

Escuela de Modelación y Métodos Numéricos 2015

Taller de Optimización Multi-objetivo

Dra. María Guadalupe Villarreal Marroquín
Investigador Cátedras CONACYT
CIMAT-Monterrey

Contenido

- Parte 1:
 - Ejemplos de problemas de optimización multiobjetivo
 - Características de problemas multiobjetivo
 - Formulación de problema de optimización multiobjetivo
 - Conceptos básicos de optimización multiobjetivo
 - Métodos de optimización multiobjetivo 1
 - Métodos Clásicos
 - Método de la suma ponderada
 - Métodos de la restricción- ε
 - Método Lexicográfico
- Parte 2:
 - Métodos de optimización multiobjetivo 2
 - Algoritmos Evolutivos multiobjetivo
 - Como comparar 2 Fronteras de Pareto
 - Como seleccionar una solución entre las soluciones Pareto

Ejemplo 1

Un estudiante desea seleccionar la mejor escuela de matemáticas, en el extranjero, para estudiar el doctorado y se basa en varios criterios:

Criterios	Index
Ranking Académico	1
Nivel de Reclutamiento	2
Selectividad de Estudiantes	3
Actividades de Investigación	4
Relación Estudiantes Doctorado y Profesores	5

Escuelas
MIT
Stanford
Carnegie Mellon
Georgia Tech
University of Michigan
California Tech
Cornell University

Ejemplo 1 (Cont.)

- Reporte de Indicadores

5 criterios (objetivos)

7
Alternativas

Escuelas \ Criterio	1	2	3	4	5
MIT	1	1	11	1	3.21
Stanford	1	8	31	7	4.71
Carnegie Mellon	8	12	4	6	3.36
Georgia Tech	8	2	20	2	2.72
University of Michigan	5	3	31	3	3.18
California Tech	3	7	1	26	3.88
Cornell University	7	10	6	13	2.87

Criterios: (1) Ranking Académico, (2) Reclutamiento, (3) Selectividad de Estudiantes, (4) Activ. Investigación, (5) Relación Estudiantes Doc./Profesores

- ¿Que universidad seleccionarían en base a los 5 criterios?

Ejemplo 2

Se desea comprar un carro de entre 4 modelos: Ford Focus, Toyota Corolla, Honda Civic, Mazda 3. La decisión se va a tomar de acuerdo a precio, consumo de gasolina y potencia. Se desea el carro mas barato, que consuma menos gasolina y sea mas potente.

3 objetivos

4
Alternativas

Modelo	Costo (x 1,000 pesos)	Consumo gasolina (l/100km)	Potencia (hp)
Ford Focus	293	9	252
Toyota Corolla	250	8.2	132
Honda Civic	265	8.5	150
Mazda 3	240	11	167

-

¿Que carro comprarían en base a los 3 objetivos ?

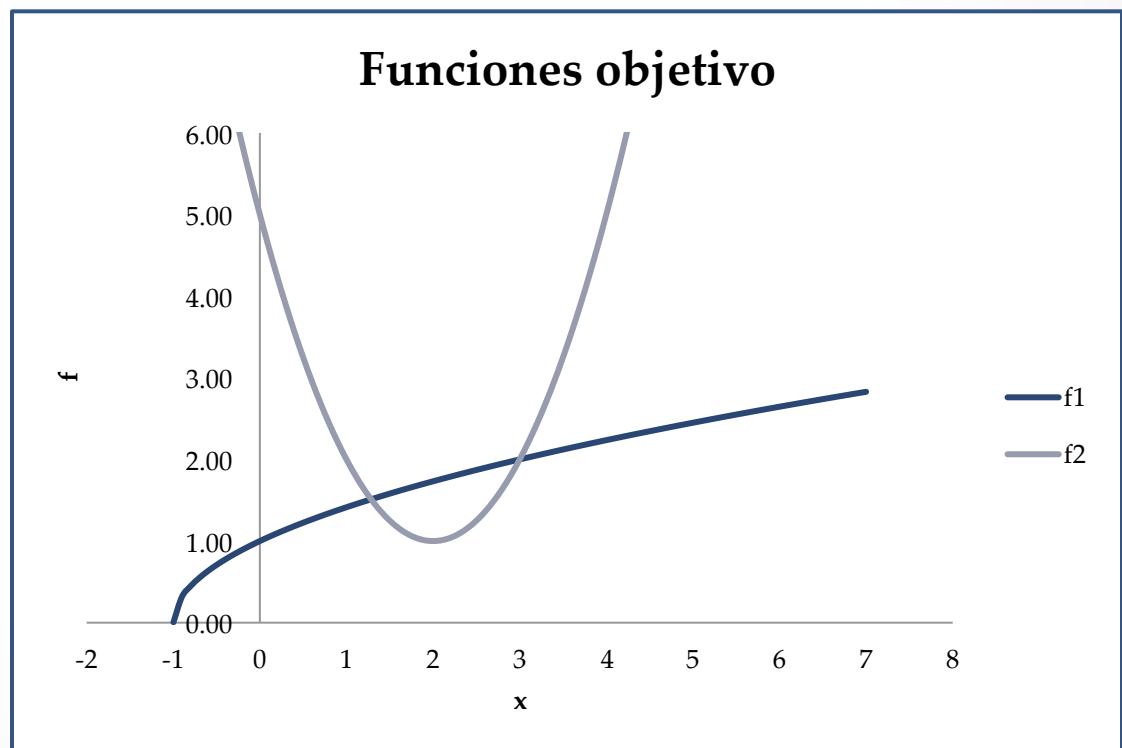
Ejemplo 3

Se desean minimizar 2 objetivos (ejm. costo y calidad de producto) simultáneamente, los cuales están representados por las siguientes funciones con 1 variable de decisión (ejm. tiempo de procesamiento).

$$f_1(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f_2(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$x \geq 0$$



Característica de un Problema de Optimización Multiobjetivo

- Problemas que involucra mas de una función objetivo a ser minimizada o maximizada.
- Los objetivos presentan un grado de conflicto. Esto es, no existe una solución (\mathbf{x}) tal que todos los objetivos sean minimizados (maximizados) simultáneamente.

Formulación general de problemas de Optimización multiobjetivo

$$\min/\max (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))$$

$$s.a. \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, \dots, K$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, N$$

M objetivos

N variables de decisión

J restricciones de desigualdad

K restricciones de igualdad

Conceptos Básicos

• • •

Optimización Multiobjetivo

Dominio de una solución

- En problemas de optimización con un solo objetivo, el determinar si una solución es mejor que otra es fácil de decir, solo comparamos el valor de la función objetivo en ambos soluciones.
- En problemas de optimización multiobjetivo, qué tan buena es una solución es determinada mediante el concepto de **dominancia**.
-

Definición de Dominancia

- Dadas 2 soluciones \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , decimos que \mathbf{x}_1 **domina a** \mathbf{x}_2 , si
 - La solución \mathbf{x}_1 no es peor que \mathbf{x}_2 en todos los objetivos y
 - La solución \mathbf{x}_1 es estrictamente mejor que \mathbf{x}_2 en al menos un objetivos.
 - Equivalente a decir (caso minimizar):

$$f_i(\mathbf{x}_1) \leq f_i(\mathbf{x}_2) \quad \text{para } i = 1, \dots, M$$

$$\text{y} \quad f_i(\mathbf{x}_1) < f_i(\mathbf{x}_2) \quad \text{para algún } i \in \{1, \dots, M\}$$

Decir que \mathbf{x}_1 domina a \mathbf{x}_2 en equivalente a decir \mathbf{x}_2 es dominada por \mathbf{x}_1 .

Ejercicio

Identificar soluciones no dominadas

- Consideremos el ejemplo del seleccionar la mejor escuela de matemáticas, donde solo el ranking de la universidad y el nivel de reclutamiento son los criterios de decisión.
- ¿Qué alternativas no son dominadas?

$$f_1 \quad f_2$$

Escuelas \ Criterio	Ranking (min)	Reclutamiento (min)
\mathbf{x}_1 MIT	1	3
\mathbf{x}_2 Stanford	2	8
\mathbf{x}_3 Carnegie Mellon	6	12
\mathbf{x}_4 Georgia Tech	4	2
\mathbf{x}_5 U. of Michigan	5	3
\mathbf{x}_6 California Tech	3	7
\mathbf{x}_7 Cornell	7	10

MIT vs. Stanford:
MIT domina a Stanford

Georgia Tech vs. Cal Tech:
ninguna solución domina a la otra

MIT y Georgia Tech
son las **solución no
dominadas**

Nota

- El objetivo de los métodos de optimización multiobjetivo es encontrar el conjunto de soluciones no dominadas y no una solución única.

Algoritmo para determinar soluciones dominadas (comparación por pares)

- Vector de objetivos:
$$\begin{pmatrix} \text{min Ranking} \\ \text{min Reclutamiento} \end{pmatrix}$$
- Alternativas:

MIT	Stand.	Carnegie Gergia	U of M	Cal Tech	Cornell
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
					$\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

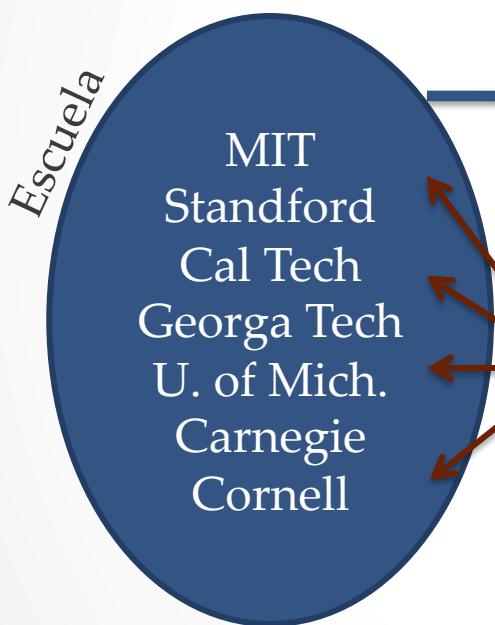
1. Comparar todos los pares y asignar un valor de '1' si la desigualdad se cumple y '0' si no

#1	#2	Score #1	Score #2
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$	1	0
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$	1	0
	sum	2	0

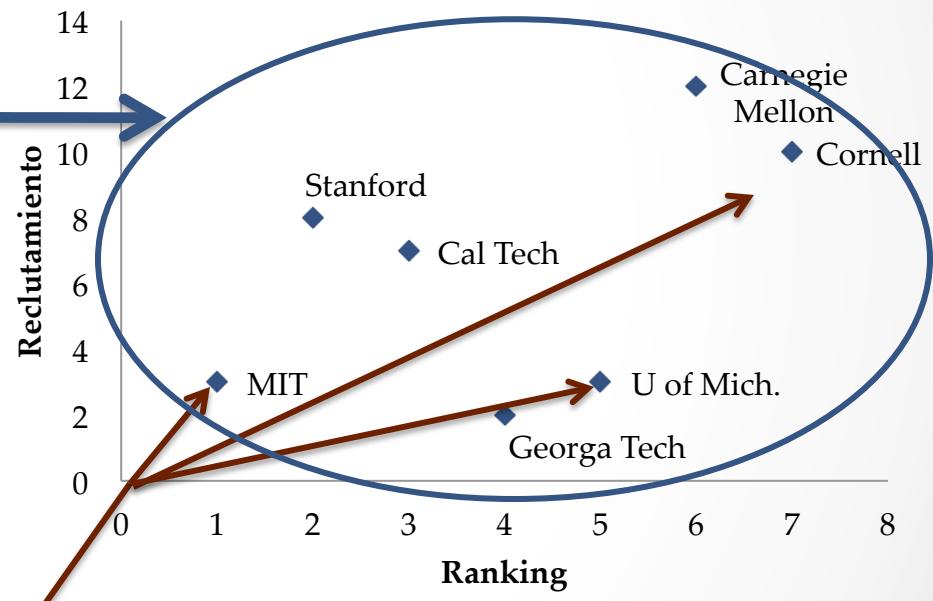
Si una solución tiene Score 0 es dominada, y se elimina de la lista.

Conceptos Básicos: Conjunto de soluciones factibles y espacio de decisión/objetivos

Espacio de Decisión (X)



Espacio de Objetivos (Y)



El conjunto de **soluciones factibles** es el conjunto de posibles soluciones del problema.

Conceptos Básicos: Solución eficiente o Pareto

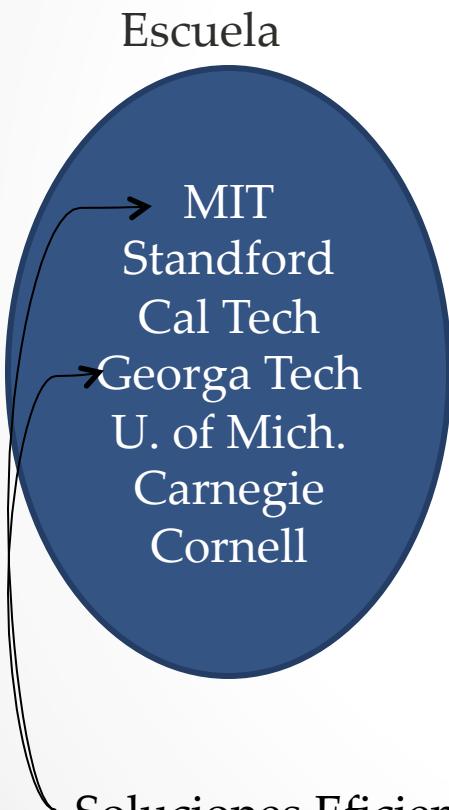
- Una solución factible $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ se llama **eficiente o Pareto** si no existe una solución $\mathbf{x} \in X$ tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{donde} \quad f(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))$$

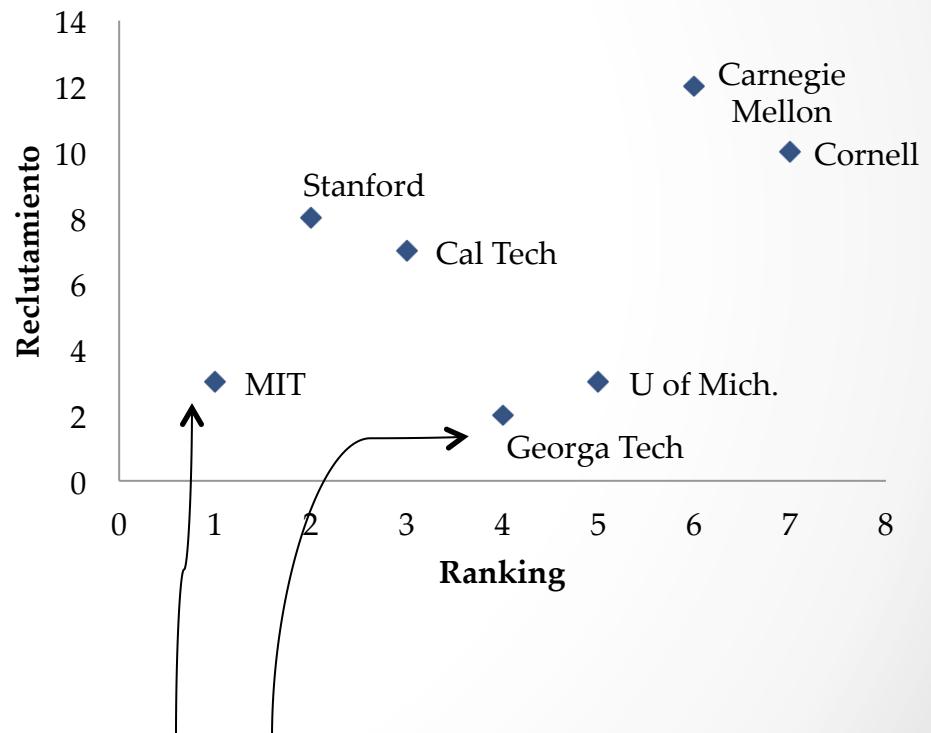
- Si $\tilde{\mathbf{x}}$ es eficiente, $f(\tilde{\mathbf{x}})$ es una **solución no dominada**
- El conjunto de soluciones eficientes se llama conjunto Eficiente o conjunto Pareto
- El conjunto de soluciones no dominadas se llama el conjunto no-dominado o Frontera Pareto

