

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

TESIS DE MAESTRÍA

---

**Mejora del Desempeño de Algoritmos  
Evolutivos Multi-objetivo con Esquemas de  
Diversidad en las Variables de Decisión**

---

*Presenta:*

Joel CHACÓN CASTILLO

*Director de Tesis:*

Dr. Carlos SEGURA GONZÁLEZ

*Para obtener el grado de:*

*MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN COMPUTACIÓN Y  
MATEMÁTICAS INDUSTRIALES*

Área de Ciencias de la Computación

5 de diciembre de 2017



«*Cada día sabemos más y entendemos menos.*»

Albert Einstein



CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS A.C.

## *Resumen*

Área de Ciencias de la Computación

Maestría en ciencias con especialidad en computación y matemáticas industriales

### **Mejora del Desempeño de Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo con Esquemas de Diversidad en las Variables de Decisión**

by Joel CHACÓN CASTILLO

Los Algoritmos Evolutivos (EAs) son uno de los esquemas más populares para lidiar con problemas de optimización complejos. A pesar de su popularidad, aún existen algunos inconvenientes que pueden degradar su rendimiento, por lo que es un campo en que aún hay que investigar mucho. Entre estos inconvenientes, en el caso mono-objetivo se ha observado una debilidad muy importante, siendo ésta la pérdida de diversidad, llevando a lo que se conoce como convergencia prematura. Sin embargo, se ha observado que considerar mecanismos para administrar la diversidad en el espacio de las variables de forma explícita permite reducir el impacto de este inconveniente. En el área de optimización multi-objetivo la utilización de Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo (MOEAs) es cada más popular. Sin embargo, en esta área, la mayor parte de los algoritmos actuales no considera de forma explícita el tratamiento de la diversidad en el espacio de las variables, sino que la mayoría se centran exclusivamente en el espacio objetivo. En esta tesis se analiza si los problemas que surgen para el caso mono-objetivo están surgiendo también para el caso multi-objetivo y en base a eso se diseñan nuevos algoritmos que administran de forma explícita y simultánea la diversidad en el espacio de las variables y en el espacio objetivo.

Las propuestas de esta tesis se basan en diseñar MOEAs considerando un principio que ha ofrecido soluciones de calidad en el caso de optimización mono-objetivo y que consiste en administrar la diversidad de forma explícita relacionando la misma con el criterio de parada para obtener un balanceo apropiado entre exploración e intensificación. Particularmente se busca asegurar que las primeras fases del algoritmo promueven la exploración del espacio de búsqueda y que las fases finales promueven la intensificación. En base a este principio, se desarrolla un nuevo MOEA basado en dominancia y tres variantes basadas en descomposición. De entre ellos, destaca el rendimiento del VSD-MOEA y VSD-MOEA/D, siendo el primero basado en dominancia y el segundo basado en descomposición, pues en base a los resultados obtenidos se muestra no sólo que se ha mejorado el estado-del-arte de los MOEAs, sino que además se han resuelto apropiadamente la mayoría de los problemas de prueba más populares en el ámbito multi-objetivo. Además, la tesis también contribuye en lo referente al diseño de operadores de reproducción, analizando y proponiéndose modificaciones a varios de los operadores más populares, y mostrando que las nuevas variantes permiten mejorar significativamente los resultados.



## *Agradecimientos*

Esta tesis ha sido desarrollada gracias al apoyo de varias personas, entre ellos está mi familia.

Además deseo agradecer el apoyo y paciencia ofrecido por el Dr. Carlos Segura González, que además me ha ayudado notablemente en mi crecimiento académico, su guía, sus comentarios y su apoyo en momentos complicados reflejan su buena disposición principalmente como académico.

Por último agradezco los apoyos que han sido otorgados por parte del CIMAT y el CONACYT, pues sin ellos no hubiera sido posible llevar a cabo esta tesis.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	2
1.3. Descripción del problema e hipótesis . . . . .	2
1.4. Objetivo general . . . . .	2
1.5. Contribuciones . . . . .	3
1.6. Organización de la tesis . . . . .	3
<b>2. Optimización Multi-objetivo</b>	<b>5</b>
2.1. Conceptos . . . . .	5
2.1.1. Dominancia . . . . .	5
2.2. Optimizadores Multi-objetivo . . . . .	8
2.2.1. Métodos Clásicos . . . . .	8
Método de sumas ponderadas . . . . .	9
Método de restricción $\epsilon$ . . . . .	10
Métodos con métricas ponderadas . . . . .	11
2.2.2. Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo Iniciales . . . . .	12
Algoritmo Genético basado en Evaluación de Vectores (VEGA) . . . . .	12
Algoritmo Genético de Múltiples Objetivos (MOGA) . . . . .	13
Algoritmo Genético basado en Nichos y Pareto (NPGA) . . . . .	13
2.2.3. Clasificación Actual de Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo . . . . .	15
Métodos basados en dominancia . . . . .	15
Métodos basados en indicadores . . . . .	15
Métodos basados en descomposición . . . . .	16
2.3. Estado del arte . . . . .	16
2.3.1. Algoritmo Genético basado en Ordenación de No dominados II (NSGA-II) . . . . .	17
2.3.2. Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo Basado en Descomposición (MOEA/D) . . . . .	19
2.3.3. Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo basado en selección de la Métrica $\mathcal{S}$ (SMS-EMOA) . . . . .	22
2.3.4. Metaheurística de Muchos Objetivos Basada en el Indicador R2 (MOMBI-II) . . . . .	23
2.3.5. Evolución Diferencial Generalizada (GDE3) . . . . .	24
2.4. Problemas de Prueba . . . . .	26
2.4.1. ZDT . . . . .	27
2.4.2. DTLZ . . . . .	28
2.4.3. Generador de Problemas Walking Fish Group (WFG) . . . . .	32

2.4.4. Problemas de prueba sin restricciones (UF - <i>Unconstrained Functions</i> ) . . . . .	35
2.4.5. Generación de soluciones óptimas . . . . .	35
2.5. Análisis de rendimiento de optimizadores multi-objetivo . . . . .	39
2.5.1. Distancia Generacional y Distancia Generacional Invertida . . . . .	40
2.5.2. Distancia promedio de Hausdorff $\Delta_p$ . . . . .	42
2.5.3. Distancia al vecino más cercano (DCN - <i>Distance to the Closest Neighbor</i> ) . . . . .	42
2.5.4. Distancia media (ADI - <i>Average Distance to all Individuals</i> ) . . . . .	42
2.5.5. Hipervolumen (HV - <i>Hypervolume</i> ) . . . . .	43
2.5.6. Indicador R2 . . . . .	43
2.5.7. Superficies de Alcance . . . . .	44
2.6. Análisis preliminar de Algoritmos Actuales . . . . .	45
<b>3. Algoritmo basado en Dominancia con Control de Diversidad en el Espacio de Decisión</b>	<b>49</b>
3.1. Introducción . . . . .	49
3.2. Diversidad en el espacio de las variables en EAs mono-objetivo y multi-objetivo . . . . .	50
3.3. Propuesta . . . . .	52
3.4. Análisis del proceso de búsqueda en VSD-MOEA . . . . .	62
3.5. Complejidad Algorítmica . . . . .	65
<b>4. Algoritmos basados en Descomposición con Control de Diversidad en el Espacio de Decisión</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción . . . . .	69
4.2. Estrategias para mejorar los métodos de descomposición . . . . .	70
4.3. Propuesta con selección especial de padres (MOEA/D-EVSD) . . . . .	75
4.3.1. Observaciones . . . . .	77
4.4. Propuesta de diversidad con elitismo especial (MOEA/D-SEBV) . . . . .	78
4.4.1. Observaciones . . . . .	81
4.5. Algoritmo de descomposición basado en la diversidad (VSD-MOEA/D) . . . . .	81
4.5.1. Observaciones . . . . .	83
4.6. Complejidad de los algoritmos propuestos . . . . .	84
4.6.1. Optimización propuesta - Fast VSD-MOEA/D . . . . .	86
<b>5. Operadores de reproducción y diversidad</b>	<b>89</b>
5.1. Introducción . . . . .	89
5.2. Operadores de cruce . . . . .	90
5.2.1. Cruce Binario Simulado (SBX) . . . . .	90
5.2.2. Análisis operador de cruce SBX . . . . .	93
5.2.3. Propuesta del operador SBX basado en esquemas de diversidad . . . . .	93
5.3. Operadores de evolución diferencial (DE) . . . . .	95
<b>6. Validación Experimental</b>	<b>103</b>
6.1. Esquema de validación experimental . . . . .	103
6.2. Algoritmo basado en dominancia VSD-MOEA . . . . .	105
6.2.1. Rendimiento frente al estado del arte . . . . .	105
6.2.2. Estudio de escalabilidad en el espacio de las variables . . . . .	108
6.2.3. Estudio de la influencia del parámetro $D_I$ . . . . .	111
6.2.4. Superficies de cubrimiento . . . . .	112
6.3. Algoritmos basados en descomposición . . . . .	114
6.3.1. Validación experimental del MOEA/D-EVSD . . . . .	114

6.3.2. Validación experimental de los algoritmos MOEA/D-SEBV y VSD-MOEA/D . . . . .	115
6.3.3. Comparativa entre algoritmos basados en diversidad y el estado del arte . . . . .	117
6.4. Operador de cruce SBX . . . . .	120
<b>7. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>125</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	125
7.2. Trabajo futuro . . . . .	127
<b>A. Resultados adicionales para VSD-MOEA</b>	<b>129</b>
<b>B. Resultados adicionales para las propuestas basadas en descomposición</b>	<b>145</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>



# Listado de iniciales

<b>MOP</b>	Multi-objective Optimization Problem Problema de Optimización Multi-objetivo
<b>MOEA</b>	Multi-objective Evolutionary Algorithm Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo
<b>EA</b>	Evolutionary Algorithm Algoritmo Evolutivo
<b>DE</b>	Differential Evolution Evolución Diferencial
<b>GD</b>	Generational Distance Distancia Generacional
<b>IGD</b>	Inverted Generational Distance Distancia Generacional Invertida
<b>GD+</b>	Modified Generational Distance Distancia Generacional Modificada
<b>IGD+</b>	Inverted Modified Generational Distance Distancia Generacional Invertida Modificada
<b>WT</b>	Tchebycheff
<b>PBI</b>	Penalty-based Boundary Intersection Intersección de Límites Basados en Penalizaciones
<b>ASF</b>	Achievement Scalarizing Function Función de Escalarización Lograda
<b>VEGA</b>	Vector Evaluated Genetic Algorithm Algoritmo Genético basado en Evaluación de Vectores
<b>MOGA</b>	Multiple Objective Genetic Algorithm Algoritmo Genético de Múltiples Objetivos
<b>NPGA</b>	Nicho Pareto Genetic Algorithm Algoritmo Genético basado en Nichos de Pareto
<b>NSGA</b>	Non Dominated Sorting Genetic Algorithm Algoritmo Genético basado en Ordenación de No dominados
<b>IBEA</b>	Indicator Based Evolutionary Algorithm Algoritmo Evolutivo basado en Indicadores
<b>SPEA</b>	Strength Pareto Evolutionary Algorithm Algoritmo Evolutivo basado en la Fuerza de Pareto
<b>SMS-EMOA</b>	$\mathcal{S}$ Metric Selection Evolutionary Multi-objective Optimisation Algorithms Algoritmo Evolutivo basado en selección con la Métrica $\mathcal{S}$
<b>FV-MOEA</b>	Fast Hypervolume Indicator Based Multi-objective Algorithm Algoritmo Multi-objetivo Basado en el Indicador del Hipervolumen Rápido
<b>MOEA/D</b>	Multi-objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo Basado en Descomposición

<b>MOMBI</b>	Many Objective Metaheuristic Based on the R2 Indicator Metaheurística de Muchos Objetivos Basada en el Indicador R2
<b>GDE</b>	Generalized Differential Evolution Evolución Diferencial Generalizada

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

El área de optimización multi-objetivo implica el tratamiento simultáneo de múltiples funciones objetivo que usualmente se encuentran en conflicto. Los Algoritmos Evolutivos (EAs - *Evolutionary Algorithms*), al manejar múltiples soluciones candidatas de forma simultánea, tienen la ventaja que en una ejecución pueden encontrar múltiples soluciones, por lo que se han propuesto diversos Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo (MOEAs - *Multi-objective Evolutionary Algorithms*) cuyo propósito es proporcionar conjuntos de soluciones bien distribuidas y próximas al frente de Pareto. Una cualidad de los MOEAs, es su capacidad de proporcionar en muchos problemas soluciones próximas a las regiones óptimas sin la necesidad de conocer muchas de las propiedades de las funciones objetivo, por lo tanto es usual su utilización en problemas prácticos que pueden incluir la optimización de tiempos, costos, capacidades y otras características, y de las que en un inicio no se tiene información sobre la forma y localización del frente de Pareto.

En sus inicios se desarrollaron muchos MOEAs que incorporaban el uso del concepto de dominancia de Pareto, proporcionando buenas aproximaciones al frente de Pareto al considerar dos o tres funciones objetivo que no fuesen demasiado complejas. Sin embargo estos métodos iniciales no daban muy buen rendimiento al incrementar la complejidad de las funciones o al incrementar el número de objetivos. Para esta última problemática se ha encontrado que una de las razones es que al aumentar el número de objetivos la cantidad de individuos no dominados crece significativamente, lo cual es un grave problema para estos métodos. A raíz de estas problemáticas se ha seguido investigando en el desarrollo de otros tipos de MOEAs. Particularmente han ganado mucha popularidad los MOEAs que sustituyen o complementan la utilización de la dominancia de Pareto con la utilización de indicadores o métricas de la calidad de las soluciones. Uno de los inconvenientes de estos métodos es que el cálculo de algunas de las métricas más aceptadas, especialmente aquellas que tienen la propiedad de ser *Pareto compliance*, tienen una complejidad computacional que crece de forma exponencial conforme aumenta el número de objetivos, por lo que no siempre son aplicables. Otra alternativa que también ha ganado mucha popularidad son los métodos basados en descomposición. Este tipo de métodos convierten el problema multi-objetivo en varios problemas mono-objetivo que se resuelven de forma simultánea. Sin embargo, se ha observado que la geometría del frente de Pareto puede afectar a la calidad de los resultados. En base a lo anterior, actualmente se sigue investigando en los tres tipos de estrategias, pues cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes.

En el caso de optimización mono-objetivo uno de los problemas que más típicamente afecta al rendimiento de los EAs es la perdida de diversidad — en el espacio de las variables, también conocido como

espacio de decisión — de los individuos de la población, circunstancia conocida como convergencia prematura. Los MOEAs, por su parte, conservan de forma implícita un cierto grado de diversidad en el espacio de las variables, ya que al tratar de mantener soluciones bien distribuidas en el espacio objetivo, no se converge completamente en el espacio de las variables de decisión. No obstante, este grado de diversidad implícito podría no ser suficiente para proporcionar una variabilidad que permita explorar adecuadamente el espacio de decisión en algunos problemas, lo que podría conllevar una pérdida de rendimiento.

## 1.2. Motivación

La motivación principal de este trabajo es demostrar que el estado del arte en el desarrollo de algoritmos evolutivos multi-objetivo se puede avanzar mediante la consideración de esquemas que tomen en cuenta la diversidad en el espacio de decisión de manera explícita. Cabe destacar que el principio de considerar la diversidad en el espacio de decisión en los algoritmos evolutivos es ampliamente aceptado en el área de optimización mono-objetivo, habiendo posibilitado el desarrollo de esquemas con una gran robustez para problemas complejos. Principalmente, los algoritmos basados en diversidad han demostrado su superioridad en ejecuciones a largo plazo por lo que teniendo en cuenta el incremento de las capacidades tecnológicas durante las últimas décadas se ha vuelto un tema de interés. Sin embargo, en el caso específico de optimización multi-objetivo, a pesar de que hay algunos investigadores que han intentado promover este tipo de principios, las dificultades son mayores que para el caso mono-objetivo y hasta la fecha no han sido aceptados. Con esta tesis se pretende avanzar en esta línea y demostrar la viabilidad y utilidad de considerar este principio en el caso multi-objetivo.

## 1.3. Descripción del problema e hipótesis

Varios de los tests multi-objetivo que se han propuesto durante los últimos años no pueden ser resueltos por los MOEAs actuales incluso si se ejecutan a largo plazo por lo que se requiere seguir avanzado en el desarrollo de MOEAs para poder lidiar de forma efectiva con estos problemas multi-objetivo. Los MOEAs actuales conservan un grado de diversidad de forma implícita en el espacio de decisión ya que mantienen soluciones diversas en el espacio objetivo de manera explícita. Nuestra hipótesis es que existen escenarios en donde prácticamente la totalidad de los individuos son ubicados rápidamente en unas pocas regiones subóptimas reduciéndose muy rápidamente la diversidad y provocando un estancamiento en el proceso de búsqueda. Ante estas circunstancias, los MOEAs quedarían estancados sin ser capaces de obtener soluciones de mayor calidad incluso aunque se realicen ejecuciones muy largas. Controlar de forma explícita la diversidad en el espacio de las variables podría evitar estas problemáticas y posibilitar la resolución de problemas más complejos que los que se pueden resolver en la actualidad con los MOEAs.

## 1.4. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto es demostrar que se puede avanzar el estado del arte en el campo de algoritmos evolutivos multi-objetivo mediante el desarrollo de algoritmos que consideren la diversidad en el espacio de las variables de manera explícita. En base a los avances recientes en optimización

mono-objetivo, esto se realizará tomando en cuenta el criterio de parada y el tiempo y/o generaciones transcurridas para inducir un balanceo apropiado entre la exploración y la explotación del espacio de búsqueda.

## 1.5. Contribuciones

Las contribuciones principales de esta tesis son las siguientes:

- Analizar la influencia que tiene la diversidad en el espacio de las variables en el rendimiento de los algoritmos evolutivos muti-objetivo actuales.
- Diseñar e implementar algoritmos multi-objetivo que administren la diversidad de forma explícita y que superen a los métodos del estado del arte en ejecuciones de largo plazo.
- Demostrar que este tipo de principios no es específico para un tipo de algoritmo evolutivo utilizando en dos tipos de algoritmos: esquemas basados en dominancia y esquemas basados en descomposición.
- Analizar la interacción entre la diversidad y los operadores de variación, realizando este análisis específicamente para dos de los operadores de variación más ampliamente utilizados: el operador de cruce binario simulado (SBX - *Simulated Binary Crossover*) y los operadores de evolución diferencial. Además, en base al análisis anterior, se proponen nuevas variantes que ofrecen mejor rendimiento que los anteriores para ejecuciones de largo plazo.

## 1.6. Organización de la tesis

El presente documento consta de siete capítulos donde se describe el trabajo realizado, los resultados obtenidos y las conclusiones. A continuación, se explica de forma breve el contenido de los siguientes capítulos.

En el **Capítulo 2** se definen formalmente los conceptos más importantes que surgen en el ámbito multi-objetivo, se presenta una recopilación de los MOEAs más populares y se presenta un análisis preliminar para validar que los MOEAs más populares presentan inconvenientes por no considerar la diversidad en el espacio de decisión de manera explícita. En este capítulo se describen los algoritmos más utilizados ofreciendo detalles adicionales para aquellos MOEAs que serán utilizados para validar los resultados obtenidos en esta tesis. También se hace una recopilación de los problemas de referencia más ampliamente utilizados y se describen los mecanismos que se utilizarán para medir el desempeño de los MOEAs.

El **Capítulo 3** está dedicado a los MOEAs basados en dominancia. Se presenta una revisión de los MOEAs de este estilo que consideran la diversidad en el espacio de las variables como parte del proceso de búsqueda y se propone un nuevo MOEA, el VSD-MOEA (*Variable Space Diversity Multi-Objective Evolutionary Algorithm*) que considera la diversidad en el espacio objetivo y en el espacio de las variables simultáneamente, y que relaciona el control realizado de la diversidad con el criterio de parada.

El **Capítulo 4** está dedicado a los MOEAs basados en descomposición. Se analizan algunas de las estrategias que se han utilizado en esta área para tener un mejor control del grado de exploración y explotación,

como algunos mecanismos de emparejamiento y/o remplazo, se revisan algunos de los métodos para generar pesos propios de este tipo de esquemas y se describe detalladamente el método generador que es implementado en esta tesis. Posteriormente, se presentan tres nuevas propuestas algorítmicas basadas en descomposición, el primero mantiene la diversidad de las variables de forma implícita y los otros dos de forma explícita.

En el **Capítulo 5** se presenta un análisis del operador de Cruce Binario Simulado (SBX) y de los operadores de evolución diferencial, estudiando su comportamiento cuando se incluyen con esquemas de control de diversidad para ejecuciones a largo plazo. En base a los análisis se proponen una serie de modificaciones de los mismos.

La validación experimental de todas las propuestas se presenta en el **Capítulo 6**, donde se realizan pruebas estadísticas, se muestran las superficies de cubrimiento alcanzadas y se hacen un análisis de escalabilidad en las variables con la propuesta basada en dominancia que fue la que mejores resultados aportó en esta tesis.

Finalmente, en el **Capítulo 7** se presentan las conclusiones en base a los resultados obtenidos en este documento, además se discuten los trabajos futuros a desarrollar como resultado de esta investigación.

## Capítulo 2

# Optimización Multi-objetivo

### 2.1. Conceptos

En un problema de optimización multi-objetivo (MOP) se consideran un conjunto de funciones objetivo — usualmente con cierto grado de conflicto — que deben minimizarse o maximizarse simultáneamente. Un MOP continuo con restricciones generales y restricciones de caja se formula como se indica en la ecuación (2.1).

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar/Maximizar} \quad f_m(\vec{x}) \quad m = 1, 2, \dots, M \\
 & \text{sujeto a} \quad g_j(\vec{x}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, J \\
 & \quad h_k(\vec{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \\
 & \quad x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En la ecuación anterior la solución  $\vec{x}$  es un vector de  $n$  variables de decisión  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , en relación con el problema existen  $J$  desigualdades y  $K$  restricciones de igualdad, siendo los términos  $g_j(\vec{x})$  y  $h_j(\vec{x})$  conocidos como las funciones de restricción. Finalmente, la última desigualdad corresponde a los límites de las variables, restringiendo cada variable de decisión  $x_i$  por su límite inferior  $x_i^{(L)}$  y su límite superior  $x_i^{(U)}$ , conformando así el dominio de las variables de decisión. Una solución  $\vec{x}$  que no satisface todas las ( $J+K$ ) restricciones y los límites de las variables es conocida como una *Solución no factible*, mientras que las soluciones  $\vec{x}$  que satisfacen todas las restricciones y los límites, son conocidas como *Soluciones factibles*. El conjunto de todas las soluciones factibles es conocida como la *región factible*  $\Omega$ . En optimización multi-objetivo un vector de variables que corresponden al espacio de decisión  $n$ -dimensional es mapeado a un punto en el espacio  $M$ -dimensional conocido como *espacio objetivo*  $Z$ . Por simplicidad, en este trabajo únicamente se considera el caso de la minimización de todos los objetivos.

#### 2.1.1. Dominancia

##### Concepto de Dominancia

Se dice que una solución  $\vec{x}$  domina a otra solución  $\vec{y}$  matemáticamente  $\vec{x} \preceq \vec{y}$ , si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- La solución  $\vec{x}$  no es peor que la solución  $\vec{y}$  en ningún objetivo.  
 $\forall m \in \{1, 2, \dots, M\} : f_m(x_i) \leq f_m(y_i)$
- La solución  $\vec{x}$  es estrictamente mejor que la solución  $\vec{y}$  en al menos un objetivo.  
 $\exists m \in \{1, 2, \dots, M\} : f_m(x_i) < f_m(y_i)$

### Propiedades de dominancia

Se derivan las siguientes propiedades (Voorneveld, 2003), considerando las soluciones  $\vec{p}, \vec{q}$  y  $\vec{r}$ :

- Reflexiva: la relación de dominancia no es reflexiva, dado que la solución no se domina a si misma.
- Simétrica: la relación de dominancia es no simétrica, ya que  $\vec{p} \preceq \vec{q}$  no implica que  $\vec{q} \preceq \vec{p}$ .
- Transitiva: la relación de dominancia es transitiva. Esto se debe a que si  $\vec{p} \preceq \vec{q}$  y  $\vec{q} \preceq \vec{r}$ , entonces  $\vec{p} \preceq \vec{r}$ .

### Conjunto no dominado

Dado un conjunto de soluciones  $\mathbf{P}$ , el conjunto de soluciones no dominadas  $\mathbf{P}'$  son aquellas que no son dominadas por ningún otro miembro del conjunto  $\mathbf{P}$ . En el caso en que  $\mathbf{P}$  es la región factible ( $\mathbf{P} = \Omega$ ) entonces al conjunto no dominado  $\mathbf{P}'$  se le conoce como *conjunto óptimo de Pareto*.

### Dominancia fuerte

Se dice que  $\vec{x}$  domina fuertemente a  $\vec{y}$ , si  $\vec{x}$  es estrictamente mejor que la solución  $\vec{y}$  en todos los objetivos, expresado matemáticamente como  $\vec{x} \prec \vec{y}$ . En base a la dominancia fuerte, se define el concepto de conjunto débilmente no dominado. Dado un conjunto de soluciones  $\mathbf{P}$ , el conjunto de soluciones débilmente no dominadas  $\mathbf{P}'$  son las soluciones que no son fuertemente dominadas por ningún miembro del conjunto  $\mathbf{P}$ .

### Dominancia débil

Una solución  $\vec{x}$  domina débilmente a otra solución  $\vec{y}$ , si y sólo si  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{y})$ .

### Solución óptima de Pareto

Una solución  $\vec{x}^* \in \Omega$  es óptimo de Pareto en la ecuación (2.1) si no existe una solución  $\vec{x} \in \Omega$  que la domine.

### Conjunto óptimo de Pareto

Dada la región factible  $\Omega$  de un MOP, el conjunto óptimo de Pareto  $\mathbf{P}^*$  se define como:

$$\mathbf{P}^* = \{\vec{x}^* \in \Omega\}$$

### Frente de Pareto

Sea  $P^*$  el conjunto óptimo de Pareto, el frente de Pareto  $\mathbf{PF}^*$  corresponde a todas las imágenes del conjunto óptimo de Pareto.

### Vector objetivo Ideal

El vector objetivo ideal  $\vec{z}^* \in \mathbb{R}^m$  minimiza a todas las funciones objetivo. Así, cada  $i$ -ésimo componente es definido de la forma:

$$z_i^* = \min_{\vec{x} \in \Omega} f_i(\vec{x}) \quad \forall i \in m$$

El vector objetivo ideal define los límites inferiores para todos los objetivos, es decir que en el espacio de búsqueda factible  $\Omega$  existe al menos una solución en cada objetivo que corresponde con un componente del vector ideal.

### Vector objetivo Utópico

Un vector objetivo utópico  $\vec{z}^{**}$  tiene definido cada uno de sus componentes marginalmente menor en el espacio objetivo que el correspondiente vector ideal, donde cada  $i$ -ésimo componente está definido de la forma:

$$z_i^{**} = z_i^* - \epsilon_i \tag{2.2}$$

donde  $\epsilon_i > 0 \quad \forall i \in 1, 2, \dots, M$ .

El vector utópico se utiliza como punto de referencia en muchos algoritmos en los que se tiene que verificar que esta solución sea estrictamente menor en todas sus componentes que cualquier solución evaluada en el transcurso de la ejecución.

### Vector Objetivo Nadir

El vector nadir representa el límite superior de cada objetivo en el conjunto óptimo de Pareto y no en todo el espacio de búsqueda. Este vector es construido utilizando los peores valores de  $\mathbf{PF}^*$ . El  $i$ -ésimo componente es definido como:

$$z_i^{nad} = \max_{\vec{x} \in P^*} f_i(\vec{x})$$

En la figura 2.1 se muestran los vectores nadir ( $z^{nad}$ ), utópico ( $z^{**}$ ) e ideal ( $z^*$ ) para la minimización de dos objetivos, además se aclara que el vector nadir no debe ser confundido con la peor función objetivo de todo el espacio objetivo, ya que representa el límite superior de cada objetivo en el conjunto de Pareto óptimo.

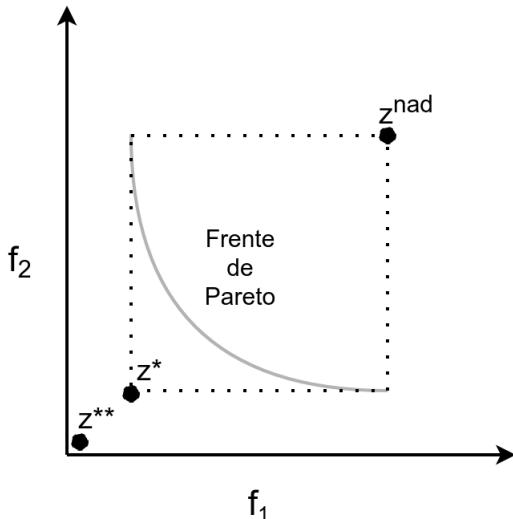


FIGURA 2.1: Ubicación de los vectores ideal, utópico y nadir en el caso de dos objetivos.

## 2.2. Optimizadores Multi-objetivo

### 2.2.1. Métodos Clásicos

Los métodos clásicos desarrollados para resolver problemas de optimización multi-objetivo han sido clasificados por varios autores, entre ellos Cohon y Marks, 1975 propusieron la clasificación de la siguiente forma:

- **Técnicas generadoras.** En estos métodos siguen directamente las condiciones de Kuhn-Tucker para soluciones no inferiores. El propósito de todas las técnicas generadoras es identificar el conjunto de soluciones no inferiores.
- **Técnicas basadas en la articulación previa de preferencias (Métodos no interactivos).** Estos métodos indican una preferencia especial en cada objetivo para el problema multi-objetivo.
- **Técnicas basadas en la articulación progresiva de preferencias.** Los métodos de esta categoría de forma progresiva generan soluciones no inferiores y los tomadores de decisiones modifican el problema en base a lo encontrado, esto es repetido hasta que se cumpla un criterio determinado.

Posteriormente Hwang y Masud, 2012 y Quagliarella, Vicini y CIRA, 1999, clasificaron los métodos en las siguientes categorías:

- **Métodos no preferenciales.** Este tipo de métodos no utilizan información para asignar una preferencia a objetivos específicos, además no utilizan estrategias para encontrar múltiples soluciones óptimas de Pareto sino que simplemente se intenta encontrar una solución que sea un óptimo de Pareto.
- **Métodos a posteriori.** En esta categoría no se utiliza información preferencial sino que el propósito es encontrar múltiples y diversas soluciones del frente de Pareto. Posteriormente el tomador de decisiones mediante criterios adicionales decide las soluciones a utilizar (búsqueda → decisión).

- **Métodos a priori.** En esta categoría se utiliza información preferencial para guiar el proceso de búsqueda. Esto se puede hacer por ejemplo transformando el problema en uno o varios mono-objetivo, aunque también existen algunas técnicas que incorporan las preferencias sin transformar el problema en mono-objetivo (decisión → búsqueda).
- **Métodos interactivos.** Este tipo de métodos utilizan información preferencial donde progresivamente durante el proceso se ve involucrado el tomador de decisiones para obtener soluciones aproximadas al frente de Pareto (decisión ↔ búsqueda).

A continuación se van a considerar un conjunto de métodos clásicos que en muchos casos han guiado el diseño de los MOEAs más populares. Son los siguientes: métodos de sumas ponderadas, método de restricción, método con métricas ponderadas

### Método de sumas ponderadas

El método de sumas ponderadas transforma un problema multi-objetivo en un problema mono-objetivo, por medio de la multiplicación de cada objetivo con un peso el cual es definido por el tomador de decisiones. El peso asignado a cada objetivo depende de la importancia que se desea dar a cada objetivo en el contexto del problema. Sin embargo, asignar un vector de pesos apropiado es complejo pues depende de la escala de cada función objetivo, por lo que es necesario normalizar los objetivos para que cada uno tenga la misma importancia, así como de la forma del frente de Pareto.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad F(\vec{x}) = \sum_{m=1}^M w_m f_m(\vec{x}), \\
 & \text{sujeto a} \quad g_j(\vec{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\
 & \quad h_k(\vec{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\
 & \quad x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

En la ecuación 2.3  $w_m$  ( $\in [0, 1]$ ) es el peso de la  $m$ -ésima función objetivo. El problema anterior es invarianta a la multiplicación de todo el vector de pesos por una constante, por lo que usualmente se escogen los pesos de la forma  $\sum_{m=1}^M w_m = 1$ .

**Propiedad 1** Si cada componente del vector de pesos es positivo, cualquier solución óptima al problema de la ecuación (2.3) es óptimo de Pareto.

**Propiedad 2** Si  $\vec{x}^*$  es una solución óptima de Pareto en un problema de optimización multi-objetivo convexo, entonces existe un vector de pesos positivos diferentes de cero  $\vec{w}$  tal que  $\vec{x}^*$  es la solución proporcionada por la ecuación (2.3).

### Ventajas

- Es una de las formas más sencillas para resolver un MOP, basándose en un concepto que es fácil de entender y de aplicar.
- Para problemas que tienen un frente de Pareto con forma convexa, este método garantiza que cualquier solución se puede encontrar si se definen los pesos de manera adecuada.

## Desventajas

- Es difícil asignar los pesos de forma que se puedan obtener soluciones distribuidas uniformemente en el frente de Pareto.
- Distintos vectores de pesos no necesariamente llevan a diferentes soluciones óptimas de Pareto.
- El método de sumas ponderadas no puede encontrar ciertas soluciones óptimas de Pareto en el caso de frentes no convexos.

## Método de restricción $\epsilon$

En este método se formula el problema de optimización multi-objetivo manteniendo un único objetivo y restringiendo el resto de objetivos especificando un valor umbral máximo que se debe alcanzar, es decir, cualquier solución que tenga valores mayores que los especificados se considera una solución no factible.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && f_\mu(\vec{x}), \\
 & \text{sujeto a} && f_m(\vec{x}) \leq \epsilon_m \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{and} \quad m \neq \mu \\
 & && g_j(\vec{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\
 & && h_k(\vec{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\
 & && x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

En la formulación anterior el parámetro  $\epsilon_m$  representa el límite superior para la función  $f_m$ .

**Propiedad 3** Si la ecuación (2.4) tiene solución única para cualquier límite definido por el vector  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\mu-1}, \epsilon_{\mu+1}, \dots, \epsilon_M)^T$ , esta es un óptimo de Pareto.

## Ventajas

- Haciendo variar los valores de  $\epsilon_m$  podemos encontrar diferentes soluciones óptimas de Pareto.
- Este método puede ser utilizado en cualquier problema de optimización multi-objetivo incluyendo los que poseen frentes de Pareto convexos o no convexos.

## Desventajas

- La solución encontrada con la formulación dada en la ecuación 2.4 depende del vector de restricciones  $\vec{\epsilon}$  establecido, el cual debe estar en el dominio comprendido por el espacio objetivo. En muchas ocasiones es difícil establecer dichos valores.
- Al aumentar el número de objetivos se necesita mas información por parte del tomador de decisiones ya que existen más elementos en el vector  $\vec{\epsilon}$ .
- Se deben utilizar optimizadores que manejen restricciones (incluso si el problema original era sin restricciones), lo que dificulta mucho la optimización en comparación del caso sin restricciones.

### Métodos con métricas ponderadas

Este método al igual que el de la suma de pesos ponderados combina la información de los diferentes objetivos para establecer una función mono-objetivo a optimizar. Sin embargo este método se basa en utilizar métricas para calcular distancias entre el vector ideal  $\vec{z}^*$  y las soluciones a evaluar. Por lo regular se utilizan las métricas de distancia  $l_p$  y  $l_{\inf}$  ponderadas, aunque se podrían utilizar otras. En el caso de la métrica ponderada  $l_p$  el problema de minimización queda establecido como se indica en la ecuación 2.5.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad l_p(\vec{x}) &= \left( \sum_{m=1}^M W_m |f_m(\vec{x}) - z_m^*|^p \right)^{1/p}, \\ \text{sujeto a} \quad g_j(\vec{x}) &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\ h_k(\vec{x}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

El parámetro  $p$  puede tomar cualquier valor entre  $[1, \infty]$ . Cuando se asigna el valor  $p = 1$  el problema es equivalente al método de sumas ponderadas. Por otra parte si se asigna  $p = 2$  se realiza el cálculo de la distancia Euclídea ponderada por lo que las curvas de nivel son elipses centradas en el vector ideal. En el caso en particular que  $p \rightarrow \infty$  el problema se transforma en minimizar la mayor desviación descrita por  $|f_x(\vec{x}) - z_m^*|$ . Este último caso se conoce como el problema de *Tchebycheff ponderado* definido en la ecuación (2.6).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad l_\infty(\mathbf{x}) &= \left( \max_{m=1}^M w_m |f_m(\vec{x}) - z_m^*| \right), \\ \text{sujeto a} \quad g_j(\vec{x}) &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\ h_k(\vec{x}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### Ventajas

- La métrica de Tchebycheff ponderada garantiza que se pueda encontrar cualquier solución óptima de Pareto (incluso en problemas no convexos), siempre y cuando  $\vec{z}^*$  sea un el vector utópico.

### Desventajas

- La magnitud de los objetivos influye en los resultados, por lo que es necesario normalizar los objetivos, esto requiere el conocimiento del mínimo y del máximo de cada objetivo, aunque no siempre esa transformación es adecuada.
- En este método se requiere la solución ideal  $\vec{z}^*$ , lo que involucra resolver  $M$  problemas mono-objetivo.
- Si se usa  $p$  diferente de  $\infty$ , dependiendo de la forma del frente de Pareto, no todos los óptimos podrían ser alcanzados.
- Al usar  $p$  igual a  $\infty$  se pierde la diferenciabilidad, y aparecen muchas zonas planas (redes neutrales o plateaus) lo que dificulta la resolución del problema.

## 2.2.2. Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo Iniciales

En esta sección se revisan algunos de los primeros algoritmos evolutivos multi-objetivo que se diseñaron y que han guiado las avances posteriores.

### Algoritmo Genético basado en Evaluación de Vectores (VEGA)

Una de las primeras implementaciones de un algoritmo evolutivo multi-objetivo fue sugerido por Schaffer en 1985, como se puede observar en el algoritmo 1, este MOEA consiste en que dado un problema multi-objetivo conformado por  $M$  objetivos y una población de tamaño  $N$ , se realiza la división de la población en  $M$  subpoblaciones iguales de forma aleatoria, y a cada subpoblación se le asigna una aptitud basada en su respectiva función objetivo. Por tanto la idea clave es que cada una de las  $M$  funciones objetivo es utilizada para evaluar a parte de la población. El proceso de selección de padres se realiza considerando las subpoblaciones, es decir, se realizan  $M$  subprocesos de selección, cada uno de ellos considerando sólo a los individuos de la subpoblación correspondiente, mientras que a la hora de recombinar individuos se permite que estos pertenezcan a diferentes subpoblaciones.

---

#### Algoritmo 1 Procedimiento principal del Algoritmo Genético basado en Evaluación de Vectores (VEGA)

---

- 1:  $N$ : el número de individuos,  $M$ : el número de objetivos
  - 2:  $q = M/N$
  - 3: **for**  $i = 1$  hasta  $M$
  - 4:   **for** cada solución  $j = 1 + (i - 1) * q$  hasta  $j = i * q$
  - 5:     Asignar la aptitud  $F(X^{(j)}) = F_i(X^{(j)})$
  - 6:   **end for**
  - 7:   Realizar la selección apropiada en las  $q$  soluciones para crear un conjunto de emparejamiento  $\mathbf{P}_i$ .
  - 8: **end for**
  - 9: Combinar el conjunto de emparejamiento  $\mathbf{P} = \cup_{i=1}^M \mathbf{P}_i$ , implementar los operadores de cruce y mutación en  $\mathbf{P}$  para generar una nueva población.
- 

Este algoritmo genera mejores soluciones en problemas donde no existe un grado de dependencia fuerte entre los objetivos. Schaffer consideró la aplicación del operador de cruce entre individuos en toda la población con el objetivo de que al cruzar dos buenas soluciones que corresponden a distintos objetivos, se pudieran generar buenas soluciones entre los dos objetivos y además consideró la utilización de la mutación polinomial, la cual es muy común en los métodos actuales. Sin embargo, en problemas complejos no es posible crear buenas soluciones combinando soluciones extremas, con lo que este método falla en dichos casos.

### Ventajas

- La principal ventaja del algoritmo VEGA es su facilidad de implementación ya que la idea es simple.
- Tiene una tendencia de encontrar soluciones cercanas a las mejores, al menos en una función objetivo.
- Si los objetivos no tenían conflicto entre sí, y no se sabía al empezar a optimizar, este método suele ser bastante adecuado.

### Desventajas

- En este algoritmo cada solución es evaluada sólo con una función objetivo, entonces no se analiza el resultado de las soluciones en las otras  $M - 1$  funciones objetivo, lo cual es importante en el contexto multi-objetivo, además el operador de cruce entre las mejores soluciones individuales puede no generar soluciones diversas.
- En muchos casos se converge a una única solución.

### Algoritmo Genético de Múltiples Objetivos (MOGA)

Este algoritmo fue propuesto por los autores Fonseca y Fleming en 1993, y su principal novedad fue utilizar la relación de dominancia para clasificar cada solución de la población del algoritmo genético. En la primera sugerencia los autores enfatizaron el hecho de establecer estrategias enfocadas a dar prioridad a soluciones no dominadas y simultáneamente mantener diversidad de las mismas. En este algoritmo se le asigna un rango a cada solución. Específicamente, para la solución  $i$  el rango es asignado como la suma de la unidad más el número de soluciones  $n_i$  que dominan a la solución  $i$ .

$$r_i = 1 + n_i \quad (2.7)$$

Una vez asignados los rangos se asigna una aptitud a cada individuo en base a su rango. El proceso consiste en primero ordenar las soluciones en base a su rango en forma ascendente y a continuación asignar una aptitud a cada solución utilizando una función lineal como se puede observar en el algoritmo 2. Posteriormente, se promedian las aptitudes que corresponden a las soluciones de cada rango, resultando así la aptitud efectiva de cada individuo. Este mecanismo permite que las soluciones no dominadas sean preferidas en la población. Con el objetivo de tratar de mantener diversidad, utilizan funciones de compartición calculadas en el espacio objetivo, de forma que las regiones muy pobladas ven reducido su valor de fitness.

---

#### Algoritmo 2 Procedimiento para la asignación de aptitud del MOGA

---

```

1:  $\sigma_{share}$ : distancia mínima para cada nicho,  $M$ : el número de objetivos
2:  $\mu(j) = 0 \forall j \in 1..N$ 
3: for  $i = 1$  hasta  $N$ 
4:   Calcular el número de soluciones ( $n_i$ ) que dominan a la solución  $i$ 
5:    $r_i = 1 + n_i$ 
6:    $\mu(r_i) = \mu(r_i) + 1$ 
7: end for
8: for  $r = 1$  hasta  $N$ 
9:   for Para cada solución en el rango  $r$ 
10:     $F_i = N \sum_{k=1}^{r_i-1} \mu(k) - 0,5(\mu(r_i) - 1)$ 
11:     $F'_i = \frac{F_i}{n c_i}$ 
12:   end for
13:   for Para cada solución en el rango  $r$ 
14:     $F'_i \leftarrow \frac{F'_i \mu(r)}{\sum_{k=1}^{\mu(r)} F'_k}$ 
15:   end for
16: end for
```

---

### Algoritmo Genético basado en Nichos y Pareto (NPGA)

El algoritmo NPGA propuesto por Horn, Nafpliotis y Goldberg en 1994 tiene como principal característica que, además de utilizar la dominancia de Pareto, promueve de forma explícita el mantenimiento de

diversidad en el espacio objetivo. Para ello combina la utilización del torneo binario con la utilización de funciones de compartición. En este algoritmo se decidió utilizar torneos binarios porque en base a varios estudios ( Goldberg and Deb, 1991) se había mostrado que la selección basada en el torneo binario era más estable en comparación a la selección proporcional. Sin embargo, las funciones de compartición se habían diseñado para ser usadas con selección proporcional y no con selección por torneo. Este MOEA implementa una estrategia de nichos dinámica que funciona de la siguiente manera. Durante la selección basada en torneo binario (algoritmo 3), se escogen dos soluciones  $i, j$  en forma aleatoria de la población padre  $\mathbf{P}$ . Estas soluciones son comparadas seleccionando una subpoblación  $\mathbf{T}$  de tamaño  $t_{dom}$  de la población. Posteriormente cada solución  $i$  y  $j$  es comparada con cada solución de la subpoblación utilizando el criterio de la dominancia. Si una solución no es dominada por ninguna del conjunto, mientras que la otra sí lo es, la primera es seleccionada. En caso contrario, se calcula la función de compartición de  $i$  y  $j$  con respecto a la población de hijos  $\mathbf{Q}$  actual (parcialmente llena), y la solución con el menor conteo de nichos gana en el torneo. De esta forma se premia la selección de soluciones de alta calidad, y en caso de empate, se premia la diversidad. En este punto es importante recalcar que para calcular la función de compartición se calculan distancias en el espacio objetivo. Algunos autores recalcaron que se podría calcular la distancia utilizando el espacio de decisión, pero el hecho de abandonar la diversidad del espacio objetivo para ese caso provocaba que las soluciones obtenidas no fueran diversas en el espacio objetivo, por lo que se abandonó esta idea. Por lo tanto, dejar de considerar la diversidad en el espacio objetivo para considerar la diversidad en el espacio de decisión no es una buena alternativa.

---

### Algoritmo 3 Torneo binario del NPGA

---

```

1: Obtener una subpoblación  $\mathbf{T}_{ij}$  de tamaño  $t_{dom}$  de la población padre  $\mathbf{P}$ 
2: Calcular  $\alpha_i$  como el número de soluciones en  $\mathbf{T}_{ij}$  que domina a  $i$ 
3: Calcular  $\alpha_j$  como el número de soluciones en  $\mathbf{T}_{ij}$  que domina a  $j$ 
4: if  $\alpha_i = 0$  y  $\alpha_j > 0$  then
5:    $i$  es el ganador y el proceso de selección está completo.
6: else if  $\alpha_i > 0$  y  $\alpha_j = 0$  then
7:    $j$  es el ganador y el proceso de selección está completo.
8: else
9:   if  $|Q| < 2$  then
10:     $i$  o  $j$  es escogido con probabilidad de 0,5 el proceso está completo.
11:   end if
12:   En caso de no cumplirse ninguna condición se realiza un conteo con nichos  $nc_i$  y  $nc_j$  ubicando  $i$  y  $j$  en la población hijo  $\mathbf{Q}$  de forma independiente. El parámetro de nichos  $\sigma_{share}$  .
13:    $d_{ik} = \sqrt{\sum_{m=1}^M \left( \frac{f_m^{(i)} - f_m^{(k)}}{f_m^{max} - f_m^{min}} \right)^2}$ 
14:    $nc_i$  es calculado como el número de soluciones  $k$  en  $\mathbf{Q}$  con una distancia  $d_{ik}$  desde  $i$  menor a  $\sigma_{share}$ 
15:   if  $nc_i \leq nc_j$  then
16:      $i$  es el ganador.
17:   else
18:      $j$  es el ganador.
19:   end if
20: end if
```

---

### Ventajas

- Una de las principales ventajas del NPGA es que no se necesita realizar una asignación explícita de la aptitud a diferencia de otros algoritmos como el VEGA y MOGA, siendo el primer algoritmo que utiliza selección por torneo lo que aumentó su estabilidad.
- El algoritmo es bastante eficiente ya que para muchas de las decisiones no trabaja con la población completa sino que realiza un muestreo de la misma.

### Desventajas

Requiere la configuración de dos parámetros:  $\sigma_{share}$  y  $t_{dom}$ , siendo el algoritmo especialmente sensible a la especificación del parámetro  $\sigma_{share}$ .

#### 2.2.3. Clasificación Actual de Algoritmos Evolutivos Multi-objetivo

En las últimas décadas el campo de los algoritmos evolutivos multi-objetivo ha ganado una gran popularidad, fomentando un crecimiento considerable de los mismos. Por ello, han surgido múltiples clasificaciones para tratar de ordenar los diferentes tipos de estrategias, siendo muy aceptada la clasificación que divide a los métodos en basados en dominancia, basados en descomposición y/o basados en indicadores (Pilát, 2010). Actualmente no existe un algoritmo el cual sea considerado superior entre las distintas clasificaciones, por lo que se sigue investigando en los tres tipos de estrategias.

##### Métodos basados en dominancia

Este tipo de algoritmos evolutivos multi-objetivo están basados en la relación de dominancia de Pareto. Debido a que la relación de dominancia no promueve la diversidad en el espacio objetivo, se implementan técnicas explícitas como la utilización de nichos u otros mecanismos de agrupamiento para evitar la pérdida de diversidad en el espacio objetivo. Bajo estos dos principios es posible obtener soluciones cercanas al frente de Pareto y propiamente distribuidas en muchos problemas. El algoritmo más popular de este grupo es el Algoritmo Genético basado en Ordenación de No dominados II (NSGA-II - *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*) propuesto por Deb y col., 2002a. Este algoritmo implementa un operador especial para la selección de padres e incorpora elitismo en la fase de remplazamiento. El operador de selección de padres se basa en dos mecanismos: ordenación de no dominados (*fast-non-dominated-sort*) y amontonamiento de soluciones (*crowding*). El primero se basa en utilizar la relación de dominancia para seleccionar soluciones de alta calidad y el segundo promueve la preservación de diversidad en el espacio objetivo. Otro algoritmo popular de este grupo es el Algoritmo Evolutivo basado en la Fuerza de Pareto 2 (SPEA2 - *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2*).

Esta familia de algoritmos ofrecen resultados prometedores en dos y tres objetivos, sin embargo se ha comprobado que conforme aumenta el número de objetivos la presión de selección disminuye drásticamente, por lo que se han propuesto modificaciones en la definición de dominancia (Ishibuchi, Tsukamoto y Nojima, 2008a; Deb y Jain, 2014a), o se han hibridizado con algoritmos de los otros grupos para lidiar con estas problemáticas.

##### Métodos basados en indicadores

En el campo de optimización multi-objetivo se han propuesto varios indicadores para analizar la calidad de conjuntos de soluciones. Estas métricas normalmente combinan el grado de convergencia y la diversidad — en el espacio objetivo — de las soluciones obtenidas. Algunos investigadores observaron que estos indicadores podrían ser implementados como criterio de optimización en los algoritmos evolutivos multi-objetivo, es decir, que se podrían utilizar estos indicadores para guiar el proceso de búsqueda. A los algoritmos que siguen este principio se les denominaron algoritmos basados en indicadores, siendo el Algoritmo Evolutivo Basado en Indicadores (IBEA - *Indicator Based Evolutionary Algorithm*) propuesto por Zitzler y Künzli, 2004 el primero de este grupo. Este tipo de algoritmos se pueden aplicar con

múltiples indicadores, siendo el hipervolumen uno de los más utilizados. Una ventaja de los esquemas basados en indicadores es que estas métricas normalmente consideran la diversidad del espacio objetivo y la calidad de las soluciones simultáneamente, por lo que no es necesario implementar técnicas adicionales para preservar la diversidad en el espacio objetivo. Entre los distintos algoritmos basados en indicadores el SMS-EMOA (*S-Metric Selection EMOA*) propuesto por Beume, Naujoks y Emmerich, 2007 es un algoritmo popular y simple que ha mostrado su superioridad frente a muchos otros enfoques (Hernández Gómez, Coello Coello y Alba, 2016), por lo que hoy en día es probablemente el más utilizado de este grupo. El SMS-EMOA es considerado como un algoritmo híbrido basado en indicadores ya que hace uso tanto del procedimiento de Ordenación eficiente de no dominados (*fast-non-dominated-sort*) como de la métrica del hipervolumen. La idea base de este algoritmo es que en la fase de remplazo la solución con peor rango y con la mínima contribución al hipervolumen es eliminada. El cálculo del hipervolumen implica un procedimiento con una complejidad elevada, por lo que se han desarrollado alternativas para acelerar su cálculo como el FV-MOEA (*Fast Hypervolume Indicator-Based MOEA*, Jiang y col., 2015), así como estrategias basadas en otros indicadores como el R2 (Hernández Gómez y Coello Coello, 2015a; Brockhoff D. y H, 2015).

### Métodos basados en descomposición

Los algoritmos multi-objetivo basados en descomposición transforman el problema multi-objetivo en un conjunto de problemas de optimización mono-objetivo que son resueltos simultáneamente. A estos problemas mono-objetivo se les suele denominar subproblemas y dicha transformación se puede realizar de distintas formas, como por ejemplo a través de una suma lineal de pesos o con una función de pesos que considere el enfoque de Tchebycheff. Los vectores de pesos se seleccionan con el objetivo de obtener soluciones diversas. Sin embargo ésta es una complicación de este tipo de algoritmos ya que la correcta selección de estos vectores depende considerablemente de la forma que tiene el frente de Pareto. En cualquier caso, es muy habitual usar pesos fijos distribuidos uniformemente ya que para muchos problemas dicha distribución uniforme es suficiente para generar soluciones correctamente distribuidas en el frente de Pareto. El algoritmo más popular basado en descomposición es el MOEA/D (*Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition*) propuesto por Zhang y Li, 2007. En este algoritmo se pueden utilizar distintos enfoques para la agregación de los objetivos, e incluye mecanismos como restricciones para el emparejamiento de los padres (Chiang y Lai, 2011), utilización de vecindades (Qi y col., 2014), e incorporación de búsquedas locales (Tan y col., 2012b) entre otros. MOEA/D es considerado como un algoritmo muy elitista ya que para cada subproblema siempre se mantiene en la población al mejor individuo encontrado.

## 2.3. Estado del arte

Con el objetivo de validar experimentalmente las propuestas realizadas en este tesis, se eligió al menos un algoritmo de cada grupo de la clasificación presentada anteriormente. Concretamente, en primer lugar se decidió incluir al NSGA-II (Deb y col., 2002a), MOEA/D (Zhang y Li, 2007) y al SMS-EMOA (Beume, Naujoks y Emmerich, 2007), siendo estos de los algoritmos más representativos de los basados en dominancia, basados en descomposición y basados en indicadores respectivamente. Además, se incluyó el GDE3 (*Generalized Differential Evolution*, Kukkonen y Lampinen, 2005) que es una variante de evolución diferencial basada en dominancia que ha obtenido resultados muy prometedores en varios problemas de prueba. Cabe destacar que, teniendo en cuenta la hipótesis de esta tesis, para los

esquemas considerados en este trabajo se realizan ejecuciones a largo plazo, por lo tanto su complejidad algorítmica es relevante, ya que un orden de complejidad elevado podría requerir demasiados recursos. Particularmente, si se quiere escalar en objetivos no es factible ejecutar el SMS-EMOA, ya que al aumentar el número de objetivos su complejidad se incrementa exponencialmente. Como alternativa, y con el fin de mantener al menos un esquema basado en métricas se emplea el algoritmo MOMBII-II (*Many Objective Metaheuristic Based on the R2 Indicator*) propuesto por Hernández Gómez y Coello Coello, 2015b, el cual posee un menor orden de complejidad. En las siguientes secciones se describen cada uno de los algoritmos seleccionados.

### 2.3.1. Algoritmo Genético basado en Ordenación de No dominados II (NSGA-II)

Los algoritmos basados en dominancia fueron de los primeros paradigmas implementados en optimización estocástica multi-objetivo (Tan, Khor y Lee, 2005). El algoritmo NSGA-II propuesto en Deb y col., 2002a es considerado como el sucesor del algoritmo NSGA inicialmente propuesto en Srinivas y Deb, 1994. Una de las principales características de la primera versión es que asigna la aptitud a los individuos en base a su dominancia pero haciendo uso del enfoque de funciones de compartición (*shared fitness*) utilizando una técnica de nichos que es calculada en el espacio de las variables (Deb y Kalyanmoy, 2001). Por ello, es uno de los pocos algoritmos que promueve la diversidad en el espacio de las variables. Sin embargo tiene dos desventajas importantes: fijar el parámetro con el que se indica la distancia máxima de cada nicho ( $\sigma_{share}$ ) es una tarea muy difícil y para tomar en cuenta la diversidad en el espacio de las variables se dejó de considerar la diversidad en el espacio objetivo, lo que repercute muy negativamente para problemas en que no hay una correlación alta entre la diversidad de ambos espacios. La segunda versión, el NSGA-II, implementa varios cambios importantes: se incorpora una técnica distinta de nichos donde no es necesario especificar un parámetro de aptitud compartida, provee una mecanismo con menor complejidad algorítmica para clasificar los frentes como se muestra en el Algoritmo 5 e introduce elitismo. Las dos versiones dividen a la población en frentes no dominados, los cuales son conjuntos de individuos mutuamente incomparables. En el NSGA-II se asigna una distancia de amontonamiento la cual es calculada dentro de cada subfrente y considerando distancia en el espacio objetivo tal y como se detalla en el Algoritmo 6. De esta forma, cada individuo consta de dos valores: el rango del frente al que pertenece, siendo los menores valores los de mayor calidad, y la distancia de amontonamiento. El elitismo es implementado por medio de un esquema de remplazamiento donde la población de padres y la de hijos se unen ( $\mu + \lambda$ ) y se calcula el rango y distancia de amontonamiento para todos los individuos en la población resultante. Posteriormente, se eligen  $\mu$  individuos de forma elitista; para ellos los individuos se ordenan por rango, y en caso de empate se ordenan por distancia de amontonamiento. Para la selección de padres se utiliza el torneo binario, realizando el mismo tipo de comparativa, es decir, cuando se comparan dos individuos  $i$  y  $j$ , el que tiene el menor rango es mejor, mientras que en caso de que ambos  $i$  y  $j$  pertenezcan al mismo rango, el que tiene la mayor distancia de amontonamiento es elegido. Es importante recalcar que en esta segunda versión del algoritmo se considera explícitamente la diversidad en el espacio objetivo, pero a costa de dejar de considerar la diversidad del espacio de las variables. Esto permitió tener resultados más estables, aunque siguen existiendo inconvenientes en aquellos casos en los que no hay una buena correlación entre la diversidad de ambos espacios.

Aunque el NSGA-II fue propuesto hace más de una década, sigue siendo uno de los algoritmos más utilizados en la actualidad. La efectividad de este algoritmo es aceptable, e inclusive sigue siendo competitivo con muchos algoritmos recientes, cuando se consideran sólo dos o tres funciones objetivo. Sin

embargo, para más de tres funciones objetivo su rendimiento decae rápidamente. Esto se debe principalmente a que relación de dominancia prácticamente no es funcional cuando el número de funciones objetivo se incrementa considerablemente ya que por ejemplo se ha argumentado (Ishibuchi, Tsukamoto y Nojima, 2008b) que si el número de objetivos es aproximadamente de diez, la mayoría de vectores generados de forma aleatoria son incomparables con la relación de dominancia. En este caso la presión de selección en el NSGA-II y otros algoritmos similares es proporcionada únicamente por el procedimiento de nichos, el cual no fue diseñado para tantos objetivos, y no se obtiene una convergencia adecuada hacia el conjunto de Pareto.

---

**Algoritmo 4** Procedimiento principal del NSGA-II
 

---

```

1: Inicializar Individuos( $P_1$ )
2:  $f$  = Ordenación Eficiente basado en No dominados( $P_1$ )           ▷ Clasificación por rangos de la población inicial, ver algoritmo 5.
3:  $Q_1 = \emptyset$ 
4:  $t = 1$ 
5: while Criterio de parada
6:    $R_t = P_t \cup Q_t$ 
7:    $f$  = Ordenación Eficiente basado en No dominados( $R_t$ )           ▷ Ver algoritmo 5.
8:    $P_{t+1} = \emptyset$  and  $i = 1$ 
9:   while  $|P_{t+1}| + |f_i| \leq N$ 
10:    Asignación de distancia basado en amontonamiento( $f_i$ ).          ▷ Se asigna la diversidad de cada individuo en el espacio objetivo.
11:     $P_{t+1} = P_{t+1} \cup f_i$ 
12:     $i = i + 1$ 
13:   end while
14:   Asignación de distancia basado en amontonamiento( $f_i$ ).          ▷ Se asigna la diversidad de cada individuo en el espacio objetivo.
15:   Ordenar( $f_i, \prec_n$ )           ▷ El operador  $\prec_n$  ordena por rangos, en caso de empate por la diversidad en el espacio objetivo, ver algoritmo 6.
16:    $P_{t+1} = P_{t+1} \cup f_i[1 : (N - |P_{t+1}|)]$ 
17:    $Q_{t+1}$  = Reproducción( $P_{t+1}$ )           ▷ Se implementan los operadores evolutivos.
18:    $t = t + 1$ 
19: end while
  
```

---

**Algoritmo 5** Ordenación Eficiente basado en No dominados del NSGA-II

---

```

1:  $f_i$  es el  $i$ -ésimo frente,  $S$  es un array de subconjuntos y  $n$  es un array de enteros.
2:  $S_p$  hace referencia al conjunto de individuos dominados por  $p$ .
3:  $n_p$  hace referencia al numero de individuos pendientes de clasificar que dominan a  $p$ .
4: for  $p \in P$ 
5:    $S_p = \emptyset$ 
6:    $n_p = 0$ 
7:   for  $q \in P$ 
8:     if  $p \prec q$  then
9:        $S_p = S_p \cup \{q\}$ 
10:    else if  $q \prec p$  then
11:       $n_p = n_p + 1$ 
12:    end if
13:   end for
14:   if  $n_p = 0$  then
15:      $p_{rank} = 1$ 
16:      $f_1 = f_1 \cup \{p\}$ 
17:   end if
18: end for
19:  $i = 1$ 
20: while  $f_i \neq \emptyset$ 
21:    $Q = \emptyset$ 
22:   for  $p \in f_i$ 
23:     for  $q \in S_p$ 
24:        $n_q = n_q - 1$ 
25:       if  $n_q = 0$  then
26:          $q_{rank} = i + 1$ 
27:          $Q = Q \cup \{q\}$ 
28:       end if
29:     end for
30:   end for
31:    $i = i + 1$ 
32:    $f_i = Q$ 
33: end while

```

---

**Algoritmo 6** Asignación de distancia basado en amontonamiento del NSGA-II

---

```

1:  $I$  es un conjunto de individuos.
2:  $l = |I|$ 
3: for  $i \in \{1, \dots, l\}$ 
4:   set  $I[i]_{distancia} = 0$ 
5: end for
6: for  $m \in \{1, \dots, M\}$ 
7:    $I = Ordenar(I, m)$                                  $\triangleright$  Ordenar de forma incremental usando el objetivo m
8:    $I[1]_{distancia} = I[l]_{distancia} = \infty$            $\triangleright$  Los extremos tienen prioridad para mantenerse en la siguiente generación.
9:   for  $i \in \{2, \dots, (l - 1)\}$ 
10:     $I[i]_{distancia} = I[i]_{distancia} + (I[i + 1].m - I[i - 1].m) / (f_m^{max} - f_m^{min})$            $\triangleright$  Normalizar cada objetivo.
11:   end for
12: end for

```

---

**2.3.2. Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo Basado en Descomposición (MOEA/D)**

El MOEA/D propuesto por Zhang y Li, 2007 realiza la descomposición de un problema de optimización multi-objetivo en un conjunto de subproblemas de optimización mono-objetivo que son optimizados simultáneamente. Para mejorar la eficiencia se considera que pueden existir conjuntos de subproblemas parecidos, a los que se llama subproblemas vecinos y se combinan individuos que han resultado ser competitivos para problemas vecinos. Como se puede observar en el algoritmo 7, el MOEA/D descompone explícitamente un problema de optimización multi-objetivo en  $N$  subproblemas de optimización escalar, siendo  $N$  tanto el número de subproblemas como el número de individuos de la población. En cada generación la población está compuesta por la mejor solución encontrada hasta ese momento para cada uno de los subproblemas. Para generar los problemas mono-objetivo se utilizan funciones que se

tienen que parametrizar con vectores de pesos, y se usan diferentes vectores de pesos para conformar cada problema.

Las relaciones de vecindad que existen en los subproblemas son definidos precisamente en base a las distancias entre los vectores de pesos. Particularmente, para cada subproblema  $i$  se define un vecindario  $B(i)$  con los  $T$  subproblemas más cercanos (incluyéndose a sí mismo). La idea en que se basa el MOEA/D es que las soluciones óptimas de problemas vecinos deberían parecerse, por lo tanto son combinados los individuos que son asociados a sus subproblemas vecinos. Una vez generada la nueva solución candidata, se verifica si ésta mejora a alguna solución de los subproblemas vecinos, comparándose en base al subproblema y a su solución, en caso que se mejore la solución, esta es sustituida por la solución candidata. Aunque en sus inicios el enfoque de Tchebycheff fue el más utilizado para descomponer el problema, recientemente han ganado mucha popularidad otras estrategias como las funciones de utilidad ASF (*Achievement Scalarizing Functions*, Wierzbicki, 1980; Hernández Gómez y Coello Coello, 2015b). En la siguiente sección se ofrecen más detalles sobre las diferentes descomposiciones. También cabe destacar que MOEA/D ofrece la posibilidad de hacer uso de un archivo externo (EP - *External Population*) para mantener a todos los individuos no dominados encontrados, pero para ejecuciones a largo plazo no es considerado pues no incorpora ningún mecanismo para limitar su tamaño por lo que puede haber inconvenientes en cuanto a la memoria y cómputo requerido para mantener dicha estructura.

---

### Algoritmo 7 Procedimiento principal del MOEA/D

---

- 1: Asignar EP=∅
  - 2: Para cada vector de pesos definir la vecindad como los  $T$  vectores de pesos más cercanos. Para cada  $i = 1, \dots, N$  asignar  $B(i) = \{i_1, \dots, i_T\}$ , donde  $\lambda^{i1}, \dots, \lambda^{iT}$  son los  $T$  vectores de pesos más cercanos a  $\lambda^i$ .
  - 3: Generar una población inicial  $x^1, \dots, x^N$  aleatoriamente o por medio de un método específico y evaluar  $FV^i = F(x^i)$
  - 4: Inicializar el vector de referencia  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$  al mínimo valor en cada objetivo encontrado hasta el momento.
  - 5: **for**  $i = 1, \dots, N$
  - 6:   **Reproducción:** aleatoriamente seleccionar dos índices  $k, l$  de  $B(i)$ , y generar una solución nueva  $y$  a partir de  $x^k$  y  $x^l$  utilizando operadores genéticos.
  - 7:   **Mejora:** implementar una heurística de mejora en  $y$  para generar  $y'$ . ▷ Opcional
  - 8:   **Actualización de z:** para cada  $j = 1, \dots, m$  si  $z_j > f_j(y')$ , asignar  $z_j = f_j(y')$
  - 9:   **Actualización de las soluciones vecinas:** para cada índice  $j \in B(i)$ , si  $g^{te}(y'|\lambda^j, z) \leq g^{te}(x^j, |\lambda^j, z)$ , entonces asignar  $x^j = y'$
  - 10:   **Actualización del archivo externo:** eliminar de la población externa (EP) todos los vectores dominados por  $F(y')$ . Agregar  $F(y')$  a EP si ningún vector en EP domina a  $F(y')$
  - 11: **end for**
  - 12: **Criterio de paro:** si el criterio de paro es logrado, entonces detener e imprimir EP, de otra forma dirigirse a la línea 5. Si no se está usando EP, la solución viene dada por el contenido de la población.
- 

## Funciones de utilidad

Existen varios enfoques para convertir el problema multi-objetivo en un conjunto de problemas de optimización escalar mediante un conjunto de vectores conformados por pesos. En este sección se revisan algunos de los más importantes.

### Enfoque de agregación de pesos

Este enfoque considera la sumatoria ponderada de los distintos objetivos. Sea  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$  un vector de pesos con  $\lambda_i \geq 0$  para todos los  $i = 1, \dots, m$  y  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Entonces, se busca la solución óptima al siguiente problema de optimización escalar:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad g^{ws}(\vec{x}|\vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \\ & \text{sujeto} \quad a \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.8}$$

En la ecuación (2.8) se utiliza la nomenclatura  $g^{ws}(\vec{x}|\vec{\lambda})$  para enfatizar el hecho de que la función depende de la solución candidata y del vector de pesos. En la misma,  $\vec{\lambda}$  es el vector de coeficientes o pesos, mientras que  $\vec{x}$  es la solución candidata. Con el fin de generar distintos vectores óptimos de Pareto, se utilizan distintos vectores de pesos  $\vec{\lambda}$ . Sin embargo, este enfoque no asegura que cualquier óptimo de Pareto pueda ser generado. Así en frentes no convexos no se pueden alcanzar todas las soluciones.

### Enfoque de Tchebycheff (WT - Weighted Tchebycheff)

En este enfoque, el problema de optimización escalar es de la forma (Zhang y Li, 2007):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad g^{te}(\vec{x}|\vec{\lambda}, \vec{z}^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \lambda_i |f_i(x) - z_i^*| \} \\ & \text{sujeto} \quad a \quad \vec{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{2.9}$$

Donde  $\vec{z}^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)^T$  es el vector ideal, i.e.,  $z_i^* = \min\{f_i(x)|x \in \Omega\}$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Para esta formulación está demostrado que para cada óptimo de Pareto  $x^*$  existe un vector de pesos  $\vec{\lambda}$  tal que  $\vec{x}^*$  es una solución óptima de la ecuación (2.9). Por lo tanto, se pueden obtener distintas soluciones óptimas de Pareto alterando el vector de pesos, independientemente de la forma del frente de Pareto. Una desventaja con este enfoque es que la función de agregación no es suave para problemas de optimización continuos con lo que incluso si las funciones iniciales a optimizar eran sencillas, se pueden introducir ciertas dificultades como aparición de zonas planas que pueden reducir el rendimiento de los optimizadores.

### Enfoque de Intersección de Frontera Basado en Penalización (PBI - Penalty-based Boundary Intersections)

En el algoritmo MOEA/D (Zhang y Li, 2007) se propone también una forma adicional de descomposición conocida como el enfoque de intersección de frontera basado en penalización. En esta estrategia se trazan un conjunto de líneas a partir del vector ideal y se intenta generar soluciones candidatas de gran calidad que estén cercanas a dichas líneas. Dado que hay dos criterios (las soluciones deben estar cercanas a la línea y deben poseer un buen grado de convergencia o calidad), se propone una función que combina estos dos criterios.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad g^{pbi}(\vec{x}|\vec{\lambda}, \vec{z}^*) = d_1 + \theta d_2, \\ & d_1 = \frac{\|(\vec{x} - \vec{z}^*)^T \vec{\lambda}\|}{\|\vec{\lambda}\|}, \quad d_2 = \|\vec{x} - (\vec{z}^* + d_1 \frac{\vec{\lambda}}{\|\vec{\lambda}\|})\|, \end{aligned} \tag{2.10}$$

En la ecuación (2.10)  $\theta > 0$  es un parámetro de penalización para balancear el peso de cada criterio. Fijar este parámetro es problemático y aunque hay varios trabajos que han continuado con esta idea, ninguna se considera popular en el ámbito multi-objetivo.

### Enfoque de Función de Escalarización (ASF - *Achievement Scalarizing Function*)

Una descomposición que tampoco es tan utilizada como las anteriores pero que ha ganado popularidad en los últimos años y que se aplica en algoritmos como el MOMBII-II son las funciones de escalarización ASF. En este caso la descomposición se realiza utilizando la ecuación (2.11).

$$\text{minimizar} \quad g^{asf}(\vec{x}|\vec{\lambda}, \vec{z}^*) = \max_{i \in 1, \dots, m} \left\{ \frac{|x_i - z_i^*|}{\lambda_i} \right\} \quad (2.11)$$

En realidad la función es similar al esquema de Tchebycheff, pero en lugar de multiplicar la distancia por los pesos se divide, es decir, el concepto se basa que en lugar de utilizar el peso  $w_i$  se implementa su inversa  $1/w_i$ . Sin embargo, este enfoque es mejor al aplicarlo con esquemas que generan pesos distribuidos uniformemente. Esto se debe a que en este caso la dirección de los vectores es congruente con las líneas de contorno de la función a minimizar, y se ha visto que esto tiene el efecto de generar soluciones mejor distribuidas al incrementar el número de objetivos (Hernández Gómez y Coello Coello, 2015b). Así, al incrementar el número de objetivos se observó experimentalmente que los enfoques PBI y WT se degradan más rápidamente que el esquema ASF.

### 2.3.3. Algoritmo Evolutivo Multi-objetivo basado en selección de la Métrica $\mathcal{S}$ (SMS-EMOA)

El algoritmo SMS-EMOA implementa un operador de selección especial que combina la métrica hipervolumen  $\mathcal{S}$  con el concepto de dominancia de Pareto. Se ha observado empíricamente que para ciertos problemas, la maximización del hipervolumen produce subconjuntos que están bien distribuidos en el frente de Pareto tal y como se analiza en Knowles, Corne y Fleischer, 2003a; Emmerich, Beume y Naujoks, 2005. Sin embargo, la distribución óptima depende de la forma del frente de Pareto, y aunque maximizar el hipervolumen puede preservar un grado de diversidad, es posible que las soluciones no estén distribuidas uniformemente. En cualquier caso, el principio del SMS-EMOA es tratar de maximizar el hipervolumen alcanzado por un número finito de puntos. Es considerado como un algoritmo estable dirigido bajo dos principios: utilizar una estrategia de ordenación en base a la dominancia y aplicar el hipervolumen como criterio de selección para descartar al individuo que contribuye menos al hipervolumen y que está en el frente con peor rango. Así, como es descrito en el algoritmo 8, el proceso consiste en generar una población inicial de  $\mu$  individuos, y posteriormente en cada generación se crea únicamente un individuo. Este nuevo individuo es agregado a la población y se implementa un procedimiento para eliminar un individuo, donde el individuo descartado corresponde al último frente clasificado ( $\mathfrak{R}_v$ ). En caso de que el último frente este conformado por mas de un individuo  $|\mathfrak{R}_v| > 1$ , se elimina al individuo  $s \in \mathfrak{R}_v$  que minimiza  $\Delta_{\mathcal{S}}(s, \mathfrak{R}_v) = \mathcal{S}(\mathfrak{R}_v) - \mathcal{S}(\mathfrak{R}_v \setminus \{s\})$ . El valor  $\Delta_{\mathcal{S}}(s, \mathfrak{R}_v)$  puede ser interpretado como la contribución exclusiva de  $s$  al valor de hipervolumen en el frente  $\mathfrak{R}_v$ .

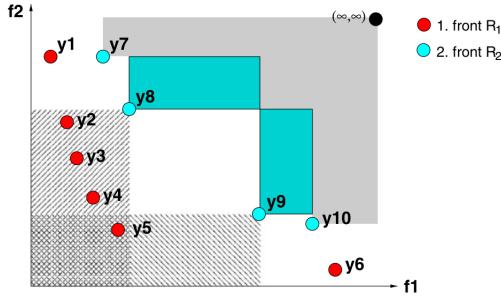


FIGURA 2.2: El hipervolumen dominado por el frente  $\mathcal{R}_2 = \{y_7, \dots, y_{10}\}$  está resaltado y sus contribuciones de  $\Delta_{\mathcal{S}}(y_8, \mathcal{R}_2)$  y  $\Delta_{\mathcal{S}}(y_9, \mathcal{R}_2)$  se visualizan en los rectángulos con fondo verde. Las áreas sombreadas corresponden a las regiones que contienen los puntos que dominan a  $y_8$  y  $y_9$  respectivamente.

#### Algoritmo 8 Procedimiento principal del SMS-EMOA

```

1:  $P_0 \leftarrow$  Inicializar la población de  $\mu$  individuos de forma aleatoria en el espacio factible.
2:  $t \leftarrow 0$ 
3: while Criterio de paro no cumplido
4:    $q_{t+1} \leftarrow$  Generar( $P_t$ )                                 $\triangleright$  Generar un individuo mediante un conjunto de operadores evolutivos.
5:    $P_{t+1} \leftarrow$  Reducir( $P_t \cup \{q_{t+1}\}$ )           $\triangleright$  Eliminar individuo del último frente cuya aportación al hipervolumen sea mínima.
6:    $t \leftarrow t + 1$ 
7: end while

```

El punto de referencia para el cálculo del hipervolumen se establece por medio de los puntos extremos agregando habitualmente un desplazamiento (*offset*). Uno de los principales inconvenientes del SMS-EMOA es su coste computacional, debido al cálculo del hipervolumen. Una variante para reducir a la población tratando de reducir el costo computacional consiste en que cuando existe más de un rango, en lugar de calcular la contribución al hipervolumen de cada individuo, se considera exclusivamente la dominancia. En concreto, se elimina al individuo que es dominado por una mayor cantidad de individuos de la población. Los autores propusieron esta técnica con el objetivo de aumentar la diversidad en el espacio objetivo, pues en principio descartan a los individuos que están ubicados en regiones con soluciones menos diversas. Esto se puede verificar en la Fig. 2.2. La contribución del hipervolumen favorece a  $y_8$  en lugar de  $y_9$  pero la suma de individuos dominados favorecen a  $y_9$  dado que solo domina a una solución ( $y_5$ ). Seleccionar a la solución  $y_9$  promueve la diversidad en el espacio objetivo, ya que está ubicada en una región del espacio objetivo que contiene pocas soluciones. Sin embargo, esto no siempre es cierto, pues los individuos que dominan no necesariamente están ubicados en la misma región. Por otro lado, en el caso en que la población está compuesta solo por soluciones no dominadas, se actúa como la variante original, es decir, se elimina al individuo que menos contribuye al hipervolumen. Finalmente, cabe destacar que en este algoritmo la selección de padres se realiza de forma aleatoria.

#### 2.3.4. Metaheurística de Muchos Objetivos Basada en el Indicador R2 (MOMBI-II)

El MOMBI-II es un algoritmo clasificado como basado en indicadores que utiliza el indicador  $R2$  en el proceso de selección (algoritmo 9). Por tanto, dada la naturaleza del  $R2$ , puede ser visto como un algoritmo que combina ideas de los algoritmos basados en descomposición con los basados en indicadores. En este algoritmo se consideran dos aspectos clave:

- Implementar un escalado de las funciones tomando en cuenta información estadística recolectada a lo largo de toda la ejecución y no sólo con la información de la generación final.
- Utilizar el indicador  $R2$  con las funciones de escalarización ASF.

En la versión original del MOMBI se normaliza cada función objetivo utilizando la expresión:

$$f_i(\vec{x}) = \frac{f_i(\vec{x}) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}$$

donde  $z^{\min}$  y  $z^{\max}$  son los vectores ideal y nadir calculados respectivamente a partir de la población actual. Sin embargo se observaron varios problemas con esa forma de normalizar, asociados a la aparición de valores atípicos, a la no retención de algunas soluciones límite y a la proximidad entre máximos y mínimos para algunas funciones. Para resolver las fallas previamente mencionadas en el MOMBI-II se toma en cuenta información estadística de las generaciones previas, monitoreando el desplazamiento del vector nadir, consiguiendo así una normalización que produce resultados mucho más estables.

Para utilizar la métrica  $R2$  se implementa el procedimiento de clasificación descrito en el algoritmo 10, que se aplica tanto en la selección de padres como en el remplazamiento. Básicamente, para cada función escalar considerada, se ordenan los individuos de mejor a peor, y el fitness asignado a cada individuo es la menor posición en la que quedó en algunas de las ordenaciones. En el caso de empate, se utiliza la norma L2 de los individuos, tratando de minimizar la misma. En la notación utilizada cada individuo  $p$  contiene el vector de funciones objetivo  $p.\vec{f}$ , el rango o fitness de los individuos  $p.rank$  y  $p.\mu$ , el valor de utilidad actual para el vector de pesos  $\vec{w}$ .

