



Centro de Investigación en Matemáticas, A. C.

Protocolo de investigación

Para obtener el grado de:

**Doctorado en ciencias con orientación en ciencias
de la computación**

Por:

Joel Chacón Castillo

Director de tesis

Dr. Carlos Segura González

Centro de Investigación en Matemáticas, A. C. (CIMAT),
Guanajuato, Gto, México

Junio 2019

Contents

1	Protocolo de investigación	1
1.1	Introducción y antecedentes	1
1.1.1	Optimizadores estocásticos poblacionales	1
1.1.2	Definición del problema	3
1.1.3	Principios de diseño de un algoritmo estocástico pobla- cional	4
1.1.4	Importancia de la diversidad, criterio de parada y tiempo transcurrido en optimización combinatoria . .	5
1.2	Estado del arte	5
1.2.1	Revisión de la literatura en relación a la diversidad . .	6
1.2.2	Algoritmos mono-objetivo que consideran la diversidad	11
1.2.3	Algoritmos multi-objetivo que consideran la diversi- dad en el espacio de las variables	12
1.3	Hipótesis	15
1.4	Objetivos	15
1.5	Propuestas iniciales	16
1.5.1	Descripción de la propuesta basada en evolución difer- encial (mono-objetivo)	16
1.5.2	Descripción de la propuesta multi-objetivo	17
1.5.3	Descripción de la propuesta aplicada	17
1.5.4	Descripción propuesta del operador de cruce binario simulado	18
1.6	Líneas de trabajo	19
1.7	Cronograma	20
	Bibliography	21

1 Protocolo de investigación

1.1 Introducción y antecedentes

Los Algoritmos Evolutivos (Evolutionary Algorithms — eas) son considerados como uno de los enfoques con mayor eficacia para resolver distintas categorías de problemas de optimización. Se han desarrollado diversas variantes que han sido aplicadas en múltiples campos, como en transporte, economía o ingeniería. Particularmente, se han aplicado tanto en problemas del dominio continuo (Glover and Kochenberger, 2005) como del dominio discreto (Segredo, Carlos Segura, and León, 2011). En general, los eas han sido especialmente exitosos en la resolución de problemas complejos en donde los enfoques exactos no son actualmente aplicables, como por ejemplo, en problemas NP-completos con espacios de búsqueda grandes (Chakraborty, 2008).

1.1.1 Optimizadores estocásticos poblacionales

De acuerdo a Voß et al., 2012, una meta-heurística es un proceso maestro iterativo que guía y modifica las operaciones para ordenar heurísticas con el fin de producir de forma eficiente soluciones de calidad. Esto podría manipular una solución completa (o incompleta) o un conjunto de soluciones por iteración. Las heurísticas subordinadas podrían ser prodecimientos de alto o bajo nivel, una búsqueda local simple, o un método constructivo. Además, algunas de las clasificaciones bastante utilizadas en la literatura son (Beheshti and Shamsuddin, 2013):

- Inspirado en la naturaleza y no-inspirado en la naturaleza.
- En base a la población y en base a un simple punto.

1 Protocolo de investigación

Un panorama más amplio es mostrado en la figura 1.1, este trabajo se enfoca principalmente a las meta-heurísticas poblacionales. Las meta-heurísticas poblacionales son aquellas que utiliza múltiples soluciones en cada momento, otra caracterización es que este tipo de algoritmos realizan una búsqueda con múltiples puntos iniciales. Algunas de las metaheurísticas poblacionales mas populares se listan a continuación

- Algoritmos genéticos (Genetic algorithm).
- Programación genética (Genetic programming).
- Programación evolutiva (Evolutionary programming).
- Evolución diferencial (Differential evolution).
- Búsqueda de dispersión (Scatter search).
- Estrategia evolutiva (Evolution strategy).
- Algoritmos de estimación de distribución (Estimation of distribution algorithm).
- Recocido simulado (Simulated annealing).
- Optimización por enjambre de partículas (Particle Swarm optimization).
- Algoritmos de optimización por colonias de hormigas (Ant colony optimization algorithms).

1 Protocolo de investigación

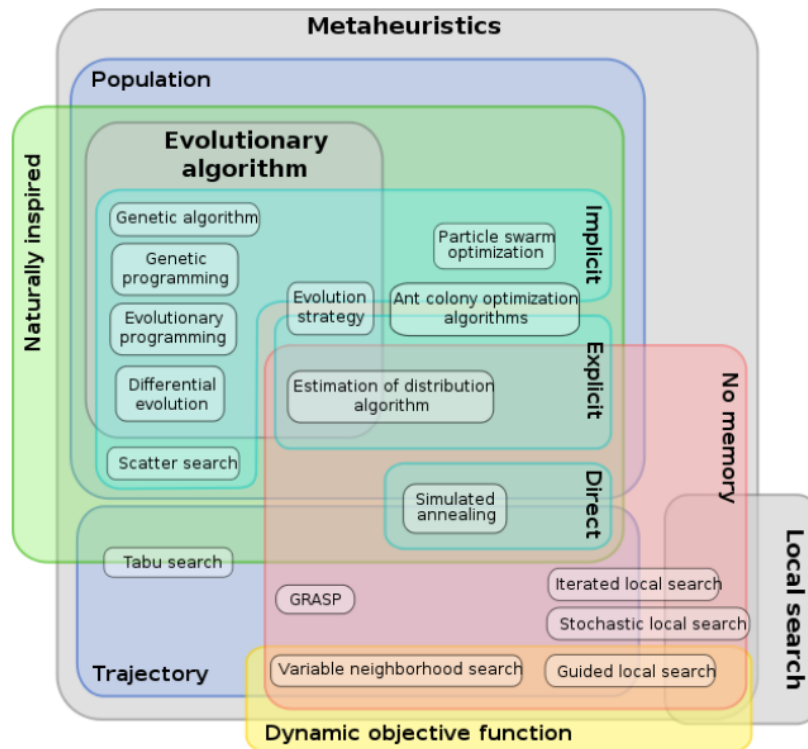


Figure 1.1: Clasificación del campo de meta-heurísticas. Figura tomada de Beheshti and Shamsuddin, 2013.

1.1.2 Definición del problema

Actualmente, los algoritmos evolutivos son una de las meta-heurísticas más conocidas (Glover and Kochenberger, 2005), pero a pesar de su éxito la mayoría son diagnosticados con problemas de convergencia acelerada, en consecuencia el proceso de búsqueda puede estar estancado al inicio de su tiempo total de ejecución y desperdiciar recursos valiosos el resto de su ejecución. Este problema es más notorio al considerar ejecuciones a largo plazo y con problemas complejos. Es por esto que adaptar estas meta-heurísticas a nuevos problemas implica la toma de varias decisiones de diseño complejas.

