Métodos de Penalización y Lagrangiano Aumentado

Oscar S. Dalmau Cedeño
dalmau@cimat.mx

13 de noviembre de 2018

Sea el siguiente problema de optimización con restricciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \arg\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.a. \quad & c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i \in \mathcal{E} \\ & c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

La idea general es convertir el problema de optimización con restricciones en una secuencia de subproblemas de optimización sin restricciones de la siguiente forma

$$m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\eta}^k) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i\in\mathcal{E}} \mu_i^k \phi(c_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \eta_i^k \psi(c_i(\boldsymbol{x}))$$

con $\boldsymbol{\mu}^k = [\mu_1^k, \cdots, \mu_{|\mathcal{E}|}^k]^\top$, $\boldsymbol{\eta}^k = [\eta^k, \cdots, \eta_{|\mathcal{I}|}^k]^\top$, de modo que la siguiente secuencia de óptimos

$$\boldsymbol{x}^k = \arg\min_{\boldsymbol{x}} m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\eta}^k)$$

converje a $\boldsymbol{x}^*$ cuando $k \to \infty$.

- $M(\cdot,\cdot,\cdot)$ tambien se le conoce como *función de Merito*, ie, en este caso es una combinacion de la función objetivo con medidas de violacion de las restricciones.
- $\psi(\cdot)$ penaliza las restricciones de desigualdad. $\psi(\cdot)$ es una función continua tal que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0, \text{ si } x \geq 0 \\ \psi(x) &> 0, \text{ si } x < 0 \end{aligned}$$

- $\phi(\cdot)$ penaliza las restricciones de igualdad. $\phi(\cdot)$ es una función continua tal que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0, \text{ si } x = 0 \\ \phi(x) &> 0, \text{ si } x \neq 0 \end{aligned}$$

Nota: Podemos definir $\phi(\cdot)$ usando $\psi(\cdot)$ como sigue

$$\phi(x) \quad = \quad \psi(x) + \psi(-x)$$

pues

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= 0, \text{ si } x = 0 \\
\phi(x) &= \psi(x) > 0, \text{ si } x < 0 \\
\phi(x) &= \psi(-x) > 0, \text{ si } x > 0
\end{aligned}$$

- $\{\mu_i^k\}$ es una secuencia creciente, ie, $\mu_i^k < \mu_i^{k+1}$, y $\mu_i^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$.
- La secuencia $\{\eta_i^k\}$ es una secuencia monótona con $\eta_i^k > 0$ y puede ser creciente o decreciente (ver ejemplos mas adelante!)

- En la práctica, es conveniente trabajar con pocos parámetros, por lo que se puede tomar $\mu^k = \mu_i^k$ y $\eta^k = \eta_i^k$ para toda i, lo que permite trabajar con solo 2 parámetros.
- La función de mérito quedaría

$$m(\boldsymbol{x}, \mu^k, \eta^k) = f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \sum_{i \in \mathcal{E}} \phi(c_i(\boldsymbol{x})) + \eta^k \sum_{i \in \mathcal{I}} \psi(c_i(\boldsymbol{x}))$$

con $\mu^k, \eta^k \in R$. Por otro lado, es conveniente escribir η^k en función de μ^k, por ejemplo $\eta^k = \mu^k$ si η^k es creciente o $\eta^k = 1/\mu^k$ si η^k es decreciente. Con lo anterior trabajaríamos solo con la secuencia $\{\mu^k\}$.

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= x^{2n},\ n \in \mathbb{N} \\
\psi(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^p & \text{si } x < 0,\ p \geq 1 \end{cases} = \max\{0, -x\}^p \\
\psi(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \exp\left(-\boldsymbol{\lambda} x\right) & \text{si } x < 0,\ \boldsymbol{\lambda} > 0 \end{cases} \\
\psi(x) &= \begin{cases} \infty & \text{si } x < \varepsilon \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq \varepsilon \end{cases} \\
\psi(x) &= \begin{cases} \infty & \text{si } x < \varepsilon \\ -\log x & \text{si } x \geq \varepsilon \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Como ventaja, es método fácil convertir un problema con restricciones a una secuencia de subproblemas sin restricciones. Lo que permite usar varios métodos de optimización sin restricciones (máximo descenso, Newton, Cuasi-Newton,..., etc).
- Se elimina el problema de buscar un punto inicial factible.