---

#### Algoritmo 9 Procedimiento principal del MOMBI-II

---

```

1: Inicializar población  $P_i$ ,  $i \leftarrow 1$ 
2: Evaluar población  $P_i$ 
3: Calcular la norma  $L_2$  de todos los objetivos para  $P_i$ 
4: Asignar  $\vec{z}^{\min} \leftarrow \vec{z}^*$  y  $\vec{z}^{\max} \leftarrow \vec{z}^{\text{nadir}}$ 
5: while Condición de paro no sea cumplida
6:   Realizar la selección de los padres
7:   Generar las soluciones hijo  $P'_i$  utilizando variación de operadores
8:   Evaluar a la población  $P'_i$ 
9:   Calcular la norma  $L_2$  de los objetivos para  $P'_i$ 
10:  Normalizar las funciones objetivo para  $P_i \cup P'_i$ 
11:  Llamar al Algoritmo para calcular los rangos con  $R2$  ( $P_i \cup P'_i, W$ )
12:  Reducir la población  $P_{i+1} \leftarrow \{P_i \cup P'_i\}$ 
13:  Actualizar los puntos de referencia ( $\vec{z}^{\min}, \vec{z}^{\max}, P_{i+1}, m$ )
14:   $i \leftarrow i + 1$ 
15: end while return  $P_i$ 
```

---



---

#### Algoritmo 10 Procedimiento para el cálculo de los rangos con $R2$ del MOMBI-II

---

```

1:  $p.rank \leftarrow p.\mu \Leftarrow \infty \forall p \in P$ 
2: for Todo  $\vec{w} \in W$ 
3:   for Todo  $p \in P$ 
4:      $p.\mu \leftarrow u_{asf}(p.\vec{f} : \vec{0}, \vec{w})$ 
5:   end for
6:   Ordenar  $P$  por medio de los campos  $\mu$  y  $L_2$  en orden creciente
7:    $rank \leftarrow 1$ 
8:   for Todo  $p \in P$ 
9:      $p.rank \leftarrow \min\{p.rank, rank\}$ 
10:     $rank \leftarrow rank + 1$ 
11:   end for
12: end for
```

---

### 2.3.5. Evolución Diferencial Generalizada (GDE3)

El algoritmo de Evolución Diferencial Generalizado, es una extensión de Evolución Diferencial (DE - *Differential Evolution*) para optimización global con cualquier número de objetivos y restricciones. La

primera versión de GDE fue desarrollada para optimización multi-objetivo y utiliza una regla de selección basada en dominancia (Lampinen y col., 2001; Kukkonen y Coello, 2017) consistente en que un nuevo vector sustituye a uno antiguo si lo domina débilmente. Esta versión proporcionaba soluciones cercanas al frente pero sin una buena distribución. Posteriormente se modificó el GDE para tomar en cuenta a la diversidad en el espacio objetivo en el remplazo. Concretamente, la diversidad se consideraba en los casos en que el nuevo vector y el vector antiguo eran no dominados entre sí. Sin embargo la segunda versión de GDE2 era aún muy sensible a los parámetros. Finalmente, la tercera versión, que es la que se usa más habitualmente y la aplicada en esta tesis considera una selección basada en las siguiente reglas:

- En el caso de vectores no factibles, el vector nuevo es seleccionado si domina débilmente al vector antiguo considerando únicamente las restricciones, de otra forma el vector antiguo es seleccionado.
- En el caso de los vectores factibles y no factibles, el vector factible es seleccionado.
- Si los dos vectores son factibles, entonces el vector nuevo es seleccionado si domina débilmente al vector antiguo en el espacio objetivo. Si el vector antiguo domina al vector nuevo, entonces el vector antiguo es seleccionado. Si los vectores no se dominan entre sí en el espacio objetivo, entonces los dos vectores son inicialmente seleccionados.

El procedimiento principal del GDE3 se observa en el algoritmo 11, se puede observar que el criterio de selección se basa en el concepto de dominancia de restricciones  $\preceq_c$ , así  $\vec{x}_1$  domina considerando restricciones a  $\vec{x}_2$  ( $\vec{x}_1 \preceq_c \vec{x}_2$ ) si y sólo si alguna de las siguientes condiciones es verdad:

- $\vec{x}_1$  es factible y  $\vec{x}_2$  no lo es.
- $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  son no factibles y  $\vec{x}_1$  domina a  $\vec{x}_2$  en el espacio de las funciones de restricción.
- $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  son factibles y  $\vec{x}_1$  domina a  $\vec{x}_2$  en el espacio objetivo.

Después de cada generación puede haberse incrementado el tamaño de la población. Si este es el caso entonces la población es reducida al tamaño original con un enfoque que extiende a la selección utilizada en el NSGA-II.

---

**Algoritmo 11** Procedimiento principal del GDE3
 

---

```

1: while Criterio de parada no sea cumplido
2:    $k = 1$ 
3:   for  $i \in N$  ▷ N es el tamaño de la población
4:     Seleccionar aleatoriamente  $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, N\} \neq i$ 
5:     Seleccionar aleatoriamente  $j_{rand} \in \{1, 2, \dots, D\}$  ▷ D es el número de variables
6:     for  $j \in D$ 
7:       if  $rand_j[0, 1] < CR$  OR  $j == j_{rand}$  then
8:          $u_{j,i,G} = x_{j,r_3,G} + F \cdot (x_{j,r_1,G} - x_{j,r_2,G})$ 
9:       else
10:         $u_{j,i,G} = x_{j,i,G}$ 
11:      end if
12:    end for
13:    if  $\vec{u}_{i,G} \preceq_c \vec{x}_{i,G}$  then
14:       $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{u}_{i,G}$ 
15:    else
16:       $\vec{x}_{i,G+1} = \vec{x}_{i,G}$ 
17:    end if
18:    if  $\{\forall z : g_z(\vec{u}_i, G) \leq 0\} AND \{\vec{x}_{i,G+1} == \vec{x}_{i,G}\} AND \{\vec{x}_{i,G} \not\prec \vec{u}_{i,G}\}$  then
19:       $\vec{x}_{N+k,G+1} = \vec{u}_{i,G}$ 
20:       $k = k + 1$ 
21:    end if
22:  end for
23:   $P = \text{Ordenación Eficiente basado en No dominados}(\vec{x}_{1:N+k,G+1})$  ▷ Ver algoritmo 5.
24:  Eliminar los  $k$  peores individuos de  $P$  basado en el criterio del peor rango y de amontonamiento, similar al NSGA-II ▷ Ver algoritmo 4.
25: end while
  
```

---

## 2.4. Problemas de Prueba

Como parte de la validación experimental de este trabajo y con el objetivo de tener un amplio panorama de las propiedades que poseen los algoritmos propuestos, se utilizaron los problemas de prueba más populares del ámbito multi-objetivo. En esta sección se realiza una revisión de dichos problemas. Se hace énfasis que en este trabajo no se consideran restricciones, por lo que los problemas de prueba escogidos son libres de restricciones, además están conformados por dominios continuos. Se hace notar que, muchas de las ideas propuestas se podrían aplicar en dominios discretos; sin embargo, dado que hay muchos más trabajos y problemas de prueba definidos para dominios continuos, se decidió restringir los estudios al dominio continuo.

Uno de los conjuntos de problemas de prueba propuestos en multi-objetivo más populares y sin una complejidad demasiada grande son los ZDT (Zitzler, Deb y Thiele, 2000), los cuales utilizan tres funciones para controlar la forma y posición del frente de Pareto óptimo. Este conjunto de problemas fueron diseñados para dos objetivos y en la actualidad se consideran relativamente fáciles de resolver.

Posteriormente se propusieron los problemas DTLZ (Deb y col., 2005), los cuales son escalables en el espacio objetivo y se siguen utilizando hoy en día especialmente en el ámbito de muchos objetivos. Sin embargo existen ciertas limitaciones: no se presentan problemas deceptivos y el número de parámetros de posición son fijos en relación al número de objetivos. Además, a pesar de que técnicamente hay algunos problemas no separables<sup>1</sup>, partiendo de cualquier solución siempre se puede obtener al menos un óptimo, lo que hace que en la práctica el grado de no separabilidad no sea considerado como un reto en un algoritmo evolutivo. Además, recientemente han surgido dudas sobre varias de las propiedades de DTLZ5 y DTLZ6 (Huband y col., 2006).

<sup>1</sup>Esto implica que no se puede llegar a todas las soluciones del frente optimizando cada variable de forma independiente

Teniendo en cuenta las limitaciones de los anteriores, se propuso un nuevo generador de problemas multi-objetivo (Huband y col., 2005a), conocido como *The Walking Fish Group* (WFG). A modo de ejemplo, en el artículo original se propusieron nueve problemas, entre los cuales varios son considerados como similares a los DTLZ en cuanto a su complejidad, mientras otros son considerados como problemas de mayor complejidad incluyendo deceptividad y no separabilidad. Los problemas son escalables tanto en el espacio de las variables como en el espacio objetivo, lo que permite hacer estudios más completos. La comunidad ha adoptado los nuevos problemas de ejemplo, y es mucho más habitual usar los mismos directamente, en lugar del generador para crear nuevos problemas con diferentes propiedades. Más recientemente, en el Congreso de Cómputo Evolutivo del 2009 (CEC09) se propusieron los problemas UF, entre los cuales existen problemas con restricciones y sin restricciones. Los problemas sin restricciones están descritos para dos y tres objetivos, y presentan un reto importante en base a su dificultad, ya que presentan relaciones bastante complejas entre las formas que aparecen en el espacio objetivo y las que aparecen en el espacio de decisión. Por tanto, en la actualidad son utilizados como validación adicional a lo ofrecido por los test WFG. Para dar un panorama general de los distintos problemas de prueba, sus diferentes propiedades se enumeran en la tabla 2.6.

#### 2.4.1. ZDT

Los problemas conocidos como ZDT fueron propuestos en Zitzler, Deb y Thiele, 2000 e incluyen convexidad, no convexidad, frentes de Pareto discretos, multi-modalidad, deceptividad (sólo en codificación binaria) y espacios de búsqueda sesgados con óptimos en los extremos. Estos problemas están propuestos únicamente para dos objetivos como se muestra en la ecuación (2.12). Cada función de prueba está estructurada de la misma forma y se establecen en base a tres funciones  $f_1$ ,  $g$  y  $h$ .

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F(\vec{x}) = (f_1(x_1), f_2(\vec{x})) \\ \text{sujeto a} \quad & f_2(\vec{x}) = g(x_2, \dots, x_n)h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_n)) \\ \text{donde} \quad & \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.12)$$

La función  $f_1$  depende exclusivamente de la primera variable de decisión,  $g$  depende de las siguientes  $n - 1$  variables, y los parámetros de  $h$  son los valores asociados a las funciones  $f_1$  y  $g$ . Cada función de prueba difiere en estas tres funciones, en el número de variables  $n$ , y/o en el dominio de las variables. La función de prueba ZDT5 se definió para codificación binaria en lugar de continua, por lo que no se considera en este trabajo. A continuación se ofrecen detalles sobre cada una de las funciones de prueba y en la tabla 2.1 se encuentra la definición de las mismas.

##### Función de prueba ZDT1

Esta función de prueba tiene un frente de Pareto convexo. El número de variables normalmente usado es  $n = 30$ , y  $x_i \in [0, 1]$ . El frente de Pareto óptimo es formado con  $g(x) = 1$ .

##### Función de prueba ZDT2

Esta función de prueba tiene un frente de Pareto no convexo. El número de variables normalmente usado es  $n = 30$ , y  $x_i \in [0, 1]$ . El frente de Pareto óptimo es formado con  $g(x) = 1$ .

### Función de prueba ZDT3

En esta función el frente de Pareto está constituido por varias partes convexas y no continuas. El número de variables normalmente usado es  $n = 30$ , y  $x_i \in [0, 1]$ . El frente de Pareto óptimo es formado con  $g(x) = 1$ . La función sinodal en la función  $h$  causa la discontinuidad en el frente de Pareto.

### Función de prueba ZDT4

Esta función de prueba contiene  $21^9$  frentes de Pareto que son óptimos locales, por lo que sirve para analizar la capacidad de lidiar con multi-modalidad. El número de variables usado normalmente es  $n = 10$ ,  $x_1 \in [0, 1]$ , y  $x_2, \dots, x_n \in [-5, 5]$ . El frente de Pareto óptimo global es formado con  $g(x) = 1$ , mientras que el mejor frente óptimo de Pareto local se forma con  $f_1(x) = 1,25$ .

### Función de prueba ZDT6

Esta función de prueba incluye dos dificultades causadas por la no uniformidad del espacio de búsqueda. En primer lugar, las soluciones óptimas de Pareto están distribuidas de forma no uniforme, provocando una mayor densidad para valores de  $f_1$  cercanas a uno. Además, la densidad de las soluciones es menor cerca del frente de Pareto óptimo y mayor alejadas del frente. El número de variables normalmente usado es  $n = 10$ , y  $x_i \in [0, 1]$ . El frente de Pareto óptimo es formado con  $g(x) = 1$  y la forma del frente de Pareto óptimo es no convexo.

TABLA 2.1: Problemas ZDT

Nombre	Problema	Dominio de los parámetros
ZDT1	$f_1(x_1) = x_1$ $g(x_2, \dots, x_n) = 1 + 9, \sum_{i=2}^n x_i / (n - 1)$ $h(f_1, g) = 1 - \sqrt{f_1/g}$	[0, 1]
ZDT2	Igual que ZDT1, a excepción de $h = 1 - (f_1/g)^2$	[0, 1]
ZDT3	Igual que ZDT1, a excepción de $h(f_1, g) = 1 - \sqrt{f_1/g} - (f_1/g)\sin(10\pi f_1)$	[0, 1]
ZDT4	Igual que ZDT1, a excepción de $h(f_1, g) = 1 - \sqrt{f_1/g}$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_2, \dots, x_n \in [-5, 5]$
ZDT6	$f_1(x_1) = 1 - \exp(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1)$ $g(x_2, \dots, x_n) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n (x_i / (n - 1))^{0.25}$ $h(f_1, g) = 1 - (f_1/g)^2$	[0, 1]

### 2.4.2. DTLZ

El conjunto de problemas propuesto por Deb y col., 2002b; Deb y col., 2005, está conformado por nueve instancias, diseñadas para probar distintas propiedades de los MOEAs. A diferencia de los problemas ZDT, estos problemas son escalables, además de que ofrecen nuevas características, como es el caso de los problemas de prueba degenerados DTLZ5 y DTLZ6. Estos problemas están conformados por  $M+k-1$  variables donde  $M$  corresponde al número de objetivos y  $k = |\mathbf{x}_M|$  es el número de parámetros que se utilizaran en el funcional  $g(\mathbf{x}_M)$ . La descripción detallada de cada uno de los problemas se enlista a continuación, la definición de los mismos se ubica en la tabla 2.2 y el gráfico que corresponde al óptimo de Pareto en tres objetivos en la figura 2.3.

### Función de prueba DTLZ1

Esta función de prueba es separable y multi-modal. El frente de Pareto óptimo requiere que  $\mathbf{x}_M = 0,5$  y corresponde en el espacio objetivo a un hiperplano lineal  $\sum_{m=1}^M f_m = 0,5$ . Se sugiere un valor de  $k = 5$  y el número de variables es denotado por  $n = M + k - 1$ . La dificultad de este problema es la convergencia pues contiene  $(11^k - 1)$  frentes óptimos de Pareto locales.

### Función de prueba DTLZ2

El frente de Pareto es no convexo, en el caso de tres objetivos las soluciones óptimas corresponden al primer cuadrante de una esfera unitaria. En el caso generalizado las soluciones óptimas están descritas por  $\sum_{m=1}^M f_m^2 = 1$ , que es representado por una hiperesfera unitaria ubicada en el origen. Las soluciones óptimas de Pareto corresponden a  $x_M^* = 0,5$ , se recomienda que  $k = |\mathbf{x}_M| = 10$ , y el número total de variables de  $n = M + k - 1$ .

### Función de prueba DTLZ3

Se trata de un problema multifrontal con  $3^k - 1$  frentes de Pareto óptimos locales. Los frentes locales son paralelos al global, y una de las mayores dificultades es que el MOEA puede estancarse en dichos frentes locales. El frente de Pareto óptimo global corresponde a  $\mathbf{x}_M = (0,5, \dots, 0,5)^T$ . En este problema se sugiere  $k = |\mathbf{x}_M| = 10$ , con un número de variables de  $n = M + k - 1$ .

### Función de prueba DTLZ4

Este problema es similar al DTLZ2 en sus características generales pero la densidad de soluciones difiere entre distintas partes cercanas al frente de Pareto, lo que significa que algunos métodos pueden aproximar mejor unas zonas que otras. Esta dificultad suele no presentarse en métodos que implementan enfoques basados en descomposición. Se sugiere un parámetro  $\alpha = 100$  y  $k = 10$  y el número de variables es de  $n = M + k - 1$ .

### Función de prueba DTLZ5

Este problema prueba la habilidad del MOEA para converger a una curva, y también permite una forma fácil de visualizar el frente óptimo. Cuando se diseñó el problema se intentaba que esto fuese así para cualquier número de objetivos asignados; sin embargo se han detectado algunos problemas con esta función con lo que esta propiedad podría no cumplirse para cualquier número de objetivos (Huband y col., 2006). Aunque es un problema sencillo con pocos objetivos, es más usado para números de objetivos más elevados. En este problema se sugiere implementar la función  $g$  con un número de variables  $k = |\mathbf{x}_M| = 10$ .

### Función de prueba DTLZ6

Este problema consiste en modificar la función de prueba DTLZ5 asignando la función  $g$  como:

$$g(\mathbf{x}_M) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} x_i^{0,1}$$

El cambio del funcional  $g$  dificulta que las soluciones tengan una convergencia en el frente de Pareto óptimo, el cual sigue siendo una curva, con la misma salvedad mencionada que para el DTLZ5. En este problema se sugiere implementar la función  $g$  con un número de variables  $k = |\mathbf{x}_M| = 10$ .

### Función de prueba DTLZ7

Esta función de prueba conforma regiones desconectadas en el frente de Pareto óptimo. Concretamente, tiene  $2^{M-1}$  regiones de Pareto óptimos desconectadas. Las soluciones del frente de Pareto óptimo corresponden a  $\mathbf{x}_M = 0$ . Este problema de prueba está diseñado para verificar la capacidad del MOEA de mantener subpoblaciones en distintas regiones inconexas. En este problema se sugiere implementar la función  $g$  con un número de variables  $k = |\mathbf{x}_M| = 20$ .

Es importante hacer mención que en las instancias DTLZ6 y DTLZ7 los óptimos de Pareto se encuentran en los límites del espacio de las variables, y como se indica por Tušar y Filipič, los algoritmos que generan soluciones fuera de los límites y cuyo método de reparación consiste en ubicar esta soluciones en los límites, resuelven este tipo de instancias de forma sencilla, esto es evidente en algoritmos que implementan evolución diferencial como es el caso del GDE3 y el DEMO (*Differential Evolution for Multiobjective Optimization*, Tušar y Filipič, 2007), entre otros.

A modo general se han observado como principales inconvenientes de las ZDT y DTLZ (Zhang y col., 2008a) los siguientes puntos:

- Para todos los problemas, el óptimo global tiene los mismos valores de parámetros para distintas variables/dimensiones.
- Óptimos globales ubicados en el centro del espacio de búsqueda o en los límites.
- Todos los problemas son separables o la no separabilidad no es especialmente problemática.

Se han propuesto correcciones a los problemas implementando rotaciones, desplazando los óptimos o expandiendo el espacio de búsqueda. Sin embargo para la mayor parte de estas modificaciones no hay códigos disponibles y se necesita información adicional para las rotaciones, desplazamientos, etc. Sólo algunas de esas transformaciones han ganado cierta popularidad como los problemas S\_DTLZ2 y R\_DTLZ2 como modificaciones del DTLZ2, o S\_DTLZ3 y R\_DTLZ3 del DTLZ3 que se propusieron en el IEEE Congress on Evolutionary Computation 2007. Recientemente se propuso R2\_DTLZ2\_M5 como modificación del DTLZ2 con 5 objetivos y R2\_DTLZ3\_M5 del DTLZ3 con 5 objetivos propuestos en el IEEE Congress on Evolutionary Computation 2009. En cualquier caso, como hoy en día es habitual usar junto a los DTLZ conjuntos más complejos y con mejores propiedades, en muchos casos se siguen usando los DTLZ originales. En esta tesis se utilizan los DTLZ originales, que están mejor analizados que sus variantes, y además se utilizaron problemas más recientes.

FIGURA 2.3: Frente de Pareto para problemas DTLZ con 3 objetivos

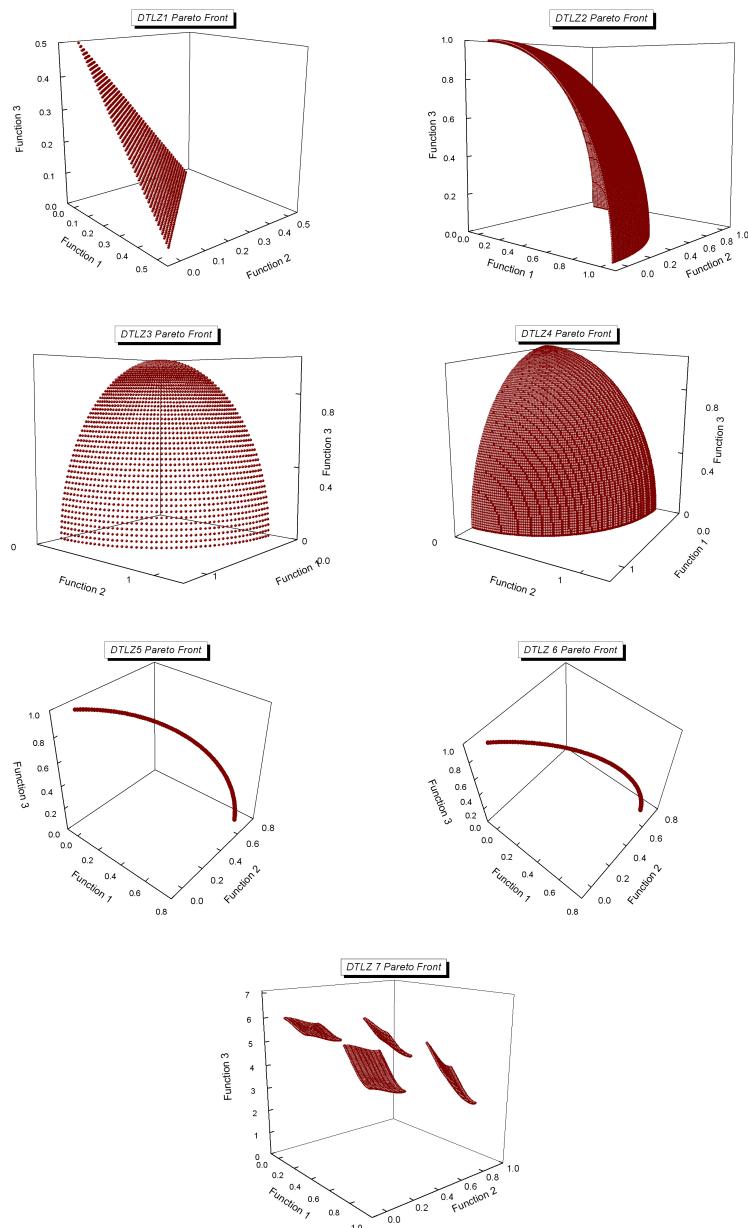


TABLA 2.2: Problemas DTLZ

Nombre	Problema	Dominio de los parámetros
DTLZ1	$f_1 = (1+g)0,5 \prod_{i=1}^{M-1} x_i$ $f_{m=2:M-1} = (1+g)0,5(\prod_{i=1}^{M-m} x_i)(1 - y_{M-m+1})$ $f_M = (1+g)0,5(1 - x_1)$ $g = 100[x_M + \sum_{x_i \in x_M} ((x_i - 0,5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0,5)))]$	[0, 1]
DTLZ2	$f_1 = (1+g) \prod_{i=1}^{M-1} \cos(x_i \pi / 2)$ $f_{m=2:M-1} = (1+g) \left( \prod_{i=1}^{M-m} \cos(x_i \pi / 2) \right) \sin(x_{M-m+1} \pi / 2)$ $f_M = (1+g) \sin(x_1 \pi / 2)$ $g = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0,5)^2$	[0, 1]
DTLZ3	Igual que DTLZ2, excepto que se utiliza la ecuación $g$ del DTLZ1	[0, 1]
DTLZ4	Igual que DTLZ2, excepto que $x_i \in x$ es remplazado por $x_i^\alpha$ , donde $\alpha > 0$	[0, 1]
DTLZ5	Igual que DTLZ2, excepto que $x_2, \dots, x_{M-1} \in x$ son remplazados por $\frac{1+2gx_i}{2(1+g)}$	[0, 1]
DTLZ6	Igual que DTLZ5, excepto que la ecuación para $g$ es remplazada por $g = \sum_{x_i \in x_M} x_i^{0,1}$	[0, 1]
DTLZ7	$f_{m=1:M-1} = x_m$ $f_M = (1+g) \left( M - \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \frac{f_i}{1+g} (1 + \sin(3\pi f_i)) \right] \right)$ $g = 1 + 9 \sum_{x_i \in x_M} x_i / k$	[0, 1]

### 2.4.3. Generador de Problemas Walking Fish Group (WFG)

El generador WFG fue propuesto por Huband y col. en 2005, y provee un conjunto de mecanismos para diseñar problemas personalizados. Además, en su trabajo propusieron nueve instancias de ejemplo que son utilizadas popularmente en el ámbito multi-objetivo. Los problemas WFG dividen el espacio de las variables de decisión en dos subconjuntos: los parámetros de distancia y los parámetros de posición. Un parámetro de distancia es aquel que al ser modificado siempre genera nuevas soluciones que dominan, son dominadas o es un vector equivalente al original. Un parámetro de posición es aquel que cuando es modificado siempre resulta en una nueva solución que es incomparable o equivalente. La figura 2.4 ilustra el comportamiento de estos dos tipos de parámetros. Entre las características de los WFG cabe destacar que son escalables en el número de parámetros, en el número de funciones objetivos y que se puede especificar la cantidad de parámetros de distancia ( $l$ ) y de parámetros de posición ( $k$ ) con los que operar.

Para crear problemas en el toolkit WFG se comienza con una función sencilla definida para un vector de parámetros  $x$ . Sin embargo, el vector de decisión no es directamente  $x$ , sino un vector  $z$ . El vector  $x$  se genera aplicando un conjunto de vectores de transición al vector  $z$ , y cada uno de estos vectores de transición son los que permiten introducir multi-modalidad, no separabilidad u otras propiedades de interés. Para dar un panorama general se muestran los vectores de transición utilizados en cada uno de los 9 problemas propuestos en la tabla 2.3. Dado que en esta tesis no se trabajó en la generación de tests, simplemente se adoptaron los 9 problemas estandard y todos ellos se configuraron con 24 parámetros, ya que actualmente es la cantidad de parámetros que se considera en muchos de los artículos publicados en las mejores revistas y congresos, ya que es una cantidad suficiente para crear problemas suficientemente difíciles para los esquemas actuales.

A continuación se mencionan las principales características de cada problema, éstos son importantes ya que influyen en el desempeño de distintos MOEAs. Únicamente las instancias WFG1 y WFG7 son separables y unimodales, aunque para el resto la no separabilidad causa diferentes grados de dificultades. En particular la no separabilidad de las instancias WFG6 y WFG9 provocan mayores dificultades que las provocadas en las instancias WFG2 y WFG3. La multimodalidad del WFG4 posee regiones óptimas más pronunciadas siendo por tanto más difícil de escapar de ellas frente a la multimodalidad de

la instancia WFG9. La deceptividad de la instancia WFG5 es más difícil que la de la instancia WFG9 ya que esta última sólo es deceptiva en los parámetros de posición. Por tanto, en WFG5 es difícil converger a soluciones buenas y alcanzar soluciones con buena diversidad, mientras que en el WFG9 la deceptividad sólo influye en la diversidad. Los parámetros de distancia de la instancia WFG8 son dependientes a los parámetros de posición (y entre los mismos parámetros de distancia) conformando un problema no separable de bastante complejidad. En el WFG2 aparece otra dificultad consistente en que su frente es inconexo. En base a sus características, las instancias que se suelen considerar más difíciles son WFG5, WFG6, WFG8 y WFG9 a causa de su deceptividad, multimodalidad y dependencia, aunque otras que por sus características parecen no tan complejas, como la WFG1, en muchos casos también causa problemas graves en los MOEAs.

Para las instancias WFG1-WFG7 una solución es óptimo de Pareto si para todos los parámetros de distancia se cumple  $z_{i=k+1:n} = 2i \times 0,35$ .

Para el problema WFG8 una solución es óptimo de Pareto si:

$$z_{i=k+1:n} = 2i \times 0,35^{(0,02+49,98\left(\frac{0,98}{49,98} - (1-2u)\left\lfloor 0,5-u \right\rfloor + \frac{0,98}{49,98} \right))^{-1}}$$

$$u = r\_sum(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \{1, \dots, 1\})$$

Para el problema WFG9 una solución es óptimo de Pareto si:

$$z_{i=k+1:n} = 2i \begin{cases} \times 0,35^{(0,02+1,96u)^{-1}} & \text{si } i \neq n \\ 0,35 & \text{si } i = n \end{cases}$$

$$u = r\_sum(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \{1, \dots, 1\})$$

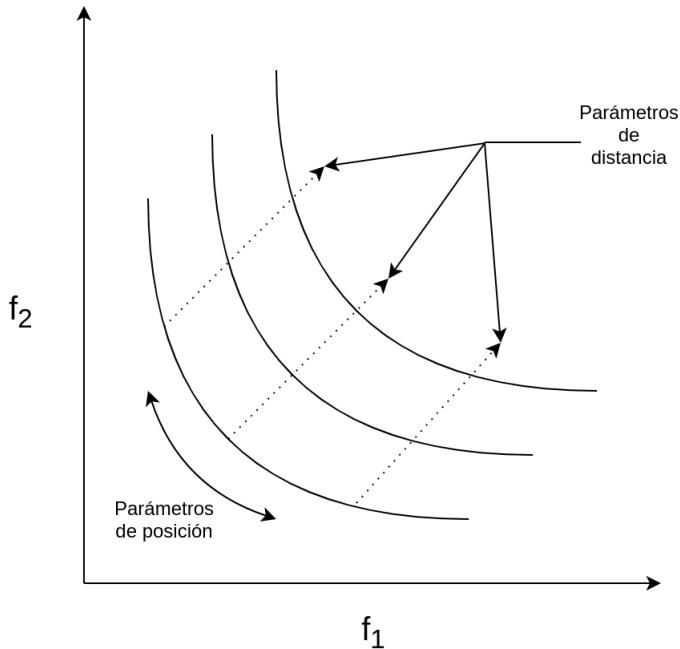


FIGURA 2.4: Parámetros de posición y distancia de los problemas WFG

TABLA 2.3: Problemas de prueba WFG

Nombre	Problema	Dominio de los parámetros
WFG1	$t_{i=1:k}^1 = x_i$ $t_{k+1:n}^1 = s\_linear(x_i, 0, 35)$ $t_{i=1:k}^2 = x_i$ $t_{i=k+1:n}^2 = b\_flat(x_i, 0.8, 0.75, 0.85)$ $t_{i=1:n}^3 = b\_poly(x_i, 0.02)$ $t_{i=1:M-1}^4 = r\_sum(\{x_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{2((i-1)k/(M-1)+1), \dots, 2ik/(M-1)\})$ $t_M^4 = r\_sum(\{x_{k+1}, \dots, y_n\}, \{2(k+1), \dots, 2n\})$ $h_{m=1:M-1} = convex_m$	[0, 2i]
WFG2	<p>Implementar <math>t^1</math> del WFG1</p> $t_{i=1:k}^2 = x_i$ $t_{i=k+1:k+l/2}^2 = r\_nonsep(\{x_{k+2(i-k)-1}, z_{k+2(i-k)}\}, 2)$ $t_{i=1:M-1}^3 = r\_sum(\{x_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, x_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\})$ $t_M^3 = r\_sum(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\})$ $h_{m=1:M-1} = convex_m$ $h_M = disc_M(\alpha = \beta = 1, A = 5)$	[0, 2i]
WFG3	<p>Implementar <math>t^1, t^2</math> y <math>t^3</math> del WFG2</p> $h_{m=1:M} = linear_m$	[0, 2i]
WFG4	$t_{i=1:n}^1 = s\_multi(x_i, 30, 10, 0.35)$ $t_{i=1:M-1}^2 = r\_sum(\{x_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, x_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\})$ $t_M^2 = r\_sum(\{x_{k+1}, \dots, x_n\}, \{1, \dots, 1\})$ $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]
WFG5	$t_{i=1:n}^1 = s\_decept(x_i, 0.35, 0.001, 0.05)$ <p>Implementar <math>t^2</math> del WFG4</p> $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]
WFG6	<p>Implementar <math>t^1</math> del WFG1</p> $t_{i=1:M-1}^2 = r\_nonsep(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, k/(M-1))$ $t_M^2 = r\_nonsep(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, l)$ $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]
WFG7	$t_{i=1:k}^1 = b\_param(x_i, r\_sum(\{x_{i+1}, \dots, x_n\}, \{1, \dots, 1\}), \frac{0.98}{49.88}, 0.02, 50)$ $t_{i=k+1:n}^1 = x_i$ <p>Implementar <math>t^1</math> del WFG1</p> <p>Implementar <math>t^2</math> del WFG4</p> $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]
WFG8	$t_{i=1:k}^1 = x_i$ $t_{k+1:n}^1 = b\_param(x_i, r\_sum(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}, \{1, \dots, 1\}), \frac{0.98}{49.98}, 0.02, 50)$ <p>Implementar <math>t^2</math> del WFG1</p> <p>Implementar <math>t^2</math> del WFG4</p> $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]
WFG9	$t_{i=1:n-1}^1 = b\_param(x_i, r\_sum(\{y_{i+1}, \dots, y_n\}, \{1, \dots, 1\}), \frac{0.98}{49.98}, 0.02, 50)$ $t_n^1 = x_n$ $t_{i=1:k}^2 = s\_decept(x_i, 0.35, 0.001, 0.05)$ $t_{i=k+1:n}^2 = s\_multi(x_i, 30, 95, 0.35)$ <p>Implementar <math>t^2</math> del WFG6</p> $h_{m=1:M} = concave_m$	[0, 2i]

#### 2.4.4. Problemas de prueba sin restricciones (UF - *Unconstrained Functions*)

Aunque los problemas ZDT, DTLZ y WFG, son ampliamente utilizados en la validación de optimizadores multi-objetivo, se propuso un nuevo conjunto de problemas en el Congreso de Computo Evolutivo 2009 (IEEE Congress on Evolutionary Computation - CEC2009) por Zhang y col., 2008a, denominados UF (*Unconstrained Functions*). Este conjunto está compuesto por 10 problemas, donde los primeros 7 son específicamente para minimización de dos objetivos y el resto de instancias son para minimización de tres objetivos. Estos problemas están definidos en la tabla 2.4, mientras que el frente de Pareto y el conjunto de Pareto están definidos en la tabla 2.5 y sus correspondientes formas son dados en la figura 2.5. En estos problemas varios de los conjuntos de Pareto son muy diferentes a los generadores por los problemas WFG, por lo que es interesante también estudiar el comportamiento de los nuevos optimizadores en este tipo de problemas. Dado que al proponer los UF no se analizaron muchas de las propiedades que se enumeran en la tabla 2.6, se utiliza un guión en las mismas para indicar que una característica es desconocida ya que no se ha encontrado un análisis riguroso de las mismas. Aunque en algunos casos, realizar dicho análisis es sencillo, este tema queda fuera del alcance de esta tesis.

#### 2.4.5. Generación de soluciones óptimas

Disponer de la posibilidad de generar las soluciones óptimas de Pareto para los problemas de prueba es un aspecto importante, ya que varias métricas utilizan estas soluciones óptimas como conjuntos de referencia. Aunque se proporcionen las condiciones que cumple el conjunto de Pareto en el espacio de decisión, a la hora de generar los frentes de Pareto se debe ser cuidadoso pues una distribución uniforme de soluciones en el espacio de las variables no siempre determina una distribución diversa en el espacio objetivo. Esta problemática ocurre en varios de los problemas WFG, que aunque se proporciona un generador de soluciones, dichas soluciones no tienen una distribución adecuada, principalmente en configuraciones que aumentan la complejidad. Además, esta problemática difiere en función del número de objetivos y/o número de variables, teniendo más dificultades al escalarlos. Por otro lado, al utilizar generadores de números pseudoaleatorios, varias partes podrían quedar sin cubrir, lo que agrava más el problema (Li y col., 2015). En esta tesis para generar los conjuntos se implementa un método Quasi aleatorio, específicamente el método de Hammersley el cual produce una secuencia de números con baja discrepancia (Talke, 2012a; Molinet Berenguer y Coello Coello, 2015), que a diferencia de un generador de números aleatorios genera puntos en el espacio de un modo más sistemático. El procedimiento utilizado consiste en generar 10000 números en el espacio de soluciones óptimas por medio del método de Hammersley y posteriormente implementar un proceso de filtrado, que consiste en eliminar a los puntos más cercanos dada una tolerancia. En los problemas WFG la posición del frente está definido principalmente por los parámetros de distancia, por lo tanto inicialmente son generadas las soluciones considerando una configuración sencilla, es decir con el mínimo número de parámetros tanto de posición como de distancia. Posteriormente a cada solución se le agrega el desplazamiento que corresponde a la configuración original, de esta forma se obtienen las soluciones bien distribuidas a lo largo del frente de Pareto, es importante aclarar que el desplazamiento de la configuración original es única ya que es lograda por sus respectivas transformaciones.

En la figura 2.6 se muestra el resultado de generar diez mil puntos en un espacio de tres dimensiones, en la parte izquierda de la figura los puntos se generan por medio de una distribución uniforme y en la parte derecha se generan por medio del método de Hammersley. Se puede observar que generar datos con una distribución uniforme puede provocar regiones mal muestreadas. Tras utilizar este método, se

TABLA 2.4: Problemas de prueba UF (CEC 2009)

Nombre	Problema	Dominio
UF1	$f_1 = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} [x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})]^2$ $f_2 = 1 - \sqrt{x_1} + \frac{1}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} [x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})]^2$ $J_1 = \{j   j \text{ es impar y } 2 \leq j \leq n\}$ $J_2 = \{j   j \text{ es par con } 2 \leq j \leq n\}$	$[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$
UF2	$f_1 = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} y_j^2$ $f_2 = 1 - \sqrt{x_1} + \frac{1}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} y_j^2,$ <p>J<sub>1</sub> y J<sub>2</sub> son los mismos que en UF1</p> $y_j = \begin{cases} x_j - [0,3x_1^2 \cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0,6x_1] \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in J_1 \\ x_j - [0,3x_1^2 \cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0,6x_1] \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) & j \in J_2, \end{cases}$	$[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$
UF3	$f_1 = x_1 + \frac{2}{ J_1 } (4 \sum_{j \in J_1} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_1} \cos(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}) + 2)$ $f_2 = 1 - \sqrt{x_1} + \frac{2}{ J_2 } (4 \sum_{j \in J_2} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_2} \cos(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}) + 2)$ $y_j = x_j - x_1^{0,5(1,0+\frac{3(j-2)}{n-2})}, \quad j = 2, \dots, n,$	$[0, 1]^n$
UF4	$f_1 = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} h(y_j)$ $f_2 = 1 - x_1^2 + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} h(y_j),$ <p>J<sub>1</sub> y J<sub>2</sub> son los mismos que en UF1</p> $y_j = x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 2, \dots, n.$ $h(t) = \frac{ t }{1+e^{ t }}$	$[0, 1] \times [-2, 2]^{n-1}$
UF5	$f_1 = x_1 + (\frac{1}{2N} + \epsilon)  \sin(2N\pi x_1) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} h(y_j) $ $f_2 = 1 - x_1 + (\frac{1}{2N} + \epsilon)  \sin(2N\pi x_1) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} h(y_j) $ <p>J<sub>1</sub> y J<sub>2</sub> son los mismos que en UF1</p> $y_j = x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 2, \dots, n.$ $h(t) = 2t^2 - \cos(4\pi t) + 1$	$[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$
UF6	$f_1 = x_1 + \max\{0, 2(\frac{1}{2N} + \epsilon) \sin(2N\pi x_1)\} + \frac{2}{ J_1 } (4 \sum_{j \in J_1} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_1} \cos(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}) + 2)$ $f_2 = 1 - x_1 + \max\{0, 2(\frac{1}{2N} + \epsilon) \sin(2N\pi x_1)\} + \frac{2}{ J_2 } (4 \sum_{j \in J_2} y_j^2 - 2 \prod_{j \in J_2} \cos(\frac{20y_j\pi}{\sqrt{j}}) + 2)$ <p>J<sub>1</sub> y J<sub>2</sub> son los mismos que en UF1</p> $y_j = x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 2, \dots, n.$	$[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$
UF7	$f_1 = \sqrt[5]{x_1} + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} y_j^2$ $f_2 = 1 - \sqrt[5]{x_1} + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} y_j^2,$ <p>J<sub>1</sub> y J<sub>2</sub> son los mismos que en UF1</p> $y_j = x_j - \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 2, \dots, n$	$[0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$
UF8	$f_1 = \cos(0,5x_1\pi) \cos(0,5x_2\pi) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2$ $f_2 = \cos(0,5x_1\pi) \sin(0,5x_2\pi) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2$ $f_3 = \sin(0,5x_1\pi) + \frac{2}{ J_3 } \sum_{j \in J_3} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2$ <p>J<sub>1</sub> = {j   3 ≤ j ≤ n}, y j - 1 es una multiplicación de 3,  J<sub>2</sub> = {j   3 ≤ j ≤ n}, y j - 2 es una multiplicación de 3  J<sub>3</sub> = {j   3 ≤ j ≤ n}, y j es una multiplicación de 3.</p>	$[0, 1]^2 \times [-2, 2]^{n-2}$
UF9	$f_1 = 0,5[\max\{0, (1 + \epsilon)(1 - 4(2x_1 - 1)^2)\} + 2x_1]x_2 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2$ $f_2 = 0,5[\max\{0, (1 + \epsilon)(1 - 4(2x_1 - 1)^2)\} - 2x_1 + 2]x_2 + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2$ $f_3 = 1 - x_2 + \frac{2}{ J_3 } \sum_{j \in J_3} (x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}))^2,$ <p>J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub> y J<sub>3</sub> son los mismos que en UF9  <math>\epsilon = 0,1</math></p>	$[0, 1]^2 \times [-2, 2]^{n-2}$
UF10	$f_1 = \cos(0,5x_1\pi) \cos(0,5x_2\pi) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} [4y_j^2 - \cos(8\pi y_j) + 1]$ $f_2 = \cos(0,5x_1\pi) \sin(0,5x_2\pi) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} [4y_j^2 - \cos(8\pi y_j) + 1]$ $f_3 = \sin(0,5x_1\pi) + \frac{2}{ J_3 } \sum_{j \in J_3} [4y_j^2 - \cos(8\pi y_j) + 1]$ <p>J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub> y J<sub>3</sub> son los mismos que en UF9  <math>y_j = x_j - 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 3, \dots, n</math></p>	$[0, 1]^2 \times [-2, 2]^{n-2}$

TABLA 2.5: Expresión del frente de Pareto y el conjunto de Pareto de los problemas UF

Nombre	Frente de Pareto	Conjunto de Pareto	Variables Recomendadas
UF1	$f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$ $0 \leq f_1 \leq 1$	$x_j = \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})$ $j = 2, \dots, n$ $0 \leq x_1 \leq 1$	30
UF2	$f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$ $0 \leq f_1 \leq 1$	$x_j = \begin{cases} \{0,3x_1^2\cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0,6x_1\} \times \\ \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) \\ j \in J_1 \end{cases}$ $\{0,3x_1^2\cos(24\pi x_1 + \frac{4j\pi}{n}) + 0,6x_1\} \times \\ \cos(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}) \\ j \in J_2, \end{cases}$	30
UF3	$f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$ $0 \leq f_1 \leq 1$	$x_j = x_1^{0,5(1,0+\frac{3(j-2)}{n-2})}$ $j = 2, \dots, n, \quad 0 \leq x_1 \leq 1$	30
UF4	$f_2 = 1 - f_1^2$ $0 \leq f_1 \leq 1$	$x_j = \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})$ $j = 2, \dots, n, \quad 0 \leq x_1 \leq 1$	30
UF5	$(\frac{i}{2N}, 1 - \frac{i}{2N}) \quad \forall i = 0, 1, \dots, 2N$ $N = 10, \epsilon = 0,1 \text{ y } n = 30.$		30
UF6	Consiste de un punto aislado en $(0,1)$ y $N$ partes desconectadas $f_2 = 1 - f_1, f_1 \in \bigcup_{i=1}^N [\frac{2i-1}{2N}, \frac{2i}{2N}]$		30
UF7	$f_2 = 1 - f_1$ $0 \leq f_1 \leq 1$	$x_j = \sin(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})$ $j = 2, \dots, n$ $0 \leq x_1 \leq 1$	30
UF8	$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$ $0 \leq f_1, f_2, f_3 \leq 1$	$x_j = 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n})$ $j = 3, \dots, n$	30
UF9	La primer parte es $0 \leq f_3 \leq 1$ $0 \leq f_1 \leq \frac{1}{4}(1 - f_3)$ $f_2 = 1 - f_1 - f_3$ La segunda parte es $0 \leq f_3 \leq 1,$ $\frac{3}{4}(1 - f_3) \leq f_1 \leq 1,$ $f_2 = 1 - f_1 - f_3$	Tiene dos partes desconectadas $x_1 \in [0, 0,25] \cup [0,75, 1] \quad 0 \leq x_2 \leq 1$ $x_j = 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 3, \dots, n$	30
UF10	$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$ $0 \leq f_1, f_2, f_3 \leq 1$	$x_j = 2x_2 \sin(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n}), \quad j = 3, \dots, n$	30

FIGURA 2.5: Frente de Pareto y conjunto óptimo de los problemas UF.

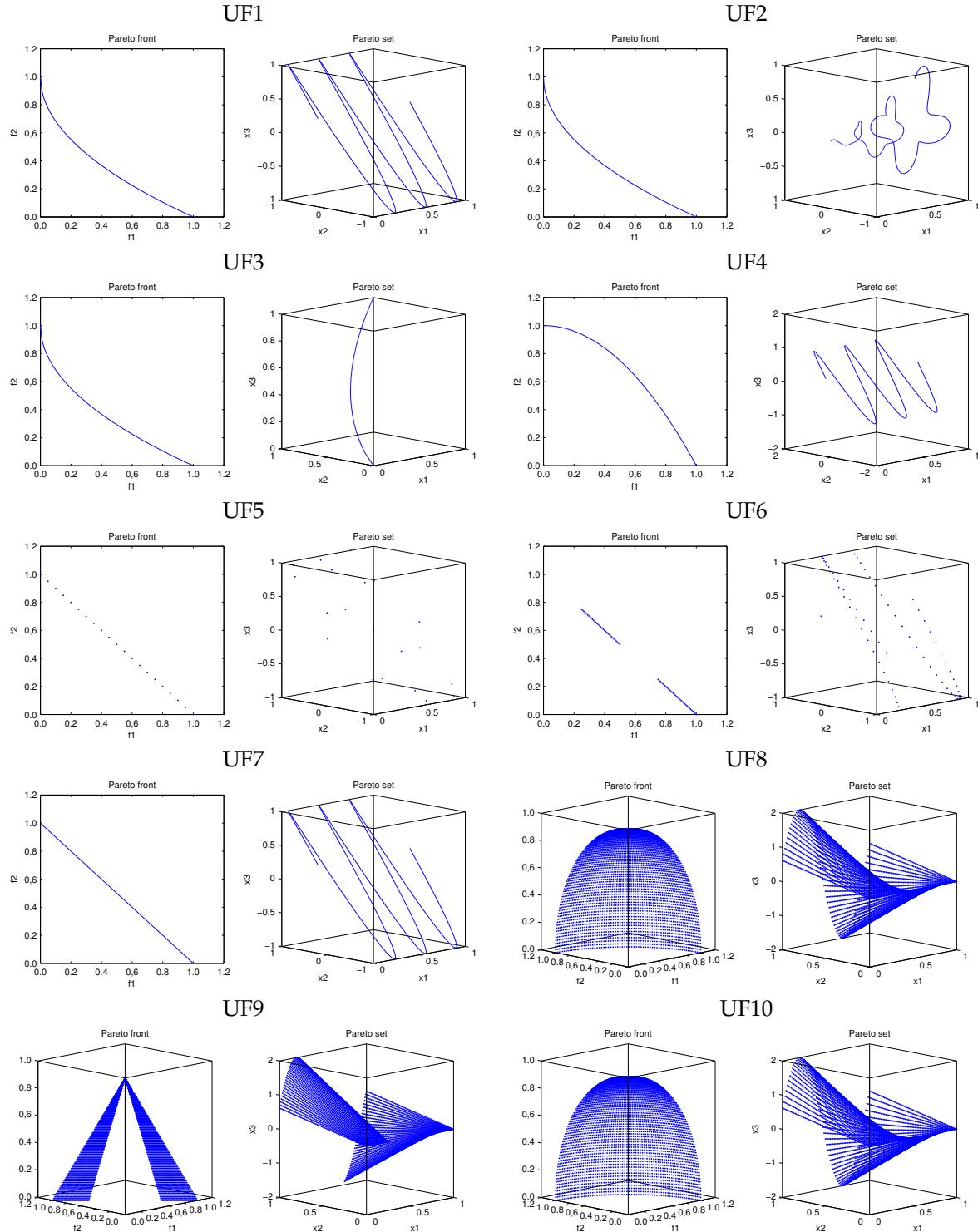


TABLA 2.6: Propiedades de los problemas de prueba ZDT, DTLZ, WFG y UF

Nombre	Separable	Modalidad	Geometría del frente de Pareto	Distribución de las soluciones	Número de objetivos
ZDT1	Si	Unimodal	Convexo	Uniforme	2
ZDT2	Si	Unimodal	Concavo	Uniforme	2
ZDT3	Si	Mixto	Desconectado	Uniforme	2
ZDT4	Si	Mixto	Convexo	Uniforme	2
ZDT6	Si	Multimodal	Concavo	Polinomial	2
DTLZ1	Si	Multimodal	Lineal	Uniforme	N
DTLZ2	Si	Unimodal	Concavo	Uniforme	N
DTLZ3	Si	Multimodal	Concavo	Uniforme	N
DTLZ4	Si	Unimodal	Concavo	Polinomial	N
DTLZ5	-	Unimodal	Degenerado - Arco	Uniforme	N
DTLZ6	-	Unimodal	Degenerado - Arco	Depende del parámetro	N
DTLZ7	Si	Mixto	Desconectado - Mixto	Uniforme	N
WFG1	Si	Unimodal	Convexo - Mixto	Polinomial - Regiones planas	N
WFG2	No	Mixto	Convexo - Desconectado	Uniforme	N
WFG3	No	Unimodal	Lineal - Degenerado	Uniforme	N
WFG4	Si	Multimodal	Concavo	Uniforme	N
WFG5	Si	Deceptivo	Concavo	Uniforme	N
WFG6	No	Unimodal	Concavo	Uniforme	N
WFG7	Si	Unimodal	Concavo	Depende del parámetro	N
WFG8	No	Unimodal	Concavo	Depende del parámetro	N
WFG9	No	Deceptivo	Concavo	Depende del parámetro	N
UF1	-	-	Concavo	-	2
UF2	-	-	Concavo	-	2
UF3	-	-	Concavo	-	2
UF4	-	-	Convexo	-	2
UF5	-	-	Frente de 21 puntos	-	2
UF6	-	-	Lineal	-	2
UF7	-	-	Lineal	-	2
UF8	-	-	Parabólico	-	3
UF9	-	-	Planar	-	3
UF10	-	-	Parabólico	-	3

Las celdas cuya propiedad es desconocida son indicadas con el símbolo “-”.

pudo visualizar que en todos los casos se conseguían conjuntos con una alta diversidad que cubrían todo el frente de Pareto.

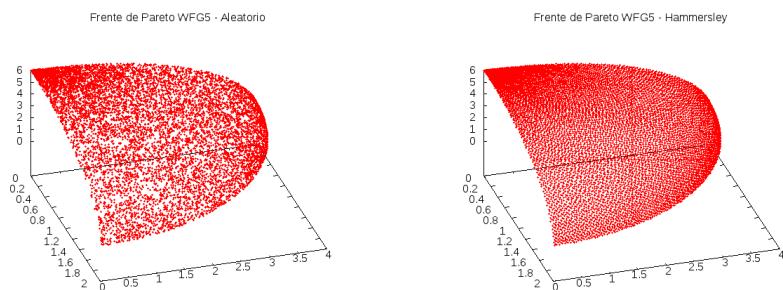


FIGURA 2.6: Frente de Pareto problema WFG5, en la izquierda con un método aleatorio y con el método de Hammersley considerando diez mil puntos.

## 2.5. Análisis de rendimiento de optimizadores multi-objetivo

En optimización multi-objetivo, se han desarrollado múltiples técnicas para medir el desempeño de los conjuntos de soluciones obtenidos. Particularmente, se han propuesto varios indicadores o métricas para evaluar la calidad de conjuntos de soluciones no dominadas (Zitzler y col., 2003). Estos indicadores transforman un conjunto de soluciones en un número real. En general los indicadores son métricas que determinan el grado de convergencia al frente de Pareto y/o la diversidad de las soluciones. El

indicador que se utiliza más frecuentemente es el hipervolumen (Zitzler y Thiele, 1998), debido a que entre los diferentes indicadores propuestos es el único que es *Pareto compliant* (Zitzler, Brockhoff y Thiele, 2007). Ser *Pareto compliant* (Knowles y Corne, 2002) quiere decir que el indicador no contradice el orden inducido por la relación de dominancia. Así, dados dos conjuntos de soluciones  $A$  y  $B$  si  $A \succeq B \wedge B \not\succ A$ , entonces el valor del indicador de  $A$  no debe ser peor que el valor del indicador  $B$ . Para considerarse estrictamente *compliant* se requiere que si  $A \succeq B \wedge B \not\succ A$  se cumpla que el valor del indicador de  $A$  sea estrictamente mejor que el valor del indicador  $B$ , esto es, asumiendo que el indicador se deba maximizar:

$$A \succeq B \wedge B \not\succ A \Rightarrow I(A) > I(B)$$

En la literatura se ha descrito repetidas veces (Zitzler, Brockhoff y Thiele, 2007; Zitzler y col., 2003) que con indicadores de tipo Pareto *non-compliant* se pueden obtener resultados engañosos al momento de evaluar el conjunto de soluciones no dominadas. En el 2003, Zitzler y col. demuestran que, por ejemplo, se pueden obtener resultados engañosos utilizando la distancia generacional (GD - *Generational Distance*). En las siguientes secciones se presentan algunas de las métricas más habituales. En este contexto un conjunto de soluciones óptimas de Pareto que se usa como referencia se denota por  $P^*$  y el conjunto de aproximaciones por  $Q$ , compuestos por  $M$  y  $N$  puntos respectivamente.

### 2.5.1. Distancia Generacional y Distancia Generacional Invertida

La Distancia Generacional (GD - Veldhuizen y Lamont, 1998) y la Distancia Generacional Invertida (IGD - *Inverted Generational Distance*) son indicadores Pareto *non-compliant*, y para ser implementados se requiere una discretización del frente de Pareto. El GD calcula la distancia promedio de cada solución obtenida en  $Q$  al punto de referencia más cercano. Por otra parte, la Distancia Generacional Invertida (IGD) es la distancia promedio de cada punto de referencia a su solución más cercana en  $Q$ . Así, si se tiene un conjunto de puntos utilizados como referencia, los cuales estén bien distribuidos en el frente de Pareto, un valor pequeño del IGD sugiere una buena convergencia de las soluciones al frente de Pareto y una buena distribución en relación al frente de Pareto.

Las fórmulas para calcular el GD y el IGD son las siguientes:

$$GD(P^*, Q) = \frac{1}{|N|} \left( \sum_{i=1}^{|N|} d_i^p \right)^{1/p} \quad IGD(P^*, Q) = \frac{1}{|M|} \left( \sum_{i=1}^{|M|} \hat{d}_j^p \right)^{1/p} \quad (2.13)$$

En la ecuación anterior  $d_i$  denota la distancia euclídea entre la solución  $y_i \in Q$  y el punto de referencia más cercano del conjunto  $P^*$  y  $\hat{d}_j$  denota la distancia entre el punto de referencia  $x_j^* \in P^*$  a la solución más cercana del conjunto  $Q$ . Recientemente Schutze y col. propusieron una modificación al GD y al IGD, donde argumentan que conforme aumenta el número de puntos  $M$ , la métrica mejora en valor, aunque la calidad de la aproximación no haya cambiado. Esto se ilustra asumiendo que el conjunto de distancias  $d_i$  (para el caso del GD) sean 1 y dada una muestra de  $N$  soluciones, entonces:

$$GD(P^*, Q) = \frac{1}{|N|} \left( \sum_{i=1}^{|N|} d_i^p \right)^{1/p} = \frac{\|(1, \dots, 1)^T\|_p}{N} = \frac{\sqrt[p]{N}}{N}$$

Se puede observar que:

- Al incrementar el número  $N$  de puntos, el valor de GD *mejora* aunque aparentemente no ha cambiado la calidad.
- La secuencia de puntos convergen a una aproximación "perfecta", esto es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} GD(P^*, Q) = 0$$

Lo mismo ocurre para el IGD, al considerar más puntos de referencia. Para evitar el efecto mencionado, se propone la modificación al indicador, definiéndolo de la siguiente forma:

$$GD_p(P^*, Q) = \left( \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^{|N|} d_i^p \right)^{1/p} = \frac{\|d_i\|_p}{\sqrt[p]{N}}$$

$$IGD_p(P^*, Q) = \left( \frac{1}{|M|} \sum_{i=1}^{|M|} \hat{d}_i^p \right)^{1/p} = \frac{\|\hat{d}_i\|_p}{\sqrt[p]{N}} \quad (2.14)$$

Esta modificación evita que al aumentar el número de soluciones de la aproximación (en el caso de GD) o al aumentar el número de puntos de referencia (en el caso del IGD) la calidad del indicador se vea afectado.

Sin embargo, independientemente de este cambio las métricas siguen siendo Pareto *non-compliant*, por lo que existen escenarios en que la estimación puede ser cuestionable, por ejemplo en la figura 2.7 donde el conjunto de soluciones A y B evaluados con el IGD son 3.71 y 2.59 a pesar de que el conjunto de soluciones A domina al conjunto B.

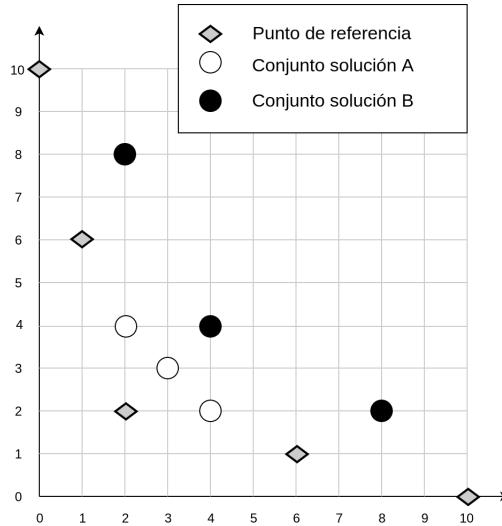


FIGURA 2.7: Ejemplo con 5 puntos de referencia IGD.

Para solventar el problema anterior se propone la distancia generacional invertida modificada (IGD+ - *Inverted Generational Distance*) propuesta por Ishibuchi y col. en el 2015, la cual es *Weak Pareto compliant*. Este indicador consiste en que si una solución es dominada por un punto de referencia, entonces se utiliza la distancia Euclídea sin alguna modificación. Sin embargo, si la solución y el punto de referencia

son no dominados entre sí, entonces se calcula la mínima distancia desde el punto de referencia a la región dominada por la solución.

La forma del IGD+ es similar al IGD propuesto previamente, a diferencia que la distancia euclídea es modificada, de la siguiente manera:

- En problemas de minimización es

$$d^+(z, a) = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_m^2} = \sqrt{\max\{a_1 - z_1, 0\}^2 + \dots + \max\{a_m - z_m, 0\}^2}$$

- En problemas de maximización es

$$d^+(z, a) = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_m^2} = \sqrt{\max\{z_1 - a_1, 0\}^2 + \dots + \max\{z_m - a_m, 0\}^2}$$

### 2.5.2. Distancia promedio de Hausdorff $\Delta_p$

La distancia de Hausdorff  $d_H$  sirve para medir distancia entre subconjuntos de un espacio (Schutze y col., 2012). Esta distancia no es muy utilizada en el ámbito multi-objetivo, probablemente porque  $d_H$  penaliza mucho los valores atípicos de un conjunto de puntos, lo cual produce que una “buena” aproximación que contiene al menos un dato atípico sea considerada como una “mala” aproximación. En Schutze y col. se propone una métrica basada en la distancia de Hausdorff, que se denota por  $\Delta_p$  y que se puede ver como una distancia promedio de Hausdorff. El cálculo de las mismas se realiza combinando el GD y el IGD ligeramente modificados (se usan las versiones  $GD_p$  e  $IGD_p$  previamente descritas).

$$\Delta_p(P) = \max\{GD_p(P^*, Q), IGD_p(P^*, Q)\} \quad (2.15)$$

El efecto que tiene el parámetro  $p$  sobre la métrica  $\Delta_p$  es la clave para manejar los datos atípicos, ya que con valores pequeños de  $p$  existe una menor influencia de los datos atípicos. De otra forma, si  $p$  se incrementa, los datos atípicos influyen más en la métrica  $\Delta_p$ . En el caso extremo donde  $p \rightarrow \infty$ , sólo se consideran las distancias que corresponden a los puntos más lejanos.

### 2.5.3. Distancia al vecino más cercano (DCN - *Distance to the Closest Neighbor*)

El DCN es una métrica utilizada para medir la contribución a la diversidad de un individuo (Bui, Abbass y Branke, 2005; Segura y col., 2016a). Para obtener el valor de esta métrica para un individuo  $i$  en relación a un conjunto  $Q$ , se calcula la mínima distancia entre  $i$  y cualquier individuo del conjunto  $Q$ . En principio se podría hacer uso de cualquier tipo de distancia, aunque en optimización continua lo más habitual es usar la distancia euclídea.

### 2.5.4. Distancia media (ADI - *Average Distance to all Individuals*)

La distancia media (Bui, Abbass y Branke, 2005; Segura y col., 2016a) de un determinado individuo  $i$ , consiste en promediar todas las distancias a los demás individuos en la población  $Q$ .

$$ADI(i) = \frac{1}{|Q| - 1} \sum_{j \in Q, i \neq j} d_{i,j} \quad (2.16)$$

Cabe destacar que el ADI de una población es la distancia media entre todas las distancias que aparecen en la población. También es importante resaltar que ADI y DCN ofrecen información complementaria, con lo que dependiendo del análisis que se quiera realizar puede ser más interesante utilizar uno o el otro.

### 2.5.5. Hipervolumen (HV - Hypervolume)

Esta métrica calcula el volumen (en el espacio objetivo) cubierto por las soluciones obtenidas en  $Q$  hasta un punto de referencia dado (Knowles, Corne y Fleischer, 2003b). El indicador del hipervolumen de un conjunto de soluciones aproximadas  $Q$  y basado en un punto de referencia  $r$  se define de la forma:

$$HV(Q, r) = \mathcal{L}(\cup_{q \in Q} \{q' | q \prec q' \prec r\}) \quad (2.17)$$

Donde  $\mathcal{L}$  es la medición de Lebesgue de un conjunto.

La contribución del HV de una solución  $q \in Q$  individual refleja la influencia de un solo punto en la calidad del conjunto aproximado y es definido como:

$$C_{HV}(q, Q, r) = HV(Q, r) - HV(Q \setminus \{q\}, r) \quad (2.18)$$

El indicador HV es el único indicador conocido como estrictamente Pareto *compliant*.

### 2.5.6. Indicador R2

La familia de indicadores  $R$  (Díaz-Manríquez y col., 2013), están basados en funciones de utilidad las cuales realizan un mapeo de un vector  $\vec{y} \in \Re^m$  a un valor de utilidad escalar  $u \in \Re$ . En algunos casos se ha preferido este indicador al HV por dos razones: el tiempo de cálculo del HV es exponencial con respecto al número de objetivos (Deb y Jain, 2014b) y las distribuciones obtenidas por el HV están sesgados hacia las regiones de mayor pendiente en el frente de Pareto (Brockhoff, Wagner y Trautmann, 2012). Por otro lado el indicador R2 suele generar soluciones con una distribución más uniforme, aunque tiene problemas relacionados con la elección del conjunto de funciones de utilidad.

**Propiedad 4** Para un conjunto finito y discreto  $U$  y una distribución uniforme  $p$  sobre  $U$ , el indicador R2 se calcula de la siguiente forma:

$$R2(R, Q, U) = \frac{1}{|U|} = \sum_{u \in U} (max_{r \in R} \{u(r)\} - max_{q \in Q} \{u(q)\}) \quad (2.19)$$

Dado que el primer sumando es una constante, si se asume que  $R$  es una constante por simplicidad se tiene:

$$R2(R, Q, U) = \frac{1}{|U|} = \sum_{u \in U} (-max_{q \in Q} \{u(q)\}) \quad (2.20)$$

Basado en la función de pesos estándar de Tchebycheff, el indicador R2 de una solución  $Q$  para un conjunto de pesos y un vector utópico  $Z^*$  se define de la siguiente forma:

$$R2(Q, \Lambda, z^*) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} min_{q \in Q} \{max \{\lambda_j |z_j^* - q_j|\}\} \quad (2.21)$$

donde  $\Lambda$  está conformado por un conjunto de vectores de pesos  $\vec{\lambda}$ .

La contribución de una solución  $q \in Q$  es definido de la forma:

$$C_{R2}(q, Q, \Lambda, z^*) = R2(Q, \Lambda, z^*) - R2(Q \setminus \{q\}, \Lambda, z^*) \quad (2.22)$$

En el caso de Tchebycheff puede ser escrito de la forma:

$$\begin{aligned} C_{R2}(q, Q, \Lambda, z^*) &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\lambda \in \Lambda} (\min_{b \in Q} \{ \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{ \lambda_j |z_j^* - b_j| \} \} - \\ &\quad \min_{b \in Q \setminus \{q\}} \{ \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{ \lambda_j |z_j^* - b_j| \} \}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.5.7. Superficies de Alcance

Un mecanismo alternativo para realizar comparativas de rendimiento son las superficies de alcance (*attainment surfaces*). Un optimizador puede generar más de un vector objetivo en una ejecución, llamemos  $Z$  al conjunto de soluciones obtenidas:

$$Z = \{z \in \Re^M, j = 1, \dots, N\} \quad (2.24)$$

donde  $M$  es el número de objetivos. Una función de alcance es una descripción de la distribución alcanzada, para lo que hay que tener en cuenta que en cada ejecución se pueden llegar a distintos conjuntos. En este contexto una meta es descrita por un vector objetivo, y es lograda si ésta es débilmente dominada por el conjunto aproximado obtenido por el optimizador. Se define la función de alcance  $\alpha_Z(\cdot) : \Re^M \rightarrow [0, 1]$  con:

$$\begin{aligned} \alpha_Z(z) &= P(z^1 \preceq z \vee z^2 \preceq z \vee \dots \vee z^N \preceq z) \\ &= P(Z \preceq \{z\}) \\ &= \text{Probabilidad de que el optimizador alcance la meta } z \text{ en una ejecución,} \end{aligned} \quad (2.25)$$

La función de alcance puede ser estimada dada una muestra de  $r$  ejecuciones independientes de un optimizador por medio de la función empírica de alcance (*EAF - empirical attainment function*) que es definida de la forma:

$$\alpha_r(z) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r I(A^i \preceq \{z\}) \quad (2.26)$$

donde  $A^i$  es el  $i$ -ésimo conjunto aproximado del optimizador y  $I(\cdot)$  es la función indicadora, que es la unidad si el argumento es verdadero y cero en caso contrario.

Los EAFs pueden ser utilizados para visualizar los resultados de varias ejecuciones de un optimizador. De esta forma, pueden ser mostrados todas las metas que han sido alcanzadas en 50 % de las ejecuciones. Un conjunto aproximado  $A$  es nombrado el  $k$  %-conjunto de aproximación de un EAF  $\alpha_r(z)$ , si éste domina débilmente a esos vectores objetivo que han sido obtenidos al menos  $k$  por ciento de las  $r$  ejecuciones.

## 2.6. Análisis preliminar de Algoritmos Actuales

Tal y como se ha descrito, en las últimas décadas se han desarrollado una gran cantidad de MOEAs con el objetivo de obtener buenas aproximaciones al frente de Pareto. Generalmente se consideran dos metas al desarrollar MOEAs: las soluciones deberían estar próximas al frente de Pareto y se debe maximizar su diversidad en el espacio objetivo (Zitzler, Laumanns y Bleuler, 2004). Teniendo en cuenta las metas anteriores muchos MOEAs consideran de forma explícita tanto la consecución de soluciones de alta calidad, como la maximización de la diversidad de las soluciones en el espacio objetivo. En el caso de optimización mono-objetivo, únicamente existe una meta en el proceso de optimización. Sin embargo, se ha demostrado de forma experimental que integrar mecanismos para promover la diversidad en el espacio de las variables puede generar beneficios importantes en la calidad de las soluciones alcanzadas. En los MOEAs recientes no se alcanza una convergencia completa debido a que se mantiene un grado de diversidad explícitamente en el espacio de los objetivos. De hecho, en algunos problemas mono-objetivo donde la convergencia prematura causa problemas, se ha implementado la multi-objetivización como una forma para incrementar la diversidad con la meta de obtener soluciones de alta calidad (Segura y col., 2016d). Sin embargo, nuestra hipótesis se basa en que dependiendo del problema, la cantidad de diversidad mantenida en el espacio de las variables podría ser demasiado baja pudiendo aparecer una situación similar a la convergencia prematura donde el grado de diversidad podría no ser suficiente para mejorar los resultados.

Entre los test previamente descritos uno de los más utilizados son los problemas WFG. Se sabe que los MOEAs más recientes fallan con algunas de las funciones WFG más complejas. En esta sección demostramos que una de las razones es que, los MOEAs actuales no mantienen un grado de diversidad suficiente en el espacio de decisión. Específicamente, se mostrará que los parámetros de distancia convergen prematuramente y que por lo tanto, el operador de cruce pierde su poder de exploración. De hecho en estos casos, la única forma de mejorar los resultados es a través del operador de mutación.

Con el objetivo de ilustrar la debilidad previamente mencionada, se seleccionó el problema de prueba WFG1. ya que el mismo posee una definición simple, pero muchos MOEAs tienen dificultades en resolverlo. Específicamente, el problema WFG1 es uni-modal y separable, es decir, en este sentido no es especialmente complejo, pero a pesar de ello, en muchas ejecuciones ofrece inconvenientes para los MOEAs actuales.

Para realizar las ejecuciones se utilizó la herramienta *jMetalcpp* (López-Camacho y col., 2013). Tomando en cuenta el comportamiento estocástico de los MOEAs, se realizaron 35 ejecuciones independientes, asignando un criterio de paro de 50,000 generaciones y se asignó el tamaño de población a 250. Para analizar la diversidad se calculó el promedio de la distancia ADI entre todos los individuos de la población. En la figura 2.8 se muestra la evolución del ADI para los algoritmos GDE3, SMS-EMOA, MOEA/D y NSGA-II. En la parte superior izquierda se muestra la evolución de la diversidad cuando se toman en consideración todos los parámetros, mientras que en la parte superior derecha, únicamente se toman en cuenta a los parámetros de distancia. Es importante aclarar que se utiliza la escala logarítmica. En el caso de los parámetros de distancia, las regiones donde no se muestra información, corresponde a las generaciones donde la distancia promedio es cero. Como se puede apreciar, todos los métodos mantienen un grado de diversidad cuando se consideran a todos los parámetros. Sin embargo, cuando únicamente se consideran los parámetros de distancia, todos los métodos llegan a un valor de ADI igual a cero de forma rápida. De hecho, aproximadamente después de 5,000 generaciones todos los métodos tienen una distancia promedio igual a cero. Esto significa que relativamente en pocas generaciones, los parámetros de distancia convergen en todos los métodos. Se puede observar que en algunas generaciones

se recupera un poco de diversidad, esto se debe al efecto del operador de mutación. Sin embargo, esta cantidad de diversidad es mínima y se vuelve a perder rápidamente. En las superficies de alcance (Figura 2.9) se puede observar que para cada uno de los MOEAs seleccionados, la distancia entre el frente de Pareto y las soluciones alcanzadas no es despreciable, es decir, que no están resolviendo el problema de forma adecuada. Debido a la pérdida de diversidad en los parámetros de distancia, los MOEAs básicamente sólo modifican los parámetros de posición durante una gran parte de la ejecución, por lo que en la mayoría del tiempo se está mejorando la diversidad en el espacio objetivo pero no la calidad en las soluciones.

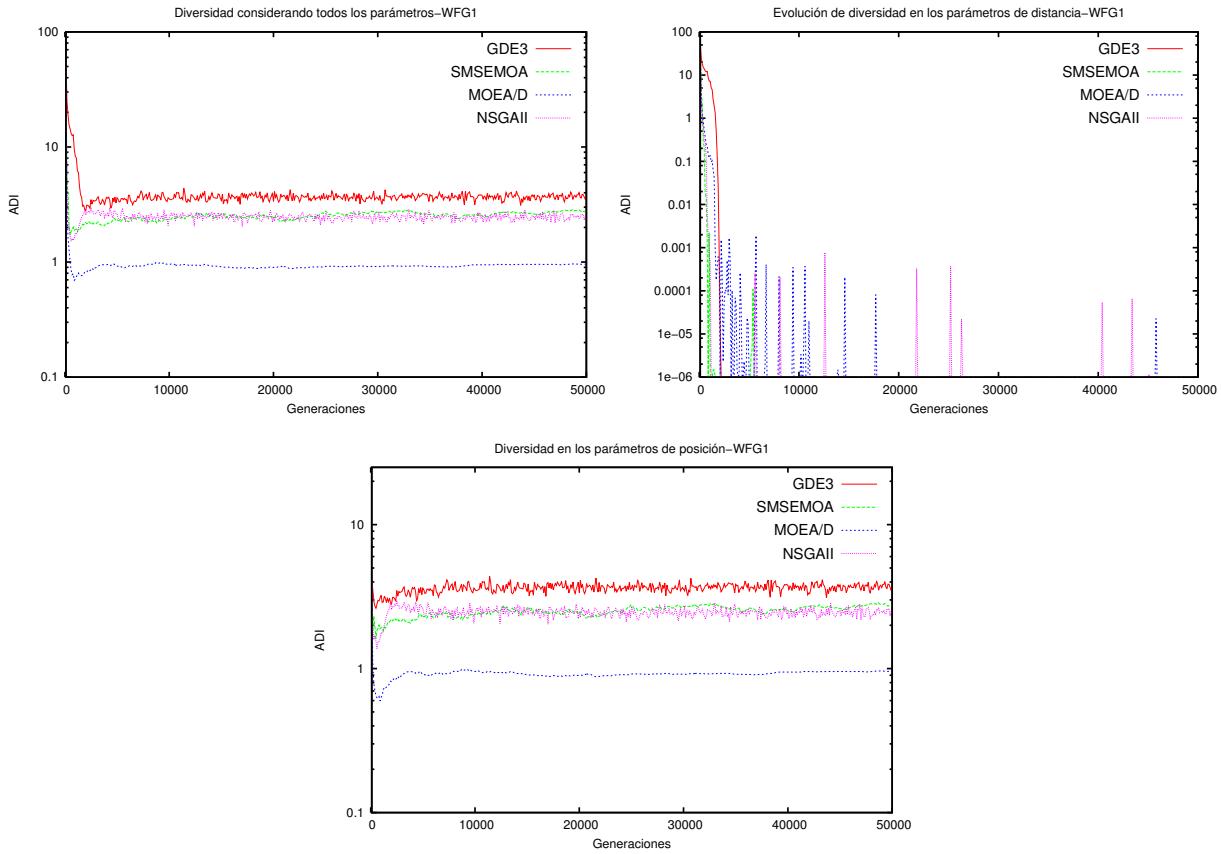


FIGURA 2.8: Evolución ADI del estado-del-arte en la instancia WFG1 (escala logarítmica).

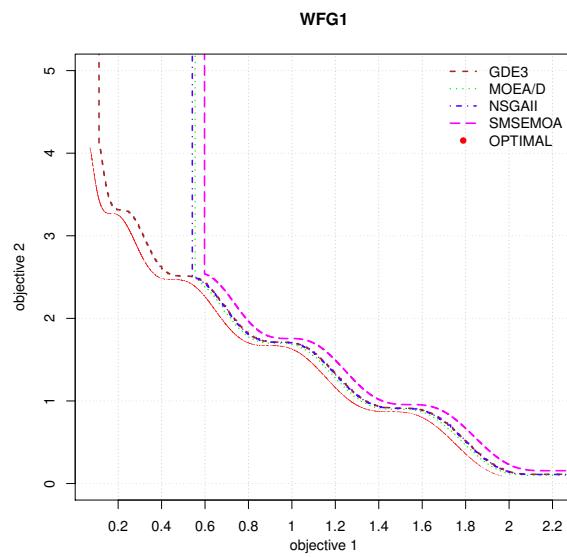


FIGURA 2.9: Resumen de las superficies de alcance al 50% en el problema de prueba WFG1.



## Capítulo 3

# Algoritmo basado en Dominancia con Control de Diversidad en el Espacio de Decisión

### 3.1. Introducción

Los algoritmos evolutivos (EA) son considerados como uno de los enfoques más prometedores en distintos problemas de optimización, tanto en dominios continuos como en discretos. Además, se han vuelto bastante populares en las últimas décadas en parte por el incremento de las capacidades de cómputo. Por lo tanto los EAs son utilizados ampliamente en diversos campos y en aplicaciones del mundo real. Sin embargo, aún hoy en día por diferentes razones en muchos problemas no se obtiene un rendimiento adecuado, por lo que sigue siendo un campo en el que hay mucho que investigar. Entre las posibles razones que afectan al rendimiento se ha visto que la falta de soluciones diversas en la población es una de las más típicas. Así, muchos algoritmos que son diagnosticados con este tipo de problemas pueden guiar a las soluciones candidatas hacia ciertas regiones de reducido tamaño del espacio de búsqueda, siendo distinta de la región en que están las soluciones óptimas. Si en esos casos los componentes del algoritmo no permiten escapar de estas regiones, en el ámbito mono-objetivo se dice que el algoritmo sufre de convergencia prematura (Črepinšek, Liu y Mernik, 2013). Se ha mostrado que los EAs que incluyen mecanismos para proporcionar un balance adecuado entre exploración e intensificación pueden generar resultados de alta calidad y evitar estas problemáticas, lo que es especialmente útil cuando se realizan ejecuciones a largo plazo. Por otra parte también se ha visto que si la población es demasiado diversa, entonces la fase de explotación puede ser afectada negativamente, y en consecuencia la convergencia del algoritmo es muy lenta pudiendo ocurrir que cuando se detenga aún esté en fase de exploración y con soluciones candidatas muy lejanas de la región óptima. Por lo tanto Mahfoud en «Niching methods for genetic algorithms» define el concepto de diversidad útil como las cantidades de diversidad que proporcionan soluciones de calidad.

En la búsqueda de preservar un balance entre exploración e intensificación por parte del proceso evolutivo, se han desarrollado algoritmos que incorporan distintas estrategias principalmente enfocadas en evitar el inconveniente de la convergencia prematura. Entre las estrategias cabe destacar los operadores de mutación disruptivos, uso de poblaciones de tamaño variable, esquemas de reinicio, emparejamiento especial de padres (Chiang y Lai, 2011) o los modelos explícitos de selección (Segura y col., 2016b), entre otros. Sin embargo, no siempre se entiende plenamente la forma en que la exploración y la explotación

se promueven en un EA, y los efectos que tienen sobre otros componentes, ya que debido al comportamiento estocástico hacer análisis rigurosos es muy complejo, y además, dependiendo del problema y variante del evolutivo, los componentes pueden ser usados para conseguir diferentes efectos. Por ejemplo, mientras en algunos esquemas el operador de mutación se encarga de promover la exploración (Herrera y Lozano, 2003; Eshelman, 1991), en otros casos esta tarea es asignada al operador de cruce (Sivanandam y Deepa, 2007) y se visualiza al operador de mutación como un operador de intensificación, que es la visión más extendida hoy en día. Las estrategias mencionadas anteriormente se han aplicado mayoritariamente en mono-objetivo. Sin embargo, pueden guiar el diseño de nuevos enfoques para optimización multi-objetivo ya que aunque en multi-objetivo la convergencia total no suele ocurrir, es posible que controlar el nivel de diversidad del espacio de decisión pueda traer beneficios adicionales, tal y como lo hace en el caso mono-objetivo.