Conceptos Básicos: Soluciones eficientes vs. no-dominadas

Espacio de Variables



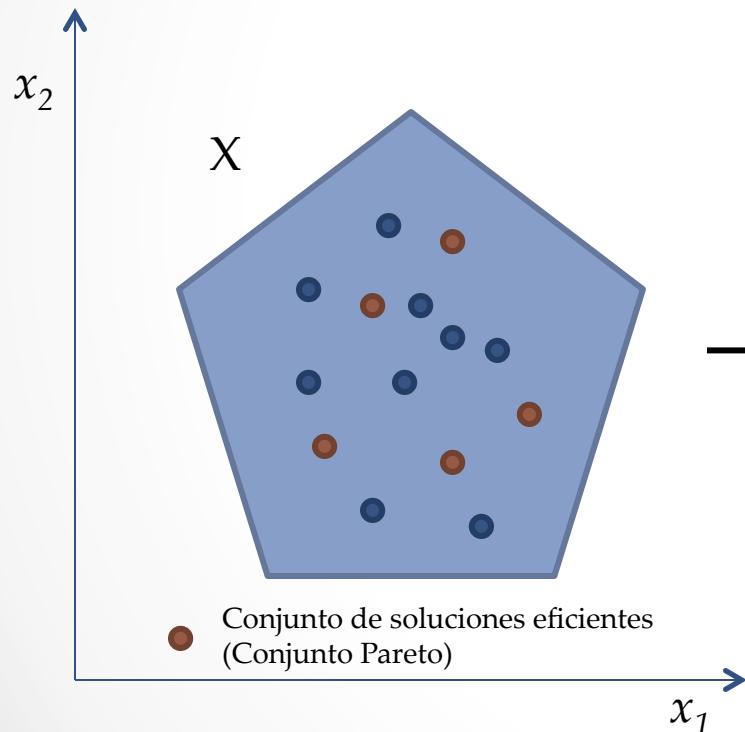
Espacio de Objetivos



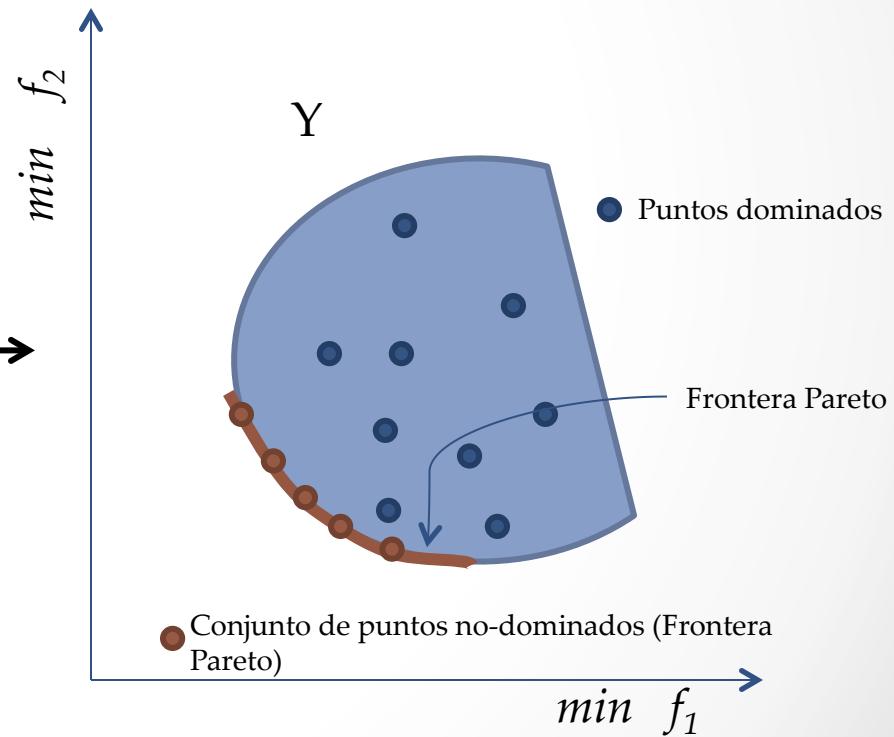
Soluciones No dominadas

Conceptos Básicos: Conjunto Pareto vs. Frontera Pareto

Espacio de Variables

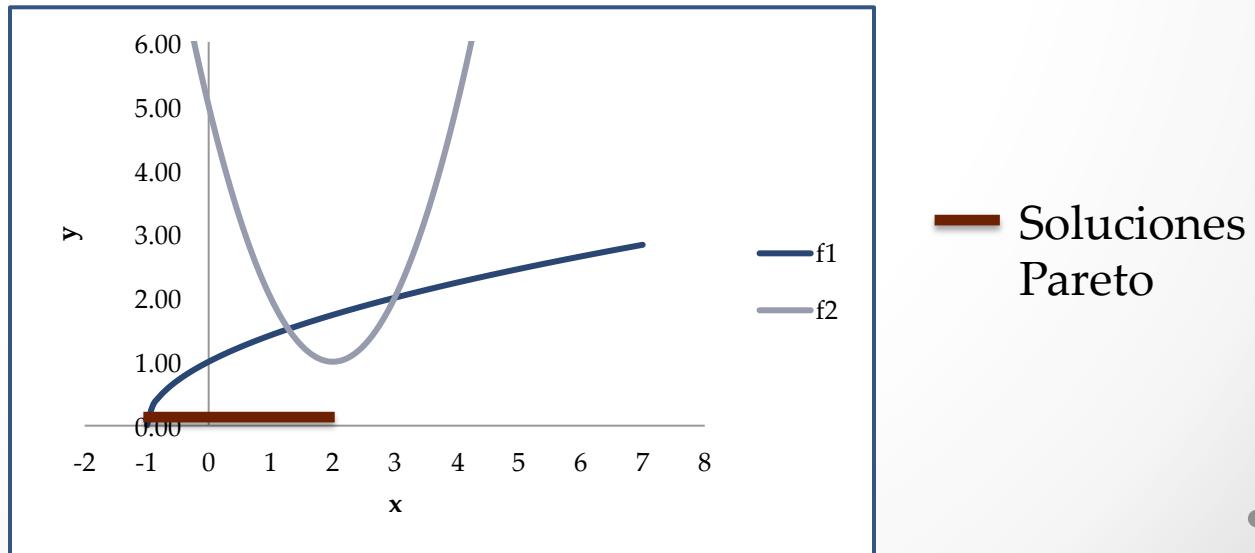


Espacio de Objetivos



Otra definicion de Solución Eficiente o Parteo Optimas

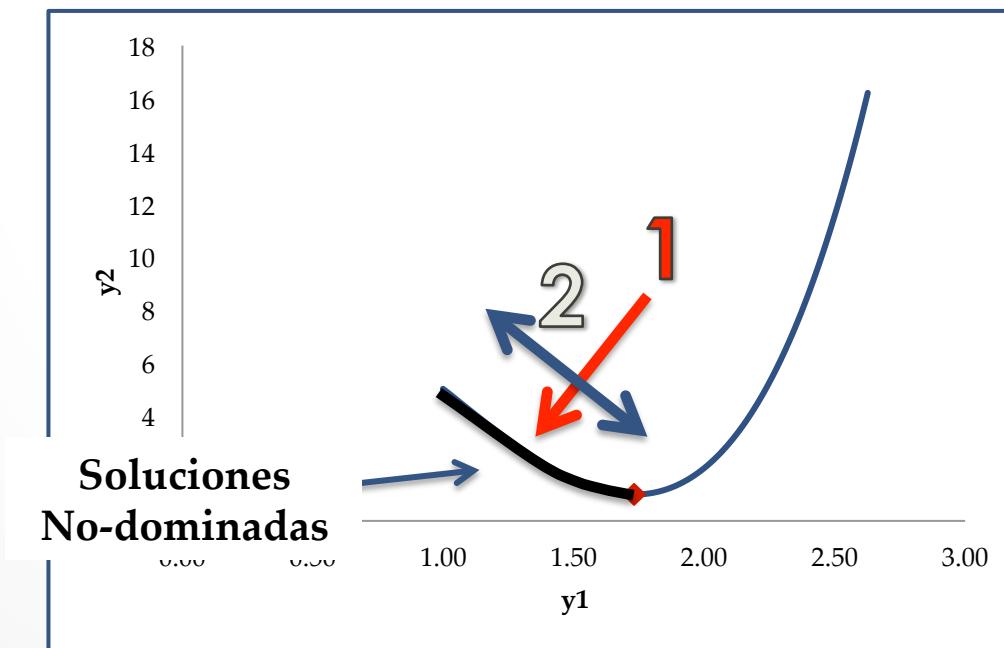
- El conjunto de soluciones x donde una función objetivo no puede ser mejorada sin empeorar alguno de los otros objetivos se llama **Soluciones Pareto optima** o **Soluciones Eficientes**.
- Esto es equivalente a decir que si mejoramos un objetivo al menos otro se empeora.



Métodos de Optimización Multiobjetivo ... Clásicos

Objetivo de los Métodos de Optimización multiobjetivo

1. Encontrar un conjunto de soluciones lo más cercano al conjunto de soluciones no-dominadas.
2. Encontrar un conjunto de soluciones lo mas diverso posible.



Métodos de Optimización Multiobjetivo ... Clásicos

Método Suma Ponderada

- La idea general de este método es asociar un peso a cada función objetivo y minimizar la suma ponderada de los objetivos. Éste transforma el problema de multiobjetivo a mono-objetivo. El problema para M objetivos es como sigue:

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^M w_i f_i(x)$$

s.a. $w_i \geq 0 \quad \forall i$

$$\sum_{i=1}^M w_i = 1$$

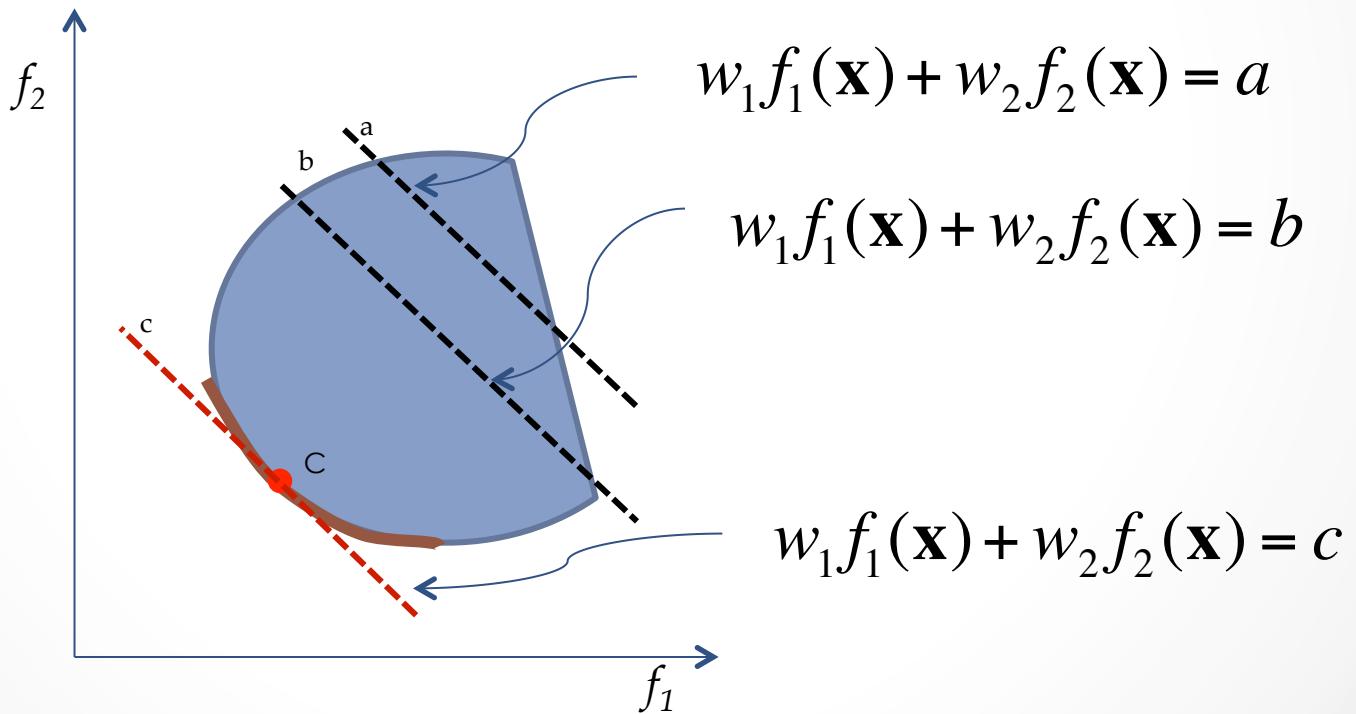
- Si variamos los pesos de forma sistemática podemos encontrar un conjunto de soluciones no dominadas.
-

Resultados sobre Método de Suma Ponderada

- Las soluciones del problema mediante el método de la suma ponderada son al menos Pareto débil. Una solución es Pareto débil si al mejorar en un objetivo no necesariamente empeoramos los otros objetivos.
 - La solución del problema de la suma ponderada es estrictamente Pareto si todos los pesos son positivos.
 - Si el problema es convexo, se pueden encontrar todas las soluciones eficientes mediante el método de la suma ponderada.
-

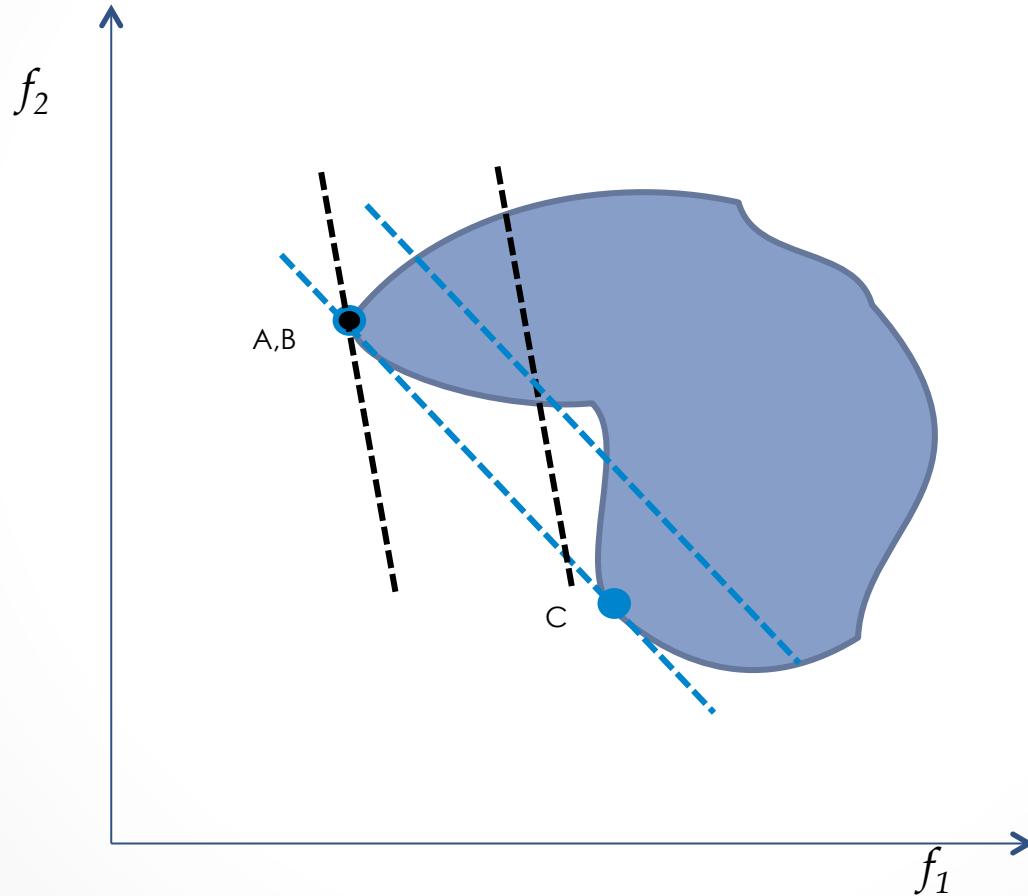
Método de la suma ponderada

Representación gráfica M=2



Método de la suma ponderada

Caso Frontera No-Convexa



Método Suma Ponderada

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - Fácil de usar
 - En problemas convexos se pueden encontrar todas las soluciones de la Frontera Pareto
- Desventajas
 - No encuentra soluciones en la región No-convexa de la Frontera
 - Pesos distribuidos uniformemente no garantizan soluciones distribuidas uniformemente en la Frontera Pareto.
 - Dos vectores de pesos diferentes no necesariamente llevan a 2 soluciones eficientes diferentes.

