Capítulo 13. “Método Simplex’

Oscar S. Dalmau Cedeño
dalmau@cimat.mx

25 de septiembre de 2018

Forma estándar

Forma estándar de un problema de programación lineal (PL).

$$\text{min } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \quad s.a: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \succeq 0. \tag{1}$$

Problema dual

Cual es el problema dual de

$$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \;\; s.a: \;\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \; \boldsymbol{x} \succeq 0. \tag{2}$$

Condiciones de Optimalidad

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, \pi, s) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \pi^T (Ax - b) - s^T x. \tag{3}$$

Condiciones KKT.

$$\begin{aligned} A^T \pi + s &= c, && (4) \\ Ax &= b, && (5) \\ x &\geq 0, && (6) \\ s &\geq 0, && (7) \\ \boldsymbol{x}_i s_i &= 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. && (8) \end{aligned}$$

Problema Primal–Dual

Problema	min $c^T x \;\; s.a: \;\; Ax = b; \;\; \boldsymbol{x} \succeq 0.$	max $b^T \pi \;\; s.a: \;\; c - A^T \pi \geq 0.$
Lagrangiano	$\mathcal{L}_P(x, \pi, s) = c^T x - \pi^T (Ax - b) - s^T x$	$\mathcal{L}_D(\pi, x) = -b^T \pi - x^T (c - A^T \pi)$
KKT	$\nabla_x \mathcal{L}(x, \pi, s) = 0, \; \Leftrightarrow \; s = c - A^T \pi,$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$ $\boldsymbol{x} \succeq 0,$ $s \geq 0,$ $\boldsymbol{x}_i s_i = 0.$	$\nabla_\pi \mathcal{L}(\pi, x) = 0, \; \Leftrightarrow \; Ax = b,$ $s \overset{def}{=} c - A^T \pi \geq 0,$ $s \geq 0,$ $\boldsymbol{x} \succeq 0,$ $[c - A^T \pi]_i \boldsymbol{x}_i = s_i \boldsymbol{x}_i = 0.$

Cuadro: Primal – Dual

Teorema de Dualidad

Teorema 13.1: “Teorema de Dualidad de la PL”

i) Si un problema de PL o su dual tienen una solución con valor finito en la función objetivo, entonces el otro problema también tendrá solución y los valores de la función objetivo son iguales.

ii) Si un problema de PL o su dual tienen función objetivo no acotada, entonces el otro problema no tiene puntos factibles.

Observaciones

- Sea x^*, π^*, s^* una solucion de las condiciones KKT anteriores entonces el valor de las funciones objetivo del primal y el dual en dicho punto es el mismo, i.e., $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = b^T \pi^*$.
- x^* es una solución global del problema original, $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*$ para x factible.
- π^* es una solución global del problema dual, $b^T \pi \leq b^T \pi^*$ para π factible.

En el problema (1) siempre se asumirá que la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es de rango completo, luego $rango(A) = m$
Si x es un punto factible con a lo mas 'm' componentes no ceros. Sea además $\mathcal{B}(x)$ un subconjunto de índices de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de forma tal que:

- $\mathcal{B}(x)$ contiene exactamente m índices;
- $i \notin \mathcal{B}(x) \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_i = 0$;
- La matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se define como:

$$B = [A_i]_{i \in \mathcal{B}(x)} \tag{9}$$

  en no singular, donde A_i es la $i-$ésima columna de la matriz A.

- Si x se obtiene segun lo anterior es un **punto básico** y si ademas cumple las KKTs es un ***punto básico factible*** de (1).
- El simplex genera una secuencia de puntos básicos factibles.

Teorema 13.1: "Teorema Fundamental de la PL"

i) Si existe un punto factible para (1) entonces existe un punto básico factible.

ii) Si (1) tiene solución, entonces una de estas soluciones es un *punto básico óptimo*.

iii) Si (1) es factible y acotado, entonces tiene una solución óptima.

Teorema 13.3:
Todos los **puntos básicos factibles** de (1) son los **vértices del polytopo factible** $\{x|Ax = b, \;\; x \succeq 0\}$ y viceversa.

Definición:
Se dice que $\mathcal{B}$ está degenarado si existe un indice $i \in \mathcal{B}$ tal que $\boldsymbol{x}_i = 0$, donde x es una solución básica factible.