En las siguientes secciones se describen algunas de las estrategias usadas para administrar la diversidad del espacio de decisión en optimización mono-objetivo y multi-objetivo. Posteriormente se explica el algoritmo propuesto en el ámbito multi-objetivo, considerado como el primer algoritmo basado en dominancia que administra la diversidad en las variables de decisión de forma explícita relacionándola con el criterio de parada establecido. Adicionalmente se realiza un análisis de los beneficios y las desventajas del algoritmo propuesto, considerando también la importancia de la diversidad en el espacio objetivo. La novedad del algoritmo propuesto (*VSD-MOEA - Variable Space Diversity Multi-Objective Evolutionary Algorithm*) radica en la fase de remplazo, con lo que se explica paso a paso, ofreciendo una simulación de los pasos involucrados en dicha fase. Por otra parte para la administración de la diversidad en el espacio objetivo se propone la distancia de mejoría que está basada en el indicador IGD+, el cual es considerado como débilmente *Pareto Compliance*. Al final se muestra una simulación del VSD-MOEA junto al estado del arte para el problema de prueba WFG5 cuya principal característica es su transformación con propiedades deceptivas.

### 3.2. Diversidad en el espacio de las variables en EAs mono-objetivo y multi-objetivo

En optimización estocástica, específicamente en el caso mono-objetivo, se han desarrollado una gran variedad de algoritmos evolutivos con el propósito de tratar aspectos relacionados con la falta de diversidad y la aparición de convergencia prematura (Črepinšek, Liu y Mernik, 2013). Algunos de los algoritmos más populares que están relacionados con el manejo de la diversidad son Saw-Tooth (Koumousis y Katsaras, 2006), CHC (Eshelman, 1991), esquemas de Crowding y Multi-Dynamic (Segura y col., 2016b), entre muchos otros. Este último relaciona el manejo de diversidad en el espacio de las variables con el criterio de paro establecido. De esta forma, y dependiendo del criterio de paro, en las fases iniciales se promueve un mayor nivel de exploración y conforme van transcurriendo las generaciones se realiza un cambio gradual para obtener un mayor nivel de intensificación. El control de diversidad se puede realizar desde distintos enfoques, y se ha visto experimentalmente que actuar sobre varias componentes de los EAs puede ser beneficioso (Segura y col., 2015). Así, hay algoritmos que modifican la fase de selección de padres, otros que lo hacen con el remplazamiento, con el esquema poblacional, etc. Aunque modificar varias componentes de forma simultánea es beneficioso, también es mucho más complejo y por ello en muchos casos se siguen usando esquemas uniproceso. En el caso mono-objetivo, muchos de los últimos estudios han revelado que los esquemas basados en remplazamiento que relacionan el balance entre exploración y explotación con el criterio de paro han sido especialmente exitosos. Así, han

posibilitado el desarrollo de optimizadores que actualmente han encontrado los mejores resultados en varios problemas muy populares, como es el problema de ordenación lineal, el problema de asignación de frecuencias (Segredo, Segura y León, 2011), el Sudoku (Segura y col., 2016c), o el problema del agente viajero (Segura y col., 2015), entre otros.

En optimización multi-objetivo es posible encontrar inconvenientes similares a los que surgen en problemas mono-objetivo tal y como se vio en el análisis preliminar presentado anteriormente para el WFG1. Sin embargo, este inconveniente es menos tratado porque los problemas multi-objetivo están compuestos por dos espacios, el primero consiste en el espacio de las variables y sus respectivas imágenes conforman el espacio objetivo. Obviamente, no existe una correspondencia directa entre la diversidad de los dos espacios (Shir y col., 2009), es decir, un grado determinado de diversidad en el espacio objetivo no implica que exista un grado de diversidad similar en el espacio de las variables. Sin embargo, dado que una de las metas de los optimizadores es obtener soluciones diversas en el espacio objetivo, normalmente se considera este de forma explícita, y de forma implícita se mantiene cierta diversidad en el espacio de decisión. En (Preuss, Naujoks y Rudolph, 2006) se analiza este aspecto, mostrando algunos casos en que mantener diversidad en el espacio objetivo, no implica el mantenimiento de una diversidad adecuada en el espacio de decisión y sugieren que la consideración de este tipo de diversidad es un campo de investigación abierto en que se han hecho pocos avances.

Actualmente, ya existen varios trabajos en el área de multi-objetivo que proporcionan relevancia a la diversidad en el espacio de las variables. De hecho, casi desde los inicios del área hubo algunos intentos de considerar de forma explícita la diversidad del espacio de las variables. Así, en el NSGA se considera a través de las funciones de partición. Sin embargo, para hacer esto se abandonó la consideración de la diversidad en el espacio objetivo, lo que trajo problemas graves a este algoritmo. Otro caso similar es el NPGA (Niched Pareto Genetic Algorithm - Horn, Nafpliotis y Goldberg, 1994), en donde se usan funciones de partición habitualmente en base a distancias en el espacio objetivo, aunque algunos autores consideraron usar el espacio de las variables. Entre las estrategias que se consideran en algoritmos más actuales cabe destacar la aplicación de restricciones de emparejamiento (Chiang y Lai, 2011). Así, en (Ishibuchi y Shibata, 2003) se presentan varios estudios sobre los efectos de definir restricciones de emparejamiento, promoviendo en unos casos que se recombinen soluciones cercanas y en otros que se recombinan soluciones poco similares. Para ello miden estas similitudes considerando tanto el espacio de decisión como el espacio objetivo. Detectan que este tipo de esquemas tienen efectos muy importantes sobre los resultados, pero no se consiguen comportamientos muy estables, en el sentido que son muy dependientes del problema a tratar. Otra alternativa muy popular, aunque con un rendimiento algo limitado, consiste en implementar esquemas de reinicio (Jaeggi y col., 2008; Pironratana y Chaiyaratana, 2006). Finalmente, en el 2005, Chan y Ray propone un esquema que fomenta la diversidad tanto del espacio objetivo como del espacio de diversidad a través del proceso de selección. El artículo ha sido poco citado y no está disponible en las principales bases de datos, por lo que no se pudo obtener información adicional del funcionamiento del algoritmo, pero en base a algunas citas que se han hecho al artículo, la selección que utiliza la diversidad en el espacio de decisión realiza un proceso para contar los vecinos de una solución y promover que se elijan soluciones de zonas poco pobladas.

Por otro lado, hay varios trabajos con una alta relación con la diversidad en el espacio de decisión, pero en los que el objetivo principal no es mejorar los resultados obtenidos en el espacio objetivo, sino alcanzar soluciones similares a las que obtienen otros MOEAs pero obteniendo además un conjunto de soluciones diversas en el espacio de decisión. Esta categoría de algoritmos pueden ser de interés en problemas de aplicación real en que es necesario proporcionar soluciones bien distribuidas en el espacio

de decisión pues esto puede ser beneficioso para los tomadores de decisiones (Deb y Tiwari, 2005; Rudolph, Naujoks y Preuss, 2007). Sin embargo, en varios casos se ha visto que para problemas específicos también se mejora en el espacio objetivo por lo que estos son muy relevantes para esta tesis. En el 2003 Toffolo y Benini propusieron un algoritmo para obtener soluciones diversas tanto en el espacio de las variables como en el espacio objetivo conocido como GDEA. Este algoritmo asocia a cada individuo dos valores objetivos, el primero por medio de una ordenación de soluciones no dominadas considerando los objetivos reales a optimizar y el segundo consiste en una métrica para la diversidad en el espacio de las variables. En el 2005, Deb y Tiwari propusieron el “Omni-optimizer” considerado como una generalización del NSGA-II. En este algoritmo se incorpora la diversidad en los dos espacios al aplicar el cálculo de la distancia de crowding. Así, se calcula tanto la distancia en el espacio de decisión como en el espacio objetivo y se intenta mantener soluciones que sean diversas en al menos uno de los dos espacios. El criterio de selección no se adapta a lo largo del tiempo, sino que incluso al final se pretende obtener soluciones que sean diversas en ambos espacios. Otro algoritmo con un principio similar es el “NSGA-II-agg” de Shir y col., que a diferencia del anterior agrega la diversidad presentada en los dos espacios en una única función. Finalmente, uno de los primeros MOEAs basados en indicadores que considera la diversidad en el espacio de las variables es DIVA (*Diversity Integrating Hypervolume-based Search Algorithm*) propuesto en el 2010 por Ulrich, Bader y Zitzler. En DIVA se combina la diversidad en el espacio de las variables (calculado en base a distancias) y el hipervolumen. Para realizar esto se modifica la métrica del hipervolumen subdividiéndolo en regiones, y multiplicando cada región por una diversidad asociada a los individuos que dominan dicha parte. Un aspecto interesante de este algoritmo es que en el espacio de las variables se consideran vecindades en base a hiper-rectángulos. Por otra parte, siendo parte de la familia de Algoritmos de Estimación de Distribución se encuentra el MMEDA propuesto por Zhou, Zhang y Jin en el 2009. MMEDA agrupa a los individuos en primer lugar en base al espacio objetivo y posteriormente se genera un modelo probabilístico para la distribución de soluciones óptimas pero tratando de promover la diversidad en los dos espacios.

En base al análisis del estado del arte, se pudo concluir que son varios los autores que han propuesto promover de forma explícita o de manera indirecta el mantenimiento de diversidad en el espacio de las variables. Sin embargo, ninguno de estos métodos ha ganado popularidad por lo que no son usados habitualmente. Una de las posibles razones es que una gran cantidad de los métodos de este tipo promueven la diversidad del espacio de las variables durante toda la evolución, ya que precisamente muchos se plantean como meta encontrar soluciones diversas al final de la ejecución. El objetivo de esta tesis es muy diferente, ya que se quiere promover la diversidad en el espacio de las variables no por el hecho de obtener soluciones más diversas en este espacio sino para obtener mejores soluciones en el espacio objetivo. No se pudo encontrar ningún método multi-objetivo que use el principio propuesto en (Segura y col., 2016b) para optimización mono-objetivo y que se basa en relacionar la cantidad de diversidad mantenida con el criterio de paro. En base a esto, en este capítulo se utiliza el principio aplicado en (Segura y col., 2016b) integrándolo en un MOEA basado en dominancia.

### 3.3. Propuesta

Los MOEAs basados en dominancia son considerados como una categoría fundamental del ámbito multi-objetivo, por lo que se eligió esta categoría para desarrollar la primera propuesta de esta tesis. Este grupo de algoritmos han estado creciendo en las últimas dos décadas, y actualmente principalmente son utilizados en problemas de dos y tres objetivos, ya que existen inconvenientes importantes al incrementar el número de objetivos (Coello, Lamont y Veldhuizen, 2006; Deb y Kalyanmoy, 2001).

Particularmente, en este MOEA, denominado VSD-MOEA, se establece una fase especial de remplazo, donde se define un procedimiento para administrar de forma explícita la diversidad tanto en el espacio de las variables como en el de los objetivos. La novedad para la parte de las variables es clara, pues como se ha comentado esta se relaciona con el criterio de parada. Para el caso de la diversidad del espacio objetivo se propone una nueva forma de calcular distancias entre individuos denominada distancia de mejoría, y que está relacionada con la extensión que se hizo del IGD para generar el IGD+.

El pseudocódigo del bloque principal del VSD-MOEA se presenta en el algoritmo 12, el cual, de forma global no es más que el algoritmo evolutivo estándar. En primer lugar se realiza la inicialización de la población  $P_0$  con  $N$  individuos y sus respectivas evaluaciones en las líneas 1 y 2. En este algoritmo el conjunto  $P$  representa a la población y  $Q$  a los individuos hijo. Inicialmente el conjunto de individuos hijo  $Q_0$  está vacío, y en cada generación  $t$  del ciclo principal, los individuos hijos  $Q_t$  corresponden a los nuevos individuos creados. Así, como es usual de un algoritmo evolutivo, se aplica la **Selección** de padres, que en este caso es mediante el torneo binario en la línea 6, donde el criterio de selección es en base al menor rango y en caso de que los dos individuos pertenezcan al mismo rango, es seleccionado al que contribuya más a la diversidad en el espacio objetivo.

Posteriormente, en la línea 7 se realiza la **Reproducción**, donde se puede implementar cualquier operador de cruce y mutación. En la literatura multi-objetivo los más aplicados son los operadores de cruce SBX y mutación polinomial propuestos en (Mitchell, 1998) y (Agrawal y col., 1994) por lo que son las componentes consideradas, junto con algunas extensiones que se analizarán posteriormente. A continuación se realiza la **Evaluación** de cada individuo hijo nuevo  $Q_t$ . Finalmente, siendo la principal novedad de esta propuesta se implementa la **Fase de remplazo** en la línea 9. En esta fase se combinan los individuos padre  $P_t$  y los individuos hijo  $Q_t$  y se seleccionan a los individuos ( $P_{t+1}$ ) que sobrevivirán a la siguiente generación. Se puede observar el proceso en cada generación en la figura 3.1, en donde dados los conjuntos  $P_t$  y  $Q_t$  se realiza la selección de  $P_{t+1}$ . Dado que la novedad de VSD-MOEA radica en su fase de remplazo, ésta se explica en detalle en la siguiente sección.

---

#### Algoritmo 12 Procedimiento principal del VSD-MOEA

---

- 1: **Inicialización:** Generar una población inicial  $P_0$  con  $N$  individuos.
  - 2: **Evaluación:** Evaluar a todos los individuos en la población  $P_0$ .
  - 3:  $Q_0 = \emptyset$
  - 4:  $t = 0$
  - 5: **while** Criterio de paro
  - 6:   **Selección:**  
     Realizar la selección por torneo binario de  $P_t$ , y crear  $Q'_t$ , el criterio de selección es en base al mejor rango  
     y en caso de empate es seleccionado el individuo cuya contribución a la diversidad en los objetivos sea mayor.
  - 7:   **Reproducción:**  
     Aplicar los operadores genéticos a la población  $Q'_t$  para generar la población hijo  $Q_t$ .
  - 8:   **Evaluación:**  
     Evaluar a todos los individuos en la población  $Q_t$ .
  - 9:   **Fase de remplazo:**  
     Combinar  $P_t$  con  $Q_t$  y aplicar el remplazo para crear  $P_{t+1}$ .
  - 10:    $t = t + 1$
  - 11: **end while**
-

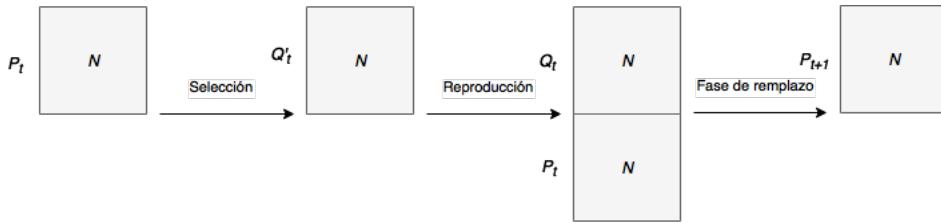


FIGURA 3.1: Proceso para seleccionar una población  $P_{t+1}$  y generar una población nueva  $Q_{t+1}$  en cada generación.

## Fase de remplazo

En la fase de remplazo a partir de  $2N$  individuos, donde  $N$  corresponden a los individuos de la generación anterior ( $P_t$ ) y  $N$  a los hijos ( $Q_t$ ), se eligen  $N$  individuos para sobrevivir, convirtiéndose en los individuos de la siguiente generación ( $P_{t+1}$ ), como se observa en la parte izquierda de la figura 3.1. En la fase de remplazo se considera la diversidad en el espacio de las variables y el espacio objetivo simultáneamente. Particularmente, en base al criterio de paro, en las primeras etapas se induce un mayor grado de exploración en el espacio de las variables, es decir, se da una importancia grande a la diversidad en el espacio de las variables, y conforme transcurre la ejecución, la importancia que se da a la diversidad en el espacio de las variables se decrementa gradualmente, transformándose así en un esquema más tradicional, donde se desea obtener soluciones diversas en el espacio objetivo y que estén próximas al frente de Pareto. De esta forma, se intenta promover una exploración apropiada y evitar converger prematuramente a ciertas regiones reducidas del espacio de búsqueda, lo cual es especialmente importante en el caso de ejecuciones a largo plazo, que es el ámbito en el que los métodos que incorporan un control especial de diversidad en el espacio de las variables reportan mayores beneficios. La estrategia para inducir la diversidad está basado en un esquema de aplicación de penalizaciones, similar al utilizado en Segura y col., 2015 para el caso de optimización mono-objetivo.

La idea base, consiste en que después de seleccionar cada individuo, y en base a una métrica de distancia<sup>1</sup>, se sitúa una hiperesfera de tamaño  $D$  centrada en el individuo de referencia, y se desea evitar que cualquier otro individuo que esté dentro de la hiperesfera sea seleccionado. La fase de remplazo se describe en el Algoritmo 13, donde en cada generación se calcula un valor  $D$  que como ya se mencionó es utilizado para definir el radio de las hiperesferas. Este valor es calculado en la línea 3, teniendo en cuenta el número de generaciones transcurridas ( $G_{Transcurridas}$ ) y el número de generaciones a ejecutar ( $G_{Final}$ ). Nótese que usar hiperesferas de tamaño grande implica inducir mayores grados de diversidad, pues se fuerza a elegir individuos más distantes entre sí. Para relacionar la diversidad mantenida con el criterio de paro, el valor  $D$  de las hiperesferas comienza con un valor inicial  $D_i$ , y posteriormente éste va decrementándose linealmente conforme avanza la ejecución del algoritmo. Concretamente, es decrementado linealmente hasta llegar al valor cero, que se da justo cuando han transcurrido la mitad de generaciones. Esto provoca que el método se transforme en un MOEA tradicional en el que no se considera la diversidad en el espacio de las variables una vez que han transcurrido la mitad de las generaciones ya que no se producirán penalizaciones.

<sup>1</sup>En esta tesis sólo se considera el dominio continuo, haciendo uso de la distancia Euclídea

**Algoritmo 13** Fase de remplazo del VSD-MOEA

---

```

1: Entrada:  $P_t$  (Población de la generación actual),  $Q_t$  (Población hija de la generación actual)
2: Salida:  $P_{t+1}$ 
3:  $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$ 
4:  $P_{t+1} = \emptyset$ 
5:  $R_t = P_t \cup Q_t$ 
6:  $\text{Penalizados} = \emptyset$ 
7: mover(  $R_t$ ,  $P_{t+1}$ , Los mejores en cada objetivo)
8: while  $|P_t| \leq N$ 
9:   Calcular Diversidad_Espacio_Variables(  $R_t$ ,  $P_{t+1}$ )
10:  mover( $R_t$ , Penalizados, Diversidad en el espacio de las variables < D)
11:  if  $R_t$  está vacío then
12:    Calcular Diversidad_Espacio_Variables(Penalizados,  $P_{t+1}$ )
13:    mover(Penalizados,  $R_t$ , Más alejado en el espacio de las variables)
14:  end if
15:  ordenación – eficiente – basado – no – dominados( $R_t \cup P_{t+1}$ )
16:  Calcular Diversidad_Espacio_Objetivo( $R_t$ ,  $P_{t+1}$ )
17:  mover( $R_t$ ,  $P_{t+1}$ , Menor rango en caso de empate seleccionar al más alejado en el espacio objetivo)
18: end while return  $P_{t+1}$ 

```

---

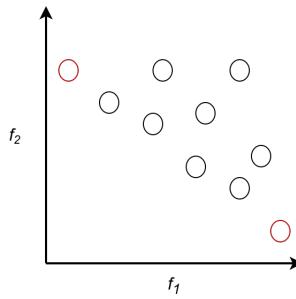


FIGURA 3.2: Soluciones que corresponden a los extremos en dos objetivos.

En las líneas 7, 10 y 17 del pseudocódigo, es utilizado el procedimiento *mover(A, B, condición)* el cual consiste en transferir a los individuos del conjunto A que cumplen la condición indicada hacia el conjunto B. En el conjunto  $R_t$  se incluyen todos los individuos que son candidatos para ser seleccionados, es decir, la unión de los individuos de la generación anterior y los hijos e inicialmente se indica que no existen individuos penalizados (línea 6). En cada generación, los primeros individuos que se seleccionan como supervivientes (se pasan a  $P_{t+1}$ ) son los individuos extremos del conjunto  $R_t$  (línea 7), así son seleccionados  $M$  individuos que tienen la mejor aptitud en cada objetivo de forma independiente. Por ejemplo para el caso de dos objetivos en la figura 3.2 los individuos extremos están indicados de color rojo. Posteriormente hasta obtener  $N$  individuos en  $P_{t+1}$  se realizan los siguientes pasos (líneas 9 - 17). Primeramente se calcula el DCN de cada individuo pendiente (línea 9), tomando a los individuos ya seleccionados como referencia. Los individuos que se encuentren demasiado cercanos a cualquier individuo de referencia, son transferidos al conjunto de individuos penalizados (línea 10), indicando que en principio, son individuos no seleccionables. Después de tratar la diversidad en el espacio de las variables y sólo considerando a los individuos que son candidatos, es decir a los individuos no penalizados, el proceso de selección se enfoca en el espacio objetivo, donde para seleccionar a los siguientes individuos, en cada paso se calcula el rango de dominancia. Para el cálculo del rango este procedimiento considera a los individuos de referencia — los ya seleccionados — junto a los individuos candidatos (línea 15). A continuación se elige al individuo candidato que tiene el mínimo rango, y en caso de empate, al que ofrezca mejor diversidad en el espacio objetivo (línea 17). El proceso para medir la contribución en el espacio objetivo se explica posteriormente. En la figura 3.3 se presenta un ejemplo en el caso de dos objetivos, donde los círculos con borde de color rojo representan a los individuos de referencia o ya

seleccionados y con bordes de color verde a los individuos candidatos. En este caso, se elegiría a alguno de los 3 individuos de color verde que fueron clasificados dentro del rango 1.

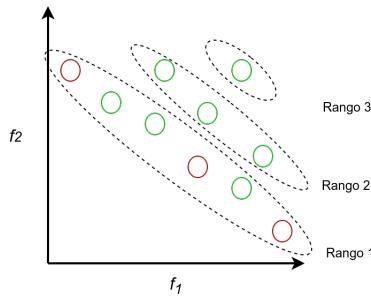


FIGURA 3.3: Clasificación de rangos con los individuos de referencia en color rojo y los candidatos de color verde.

En caso que todos los individuos estén penalizados (línea 11), significa que no se está obteniendo el nivel de diversidad deseado en el espacio de las variables. Por ello, en ese caso se elige al individuo que tenga una mayor contribución a la diversidad en el espacio de las variables, i es decir, aquel que esté mas alejado a los individuos de referencia (líneas 12-13).

### Ilustración de la fase de remplazo

En esta sección se ilustra con un ejemplo visual el comportamiento de la fase de remplazamiento correspondiente al escenario dado en la figura 3.4, donde se muestran ocho individuos con su ubicación en el espacio de las variables y en el espacio objetivo respectivamente. Los individuos seleccionados como supervivientes y que conforman el conjunto de referencia para el cálculo de la contribución a la diversidad están indicados con un borde de color rojo. El conjunto de individuos hijos y padres son respectivamente  $Q_t = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P_t = \{5, 6, 7, 8\}$  y el número de individuos a seleccionar son  $N = 4$ . Al inicio  $R_t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , y dado que los individuos extremos son  $\{1, 2\}$  estos son trasladados a  $P_{t+1}$  y son marcados en color rojo.

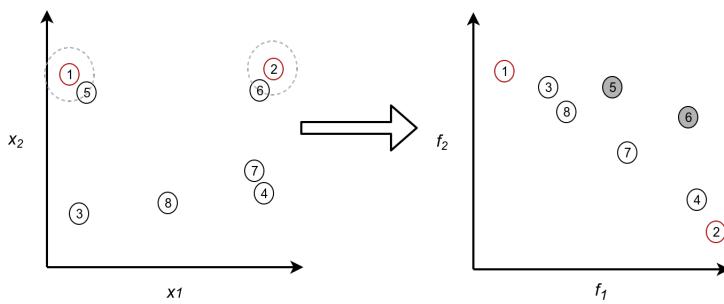


FIGURA 3.4: Simulación de la fase de remplazo, en la parte izquierda están los individuos en el espacio de las variables y en la parte de la derecha el espacio objetivo.

En la primer iteración en el espacio de las variables se traza un hiperesfera — marcada en color gris en la figura — centrada en cada uno de los individuos de referencia ( $\{1, 2\}$ ). Dado que los individuos 5 y 6 se ubican dentro de la hiperesfera de cada uno de los individuos de referencia, estos son movidos al conjunto de penalizados que son identificados con fondo de color gris en el espacio objetivo.

Después de considerar el espacio de las variables, para el conjunto de individuos pendientes no penalizado se debe seleccionar al mejor individuo en lo referente al espacio objetivo. Para ello en primer lugar se debe implementar una clasificación por rangos, haciendo énfasis en que los individuos  $\{5, 6\}$  no se consideran en la clasificación por rangos ya que están penalizados, con lo que sólo se consideran los individuos no penalizados junto con los individuos ya seleccionados. En este caso, el primer rango está conformado por los individuos  $r_1 = \{1, 3, 8, 7, 4, 2\}$ , y por lo tanto el conjunto de candidatos no penalizados que puede ser seleccionado es  $R_t = \{3, 4, 7, 8\}$ . Se procede a buscar el menor rango que contiene individuos previamente no seleccionados, y en este caso los pendientes que pertenecen a dicho rango son el conjunto  $\{3, 4, 7, 8\}$ . Entonces para desempatar entre ellos se debe realizar el cálculo de la diversidad en el espacio objetivo del que aún no se presentan los detalles, pero en este caso visualmente se puede ver que se seleccionaría el 7 ya que contribuye más a la diversidad en el espacio objetivo. De esta forma, tras estos pasos los individuos de referencia en la siguiente iteración son  $P_{t+1} = \{1, 2, 7\}$ , como se observa en la figura 3.5.

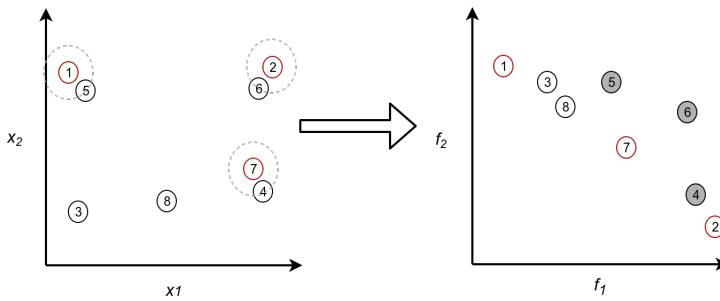


FIGURA 3.5: Simulación de la fase de remplazo, en la parte izquierda están los individuos en el espacio de las variables y en la parte de la derecha el espacio objetivo.

Posteriormente, para seleccionar al siguiente individuo se realiza el mismo procedimiento pero ahora considerando que el individuo 7 está en el conjunto de referencia. Al ser agregado se genera una hipersfera adicional y en este caso, como resultado se penaliza al individuo con etiqueta 4, el cual ya no será considerado en la clasificación de rangos.

Dado que los dos individuos que están en  $R_t = \{3, 8\}$  tienen el mismo rango, es necesario considerar su contribución a la diversidad del espacio objetivo, siendo el mejor candidato el individuo con etiqueta 8, el cual es seleccionado y movido al conjunto de referencia  $P_{t+1} = \{1, 8, 7, 2\}$ . El proceso termina ya que los  $N$  individuos fueron seleccionados, terminando la simulación como se muestra en la figura 3.6.

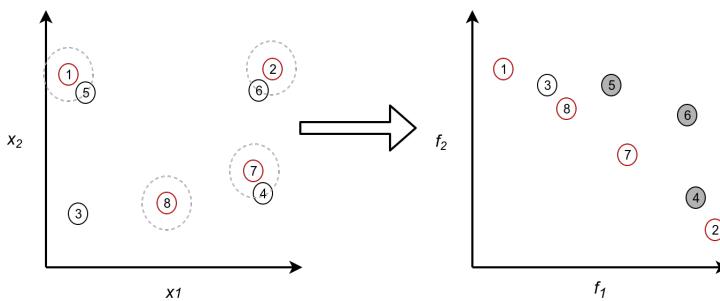


FIGURA 3.6: Simulación de la fase de remplazo, en la parte izquierda están los individuos en el espacio de las variables y en la parte de la derecha el espacio objetivo.

Cabe destacar que si el radio de la hiperesfera es cero o muy pequeño, el comportamiento del algoritmo sería similar a los MOEAs tradicionales (Deb y col., 2002a), pues no existirían individuos penalizados, y simplemente se elegiría en base a la dominancia y contribución a la diversidad en el espacio objetivo. Al contrario, el efecto de asignar el radio de la hiperesfera con un valor muy grande produce un grado elevado de exploración. Así, en nuestro ejemplo si este valor fuera muy elevado inicialmente, se ubicarían a todos los individuos candidatos en el conjunto de penalizados, seleccionando así al individuo que tiene mayor contribución a la diversidad en el espacio de las variables, por lo que como se muestra en la figura 3.7, al inicio de esta simulación el individuo seleccionado sería el 8 en lugar del 7 como ocurrió anteriormente.

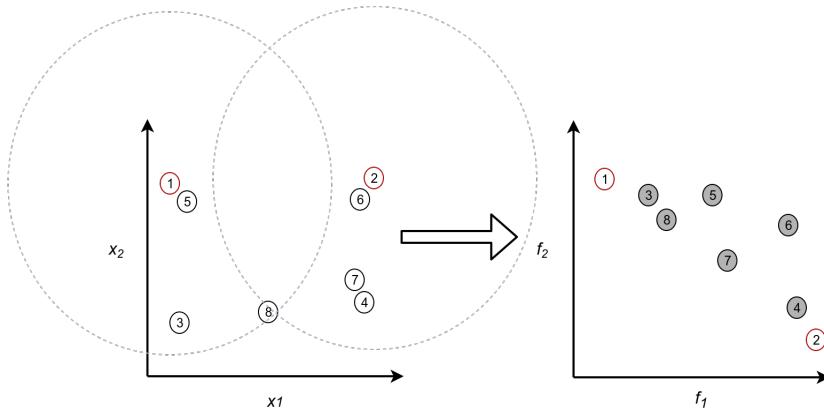


FIGURA 3.7: Simulación de la fase de remplazo, al asignar un valor elevado al radio de la hiperesfera.

## Diversidad en el espacio objetivo

Tal y como se ha descrito tras identificar un conjunto de individuos que contribuyen suficientemente en la diversidad del espacio de las variables, se realiza la selección del individuo con menor rango y en caso de que existan varios individuos candidato con menor rango, se elige al que contribuye más a la diversidad en el espacio objetivo. Para ello se podría implementar cualquiera de los métodos existentes para cuantificar la contribución de cada individuo a la diversidad, o inclusive se podría realizar en base a indicadores.

Un método popular para mantener diversidad en el espacio objetivo es el *Pruning of Non-Dominate Set* que extiende el método implementado en el NSGA-II (Kukkonen y Deb, 2006), este procedimiento de forma iterativa elimina al individuo cuya contribución a la diversidad sea mínima. A pesar de que este método es ampliamente usado tiene inconvenientes importantes especialmente para casos de más de dos objetivos con lo que a la hora de escalar en objetivos usar este esquema es problemático.

Otra posibilidad son los métodos clasificados como *aglomerativos*, donde cada observación es considerada como un clúster, e iterativamente mediante una regla establecida, se combinan pares de clústeres hasta disponer de tantos clústeres como individuos se desean seleccionar. Una posible regla para combinar dos clústeres, consiste en seleccionar al par con la mínima distancia de cercanía, esta distancia de cercanía puede ser definida como la mínima distancia euclídea<sup>2</sup> entre cualquier par de puntos que pertenezcan a clústeres diferentes tal y como se propone en (Leskovec, Rajaraman y Ullman, 2014).

<sup>2</sup>Este problema es conocido como "Nearest-Neighbor".

Para nuestro caso la aplicación directa del algoritmo anterior no es posible, pues en el mismo no se tiene en cuenta las penalizaciones, pero siguiendo el mismo principio se propone una variante voraz que consiste en seleccionar en cada paso al individuo candidato con el máximo valor de DCN medido en el espacio objetivo. Entonces, se puede visualizar como que cada individuo de referencia ( $P_{t+1}$ ) es un clúster y cada individuo candidato ( $R_t$ ) son nuevos clústeres candidatos como se muestra en la figura 3.8. Con el objetivo de tener clústeres lejanos se selecciona al individuo candidato que tenga mayor aportación a la diversidad. Por lo tanto, el proceso para seleccionar a un individuo candidato, consiste en asociar a cada individuo candidato con el individuo ya seleccionado más cercano y el candidato seleccionado será el que tenga mayor distancia de cercanía a su respectivo individuo de referencia, como se muestra en la figura 3.9, donde los círculos con borde de color rojo corresponden a los individuos de referencia y los de color verde a los individuos candidatos. En este caso el candidato con etiqueta 6 es el que tiene mayor distancia de cercanía a su individuo de referencia asociado con etiqueta 2.

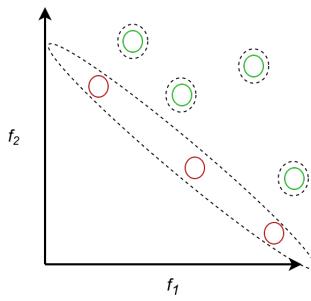


FIGURA 3.8: Los individuos de referencia con borde rojo representan un cluster y los candidatos con borde verde representan un cluster cada uno.

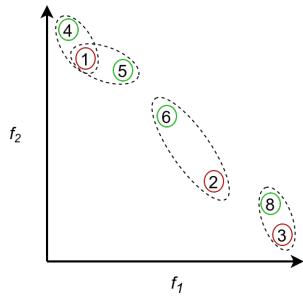


FIGURA 3.9: Asociación de cada individuo candidato con su individuo de referencia más cercano.

Este proceso de selección promueve calidad y diversidad en el espacio objetivo ya que inicialmente en cada fase de remplazo se seleccionan los individuos extremos, y posteriormente se obtiene diversidad al escoger al candidato con la máxima distancia de cercanía que pertenezca al mejor rango posible. El proceso para seleccionar al individuo con mayor distancia de cercanía está definido en el algoritmo 14, donde se calcula la menor distancia euclídea entre  $R_t$  y  $P_{t+1}$ , así de forma iterativa se almacena la mayor distancia euclídea entre estos dos conjuntos ya definida como la distancia de cercanía, por último el procedimiento regresa al individuo el cual tiene mayor distancia de cercanía a su individuo de referencia asociado.

**Algoritmo 14** Procedimiento para el cálculo de la diversidad en el espacio objetivo

---

```

1: Entrada:  $R_t$  (Soluciones disponibles),  $P_{t+1}$  (Soluciones seleccionadas)
2: for  $r \in R_t$ 
3:   Maxima_Distancia =  $-\infty$ 
4:   for  $p \in P_{t+1}$ 
5:      $D_{r,p} = \sqrt{\sum_{m \in M} (r.obj[m] - p.obj[m])^2}$ 
6:     Distancia_Proximidad = mínimo(MaxDist,  $D_{r,p}$ )
7:   end for
8:   if Distancia_Proximidad > Maxima_Distancia then
9:     Maxima_Distancia = Distancia_Proximidad
10:    Seleccionado =  $r$ 
11:   end if
12: end for
13: return Seleccionado

```

---

La propuesta anterior fue la que se implementó inicialmente, pero experimentalmente se pudo comprobar que ocurrían situaciones no deseadas. Particularmente, puede ocurrir que en una población aparezca algún individuo con distancias muy grandes a los individuos de referencia pero que su contribución sea mínima en el sentido de que se produzca que a costa de mejorar de forma mínima en una función objetivo se produzca un empeoramiento grande en otro objetivo, y que precisamente por haber empeorado mucho, la distancia pase a tener un valor grande, tal y como se ilustra en la figura 3.10, donde el individuo candidato con etiqueta {2} es seleccionado a pesar de que con respecto al individuo 1 casi no contribuye.

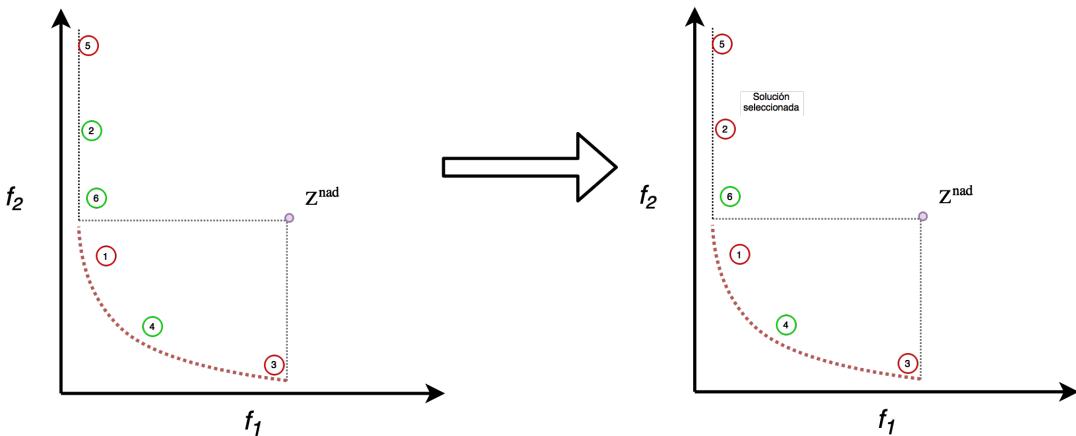


FIGURA 3.10: Análisis del procedimiento de selección propuesto, las soluciones de referencia están representadas con bordes de color rojo, las soluciones candidatas con bordes de color verde, el frente de Pareto está representado por una línea roja punteada.

Una propuesta para solventar esta problemática que requiere cambios mínimos del método previamente descrito, consiste en cambiar el cálculo de la distinta de forma que al calcular la distancia de un individuo frente a otro de referencia sólo se consideren las distancias correspondientes a los objetivos en los que se mejora. Cabe destacar que esta problemática que encontramos, es exactamente la que se daba con la versión original del IGD y la forma en que se resuelve sigue el mismo principio que se usa para definir la métrica generacional invertida modificada IGD+ (Ishibuchi y col., 2015). A esta distancia la llamamos *distancia de mejoría* ( $D^b(p_i, r_i)$ ) y queda definida de la siguiente forma:

$$D^b(p_i, r_i) = \sum_{i \in M} d_i^2 \quad (3.1)$$

donde  $d_i = \max\{0, p_i - r_i\}$

donde  $p_i$  es un individuo que pertenece a los seleccionados o de referencia  $P_{t+1}$ , y por otra parte  $r_i$  pertenece a los individuos candidatos  $R_t$ .

Por último cabe destacar que dado que la distancia se cuantifica como la distancia de mejoría, las zonas con menor pendiente tienden a ser cubiertas con menos puntos por lo que en este sentido es bueno para minimizar el IGD+ y para maximizar el hipervolumen, que son métricas muy aceptadas en la comunidad. Para verificar el efecto que existe al implementar la distancia de mejoría de forma empírica, se realizó lo siguiente. Se generaron 100000 puntos de forma aleatoria en el frente de Pareto el cual corresponde a la ecuación  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ , posteriormente se ejecutó dos veces el procedimiento de selección, uno mediante la distancia Euclídea y otro con la distancia de mejoría, donde en cada una se seleccionaron 50 puntos.

En la figura 3.11 se muestran los puntos seleccionados mediante la distancia Euclídea (en la parte izquierda) y la distancia de mejoría (en la parte derecha). Se puede observar que en la distancia de mejoría no son seleccionados los puntos que corresponden a las zonas planas, sin embargo son mantenidas las regiones más significativas. Para demostrar esto, en la tabla 3.1 son mostrados los correspondientes valores del IGD+ e hipervolumen, en este último se fijó el punto de referencia en  $(1,1,1,1)$ . En base a este análisis empírico se puede observar la efectividad de implementar la distancia de mejoría como parte del procedimiento de selección descrito con anterioridad.

TABLA 3.1: Análisis del proceso de selección con la distancia de mejoría y la distancia Euclídea

	IGD+	HV
Distancia Euclídea	0.00425	0.41632
Distancia de mejoría	<b>0.00399</b>	<b>0.41663</b>

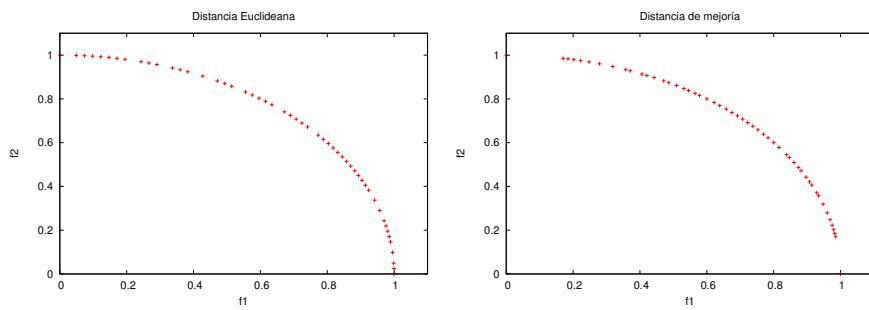


FIGURA 3.11: Proceso de selección utilizando la distancia Euclídea en la parte izquierda y la distancia de mejoría en la parte derecha.

### 3.4. Análisis del proceso de búsqueda en VSD-MOEA

En el caso mono-objetivo se ha mostrado que los algoritmos basados en diversidad ofrecen mejores resultados especialmente en instancias que son consideradas difíciles como es mostrado en (Segredo, Segura y León, 2011). Además, aumentan la robustez obtenida en el largo plazo, incrementando bastante la probabilidad de llegar a soluciones de alta calidad frente a los algoritmos que permiten convergencias más rápidas. Una de las propiedades que más complejidad introduce para los optimizadores es la deceptividad. En la figura 3.12 se muestra una función completamente deceptiva. Obviamente lidiar con este tipo de funciones es tremadamente complejo, aunque dependiendo de la función el grado de deceptividad varía y por tanto su complejidad. Así, una función puede tener sólo ciertas regiones o cierto subconjunto de variables que sean deceptivas.

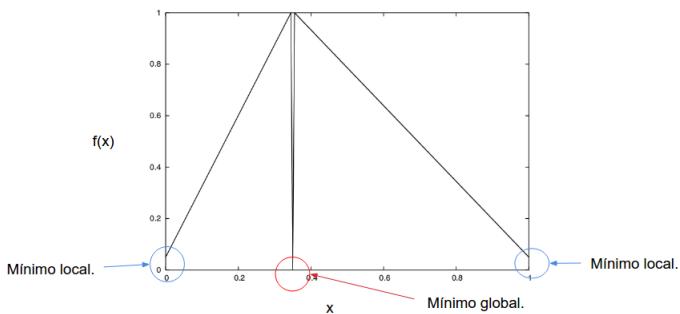


FIGURA 3.12: Forma de una función deceptiva en dominios continuos.

La validación completa del algoritmo se realiza posteriormente en el capítulo 6, a continuación es presentado un análisis del algoritmo propuesto y de algunos MOEAs populares. En base a su grado de dificultad se decidió utilizar la instancia de prueba WFG5 la cual es deceptiva, se consideran dos objetivos y dos variables de decisión, donde una variable es de posición y la otra de distancia. Particularmente en el VSD-MOEA es asignado el parámetro inicial  $D_I = 0.2 \times \sqrt{2}$ , el resto de parámetros están indicados en la validación experimental (capítulo 6).

Como es indicado en el capítulo 2, el óptimo en las variables de distancia, que en este caso es la variable 2, se encuentra en  $2i \times 0.35$ , siendo  $i$  el número de la variable. Por tanto, en este caso, los óptimos de Pareto tienen valor 1,4 en la segunda variable, mientras que para la variable de posición se necesitan tener valores diferentes en su dominio  $[0, 2]$ , aunque de forma no uniforme. La deceptividad de este caso, provoca que haya dos óptimos locales en los valores 0 y 4 en los que es muy fácil caer. Para llevar a cabo este análisis se ejecutó VSD-MOEA durante mil generaciones, al igual que los algoritmos NSGA-II, GDE3, MOEA/D, MOMBI-II y SMS-EMOA.

A continuación se muestran un conjunto de figuras que en la parte izquierda contienen el conjunto de individuos de la población en el espacio objetivo, mientras que la parte derecha muestra el espacio de decisión de los mismos. La diferencia entre las distintas figuras es el número de generaciones transcurridas. Además, para la parte correspondiente al espacio de decisión se muestra una línea de color rojo correspondiente al valor de  $x_2$  donde está el óptimo global, así como dos líneas de color azul indicando los extremos de la variable y que corresponden con óptimos locales.

Se observa que conforme transcurren las generaciones los algoritmos del estado del arte ubican gran parte de las soluciones candidatas cerca de los óptimos locales. Particularmente al 1 % (figura 3.15) del total

de generaciones (generación 10) los algoritmos MOEA/D, NSGA-II y el GDE3 ubican prácticamente la totalidad de las soluciones cerca de los óptimos locales. Por su parte, los algoritmo MOMBII, SMS-EMOA y VSD-MOEA, todavía mantienen individuos diversos. Particularmente, el MOMBII utiliza un proceso adaptativo por lo tanto hasta este momento mantiene individuos diversos.

Posteriormente, al 40 % de las generaciones (figura 3.15), todos los algoritmos del estado del arte ubicaron soluciones exclusivamente en las regiones que corresponden a los óptimos locales, mientras que el VSD-EMOA mantiene una cantidad de soluciones en el óptimo global, y otra cantidad de individuos están dispersos en el espacio de las variables. Al finalizar la ejecución (figura ??), el VSD-MOEA es el único algoritmo que sitúa las soluciones en la región de óptimos globales, mientras que el resto de algoritmos ya se quedaron estancados en los óptimos locales. En el espacio objetivo también se aprecia la ventaja de utilizar el VSD-MOEA.

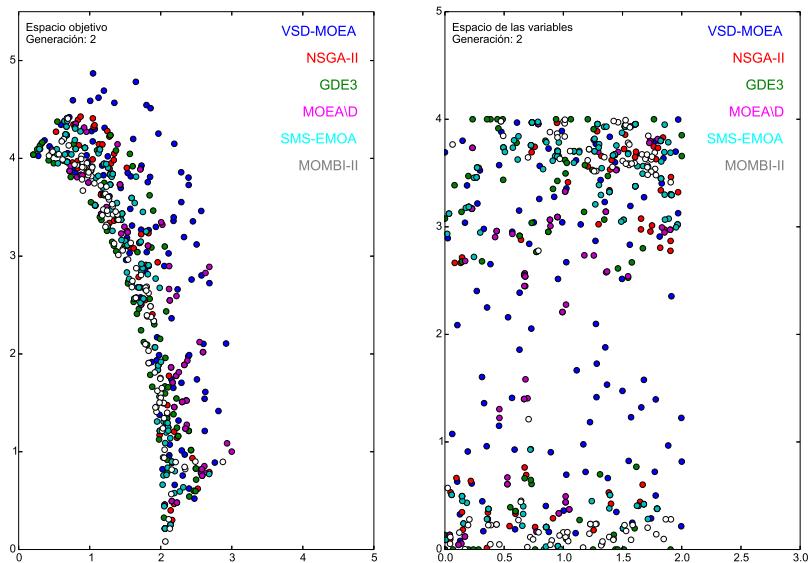
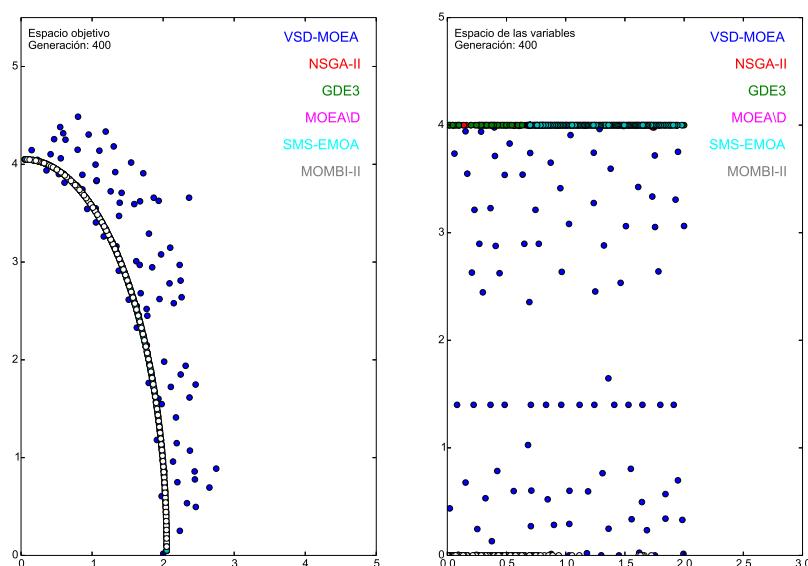
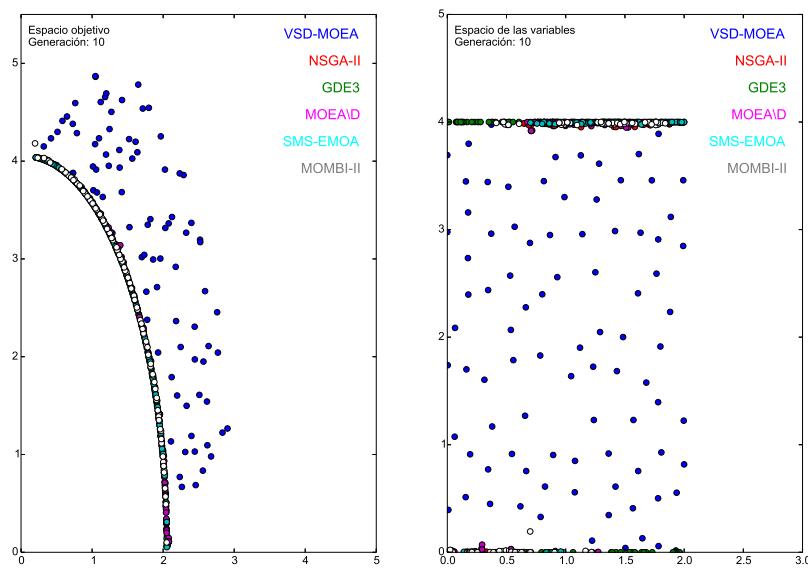


FIGURA 3.13: Simulación de la fase de remplazo al 0.1 % del total de generaciones.



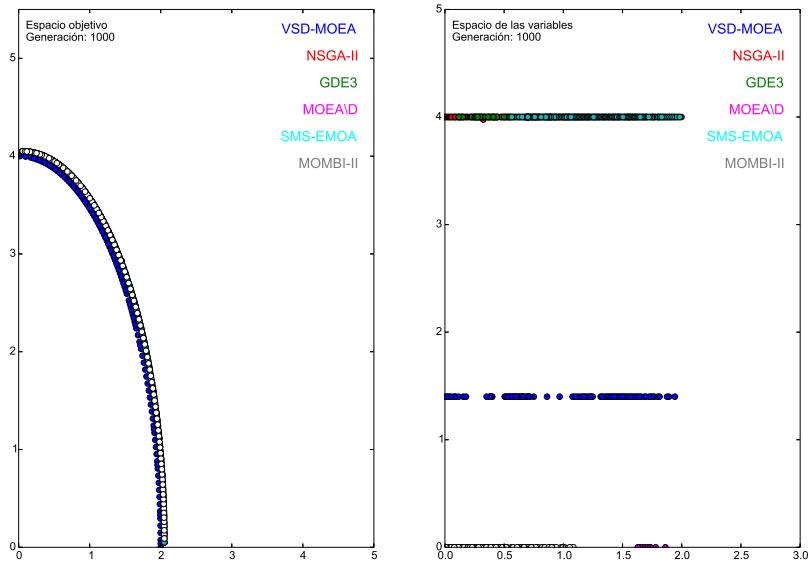


FIGURA 3.16: Simulación de la fase de remplazo al 100 % del total de generaciones.

### 3.5. Complejidad Algorítmica

La propuesta algorítmica que se describe posee un orden de complejidad elevado. Aunque es posible disminuir esta complejidad haciendo uso de estructuras de datos o algoritmos más sofisticados, disponer de dicha implementación no fue un objetivo de esta tesis, ya que la orientación fue la de demostrar el efecto que tiene la diversidad en el proceso evolutivo y diseñar un mejor algoritmo que los del estado del arte sin importar la complejidad. Por tanto, el análisis de complejidad del algoritmo se basa en la implementación actual, que es una implementación directa del algoritmo descrito. Para este análisis se define a  $N$  como el tamaño de la población,  $M$  el número de objetivos y  $d$  el número de variables.

Inicialmente como es indicado en el algoritmo 15, para identificar a los individuos extremos es necesario realizar  $2N$  iteraciones para encontrar a los  $M$  mejores individuos de cada función objetivo. Posteriormente, el ciclo principal es realizado  $N - M$  veces (líneas 9 - 17), y los tres bloques que se ejecutan corresponden a los dos procedimientos para calcular la contribución de diversidad en cada espacio y el método de clasificación de rangos. Para calcular la contribución de cada individuo en el espacio de las variables (líneas 9 y 10) se realizan  $\sum_{i=1}^{(N-M)} (\sum_{j=1}^{(i+M-1)} (\sum_{k=1}^{(2N-i-M+1)} d))$  iteraciones, donde la sumatoria interna corresponde a los individuos candidatos  $R_t$  los cuales van decrementándose uno a uno en cada iteración (en el peor caso), la segunda sumatoria es de los individuos seleccionados los cuales incrementan uno a uno en cada iteración, por último la sumatoria externa indica que en total se realizarán  $N - M$  iteraciones. Resolviendo la sumatoria se obtiene lo siguiente<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{(N-M)} \sum_{j=1}^{(i+M-1)} \sum_{k=1}^{(2N-i-M+1)} d = \\ -\frac{dM^3}{3} - dM^2N - \frac{dM^2}{2} + dMN + \frac{dM}{6} + \frac{2dN^3}{3} - \frac{dN^2}{2} - \frac{dN}{6} \end{aligned} \quad (3.2)$$

<sup>3</sup>Los cálculos se comprobaron con la herramienta [Wolfram](#).

Así, para estimar la cota superior sólo se toman los términos dominantes, teniendo que el algoritmo es  $O(dN^3 - dM^2N)$ . Por tanto, se puede observar que el número de individuos afecta de forma significativa en la complejidad.

Para el segundo bloque, en el caso de que estén todos los individuos penalizados y por lo tanto no existan candidatos (líneas 11 - 13), se realiza el cálculo de la contribución de diversidad entre los individuos penalizados y los de referencia con el objetivo de seleccionar al individuo con mayor contribución. La complejidad de este proceso es la misma que la indicada en la ecuación (3.2) ya que se realiza el mismo procedimiento, y con la misma cantidad de individuos. Por tanto su complejidad es  $O(dN^3 - dM^2N)$ , el término negativo proporciona una cota más ajustada, por simplicidad se considera  $O(dN^3)$ .

Por otra parte, para realizar el cálculo de la contribución de cada individuo en el espacio objetivo (línea 14) y considerando el peor caso que es cuando todos los individuos pertenecen al mismo rango y no existen individuos penalizados. Se observa que este es el mismo caso que el analizado previamente, salvo que cada acción en lugar de recorrer  $d$  variables, recorre  $M$  funciones objetivos. Por tanto la complejidad es  $O(MN^3 - M^3N)$ .

Por último en el procedimiento de *Ordenación-eficiente-basado-no-dominados* se estima que en el peor caso que es cuando no existen individuos penalizados y todos sean del mismo rango. En ese caso la complejidad es  $O((N - M)M(2N)^2)$ .

Considerando los términos dominantes se establece que la complejidad del VSD-MOEA es  $O(MN^3 + dN^3)$ . Dado que habitualmente el valor de  $d$  es menor que el valor de  $M$ , realizar de forma eficiente la parte asociada al cálculo de la diversidad del espacio de las variables parece importante. Una forma trivial de bajar la complejidad sería aprovechar los cálculos realizados en iteraciones anteriores para calcular el vecino más cercano. Una vez hecha esa adaptación, la complejidad seguiría pasaria a ser  $O(MN^3)$  y para bajar de esa complejidad ya habría que atacar también el cálculo eficiente de los rangos. Aprovechando cálculo de generaciones anteriores posiblemente también se podría eficientar, aunque ya sería algo más complejo. Esta es una de las tareas que se espera realizar en el futuro próximo.

En la tabla 3.2 se presentan las complejidades de varios de los algoritmos del estado-del-arte y el VSD-MOEA, donde el MOEA/D es el que tiene un grado de menor complejidad  $O(MNT)$  donde  $T$  es el tamaño de cada vecindad y los algoritmos de mayor complejidad son el VSD-MOEA y al SMS-EMOA. sin embargo el SMS-EMOA aumenta exponencialmente conforme aumenta el número de objetivos, aspecto que no ocurre en VSD-MOEA.

TABLA 3.2: Grado de complejidad de los MOEAs más populares

Algoritmo	NSGA-II	GDE3	MOMBI-II	SMS-EMOA	MOEA/D	VSD-MOEA
Complejidad	$O(MN^2)$	$O(N \log^{M-1} N)$	$O((N^2)(\log(N) + M))$	$O(MN^2 + N^M)$	$O(MNT)$	$O(MN^3 + dN^3)$

**Algoritmo 15** Calculo de la complejidad de la fase de remplazo del VSD-MOEA

	Costo	Iteraciones
1: Entrada: $P_t$ (Población de la generación actual), $Q_t$ (Población hija de la generación actual)		
2: Salida: $P_{t+1}$	$c_1$	1
3: $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$	$c_2$	1
4: $P_{t+1} = \emptyset$	$c_3$	$2N$
5: $R_t = P_t \cup Q_t$	$c_4$	1
6: $Penalizados = \emptyset$	$c_5$	$2NM$
7: mover( $R_t, P_{t+1}$ , Los mejores en cada objetivo)	$c_6$	$N - M$
8: <b>while</b> $ P_t  \leq N$	$c_7$	$\sum_{i=1}^{(N-M)} \sum_{j=1}^{(i+M-1)} \sum_{k=1}^{(2N-i-M+1)} d$
9:   Calcular <b>Diversidad_Espacio_Variables</b> ( $R_t, P_{t+1}$ )	$c_8$	$(N - M)$
10:   mover( $R_t, Penalizados$ , Diversidad en el espacio de las variables < D)		
11: <b>if</b> $R_t$ está vacío <b>then</b>		
12:     Calcular <b>Diversidad_Espacio_Variables</b> ( $Penalizados, P_{t+1}$ )	$c_9$	$\sum_{i=1}^{(N-M)} \sum_{j=1}^{(i+M-1)} \sum_{k=1}^{(2N-i-M+1)} d$
13:     mover( $Penalizados, R_t$ , Más alejado en el espacio de las variables)	$c_{10}$	$(N - M)$
14: <b>end if</b>		
15:   ordenación – eficiente – basado – no – dominados( $R_t \cup P_{t+1}$ )	$c_{11}$	$(N - M)M(2N)^2$
16:   Calcular <b>Diversidad_Espacio_Objetivo</b> ( $R_t, P_{t+1}$ )	$c_{12}$	$\sum_{i=1}^{(N-M)} \sum_{j=1}^{(i+M-1)} \sum_{k=1}^{(2N-i-M+1)} M$
17:   mover( $R_t, P_{t+1}$ , Menor rango en caso de empate seleccionar al más alejado en el espacio objetivo)	$c_{13}$	$N - M$
18: <b>end while</b>		



## Capítulo 4

# Algoritmos basados en Descomposición con Control de Diversidad en el Espacio de Decisión

### 4.1. Introducción

Los MOEAs basados en descomposición transforman un problema multi-objetivo en múltiples problemas mono-objetivo, tal y como se ha descrito anteriormente. Entre todos los métodos basados en descomposición, MOEA/D es claramente el más popular de todos, por lo que los desarrollos realizados en esta tesis se han hecho extendiendo a este esquema. Como ya se ha mencionado anteriormente la mayoría de algoritmos multi-objectivo funcionan sin promover explícitamente la diversidad en el espacio de las variables y MOEA/D no es una excepción. Dada las hipótesis a estudiar en esta tesis, se proponen una serie de algoritmos multi-objetivo basados en descomposición y con mecanismos para administrar la diversidad. En concreto se propusieran tres alternativas:

- MOEA/D with Enhanced Variable Space Diversity (MOEA/D-EVSD).
- MOEA/D with Special Elitism Based in Variable Diversity (MOEA/D-SEBV).
- Variable Space Diversity MOEA/D (VSD-MOEA/D).

Las propuestas construidas son extensiones del MOEA/D en las que se incluye un esquema implícito o explícito para fomentar o controlar la diversidad en el espacio de las variables. La principal novedad de estas variantes es el hecho de fomentar la diversidad en el espacio de las variables pues la mayoría de los MOEAs del estado del arte y, en específico, muchas variantes del MOEA/D se centran únicamente en preservar la diversidad en el espacio objetivo. Tal y como se hizo en el VSD-MOEA, las propuestas tienen en cuenta el criterio de paro con el objetivo de obtener un cambio gradual entre exploración e intensificación. La propuesta inicial (MOEA/D-EVSD) que utiliza una selección especial a la hora emparejar. Además, se divide el periodo total de ejecución en dos fases: la primera de exploración y la segunda de intensificación, con el propósito de ubicar mejores soluciones en las regiones prometedoras encontradas en la primera fase. Este esquema fomenta la diversidad, aunque no la mantiene de forma explícita. En base a los resultados se propone un segundo algoritmo, el MOEA/D-SEBV, el cual tiene como principal característica administrar la diversidad de forma explícita y en función al criterio de paro. En cada generación se almacena un conjunto de individuos relacionados a cada vector de pesos, así seleccionando a individuos que contribuyen suficientemente a la diversidad pero almacenando a los

que tenga una mejor aptitud. En la última propuesta algorítmica (VSD-MOEA/D) se propone una fase de remplazo con el mismo criterio implementado en el VSD-MOEA.

El resto de este capítulo está organizado de la siguiente forma. Inicialmente se hace un análisis de los mecanismos de emparejamiento y/o remplazo que se han utilizado en los MOEAs basados en descomposición. Varios casos están relacionados con el mantenimiento de diversidad en el espacio de objetivos, y por tanto, con el mantenimiento de diversidad en el espacio de las variables de forma implícita. Además, se dedica una sección a los métodos generadores de pesos más relevantes de la literatura ya que el rendimiento de este tipo de esquemas depende en gran medida de dichos vectores de pesos. Posteriormente, se incluye una sección para cada una de las propuestas mencionadas anteriormente. Finalmente, se estima la complejidad que tiene cada algoritmo, y se propone una mejora al VSD-MOEA/D para decrementar la complejidad del mismo.

## 4.2. Estrategias para mejorar los métodos de descomposición

En esta sección se presenta un descripción de los principales mecanismos que se han definido para tratar de mejorar el rendimiento del MOEA/D y que han afectado a la forma en que se han definido las propuestas de estas tesis. En particular se revisan diferentes estrategias que operan modificando los mecanismos de emparejamiento, remplazamiento y generación de pesos.

### Mecanismos de emparejamiento

En (Jiang y Yang, 2016) se presenta un esquema basado en cálculo de nichos para fomentar la diversidad. Los autores se dan cuenta que en muchos casos toda la vecindad puede llegar a estar formada por clones o individuos muy parecidos. Por tanto, para cada subproblema calculan el contador de nicho considerando los individuos asociados a sus problemas vecinos y si es mayor que un cierto valor umbral, significa que el individuo es similar a sus subproblemas vecinos y por lo tanto se fomenta que el emparejamiento de padres se realice con individuos ubicados fuera del vecindario. El estudio experimental indica que la estrategia basada en emparejamiento guiado por nichos, proporciona buenos resultados en problemas que tienen una geometría desconectada en el frente de Pareto.

### Mecanismos de remplazo

En la versión original del MOEA/D las nuevas soluciones generadas pueden remplazar a cualquier individuo de su vecindad siempre y cuando su rendimiento mejore respecto a cada subproblema considerado. En el análisis realizado en el MOEA/D-DE (Li y Zhang, 2009) se argumentó que para mantener diversidad en la población se debe limitar el número de remplazos realizados, pues especialmente para problemas complejos de no hacerlo así se puede perder la diversidad de forma excesivamente rápida. En (Wang y col., 2014) también proponen un nuevo esquema de remplazo para tratar de lidiar mejor con la convergencia y la diversidad. Argumentan que una solución nueva que se generara a partir de un subproblema podría no ser la solución más adecuada para sus subproblemas vecinos para sí para otros. Por lo tanto estos autores propusieron un esquema de remplazo global para el MOEA/D llamando al nuevo algoritmo “MOEA/D-GR”. En este estudio, se definen dos vecindarios: el vecindario de emparejamiento y el vecindario de remplazo, que podrían tener tamaños diferentes. Al crear soluciones nuevos,

su vecindario el vecindario de remplazo a utilizar se define en función del problema que consigue resolver mejor la nueva solución. En el estudio experimental concluyeron que el tamaño de vecindarios a utilizar depende mucho del problema a resolver.

Wang y col. ampliaron el esquema GR desarrollando un esquema dinámico. Los autores argumentaron que un tamaño pequeño del vecindario para de remplazo es bueno para fomentar la exploración al inicio del proceso de búsqueda, mientras que un tamaño grande es bueno para fomentar la explotación al final del proceso de búsqueda. Se investigaron tres esquemas dinámicos distintos para ajustar el tamaño de la vecindad de remplazo, los cuales se basan en funciones lineales, exponenciales y sigmoides. Los resultados mostraron que los esquemas dinámicos efectivamente proporcionan beneficios. Nótese que los autores indican que su esquema es adaptativo, aunque en base a la clasificación de control de parámetros, su esquema es dinámico en lugar de adaptativo, por lo que en las descripciones anteriores se ha usado el término dinámico.

El algoritmo MOEA/D-STM (Li y col., 2014) incorpora un esquema de asignación estable para realizar la asignación entre subproblemas y soluciones candidatas, asegurándose que cada solución candidata sólo será elegida una vez. En MOEA/D-STM para cada solución candidata se ordenan los subproblemas en base a su preferencia considerando sus respectivos valores en la función de agregación proporcionando así una preferencia a las soluciones con mejores valores en sus funciones de agregación, y fomentando por tanto la convergencia. Por otro lado, para cada subproblema se ordenan a las soluciones candidatas teniendo en cuenta la distancia existente entre los vectores direccionales correspondientes al subproblema y las soluciones, dando preferencia a aquellos que tengan distancia menor. Por tanto, este tipo de preferencia promueve la diversidad. El esquema de asignación encuentra una asignación estable considerando ambos tipos de preferencias manteniendo con ello el balance entre convergencia y diversidad. Los estudios experimentales demostraron que el MOEA/D-STM es significativamente superior a varios MOEAs del estado-del-arte en las instancias de prueba UF. Siguiendo unos principios similares se propuso el esquema MOEA/D-IR (Li y col., 2014) en el que las preferencias asignadas por los problemas ahora consideran también un contador de nichos para tratar que aquellos subproblemas que tienen pocas soluciones candidatas adecuadas para el mismo queden asignados entre sí. Además, en base a las preferencias mutuas se diseña un algoritmo diferente al implementado en MOEA/D-STM. El rendimiento de este esquema fue superior al de MOEA/D-STM.

Posteriormente, Gee y col., 2015 presenta una métrica de diversidad para el espacio objetivo (*Maximum Relative Diversity Loss - MRDL*) que permite cuantificar cuanta diversidad se pierde al hacer un remplazamiento. Con el objetivo de validar la métrica propuesta, los autores incorporaron la utilización de la misma en el MOEA/D. Específicamente un hijo sólo puede remplazar a una solución anterior si la perdida de diversidad medida con la métrica propuesta no es superior a un determinado umbral.

### **Estudios que combinan mejoras en mecanismo de emparejamiento y remplazo**

Además de la introducción de los operadores de evolución diferencial en el MOEA/D, en la propuesta (Li y Zhang, 2009) se refinó el MOEA/D agregando dos parámetros. El primer parámetro permite que las soluciones padres sean seleccionadas durante la reproducción con una cierta probabilidad (habitualmente baja) utilizando toda la población en lugar de solo el vecindario. El segundo cambio consistió en agregar un límite superior en el número máximo de soluciones que se pueden remplazar por una solución hijo durante la actualización de cada vecindario, aspecto que ha sido adoptado en múltiples

variantes de MOEA/D. La introducción de estos mecanismos fomentan el mantenimiento de la diversidad.

Otro trabajo de gran relevancia fue propuesto en (Ishibuchi y col., 2009), en que consideraron al MOEA/D como un algoritmo celular donde cada celda tiene su propia función de escalarización de aptitud con cada vector de pesos. En los algoritmos evolutivos celulares estándares, una solución hija es únicamente comparada con la solución actual en su celda. En este estudio los autores investigaron el efecto del remplazo local en el MOEA/D celular, examinando el impacto de adoptar distintas estructuras de vecindarios para la selección y remplazo. El estudio experimental demostró que el remplazo en el vecindario local tiene un rol clave en el rendimiento del MOEA/D.

Para resolver el problema de seleccionar un tamaño adecuado de la vecindad para distintos problemas, en (Zhao, Suganthan y Zhang, 2012) se propuso el algoritmo ENS-MOEA/D. En este algoritmo se utilizan distintos tamaños de vecindarios donde las probabilidades de selección se ajustan dinámicamente en base a su rendimiento histórico de generar soluciones prometedoras. El estudio experimental demostró la superioridad del ENS-MOEA/D frente a esquemas con tamaños de vecindades fijos en los problemas de prueba UF.

Posteriormente, se propuso en (Zhang y col., 2016) una variante del MOEA/D, denominada SMOEA/D, basado en un mecanismo de reproducción auto-organizado (Self-organizing Reproduction Mechanism - SRM). En este esquema se definen los vecindarios de forma dinámica en base a sus posiciones en el espacio de las variables. Para ello se usa un mapa auto-organizado, fomentando que se crucen soluciones cercanas entre sí lo que permite retrasar la convergencia. Además, otra característica del esquema es que implementa un ajuste adaptativo de los tamaños de vecindades. La estrategia de remplazo del SMOEA/D se basa en una estrategia *greedy* o voraz que consiste en que dada una nueva solución se actualizan los dos subproblemas en los cuales se muestra una máxima mejora en términos de la función de aptitud agregada. El estudio experimental realizado en distintos subproblemas de prueba con geometrías de Pareto y conjuntos de Pareto complicados, muestra resultados muy prometedores, lo que parece un indicador de que considerar información del espacio de las variables puede ser realmente útil. La limitación del SMOEA/D es su mayor complejidad computacional y además induce cuatro parámetros adicionales.

## Métodos generadores para los vectores de pesos

Los algoritmos basados en descomposición requieren de un conjunto de vectores de pesos para convertir un problema multi-objetivo en un conjunto de problemas mono-objetivo. La versión original del MOEA/D (Zhang y Li, 2007) y otras variantes implementan el enfoque de Das y Dennis, 1998 conocido como método diseño *simplex-lattice* el cual genera vectores de pesos distribuidos uniformemente en el simplex. Sin embargo en este método el tamaño de la población crece dramáticamente conforme el número de objetivos y divisiones aumentan y por lo tanto el tamaño de la población puede no ser factible. Además, para el caso de tres o más objetivos la distribución de los vectores de pesos puede no ser muy adecuada, dependiendo del tipo de descomposición que se esté teniendo en cuenta.

El método anterior consiste en generar vectores de pesos igualmente espaciados:

$$\Lambda = \left\{ \vec{\lambda} | \lambda_i \in \left\{ 0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \dots, \frac{H-1}{H} \right\}, i = 1, \dots, k, \quad s.a. \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\} \quad (4.1)$$

donde  $H$  representa el número de divisiones en cada objetivo.

Entre los inconvenientes de este método cabe destacar (Finkenstadt, Held e Isham, 2006; Berenguer y Coello, 2014):

- La distribución de los vectores de pesos no es adecuada al considerar muchos objetivos.
- El número de vectores de pesos que se generan es  $\binom{H+m-1}{m-1}$ , siendo  $H$  el número de divisiones y  $m$  el número de objetivos, por lo que generar todos esos vectores puede no ser factible especialmente para entornos con muchos objetivos.
- La mayor parte de los vectores están distribuidos en la frontera del simplex, por lo tanto al aumentar el número de objetivos incrementarán significativamente los vectores de pesos en la frontera.

En (Qi y col., 2014) se propuso un método para inicializar a los vectores de pesos, conocida como *transformación WS*, basado en la relación geométrica entre los vectores de pesos y las soluciones óptimas correspondientes al enfoque de Tchebycheff. El estudio experimental demuestra que la *transformación WS* en tres objetivos propicia soluciones bien distribuidas. Alternativamente, otro método generador de pesos ampliamente utilizado en muchas variantes del MOEA/D se basa en un paradigma de muestreo aleatorio uniforme. Una de las principales ventajas de este último método es que el tamaño de la población es flexible. Similarmente en (Tan y col., 2012a), (Tan y col., 2013), (Ma y col., 2014) y (Berenguer y Coello, 2014) sugieren utilizar el método *glp* (*good lattice point*) (Fang y Wang, 1994) y el diseño uniforme (DU) (Fang, 1980) para generar los vectores de pesos. En (Berenguer y Coello, 2014) se hace notar que el método *glp* tiene un costo computacional elevado conforme aumenta el número de objetivos del problema, por lo tanto proponen el método de Hammersley (Talke, 2012b) el cual sirve para obtener un conjunto de puntos uniformemente dispersos en el espacio como alternativa al *glp*. Este último se considera un método cuasi Monte-Carlo y es definido como un método de baja discrepancia.

En (Yuan y Kaitai, 2005) se propuso un método de transformación para obtener un conjunto de vectores de pesos  $\Lambda$  que estén dispersos uniformemente en el simplex, donde cada vector de pesos  $\lambda_i$  debe cumplir las restricciones  $\sum_{m=1}^M \lambda_i^m = 1$ ,  $\lambda_i^m \geq 0$ ,  $m = 1, \dots, M$ , donde  $M$  es el número de objetivos. Específicamente, dado un conjunto de vectores  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  de baja discrepancia en el dominio  $[0, 1]^{M-1}$  se puede realizar la transformación de estos vectores en vectores de pesos  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  como es mostrado en la ecuación (4.2) donde para el  $i$ -ésimo subproblema son definidos  $M$  componentes de pesos.

$$\begin{aligned}\lambda_i^k &= \left(1 - u_{i,k}^{\frac{1}{M-k}}\right) \prod_{j=1}^{k-1} u_{i,j}^{\frac{1}{M-j}}, \quad k = 1, \dots, M-1 \\ \lambda_i^M &= \prod_{j=1}^{M-1} u_{i,j}^{\frac{1}{M-j}}, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{4.2}$$

El método generador utilizado en este trabajo consiste en generar los puntos por medio del método de Hamersley y posteriormente se transforman a un conjunto de vectores de pesos con la transformación propuesta en Berenguer y Coello, 2014. El algoritmo 16 muestra los pasos a seguir para este procedimiento.

En la figura 4.1 se muestra la distribución de los puntos en el simplex, se puede observar que el método de simplex-lattice genera más puntos en la frontera conforme incrementa el número de objetivos en comparación al método de diseño uniforme.

**Algoritmo 16** Generador de los vectores de pesos por medio del método de Hammersley

---

```

1: Entrada: número de objetivos ( $m$ ), número de los vectores de pesos ( $|\Lambda|$ ).
2: Salida: Conjunto de vectores de pesos  $\Lambda$ .
3:  $p =$  los primeros  $k - 2$  números primos.
4:  $U = \emptyset$ .
5: for  $i = 1$  hasta  $n$ 
6:    $u_{i,1} = (2i - 1)/2n$ 
7:   for  $j = 2$  hasta  $k - 1$ 
8:      $u_{i,j} = 0$ 
9:      $f = 1/p_{j-1}$ 
10:     $d = i$ 
11:    while  $d > 0$ 
12:       $u_{i,j} + f(d \bmod p_{j-1})$ 
13:       $d = \lfloor d/p_{j-1} \rfloor$ 
14:       $f = f/p_{j-1}$ 
15:    end while
16:   end for
17:    $U = U \cup u$ 
18: end for
19:  $\Lambda =$  implementar la transformación (4.2) a cada elemento de  $U$ .

```

---

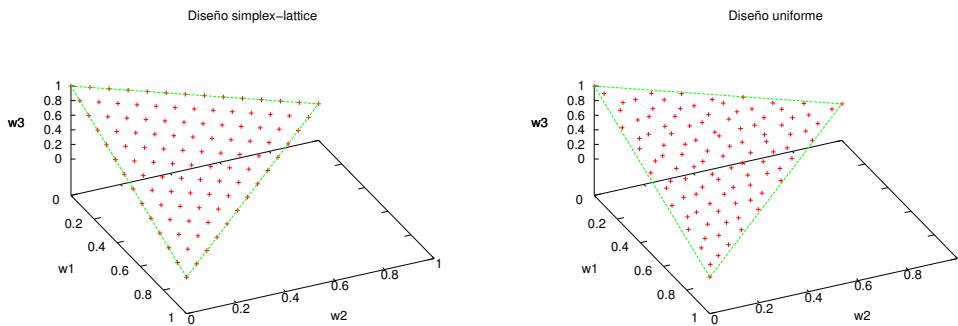


FIGURA 4.1: Puntos distribuidos en el simplex, en la parte izquierda se muestran los puntos generados por el diseño simplex-lattice y en la derecha por diseño uniforme, en cada uno se consideran 105 puntos.

Los autores Qi y col., 2014 argumentaron que los vectores de pesos distribuidos uniformemente en el MOEA/D no puede asegurar una distribución uniforme cuando la geometría del frente de Pareto es compleja (por ejemplo en forma discontinua o con picos agudos). Por ello, se han propuesta diversos esquemas que considerar adaptar de forma dinámica los vectores de pesos (Qi y col., 2014, Jiang y col., 2016). Aunque este tipo de esquemas traen beneficios adicionales para ese tipo de casos, aplicar los mismos está fuera del alcance de esta tesis.

## Métodos de descomposición

En el capítulo 2 se presentaron tres métodos para la descomposición de un problema multi-objetivo en varios problemas mono-objetivo, aunque el enfoque de Tchebycheff es uno de los más implementados,

en su lugar se ha propuesto el enfoque de función de escalarización (ASF), este último describe las direcciones óptimas de acuerdo a los vectores de pesos en el espacio objetivo, en consecuencia provee una mayor escalabilidad al problema. En la práctica se ha observado que tanto en el enfoque de Tchebycheff como en el ASF existe una desventaja importante. Cada función de aptitud es únicamente asociada a un subproblema mediante un objetivo, por lo tanto los vectores de pesos que están ubicados en las esquinas del simplex no consideran a las funciones objetivo restantes. Adicionalmente, se ha observado que tanto el enfoque de Tchebycheff y el ASF generan las soluciones que son óptimo de Pareto débiles (Miettinen y Mäkelä, 2002), en base a esto en la literatura se ha propuesto una variante del enfoque de Tchebycheff, en el cual se desean evitar las soluciones que son óptimo de Pareto débiles, particularmente es considerada como la forma aumentada que en el caso de Tchebycheff es definido de la forma (Ishibuchi y col., 2010; Derbel y col., 2014):

$$\text{minimizar} \quad g^{AT}(\vec{x}|\vec{\lambda}, \vec{z}^*) = \max_{i \in 1, \dots, m} \{ \lambda_i |f_i(x) - z_i^*| \} + \rho \sum_{j=1}^m |f_j(x) - z_j^*|, \quad (4.3)$$

donde  $\rho$  usualmente es una constante muy pequeña (ejemplo 0,1). De esta forma se considera la calidad de los demás objetivos, y su relevancia es configurada con el parámetro  $\rho$ .