Método de la restricción - ε

- La idea de este método es mantener un objetivo y restringir el resto de los objetivos a un valor ε . En este caso el problema también se transforma a un problema mono-objetivo. El problema para M objetivos es como sigue:

$$\min_{x \in X} f_j(\mathbf{x})$$

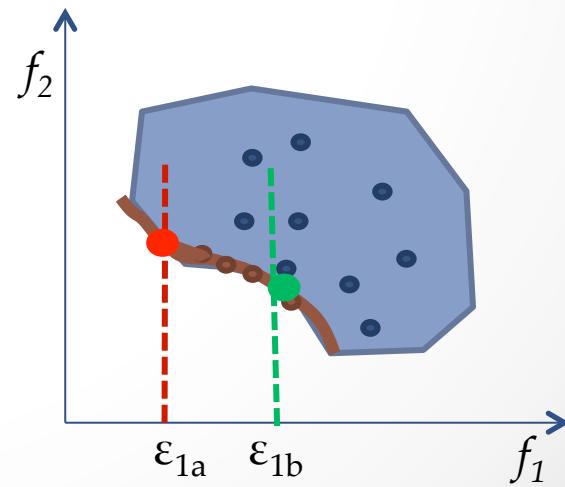
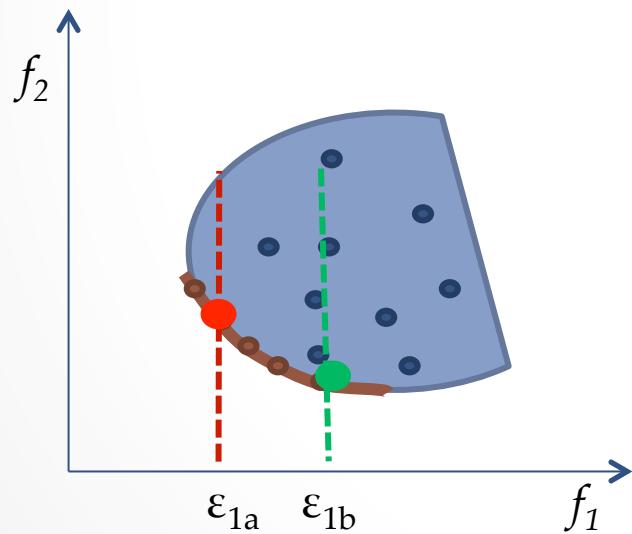
$$s.a. \quad f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, M, i \neq j$$

Método restricción- ε

Ilustración

$$\min_{x \in X} f_2(\mathbf{x})$$

$$s.a. \quad f_1(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1$$



Método restricción- ε

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - Fácil de Usar
 - Se puede aplicar a problemas convexos y no-convexos.
- Desventajas
 - El vector ε debe escogerse cuidadosamente para asegurar que esté dentro del valor mínimo o máximo de las funciones objetivo individuales.

Método Lexicográfico

- En este método se asume que los objetivos pueden ser ordenados por importancia.
- La idea es ir resolviendo una serie de problemas mono-objetivo secuencialmente, empezando por el objetivo de mayor importancia hasta el de menor importancia. En cada iteración el valor óptimo encontrado para cada objetivo es añadido como restricción en los problemas subsecuentes. De esta manera se puede preservar el valor óptimo de los objetivos con mayor importancia.

Método Lexicográfico

- El procedimiento es como sigue: (asumamos que los objetivos $i=1,2,\dots,M$ están en orden de importancia)
- **Problema Inicial:**

$$\min_{x \in X} f_1(\mathbf{x})$$

donde \mathbf{x}^* es la solución optima y f_1^* es el valor de la función objetivo en \mathbf{x}^* .

- **Problema subsecuentes ($i=2, \dots, M$):**

$$\min_{x \in X} f_i(\mathbf{x})$$

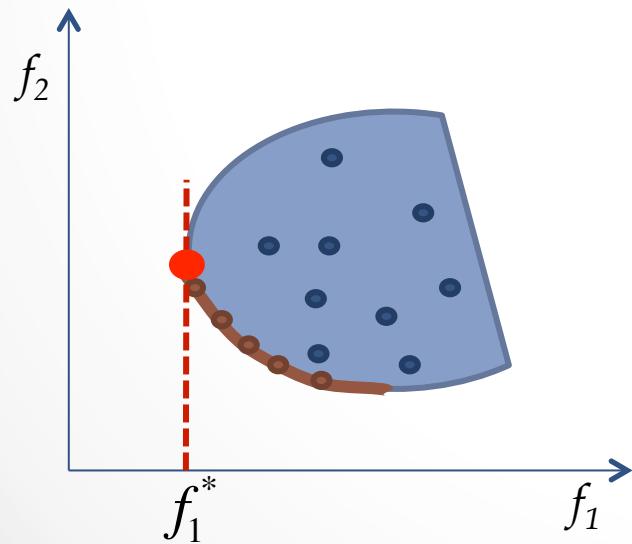
$$s.a. \quad f_l(\mathbf{x}) = f_l^*, \quad l = 1, \dots, i-1$$

Método Lexicográfico

Ilustración 1

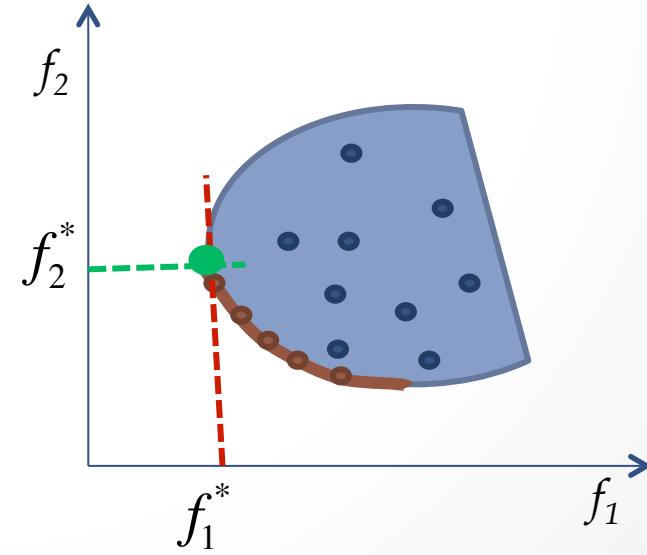
Problema Inicial

$$\min_{x \in X} f_1(\mathbf{x})$$



Problema 2

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} & f_2(\mathbf{x}) \\ \text{s.a. } & f_1(\mathbf{x}) = f_1^* \end{aligned}$$

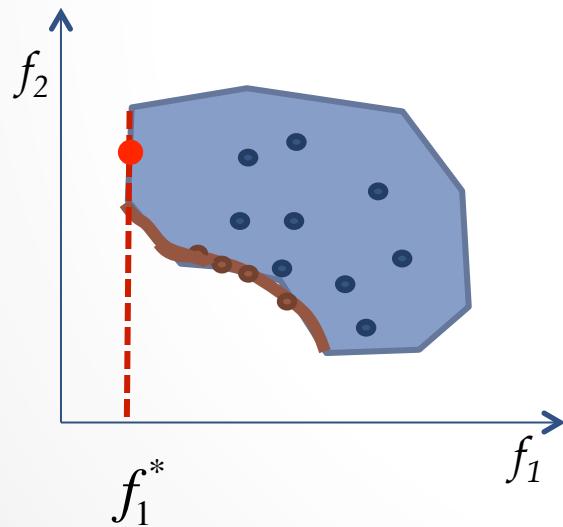


Método Lexicográfico

Ilustración 2

Problema Inicial

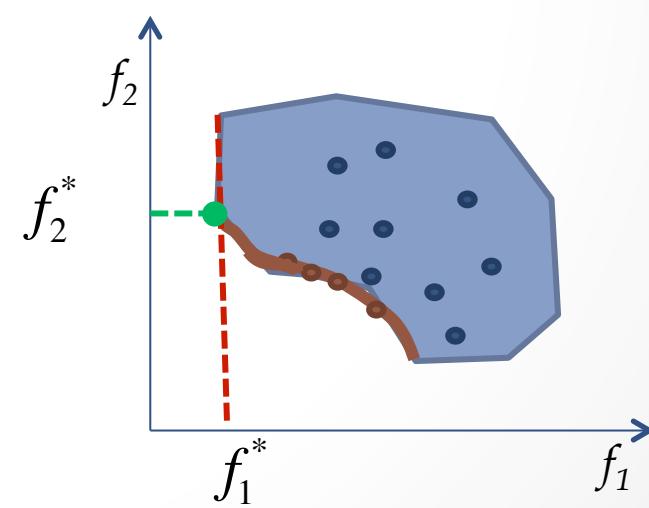
$$\min_{x \in X} f_1(\mathbf{x})$$



Problema 2

$$\min_{x \in X} f_2(\mathbf{x})$$

$$s.a. \quad f_1(\mathbf{x}) = f_1^*$$



Método Lexicográfico

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - No requiere que las funciones objetivo sean normalizadas.
 - La solución obtenida es Pareto optima.
- Desventajas
 - Requiere resolver mucho (M) problemas de optimización para obtener una sola solución.
 - Los problemas puede ser difícil de resolver por las restricciones que se imponen.

Otros métodos clásicos

- Método de Benson
- Programación por Metas
- Método Función Utilidad

Resumen

- En los problemas de optimización multiobjetivo tenemos un conjunto de objetivos que deseamos optimizar.
 - Los objetivos presentan un grado de conflicto por lo que no existe una solución que optimice todos los objetivos de manera simultánea.
 - El objetivo en estos problemas es encontrar el conjunto de soluciones eficientes. Dichas soluciones son matemáticamente igual de buenas.
-

Escuela de Modelación y Métodos Numéricos 2015

Taller de Optimización Multi-objetivo(Parte 2)

Dra. María Guadalupe Villarreal Marroquín
Investigador Cátedras CONACYT
CIMAT-Monterrey

Contenido

- Parte 1:
 - Ejemplos de problemas de optimización multiobjetivo
 - Características de problemas multiobjetivo
 - Formulación de problema de optimización multiobjetivo
 - Conceptos básicos de optimización multiobjetivo
 - Métodos Clásicos de optimización multiobjetivo
- Parte 2:
 - Métodos de optimización multiobjetivo 2
 - Algoritmos Evolutivos mono-objetivo
 - Algoritmos Evolutivos multi-objetivo
 - Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA) Schaffer (1985)
 - Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA y NSGA-II) Srinivas and Deb (1994) & Deb et al. (2002)
 - Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA y SPEA-II) Zitzel and Thiele (1999) & Zitzel, Laumanns & Thiele (2002)
 - Como comparar 2 Fronteras Pareto?
 - Como seleccionar una solución final?

Limitaciones de Métodos de Optimización Multicriterio Clásicos

- Para encontrar un conjunto de elementos en la frontera Pareto, utilizando los métodos de optimización multiobjetivo clásicos, se necesita correr muchas veces un algoritmo de optimización de un objetivo.
- Algunos algoritmos necesitan de parámetros o conocimiento del rango de las objetivos para ser evaluados (ejm. Método de restricción- ε), los cuales pueden ser difíciles de determinar.
- Algunos algoritmos son vulnerables a la forma de la frontera Pareto(convexidad, discontinuidad, etc.).

Métodos de optimización multiobjetivo Parte 2

- Métodos Heurísticos
 - Algoritmos Evolutivos
 - Búsqueda Tabú
 - Recocido Simulado

Algoritmos Evolutivos

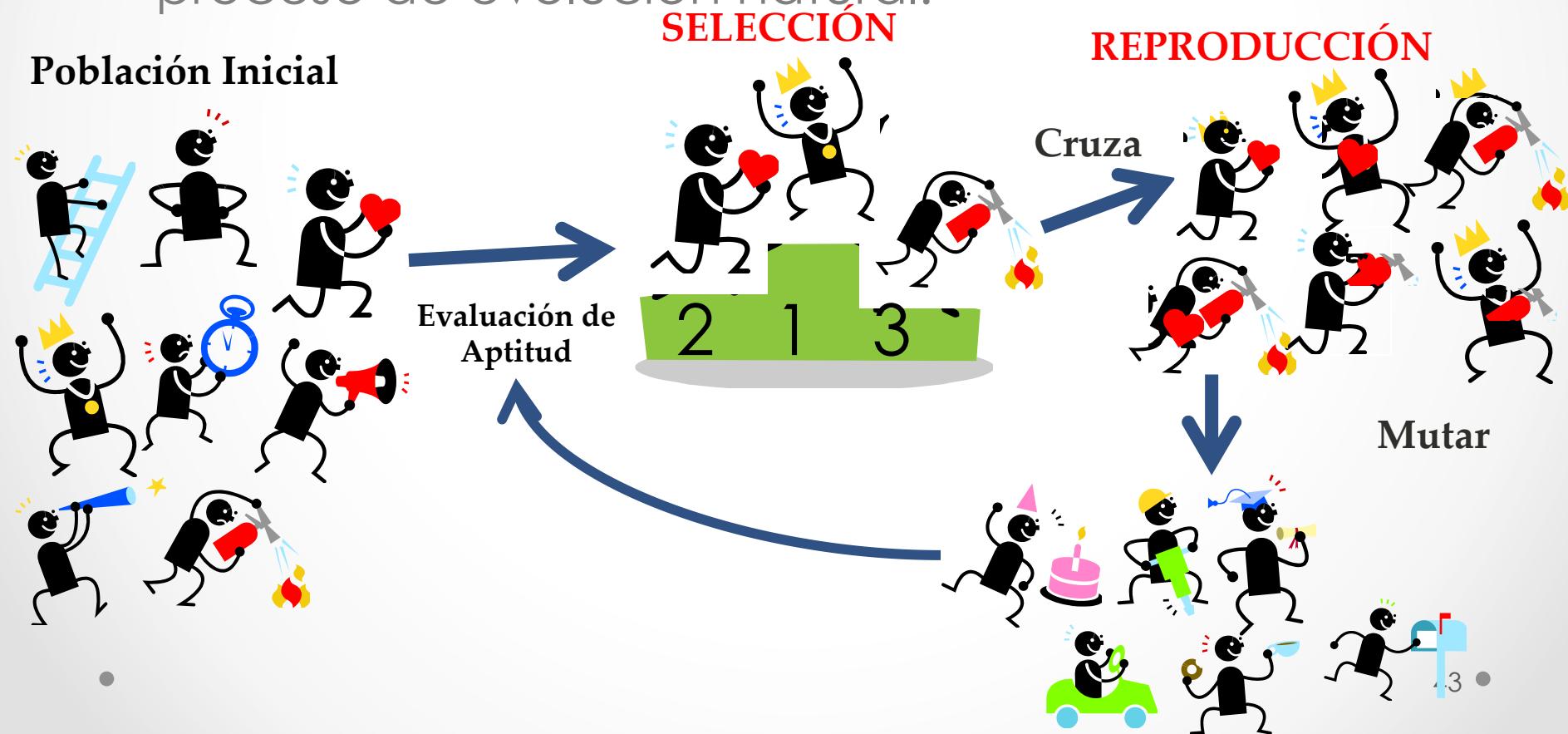
• • •

Mono objetivo

Algoritmos Evolutivos

Descripción General

- Los Algoritmos Evolutivos son procesos computacionales adaptativos que modelan el proceso de evolución natural.



