n°7 - Dérivation, interprétation géométrique, lemme de Rolle, Théorème des accroissements finis

Notes de Cours

I Dérivation et théorème des accroissements finis

I.A Dérivée et tangente

Définition I.1 (Dérivée)**.** *On dit que f est **dérivable en** a si la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite pour x tendant vers a (avec $x \neq a$). Quand elle existe, cette limite est appelée la dérivée en a de f, noté $f'(a)$:*

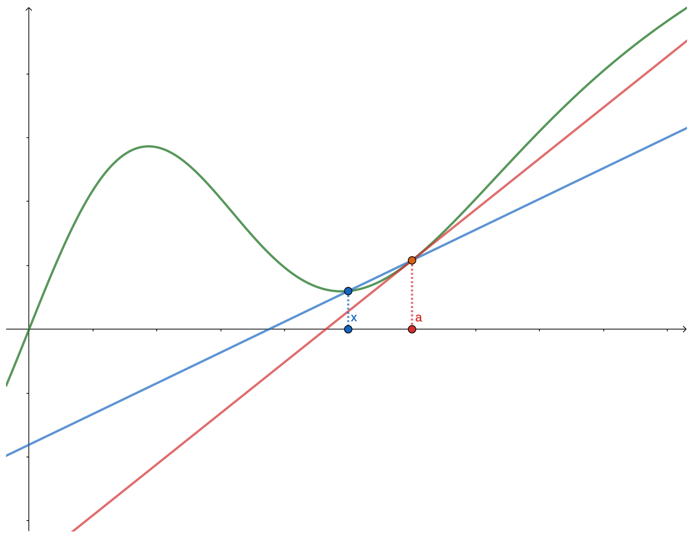
$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De manière équivalente, en effectuant le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq a}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique :

Quand elle existe, la quantité $f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente en** a au graphe de f. En effet, la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, appelée **taux de variation** de f entre x et a, peut s'interpréter comme le coefficient directeur de la droite sécante au graphe de f aux points d'abscisses x et a. Or la dérivée de f en a est définie comme la limite du taux de variation de f entre a et x, donc cela correspond à la pente de la "secante limite", c'est-à-dire la tangente en a.



La secante (en bleu) s'approche de la tangente (en rouge) à mesure que x s'approche de a.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts, la sécante au graphe de f entre les points d'abscisses a et b a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

et si f est dérivable en f, on peut faire tendre b vers a pour obtenir la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

On obtient ainsi l'équation de la tangente en a au graphe de f.

I.B Rolle et TAF

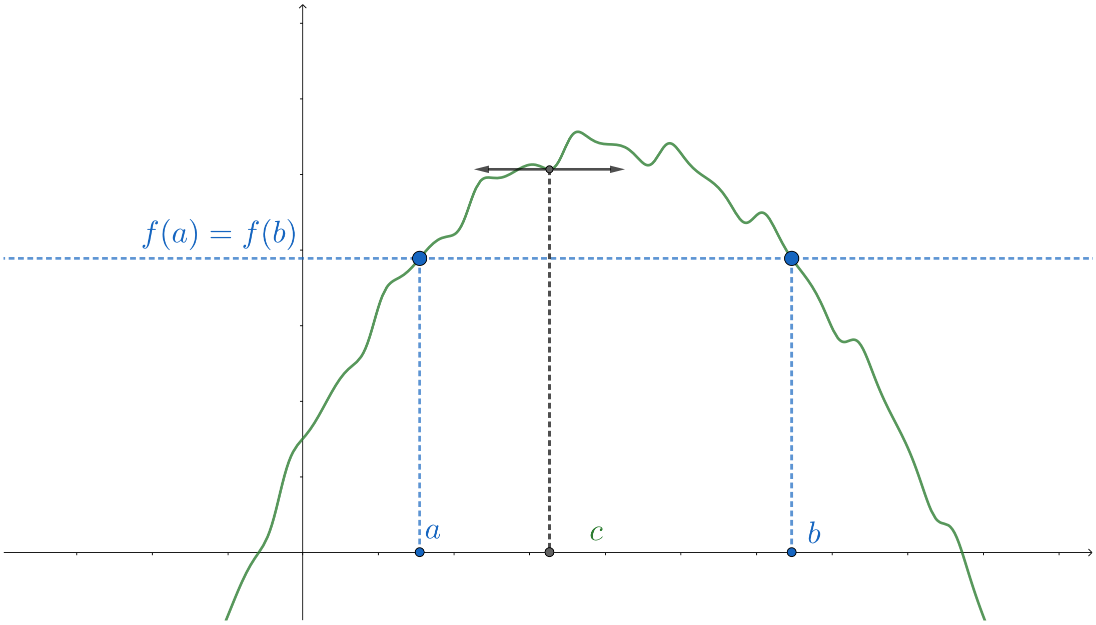
Le lemme de Rolle dit qu'une fonction f dérivable qui prend deux fois la même valeur possède un point d'annulation de sa dérivée entre les deux (ce qui correspond graphiquement à une tangente horizontale pour le graphe de la fonction f).

