Tarea 1
Decomposición LU y Cholesky

Joel Chacón Castillo
Cómputo Científico

26 de agosto de 2019

1. Implementar los algoritmos de *Backward substitution* y *Forward substitution*.

Los algoritmos *Backward substitution* y *Forward substitution* están implementados por medio de las funciones *Backward* y *Forward* respectivamente, cada una de éstas funciones recibe una matriz y un vector del tipo numpy array. Por su parte el método *Backward* toma la siguiente forma:

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{m} x_k r_{jk} \right) / r_{jj} \tag{1}$$

donde r representa a una matriz triangular superior. El método *Forward* toma la siguiente forma:

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=1}^{j} x_k r_{jk} \right) / r_{jj} \tag{2}$$

donde r representa a una matriz triangular inferior.

2. Implementar el algoritmo de eliminación gaussiana con pivoteo parcial LUP, algorithmo 21.1 del Trefethen pag. 160

El algoritmo de *Eliminación Gaussiana con Pivoteo Partcial* es implementado en la función GEPP, esta función realiza la descomposición $PA = LU$, la cual recibe una matriz como argumento y regresa P, L, U, donde P es una matriz $m \times m$ que representa las permutaciones realizadas, L que es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U que es una matriz triangular superior.

3. Implementación de la factorización

Dar la descomposición LUP para una matriz aleatoria de entradas $U(0,1)$ de tamaño 5×5, y para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para repetir los experimentos de esta tarea se asigna la semilla del generador en cero. La descomposición LUP de la matriz indicada en (3) es la siguiente

$$\begin{aligned} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Cada entrada de la siguiente matriz A es generado aleatoriamente con valores $U(0,1)$, además se anexan las descomposiciones correspondientes [1].

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}548813500 & 0{,}715189370 & 0{,}602763380 & 0{,}544883180 & 0{,}423654800 \\ 0{,}645894110 & 0{,}437587210 & 0{,}891773000 & 0{,}963662760 & 0{,}383441520 \\ 0{,}791725040 & 0{,}528894920 & 0{,}568044560 & 0{,}925596640 & 0{,}071036060 \\ 0{,}087129300 & 0{,}020218400 & 0{,}832619850 & 0{,}778156750 & 0{,}870012150 \\ 0{,}978618340 & 0{,}799158560 & 0{,}461479360 & 0{,}780529180 & 0{,}118274430 \end{bmatrix} \tag{5}$$

[1] La factorización se comprobó en la dirección http://bluebit.gr/matrix-calculator/

$$L = \begin{bmatrix} 1{,}0000000000{,}0000000000{,}0000000000{,}0000000000{,}000000000 \\ 0{,}5608044301{,}0000000000{,}0000000000{,}0000000000{,}000000000 \\ 0{,}089032973 - 0{,}1907478811{,}0000000000{,}0000000000{,}000000000 \\ 0{,}660006137 - 0{,}3365407640{,}8201097581{,}0000000000{,}000000000 \\ 0{,}809023301 - 0{,}4405811750{,}403947546 - 0{,}4129951841{,}000000000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 9{,}79E-01 & 7{,}99E-01 & 4{,}61E-01 & 7{,}81E-01 & 1{,}18E-01 \\ 0{,}00E+00 & 2{,}67E-01 & 3{,}44E-01 & 1{,}07E-01 & 3{,}57E-01 \\ 0{,}00E+00 & 0{,}00E+00 & 8{,}57E-01 & 7{,}29E-01 & 9{,}28E-01 \\ 0{,}00E+00 & 6{,}94E-18 & 0{,}00E+00 & -1{,}13E-01 & -3{,}35E-01 \\ 0{,}00E+00 & 0{,}00E+00 & 0{,}00E+00 & 0{,}00E+00 & -3{,}80E-01 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Resolución de sistema de ecuaciones

