Optimización II. Capítulo 13. “Programción Lineal’

Oscar S. Dalmau Cedeño
dalmau@cimat.mx

24 de septiembre de 2018

Introducción

- La Programación Lineal (PL) es uno de los avances más importantes del siglo pasado.
- Es una herramienta de uso normal que ha permitido ahorrar mucho dinero a varias empresas en el mundo.
- La PL usa un modelo matemático para describir un problema. El término lineal se refiere a que las funciones que aparecen en el modelo son lineales.
- Programación es sinónimo de planeación
- Una de las aplicaciones más importantes de la PL es la asignación de recursos
- Un problema de PL puede ser resuelto de forma eficiente usando el **método simplex**

Problema

La Windor Glass Co. produce artículos de vidrio de alta calidad, entre ellos ventanas y puertas de vidrio. Tiene 3 plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1, los de madera en la planta 2 y la planta 3 produce el vidrio y ensambla los productos.
Debido a una reducción de las ganancias, la administración ha decidido reorganizar la línea de producción de la compañía. Se decontinurán varios productos no rentables y se dejará una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de 2 nuevos productos cuyas ventas potenciales son prometedoras:

1. Producto 1: Una puertas de vidrio de 8 pies con marco de aluminio
2. Producto 2: Una ventana corrediza con marco de madera de 4 por 6 pies

Problema

- El producto 1 requiere parte de la capacidad de producción de las plantas 1 y 3, y no requieres de la planta 2
- El producto 2 requiere solo del trabajo de las plantas 2 y 3

La división de comercialización ha concluído que la compañía puede vender todos los productos que se puedan fabricar en las plantas. Sin embargo, ambos productos competirían por la misma capacidad de producción de la planta 3 y no es claro cual mezcla de productos es la más rentable.

Problema

Se ha formado un equipo de Investigación de Operaciones (IO) para estudiar este problema. Después de varias juntas con la administración para identificar los objetivos del estudio, desarrollaron la siguiente definición del problema:
Deteminar cuáles tasas de producción deben tener los dos productos con el fin de maximizar las utilidades totales, sujetas a las restricciones impuestas por las capacidades de producción limitadas de las 3 plantas. Se permite cualquier combinación de las tasas que satisfagan estas restricciones, incluso se permite no fabricar un producto y elaborar todo lo que sea posible del otro. Cada producto se fabricará en lotes de 20 unidades, de modo que la tasa de producción está definida como el número de lotes que se produce a la semana.

Problema

El equipo de IO también identificó los datos que se necesitaba reunir

1. Número de horas de producción disponibles por semana en cada planta para fabricar estos productos (casi todo el tiempo de las plantas está comprometido con los productos actuales): La planta 1 disponde de 4 horas, la planta 2 disponde de 12 horas y la planta 3 dispone de 18 horas.
2. Número de horas de fabricación que se emplea para producir cada lote de artículo nuevo en cada una de las plantas: producto 1 requiere 1 hora de la planta 1 y 3 de la planta 3, mientras que el producto 2 requiere de 2 horas de la planta 2 y 2 horas de la planta 3.

Problema

1. La ganancia por lote de cada producto: ganancia del producto 1 es de $\$$3000.00 MXN y la del producto 2 es de $\$$ 5000.00 MXN

Formulación como un problema PL

1. x_1 número de lotes del producto 1 que se fabricarán en una semana
2. x_2 número de lotes del producto 2 que se fabricarán en una semana
3. Z ganancia semanal total en miles de pesos

Planta	Tiempo de producción por lote (horas) Producto 1	Tiempo de producción por lote (horas) Producto 2	Tiempo de Producción disponible
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
ganancias	3000.00	5000.00	