- En muchos problemas prácticos, las restricciones del problema no se tienen que cumplir estrictamente, (son restricciones suaves o ‘soft’) y puede admitir cierta tolerancia a ser violadas, por ejemplo, cantidad de dinero disponible!. Por lo que la solución obtenida por estos métodos puede ser conveniente.

- Una dificultad (en ciertos problemas) es que la solución de la secuencia de problemas penalizado sin restricciones no es necesariamente igual o exactamente igual a la solución del problema original con restricciones[1]. La solución del problema original se puede garantizar solamente como el limite de las soluciones de la secuencia de subproblemas!

- En algunos casos no se puede aplicar el método de penalización, por ejemplo, para funciones objetivos que están definidas solamente en la region factible, o lo que es lo mismo, para funciones que no están definidas fuera de la region factible. En este caso no se pueden usar métodos de penalización 'externos', es decir, métodos donde la secuencia de óptimos $\{\boldsymbol{x}^k\}$ es no factible!, pues $f(\boldsymbol{x}^k)$ no esta definida.

- Otra dificultad de los métodos de penalización es que cuando $k \to \infty$ (cuando aumenta el numero de subproblemas resueltos) entonces los parámetros de penalización refuerzan que se cumplan las restricciones (por ejemplo cuando $\mu_k \to \infty$)
- Lo anterior hace que el subproblema correspondiente se convierta en un problema mal condicionado, con gradientes muy grandes y cambios bruscos en la función de merito o función sin restricciones. Lo anterior requiere que se desarrollen algoritmos cada vez mas eficientes (problema bajo investigación!)

Los métodos de Penalización se usan para resolver el problema

$$\begin{aligned} & \min f(\boldsymbol{x}) \\ s.a. \qquad & c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i \in \mathcal{E} \\ & c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

(es decir, se pueden incluir restricciones de igualdad y desigualdad).

La función de merito se puede escribir, como

$$m(\boldsymbol{x}, \mu) = f(\boldsymbol{x}) + \mu p(\boldsymbol{x})$$

donde μ es el *parámetro de penalización* que se hace tender a infinito, ie, $\mu \to \infty$, y

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \phi(c_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \psi(c_i(\boldsymbol{x}))$$

La *función de penalización* debe cumplir que

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ si } \boldsymbol{x} \in \Omega \\ p(\boldsymbol{x}) &> 0 \text{ si } \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{aligned}$$

donde Ω representa la *region factible*, es decir

$$\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n |\ c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i \in \mathcal{E},\ c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ i \in \mathcal{I}\}$$

es decir, $p(\boldsymbol{x}) = 0$ en la region factible Ω.

Método de Penalización cuadrática.

En este caso se definen $\phi(\cdot)$ y $\psi(\cdot)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x^2 \\ \psi(x) &= \max\{0, -x\}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\max\{0, -x\} = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases} \stackrel{def}{=} [x]^-$$

Y por tanto

$$\psi(x) = \max\{0, -x\}^2 = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

La función $[x]^- \stackrel{def}{=} \max\{0, -x\}$ es decir,

$$\psi(x) = ([x]^-)^2$$

y la derivada de $\psi(x)$ seria

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ 2x & \text{Si } x < 0 \end{cases} \\ &= -2 \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases} \\ &= -2[x]^- \end{aligned}$$

De otra forma

$$
\begin{aligned}
([x]^-)' &= \left(\begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases} \right)' \\
&= \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ -1 & \text{Si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) = \left(([x]^{-})^{2}\right)' &= 2[x]^{-}([x]^{-})' \\
&= 2[x]^{-}\begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq 0 \\ -1 & \text{Si } x < 0 \end{cases} \\
&= -2[x]^{-}
\end{aligned}
$$