1.1.3 Principios de diseño de un algoritmo estocástico poblacional

Particularmente, a la hora de diseñar de forma apropiada un algoritmo evolutivo, se ha visto que es muy importante conseguir inducir un balanceo adecuado entre la exploración e intensificación del espacio de búsqueda (Herrera and Lozano, 1996). Nótese en este punto que, de manera informal, la exploración del espacio de búsqueda consiste en evaluar regiones del espacio de búsqueda que no han sido muestreadas con el fin de detectar regiones promisorias, y la explotación consiste en muestrear en zonas ya evaluadas previamente para realizar una búsqueda más profunda con el fin de encontrar soluciones más refinadas y de mayor calidad. Cuando en los algoritmos evolutivos todas o casi todas las soluciones están en regiones distantes — alta diversidad — se produce habitualmente una búsqueda exploratoria, es decir, muchas de las nuevas soluciones evaluadas serán distantes a las ya evaluadas anteriormente. Sin embargo, cuando casi todas las soluciones están en una o en unas pocas regiones, se produce una búsqueda intensificadora. Uno de los problemas en el diseño de los algoritmos evolutivos es que en muchos casos no se comprenden todas las implicaciones que los diferentes componentes tienen sobre el mantenimiento de la diversidad de la población y en consecuencia sobre el balanceo entre exploración e intensificación (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013a). Por ello, analizar el comportamiento y rediseñar en base a lo que está ocurriendo en este aspecto, es parte del proceso de diseño de los algoritmos evolutivos.

Relacionado con lo anterior, aparece el concepto de convergencia prematura (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013a). Se dice que un algoritmo converge de forma prematura cuando mucho antes de alcanzar el criterio de paro, todas las soluciones están en una zona muy pequeña del espacio de búsqueda. En este sentido, a partir de ese momento es difícil seguir mejorando las soluciones de forma significativa ya que con alta probabilidad sólo se va a realizar un muestreo de soluciones en dicha región. Por ello, es importante detectar si esto ocurre y en tal caso rediseñar algunos aspectos del algoritmo para preservar una mayor diversidad. Sin embargo, si la población es muy diversa durante todo el proceso de búsqueda, se podría no alcanzar un grado adecuado de intensificación y por lo tanto se tendría

una convergencia lenta que posiblemente también resultaría en soluciones de baja calidad.

1.1.4 Importancia de la diversidad, criterio de parada y tiempo transcurrido en optimización combinatoria

En los últimos años, algunos de los trabajos más exitosos en el área de optimización combinatoria mono-objetivo son contemplados en ejecuciones a largo plazo y consideran mecanismos para gestionar diversidad de forma explícita en el espacio de las variables considerando el tiempo transcurrido y el criterio de parada. Este tipo de métodos han encontrado los mejores resultados en varios problemas de combinatoria conocidos, como es el problema de asignación de frecuencias “A multiobjectivised memetic algorithm for the frequency assignment problem” (Segredo, Carlos Segura, and León, 2011), el problema del Sudoku “The importance of diversity in the application of evolutionary algorithms to the Sudoku problem” (Carlos Segura, Peña, et al., 2016), el problema del agente viajero “A Novel Diversity-based Evolutionary Algorithm for the Traveling Salesman Problem” (Carlos Segura, Botello Rionda, et al., 2015), el problema de particionado de grafos “Memetic algorithm with hungarian matching based crossover and diversity preservation” (Romero Ruiz and Carlos Segura, 2018), el problema de embalaje bidimensional “Memetic algorithms and hyperheuristics applied to a multiobjectivised two-dimensional packing problem” (Segredo, Carlos Segura, and León, 2014) entre otros.

1.2 Estado del arte

En esta sección se presentan algunos de los algoritmos que implementan mecanismos para administrar la diversidad en el espacio de las variables. Principalmente, en el campo multi-objetivo no hay una propuesta que explícitamente administre la diversidad en el espacio de las variables, que además considere el tiempo transcurrido y el criterio de parada.

1.2.1 Revisión de la literatura en relación a la diversidad

En relación al diseño de los algoritmos evolutivos, se puede observar que en sus inicios la mayoría de enfoques fueron esquemas generacionales (Kenneth A De Jong, 2006) en los que las soluciones hijas reemplazaban a la población anterior sin importar su respectiva aptitud o grado de diversidad. En estos esquemas iniciales se usaba la selección de padres para promover que el proceso de muestreo se realizara con mayor probabilidad en las regiones más promisorias encontradas. Por ello, con el propósito de alcanzar un balanceo adecuado entre exploración e intensificación, se desarrollaron muchas estrategias de selección de padres que permitían centrarse con mayor o menor velocidad en las regiones promisorias. Además, se desarrollaron alternativas que modifican otros aspectos como la estrategia de variación (Herrera and Lozano, 2003) y/o el modelo poblacional (Alba, 2005). En la mayor parte de los algoritmos evolutivos más recientes, se introduce además una fase de reemplazamiento (Eiben, Smith, et al., 2003) por lo que la nueva población no tiene que formarse exclusivamente con los hijos, más bien se usan mecanismos para combinar la población anterior con la población hija y determinar así los nuevos sobrevivientes. En este contexto, se suele introducir elitismo en los algoritmos, es decir, el mejor individuo encontrado sobrevivirá a la siguiente generación (Eshelman, 1991). De esta forma, ahora también se puede modificar esta última fase para conseguir el balanceo apropiado entre exploración e intensificación.

La convergencia prematura es una problemática muy conocida en el ámbito de los algoritmos evolutivos por lo que se han desarrollado gran cantidad de técnicas para lidiar con la misma (Pandey, Chaudhary, and Mehrotra, 2014). Estas técnicas modifican de manera directa o indirecta la cantidad de diversidad mantenida por el algoritmo (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013b) y varían desde técnicas generales hasta mecanismos dependientes de un problema dado. En este apartado se revisan algunas de las técnicas generales más populares.