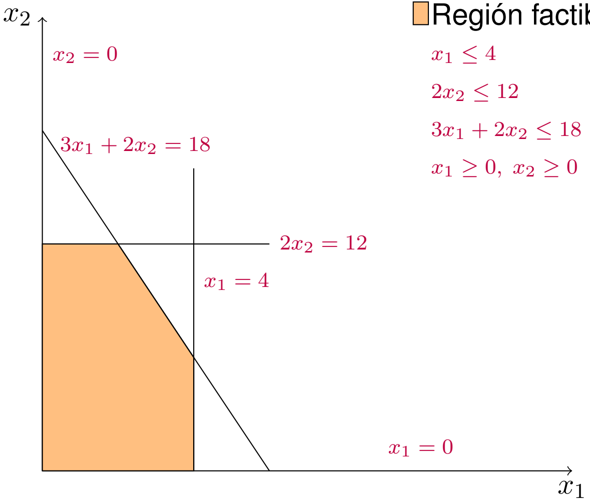
Formulación como un problema PL

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0 \quad &, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución Gráfica



Región factible

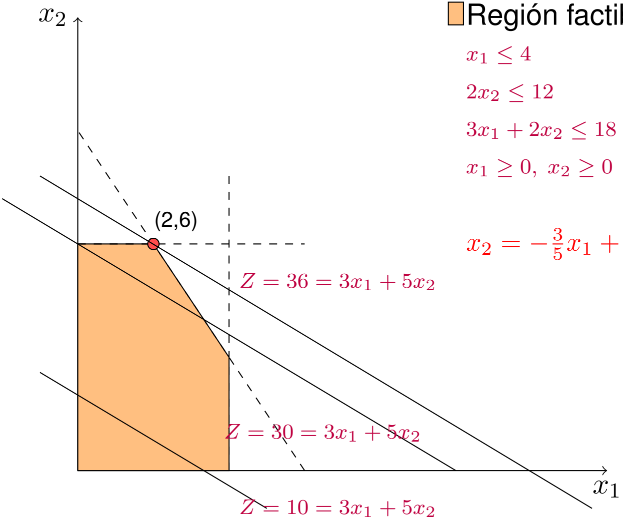
$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

Solución Gráfica



Región factible

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$$

Solución Gráfica

- El método seguido anteriormente se le conoce como Solución Gráfica y puede ser usado en problemas similares. Cuando el número de variables es mayor a 2 es difícil de usar.
- La solución óptima de problema se encuentra en $x_1 = 2,\ x_2 = 6$ con $Z = 36$, es decir, la ganancia total a la semana sería de $36000{,}00 MXN$.
- De acuerdo al modelo, la solución es única.

Problema PL: Problema General

1. **Problema**: Asignar de forma óptima recursos limitados a actividades que compiten entre sí
2. En el ejemplo anterior: El recurso es el tiempo disponible por cada planta, y la actividad correponde a cada producto producido
3. Suponga que se tienen m Almacenes A_i, $i = 1, 2, \cdots, m$. Cada almacen dispone de a_i recursos (los recursos pueden entre las diferentes plantas). Suponga que se tienen m unidades de producción o talleres T_j, $j = 1, 2, \cdots, m$ que producen un producto P_j y dicho producto produce un beneficio b_j por cada unidad del producto. Si para producir una unidad del producto P_j se requieren c_{ij} recursos del Almancen i esimo, cual es el modelo que maximiza el beneficio total?

Problema PL: Problema General

1. Notación:

Z	Valor de la medida global de desempeño
x_j	Nivel o taza de la actividad o producto $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$
b_j	Incremento en Z que se obtiene al incrementar x_j
a_i	cantidad disponible del recurso $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$
c_{ij}	Cantidad del recurso i consumido en la actividad j

2. A las x_j se llaman variables de decisión puesto que el modelo se plantea en términos de tomar decisiones sobre los niveles de cada actividad

Problema PL: Forma Tabular

Recurso	Consumo de recursos por unidad Actividad 1	···	n	Cantidad Recurso disponible
1	c_{11}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...
m	c_{m1}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Contribución a Z	b_1	$\cdots$	b_n	

Los c_{ij}, a_i y b_j son las constantes de entrada o parámetros del modelo

Problema PL

Beneficio por producto:
$b_j(beneficio/unidaddeproducto) * x_j(unidaddeproducto)$
$= b_j * x_j(beneficio)$.

Luego, el beneficio total es:
Función Objetivo: $Z = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$

Problema PL

Recursos necesarios del Almacen i para producir x_j unidades de producto:
$c_{ij}(recurso/unidaddeproducto) * x_j(unidaddeproducto)$
$= c_{ij} * x_j(recurso)$.