Método: Luego, el problema de optimizacion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^* &= \arg\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.a. \quad & c_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i \in \mathcal{E} \\ & c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

planteado mediante *penalización cuadrática* conduce a resolver la secuencia de subproblemas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^k &= \arg\min_{\boldsymbol{x}} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) \\ Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) &\stackrel{def}{=} f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \left(\sum_{i \in \mathcal{E}} (c_i(\boldsymbol{x}))^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}} ([c_i(\boldsymbol{x})]^-)^2 \right) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} & \min f(x) = x^2 \\ s.a. \quad & x - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

La función de merito es

$$Q(x, \mu_k) \;=\; x^2 + \mu_k \max(0, -(x-1))^2 = x^2 + \mu_k([x-1]^-)^2$$

Derivando, igualando a cero y resolviendo

$$
\begin{aligned}
Q'(x,\mu_k) &= 2x - 2\mu_k[x-1]^- \\
&= \begin{cases} 2x & \text{Si } x-1 \geq 0 \\ 2x - 2\mu_k(-(x-1)) & \text{Si } x-1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2x & \text{Si } x-1 \geq 0 \\ 2x + 2\mu_k(x-1) & \text{Si } x-1 < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $x \geq 1$ entonces $x^* = 0$, lo cual es imposible!!.
Si $x < 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
x + \mu_k(x-1) &= 0 \\
x &= \frac{\mu_k}{1+\mu_k}
\end{aligned}
$$

y es el optimo del subproblema, luego $x_k = \frac{\mu_k}{1+\mu_k}$. Sustituyendo en $Q(\cdot,\cdot)$

$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{\mu_k}{1+\mu_k} \\
Q(x_k, \mu_k) &= \frac{\mu_k}{1+\mu_k}
\end{aligned}
$$

- Es claro que la sucesión $Q_k \stackrel{def}{=} Q(x_k, \mu_k)$ es creciente, pues cuando k crece, tambien lo hace la sucesión μ_k y por tanto Q_k.
- ejemploPenalizacionCuadratica.m

Ademas, como

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k = \infty$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} x_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{1+\mu_k} = 1 \\
\lim_{k\to\infty} Q(x_k, \mu_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{1+\mu_k} = 1 \\
\lim_{k\to\infty} f(x_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k^2}{(1+\mu_k)^2} = 1 \\
\lim_{k\to\infty} p(x_k) &= \lim_{k\to\infty} ([x_k - 1]^-)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+\mu_k)^2} = 0
\end{aligned}$$

- Para los métodos de Penalización se selecciona una secuencia $\{\mu^k\}$ creciente $\mu^{k+1} > \mu^k$ tal que $\lim \mu^k = \infty$.
- Consideremos la notacion: Sea $\boldsymbol{x}^k$ el optimo global de la función $m(x, \mu^k)$ y $\boldsymbol{x}^*$ el optimo del problema de optimización original
- Entonces se cumple el Lema siguiente

Lema 1 (I)

Sea $\{\mu^k\}$ una secuencia creciente con $\mu^k > 0$ y $\lim \mu^k = \infty$. Definamos

$$m(\boldsymbol{x}, \mu^k) \stackrel{def}{=} f(\boldsymbol{x}) + \mu_k p(\boldsymbol{x})$$

donde

$$p(\boldsymbol{x}) \stackrel{def}{=} \sum_{i \in \mathcal{E}} \phi(c_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \psi(c_i(\boldsymbol{x}))$$

y las funciones $\phi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ son funciones de penalizacion.

Lema 1 (II)

Si $\boldsymbol{x}^k$ es el optimo global de $m(\boldsymbol{x}, \mu^k)$, ie,

$$\boldsymbol{x}^k \stackrel{def}{=} \arg\min_{\boldsymbol{x}} m(\boldsymbol{x}, \mu^k) = f(\boldsymbol{x}) + \mu^k p(\boldsymbol{x})$$

entonces

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) &\leq m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^{k+1}) \quad (1) \\ p(\boldsymbol{x}^k) &\geq p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \quad (2) \\ f(\boldsymbol{x}^k) &\leq f(\boldsymbol{x}^{k+1}) \quad (3) \end{aligned}$$

Comentarios:

- La sucesion $p_k \stackrel{def}{=} p(\boldsymbol{x}^k)$ es decreciente y positiva, ademas, $\lim_{k\to\infty} p(\boldsymbol{x}^k) = 0$ por lo que se satisfacen las restricciones en el limite! (para los detalles, ver demostración del Lema).
- La sucesion $f_k \stackrel{def}{=} f(\boldsymbol{x}^k)$ es creciente, y como $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^*$ y el problema es de minimizaron entonces la secuencia $\{\boldsymbol{x}^k\}$ es no factible!, pues $f(\boldsymbol{x}^k) \leq f(\boldsymbol{x}^{k+1}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$.