Théorème I.2 (Lemme de Rolle)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.* ***On suppose*** *qu'il existe deux points distincts $a < b$ dans I tels que*

$$f(a) = f(b)$$

alors *il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$



Le point c n'est pas unique en général, le théorème assure l'existence d'**au moins** un point $c \in]a, b[$, mais il peut très bien y en avoir plusieurs (par exemple sur l'illustration ci-dessus, il y a plusieurs autres points où la tangente est horizontale).

Une conséquence (et une généralisation) du lemme de Rolle est le théorème des Accroissements Finis (parfois abrégé en l'acronyme TAF) :

Théorème I.3 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour tous points distincts $a < b$ dans I, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. On considère la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. La fonction g est dérivable sur I et on a

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

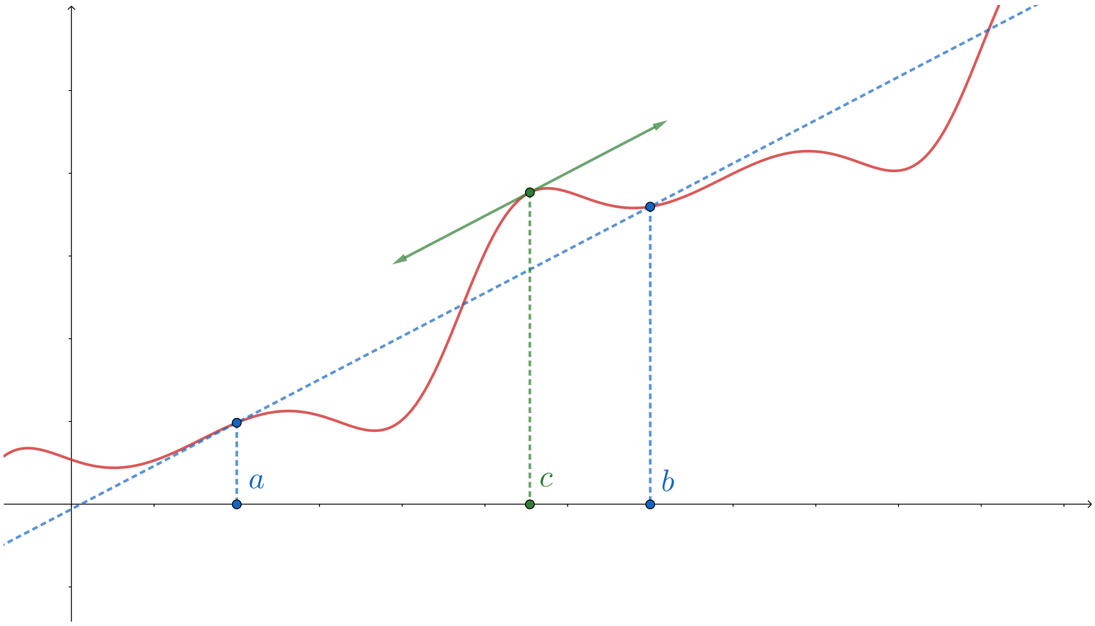
donc d'après le Lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Dans ce théorème, on peut interpréter géométriquement les quantités $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ comme la pente de la sécante entre a et b au graphe de f, et $f'(c)$ comme la pente de la tangente en c au graphe de f. Et une égalité de pentes revient à dire que ces deux droites sont parallèles. En d'autres termes, le théorème des accroissements finis nous dit que pour toute secante au graphe de f (prise entre des points a et b), il existe au moins une tangente au graphe de f (au point c) qui est parallèle à cette sécante.

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{pente de la tangente en } c} \quad = \quad \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pente de la sécante entre } a \text{ et } b}$$



Tout comme dans le lemme de Rolle, le point c dépend de a et b et n'est pas forcément unique.

Mentionnons la généralisation à l'ordre n du théorème des acrroissements finis : la formule de Taylor Lagrange, qui permet si la fonction est n fois dérivable en un point, de l'approximer autour de ce point par un polynôme de degré $n-1$.

Théorème I.4 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Soit $a \in I$, pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

I.C Inégalité des accroissements finis

Une conséquence du théorème des accroissements finis est l'inégalité des accroissements finis qui permet de majorer les variations de f si on peut borner sa dérivée.