Recursos necesarios del Almacen i para producir todos los productos:
$R_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n$
Luego, se obtiene la siguiente **restriccion** de los recursos parav el almacen i:

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n \quad \leq \quad a_i$$

Restricciones de no negatividad: $x_j \geq 0$

Problema PL

Maximizar $Z = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$
Sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n & \leq & a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n & \leq & a_2 \\ \vdots & \leq & \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n & \leq & a_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \cdots,\ x_n \geq 0 & & \end{array}$$

Z	Se le llama **función objetivo**
$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leq a_i$	**restricciones funcionales** o estructurares
$x_j \geq 0$	**restricciones de no negatividad**

Problema del transporte: Formulación General.

Sean 'I' fuentes F_i que producen b_i unidades de cierto producto, con $i = 1, 2, \ldots, I$. Sean además 'J' consumidores D_j cuya demanda es de a_j unidades, con $j = 1, 2, \ldots, J$.
Suponga que el costo de envío (por unidad de producto) de un producto de la fuente F_i al consumidor D_j es de $c_{ij} \geq 0$.
Suponga que la demanda se satisface, es decir:
$\sum_{i=1}^{I} b_i \geq \sum_{j=1}^{J} a_j$.
Realizar la formulación del problema de Programación Lineal para minimizar los costos.

Problema del transporte: Respuesta

Denotemos por x_{ij} la cantidad de productos que se envían de la fuente F_i al consumidor D_j, por lo tanto, el costo por consumidor seria $c_{ij}x_{ij}$, el costo total por fuente es $CostoFuente(i) = \sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij}$ y el costo total seria:

$$CostoTotal(x) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

donde $x = [x_{11}, \ldots, x_{1J}, x_{21}, \ldots, x_{2J}, \ldots, x_{I1}, \ldots, x_{IJ}]^T$ y $x \succeq 0$, aquí hay $I * J$ restricciones.

Problema del transporte: Respuesta

Consideremos ahora las otras restricciones

- El envío total (total de unidades a enviar) de cada planta F_i no puede superar su producción total b_i, es decir:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

  que son I restricciones .

- La demanda de cada consumidor D_j es satisfecha, es decir, el total de unidades recibidas es igual o superior a la demanda a_j.

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \geq a_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

  que son J restricciones .

La cantidad total de restricciones es : $I * J + I + J$.

Problema del transporte: Respuesta

Finalmente el problema quedaría formulado de la siguiente manera:

$$\min_x CostoTotal(x) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a:

$$x \succeq 0; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq a_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{4}$$

donde $x = [x_{11}, \ldots, x_{1J}, x_{21}, \ldots, x_{2J}, \ldots, x_{I1}, \ldots, x_{IJ}]^T$.

Forma estándar

Forma estándar de un problema de programación lineal (PL).

$$\min c^T x, \;\; s.a: \;\; Ax = b, \; x \succeq 0. \tag{5}$$

Ejemplos

Convertir los siguientes problemas de PL a su forma estándar

a) min $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax \succeq b.$

b) min $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax \succeq b, \ \ x \preceq u.$

c) min $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax \succeq b, \ \ x \succeq u.$

d) min $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax \preceq b.$

e) min $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax = b, \ \ |x| \preceq u.$

f) max $c^T x, \ \ s.a: \ \ Ax = b, \ \ x \succeq 0.$

Comentarios

- Cuando no hay restricciones sobre las variables (i.e $x \gtrless 0$) entonces se sugiere tomar $x = x^+ - x^-$ donde $x^+ =$ max $\{0, x\}$ y $x^- =$ max $\{0, -x\}$. Note que $x^+ \succeq 0$ y $x^- \succeq 0$.
- Las restricciones de desigualdad del tipo $\preceq$, se tratan añadiendo *variables de holgura* (slack).
  Ejemplos:
  1. $x \preceq u \Longleftrightarrow x + \omega = u, \; \omega \succeq 0.$
  2. $Ax \preceq b \Longleftrightarrow Ax + y = u, \; y \succeq 0.$