A continuación se propone una variante, en donde se juntan dos conceptos: el enfoque ASF y la forma aumentada previamente proporcionada. Por lo tanto es propuesta la función de escalarización aumentada (ASFA), definida de la forma:

$$\text{minimizar} \quad g^{asfa}(\vec{x}|\vec{\lambda}, \vec{z}^*) = \max_{i \in 1, \dots, m} \left\{ \frac{|f_i(x) - z_i^*|}{\lambda_i} \right\} + \rho \sum_{j=1}^m |f_j(x) - z_j^*|, \quad (4.4)$$

La función de escalarización aumentada considera el desempeño del peor objetivo y parcialmente a los demás objetivos, por lo tanto los resultados serán de mejor calidad, y se podrán obtener funciones óptimas de Pareto fuertes.

### 4.3. Propuesta con selección especial de padres (MOEA/D-EVSD)

MOEA/D-EVSD es un algoritmo basado en MOEA/D conformado por dos fases: la primera fase inicia con un grado de exploración elevado, que se va cambiando gradualmente hacia explotación, mientras que la segunda fase está dedicada totalmente a la intensificación. La principal característica de la primera fase es que se implementa un enfoque de emparejamiento especial como parte del proceso de selección de padres (ver algoritmo 17). Similarmente al MOEA/D, cada subproblema tiene un vecindario donde su tamaño es denotado por  $T_r$ . El propósito de alterar la selección de padres es tener un mejor control de la diversidad que se induce en el espacio de las variables. Similarmente al MOEA/D, para cada subproblema  $P_i$ , se crea un nuevo individuo. Como se explicó anteriormente en la mayoría de operadores de cruce, tal como en el SBX, el poder de exploración incrementa cuando se toman en cuenta individuos distantes. Entonces, un enfoque heurístico para tratar de inducir diversidad consiste en promover el emparejamiento de individuos distantes. Así, en nuestra propuesta se modifica el proceso de selección en el emparejamiento del MOEA/D. de forma que en lugar de seleccionar aleatoriamente a dos individuos del vecindario de  $B_i$  para continuar con el proceso de emparejamiento, se implementan los siguientes pasos. Primero, se llena un conjunto  $P$  de padres candidatos con tamaño  $\alpha$ . Cada candidato padre es seleccionado aleatoriamente del vecindario en el problema  $P_i$  con una probabilidad  $\delta$ ,

**Algoritmo 17 MOEA/D-EVSD**

```

1: Inicializar los vectores de pesos  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$  y vecindarios  $B(i)$  utilizando el enfoque tradicional del MOEA/D.
2: Generar una población inicial de forma aleatoria  $x^1, \dots, x^N$ .
3: Inicializar  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$  con un valor elevado.
4: while (no se cumpla el criterio de paro)
5:   for  $i=1,\dots,N$ 
6:     Conjunto para emparejamiento:
7:       Llenar aleatoriamente el conjunto de emparejamiento  $P$  con los individuos  $\alpha$ , seleccionando cada individuo del vecindario  $B(i)$  con probabilidad  $\delta$  o de la población completa con probabilidad  $(1 - \delta)$ .
8:     Reproducción:
9:       Seleccionar a los individuos más distantes de  $P$  e implementar los operadores genéticos para generar nuevos individuos ( $y$ ).
10:    if Segunda fase then
11:      Procedimiento de mejora:
12:        Implementar crusa y mutación de evolución diferencial en el vecindario  $B(i)$  seleccionando tres individuos distintos del vecindario  $B(i)$  en caso de mejora
13:        actualizar el subproblema.
14:    end if
15:    Actualizar el vector de referencia  $z$ :
16:      Para cada  $j = 1,\dots,m$ , si  $z_j > f_j(y)$ , entonces asignar  $z_j = f_j(y)$ .
17:    Actualizar las soluciones vecinas:
18:      Para cada índice  $j \in B(i)$ , si  $g(y|\lambda^j, z) < g(x_j|\lambda^j, z)$ , entonces asignar  $x^j = y$ .
19:  end for
20:  Actualizar el valor  $\delta$ 
21: end while

```

mientras que la probabilidad de seleccionar padres de la población entera es de  $1 - \delta$ . Posteriormente, se seleccionan los dos individuos cuya distancia sea la mayor en el proceso de emparejamiento. El proceso anterior requiere fijar el parámetro  $\delta$  para llenar el conjunto de emparejamiento. Dado que se busca alterar el grado de exploración dinámicamente, este parámetro es asignado de la siguiente forma:  $\delta = \frac{t_i}{Total\_Generaciones}$ , donde  $t_i$  denota la generación actual. De esta forma, al principio de la primera fase, cada individuo es seleccionado considerando a la población entera, pero esta proporción de individuos seleccionados globalmente es linealmente decrementada durante la ejecución, induciendo por tanto un cambio gradual entre exploración y explotación. En el algoritmo 17 se muestra el proceso de emparejamiento correspondiente a la primera fase. En el resto de pasos durante la primera fase no se realiza ningún cambio frente al MOEA/D tradicional.

En el caso de la segunda fase se busca conseguir una mayor intensificación. Para ello se implementa un procedimiento de mejora haciendo uso de los operadores de evolución diferencial utilizando como población la dada por cada vecindario. El efecto de estos operadores en el proceso de búsqueda depende de la distribución de los individuos en el espacio factible ya que este proceso puede ser de intensificación o exploración en función de la ubicación de los individuos. Sin embargo, dado que este proceso se ejecuta después de la primera fase y con elementos vecinos, ya ha ocurrido cierto nivel de convergencia y por tanto se esperar tener diferencias relativamente pequeñas. El esquema aplicado para generar nuevos individuos es el *Rand/1/bin*, donde *Rand* indica que los vectores base son escogidos de forma aleatoria, 1 significa que únicamente se utiliza un vector de diferencia para formar a la población mutada, y el término *bin* (de distribución binomial) indica que se implementa la crusa uniforme durante la formación de una población (Storn y Price, 1997a). El proceso para generar un nuevo individuo  $x^{new}$  consiste en seleccionar tres individuos distintos  $x_1, x_2$  y  $x_3$  (como se indica en la ecuación 4.5), el parámetro de crusa  $CR$  controla la invarianza rotacional en el proceso de búsqueda y el factor de mutación  $F$  controla la velocidad de convergencia y robustez en la búsqueda (Kukkonen y Lampinen, 2009).

$$x = \begin{cases} x_{1,i} + F * (x_{2,i} - x_{3,i}) & : \text{rand} < CR \text{ OR } i == I_{rand} \\ x_{1,i} & : \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4.5)$$

También tal y como se ha explicado es muy importante asignar adecuadamente el tamaño de las vecindades ( $T_r$ ). Dado que el valor adecuado puede depender de los operadores utilizados, se utilizan valores diferentes para la primera y segunda fase:  $T_{r,1}$  y  $T_{r,2}$ .

#### 4.3.1. Observaciones

En el algoritmo propuesto se retrasa la convergencia fomentando la selección de individuos distantes, tal y como se ha hecho en multitud de esquemas. Sin embargo se pudo detectar un inconveniente importante y es que debido a la introducción de esta estrategia hay una tendencia de seleccionar a los individuos que se encuentran en las esquinas o en menor medida en las frontera del espacio factible con mayor probabilidad. Esto se puede intuir en el sentido de que las regiones más distantes están ubicadas precisamente en la frontera. Alternativamente, se puede mostrar la tendencia de esta estrategia de la siguiente forma. Dados un conjunto de puntos distribuidos de forma uniforme en el espacio, se selecciona una muestra. Los puntos más alejados de este conjunto de puntos pertenecen al envolvente convexo, por lo tanto la tendencia consiste en seleccionar a los puntos que pertenecen al envolvente convexo. Si se seleccionan muestras parciales del espacio de búsqueda, entonces en promedio se seleccionan a los individuos más distantes que pertenecen al envolvente convexo del espacio factible.

Para mostrar experimentalmente esta tendencia, se realizaron dos simulaciones generando 500 puntos mediante una distribución uniforme en un espacio cuyos límites están comprendidos por  $[-1, 1]^2$ . En cada simulación se seleccionaron 10 muestras con remplazo de tamaño 4 y 20 respectivamente. En la figura 4.2 se observan los puntos que comprenden el envolvente convexo de cada muestra (puntos de color azul) y el área que abarca cada uno (delimitado por líneas de color rojo). Un efecto importante de aumentar el tamaño de las muestras es que cada envolvente convexo está más próximo a los límites del espacio factible, por lo tanto al seleccionar a los dos puntos más alejados de cada muestra se tiende a seleccionar las esquinas del espacio factible como se puede observar en la parte derecha de la figura 4.2.

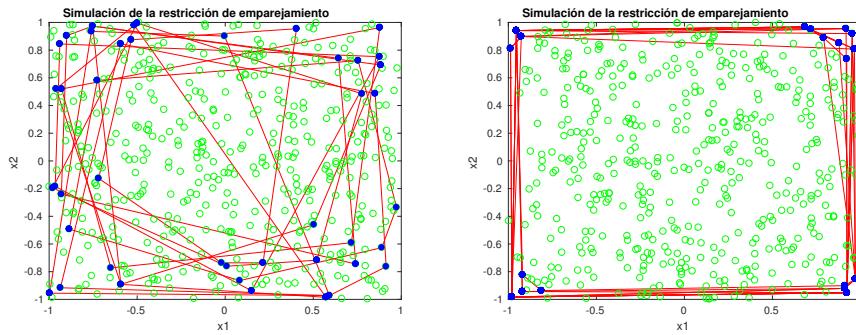


FIGURA 4.2: Simulación del proceso de emparejamiento, en la parte izquierda el tamaño de cada muestra es de 4 puntos y en la derecha de 20 puntos, se observa la tendencia de seleccionar a los individuos que corresponden al espacio factible.

Por tanto, a pesar de que en un principio este tipo de técnicas sirven para aumentar la diversidad, existe la posibilidad de que con esta propuesta surjan inconvenientes de diversidad en algunos problemas de prueba especialmente si en las zonas cercanas a los extremos hay valores de alta calidad pero que no sean los óptimos. Esta problemática puede afectar a este problema en especial forma porque el esquema propuesto es un método heurístico implícito que trata de retrasar la convergencia, pero no la asegura.

Tal y como se verá en la validación experimental este inconveniente surgió en algunos de los problemas de prueba.

#### 4.4. Propuesta de diversidad con elitismo especial (MOEA/D-SEBV)

En la propuesta inicial se observa que existe una tendencia de seleccionar individuos próximos a las esquinas del espacio de búsqueda, y que aún es posible tener un efecto similar a la convergencia prematura en algunos problemas debido a que se fomenta la diversidad pero sólo de una manera indirecta. Teniendo en cuenta estos inconvenientes, esta segunda propuesta está estructurada con el propósito de mantener la diversidad en el espacio de las variables de forma explícita. En el capítulo 3 se presentó el algoritmo VSD-MOEA donde se aplica una fase de remplazo para mantener la diversidad explícitamente, en este proceso se verifica la contribución de diversidad que tiene cada individuo en el espacio de las variables por medio de la distancia a la solución candidata más cercana ya seleccionada y se intenta evitar seleccionar individuos cuya contribución sea menor que un umbral. Conforme transcurren las generaciones este umbral se decrementa en base a un modelo lineal. MOEA/D-SEBV usa este mismo principio pero aplicado en MOEAs basados en descomposición.

La versión original de MOEA/D (Zhang y Li, 2007) fomenta un grado elevado de elitismo ya que siempre sobreviven los individuos con mayor aptitud para cada subproblema. Aunque en la literatura multiobjetivo se ha establecido que los MOEAs con propiedades elitistas proporcionan grandes beneficios (Deb y Kalyanmoy, 2001), también se ha observado que es importante administrar el grado de elitismo, ya que en algunos escenarios (por ejemplo ejecuciones de largo plazo) el proceso de búsqueda puede estancarse. El problema de convergencia prematura para el MOEA/D se puede observar en la figura 4.3 donde se consideran cuatro individuos  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y los vectores de pesos  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Dependiendo de la forma en que se mida la aptitud, el proceso de actualización podría provocar que el individuo  $x_4$  sea asignado a todos los subproblemas quedando una población conformada por clones de  $x_4$ . Aunque no es habitual tener casos tan drásticos en que la población quede con copias de sólo un individuo, esto nos da una idea del tipo de problemáticas que pueden aparecer.

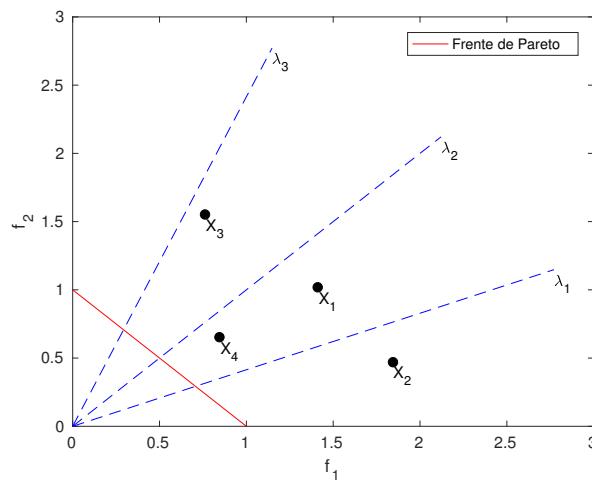


FIGURA 4.3: Actualización de los subproblemas:  $x_4$  podría ser seleccionado para todos los subproblemas, perdiéndose completamente la diversidad.

En esta segunda propuesta algorítmica se desea fomentar la diversidad de las soluciones y dado que la principal problemática viene dada en la fase de remplazo, la propuesta introduce una fase de remplazo especial. En primer lugar, al crear un nuevo individuo para un problema dado, éste se almacena como posible candidato para cada uno de los problemas vecinos. En la lista de candidatos para cada subproblema, se tendrá además al individuo que está actualmente en la posición asociada a ese subproblema, así como al mejor individuo que se haya encontrado hasta el momento para dicho subproblema. Al finalizar cada generación se implementa la fase de remplazo donde se iteran por todos los subproblemas y se elige al mejor individuo de entre los candidatos sujeto a que su contribución a la diversidad sea mayor que un valor umbral que se va ajustando de forma similar a como se hacía en VSD-MOEA. Para calcular la contribución a la diversidad cuando estamos tratando el problema  $i$  se calcula para cada candidato la distancia al individuo más cercano de toda la población actual, pero sin considerar al individuo que está en la posición  $i$ . En caso que la contribución de todos los individuos sea menor que el umbral de diversidad deseado, se selecciona al individuo con mayor distancia al vecino más cercano tratando de inducir así un grado mayor de diversidad. En la figura 4.4 se ilustra un ejemplo de este proceso especial de actualización. En este caso se consideran dos subproblemas para los que los individuos actuales en la población son el {1, 2} (borde de color rojo). Por simplicidad, vamos a considerar que los individuos élite para estos subproblemas hasta la generación anterior eran también el 1 y el 2. En dicha generación se crean los individuos 3 y 4 (borde de color negro) y ambos entran al conjunto de candidatos para el subproblema 1. Consideraremos que con respecto a  $\lambda_1$ , el orden de preferencia de los individuos es 3, 4, 1. En ese caso, normalmente se actualizaría el subproblema 1 con el individuo 3 ya que este último tiene una mejor aptitud, sin embargo dado que su contribución a la diversidad es menor que el umbral especificado porque está muy cerca del individuo 2 (esfera punteada), en su lugar se seleccionaría al individuo 4. Este procedimiento mantiene la diversidad de forma explícita, sin embargo es posible que algunos individuos con muy buena aptitud y mínima diversidad sean descartados, es por ello que para cada subproblema se almacena a su individuo élite, que aunque posiblemente no participará inmediatamente en el proceso de reproducción, formará parte del proceso de selección en las siguientes generaciones, y posteriormente podría ser seleccionado ya que el umbral de diversidad requerido se decrementa conforme transcurren las generaciones o el individuo que estaba provocando que no se seleccionase podría dejar de ser seleccionado.

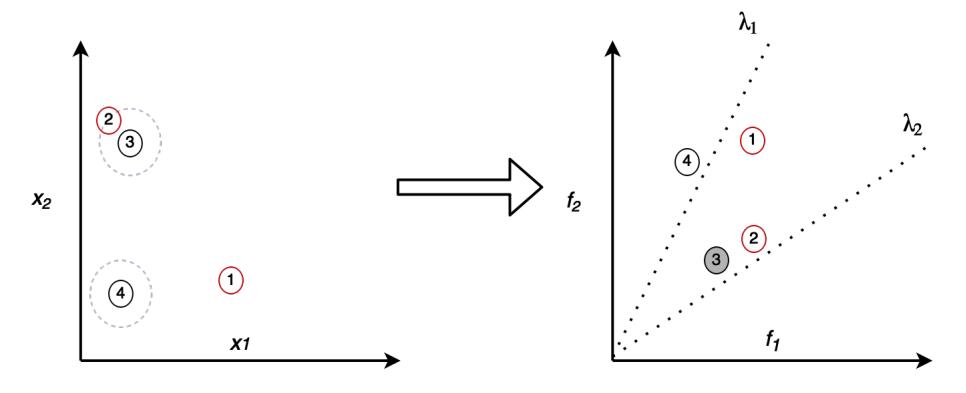


FIGURA 4.4: Proceso de selección para el subproblema 1, en la parte izquierda es el espacio de las variables y en la derecha su respectiva ubicación en el espacio objetivo. Los puntos {1, 2} corresponden a los subproblemas actuales con borde de color rojo, en este caso únicamente se consideran a los individuos almacenados (con borde de color negro) que del subproblema 1.

La propuesta de descomposición basado en diversidad con elitismo especial (MOEA/D-SEBV) se describe en el algoritmo 18, donde las principales novedades respecto al MOEA/D aparecen en las líneas 4, 6, 11 y 13. Inicialmente los individuos élite son vacíos (línea 4), y en cada generación se realiza lo siguiente (líneas 7 - 16). En primer lugar, para cada subproblema  $i$  se seleccionan dos padres a partir de los individuos asociados a subproblemas vecinos con cierta probabilidad o de los globales en caso contrario, y con ellos se realiza la reproducción. Adicionalmente, si se consiguen mejoras respecto a un objetivo concreto, se realiza la actualización del vector de referencia. Posteriormente el individuo  $y$  es almacenado como candidato para todos los subproblemas que sean vecinos de  $i$  (línea 11). La principal novedad, que es la fase de remplazo (línea 13), está descrita en el algoritmo 19, donde se actualiza el élite del subproblema y se realiza la selección del superviviente en base a las reglas ya descritas. Para ello, inicialmente en la línea 3 se actualiza el umbral de diversidad mínimo permitido, el cual es decrementado en base a un modelo lineal de igual forma que el algoritmo VSD-MOEA presentado en el capítulo 3. Posteriormente para cada subproblema (líneas 4 - 19) se realiza lo siguiente. Se inserta el elemento élite al conjunto de candidatos (línea 5), y de forma iterativa hasta que el conjunto de candidatos del subproblema actual esté vacío (líneas 7 - 18), se saca un elemento del conjunto (línea 8), se calcula su contribución a la diversidad (línea 9), se actualiza el individuo élite (línea 10), y se actualiza al individuo del subproblema si la diversidad del individuo nuevo es mayor al umbral  $D$  y tiene mejor aptitud (líneas 11 - 12). También en el caso en que la contribución a la diversidad del individuo actual sea menor que  $D$  se procede a realizar un remplazo si el nuevo individuo candidato contribuye más a la diversidad (líneas 13 - 16).

---

#### Algoritmo 18 MOEA/D-SEBV

---

- 1: Inicializar los vectores de pesos  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$  y vecindarios  $B(i)$  utilizando el enfoque tradicional del MOEA/D.
  - 2: Generar una población inicial de forma aleatoria  $x^1, \dots, x^N$ .
  - 3: Inicializar  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$  con un valor elevado en relación al problema.
  - 4:  $E_i \leftarrow \emptyset \forall i \in 1, \dots, N$  donde  $E_i$  es el individuo élite del subproblema  $i$ .
  - 5: **while** (no se cumpla el criterio de paro)
  - 6:      $H_i \leftarrow \emptyset, \forall i \in 1, \dots, N$  donde  $H_i$  corresponde al conjunto de candidatos del  $i$ -ésimo subproblema.
  - 7:     **for**  $i=1, \dots, N$
  - 8:         **Conjunto para emparejamiento:** Seleccionar a dos padres, escogiendo cada individuo del vecindario  $B(i)$  con probabilidad  $\delta$  o de la población completa con probabilidad  $(1 - \delta)$ .
  - 9:         **Reproducción:** Generar al hijo  $y$  utilizando los operadores de reproducción sobre los padres seleccionados.
  - 10:         **Actualizar el vector de referencia  $z$ :** Para cada  $j = 1, \dots, m$ , si  $z_j > f_j(y)$ , entonces asignar  $z_j = f_j(y)$ .
  - 11:         **Actualizar las soluciones candidatas:** Para cada índice  $j \in B(i)$ , meter al conjunto  $H_j$  la solución  $y$ .
  - 12:     **end for**
  - 13:     **Fase de remplazo:** Descripción en Algoritmo 19.
  - 14: **end while**
-

**Algoritmo 19** Fase de remplazo MOEA/D-SEBV

---

```

1: Entrada:  $P^t$  (Población actual),  $H$  (Los individuos candidatos de cada subproblema),  $E$  (El conjunto de individuos élite de cada subproblema)
2: Salida:  $P^{t+1}$ 
3:  $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$ 
4: for i=1, ..., N
5:   Meter al conjunto  $H_i$  el elemento  $E_i$ 
6:    $DCN(P_i^t) =$  Distancia al Vecino más Cercano( $P_i^t, P^t \setminus P_i^t$ )            $\triangleright$  Calcular la contribución a la diversidad de  $P_i^t$  en la población
7:   while  $H_i$  no este vacío
8:      $C_i =$  sacar( $H_i$ )
9:      $DCN(C_i) =$  Distancia al Vecino más Cercano( $C_i, P^t \setminus P_i^t$ )            $\triangleright$  Calcular la contribución a la diversidad de  $t_i$  en lugar de  $P_i^t$ 
10:     $E_i = C_i$  si  $g(C_i|\lambda^i, z) < g(E_i|\lambda^i, z)$ 
11:    if  $DCN(C_i) \geq D$  then
12:       $P_i^t = C_i$  si  $g(C_i|\lambda^i, z) < g(P_i^t|\lambda^i, z)$ 
13:    else if  $DCN(P_i^t) < D$  then
14:      if  $DCN(C_i) > DCN(P_i^t)$  then
15:         $P_i^t = C_i$ 
16:      end if
17:    end if
18:  end while
19: end for
20:  $P^{t+1} = P^t$ 

```

---

**4.4.1. Observaciones**

Esta propuesta posee la ventaja de fomentar la diversidad explícitamente, además si el umbral de diversidad inicial es muy elevado, entonces el proceso evolutivo consistirá en, durante ciertas generaciones, maximizar la distancia al vecino más cercano de cada individuo, ubicando a los puntos de forma bien distribuida en el espacio factible. En esta propuesta ya no es necesario indicar un límite de actualizaciones como se hace en MOEA/D-DE, pues de forma automática y siempre que la  $D$  no haya llegado a 0, cada individuo sólo quedará asignado a una posición de la población. Por otra parte sí es necesario asignar la diversidad inicial deseada. Aunque esta propuesta promueve la diversidad de forma explícita, experimentalmente se vio que existe el inconveniente que se podría dar la situación que ciertos subproblemas pueden no ser actualizados durante varias generaciones al no encontrar soluciones mejores, o estar estas siempre penalizadas. Ante esa situación, que se puede dar en función de la diversidad requerida para el problema y de los parámetros utilizados, el algoritmo podría operar durante muchas generaciones con los mismos individuos dándose una situación similar a la que se conoce como estancamiento en evolución diferencial y que se da porque al siempre contar con los mismos individuos los procesos de reproducción empiezan a remuestrear en zonas muy similares. Otro problema importante relacionado con el anterior es que, al considerar los subproblemas en el orden dado, se está dando una preferencia a ciertos problemas de forma indirecta. Así, podría ocurrir que en un determinado instante, existan dos subproblemas vecinos de forma que el primero de ellos no esté bien resuelto y el segundo sí, y que para el primero se seleccione a un individuo que penalice al elitista del otro subproblema, quedando finalmente en la población dos individuos con mala convergencia al frente.

**4.5. Algoritmo de descomposición basado en la diversidad (VSD-MOEA/D)**

Con el fin de evitar las problemáticas del MOEA/D-SEBV que se discutieron en las observaciones anteriores, se proponen tres modificaciones al algoritmo anterior, conformando la propuesta VSD-MOEA/D. Los cambios más importantes son que la contribución a la diversidad se calcula de forma similar a como

se hacía en el VSD-MOEA (de ahí toma su nombre el algoritmo) y que en lugar de elegir los individuos supervivientes recorriendo a los problemas en orden, se elige primero a aquellos individuos que tengan funciones de fitness más apropiadas. Para esto último se tiene el inconveniente que se están comparando individuos en base a funciones diferentes (cambian los pesos con que fueron evaluados), pero generalmente para problemas cercanos, los óptimos en las funciones de escalarización también son próximos con lo que tiene sentido tratar de elegir primero a individuos que estén resolviendo mejor los problemas y así evitar algunos de los inconvenientes que se daban en MOEA/D-SEBV. En base a esta idea, como en MOEA/D-SEBV se tienen un conjunto de candidatos para cada subproblema. En la selección de candidatos se introduce el último cambio, pues con el fin de reducir el costo computacional, este conjunto de candidatos está conformando únicamente por el mejor individuo evaluado para dicho subproblema, por el elemento actual de la población asociado al subproblema y por el hijo que se generó a partir de dicho subproblema.

De esta forma, VSD-MOEA/D en cada paso elige al individuo con mejor fitness cuya contribución a la diversidad sea mayor que el valor umbral actual y que esté asociado a un problema para el que aún no se haya elegido al superviviente. Para calcular la contribución a la diversidad, en lugar de calcular la distancia al individuo más cercano de toda la población anterior, se calcula la distancia al más cercano de los individuos que ya han sido elegidos para sobrevivir. Si tras realizar este proceso quedan problemas sin individuo asignado es porque todos sus candidatos están penalizados por su poca contribución en diversidad. En dicho caso, como en el MOEA/D-SEBV, del conjunto de candidatos se elige al que más contribuye en diversidad.

El procedimiento principal del VSD-MOEA/D es mostrado en el algoritmo 20, donde primeramente se inicializan los vectores de pesos mediante el método generador previamente explicado y se construyen los vecindarios en base a las distancias entre los vectores de pesos (línea 1). Luego se genera la población inicial de forma aleatoria dentro de los límites del espacio de búsqueda y se inicializa el vector de referencia (líneas 2 - 3). En cada generación se realiza el siguiente proceso. En primer lugar, para cada subproblema  $i$  se seleccionan dos padres a partir de los individuos asociados a subproblemas vecinos con cierta probabilidad o de los globales en caso contrario, y con ellos se realiza la reproducción. Adicionalmente, si se consiguen mejoras respecto a un objetivo concreto, se realiza la actualización del vector de referencia. La actualización de cada subproblema (línea 12) es aplicada únicamente a la población élite y sólo para los subproblemas vecinos. Al final de cada generación (línea 14) se aplica la fase de remplazo mostrada en el algoritmo 26, el cual funciona de la siguiente forma. Inicialmente en la línea 3 es calculado el umbral  $D$  que corresponde a la diversidad que se debe mantener. Es generado el conjunto de individuos candidatos  $R_t$  que corresponden a la unión de la población de padres, hijos y élite (línea 6). Posteriormente en la línea 7 son ordenados los individuos candidatos respecto a su aptitud, donde la aptitud es la evaluación que corresponde a su subproblema asociado. Así de forma iterativa (líneas 9 - 17) se realiza lo siguiente. Se selecciona al individuo  $j$  con mejor aptitud (línea 10), se verifica que el subproblema al que pertenece el individuo seleccionado no esté asignado (línea 11), después son transferidos al conjunto de *Penalizados* a todos los individuos candidatos cuya distancia sea menor que el umbral  $D$  y es desactivado el subproblema relacionado con el individuo ya seleccionado (líneas 12 - 14). En el proceso anterior son seleccionados los mejores individuos cuya aptitud sea mayor y además con máxima contribución a la diversidad en el espacio de las variables. En el caso de que el número de individuos seleccionados sean menores al tamaño de la población  $N$  (posiblemente al inicio de la ejecución), son seleccionados los individuos penalizados que están relacionados a un subproblema asignado y que considerando a los individuos seleccionados  $P_{t+1}$  tengan una mayor contribución a la diversidad

en el espacio de las variables (líneas 19 - 25). Es importante notar que al seleccionar un individuo seleccionado es desactivado su problema asociado (línea 23). De esta forma son mantenidos los individuos con mayor aptitud y además que contribuyen más a la diversidad en el espacio de las variables.

---

**Algoritmo 20** VSD-MOEA/D

---

```

1: Inicializar los vectores de pesos  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$  y vecindarios  $B(i)$  utilizando el enfoque tradicional del MOEA/D.
2: Generar una población inicial de forma aleatoria  $x^1, \dots, x^N$ .
3: Inicializar  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$  con un valor elevado en relación al problema.
4:  $E \leftarrow \emptyset$ 
5:  $Q \leftarrow \emptyset$ 
6:  $t = 0$ 
7: while (no se cumpla el criterio de paro)
8:   for i=1,...,N
9:     Conjunto para emparejamiento:
10:    Seleccionar a dos padres, escogiendo cada individuo del vecindario  $B(i)$ 
11:    con probabilidad  $\delta$  o de la población completa con probabilidad  $(1 - \delta)$ .
12:    Reproducción:
13:    Generar al hijo  $Q_{t,i}$  utilizando los operadores de reproducción sobre los padres seleccionados.
14:    Actualizar el vector de referencia z:
15:    Para cada  $j = 1, \dots, m$ , si  $z_j > f_j(Q_{t,i})$ , entonces asignar  $z_j = f_j(Q_{t,i})$ .
16:    Actualizar las soluciones vecinas:
17:    Para cada índice  $j \in B(i)$ ,  $E_{t,j} = Q_{t,i}$  si  $g(Q_{t,i} | \lambda^j, z) < g(E_{t,j} | \lambda^j, z)$ .
18:   end for
19:   Fase de remplazo:
20:   Seleccionar  $P_{t+1}$  de  $P_t \cup Q_t \cup E_t$ .
21:    $t = t + 1$ 
22: end while return  $P_{t+1}$ 

```

---

**Algoritmo 21** Fase de remplazo VSD-MOEA/D

---

```

1: Entrada: Población  $P_t$  (Población de la generación actual),  $Q_t$  (Población hijo),  $E_t$  (Población élite).
2: Salida:  $P_{t+1}$ 
3: Definir el valor umbral como  $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$ 
4:  $P_{t+1} = \emptyset$ 
5:  $Penalizados = \emptyset$ 
6:  $R_t = P_t \cup Q_t \cup E_t$ 
7: Ordenar a  $R_t$  de acuerdo a su aptitud.
8:  $B[i] = false \leftarrow \forall i \in 1, \dots, N$ 
9: while  $R_t$  no esté vacío OR  $|P_{t+1}| < N$ 
10:   $j = Mejor(R_t)$ .                                          $\triangleright$  Es seleccionado el índice del individuo con mejor aptitud.
11:  if  $B[j] == false$  then
12:     $P_{t+1} = P_{t+1} \cup R_t(j)$ 
13:     $Penalizados = Distancia(R_t(j), R_t) < D$             $\triangleright$  Son penalizados los individuos con menor distancia que el umbral  $D$ .
14:     $B[j] = true$ .                                      $\triangleright$  Desactivar el subproblema relacionado.
15:  end if
16:   $R_t = R_t \setminus R_t(j)$                                  $\triangleright$  Se elimina el individuo si su subproblema ya ha sido seleccionado.
17: end while
18:  $Penalizados = Penalizados \setminus E_t$ .       $\triangleright$  Remover del conjunto  $Penalizados$  a todos los individuos que pertenezcan al conjunto Elite  $E_t$ .
19: while  $|P_{t+1}| < N$ 
20:   $i = mejor\_contribucion\_diversidad(Penalizados, P_{t+1})$   $\triangleright$  Seleccionar el índice del individuo con mayor contribución a la diversidad.
21:  if  $B[i] == false$  then
22:     $P_{t+1} = P_{t+1} \cup Penalizados(i)$ 
23:     $B[i] = true$ 
24:  end if
25: end while
26: return  $P_{t+1}$ 

```

---

#### 4.5.1. Observaciones

Este método ofreció bastantes ventajas con respecto a las propuestas anteriores. Una de las ventajas radica en la forma en que se calcula la diversidad, pues en lugar de considerar a la población anterior, considera a los individuos que se han elegido como supervivientes, permitiendo que no hubiese tanto

estancamiento como en casos anteriores. Por otro lado, el proceso de selección basado en dar prioridad a aquellas soluciones con mejor fitness también fue importante para el rendimiento. En base a estos cambios, se pudieron reducir las problemáticas que aparecían en MOEA/D-SEBV, obteniéndose resultados mucho más estables.

## 4.6. Complejidad de los algoritmos propuestos

En esta sección se presenta la complejidad de las tres propuestas presentadas en este capítulo. Para la estimación de la complejidad únicamente se discuten las secciones cuyo grado de complejidad sea diferente al MOEA/D que es  $O(MNT)$ , donde  $M$  es el número de objetivos,  $N$  es el número de subproblemas y  $T$  es el tamaño de cada vecindad. Específicamente la complejidad del MOEA/D es dominada por el proceso donde se actualizan los subproblemas ya que para cada subproblema se realizan  $T$  comparaciones que requieren  $O(M)$ . En el MOEA/D-EVSD (algoritmo 17) en cada generación se considera llenar un conjunto de emparejamiento con tamaño  $\alpha$  en la línea 6, posteriormente en la línea 7 se seleccionan a los dos individuos más alejados, por lo tanto se realizan  $O(\alpha^2)$  comparaciones. Entonces la complejidad del MOEA/D-EVSD es  $O(MNT + \alpha^2 N)$ , este orden puede ser dominado por el tamaño de la vecindad.

En la propuesta MOEA/D-SEBV (algoritmo 18) se consideran dos secciones críticas para el cálculo de la complejidad: la actualización de las soluciones candidatas (línea 11) y la fase de remplazo (línea 13). Para realizar la actualización de las soluciones vecinas en cada subproblema se insertan en media  $T$  elementos al conjunto, por lo tanto para cada generación se iteran  $NT$ . El grado de complejidad de la fase de remplazo es indicado en el algoritmo 22, específicamente en las líneas 6 y 9 se revisa la contribución a la diversidad de cada elemento, por lo tanto para cada subproblema se verifican  $T$  elementos y con el élite  $H = T + 1$ . Para obtener la contribución a la diversidad de un individuo se realizan  $N - 1$  comparaciones, por lo que el número de iteraciones es  $N(N - 1)$  en la línea 6 y  $N(N - 1)(H)$  en la línea 9.

También en este proceso de remplazo se puede considerar la actualización del individuo élite (línea 10) que consiste en  $MNH$  pero este término no es dominante. Por lo tanto, considerando el costo de cada línea se estima la complejidad:

$$\begin{aligned} T(N) &= c_1 + c_2N + c_3N + c_4dN(N - 1) + c_5NH + c_6NH + c_7dHN(N - 1) + c_8HMN + \\ &\quad c_9NH + c_{10}NHM + \sum_{k=11}^{15} c_k(NH) \\ &= c_1 + N(c_2 + c_3 - c_4d) + NH\left(\sum_{k=11}^{15} c_k + c_5 + c_6 + c_9\right) + N^2c_4 + HMN(c_8 + c_{10}) + dHN^2c_7 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Considerando los términos dominantes se estima que la cota superior MOEA/D-SEBV:

$$T(N, M, H) = \begin{cases} O(HNM), & \text{si } M > N \\ O(dHN^2), & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Generalizando y considerando que existe un menor número de objetivos que individuos la complejidad en el peor caso es  $O(dHN^2)$ , donde si el tamaño de la vecindad es el número de subproblemas ( $T = N$ ) se estima la cota superior, es decir el peor caso como  $O(dN^3)$ .

**Algoritmo 22** Fase de remplazo MOEA/D-SEBV - Complejidad

	Costo	Iteraciones
1: Entrada: $P^t$ (Población actual), $H$ (Los individuos candidatos de cada subproblema), $E$ (El conjunto de individuos élite de cada subproblema)		
2: Salida: $P^{t+1}$		
3: $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$	$c_1$	1
4: <b>for</b> $i=1, \dots, N$	$c_2$	$N$
5:    Meter al conjunto $H_i$ el elemento $E_i$	$c_3$	$N$
6: $DCN(P_i^t) = \text{Distancia al Vecino más Cercano}(P_i^t, P^t \setminus P_i^t)$	$c_4$	$dN(N-1)$
7: <b>while</b> $H_i$ no este vacío	$c_5$	$NH$
8: $C_i = \text{sacar}(H_i)$	$c_6$	$NH$
9: $DCN(C_i) = \text{Distancia al Vecino más Cercano}(C_i, P^t \setminus P_i^t)$	$c_7$	$dNH(N-1)$
10: $E_i = C_i \text{ si } g(C_i   \lambda^i, z) < g(E_i   \lambda^i, z)$	$c_8$	$NHM$
11: <b>if</b> $DCN(C_i) \geq D$ <b>then</b>	$c_9$	$NH$
12: $P_i^t = C_i \text{ si } g(C_i   \lambda^i, z) < g(P_i^t   \lambda^i, z)$	$c_{10}$	$NHM$
13: <b>else if</b> $DCN(P_i^t) < D$ <b>then</b>	$c_{11}$	$NH$
14: <b>if</b> $DCN(C_i) > DCN(P_i^t)$ <b>then</b>	$c_{12}$	$NH$
15: $P_i^t = C_i$	$c_{13}$	$NH$
16: <b>end if</b>	$c_{14}$	$NH$
17: <b>end if</b>	$c_{15}$	$NH$
18: <b>end while</b>		
19: <b>end for</b>	$c_{16}$	$N$
20: $P^{t+1} = P^t$		

Finalmente, en la última propuesta VSD-MOEA/D (algoritmo 20) la sección que influye más en la estimación de la complejidad es la fase de remplazo (línea 13). El costo de cada instrucción en la fase de remplazo está indicado en el algoritmo 23, donde primeramente se mueven todos los individuos al conjunto  $R_t$  haciendo  $3N$  iteraciones (línea 6), después de eso se ordenan incrementalmente los  $R_t$  individuos de acuerdo a su aptitud (línea 7), realizando  $3NM\log(3NM)$  iteraciones por el algoritmo de ordenamiento. Posteriormente en las líneas 9 - 17 se define un procedimiento de selección especial donde en el peor caso es cuando no sea penalizado ningún individuo. La estimación de esta parte se realiza por medio de inducción, esto es considerando en el peor caso donde todos los individuos pueden ser seleccionados ( $3N$ ). Así cada vez que es seleccionado un individuo se desactiva su subproblema relacionado, y además son movidos al conjunto de *penalizados* los individuos candidatos que son relacionados a ese subproblema. Inicialmente al seleccionar al primer individuo son realizadas  $3dN - 3$  comparaciones, luego con el segundo individuo son  $3dN - 6$  iteraciones, este procedimiento se realiza hasta que el número de individuos sea igual a  $dN$ ,  $\{3dN - 3, 3dN - 6, 3dN - 9, \dots, 3dN - 3i\}$ . Por lo tanto la estimación de la selección en las líneas 9 y 17 (Cormen, 2009) es:

$$\sum_{i=1}^N 3dN - 3i = 3dN^2 - 3 \sum_{i=1}^N i = \frac{3dN^2}{2} - \frac{3dN}{2} \quad (4.7)$$

Así el procedimiento inicial de selección en el peor caso son realizadas  $\frac{3dN^2}{2} - \frac{3dN}{2}$  iteraciones. Entonces si todos los subproblemas pueden ser seleccionados no existirán individuos penalizados, por lo tanto las líneas 19 - 25 no afectarían el rendimiento del algoritmo. Por otra parte en el caso en que únicamente se seleccionado un individuo a causa de un umbral de diversidad elevado, también se puede calcular de forma inductiva. Primeramente, existirán  $2N - 2$  individuos penalizados (es  $2N$  debido a que no se considera el conjunto élite), entonces en la primer iteración se realizan  $1d(2N - 2)$  para encontrar al individuo con mayor distancia al vecino más cercano, en la segunda es  $2d(2N - 4)$ , entonces de forma iterativa se tiene  $\{id(2N - 2i)\}$ , por lo tanto la estimación de esta parte es:

$$\sum_{i=1}^N id(2N - 2i) = \frac{2dN^2(N + 1)}{2} - \frac{1}{6}Nd(N + 1)(2N + 1) = \frac{dN^3}{3} - \frac{dN}{3} \quad (4.8)$$

Por lo tanto considerando el costo de cada sección de la fase de remplazo se estima la cota superior como:

$$\begin{aligned} T(N, M) = & c_1 + c_2 + c_3 N + c_4 3NM \log(3NM) + c_5 N + c_6 N + c_7 N + c_8 \left( \frac{3dN^2}{2} - \frac{3dN}{2} \right) \\ & + c_9 N + c_{10} N + c_{11} N + c_{13} N \left( \frac{dN^3}{3} - \frac{dN}{3} \right) + c_{14} N + c_{15} N \end{aligned} \quad (4.9)$$

Considerando los términos dominantes se estima que la complejidad en el peor caso del VSD-MOEA/D es  $O(dN^3)$ . La sección que puede afectar más el rendimiento del algoritmo es cuando la cantidad de individuos penalizados es significativa, es decir cuando el umbral de diversidad es elevada, sin embargo esto sucederá únicamente al inicio del algoritmo, y posteriormente cambiará la complejidad a  $O(dN^2)$ . Específicamente el cálculo del vecino más cercano influye directamente en la complejidad, entonces optimizar este método ya sea con alguna estrategia de geometría computacional o algún método estocástico, puede disminuir un grado en la complejidad del algoritmo.

---

### Algoritmo 23 Fase de remplazo VSD-MOEA/D Complejidad

---

	Costo	Iteraciones
1: Entrada: Población $P_t$ (Población de la generación actual), $Q_t$ (Población hijo), $E_t$ (Población élite).		
2: Salida: $P_{t+1}$		
3: Definir el valor umbral como $D = D_I - D_I * 2 * \frac{G_{Transcurridas}}{G_{Final}}$		
4: $P_{t+1} = \emptyset$	$c_1$	1
5: $Penalizados = \emptyset$	$c_2$	1
6: $R_t = P_t \cup Q_t \cup E_t$	$c_3$	$3N$
7: Ordenar a $R_t$ de acuerdo a su aptitud.	$c_4$	$3NM \log(3NM)$
8: $B[i] = \text{false} \leftarrow \forall i \in 1, \dots, N$	$c_5$	$N$
9: <b>while</b> $R_t$ no esté vacío OR $ P_{t+1}  < N$	$c_6$	$N$
10: $j = \text{Mejor}(R_t)$ .		
11: <b>if</b> $B[j] == \text{false}$ <b>then</b>		
12: $P_{t+1} = P_{t+1} \cup R_t(j)$	$c_7$	$N$
13: $Penalizados = \text{Distancia}(R_t(j), R_t) < D$	$c_8$	$\frac{3dN^2}{2} - \frac{3dN}{2}$
14: $B[j] = \text{true}$ .	$c_9$	$N$
15: <b>end if</b>		
16: $R_t = R_t \setminus R_t(j))$	$c_{10}$	$N$
17: <b>end while</b>		
18: $Penalizados = Penalizados \setminus E_t$ .	$c_{11}$	1
19: <b>while</b> $ P_{t+1}  < N$	$c_{12}$	$N$
20: $i = \text{mejor\_contribucion\_diversidad}(Penalizados, P_{t+1})$	$c_{13}$	$\frac{dN^3}{3} - \frac{dN}{3}$
21: <b>if</b> $B[i] == \text{false}$ <b>then</b>		
22: $P_{t+1} = P_{t+1} \cup Penalizados(i)$	$c_{14}$	$N$
23: $B[i] = \text{true}$	$c_{15}$	$N$
24: <b>end if</b>		
25: <b>end while</b>		
26: <b>return</b> $P_{t+1}$		

---

TABLA 4.1: Complejidad de los algoritmos

Algoritmo	MOEA/D-EVSD	MOEA/D-SEBV	VSD-MOEA/D	VSD-MOEA
Complejidad	$O(MNT + N\alpha^2)$	$O(dTN^2 + MNT)$	$O(MNT + dN^3)$	$O(dMN^3)$

#### 4.6.1. Optimización propuesta - Fast VSD-MOEA/D

En la estimación de la complejidad del VSD-MOEA/D, se identificó que la sección con mayor costo computacional corresponde a la fase de remplazo, específicamente el peor caso se da cuando todos los individuos están quedan penalizados tras la selección de un único individuo. La implementación realizada, en cada paso de selección puede calcular hasta  $O(N^2)$  distancias, teniendo una complejidad total  $O(dN^3)$ , donde  $d$  es el número de variables. Se pueden definir algoritmos para mejorar la complejidad

anterior o alternativamente se puede utilizar algún procedimiento de selección con el cual se puedan escoger individuos diversos pero sin calcular todas las distancias. Para ello, dado que se está en una fase que se quiere promover diversidad se desechan los elitistas y se considera que existen dos individuos asociados a cada subproblema, el de la población anterior y el hijo. Una forma rápida de hacer el proceso es con la distancia de crowding Kukkonen y Deb, 2006 de los elementos candidatos respecto a los elementos ya seleccionados, pero calculada en el espacio de decisión. En el algoritmo 24 se puede observar que inicialmente se ordenan los individuos en base a cada dimensión y se calcula la contribución a la diversidad de cada individuo (líneas 4 - 11). Para calcular la contribución a la diversidad de cada individuo se obtiene sumando la distancia de cada dimensión. Así, para tomar la distancia de una dimensión se calcula la diferencia a los dos vecinos más cercanos y se promedia. Si es un individuo extremo sólo se toma la distancia al vecino más cercano. Entonces en el peor caso la cota superior de esta propuesta es  $O(dN^2)$ , así al implementar este procedimiento en el Fast VSD-MOEA/D, la complejidad en el peor caso es  $O(dMN^2)$ .

---

**Algoritmo 24** Selección de los individuos más dispersos

---

```

1: Entrada: Población  $P_{t+1}$  (Conjunto de individuos seleccionados),  $Z_t$  (Conjunto de individuos penalizados),  $D$  (Número de variables), .
2: Salida:  $P_{t+1}$ 
3:  $R_t = P_{t+1} \cup Z_t$ 
4: for  $d = 1, \dots, D$ 
5:   Ordenar  $R_t$  en la dimensión  $d$  de forma incremental.
6:    $Contribucion[1] = Contribucion[1] + \frac{(R[d][2].x - R[d][1].x)}{(Max[d] - Min[d])}$ 
7:    $Contribucion[N] = Contribucion[N] + \frac{(R[d][N].x - R[d][N-1].x)}{(Max[d] - Min[d])}$ 
8:   for  $i = 2, \dots, N - 1$ 
9:      $Contribucion[i] = Contribucion[i] + \frac{(R[d][i+1].x - R[d][i-1].x)}{2(Max[d] - Min[d])}$ 
10:  end for
11: end for
12: while  $|Z_t| > N$ 
13:   Seleccionar el subproblema  $i$  que esté asociado al individuo  $i_a$  con la mínima contribución a la diversidad.
14:   Eliminar al individuo  $i_a$  de  $Z_t$ .
15:   Agregar el individuo restante  $i_b$  asociado con el subproblema  $i$  a  $P_{t+1}$ .
16:   Actualizar la contribución hacia la diversidad de los dos vecinos.
17: end while
    return  $P_{t+1}$ 

```

La complejidad en el peor caso de esta sección es  $O(dN\log(N))$ .

La complejidad en el peor caso de esta sección es  $O(dN^2)$ .

TABLA 4.2: Complejidad de los algoritmos, con la nueva versión del VSD-MOEA/D

Algoritmo	MOEA/D-EVSD	MOEA/D-SEBV	VSD-MOEA/D	VSD-MOEA	Fast VSD-MOEA/D
Complejidad	$O(MNT + N\alpha^2)$	$O(dTN^2 + MNT)$	$O(MNT + dN^3)$	$O(dMN^3)$	$O(MNT + dMN^2)$



## Capítulo 5

# Operadores de reproducción y diversidad

### 5.1. Introducción

En los algoritmos evolutivos los operadores evolutivos fundamentales son los de selección de padres y remplazamiento, y los de reproducción, que incluyen habitualmente al operador de cruce y mutación. En los capítulos anteriores el enfoque se ha puesto en los operadores de selección de padres y remplazamiento, pero no es sólo importante mantener y elegir soluciones diversas, sino que es importante que los operadores de reproducción pueda aprovechar esa diversidad para crear nuevas soluciones diversas y de alta calidad. Este capítulo se centrará en analizar la relación entre los operadores de reproducción y la diversidad, y en base a las conclusiones a las que se llegan se proponen algunos cambios a operadores de reproducción estándar. En este punto, cabe recordar que los operadores de cruce intercambian información de individuos padres, con el propósito de compartir su información para generar nuevas soluciones y que el operador de mutación altera aleatoriamente la información de un individuo de forma individual. En muchos casos, la mutación se visualiza como una operación de búsqueda local pues en general no se suelen hacer mutaciones demasiado drásticas. La mayoría de los operadores evolutivos cuando fueron diseñados se probaron en algoritmos que no promovían la diversidad y salvo excepciones, no se hacen demasiados análisis en lo referente a como contribuyen a la diversidad, con lo que en este capítulo se presentan algunos análisis en esa línea.

Para realizar los análisis se consideran algunos de los operadores más populares. Particularmente, en este capítulo se analiza el comportamiento del operador de Cruce Binario Simulado (SBX) y del operador rand/1/bin de evolución diferencial (DE). Estos análisis se realizan junto con esquemas donde se administra la diversidad de forma explícita.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. Inicialmente se revisa la taxonomía de los operadores de cruce, detallando el funcionamiento del operador SBX. A continuación se realiza un análisis del SBX y se propone una modificación del mismo. Adicionalmente, se hace un análisis de los operadores de evolución diferencial y se muestran las dificultades que existen al considerar mecanismos donde la diversidad es mantenida de forma explícita. Finalmente se realiza una propuesta de evolución diferencial que será usada con las propuestas algorítmicas de este documento.

## 5.2. Operadores de cruce

Usualmente, los operadores de cruce tienden a promover mayor diversidad cuando se consideran padres distantes, de forma contraria cuando los padres están muy cercanos existe un efecto de intensificación y prácticamente se puede visualizar el proceso de búsqueda como una búsqueda local. De esta forma, los operadores de cruce son métodos adaptativos que dependen en la diversidad mantenida dentro de la población. En el caso de la codificación real, se han propuesto varios operadores de cruce (Herrera, Lozano y Sánchez, 2003), que pueden ser clasificados como centrados en los padres o en la media, en base a la región donde existe la tendencia de crear a los individuos hijos. En los operadores centrados en los padres, las soluciones hijas son creadas alrededor de cada solución padre, mientras que en los operadores centrados en la media, las soluciones hijas son creadas alrededor de la media de las soluciones padres. El operador de Cruce Binario Simulado (Simulated Binary Crossover - SBX Deb y Beyer, 1999) es probablemente uno de los más utilizados. En la versión inicial del SBX, se definió la forma de intercambiar la información para una variable. Tomando en cuenta las características de las distribuciones involucradas, el operador SBX se clasifica como un operador de cruce centrado en los padres. Por lo tanto, este tiende a crear soluciones cercanas a los padres. Sin embargo, la forma de extender al operador SBX a problemas de varias variables no se discutió en detalle en los artículos aunque hay varias implementaciones que permiten este uso y que son ampliamente usadas por toda la comunidad.

Adicionalmente, otra taxonomía clasifica a los operadores en *Orientados en las variables* y *Orientados en los vectores*. En la categoría de los operadores orientados en las variables, cada variable de las soluciones padre es combinada de forma independiente mediante una probabilidad para crear nuevos valores. Algunos de los operadores que pertenecen a esta categoría son *blend crossover* (BLX - Eshelman, 1993), y SBX. Los operadores orientados en los vectores, son diseñados para considerar la dependencia entre las variables. Normalmente aplican una combinación lineal de todas las variables. Algúnos de los operadores que pertenecen a esta categoría son *unimodal normally distributed crossover* (UNDX - Ono, Kita y Kobayashi, 2003) y el *simplex crossover* (SPX - Storn y Price, 1997c).

### 5.2.1. Cruce Binario Simulado (SBX)

Es uno de los operadores de cruce más utilizados en los MOEAs y es clasificado como centrado en los padres, particularmente tiene la propiedad de poder crear cualquier valor en el espacio de búsqueda combinando dos individuos padres. En el SBX en base a dos individuos padres ( $p_1, p_2$ ) se generan dos hijos ( $c_1, c_2$ ) considerando a una distribución de probabilidad. Para tener más control la forma de la distribución de la probabilidad se puede controlar con un índice de distribución  $\eta_c$  que determina la apertura de la distribución, y por tanto, la capacidad de exploración. Específicamente, un índice de distribución pequeño induce una mayor probabilidad de construir soluciones hijas alejadas de los padres, mientras que con un índice de distribución elevado, la probabilidad de crear soluciones hijas más similares a los padres se incrementa. El efecto de  $\eta_c$  es ilustrado en la Figura 5.1, donde se muestran las funciones de densidad de dos índices de distribución distintos. Específicamente los círculos representan a los padres, y se puede apreciar que con  $\eta_c = 5$ , la probabilidad de crear soluciones más cercanas a los padres es mayor que con  $\eta_c = 2$ .

El SBX tiene la propiedad de preservar una relación entre la media de los valores padres e hijos ( $c_1 + c_2 = p_1 + p_2$ ), con lo que se define el factor de dispersión  $\beta = |c_1 - c_2|/|p_1 - p_2|$ , y en base al valor de  $\beta$ , podemos determinar donde quedarían localizados los hijos. En el SBX la probabilidad de distribución para  $\beta \in [0, \infty]$  viene dada por:

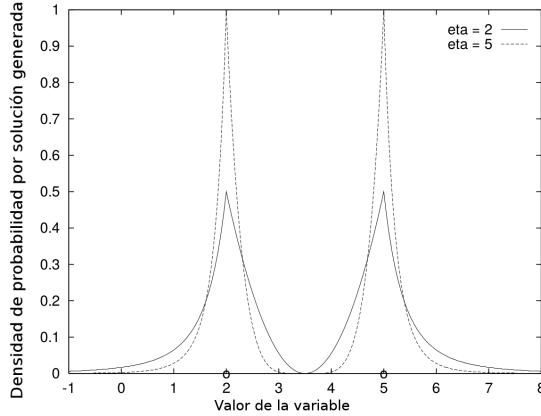


FIGURA 5.1: Función de densidad del operador SBX con índices de distribución 2 y 5.

$$P(\beta) = \begin{cases} 0,5(\eta_c + 1)\beta^{\eta_c}, & \text{si } \beta \leq 1 \\ 0,5(\eta_c + 1)\frac{1}{\beta^{\eta_c+2}}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.1)$$

En base a esto, se cumplen las siguientes propiedades:

- Los valores de las soluciones hijas son equidistantes de los padres.
- Existe una probabilidad no nula de generar una solución hija en cualquier parte en el espacio independientemente de donde se localicen los padres.
- La probabilidad de crear un par de soluciones hijas dentro del rango de las soluciones padres es idéntica a la probabilidad de crear dos soluciones hijas fuera de dicho rango.

A la hora de implementar esta distribución para dos valores de los individuos padres ( $p_1, p_2$ ), se crean los valores de los hijos ( $c_1, c_2$ ) como combinación lineal de los valores padres con un número aleatorio  $u \in [0, 1]$  de la forma (Agrawal y col., 1994):

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,5(1 + \beta(u))p_1 + 0,5(1 - \beta(u))p_2 \\ c_2 &= 0,5(1 - \beta(u))p_1 + 0,5(1 + \beta(u))p_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Así, para realizar la simulación del parámetro  $\beta(u)$ , primero se genera un número aleatorio  $u \in [0, 1]$ , y se utiliza en la siguiente fórmula:

$$\beta(u) = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & \text{si } u \leq 0,5, \\ (\frac{1}{2(1-u)})^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.3)$$

Se puede observar que la forma de la distribución no está afectada por los límites de cada variable, en base a este inconveniente, los autores Deb y Beyer, 1999 modificaron la ecuación (5.3) de forma que exista una probabilidad cero de crear individuos fuera del dominio de la variable, por lo tanto se puede calcular  $\beta(u, a)$  en función de un número aleatorio  $u \in [0, 1]$  de la forma:

$$\beta(u, a) = \begin{cases} (2u(1 - \rho_a))^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & \text{si } u \leq 0,5/(1 - \rho_a), \\ (\frac{1}{2(1-u(1-\rho_a))})^{\frac{1}{\eta_c+1}}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde  $a = x_i^{(L)}$  es el límite inferior y  $b = x_i^{(U)}$  es el límite superior, y  $\rho_a = 1/(2\beta_a^{\eta_c+1})$ , donde  $\beta_a = 1 + (p_1 - a)/(p_2 - p_1)$ . Similarmente,  $\rho_b$  es calculado remplazando  $\beta_a$  por  $\beta_b = 1 + (b - p_2)/(p_2 - p_1)$ , así  $\beta(u, b)$  es calculado con la ecuación (5.4), generando así dos individuos hijo en base a sus respectivas funciones de distribución  $\beta(u, a)$  y  $\beta(u, b)$ .

En la práctica, se trabajan con funciones de múltiples variables, con lo que hay que generalizar lo anterior. Una forma sencilla sería aplicar lo mismo a cada variable, pero se ha visto que eso es muy disruptivo, con lo que habitualmente no se cambian todas las variables. Por ejemplo, en la implementación que más se usa en la práctica (jMETAL, NSGA-II, etc.) cuando se aplica el SBX cada variable sufre el proceso de cruce con una probabilidad igual a 0.5, mientras que en el resto de casos los valores se heredaran sin ser alterados (Deb y col., 2002a; López-Camacho y col., 2013). Además, cuando se produce un cruce también aplican intercambios entre las valores generadas con probabilidad 0.5, lo que resulta en reflexiones que son analizadas posteriormente. Por último, cabe destacar que no se ha podido encontrar variantes del operador SBX en las que en lugar de usar dichas probabilidades fijas en 0.5, estas sean cambiadas a lo largo de la ejecución.

---

#### Algoritmo 25 Operador de Cruce Binario Simulado (SBX)

---

```

1: Entrada: Individuos Padre ( $P_1, P_2$ ), Indice de distribución ( $\eta_c$ ), Probabilidad de cruce ( $P_c$ ).
2: Salida: Individuos hijo( $C_1, C_2$ ).
3:  $r_1 \leftarrow U[0, 1]$ .
4: if  $r_1 \leq P_c$  then
5:   for cada variable d
6:     if  $U[0, 1] \leq 0,5$  then
7:        $a = LowBound(d)$ .
8:        $b = UpperBound(d)$ .
9:        $r_2 \leftarrow U[0, 1]$ .
10:       $\beta_a = 1 + (p_1 - a)/(p_2 - p_1)$ .
11:       $\rho_a = 1/(2\beta_a^{\eta_c+1})$ .
12:      Utilizar  $r_2$  y  $\rho_a$  en la ecuación 5.4 para generar  $\beta(u, a)$ .
13:      Generar a  $C_1(d)$  utilizando  $\beta(u, a)$  en la ecuación 5.2.
14:       $\beta_b = 1 + (b - p_2)/(p_2 - p_1)$ .
15:       $\rho_b = 1/(2\beta_b^{\eta_c+1})$ .
16:      Utilizar  $r_2$  y  $\rho_b$  en la ecuación 5.4 para generar  $\beta(u, b)$ .
17:      Generar a  $C_2(d)$  utilizando  $\beta(u, b)$  en la ecuación 5.2.
18:      if  $U[0, 1] \leq 0,5$  then
19:        Intercambiar los valores de  $C_1(d)$  con  $C_2(d)$ . } En esta sección se im-
20:      end if plementa la reflexión.
21:    else
22:       $C_1(d) = P_1(d)$ .
23:       $C_2(d) = P_2(d)$ . } En esta sección
24:    end if es controlada
25:  end for la similitud.
26: else
27:    $C_1 = P_1$ 
28:    $C_2 = P_2$ 
29: end if
```

---

### 5.2.2. Análisis operador de cruce SBX

La implementación más utilizada del operador SBX se encuentra integrada en el NSGA-II publicada en (Deb y col., 2002a). Este procedimiento está descrito en el algoritmo 25, donde destacan dos aspectos clave. El primero está relacionado con la similitud entre los individuos padre y los hijos (líneas 22 y 23). En dicha implementación los valores de las soluciones hijas son heredadas directamente de las soluciones padre con una probabilidad fija igual a 0.5, mientras que el resto de las variables son modificadas mediante la distribución de probabilidad propia del SBX. En consecuencia la similitud que existe entre los padres y los hijos depende del número de variables que se consideran en el problema de optimización, pues el incremento de la dimensionalidad involucra la creación de soluciones más distantes.

El segundo punto clave, que nunca ha sido analizado en detalle, está relacionado con el conjunto de reflexiones que se realizan en las líneas 18 - 20. Después de generar los dos valores que deben ser heredados en los dos hijos, dichos valores son intercambiados entre sí con una probabilidad fija del 0.5. En consecuencia, cada vez que las variables son intercambiadas se realiza una reflexión, que puede inducir grandes distancias entre los padres y los hijos, a pesar de que el SBX es considerado como un cruce centrado en los padres. La parte izquierda de la Figura 5.2 ilustra este comportamiento en el operador SBX para dos y tres variables. En esta figura, los padres están identificados con dos puntos rojos, y se ejecutó el operador SBX diez mil veces. Cada uno de los puntos de color negro es una solución hija, con lo que esta figura ilustra las zonas en las que se tienden a generar a los hijos. Se puede ver que los valores de cada variable siempre están cercanos a uno de los valores asociados a las variables de los padres. Sin embargo, debido al proceso de intercambio de valores, las soluciones hijas no siempre se encuentran cercanas a los padres. Particularmente, en el caso de dos dimensiones mostrado, se crean soluciones en la esquina superior izquierda y en la esquina inferior derecha, mientras que los padres están en las esquinas opuestas. A medida que aumenta el número de dimensiones  $d$ , la probabilidad de que siempre o nunca haya intercambios, y que por tanto, la nueva solución esté cercana a uno de los padres es  $k^d + (1 - k)^d$ , donde  $k$  es la probabilidad de realizar un intercambio, con lo que se produce un decrecimiento exponencial respecto al número de dimensiones. En consecuencia, las reflexiones provocan un alto grado de exploración. En algunos MOPs con alta dimensionalidad en el espacio de las variables, esto podría representar un inconveniente porque las reflexiones localizan soluciones hijas en cada esquina del hipercubo mínimo que contiene a las soluciones padre, lo que significa que el operador original podría inducir un nivel muy bajo de intensificación.

El inconveniente relacionado con las reflexiones puede ser manejado parcialmente implementando restricciones de emparejamiento que traten de cruzar exclusivamente a soluciones similares. Bajo esta condiciones, el hipercubo sería de menor tamaño, con lo que se induciría un mayor grado de intensificación. Esta puede ser una de las razones por las que el MOEA/D, que incorpora restricciones de apareamiento, ha sido capaz de resolver muchos problemas de forma exitosa. En este trabajo, se trata de resolver esta problemática eliminando el intercambio de variables, así como realizando otras modificaciones en el SBX que se describen en la siguiente sección. La ventaja de esta segunda alternativa es que se puede incorporar de forma sencilla en cualquier MOEA.

### 5.2.3. Propuesta del operador SBX basado en esquemas de diversidad

Tomando en cuenta el análisis previo, así como el deseo de adaptar el operador a los requerimientos de las diferentes fases de optimización, se diseñó e implementó un nuevo operador de cruce, que está descrito en el algoritmo 26 y que se denominada operador Dinámico sin Reflexiones basado en el Cruce

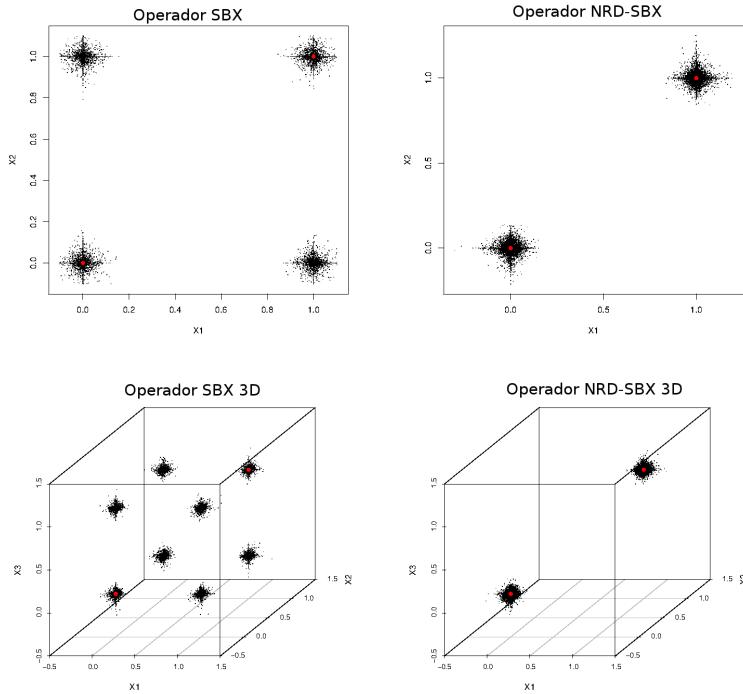


FIGURA 5.2: En la columna izquierda se presenta la simulación del operador SBX y en la columna de la derecha se presenta el operador NRD-SBX, ambas distribuciones con un índice de distribución de 20.

Binario Simulado (NRD-SBX). NRD-SBX realiza dos modificaciones al operador SBX descrito anteriormente.

En primer lugar, en el NRD-SBX, la probabilidad de intercambiar variables tras aplicar la distribución típica de SBX se fija a cero, con lo que nunca aparecen las reflexiones propias del SBX original. El efecto de este cambio se muestra en la parte derecha de la Figura 5.2, en la que podemos ver que ahora todos los hijos quedaron localizados en regiones cercanas a los padres. Esto implica un mayor grado de intensificación. Es importante hacer notar la diferencia entre el operador modificado SBX y un operador de mutación. La distancia entre padres e hijos en el NRD-SBX es proporcional a la distancia entre los padres, mientras que los operadores de mutación sólo consideran la información de una solución padre.

La segunda modificación del NRD-SBX está relacionada con la cantidad de variables que se heredan sin modificarse. El operador SBX hereda directamente los valores que corresponden a los padres con una probabilidad igual a 0.5. Esto podría limitar el grado de exploración especialmente en las primeras generaciones. Para evitar esta problemática, el operador NRD-SBX altera la probabilidad de heredar sin modificar las variables de los padres durante la ejecución del algoritmo. Particularmente, se implementa un modelo dinámico lineal, donde en la primera generación, esta probabilidad es asignada a cero y con el transcurso de las generaciones, la probabilidad se incrementa de manera lineal, de forma que cuando ha transcurrido la mitad de las generaciones la probabilidad es igual a 0.5. A partir de este momento, y hasta el final de la ejecución, se mantiene fija la probabilidad a 0.5. Esta regla tiende a ir disminuyendo paulatinamente el número de variables que se heredan sin realizar modificaciones, con lo que en las primeras fases se induce un mayor grado de exploración y las últimas fases, se induce un mayor grado de intensificación. La Figura 5.3, muestra para el caso de dos dimensiones, una simulación heredando directamente las variables con una probabilidad de 0, 0.25 y 0.50. Se puede apreciar que con probabilidades bajas (fases iniciales de la optimización) se exploran más zonas, mientras que en las fases

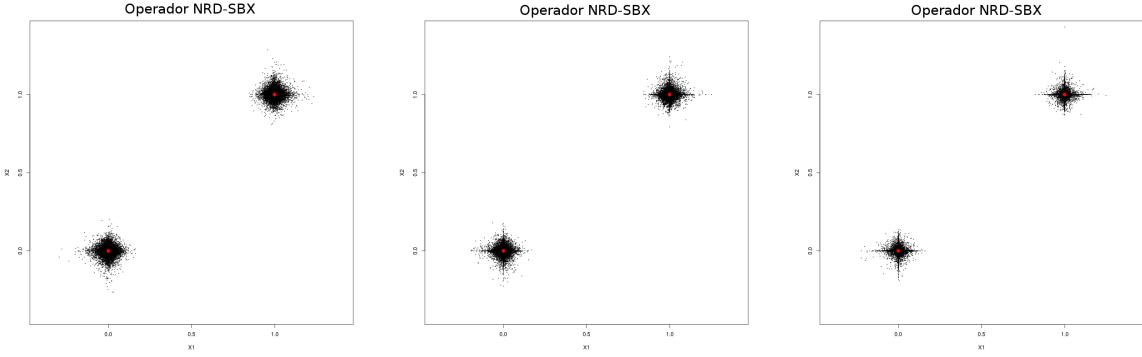


FIGURA 5.3: Simulación del operador SBX con la probabilidad de heredar directamente las variables con 0 %, 25 % y 50 % respectivamente. Los puntos rojos representan a los individuos padres.

---

#### Algoritmo 26 Operador Dinámico sin Reflexiones basado en el Cruce Binario Simulado (NRD-SBX)

---

```

1: Entrada: Individuos Padre ( $P_1, P_2$ ), Indice de distribución ( $\eta_c$ ), Probabilidad de cruza ( $P_c$ ), Generación actual ( $t_i$ ).
2: Salida: Individuos hijo( $C_1, C_2$ ).
3:  $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{t_i}{Total\_Generaciones})$ 
4:  $r_1 \leftarrow U[0, 1]$ .
5: if  $r_1 \leq P_c$  then
6:   for cada variable d
7:     if  $U[0, 1] \geq \delta$  then
8:        $a = LowBound(d)$ .
9:        $b = UpperBound(d)$ .
10:       $r_2 \leftarrow U[0, 1]$ .
11:       $\beta_a = 1 + (p_1 - a)/(p_2 - p_1)$ .
12:       $\rho_a = 1/(2\beta_a^{\eta_c+1})$ .
13:      Utilizar  $r_2$  y  $\rho_a$  en la ecuación 5.4 para generar  $\beta(u, a)$ .
14:      Generar a  $C_1(d)$  utilizando  $\beta(u, a)$  en la ecuación 5.2.
15:       $\beta_b = 1 + (b - p_2)/(p_2 - p_1)$ .
16:       $\rho_b = 1/(2\beta_b^{\eta_c+1})$ .
17:      Utilizar  $r_2$  y  $\rho_b$  en la ecuación 5.4 para generar  $\beta(u, b)$ .
18:      Generar a  $C_2(d)$  utilizando  $\beta(u, b)$  en la ecuación 5.2.
19:    else
20:       $C_1(d) = P_1(d)$ .
21:       $C_2(d) = P_2(d)$ . } La similitud se controla dinámicamente.
22:    end if
23:  end for
24: else
25:    $C_1 = P_1$ 
26:    $C_2 = P_2$ 
27: end if
```

---

finales se tienden a crear muchas soluciones que comparten valores con los padres, siendo este un paso mucho más intensificador. Cabe destacar que el comportamiento final en el que se mantienen bastantes variables sin cambiar, es deseado con MOPs en los que las variables son independientes entre sí. Sin embargo, en los problemas que involucran dependencia entre las variables, utilizar modificaciones de este tipo puede llevar a que el algoritmo se quede estancado en óptimos locales de baja calidad.

## 5.3. Operadores de evolución diferencial (DE)

Evolución Diferencial (DE) es ampliamente utilizado en muchas aplicaciones del mundo real debido a su simplicidad, eficiencia y competitividad. Principalmente por su efectividad ante otros algoritmos evolutivos ha sido objeto de múltiples estudios surgiendo diversas variantes del mismo, como son esquemas adaptativos (Zhang y Sanderson, 2009), definición de vecindades, operadores híbridos (Zhu y col., 2016), tamaños de poblaciones dinámicas, DE paralelas, entre otros. Estas variantes de DE, se

desarrollaron para tratar distintos problemas en el área de optimización continua y se ha adaptado para múltiples entornos (Kukkonen y Lampinen, 2009) incluyendo el ámbito multi-objetivo.

Evolución diferencial utiliza la ubicación de los individuos en el espacio de búsqueda para determinar la fuerza de la mutación, por lo cual es importante que al inicio del proceso evolutivo los individuos estén bien distribuidos en el espacio factible. De otra forma, si los individuos están muy cercanos entre sí, el proceso de búsqueda puede estancarse y como resultado se podría converger prematuramente, sin la capacidad de generar individuos en otras zonas del espacio factible. Además, si la población está agrupada en una región del espacio de búsqueda, no se podrán generar desplazamientos largos. Se han diagnosticado algunas debilidades de DE, principalmente en problemas no separables, es decir, donde existe un grado de dependencia elevado entre los parámetros. Teniendo en cuenta esto, hipotetizamos que los esquemas de diversidad explícita podrían ayudar con este tipo de debilidades. Sin embargo, se debe analizar en detalle el comportamiento de los operadores de DE. En este trabajo se realizará un análisis de los operadores de DE, principalmente pensando en su uso en ejecuciones a largo plazo y donde se administra la diversidad de forma explícita.

Inicialmente se describe cada uno de los principales componentes de evolución diferencial, posteriormente se presenta un análisis de la razón de cruce — también llamada razón de mutación — y del factor de escala. A continuación se analiza el comportamiento de los operadores de evolución diferencial en esquemas de diversidad y por último se propone una variante de DE especialmente adaptado para ejecuciones de largo plazo con control de diversidad.

## Esquema clásico de DE

Evolución diferencial implementa la estructura general de un algoritmo evolutivo. En la literatura de DE, un vector padre de la generación actual es conocido como vector objetivo (*target*), el vector que resulta de una operación de mutación es conocido como vector donante (*donor*) y finalmente un vector hijo formado por recombinar el vector donante y el vector objetivo es conocido como el vector de prueba (*trial*). La población inicial  $\{x_{i,0} = (x_{1,i,0}, x_{2,i,0}, \dots, x_{D,i,0}) | i = 1, 2, \dots, NP\}$  es generada aleatoriamente de acuerdo a una distribución uniforme con los límites  $x_j^{inf} \leq x_{j,i,0} \leq x_j^{sup}$ , para  $j = 1, 2, \dots, D$ , donde  $D$  es la dimensión del problema y  $NP$  es el tamaño de la población. Despues de la inicialización DE realiza de forma iterativa para cada generación las operaciones de mutación, cruce y selección, en ese orden.

## Mutación con vectores de diferencias

En cada generación ( $g$ ) se generan  $NP$  vectores mutados o *donantes*  $v_{i,g}$ , en base a la población de padres. El operador de mutación implica un cambio o perturbación con un elemento de forma aleatoria (Price, Storn y Lampinen, 2006). Aunque muchos EAs simulan los efectos de la mutación con incrementos que son generados aleatoriamente mediante una distribución de probabilidad predefinida, en evolución diferencial se considera una distribución que va a depender de las diferencias existentes entre individuos. En una población con  $NP$  vectores distintos se pueden generar  $NP(NP - 1)$  vectores de diferencias, como se puede observar en la figura 5.4, donde en la parte izquierda se consideran diez soluciones candidatas con sus correspondientes diferencias (líneas azules) y en la parte derecha se ilustra todos los posibles vectores diferencia.

Las estrategias de mutaciones más utilizadas en la literatura son:

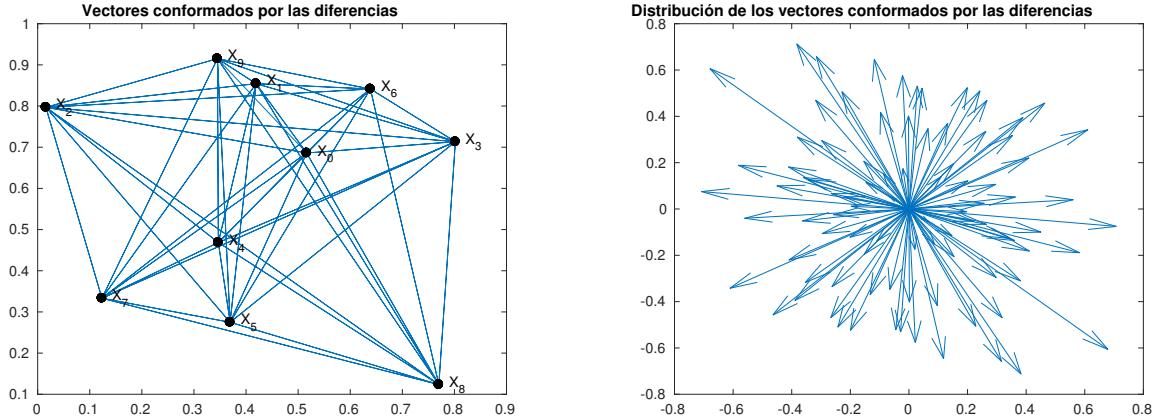


FIGURA 5.4: En la izquierda se muestra diez vectores, y en la parte derecha su correspondiente distribución de diferencias.

1.  $DE/rand/1: \mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r0,g} + F(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g})$
2.  $DE/current-to-best/1: \mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r0,g} + F(\mathbf{x}_{best,g} - \mathbf{x}_{r2,g}) + F(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g})$
3.  $DE/best/1: \mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{best,g} + F(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g})$

Donde los índices  $r_0$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son enteros aleatorios y mutuamente exclusivos, escogidos del rango  $[1, NP]$ . Así, la diferencia de cualquiera par de vectores es escalado por un parámetro  $F$  (normalmente asignado en el intervalo  $[0,4, 1]$ ) y con eso se produce la mutación.

## Operador de cruce en DE

Tras generar el vector donante se implementa el operador de cruce. El vector donante intercambia componentes con el vector objetivo  $\mathbf{x}_{i,g}$  para formar al vector de prueba  $\mathbf{u}_{i,g}$ . Así, la operación de cruce binomial consiste en generar al vector de prueba final  $\mathbf{u}_{i,g} = u_{1,i,g}, u_{2,i,g}, \dots, u_{D,i,g}$ , de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{j,i,g} = \begin{cases} \mathbf{v}_{j,i,g}, & \text{si } rand(0,1) \leq CR_i \text{ or } j = j_{rand} \\ \mathbf{x}_{j,i,g}, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde  $rand(0,1)$  es generado de forma aleatoria con una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $j_{rand} = randint(1, D)$  es un entero generado de forma aleatoria en el intervalo  $[1, D]$  para cada vector  $i$ , y la probabilidad  $CR_i \in [0, 1]$  corresponde a la fracción de los componentes del vector que en promedio son heredados del vector mutado. En DE clásico el parámetro  $CR$  es un parámetro fijo para generar a todos los vectores de prueba, sin embargo existen variantes adaptativas o auto-adaptativas donde cada individuo está asociado con su propia probabilidad de cruce  $CR$ .

## Selección en DE

El operador de selección elige al mejor entre el vector padre  $\mathbf{x}_{i,g}$  y el vector de prueba  $\mathbf{u}_{i,g}$  de acuerdo a su aptitud. En el caso de minimización un vector es seleccionado en base a lo siguiente:

$$\mathbf{x}_{i,g+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,g}, & \text{si } f(\mathbf{u}_{i,g}) \leq f(\mathbf{x}_{i,g}) \\ \mathbf{x}_{i,g}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.5)$$

el cual es utilizado en la siguiente generación como padre.

## Efecto de los parámetros

Aunque DE es ampliamente utilizado en optimización para dominios continuos, a la hora de aplicarlo a problemas complejos generalmente es necesario realizar un estudio de parametrización o usar técnicas adaptativas. Así, en problemas relativamente sencillos (ej. unimodal y de baja dimensionalidad) se suelen utilizar poblaciones pequeñas, pero en problemas complejos se recomienda aplicar una población grande para evitar que el proceso de búsqueda se estanque pronto en mínimos locales. Debido a que se incorpora el proceso de mutación con el de cruce, se puede interpretar al parámetro  $CR$  como razón de mutación, siendo la probabilidad de heredar un parámetro del vector de donante. Por esta razón este parámetro se denomina razón de mutación o razón de cruce.

