Outils Calculatoires

Type 1

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Le différentes parties sont indépendantes. Un barême est donné à titre indicatif.

Le but de ce problème est de répondre à la question d'interpolation suivante : si on se donne des points du plan, et une équation différentielle fixée, peut-on trouver une solution de l'équation dont le graphe passe par tous ces points ?

Précisément, notre but sera de démontrer qu'étant donné une équation différentielle homogène de degré n à coefficients constants

$$(E) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

et $n+1$ distincts points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ dans le plan (avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$), alors il ***existe une unique*** *solution de (E) dont le graphe passe par tous ces points (c'est-à-dire vérifiant $y(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$).*

Une conséquence de ce résultat étant qu'une fonction non nulle qui est solution d'une équation différentielle (homogène à coefficients constants) de degré n s'annule au plus n fois.

1 Quelques exemples

1.1 Degré 1 (2 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y' + \lambda y = 0$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle (E_1) ?
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E_1) dont le graphe passe par le point (x_0, y_0). Donner une expression de cette unique solution y en fonction de λ, x_0 et y_0.

1.2 Un exemple de degré 2 avec deux points (4 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y'' = 0$$

1. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle (E_2) ?
2. Quelles sont les solutions de (E_2) dont le graphe passe par les points $(0, 2)$ et $(3, 5)$, c'est-à-dire tel que $y(0) = 2$ et $y(3) = 5$? Faites un dessin du graphe de y (sur lequel figure les deux points).
3. On se donne deux points du plan $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 < x_1$. Trouver les solutions de (E_2) dont le graphe passe par ces points (c'est-à-dire telles que $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$).

1.3 Pour trois points (6 points)

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré ≤ 2 dont le graphe passe par les points $(-1, 6)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$. Faites un dessin du graphe de P (sur lequel figure les trois points).
2. On considère la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer l'inverse de A.

   (b) En déduire que pour tous $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré ≤ 2 dont le graphe passe par les points $(-1, y_0)$, $(0, y_1)$ et $(1, y_2)$, et exprimer les coefficients de P en fonction de y_0, y_1 et y_2.

1.4 Equations différentielles homogènes (4 points)

Résoudre les équations difffférentielles suivantes. Dans chacun des cas, on précisera la dimension de l'espace des solutions et on donnera une base de cet espace.

1. $y' + xy = 0$
2. $y'' + y' + y = 0$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$
4. $y^{(3)} - y = 0$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ qui vérifient $y(0) = y(1) = 0$. Combien y-a-til de solutions ?

1.5 Une équation avec solution unique (4 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \;\; \cos(x)y' - \sin(x)y = \cos(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$. Faire de même sur l'intervalle $I_k =]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Si $y \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, 3\pi/2[, \mathbb{R})$ est solution de (E_1), montrer que
$$y(\pi/2) = 0$$
3. ($\star$) Montrer que l'équation (E_1) admet une unique solution continue sur $]-\pi/2, 3\pi/2[$ dont on donnera la formule.
Indication : On admet que $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = 0$.

1.6 Une équation avec une infinité de solutions (2 points)

On considère désormais l'équation différentielle

$$(E_2) \;\; \cos(x)y' + \sin(x)y = \cos^2(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) sur l'intervalle $I_k =]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation (E_2).

On peut être surpris que les équations (E_1) et (E_2), en apparence similaires, ont en fait des solutions si différentes ! Le "problème" vient du terme devant le y' qui s'annule.

2 Systèmes différentiels homogènes

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice, alors l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de dimension n.*

On commence par quelques exemples numériques

2.1 Exemples de systèmes (4 points)

Résoudre les systèmes différentiels suivants. Dans chacun des cas, on précisera la dimension de l'espace des solutions et on donnera une base de cet espace.

1. $\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ y' &= 3x + 2y \end{cases}$

2.2 Preuve du théorème (5 points)

Dans cette partie, on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Et on considère le système différentiel homogène

$$(E_A) \quad X' = AX$$

1. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{S}_A = \left\{X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), X' = AX\right\}$$
des solutions de (E_A) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

2. Pour $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur colonne. On définit la fonction $f_C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par
$$f_C(t) = e^{t.A}C$$
   (a) Montrer que $f_C \in \mathcal{S}_A$.

   (b) Réciproquement, soit $X \in \mathcal{S}_A$, on définit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par
$$Y(t) = e^{-t.A}X(t)$$
   Montrer que $Y' = 0$. En déduire que $X = f_C$ avec $C = X(0)$.

(c) ($\star$) En déduire que l'application

$$\varphi : K^n \longrightarrow \mathcal{S}_A$$
$$C \longmapsto f_C$$

est un isomorphisme. En conclure que $\dim \mathcal{S}_A = n$.

3 Equations homogènes d'ordre 2 (7 points)

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux complexes, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle*

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension 2.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux complexes avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0$$

et le système différentiel

$$(S) \quad X' = AX$$

1. Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. (a) Montrer que si y est solution de (E) alors $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

(b) Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors x_1 est solution de (E).

(c) En utilisant le résultat de la partie 2.2, déduire que $\dim F = 2$.

3. On suppose désormais $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   (a) Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A. Donner une matrice P inversible et D diagonale telle que

   $$A = PDP^{-1}$$

   On choisira pour P un matrice avec des 1 sur la première ligne. Calculer P^{-1}.

   (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

   $$e^{t.A} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$