Comentarios

- Las restricciones de desigualdad del tipo $\succeq$, se tratan añadiendo *variables de exceso* (surplus).
  Ejemplos:
  1. $x \succeq u \Longleftrightarrow x - \omega = u, \ \omega \succeq 0.$
  2. $Ax \succeq b \Longleftrightarrow Ax - z = u, \ z \succeq 0.$

Comentarios

- Combinación de restricciones de desigualdad del tipo $\succeq$ y $\preceq$, se tratan añadiendo *variables de exceso y de holgura*. **Ejemplo:**

  1. $|x| \succeq u \Longleftrightarrow x \succeq u \wedge x \preceq -u$
  $\Longleftrightarrow x - \omega_1 = u,\ \omega_1 \succeq 0;\ x + \omega_2 = -u,\ \omega_2 \succeq 0.$

Comentarios

- Problemas de maximización. Se cambia la función objetivo $c^T x$ por $-c^T x$.
  Ejemplo:
  $\max c^T x \Longleftrightarrow \min\ -c^T x$

Convertir a forma estandar

$$\min c^T x, \text{ sujeto a: } Ax \preceq b$$

- Se agregan las variables de holgura $z \succeq 0$ y queda

$$Ax + z = b; \; z \succeq 0$$

- Se toma $x = x^+ - x^-$ donde $x^+ = \max\{0, x\}$ y $x^- = \max\{0, -x\}$. Note que $x^+ \succeq 0$ y $x^- \succeq 0$.

Convertir a forma estandar

- Se transforma la funcion objetivo con las nuevas variables (notacion matlab)

$$c^T x \quad = \quad [c^+; c^-; 0]^T [x^+; x^-; z]$$

- Se transforman las restricciones con las nuevas variables (notacion matlab)

$$Ax + z \quad = \quad A(x^+ - x^-) + Iz = [A, -A, I] \left[x^+; x^-; z\right]$$

y queda

$$\begin{aligned} [A, -A, I] \left[x^+; x^-; z\right] &= b \\ \left[x^+; x^-; z\right] &\succeq 0. \end{aligned}$$

Problema dual

Cual es el problema dual de

$$\text{min } c^T x, \quad s.a: \quad Ax = b, \; x \succeq 0. \tag{6}$$

Condiciones de Optimalidad

Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, \pi, s) = c^T x - \pi^T (Ax - b) - s^T x. \tag{7}$$

Condiciones KKT.

$$\begin{aligned} A^T \pi + s &= c, && (8)\\ Ax &= b, && (9)\\ x &\succeq 0, && (10)\\ s &\succeq 0, && (11)\\ x_i s_i &= 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. && (12) \end{aligned}$$

Funcion dual

Lagrangiano:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,\pi,s) &= c^T x - \pi^T(Ax-b) - s^T x && (13)\\ &= (cx - A^T\pi - s)x + \pi^T x && (14)\end{aligned}$$

Funcion Dual

$$q(\pi,s) = \text{inf}_x \mathcal{L}(x,\pi,s) = (c - A^T\pi - s)x + \pi^T b \qquad (15)$$

Para que este acotada $c - A^T\pi - s = 0$ (que es una KKT, ver diapositiva anterior). Luego la Funcion Dual es:

$$q(\pi,s) = \pi^T b \qquad (16)$$

Problema dual

Funcion Dual es:

$$q(\pi, s) = \pi^T b \tag{17}$$

y se debe cumplir, por las KKTs que $s \geq 0$. Como

$$c - A^T\pi - s = 0 \tag{18}$$

entonces queda

$$\begin{aligned} A^T\pi + s &= c, \qquad (19) \\ s &\succeq 0 \qquad (20) \end{aligned}$$

Problema dual

El problema dual es:

$$
\begin{aligned}
\text{max}_{\pi,s} q(\pi, s) &= \pi^T b && (21)\\
\text{s.a: } A^T\pi + s &= c, && (22)\\
s &\succeq 0 && (23)
\end{aligned}
$$

el problema anterior se puede escribir de forma (compacta) equivalente

$$
\begin{aligned}
\text{max}_{\pi} q(\pi) &= \pi^T b && (24)\\
\text{s.a: } A^T\pi &\preceq c && (25)
\end{aligned}
$$