En DE, el número promedio de parámetros mutados dado un valor de  $CR$  depende en el esquema de cruce, pero en cualquier caso valor más pequeño de  $CR$  implica que se hereden menos variables mutadas. En (Storn y Price, 1997b) mostraron que un gran número de funciones pueden ser resueltas con  $0 \leq CR \leq 0,2$  o con  $0,9 \leq CR \leq 1$ . En general, una razón de mutación pequeña suele ser beneficioso para problemas que sean separables, es decir que no exista dependencia entre los parámetros. Sin embargo pueden presentarse problemas de convergencia al implementar una razón de mutación pequeña, principalmente en problemas con un grado elevado de dependencia. De hecho, en (Salomon, 1996) se muestra que una razón de mutación pequeña puede tener peores efectos que una búsqueda aleatoria principalmente en problemas de optimización no separables y multimodales. Por lo tanto el valor  $CR$  proporciona una forma de proporcionar una diversidad extra a la población en los vectores de prueba. Así, en problemas complejos y con alta dependencia suele ser aconsejable utilizar valores de  $CR$  cercanos a 1.

El efecto del parámetro  $CR$  puede ser observado en la figura 5.5, donde se muestra la distribución empírica de los vectores de prueba o candidatos generados con el algoritmo estándar de evolución diferencial, considerando diez vectores en la población y 200 generaciones, sin involucrar el proceso de selección. Principalmente se observa que para valores de  $CR = 1$  el comportamiento del esquema DE/rand/1/bin es rotacionalmente invariante, mientras que para  $CR = 0,5$  se observan comportamientos similares a los que se aprecian en el operador SBX, en el sentido que se hereda directamente información de los padres.

En lo referente a la relación con la diversidad cabe destacar también lo siguiente. En base a la literatura el factor escala de mutación  $F$  suele utilizarse en el rango  $(0, 1)$ , y aunque es posible asignar valores  $F > 1$  no suele ser lo habitual. La cota inferior de este parámetro ha sido estudiado en detalle por Zaharie, 2002, ya que un valor pequeño tiende a reducir la diversidad de la población y para evitar la convergencia prematura, es importante que  $F$  tenga una magnitud adecuada para contrarrestar la presión de selección. También se ha establecido que si los valores  $F$  y  $NP$  son muy pequeños, la búsqueda

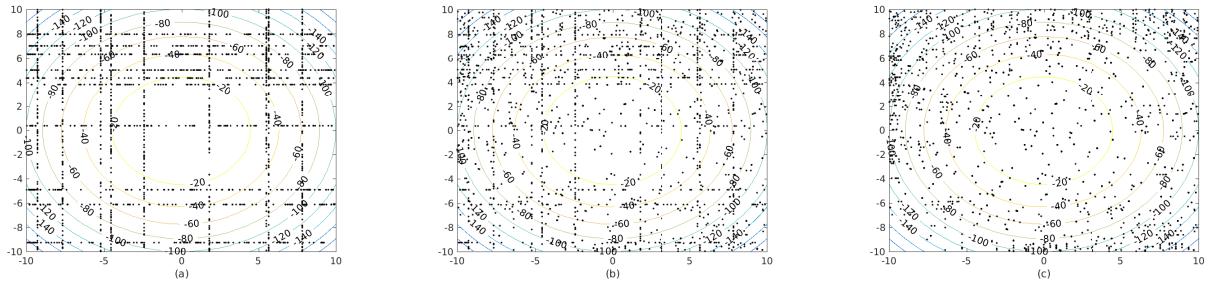


FIGURA 5.5: Distribución empírica de los vectores de prueba para los valores (a) CR = 0.0, (b) CR = 0.5, (c) CR = 1.0

se estancará en un mínimo local rápidamente con lo que no son apropiadas para ejecuciones a largo plazo (Kukkonen y Lampinen, 2009). Así, Zaharie estima el mínimo valor crítico mediante la fórmula  $F_{crit} = \sqrt{\frac{(1 - \frac{CR}{2})}{NP}}$ , aunque en la práctica es usualmente considerado como  $F_{crit} = 0,4$ .

El factor escala de mutación puede ser transformado en una variable aleatoria de forma efectiva, este proceso puede favorecer en configuraciones con poblaciones pequeñas, de lo contrario DE podría estancarse. Por lo tanto transformando  $F$  en una variable aleatoria por medio de una función de distribución se puede generar una mayor cantidad de vectores que se usarán al mutar (Zaharie, 2002).

El proceso de transformar  $F$  en una variable aleatoria se puede hacer de dos formas. En la primera, denominada *jither*, se genera un valor  $F$  para cada parámetro. Alternativamente se puede generar un valor  $F$  para cada vector lo que se conoce como *dithering*. La estrategia de dithering escala la longitud del vector de diferencias, por otra parte, *jither* escala a el vector de diferencias y cambia su orientación. En base a varios análisis realizados por Price, Storn y Lampinen, 2006, se ha observado que implementar *jither* es efectivo en funciones separables, pero su rendimiento es pobre en funciones no separables y multimodales. Por otra parte *dithering* es más estable y se ha observado que con una razón de mutación ( $CR$ ) elevada puede superar a la forma usual que es fija.

## Evolución diferencial en esquemas de diversidad explícita

Aunque se han desarrollado múltiples técnicas para mantener la diversidad en la población, no se ha analizado las implicaciones que tienen sobre los operadores de evolución diferencial. Así, al mantener explícitamente la diversidad en la población pueden existir efectos no deseados al aplicar los operadores ya que inicialmente no fueron diseñados para ser usados en esquemas de este tipo. En un esquema usual de un EA, en las primeras generaciones los individuos de la población están bien distribuidos en el espacio factible, por lo tanto la distribución de los vectores de diferencia provocan desplazamientos grandes en el espacio de búsqueda, no obstante en función de la estrategia de selección estos desplazamientos tienden a ser menores rápidamente conforme se detectan regiones promisorias cambiando — normalmente de forma rápida — de exploración a intensificación. Esto sucede en base a las regiones promisorias encontradas durante las primeras generaciones del proceso de búsqueda.

Por otra parte, en un esquema donde se mantiene la diversidad de forma explícita, se puede observar que durante más tiempo habrá desplazamientos elevados. Una de las problemáticas que suele tener DE es que durante las primeras generaciones se generan muchos valores que caen fuera del dominio. El mantenimiento explícito de la diversidad puede agravar este efecto ya que se puede dar durante más tiempo. Además, los vectores de diferencias tendrán una longitud superior a la distancia mínima que

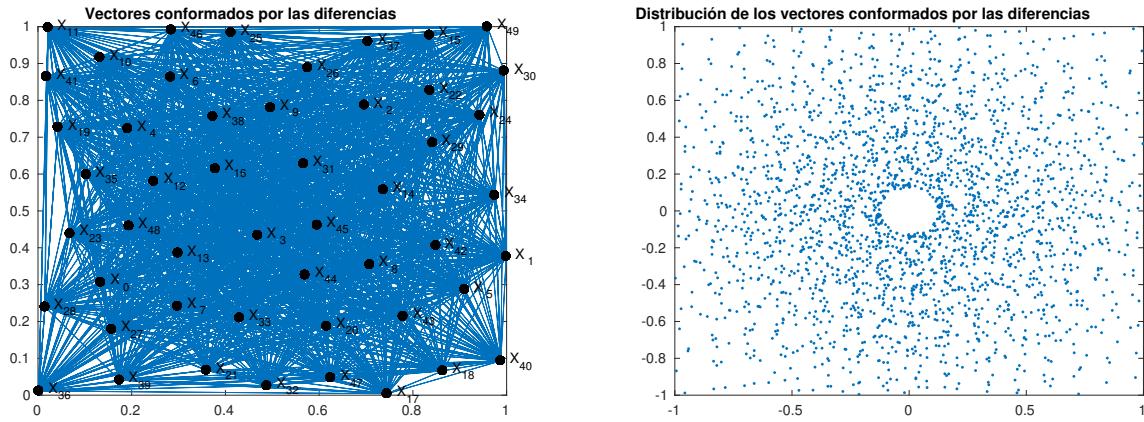


FIGURA 5.6: En la izquierda se muestran 50 vectores con una distancia mínima al vecino más cercano de  $D_i = 0,125$ , y en la parte derecha su correspondiente distribución de diferencias (2450), en la derecha cada punto corresponde a un vector de diferencia.

existe entre cada individuo de la población, como se observa en la parte derecha de la figura 5.6. Aunque aplicar grandes desplazamientos puede ser favorable para fomentar la diversidad en la población, también es deseable generar vectores de diferencia pequeños, con el propósito de mejorar la aptitud de un individuo aislado, cosa que ante estas circunstancias nunca ocurriría. Esto implica que tanto los desplazamientos grandes como los pequeños son importantes en el proceso de búsqueda.

Para resolver las debilidades previamente mencionadas, se sugieren varias modificaciones al esquema clásico de DE a la hora de integrarlo en un esquema con control explícito de diversidad. Primeramente, se aplica un operador de mutación polinomial, con lo que existirá una probabilidad no nula de generar puntos en todo el espacio factible. Al aplicar esta mutación además del operador de evolución diferencial provocará que se tenga la capacidad de generar puntos en más regiones, pudiendo evitar problemáticas de estancamiento que se dan cuando no hay demasiados vectores diferencia que sean distintos. En base a que en las primeras fase del algoritmo se provocarán desplazamientos elevados y en consecuencia se generarán individuos fuera del espacio factible, se sugiere utilizar un mecanismo de reparo o posicionamiento adecuado como parte del proceso de exploración. En la literatura (Kreischer y col., 2017; Arabas, Szczepankiewicz y Wroniak, 2010) existen varias alternativas, una de los más utilizadas es el *método de proyección*, el cual consiste en reasignar los componentes no factibles en el límite definido de la forma:

$$\mathbf{v}_{i,j,g} = \begin{cases} \mathbf{u}_j, & \text{si } f(\mathbf{v}_{i,j,g}) > \mathbf{u}_j \\ \mathbf{l}_j, & \text{si } f(\mathbf{v}_{i,j,g}) < \mathbf{l}_j \\ \mathbf{v}_{i,j,g}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.6)$$

donde  $\mathbf{u}_j$  es el límite superior,  $\mathbf{l}_j$  el límite inferior y  $\mathbf{u}$  es el vector donante o mutado. El método de proyección no es adecuado en este esquema de diversidad, ya que tiende a generar muchos individuos hijos en la frontera del espacio de búsqueda, y teniendo en cuenta que se ejecuta a largo plazo estar muestreando la misma zona con alta probabilidad no parece muy promisorio. En su lugar se sugiere utilizar el método de *base aleatorio*, que consiste en generar un valor aleatoriamente de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{i,j,g} = \begin{cases} \mathbf{base}_{j,g} + rand_j(0, 1)(\mathbf{u}_j - \mathbf{base}_{j,g}), & \text{si } f(\mathbf{v}_{i,j,g}) > \mathbf{u}_j \\ \mathbf{base}_{j,g} + rand_j(0, 1)(\mathbf{l}_j - \mathbf{base}_{j,g}), & \text{si } f(\mathbf{v}_{i,j,g}) < \mathbf{l}_j \\ \mathbf{v}_{i,j,g}, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.7)$$

Se puede observar que en esta propuesta no existe una tendencia de ubicar las componentes del vector mutado en los extremos. Además, al tener la componente aleatoria se promueve más exploración, y teniendo en cuenta que esta situación ocurrirá más al principio de la ejecución parece una estrategia adecuada.

Por otro lado, el comportamiento de la convergencia de un algoritmo de evolución diferencial depende en gran medida de la configuración de los parámetros, como ya se ha analizado anteriormente algunas configuraciones son más adecuadas para ciertos problemas. En base a esto se propone modificar el mecanismo usual de evolución diferencial de la siguiente forma. La razón de mutación ( $CR$ ) puede tomar dos valores como se indica en la ecuación (5.8), donde el primer valor es principalmente para tratar problemas separables y el segundo será efectivo en problemas con una elevada dependencia entre las variables. Dado que se ejecuta a largo plazo, consideramos que es bueno dar posibilidad a utilizar los dos valores.

$$CR = \begin{cases} 0,2, & \text{si } rand(0,1) \leq 0,5 \\ 1,0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5.8)$$

Se sabe que en el DE clásico esta última modificación puede ocasionar problemas de convergencia para ciertos casos, ya que puede ocasionar ciertos movimientos que provoque una pérdida grande de diversidad. Sin embargo, al mantener la diversidad de forma explícita esto no ocasiona problemas para los métodos propuestos.

Por lo tanto, a la hora de integrar DE en esquemas con control de diversidad se incorporan las siguientes características:

- Utilizar el operador de mutación polinomial para tener una probabilidad de generar individuos en todo el espacio factible.
- Aplicar un método de reparación que aporte al proceso de exploración.
- La probabilidad que corresponde a la razón de mutación está conformada por dos valores.

Particularmente, el operador de mutación polinomial es incorporado de forma independiente a los operadores de DE, por lo tanto el orden para aplicar estos operadores consiste inicialmente en implementar DE y posteriormente utilizar la mutación polinomial al individuo generado por DE. Finalmente, cabe destacar que se mostró que una posible falla de los métodos de evolución diferencial al integrarlo con métodos de control de diversidad explícita puede ser la falta de movimientos de intensificación. Aunque se reconoce esto como una posible fuente de pérdida de rendimiento, se dejó para el futuro establecer mecanismos para contrarrestar este inconveniente.



# Capítulo 6

## Validación Experimental

En este capítulo se lleva a cabo la validación experimental, mostrando que controlar la diversidad en el espacio de las variables es una forma de mejorar los resultados obtenidos por los MOEAs actuales en muchos problemas de optimización, especialmente en los más complejos. A pesar de que durante esta investigación se realizaron una gran cantidad de experimentos, se han seleccionado los más significativos para poder validar la hipótesis de partida de esta tesis. Algunos resultados adicionales que complementan a los mostrados en este capítulo se encuentran en los apéndices. En la primera parte de este estudio experimental se analiza el comportamiento del VSD-MOEA, comparándolo con algunos de los principales MOEAs del estado-del-arte. Adicionalmente se analiza la escalabilidad en el espacio de las variables de este conjunto de optimizadores. Además, se hace un estudio de robustez del VSD-MOEA en base al nuevo parámetro que añade, es decir, el grado de diversidad inicial, mostrando que es un algoritmo muy estable que puede obtener resultados de alta calidad para un rango grande de valores de este parámetro. En la segunda parte se analizan los resultados obtenidos por las propuestas basadas en descomposición, donde se discute el MOEA/D-EVSD que promueve la diversidad de forma implícita, y los algoritmos MOEA/D-SEBV y VSD-MOEA/D que fomentan la diversidad explícitamente. Finalmente, se examina el operador de cruce NRD-SBX comparado con el SBX en su forma estándar.

### 6.1. Esquema de validación experimental

En esta sección se especifica la metodología utilizada para realizar la validación experimental, la cual incluye test estadísticos, y uso de indicadores y superficies de cubrimiento que se discutieron en el capítulo 1. Como parte de este proceso se utilizaron los algoritmos implementados en el jMetalcpp (López-Camacho y col., 2013). En lo referente a conjunto de problemas, se seleccionaron los WFG (Huband y col., 2005a), DTLZ (Deb y col., 2005) y UF (Zhang y col., 2008a).

Dado que todos los optimizadores son estocásticos, cada ejecución se repitió 35 veces con diferentes semillas en el generador de números aleatorios. Los siguientes aspectos fueron comunes para todos los algoritmos: el criterio de parada se fijó a 250,000 generaciones, el tamaño de población a 100, el operador de cruce SBX o NRD-SBX se configuró con un índice de distribución igual a 20 y la probabilidad de su uso fue de 0,9, se utilizó la mutación polinomial con un índice de distribución igual a 50 y su probabilidad se fijó a  $1/n$ , donde  $n$  es el número de variables. Además, para dos y tres objetivos los problemas WFG fueron configurados con 24 parámetros, siendo 20 de ellos parámetros de distancia, y 4 de ellos parámetros de posición. En los problemas de prueba DTLZ, el número de variables es asignado a  $n = M + r - 1$ , donde  $r = \{5, 10, 20\}$  para el DTLZ1, DTLZ2 - DTLZ6 y DTLZ7 respectivamente, como es sugerido por los autores (Deb y col., 2005). Los problemas de prueba UF están compuestos de diez

instancias, donde las primeras siete corresponden a dos objetivos y el resto a tres objetivos, además para todos los problemas el número de variables es asignado a  $n = 30$ . La parametrización específica de cada algoritmo se muestra en la tabla 6.1.

TABLA 6.1: Parametrización

Algoritmo	Configuración
GDE3	$CR = 0,9$ y $F = 0,5$
SMS-EMOA	Desplazamiento = 250
MOMBI-II	$\epsilon = 1e - 3$ , $\alpha = 0,5$ , tamaño del registro = 5 generaciones
MOEA/D	Tamaño de la vecindad $T = 20$ , Max. actualizaciones por sub-problema ( $\eta_r$ ) = 2 y $\delta = 0,9$
MOEA/D-EVSD	En la primer fase se utiliza un 80 % del total de generaciones En la segunda fase utiliza 20 % del total de generaciones $\alpha = 20$ individuos, $T_{r,1} = 2$ , $T_{r,2} = 25$ , se utiliza el operador de cruce SBX en las dos fases
VSD-MOEA-SEBV	$D_I = \sqrt{n} * 0,2$ , $CR = 0,9$ , $F = 0,5$ , $T = 10$
VSD-MOEA/D	$D_I = \sqrt{n} * 0,2$ , $F = 0,5$ , $T = 10$
VSD-MOEA	$D_I = \sqrt{n} * 0,2$

Con el objetivo de comparar estadísticamente los resultados de cada métrica (hipervolumen, IGD+,  $\Delta_p$ ), se realizaron un conjunto de pruebas estadísticas utilizando el esquema que se muestra en la figura 6.1 (Durillo y col., 2010). Concretamente, para comparar dos conjuntos de muestras, en primer lugar se utiliza la prueba Shapiro-Wilk para comprobar si los resultados se ajustan a una distribución Gaussiana. En los casos en que sí se ajusten, se utiliza la prueba de Levene para comprobar la homogeneidad de las varianzas, procediendo con la prueba de ANOVA en caso positivo o con el de Welch en caso negativo. Por otro lado, para los casos que no se ajusten a distribuciones Guassianas, se utiliza la prueba de Kruskal-Wallis. En todos los casos se fija el nivel de confianza al 95 %. Se considera que un algoritmo  $X$  es superior a un algoritmo  $Y$ , si el procedimiento anterior reporta diferencias significativas, teniendo media y mediana del indicador obtenido por el método  $X$  superiores a las obtenidas por el método  $Y$ .

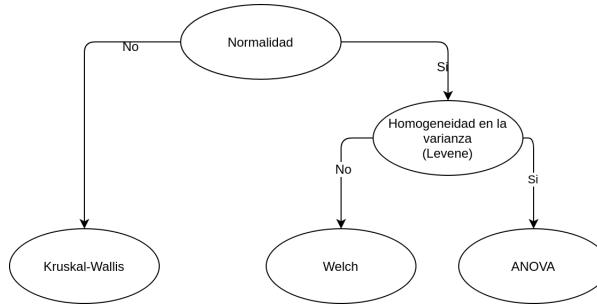


FIGURA 6.1: Pruebas estadísticas para determinar la superioridad de un algoritmo.

Los resultados de cada métrica se describen en base a las estadísticas generales, pruebas estadísticas y valores de efectividad. En las estadísticas generales en relación a un determinado indicador se presenta el mínimo, máximo y la media. Adicionalmente se indica la columna  $Diff$  que representa la diferencia entre las medias frente al mejor algoritmo, por lo tanto el mejor algoritmo en cada instancia tiene un valor en  $Diff$  igual cero. Las pruebas estadísticas se realizan por medio de comparaciones entre cada par de algoritmos, así para cada instancia y cada algoritmo, la columna  $\uparrow$  reporta el número de comparaciones donde las pruebas estadísticas confirman la superioridad de cada algoritmo, mientras que la columna  $\downarrow$  reporta el número de casos en que ese algoritmo es inferior. Por último, los valores de efectividad cuantifican la superioridad de cada algoritmo frente al resto a través de comparaciones por pares.

Para calcular este valor, tras comparar un algoritmo **A** con un algoritmo **B**, si **A** gana, se acumula la diferencia con **B** (la media) en la columna de ganancia  $\uparrow$  que corresponde al algoritmo **A**, de igual forma se acumula esta diferencia en la columna de perdida  $\downarrow$  en el algoritmo **B**. De esta forma, podemos saber no sólo cuántas veces un algoritmo fue superior o inferior, sino para los casos en que hubo diferencias estadísticas, de cuánto eran esas diferencias en media. La columna de *Puntaje* indica la diferencia total entre los puntos positivos y los negativos, por lo tanto un puntaje elevado indica la superioridad del algoritmo.

Para realizar el cálculo del indicador que corresponde al hipervolumen, en cada problema se debe escoger un vector de referencia. En todos los casos se han utilizado vectores de referencia estandar. Concretamente, los puntos de referencia implementados en el indicador del hipervolumen se muestran en la tabla 6.2, siendo los mismos valores que los utilizados en (Berenguer y Coello, 2014).

TABLA 6.2: Puntos de referencia para el indicador del hipervolumen

Instancias	Punto de referencia
WFG1-WFG9	[2,1,...,2m + 0,1]
DTLZ 1, 2, 4	[1,1,...,1,1]
DTLZ 3, 5, 6	[3,...,3]
DTLZ7	[1,1,...,1,1,2m]
UF 1-10	[2,...,2]

## 6.2. Algoritmo basado en dominancia VSD-MOEA

### 6.2.1. Rendimiento frente al estado del arte

En esta sección se lleva a cabo la validación experimental de la propuesta de diversidad basada en dominancia, comparando el mismo con varios MOEAs del estado del arte. Para realizar el análisis de los resultados se utiliza el indicador del hipervolumen, la distancia generacional invertida ( $IGD+$ ) y la distancia promedia de hausdorff ( $\Delta_p$ ). Para cada indicador se reporta la tabla de estadísticas, las pruebas estadísticas y los valores de efectividad, discutiendo principalmente los resultados que corresponden al indicador del hipervolumen en este capítulo. El resto del material se puede consultar en el apéndice A. Los resultados estadísticos que corresponden a dos objetivos se presentan en la tabla 6.3, donde se puede apreciar que el algoritmo GDE3 proporciona los mejores resultados en la mayoría de las instancias, a pesar de eso la suma total de todas las diferencias entre este algoritmo y el mejor es menor que la que posee el VSD-MOEA/D. Esto se debe a que aunque el GDE3 es superior en una mayor cantidad de problemas, su rendimiento es significativamente malo en otras instancias de prueba. Por otra parte, la propuesta VSD-MOEA es suficientemente estable ya que en todas las instancias es el mejor algoritmo y ofrece soluciones muy cercanas a los mejores valores y en consecuencia el valor de la columna Dif siempre es pequeño. De hecho el problema en el que peor rendimiento tuvo fue el DTLZ6 y en ese caso su hipervolumen media fue solo 0,088 unidades menores que el mejor algoritmo. Sin embargo, el GDE3 tuvo un caso en que se quedó a 0,542 unidades, lo que sí representa una perdida de rendimiento importante.

También es importante mencionar que el conjunto de prueba DTLZ tiene los siguientes inconvenientes (Zhang y col., 2008b). El óptimo global está ubicado en el centro o en los límites del espacio factible, todos los problemas son separables y el óptimo global tiene los mismos valores en todas las variables

del espacio factible. Particularmente, el DTLZ5 y DTLZ6 son problemas sencillos para el GDE3, porque el óptimo global está ubicado en el límite inferior del dominio, por lo tanto al utilizar una estrategia para corregir a los individuos que violan los límites del espacio factible como es el *método de proyección* (Kreischer y col., 2017), existirá una tendencia hacia llegar a las regiones óptimas de una manera que se puede considerar algo injusta. En la tabla 6.4 se puede observar los mismos resultados pero para 3 objetivos. Es claro que conforme aumenta el número de objetivos empeora el desempeño del GDE3, por lo tanto para tres objetivos su diferencia con los mejores resultados son elevados, excepto para el DTLZ5 y DTLZ6 donde el conjunto óptimo es ubicado en la frontera del espacio factible. El resto de algoritmos implementan el operador de cruce NRD-SBX, por lo tanto poseen un comportamiento diferente<sup>1</sup>. Se puede observar que el VSD-MOEA ofrece soluciones estables tanto en dos objetivos como en tres objetivos, inclusive al aumentar el número de objetivos<sup>2</sup> proporciona mejores resultados que el resto de algoritmos basados en dominancia. Principalmente, el VSD-MOEA resuelve mejor a los problemas de prueba más complejos, entre ellos los que poseen alta dependencia, o son multimodales y deceptivos. Además, sus respectivos valores que corresponden al mínimo y máximo son superiores que los algoritmos del estado-del-arte.

En las tablas 6.5, 6.6 se muestran los resultados que corresponden a las valores de efectividad en dos y tres objetivos respectivamente. Se puede observar que la nueva propuesta únicamente posee un puntaje negativo en las instancias DTLZ6 y WFG6 con dos objetivos, aunque con diferencias despreciables. De todas formas, las diferencias son mínimas, lo que significa que prácticamente obtiene los mismos resultados que los mejores algoritmos. Además VSD-MOEA posee el mejor puntaje total, tanto en dos como en tres objetivos, superando ampliamente al resto y por ofreciendo soluciones de mayor calidad y de manera más estable.

Particularmente, el MOEA/D y el Mombi-II logran mejores resultados conforme aumenta el número de objetivos, principalmente porque su diseño es en base a los vectores de pesos que a diferencia del concepto de dominancia no sufren de problemas graves en lo referente a la escalabilidad en el número de objetivos. Así, el Mombi-II con dos objetivos proporciona los peores resultados en comparación a los demás algoritmos, pero con tres objetivos se observa que su puntaje mejora significativamente siendo el segundo mejor.

<sup>1</sup>Existen problemas numéricos con la implementación del operador SBX para ubicar individuos exactamente en la frontera del espacio factible.

<sup>2</sup>En el apéndice A se presentan los resultados considerando diez objetivos.

TABLA 6.3: Estadísticas del hipervolumen considerando dos objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	1.084	1.084	<b>1.084</b>	0.000	1.078	1.078	1.078	0.006	1.083	1.083	1.083	0.000	1.078	1.084	1.081	0.003	1.084	1.084	<b>1.084</b>	0.000
DTLZ2	0.421	0.421	<b>0.421</b>	0.000	0.418	0.418	0.418	0.003	0.419	0.420	0.419	0.001	0.420	0.420	0.420	0.001	0.420	0.420	0.420	0.000
DTLZ3	8.211	8.211	<b>8.211</b>	0.000	8.170	8.170	8.170	0.041	8.209	8.210	8.209	0.001	8.169	8.210	8.200	0.011	8.210	8.210	8.210	0.000
DTLZ4	0.421	0.421	<b>0.421</b>	0.000	0.110	0.418	0.383	0.038	0.110	0.420	0.313	0.107	0.110	0.418	0.365	0.055	0.420	0.420	0.420	0.000
DTLZ5	8.211	8.211	<b>8.211</b>	0.000	8.170	8.170	8.170	0.041	8.209	8.210	8.209	0.001	8.210	8.210	8.210	0.001	8.210	8.210	<b>8.210</b>	0.000
DTLZ6	8.211	8.211	<b>8.211</b>	0.000	7.989	8.170	8.073	0.138	8.062	8.209	8.128	0.083	8.027	8.210	8.095	0.116	7.989	8.210	8.123	0.088
DTLZ7	0.894	0.894	<b>0.894</b>	0.000	0.417	0.417	0.417	0.478	0.420	0.420	0.420	0.474	0.420	0.420	0.474	0.893	0.893	0.893	0.893	0.001
UF1	3.657	3.659	3.658	0.002	3.327	3.517	3.490	0.171	3.650	3.652	3.651	0.010	3.428	3.660	3.588	0.072	3.655	3.662	<b>3.661</b>	0.000
UF2	3.651	3.654	3.653	0.005	3.406	3.628	3.594	0.064	3.643	3.647	3.645	0.013	3.428	3.649	3.533	0.124	3.655	3.660	<b>3.658</b>	0.000
UF3	3.371	3.660	<b>3.642</b>	0.000	3.328	3.595	3.499	0.143	3.524	3.639	3.602	0.041	2.850	3.642	3.451	0.191	3.549	3.620	3.593	0.049
UF4	3.219	3.237	3.224	0.036	3.194	3.205	3.197	0.062	3.198	3.207	3.200	0.060	3.210	3.243	3.228	0.032	3.235	3.280	<b>3.260</b>	0.000
UF5	2.532	3.000	<b>2.964</b>	0.000	2.047	2.746	2.522	0.442	1.861	2.897	2.602	0.362	1.800	2.550	2.185	0.778	2.591	3.267	2.951	0.013
UF6	2.000	3.325	<b>3.098</b>	0.000	2.013	2.893	2.638	0.460	2.007	2.896	2.518	0.580	0.726	2.884	2.070	1.028	2.893	3.306	3.058	0.040
UF7	3.490	3.492	<b>3.491</b>	0.000	2.474	3.470	2.592	0.899	2.168	3.485	3.190	0.301	2.015	3.493	2.743	0.748	3.473	3.493	3.489	0.002
WFG1	4.263	5.256	4.848	0.408	4.623	5.666	<b>5.256</b>	0.000	4.716	5.250	5.156	0.100	4.480	5.243	5.037	0.219	4.717	5.250	5.205	0.051
WFG2	5.072	5.072	<b>5.072</b>	0.000	4.925	4.942	4.927	0.145	4.948	5.068	4.953	0.119	4.943	4.943	4.943	0.128	5.069	5.069	5.069	0.003
WFG3	4.513	4.530	4.522	0.043	4.561	4.563	4.562	0.003	4.533	4.543	4.539	0.026	4.562	4.563	4.563	0.002	4.565	4.565	<b>4.565</b>	0.000
WFG4	2.280	2.286	2.283	0.009	2.284	2.285	2.285	0.007	2.271	2.283	2.277	0.014	2.287	2.287	2.287	0.005	2.291	2.291	<b>2.291</b>	0.000
WFG5	1.984	1.990	<b>1.986</b>	0.000	1.976	1.996	1.980	0.005	1.970	1.977	1.975	0.011	1.972	2.010	1.977	0.009	1.976	1.984	1.980	0.005
WFG6	2.092	2.246	<b>2.183</b>	0.000	2.055	2.207	2.141	0.043	2.059	2.207	2.138	0.046	2.017	2.188	2.129	0.054	2.082	2.198	2.131	0.053
WFG7	2.272	2.280	2.276	0.015	2.284	2.285	2.284	0.007	2.269	2.282	2.275	0.016	2.287	2.287	2.287	0.005	2.291	2.291	<b>2.291</b>	0.000
WFG8	1.860	1.876	1.868	0.363	1.868	2.237	1.951	0.280	1.803	2.140	1.906	0.325	1.938	2.252	2.225	0.225	2.050	2.248	<b>2.231</b>	0.000
WFG9	1.711	1.714	1.713	0.542	2.197	2.264	2.244	0.010	2.168	2.258	2.229	0.026	1.706	2.264	2.225	0.030	2.242	2.271	<b>2.255</b>	0.000
Average	3.279	3.423	3.388	<b>0.062</b>	3.170	3.406	3.299	<b>0.151</b>	3.187	3.409	3.332	<b>0.118</b>	3.047	3.397	3.272	<b>0.178</b>	3.372	3.474	3.437	<b>0.013</b>

Los valores en negrita corresponden a los mejores valores del hipervolumen en cada instancia.

TABLA 6.4: Estadísticas del hipervolumen considerando tres objetivos.

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	1.301	1.303	1.302	0.002	1.290	1.290	1.290	0.015	1.300	1.302	1.301	0.003	1.280	1.294	1.292	0.013	1.304	1.305	<b>1.304</b>	0.000
DTLZ2	0.707	0.724	0.713	0.031	0.724	0.724	0.724	0.020	0.691	0.724	0.709	0.035	0.709	0.709	0.709	0.035	0.742	0.746	<b>0.744</b>	0.000
DTLZ3	26.368	26.389	26.380	0.033	26.154	26.155	26.154	0.259	26.362	26.389	26.378	0.035	26.171	26.274	26.267	0.146	26.413	26.414	<b>26.413</b>	0.000
DTLZ4	0.707	0.720	0.714	0.031	0.455	0.724	0.701	0.044	0.121	0.726	0.699	0.046	0.121	0.705	0.603	0.142	0.744	0.745	<b>0.745</b>	0.000
DTLZ5	23.987	23.987	<b>23.987</b>	0.000	23.813	23.819	23.814	0.173	23.978	23.982	23.981	0.006	23.878	23.878	23.878	0.109	23.986	23.986	23.986	0.001
DTLZ6	23.987	23.987	<b>23.987</b>	0.000	23.358	23.813	23.576	0.411	23.701	23.979	23.817	0.170	23.268	23.713	23.533	0.454	23.482	23.986	23.737	0.250
DTLZ7	1.783	1.841	1.815	0.054	0.901	0.904	0.902	0.967	0.895	0.907	0.903	0.967	0.900	0.907	0.905	0.964	1.864	1.880	1.869	0.000
UF10	0.010	3.886	0.658	6.232	3.148	5.585	3.961	2.929	3.762	6.260	4.660	2.230	2.914	4.079	3.554	3.336	6.000	7.237	<b>6.890</b>	0.000
UF8	0.052	4.855	1.973	5.416	4.000	7.358	6.907	0.482	7.156	7.267	7.231	0.158	4.000	7.321	6.414	0.975	7.316	7.413	<b>7.389</b>	0.000
UF9	0.238	4.217	1.488	6.261	7.131	7.653	7.260	0.489	6.895	7.597	7.350	0.399	7.107	7.649	7.233	0.515	7.724	7.758	<b>7.748</b>	0.000
WFG1	16.338	18.105	17.099	28.884	40.294	48.674	<b>45.983</b>	0.000	43.052	44.553	43.642	0.241	40.351	44.994	43.644	0.237	45.437	45.940	45.763	0.220
WFG2	45.956	47.224	46.709	1.819	40.196	48.213	45.175	3.352	40.091	47.465	45.542	2.985	40.043	47.803	43.552	4.975	48.345	48.671	<b>48.528</b>	0.000
WFG3	30.389	30.999	30.730	0.448	31.165	31.191	<b>31.178</b>	0.000	30.587	31.144	30.905	0.273	31.145	31.157	31.152	0.025	31.029	31.068	31.048	0.130
WFG4	18.012	20.150	19.178	4.956	23.632	23.661	23.636	0.498	21.724	22.754	22.296	1.838	21.931	22.465	22.127	2.007	23.976	24.320	<b>24.134</b>	0.000
WFG5	20.143	21.167	20.679	1.212	21.390	21.405	21.395	0.496	19.985	21.045	20.591	1.299	19.676	20.357	19.760	2.130	21.730	22.082	<b>21.891</b>	0.000
WFG6	17.308	20.484	18.927	4.117	22.014	23.025	22.654	0.389	19.835	22.018	21.021	2.022	20.342	21.584	21.045	1.999	22.500	23.420	<b>23.044</b>	0.000
WFG7	18.964	20.969	19.861	4.268	23.632	23.650	23.636	0.492	21.552	22.972	22.442	1.687	22.260	22.261	22.260	1.868	23.911	24.336	<b>24.129</b>	0.000
WFG8	14.140	15.489	14.730	8.423	20.798	23.725	23.133	0.020	16.287	18.402	17.761	5.392	21.685	22.104	21.855	1.298	18.991	24.078	<b>23.153</b>	0.000
WFG9	17.519	18.364	17.997	5.072	19.111	23.270	22.850	0.219	17.276	21.262										

TABLA 6.5: Valores de efectividad del hipervolumen considerando dos objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.006	0.000	<b>0.006</b>	0.000	0.017	-0.017	0.005	0.001	0.005	0.000	0.000	0.000	0.006	0.000	<b>0.006</b>
DTLZ2	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.000	0.008	-0.008	0.001	0.003	-0.002	0.003	0.001	0.002	0.004	0.000	0.003
DTLZ3	0.053	0.000	<b>0.053</b>	0.000	0.150	-0.150	0.049	0.002	0.047	0.030	0.032	-0.002	0.052	0.000	0.052
DTLZ4	0.201	0.000	<b>0.201</b>	0.087	0.075	0.012	0.000	0.336	-0.336	0.052	0.128	-0.076	0.200	0.000	0.199
DTLZ5	0.043	0.000	<b>0.043</b>	0.000	0.161	-0.161	0.039	0.003	0.036	0.041	0.001	0.040	0.042	0.000	0.042
DTLZ6	0.424	0.000	<b>0.424</b>	0.000	0.266	-0.266	0.088	0.083	0.005	0.022	0.177	-0.155	0.078	0.088	-0.009
DTLZ7	1.428	0.000	<b>1.428</b>	0.000	0.961	-0.961	0.003	0.947	-0.944	0.004	0.947	-0.943	1.422	0.001	1.421
UF1	0.246	0.002	0.244	0.000	0.598	-0.598	0.224	0.017	0.206	0.098	0.205	-0.107	0.255	0.000	<b>0.255</b>
UF2	0.187	0.005	0.182	0.061	0.174	-0.113	0.163	0.021	0.142	0.000	0.416	-0.416	0.206	0.000	<b>0.206</b>
UF3	0.424	0.000	<b>0.424</b>	0.000	0.340	-0.340	0.261	0.041	0.221	0.000	0.485	-0.485	0.237	0.057	0.180
UF4	0.051	0.040	0.011	0.000	0.122	-0.122	0.003	0.112	-0.109	0.063	0.032	0.031	0.189	0.000	<b>0.189</b>
UF5	1.582	0.000	<b>1.582</b>	0.337	0.950	-0.613	0.496	0.711	-0.215	0.000	2.297	-2.297	1.543	0.000	1.543
UF6	2.109	0.000	<b>2.109</b>	0.567	0.881	-0.313	0.448	1.120	-0.672	0.000	3.031	-3.031	1.947	0.040	1.907
UF7	1.950	0.000	<b>1.950</b>	0.000	2.393	-2.393	1.044	0.600	0.443	0.000	1.940	-1.940	1.942	0.002	1.939
WFG1	0.000	1.263	-1.263	0.627	0.000	<b>0.627</b>	0.426	0.049	0.377	0.190	0.504	-0.315	0.574	0.000	0.574
WFG2	0.395	0.000	<b>0.395</b>	0.000	0.329	-0.329	0.035	0.235	-0.200	0.016	0.264	-0.247	0.384	0.003	0.381
WFG3	0.000	0.142	-0.142	0.064	0.003	0.061	0.017	0.074	-0.057	0.065	0.002	0.063	0.075	0.000	<b>0.075</b>
WFG4	0.006	0.015	-0.009	0.010	0.008	0.001	0.000	0.037	-0.037	0.015	0.005	0.010	0.034	0.000	<b>0.034</b>
WFG5	0.030	0.000	<b>0.030</b>	0.009	0.005	0.004	0.000	0.024	-0.024	0.002	0.016	-0.014	0.009	0.005	0.004
WFG6	0.195	0.000	<b>0.195</b>	0.000	0.043	-0.043	0.000	0.046	-0.046	0.000	0.054	-0.054	0.000	0.053	-0.053
WFG7	0.000	0.034	-0.034	0.017	0.009	0.007	0.000	0.035	-0.035	0.024	0.005	0.019	0.043	0.000	<b>0.043</b>
WFG8	0.000	0.802	-0.802	0.128	0.554	-0.426	0.000	0.690	-0.690	0.951	0.000	0.951	0.968	0.000	<b>0.968</b>
WFG9	0.000	2.103	-2.103	0.547	0.010	0.537	0.521	0.041	0.480	0.512	0.034	0.478	0.608	0.000	<b>0.608</b>
Total	9.333	4.405	<b>4.929</b>	2.454	8.057	<b>-5.603</b>	3.824	5.230	<b>-1.406</b>	2.088	10.575	<b>-8.487</b>	10.818	0.250	<b>10.568</b>

TABLA 6.6: Valor de efectividad del hipervolumen considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.024	0.002	0.021	0.000	0.040	-0.040	0.021	0.004	0.017	0.002	0.033	-0.031	0.033	0.000	<b>0.033</b>
DTLZ2	0.008	0.041	-0.033	0.040	0.020	0.019	0.000	0.055	-0.055	0.000	0.053	-0.053	0.121	0.000	<b>0.121</b>
DTLZ3	0.339	0.033	0.306	0.000	0.821	-0.821	0.335	0.035	0.300	0.113	0.371	-0.258	0.474	0.000	<b>0.474</b>
DTLZ4	0.124	0.031	0.093	0.100	0.057	0.043	0.096	0.047	0.049	0.000	0.447	-0.447	0.262	0.000	<b>0.262</b>
DTLZ5	0.289	0.000	<b>0.289</b>	0.000	0.577	-0.577	0.270	0.011	0.258	0.064	0.320	-0.256	0.286	0.001	0.285
DTLZ6	1.285	0.000	<b>1.285</b>	0.000	0.813	-0.813	0.607	0.170	0.437	0.000	0.942	-0.942	0.365	0.331	0.034
DTLZ7	2.737	0.054	2.683	0.000	1.884	-1.884	0.000	1.882	-1.882	0.005	1.875	-1.870	2.952	0.000	<b>2.952</b>
UF10	0.000	16.434	-16.434	3.711	3.627	0.084	5.807	2.230	3.578	2.896	4.850	-1.954	14.727	0.000	<b>14.727</b>
UF8	0.000	20.048	-20.048	5.427	0.806	<b>4.621</b>	5.582	0.158	5.424	4.441	1.469	2.972	7.032	0.000	<b>7.032</b>
UF9	0.000	23.640	-23.640	5.772	0.489	5.283	5.862	0.399	5.464	5.745	0.515	5.230	7.663	0.000	<b>7.663</b>
WFG1	0.000	110.639	-110.639	33.562	0.000	<b>33.562</b>	26.543	4.463	22.081	26.547	4.454	22.093	32.903	0.000	32.903
WFG2	1.167	1.819	-0.652	1.623	3.720	-2.097	0.367	4.152	-3.785	0.000	6.598	-6.598	13.132	0.000	<b>13.132</b>
WFG3	0.000	1.363	-1.363	0.875	0.000	<b>0.875</b>	0.175	0.663	-0.488	0.774	0.025	0.749	0.461	0.234	0.227
WFG4	0.000	15.481	-15.481	7.307	0.498	6.809	3.287	3.177	0.110	2.949	3.685	-0.736	9.297	0.000	<b>9.297</b>
WFG5	0.918	1.928	-1.010	3.155	0.496	2.659	0.831	2.103	-1.272	0.000	5.514	-5.514	5.137	0.000	<b>5.137</b>
WFG6	0.000	12.058	-12.058	6.970	0.389	6.581	2.095	3.655	-1.560	2.118	3.609	-1.491	8.528	0.000	<b>8.528</b>
WFG7	0.000	13.025	-13.025	6.346	0.492	5.854	2.762	2.882	-0.119	2.400	3.426	-1.026	8.315	0.000	<b>8.315</b>
WFG8	0.000	26.981	-26.981	15.052	0.020	15.032	3.031	14.858	-11.828	11.219	2.576	8.644	15.133	0.000	<b>15.133</b>
WFG9	0.000	13.172	-13.172	11.249	0.219	11.030	0.000	12.976	-12.976	6.427	3.434	2.993	12.124	0.000	<b>12.124</b>
Total	6.892	256.749	<b>-249.857</b>	101.189	14.969	<b>86.220</b>	57.672	53.920	<b>3.751</b>	65.700	44.196	<b>21.504</b>	138.947	0.566	<b>138.381</b>

## 6.2.2. Estudio de escalabilidad en el espacio de las variables

En esta sección se analiza la escalabilidad de cada MOEA con respecto al número de variables de decisión (Maltese, Ombuki-Berman y Engelbrecht, 2016). La problemas de prueba fueron seleccionados

de acuerdo a sus características, algunos de ellos pueden ser fácilmente aproximados al frente de Pareto considerando ejecuciones a largo plazo, mientras que otros son más complejos. Particularmente, se realizó el estudio de escalabilidad en las instancias DTLZ4, DTLZ7, WFG2 y WFG8 con dos y tres objetivos, UF5, UF7 con dos objetivos y UF10 con tres objetivos. En primer lugar, se seleccionó el DTLZ4 considerado como un problema de prueba sencillo, el cual es separable-unimodal y la geometría de Pareto es cóncava. De la misma forma, con un mayor grado de dificultad se escogieron las instancias DTLZ7 y WFG2, específicamente estos problemas tienen múltiples óptimos, además el primero es separable y el segundo no separable. Otro problema seleccionado y que es considerado más difícil es el WFG8, ya que posee una elevada dependencia entre las variables. Finalmente, siendo parte de los problemas más difíciles y recientes, se escogieron el UF5, UF7 y UF10.

En las figuras 6.2 y 6.3 se puede observar el hipervolumen de cada MOEA con 30, 100, 250 y 500 variables respectivamente. Los algoritmos que implementan evolución diferencial tienden a perder diversidad en ejecuciones a largo plazo, y en consecuencia su rendimiento suele ser inestable. En este caso se puede observar la inestabilidad del GDE con dos objetivos ante instancias complejas (UF7, UF5, WFG8). La principal razón es la pérdida de diversidad, no obstante es posible evitar este comportamiento al menos parcialmente variando los valores del factor escala de mutación ( $F$ ) y la razón de mutación ( $CR$ ) pero esto provoca que se tengan que estar fijando en función del problema. En el caso de tres objetivos también se da un comportamiento muy inestable para el GDE3. Esto surge porque además de tener problemas de diversidad en el espacio de las variables como se mencionó anteriormente, existen problemas de diversidad en el espacio objetivo, ya que el proceso de búsqueda está basado en el concepto de dominancia. Se puede observar que conforme aumenta el número de variables, el GDE3 empeora de forma significativa en las instancias UF5, UF10 y DTLZ4. En algunas instancias (DTLZ7, WFG8) los valores del hipervolumen mejoran al considerar un número mayor de variables, que se achaca a que para ciertos casos al incrementar el espacio de búsqueda se mantiene diversidad durante más tiempo porque las distancias entre individuos son mayores, por lo que para casos con problemas graves de diversidad, se pueden dar situaciones como esta. El desempeño del MOEA/D se ve afectado al incrementar el número de variables principalmente en los problemas DTLZ4 en dos y tres objetivos, en UF7, UF5 y WFG8 en dos objetivos. Por lo contrario el MOMBI-II, únicamente empeora significativamente en la instancia UF5, de hecho este problema de prueba es difícil, ya que el frente de Pareto está compuesto por 21 puntos y el conjunto de Pareto óptimo únicamente está compuesto por puntos distantes en el espacio de búsqueda, por consiguiente al aumentar el número de variables complicará encontrar estos puntos.

Aunque el VSD-MOEA presenta problemas de escalabilidad en las instancias DTLZ7, UF5 con dos objetivos y UF10, WFG2 con tres objetivos, se señala que los valores que corresponden a este algoritmo son en general superiores o competitivos con los del estado del arte. Así, se puede apreciar que en todos los casos, VSD-MOEA fue el mejor algoritmo o estuvo muy cercano al mejor, mientras que todos los demás algoritmos tuvieron algún caso en que su rendimiento fue realmente malo. Posiblemente, el problema de escalabilidad en nuestra propuesta surge en el proceso para mantener la diversidad, ya que se han diagnosticado problemas de dimensionalidad en el proceso para encontrar al vecino más cercano, a pesar de eso, en la mayoría de instancias los resultados son mejores al estado-del-arte y en general es el algoritmo menos afectado al escalar el número de variables.

FIGURA 6.2: Estudio de escalabilidad en las variables de decisión considerando dos objetivos (Hipervolumen)

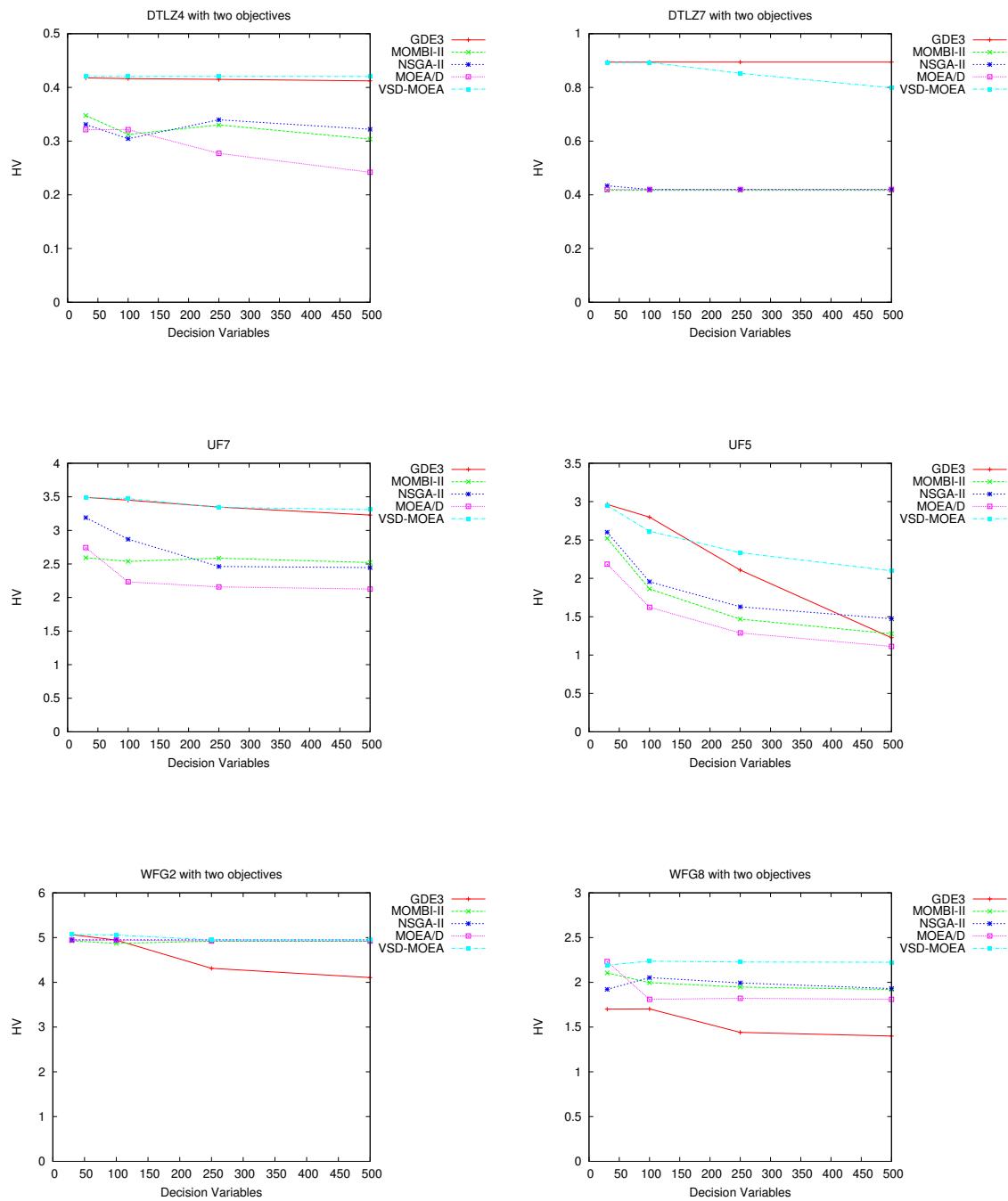
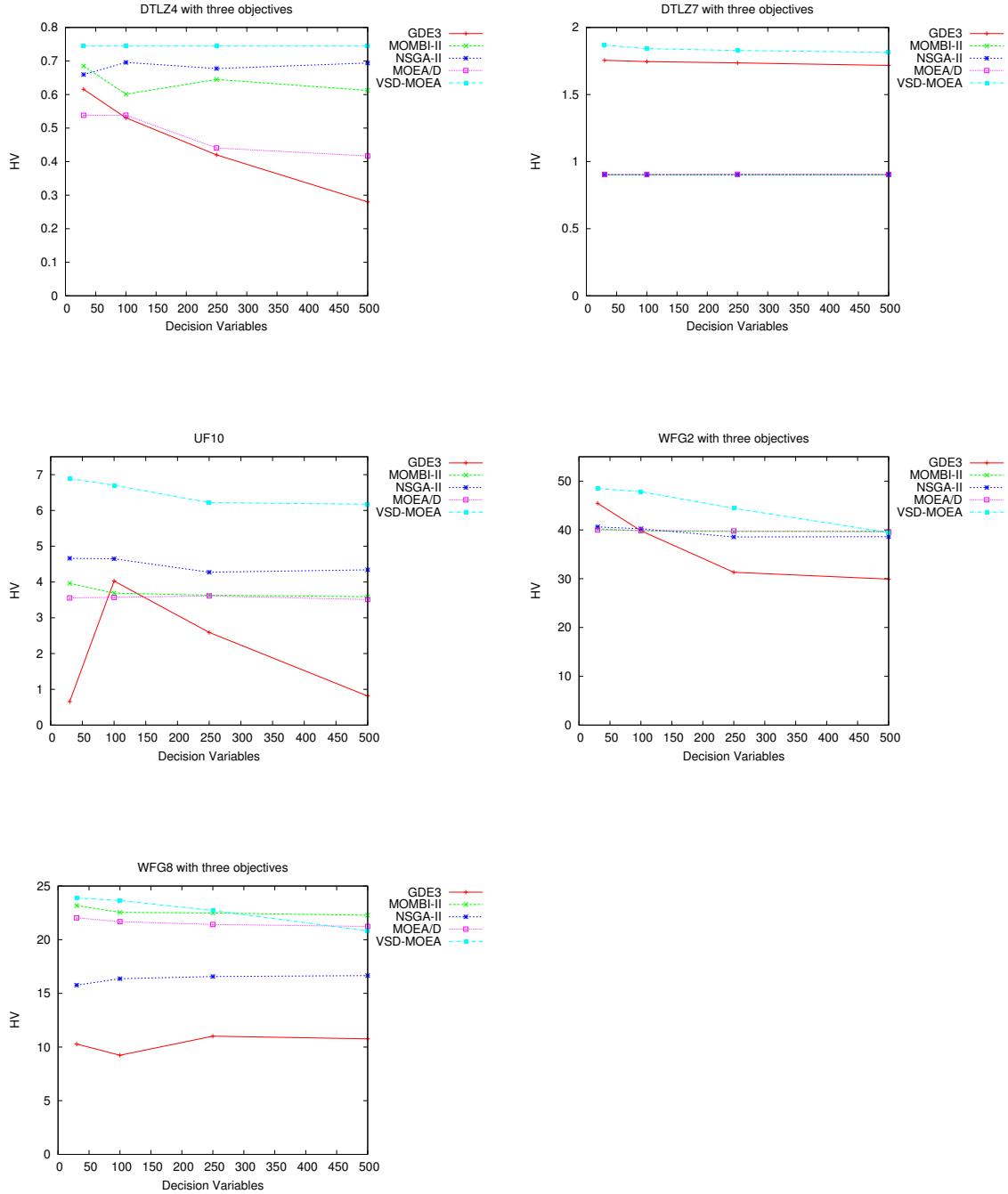


FIGURA 6.3: Estudio de escalabilidad en las variables de decisión considerando tres objetivos (Hipervolumen)



### 6.2.3. Estudio de la influencia del parámetro $D_I$

La diversidad inicial en el VSD-MOEA es inducida a través del parámetro  $D_I$  que es calculado mediante la fórmula  $D_I = k * \sqrt{N} \rightarrow k \in (0, 1)$ , donde  $N$  corresponde al número de variables y  $k$  es un parámetro del algoritmo. El efecto de este parámetro  $k$  se analiza considerando el hipervolumen alcanzado por 10 configuraciones diferentes  $k = \{0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9\}$ . Es importante destacar que

con la configuración  $k = 0,0$  no se promueve diversidad, por lo tanto en las instancias complejas se esperaría que esta configuración proporcione valores de hipervolumen bajos. Para mostrar el efecto de este parámetro, se escogieron las figuras representativas 6.4 y 6.5 que muestran el hipervolumen media alcanzado con 2 y 3 objetivos para los valores de  $k$  mencionados. En general el hipervolumen es bajo con una configuración de  $D_I = 0,0$ , mientras que prácticamente permanece constante para el resto de valores. En el apéndice A puede encontrar la misma información para otros problemas, con esos datos se obtienen las mismas conclusiones.

Además, se puede observar que inducir un grado de diversidad elevado, en algunos problemas puede afectar el desempeño del algoritmo aunque en ningún caso de manera drástica. En las instancia UF10, UF5, WFG8 y DTLZ7 es donde más claro se ve las ventajas de inducir diversidad de forma explícita, principalmente en el DTLZ7 tanto en dos como en tres objetivos, casos en los que usar  $k = 0$  es realmente nocivo para el rendimiento. En general, todas las instancias proporcionan valores de hipervolumen aceptables con la configuración  $k = 0,2$ , en cualquier caso, el rango  $0,2 \leq k \leq 0,4$  proporciona resultados suficientemente estables.

FIGURA 6.4: Estudio del parámetro  $D_I$  con dos objetivos

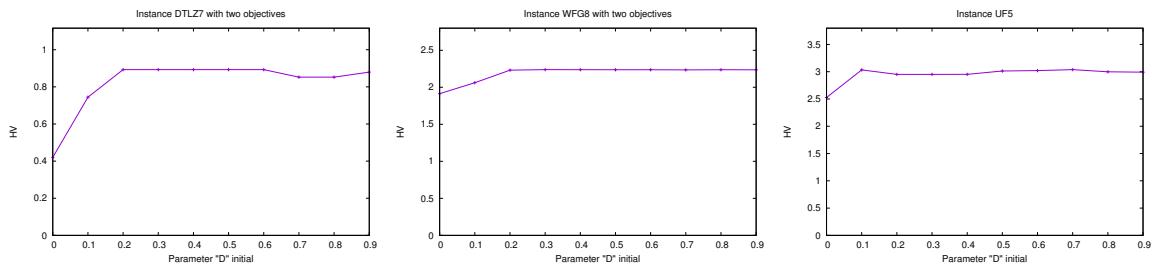
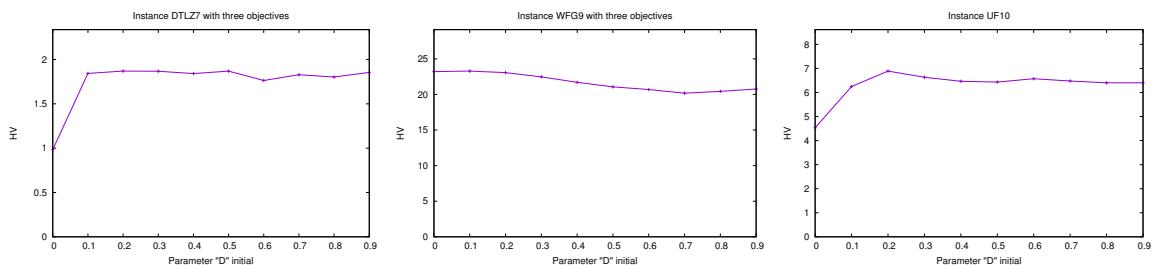


FIGURA 6.5: Estudio del parámetro  $D_I$  con tres objetivos



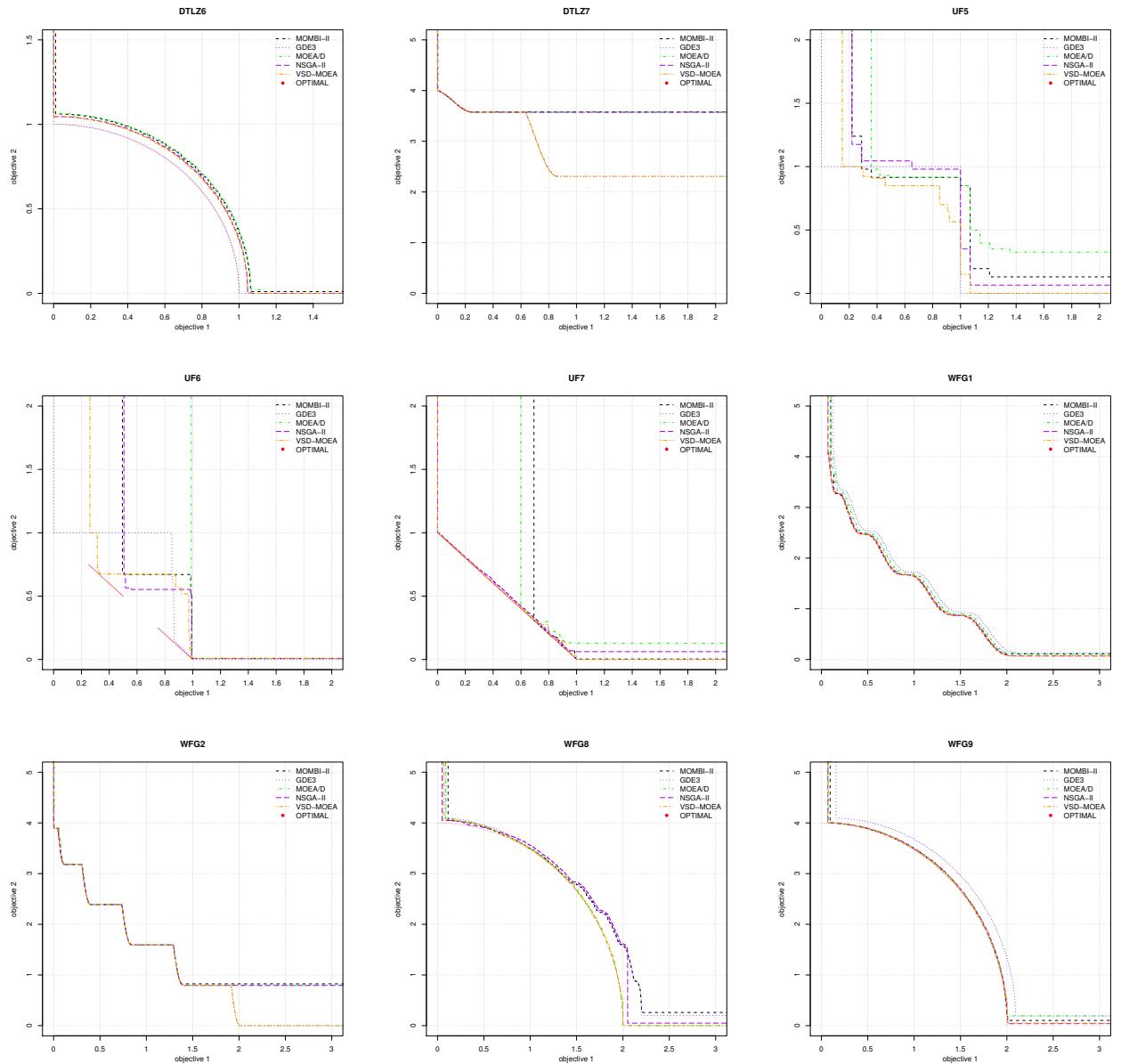
#### 6.2.4. Superficies de cubrimiento

Con el fin de complementar los resultados anteriores, en la figura 6.6 se muestran las superficies de cubrimiento logradas al 50 % de algunas instancias. Las superficies del resto de instancias no son significativamente diferentes y se pueden consultar en el apéndice A. Los beneficios de inducir diversidad de forma explícita se puede observar muy claramente en las instancias DTLZ7, WFG2 y WFG8, en las que el VSD-MOEA converge a regiones del frente de Pareto no logradas por los algoritmos del estado-del-arte. Se observa que aunque el GDE3 alcanza al frente de Pareto en las instancias DTLZ7 y WFG2, en el WFG8

converge únicamente a una sección del frente. Principalmente en este último la dependencia entre los parámetros representa un obstáculo a los operadores de evolución diferencial, similarmente esto sucede en la instancia WFG9 cuyos parámetros tienen un grado de dependencia menor, pero suficientes para afectar al rendimiento del GDE3.

Además, VSD-MOEA ofrece mejores aproximaciones en el UF5,UF6 y UF7 siendo de los problemas más complejos. Se puede observar que la instancia DTLZ6 únicamente es resuelta por el GDE3, que como ya se comentó anteriormente se debe a que el conjunto óptimo está ubicado en la frontera y el proceso de reparo reubica a las soluciones en la frontera del espacio factible. En base a los resultados obtenidos, se puede decir que bajo este escenario, el cruce genético es más robusto que el operador de evolución diferencial.

FIGURA 6.6: superficies de cubrimiento logradas al 50 %



## 6.3. Algoritmos basados en descomposición

### 6.3.1. Validación experimental del MOEA/D-EVSD

Esta sección está dedicada a validar el MOEA/D-EVSD, particularmente se utilizaron los nueve problemas de prueba WFG, el criterio de paro fue configurado a 50,000 generaciones, el tamaño de la población a 250, y los problemas WFG fueron configurados con dos objetivos. El GDE3 fue configurado con los parámetros  $C = 0,5$  y  $F = 0,5$ , el resto es indicado al inicio de este capítulo. Nuestra análisis experimental se lleva a cabo en base a las superficies de cubrimiento logradas y al hipervolumen. En cuatro de los problemas de prueba (WFG 3, 4, 5 y 7), todos lo métodos reportaron resultados muy similares. De hecho, la diferencias entre las medias del hipervolumen obtenido por los métodos fue menor que 0,1. Por tanto, el estudio se centra en los problemas restantes. En la figura 6.7 se muestran las superficies de alcance al nivel del 50% para los problemas WFG2 y WFG8. Además, se traza el frente de Pareto. El análisis de esta figura muestra que las modificaciones introducidas en el MOEA/D provocan cambios significativos en los resultados. Sin embargo, existen casos donde el MOEA/D-EVSD es significativamente mejor, mientras que en otros problemas existe una degradación en el rendimiento. Los problemas WFG1 y WFG8 demuestran los beneficios ofrecidos por el MOEA/D-EVSD. En tales casos, ninguno de los MOEAs del estado-del-arte proporcionaron resultados de gran calidad. Sin embargo, el MOEA/D-EVSD pudo obtener una aproximación buena del frente de Pareto.

Por otro lado, el MOEA/D-EVSD tiene un peor comportamiento en relación a algunos MOEAs en los problemas WFG2, WFG6 y WFG9. Particularmente, revisando el contenido de la población en estos casos, encontramos que, en cada individuo hijo del proceso de optimización, en el MOEA/D-EVSD algunas de las variables de posición fueron muy elevadas o pequeñas en todos los individuos. La razón de esto, como fue analizado en el capítulo dedicado a este algoritmo es que debido a la forma en que la selección se realiza, hay una tendencia a generar valores muy elevados o muy pequeños en sus variables. Por lo tanto, cuando hay soluciones ubicadas en lugares cercanos a los límites del dominio, donde se presentan valores con una calidad relativamente alta pero sin ser óptimos, éstos son seleccionados muy frecuentemente, lo que podría ocasionar convergencia prematura en estas regiones.

Esta primera propuesta fue útil para demostrar que incrementar la diversidad en el espacio de las variables es una forma de mejorar los resultados en problemas que no son resueltos por los algoritmos actuales. Sin embargo, la forma implícita en que se hace genera inconvenientes que como se verá no se tienen para los casos en que el control de la diversidad se hace explícito.

Finalmente, con el objetivo de validar las conclusiones previas, se presenta un análisis del hipervolumen en las tablas 6.7 y 6.8. La tabla 6.8 muestra el mínimo, máximo, media y la desviación estándar del hipervolumen obtenido por los distintos optimizadores probados. El punto de referencia fue establecido en (3,0,5,0) (Zhu y col., 2016). Adicionalmente, se realizaron pruebas estadísticas por pares, cuyos resultados se encuentran en la Tabla 6.7. Los valores obtenidos con el hipervolumen y las pruebas estadísticas correspondientes confirman la superioridad del MOEA/D-EVSD en los problemas WFG1 y WFG8. De hecho, la pruebas estadísticas confirman en ambos casos que el MOEA/D-EVSD es superior a todos los MOEAs restantes. Sin embargo, las pruebas también confirman la inferioridad del MOEA/D-EVSD en los casos restantes, por las razones detalladas anteriormente.

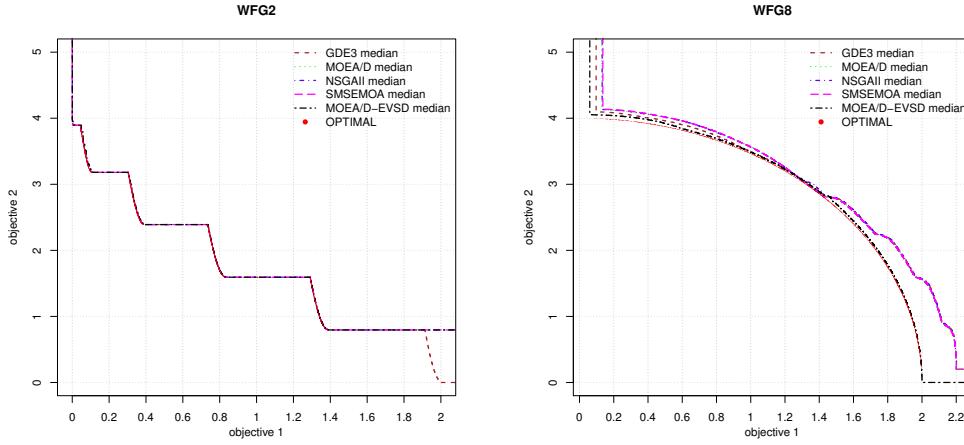
TABLA 6.7: Pruebas Estadísticas del Hipervolumen

	WFG1		WFG2		WFG6		WFG8		WFG9	
	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓
MOEA/D-EVSD	4	0	3	1	0	4	4	0	0	4
GDE3	3	1	4	0	4	0	3	1	1	3
MOEA/D	1	2	0	4	1	1	2	2	3	0
NSGAII	1	2	1	2	1	1	0	4	2	2
SMS-EMOA	0	4	1	2	1	1	1	3	3	0

TABLA 6.8: Estadísticas del Hipervolumen

	MOEA/D-EVSD				GDE3				MOEA/D				NSGAII				SMS-EMOA			
	Min	Max	Media	SD	Min	Max	Media	SD	Min	Max	Media	SD	Min	Max	Media	SD	Min	Max	Media	SD
WFG1	11.53	11.54	<b>11.54</b>	2.02E-03	10.90	11.40	11.12	1.50E-01	9.63	10.68	10.36	2.63E-01	10.11	10.65	10.38	2.21E-01	9.51	10.09	9.89	2.42E-01
WFG2	10.62	11.46	10.89	3.88E-01	11.47	11.47	<b>11.47</b>	4.75E-05	10.63	10.63	10.63	2.53E-04	10.63	10.63	10.63	2.73E-04	10.63	10.63	10.63	5.75E-04
WFG6	7.99	8.11	8.05	3.01E-02	8.60	8.65	<b>8.61</b>	2.06E-02	7.81	8.50	8.35	1.30E-01	8.31	8.44	8.37	3.60E-02	8.28	8.48	8.39	4.23E-02
WFG8	7.96	8.60	<b>8.44</b>	2.39E-01	7.93	7.94	7.93	3.97E-03	7.83	7.89	7.87	1.85E-02	7.82	7.86	7.84	1.01E-02	7.82	7.89	7.86	1.73E-02
WFG9	7.72	8.21	7.73	8.21E-02	7.72	7.79	7.75	2.27E-02	7.72	8.57	<b>8.30</b>	2.43E-01	7.72	8.58	7.82	2.71E-01	7.72	8.58	8.21	3.59E-01

FIGURA 6.7: superficies de alcance al 50 %



### 6.3.2. Validación experimental de los algoritmos MOEA/D-SEBV y VSD-MOEA/D

En esta sección se validan experimentalmente las dos propuestas que promueven la diversidad de forma explícita y que están basados en descomposición. En las tablas 6.9, 6.10 se consideran cuatro versiones del VSD-MOEA/D y el MOEA/D-SEBV con el propósito de observar el comportamiento de diferentes configuraciones. Los algoritmos etiquetados con *MOEA/D-SEBV* y *VSD-MOEA/D Normal DE* implementan el enfoque de Tchebycheff y evolución diferencial con un factor de mutación  $CR = 0.9$ . El resto de algoritmos implementan las modificaciones a DE sugeridas en el capítulo 5, en la cual no se requiere especificar un factor de mutación y además aplican el enfoque basado en la función de escalización aumentada (ASFA) descrita en el capítulo 4. Por su parte los algoritmos *Fast VSD-MOEA/D* y *MOEA/D-VSD T=10* están configurados con un tamaño de vecindad  $T = 10$ . Se recuerda que el *Fast VSD-MOEA/D*, es la versión optimizada en lo referente a complejidad computacional del *VSD-MOEA/D*. Con el propósito de observar el efecto que tiene el tamaño de las vecindades se agrega el *VSD-MOEA/D T=100*. Específicamente, en este capítulo se analizan el IGD+ en dos objetivos y el hipervolumen con tres objetivos, el resto de material se puede consultar en el apéndice B.

Principalmente, se observa que considerando dos objetivos, el MOEA/D-SEBV no es mejor en ninguna instancia que el resto de algoritmos, además los peores resultados con este algoritmo son encontrados

en las instancias UF4, UF5 y WFG8. El conjunto óptimo de las instancias UF4 y UF5 corresponde a secciones aisladas en el espacio factible, por lo tanto es recomendable que el operador de reproducción sea rotacionalmente invariante, en consecuencia tanto el *MOEA/D-SEBV* como el *VSD-MOEA/D Normal DE* reportan resultados pobres debido al factor de mutación que utilizan.

Además, es importante notar que en la mayoría de instancias no existen cambios significativos al varios el tamaño de las vecindades, por lo que *MOEA/D-VSD T=10* y *MOEA/D-VSD T=100* obtienen resultados muy similares.

Por otra parte, el *Fast VSD-MOEA/D* proporciona resultados cercanos al *VSD-MOEA/D T=10* e inclusive mejores en las instancias WFG8 y WFG9. Por tanto, es claro que en lugar de utilizar distancias al vecino más cercano, hacer uso de otras métricas de diversidad puede ser adecuado. En el futuro se plantea combinar estas ideas con varias de las métricas que se han propuesto en la literatura y que no se consideraron en nuestras propuestas.

También se puede observar que al pasar a tres objetivos, las propuestas que utilizan una factor de mutación fijo (*MOEA/D-SEBV* y *VSD-MOEA/D Normal DE*) se ven afectadas muy negativamente, principalmente en la instancia WFG1, que como ya se ha mencionado es separable y por lo tanto aprovecha mejor el uso de factores de mutación (*CR*) pequeños. Adicionalmente, analizando los resultados de las instancias UF8, UF9 y UF10, se observa el efecto de utilizar el enfoque de escalarización aumentado (AS-FA). Este enfoque puede proporcionar resultados ligeramente inferiores en instancias sencillas, como es el caso del DTLZ1. Esto se debe a que la distribución de la soluciones es diferente y dependiendo del caso uno u otro puede ser más adecuado. Sin embargo, ASFA es muy estable y cuando es inferior lo es por muy poco, mientras que en otros casos es muy superior. En base a los resultados obtenidos, se puede concluir que los cambios propuestos a DE producen un comportamiento más estable en esquemas de diversidad para ejecuciones a largo plazo, y que además el método de descomposición ASFA ofrece mejores resultados en instancias difíciles.

TABLA 6.9: Estadísticas IGD+ considerando dos objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>
DTLZ2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ3	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ4	0.002	0.363	0.033	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ7	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
UF1	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.002	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.002	0.003	<b>0.003</b>
UF2	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	<b>0.003</b>
UF3	0.003	0.036	0.007	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.003	0.007	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
UF4	0.042	0.050	0.045	0.023	0.026	<b>0.024</b>	0.024	0.026	0.025	0.033	0.037	0.035	0.023	0.026	0.025
UF5	0.006	0.040	0.036	0.000	0.005	<b>0.000</b>	0.000	0.000	<b>0.000</b>	0.015	0.040	0.030	0.000	0.000	<b>0.000</b>
UF6	0.002	0.018	0.003	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
UF7	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
WFG1	0.007	0.122	0.028	0.007	0.046	<b>0.013</b>	0.007	0.059	0.017	0.007	0.108	0.027	0.007	0.048	0.015
WFG2	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>
WFG3	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>
WFG4	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG5	0.064	0.069	0.067	0.061	0.070	0.066	0.061	0.069	<b>0.065</b>	0.064	0.069	0.068	0.059	0.070	<b>0.065</b>
WFG6	0.007	0.121	0.072	0.007	0.012	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.031	0.009	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG7	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG8	0.092	0.097	0.094	0.011	0.039	0.018	0.009	0.016	<b>0.012</b>	0.011	0.021	0.018	0.009	0.017	<b>0.012</b>
WFG9	0.011	0.126	0.062	0.010	0.012	0.012	0.009	0.013	<b>0.011</b>	0.009	0.012	<b>0.011</b>	0.010	0.013	<b>0.011</b>

TABLA 6.10: Estadísticas del hipervolumen considerando tres objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	1.289	1.289	1.289	1.293	1.293	1.293	1.293	1.293	1.293	1.296	1.296	<b>1.296</b>	1.293	1.293	1.293
DTLZ2	0.709	0.710	0.710	0.733	0.734	<b>0.734</b>	0.733	0.734	0.733	0.720	0.720	0.720	0.733	0.734	0.733
DTLZ3	26.158	26.162	26.159	26.402	26.403	<b>26.403</b>	26.402	26.403	26.402	26.263	26.267	26.264	26.402	26.403	26.402
DTLZ4	0.709	0.710	0.709	0.733	0.736	<b>0.735</b>	0.733	0.735	0.734	0.720	0.720	0.720	0.733	0.734	0.734
DTLZ5	23.877	23.877	23.877	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.975	23.975	<b>23.975</b>	23.900	23.900	23.900
DTLZ6	23.877	23.877	23.877	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.975	23.975	<b>23.975</b>	23.900	23.900	23.900
DTLZ7	1.764	1.764	1.764	1.756	1.756	1.756	1.756	1.756	1.756	1.777	1.777	<b>1.777</b>	1.756	1.756	1.756
UF10	4.000	7.186	5.155	7.265	7.360	7.310	7.275	7.370	<b>7.323</b>	6.339	7.157	6.923	7.289	7.361	7.319
UF8	4.000	7.290	7.083	7.403	7.409	7.407	7.406	7.412	<b>7.409</b>	7.260	7.317	7.295	7.405	7.412	<b>7.409</b>
UF9	7.096	7.638	7.195	7.684	7.713	<b>7.700</b>	7.684	7.705	7.693	7.623	7.679	7.654	7.682	7.706	7.693
WFG1	16.179	18.450	16.765	44.815	45.396	<b>45.253</b>	41.031	43.456	42.356	18.579	27.879	22.992	41.336	43.595	42.329
WFG2	47.579	47.977	47.741	47.826	47.831	<b>47.827</b>	47.826	47.828	<b>47.827</b>	47.162	47.910	47.703	47.826	47.827	<b>47.827</b>
WFG3	31.146	31.154	31.150	31.205	31.206	31.205	31.205	31.206	31.205	31.298	31.304	<b>31.303</b>	31.205	31.206	31.205
WFG4	21.261	22.007	21.644	23.189	23.346	<b>23.257</b>	23.184	23.309	23.240	21.238	21.857	21.563	23.172	23.301	23.241
WFG5	19.649	19.789	19.687	20.615	21.076	20.756	20.646	21.101	<b>20.916</b>	19.724	20.031	19.896	20.609	21.088	20.901
WFG6	18.053	22.220	18.867	22.172	23.228	23.019	22.908	23.251	23.180	20.960	22.221	21.402	23.039	23.267	<b>23.195</b>
WFG7	21.914	22.271	22.127	23.180	23.284	23.220	23.163	23.292	<b>23.228</b>	21.960	22.294	22.087	23.186	23.286	23.222
WFG8	18.671	20.020	18.942	20.059	23.425	22.887	23.092	23.526	<b>23.298</b>	21.017	21.683	21.325	23.109	23.461	23.289
WFG9	17.544	21.437	18.181	21.921	22.632	22.314	22.260	22.676	22.433	21.242	21.690	21.408	22.255	22.672	<b>22.436</b>

### 6.3.3. Comparativa entre algoritmos basados en diversidad y el estado del arte

En esta sección se comparan los algoritmos propuestos basados en diversidad frente al estado del arte. En base a los resultados anteriores, de los algoritmos basados en dominancia de decidió realizar esta comparativa utilizando el VSD-MOEA/D con  $T = 10$ , pues fue el que en general ofrece los mejores resultados. Este es comparado con el GDE3, MOMBI-II, NSGA-II y MOEA/D que son algoritmos representativas del estado del arte. Además, es incluida la propuesta basada en dominancia VSD-MOEA. Para esto es utilizado el hipervolumen y el IGD+ tanto en dos como tres objetivos. En el apéndice B existe material adicional que complementa a los resultados mostrados en este capítulo. En las tablas 6.11 y 6.12, se observa que considerando dos objetivos, el VSD-MOEA/D proporciona los mejores resultados tanto en el hipervolúmen como en el IGD+. Aunque en algunos casos es ligeramente inferior que el mejor algoritmo, siempre es competitivo y en muchos casos presentó una superioridad muy clara. Así, en la tabla 6.12 se observa que el VSD-MOEA/D obtiene los mejores resultados, siendo meritorio que inclusive es capaz de resuelver totalmente la instancia UF5, cuyo frente de Pareto está comprendido por 21 puntos que están en regiones distantes en el espacio de las variables. De todos los esquemas fue el único capaz de resolverlo, alcanzando soluciones buenas en todas las ejecuciones. En la figura 6.8 se presentan las superficies logradas al 50 %, donde se aprecia que el VSD-MOEA/D converge al frente de Pareto en las instancias WFG6, UF5 y UF6, las cuales no son resueltas por ninguno de los algoritmos restantes, incluyendo al VSD-MOEA. Esto es un logro muy importante que representa un avance significativo frente al estado del arte.