Clasificaciones de mecanismos para promover la diversidad

Debido a la gran cantidad de métodos desarrollados en esta área, se han propuesto varias clasificaciones de los mismos. Liu et al. S.-H. Liu, Mernik, and Bryant, 2009 propusieron diferenciar entre los enfoques uni-proceso y multi-proceso. En el enfoque uni-proceso se modifica la preservación de la diversidad actuando sobre un único componente del algoritmo. Es importante hacer énfasis que en los enfoques uni-proceso no se excluye el uso de otros componentes en el proceso de exploración y/o intensificación, en su lugar sólo se modifica una componente hasta conseguir un balanceo adecuado. Por otra parte, en los enfoques multi-proceso se tienen en cuenta las implicaciones que varios componentes provocan sobre el balanceo, y se actúa modificando o rediseñando varios de ellos hasta conseguir el comportamiento adecuado. Los esquemas uni-proceso son mucho más habituales actualmente (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013a), y en particular las dos propuestas incluidas en este capítulo son mecanismos uni-proceso.

Extendiendo a lo anterior, se propuso una clasificación más específica (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013a), en la que se tiene en cuenta cuál es la componente que se cambia para categorizar a cada método. En este sentido, los más populares son los siguientes:

- **Enfoques basados en la selección:** son los más clásicos y se basan en cambiar la presión de selección que se produce hacia las zonas promisorias a la hora de realizar la selección de padres.
- **Enfoques basados en población:** se modifica el modelo poblacional utilizando algunas técnicas como variar el tamaño de la población de forma dinámica, eliminar individuos duplicados, utilizar técnicas de infusión o establecer una estrategia de islas con migraciones.
- **Enfoques basados en la cruce y/o la mutación:** se basan en rediseñar los operadores de cruce y/o mutación, considerando en algunos casos información específica del problema. También se incluyen en este grupo opciones más generales como aplicar restricciones sobre el emparejamiento y/o incluir operadores disruptivos que podrían ser utilizados sólo en ciertos instantes del proceso de optimización.

Esquemas clásicos para administrar la diversidad

Los primeros algoritmos evolutivos se basaron principalmente en esquemas generacionales que no incluían fase de reemplazo. En estos esquemas, la selección de padres era la principal responsable de que se muestrearan con mayor probabilidad las zonas más promisorias encontradas hasta el momento, y por tanto muchos de los primeros esquemas que trataron de evitar la convergencia prematura se basaron en modificar el proceso de selección de padres. Así, en los 90's se desarrollaron varios esquemas que alteraban la presión de selección (Eiben, Smith, et al., 2003) de forma estática o dinámica. Sin embargo, con base en varios estudios teóricos y experimentales se observó que, generalmente, actuar exclusivamente sobre el operador de selección no es suficiente, especialmente cuando se quieren realizar ejecuciones a largo plazo, ya que se requerirían poblaciones excesivamente grandes para mantener un grado adecuado de diversidad.

Otra alternativa fue modificar los modelos poblacionales, encontrando en este grupo los esquemas basados en islas (Alba, 2005), los celulares o, más recientemente, los basados en *agrupaciones o clústeres* (Gao, Yen, and S. Liu, 2014). La idea de introducir restricciones en el emparejamiento, principalmente con base en la ubicación de los individuos en el espacio de búsqueda también ha sido bastante exitosa aunque controlar los mismos para obtener el balanceo apropiado ante diferentes criterios de parada es bastante complejo. En algunos casos resultó ser más prometedor promover el emparejamiento entre individuos no similares (Eshelman, 1991), mientras que en otros escenarios se hace exactamente lo opuesto (Deb, 1989). Otro problema común de muchas de las estrategias anteriores es que suelen introducir parámetros adicionales, por lo que el proceso de ajuste de parámetros, que ya de por sí es un problema importante en estos algoritmos, se vuelve aún más complejo. Es importante resaltar que todas estas estrategias clásicas no evitan por completo la convergencia sino que la idea es disponer de mecanismos para acelerarla o retrasarla.

Otra alternativa diferente ha sido adaptar la fase de variación. En este sentido se han desarrollado diversas técnicas para controlar los parámetros que se consideran en la variación con el propósito de adaptar el balanceo entre exploración e intensificación. En algunos casos esto se consigue usando

1 Protocolo de investigación

distintos valores en los parámetros para distintas etapas a lo largo del proceso de optimización (Yu et al., 2014), mientras que en otros casos se hacen cambios más drásticos y se consideran varios operadores con distintas propiedades (Lobo, Lima, and Michalewicz, 2007). También existen mecanismos adaptativos que usan una memoria para almacenar información histórica sobre los efectos de la variación y con base en ello ir modificándola (Yuen and Chow, 2009). Cabe destacar que en la mayor parte de estos esquemas no se considera la diversidad de forma directa, sino que sólo se considera para analizar el comportamiento y con base en ello se procede a un rediseño.

Finalmente, un esquema muy sencillo pero no por ello menos importante es el basado en reinicios. En estos esquemas, en lugar de evitar la convergencia acelerada, se aplica un reinicio total o parcial de la población cada cierto número de generaciones o cuando se detecta que la población ha convergido. Con base en esto se han propuesto diversas estrategias para establecer los puntos de reinicio (Jansen, 2002). Estos esquemas se implementan de forma muy sencilla y en algunos casos han proporcionado mejoras significativas (V. K. Koumoussis and C. P. Katsaras, 2006) por lo que es un método a tener en cuenta, al menos como alternativa inicial. Es común combinar las estrategias basadas en reinicio con algunas de las técnicas anteriores, ya que dichas técnicas están basadas en mantener la diversidad, mientras que en esta última el objetivo es recuperar la diversidad.

Esquemas de reemplazamiento basados en diversidad

Recientemente se han propuesto diversos mecanismos que modifican la fase de reemplazo para preservar la diversidad. La idea principal de estos esquemas es inducir un grado de exploración adecuado diversificando a los individuos sobrevivientes, de forma que los operadores de reproducción puedan generar nuevas soluciones en diferentes regiones en las siguientes generaciones. Estos métodos están basados en el principio de que los operadores de cruce tienen un efecto de exploración al considerar individuos distantes y de intensificación al considerar individuos próximos (Eiben and Schippers, 1998).

1 Protocolo de investigación

El esquema de pre-selección propuesto por Cavicchio (Grefenstette, 1986) es uno de los primeros estudios que utilizan la fase de reemplazamiento para controlar la diversidad. El esquema inicial de Cavicchio se extendió para generar el esquema denominado *amontonamiento o crowding* (Kenneth Alan De Jong, 1975), el cual ha sido muy popular en los últimos años (Mahfoud, 1992; Mengshoel, Galán, and De Dios, 2014). El principio del crowding se basa en que los nuevos individuos que entren en la población sustituyan a individuos similares de generaciones anteriores, y con base en este principio, se han formulado diversas implementaciones.