- Si $\boldsymbol{x}^1$ es el optimo global de $m(\boldsymbol{x}, \mu^1)$ y $\boldsymbol{x}^1$ pertenece al interior de la region factible, entonces, $p(\boldsymbol{x}^1) = 0$ y por tanto $\boldsymbol{x}^1$ es el optimo global de $f(\cdot)$ y pot tanto se cumple la igualad en las desigualdades (1)-(3) ... Por lo anterior, en lo que sigue, vamos a suponer que la secuencia $\{\boldsymbol{x}^k\}$ es no factible (que es el caso interesante!).
- Note que por construcción (y/o definicion) $p(\boldsymbol{x}) \geq 0$, este hecho se usara durante la demostracion

Demostracion:

- Como $\boldsymbol{x}^k$ es el optimo de $m(\boldsymbol{x}, \mu^k)$, entonces $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \leq m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^k)$, es decir,

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) &= f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \\ &\leq f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \end{aligned}$$

como $\mu^k \leq \mu^{k+1}$ y $p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \geq 0$ entonces $f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \leq f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^{k+1} p(\boldsymbol{x}^{k+1}) = m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^{k+1})$, con lo que se concluye

$$m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \leq m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^{k+1})$$

- Como $\boldsymbol{x}^{k+1}$ es el optimo de $m(\boldsymbol{x}, \mu^{k+1})$ entonces $m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^{k+1}) \leq m(\boldsymbol{x}^k, \mu^{k+1})$, luego

$$f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^{k+1} p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^{k+1} p(\boldsymbol{x}^k)$$

Como $\boldsymbol{x}^k$ es el optimo de $m(\boldsymbol{x}, \mu^k)$ entonces $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \leq m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^k)$, luego

$$f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^{k+1})$$

Sumando miembro a miembro

$$(\mu^{k+1} - \mu^k) p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \quad \leq \quad (\mu^{k+1} - \mu^k) p(\boldsymbol{x}^k)$$

y usando el hecho de que $\mu^{k+1} > \mu^k$, se concluye finalmente que

$$p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \quad \leq \quad p(\boldsymbol{x}^k)$$

- Como $\boldsymbol{x}^k$ es el optimo de $m(\boldsymbol{x}, \mu^k)$ entonces $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \leq m(\boldsymbol{x}^{k+1}, \mu^k)$, luego

$$f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^{k+1})$$

y usando la segunda parte, ie, $p(\boldsymbol{x}^{k+1}) \leq p(\boldsymbol{x}^k)$ y el hecho de que $\mu^k > 0$ se tiene que

$$f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^{k+1}) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k)$$

y por tanto

$$f(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^{k+1})$$

Lema 2:

Lema 2

$$f(\boldsymbol{x}^*) \quad \geq \quad m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \geq f(\boldsymbol{x}^k)$$

Demostracion:

Primero, como $\mu_k > 0$ y $p(\boldsymbol{x}^k) \geq 0$

$$m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \quad = \quad f(\boldsymbol{x}^k) + \overbrace{\mu^k p(\boldsymbol{x}^k)}^{\geq 0} \geq f(\boldsymbol{x}^k)$$

Por otro lado, como $\boldsymbol{x}^k$ es el optimo de $m(\boldsymbol{x}, \mu^k)$ entonces $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) \leq m(\boldsymbol{x}^*, \mu^k)$, luego

$$m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) = f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^*) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^*)$$

Como en el optimo del problema original debe cumplir con las restricciones, es decir, $\boldsymbol{x}^*$ es factible, entonces por la definición de la *función de penalización* se tiene que $p(\boldsymbol{x}^*) = 0$, luego

$$m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) = f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^*) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^*) = f(\boldsymbol{x}^*)$$

Y con esto se concluye la demostración del Lema.