Un problema de programación Lineal (PL) se dice degenerado si tiene al menos una base degenerada, Suponggamos que el problema PL no es degenrado y sea $\mathcal{B}$ definida como en (9), $\mathcal{N}$ el complemento de $\mathcal{B}$, es decir

$$\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B} \tag{10}$$

Sea la submatriz $N = [A_i]_{i \in \mathcal{N}}$. Sea también la siguiente partición.

$$\boldsymbol{x}_B = [\boldsymbol{x}_i]_{i \in \mathcal{B}}, \quad \boldsymbol{x}_N = [\boldsymbol{x}_i]_{i \in \mathcal{N}}, \quad s_B = [s_i]_{i \in \mathcal{B}}, \quad \boldsymbol{s}_N = [s_i]_{i \in \mathcal{N}}. \tag{11}$$

A partir de la $KKT1$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = b \tag{12}$$

Haciendo $s_B = 0$ y $\boldsymbol{x}_N = 0$ se logra que se cumpla la condición de complementariedad.

Si $\boldsymbol{x}_N = 0$ entonces $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}b$. Supongamos además que $\boldsymbol{x}_B \succeq 0$

Entonces $x \succeq 0$ y $s_B \succeq 0$ ....

Calculemos $\boldsymbol{s}_N$

De forma análoga, a partir de $s_B = 0$ y la primera KKT

$$
\begin{array}{rcl}
A^T \pi + s & = & c \\
\left[\begin{array}{c} B^T \\ N^T \end{array} \right] \pi + \left[\begin{array}{c} s_B \\ \boldsymbol{s}_N \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{c}_N \\ c_N \end{array} \right]
\end{array}
$$

y por tanto

$$
\begin{array}{rcl}
\pi & = & B^{-T} \boldsymbol{c}_N, \\
\boldsymbol{s}_N & = & c_N - N^T \pi = c_N - (B^{-1} N)^T \boldsymbol{c}_N.
\end{array}
$$

Si $\boldsymbol{s}_N \succeq 0$ se cumplen todas las KKTs y se llegó a una solución.

- Sin embargo, el caso mas común es que exista algún índice ‘q’ para el cual $s_q = (\boldsymbol{s}_N)_q < 0$.
- El nuevo *índice de entrada* de $\mathcal{B}$ es seleccionado de alguno de los índices ‘q’ para el cual $s_q < 0$.

Las ideas para modificar $\mathcal{B}$, x y s en cada iteración son:

- Hacer que $\boldsymbol{x}_q$ crezca desde cero.
- Fijar el resto de las componentes de $\boldsymbol{x}_N$ a cero.
- Analizar el efecto el de incrementar $\boldsymbol{x}_q$ en la solución actual $\boldsymbol{x}_B$, teniendo en cuenta que la nueva solución sea factible, es decir, debe cumplir, $Ax = b$
- Incrementar $\boldsymbol{x}_q$ hasta que una componente de $\boldsymbol{x}_B$ se haga cero (ie. $\boldsymbol{x}_p$) si existe entonces hay solución, de lo contrario el problema es no acotado.
- Eliminar el índice 'p' de $\mathcal{B}$ y añadir el índice 'q'.

Sea x^+ la nueva solución y x la solución actual, entonces

$$A\boldsymbol{x}^+ = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

.
Puesto que $\boldsymbol{x}_N = 0$, entonces $x_i^+ = (\boldsymbol{x}_N^+)_i = 0$, para toda $i \in \mathcal{N} \setminus q$, ie, $\boldsymbol{x}_N^+ = [0, \cdots, x_q^+, \cdots, 0]^T$. Luego

$$b = A\boldsymbol{x}^+ = B\boldsymbol{x}_B^+ + N\boldsymbol{x}_N^+ = B\boldsymbol{x}_B^+ + A_q x_q^+ \tag{13}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} b &= Ax = B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = B\boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_B &= B^{-1}b \end{aligned}$$

Luego

$$B\boldsymbol{x}_B^+ + A_q x_q^+ = B\boldsymbol{x}_B \tag{14}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_B^+ &= \boldsymbol{x}_B - B^{-1}A_q x_q^+ \\
\boldsymbol{x}_N^+ &= [0, \cdots, x_q^+, \cdots, 0]^T
\end{aligned}$$

Nota: Cualquier valor de x_q^+ genera una solucion del sistema $Ax = b$, pues, en general el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones de la forma $\hat{x}_B = B^{-1}(b - N\hat{x}_N)$ para cualquier vector $\hat{x}_N$.