En esta misma línea, se han propuesto otras estrategias de reemplazo con el propósito de promover la diversidad. Uno de los procedimientos más populares es la *Estrategia de Limpieza* (Clearing Strategy - CLR) Lozano, Herrera, and Cano, 2008. En el procedimiento CLR se agrupan a los individuos en grupos denominados nichos, y los mejores individuos de cada nicho son preservados e incluidos en la población de la siguiente generación. Un inconveniente de este procedimiento es que los casos en que se detectan muchos nichos provocan una fuerte inmovilización de la población. Por ello, Petrowski (Pétrowski, 1996) propuso una variante para únicamente seleccionar a individuos cuya aptitud sea mejor que la media de la población.

Otros métodos de este grupo consideran funciones de aptitud que combinan la función objetivo original con la diversidad. Sin embargo, es complejo construir una función compuesta ya que las dos mediciones podrían no ser directamente compatibles, y por lo tanto, las funciones adecuadas suelen depender de cada problema. Una forma de suavizar este inconveniente fue propuesto en el algoritmo de combinación - COMB (Vidal et al., 2013) donde los individuos son ordenados y categorizados con base en su aptitud y contribución a la diversidad, y la función compuesta se diseña con base en el orden y no con base en los valores de función objetivo y contribución a diversidad. La principal desventaja del COMB es que requiere dos parámetros de usuario, aunque independientemente de esto, se ha usado con bastante éxito. Otra alternativa es el procedimiento *Reemplazamiento Basado en Contribución a la Diversidad y Sustitución del Peor* (Contribution of Diversity/Replace Worst - CD/RW - Lozano, Herrera, and Cano, 2008). En el método CD/RW un nuevo individuo reemplaza a un miembro de la población cuyo rendimiento sea peor tanto en aptitud como en contribución a la diversidad. En caso de no encontrar un peor individuo bajo estos dos criterios, se procede a

1 Protocolo de investigación

reemplazar al peor individuo en la población considerando únicamente a la aptitud. Una última alternativa se basa en considerar a la contribución a la diversidad como un objetivo adicional y aplicar un esquema de optimización multi-objetivo Bui, Abbass, and Branke, 2005 Mouret, 2011. Estos enfoques son identificados como algoritmos multi-objetivo basados en diversidad. Existen varias estrategias para calcular el objetivo auxiliar Carlos Segura, Coello, Miranda, et al., 2013. Uno de los enfoques más populares consiste en calcular la contribución a la diversidad de cada individuo con base en la *Distancia al Vecino más Cercano* (Distance to the Closest Neighbor - DCN - Carlos Segura, Coello, Segredo, et al., 2016) de entre los individuos que ya hayan sido seleccionados como supervivientes.

1.2.2 Algoritmos mono-objetivo que consideran la diversidad

En optimización estocástica, específicamente en el caso mono-objetivo, se ha desarrollado una variedad de algoritmos evolutivos con el propósito de tratar aspectos relacionados con la falta de diversidad, específicamente la convegenencia prematura (Črepinšek, S.-H. Liu, and Mernik, 2013b). Algunos de los algoritmos populares que están relacionados con temas de diversidad son Saw-Tooth (V. Koumoussis and C. Katsaras, 2006), CHC (Eshelman, 1991) y Multi-Dynamic (C. Segura et al., 2016). Este último relaciona el manejo de diversidad en el espacio de las variables con el criterio de paro establecido. De esta forma, y dependiendo del criterio de paro, en las fases iniciales se promueve un mayor nivel de exploración y conforme van transcurriendo las generaciones se realiza un cambio gradual para obtener un mayor nivel de intensificación. Este control se puede realizar desde distintos enfoques, y se ha visto experimentalmente que actuar sobre varias fases puede ser beneficioso (Carlos Segura, Botello Rionda, et al., 2015). Este tipo de métodos se han vuelto exitosos en optimización mono-objetivo, proporcionando el desarrollo de optimizadores que actualmente han encontrado los mejores resultados en varios problemas conocidos, como es el problema de ordenación lineal, el problema de asignación de frecuencias “A multiobjectivised memetic algorithm for the frequency assignment problem” (Segredo, Carlos Segura, and León, 2011), el problema del Sudoku “The importance of diversity in the application of evolutionary algorithms to the Sudoku prob-

lem” (Carlos Segura, Peña, et al., 2016), el problema del agente viajero “A Novel Diversity-based Evolutionary Algorithm for the Traveling Salesman Problem” (Carlos Segura, Botello Rionda, et al., 2015), entre otros.

1.2.3 Algoritmos multi-objetivo que consideran la diversidad en el espacio de las variables

En optimización multi-objetivo es posible encontrar los mismos inconvenientes que en problemas mono-objetivo, además al considerar varios objetivos que usualmente están en conflicto es necesario mantener soluciones diversas. Así, un problema multi-objetivo está compuesto por dos espacios, el primero consiste en el espacio de las variables y sus respectivas imágenes conforman el espacio objetivo. Además, no existe una correspondencia directa entre la diversidad de los dos espacios (Shir et al., 2009), esto quiere decir que un grado determinado de diversidad en el espacio objetivo no implica que siempre existirá un grado determinado de diversidad en el espacio de las variables.

En todos los problemas multi-objetivo no existe una relación idéntica entre ambos espacios, debido a esto los algoritmos evolutivos de optimización multi-objetivo están diseñados principalmente para mantener diversidad en el espacio objetivo, perdiendo la influencia directa que existe por parte de la diversidad en espacio de las variables.

Actualmente ya existen varios trabajos que proporcionan relevancia a la diversidad en el espacio de las variables (Chacón et al., 2017). Una estrategia popular consiste en aplicar restricciones para realizar el emparejamiento de los individuos (Chiang and Lai, 2011), en base a varios estudios presentados en “An Empirical Study on the Effect of Mating Restriction on the Search Ability of EMO Algorithms” por Ishibuchi and Shibata, donde se define una restricción de emparejamiento específicamente con soluciones cercanas o similares en el espacio de las variables, debido a que emparejar dos individuos alejados tiende a generar individuos distantes y no útiles en el espacio de búsqueda. Otra alternativa consiste en implementar esquemas de reinicios (Jaeggi et al., 2008; Piroonratana and Chaiyaratana, 2006). Sin embargo en el caso multi-objetivo no se ha establecido una propuesta en

1 Protocolo de investigación

donde la diversidad sea administrada de forma explícita y que dependa del criterio de parada.