Teorema 1: (Teorema de Convergencia de Penalizacion) Sea la secuencia de óptimos $\{x^k\}$ que se obtiene de resolver el problema de penalización. Entonces, cualquier punto limite de la secuencia es solución del problema original.

Demostracion: Sea $\hat{x}$ un punto limite de una subsucesión de $\{\boldsymbol{x}^k\}$, con el objetivo de simplificar al notación denotemos la subsuseción mediante $\{\boldsymbol{x}^k\}$, luego

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k \quad = \quad \hat{\boldsymbol{x}}$$

Por el Lema 2, $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k)$ esta acotado superiormente

$$m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) = f(\boldsymbol{x}^k) + \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}^*)$$

y como $m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k)$ es monotona creciente, por el Lema 1, usando el Teorema de la convergencia monótona, existe el limite $\lim_{k\to\infty} m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k)$, definamos entonces

$$m^* \quad \stackrel{def}{=} \quad \lim_{k\to\infty} m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k)$$

Por la continuidad de $f(\cdot)$

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^k) = f(\hat{\boldsymbol{x}})$$

Luego existe el limite de $\mu^k p(\boldsymbol{x}^k) = m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) - f(\boldsymbol{x}^k)$, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \mu^k p(\boldsymbol{x}^k) &= \lim_{k\to\infty} m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) - \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^k) \\ &= m^* - f(\hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

como $\lim_{k\to\infty} \mu^k = \infty$ entonces necesariamente $\lim_{k\to\infty} p(\boldsymbol{x}^k) = 0$, pues de lo contrario el limite de $\mu^k p(\boldsymbol{x}^k)$ no seria finito, (De otra forma $\lim_{k\to\infty} p(\boldsymbol{x}^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu^k}[m(\boldsymbol{x}^k, \mu^k) - f(\boldsymbol{x}^k)] = 0[m^* - f(\hat{\boldsymbol{x}})] = 0$).
Como $p(\cdot)$ es continua

$$0 = \lim_{k\to\infty} p(\boldsymbol{x}^k) \quad = \quad p(\hat{\boldsymbol{x}})$$

es decir, $p(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$, por lo que $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, es decir, $\hat{\boldsymbol{x}}$ es factible.
Nota: Si $\boldsymbol{x}$ pertenece a la region factible entonces por definición $p(\boldsymbol{x}) = 0$, y visceversa.

Por el Lema 2 y por la continuidad de $f(\cdot)$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^k) &\leq f(\boldsymbol{x}^*) \\ \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}^k) &\leq f(\boldsymbol{x}^*) \\ f(\hat{\boldsymbol{x}}) &\leq f(\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

Como $f(\hat{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ y $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ entonces $\hat{\boldsymbol{x}}$ es el optimo!.

Dado un punto inicial x_0^s, $\mu_0 > 0$ y una secuencia $\{\tau_k\}$ tal que $\tau_k \to 0$

for $k = 0, 1, 2, \cdots$ **do**

  Encontrar un minimizador aproximado $\boldsymbol{x}_k$ de $Q(\cdot; \mu_k)$ iniciando en x_k^s y se termina cuando $\|\nabla_{\boldsymbol{x}} Q(\boldsymbol{x}; \mu_k)\| \leq \tau_k$

  if Si converge **then**

    Parar el algoritmo con solucion $\boldsymbol{x}_k$

  end if

  Seleccionar $\mu_{k+1} > \mu_k$

  Seleccionar un nuevo punto inicial $\boldsymbol{x}_{k+1}^s$

end for

Teorema 1 (I)

Teorema 1: Si las tolerancias τ_k de algoritmo (o esquema general) satisface

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k \quad = \quad 0$$

y el parametro $\lim_{k\to\infty} \mu_k \to \infty$ entonces

- Si un punto limite $\boldsymbol{x}^*$ de la secuencia $\boldsymbol{x}_k$ es no factible, entonces es un punto estacionario de la función $\|c(x)\|_2^2$

Teorema 1 (II)

- Si un punto limite $\boldsymbol{x}^*$ de la secuencia $\boldsymbol{x}_k$ es factible y los vectores $\nabla c_i(\boldsymbol{x}^*)$ son linealmente independientes entonces $\boldsymbol{x}^*$ satisface las KKT del problema original. Para los puntos anteriores, se tiene que cualquier subsecuencia $\{\boldsymbol{x}_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}^*$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} -\mu_k c_i(\boldsymbol{x}_k) \quad = \quad \lambda_i^*, \; i \in \mathcal{E}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}^*$ es el vector de multiplicadores de Lagrange problema original con restricciones de igualdad.