Algoritmos Evolutivos

Procedimiento (versión general)

1. Generar una población inicial con N individuos de forma aleatoria (Primera Generación)
2. Evaluar la **aptitud** de cada individuo de la población.
3. Repetir hasta terminar
 1. **Seleccionar** los n individuos mas aptos (**padres**) para **reproducirse**
 2. Crear nuevos individuos (**hijos**) mediante operaciones de **cruza** y **mutación** y formar una nueva generación.
 3. Evaluar la aptitud de los nuevos individuos.
 4. **Remplazar** los individuos menos aptos con los individuos mas aptos de la nueva generación y formar la Nueva Población

• **En los problemas de optimización las soluciones candidatas juegan el papel de los individuos en la población y la función de aptitud representa el objetivo a minimizar/maximizar.**

Algoritmos Evolutivos

Elementos clave

1. Grupo de Individuos/Población (cuántos y cómo generarlos)
2. La función de aptitud.
3. Estrategia de Selección (método para seleccionar los individuos a reproducirse).
4. Las operaciones genéticas (cruza, mutación).
5. Operación de remplazo (cuales hijos son seleccionados e incluidos en la nueva población)

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

...

Introducción

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Idea General

1. Iniciar el contador de generaciones $t=0$
2. Generar una población inicial $P(t)$ con N individuos
3. Mientras no se cumpla el criterio de parada hacer
 1. Evaluar los M objetivos $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})$ en cada individuo de $P(t)$
 2. Calcular la **aptitud** de cada individuo en $P(t)$. (La aptitud es una medida de que tan buena es cada solución en términos de dominancia).
 3. Seleccionar de $P(t)$ un grupo de N' individuos, $P'(t)$ (preferente los más aptos).
 4. Combinar/**cruzar** los individuos de $P'(t)$ para obtener la población de hijos $P''(t)$
 5. Mutar los individuos en $P''(t)$
 6. Mezclar $P(t)$ y $P''(t)$ y seleccionar los mejores individuos para obtener $P(t+1)$
 7. $t=t+1$

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

- Los Algoritmos Evolutivos mono objetivo y los multiobjetivo tienen una estructura similar.
- La diferencia principal entre los dos es:
 - La asignación de un valor de aptitud
 - El proceso de selección

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

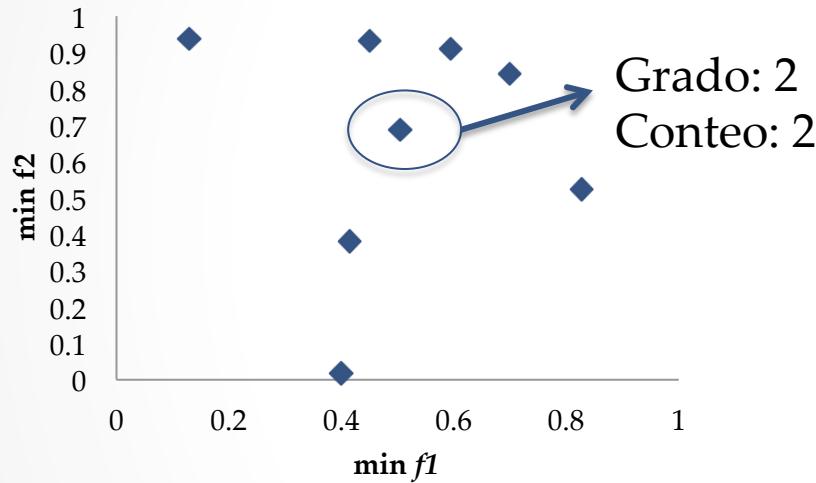
Función de Aptitud

- Métodos de Agregación (ejm. Suma Ponderada)
- Transformación del Problema a un solo objetivo (ejm. Lexicográfico).
 - En esta estrategia el objetivo con mayor preferencia puede variar durante el proceso de selección de cada iteración.
- Definición de dominancia (técnicas por categorías).
 - **Grado de dominancia:** el número de individuos(soluciones) que dominan a cada individuo (menor es mejor).
 - **Conteo de dominancia:** el numero de individuos que cada individuo domina (mayor es mejor).
 - **Profundidad de dominancia:** la población es dividida en diferentes fronteras y la profundidad refleja a que frontera pertenece un individuo (donde frontera 1 es mejor).

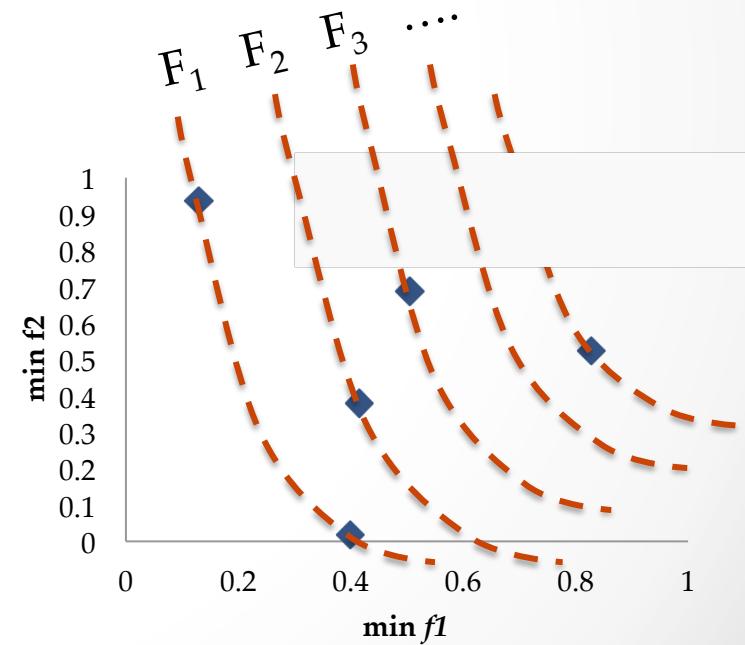
Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Función de Aptitud/Técnicas por Categorías

Grado de dominancia



Profundidad de dominancia



Conteo de dominancia

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Función de Aptitud

- La función de aptitud basada en técnicas por categorías esta relacionada a la población actual.
- Los métodos de agregación calculan el valor de aptitud independientemente de los otros individuos.

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Comentarios

- Cosas que se tienen que tomar en cuenta cuando se diseña un Algoritmo Evolutivo Multiobjetivo:
 1. Guiar la búsqueda hacia la Frontera Eficiente
 2. Mantener un conjunto de soluciones no-dominadas diverso

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - El hecho de que los Algoritmos Evolutivos trabajan con un conjunto de soluciones potenciales a la vez, les permite generar un conjunto de elementos en la frontera eficiente en una sola iteración.
 - Los Algoritmos Evolutivos son menos susceptibles a la forma o continuidad de la frontera eficiente.
- Desventajas
 - El ajuste de los parámetros (operaciones de evolución) son a base de prueba y error.
 - Al igual que otras heurísticas, los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo no garantizan encontrar las soluciones eficientes óptimas, pero sí una buena aproximación de la frontera en un tiempo computacionalmente razonable.

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

...

Metodologías

Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo

Métodos

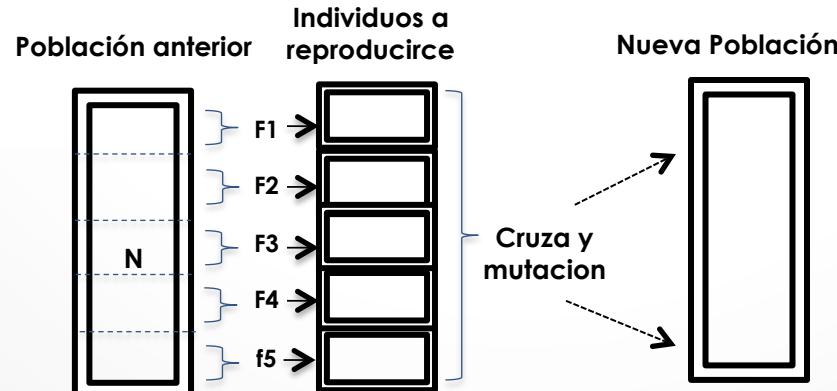
- Métodos populares propuestos en la literatura:
 - **Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA)** Schaffer (1985)
 - **Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)** Srinivas and Deb (1994)
 - **Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II)** Deb et al. (2002)
 - **Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA)** Zitzel and Thiele (1999)
 - **Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2)** Zitzel, Laumanns & Thiele (2002)

Vector Evaluated Genetic Algorithm (VEGA)

Schaffer (1985)

- Asignación de Aptitud / Proceso de Selección
 1. Dividir cada generación en M sub-poblaciones (M número de objetivos).
 2. Cada sub-población representa un nuevo problema y se le asigna solo una función objetivo.
 3. Seleccionar los individuos más aptos de cada subpoblación y aplicar técnicas de cruce y mutación.
 4. De cada sub-población seleccionar los individuos mas aptos y remplazar los individuos menos aptos de la generación anterior.
 5. Formar una nueva población y repetir el procedimiento.

Para un problema con M objetivos, M sub-poblaciones de tamaño N/M son generadas (N := tamaño de la población).



De la ultima
población se
pueden seleccionan
las soluciones no-
dominadas por
definición.

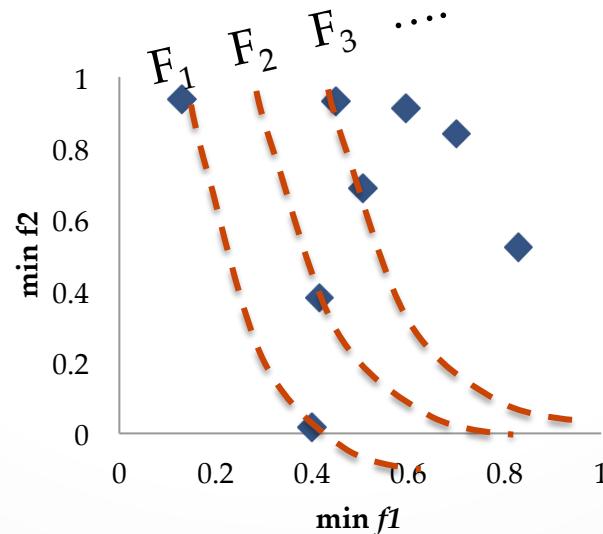
VEGA

Comentarios

- Este método no genera soluciones distribuidas a lo largo de la frontera eficiente.
- El método genera soluciones agrupadas en cada mínimo individual.

Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA); Srinivas and Deb (1994)

- Asignación de Aptitud (Técnicas de clasificación)
 - Identificar los individuos no dominado y calificarlos en una categoría con mismo valor de aptitud. Esto implica que todas las soluciones en dicha categoría tienen la misma probabilidad de reproducirse.
 - El grupo anterior es removido de la lista y se identifica un nuevo conjunto de soluciones no dominadas. A este nuevo grupo se le asigna un valor de aptitud común pero mayor al anterior.
 - El proceso continua hasta que todos los individuos de la población son clasificados.

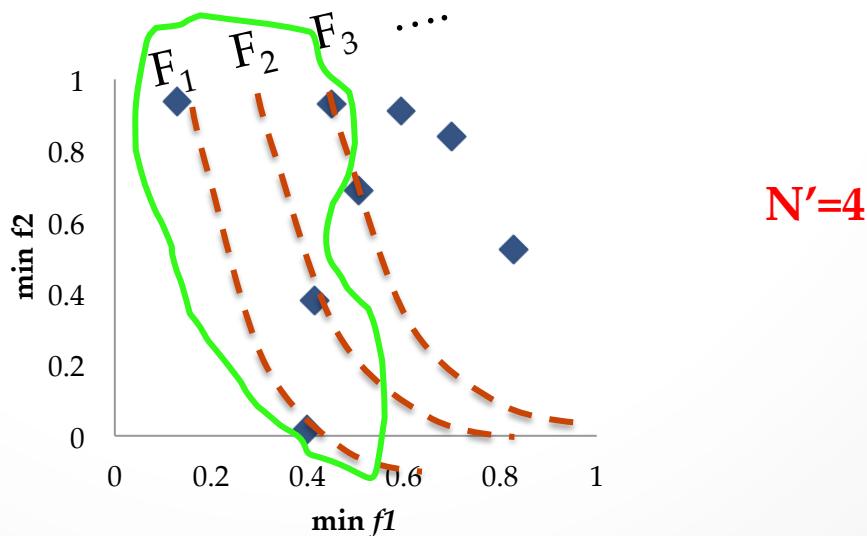


Nondominated Sorting Genetic Algorithm

- Proceso de Selección

- Seleccionar N' individuos de la siguiente manera:
 1. Las soluciones en categoría 1
 2. Soluciones en categoría 2
 3. Continuar así hasta completar N' .

De modo que después de cruzarse y mutar tengamos una nueva Población de N individuos.



NSGA

Desventajas

- El método NSGA es computacionalmente caro, especialmente para calcular la aptitud, dado que requiere identificar las capas de la frontera eficiente.
- No garantiza que las soluciones estén distribuidas en la frontera eficiente
- Falta de Elitismo: descarta soluciones no-dominadas en la iteración actual (histórico).

