Tarea I forma estándar (Primal) y Dual

Joel Chacón Castillo

***Abstract*—El problema de asignación consiste en encontrar la forma de asignar ciertos recursos disponibles para realizar determinada con un menor coste. Por otra parte el problema de transporte se funda en la necesidad de llevar unidades desde un punto específico hasta otro punto específico. Los problemas previamente mencionados son resueltos de forma determinística por medio de Programación Lineal (PL). En este trabajo se presentan sus respectivas modelaciones, además sus formas primales (estándar) y duales.**

I. Introduction

PROGRAMACIÓN lineal tiene un número de funciones objetivo y restricciones lineales, las cuales pueden estar conformadas tanto por igualdades como desigualdades. El conjunto factible es un polítopo, el cual es un conjunto convexo conectado con caras poligonales planas [1]. Los programas lineales usualmente son establecidos y analizados en la siguiente forma estándar:

La forma estándar de un problema de programación lineal es:

$$min \quad \vec{c}^T\vec{x}, \quad sujeto \quad a: \quad A\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0 \tag{1}$$

Su correspondiente planteamiento dual es:

$$max \quad \vec{b}^T\vec{\pi}, \quad sujeto \quad a: \quad A^T\vec{\pi} \leq \vec{c} \tag{2}$$

Para convertir formulación que corresponde a un problema de optimización a la forma estándar se debe considerar agregar las variables de holgura (slack) $\vec{s}$, exceso (superplus) $\vec{z}$ o en según sea el caso multiplicar por el signo negativo la función objetivo. Es importante no confundir la notación de esta sección con las siguientes.

A. Relaciones entre problemas primales y problemas duales

- El número de variables que presenta el problema dual se ve determinado por el número de restricciones que presenta el problema primal.
- El número de restricciones que presenta el problema dual se ve determinado por el número de variables que presenta el problema primal.
- Los coeficientes de la función objetivo en el problema dual corresponde a los términos independientes de las restricciones, que se ubican del otro lado de las variables.
- Los términos independientes de las restricciones en el problema dual corresponden a los coeficientes de la función objetivo en el problema primal.
- La matriz que determina los coeficientes técnicos de cada variable en cada restricción corresponde a la transpuesta de la matriz de coeficientes técnicos del problema primal.

B. Condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,\pi,s) =& c^Tx - \pi^T(Ax-b) - s^Tx \\
sujeto \quad a & \\
A^T\pi + s =& x \\
Ax =& b \\
x \geq& 0 \\
s \geq& 0 \\
s_ix_i =& 0, \quad i = 1,2,...,n
\end{aligned} \tag{3}$$

donde π es el coeficie de Lagrange.

Para representar la forma dual desde la forma primal se realiza el proceso:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,\pi,s) =& c^Tx - \pi^T(Ax-b) - s^Tx \\
=& (c^T - A^T\pi - s)x + \pi^Tb
\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto la función Dual se obtiene si:

$$q(\pi,s) = inf_x\mathcal{L}(x,\pi,s) = (c^T - A^T\pi - s)x + \pi^Tb \tag{5}$$

Entonces se tiene su cota inferior si $(c^T - A^T\pi - s) = 0$ resultando así $q(\pi,s) = \pi^Tb$. Anuque es deseable realizar este proceso para obtener la forma Dual que corresponde a cada problema, no es totalmente necesario, es decir, teniendo la forma estándar únicamente es necesario realizar reemplazos para obtener la forma de la ecuación (2).

II. Método/Algoritmo

A. Asignación de recursos

Este problema consiste en asignar de forma óptima recursos limitados a actividades que compiten entre sí.

- Z: Valor de la medida global de desempeño, también se conoce como la función objetivo.
- x_j: Es el nivel o taza de la actividad o producto $j \in \{1,2,...,n\}$, también se conocen como variables de decisión.
- b_j: Incremento de Z que se obtiene de aumentar x_j.
- a_i: Cantidad disponible del recurso $i \in \{1,2,...,m\}$.
- c_{ij}: Cantidad del recurso i consumido en la actividad j.

El beneficio por producto se obtiene mediante la fórmula b_j (beneficio unidad de producto) $* x_j$ (Unidad de producto) = $b_j * x_j$.

Entonces el problema es modelado como se muestra en (6).

$$
\begin{aligned}
&Maximizar \quad Z = b_1x_1 + b_2x_2 + .. + b_nx_n \\
&Sujeto \quad a \\
&\begin{bmatrix}
c_{11}x_1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \leq a_1 \\
c_{21}x_1 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \leq a_2 \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\
c_{m1}x_1 & c_{m2}x_2 & c_{m3}x_3 & \dots & c_{mn}x_n \leq a_m
\end{bmatrix} \\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad ,..., \quad x_n \geq 0 \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leq a_i, \quad x_j \geq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Por conveniencia se utiliza la notación vectorial:

$$
\begin{aligned}
Minimizar \quad Z = \vec{b}\vec{x}^T \\
sujeto \quad a: \\
C^T\vec{x} \leq \vec{a} \\
\vec{x} \geq 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

donde C representa a una matriz, cada entrada C_{ij} representa una cierta cantidad de recurso consumido en una actividad.