Demostracion

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x Q(x_k, \mu_k)\| &\leq \tau_k \\
\|\nabla_x f(x_k) + \mu_k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| &\leq \tau_k
\end{aligned}
$$

Luego, como $\|b\| - \|a\| \ \leq \|a+b\|$, pues por desigualdad triangular $\|(a+b) - a\| \ \leq \|a+b\| + \|a\|$

$$
\begin{aligned}
\|\mu_k \textstyle\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| - \|\nabla_x f(x_k)\| &\leq \|\nabla_x f(x) + \mu_k \textstyle\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x)\nabla_x c_i(x)\| \\
\|\mu_k \textstyle\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| - \|\nabla_x f(x_k)\| &\leq \tau_k \\
\|\textstyle\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| &\leq \frac{1}{\mu_k}(\tau_k + \|\nabla_x f(x_k)\|)
\end{aligned}
$$

Demostracion

pasando al limite y usando continuidad

$$
\begin{aligned}
0 \leq \lim_{k\to\infty} \|\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu_k}(\tau_k + \|\nabla_x f(x_k)\|) \\
0 \leq \|\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x^*)\nabla_x c_i(x^*)\| &\leq 0
\end{aligned}
$$

Demostracion

Luego

$$\|\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x^*)\nabla_x c_i(x^*)\| = 0$$

y por tanto

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x^*)\nabla_x c_i(x^*) = 0$$

Demostracion

Consideremos los dos casos:

Caso 1 Si x^* es no factible, existe 'i' para el cual $c_i(x^*) \neq 0$, ie, el conjunto de vectores $\{\nabla_x c_i(x^*)\}$ es l.d. En este caso, esto implica que $\boldsymbol{x}^*$ es un punto estacionario de la función $\|c(x)\|^2$.

Caso 2 Por otro lado, si $\{\nabla_x c_i(x^*)\}$ es l.i. entonces se tiene $c_i(x^*) = 0$ para toda $i \in \mathcal{E}$ ... entonces x^* es factible y se cumple la KKT correspondiente.

Demostracion

Por otro lado, definamos la matriz

$$A(x^*)^T \quad := \quad [\nabla_x c_i(x^*)]$$

Dado que el conjunto $\{\nabla_x c_i(x^*)\}$ es l.i. entonces $A(x^*)$ es de rango completo y para k suficientemente grande $A(x_k)A(x_k)^T$ tiene inversa.

Demostracion (Lemma)

Lemma Let $F : R^n \to R^{n\times n}$ be an $n \times n$ matrix-valued function that is continuous at x_0. If $F(x_0)^{-1}$ exists, then for $F(x)^{-1}$ exists for x sufficiently close to x_0, and $F(\cdot)^{-1}$ is continuous at x_0.

Demostracion

Denotemos $\lambda_k = -\mu_k c(x_k)$. Luego de la igualdad

$$\nabla_x Q(x_k, \mu_k) = \nabla_x f(x_k) + \mu_k \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i(x_k) \nabla_x c_i(x_k)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_x Q(x_k, \mu_k) &= \nabla_x f(x_k) - A(x_k)^T \lambda \\ A(x_k)^T \lambda_k &= \nabla_x f(x_k) - \nabla_x Q(x_k, \mu_k) \\ \lambda_k &= (A(x_k) A(x_k)^T)^{-1} A(x_k) [\nabla_x f(x_k) - \nabla_x Q(x_k, \mu_k)] \end{aligned}$$

Demostracion

Pasando al limite $k \to \infty$ y considerando que la norma es una función continua y propiedades de la norma.