En base al estudio de diversidad realizado por Chacón et al. en “A Novel MOEA/D Variant with Enhanced Variable Space Diversity Control: MOEA/D-EVSD” se ha comprobado que los MOEAs poseen problemas de diversidad.

A través de las últimas décadas se han presentado varios trabajos de tipo multi-objetivo que están relacionados con promover soluciones diversas en el espacio de las variables, así los primeros trabajos surgieron con el propósito de resolver funciones objetivo de tipo multi-modal (Preuss, Naujoks, and Rudolph, 2006).

En especial, esta categoría de algoritmos pueden ser de interés en problemas de aplicación real, ya que es necesario proporcionar soluciones bien distribuidas en el espacio de decisión (Deb and Tiwari, 2005; Rudolph, Naujoks, and Preuss, 2007).

En base a las estrategias utilizadas en un sólo objetivo, se han propuesto distintas técnicas de nichos en el campo de optimización multi-objetivo.

De hecho uno de los primeros algoritmos evolutivos multi-objetivo que introducen este tipo de técnicas es el NPGA (Nicho Pareto Genetic Algorithm - Horn, Nafpliotis, and Goldberg, 1994).

Este algoritmo es una variante del método de nichos con aptitud compartida (*fitness sharing niching method*).

Posteriormente, Toffolo and Benini en el 2003 propusieron otro algoritmo para obtener soluciones diversas tanto en el espacio de las variables como en el espacio objetivo conocido como GDEA.

Este algoritmo implementa dos criterios de selección, el primero por medio de una ordenación de soluciones no dominadas y el segundo consiste en una métrica para la diversidad en el espacio de las variables.

En el 2005, Deb and Tiwari propusieron el “Omni-optimized” considerado como una generalización del NSGA-II, en este algoritmo se incorpora la diversidad en los dos espacios, además se propone un nuevo criterio de selección y se aplica la definición de dominancia- ϵ .

1 Protocolo de investigación

Sin embargo, en el proceso de selección únicamente se considera la diversidad de un espacio por cada generación.

En el 2005, Chan and Ray propusieron dos operadores de selección, para fomentar la diversidad en cada uno de los espacios. Particularmente, se implementaron estos operadores en los algoritmos KP₁ y KP₂. Así, en cada generación son incorporados dos criterios para medir la diversidad de las soluciones en los espacios correspondientes.

Estos son el hipervolumen de cada individuo para el espacio objetivo y un conteo de los vecinos para el espacio de las variables.

En el 2009, Shir et al. propusieron una variante del NSGA-II conocido como "NSGA-II-agg", donde se realiza la agregación de la diversidad presentada en los dos espacios, principalmente en este trabajo se propone el Niching-CMA.

Uno de los primeros algoritmos que considera la diversidad y es basado en indicadores es denominado como el DIVA (*Diversity Integrating Hypervolume-based Search Algorithm*) propuesto en el 2010 por Ulrich, Bader, and Zitzler, donde se combina la diversidad en el espacio de las variables y el indicador del hipervolumen, para realizar esto se modifica la métrica del hipervolumen conformado por la suma de particiones en el espacio objetivo, donde cada partición es multiplicada por un factor que corresponde a la diversidad en el espacio de las variables, sin embargo esta modificación del hipervolumen aún se considera como Pareto *compliant*. Un aspecto interesante de este algoritmo es que en el espacio de las variables se consideran vecindades en base a hiper-rectángulos.

Por otra parte, siendo parte de la familia de EDAs (Algoritmos de Estimación de Distribución) se encuentra el MMEDA propuesto por Zhou, Zhang, and Jin en el 2009, este implementa una fase de modelación donde la población es agrupada en base al espacio objetivo y posteriormente se genera un modelo probabilístico para la distribución de soluciones óptimas en el espacio de las variables. Este modelo puede promover la diversidad en los dos espacios.

Actualmente, se han presentado varios trabajos que corresponden a las variables de decisión, algunos están orientados hacia la escalabilidad de las

variables e implementan procesos de aprendizaje para capturar dependencias como es el algoritmo “A multiobjective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multiobjective optimization problems with large-scale variables” propuesto por Ma et al. en el 2016.

1.3 Hipótesis

El mecanismo con el cual están diseñados los algoritmos evolutivos estándar poseen un problema de convergencia acelerada en las primeras etapas en ejecuciones a largo plazo, este problema podría ser tratado y generalizado en todos las meta-heurísticas poblacionales implementando estrategias para administrar la diversidad y considerando tanto el tiempo transcurrido de ejecución como el criterio de parada. Además, considerar este tipo de estrategias que gestionan la diversidad y teniendo información del problema, será posible personalizar cada problema para que generen resultados de calidad a mediano plazo.

1.4 Objetivos

El objetivo general de esta tesis doctoral es analizar el comportamiento de la diversidad en las variables de decisión considerando ejecuciones a largo plazo en algoritmos estándar tanto mono-objetivo como multi-objetivo, y desarrollar algoritmos de optimización estocástica que teniendo en cuenta el criterio de parada y el tiempo transcurrido, administren la diversidad en el espacio de las variables de decisión. De esta forma se desea estudiar y validar hipótesis por medio de las siguientes líneas de investigación:

- Optimización mono-objetivo.
- Optimización multi-objetivo.
- Problemas aplicados a casos reales.
- Campos comunes de optimización

1.5 Propuestas iniciales

Hasta este momento se han desarrollado varias propuestas, de las cuales se han concretado en mono-objetivo con Evolución Diferencial "*Differential Evolution with Enhanced Diversity Maintenance*", en multi-objetivo "*A Dominance-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithm with Explicit Variable Space Diversity Management*", un problema aplicado "*A Novel Memetic Algorithm with Explicit Control of Diversity for the Menu Planning Problem*" y una estudio que relaciona al criterio de parada con los componentes internos del operador de cruce "*Analysis and Enhancement of Simulated Binary Crossover*". Las primeras tres propuestas se basan en la misma idea básica: incorporar un mecanismo de reemplazo en el cual se gestione la diversidad de forma explícita en el espacio de las variables de decisión considerando el criterio de parada y el tiempo transcurrido. La última propuesta incorpora el criterio de parada y el tiempo transcurrido en los mecanismos internos del operador de cruce SBX "*Analysis and Enhancement of Simulated Binary Crossover*". Para mayor detalle se pueden consultar los documentos anexos