Por otra parte, al considerar tres objetivos, se observa que el VSD-MOEA y VSD-MOEA/D siguen siendo los 2 algoritmos que reportan mejores resultados. En este caso globalmente VSD-MOEA/D obtiene peores resultados que el VSD-MOEA. Al ser algoritmos tan diferentes, uno basado en dominancia y otro basado en descomposición, es posible que el comportamiento diferente proceda de la forma en que se descompone, aunque para confirmar las razones hay que realizar estudios adicionales. En cualquier caso, los dos presentan resultados muy competitivos y superiores al estado del arte. Al fijarnos exclusivamente en los métodos basados en descomposición, se puede apreciar que en general VSD-MOEA/D es superior a MOEA/D y MOMBI-II, teniendo una comportamiento promedio superior. Sin embargo,

el rendimiento del VSD-MOEA/D es inferior al MOMBI-II en las instancias WFG. Estas instancias tienen distintas escalas en los objetivos y MOMBI-II aplica una normalización adaptativa en el proceso de búsqueda por lo que posiblemente esa sea la razón de la superioridad del MOMBI-II. Por otro lado el VSD-MOEA/D obtiene mejores resultados en las instancias con escalas iguales, como son las instancias DTLZ y UF. De esta forma, se observa — como se ha discutido en la literatura — que los enfoques de descomposición son sensibles a la escala de las funciones objetivo, por lo que parece promisorio incorporar técnicas de este estilo en las propuestas.

TABLA 6.11: Estadísticas del hipervolumen con dos objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	1.08	0.01	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00
DTLZ2	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00
DTLZ3	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.17	8.17	0.04	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.21	8.20	0.01	8.21	8.21	8.21	0.00	8.21	8.21	8.21	0.00
DTLZ4	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.11	0.42	0.38	0.04	0.11	0.42	0.31	0.11	0.11	0.42	0.37	0.06	0.42	0.42	0.42	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00
DTLZ5	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.17	8.17	0.04	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	8.21	0.00
DTLZ6	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	7.99	8.17	8.07	0.14	8.06	8.21	8.13	0.08	8.03	8.21	8.09	0.12	7.99	8.21	8.12	0.09	8.21	8.21	8.21	0.00
DTLZ7	0.89	0.89	<b>0.89</b>	0.00	0.42	0.42	0.42	0.48	0.42	0.42	0.42	0.47	0.42	0.42	0.47	0.89	0.89	<b>0.89</b>	0.00	0.89	0.89	<b>0.89</b>	0.00	
UF1	3.66	3.66	<b>3.66</b>	0.00	3.33	3.52	3.49	0.17	3.65	3.65	3.65	0.01	3.43	3.66	3.59	0.07	3.66	3.66	<b>3.66</b>	0.00	3.65	3.65	3.65	0.01
UF2	3.65	3.65	<b>3.65</b>	0.00	3.41	3.63	3.59	0.06	3.64	3.65	3.64	0.01	3.43	3.65	3.53	0.12	3.65	3.66	<b>3.66</b>	0.00	3.65	3.65	3.65	0.01
UF3	3.37	3.66	3.64	0.01	3.33	3.60	3.50	0.15	3.52	3.64	3.60	0.05	2.85	3.64	3.45	0.20	3.55	3.62	3.59	0.06	3.65	3.65	<b>3.65</b>	0.00
UF4	3.22	3.24	3.22	0.04	3.19	3.21	3.20	0.06	3.20	3.21	3.20	0.06	3.21	3.24	3.23	0.03	3.24	3.28	<b>3.26</b>	0.00	3.25	3.26	3.25	0.01
UF5	2.53	3.00	2.96	0.51	2.05	2.75	2.52	0.95	1.86	2.90	2.60	0.87	1.80	2.55	2.19	1.29	2.59	3.27	2.95	0.52	3.47	3.48	<b>3.47</b>	0.00
UF6	2.00	3.33	3.10	0.33	2.01	2.89	2.64	0.79	2.01	2.90	2.52	0.91	0.73	2.88	2.07	1.36	2.89	3.31	3.06	0.37	3.43	3.43	<b>3.43</b>	0.00
UF7	3.49	3.49	<b>3.49</b>	0.00	2.47	3.47	2.59	0.90	2.17	3.48	3.19	0.30	2.01	3.49	2.74	0.75	3.47	3.49	<b>3.49</b>	0.00	3.48	3.48	3.48	0.01
WFG1	4.26	5.26	4.85	0.41	4.62	5.67	<b>5.26</b>	0.00	4.72	5.25	5.16	0.10	4.48	5.24	5.04	0.22	4.72	5.25	5.20	0.05	5.05	5.25	5.22	0.04
WFG2	5.07	5.07	<b>5.07</b>	0.00	4.92	4.94	4.93	0.14	4.95	5.07	4.95	0.12	4.94	4.94	4.94	0.13	5.07	5.07	<b>5.07</b>	0.00	5.06	5.06	5.06	0.01
WFG3	4.51	4.53	4.52	0.04	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00	4.53	4.54	4.54	0.03	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00	4.56	4.57	<b>4.57</b>	0.00	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00
WFG4	2.28	2.29	2.28	0.01	2.28	2.29	2.28	0.01	2.27	2.28	2.28	0.01	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.28	2.28	2.28	0.01
WFG5	1.98	1.99	<b>1.99</b>	0.00	1.98	2.00	1.98	0.01	1.97	1.98	1.97	0.01	1.97	2.01	1.98	0.01	1.98	1.98	1.98	0.01	1.97	2.00	<b>1.98</b>	0.00
WFG6	2.09	2.25	2.18	0.10	2.05	2.21	2.14	0.14	2.06	2.21	2.14	0.14	2.02	2.19	2.13	0.15	2.08	2.20	2.13	0.15	2.26	2.28	<b>2.28</b>	0.00
WFG7	2.27	2.28	2.28	0.02	2.28	2.28	2.28	0.01	2.27	2.28	2.28	0.02	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.28	2.28	2.28	0.01
WFG8	1.86	1.88	1.87	0.37	1.87	2.24	1.95	0.29	1.80	2.14	1.91	0.33	1.94	2.25	2.23	0.01	2.05	2.25	2.23	0.01	2.11	2.27	<b>2.24</b>	0.00
WFG9	1.71	1.71	1.71	0.54	2.20	2.26	2.24	0.01	2.17	2.26	2.23	0.03	1.71	2.26	2.22	0.03	2.24	2.27	<b>2.25</b>	0.00	2.26	2.26	<b>2.25</b>	0.00
Average	3.279	3.423	3.388	<b>0.103</b>	3.170	3.406	3.299	<b>0.193</b>	3.187	3.409	3.332	<b>0.160</b>	3.047	3.397	3.272	<b>0.219</b>	3.372	3.474	3.437	<b>0.055</b>	3.471	3.491	3.487	<b>0.005</b>

TABLA 6.12: Estadísticas del IGD+ con dos objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D				
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	
DTLZ1	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	
DTLZ2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ3	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ4	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	<b>0.003</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.005	0.057	0.003	0.009	0.051	0.049	0.009	0.002	0.110	0.067	0.065	0.002	0.132	0.054	0.052	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.000
DTLZ7	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.363	0.363	0.363	0.01	0.361	0.361	0.361	0.039	0.361	0.359	0.361	0.359	0.003	0.003	0.003	0.001	0.003	0.003	0.003	0.001	
UF1	0.004	0.005	0.004	0.008	0.037	0.011	0.008	0.009	0.009	0.006	0.003	0.034	0.011	0.013	0.010	0.003	0.041	0.019	0.016	0.004	0.007	0.005	0.003	0.003	
UF2	0.007	0.009	0.008	0.005	0.042	0.008	0.005	0.011	0.014	0.013	0.010	0.003	0.041	0.019	0.016	0.004	0.007	0.005	0.003	0.003	0.003	0.003	0.000		
UF3	0.003	0.168	0.013	0.011	0.017	0.048	0.030	0.027	0.015	0.034	0.024	0.021	0.007	0.196	0.037	0.035	0.028	0.058	0.040	0.038	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.000	
UF4	0.035	0.038	0.037	0.013	0.037	0.041	0.040	0.016	0.043	0.047	0.046	0.022	0.032	0.041	0.036	0.012	0.023	0.027	0.003	0.023	0.026	<b>0.024</b>	0.000		
UF5	0.236	0.275	0.245	0.174	0.481	0.300	0.304	0.146	0.570	0.287	0.286	0.229	0.571	0.385	0.385	0.113	0.371	0.197	0.196	0.000	0.005	<b>0.000</b>	0.000	0.000	
UF6	0.029	0.417	0.125	0.169	0.570	0.292	0.290	0.167	0.577	0.341	0.339	0.173	0.706	0.529											

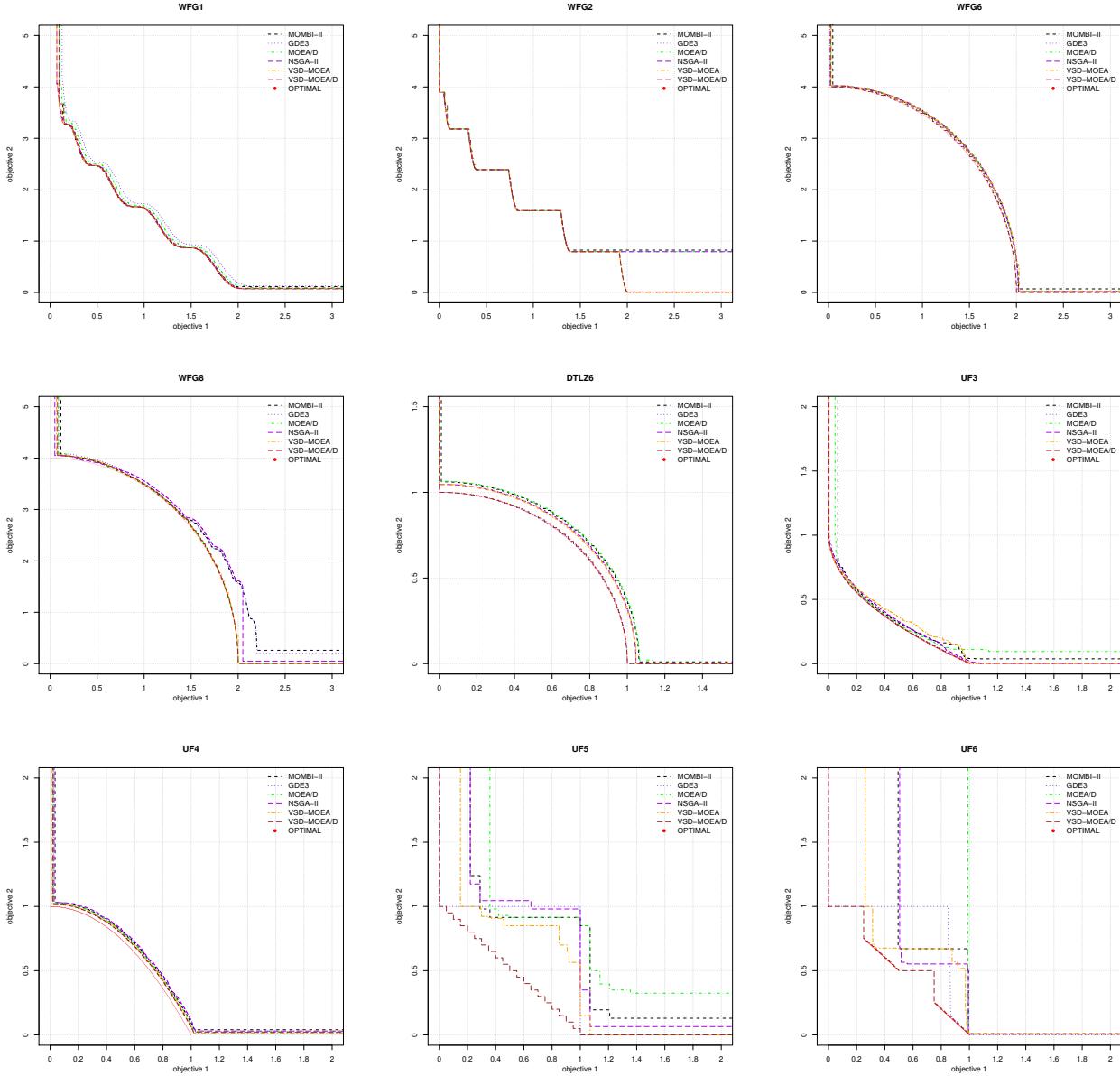
TABLA 6.13: Estadísticas del hipervolumen con tres objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Men	Diff
DTLZ1	1.30	1.30	<b>1.30</b>	0.00	1.29	1.29	1.29	0.01	1.30	1.30	<b>1.30</b>	0.00	1.28	1.29	1.29	0.01	1.30	1.30	<b>1.30</b>	0.00	1.29	1.29	1.29	0.01
DTLZ2	0.71	0.72	0.71	0.03	0.72	0.72	0.72	0.02	0.69	0.72	0.71	0.04	0.71	0.71	0.71	0.03	0.74	0.75	<b>0.74</b>	0.00	0.73	0.73	0.73	0.01
DTLZ3	26.37	26.39	26.38	0.03	26.15	26.15	26.15	0.26	26.36	26.39	26.38	0.04	26.17	26.27	26.27	0.15	26.41	26.41	<b>0.00</b>	26.40	26.40	26.40	0.01	
DTLZ4	0.71	0.72	0.71	0.03	0.45	0.72	0.70	0.04	0.12	0.73	0.70	0.05	0.12	0.71	0.60	0.14	0.74	0.74	<b>0.74</b>	0.00	0.73	0.74	0.74	0.01
DTLZ5	23.99	23.99	<b>23.99</b>	0.00	23.81	23.82	23.81	0.17	23.98	23.98	23.98	0.01	23.88	23.88	23.88	0.11	23.99	23.99	<b>23.99</b>	0.00	23.90	23.90	23.90	0.09
DTLZ6	23.99	23.99	<b>23.99</b>	0.00	23.36	23.81	23.58	0.41	23.70	23.98	23.82	0.17	23.27	23.71	23.53	0.45	23.48	23.99	23.74	0.25	23.90	23.90	23.90	0.09
DTLZ7	1.78	1.84	1.82	0.05	0.90	0.90	0.97	0.89	0.91	0.90	0.97	0.90	0.91	0.90	0.96	1.86	1.88	<b>1.87</b>	0.00	1.76	1.76	1.76	0.11	
UF10	0.01	3.89	0.66	6.65	3.15	5.58	3.96	3.35	3.76	6.26	4.66	2.65	2.91	4.08	3.55	3.76	6.00	7.24	6.89	0.42	7.27	7.36	<b>7.31</b>	0.00
UF8	0.05	4.85	1.97	5.43	4.00	7.36	6.91	0.50	7.16	7.27	7.23	0.18	4.00	7.32	6.41	0.99	7.32	7.41	7.39	0.02	7.40	7.41	<b>7.41</b>	0.00
UF9	0.24	4.22	1.49	6.26	7.13	7.65	7.26	0.49	6.89	7.60	7.35	0.40	7.11	7.65	7.23	0.52	7.72	7.76	<b>7.75</b>	0.00	7.68	7.71	7.70	0.05
WFG1	16.34	18.10	17.10	28.88	40.29	48.67	<b>45.98</b>	0.00	43.05	44.55	43.64	2.34	40.35	44.99	43.65	2.34	45.44	45.94	45.76	0.22	44.82	45.40	45.25	0.73
WFG2	45.96	47.22	46.71	1.82	40.20	48.21	45.18	3.35	40.09	47.47	45.54	2.99	40.04	47.80	43.55	4.98	48.35	48.67	<b>48.53</b>	0.00	47.83	47.83	47.83	0.70
WFG3	30.39	31.00	30.73	0.48	31.16	31.19	31.18	0.03	30.59	31.14	30.90	0.30	31.15	31.16	31.15	0.05	31.03	31.07	31.05	0.16	31.20	31.21	<b>31.21</b>	0.00
WFG4	18.01	20.15	19.18	4.96	23.63	23.66	23.64	0.50	21.72	22.75	22.30	1.84	21.93	22.47	22.13	2.01	23.99	24.32	<b>24.13</b>	0.00	23.19	23.35	23.26	0.88
WFG5	20.14	21.17	20.68	1.21	21.39	21.40	21.40	0.50	19.99	21.05	20.59	1.30	19.68	20.36	19.76	2.13	21.73	22.08	<b>21.89</b>	0.00	20.62	21.08	20.76	1.13
WFG6	17.31	20.48	18.93	4.12	22.01	23.02	22.65	0.39	19.84	22.02	21.02	2.02	20.34	21.58	21.04	2.00	22.50	23.42	<b>23.00</b>	0.00	22.17	23.23	23.02	0.02
WFG7	18.96	20.97	19.86	4.27	23.63	23.65	23.64	0.49	21.55	22.97	22.44	1.69	22.26	22.26	22.26	1.87	23.91	24.34	<b>24.13</b>	0.00	23.18	23.28	23.22	0.91
WFG8	14.14	15.49	14.73	8.42	20.80	23.72	23.13	0.02	16.29	18.40	17.76	5.39	21.69	22.10	21.86	1.30	18.99	24.08	<b>23.15</b>	0.00	20.06	23.42	22.89	0.27
WFG9	17.52	18.36	18.00	5.07	19.11	23.27	22.85	0.22	17.28	21.26	18.06	5.01	17.68	21.80	21.24	1.83	19.26	23.79	<b>23.07</b>	0.00	21.92	22.63	22.31	0.76
Average	14.627	16.045	15.207	<b>4.091</b>	17.537	19.202	18.680	<b>0.617</b>	17.118	18.460	17.857	<b>1.440</b>	17.130	18.476	17.949	<b>1.348</b>	18.671	19.430	19.241	<b>0.056</b>	18.739	19.086	18.993	<b>0.304</b>

TABLA 6.14: Estadísticas del IGD+ con tres objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGA-II				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Men	Diff
DTLZ1	0.017	0.021	0.019	0.006	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000	0.018	0.023	0.020	0.007	0.014	0.014	0.014	0.001	0.013	0.015	0.014	0.001	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000
DTLZ2	0.027	0.032	0.030	0.007	0.025	0.025	0.025	0.001	0.028	0.036	0.032	0.008	0.028	0.028	0.028	0.004	0.023	0.025	<b>0.024</b>	0.000	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.000
DTLZ3	0.028	0.035	0.031	0.007	0.025	0.025	0.025	0.001	0.028	0.037	0.031	0.008	0.028	0.028	0.028	0.004	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.000	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.000
DTLZ4	0.028	0.033	0.030	0.006	0.025	0.364	0.042	0.018	0.028	0.595	0.046	0.022	0.028	0.595	0.107	0.083	0.024	0.024	0.024	0.001	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.000
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.004	0.004	0.002	0.003	0.003	0.003	0.001	0.003	0.003	0.003	0.001	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.003	0.003	0.003	0.001	0.001
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.125	0.065	0.064	0.003	0.072	0.041	0.039	0.045	0.159	0.094	0.092	0.002	0.124	0.060	0.058	0.003	0.003	0.003	0.001
DTLZ7	0.031	0.043	0.035	0.007	0.688	0.689	0.689	0.061	0.683	0.684	0.683	0.655	0.685	0.685	0.685	0.657	0.027	0.029	<b>0.028</b>	0.000	0.047	0.047	0.047	0.019
UF10	0.609	2.740	1.545	1.486	1.82	0.473	0.339	0.280	0.178	0.388	0.308	0.250	0.326	0.478	0.389	0.330	0.075	0.225	0.101	0.043	0.044	0.061	<b>0.059</b>	0.000
UF8	0.442	2.747	1.259	1.235	0.035	0.365	0.098	0.074	0.071	0.089	0.078	0.054	0.035	0.365	0.365	0.137	0.113	0.025	0.060	0.034	0.010	0.024	<b>0.024</b>	0.000
UF9	0.701	2.225	1.345	1.320	0.025	0.143	0.113	0.087	0.073	0.229	0.128	0.072	0.034	0.143	0.124	0.099	0.023	0.033	0.027	0.001	0.025	0.026	<b>0.025</b>	0.000
WFG1	1.169	1.276	1.236	1.172	0.008	0.224	<b>0.064</b>	0.000	0.123	0.168	0.141	0.077	0.080	0.209	0.122	0.058	0.052	0.099	<b>0.064</b>	0.000	0.071	0.140	0.079	0.015
WFG2	0.092	0.149	0.118	0.078	0.040	0.108	0.066	0.027	0.095	0.168	0.140	0.101	0.044	0.117	0.087	0.047	0.031	0.055	<b>0.040</b>	0.000	0.056	0.056	0.016	0.016
WFG3	0.046	0.094	0.066	0.042	0.024	0.027	0.026	0.003	0.032	0.074	0.047	0.024	0.024	0.025	0.025	0.001	0.036	0.039	0.037	0.013	0.023	0.023	<b>0.023</b>	0.000
WFG4	0.192	0.245	0.214	0.128	0.085	0.085	<b>0.085</b>	0.000	0.113	0.135	0.123	0.037	0.122	0.126	0.124	0.039	0.084	0.093	0.089	0.003	0.109	0.111	0.110	0.024
WFG5	0.151	0.171	0.159	0.014	0.144	0.145	<b>0.145</b>	0.000	0.160	0.177	0.167	0.022	0.176	0.185	0.180	0.035	0.141	0.152	0.147	0.002	0.166	0.171	0.168	0.024
WFG6	0.182	0.263	0.220	0.109	0.101	0.128	<b>0.110</b>	0.000	0.134	0.191	0.155	0.044	0.143	0.176	0.154	0.044	0.103	0.130	0.114	0.004	0.110	0.141	0.117	0.007
WFG7	0.174	0.218	0.197	0.112	0.085	0.085	<b>0.085</b>	0.000	0.107	0.134	0.120	0.035	0.126	0.126	0.126</									

FIGURA 6.8: superficies de cubrimiento logradas al 50 %



## 6.4. Operador de cruce SBX

Esta sección está dedicada a mostrar los experimentos que se realizaron para validar el operador NRD-SBX. Se muestran estudios con los algoritmos NSGA-II, MOEA/D y SMS-EMOA, implementados en jMetalcpp (López-Camacho y col., 2013) utilizando ambos operadores. El único cambio realizado frente a la implementación actual de jMetalcpp fue la incorporación de los operadores de cruce. La versión de SBX que viene incorporada en jMetalcpp difiere ligeramente a la implementada en la versión oficial del NSGA-II, pues la variante de jMetalcpp incluye un paso de reflexión adicional. En nuestra validación se consideró la versión incluida en el NSGA-II oficial, así como el nuevo operador NRD-SBX. En lo referente a las funciones multi-objetivo se consideran las 9 funciones WFG y son implementadas con dos objetivos. Se utilizó la configuración indicada al inicio de este capítulo, la única variante es el índice

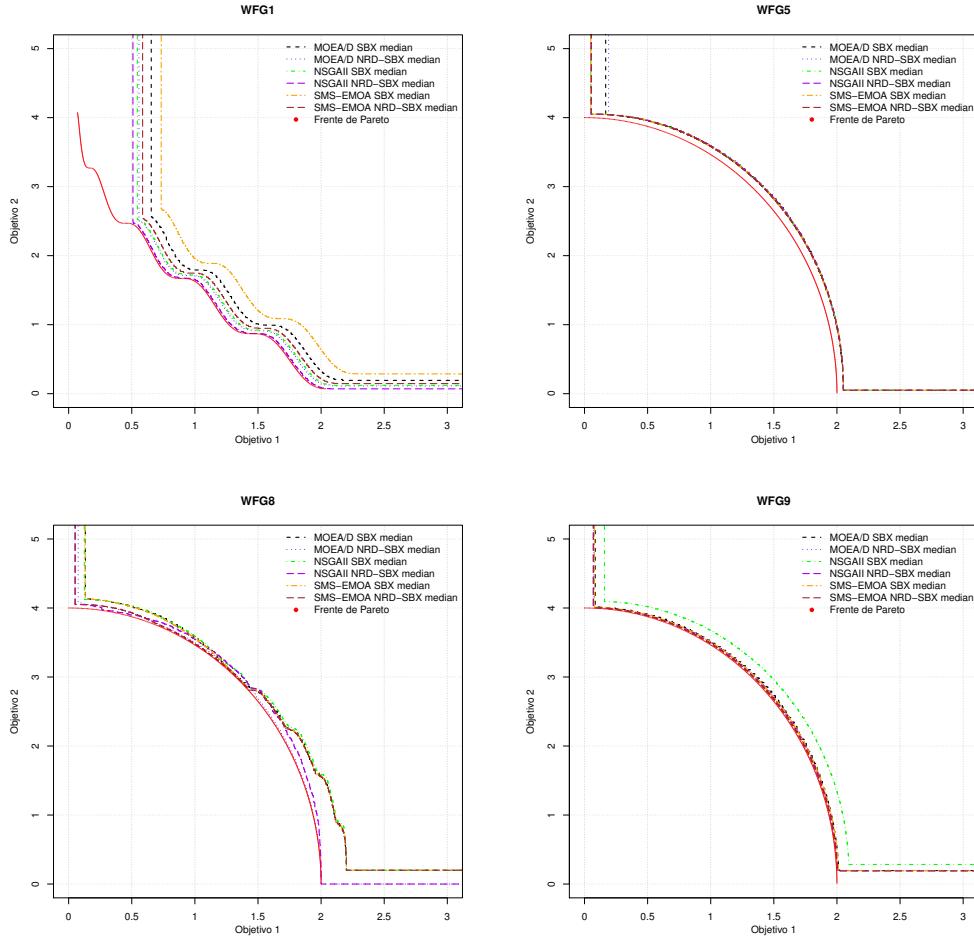


FIGURA 6.9: Superficies de cubrimiento al 50 % obtenidas por los diferentes MOEAs con SBX y NRD-SBX

de distribución del operador de mutación, que se fijó en 20. Asimismo, el análisis experimental se realizó teniendo en cuenta las superficies de cubrimiento y el hipervolumen.

En primer lugar se van a analizar los resultados en base a las superficies de cubrimiento. Para ello, de los 9 problemas se seleccionaron los 4 casos en los que se detectaron mayores diferencias. La Figura 6.9 muestra las superficies de cubrimiento al 50 % del WFG1, WFG5, WFG8 y WFG9. Se puede apreciar que para cada algoritmo, el uso del operador NRD-SBX produce resultados que dominan o igualan a los alcanzados por SBX en la mayor parte de las casos. De hecho, la única excepción se da en la instancia WFG5 con el NSGA-II, en el que la implementación del NRD-SBX produce resultados ligeramente inferiores. En cualquier caso, los beneficios ofrecidos por el NRD-SBX en el resto de casos son muy superiores que la penalización que se produce en la instancia WFG5. Particularmente, los beneficios de los problemas WFG1 y WFG8 son especialmente claros. En el caso del problema WFG1, se ha mostrado en el capítulo 1 que la pérdida rápida de la diversidad puede ser un grave problema, con lo que el mayor grado de exploración que induce NRD-SBX en las fases iniciales es de gran ayuda. Por otro lado, dado que es un problema unimodal y separable, evitar las reflexiones y centrarse en crear soluciones cercanas a los padres también contribuye al buen rendimiento. En el caso de la instancia WFG8, hay un alto grado de dependencia entre las variables, por lo tanto cambiar de forma dinámica el grado de similitud de los individuos creados es de gran ayuda. En el problema WFG9 se da una situación similar, aunque por ser más sencilla, los beneficios sólo se aprecian de forma clara en el caso del NSGA-II.

TABLA 6.15: Valores de hipervolumen alcanzados por los diferentes MOEAs con los operadores de cruce SBX y NRD-SBX

	MOEA/D							
	NRD-SBX				SBX			
	Min.	Max.	Media	Desv.	Min.	Max.	Media	Desv.
WFG1	<b>9.61</b>	<b>10.72</b>	<b>10.26</b>	<b>3.1E-01</b>	8.39	10.29	9.62	4.3E-01
WFG2	<b>10.62</b>	<b>11.45</b>	<b>10.66</b>	<b>1.9E-01</b>	9.28	10.62	10.50	3.7E-01
WFG3	10.95	10.95	10.95	2.5E-04	10.95	10.95	10.95	3.0E-04
WFG4	8.68	8.68	8.68	1.0E-04	8.67	8.68	8.68	1.0E-04
WFG5	8.13	8.34	8.16	4.7E-02	<b>8.13</b>	<b>8.24</b>	<b>8.19</b>	<b>3.0E-02</b>
WFG6	<b>8.39</b>	<b>8.57</b>	<b>8.49</b>	<b>4.8E-02</b>	7.76	8.54	8.30	1.2E-01
WFG7	8.67	8.68	8.67	1.5E-04	8.67	8.68	8.67	2.3E-04
WFG8	<b>8.20</b>	<b>8.60</b>	<b>8.54</b>	<b>8.5E-02</b>	7.80	7.87	7.83	1.8E-02
WFG9	<b>7.70</b>	<b>8.56</b>	<b>8.41</b>	<b>1.9E-01</b>	7.70	8.54	8.20	3.1E-01
	NSGA-II							
	NRD-SBX				SBX			
	Min.	Max.	Media	Desv.	Min.	Max.	Media	Desv.
WFG1	<b>9.91</b>	<b>10.70</b>	<b>10.52</b>	<b>1.8E-01</b>	9.51	10.76	10.21	3.1E-01
WFG2	<b>10.59</b>	<b>11.44</b>	<b>10.66</b>	<b>1.9E-01</b>	9.28	10.62	10.58	2.2E-01
WFG3	10.91	10.93	10.92	4.0E-03	<b>10.92</b>	<b>10.93</b>	<b>10.93</b>	<b>2.7E-03</b>
WFG4	8.65	8.66	8.66	2.3E-03	<b>8.66</b>	<b>8.67</b>	<b>8.67</b>	<b>2.2E-03</b>
WFG5	8.26	8.27	8.27	2.3E-03	8.27	8.28	8.27	1.6E-03
WFG6	<b>8.33</b>	<b>8.59</b>	<b>8.47</b>	<b>5.6E-02</b>	8.12	8.46	8.34	6.5E-02
WFG7	8.64	8.66	8.65	3.9E-03	<b>8.66</b>	<b>8.67</b>	<b>8.66</b>	<b>2.6E-03</b>
WFG8	<b>7.88</b>	<b>8.50</b>	<b>8.26</b>	<b>2.7E-01</b>	7.71	7.83	7.78	3.2E-02
WFG9	<b>8.34</b>	<b>8.61</b>	<b>8.43</b>	<b>7.9E-02</b>	7.69	8.51	7.85	2.8E-01
	SMS-EMOA							
	NRD-SBX				SBX			
	Min.	Max.	Media	Desv.	Min.	Max.	Media	Desv.
WFG1	<b>8.60</b>	<b>10.70</b>	<b>10.03</b>	<b>4.6E-01</b>	8.00	9.89	8.92	5.0E-01
WFG2	<b>10.63</b>	<b>11.46</b>	<b>10.65</b>	<b>1.4E-01</b>	9.29	11.46	10.61	2.7E-01
WFG3	10.96	10.96	10.96	2.8E-04	10.96	10.96	10.96	3.6E-04
WFG4	8.69	8.69	8.69	7.7E-06	8.69	8.69	8.69	6.8E-06
WFG5	8.22	8.29	8.27	2.1E-02	<b>8.25</b>	<b>8.29</b>	<b>8.29</b>	<b>8.6E-03</b>
WFG6	<b>8.36</b>	<b>8.58</b>	<b>8.50</b>	<b>4.7E-02</b>	8.22	8.47	8.34	5.8E-02
WFG7	8.69	8.69	8.69	4.6E-06	8.69	8.69	8.69	6.5E-06
WFG8	<b>7.98</b>	<b>8.61</b>	<b>8.12</b>	<b>2.2E-01</b>	7.81	7.89	7.85	2.2E-02
WFG9	<b>8.33</b>	<b>8.66</b>	<b>8.47</b>	<b>8.7E-02</b>	7.71	8.56	8.20	3.1E-01

Con el objetivo de confirmar y complementar los hallazgos anteriores, se realiza el análisis del hipervolumen alcanzado por los diferentes algoritmos, con cada uno de los operadores de cruce. La Tabla 6.15 muestra para cada algoritmo y operador de cruce el mínimo, máximo, media y desviación estándar de los valores del hipervolumen alcanzados. Para el cálculo del hipervolumen se fijó el punto de referencia en (3.0, 5.0) tal y como se hace en Zhu y col., 2016. Para cada algoritmo y problema, se realizaron comparativas estadísticas entre el operador SBX y el operador NRD-SBX. En los casos en los que se pudo confirmar la superioridad de alguno de los operadores, se resaltan los datos en la tabla. Para el caso del MOEA/D la superioridad del NRD-SBX se pudo confirmar en cinco instancias, mientras que sólo fue inferior en uno; en el NSGA-II, NRD-SBX fue superior en 5 casos e inferior en 3; finalmente en el SMS-EMOA, NRD-SBX fue superior en 5 casos e inferior sólo en 1. Los resultados anteriores confirman la superioridad de NRD-SBX, pero además es importante recalcar que en los casos en que el operador SBX fue superior, la diferencia entre los valores del hipervolumen alcanzados fue muy pequeña. Por ejemplo, en los 3 problemas en los que NSGA-II con SBX fue superior a NSGA-II con NRD-SBX la diferencia de la media de los valores alcanzados fue de sólo 0.01, mientras que en los casos donde el NRD-SBX fue superior la diferencia es mucho mayor.

Finalmente, con el objetivo de recalcar la superioridad del NRD-SBX, se calculó el valor de efectividad. La Tabla 6.16 muestra la puntuación obtenida en cada problema para cada par de algoritmo y operador de cruce. En las columnas etiquetadas con ↑ se muestra el acumulado de las puntuaciones positivas, mientras que en las columnas etiquetadas con la columna ↓ se muestra el acumulado de puntuaciones negativas. Finalmente, en la columna *Punt* se muestra la puntuación final. Se puede apreciar que los algoritmos que consideraron el operador NRD-SBX fueron los tres superiores, teniendo puntuación positiva. Entre ellos, el NSGA-II fue el superior, aunque con un rendimiento muy similar al MOEA/D. Por

TABLA 6.16: Puntuación obtenida por los diferentes algoritmos en base a las pruebas estadísticas

	NRD-SBX									SBX								
	MOEA/D			NSGA-II			SMS-EMOA			MOEA/D			NSGA-II			SMS-EMOA		
	↑	↓	Punt															
WFG1	2.2	0.3	1.9	3.6	0.0	3.6	1.5	0.7	0.8	0.7	2.5	-1.8	1.9	0.3	1.5	0.0	6.0	-6.0
WFG2	0.2	0.0	0.2	0.1	0.0	0.1	0.3	0.0	0.2	0.0	0.4	-0.4	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.1	0.0
WFG3	0.1	0.0	0.0	0.0	0.2	-0.2	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.0	0.1
WFG4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.0	0.1
WFG5	0.0	0.5	-0.5	0.2	0.0	0.2	0.2	0.0	0.2	0.0	0.4	-0.3	0.2	0.0	0.2	0.3	0.0	0.3
WFG6	0.5	0.0	0.5	0.4	0.0	0.4	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.4	-0.4
WFG7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	-0.1	0.1	0.0	0.1
WFG8	2.9	0.0	2.9	1.3	0.3	1.0	0.9	0.4	0.5	0.1	1.4	-1.4	0.0	1.7	-1.7	0.1	1.4	-1.3
WFG9	1.0	0.1	0.9	1.0	0.0	1.0	1.3	0.0	1.3	0.4	0.7	-0.4	0.0	2.5	-2.5	0.4	0.7	-0.4
Total	<b>6.8</b>	0.9	6.0	<b>6.6</b>	0.8	5.9	<b>4.9</b>	1.2	3.8	<b>1.2</b>	6.1	-4.8	<b>2.1</b>	5.3	-3.2	<b>1.1</b>	8.7	-7.6

su parte, el rendimiento de los algoritmos con el operador SBX fue claramente inferior independientemente del MOEA aplicado, teniendo todos ellos puntuación negativa.



## Capítulo 7

# Conclusiones y Trabajo Futuro

### 7.1. Conclusiones

Los algoritmos evolutivos han sido uno de los enfoques más populares para tratar problemas de optimización complejos. Particularmente, para el caso multi-objetivo los MOEAs trabajan mediante distintos principios involucrando normalmente a la diversidad y convergencia en el espacio objetivo. En el caso de optimización mono-objetivo, controlar la diversidad en el espacio de las variables de forma explícita relacionándolo con el criterio de parada proporciona soluciones de mayor calidad principalmente en problemas complejos y para ejecuciones a largo plazo. Sin embargo, el uso de este tipo de control ha sido mínimo en el ámbito de optimización multi-objetivo. Esta tesis ha estudiado y confirmado la hipótesis de que incorporar dicho control en algoritmos evolutivos multi-objetivo puede proporcionar avances importantes en el área. Para ello se han propuesto un conjunto de estrategias que mezclan ideas actuales del área con el principio que se pretende analizar.

En la primera propuesta, denominada VSD-MOEA, se proporciona un algoritmo basado en dominancia con una fase de remplazo especial. Esta fase considera la diversidad en los dos espacios, específicamente la diversidad en el espacio de las variables se basa en un modelo decremental, de forma que paulatinamente va perdiendo importancia, mientras que la importancia de la diversidad del espacio objetivo se mantiene hasta el final de la ejecución. De esta forma, en las primeras fases se induce mayor diversidad en el espacio de las variables que en MOEAs del estado del arte, pero de forma gradual ésta va decrementándose y por lo tanto en las últimas etapas del algoritmo la fase de remplazo trabaja de forma similar a los MOEAs actuales. Adicionalmente, para el control de la diversidad en el espacio objetivo se propuso la distancia de mejoría, la cual considera principios similares a los que se usaron para diseñar el indicador IGD+. Se llevó a cabo la validación experimental de esta estrategia por medio de ejecuciones a largo plazo con los tres conjuntos de problemas de prueba más populares. Esta validación demuestra que el VSD-MOEA puede resolver apropiadamente los problemas de prueba, además exhibe los mejores valores en las instancias más complejas. En base a un estudio de escalabilidad en las variables de decisión, los resultados muestran la superioridad y estabilidad de la propuesta. Los resultados son superiores a los ofrecidos por todos los esquemas actuales, quedando clara la importancia de preservar la diversidad en el espacio de las variables por medio de un esquema explícito.

La segunda propuesta fue el MOEA/D-EVSD, que es una extensión del MOEA/D. Este algoritmo induce un grado de exploración elevado en las primeras fases y cambia gradualmente hacia la intensificación. Para lograr este comportamiento gradual, el criterio de paro se usa para alterar el proceso de emparejamiento. Particularmente el MOEA/D-EVSD tiende a combinar individuos más distantes en las etapas iniciales que en las etapas subsecuentes. La validación experimental se realiza por medio de

ejecuciones a largo plazo y los problemas de prueba WFG. La validación demuestra que esta propuesta puede resolver apropiadamente los problemas WFG1 y WFG8, los cuales son problemáticos para el resto de MOEAs, mostrando ventajas claras tanto en lo referente a superficies de cubrimiento como en hipervolumen. Además, se realizan pruebas estadísticas que confirman la superioridad de la propuesta en estas funciones. Sin embargo, también se muestra que la forma en que la diversidad es promovida es problemática. En primer lugar, se muestra que el proceso de búsqueda tiende a generar soluciones en posiciones cercanas a las fronteras del espacio factible con mayor probabilidad que en otras zonas. Segundo, se considera una problemática el hecho de que la diversidad no se mantiene explícitamente, porque cuando se encuentran soluciones relativamente de alta calidad en dichas regiones, no se puede evitar la convergencia prematura por lo que no se consigue el efecto deseado.

Siendo parte de los algoritmos basados en descomposición, también se propone el MOEA/D-SEBV y el VSD-MOEA/D, siendo este último el que ofrece los mejores resultados en dos objetivos y el segundo mejor en tres objetivos, sólo superado por el VSD-MOEA. A diferencia del MOEA/D-EVSD, en estas propuestas el control de la diversidad sí se hace de forma explícita, aunque la forma específica de controlar la diversidad difiere en cada uno de ellos. Además se propone la versión rápida *Fast VSD-MOEA/D*, la cual posee una complejidad computacional menor que el VSD-MOEA/D pero mantiene un buen desempeño.

Posteriormente, se realiza un análisis de los operadores evolutivos más utilizados en el dominio continuo. Concretamente, el operador SBX es estudiado en detalle, siendo este uno de los operadores más populares tanto en mono-objetivo como en multi-objetivo. El análisis realizado, muestra que las implementaciones actuales aplican un conjunto de reflexiones provocando que el operador pueda crear individuos muy alejados de los padres, reduciendo así su capacidad de intensificación. Además, se destaca que el SBX cambia cada variable con probabilidad fija durante todo el proceso de optimización. En base a este análisis se propone un nuevo operador, el NRD-SBX que adapta su grado de exploración y explotación a lo largo de la búsqueda. El NRD-SBX introduce dos cambios principales. Por un lado, evita la utilización de reflexiones con el fin de aumentar el poder de intensificación. Por otro lado, adapta la probabilidad de alterar las variables a lo largo de la ejecución, induciendo un mayor grado de exploración en las fases iniciales que en las fases finales del proceso de optimización. Con el objetivo de validar el NRD-SBX, se realizó un análisis experimental con tres MOEAs muy populares, considerándose el conjunto de prueba WFG. El análisis de las superficies de cubrimiento e hipervolumen muestran las ventajas del NRD-SBX frente al SBX. Adicionalmente, se estudia el comportamiento de los operadores de evolución diferencial, que son considerados como uno de los mejores esquemas en el ámbito evolutivo. Se analizan sus propiedades y las implicaciones de mantener diversidad sobre el proceso de reproducción con los operadores de evolución diferencial. En base a esto se proponen varias modificaciones a este operador, que se incluyeron en las propuestas algorítmicas y proporcionaron resultados de una calidad muy alta.

Cabe destacar que además de las propuestas algorítmicas específicas, una contribución importante es que se valida el hecho de que considerar la diversidad de forma explícita puede contribuir a alcanzar soluciones de mucha mejor calidad. Este principio se puede aplicar de múltiples formas, con lo que se abre una nueva línea de investigación a explorar durante los próximos años.

## 7.2. Trabajo futuro

En base a los descubrimientos realizados en este trabajo se consideran varias nuevas líneas de investigación. Como se ha observado en el caso multi-objetivo la diversidad es un aspecto clave para generar soluciones de calidad, sin embargo es un reto manejar simultáneamente los dos espacios. En esta tesis se proponen varias formas de hacer la integración, pero esto son sólo algunas opciones y explorar opciones adicionales parece realmente prometedor. Por otro lado, en esta tesis se consideran extensiones a algoritmos de descomposición y de dominancia, pero se dejaron de lado los basados en indicadores. Los mismos principios que se han usado en esta tesis se podrían usar para los basados en indicadores.

Los algoritmos propuestos en este trabajo utilizan el criterio del vecino más cercano, con el objetivo de mantener diversidad en el espacio de las variables. Se pueden utilizar muchas otras técnicas para tratar de mantener diversidad. Entre ellas, se desea analizar el método LSH *Local Sensitive Hashing* con dos propósitos. El primero es para disminuir el grado de complejidad de estas secciones de código y además para administrar apropiadamente los problemas con muchas variables ya que al usar técnicas basadas exclusivamente en distancia euclídeas pueden surgir algunos inconvenientes.

Finalmente, se desea adaptar tanto el VSD-MOEA como el VSD-MOEA/D para diferentes entornos. Por un lado implementarlo en aplicaciones reales es bastante retador ya que para este tipo de problemas habitualmente no se pueden hacer tantas generaciones como en las funciones de prueba con lo que aprovechar la diversidad mantenida no es tan sencillo. Por otro lado, se quiere usar estas estrategias para entornos con muchas funciones objetivo, para lo que habrá que integrarlo con algunos de los métodos que mejores rendimientos están obteniendo para dichos problemas.



## Apéndice A

# Resultados adicionales para VSD-MOEA

TABLA A.1: Estadísticas del hipervolumen considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA							
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff				
DTLZ1	1.02E+03	1.02E+03	<b>1.02E+03</b>	0.00E+00	1.01E+03	1.02E+03	1.02E+03	8.35E+00	2.56E+02	1.01E+03	8.75E+02	1.49E+02	1.02E+03	1.02E+03	1.02E+03	1.15E+00				
DTLZ2	7.87E+02	9.22E+02	9.00E+02	9.79E+01	9.60E+02	1.01E+03	9.84E+02	1.35E+01	7.73E+02	9.39E+02	8.46E+02	1.52E+02	9.96E+02	1.00E+03	<b>9.98E+02</b>	0.00E+00				
DTLZ3	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.04E+06	1.03E+06	1.04E+06	3.41E+03	7.53E+05	1.03E+06	9.64E+05	7.82E+04	1.04E+06	<b>1.04E+06</b>	0.00E+00	1.00E+06	1.04E+06	2.83E+03			
DTLZ4	9.37E+02	9.78E+02	9.60E+02	5.12E+01	9.71E+02	9.81E+02	9.76E+02	3.53E+01	7.70E+02	9.41E+02	8.22E+02	1.89E+02	9.84E+02	1.01E+03	9.98E+02	1.25E+01	9.61E+02	1.02E+03	<b>1.01E+03</b>	0.00E+00
DTLZ5	9.44E+05	9.52E+05	9.48E+05	1.52E+04	9.60E+05	9.68E+05	<b>9.63E+05</b>	0.00E+00	9.44E+05	9.56E+05	9.51E+05	1.25E+04	9.35E+05	9.40E+05	9.37E+05	2.60E+04	2.76E+05	9.70E+05	6.44E+05	3.20E+05
DTLZ6	9.28E+05	9.28E+05	9.28E+05	1.66E+04	9.36E+05	9.35E+05	<b>9.45E+05</b>	0.00E+00	8.87E+05	9.18E+05	9.01E+05	4.38E+04	9.27E+05	9.36E+05	9.32E+05	1.22E+04	8.83E+05	9.25E+05	9.00E+05	4.48E+04
DTLZ7	4.47E+01	6.66E+01	5.50E+01	1.11E+02	1.12E+02	1.13E+02	1.12E+02	5.35E+01	8.38E+01	1.09E+02	9.60E+01	6.96E+01	9.87E+01	1.01E+02	1.00E+02	6.54E+01	1.42E+02	1.83E+02	<b>1.66E+02</b>	0.00E+00
WFG1	8.62E+08	9.11E+08	8.85E+08	3.13E+09	3.03E+09	4.19E+09	<b>4.01E+09</b>	0.00E+00	2.59E+09	4.05E+09	3.73E+09	2.84E+08	2.89E+09	3.71E+09	3.48E+09	5.27E+08	1.49E+08	5.61E+08	3.35E+08	3.68E+09
WFG2	2.54E+09	3.42E+09	3.11E+09	1.18E+09	3.32E+09	4.23E+09	3.84E+09	4.47E+08	4.28E+09	4.29E+09	<b>4.29E+09</b>	0.00E+00	3.40E+09	4.26E+09	3.80E+09	4.86E+08	4.19E+09	4.27E+09	4.23E+09	5.66E+07
WFG3	1.75E+09	2.00E+09	1.87E+09	7.66E+08	2.35E+09	2.65E+09	<b>2.63E+09</b>	0.00E+00	2.17E+09	2.51E+09	2.36E+09	2.75E+09	2.07E+09	2.14E+09	2.09E+09	5.41E+08	2.38E+09	2.58E+09	2.51E+09	1.21E+08
WFG4	1.09E+09	1.53E+09	1.29E+09	1.36E+09	2.17E+09	2.70E+09	2.24E+09	4.11E+08	1.45E+09	2.79E+09	2.10E+09	5.51E+08	2.59E+09	2.75E+09	<b>2.65E+09</b>	0.00E+00	1.45E+09	2.32E+09	2.02E+09	6.33E+08
WFG5	1.30E+09	1.61E+09	1.40E+09	1.14E+09	1.93E+09	2.59E+09	2.37E+09	1.72E+08	1.52E+09	2.60E+09	2.27E+09	2.73E+08	2.31E+09	2.45E+09	2.37E+09	1.73E+08	1.36E+09	2.71E+09	<b>2.54E+09</b>	0.00E+00
WFG6	1.60E+09	2.05E+09	1.73E+09	8.55E+08	2.13E+09	2.43E+09	2.22E+09	3.65E+08	1.46E+09	2.61E+09	1.97E+09	6.13E+08	2.50E+09	2.71E+09	<b>2.59E+09</b>	0.00E+00	1.24E+09	2.87E+09	2.14E+09	4.50E+08
WFG7	8.99E+08	1.26E+09	1.04E+09	1.52E+09	2.14E+09	2.26E+09	2.21E+09	3.58E+08	8.78E+08	1.75E+09	1.26E+09	1.30E+09	2.50E+09	2.66E+09	<b>2.56E+09</b>	0.00E+00	1.84E+09	2.42E+09	2.22E+09	3.43E+08
WFG8	6.91E+08	9.73E+08	8.32E+08	1.75E+09	1.26E+09	2.56E+09	1.75E+09	8.34E+08	1.12E+09	1.59E+09	1.34E+09	1.24E+09	2.53E+09	2.64E+09	<b>2.58E+09</b>	0.00E+00	1.67E+09	3.16E+09	2.24E+09	3.43E+08
WFG9	8.06E+08	1.10E+09	9.47E+08	1.65E+09	1.94E+09	2.87E+09	2.39E+09	2.06E+08	7.09E+08	1.27E+09	9.80E+08	1.62E+09	2.23E+09	2.35E+09	2.40E+09	1.98E+08	2.23E+09	2.86E+09	<b>2.60E+09</b>	0.00E+00
Average	7.22E+08	9.28E+08	8.19E+08	<b>8.35E+08</b>	1.28E+09	1.65E+09	1.48E+09	<b>1.75E+08</b>	1.01E+09	1.47E+09	1.27E+09	3.85E+08	1.44E+09	1.62E+09	1.53E+09	<b>1.20E+08</b>	1.03E+09	1.48E+09	1.30E+09	<b>3.51E+08</b>

TABLA A.2: Pruebas efectivas del hipervolumen considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA			
	↑	↓	Score													
DTLZ1	1.63E+02	0.00E+00	<b>1.63E+02</b>	1.41E+02	1.93E+01	1.21E+02	0.00E+00	5.81E+02	-5.81E+02	1.48E+02	8.17E+00	1.40E+02	1.58E+02	1.15E+00	1.57E+02	
DTLZ2	1.45E+02	1.82E+02	-3.70E+01	3.98E+02	1.35E+01	3.85E+02	0.00E+00	3.44E+02	-4.52E+02	0.00E+00	4.52E+02	0.00E+00	4.52E+02	4.57E+02	-4.57E+02	
DTLZ3	0.00E+00	4.08E+06	-4.08E+06	1.11E+06	3.41E+06	1.11E+06	9.64E+05	2.28E+05	7.36E+05	1.12E+06	0.00E+00	1.12E+06	1.11E+06	0.00E+00	1.11E+06	
DTLZ4	1.38E+02	1.06E+02	3.22E+01	1.70E+02	5.80E+01	1.12E+02	0.00E+00	6.58E+02	-6.58E+02	2.38E+02	1.25E+01	2.26E+02	2.88E+02	0.00E+00	2.88E+02	
DTLZ5	3.15E+05	1.80E+04	2.97E+05	3.73E+05	0.00E+00	<b>3.73E+05</b>	3.23E+05	1.25E+04	3.11E+05	2.94E+05	5.02E+04	2.43E+05	0.00E+00	1.22E+06	1.22E+06	
DTLZ6	5.54E+04	2.10E+04	3.45E+04	1.17E+05	0.00E+00	<b>1.17E+05</b>	0.00E+00	1.03E+05	-1.03E+05	6.85E+04	1.22E+04	5.63E+04	0.00E+00	1.06E+05	1.06E+05	-1.06E+05
DTLZ7	0.00E+00	2.54E+02	-2.54E+02	8.53E+01	5.35E+01	3.18E+01	4.10E+01	9.00E+01	-4.91E+01	4.94E+01	7.74E+01	-2.80E+01	2.99E+02	0.00E+00	<b>2.99E+02</b>	
WFG1	5.50E+08	8.57E+09	-8.02E+09	7.61E+09	0.00E+00	<b>7.61E+09</b>	6.48E+09	2.84E+08	6.19E+09	5.75E+09	7.70E+08	4.98E+09	0.00E+00	1.08E+10	-1.08E+10	
WFG2	0.00E+00	3.72E+09	-3.72E+09	7.71E+08	8.37E+08	-6.53E+07	2.17E+09	0.00E+00	<b>2.17E+09</b>	6.92E+08	9.56E+08	-2.64E+08	1.94E+09	5.66E+07	1.88E+09	
WFG3	0.00E+00	2.13E+09	-2.13E+09	1.70E+09	0.00E+00	<b>1.70E+09</b>	7.58E+08	4.29E+08	3.29E+08	2.25E+08	1.23E+09	-1.00E+09	1.22E+09	1.21E+08	1.10E+09	
WFG4	0.00E+00	3.86E+09	-3.86E+09	1.32E+09	4.11E+08	9.05E+08	8.12E+08	6.92E+08	1.20E+08	2.96E+09	0.00E+00	<b>2.96E+09</b>	7.30E+08	8.55E+08	-1.26E+08	
WFG5	0.00E+00	3.95E+09	-3.95E+09	9.70E+08	1.72E+08	7.97E+08	8.69E+08	2.73E+08	5.97E+08	9.69E+08	1.73E+08	7.97E+08	1.76E+09	0.00E+00	<b>1.76E+09</b>	
WFG6	0.00E+00	1.99E+09	-1.99E+09	7.38E+08	3.65E+08	3.73E+08	2.42E+08	1.02E+09	-7.82E+08	2.28E+09	0.00E+00	<b>2.28E+09</b>	5.67E+08	4.50E+08	1.17E+08	
WFG7	0.00E+00	4.10E+09	-4.10E+09	2.11E+09	3.58E+08	1.75E+09	2.26E+08	3.19E+09	-2.97E+09	3.52E+09	0.00E+00	<b>3.52E+09</b>	2.14E+09	3.43E+08	1.79E+09	
WFG8	0.00E+00	4.58E+09	-4.58E+09	1.32E+09	1.32E+09	-2.93E+06	5.11E+08	2.54E+09	-2.03E+09	4.17E+09	0.00E+00	<b>4.17E+09</b>	2.79E+09	3.43E+08	2.45E+09	
WFG9	0.00E+00	4.55E+09	-4.55E+09	2.86E+09	2.06E+08	2.65E+09	0.00E+00	4.46E+09	-4.46E+09	2.88E+09	1.98E+08	2.68E+09	3.68E+09	0.00E+00	<b>3.68E+09</b>	
Total	5.50E+08	3.75E+10	-3.69E+10	1.94E+10	3.67E+09	<b>1.57E+10</b>	1.21E+10	1.29E+10	-8.26E+08	2.34E+10	3.33E+09	<b>2.01E+10</b>	1.48E+10	1.29E+10	<b>1.89E+09</b>	

TABLA A.3: Pruebas estadísticas del hipervolumen considerando dos objetivos.

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	<b>3</b>	0	1	0	3	1	1	2	1	0	0	4	2	1	1
DTLZ2	<b>4</b>	0	0	0	4	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ3	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
DTLZ4	<b>4</b>	0	0	2	2	0	0	4	0	1	3	0	3	1	0
DTLZ5	<b>4</b>	0	0	0	4	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ6	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	1	1	1	3	0	2	1	1
DTLZ7	<b>4</b>	0	0	0	4	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
UF1	3	1	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
UF2	3	1	0	1	3	0	2	2	0	0	4	0	<b>4</b>	0	0
UF3	<b>4</b>	0	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1	2	2	0
UF4	2	2	0	0	4	0	1	3	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
UF5	3	0	1	1	3	0	2	2	0	0	4	0	3	0	1
UF6	<b>4</b>	0	0	1	2	1	1	2	1	0	4	0	3	1	0
UF7	<b>4</b>	0	0	0	3	1	2	2	0	0	3	1	3	1	0
WFG1	0	4	0	2	0	2	2	1	1	1	3	0	<b>3</b>	0	1
WFG2	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
WFG3	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
WFG4	1	3	0	2	2	0	0	4	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
WFG5	<b>4</b>	0	0	2	1	1	0	4	0	1	3	0	2	1	1
WFG6	<b>4</b>	0	0	0	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1	3
WFG7	0	3	1	2	2	0	0	3	1	3	1	0	<b>4</b>	0	0
WFG8	0	3	1	2	2	0	0	3	1	3	0	1	<b>3</b>	0	1
WFG9	0	4	0	2	1	1	2	2	0	1	2	1	<b>4</b>	0	0
Total	<b>63</b>	25	4	<b>19</b>	62	11	<b>28</b>	55	9	<b>29</b>	52	11	<b>69</b>	14	9

TABLA A.4: Pruebas estadísticas del hipervolumen considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	3	1	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
DTLZ2	2	2	0	3	1	0	0	3	1	0	3	1	<b>4</b>	0	0
DTLZ3	2	1	1	0	4	0	2	1	1	1	3	0	<b>4</b>	0	0
DTLZ4	2	1	1	2	2	0	1	2	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
DTLZ5	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
DTLZ6	<b>4</b>	0	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1	2	2	0
DTLZ7	3	1	0	0	3	1	0	3	1	2	2	0	<b>4</b>	0	0
UF10	0	4	0	2	2	0	3	1	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
UF8	0	4	0	2	2	0	2	1	1	1	2	1	<b>4</b>	0	0
UF9	0	4	0	1	1	2	1	1	2	1	1	2	<b>4</b>	0	0
WFG1	0	4	0	<b>3</b>	0	1	1	2	1	1	2	1	<b>3</b>	0	1
WFG2	1	1	2	1	2	1	1	2	1	0	2	2	<b>4</b>	0	0
WFG3	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0	2	2	0
WFG4	0	4	0	3	1	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
WFG5	1	2	1	3	1	0	1	2	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
WFG6	0	4	0	3	1	0	1	2	1	1	2	1	<b>4</b>	0	0
WFG7	0	4	0	3	1	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
WFG8	0	4	0	3	1	0	1	3	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0
WFG9	0	3	1	3	1	0	0	3	1	2	2	0	<b>4</b>	0	0
Total	22	48	6	36	34	6	26	38	12	19	48	9	70	5	1

TABLA A.5: Pruebas estadísticas del hipervolumen considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	<b>4</b>	0	0	1	3	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ2	2	2	0	3	1	0	0	3	1	<b>4</b>	0	0	0	3	1
DTLZ3	0	4	0	2	1	1	1	3	0	<b>3</b>	0	1	2	0	2
DTLZ4	1	3	0	2	2	0	0	4	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
DTLZ5	2	2	0	<b>4</b>	0	0	3	1	0	1	3	0	0	4	0
DTLZ6	2	2	0	<b>4</b>	0	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1
DTLZ7	0	4	0	3	1	0	1	3	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0
WFG1	1	3	0	<b>4</b>	0	0	3	1	0	2	2	0	0	4	0
WFG2	0	4	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0
WFG3	0	4	0	<b>4</b>	0	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
WFG4	0	4	0	3	1	0	1	2	1	<b>4</b>	0	0	1	2	1
WFG5	0	4	0	1	1	2	1	1	2	1	1	2	<b>4</b>	0	0
WFG6	0	4	0	2	1	1	1	3	0	<b>4</b>	0	0	2	1	1
WFG7	0	4	0	2	1	1	1	3	0	<b>4</b>	0	0	2	1	1
WFG8	0	4	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0	3	1	0
WFG9	0	3	1	2	1	1	0	3	1	2	1	1	<b>4</b>	0	0
Total	<b>12</b>	51	1	<b>41</b>	17	6	<b>19</b>	39	6	<b>41</b>	19	4	<b>35</b>	22	7

TABLA A.6: Statistics IGD+ with two objectives

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000
DTLZ2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000
DTLZ3	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ4	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.363	0.043	0.042	0.002	0.363	0.126	0.124	0.002	0.363	0.064	0.062	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	0.000	0.000	0.003	0.001	0.001	0.002	0.002	0.000	0.000	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.108	0.059	0.057	0.003	0.089	0.051	0.049	0.002	0.110	0.067	0.065	0.002	0.132	0.054	0.052
DTLZ7	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.363	0.363	0.363	0.361	0.361	0.359	0.361	0.361	0.359	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.001
UF1	0.004	0.005	0.004	0.001	0.008	0.037	0.011	0.008	0.008	0.009	0.009	0.005	0.003	0.034	0.011	0.008	0.002	0.007	<b>0.003</b>	0.000
UF2	0.007	0.009	0.008	0.003	0.004	0.042	0.008	0.003	0.011	0.014	0.013	0.008	0.003	0.041	0.019	0.014	0.004	0.007	<b>0.005</b>	0.000
UF3	0.003	0.168	<b>0.013</b>	0.000	0.017	0.046	0.030	0.017	0.015	0.034	0.024	0.011	0.007	0.196	0.037	0.024	0.028	0.058	0.040	0.027
UF4	0.035	0.038	0.037	0.010	0.037	0.041	0.040	0.013	0.043	0.047	0.046	0.019	0.032	0.041	0.036	0.009	0.023	0.035	<b>0.027</b>	0.000
UF5	0.238	0.275	0.245	0.048	0.174	0.481	0.300	0.103	0.146	0.570	0.287	0.090	0.229	0.571	0.385	0.188	0.113	0.371	<b>0.197</b>	0.000
UF6	0.029	0.417	0.125	0.004	0.169	0.570	0.292	0.171	0.167	0.577	0.341	0.220	0.173	1.076	0.529	0.408	0.044	0.171	<b>0.121</b>	0.000
UF7	0.004	0.005	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.254	0.230	0.226	0.008	0.385	0.083	0.079	0.003	0.492	0.194	0.189	0.004	0.013	0.005	0.001
WFG1	0.005	0.214	0.088	0.073	0.000	0.137	0.029	0.014	0.006	0.113	0.024	0.009	0.008	0.166	0.049	0.034	0.006	0.115	<b>0.015</b>	0.000
WFG2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.055	0.057	0.057	0.055	0.003	0.054	0.052	0.049	0.055	0.055	0.053	0.003	0.003	0.003	0.001	0.000
WFG3	0.014	0.017	0.015	0.008	0.007	0.007	0.007	0.000	0.011	0.013	0.012	0.005	0.008	0.008	0.008	0.001	0.007	0.008	<b>0.007</b>	0.000
WFG4	0.007	0.008	0.007	0.001	0.006	0.006	0.006	0.000	0.007	0.009	0.008	0.002	0.007	0.007	0.007	0.001	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.000
WFG5	0.064	0.066	<b>0.065</b>	0.000	0.062	0.068	0.065	0.000	0.065	0.066	0.066	0.001	0.058	0.069	0.067	0.002	0.065	0.069	0.066	0.001
WFG6	0.014	0.043	<b>0.025</b>	0.000	0.020	0.050	0.032	0.007	0.021	0.049	0.034	0.008	0.024	0.073	0.037	0.011	0.022	0.045	0.035	0.010
WFG7	0.008	0.009	0.008	0.002	0.006	0.006	0.006	0.000	0.007	0.009	0.008	0.003	0.007	0.007	0.007	0.001	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.000
WFG8	0.094	0.098	0.096	0.075	0.017	0.092	0.075	0.055	0.034	0.103	0.078	0.058	0.015	0.068	0.021	0.001	0.016	0.050	<b>0.020</b>	0.000
WFG9	0.122	0.125	0.123	0.112	0.009	0.023	0.013	0.002	0.011	0.027	0.016	0.005	0.010	0.125	0.017	0.006	0.008	0.013	<b>0.011</b>	0.000
Average	0.029	0.066	0.038	<b>0.015</b>	0.042	0.120	0.073	<b>0.049</b>	0.041	0.126	0.072	<b>0.048</b>	0.044	0.168	0.086	<b>0.062</b>	0.016	0.049	0.028	<b>0.004</b>

TABLA A.7: Estadísticas del IGD+ considerando tres objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.017	0.021	0.019	0.006	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000	0.018	0.023	0.020	0.007	0.014	0.014	0.014	0.001	0.013	0.015	0.014	0.001
DTLZ2	0.027	0.032	0.030	0.006	0.025	0.025	<b>0.025</b>	0.000	0.028	0.036	0.032	0.007	0.028	0.028	0.028	0.004	0.023	0.025	0.024	0.000
DTLZ3	0.028	0.035	0.031	0.006	0.025	0.025	<b>0.025</b>	0.000	0.028	0.037	0.031	0.007	0.028	0.028	0.028	0.004	0.024	0.024	0.024	0.000
DTLZ4	0.028	0.033	0.030	0.006	0.025	0.364	0.042	0.018	0.028	0.595	0.046	0.022	0.028	0.595	0.107	0.082	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.000
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.004	0.004	0.002	0.003	0.003	0.003	0.001	0.003	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.125	0.065	0.064	0.003	0.072	0.104	0.039	0.045	0.159	0.094	0.092	0.002	0.124	0.060	0.058
DTLZ7	0.031	0.043	0.035	0.007	0.688	0.689	0.689	0.661	0.683	0.684	0.683	0.655	0.685	0.685	0.657	0.027	0.029	<b>0.028</b>	0.000	
UF10	0.609	2.740	1.545	1.444	0.182	0.473	0.339	0.237	0.178	0.388	0.308	0								

TABLA A.8: Estadísticas del IGD+ considerando diez objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGA-II				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.177	0.309	0.254	0.191	0.110	0.160	0.144	0.080	0.384	1.450	0.568	0.504	0.063	0.064	<b>0.063</b>	0.000	0.066	0.090	0.077	0.013
DTLZ2	0.339	0.611	0.367	0.211	0.217	0.439	0.287	0.130	0.218	0.362	0.313	0.157	0.141	0.161	<b>0.156</b>	0.000	0.146	0.730	0.455	0.299
DTLZ3	6.611	37.706	21.319	21.162	0.209	0.447	0.238	0.081	0.272	1.362	0.403	0.246	0.142	0.160	<b>0.157</b>	0.000	0.151	0.549	0.371	0.214
DTLZ4	0.327	0.361	0.352	0.150	0.311	0.552	0.432	0.230	0.209	0.362	0.341	0.139	0.131	0.509	<b>0.202</b>	0.000	0.157	0.452	0.285	0.083
DTLZ5	0.046	0.084	0.061	0.024	0.035	0.136	0.078	0.042	0.048	0.093	0.070	0.033	0.036	0.036	<b>0.036</b>	0.000	0.071	2.311	0.694	0.657
DTLZ6	0.100	0.100	0.100	0.033	0.121	0.287	0.201	0.133	0.149	0.278	0.218	0.151	0.036	0.129	<b>0.067</b>	0.000	0.173	8.626	5.396	5.329
DTLZ7	0.646	0.777	0.719	0.345	1.868	1.875	1.872	1.498	0.505	0.577	0.547	0.173	1.926	1.926	1.552	0.308	0.408	<b>0.374</b>	0.000	
WFG1	2.834	2.950	2.895	2.474	0.571	1.374	0.801	0.380	0.344	1.229	0.534	0.113	0.299	0.789	<b>0.421</b>	0.000	2.867	3.082	2.967	2.546
WFG2	1.257	2.072	1.785	1.563	0.484	1.881	1.093	0.871	0.597	1.115	0.829	0.606	0.150	0.322	<b>0.222</b>	0.000	0.151	0.407	0.245	0.023
WFG3	1.517	2.037	1.758	1.516	0.177	0.555	<b>0.243</b>	0.000	0.809	1.627	1.249	1.006	1.779	1.921	1.837	1.595	0.523	0.722	0.594	0.352
WFG4	1.615	1.799	1.720	0.280	1.987	3.249	2.694	1.254	1.331	2.112	1.684	0.243	1.380	1.488	<b>1.441</b>	0.000	1.257	3.582	1.804	0.363
WFG5	1.815	2.084	1.937	0.409	1.944	4.195	2.145	0.617	1.345	1.884	<b>1.528</b>	0.000	1.499	1.570	1.540	0.012	1.668	3.522	2.261	0.733
WFG6	1.394	1.521	1.491	0.016	2.487	3.433	2.833	1.358	1.487	2.064	1.758	0.283	1.431	1.525	<b>1.475</b>	0.000	0.992	5.397	1.790	0.315
WFG7	1.715	1.957	1.880	0.679	2.237	5.507	2.727	1.525	1.426	2.228	1.946	0.744	1.414	1.507	1.459	0.258	0.872	2.019	<b>1.201</b>	0.000
WFG8	1.996	2.424	2.122	0.660	1.869	5.017	3.563	2.100	1.555	2.175	1.800	0.337	1.444	1.491	<b>1.463</b>	0.000	1.498	6.043	2.953	1.490
WFG9	1.926	2.200	2.062	0.666	1.402	4.272	2.677	1.280	1.880	2.430	2.122	0.725	1.203	2.092	<b>1.397</b>	0.000	1.445	3.503	1.946	0.549
Average	1.519	3.687	2.552	<b>1.899</b>	1.002	2.086	1.377	<b>0.724</b>	0.785	1.334	0.994	<b>0.341</b>	0.817	0.980	0.866	<b>0.214</b>	0.771	2.590	1.463	<b>0.810</b>

TABLA A.9: Pruebas efectivas del IGD+ considerando dos objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	<b>0.001</b>	0.000	0.002	-0.002	0.001	0.000	<b>0.001</b>	0.000	0.000	0.000
DTLZ2	0.001	0.000	<b>0.001</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	-0.002	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
DTLZ3	0.001	0.000	<b>0.001</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	-0.002	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
DTLZ4	0.228	0.000	<b>0.228</b>	0.104	0.083	0.021	0.000	0.394	-0.394	0.062	0.145	-0.083	0.228	0.000	0.227
DTLZ5	0.001	0.000	<b>0.001</b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	-0.002	0.001	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
DTLZ6	0.223	0.000	<b>0.223</b>	0.000	0.057	-0.057	0.016	0.049	-0.032	0.000	0.094	-0.094	0.013	0.052	-0.039
DTLZ7	1.080	0.000	<b>1.080</b>	0.000	0.725	-0.725	0.002	0.718	-0.716	0.002	0.718	-0.716	1.077	0.001	1.077
UF1	0.019	0.001	0.018	0.000	0.018	-0.018	0.006	0.010	-0.004	0.000	0.018	-0.018	0.022	0.000	<b>0.022</b>
UF2	0.016	0.003	0.013	0.016	0.000	0.016	0.006	0.018	-0.012	0.000	0.040	-0.040	0.024	0.000	<b>0.024</b>
UF3	0.079	0.000	<b>0.079</b>	0.011	0.023	-0.012	0.023	0.011	0.012	0.003	0.024	-0.021	0.000	0.058	-0.058
UF4	0.011	0.012	-0.001	0.006	0.020	-0.013	0.000	0.044	-0.044	0.016	0.009	0.007	0.052	0.000	<b>0.052</b>
UF5	0.237	0.048	0.189	0.085	0.158	-0.073	0.098	0.132	-0.033	0.000	0.512	-0.512	0.429	0.000	<b>0.429</b>
UF6	0.787	0.000	0.787	0.286	0.338	-0.052	0.188	0.485	-0.297	0.000	1.238	-1.238	0.800	0.000	<b>0.800</b>
UF7	0.494	0.000	<b>0.494</b>	0.000	0.597	-0.597	0.257	0.157	0.100	0.000	0.488	-0.488	0.491	0.000	0.491
WFG1	0.000	0.234	-0.234	0.079	0.000	0.079	0.089	0.009	0.080	0.039	0.078	-0.039	0.115	0.000	<b>0.115</b>
WFG2	0.158	0.000	<b>0.158</b>	0.000	0.116	-0.116	0.009	0.098	-0.089	0.002	0.109	-0.107	0.155	0.001	0.155
WFG3	0.000	0.026	-0.026	0.015	0.000	<b>0.015</b>	0.003	0.014	-0.011	0.011	0.001	0.010	0.013	0.000	0.012
WFG4	0.001	0.003	-0.002	0.004	0.000	<b>0.004</b>	0.000	0.007	-0.007	0.002	0.001	0.004	0.000	0.000	<b>0.004</b>
WFG5	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.003	0.000	0.003	0.001	0.002	0.000	0.000	0.007	-0.007	0.001	0.002	-0.001
WFG6	0.037	0.000	<b>0.037</b>	0.000	0.007	-0.007	0.000	0.008	-0.008	0.000	0.011	-0.011	0.000	0.010	-0.010
WFG7	0.000	0.007	-0.007	0.006	0.000	<b>0.006</b>	0.000	0.007	-0.007	0.004	0.001	0.002	0.006	0.000	<b>0.006</b>
WFG8	0.000	0.188	-0.188	0.020	0.110	-0.089	0.018	0.115	-0.097	0.186	0.000	0.186	0.188	0.000	<b>0.188</b>
WFG9	0.000	0.436	-0.436	0.112	0.002	0.110	0.109	0.007	0.102	0.106	0.008	0.098	0.126	0.000	<b>0.126</b>
Total	3.378	0.958	<b>2.420</b>	0.749	2.256	<b>-1.507</b>	0.824	2.290	<b>-1.466</b>	0.435	3.505	<b>-3.070</b>	3.747	0.124	<b>3.622</b>

TABLA A.10: Pruebas efectivas del IGD+ considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.001	0.015	-0.015	0.015	0.000	<b>0.015</b>	0.000	0.019	-0.019	0.010	0.002	0.008	0.011	0.001	0.010
DTLZ2	0.001	0.014	-0.013	0.016	0.000	<b>0.016</b>	0.000	0.020	-0.020	0.006	0.007	-0.001	0.017	0.000	<b>0.017</b>
DTLZ3	0.000	0.015	-0.015	0.016	0.000	<b>0.016</b>	0.000	0.018	-0.018	0.006	0.007	-0.001	0.018	0.000	<b>0.018</b>
DTLZ4	0.012	0.006	0.069	0.029	0.040	0.060	0.026	0.034	0.000	0.208	-0.208	0.128	0.000	0.128	<b>0.128</b>
DTLZ5	0.004	0.000	<b>0.004</b>	0.000	0.004	-0.004	0.001	0.002	0.000	0.003	-0.003	0.004	0.000	0.000	0.003
DTLZ6	0.253	0.000	<b>0.253</b>	0.028	0.088	-0.060	0.097	0.039	0.059	0.000	0.206	-0.206	0.033	0.078	-0.045
DTLZ7	1.954	0.007	1.947	0.000	1.326	-1.326	0.00								

TABLA A.11: Pruebas efectivas del IGD+ considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	1.63E+02	0.00E+00	<b>1.63E+02</b>	1.41E+02	1.93E+01	1.21E+02	0.00E+00	5.81E+02	-5.81E+02	1.48E+02	8.17E+00	1.40E+02	1.58E+02	1.15E+00	1.57E+02
DTLZ2	1.45E+02	1.82E+02	-3.70E+01	3.98E+02	1.35E+01	3.85E+02	0.00E+00	3.44E+02	-3.44E+02	4.52E+02	0.00E+00	<b>4.52E+02</b>	0.00E+00	4.57E+02	-4.57E+02
DTLZ3	0.00E+00	4.08E+06	-4.08E+06	1.11E+06	3.41E+03	1.11E+06	9.64E+02	2.28E+05	7.36E+05	1.12E+06	0.00E+00	<b>1.12E+06</b>	1.11E+00	0.00E+00	1.11E+06
DTLZ4	1.38E+02	1.06E+02	3.22E+01	1.70E+02	5.80E+01	1.12E+02	0.00E+00	6.58E+02	-6.58E+02	2.38E+02	1.25E+01	2.26E+02	2.88E+02	0.00E+00	<b>2.88E+02</b>
DTLZ5	3.15E+05	1.80E+04	2.97E+05	3.73E+05	0.00E+00	<b>3.73E+05</b>	3.23E+05	1.25E+04	3.11E+05	2.94E+05	5.02E+04	2.43E+05	0.00E+00	1.22E+06	-1.22E+06
DTLZ6	5.54E+04	2.10E+04	3.45E+04	1.17E+05	0.00E+00	<b>1.17E+05</b>	0.00E+00	1.03E+05	-1.03E+05	6.85E+04	1.22E+04	5.63E+04	0.00E+00	1.06E+05	-1.06E+05
DTLZ7	0.00E+00	2.54E+02	-2.54E+02	8.53E+01	5.35E+01	3.18E+01	4.10E+01	9.00E+01	-4.91E+01	4.94E+01	7.74E+01	-2.80E+01	2.99E+02	0.00E+00	<b>2.99E+02</b>
WFG1	5.50E+08	8.57E+09	-8.02E+09	7.61E+09	0.00E+00	<b>7.61E+09</b>	6.48E+09	2.84E+08	6.19E+09	5.75E+09	7.70E+08	4.98E+09	0.00E+00	1.08E+10	-1.08E+10
WFG2	0.00E+00	3.72E+09	-3.72E+09	7.71E+08	8.37E+08	-6.53E+07	2.17E+09	0.00E+00	<b>2.17E+09</b>	6.92E+08	9.56E+08	-2.64E+08	1.94E+09	5.66E+07	1.88E+09
WFG3	0.00E+00	2.13E+09	-2.13E+09	1.70E+09	0.00E+00	<b>1.70E+09</b>	7.58E+08	4.29E+08	3.29E+08	2.25E+08	1.23E+09	-1.00E+09	1.22E+09	1.21E+08	1.10E+09
WFG4	0.00E+00	3.86E+09	-3.86E+09	1.32E+09	4.11E+08	9.05E+08	8.12E+08	6.92E+08	1.20E+08	2.96E+09	0.00E+00	<b>2.96E+09</b>	7.30E+08	8.55E+08	-1.26E+08
WFG5	0.00E+00	3.95E+09	-3.95E+09	9.70E+08	1.72E+08	7.97E+08	8.69E+08	2.73E+08	5.97E+08	9.69E+08	1.73E+08	7.97E+08	1.76E+09	0.00E+00	<b>1.76E+09</b>
WFG6	0.00E+00	1.99E+09	-1.99E+09	7.38E+08	3.65E+08	3.73E+08	2.42E+08	1.02E+09	-7.82E+08	2.28E+09	0.00E+00	<b>2.28E+09</b>	5.67E+08	4.50E+08	1.17E+08
WFG7	0.00E+00	4.10E+09	-4.10E+09	2.11E+09	3.58E+08	1.75E+09	2.26E+08	3.19E+09	-2.97E+09	3.52E+09	0.00E+00	<b>3.52E+09</b>	2.14E+09	3.43E+08	1.79E+09
WFG8	0.00E+00	4.58E+09	-4.58E+09	1.32E+09	1.32E+09	-2.93E+09	5.11E+08	2.54E+09	-2.03E+09	4.17E+09	0.00E+00	<b>4.17E+09</b>	2.79E+09	3.43E+08	2.45E+09
WFG9	0.00E+00	4.55E+09	-4.55E+09	2.86E+09	2.06E+08	2.65E+09	0.00E+00	4.46E+09	-4.46E+09	2.88E+09	1.98E+08	2.68E+09	3.68E+09	0.00E+00	<b>3.68E+09</b>
Total	5.50E+08	3.75E+10	<b>-3.69E+10</b>	1.94E+10	3.67E+09	<b>1.57E+10</b>	1.21E+10	1.29E+10	<b>-8.26E+08</b>	2.34E+10	3.33E+09	<b>2.01E+10</b>	1.48E+10	1.29E+10	<b>1.89E+09</b>