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x Q(x_k, \mu_k)\| &\leq \tau_k \\
\lim_{k\to\infty} \|\nabla_x Q(x_k, \mu_k)\| &= 0 \\
\|\lim_{k\to\infty} \nabla_x Q(x_k, \mu_k)\| &= 0 \\
\lim_{k\to\infty} \nabla_x Q(x_k, \mu_k) &= 0
\end{aligned}
$$

Demostracion

Luego

$$
\begin{aligned}
\lambda^* &:= \lim_{k\to\infty} -\mu_k c_i(\boldsymbol{x}_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \lambda_k \\
&= (A(x^*)A(x^*)^T)^{-1}A(x^*)\nabla_x f(x^*)
\end{aligned}
$$

Tomando el limite en

$$
\|\nabla_x f(x_k) + \mu_k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(x_k)\nabla_x c_i(x_k)\| \leq \tau_k
$$

Demostracion

o a partir de

$$\lim_{k\to\infty} \nabla_x Q(x_k, \mu_k) = 0$$

se llega a

$$\nabla_x f(x^*) - A(x^*)^T \lambda^* = 0$$

y por tanto x^*, λ^* satisfacen las KKTs con

$$\lambda^* = \lim_{k\to\infty} -\mu_k c_i(\boldsymbol{x}_k)$$

Se puede observar que el Hessiano $\nabla^2_{xx}Q(x, \mu_k)$ esta mal condicionado. Para ello consideremos el problema de optimización solo con restricciones de igualdad, luego

$$
\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) &= f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} (c_i(\boldsymbol{x}))^2 \\
\nabla_x Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) &= \nabla_x f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla_x c_i(\boldsymbol{x}) \\
\nabla^2_{xx} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) &= \nabla^2_{xx} f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2_{xx} c_i(\boldsymbol{x}) \\
&\quad + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} \nabla_x c_i(\boldsymbol{x}) \nabla_x c_i(\boldsymbol{x})^\top
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{k\to\infty} -\mu^k c_i(\boldsymbol{x}_k) \to \lambda_i^*$ entonces,

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \approx \nabla_{xx}^2 f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla_{xx}^2 c_i(\boldsymbol{x})$$

y tambien

$$\nabla_{xx}^2 Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) \approx \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} \nabla_x c_i(\boldsymbol{x}) \nabla_x c_i(\boldsymbol{x})^\top$$

- El termino correspondiente al Lagrangiano no depende de μ^k.
- La matriz $\mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} \nabla_x c_i(\boldsymbol{x})\nabla_x c_i(\boldsymbol{x})^\top$ tiene rango a lo sumo igual a $|\mathcal{E}|$ (el numero de restricciones de igualdad). Si $|\mathcal{E}| < n$ (esto es lo que generalmente sucede!) donde $\boldsymbol{x} \in R^n$, entonces esta matriz tiene al menos $n - |\mathcal{E}|$ eigenvalores que son nulos y el resto son proproporcionales a μ^k.
- Luego, la matriz completa $\nabla^2_{xx} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k)$ tendra eigenvalores proporcionales o del orden de μ^k y otros en general mas pequeños, en valor absoluto. Por lo que cuando μ^k aumenta se incrementa el mal condicionamiento de la matriz.

El problema del mal condicionamiento del Hessiano de $Q(\boldsymbol{x}, \mu^k)$ puede conducir a errores en la estimación del paso de Newton, ie,

$$\nabla^2_{xx} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) p = -\nabla_x Q(\boldsymbol{x}, \mu^k)$$

Si se define $A(x)^\top \stackrel{def}{=} [\nabla c_i(x)]$ entonces podemos escribir

$$\nabla^2_{xx} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) = \nabla^2_{xx} f(\boldsymbol{x}) + 2\mu^k \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2_{xx} c_i(\boldsymbol{x}) + 2\mu^k A(x)^\top A(x)$$