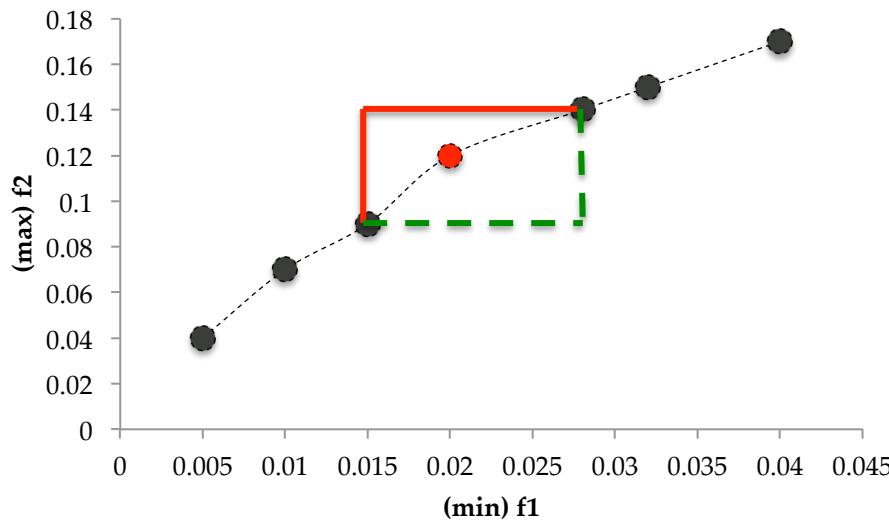
Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II); Deb et al. (2002)

- Asignación de Aptitud (Técnicas de clasificación)
 - Igual que NSGA (asigna valores dependiendo de la capa de la frontera al que corresponda)
 - Proceso de Selección
 - Selecciona los individuos como en NSGA, pero para distinguir soluciones en una misma categoría calcula la distancia de amontonamiento.

NSGA-II

Distancia de Amontonamiento

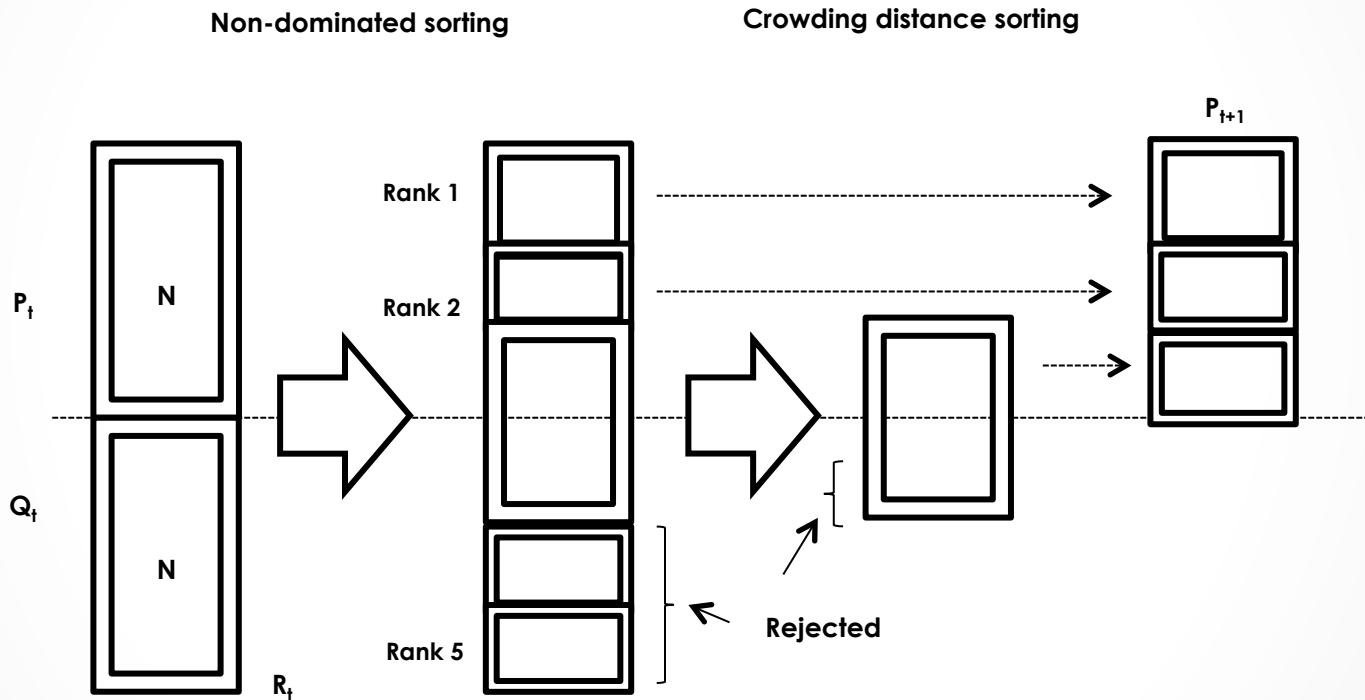
- La distancia de amontonamiento de una solución es la distancia promedio (en el espacio de los objetivos) a los 2 puntos de cada lado de los objetivos.



- Las soluciones con la distancia de amontonamiento mas grande tiene una mejor valor de aptitud.

NSGA-II

Proceso de Selección



Combina los padres (P_t) e hijos (Q_t) para formar
 $R_t = P_t \cup Q_t$, lo que garantiza elitismo.

NSGA-II

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - No tiene problemas con convexidad
 - Encuentra soluciones eficientes distribuidas en la frontera eficiente (dado que utiliza la función de amontonamiento)
 - Utiliza elitismo al pasar cada generación a la siguiente.
- Desventajas
 - Esfuerzo Computacional

Es uno de los métodos más utilizados en Optimización Multiobjetivo basado en Algoritmos Evolutivos

El artículo original cuenta con más de 14,000 citas.

NSGA-II (Algoritmo en Matlab)

Ejemplo M=2 V=3

- 2 Objetivos; 3 Variables

```
* Objective function one
sum = 0;
for i = 1 : V - 1
    sum = sum - 10*exp(-0.2*sqrt((x(i))^2 + (x(i + 1))^2));
end
% Decision variables are used to form the objective function.
f(1) = sum;

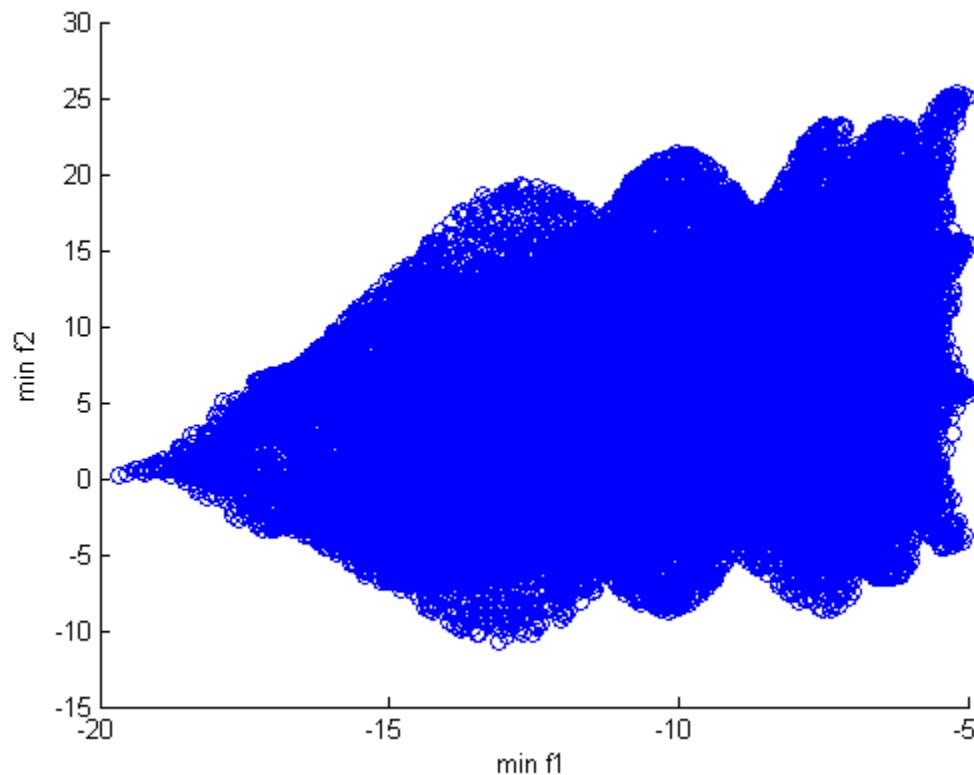
% Objective function two
sum = 0;
for i = 1 : V
    sum = sum + (abs(x(i))^0.8 + 5*(sin(x(i))))^3;
end
% Decision variables are used to form the objective function.
f(2) = sum;
```

$$x \in [-5, 5]$$

-

NSGA-II

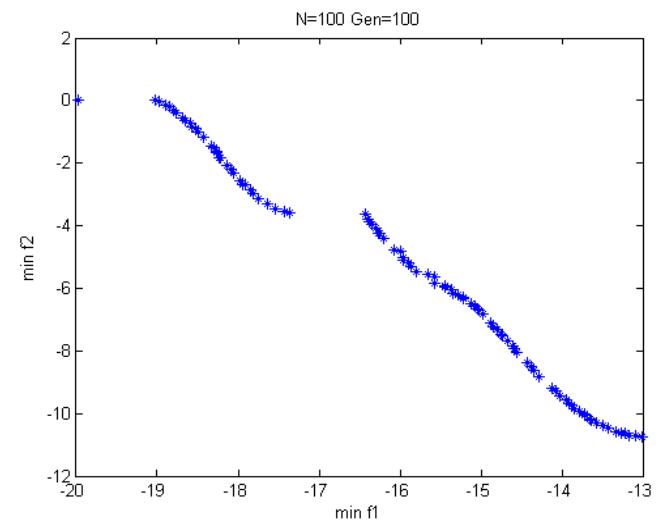
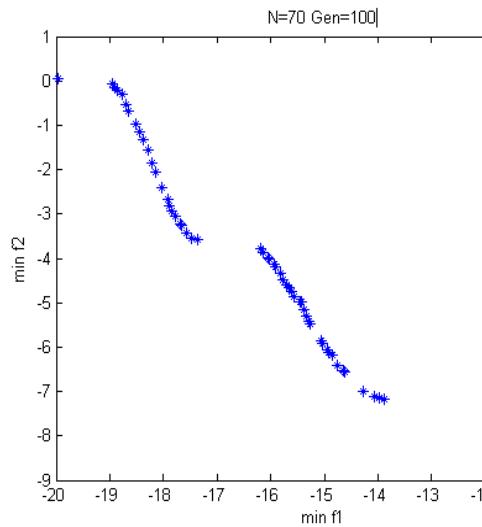
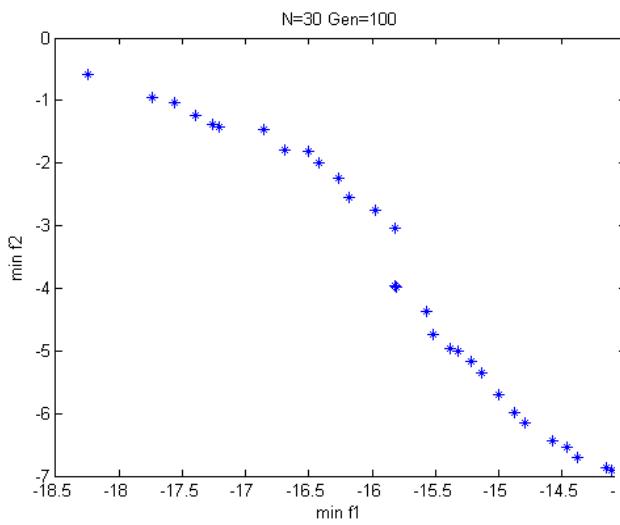
Ejemplo M=2 V=3



NSGA-II Ejemplo M=2 V=3

Efecto del Tamaño de la Población

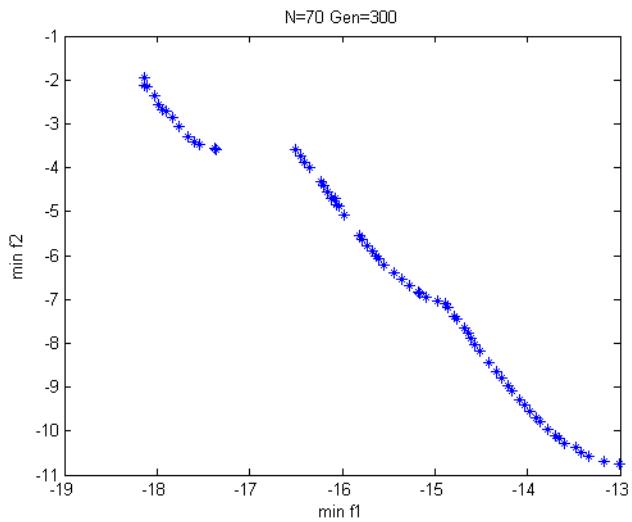
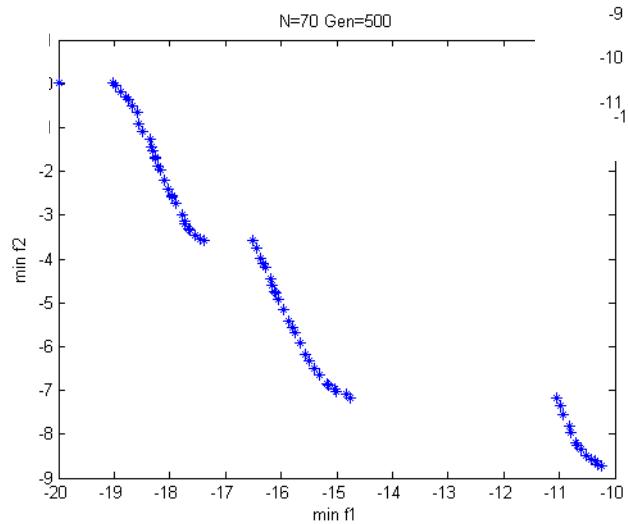
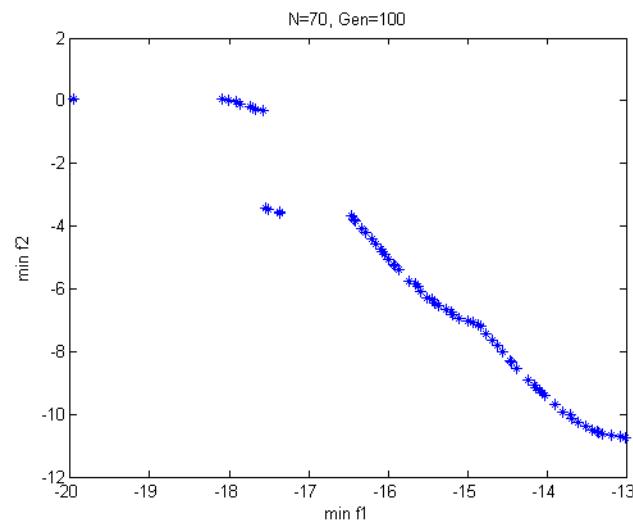
N=30, 70, 100. Número de generaciones (iteraciones) fijo a 100. pc = 0.9, pm = 1/V



NSGA-II Ejemplo M=2 V=3

Efecto del Número de generaciones

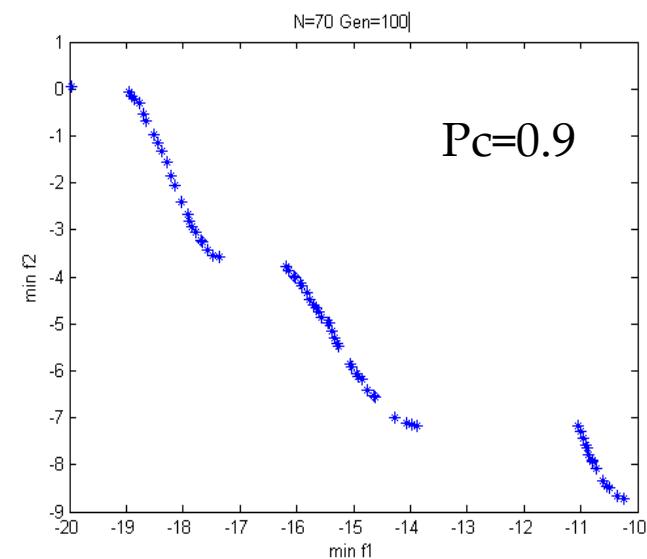
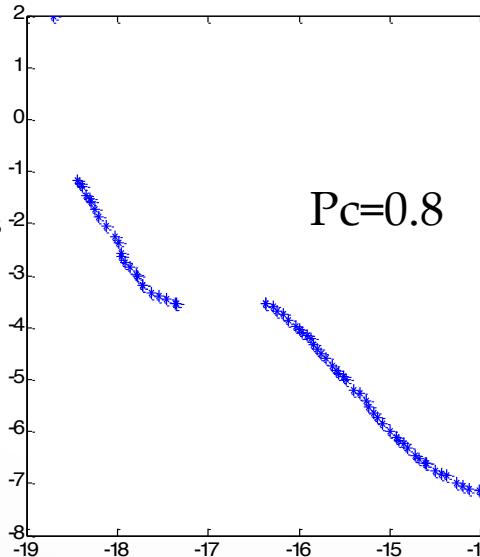
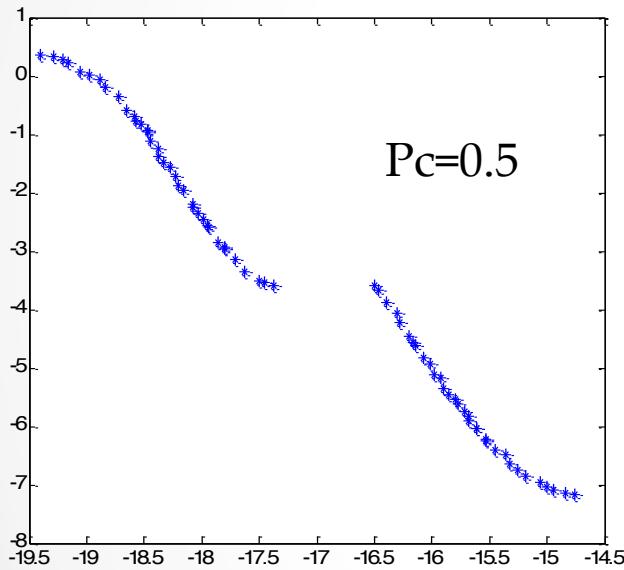
- N=70(fijo). Número de generaciones 100,300,500.