Por lo tanto se obtiene la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
&min \quad Z = -bx^T \\
&sujeto \quad a: \\
&C\vec{x}^T + \vec{s} = \vec{a} \\
&\vec{s} \geq 0 \\
&\vec{x} \geq 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Esta forma no se considera suficientemente estándar desde que no todas las variables están restringidas a la no negatividad. Para resolver esto se separa el vector $\vec{x}$ en sus componentes no negativos y no positivos, donde $\vec{x} = \vec{X}^+ - \vec{X}^-$. Entonces $\vec{X}^+ = max(\vec{x}, 0) \geq 0$ y $\vec{X}^- = max(\vec{x}, 0) \geq 0$, teniendo así:

$$
min \quad \begin{bmatrix} \vec{b} \\ -\vec{b} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{x}^+ \\ \vec{x}^- \\ \vec{z} \end{bmatrix} s.a. \begin{bmatrix} C & -C & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}^+ \\ \vec{x}^- \\ \vec{s} \end{bmatrix} = \vec{a}, \begin{bmatrix} \vec{x}^+ \\ \vec{x}^- \\ \vec{s} \end{bmatrix} \geq 0
\tag{9}
$$

La forma dual es:

$$
\begin{aligned}
&max \quad (C\vec{x}^T + \vec{s})\pi \rightarrow max \quad \vec{a}^T\vec{\pi} \\
&sujeto \quad a: \\
&C^T\vec{\pi} \leq -\vec{b} \\
&\vec{\pi} \geq 0 \\
&\vec{x} \geq 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

B. Problema del transporte

Sean "I" fuentes F_i que producen b_i unidades de cierto producto, con $i = 1, 2, ..., I$. Además, si "J" consumidores cuya demanda D_j es de a_j, con $j = 1, 2, ..., J$. El costo de envío de un producto de la fuente F_i al consumidor D_j es de $c_{ij} \geq 0$. La demanda se satisface, es decir $\sum_{i=1}^{I} b_i \geq \sum_{j=1}^{J} a_j$. La formulación del problema de programación lineal consiste en minimizar los costos. Dado que x_{ij} es la cantidad de productos que se envían de la fuente F_i al consumidor D_j, por lo tanto, el costo por cosumidor es $c_{ij}x_{ij}$, el costo total por fuente es $CostoTotal(x) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} C_{ij}X_{ij}$. Donde $x = [x_{11}, ..., x_{1J}, x_{21}, ..., x_{2J}, ..., x_{I1}, ..., x_{IJ}]^T$ y $x \geq 0$, por lo tanto existen $I * J$ restricciones.

Finalmente el problema queda formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
min_x \quad CostoTotal(x) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} C_{ij}X_{ij} \\
Sujeto \quad a \\
x \geq 0 \\
\sum_{j=1}^{J} X_{ij} \leq b_i \quad i = 1, 2, ..., I; \\
\sum_{i=1}^{I} X_{ij} \geq a_j \quad j = 1, 2, ..., J;
\end{aligned}
\tag{11}
$$

En notación vectorial se tiene:

$$
\begin{aligned}
min_x \quad CostoTotal(x) = C^T\vec{X} \\
Sujeto \quad a \\
\vec{X} \geq 0 \\
\vec{X} \leq \vec{b} \\
\vec{X} \geq \vec{a}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

La forma estándar es:

$$
\begin{aligned}
min_x \quad C^T\vec{X} \\
Sujeto \quad a \\
\vec{X} \geq 0 \\
\vec{X} + \vec{S} = \vec{b} \\
\vec{X} - \vec{Z} = \vec{a}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

La forma dual es:

$$
\begin{aligned}
max \quad \vec{\pi_1}b^T + \vec{\pi_2}a^T \\
Sujeto \quad a \\
\vec{\pi_1} \geq 0 \\
\vec{\pi_2} \geq 0 \\
A^T\vec{\pi_1} + B^T\vec{\pi_2} \leq C
\end{aligned}
\tag{14}
$$

donde $A = B = I$, es decir corresponde a la matriz identidad, también se puede decir que está construido en base a la delta de kronecker.

References

[1] J. Nocedal and S. J. Wright, *Sequential quadratic programming*. Springer, 2006.

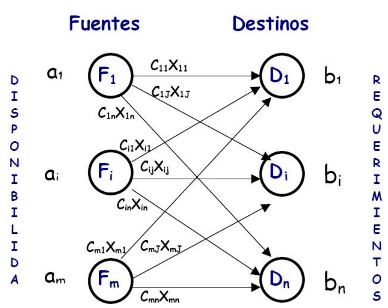

Fig. 1. Diagrama del problema del transporte.