Problema Primal–Dual

Problema	min $c^T x \quad s.a: \quad Ax = b; \quad x \succeq 0.$	max $b^T \pi \quad s.a: \quad c - A^T \pi \succeq 0.$
Lagrangiano	$\mathcal{L}_P(x, \pi, s) = c^T x - \pi^T (Ax - b) - s^T x$	$\mathcal{L}_D(\pi, x) = -b^T \pi - x^T (c - A^T \pi)$
KKT	$\nabla_x \mathcal{L}(x, \pi, s) = 0, \Leftrightarrow s = c - A^T \pi,$ $Ax = b,$ $x \succeq 0,$ $s \succeq 0,$ $x_i s_i = 0.$	$\nabla_\pi \mathcal{L}(\pi, x) = 0, \Leftrightarrow Ax = b,$ $s \stackrel{def}{=} c - A^T \pi \succeq 0,$ $s \succeq 0,$ $x \succeq 0,$ $[c - A^T \pi]_i x_i = s_i x_i = 0.$

Cuadro: Primal – Dual

Problema Primal–Dual

Observe que la relación entre ambos lagrangianos se obtiene mediante

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(\pi, x) &= -\mathcal{L}_P(x, \pi, s) \\ &= -c^T x + \pi^T (Ax - b) + s^T x \\ &= -b^T \pi - x^T (c - A^T \pi) + s^T x\end{aligned}$$

Pero $x * s = 0$ entonces

$$\mathcal{L}_D(\pi, x) = -b^T \pi - x^T (c - A^T \pi) \tag{26}$$

Problema Primal–Dual

El lagrangiano anterior corresponde al problema:

$$\min \; -b^T\pi \;\; s.a: \;\; c - A^T\pi \succeq 0. \tag{27}$$

Que es equivalente al siguiente (conocido como *problema dual*)

$$\max \; b^T\pi \;\; s.a: \;\; c - A^T\pi \succeq 0. \tag{28}$$

Teorema de Dualidad

Teorema 13.1: “Teorema de Dualidad Fuerte de la PL”

i) Si un problema de PL o su dual tienen una solución con valor finito en la función objetivo, entonces el otro problema también tendrá solución y los valores de la función objetivo son iguales.

ii) Si un problema de PL o su dual tienen función objetivo no acotada, entonces el otro problema no tiene puntos factibles.

Observaciones

Sea x^*, π^*, s^* una solucion de las condiciones KKT anteriores entonces el valor de las funciones objetivo del primal y el dual en dicho punto es el mismo, i.e., $c^T x^* = b^T \pi^*$. Usando las KKTs

$$\begin{aligned} c^T x^* &= (A^T \pi^* + s^*)^T x^* && \text{(por KKT 1)} \\ &= (\pi^*)^T A x^* + (s^*)^T x^* \\ &= (\pi^*)^T A x^* && \text{(pues } (s^*)^T x^* = 0\text{)} \\ &= (\pi^*)^T b && \text{(pues } Ax^* = b\text{)} \end{aligned}$$

Cumple la dualidad fuerte, el gap es igual a cero!.

Observaciones

x^* es una solución global del problema original, $c^T x \geq c^T x^*$ para x factible.

Sea x un punto factible

$$\begin{aligned} c^T x &= (A^T \pi^* + s^*)^T x \\ &= (\pi^*)^T A x + (s^*)^T x \\ &\geq (\pi^*)^T A x && \text{(pues } s^*, x \succeq 0\text{)} \\ &= (\pi^*)^T b && \text{(pues } Ax = b\text{)} \\ &= c^T x^* && \text{(por la dualidad fuerte)} \end{aligned}$$

Observaciones

π^* es una solución global del problema dual, $b^T\pi \preceq b^T\pi^*$ para π factible.

Sea π un punto factible

$$\begin{aligned} b^T\pi &= (x^*)^T A^T \pi && \text{(pues } Ax^* = b\text{)} \\ &= (x^*)^T (c - s) && \text{(pues } s = c - A^T\pi \succeq 0\text{)} \\ &= c^T x^* - (x^*)^T s && \\ &\leq c^T x^* && \text{(pues } x^*, s \succeq 0\text{)} \\ &= b^T \pi^* && \text{(por la dualidad fuerte)} \end{aligned}$$