Théorème I.5 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que la dérivée est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tels que pour tout $x \in I$,*

$$|f'(x)| \leq M$$

alors pour tout $a, b \in I$ distincts, on a

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b-a|$$

Démonstration. On se donne $a, b \in I$ distincts. Quitte à inverser les noms de a et b, on peut supposer $a < b$ (cela ne change rien car $|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$ et $|b - a| = |a - b|$). Comme f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$

et donc en prenant la valeur absolue

$$|f(a) - f(b)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq M} \cdot |b - a| \leq M|b - a|$$

□

II Exercices

II.A Calculs de dérivées

1. (SF 22, 23, 24) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^5 + 3x^2 + 2 \qquad f_2(x) = 7x\cos(x) \qquad f_3(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$f_4(x) = x\sin(x) + \ln(x)\cos(x) \qquad f_5(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad f_6(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^4 + x\sin(x) + 2}$$

2. (SF 22, 23, 24, 25) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3(2x+5)^5 \qquad f_2(x) = e^{5x^4} \qquad f_3(x) = \sin(3x+2)$$

$$f_4(x) = (\ln(x))^2 \qquad f_5(x) = \ln(\cos(x)) \qquad f_6(x) = \cos(\ln(x))$$

3. (SF 22, 23, 24, 25) Math101 : Exercice 79 Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(f(x^2)), \qquad f_2(x) = \sin(f(x)^2), \qquad f_3(x) = \sin^2 f(x),$$

$$f_4(x) = \sqrt{1 + f(x)^4}, \qquad f_5(x) = \ln(2 + \cos(f(x))), \qquad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2 + f(x)^2}$$

4. (SF 22, 23, 24, 25, 39) Math101 : Exercice 82 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1(x) = x^2 + 1 + x^{11} + x^{101}, \qquad f_2(x) = x^5\cos(x), \qquad f_3(x) = e^x\sin(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1+x}{x-7}, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}, \qquad f_6(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2},$$

$$f_7(x) = \frac{x + \sin x}{\cos x}$$

5. (SF 28) Math151 : Test 1 (2014)

   (a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto \sin(2x)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.

   (b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 3.

   (c) $(*)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$. On suppose que la tangente au graphe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.

6. (SF 22, 23, 24, 25, 28, 39) Math151 : Exercice 2.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine définition, domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes, puis donner l'équation de la tangente à son graphe au point indiqué entre parenthèses.

$$f_1(x) = \frac{9x^3 - 4}{8x^3 + 6} \quad \text{(en 1)} \qquad\qquad f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \quad \text{(en 1)}$$

$$f_3(x) = x^3 e^{\sin(x)} \quad \text{(en } \pi\text{)} \qquad\qquad f_4(x) = \ln(\ln(x)) \quad \text{(en } e\text{)}$$

II.B Applications du lemme de Rolle

7. **Une application du lemme de Rolle**
   On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - x$$

   (a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]-1,1[$ telles que $f'(c) = 0$.

8. **Une application du lemme de Rolle**
   On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \cos(2x)$$

   (a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.

   (b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]0, 2\pi[$ telles que $g'(c) = 0$.

9. (SF 39) **Un contre-exemple à Rolle ?**
   On considère la fonction $h(x) = \tan(x)$.

   (a) Déterminer le domaine de définition D_h, et de dérivabilité $D_{h'}$ de h ?

   (b) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) \geq 1$ pour tout $x \in D_{h'}$.

   (c) Montrer que $h(0) = h(\pi)$. Montrer qu'il n'existe pas de point $c \in]0, \pi[$ tel que $h'(c) = 0$. Est-ce en contradiction avec le lemme de Rolle ?

10. **Démonstration du TAF**
    Dans cet exercice, on cherche à déduire le théorème des accroissements finis à partir du lemme de Rolle. Pour cela, on se donne un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $a < b$ dans I. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

    (a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. En utilisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

    (b) Conclure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

11. On considère le polynôme
$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$$
Montrer que P' admet au moins une racine dans $]0, 2[$.

12. Math 151 : test 2 (2019) Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$. Montrer qu'il existe $c \in]1, 3[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis le lemme de Rolle.

13. **Double Rolle**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **deux fois** dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < a_3$ dans I tels que
$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$$
(a) Montrer qu'il existe $c_1 < c_2$ dans I tels que
$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$
(b) En déduire qu'il existe $c_3 \in I$ tel que
$$f''(c_3) = 0$$

II.C Théorème et inégalité des accroissements finis

14. Math151 : test 2 (2019) Existe-t-il une fonction dérivable $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) \leq -2$ pour tout $x \in [0, 1]$?

15. Math151 : Exercice 2.10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.
(a) En utilisant l'inégalité des accroissement finis, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a
$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$
(b) Interpréter graphiquement cette inégalité dans le cas $b = 0$.

16. Math101 : Partiel 2 (2019) **Série Harmonique**
On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
(a) Soit $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,
$$\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$$
(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H_n$

17. **Monotonie et signe de la dérivée**
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et dérivable sur I. On cherche dans cet exercice à démontrer l'équivalence
$$f \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$$
(a) On suppose dans cette question que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. On cherche à montrer que f est croissante sur I.
    i. Montrer que pour tous $x < y$ dans I, il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que
$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En déduire que f est croissante sur I.

(b) On suppose dans cette question que f est croissante sur I. On cherche à démonter que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

i. Soit $x \in I$. Montrer que pour tous $y \in I \setminus \{x\}$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Indication : On pourra séparer les cas $x < y$ et $x > y$.

ii. En passant à la limite quand $y \to x$ dans l'inégalité précédente, montrer que

$$f'(x) \geq 0$$