NSGA-II Ejemplo M=2 V=3

Efecto probabilidad de cruza

- N=70, Gen=100, pc=0.5, 0.8, 0.9



Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA); Zitzel and Thiele (1999)

1. General Población Inicial P_0 y crear un conjunto externo de soluciones no dominadas vacío P' de capacidad máxima N' .
2. Copiar las soluciones no-dominadas de P_t en P' y eliminarlas de P_t .
3. Remover las soluciones en P' dominadas por otro miembro de P'
4. Si el número de soluciones en P' excede N' , depurar P' mediante **técnica de agrupamiento** y reducir a N' .
5. Calcular la **aptitud** de cada elemento de P_t y P'
6. Seleccionar elementos de $P_t \cup P'$ para reproducirse. Por ejemplo: utilizando torneo, comparar de 2 en 2 y seleccionar la mejor, hasta completar el grupo a reproducirse.
7. Aplicar operaciones de crusa y mutación usuales para general P_{t+1} .
8. Si el máximo número de generaciones se cumple, parar, si no ir al Paso 2

Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de aptitud

Paso 1: Para cada solución $i \in P'$ calcular el valor si (strength)

$$s_i = \text{número de soluciones en } P \text{ dominadas por } i / N+1$$

donde N es el tamaño de P (soluciones dominadas).

$$f_i = s_i \text{ para } i \in P' \text{ (aptitud)}$$

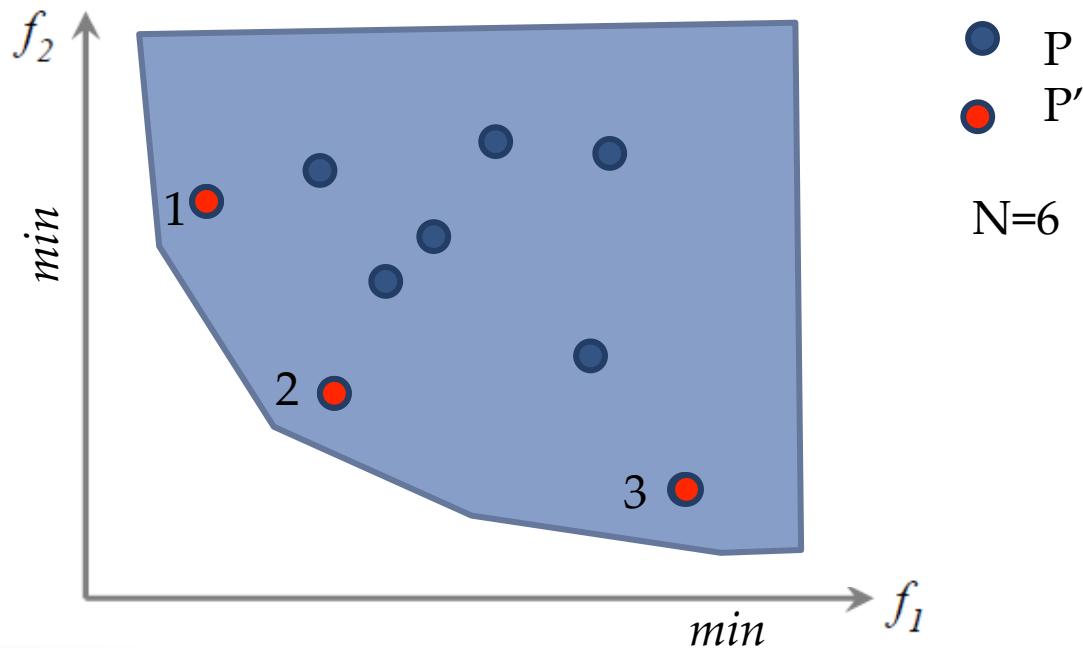
Paso 2: Para cada solución j en P

$$f_j = 1 + \sum_{i \in D_j} s_i$$

donde D_j es el conjunto de soluciones en P' que dominan a j

Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de aptitud

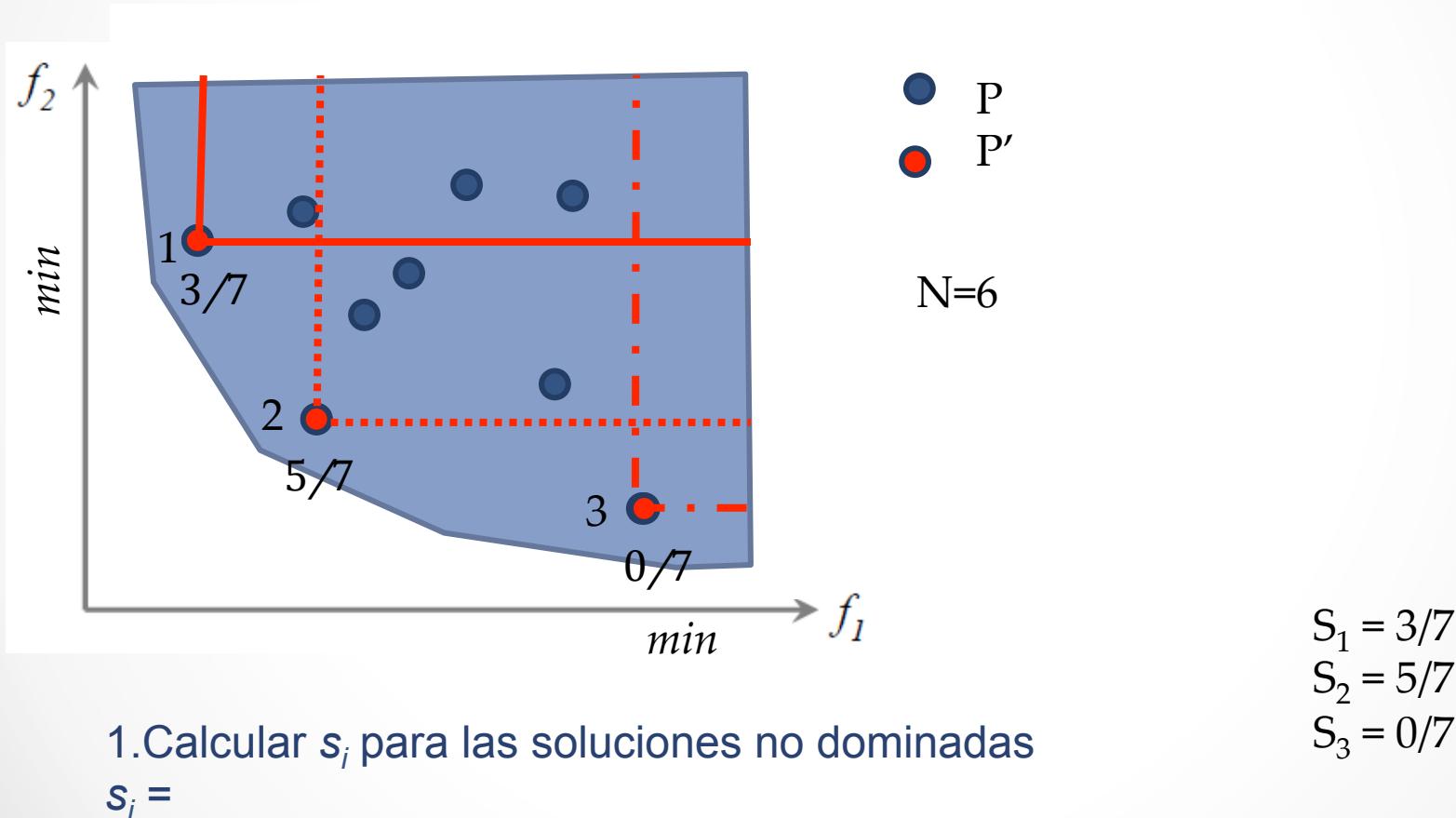


1. Calcular s_i para las soluciones no dominadas

$$s_i =$$

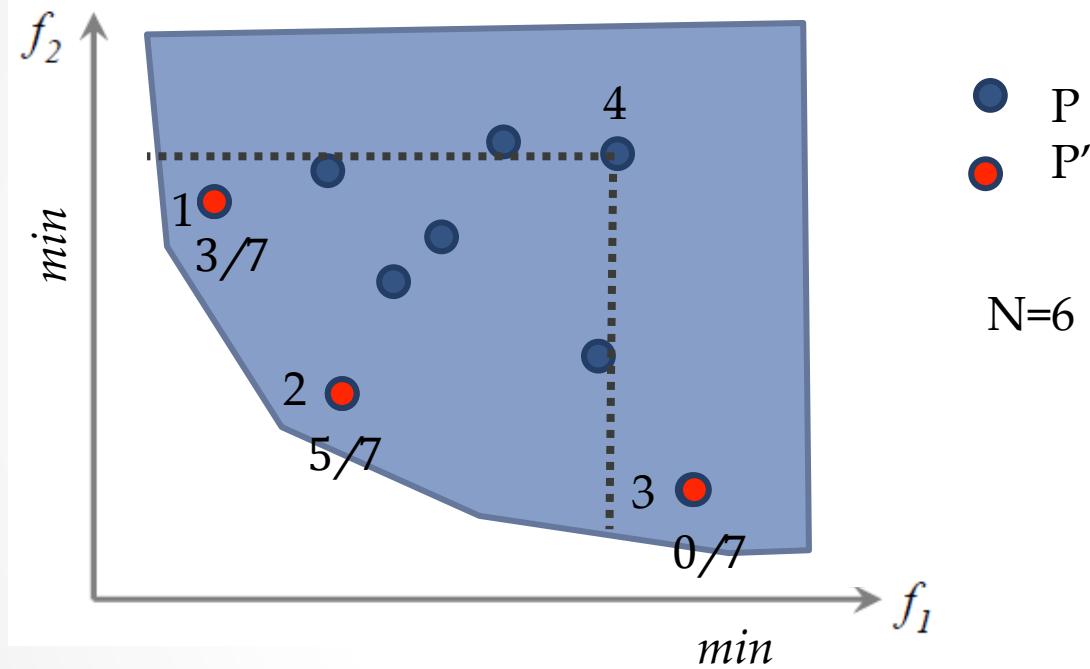
Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de aptitud



Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de aptitud



● P
● P'

N=6

$$\begin{aligned}f_4 &= 1 + s_1 + s_2 \\&= 1 + 3/7 + 5/7 = 15/7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_1 &= 3/7 \\s_2 &= 5/7 \\s_3 &= 0/7\end{aligned}$$

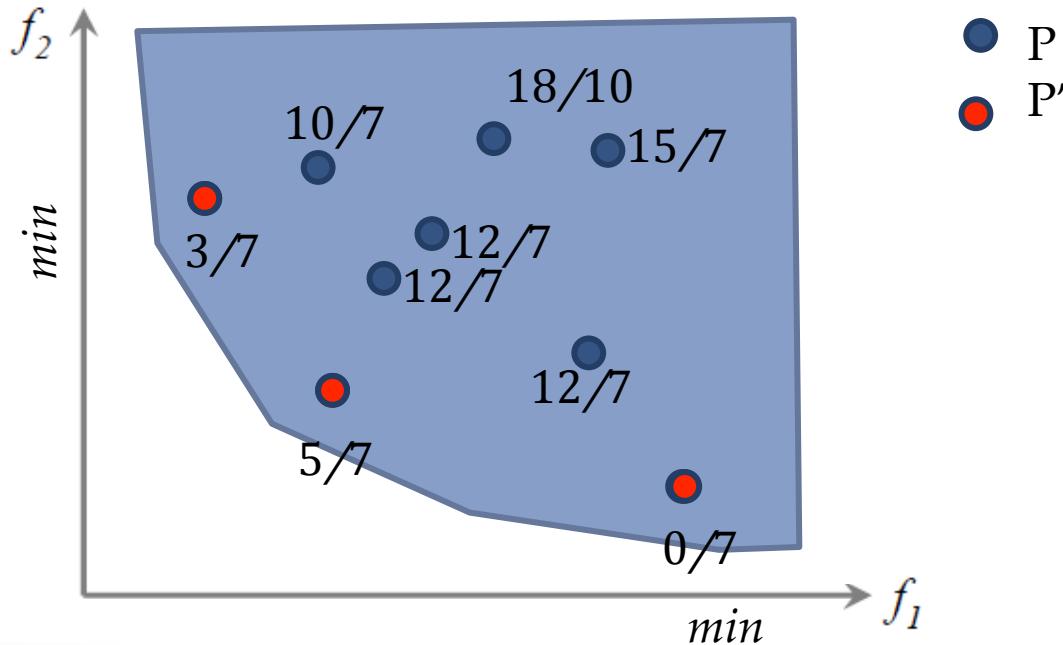
Paso 2: Calcular f_j para las soluciones en P (dominadas)

$$f_j = 1 + \sum_{i \in D_j} s_i$$

- Donde D_j es el conjunto se soluciones en P' que dominan a j

Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de aptitud



Nota: una solución con valor de aptitud menor es mejor

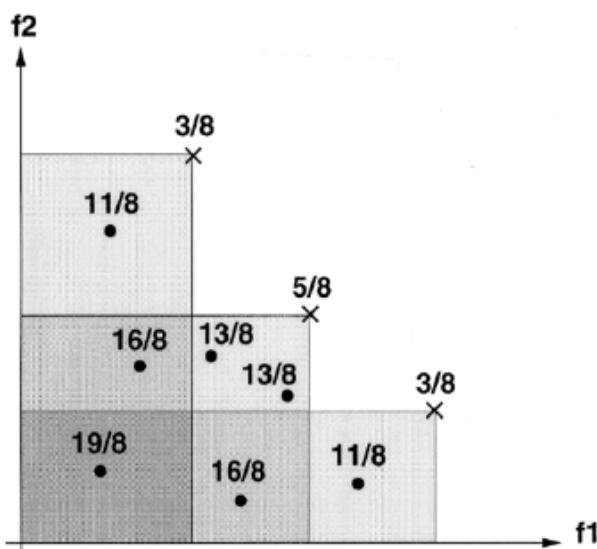
Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Asignación de Aptitud