1.5.1 Descripción de la propuesta basada en evolución diferencial (mono-objetivo)

Por su parte en el trabajo de evolución diferencial, principalmente se proponen dos mecanismos importantes, el primero consiste en una fase de reemplazo en la cual se gestiona la diversidad de los individuos de forma explícita, esta estrategia relaciona el tiempo transcurrido con el criterio de parada, de esta forma se previene la convergencia acelerada a ciertas regiones del espacio de búsqueda. El segundo mecanismo involucra un archivo de vectores elite, esto es con el propósito de mantener a aquellos individuos que pertenezcan a las regiones más promisorias, esta población es mantenida sin importar su contribución a la diversidad. Particularmente, los resultados obtenidos fueron notablemente mejor que el estado del arte inclusive considerando otros mecanismos de reemplazo para gestionar la diversidad. Una observación en la parte de la validación experimental es que el conjunto de vectores elite mantenían diversidad de forma implícita en relación a los padres.

1.5.2 Descripción de la propuesta multi-objetivo

Aunque se han realizado varios trabajos relacionados con la diversidad en el espacio de las variables del ámbito multi-objetivo (ver sección 1.2) ningún trabajo ha alcanzado resultados significativamente superiores a otros algoritmos multi-objetivos, esto sucede ya que cada problema posee una relación distinta entre el espacio de las variables y el espacio objetivo, y en resultado mantener diversidad en el espacio de las variables no garantiza una calidad en el espacio de los objetivos. Este inconveniente puede ser resuelto al considerar un modelo dinámico lineal donde sea incorporado el tiempo transcurrido y el criterio de parada. Principalmente, en nuestra propuesta se propone una fase de reemplazo similar a la utilizada en evolución diferencial y un estimador de densidad del espacio de los objetivos. La fase de reemplazo en la propuesta multi-objetivo considera una clasificación por frentes en base al concepto de dominancia que está relacionado al espacio de los objetivos. Por otra parte, el estimador de densidad que corresponde al espacio de los objetivos otorga un grado de calidad a cada solución en función a la distancia entre el espacio dominado por la soluciones de referencia y la solución actual.

1.5.3 Descripción de la propuesta aplicada

En esta propuesta se considera el problema de planeación de menú, este problema consiste en seleccionar de forma automática configuraciones de platillos (previamente propuestos por expertos) para cafeterías escolares, los platillos a cumplir por día estan conformados por el plato de entrada, plato fuerte y postre. Particularmente, este problema es de combinatoria con restricciones pues los platillos deben cumplir una cantidad de nutrientes tanto por día como por un conjunto de días. Principalmente, en este problema se consideran tres aportaciones: se incorpora una fase de reemplazo similar a la aplicada en evolución diferencial (*Best Non-Penalized Survivor Strategy - BNP*), se propone un operador de cruce (*Similarity Based Crossover - SX*) y se aplica una búsqueda local por escalada *First-improvement hill climbing*. En los resultados se observa que basta con realizar ejecuciones a mediano plazo (dos horas) para obtener resultados superiores al estado del arte.

1.5.4 Descripción propuesta del operador de cruce binario simulado

En esta parte se analizan los componentes implementados en el operador de cruce binario simulado "*Simulated Binary Crossover*", y se propone el operador dinámico de cruce binario simulado "*Dynamic Simulated Binary Crossover - DSXB*". Principalmente, se incorpora el tiempo transcurrido y el criterio de parada en varios componentes del operador de cruce como es la apertura de la curva de distribución, la cantidad de información que se hereda de los individuos padre a los individuos hijo. En este estudio no se preserva la diversidad de forma explícita, sin embargo se observa la importancia de considerar el criterio de parada y el tiempo transcurrido en los operadores de un algoritmo evolutivo.

1.6 Líneas de trabajo

En este apartado son expuestas las distintas líneas que se deben trabajar para el término de la estancia de doctorado. En color azul están aquellas líneas de trabajo que ya están concluidas o casi concluidas. En color gris se presentan las líneas no obligatorias, sin embargo es deseable desarrollar. En color negro las líneas obligatorias que se deben trabajar para concluir con la estancia. El proyecto CIANNA (Centro Integral de Atención a Niñas, Niños y Adolescentes) está en espera de ser aprobado por el SICES (Secretaría de Innovación, Ciencia y Educación Superior), el cual consiste en la planeación de menús (similar al MPP). De ser aprobado pasaría a ser una línea obligatoria.

- **Mono-objetivo**

- Evolución Diferencial - 99%.
- Optimización de Partículas (PSO) - 0%.
- Algoritmos de Estimación de Distribución (EDA).

- **Multi-objetivo**

- Algoritmos basados en dominancia.
 - * Dominancia básico (Carlos Coello) - 90%.
 - * Memético - 30%.
- Algoritmos basados en descomposición - 50%.
- Algoritmos basados en indicadores - 20%.
- Nuevo paradigma (Oliver Schütze) - 40%.

- **Aplicaciones**

- Problema de Planeación de Menú.
 - * Académico (Coromoto - Mono-objetivo) 100%.
 - * CIANNA¹ - 0%
 - * Académico (Coromoto - Multi-objetivo) - 0%.

- **Comunes**

- Operadores 100%.
- Escalabilidad en las variables (LSGO) - 40%.
- Análisis de mediciones de la dispersión.

¹Centro Integral de Atención de Niños, Niñas y Adolescentes

1.7 Cronograma

Las líneas de trabajo están ordenadas por prioridad en la tabla 1.1, por su parte el trabajo *Análisis de mediciones de dispersión* y *Algoritmos de Estimación de Distribución* tienen asignado como fecha inicio y fin un signo de interrogación ya no son líneas obligatorias. Además, se asignan los primeros dos meses de cada mes para redacción de la tesis. Si no existiera aprobación del proyecto CIANNA entonces las líneas con signo de interrogación pasarían como líneas obligatorias.