Usando la decomposición LUP anterior, resolver los siguientes sistemas Los sistemas son de la forma $Dx = b$ donde D son las matrices del problema 3, es decir (3) y (5), para 4 diferentes b aleatorios con entradas $U(0,1)$. Verificando si es o no posible resolver el sistema. Para resolver un sistema de ecuaciones $LUx = Pb$, se implementan de forma sistemática los métodos *Forward* y *Backward* donde primero se resuelve con *Forward* $Ly = Pb$ y posteriormente para *Backward* $Ux = y$. El sistema de ecuaciones a resolver implementa cada una de las matrices (3) y (5), donde los vectores b generados aleatoriamente son los siguiente:

$$\begin{aligned} b_1^* &= \begin{bmatrix} 0{,}63992102 & 0{,}14335329 & 0{,}94466892 & 0{,}52184832 & 0{,}41466194 \end{bmatrix} \\ b_2^* &= \begin{bmatrix} 0{,}26455561 & 0{,}77423369 & 0{,}45615033 & 0{,}56843395 & 0{,}0187898 \end{bmatrix} \\ b_3^* &= \begin{bmatrix} 0{,}6176355 & 0{,}61209572 & 0{,}616934 & 0{,}94374808 & 0{,}6818203 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Considerando a la matriz estática o ya definida (3) y a los vectores (7) las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \begin{bmatrix} 0{,}10750668 & -0{,}28155437 & 0{,}23820689 & 0{,}05359319 & 0{,}53241434 \end{bmatrix} \\ x_2^* &= \begin{bmatrix} -0{,}15500089 & 0{,}19967629 & 0{,}081269230{,}27482207 & 0{,}4195565 \end{bmatrix} \\ x_3^* &= \begin{bmatrix} -0{,}02292096 & -0{,}05138169 & -0{,}0979251 & 0{,}13096389 & 0{,}64055645 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

Considerando la matriz aleatoria (5) y resolviendo para los vectores (7) se tienen los siguientes resultados

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= \begin{bmatrix} -7{,}44095801 & 5{,}42647186 & -4{,}161686066{,}91406389 & -0{,}98235854 \end{bmatrix} \\
x_2^* &= \begin{bmatrix} -1{,}17026044 & 0{,}26824913 & 1{,}61044354 & 0{,}44217716 & -1{,}17239287 \end{bmatrix} \\
x_3^* &= \begin{bmatrix} -0{,}28254979 & 0{,}462345 & -1{,}23348001 & 1{,}31616787 & 1{,}1055634 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Una de las ventajas de resolver un sistema de ecuaciones mediante la factorización LUP es utilizar las mismas matrices factorizadas para resolver sistemas $LUx = b$ con distintos vectores b, si se parte de la factorización LU la complejidad de resolver un sistema es aproximadamente $O(m^2)$. Una forma para validar que el sistema de ecuaciones tiene solución, es verificando que todos los elementos de la diagonal U son distintos de cero, ya que la matriz A podría no ser de rango completo, que en resultado o podría tener un número infinito de soluciones o no tener solución, esto se podría revisar con la determinante, o además revisando el kernel de la matriz.

5. Descomposición

Implementar el algoritmo de descomposición de Cholesky 23.1 del Trefethen (pag. 175)

Se implementó el algoritmo Cholesky para la descomposición de matrices simetricas positivamente definidas. La función es nombrada *Cholesky* y recibe una matriz simétrica.

6. Complejidades

Comparar la complejidad de su implementación de los algoritmos de factorización de Cholesky u LUP mediante la medición de los tiempos que tardan con respecto a la descomposición de una matriz aleatoria hermitiana definida positiva.

Para generar la matriz simétrica definida positiva, primero se genera una matriz aleatoria A y posteriormente es multiplicada por tu conjugado $A^T A$. Una cota de las factorizaciones Cholesky y PLU es $O(1/3m^3)$ y $O(2/3m^3)$ respectivamente. Teóricamente el método de Cholesky requiere la mitad del tiempo por el método de la factorización PLU. Por su parte el algoritmo de factorización Cholesky (de acuerdo al Trefethen pag. 177) es más estable –definido como *backward stable*–. En contraste, la factorización PLU se puede considerar menos estable para ciertas matrices (dependiendo en número de condición).

En la figura 1 se presenta el cálculo empírico y práctico del tiempo requerido para la factorización con cada uno de los métodos (cuatro configuraciones). Es importante enfatizar la diferencia que hay entre la cota teótica y el tiempo empírico, por moticos de interpretación visual se utilzó la escala logarítmica. En la figura 2 se puede observar que el tiempo requerido por el método de factorización PLU el cual es aproximadamente el doble que la factorización de Cholesky.