$\max f_1$ y $\max f_2$

$N= 7$

Ejm. 1

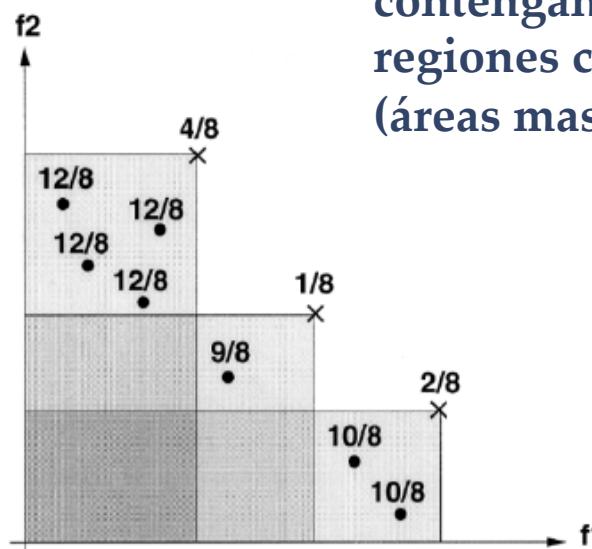


• population member

× externally stored nondominated solution

(a)

Ejm. 2



(b)

El objetivo es distribuir las soluciones en los nichos (rectángulos) tal que:

- Las áreas cubiertas por pocas soluciones no-dominadas contengan mas individuos que las regiones cubiertas por muchas (áreas mas oscuras)

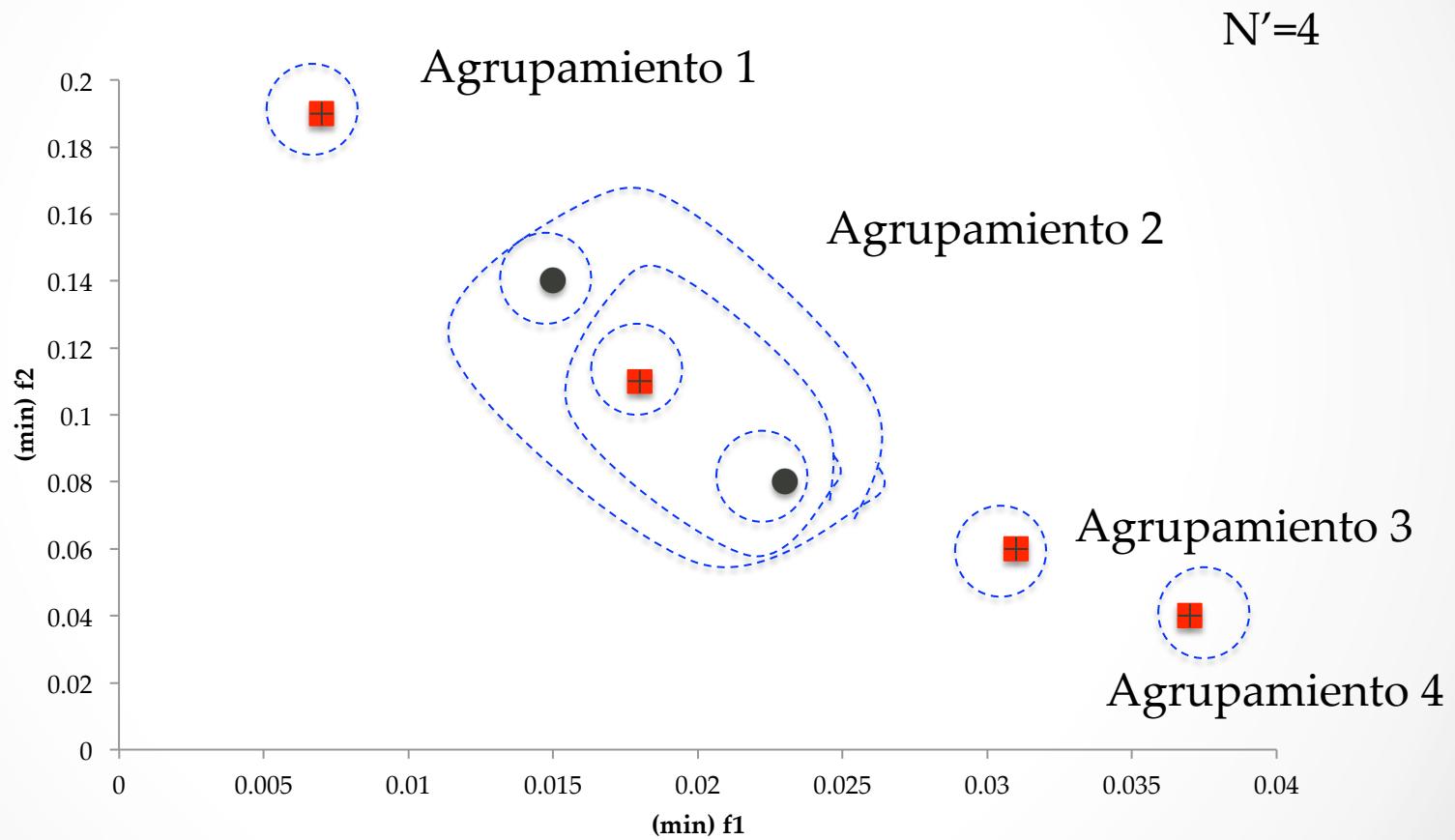
Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Como depurar P' cuando |P'|>N'

Algoritmo de Agrupamiento: Este algoritmo se usa cuando la frontera eficiente (P') tiene mas puntos de los permitidos ($>N'$).

1. Inicializar un conjunto de agrupamiento C ; cada solución $i \in P'$ constituye un agrupamiento distinto C_i . $C = \cup_i \{C_i\}$
2. Si $|C| \leq N'$, ir al paso 5, si no ir al paso 3.
3. Para cada par de agrupamientos posibles , calcular d_{ij} como el promedio de las distancias entre los pares de individuos de los 2 agrupamientos
4. Formar un nuevo conjunto con los 2 conjuntos con menor distancia promedio, e ir al Paso 2.
5. Calcular el conjunto no dominado reducido seleccionando un elemento de cada agrupamiento. Como recomendación se puede tomar el individuo al centro de cada grupo.

Strength Pareto Evolutionary Algorithm Algoritmo de Agrupamiento ($|P'| > N'$)



Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Ventajas y Desventajas

- Ventajas
 - Las soluciones Pareto- optima se guarda en un población externa
 - El agrupamiento asegura soluciones no-dominadas distribuidas.
 - El algoritmo de agrupamiento no tiene parámetros
- Desventajas
 - Debe haber un balance entre el tamaño de la población y el número máximo de soluciones no-dominadas permitido N'
 - Si N' es muy grande, el proceso de selección puede tomar mucho tiempo
 - Si N' es pequeño, el efecto de elitismo no es muy eficiente
 - De la asignación de aptitud:
 - Los individuos que son dominados por el mismo conjunto de soluciones en P' tienen el mismo valor de aptitud
 - Si P' contiene solo una solución todas las soluciones en P tienen el mismo valor de aptitud.

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2); Zitzel, Laumanns & Thiele (2002)

- Diferencias entre SPEA vs SPEA2
 - En el SPEA 2 se mejora la asignación de aptitud
 - En SPEA2, para cada individuo se toma en cuenta el número de soluciones que el domina y las que a él lo dominan.
 - Densidad
 - SPEA2 hace una estimación de la densidad (que tantas soluciones hay al rededor de un punto).
 - Forma de truncar P'
 - SPEA2, usa una técnica diferente para truncar P' .

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

Método

1. General Población Inicial P_0 de tamaño N y crear un conjunto externo de soluciones no dominadas vacío P' de tamaño N' .
2. Copiar las soluciones no-dominadas de P_t en P' y removerlas de P_t
3. Remover las soluciones en P' dominadas por otro miembro de P'
4. Si el número de soluciones en P' excede el número máximo N' , **depurar** P' mediante técnica de truncado, si el número es menor a N' rellenar P' con soluciones dominadas y eliminarlas de P_t .
5. Calcular la **aptitud** de cada elemento de P_t y P'
6. Seleccionar elementos de P' utilizando torneo con remplazo hasta completar el grupo a reproducirse.
7. Aplicar operaciones de crusa y mutación usuales para general P_{t+1} .
8. Si el máximo número de generaciones se cumple, parar, si no ir al Paso 2.

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

Asignación de Aptitud

Para evitar la situación donde los individuos dominados por el mismo conjunto de individuos en P' tengan la misma aptitud, ahora también se consideran las soluciones que un individuo domina.

Paso 1: Calcular el número de soluciones que el individuo i domina

s_i = número de individuos en $P \cup P'$ dominados por i

(en SPEA, s_i solo se calcula para los elementos en P' , aquí se calcula para todos los individuos)

Paso 2: Calcular la aptitud inicial del individuo i

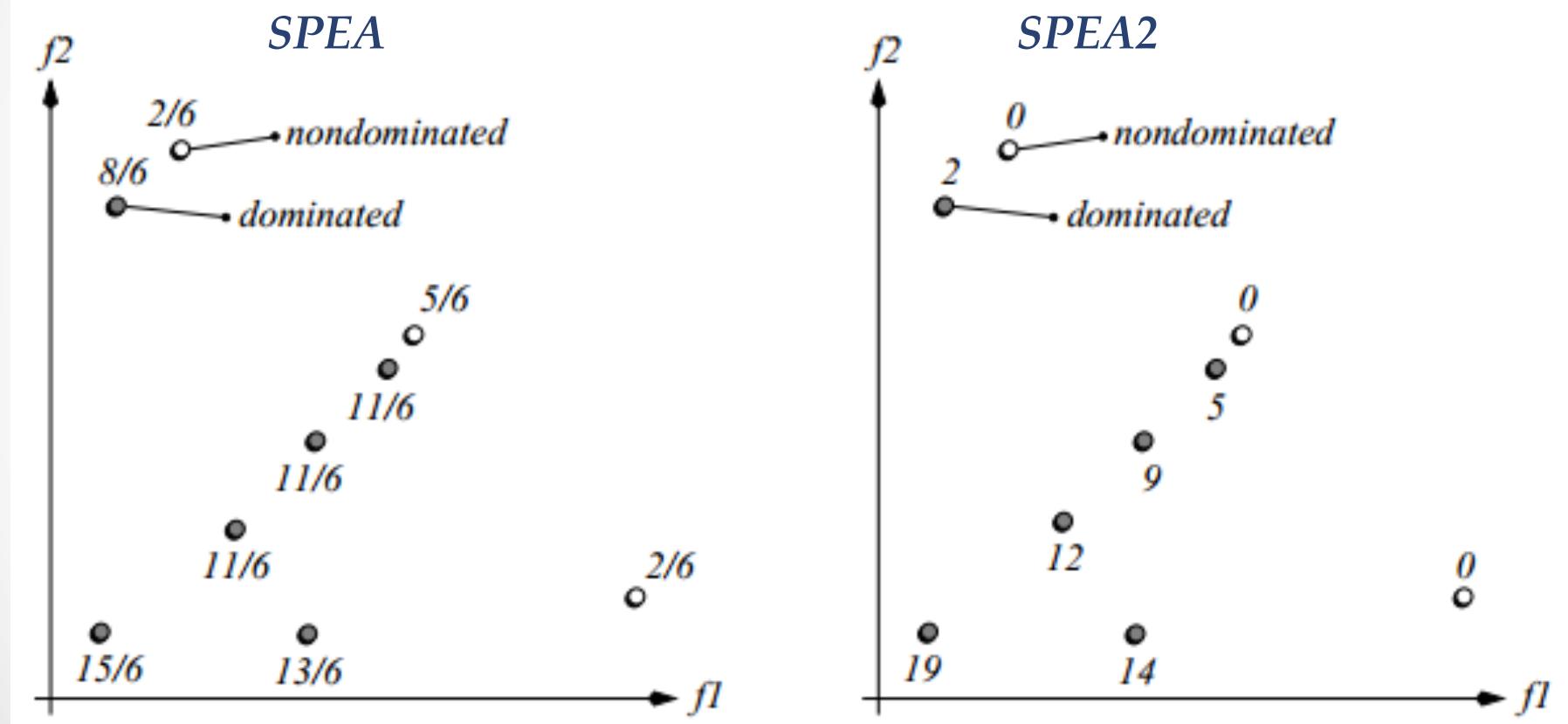
$$R(i) = \sum_{j \in D_i} s_j$$

donde D_i es el conjunto de soluciones en $P \cup P'$ que dominan a la solución i

SPEA vs SPEA2

Asignación de Aptitud

$\max f_1$ y $\max f_2$



Fuente grafico: Zitzel, Laumanns & Thiele (2002). *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Technical Report Engineering and Networks Laboratory (TIK). TIK-Report 103

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

Asignación de Aptitud (Cont.)