La idea ahora es encontrar la menor $\lambda = x_q^+$ para la cual exista una componente de $\boldsymbol{x}_B^+$ que se anule (se hace crecer x_q^+ mientras no se incumplan las restricciones, ie hasta la frontera).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}\lambda &= \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{d} &:= B^{-1}A_q \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \lambda &= (\boldsymbol{x}_B)_{p_1}/d_{p_1} \\ \lambda &= (\boldsymbol{x}_B)_{p_2}/d_{p_2} \\ &\dots \\ \lambda &= (\boldsymbol{x}_B)_{p_m}/d_{p_m} \end{aligned}$$

Solo se consideran las entradas positivas de d_i, pues $\boldsymbol{x}_B \succeq 0$ y λ tiene que ser mayor o igual a cero, ie, $x_q^+ \geq 0$.

- De momento consideremos el caso no degenerado, ie, $\boldsymbol{x}_B \succ 0$, pues el caso degenarado se puede ciclar, ver Nocedal o la regla de Bland (Bland's rule) para evitar que se cicle.
- Finalmente

$$\lambda = \min_{i|d_i>0} \frac{(\boldsymbol{x}_B)_i}{d_i}$$

  donde d es la solución del sistema $Bd = A_q$ (es decir, $d = B^{-1}A_q$).
- El índice 'p' a intercambiar se calcula mediante $p = \arg\min_{i|d_i>0} \frac{(\boldsymbol{x}_B)_i}{d_i}$.

- Luego, de hace $\boldsymbol{x}_q^+ = \lambda$
- Y encontramos un nuevo punto factible $\boldsymbol{x}^+ = [\boldsymbol{x}_B^+; \boldsymbol{x}_N^+]$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_B^+ &= \boldsymbol{x}_B - B^{-1} A_q x_q^+ \\ \boldsymbol{x}_N^+ &= [0, \cdots, x_q^+, \cdots, 0]^T \end{aligned}$$

- Obtenemos los indices $\mathcal{B}(x^+) = \mathcal{B}(x) \cup \{q\} \setminus \{p\}$, $\mathcal{N}(x^+) = \mathcal{N}(x) \cup \{p\} \setminus \{q\}$ y las nuevas matrices B, N respectivamente.
- Se calcula

$$\boldsymbol{s}_N = c_N - (B^{-1} N)^T \boldsymbol{c}_N.$$

y se verifica nuevamente si $\boldsymbol{s}_N \succeq 0$. Se repite el proceso hasta encontrar una solución o se encuentra que el problema no es acotado.

Procedimiento 13.1 "Un paso del Simplex "
Dado $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}b \succeq 0$, $\boldsymbol{x}_N = 0$;

- Resolver $B^T\pi = \boldsymbol{c}_N$ para λ;
- Determinar $\boldsymbol{s}_N = c_N - N^T\pi$;
- **Si** $\boldsymbol{s}_N \succeq 0$ **Parar** "Se llegó a la solución";
- Seleccionar $q \in \mathcal{N}$ de modo que $s_q < 0$ como el *índice de entrada*;
- Resolver $B\boldsymbol{d} = A_q$ para t;
- **Si** $\boldsymbol{d} \preceq 0$ **Parar** "El problema es *no acotado*";
- Calcular $x_q^+ = \min_{i|d_i>0} \frac{(\boldsymbol{x}_B)_i}{d_i}$, y $p = \arg\ \min_{i|d_i>0} \frac{(\boldsymbol{x}_B)_i}{d_i}$ denota el índice de la variable básica donde se alcanza el mínimo;
- Actualizar $\boldsymbol{x}_B^+ = \boldsymbol{x}_B - dx_q^+$, $\boldsymbol{x}_N^+ = [0, 0, \ldots, x_q^+, \ldots, 0, 0]^T$;
- Actualizar $\mathcal{B}$ añadiendo q y quitando p, Actualizar $\mathcal{N}$.

El Simplex requiere de un punto básico factible (PBF), existen varias estrategias para inicializar este método.