Table 1.1: Cronograma líneas de trabajo

Fechas inicio	Fecha fin	Tema a trabajar
Enero 2018	Julio 2019	Algoritmos basados en dominancia
Agosto 2019	Diciembre 2019	Algoritmos basados en descomposición
Diciembre 2019	Marzo 2019	Problema de planeación de menú - multi-objetivo
Enero 2020	Diciembre 2020	Algoritmos basados en indicadores
Marzo 2020	Agosto 2020	Nuevo paradigma
Agosto 2021	Noviembre 2021	Optimización de partículas
Septiembre 2019	Diciembre 2019	CIANNA
Septiembre 2020	Enero 2021	Algoritmo multi-objetivo memético
Febrero 2021	Julio 2021	Escalabilidad en las variables (LSGO)
	?	Análisis de mediciones de dispersión
	?	Algoritmos de Estimación de Distribución
Enero 2020	Febrero 2020	Redacción
Enero 2021	Febrero 2021	Redacción
October 2021	Febrero 2022	Redacción

Bibliography

- Alba, Enrique (2005). *Parallel metaheuristics: a new class of algorithms*. Vol. 47. John Wiley & Sons (cit. on pp. 6, 8).
- Beheshti, Zahra and Siti Mariyam Hj Shamsuddin (2013). "A review of population-based meta-heuristic algorithms." In: *Int. J. Adv. Soft Comput. Appl* 5.1, pp. 1–35 (cit. on pp. 1, 3).
- Bui, Lam Thu, Hussein A Abbass, and Jürgen Branke (2005). "Multiobjective optimization for dynamic environments." In: *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*. Vol. 3. IEEE, pp. 2349–2356 (cit. on p. 11).
- Chacón, Joel et al. (2017). "A Novel MOEA/D Variant with Enhanced Variable Space Diversity Control: MOEA/D-EVSD." In: *Proceedings of the 2017 on Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. GECCO '17 Companion*. ACM, In Press (cit. on pp. 12, 13).
- Chakraborty, Uday K (2008). *Advances in differential evolution*. Vol. 143. Springer (cit. on p. 1).
- Chan, KP and T Ray (2005). "An evolutionary algorithm to maintain diversity in the parametric and the objective space." In: *International Conference on Computational Robotics and Autonomous Systems (CIRAS), Centre for Intelligent Control, National University of Singapore* (cit. on p. 14).
- Chiang, T. C. and Y. P. Lai (2011). "MOEA/D-AMS: Improving MOEA/D by an adaptive mating selection mechanism." In: *2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 1473–1480 (cit. on p. 12).
- Črepinšek, Matej, Shih-Hsi Liu, and Marjan Mernik (2013a). "Exploration and Exploitation in Evolutionary Algorithms: A Survey." In: *ACM Computing Surveys* 45.3, 35:1–35:33 (cit. on pp. 4, 7).
- Črepinšek, Matej, Shih-Hsi Liu, and Marjan Mernik (2013b). "Exploration and Exploitation in Evolutionary Algorithms: A Survey." In: *ACM Computing Surveys* 45.3, 35:1–35:33 (cit. on pp. 6, 11).

Bibliography

- De Jong, Kenneth A (2006). *Evolutionary computation: a unified approach*. MIT press (cit. on p. 6).
- De Jong, Kenneth Alan (1975). "Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems." In: (cit. on p. 10).
- Deb, Kalyanmoy (1989). "An investigation of niche and species formation in genetic function optimization." In: *ICGA'89*, pp. 42–50 (cit. on p. 8).
- Deb, Kalyanmoy and Santosh Tiwari (2005). "Omni-optimizer: A Procedure for Single and Multi-objective Optimization." In: *EMO*. Vol. 3410. Springer, pp. 47–61 (cit. on p. 13).
- Eiben, Agoston E and Cornelis A Schippers (1998). "On evolutionary exploration and exploitation." In: *Fundamenta Informaticae* 35.1-4, pp. 35–50 (cit. on p. 9).
- Eiben, Agoston E, James E Smith, et al. (2003). *Introduction to evolutionary computing*. Vol. 53. Springer (cit. on pp. 6, 8).
- Eshelman, Larry J. (1991). "The CHC Adaptive Search Algorithm: How to Have Safe Search When Engaging in Nontraditional Genetic Recombination." In: *Foundations of Genetic Algorithms*. Ed. by Gregory J.E. Rawlins. Vol. 1. Morgan Kaufmann Publishers, pp. 265–283 (cit. on pp. 6, 8, 11).
- Gao, Weifeng, Gary G Yen, and Sanyang Liu (2014). "A cluster-based differential evolution with self-adaptive strategy for multimodal optimization." In: *IEEE transactions on cybernetics* 44.8, pp. 1314–1327 (cit. on p. 8).
- Glover, FW and GA Kochenberger (2005). "Handbook of Metaheuristics (International Series in Operations Research and Management Science)." In: *JOURNAL-OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY* 56.5, pp. 614–614 (cit. on pp. 1, 3).
- Grefenstette, John J (1986). "Optimization of control parameters for genetic algorithms." In: *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics* 16.1, pp. 122–128 (cit. on p. 10).
- Herrera, Francisco and Manuel Lozano (1996). "Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers." In: *Genetic Algorithms and Soft Computing* 8, pp. 95–125 (cit. on p. 4).
- Herrera, Francisco and Manuel Lozano (2003). "Fuzzy adaptive genetic algorithms: design, taxonomy, and future directions." In: *Soft Computing* 7.8, pp. 545–562 (cit. on p. 6).
- Horn, J., N. Nafpliotis, and D. E. Goldberg (1994). "A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization." In: *Proceedings of the First*

Bibliography

- IEEE Conference on Evolutionary Computation. IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 82–87 vol.1 (cit. on p. 13).
- Ishibuchi, Hisao and Youhei Shibata (2003). "An Empirical Study on the Effect of Mating Restriction on the Search Ability of EMO Algorithms." In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference, EMO 2003, Faro, Portugal, April 8–11, 2003. Proceedings*. Ed. by Carlos M. Fonseca et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 433–447. ISBN: 978-3-540-36970-7 (cit. on p. 12).
- Jaeggi, DM et al. (2008). "The development of a multi-objective Tabu Search algorithm for continuous optimisation problems." In: *European Journal of Operational Research* 185.3, pp. 1192–1212 (cit. on p. 12).
- Jansen, Thomas (2002). "On the analysis of dynamic restart strategies for evolutionary algorithms." In: *International conference on parallel problem solving from nature*. Springer, pp. 33–43 (cit. on p. 9).
- Koumoussis, V.K. and C.P. Katsaras (2006). "A saw-tooth genetic algorithm combining the effects of variable population size and reinitialization to enhance performance." In: 10.1, pp. 19–28 (cit. on p. 11).
- Koumoussis, Vlasios K and Christos P Katsaras (2006). "A saw-tooth genetic algorithm combining the effects of variable population size and reinitialization to enhance performance." In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 10.1, pp. 19–28 (cit. on p. 9).
- Liu, Shih-Hsi, Marjan Mernik, and Barrett R Bryant (2009). "To explore or to exploit: An entropy-driven approach for evolutionary algorithms." In: *International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems* 13.3-4, pp. 185–206 (cit. on p. 7).
- Lobo, FJ, Cláudio F Lima, and Zbigniew Michalewicz (2007). *Parameter setting in evolutionary algorithms*. Vol. 54. Springer Science & Business Media (cit. on p. 9).
- Lozano, Manuel, Francisco Herrera, and José Ramón Cano (2008). "Replacement strategies to preserve useful diversity in steady-state genetic algorithms." In: *Information Sciences* 178.23, pp. 4421–4433 (cit. on p. 10).
- Ma, Xiaoliang et al. (2016). "A multiobjective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multiobjective optimization problems with large-scale variables." In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 20.2, pp. 275–298 (cit. on p. 15).
- Mahfoud, Samir W (1992). "Crowding and preselection revisited." In: *Urbana* 51, p. 61801 (cit. on p. 10).