TABLA A.12: Pruebas estadísticas del IGD+ considerando dos objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	2	1	1	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	1	1	1	3	0
DTLZ2	<b>4</b>	0	0	1	3	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ3	<b>4</b>	0	0	1	3	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ4	<b>4</b>	0	0	2	2	0	0	4	0	1	3	0	3	1	0
DTLZ5	<b>4</b>	0	0	1	3	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ6	<b>4</b>	0	0	0	1	3	1	1	2	0	3	1	1	2	
DTLZ7	<b>4</b>	0	0	0	4	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
UF1	3	1	0	1	3	0	2	2	0	0	4	0	<b>4</b>	0	0
UF2	3	1	0	2	1	1	1	3	0	0	4	0	<b>3</b>	0	1
UF3	<b>4</b>	0	0	1	2	1	2	1	1	1	1	2	0	<b>4</b>	0
UF4	2	2	0	1	3	0	0	4	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
UF5	3	1	0	1	2	1	1	2	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
UF6	<b>3</b>	0	1	2	2	0	1	3	0	0	4	0	<b>3</b>	0	1
UF7	<b>3</b>	0	1	0	3	1	2	2	0	0	3	1	<b>3</b>	0	1
WFG1	0	4	0	2	0	2	2	1	1	1	3	0	<b>3</b>	0	1
WFG2	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
WFG3	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
WFG4	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
WFG5	<b>4</b>	0	0	3	1	0	1	2	1	0	4	0	1	2	1
WFG6	<b>4</b>	0	0	0	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1	3
WFG7	0	3	1	3	1	0	0	3	1	2	2	0	<b>4</b>	0	0
WFG8	0	4	0	1	2	1	1	2	1	3	0	1	<b>3</b>	0	1
WFG9	0	4	0	2	1	1	2	2	0	1	2	1	<b>4</b>	0	0
Total	<b>60</b>	28	4	<b>36</b>	42	14	<b>20</b>	61	11	<b>27</b>	55	10	<b>62</b>	19	11

TABLA A.13: Pruebas estadísticas del IGD+ considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	1	3	0	4	0	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ2	1	3	0	3	1	0	0	4	0	2	2	0	4	0	0
DTLZ3	0	3	1	3	1	0	0	3	1	2	2	0	4	0	0
DTLZ4	1	1	2	2	2	0	1	2	1	0	3	1	4	0	0
DTLZ5	4	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
DTLZ6	4	0	0	1	2	1	3	1	0	0	4	0	1	2	1
DTLZ7	3	1	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	4	0	0
UF10	0	4	0	1	1	2	2	1	1	1	2	1	4	0	0
UF8	0	4	0	1	2	1	3	1	0	1	2	1	4	0	0
UF9	0	4	0	2	1	1	1	1	2	1	2	1	4	0	0
WFG1	0	4	0	3	0	1	1	3	0	2	2	0	3	0	1
WFG2	1	3	0	3	1	0	0	4	0	2	2	0	4	0	0
WFG3	0	4	0	3	1	0	1	3	0	4	0	0	2	2	0
WFG4	0	4	0	4	0	0	1	2	1	1	2	1	3	1	0
WFG5	2	2	0	4	0	0	1	3	0	0	4	0	3	1	0
WFG6	0	4	0	4	0	0	1	2	1	1	2	1	3	1	0
WFG7	0	4	0	4	0	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
WFG8	0	4	0	3	0	1	1	3	0	2	2	0	3	0	1
WFG9	0	3	1	3	0	1	0	3	1	2	2	0	3	0	1
Total	17	55	4	48	20	8	22	46	8	26	44	6	62	10	4

TABLA A.14: Pruebas estadísticas del IGD+ considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	1	3	0	2	2	0	0	4	0	4	0	0	3	1	0
DTLZ2	1	3	0	2	1	1	2	1	1	4	0	0	0	4	0
DTLZ3	0	4	0	3	1	0	1	2	1	4	0	0	1	2	1
DTLZ4	1	3	0	0	4	0	2	2	0	4	0	0	3	1	0
DTLZ5	3	1	0	1	2	1	1	2	1	4	0	0	0	4	0
DTLZ6	3	1	0	1	2	1	1	2	1	4	0	0	0	4	0
DTLZ7	2	2	0	1	3	0	3	1	0	0	4	0	4	0	0
WFG1	1	3	0	2	2	0	3	1	0	4	0	0	0	4	0
WFG2	0	4	0	1	2	1	1	2	1	3	0	1	3	0	1
WFG3	1	3	0	4	0	0	2	2	0	0	4	0	3	1	0
WFG4	2	1	1	0	4	0	1	1	2	4	0	0	1	2	1
WFG5	2	2	0	0	3	1	3	0	1	3	0	1	0	3	1
WFG6	2	1	1	0	4	0	2	2	0	3	0	1	1	1	2
WFG7	2	2	0	0	4	0	1	3	0	3	1	0	4	0	0
WFG8	2	2	0	0	4	0	3	1	0	4	0	0	1	3	0
WFG9	1	2	1	0	2	2	0	3	1	4	0	0	3	1	0
Total	24	37	3	17	40	7	26	29	9	52	9	3	27	31	6

TABLA A.15: Estadísticas de Hausdorff considerando dos objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	
DTLZ1	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.003	0.002	0.001	0.002	0.943	0.153	0.152	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000		
DTLZ2	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.005	0.006	0.005	0.001	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.008	0.008	0.008	0.004	
DTLZ3	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.005	0.006	0.005	0.001	0.004	0.004	0.971	0.114	0.110	0.008	0.008	0.008	0.004
DTLZ4	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.746	0.089	0.085	0.005	0.746	0.259	0.255	0.004	0.746	0.135	0.130	0.008	0.008	0.008	0.004	
DTLZ5	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.005	0.006	0.005	0.001	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.008	0.008	0.008	0.004	
DTLZ6	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.004	0.108	0.059	0.055	0.006	0.089	0.051	0.047	0.004	0.110	0.070	0.066	0.008	0.132	0.055	0.051	
DTLZ7	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.449	0.449	0.449	0.445	0.443	0.443	0.443	0.438	0.443	0.443	0.439	0.006	0.006	0.006	0.006	0.002	
UF1	0.004	0.053	0.010	0.005	0.017	0.075	0.022	0.017	0.009	0.010	0.009	0.004	0.005	0.005	0.013	0.011	<b>0.005</b>	0.000	0.000	0.000	
UF2	0.008	0.018	0.009	0.001	0.006	0.084	0.014	0.006	0.012	0.015	0.014	0.006	0.007	0.056	0.027	0.019	0.005	0.011	<b>0.008</b>	0.000	
UF3	0.004	0.178	<b>0.014</b>	0.000	0.022	0.059	0.036	0.022	0.017	0.034	0.025	0.011	0.008	0.305	0.046	0.032	0.034	0.060	0.044	0.030	
UF4	0.037	0.039	0.038	0.009	0.038	0.041	0.040	0.011	0.046	0.049	0.048	0.019	0.033	0.045	0.036	0.007	0.025	0.036	<b>0.029</b>	0.000	
UF5	0.325	0.346	0.338	0.097	0.237	0.535	0.338	0.097	0.197	0.760	0.329	0.088	0.235	0.721	0.446	0.206	0.142	0.446	<b>0.241</b>	0.000	
UF6	0.051	0.590	0.165	0.006	0.235	0.807	0.385	0.226	0.228	0.807	0.442	0.283	0.175	1.076	0.668	0.509	0.057	0.237	<b>0.159</b>	0.000	
UF7	0.004	0.016	<b>0.006</b>	0.000	0.005	0.359	0.325	0.319	0.008	0.543	0.114	0.108	0.004	0.677	0.253	0.247	0.005	0.019	0.007	0.001	
WFG1	0.012	0.214	0.089	0.061	0.044	0.182	0.102	0.073	0.014	0.114	0.030	0.002	0.023	0.171	0.060	0.031	0.018	0.118	<b>0.028</b>	0.000	
WFG2	0.010	0.011	<b>0.011</b>	0.000	0.098	0.103	0.102	0.091	0.014	0.089	0.086	0.075	0.104	0.104	0.104	0.094	0.015	0.016	0.016	0.005	
WFG3	0.015	0.018	0.017	0.005	0.011	0.012	<b>0.011</b>	0.000	0.015	0.017	0.016	0.005	0.013	0.013	0.013	0.002	0.012	0.012	0.012	0.001	
WFG4	0.013	0.014	0.013	0.001	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000	0.015	0.018	0.016	0.004	0.014	0.014	0.014	0.001	0.026	0.026	0.026	0.013	
WFG5	0.065	0.066	<b>0.065</b>	0.000	0.062	0.068	<b>0.065</b>	0.000	0.066	0.067	0.067	0.002	0.059	0.069	0.067	0.002	0.074	0.077	0.075	0.009	
WFG6	0.018	0.044	<b>0.028</b>	0.000	0.021	0.050	0.033	0.006	0.024	0.050	0.036	0.008	0.025	0.073	0.037	0.010	0.036	0.053	0.045	0.017	
WFG7	0.014	0.015	0.014	0.001	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000	0.016	0.017	0.016	0.004	0.014	0.014	0.014	0.001	0.026	0.026	0.026	0.013	
WFG8	0.094	0.098	0.096	0.067	0.024	0.128	0.083	0.055	0.039	0.151	0.110	0.082	0.021	0.121	<b>0.028</b>	0.000	0.032	0.139	0.038	0.010	
WFG9	0.122	0.125	0.123	0.106	0.014	0.024	<b>0.017</b>	0.000	0.018	0.030	0.021	0.003	0.015	0.125	0.021	0.003	0.017	0.025	0		

TABLA A.16: Estadísticas de Hausdorff considerando tres objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.024	0.026	0.025	0.006	0.019	0.019	<b>0.019</b>	0.000	0.026	0.035	0.029	0.010	0.021	0.035	0.021	0.002	0.019	0.021	0.020	0.001
DTLZ2	0.058	0.065	0.061	0.011	0.050	0.050	<b>0.050</b>	0.000	0.061	0.075	0.068	0.018	0.054	0.054	0.054	0.004	0.066	0.070	0.069	0.018
DTLZ3	0.057	0.067	0.062	0.011	0.050	0.050	<b>0.050</b>	0.000	0.064	0.084	0.070	0.020	0.054	0.054	0.054	0.004	0.069	0.070	0.069	0.019
DTLZ4	0.059	0.066	<b>0.062</b>	0.000	0.050	0.746	0.093	0.030	0.062	1.042	0.093	0.031	0.054	1.042	0.242	0.179	0.069	0.070	0.069	0.007
DTLZ5	0.004	0.005	<b>0.004</b>	0.000	0.007	0.007	0.007	0.003	0.005	0.006	0.006	0.001	0.007	0.007	0.002	0.008	0.008	0.008	0.004	
DTLZ6	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.000	0.007	0.125	0.066	0.061	0.006	0.075	0.044	0.040	0.046	0.165	0.095	0.090	0.008	0.130	0.064	0.060
DTLZ7	0.067	0.084	0.075	0.012	0.830	0.835	0.833	0.769	0.821	0.823	0.822	0.759	0.829	0.829	0.766	0.055	0.069	<b>0.063</b>	0.000	
UF10	2.507	12.120	7.900	7.666	0.248	0.734	0.441	0.208	0.415	11.057	1.960	1.726	0.388	0.727	0.575	0.341	0.166	0.490	<b>0.234</b>	0.000
UF8	1.758	9.980	5.503	5.382	0.122	0.745	0.313	0.191	0.127	0.153	0.139	0.017	0.077	0.745	0.273	0.151	0.082	0.271	<b>0.121</b>	0.000
UF9	3.378	8.522	5.627	5.592	0.036	0.224	0.173	0.138	0.084	1.441	0.369	0.334	0.044	0.183	0.137	0.102	0.030	0.040	<b>0.035</b>	0.000
WFG1	1.171	1.278	1.237	1.010	0.264	0.341	0.298	0.071	0.228	0.300	0.255	0.028	0.361	0.437	0.419	0.192	0.169	0.463	0.227	0.000
WFG2	0.156	0.245	0.188	0.026	0.423	0.453	0.434	0.272	0.184	0.299	0.222	0.060	0.234	0.510	0.472	0.309	0.139	0.217	<b>0.162</b>	0.000
WFG3	0.501	0.579	0.535	0.200	0.294	0.355	<b>0.334</b>	0.000	0.420	0.573	0.508	0.173	0.498	0.499	0.498	0.164	0.761	0.836	0.806	0.472
WFG4	0.293	0.342	0.310	0.122	0.188	0.188	<b>0.188</b>	0.000	0.224	0.265	0.246	0.058	0.242	0.245	0.244	0.056	0.236	0.257	0.246	0.058
WFG5	0.229	0.259	0.240	0.035	0.205	0.208	<b>0.206</b>	0.000	0.241	0.274	0.254	0.048	0.257	0.261	0.258	0.053	0.243	0.266	0.254	0.049
WFG6	0.278	0.361	0.316	0.123	0.190	0.199	<b>0.192</b>	0.000	0.242	0.309	0.264	0.071	0.246	0.258	0.250	0.057	0.236	0.264	0.247	0.055
WFG7	0.261	0.326	0.298	0.110	0.188	0.188	<b>0.188</b>	0.000	0.235	0.266	0.248	0.060	0.245	0.245	0.245	0.057	0.234	0.267	0.248	0.060
WFG8	0.388	0.438	0.413	0.195	0.205	0.250	<b>0.219</b>	0.000	0.342	0.432	0.391	0.172	0.258	0.279	0.266	0.047	0.254	0.314	0.266	0.047
WFG9	0.274	0.297	0.287	0.097	0.187	0.247	<b>0.190</b>	0.000	0.240	0.309	0.293	0.103	0.239	0.291	0.245	0.055	0.223	0.291	0.235	0.045
Average	0.603	1.845	1.218	<b>1.084</b>	0.188	0.314	0.226	<b>0.092</b>	0.212	0.938	0.331	<b>0.196</b>	0.219	0.361	0.273	<b>0.139</b>	0.161	0.232	0.181	<b>0.047</b>

TABLA A.17: Estadísticas de Hausdorff considerando diez objetivos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.38	0.43	0.41	0.20	0.17	0.23	<b>0.21</b>	0.00	281.77	331.83	317.29	317.08	0.10	2.94	1.08	0.87	0.11	3.78	0.65	0.44
DTLZ2	1.73	2.02	1.89	1.53	0.33	0.55	0.40	0.04	1.66	1.93	1.83	1.47	0.35	0.37	<b>0.36</b>	0.00	0.38	0.96	0.60	0.24
DTLZ3	872.35	1061.18	990.27	989.92	0.32	0.83	<b>0.35</b>	0.00	1188.28	1569.95	1427.38	1427.03	0.36	9.68	5.20	4.85	0.39	10.93	5.34	4.98
DTLZ4	1.35	1.60	1.48	1.05	0.46	0.96	0.62	0.19	1.81	2.05	1.93	1.51	0.29	0.93	0.45	0.02	0.36	0.55	<b>0.43</b>	0.00
DTLZ5	2.37	2.50	2.45	2.06	0.85	1.26	0.98	0.59	2.19	2.41	2.32	1.94	0.36	0.43	<b>0.39</b>	0.00	0.44	2.41	1.14	0.75
DTLZ6	9.28	9.59	9.47	8.89	2.08	3.21	2.59	2.01	8.82	9.47	9.23	8.65	0.52	0.65	<b>0.58</b>	0.00	6.05	8.79	7.58	6.99
DTLZ7	0.90	1.00	0.93	0.07	2.29	2.30	2.30	1.44	0.84	0.90	<b>0.86</b>	0.00	2.34	2.34	2.34	1.48	1.09	1.17	1.13	0.26
WFG1	3.71	3.85	3.77	1.72	10.61	11.63	11.28	9.23	1.72	3.18	<b>2.05</b>	0.00	3.52	5.72	3.95	1.90	8.77	11.05	10.73	8.68
WFG2	2.75	3.48	2.97	0.32	8.63	13.48	11.34	8.69	2.36	2.99	<b>2.65</b>	0.00	3.03	7.07	4.91	2.26	1.62	9.75	3.72	1.07
WFG3	7.50	7.88	7.70	6.91	0.40	2.84	<b>0.79</b>	0.00	7.42	8.09	7.80	7.01	5.39	5.71	5.46	4.67	2.63	3.52	3.06	2.27
WFG4	3.52	4.99	4.07	0.21	3.88	17.22	4.59	0.73	3.53	4.78	3.99	0.13	5.37	6.51	5.96	2.10	3.05	5.51	<b>3.86</b>	0.00
WFG5	3.46	4.14	<b>3.71</b>	0.00	3.62	15.19	7.94	4.23	3.63	4.74	4.20	0.49	5.48	6.49	6.31	2.60	3.50	7.24	4.22	0.52
WFG6	3.92	5.18	4.45	0.34	3.97	4.82	4.34	0.23	3.91	4.93	4.29	0.18	5.80	6.46	6.28	2.17	3.29	7.31	<b>4.11</b>	0.00
WFG7	3.81	5.03	4.44	0.97	3.92	15.55	4.53	1.06	3.90	5.30	4.36	0.90	5.54	6.42	6.31	2.84	2.93	4.94	<b>3.47</b>	0.00
WFG8	4.16	5.23	4.56	0.50	12.43	18.75	16.91	12.85	3.76	4.45	<b>4.06</b>	0.00	6.23	6.42	6.31	2.25	3.46	7.88	4.40	0.34
WFG9	3.55	3.93	<b>3.72</b>	0.00	3.07	8.12	5.35	1.63	3.65	4.89	4.14	0.42	4.36	6.24	5.33	1.62	3.40	4.85	3.87	0.16
Average	57.80	70.13	65.39	<b>63.42</b>	3.56	7.31	4.66	<b>2.68</b>	94.95	122.62	112.40	<b>110.43</b>	3.06	4.65	3.83	<b>1.85</b>	2.59	5.67	3.64	<b>1.67</b>

TABLA A.18: Pruebas efectivas de Hausdorff considerando dos objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.001	0.000	0.001	0.153	0.000	<b>0.153</b>	0.000	0.002	-0.002	0.000	0.152	-0.152	0.000	0.000	0.000
DTLZ2	0.005	0.000	0.004	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.003	0.003	0.000	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.000	0.014	-0.014
DTLZ3	0.114	0.000	0.114	0.115	0.000	<b>0.115</b>	0.111	0.003	0.108	0.000	0.433	-0.433	0.106	0.010	0.096
DTLZ4	0.474	0.000	<b>0.474</b>	0.216	0.166	0.050	0.000	0.676	-0.676	0.000	0.176	-0.176	0.332	0.004	0.329
DTLZ5	0.005	0.000	0.004	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.003	0.003	0.000	0.005	0.000	<b>0.005</b>	0.000	0.014	-0.014
DTLZ6	0.218	0.000	<b>0.218</b>	0.000	0.055	-0.055	0.019	0.047	-0.028	0.000	0.099	-0.099	0.014	0.051	-0.037
DTLZ7	1.324	0.000	<b>1.324</b>	0.000	0.901	-0.901	0.007	0.875	-0.869	0.007	0.875	-0.869	1.317	0.002	1.316
UF1	0.021	0.005	0.016	0.000	0.047	-0.047	0.022	0.004	0.018	0.004	0.030	-0.025	0.039	0.000	<b>0.039</b>
UF2	0.023	0.001	0.023	0.013	0.001	0.013	0.014	0.010	0.004	0.000	0.065	-0.065	0.026	0.000	<b>0.026</b>
UF3	0.096	0.000	<b>0.096</b>	0.008	0.033	-0.025	0.052	0.011	0.041	0.000	0.056	-0.056	0.002	0.058	-0.055
UF4	0.011	0.011	0.000	0.008	0.017	-0.009	0.000	0.047	-0.047	0.017	0.007	0.010	0.047	0.000	<b>0.047</b>
UF5	0.109	0.107	0.002	0.109	0.097	0.012	0.127	0.088	0.039	0.000	0.541	-0.541	0.487	0.000	<b>0.487</b>
UF6	1.001	0.000	1.001	0.283	0.446	-0.162	0.226	0.561	-0.335	0.000	1.521	-1.521	1.018	0.000	<b>1.018</b>
UF7	0.675	0.000	<b>0.675</b>	0.000	0.847	-0.847	0.349	0.215	0.134	0.000	0.630	-0.630	0.670	0.001	0.669
WFG1	0.000	0.149	-0.149	0.000	0.188	-0.188	0.160	0.002	0.159	0.072	0.061	0.011	0.167	0.000	<b>0.167</b>
WFG2	0.265	0.000	<b>0.265</b>	0.002	0.193	-0.191	0.035	0.145	-0.110	0.000	0.203	-0.203	0.244	0.005	0.239
WFG3	0.000	0.013	-0.013	0.012	0.000	<b>0.012</b>	0.000	0.011	-0.011	0.006	0.002	0.004	0.008	0.001	0.008
WFG4	0.016	0.001	0.015	0.018	0.000	<b>0.018</b>	0.010	0.009	0.000	0.015	0.001	0.014	0.000	0.047	-0.047
WFG5	0.013	0.000	<b>0.013</b>	0.012	0.000	0.012	0.008	0.003	0.005	0.007	0.004	0.003	0.000	0.034	-0.034
WFG6	0.042	0.000	<b>0.042</b>	0.012	0.006	0.006	0.009	0.008	0.000	0.008	0.010	-0.002	0.000	0.045	-0.045
WFG7	0.014	0.002	0.013	0.019	0.000	<b>0.019</b>	0.009	0.009	0.001	0.015	0.001	0.014	0.000	0.047	-0.047
WFG8	0.014	0.138	-0.123	0.040	0.099	-0.060	0.000	0.195	-0.195	0.214	0.000	<b>0.214</b>	0.174	0.010	0.164
WFG9	0.000	0.413	-0.413	0.115	0.000	<b>0.115</b>	0.104	0.003	0.101	0.104	0.000	0.104	0.101	0.008	0.093
Total	4.439	0.839	<b>3.599</b>	1.144	3.095	<b>-1.950</b>	1.267	2.931	<b>-1.664</b>	0.479	4.867	<b>-4.389</b>	4.754	0.350	<b>4.403</b>

TABLA A.19: Pruebas efectivas de Hausdorff considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.004	0.015	-0.011	0.019	0.000	<b>0.019</b>	0.000	0.030	-0.030	0.011	0.004	0.007	0.015	0.001	0.014
DTLZ2	0.014	0.018	-0.004	0.051	0.000	<b>0.051</b>	0.000	0.038	-0.038	0.035	0.004	0.031	0.000	0.040	-0.040
DTLZ3	0.016	0.019	-0.003	0.054	0.000	<b>0.054</b>	0.000	0.043	-0.043	0.038	0.004	0.034	0.000	0.041	-0.041
DTLZ4	0.069	0.000	0.069	0.150	0.053	<b>0.096</b>	0.148	0.056	0.093	0.000	0.297	-0.297	0.047	0.007	0.040
DTLZ5	0.010	0.000	<b>0.010</b>	0.001	0.004	-0.003	0.005	0.001	0.004	0.002	0.003	-0.002	0.000	0.009	-0.009
DTLZ6	0.251	0.000	<b>0.251</b>	0.029	0.083	-0.054	0.092	0.040	0.052	0.000	0.200	-0.200	0.030	0.080	-0.049
DTLZ7	2.259	0.012	2.247	0.000	1.542	-1.542	0.018	1.505	-1.487	0.004	1.527	-1.523	2.305	0.000	<b>2.305</b>
UF10	0.000	28.389	-28.389	9.111	0.208	8.903	5.940	4.630	1.309	8.710	0.475	8.235	9.942	0.000	<b>9.942</b>
UF8	0.000	21.168	-21.168	5.191	0.405	4.786	5.672	0.017	5.655	5.271	0.285	4.985	5.742	0.000	<b>5.742</b>
UF9	0.000	21.793	-21.793	5.454	0.174	5.280	5.257	0.334	4.923	5.526	0.102	5.424	6.166	0.000	<b>6.166</b>
WFG1	0.000	3.751	-3.751	1.060	0.114	0.946	1.190	0.028	1.162	0.819	0.476	0.342	1.301	0.000	<b>1.301</b>
WFG2	0.564	0.026	0.538	0.038	0.729	-0.692	0.462	0.094	0.368	0.000	0.881	-0.881	0.666	0.000	<b>0.666</b>
WFG3	0.271	0.264	0.007	1.010	0.000	<b>1.010</b>	0.325	0.173	<b>0.152</b>	0.345	0.164	0.181	0.000	1.350	-1.350
WFG4	0.000	0.316	-0.316	0.295	0.000	<b>0.295</b>	0.064	0.058	0.006	0.068	0.056	0.012	0.064	0.060	0.004
WFG5	0.046	0.035	0.011	0.184	0.000	<b>0.184</b>	0.005	0.062	-0.057	0.000	0.079	-0.079	0.004	0.063	-0.059
WFG6	0.000	0.311	-0.311	0.307	0.000	<b>0.307</b>	0.052	0.102	-0.049	0.080	0.060	0.020	0.087	0.055	0.033
WFG7	0.000	0.265	-0.265	0.287	0.000	<b>0.287</b>	0.051	0.060	-0.009	0.053	0.057	-0.003	0.050	0.060	-0.010
WFG8	0.000	0.512	-0.512	0.461	0.000	<b>0.461</b>	0.023	0.422	-0.399	0.273	0.047	0.226	0.272	0.047	0.225
WFG9	0.006	0.192	-0.186	0.301	0.000	<b>0.301</b>	0.000	0.215	-0.215	0.091	0.065	0.026	0.120	0.045	0.074
Total	3.508	77.083	<b>-73.575</b>	24.001	3.312	<b>20.689</b>	19.303	7.908	<b>11.395</b>	21.324	4.787	<b>16.537</b>	26.812	1.858	<b>24.954</b>

TABLA A.20: Pruebas efectivas de Hausdorff considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	317.55	0.20	317.35	318.14	0.00	<b>318.14</b>	0.00	1266.81	-1266.81	316.21	1.96	314.25	317.06	0.00	317.06
DTLZ2	0.00	4.36	-4.36	3.12	0.00	3.12	0.05	4.14	-4.09	3.24	0.00	3.24	2.52	0.44	2.09
DTLZ3	437.11	2959.92	-2522.81	2426.78	0.00	<b>2426.78</b>	0.00	4708.37	-4708.37	2407.24	4.85	2402.39	2406.98	4.98	2402.00
DTLZ4	0.46	2.94	-2.48	2.18	0.36	1.81	0.00	4.77	-4.77	2.69	0.02	2.67	2.77	0.00	<b>2.77</b>
DTLZ5	0.00	4.95	-4.95	2.81	0.59	2.22	0.12	4.47	-4.35	5.33	0.00	5.33	2.49	0.75	1.74
DTLZ6	0.00	17.90	-17.90	18.51	2.01	16.51	0.24	16.95	-16.71	26.54	0.00	<b>26.54</b>	3.55	11.98	-8.44
DTLZ7	2.97	0.07	2.90	0.04	3.97	-3.93	3.25	0.00	3.25	0.00	4.13	-4.13	2.38	0.46	1.92
WFG1	14.47	1.72	12.74	0.00	24.63	-24.63	21.54	0.00	<b>21.54</b>	14.12	1.90	12.22	0.55	22.42	-21.86
WFG2	10.31	0.32	9.99	0.00	31.12	-31.12	12.35	0.00	<b>12.35</b>	6.43	5.39	1.04	8.81	1.07	7.74
WFG3	0.10	13.79	-13.69	20.88	0.00	<b>20.88</b>	0.00	14							

TABLA A.21: Pruebas estadísticas de Hausdorff considerando dos objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	2	1	1	<b>4</b>	0	0	0	3	1	0	1	3	1	2	1
DTLZ2	2	2	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0	0	4	0
DTLZ3	3	1	0	<b>4</b>	0	0	2	2	0	0	4	0	1	3	0
DTLZ4	<b>4</b>	0	0	2	2	0	0	3	1	0	2	2	2	1	1
DTLZ5	2	2	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0	0	4	0
DTLZ6	<b>4</b>	0	0	0	1	3	1	1	2	0	3	1	1	1	2
DTLZ7	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	3	1	0
UF1	2	2	0	0	4	0	3	1	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
UF2	2	1	1	1	1	2	2	2	0	0	4	0	<b>3</b>	0	1
UF3	<b>4</b>	0	0	1	2	1	3	1	0	0	3	1	1	3	0
UF4	2	2	0	1	3	0	0	4	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
UF5	1	3	0	2	1	1	2	1	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
UF6	<b>3</b>	0	1	1	2	1	1	2	1	0	4	0	<b>3</b>	0	1
UF7	<b>4</b>	0	0	0	3	1	2	2	0	0	3	1	3	1	0
WFG1	0	3	1	0	3	1	3	1	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0
WFG2	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	2	0	0	4	0	3	1	0
WFG3	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
WFG4	3	1	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	2	0	0	4	0
WFG5	<b>3</b>	0	1	3	0	1	2	2	0	1	3	0	0	4	0
WFG6	<b>4</b>	0	0	1	1	2	1	1	2	1	1	2	0	4	0
WFG7	2	2	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0	0	4	0
WFG8	1	3	0	2	2	0	0	4	0	4	0	0	3	1	0
WFG9	0	4	0	<b>3</b>	0	1	2	2	0	3	0	1	1	3	0
Total	<b>56</b>	31	5	<b>46</b>	32	14	<b>33</b>	51	8	<b>29</b>	52	11	<b>44</b>	42	6

TABLA A.22: Pruebas estadísticas de Hausdorff considerando tres objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
DTLZ2	2	2	0	<b>4</b>	0	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1
DTLZ3	2	2	0	<b>4</b>	0	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1
DTLZ4	<b>3</b>	0	1	2	2	0	1	3	0	0	2	2	2	1	1
DTLZ5	<b>4</b>	0	0	1	3	0	3	1	0	2	2	0	0	4	0
DTLZ6	<b>4</b>	0	0	1	2	1	3	1	0	0	4	0	1	2	1
DTLZ7	3	1	0	0	4	0	2	2	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
UF10	0	4	0	3	1	0	1	3	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0
UF8	0	4	0	1	3	0	3	1	0	2	2	0	<b>4</b>	0	0
UF9	0	4	0	1	2	1	1	1	2	2	1	1	<b>4</b>	0	0
WFG1	0	4	0	2	2	0	3	1	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0
WFG2	3	1	0	1	3	0	2	2	0	0	4	0	<b>4</b>	0	0
WFG3	1	3	0	<b>4</b>	0	0	2	1	1	2	1	1	0	4	0
WFG4	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	1	2	2	1	1	1	2	1
WFG5	3	1	0	<b>4</b>	0	0	0	1	2	1	0	4	0	1	2
WFG6	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	2	0	3	1	0
WFG7	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	1	2	1	1	2	1	1	2
WFG8	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	1	1	2	1	1
WFG9	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
Total	27	48	1	52	22	2	26	40	10	29	39	8	41	26	9

TABLA A.23: Pruebas estadísticas de Hausdorff considerando diez objetivos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA		
	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔	↑	↓	↔
DTLZ1	2	1	1	<b>3</b>	0	1	0	4	0	1	3	0	2	0	2
DTLZ2	0	4	0	<b>3</b>	0	1	1	3	0	<b>3</b>	0	1	2	2	0
DTLZ3	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	1	1	2	1	1
DTLZ4	1	3	0	2	2	0	0	4	0	3	1	0	<b>4</b>	0	0
DTLZ5	0	4	0	2	1	1	1	3	0	<b>4</b>	0	0	2	1	1
DTLZ6	0	4	0	3	1	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0	2	2	0
DTLZ7	3	1	0	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0
WFG1	2	1	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0	2	1	1	1	3	0
WFG2	2	1	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0	1	3	0	2	1	1
WFG3	1	3	0	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	2	0	3	1	0
WFG4	2	1	1	1	3	0	2	1	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
WFG5	<b>4</b>	0	0	0	4	0	2	1	1	1	3	0	2	1	1
WFG6	1	3	0	2	1	1	2	1	1	0	4	0	<b>4</b>	0	0
WFG7	2	1	1	1	2	1	1	1	2	0	4	0	<b>4</b>	0	0
WFG8	2	2	0	0	4	0	<b>3</b>	0	1	1	3	0	<b>3</b>	0	1
WFG9	<b>3</b>	0	1	0	3	1	2	2	0	0	3	1	<b>3</b>	0	1
Total	<b>26</b>	32	6	<b>26</b>	32	6	<b>27</b>	31	6	<b>24</b>	36	4	<b>42</b>	14	8

FIGURA A.1: Estudio de escalabilidad en las variables de decisión considerando dos objetivos (Hipervolumen)

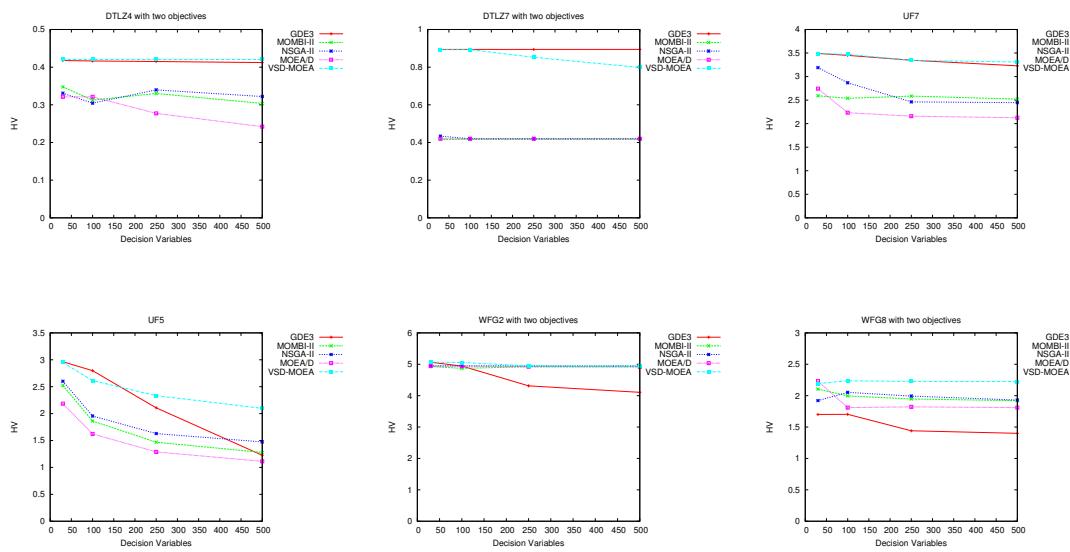


FIGURA A.2: Estudio de escalabilidad en las variables de decisión considerando tres objetivos (Hipervolumen)

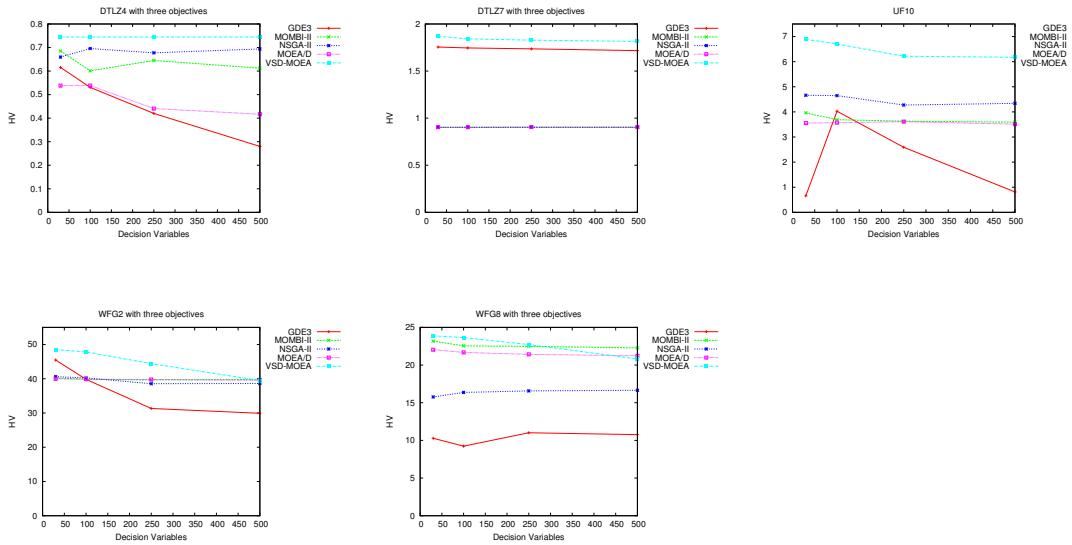


FIGURA A.3: Estudio del parámetro DI de la instancias DTLZ con dos objetivos

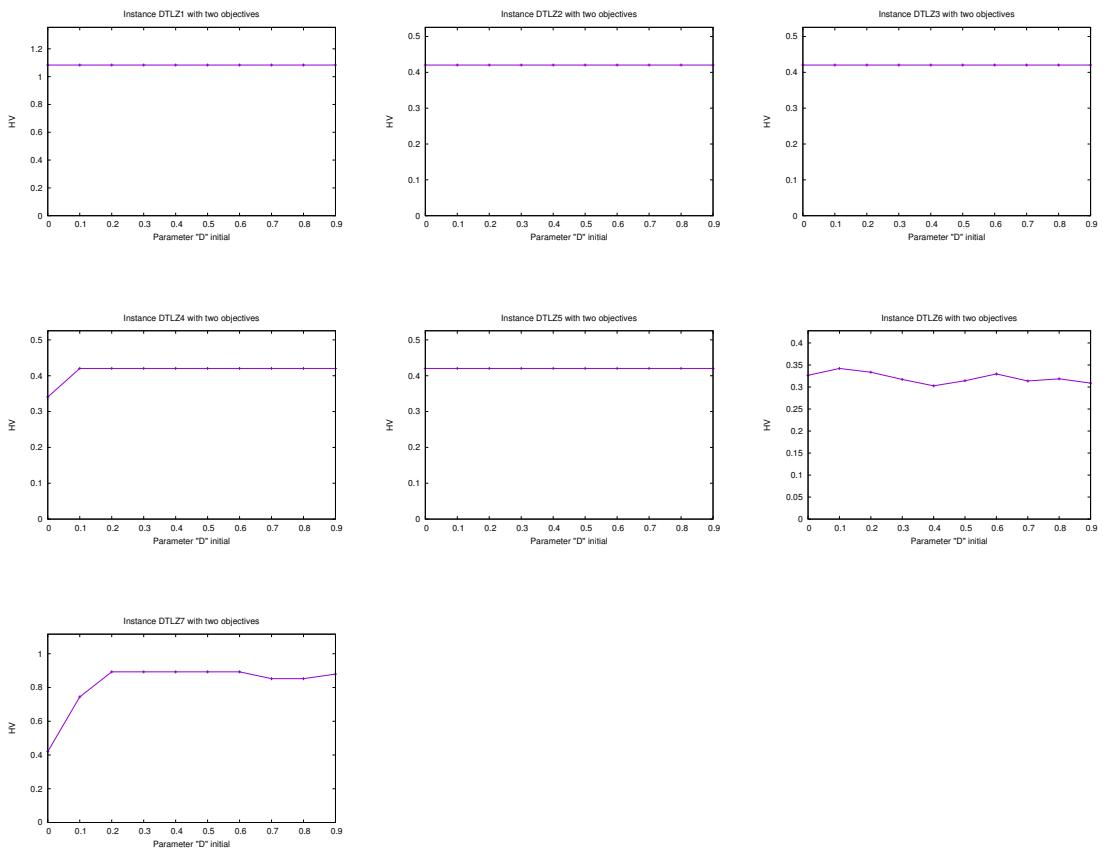


FIGURA A.4: Estudio del parámetro DI de la instancias DTLZ con tres objetivos

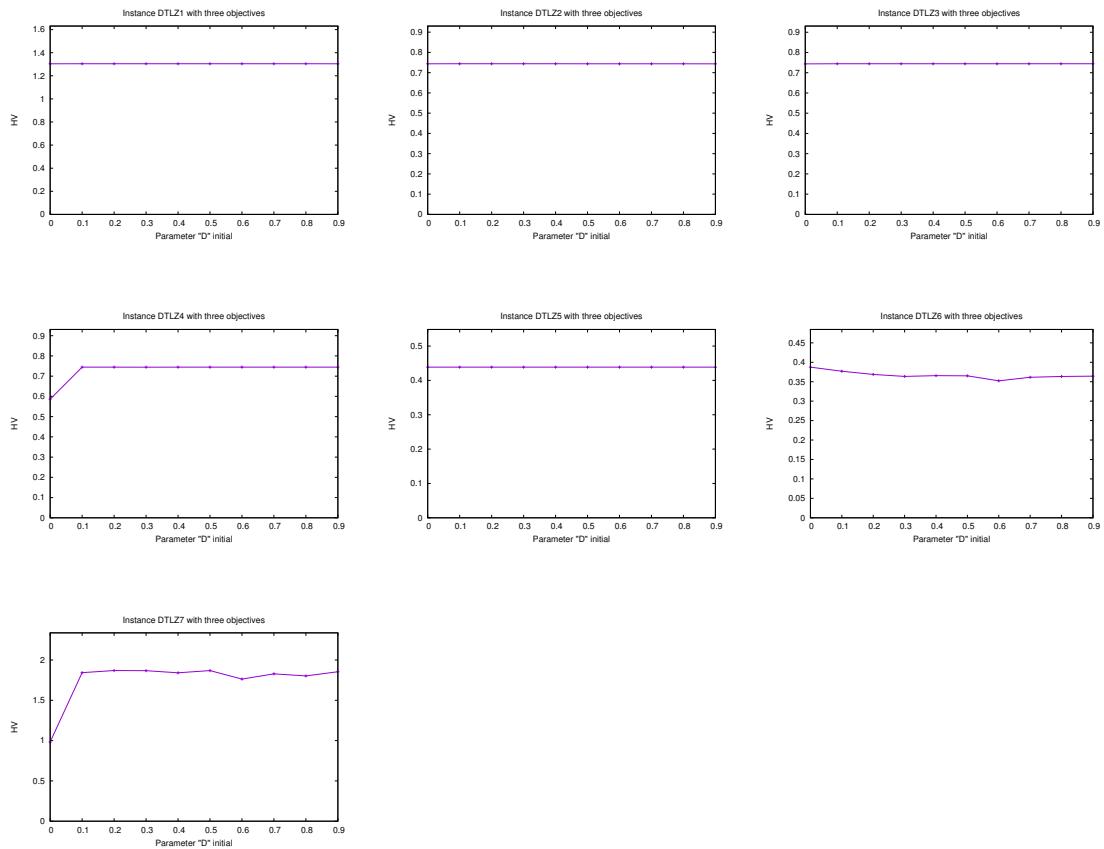


FIGURA A.5: Estudio del parámetro DI de la instancias WFG con dos objetivos

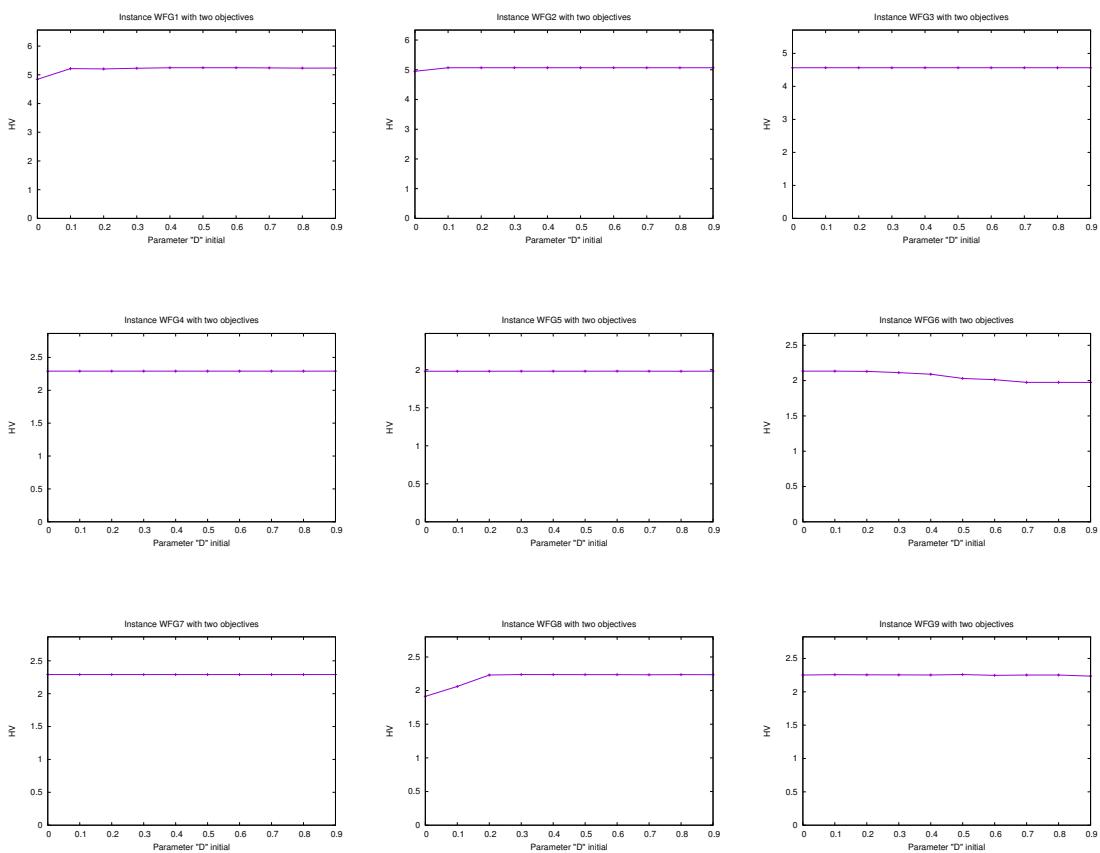


FIGURA A.6: Estudio del parámetro DI de la instancias WFG con tres objetivos

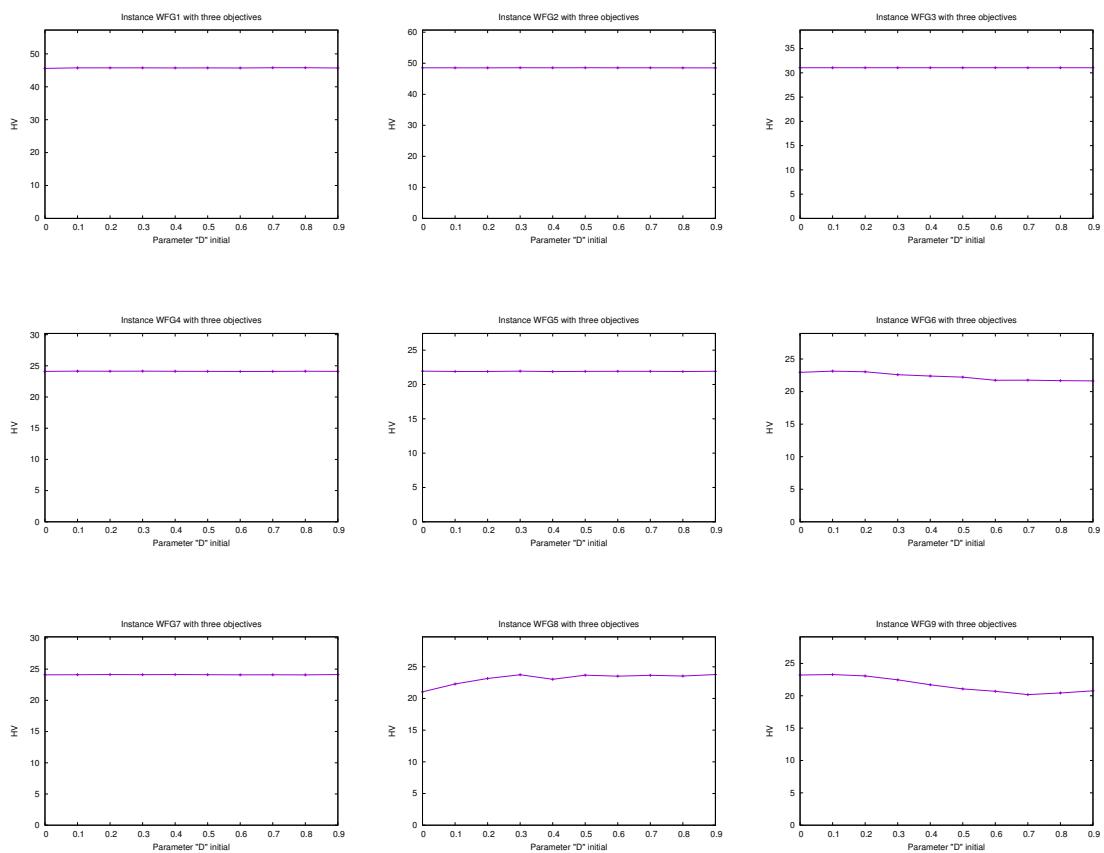


FIGURA A.7: Estudio del parámetro DI de la instancias UF con dos y tres objetivos

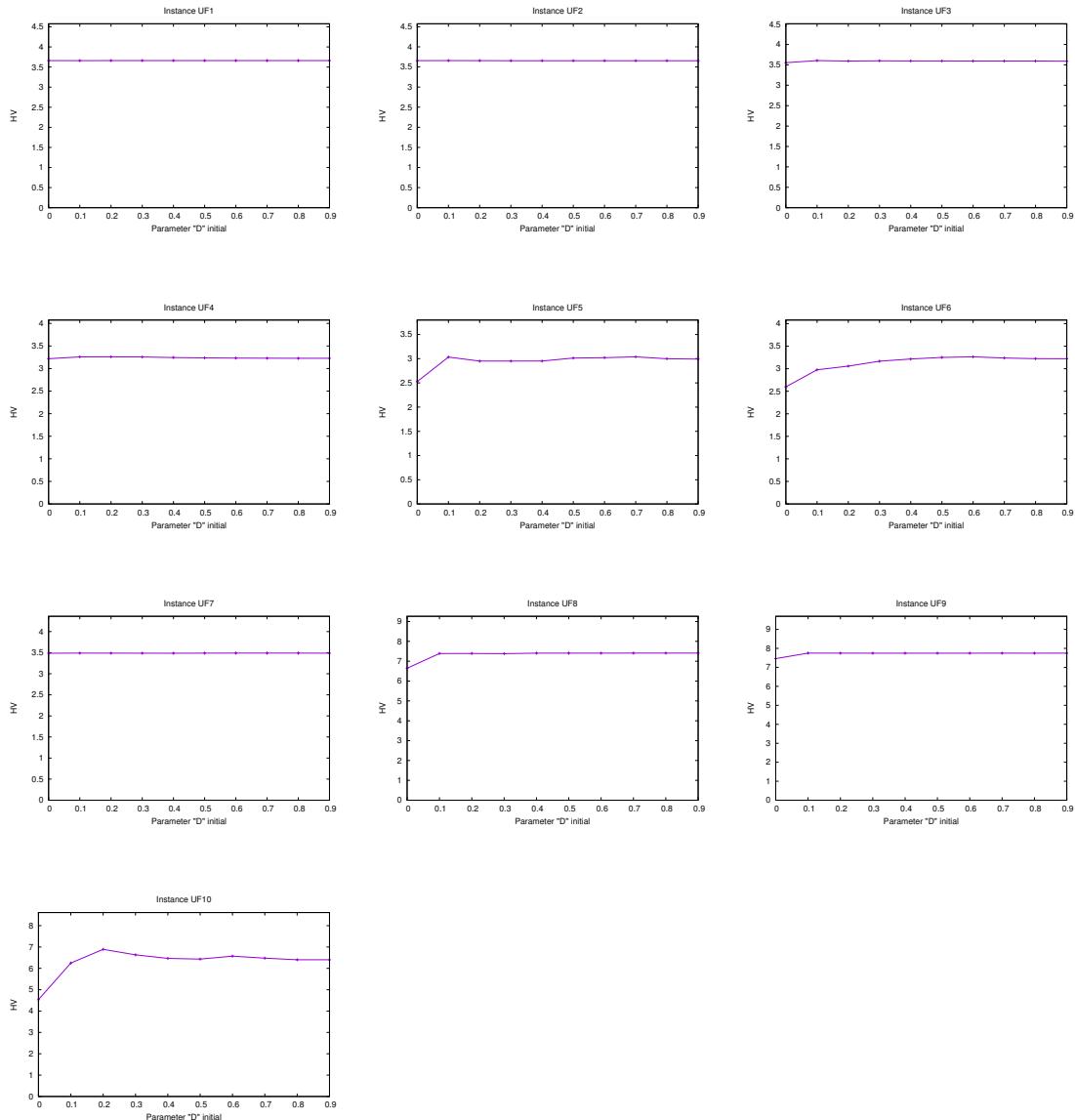






TABLA B.1: Estadísticas del hipervolumen considerando dos objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	1.081	1.081	1.081	1.081	1.081	1.081	1.081	1.081	1.081	1.084	1.084	<b>1.084</b>	1.081	1.081	1.081
DTLZ2	0.419	0.419	0.419	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>
DTLZ3	8.190	8.190	8.190	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>
DTLZ4	0.110	0.419	0.393	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>	0.420	0.420	<b>0.420</b>
DTLZ5	8.190	8.190	8.190	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>
DTLZ6	8.190	8.190	8.190	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>	8.210	8.210	<b>8.210</b>
DTLZ7	0.891	0.891	0.891	0.892	0.892	0.892	0.892	0.892	0.892	0.893	0.893	<b>0.893</b>	0.892	0.892	0.892
UF1	3.648	3.650	3.649	3.650	3.652	3.651	3.650	3.651	3.651	3.655	3.660	<b>3.658</b>	3.650	3.652	3.651
UF2	3.633	3.647	3.642	3.648	3.651	3.649	3.647	3.652	3.650	3.656	3.660	<b>3.659</b>	3.647	3.651	3.649
UF3	3.498	3.651	3.632	3.652	3.654	3.653	3.646	3.655	3.652	3.660	3.661	<b>3.660</b>	3.650	3.655	3.652
UF4	3.158	3.215	3.189	3.246	3.263	<b>3.253</b>	3.240	3.261	3.249	3.230	3.244	3.236	3.240	3.264	3.250
UF5	3.404	3.459	3.411	3.470	3.475	<b>3.475</b>	3.474	3.475	<b>3.475</b>	3.234	3.459	3.413	3.475	3.475	<b>3.475</b>
UF6	3.266	3.423	3.414	3.429	3.431	3.430	3.430	3.431	3.430	3.434	3.434	<b>3.434</b>	3.429	3.430	3.430
UF7	3.483	3.484	3.484	3.483	3.484	3.483	3.483	3.484	3.484	3.494	3.494	<b>3.494</b>	3.483	3.485	3.484
WFG1	4.688	5.244	5.145	5.051	5.249	<b>5.220</b>	4.991	5.247	5.198	4.755	5.248	5.143	5.053	5.247	5.207
WFG2	5.056	5.056	5.056	5.057	5.057	5.057	5.057	5.057	5.057	5.059	5.059	<b>5.059</b>	5.057	5.057	5.057
WFG3	4.561	4.561	4.561	4.560	4.561	4.561	4.561	4.561	4.561	4.562	4.563	<b>4.563</b>	4.561	4.561	4.561
WFG4	2.283	2.284	2.284	2.282	2.283	2.283	2.282	2.283	2.283	2.283	2.286	<b>2.285</b>	2.282	2.283	2.283
WFG5	1.971	1.987	1.974	1.970	2.002	1.983	1.971	2.003	1.987	1.971	1.988	1.974	1.970	2.017	<b>1.988</b>
WFG6	1.705	2.284	1.953	2.255	2.284	2.282	2.283	2.284	2.283	2.150	2.285	2.271	2.283	2.286	<b>2.284</b>
WFG7	2.284	2.284	<b>2.284</b>	2.283	2.284	<b>2.284</b>	2.284	2.284	<b>2.284</b>	2.286	2.286	2.286	2.284	2.284	<b>2.284</b>
WFG8	1.862	1.878	1.870	2.107	2.265	2.237	2.248	2.275	<b>2.260</b>	2.226	2.264	2.237	2.243	2.270	2.259
WFG9	1.706	2.253	2.011	2.249	2.264	2.254	2.248	2.269	<b>2.258</b>	2.249	2.266	2.254	2.248	2.265	2.257

TABLA B.2: Estadísticas de Hausdorff considerando dos objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ2	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
DTLZ3	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
DTLZ4	0.004	0.746	0.068	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
DTLZ5	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
DTLZ6	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
DTLZ7	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
UF1	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.011	0.005	0.004	0.004	<b>0.004</b>
UF2	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.005	0.008	0.005	0.004	0.004	<b>0.004</b>
UF3	0.004	0.041	0.009	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.008	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
UF4	0.043	0.052	0.047	0.024	0.026	<b>0.025</b>	0.025	0.027	0.026	0.034	0.037	0.035	0.025	0.027	0.026
UF5	0.022	0.052	0.041	0.000	0.007	<b>0.000</b>	0.000	0.001	<b>0.000</b>	0.024	0.084	0.045	0.000	0.000	<b>0.000</b>
UF6	0.008	0.043	0.022	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.012	0.035	0.021	0.002	0.002	<b>0.002</b>
UF7	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>
WFG1	0.025	0.131	0.045	0.035	0.105	0.065	0.041	0.206	0.058	0.021	0.122	<b>0.039</b>	0.044	0.205	0.060
WFG2	0.036	0.036	0.036	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.034	0.034	<b>0.034</b>	0.038	0.038	0.038
WFG3	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.013	0.013	<b>0.013</b>
WFG4	0.014	0.014	<b>0.014</b>	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	<b>0.014</b>	0.015	0.015	0.015
WFG5	0.064	0.069	0.068	0.062	0.070	0.066	0.061	0.069	<b>0.065</b>	0.064	0.069	0.068	0.059	0.070	<b>0.065</b>
WFG6	0.014	0.121	0.075	0.015	0.016	<b>0.015</b>	0.015	0.015	<b>0.015</b>	0.014	0.032	<b>0.015</b>	0.015	0.015	<b>0.015</b>
WFG7	0.014	0.014	<b>0.014</b>	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.014	<b>0.014</b>	0.015	0.015	0.015
WFG8	0.114	0.118	0.116	0.018	0.079	0.027	0.017	0.025	<b>0.020</b>	0.018	0.032	0.027	0.017	0.023	<b>0.020</b>
WFG9	0.015	0.126	0.064	0.015	0.017	<b>0.016</b>	0.015	0.017	<b>0.016</b>	0.014	0.017	<b>0.016</b>	0.015	0.017	<b>0.016</b>

TABLA B.3: Estadísticas IGD+ considerando dos objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.001	0.001	<b>0.001</b>
DTLZ2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ3	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ4	0.002	0.363	0.033	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
DTLZ7	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
UF1	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.002	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.002	0.003	<b>0.003</b>
UF2	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.004	0.004	<b>0.004</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
UF3	0.003	0.036	0.007	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.003	0.007	0.003	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
UF4	0.042	0.050	0.045	0.023	0.026	<b>0.024</b>	0.024	0.026	0.025	0.033	0.037	0.035	0.023	0.026	0.025
UF5	0.006	0.040	0.036	0.000	0.005	<b>0.000</b>	0.000	0.000	<b>0.000</b>	0.015	0.040	0.030	0.000	0.000	<b>0.000</b>
UF6	0.002	0.018	0.003	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.002	0.002	<b>0.002</b>
UF7	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
WFG1	0.007	0.122	0.028	0.007	0.046	<b>0.013</b>	0.007	0.059	0.017	0.007	0.108	0.027	0.007	0.048	0.015
WFG2	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>	0.006	0.006	<b>0.006</b>
WFG3	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>	0.008	0.008	<b>0.008</b>
WFG4	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG5	0.064	0.069	0.067	0.061	0.070	0.066	0.061	0.069	<b>0.065</b>	0.064	0.069	0.068	0.059	0.070	<b>0.065</b>
WFG6	0.007	0.121	0.072	0.007	0.012	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.031	0.009	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG7	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
WFG8	0.092	0.097	0.094	0.011	0.039	0.018	0.009	0.016	<b>0.012</b>	0.011	0.021	0.018	0.009	0.017	<b>0.012</b>
WFG9	0.011	0.126	0.062	0.010	0.012	0.012	0.009	0.013	<b>0.011</b>	0.009	0.012	<b>0.011</b>	0.010	0.013	<b>0.011</b>

TABLA B.4: Estadísticas del hipervolumen considerando tres objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	1.289	1.289	1.289	1.293	1.293	1.293	1.293	1.293	1.296	1.296	<b>1.296</b>	1.293	1.293	1.293	1.293
DTLZ2	0.709	0.710	0.710	0.733	0.734	<b>0.734</b>	0.733	0.734	0.733	0.720	0.720	0.720	0.733	0.734	0.733
DTLZ3	26.158	26.162	26.159	26.402	26.403	<b>26.403</b>	26.402	26.403	26.402	26.263	26.267	26.264	26.402	26.403	26.402
DTLZ4	0.709	0.710	0.709	0.733	0.736	<b>0.735</b>	0.733	0.735	0.734	0.720	0.720	0.720	0.733	0.734	0.734
DTLZ5	23.877	23.877	23.877	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.975	23.975	<b>23.975</b>	23.900	23.900	23.900	23.900
DTLZ6	23.877	23.877	23.877	23.900	23.900	23.900	23.900	23.900	23.975	23.975	<b>23.975</b>	23.900	23.900	23.900	23.900
DTLZ7	1.764	1.764	1.764	1.756	1.756	1.756	1.756	1.756	1.777	1.777	<b>1.777</b>	1.756	1.756	1.756	1.756
UF10	4.000	7.186	5.155	7.265	7.360	7.310	7.275	7.370	<b>7.323</b>	6.339	7.157	6.923	7.289	7.361	7.319
UF8	4.000	7.290	7.083	7.403	7.409	7.407	7.406	7.412	<b>7.409</b>	7.260	7.317	7.295	7.405	7.412	<b>7.409</b>
UF9	7.096	7.638	7.195	7.684	7.713	<b>7.700</b>	7.684	7.705	7.693	7.623	7.679	7.654	7.682	7.706	7.693
WFG1	16.179	18.450	16.765	44.815	45.396	<b>45.253</b>	41.031	43.456	42.356	18.579	27.879	22.992	41.336	43.595	42.329
WFG2	47.579	47.977	47.741	47.826	47.831	<b>47.827</b>	47.826	47.828	<b>47.827</b>	47.162	47.910	47.703	47.826	47.827	<b>47.827</b>
WFG3	31.146	31.154	31.150	31.205	31.206	31.205	31.205	31.206	31.298	31.304	<b>31.303</b>	31.205	31.206	31.205	31.205
WFG4	21.261	22.007	21.644	23.189	23.346	<b>23.257</b>	23.184	23.309	23.240	21.238	21.857	21.563	23.172	23.301	23.241
WFG5	19.649	19.789	19.687	20.615	21.076	20.756	20.646	21.101	<b>20.916</b>	19.724	20.031	19.896	20.609	21.088	20.901
WFG6	18.053	22.220	18.867	22.172	23.228	23.019	22.908	23.251	23.180	20.960	22.221	21.402	23.039	23.267	<b>23.195</b>
WFG7	21.914	22.271	22.127	23.180	23.284	23.220	23.163	23.292	<b>23.228</b>	21.960	22.294	22.087	23.186	23.286	23.222
WFG8	18.671	20.020	18.942	20.059	23.425	22.887	23.092	23.526	<b>23.298</b>	21.017	21.683	21.325	23.109	23.461	23.289
WFG9	17.544	21.437	18.181	21.921	22.632	22.314	22.260	22.676	22.433	21.242	21.690	21.408	22.255	22.672	<b>22.436</b>

TABLA B.5: Estadísticas con Hausdorff considerando tres objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	0.021	0.021	0.021	0.019	0.019	<b>0.019</b>	0.019	0.019	<b>0.019</b>	0.021	0.021	0.021	0.019	0.019	<b>0.019</b>
DTLZ2	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>
DTLZ3	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>
DTLZ4	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.051	0.051	<b>0.051</b>	0.054	0.054	0.054	0.051	0.051	<b>0.051</b>
DTLZ5	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
DTLZ6	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>	0.007	0.007	<b>0.007</b>
DTLZ7	0.110	0.110	<b>0.110</b>	0.109	0.110	<b>0.110</b>	0.109	0.110	<b>0.110</b>	0.115	0.115	0.115	0.110	0.110	<b>0.110</b>
UF10	0.094	1.127	0.494	0.161	0.2										

TABLA B.6: Estadísticas del IGD considerando tres objetivos

	MOEA/D-SEBV			VSD-MOEA/D T=10			VSD-MOEA/D T=100			VSD-MOEA/D Normal DE			Fast VSD-MOEA/D		
	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean	Min	Max	Mean
DTLZ1	0.014	0.014	0.014	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.014	0.014	0.014	0.013	0.013	<b>0.013</b>
DTLZ2	0.028	0.028	0.028	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.027	0.027	0.027	0.024	0.024	<b>0.024</b>
DTLZ3	0.028	0.028	0.028	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.027	0.027	0.027	0.024	0.024	<b>0.024</b>
DTLZ4	0.028	0.028	0.028	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.024	0.024	<b>0.024</b>	0.027	0.027	0.027	0.024	0.024	<b>0.024</b>
DTLZ5	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
DTLZ6	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.003	0.003	<b>0.003</b>
DTLZ7	0.044	0.044	0.044	0.047	0.047	<b>0.047</b>	0.047	0.047	<b>0.047</b>	0.045	0.045	0.045	0.047	0.047	<b>0.047</b>
UF10	0.066	0.373	0.246	0.044	0.061	0.059	0.041	0.061	<b>0.056</b>	0.070	0.133	0.093	0.044	0.060	0.057
UF8	0.035	0.365	0.058	0.024	0.025	0.024	0.023	0.024	<b>0.023</b>	0.035	0.038	0.037	0.023	0.024	<b>0.023</b>
UF9	0.036	0.146	0.129	0.025	0.026	<b>0.025</b>	0.026	0.028	0.027	0.036	0.039	0.037	0.026	0.028	0.027
WFG1	1.114	1.264	1.217	0.071	0.140	<b>0.079</b>	0.136	0.265	0.182	0.656	1.109	0.895	0.134	0.233	0.180
WFG2	0.045	0.074	<b>0.056</b>	0.056	0.056	<b>0.056</b>	0.056	0.056	<b>0.056</b>	0.047	0.067	0.060	0.056	0.056	<b>0.056</b>
WFG3	0.025	0.025	0.025	0.023	0.023	<b>0.023</b>	0.023	0.023	<b>0.023</b>	0.023	0.023	<b>0.023</b>	0.023	0.023	<b>0.023</b>
WFG4	0.131	0.148	0.136	0.109	0.111	<b>0.110</b>	0.110	0.110	<b>0.110</b>	0.140	0.152	0.146	0.109	0.110	<b>0.110</b>
WFG5	0.180	0.185	0.184	0.166	0.171	0.168	0.165	0.170	<b>0.167</b>	0.180	0.186	0.184	0.164	0.171	<b>0.167</b>
WFG6	0.123	0.242	0.219	0.110	0.141	0.117	0.110	0.118	<b>0.112</b>	0.125	0.154	0.144	0.110	0.114	<b>0.111</b>
WFG7	0.122	0.128	0.126	0.110	0.110	<b>0.110</b>	0.110	0.110	<b>0.110</b>	0.123	0.129	0.125	0.110	0.110	<b>0.110</b>
WFG8	0.173	0.200	0.194	0.110	0.173	0.120	0.109	0.118	<b>0.112</b>	0.141	0.156	0.150	0.109	0.118	0.113
WFG9	0.133	0.242	0.226	0.117	0.126	0.121	0.116	0.125	<b>0.119</b>	0.133	0.140	0.137	0.115	0.122	<b>0.119</b>

## Apéndice B

# Resultados adicionales para las propuestas basadas en descomposición

FIGURA B.1: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

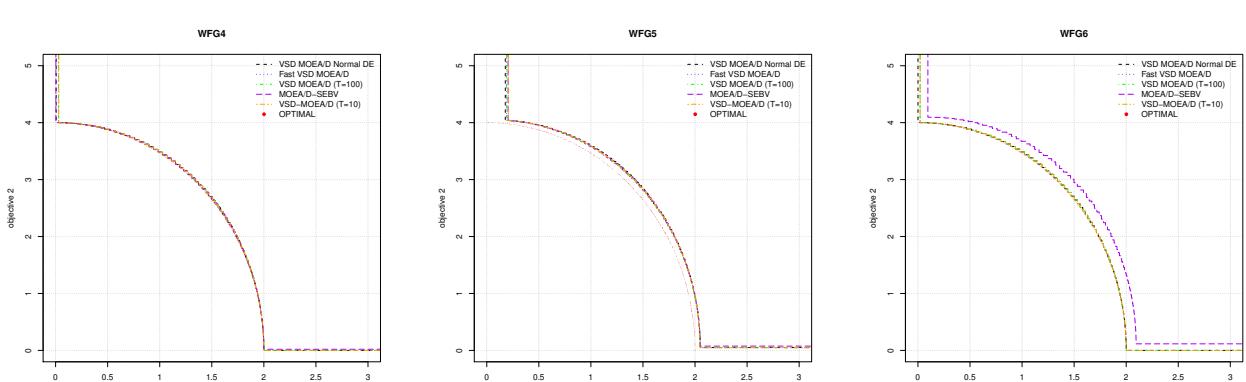
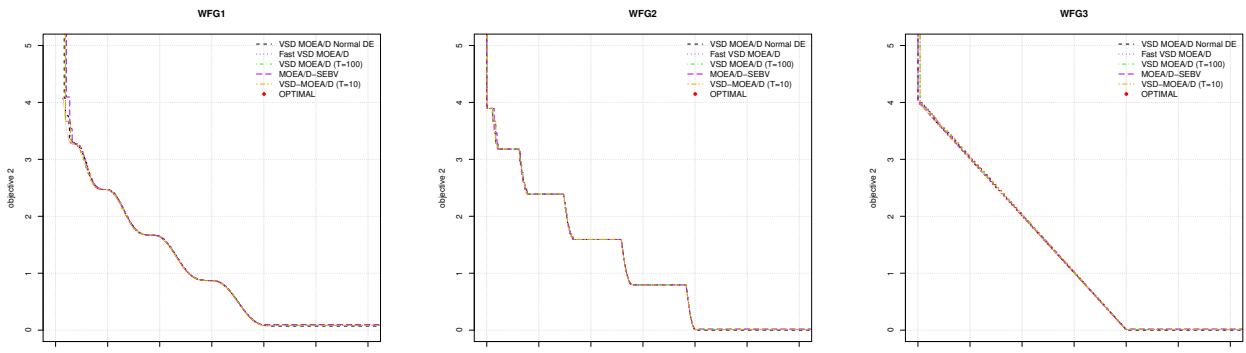


FIGURA B.2: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

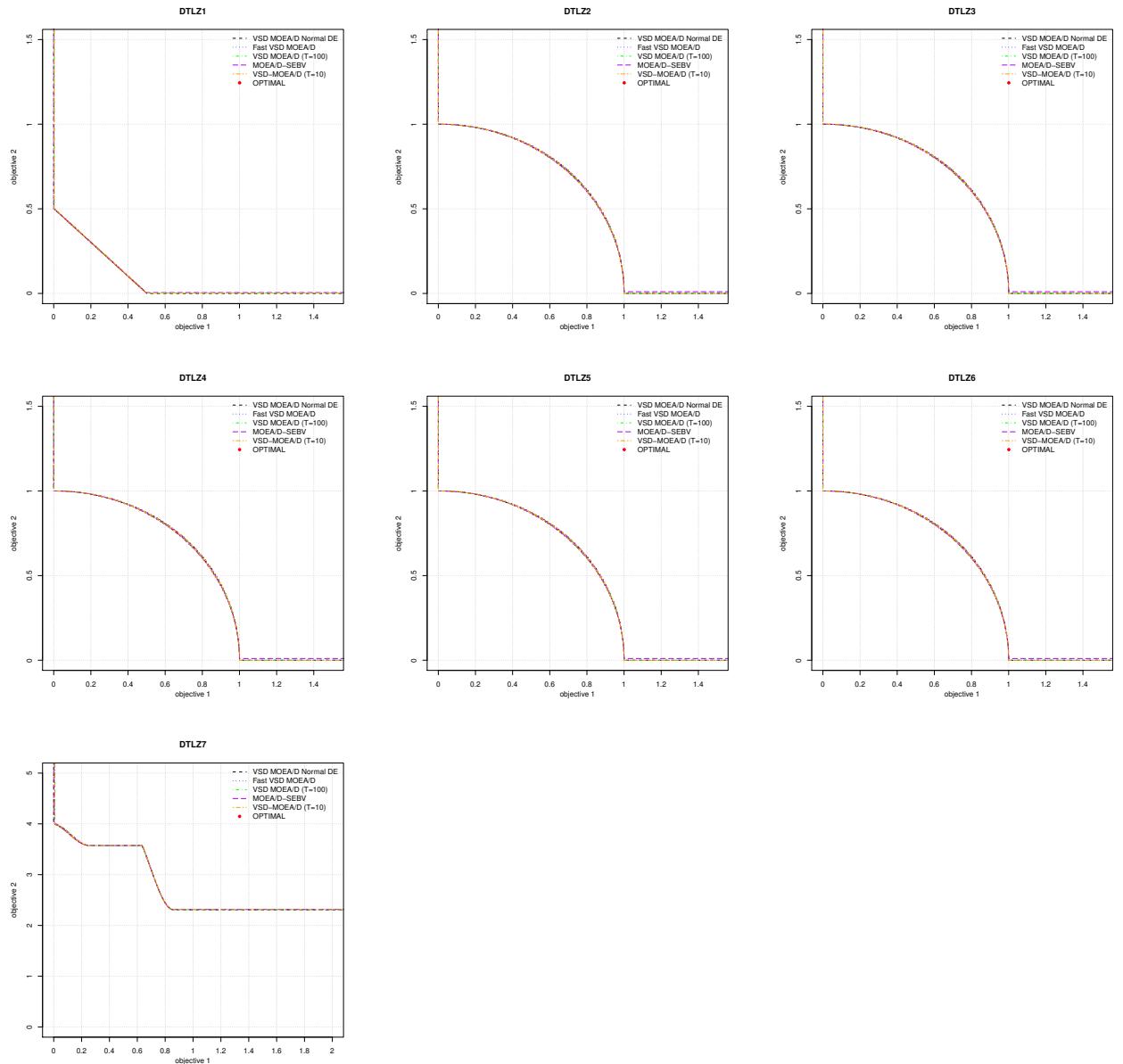


FIGURA B.3: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

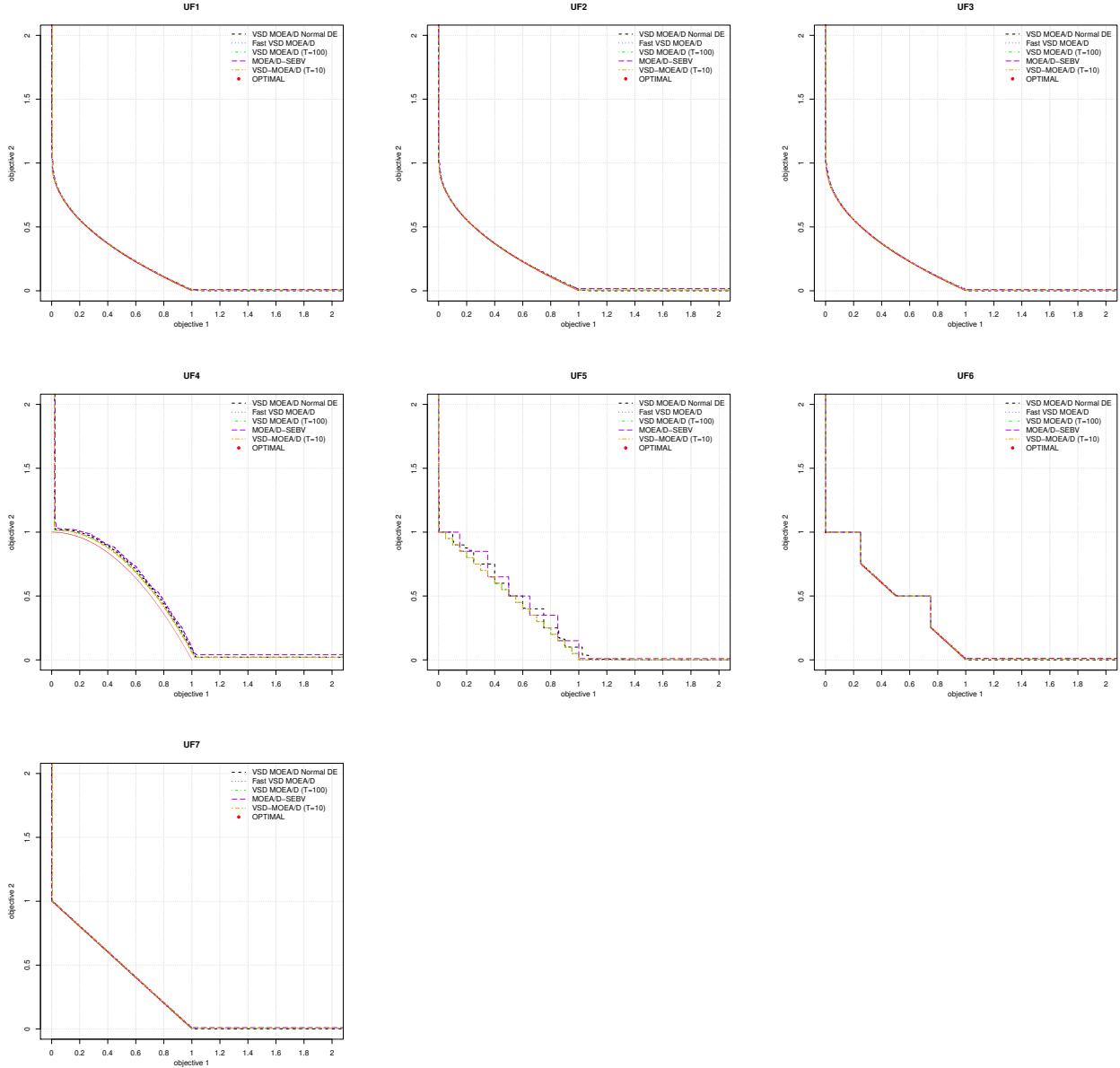


TABLA B.7: Estadísticas del hipervolumen con dos objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Men	Diff
DTLZ1	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	1.08	0.01	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00	1.08	1.08	<b>1.08</b>	0.00
DTLZ2	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00
DTLZ3	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.17	8.17	0.04	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.21	8.20	0.01	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00
DTLZ4	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	0.11	0.42	0.38	0.04	0.11	0.42	0.31	0.11	0.11	0.42	0.37	0.06	0.42	0.42	0.00	0.42	0.42	<b>0.42</b>	0.00	
DTLZ5	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.17	8.17	8.17	0.04	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00
DTLZ6	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00	7.99	8.17	8.07	0.14	8.06	8.21	8.13	0.08	8.03	8.21	8.09	0.12	7.99	8.21	8.12	0.09	8.21	8.21	<b>8.21</b>	0.00
DTLZ7	0.89	0.89	<b>0.89</b>	0.00	0.42	0.42	0.42	0.04	0.42	0.42	0.42	0.04	0.42	0.42	0.42	0.07	0.89	0.89	0.00	0.89	0.89	<b>0.89</b>	0.00	
UF1	3.66	3.66	<b>3.66</b>	0.00	3.33	3.52	3.49	0.17	3.65	3.65	3.65	0.01	3.43	3.66	3.59	0.07	3.66	3.66	0.00	3.65	3.65	3.65	0.01	
UF2	3.65	3.65	<b>3.65</b>	0.00	3.41	3.63	3.59	0.06	3.64	3.65	3.64	0.01	3.43	3.65	3.53	0.12	3.65	3.66	0.00	3.65	3.65	3.65	0.01	
UF3	3.37	3.66	3.64	0.01	3.33	3.60	3.50	0.15	3.52	3.64	3.60	0.05	2.85	3.64	3.45	0.20	3.55	3.62	3.59	0.06	3.65	3.65	<b>3.65</b>	0.00
UF4	3.22	3.24	3.22	0.04	3.19	3.21	3.20	0.06	3.20	3.21	3.20	0.06	3.21	3.24	3.23	0.03	3.24	3.28	3.26	0.00	3.25	3.26	3.25	0.01
UF5	2.53	3.00	2.96	0.51	2.05	2.75	2.52	0.95	1.86	2.90	2.60	0.87	1.80	2.55	2.19	1.29	2.59	3.27	2.95	0.52	3.47	3.48	<b>3.47</b>	0.00
UF6	2.00	3.33	3.10	0.33	2.01	2.89	2.64	0.79	2.01	2.90	2.52	0.91	0.73	2.88	2.07	1.36	2.89	3.31	3.06	0.37	3.43	3.43	<b>3.43</b>	0.00
UF7	3.49	3.49	<b>3.49</b>	0.00	2.47	3.47	2.59	0.90	2.17	3.48	3.19	0.30	2.01	3.49	2.74	0.75	3.47	3.49	0.00	3.48	3.48	3.48	0.01	
WFG1	4.26	5.26	4.85	0.41	4.62	5.67	<b>5.26</b>	0.00	4.72	5.25	5.16	0.10	4.48	5.24	5.04	0.22	4.72	5.25	5.20	0.05	5.05	5.25	5.22	0.04
WFG2	5.07	5.07	<b>5.07</b>	0.00	4.92	4.94	4.93	0.14	4.95	5.07	4.95	0.12	4.94	4.94	4.94	0.13	5.07	5.07	0.00	5.06	5.06	5.06	0.01	
WFG3	4.51	4.53	4.52	0.04	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00	4.53	4.54	4.54	0.03	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00	4.56	4.57	0.00	4.56	4.56	<b>4.56</b>	0.00	
WFG4	2.28	2.29	2.28	0.01	2.28	2.29	2.28	0.01	2.27	2.28	2.28	0.01	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.29	2.29	2.29	0.00	2.28	2.28	2.28	0.01
WFG5	1.98	1.99	<b>1.99</b>	0.00	1.98	2.00	1.98	0.01	1.97	1.98	1.97	0.01	1.97	2.01	1.98	0.01	1.98	1.98	0.01	1.97	2.00	<b>1.98</b>	0.00	
WFG6	2.09	2.25	2.18	0.10	2.05	2.21	2.14	0.14	2.06	2.21	2.14	0.14	2.02	2.19	2.13	0.15	2.08	2.20	2.13	0.15	2.26	2.28	<b>2.28</b>	0.00
WFG7	2.27	2.28	2.28	0.02	2.28	2.28	2.28	0.01	2.27	2.28	2.28	0.02	2.29	2.29	<b>2.29</b>	0.00	2.29	2.29	2.29	0.00	2.28	2.28	2.28	0.01
WFG8	1.86	1.88	1.87	0.37	1.87	2.24	1.95	0.29	1.80	2.14	1.91	0.33	1.94	2.25	2.23	0.01	2.05	2.25	2.23	0.01	2.11	2.27	<b>2.24</b>	0.00
WFG9	1.71	1.71	1.71	0.54	2.20	2.26	2.24	0.01	2.17	2.26	2.23	0.03	2.17	2.26	2.22	0.03	2.27	2.25	2.25	0.00	2.25	2.26	<b>2.25</b>	0.00
Average	3.279	3.423	3.388	<b>3.103</b>	3.170	3.406	3.299	<b>0.193</b>	3.187	3.409	3.332	<b>0.160</b>	3.047	3.397	3.272	<b>0.219</b>	3.372	3.474	3.437	<b>0.055</b>	3.471	3.491	3.487	0.005