- Como afecta el procedimiento anterior a la funcion objetivo?
- El valor de la funcion objetivo para la nueva x^+ es

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^+ &= \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_B^+ + c_N^T\boldsymbol{x}_N^+ \\
&= \boldsymbol{c}_N^T(\boldsymbol{x}_B - B^{-1}A_q x_q^+) + c_q x_q^+ \\
&= \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N^T B^{-1}A_q x_q^+ + c_q x_q^+ \\
&= \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_B - \pi^T A_q x_q^+ + c_q x_q^+ \qquad\qquad (\pi = B^{-T}\boldsymbol{c}_N) \\
&= (\boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_B + c_N^T\boldsymbol{x}_N) - (c_q - s_q)x_q^+ + c_q x_q^+ \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(por KKT1, } c_N^T\boldsymbol{x}_N = 0) \\
&= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + s_q x_q^+
\end{aligned}$$

Luego $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^+ \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ pues $s_q x_q^+ \leq 0$, es decir, la funcion no crece.

Nota que si en

$$\boldsymbol{x}_B^+ \quad = \quad \boldsymbol{x}_B - d x_q^+$$

con $d = B^{-1}A_q$ se tiene que $d \prec 0$, entonces $\boldsymbol{x}_B^+ \succeq 0$ para todo $x_q^+ \geq 0$. Haciendo $x_q^+ \to \infty$ y como $s_q < 0$, a partir de

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + s_q x_q^+$$

entonces $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^+ \to -\infty$, es decir, el problema es no acotado!

Problemas: https://neos-guide.org/Case-Studies
Ejemplos: Agregando **variables de holgura.**

$$\min\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema se puede representar como:

$$\text{min } a^T y \quad s.a: \quad My \leq b, \quad y \geq 0.$$

donde $a = [6, 4, 3]^T$, $y = [x_1, x_2, x_3]^T$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se transforma su forma estándar, agregando variables de holgura, y se tiene entonces:

$$\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \quad s.a: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \;\; \boldsymbol{x} \succeq 0.$$

donde $c = [6, 4, 3, 0, 0, 0]^T = [a|0]^T$,
$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [y|z]^T$ y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\; M \mid I \; \right]$$

Ahora es fácil hallar un Punto Básico Factible, basta tomar para ello: $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ luego
$\boldsymbol{x}_N = [x_1, x_2, x_3]^T = [0, 0, 0]^T = 0$ y
$\boldsymbol{x}_B = [x_4, x_5, x_6]^T = b = [12, 10, 8]^T$.

Agregando **variables artificiales.**

$$\text{min } 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ahora se transforma su forma estándar, agregando variables de holgura, y se tiene entonces:

$$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \quad s.a: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \;\; \boldsymbol{x} \succeq 0.$$

donde $c = [6, 4, 3, 0, 0, 0, M]^T$ (big M),
$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [y|z]^T$ y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora es fácil hallar un Punto Básico Factible, basta tomar para ello: $\mathcal{N} = \{1,2,3,6\}$ y $\mathcal{B} = \{4,5,7\}$ luego
$\boldsymbol{x}_N = [x_1, x_2, x_3, x_6]^T = [0,0,0,0]^T = 0$ y
$\boldsymbol{x}_B = [x_4, x_5, x_7]^T = b = [12, 10, 8]^T$.
Note que por cada restricción se introduce una variable de holgura, salvo en el caso de la tercera donde se introduce una variable **artificial** x_7, lo anterior es equivalente a haber introducido la variable de holgura $\widetilde{x}_6,\ \widetilde{x}_6 \geq 0$ y luego haber considerado $\widetilde{x}_6 = \widetilde{x}_6^+ - \widetilde{x}_6^-$ con $\widetilde{x}_6^+ \geq 0$, $\widetilde{x}_6^- \geq 0$ y $\widetilde{x}_6 \geq 0$.

La tercera restricción se escribiría como
$4x_1 + 2x_2 + x_3 - \widetilde{x}_6 = 8$, o lo que es lo mismo,
$4x_1 + 2x_2 + x_3 - \widetilde{x}_6^+ + \widetilde{x}_6^- = 8$, es decir $x_6 = \widetilde{x}_6^+$ y $x_7 = \widetilde{x}_6^-$.
Nota: si hubiera una restricción de la forma
$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -8$, también es necesario introducir una variable artificial, pues con una de holgura no es suficiente para encontrar de forma evidente un punto básico factible, luego quedaría: $4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 - x_7 = -8$, x_6 de holgura, y x_7 variable artificial.