Tarea 6
Metrópolis Hastings

Joel Chacón Castillo
Cómputo Científico

16 de octubre de 2019

1. Simulación Bernoulli

Simular una variable aleatoria $n = 5$ y $n = 35$ con distribución Bernulli $BE(p)$, $p = 1/3$ donde r es el número de éxitos en cada caso.

Comentarios

Para realizar la simulación de una distribución Bernulli a partir de una distribución uniforme $X \sim U(0, 1)$ se realiza el siguiente procedimiento. Primero se genera un variable $X \sim U(0, 1)$ y si el valor de esta variable aleatoria es menor que p se considera un éxito. En particular este proceso de realiza con $n = 5$ y $n = 35$. En los siguientes puntos se utiliza la librería de scipy.stats *bernoulli.rvs*.

2. Metrópolis-Hastings

Implementar el algoritmo de Metrópolis Hastings para simular de la posterior:

$$f(x|\hat{x}) \propto p^r(1-p)^{n-r}cos(\pi p)I_{[0,0,5]}(p) \tag{1}$$

donde n y r se considera del caso anterior. Para ello poner la propuesta $(p^{\cdot}|p) = p^{\cdot} \sim Beta(r+1, n-r+1)$ y la distribución inicial de la cadena $\mu \sim U(0, 0{,}5)$.

Comentarios

Se implementa el algoritmo de Metrópolis Hastings, para su implementación se debe considerar lo siguiente:

- Revisar los casos cuando el denominador proporciona valores nulos, es este caso se vuelve a realizar el proceso de simulación.
- Es importante considerar que la pdf posteriori es proporcional, por lo tanto si se desea visualizar el cdf calculado en la simulación junto al pdf (evaluado en los puntos de soporte), se debe considerar la escala.

3. Análisis

Argumentar porque la cadena es $f-irreducible$ y porque es ergódica. Implementar el algoritmo con los datos descritos y discutir los resultados.

Comentarios

Irreducibilidad

Una cadena de Markov es irreducible si es posible llegar a cualquier estado desde cualquier estado, así se dice que una cadena es irreducible si su espacio de estados están en *comunicación.*

Una cadena (X_n) es f-irreducible si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $A \in \mathcal{B}$ tal que $f(A) > 0$, y una de las siguiente propiedades se mantine:

- Existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $K^n(x, A) > 0$
- $E_x[\eta_A] > 0$ (η_A es el promedio del número de pasajes en A)
- $K_\epsilon(x, A) > 0$ para un $0 < \epsilon < 1$

La propiedad de irreducibilidad de una cadena de Metrópolis-Hasting $X^{(t)}$ sigue las condiciones suficientes como positividad de la densidad condicional, es decir:

$$q(y|x) > 0 \quad para \quad cada(x, t) \in E \times E \tag{2}$$

Por lo tanto cada conjunto E con una medición positiva de Lebesgue puede ser alcanzada en un sólo paso. Dado que la densidad f es una medición invariante para la cadena, la cadena es positiva por lo tanto la cadena es recurrente.

Así, para que una cadena sea $f-reducible$ con base al kernel de transición:

$$K(x, y) = \rho(x, y)q(y|x) + (1 - r(x))\delta_x(y), \tag{3}$$

donde $r(x) = \int \rho(x, y)q(y|x)dy$ y δ_x denota la masa de Dirac en x, es En principio y considerando la distribución Bernulli en el mismo soporte, se observa que es posible llegar de cualquier estado desde cualquier estado, y además esta probabilidad es estrictamente positiva, es decir el soporte de $q(y|x)$ está contenido en el soporte de $f(x)$.

Ergodicidad

Un estado es ergódico si es aperiódico y positivamente recurrente. Es decir, un estado es ergódico si es recurrente, tiene un periodo mínimo, y tiene un tiempo de recurrencia promedio. Si todos los estados en una cadena de Markov irreducible son ergódicos, entonces se dice que la cadena es ergódica. En este caso obsevando el kernel de transición, se puede decir que la cadena es aperiódica y positivamente recurrente.

Dadas las observaciones $X_1, ..., X_n$ de una cadena de Markov, entonces $S_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$. Así si ($X_n$) tiene una f-finita medición invariante π, se mantiene lo siguiente

- si f y q con continuos con $\int q(x)d\pi(x) \neq 0$ entonces

$$lim_{n\to\infty}\frac{S_n(f)}{S_n(q)} = \frac{\int f(x)d\pi(x)}{\int q(x)d\pi(x)} \tag{4}$$

- La cadena de Markov (X_n) es Harris recurrente.

Un conjunto A es Harris recurrente si $P_x(\eta_A = \infty) = 1$ para todo $x \in A$. La cadena (X_n) es Harris recurrente si existe una medición f tal que (X_n) es f-irreducible y para cada conjunto A con $f(A) > 0$, A es Harris recurrente.

Una forma *burda* de ver ergodicidad, es establecer que en una cadena de Markov se puede llegar a un estado previamente visitado pero de forma aperiódica. Dadas las propiedades que tiene el Kernel de transición y considerando la distribución instrumental Beta, se puede establecer que existe aperiodicidad y aún más dado considerando un el espacio medible (y continuo) se establece que es positivamente recurrente.

4. Propuesta

Implementar el algoritmo de Metrópolis-Hastings con la posterior de arriba tomando una propuesta diferente.