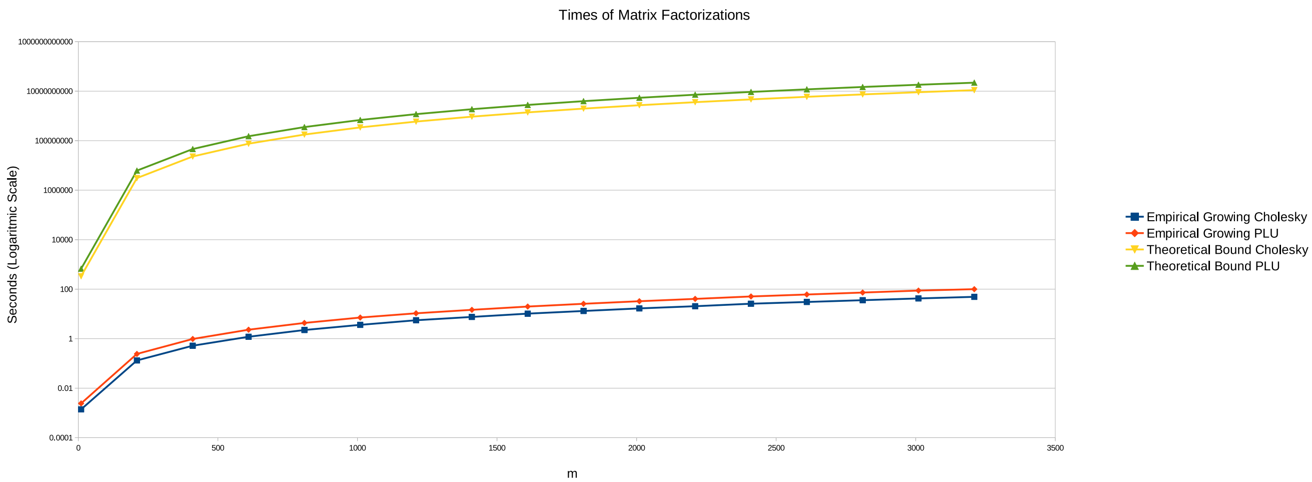

Figura 1: Cálculo del tiempo empírico y teórico con matrices de distintas dimensiones. Ya que la cota teórica es mayor que el práctico se utiliza escala logarítmica en el eje de las ordenadas (y).

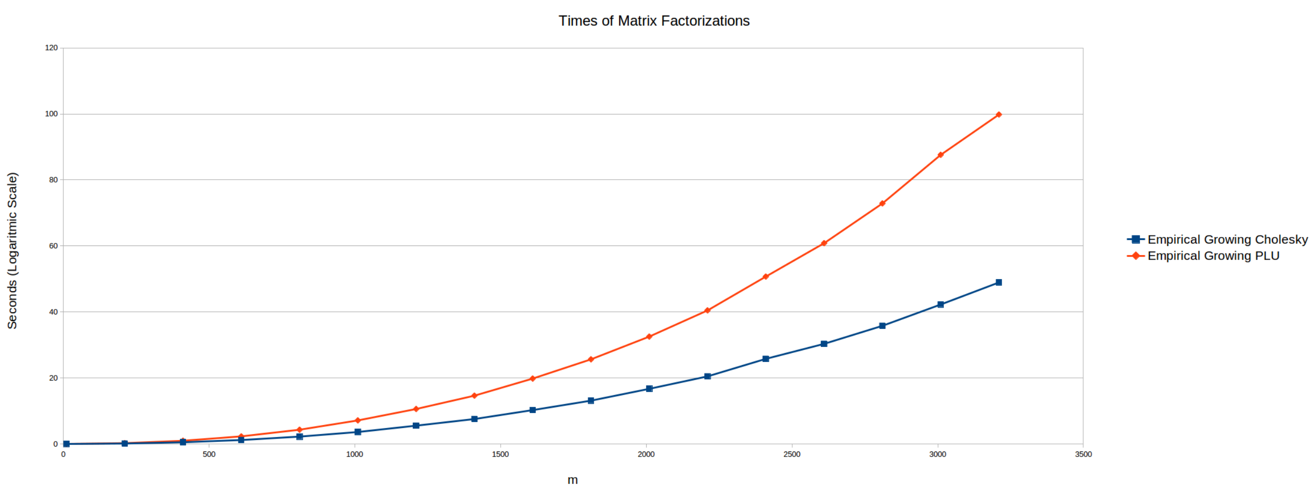

Figura 2: Cálculo del tiempo empírico con matrices de distintas dimensiones.