$

La recta de la figura 5 corresponde a la ecuación anterior. Se observa en que en el rango estudiado la pendiente de esta recta es bastante similar a la pendiente de los datos obtenidos mediante simulaciones. La pendiente de esta última resulta $\sim 0,046$ cm/personas

Cuando el número de peatones es menor al valor crítico los desplazamientos en función del tiempo suelen tener la forma que se muestra en la figura 1 y promediar la amplitud en un intervalo de tiempo no resulta muy significativo y resulta más ilustrativo ver el desplazamiento máximo. La región sombreada representa la zona dentro la de la cual se ubicaron los desplazamientos máximos. En ninguna de las simulaciones realizadas, para cantidad de patones por debajo del número crítico, la amplitud máxima cayó fuera de esa región.

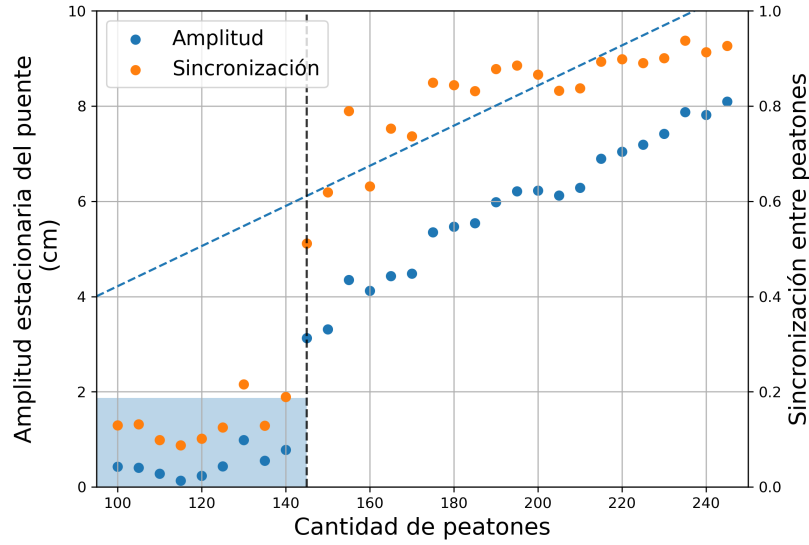


Figura 5: Amplitud y sincronización del estado estacionario en función del número de peatones. Se observa un cambio cualitativo cerca de $n = 150$ a partir de donde la amplitud aumenta de forma lineal. Por debajo del valor crítico no hay sincronización y las amplitudes del puente son pequeñas. La región sombreada representa la zona en donde se ubicaron los desplazamientos máximos en todas las simulaciones con $n < N_c$. La recta azul representa la ecuación 6.

Conclusiones

El modelo utilizado exhibe un mecanismo por el cual los peatones tienden a sincronizarse entre sí generando desplazamientos laterales apreciables en el puente. El parámetro C del modelo es el único que está realmente libre y pudo ajustarse de forma de que el número crítico de peatones sea del orden de $N_c \sim 150$. Para una cantidad de peatones menor a N_c se observó que el movimiento de los peatones no es sincronizado y el desplazamiento lateral del puente es relativamente bajo. Una vez el número de peatones supera el valor crítico se observó que los peatones se sincronizan a la frecuencia de resonancia del puente, comenzando por aquellos peatones cuya frecuencia propia ya era similar a la frecuencia del puente. Una vez que los peatones están altamente sincronizados se ve que el puente responde como un oscilador amortiguado forzado armónicamente con su frecuencia natural.

Referencias

- [1] Strogatz et. al.: “Crowd synchrony on the Millennium Bridge” - Nature - 2008
- [2] Strogatz et. al.: “Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge” - Physical Review E - 2007