Comentarios

Se realizan dos propuestas, la primera es considerar una distribución instrumental uniforme en el soporte de la distribución a simular. En la segunda propuesta se aplica una distribución normal truncada en el mismo soporte que la función posteriori. Si bien las dos propuestas sirven, es importante mencionar que en función de los parámetros de la distribución posteriori podrían existir distintos grados de convergencia. Se puede considerar que la distribución uniforme es más robusta antes distintos parámetros de la función a posteriori, no obstante también se menciona que pueden existir casos en que la distribución normal truncada tenga una mejor convergencia. En las figuras 1, 2 y 2 se ilustra una estimación del pdf con cada una de las tres funciones instrumentales, principalmente se observa que las tres propuestas converjen a la forma de la posteriori, principalmente la normal truncada parece tener una mejor propiedad de convergencia, esto se debe a que la función de distribución posteriori tiene una forma muy similar a la normal la mayoría de los casos que presentados en la simulación.

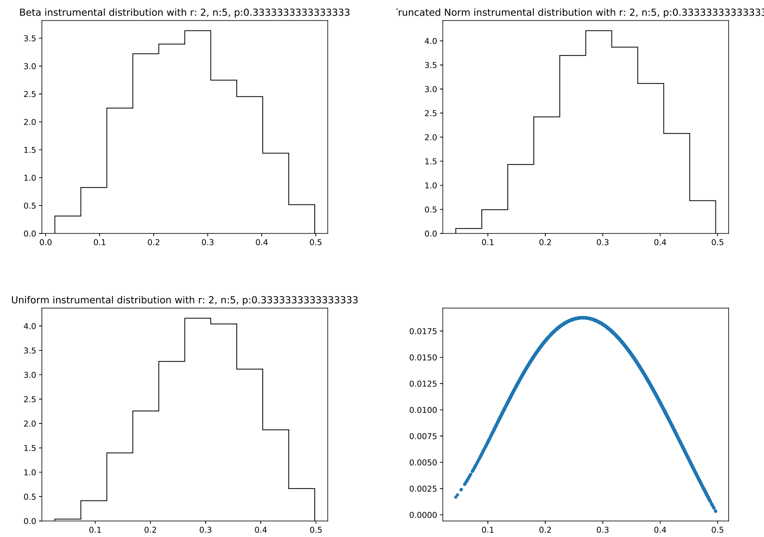

Figura 1: PDF de de tres distribuciones instrumentales, beta, uniforme y normal truncada. En la parte inferior derecha el pdf de la función posteriori a simular considerando n=5. Se consideraron 10'000 iteraciones.

.

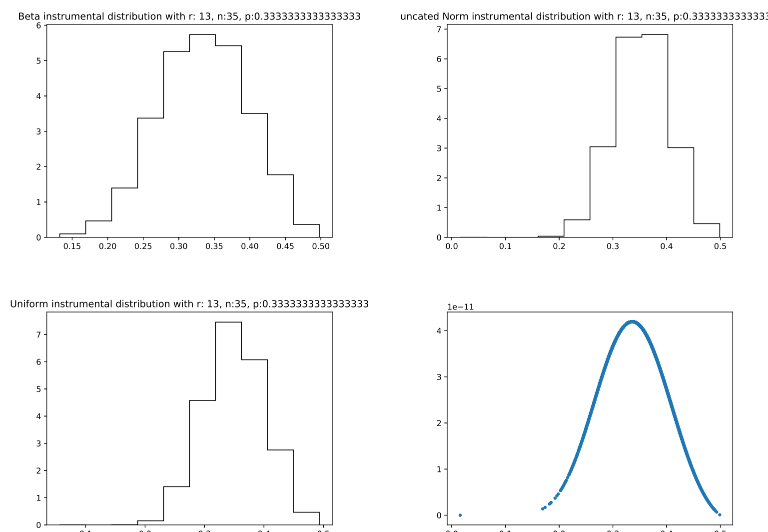

Figura 2: PDF de de tres distribuciones instrumentales, beta, uniforme y normal truncada. En la parte inferior derecha el pdf de la función posteriori a simular considerando n=35. Se consideraron 10'000 iteraciones.

.

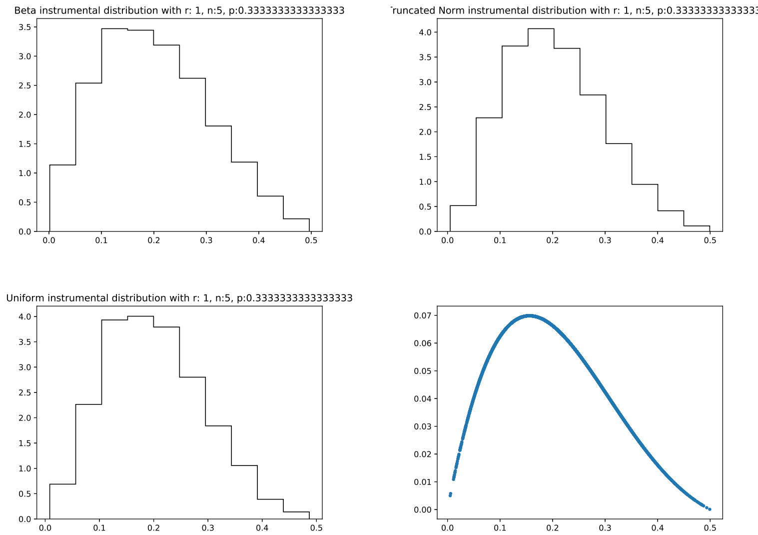

Figura 3: PDF de de tres distribuciones instrumentales, beta, uniforme y normal truncada. En la parte inferior derecha el pdf de la función posteriori a simular considerando n=5. Se consideraron 10'000 iteraciones.

.