- Cuando 2 individuos tienen el mismo valor de aptitud, información adicional de la **densidad** de la solución se utiliza para distinguir entre ellos.
- La densidad de un individuo esta en función de la distancia al k-esimo punto mas cercano.
- **Procedimiento:** Para cada individuo i se calcula la distancia a todos los individuos j en P'U P y se ordenan en una lista de forma ascendente. La distancia al k-esimo elemento es el que se buscala (d_{ik}). $k=1$ es comúnmente utilizado.
- La densidad del individuo i es

$$D(i) = 1/d_{ik}$$

- Finalmente la aptitud del individuo i es igual a:

$$F(i) = R(i) + D(i)$$

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

Como formar P'

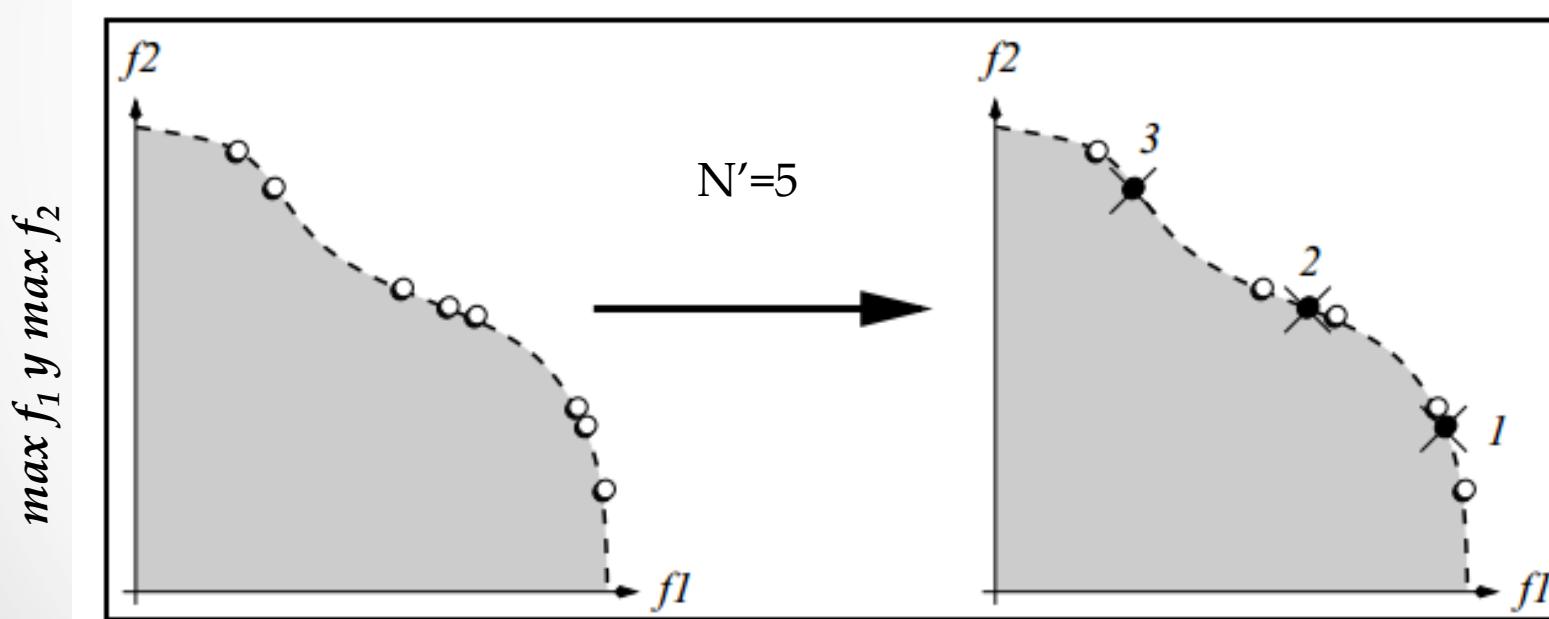
$$P'_{t+1} = \{i : i \in P_t \cup P'_t \text{ no dominados}\}$$

- Si $|P'_{t+1}| = N'$ (Parar)
- Si $|P'_{t+1}| < N'$ (Las N' soluciones con mejor valor de aptitud forman P'_{t+1})
- Si $|P'_{t+1}| > N'$ (utilizar un método de truncado para eliminar soluciones)

Strength Pareto Evolutionary Algorithm

Método de Truncado

- El individuo con mínima distancia a los otros individuos es removido en cada paso.
- Si hay dos soluciones con la misma distancia, se considera el que tenga el segundo más cercano y así sucesivamente hasta desempatar.



Fuente grafico: Zitzel, Laumanns & Thiele (2002). SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. Technical Report Engineering and Networks Laboratory (TIK). TIK-Report 103

Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2

Notas

1. El tamaño de P' (N') es fijo en todas las iteraciones
2. El método de agrupamiento se ha cambiado por un método de **truncamiento**.
3. Solo los miembros en P' participan en el proceso de selección para ser reproducidos.

¿Cómo comparar 2 o mas Fronteras Eficientes?

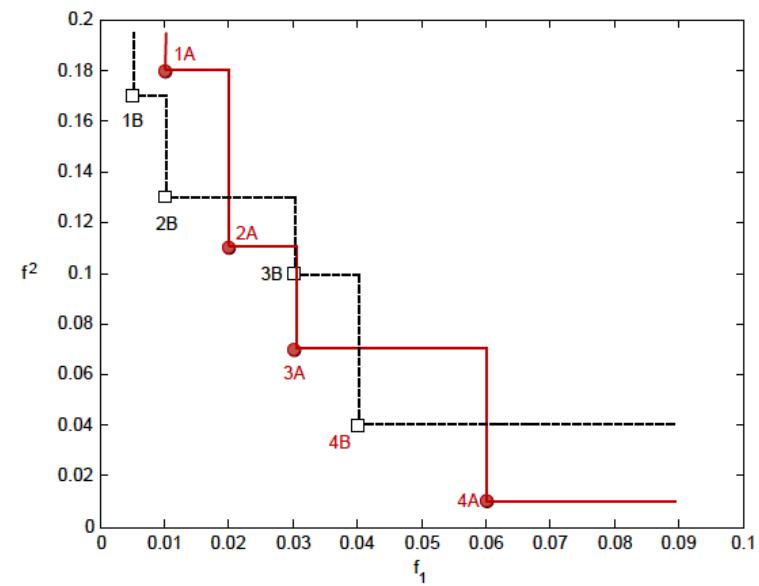
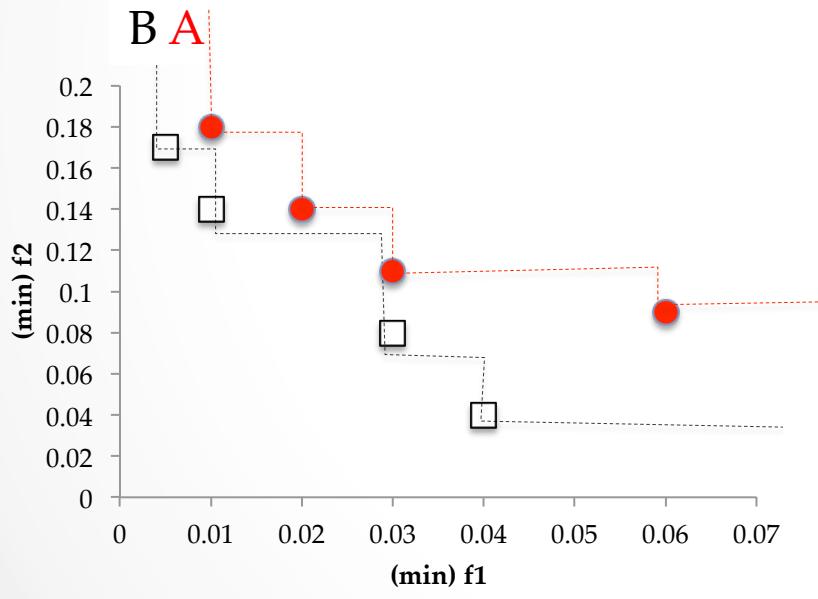
...

¿Cómo comparar 2 técnicas de optimización?

- Calidad de las soluciones
- Tiempo (esfuerzo) requerido para general dichas soluciones
- Pregunta:
 - ¿Cómo definir calidad en el contexto de soluciones de problemas Multiobjetivo?

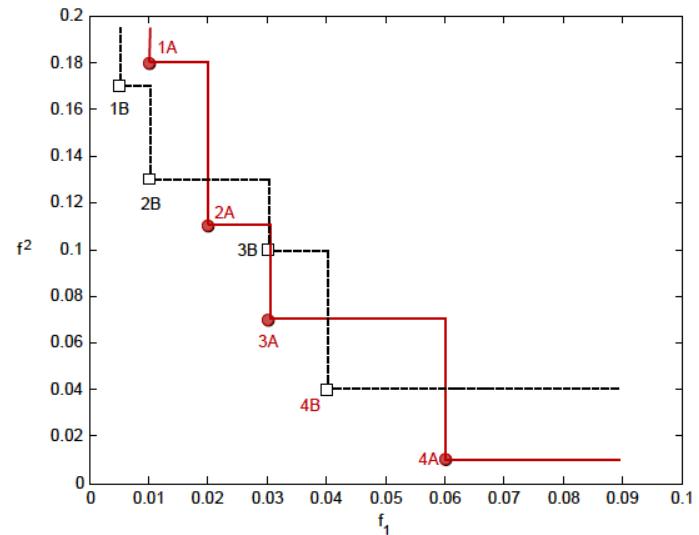
Comparación del desempeño de 2 métodos de Optimización Multiobjetivo...

- Métodos
 - Clasificación de Dominancia
 - Métodos indicadores de calidad



Métodos Indicadores de Calidad

- El objetivo es asignan un valor puntual a cada Frontera Pareto.
 - Métodos
 1. Diámetro Externo
 2. Cardinalidad
 3. Indicador de Hipervolumen
 4. Indicador de Completitud
 5. Indicador de Familia Épsilon
 6. Medida de Uniformidad
 7. Entre otros



¿Como seleccionar una solución de la Frontera Pareto?

...

Problemas de Optimización Multiobjetivo

- El objetivo en un problemas de optimización multiobjetivo es encontrar la Frontera Pareto o un subconjunto de ella. Sin embargo, en la practica finalmente se necesita seleccionar una o varias (pocas) para tomar una decisión.

Métodos para seleccionar soluciones de Frontera Pareto: métodos de toma de decisiones

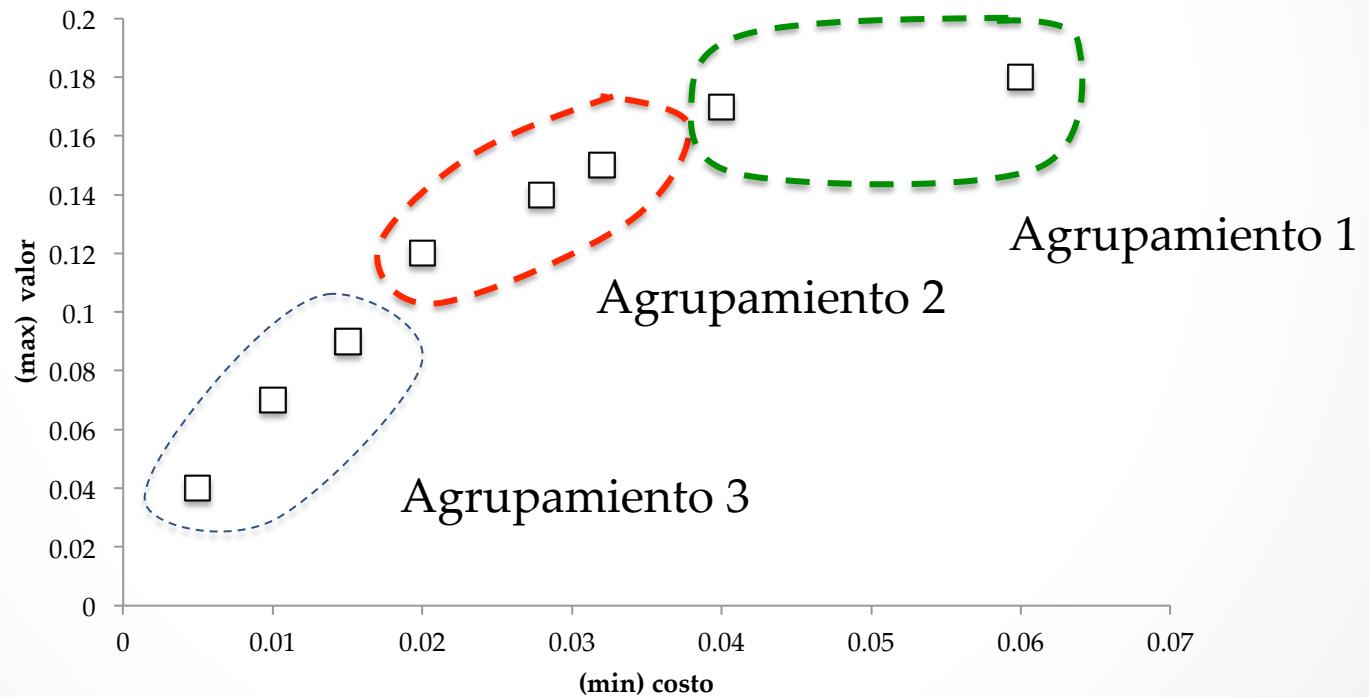
- Métodos a priori
 - Método suma ponderada con un valor de pesos específico
 - Método de la restricción para un solo épsilon
 - Método lexicográfico
 - Entre otros

Métodos para seleccionar soluciones de Frontera Pareto: métodos de toma de decisiones

- Métodos a posteriori
 - Analizar la forma de la frontera eficiente
 - Determinar el nivel de compromiso de los objetivos en base a la forma de la frontera eficiente.
 - Métodos basados en distancia
 - Buscar la solución más cercana a la solución ideal
 - Seleccionar la solución más cercana a valor de los objetivos deseado por el tomador de decisiones
 - Métodos basados en agrupamiento
 - Agrupar las soluciones en clusters
 - Ejemplo: método de las k-medias (donde k es el número de soluciones deseadas) y se selecciona el centroide de cada grupo

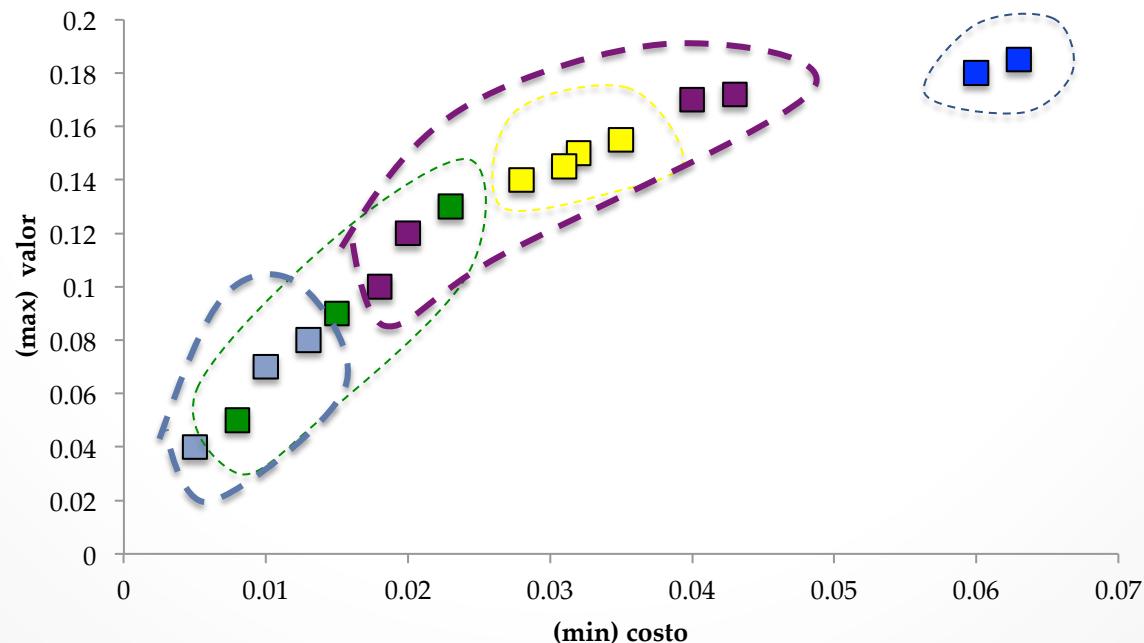
Métodos para seleccionar soluciones de Frontera Pareto: Método basado en agrupamiento

- Agrupamiento las soluciones en base a los valores de función objetivo



Métodos para seleccionar soluciones de Frontera Pareto: Método basado en agrupamiento

- Agrupamiento las soluciones en base en los valores de las **variables de decisión en el conjunto Pareto**.
- El objetivo es seleccionar soluciones con valores de variables de decisión similar.



Resumen

- En los problemas de optimización multiobjetivo tenemos un conjunto de objetivos que deseamos optimizar. Los objetivos presentan un grado de conflicto por lo que no existe una solución que optimice todos los objetivos de manera simultánea.
 - Existe una serie de métodos de optimización clásica que se han desarrollado en esta área.
 - Los algoritmos evolutivos se han implementado con éxito en optimización multiobjetivo.
 - Técnicas para comparar 2 Fronteras Pareto
 - Cómo seleccionar una solución de la frontera final
-



Gracias

• • •

Contacto

maria.villarreal@cimat.mx

www.cimat.mx/Monterrey