4.1 Un polynôme de degré $\leqslant n$ est déterminé par ses valeurs en $n+1$ points

1) a) Comme $P(x_0) = 0$, il existe $P_0 \in K[X]$ tel que

$$P = (X - x_0) P_0$$

on a $0 = P(x_1) = \underbrace{(x_1 - x_0)}_{\neq 0} P_0(x_1)$ donc $P_0(x_1) = 0$ et donc

il existe $P_1 \in K[X]$ tel que $P_0 = (X - x_1) P_1$.

De même, on montre par recurrence que il existe P_k tel que $P_{k-1} = (X - x_k) P_k$

Au final on a

$$P = (X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_n) P_n$$

mais comme $\deg P \leqslant n$ on a $\underline{P_n = 0}$ (sinon l'expression de droite a un degré $\geqslant n+1$)

Ainsi $\underline{P = 0}$

b). Si on considère le polynôme $T = P - Q$, on voit que

$T \in K_n[X]$ et $\underset{(\forall k \in [\![0, n]\!]}{T(x_k) = 0}$ donc d'après la question

précédente, $T = 0$, c'est-à-dire $\underline{P = Q}$

2) a) Soient $P, Q \in K_n[X]$, $\lambda \in K$, on a

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(x_0), (P+\lambda Q)(x_1), \dots, (P+\lambda Q)(x_n)) \\ &= (P(x_0) + \lambda Q(x_0), P(x_1) + \lambda Q(x_1), \dots, P(x_n) + \lambda Q(x_n)) \\ &= (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) + \lambda . (Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\ &= u(P) + \lambda . u(Q) \end{aligned}$$

donc $\underline{u \text{ est linéaire}}$

b) Pour montrer que u est injective, il suffit de montrer que $\ker u = \{0\}$ (puisque u est linéaire).

On se donne donc $P \in \ker u$.

On a donc $u(P) = 0$ c'est-à-dire

$P \in K_n[X]$ tel que $(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (0, 0, \dots, 0)$

d'après 1.a, cela implique $P \equiv 0$. donc on a bien

$\underline{\ker u = \{0\}}$ et $\underline{u \text{ injective}}$.

Or, comme u injective et $\dim K_n[X] = n+1 = \dim K^{n+1}$, alors u est aussi $\underline{\text{bijective}}$

c) Comme u est bijective, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in K^{n+1}$ il existe un unique $P \in K_n[X]$ tel que $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$, c'est-à-dire $P(x_k) = b_k$ $(\forall k \in [\![0, n]\!])$

4.2) Polynôme de Lagrange :

1) a) Pour tout $0 \leq j \leq n$ avec $j \neq i$, on a $L_i(x_j) = 0$

donc L_i se factorise par $(X - x_j)$

on peut donc écrire

$$L_i = Q \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j) \qquad \text{avec } Q \in K[X]$$

en regardant les degrés, on déduit $\deg Q = 0$, c'est-à-dire que Q est une constante, nommons-la $a \in K$, on a alors

$$\boxed{L_i = a \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j)}$$

b) En posant $\underline{X = x_i}$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$1 = a \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)$$

donc

$$\boxed{a = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j}}$$

c) En combinant les 2 formule on a $\boxed{L_i = \prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}}$

On vérifie que si $0 \leq j \leq n$ avec $j \neq i$ on

$$L_i(x_j) = 0$$

et

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \qquad \text{et} \quad \deg L_i = n$$

donc L_i est bien solution du problème (trouver $L_i \in K_n[X]$ tel que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$)

2). • Pour l'existence, on peut vérifier que le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k \qquad \text{répond au problème.}$$

En effet pour $i \in [\![0,n]\!]$

$$\underline{P(x_i)} = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \delta_{ik} = \underline{b_i}$$

et on a $P \in \underline{K_n[X]}$.

• Pour l'unicité on peut invoquer le résultat de la question 4.1)1.b:
Si Q est un autre polynôme de $K_n[X]$ qui répond au problème, alors en fait $Q = P$.

Donnons une preuve alternative: En considérant l'application linéaire

$$u : K_n[X] \longrightarrow K^{n+1}$$
$$P \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$$

et la famille $\mathcal{F} = (L_0, \dots, L_n)$. On a montré que $u(L_i) = \underbrace{(0, \dots 0, \overset{i^e \text{ position}}{1}, 0, \dots, 0)}_{= e_i}$

c'est-à-dire que $u(\mathcal{F}) = (u(L_0), \dots, u(L_n)) = (e_0, \dots, e_n)$

où $(e_0, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de K^{n+1}.

donc $\underline{\mathcal{F} \text{ est une base de } K_n[X]}$ et u est bijective.