Y ahora podemos definir una nueva variable ('dummy') $\xi \stackrel{def}{=} 2\mu^k A(x)p$ y el sistema de Newton se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{xx} Q(\boldsymbol{x}, \mu^k)p &= (\nabla^2_{xx} f(\boldsymbol{x}) + \mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2_{xx} c_i(\boldsymbol{x}))p + A(x)^\top \xi \\
A(x)p - \frac{1}{2\mu^k}\xi &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} \nabla^2_{xx} f(\boldsymbol{x}) + 2\mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2_{xx} c_i(\boldsymbol{x}) & A(x)^\top \\ A(x) & -\frac{1}{2\mu^k} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x Q(\boldsymbol{x}, \mu^k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La reformulación anterior puede ser vista como 'mejoramiento de la condición' (una reformulación bien condicionada) pues si x esta cercano al optimo x^*

$$B = \begin{bmatrix} \nabla^2_{xx} f(\boldsymbol{x}) + 2\mu^k \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2_{xx} c_i(\boldsymbol{x}) & A(x)^\top \\ A(x) & -\frac{1}{2\mu^k} I \end{bmatrix}$$

entonces los coeficientes de B no tienen valores singulares del orden de μ^k, pues en teoria $B_{1,1}$ se aproxima al Hessiano del Lagrangiano y no depende de μ^k.

Sin embargo, en la práctica se pueden presentar problemas numericos a la hora de calcular p, pues puede suceder que $2\mu^k c_i(\boldsymbol{x})$ no sea una buena aproximación del multiplicador de Lagrange $-\lambda_i^*$ aun cuando x este proximo al optimo $\boldsymbol{x}_k$ de $Q(\boldsymbol{x}, \mu^k)$.

$$
\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_3 \end{array}\right]^{-1} \\
= & \left[\begin{array}{cc} (A_1 - A_2 A_3^{-1} A_2^\top)^{-1} & -A_1^{-1} A_2 (A_3 - A_2^\top A_1^{-1} A_2)^{-1} \\ -A_3^{-1} A_2^\top (A_1 - A_2 A_3^{-1} A_2^\top)^{-1} & (A_3 - A_2^T A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{array}\right] \\
= & \left[\begin{array}{cc} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_3^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A_1 & -A_2 \\ -A_2^\top & A_3 \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{cc} (A_1 - A_2 A_3^{-1} A_2^\top)^{-1} & 0 \\ 0 & (A_3 - A_2^T A_1^{-1} A_2)^{-1} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

```
B1 = inv(A1-A2*inv(A3)*A2');
B2 = -inv(A1)*A2*inv(A3-A2'*inv(A1)*A2);
B3 = -inv(A3)*A2'*inv(A1-A2*inv(A3)*A2');
B4 = inv(A3-A2'*inv(A1)*A2);
```

$$(A+UV^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+V^\top A^{-1}U)^{-1})V^\top A^{-1}$$

Veamos la conexion entre la idea anterior y Sherman Morrison Woodbury.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$(A + UV^\top)x = b$$

El cual podemos escribir

$$\begin{aligned} Ax + U(V^\top x) &= b \\ Ax + U\xi &= b \end{aligned}$$

donde $\xi = V^\top x$,

luego tenemos el siguiente sistema extendido

$$\begin{aligned} Ax + U\xi &= b \\ V^\top x - \xi &= 0, \end{aligned}$$

el cual se resuelve, eliminando primero la variable ‘x’ , para lo cual se multiplica la primera igualdad miembro a miembro por $V^\top A^{-1}$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} V^\top x + V^\top A^{-1} U \xi &= V^\top A^{-1} b \\ V^\top x - \xi &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo $V^\top x$ por ξ en la primera igualdad

$$\begin{aligned} \xi + V^\top A^{-1} U \xi &= V^\top A^{-1} b \\ \xi &= (I + V^\top A^{-1} U)^{-1} V^\top A^{-1} b \end{aligned}$$

sustituyendo ξ en la igualdad $Ax + U\xi = b$ tenemos

$$Ax + U(I + V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1}b = b$$

Luego

$$\begin{aligned} Ax &= (I - U(I + V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1})b \\ x &= (I - U(I + V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1})b \\ x &= (A^{-1} - A^{-1}U(I + V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1})b \end{aligned}$$

Luego, se obtiene la siguiente igualdad (Formula de Sherman Morrison Woodbury)

$$(A+UV^\top)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1}$$