TABLA B.8: Estadísticas del IGD+ con dos objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGAII				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D				
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Men	Diff	
DTLZ1	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.002	0.002	0.001	0.000	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	0.001	0.001	0.000	0.001	0.001	0.001	<b>0.001</b>	0.000	
DTLZ2	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	0.000	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ3	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	0.000	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ4	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	0.000	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.002	0.000	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.002	0.108	0.059	0.057	0.003	0.089	0.051	0.049	0.002	0.110	0.067	0.065	0.002	0.132	0.054	0.052	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000
DTLZ7	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.363	0.363	0.363	0.031	0.361	0.361	0.361	0.039	0.361	0.361	0.361	0.035	0.359	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.000
UF1	0.004	0.005	0.004	0.002	0.037	0.011	0.009	0.008	0.009	0.009	0.009	0.003	0.003	0.004	0.011	0.009	0.002	0.007	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.000
UF2	0.007	0.009	0.008	0.005	0.004	0.004	0.006	0.005	0.011	0.014	0.013	0.010	0.003	0.004	0.019	0.016	0.004	0.007	0.005	0.003	0.003	0.003	<b>0.003</b>	0.000	
UF3	0.003	0.168	0.013	0.011	0.017	0.046	0.030	0.027	0.015	0.034	0.024	0.021	0.007	0.016	0.037	0.035	0.028	0.058	0.046	0.038	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
UF4	0.035	0.038	0.037	0.013	0.034	0.041	0.040	0.016	0.043	0.046	0.046	0.022	0.032	0.041	0.036	0.012	0.023	0.035	0.027	0.003	0.023	0.026	<b>0.024</b>	0.000	
UF5	0.238	0.275	0.245	0.174	0.481	0.300	0.300	0.146	0.570	0.287	0.288	0.229	0.571	0.385	0.385	0.113	0.371	0.197	0.196	0.000	0.005	<b>0.000</b>	<b>0.000</b>	0.000	
UF6	0.029	0.417	0.123	0.169	0.570	0.292	0.290	0.167	0.577	0.341	0.339	0.173	0.706	0.529	0.527	0.044	0.171	0.121	0.119	0.002	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	
UF7	0.004	0.005	0.004	0.002	0.254	0.230	0.227	0.008	0.385	0.083	0.081	0.003	0.492	0.194</td											

TABLA B.10: Estadísticas del IGD+ con tres objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3				MOMBI-II				NSGA-II				MOEA/D				VSD-MOEA				VSD-MOEA/D			
	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff	Min	Max	Mean	Diff
DTLZ1	0.017	0.021	0.019	0.006	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000	0.018	0.023	0.020	0.007	0.014	0.014	0.014	0.001	0.013	0.015	0.014	0.001	0.013	0.013	<b>0.013</b>	0.000
DTLZ2	0.027	0.032	0.030	0.007	0.029	0.025	0.025	0.001	0.028	0.036	0.032	0.008	0.028	0.028	0.028	0.004	0.023	0.025	<b>0.024</b>	0.000	0.024	<b>0.024</b>	0.000	
DTLZ3	0.028	0.035	0.031	0.007	0.025	0.025	0.001	0.028	0.037	0.031	0.008	0.028	0.028	0.028	0.004	0.024	0.024	0.000	0.024	0.024	0.000	0.024	0.000	
DTLZ4	0.028	0.033	0.030	0.006	0.025	0.036	0.042	0.018	0.028	0.059	0.048	0.022	0.028	0.059	0.0107	0.083	0.024	0.024	0.001	0.024	0.024	0.000	0.024	0.000
DTLZ5	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.004	0.004	0.002	0.003	0.003	0.003	0.001	0.003	0.003	0.001	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.003	0.003	0.003	0.001	
DTLZ6	0.002	0.002	<b>0.002</b>	0.000	0.004	0.125	0.065	0.064	0.003	0.072	0.041	0.039	0.045	0.159	0.094	0.092	0.002	0.124	0.060	0.058	0.003	0.003	0.003	0.001
DTLZ7	0.031	0.043	0.035	0.007	0.688	0.689	0.661	0.683	0.684	0.683	0.655	0.685	0.685	0.657	0.27	0.029	<b>0.028</b>	0.000	0.047	0.047	0.047	0.047	0.019	
UF10	0.609	2.740	1.545	1.486	0.182	0.473	0.339	0.280	0.178	0.388	0.308	0.250	0.326	0.478	0.389	0.330	0.075	0.225	0.101	0.043	0.044	0.061	<b>0.059</b>	0.000
UF8	0.442	2.747	1.529	1.235	0.035	0.363	0.098	0.074	0.071	0.089	0.078	0.054	0.035	0.365	0.137	0.113	0.025	0.060	0.034	0.010	0.024	0.025	<b>0.024</b>	0.000
UF9	0.701	2.225	1.345	1.320	0.025	0.143	0.113	0.087	0.073	0.229	0.128	0.102	0.034	0.143	0.124	0.099	0.023	0.033	0.027	0.001	0.025	0.026	<b>0.025</b>	0.000
WFG1	1.169	1.276	1.236	1.172	0.008	<b>0.224</b>	<b>0.064</b>	0.000	0.123	0.168	0.141	0.077	0.080	0.209	0.122	0.058	0.052	0.099	<b>0.064</b>	0.000	0.071	0.140	0.079	0.015
WFG2	0.092	0.149	0.118	0.078	0.040	0.108	0.066	0.027	0.095	0.168	0.140	0.101	0.044	0.117	0.087	0.047	0.031	0.055	<b>0.040</b>	0.000	0.056	0.056	0.016	
WFG3	0.046	0.094	0.066	0.042	0.024	0.027	0.026	0.003	0.032	0.074	0.047	0.024	0.024	0.025	0.001	0.036	0.039	0.037	0.013	0.023	0.023	0.000	0.000	
WFG4	0.192	0.245	0.214	0.128	0.085	0.085	<b>0.085</b>	0.000	0.113	0.135	0.123	0.037	0.122	0.126	0.124	0.039	0.084	0.089	0.008	0.109	0.110	0.110	0.024	
WFG5	0.151	0.171	0.159	0.014	0.144	<b>0.145</b>	0.000	0.160	0.177	0.167	0.022	0.176	0.185	0.180	0.035	0.141	0.152	0.147	0.002	0.166	0.171	0.168	0.024	
WFG6	0.182	0.263	0.220	0.109	0.101	0.128	<b>0.110</b>	0.000	0.134	0.191	0.155	0.044	0.143	0.176	0.154	0.044	0.103	0.130	0.114	0.004	0.110	0.141	0.117	0.007
WFG7	0.174	0.218	0.197	0.112	0.085	0.085	<b>0.085</b>	0.000	0.107	0.134	0.120	0.035	0.126	0.126	0.126	0.041	0.084	0.094	0.089	0.003	0.110	0.110	0.110	0.025
WFG8	0.310	0.352	0.331	0.227	0.092	0.147	<b>0.104</b>	0.000	0.216	0.265	0.232	0.129	0.132	0.143	0.136	0.032	0.091	0.226	0.114	0.010	0.110	0.173	0.120	0.016
WFG9	0.223	0.247	0.235	0.135	0.090	0.208	<b>0.100</b>	0.000	0.131	0.250	0.229	0.130	0.129	0.241	0.139	0.040	0.090	0.208	0.104	0.004	0.117	0.126	0.121	0.021
Average	0.233	0.573	0.372	<b>0.321</b>	0.089	0.178	0.116	<b>0.064</b>	0.117	0.196	0.143	<b>0.092</b>	0.116	0.202	0.142	<b>0.091</b>	0.050	0.087	0.060	<b>0.008</b>	0.058	0.069	0.061	<b>0.009</b>

TABLA B.11: Pruebas efectivas del hipervolumen con dos objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA			VSD-MOEA/D						
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	
DTLZ1	0.01	0.00	0.01	0.00	0.02	-0.02	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.01
DTLZ2	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DTLZ3	0.05	0.00	0.05	0.00	0.19	-0.19	0.05	0.00	0.05	0.03	0.00	0.03	0.04	-0.01	0.05	0.00	0.05	0.05	0.00	0.00	0.05	0.00
DTLZ4	0.20	0.00	0.20	0.09	0.11	-0.03	0.00	0.44	-0.44	0.05	0.18	-0.13	0.20	0.00	0.20	0.00	0.20	0.20	0.00	0.20	0.20	0.00
DTLZ5	0.04	0.00	0.04	0.00	0.20	-0.20	0.04	0.00	0.03	0.04	0.00	0.04	0.00	0.04	0.00	0.04	0.00	0.04	0.00	0.04	0.00	0.04
DTLZ6	0.42	0.00	0.42	0.00	0.40	-0.40	0.09	0.17	-0.08	0.02	0.29	-0.27	0.08	0.17	-0.10	0.42	0.00	0.42	0.00	0.42	0.00	0.42
DTLZ7	1.43	0.00	1.43	0.00	1.44	-1.44	0.00	1.42	-1.42	0.00	1.42	-1.41	1.42	0.00	1.42	0.00	1.42	1.42	0.00	1.41	1.42	0.00
UF1	0.25	0.00	0.25	0.00	0.76	-0.76	0.22	0.02	0.21	0.10	0.27	-0.17	0.26	0.00	0.26	0.00	0.26	0.22	0.00	0.26	0.22	0.00
UF2	0.19	0.00	0.19	0.06	0.23	-0.17	0.16	0.03	0.14	0.00	0.53	-0.53	0.21	0.00	0.21	0.18	0.01	0.16	0.01	0.16	0.01	0.16
UF3	0.42	0.00	0.42	0.00	0.49	-0.49	0.26	0.09	0.17	0.00	0.69	-0.69	0.24	0.12	0.12	0.47	0.00	0.47	0.00	0.47	0.00	0.47
UF4	0.05	0.07	-0.02	0.00	0.18	-0.18	0.00	0.16	-0.16	0.06	0.06	0.06	0.01	0.20	0.00	0.20	0.00	0.16	0.01	0.16	0.01	0.16
UF5	1.58	0.51	1.07	0.34	1.90	-1.57	0.50	1.58	-1.09	0.00	3.59	-3.59	1.54	0.52	1.02	4.15	0.00	4.15	0.00	4.15	0.00	4.15
UF6	2.11	0.33	1.78	0.57	1.67	-1.11	0.45	2.03	-1.58	0.00	4.39	-4.39	1.95	0.41	1.53	3.77	0.00	3.77	0.00	3.77	0.00	3.77
UF7	1.96	0.00	1.96	0.00	3.28	-3.28	1.04	0.89	0.15	0.00	2.68	-2.68	1.95	0.00	1.95	1.92	0.01	1.91	0.01	1.91	0.01	1.91
WFG1	0.00	1.63	-1.63	0.63	0.00	0.43	0.05	0.38	0.19	0.69	-0.50	0.57	0.01	0.56	0.57	0.00	0.57	0.00	0.57	0.00	0.57	0.00
WFG2	0.41	0.00	0.41	0.00	0.46	-0.46	0.04	0.34	-0.30	0.02	0.38	-0.36	0.40	0.00	0.39	0.35	0.03	0.32	0.00	0.32	0.00	0.32
WFG3	0.00	0.18	-0.18	0.07	0.00	0.06	0.02	0.10	-0.08	0.07	0.00	0.07	0.08	0.00	0.08	0.06	0.01	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05
WFG4	0.01	0.01	-0.01	0.01	0.01	0.00	0.04	0.04	-0.04	0.02	0.00	0.01	0.04	0.00	0.04	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
WFG5	0.03	0.00	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.03	-0.03	0.00	0.02	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01
WFG6	0.20	0.10	0.10	0.00	0.18	-0.18	0.00	0.19	-0.19	0.00	0.21	-0.21	0.00	0.22	0.00	0.22	0.00	0.22	0.00	0.22		

TABLA B.13: Pruebas efectivas del hipervolumen con tres objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA			VSD-MOEA/D		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.03	0.00	0.03	0.00	0.04	-0.04	0.03	0.00	0.03	0.00	0.03	-0.03	0.05	0.00	0.05	0.00	0.03	-0.03
DTLZ2	0.01	0.06	-0.05	0.04	0.03	0.01	0.00	0.08	-0.08	0.00	0.08	-0.08	0.13	0.00	0.13	0.08	0.01	0.07
DTLZ3	0.34	0.06	0.28	0.00	1.07	-1.07	0.33	0.06	0.28	0.11	0.51	-0.39	0.48	0.00	0.48	0.43	0.01	0.42
DTLZ4	0.12	0.05	0.07	0.10	0.09	0.01	0.10	0.08	0.01	0.00	0.58	-0.58	0.27	0.00	0.27	0.22	0.01	0.21
DTLZ5	0.38	0.00	0.38	0.00	0.66	-0.66	0.35	0.01	0.34	0.06	0.34	-0.28	0.37	0.00	0.37	0.11	0.25	-0.15
DTLZ6	1.37	0.00	1.37	0.00	1.14	-1.14	0.61	0.25	0.35	0.00	1.31	-1.31	0.36	0.49	-0.13	0.93	0.09	0.85
DTLZ7	2.80	0.05	2.74	0.00	2.74	-2.74	0.00	2.74	-2.74	0.01	2.73	-2.72	3.07	0.00	3.07	2.56	0.17	2.39
UF10	0.00	23.09	-23.09	3.71	6.98	-3.26	5.81	4.88	0.93	2.90	8.61	-5.71	14.73	0.42	14.31	16.83	0.00	16.83
UF8	0.00	25.48	-25.48	5.43	1.31	4.12	5.58	0.33	5.25	4.44	2.46	1.98	7.03	0.00	7.03	7.10	0.00	7.10
UF9	0.00	29.85	-29.85	5.77	0.93	4.84	5.86	0.75	5.11	5.75	0.98	4.76	7.71	0.00	7.71	7.47	0.05	7.42
WFG1	0.00	138.79	-138.79	33.56	0.00	33.56	26.54	6.07	20.47	26.55	6.06	20.49	33.41	0.00	33.41	31.37	0.51	30.86
WFG2	1.17	2.94	-1.77	1.62	3.72	-2.10	0.37	6.44	-6.07	0.00	10.87	-10.87	13.83	0.00	13.83	7.68	0.70	6.98
WFG3	0.00	1.84	-1.84	0.88	0.03	0.85	0.17	0.96	-0.79	0.77	0.08	0.70	0.46	0.39	0.07	1.01	0.00	1.01
WFG4	0.00	19.56	-19.56	7.69	0.50	7.19	3.29	4.14	-0.85	2.95	4.81	-1.87	10.17	0.00	10.17	6.17	1.26	4.91
WFG5	0.92	2.01	-1.09	3.79	0.50	3.30	0.83	2.27	-1.44	0.00	6.51	-6.51	6.27	0.00	6.27	1.24	1.77	-0.54
WFG6	0.00	16.15	-16.15	6.97	0.75	6.22	2.09	5.65	-3.56	2.12	5.58	-3.47	8.53	0.00	8.53	8.43	0.00	8.43
WFG7	0.00	16.38	-16.38	6.76	0.49	6.27	2.76	3.66	-0.90	2.40	4.39	-1.99	9.22	0.00	9.22	5.10	1.32	3.77
WFG8	0.00	35.14	-35.14	15.30	0.02	15.28	3.03	19.98	-16.95	11.22	3.61	7.61	15.40	0.00	15.40	14.32	0.51	13.80
WFG9	0.00	17.49	-17.49	11.79	0.22	11.57	0.00	17.23	-17.23	6.43	4.50	1.92	12.88	0.00	12.88	9.64	1.29	8.35
Total	7.135	328.942	-321.806	103.406	21.209	82.196	57.761	75.594	-17.833	65.700	64.042	1.658	144.389	1.306	143.083	120.693	7.991	112.702

TABLA B.14: Pruebas efectivas de IGD+ con tres objetivos de los algoritmos representativos

	GDE3			MOMBI-II			NSGA-II			MOEA/D			VSD-MOEA			VSD-MOEA/D		
	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score	↑	↓	Score
DTLZ1	0.001	0.021	-0.020	0.015	0.000	0.015	0.000	0.025	-0.025	0.010	0.003	0.007	0.011	0.002	0.010	0.014	0.000	0.014
DTLZ2	0.001	0.021	-0.020	0.016	0.001	0.015	0.000	0.027	-0.027	0.006	0.011	-0.005	0.017	0.000	0.017	0.020	0.000	0.020
DTLZ3	0.000	0.022	-0.022	0.016	0.001	0.015	0.000	0.025	-0.025	0.006	0.011	-0.005	0.018	0.000	0.017	0.020	0.000	0.020
DTLZ4	0.012	0.012	0.000	0.069	0.048	0.021	0.060	0.049	0.012	0.000	0.291	-0.291	0.128	0.001	0.127	0.130	0.000	0.130
DTLZ5	0.006	0.000	0.006	0.000	0.004	-0.004	0.002	0.002	0.000	0.000	0.003	-0.003	0.005	0.000	0.005	0.000	0.003	-0.003
DTLZ6	0.254	0.000	0.254	0.028	0.150	-0.122	0.097	0.076	0.021	0.000	0.297	-0.297	0.033	0.135	-0.102	0.247	0.001	0.245
DTLZ7	1.967	0.007	1.960	0.000	1.968	-1.968	0.008	1.940	-1.931	0.004	1.948	-1.944	1.999	0.000	1.999	1.916	0.032	1.884
UF10	0.000	6.530	-6.530	1.207	0.517	0.690	1.318	0.456	0.861	1.156	0.699	0.458	2.175	0.043	2.132	2.389	0.000	2.389
UF8	0.000	5.922	-5.922	1.161	0.157	1.004	1.260	0.098	1.162	1.211	0.276	0.846	1.435	0.010	1.425	1.485	0.000	1.485
UF9	0.000	6.309	-6.309	1.244	0.173	1.071	1.217	0.203	1.014	1.221	0.208	1.012	1.603	0.001	1.602	1.610	0.000	1.610
WFG1	0.000	5.708	-5.708	1.307	0.000	1.307	1.095	0.235	0.859	1.132	0.160	0.972	1.322	0.000	1.322	1.262	0.015	1.248
WFG2	0.023	0.222	-0.199	0.146	0.027	0.119	0.000	0.335	-0.335	0.085	0.067	0.018	0.268	0.000	0.268	0.146	0.016	0.129
WFG3	0.000	0.169	-0.169	0.071	0.005	0.066	0.018	0.078	-0.060	0.078	0.001	0.077	0.039	0.036	0.003	0.083	0.000	0.083
WFG4	0.000	0.537	-0.537	0.233	0.000	0.233	0.091	0.084	0.006	0.089	0.089	0.000	0.216	0.003	0.212	0.131	0.046	0.086
WFG5	0.039	0.026	0.013	0.098	0.000	0.098	0.013	0.051	-0.038	0.000	0.113	-0.113	0.086	0.002	0.083	0.011	0.055	-0.043
WFG6	0.000	0.449	-0.449	0.208	0.000	0.208	0.065	0.123	-0.058	0.065	0.122	-0.056	0.190	0.004	0.186	0.178	0.009	0.169
WFG7	0.000	0.456	-0.456	0.215	0.000	0.215	0.083	0.076	0.007	0.071	0.100	-0.029	0.199	0.003	0.196	0.113	0.047	0.066
WFG8	0.000	0.948	-0.948	0.404	0.000	0.404	0.098	0.456	-0.358	0.292	0.069	0.223	0.362	0.000	0.362	0.339	0.022	0.317
WFG9	0.000	0.475	-0.475	0.325	0.000	0.325	0.000	0.454	-0.454	0.185	0.094	0.091	0.308	0.000	0.308	0.241	0.038	0.203
Total	2.302	27.833	-25.532	6.764	3.051	3.713	5.426	4.794	0.631	5.523	4.562	0.961	10.416	0.241	10.174	10.337	0.284	10.052

FIGURA B.4: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

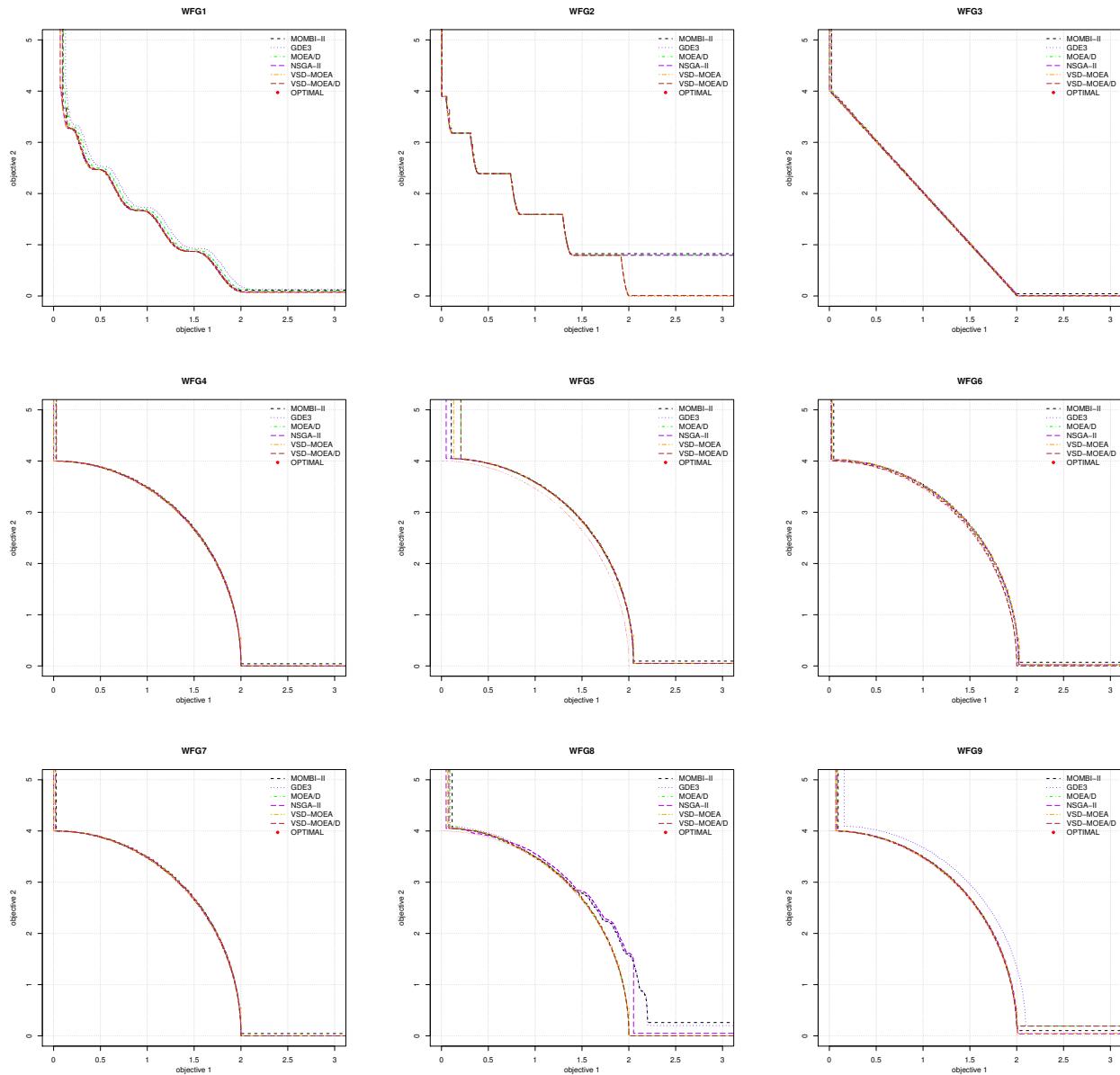


FIGURA B.5: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

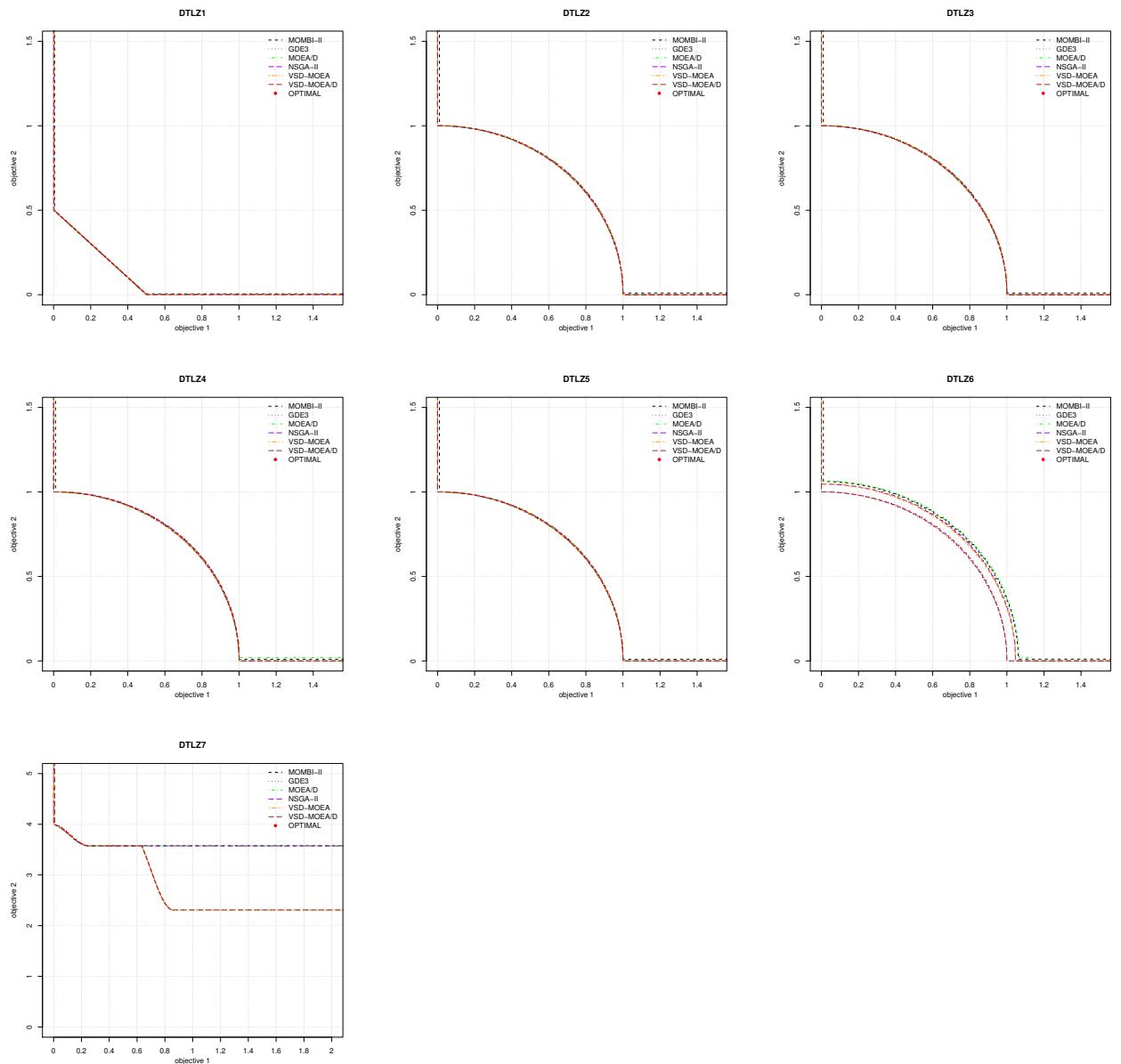


FIGURA B.6: superficies de cubrimiento logradas al 50 %

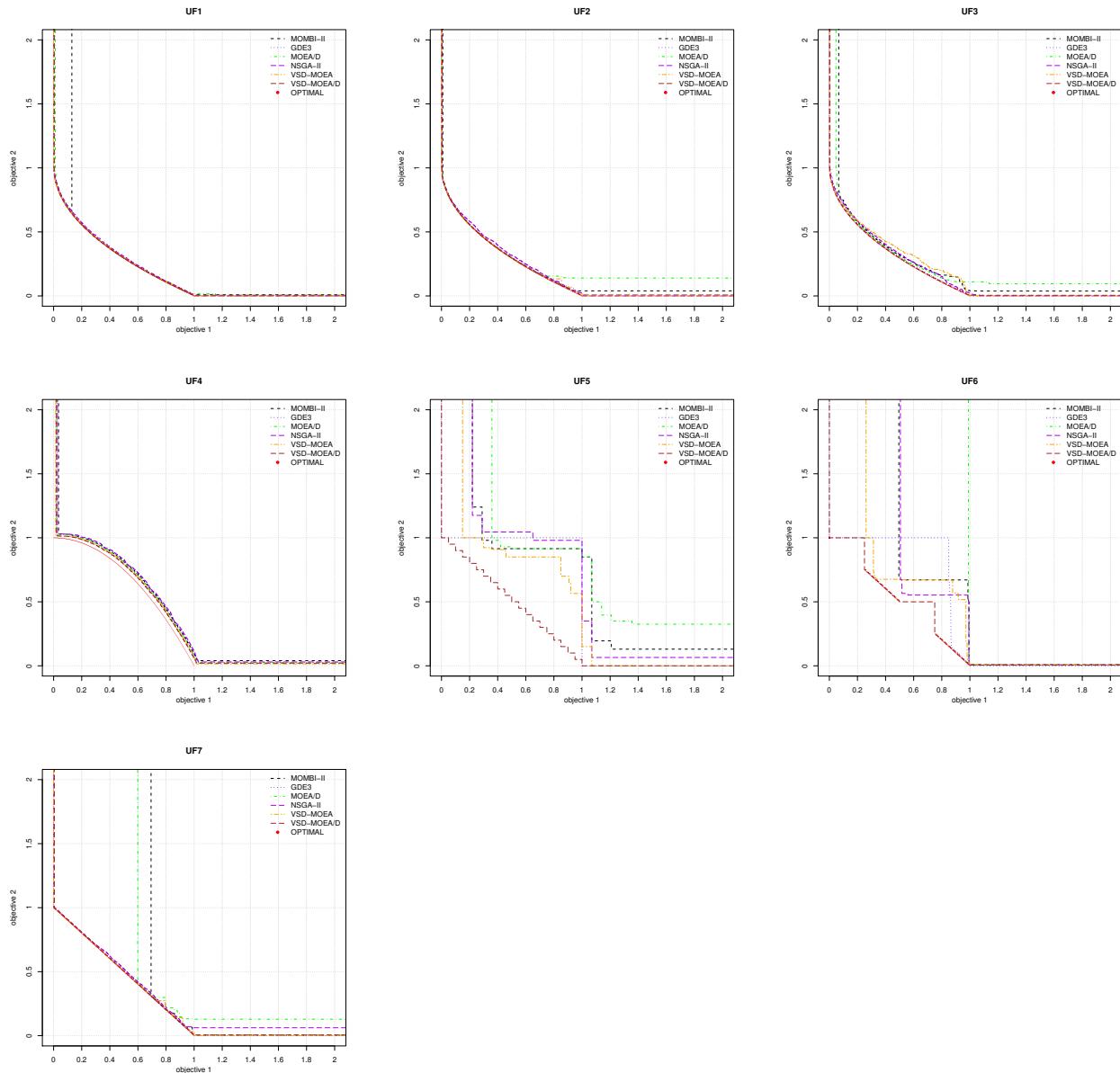


FIGURA B.7: Frente no dominado de las 35 ejecuciones, en la columna izquierda el VSD-MOEA y la derecha el VSD-MOEA/D

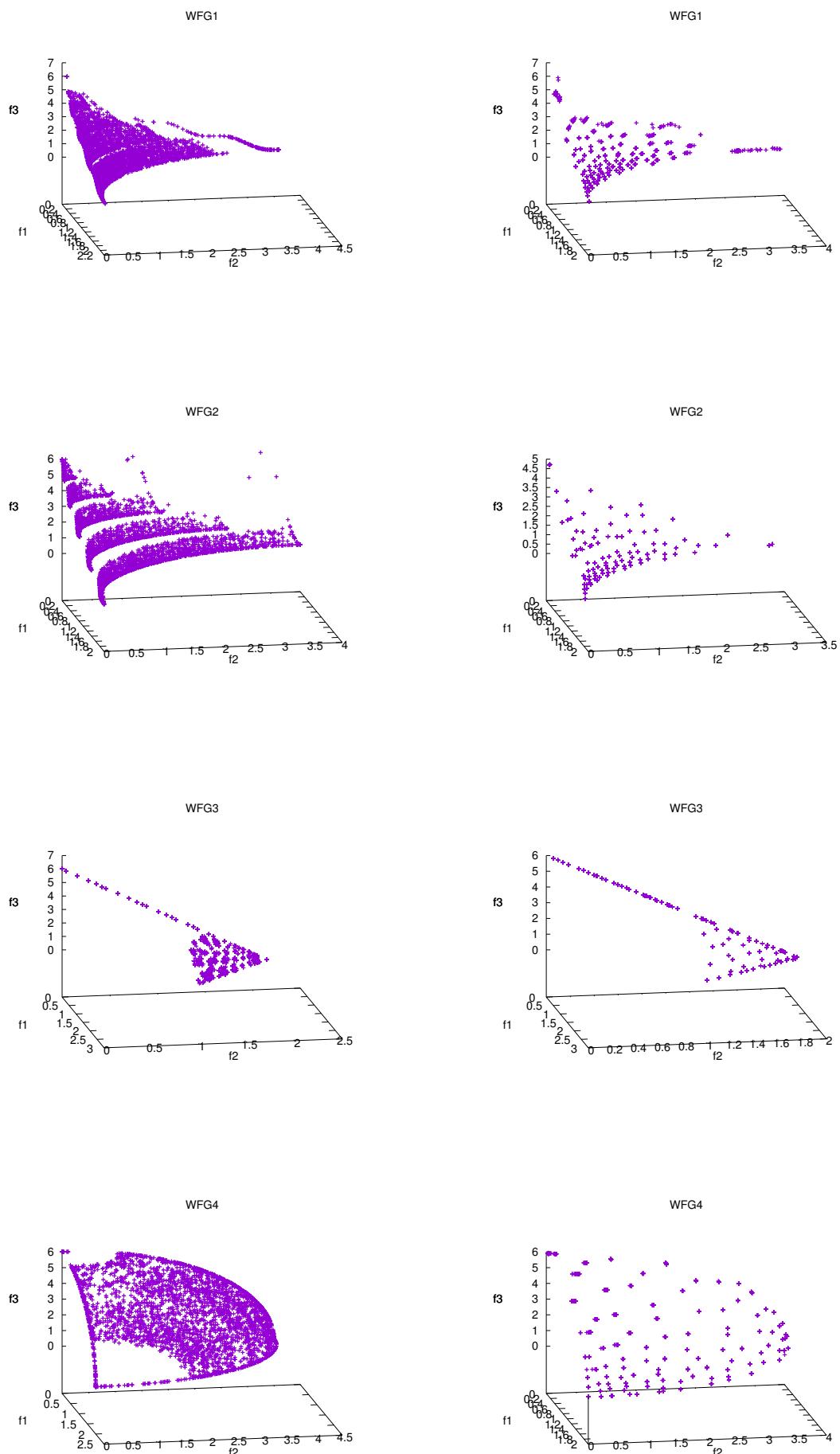


FIGURA B.8: Frente no dominado de las 35 ejecuciones, en la columna izquierda el VSD-MOEA y la derecha el VSD-MOEA/D

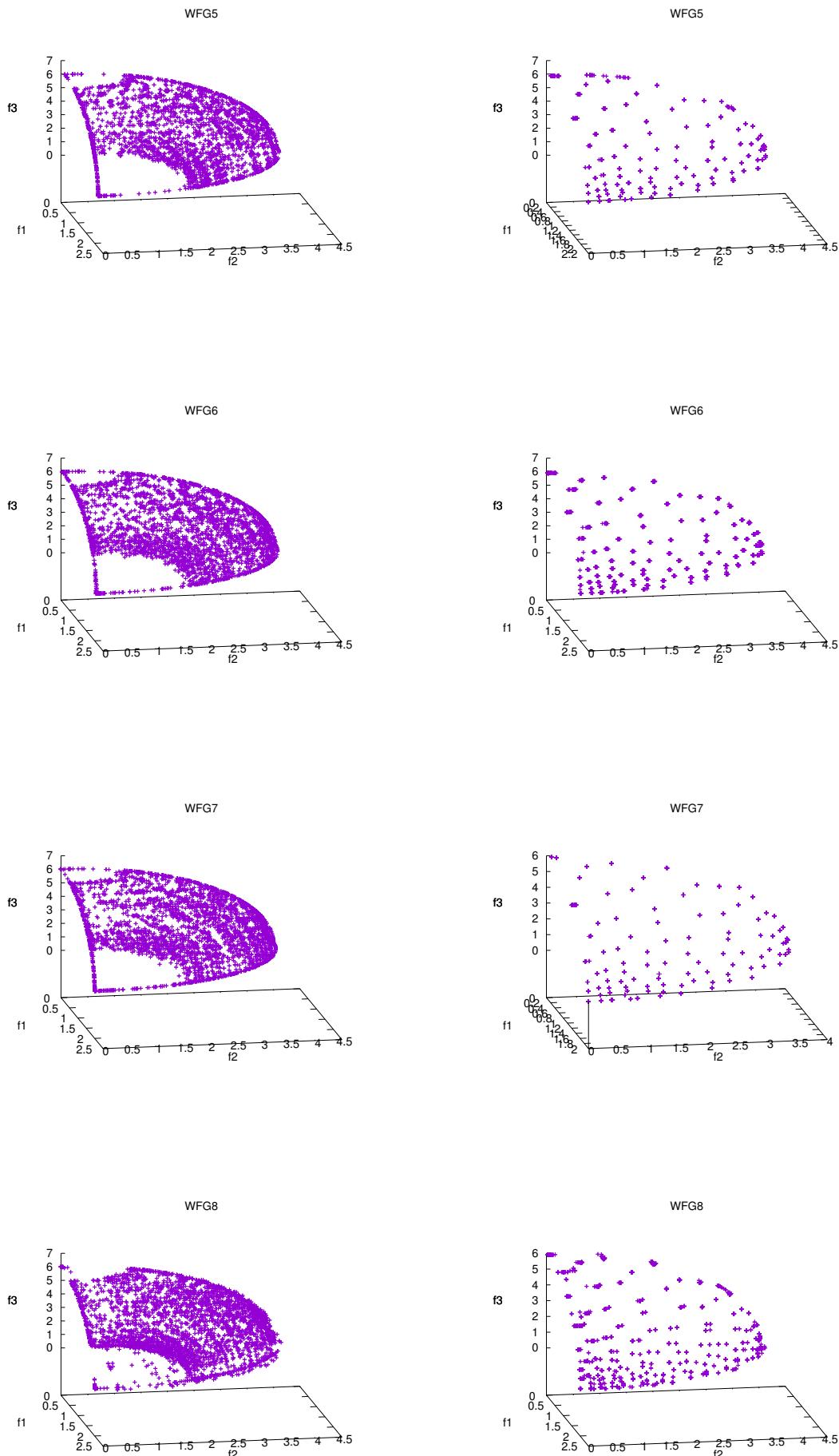


FIGURA B.9: Frente no dominado de las 35 ejecuciones, en la columna izquierda el VSD-MOEA y la derecha el VSD-MOEA/D

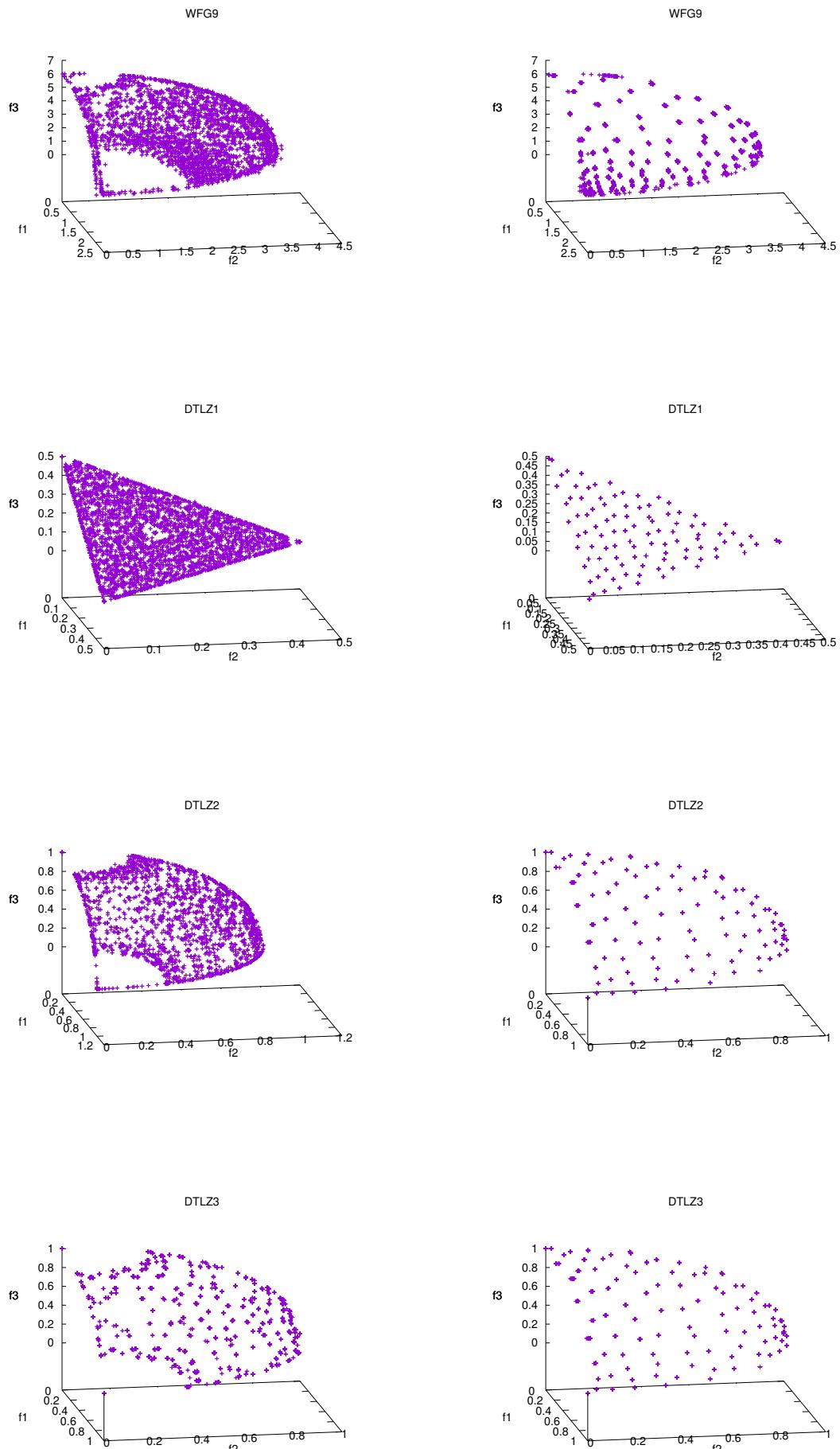


FIGURA B.10: Frente no dominado de las 35 ejecuciones, en la columna izquierda el VSD-MOEA y la derecha el VSD-MOEA/D

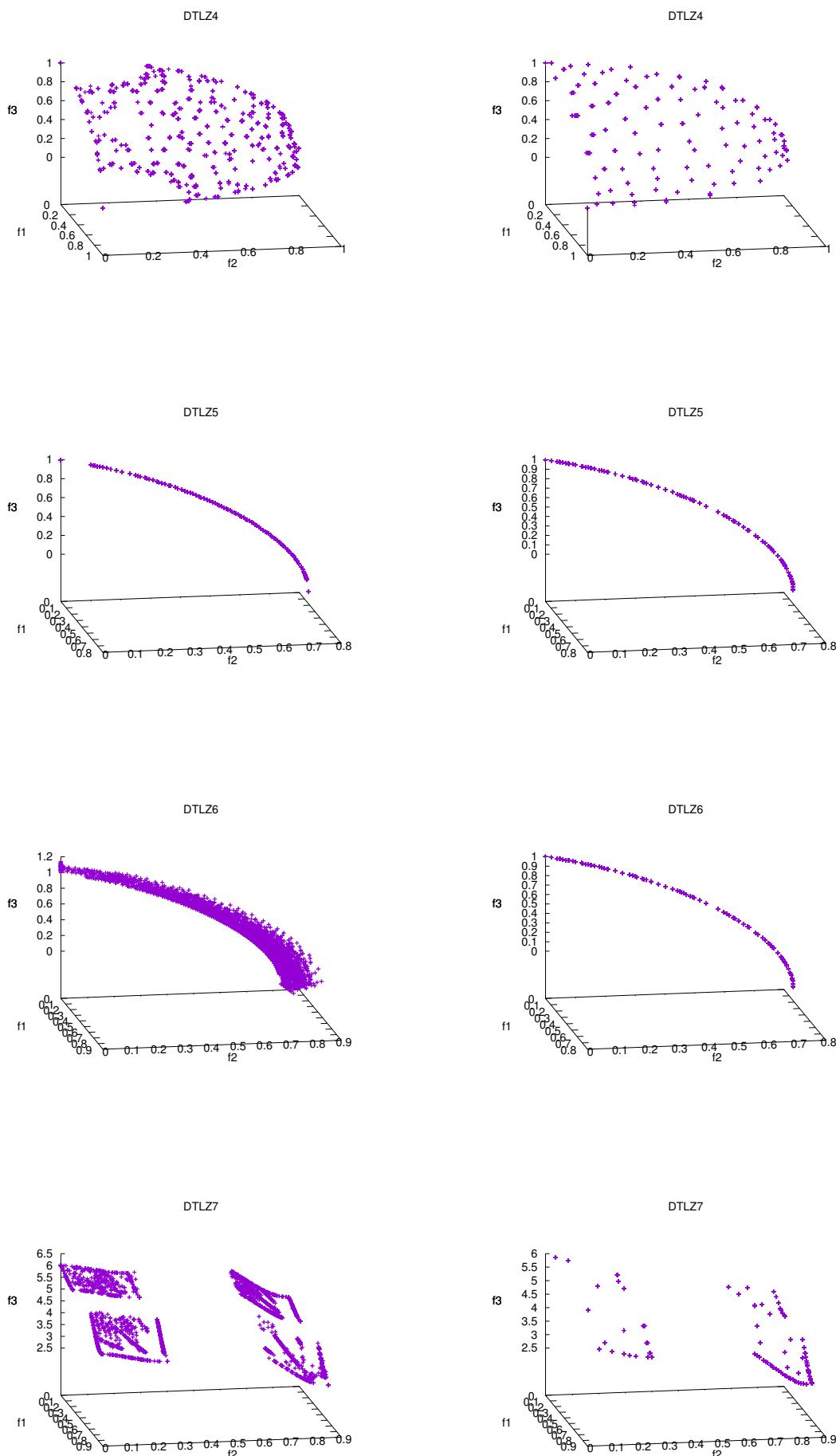
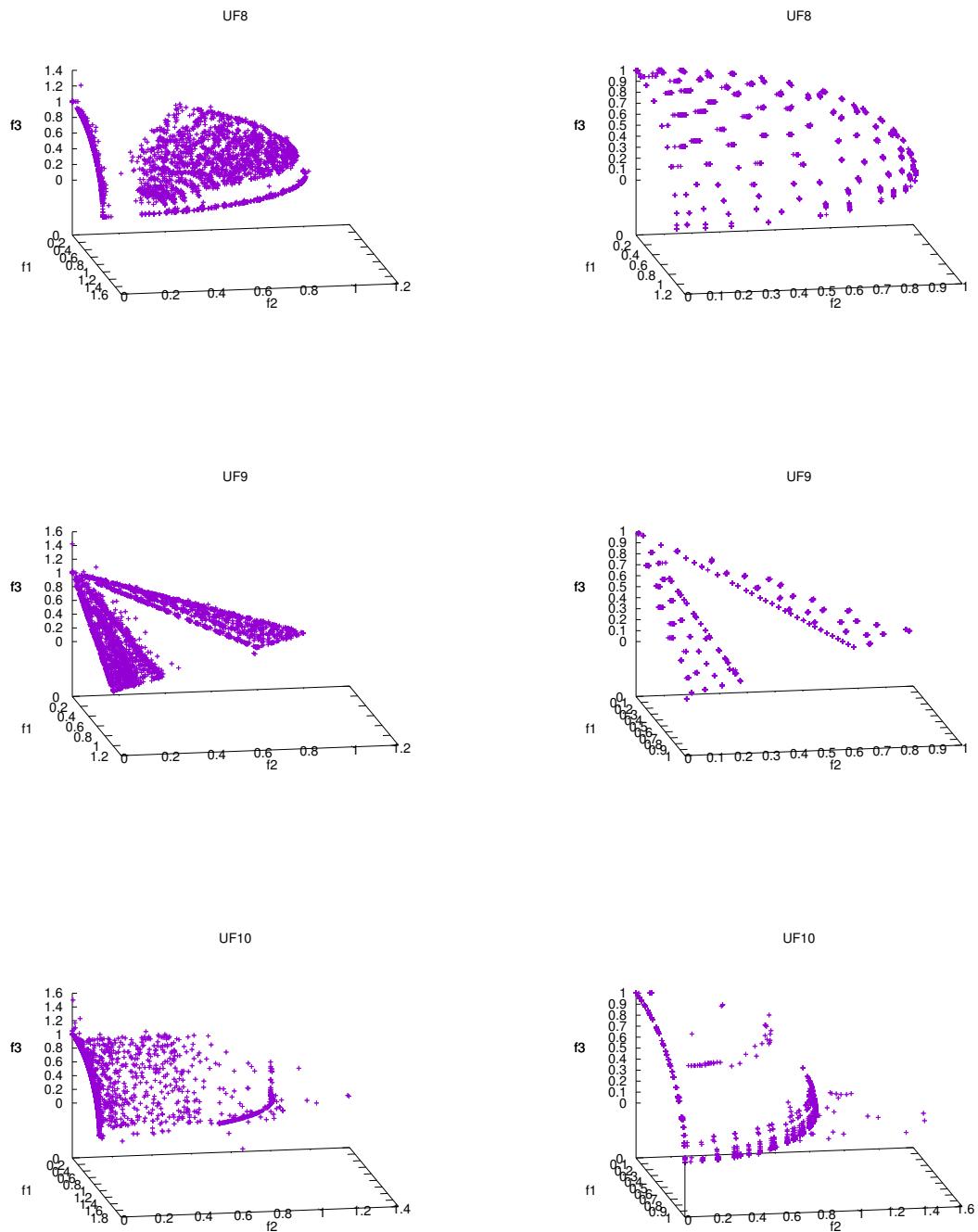


FIGURA B.11: Frente no dominado de las 35 ejecuciones, en la columna izquierda el VSD-MOEA y la derecha el VSD-MOEAD





# Bibliografía

- Agrawal, Ram Bhushan y col. (1994). *Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space*. Inf. téc.
- Arabas, Jarosław, Adam Szczepankiewicz y Tomasz Wroniak (2010). «Experimental comparison of methods to handle boundary constraints in differential evolution». En: *Parallel Problem Solving from Nature, PPSN XI*, págs. 411-420.
- Berenguer, José Antonio Molinet y Carlos Artemio Coello Coello (2014). «Optimización Evolutiva Multiojetivo basada en el Algoritmo de Kuhn-Munkres». En:
- Beume, Nicola, Boris Naujoks y Michael Emmerich (2007). «SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume ». En: *European Journal of Operational Research* 181.3, págs. 1653 -1669. ISSN: 0377-2217.
- Brockhoff, D., Tobias Wagner y Heike Trautmann (2012). «On the Properties of the R2 Indicator». En: *Proceedings of the 14th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. GECCO '12. Philadelphia, Pennsylvania, USA: ACM, págs. 465-472. ISBN: 978-1-4503-1177-9. DOI: 10.1145/2330163.2330230. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2330163.2330230>.
- Brockhoff D., Wagner T. y Trautman H (2015). «R2 Indicator-Based Multiobjective Search». En: *Evolutionary Computation* 23.3.
- Bui, L. T., H. A. Abbass y J. Branke (2005). «Multiobjective optimization for dynamic environments». En: *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vol. 3, 2349-2356 Vol. 3.
- Chan, KP y T Ray (2005). «An evolutionary algorithm to maintain diversity in the parametric and the objective space». En: *International Conference on Computational Robotics and Autonomous Systems (CIRAS), Centre for Intelligent Control, National University of Singapore*.
- Chiang, T. C. e Y. P. Lai (2011). «MOEA/D-AMS: Improving MOEA/D by an adaptive mating selection mechanism». En: *2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)*, págs. 1473-1480.
- Coello, Carlos A. Coello, Gary B. Lamont y David A. Van Veldhuizen (2006). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems (Genetic and Evolutionary Computation)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc. ISBN: 0387332545.
- Cohon, Jared L y David H Marks (1975). «A review and evaluation of multiobjective programing techniques». En: *Water Resources Research* 11.2, págs. 208-220.
- Cormen, Thomas H (2009). *Introduction to algorithms*. MIT press.
- Das, Indraneel y John E Dennis (1998). «Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems». En: *SIAM Journal on Optimization* 8.3, págs. 631-657.
- Deb, K. y col. (2002a). «A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6.2, págs. 182-197. ISSN: 1089-778X.
- Deb, Kalyanmoy y Hans-Georg Beyer (1999). *Self-adaptive genetic algorithms with simulated binary crossover*. Secretary of the SFB 531.
- Deb, Kalyanmoy e Himanshu Jain (2014a). «An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 18.4, págs. 577-601. ISSN: 1089-778X. DOI: 10.1109/TEVC.2013.2281535.

- Deb, Kalyanmoy e Himanshu Jain (2014b). «An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints.» En: *IEEE Trans. Evolutionary Computation* 18.4, págs. 577-601.
- Deb, Kalyanmoy y Deb Kalyanmoy (2001). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 047187339X.
- Deb, Kalyanmoy y Santosh Tiwari (2005). «Omni-optimizer: A Procedure for Single and Multi-objective Optimization.» En: *EMO*. Vol. 3410. Springer, págs. 47-61.
- Deb, Kalyanmoy y col. (2002b). «Scalable multi-objective optimization test problems». En: *Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on*. Vol. 1. IEEE, págs. 825-830.
- (2005). *Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization*. Springer.
- Derbel, Bilel y col. (2014). «On the impact of multiobjective scalarizing functions». En: *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Springer, págs. 548-558.
- Durillo, J. J. y col. (2010). «A Study of Multiobjective Metaheuristics When Solving Parameter Scalable Problems». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 14.4, págs. 618-635. ISSN: 1089-778X.
- Díaz-Manríquez, A. y col. (2013). «A ranking method based on the R2 indicator for many-objective optimization». En: *2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, págs. 1523-1530. DOI: 10.1109/CEC.2013.6557743.
- Emmerich, Michael, Nicola Beume y Boris Naujoks (2005). «An EMO algorithm using the hypervolume measure as selection criterion». En: *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, págs. 62-76.
- Eshelman, Larry J. (1991). «The CHC Adaptive Search Algorithm: How to Have Safe Search When Engaging in Nontraditional Genetic Recombination». En: *Foundations of Genetic Algorithms*. Ed. por Gregory J.E. Rawlins. Vol. 1. Morgan Kaufmann Publishers, págs. 265 -283.
- Eshelman, Larry J (1993). «Real coded genetic algorithms and interval-schemata». En: *Foundations of genetic algorithms 2*, págs. 187-202.
- Fang, Kai-Tai (1980). «The uniform design: application of number-theoretic methods in experimental design». En: *Acta Math. Appl. Sinica* 3.4, págs. 363-372.
- Fang, KT e Y Wang (1994). *Number-theoretic Methods in Statistics, volume 51 of Monographs on Statistics and Applied Probability*.
- Finkenstadt, Barbel, Leonhard Held y Valerie Isham (2006). *Statistical methods for spatio-temporal systems*. CRC Press.
- Fonseca, Carlos M. y Peter J. Fleming (1993). «Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: FormulationDiscussion and Generalization». En: *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., págs. 416-423. ISBN: 1-55860-299-2. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=645513.657757>.
- Gee, Sen Bong y col. (2015). «Online diversity assessment in evolutionary multiobjective optimization: A geometrical perspective». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 19.4, págs. 542-559.
- Hernández Gómez, Raquel y Carlos A. Coello Coello (2015a). «Improved Metaheuristic Based on the R2 Indicator for Many-Objective Optimization». En: *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. GECCO '15. Madrid, Spain: ACM, págs. 679-686. ISBN: 978-1-4503-3472-3.
- (2015b). «Improved Metaheuristic Based on the R2 Indicator for Many-Objective Optimization». En: *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. GECCO '15. Madrid, Spain: ACM, págs. 679-686. ISBN: 978-1-4503-3472-3. DOI: 10.1145/2739480.2754776. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2739480.2754776>.

- Hernández Gómez, Raquel, Carlos A. Coello Coello y Enrique Alba (2016). «A Parallel Version of SMS-EMOA for Many-Objective Optimization Problems». En: *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN XIV: 14th International Conference, Edinburgh, UK, September 17-21, 2016, Proceedings*. Ed. por Julia Handl y col. Cham: Springer International Publishing, págs. 568-577. ISBN: 978-3-319-45823-6.
- Herrera, Francisco y Manuel Lozano (2003). «Fuzzy adaptive genetic algorithms: design, taxonomy, and future directions». En: *Soft Computing* 7.8, págs. 545-562.
- Herrera, Francisco, Manuel Lozano y Ana M Sánchez (2003). «A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: An experimental study». En: *International Journal of Intelligent Systems* 18.3, págs. 309-338.
- Horn, J., N. Nafpliotis y D. E. Goldberg (1994). «A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization». En: *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation. IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 82-87 vol.1.
- Huband, S. y col. (2006). «A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 10.5, págs. 477-506. ISSN: 1089-778X.
- Huband, Simon y col. (2005a). «A Scalable Multi-objective Test Problem Toolkit». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Third International Conference, EMO 2005, Guanajuato, Mexico, March 9-11, 2005. Proceedings*. Ed. por Carlos A. Coello Coello, Arturo Hernández Aguirre y Eckart Zitzler. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 280-295. ISBN: 978-3-540-31880-4.
- (2005b). «A Scalable Multi-objective Test Problem Toolkit». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Third International Conference, EMO 2005, Guanajuato, Mexico, March 9-11, 2005. Proceedings*. Ed. por Carlos A. Coello Coello, Arturo Hernández Aguirre y Eckart Zitzler. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 280-295. ISBN: 978-3-540-31880-4. DOI: 10.1007/978-3-540-31880-4\_20. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-31880-4\\_20](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-31880-4_20).
- Hwang, C-L y Abu Syed Md Masud (2012). *Multiple objective decision making—methods and applications: a state-of-the-art survey*. Vol. 164. Springer Science & Business Media.
- Ishibuchi, Hisao y Youhei Shibata (2003). «An Empirical Study on the Effect of Mating Restriction on the Search Ability of EMO Algorithms». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: Second International Conference, EMO 2003, Faro, Portugal, April 8-11, 2003. Proceedings*. Ed. por Carlos M. Fonseca y col. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 433-447. ISBN: 978-3-540-36970-7.
- Ishibuchi, Hisao, Noritaka Tsukamoto y Yusuke Nojima (2008a). «Evolutionary many-objective optimization: A short review». En: *2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*, págs. 2419-2426. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631121.
- (2008b). «Evolutionary many-objective optimization: A short review». En: *2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*, págs. 2419-2426. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631121.
- Ishibuchi, Hisao y col. (2009). «Effects of using two neighborhood structures on the performance of cellular evolutionary algorithms for many-objective optimization». En: *Evolutionary Computation, 2009. CEC'09. IEEE Congress on*. IEEE, págs. 2508-2515.
- (2010). «Simultaneous use of different scalarizing functions in MOEA/D». En: *Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM, págs. 519-526.
- Ishibuchi, Hisao y col. (2015). «Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance». En: *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, págs. 110-125.
- Jaeggi, DM y col. (2008). «The development of a multi-objective Tabu Search algorithm for continuous optimisation problems». En: *European Journal of Operational Research* 185.3, págs. 1192-1212.

- Jiang, S. y col. (2015). «A Simple and Fast Hypervolume Indicator-Based Multiobjective Evolutionary Algorithm». En: *IEEE Transactions on Cybernetics* 45.10, págs. 2202-2213. ISSN: 2168-2267. DOI: 10 . 1109/TCYB.2014.2367526.
- Jiang, Shouyong y Shengxiang Yang (2016). «An improved multiobjective optimization evolutionary algorithm based on decomposition for complex Pareto fronts». En: *IEEE transactions on cybernetics* 46.2, págs. 421-437.
- Jiang, Siwei y col. (2016). «Towards adaptive weight vectors for multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition». En: *Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on*. IEEE, págs. 500-507.
- Knowles, J. y D. Corne (2002). «On metrics for comparing nondominated sets». En: *Evolutionary Computation, 2002. CEC '02. Proceedings of the 2002 Congress on*. Vol. 1, págs. 711-716. DOI: 10 . 1109/CEC . 2002.1007013.
- Knowles, J. D., D. W. Corne y M. Fleischer (2003a). «Bounded archiving using the lebesgue measure». En: *Evolutionary Computation, 2003. CEC '03. The 2003 Congress on*. Vol. 4, 2490-2497 Vol.4. DOI: 10 . 1109/CEC.2003.1299401.
- (2003b). «Bounded archiving using the lebesgue measure». En: *Evolutionary Computation, 2003. CEC '03. The 2003 Congress on*. Vol. 4, 2490-2497 Vol.4. DOI: 10 . 1109/CEC.2003.1299401.
- Koumousis, V.K. y C.P. Katsaras (2006). «A saw-tooth genetic algorithm combining the effects of variable population size and reinitialization to enhance performance». En: 10.1, págs. 19-28.
- Kreischer, Vinicius y col. (2017). «Evaluation of Bound Constraints Handling Methods in Differential Evolution using the CEC2017 Benchmark». En:
- Kukkonen, S. y K. Deb (2006). «Improved Pruning of Non-Dominated Solutions Based on Crowding Distance for Bi-Objective Optimization Problems». En: *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, págs. 1179-1186.
- Kukkonen, S. y J. Lampinen (2005). «GDE3: the third evolution step of generalized differential evolution». En: *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vol. 1, 443-450 Vol.1.
- Kukkonen, Saku y Carlos A Coello Coello (2017). «Generalized Differential Evolution for Numerical and Evolutionary Optimization». En: *NEO 2015*. Springer, págs. 253-279.
- Kukkonen, Saku y Jouni Lampinen (2009). «Performance assessment of generalized differential evolution 3 with a given set of constrained multi-objective test problems». En: *Evolutionary Computation, 2009. CEC'09. IEEE Congress on*. IEEE, págs. 1943-1950.
- Lampinen, Jouni y col. (2001). «DE's selection rule for multiobjective optimization». En: *Lappeenranta University of Technology, Department of Information Technology, Tech. Rep*, págs. 03-04.
- Leskovec, Jure, Anand Rajaraman y Jeffrey David Ullman (2014). *Mining of massive datasets*. Cambridge university press.
- Li, Hui y Qingfu Zhang (2009). «Multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets, MOEA/D and NSGA-II». En: *IEEE transactions on evolutionary computation* 13.2, págs. 284-302.
- Li, Ke y col. (2014). «Stable matching-based selection in evolutionary multiobjective optimization». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 18.6, págs. 909-923.
- Li, Yifan y col. (2015). «A method for distributing reference points uniformly along the Pareto front of DTLZ test functions in many-objective evolutionary optimization». En: *Information Science and Technology (ICIST), 2015 5th International Conference on*. IEEE, págs. 541-546.
- López-Camacho, Esteban y col. (2013). «jMetalCpp: optimizing molecular docking problems with a C++ metaheuristic framework». En: *Bioinformatics* 30.3, págs. 437-438.
- Ma, Xiaoliang y col. (2014). «MOEA/D with uniform decomposition measurement for many-objective problems». En: *Soft Computing* 18.12, págs. 2541-2564.
- Mahfoud, Samir W (1995). «Niching methods for genetic algorithms». En: *Urbana* 51.95001, págs. 62-94.

- Maltese, Justin, Beatrice M Ombuki-Berman y Andries P Engelbrecht (2016). «A Scalability Study of Many-Objective Optimization Algorithms». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*.
- Miettinen, Kaisa y Marko M Mäkelä (2002). «On scalarizing functions in multiobjective optimization». En: *OR spectrum* 24.2, págs. 193-213.
- Mitchell, Melanie (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA, USA: MIT Press. ISBN: 0262631857.
- Molinet Berenguer, José A. y Carlos A. Coello Coello (2015). «Evolutionary Many-Objective Optimization Based on Kuhn-Munkres' Algorithm». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 8th International Conference, EMO 2015, Guimarães, Portugal, March 29 –April 1, 2015. Proceedings, Part II*. Ed. por António Gaspar-Cunha, Carlos Henggeler Antunes y Carlos Coello Coello. Cham: Springer International Publishing, págs. 3-17. ISBN: 978-3-319-15892-1. DOI: 10.1007/978-3-319-15892-1\_1. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-15892-1\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-15892-1_1).
- Ono, Isao, Hajime Kita y Shigenobu Kobayashi (2003). «Advances in Evolutionary Computing». En: ed. por Ashish Ghosh y Shigeyoshi Tsutsui. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc. Cap. A Real-coded Genetic Algorithm Using the Unimodal Normal Distribution Crossover, págs. 213-237. ISBN: 3-540-43330-9. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=903758.903767>.
- Pilát, M (2010). «Evolutionary multiobjective optimization: a short survey of the state-of-the-art». En: *Proceedings of the Contributed Papers Part I-Mathematics and Computer Sciences, WDS, Prague, Czech*, págs. 1-4.
- Piroonratana, Theera y Nachol Chaiyaratana (2006). «Improved multi-objective diversity control oriented genetic algorithm». En: *Artificial Intelligence and Soft Computing–ICAISC 2006*, págs. 430-439.
- Preuss, Mike, Boris Naujoks y Günter Rudolph (2006). «Pareto set and EMOA behavior for simple multimodal multiobjective functions». En: *PPSN*. Springer, págs. 513-522.
- Price, Kenneth, Rainer M Storn y Jouni A Lampinen (2006). *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Springer Science & Business Media.
- Qi, Yutao y col. (2014). «MOEA/D with Adaptive Weight Adjustment». En: *Evol. Comput.* 22.2, págs. 231-264. ISSN: 1063-6560.
- Quagliarella, Domenico, Alessandro Vicini y Centro Italiano Ricerche Aerospaziali CIRA (1999). «Designing high-lift airfoils using genetic algorithms». En: *Proceedings of EUROGEN*. Vol. 99.
- Rudolph, Günter, Boris Naujoks y Mike Preuss (2007). «Capabilities of EMOA to detect and preserve equivalent Pareto subsets». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Springer, págs. 36-50.
- Salomon, Ralf (1996). «Re-evaluating genetic algorithm performance under coordinate rotation of benchmark functions. A survey of some theoretical and practical aspects of genetic algorithms». En: *BioSystems* 39.3, págs. 263-278.
- Schaffer, J. David (1985). «Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms». En: *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*. Hillsdale, NJ, USA: L. Erlbaum Associates Inc., págs. 93-100. ISBN: 0-8058-0426-9. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=645511.657079>.
- Schutze, Oliver y col. (2012). «Using the averaged Hausdorff distance as a performance measure in evolutionary multiobjective optimization». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 16.4, págs. 504-522.
- Segredo, Eduardo, Carlos Segura y Coromoto León (2011). «A multiobjectivised memetic algorithm for the frequency assignment problem». En: *Evolutionary Computation (CEC), 2011 IEEE Congress on*. IEEE, págs. 1132-1139.

- Segura, C. y col. (2016a). «A Novel Diversity-Based Replacement Strategy for Evolutionary Algorithms». En: *IEEE Transactions on Cybernetics* 46.12, págs. 3233-3246. ISSN: 2168-2267. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2501726.
- (2016b). «A Novel Diversity-Based Replacement Strategy for Evolutionary Algorithms». En: *IEEE Transactions on Cybernetics* 46.12, págs. 3233-3246. ISSN: 2168-2267.
- Segura, Carlos y col. (2015). «A Novel Diversity-based Evolutionary Algorithm for the Traveling Salesman Problem». En: *Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. GECCO '15. Madrid, Spain: ACM, págs. 489-496. ISBN: 978-1-4503-3472-3. DOI: 10.1145/2739480.2754802. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2739480.2754802>.
- Segura, Carlos y col. (2016c). «The importance of diversity in the application of evolutionary algorithms to the Sudoku problem». En: *Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on*. IEEE, págs. 919-926.
- Segura, Carlos y col. (2016d). «Using multi-objective evolutionary algorithms for single-objective constrained and unconstrained optimization». En: *Annals of Operations Research* 240.1, págs. 217-250. ISSN: 1572-9338.
- Shir, Ofer M y col. (2009). «Enhancing Decision Space Diversity in Evolutionary Multiobjective Algorithms». En: *EMO*. Vol. 9. Springer, págs. 95-109.
- Sivanandam, SN y SN Deepa (2007). *Introduction to genetic algorithms*. Springer Science & Business Media.
- Srinivas, N. y Kalyanmoy Deb (1994). «Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms». En: *Evol. Comput.* 2.3, págs. 221-248. ISSN: 1063-6560. DOI: 10.1162/evco.1994.2.3.221. URL: <http://dx.doi.org/10.1162/evco.1994.2.3.221>.
- Storn, Rainer y Kenneth Price (1997a). «Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces». En: *Journal of Global Optimization* 11.4, págs. 341-359. ISSN: 1573-2916. DOI: 10.1023/A:1008202821328. URL: <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>.
- (1997b). «Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces». En: *Journal of global optimization* 11.4, págs. 341-359.
- (1997c). «Differential Evolution &Ndash; A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces». En: *J. of Global Optimization* 11.4, págs. 341-359. ISSN: 0925-5001. DOI: 10.1023/A:1008202821328. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1008202821328>.
- Talke, I.S. (2012a). *Number Theoretic Methods in Designing Experiments*. Montana State University. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=hOsRnQAACAAJ>.
- Talke, Ismael Suleman (2012b). *Number theoretic methods in designing experiments*. Montana State University.
- Tan, Kay Chen, Eik Fun Khor y Tong Heng Lee (2005). *Multiobjective Evolutionary Algorithms and Applications (Advanced Information and Knowledge Processing)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc. ISBN: 1852338369.
- Tan, Yan-Yan y col. (2012a). «A modification to MOEA/D-DE for multiobjective optimization problems with complicated Pareto sets». En: *Information Sciences* 213, págs. 14-38.
- (2012b). «MOEA/D-SQA: a multi-objective memetic algorithm based on decomposition». En: *Engineering Optimization* 44.9, págs. 1095-1115.
- (2013). «MOEA/D+ uniform design: A new version of MOEA/D for optimization problems with many objectives». En: *Computers & Operations Research* 40.6, págs. 1648-1660.
- Toffolo, Andrea y Ernesto Benini (2003). «Genetic diversity as an objective in multi-objective evolutionary algorithms». En: *Evolutionary computation* 11.2, págs. 151-167.

- Tušar, Tea y Bogdan Filipič (2007). «Differential Evolution versus Genetic Algorithms in Multiobjective Optimization». En: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 4th International Conference, EMO 2007, Matsushima, Japan, March 5-8, 2007. Proceedings*. Ed. por Shigeru Obayashi y col. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 257-271. ISBN: 978-3-540-70928-2. DOI: 10.1007/978-3-540-70928-2\_22. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70928-2\\_22](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70928-2_22).
- Ulrich, Tamara, Johannes Bader y Eckart Zitzler (2010). «Integrating decision space diversity into hypervolume-based multiobjective search». En: *Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. ACM, págs. 455-462.
- Črepinský, Matej, Shih-Hsi Liu y Marjan Mernik (2013). «Exploration and Exploitation in Evolutionary Algorithms: A Survey». En: *ACM Computing Surveys* 45.3, 35:1-35:33.
- Veldhuizen, David A. Van y Gary B. Lamont (1998). «Evolutionary Computation and Convergence to a Pareto Front». En: *Stanford University, California*. Morgan Kaufmann, págs. 221-228.
- Voorneveld, Mark (2003). «Characterization of Pareto dominance». En: *Operations Research Letters* 31.1, págs. 7-11.
- Wang, Zhenkun y col. (2014). «A replacement strategy for balancing convergence and diversity in MOEA/D». En: *Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*. IEEE, págs. 2132-2139.
- Wang, Zhenkun y col. (2016). «Adaptive replacement strategies for MOEA/D». En: *IEEE transactions on cybernetics* 46.2, págs. 474-486.
- Wierzbicki, Andrzej P. (1980). «The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization». En: *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application: Proceedings of the Third Conference Hagen/Königswinter, West Germany, August 20–24, 1979*. Ed. por Günter Fandel y Tomas Gal. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 468-486. ISBN: 978-3-642-48782-8. DOI: 10.1007/978-3-642-48782-8\_32. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-48782-8\\_32](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-48782-8_32).
- Yuan, Wang y Fang Kaitai (2005). «Number Theoretic Methods in Applied Statistics (II)». En: *Chinese annals of mathematics, series B* 11.3, págs. 384-394.
- Zaharie, Daniela (2002). «Critical values for the control parameters of differential evolution algorithms». En: *Proceedings of MENDEL*. Vol. 2, pág. 6267.
- Zhang, Hu y col. (2016). «Self-organizing multiobjective optimization based on decomposition with neighborhood ensemble». En: *Neurocomputing* 173, págs. 1868-1884.
- Zhang, Jingqiao y Arthur C Sanderson (2009). «JADE: adaptive differential evolution with optional external archive». En: *IEEE Transactions on evolutionary computation* 13.5, págs. 945-958.
- Zhang, Q. y H. Li (2007). «MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 11.6, págs. 712-731. ISSN: 1089-778X.
- Zhang, Qingfu y col. (2008a). «Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition». En: *University of Essex, Colchester, UK and Nanyang technological University, Singapore, special session on performance assessment of multi-objective optimization algorithms, technical report* 264.
- (2008b). «Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition». En: *University of Essex, Colchester, UK and Nanyang technological University, Singapore, special session on performance assessment of multi-objective optimization algorithms, technical report* 264.
- Zhao, Shi-Zheng, Ponnuthurai Nagaratnam Suganthan y Qingfu Zhang (2012). «Decomposition-based multiobjective evolutionary algorithm with an ensemble of neighborhood sizes». En: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 16.3, págs. 442-446.
- Zhou, Aimin, Qingfu Zhang y Yaochu Jin (2009). «Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm». En: *IEEE transactions on evolutionary computation* 13.5, págs. 1167-1189.

- Zhu, Qingling y col. (2016). «A novel adaptive hybrid crossover operator for multiobjective evolutionary algorithm ». En: *Information Sciences* 345, págs. 177 -198. ISSN: 0020-0255.
- Zitzler, Eckart, Dimo Brockhoff y Lothar Thiele (2007). «The hypervolume indicator revisited: On the design of Pareto-compliant indicators via weighted integration». En: *Evolutionary multi-criterion optimization*. Springer, págs. 862-876.
- Zitzler, Eckart, Kalyanmoy Deb y Lothar Thiele (2000). «Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results». En: *Evol. Comput.* 8.2, págs. 173-195. ISSN: 1063-6560. DOI: 10.1162/106365600568202. URL: <http://dx.doi.org/10.1162/106365600568202>.
- Zitzler, Eckart y Simon Künzli (2004). «Indicator-Based Selection in Multiobjective Search». En: *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII)*. Ed. por Xin Yao y col. Berlin, Germany: Springer-Verlag, págs. 832-842.
- Zitzler, Eckart, Marco Laumanns y Stefan Bleuler (2004). «A Tutorial on Evolutionary Multiobjective Optimization». En: *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*. Ed. por Xavier Gandibleux y col. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 3-37. ISBN: 978-3-642-17144-4.
- Zitzler, Eckart y Lothar Thiele (1998). «Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study». En: *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Springer, págs. 292-301.
- Zitzler, Eckart y col. (2003). «Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review». En: *IEEE Transactions on evolutionary computation* 7.2, págs. 117-132.