Si $P \in K_n[X]$, alors P s'écrit de manière unique dans la base des L_i

$$P = \sum_{i=0}^{n} c_i L_i \qquad \text{et on a, en posant } X = x_i$$

$$P(x_i) = c_i$$

En résumé : pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in K^n$, il existe un unique $P \in K_n[X]$ tel que $\underset{\forall i \in [\![0,n]\!]}{P(x_i) = b_i}$, c'est précisément le polynôme dont les coordonnées dans la base des L_i sont les b_i :

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$$

4.3) Matrice et déterminant de Vandermonde

1). Il s'agit de constater que le produit matriciel donne le bon résultat

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x_0^1 + \dots + a_n x_0^n \\ a_0 + a_1 x_1^1 + \dots + a_n x_1^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n^1 + \dots + a_n x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

2) La matrice $M(x_0, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement le système linéaire

$$(S) : M(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ | \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une unique sol la solution nulle.

<u>Si les x_i sont 2 à 2 distincts</u> : le système linéaire revient à trouver $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $\begin{cases} P(x_k) = 0 \\ \forall 0 \leq k \leq n \end{cases}$. On sait d'ap 4.1) 1.a) que cela implique $\underline{P = 0}$ et donc $\begin{pmatrix} a_0 \\ | \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$.

donc <u>$M(x_0, \dots, x_n)$ est inversible</u>

<u>Si les x_i ne sont **pas** 2 à 2 distincts</u> : disons $x_{i_0} = x_{i_1}$ $i_0 < i_1$

le polynôme $P = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq i_1}} (X - x_i)$ est nul sur tous les x_i sans être nul. Ce qui donne <u>une solution non nulle au système</u> (S.

<u>Alternativement</u> : On peut juste constater qu'une matrice avec <u>2 lignes identiques</u> <u>n'est pas inversible</u>

donc <u>$M(x_0, \dots, x_n)$ n'est pas inversible</u>

Au final, <u>$M(x_0, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont 2 à</u>

3).

a) On développe par rapport à la dernière ligne :

$$P(X) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n+1} \\ & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n+1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n+1} \end{pmatrix} = X^{n+1} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_0^{n} \\ & & \\ 1 & \cdots & x_n^{n} \end{pmatrix}}_{\in K} - X^n \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^{n+1} \end{pmatrix}}_{\in K}$$
$$+ \cdots + (-1)^n \underbrace{\det\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_0^{n+1} \\ \vdots & & \\ x_n & \cdots & x_n^{n+1} \end{pmatrix}}_{\in K}$$

donc ~~P(X)~~ P est un polynôme avec $\underline{\deg P = n+1}$

dont le coefficient $\underline{\text{dominant est} \quad V(x_0, \dots, x_n)}$.

b) D'après la question 2, $\begin{cases} P(x_i) = \det(M(x_0, \dots x_i, \dots, x_n, x_i)) = 0 \\ \forall\, 0 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$ identiques

donc P se factorise par $\prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (X - x_i)$, donc on peut écrire

$$P = Q \prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (X - x_i) \qquad \text{avec } Q \in K[X] \quad \text{et par degré,}$$

comme $\deg P = n+1$, ~~donc~~ on a $\deg Q = 0$ donc Q est une constante. ~~Or~~ Comme le polynôme $\prod_{0 \leqslant i \leqslant n} (X - x_i)$ est unitaire, Q est le coefficient dominant de P, c'est-à-dire

$Q = V(x_0, \dots, x_n)$ et donc

$$\boxed{P = V(x_0, \dots, x_0)\ (X - x_0) \cdots (X - x_n)}$$

c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

$\underline{\text{Pour } n = 0 :}$ On

$$V(x_0) = \det((1)) = 1$$

et

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 0} (x_j - x_i) = 1 \qquad \text{(le produit vide vaut 1)}$$

vide : il n'y a aucun couple (i, j) d'entiers distincts — donc le résultat est vrai au rang 0.

Ce n'est pas nécessaire mais regardons le cas $n=1$:

$$V(x_0, x_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$$ ce qui est le résultat annoncé

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n, et montrons-le au rang n

On a d'après la question précédente :

$$V(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) = P(x_{n+1})$$
$$= V(x_0, \dots, x_n)(x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n)$$

et par hypothèse de récurrence,

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

donc $$\boxed{V(x_0, \dots, x_n)} = (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i$$

$$\boxed{= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)}$$

si $j = n+1$, c'est un terme du produit de gauche, sinon $j \leq n$ et le terme apparaît dans le pro de droite.