Bibliography

- Mengshoel, Ole J, Severino F Galán, and Antonio De Dios (2014). "Adaptive generalized crowding for genetic algorithms." In: *Information Sciences* 258, pp. 140–159 (cit. on p. 10).
- Mouret, Jean-Baptiste (2011). "Novelty-based multiobjectivization." In: *New horizons in evolutionary robotics*. Springer, pp. 139–154 (cit. on p. 11).
- Pandey, Hari Mohan, Ankit Chaudhary, and Deepti Mehrotra (2014). "A comparative review of approaches to prevent premature convergence in GA." In: *Applied Soft Computing* 24, pp. 1047–1077 (cit. on p. 6).
- Pétrowski, Alain (1996). "A clearing procedure as a niching method for genetic algorithms." In: *Evolutionary Computation, 1996., Proceedings of IEEE International Conference on*. IEEE, pp. 798–803 (cit. on p. 10).
- Piroonratana, Theera and Nachol Chaiyaratana (2006). "Improved multi-objective diversity control oriented genetic algorithm." In: *Artificial Intelligence and Soft Computing–ICAISC 2006*, pp. 430–439 (cit. on p. 12).
- Preuss, Mike, Boris Naujoks, and Günter Rudolph (2006). "Pareto set and EMOA behavior for simple multimodal multiobjective functions." In: *PPSN*. Springer, pp. 513–522 (cit. on p. 13).
- Romero Ruiz, Emmanuel and Carlos Segura (2018). "Memetic algorithm with hungarian matching based crossover and diversity preservation." In: *Computación y Sistemas* 22.2 (cit. on p. 5).
- Rudolph, Günter, Boris Naujoks, and Mike Preuss (2007). "Capabilities of EMOA to detect and preserve equivalent Pareto subsets." In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, pp. 36–50 (cit. on p. 13).
- Segredo, Eduardo, Carlos Segura, and Coromoto León (2011). "A multiobjectivised memetic algorithm for the frequency assignment problem." In: *Evolutionary Computation (CEC), 2011 IEEE Congress on*. IEEE, pp. 1132–1139 (cit. on pp. 1, 5, 11).
- Segredo, Eduardo, Carlos Segura, and Coromoto León (2014). "Memetic algorithms and hyperheuristics applied to a multiobjectivised two-dimensional packing problem." In: *Journal of Global Optimization* 58.4, pp. 769–794 (cit. on p. 5).
- Segura, Carlos, Salvador Botello Rionda, et al. (2015). "A Novel Diversity-based Evolutionary Algorithm for the Traveling Salesman Problem." In: *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. GECCO '15. Madrid, Spain: ACM, pp. 489–496. ISBN: 978-1-4503-3472-3. DOI: 10.1145/2739480.2754802. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2739480.2754802> (cit. on pp. 5, 11, 12).

Bibliography

- Segura, Carlos, Carlos A Coello Coello, Gara Miranda, et al. (2013). "Using multi-objective evolutionary algorithms for single-objective optimization." In: *4OR* 11.3, pp. 201–228 (cit. on p. 11).
- Segura, Carlos, Carlos A Coello Coello, Eduardo Segredo, et al. (2016). "A novel diversity-based replacement strategy for evolutionary algorithms." In: *IEEE transactions on cybernetics* 46.12, pp. 3233–3246 (cit. on p. 11).
- Segura, Carlos, S Ivvan Valdez Peña, et al. (2016). "The importance of diversity in the application of evolutionary algorithms to the Sudoku problem." In: *Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on. IEEE*, pp. 919–926 (cit. on pp. 5, 11, 12).
- Segura, C. et al. (2016). "A Novel Diversity-Based Replacement Strategy for Evolutionary Algorithms." In: *IEEE Transactions on Cybernetics* 46.12, pp. 3233–3246. ISSN: 2168-2267 (cit. on p. 11).
- Shir, Ofer M et al. (2009). "Enhancing Decision Space Diversity in Evolutionary Multiobjective Algorithms." In: *EMO*. Vol. 9. Springer, pp. 95–109 (cit. on pp. 12, 14).
- Toffolo, Andrea and Ernesto Benini (2003). "Genetic diversity as an objective in multi-objective evolutionary algorithms." In: *Evolutionary computation* 11.2, pp. 151–167 (cit. on p. 13).
- Ulrich, Tamara, Johannes Bader, and Eckart Zitzler (2010). "Integrating decision space diversity into hypervolume-based multiobjective search." In: *Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM, pp. 455–462 (cit. on p. 14).
- Vidal, Thibaut et al. (2013). "A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows." In: *Computers & operations research* 40.1, pp. 475–489 (cit. on p. 10).
- Voß, Stefan et al. (2012). *Meta-heuristics: Advances and trends in local search paradigms for optimization*. Springer Science & Business Media (cit. on p. 1).
- Yu, Wei-Jie et al. (2014). "Differential evolution with two-level parameter adaptation." In: *IEEE Transactions on Cybernetics* 44.7, pp. 1080–1099 (cit. on p. 9).
- Yuen, Shiu Yin and Chi Kin Chow (2009). "A genetic algorithm that adaptively mutates and never revisits." In: *IEEE transactions on evolutionary computation* 13.2, pp. 454–472 (cit. on p. 9).

Bibliography

Zhou, Aimin, Qingfu Zhang, and Yaochu Jin (2009). "Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm." In: *IEEE transactions on evolutionary computation* 13.5, pp. 1167–1189 (cit. on p. 14).