n°4 – Généralités sur les fonctions (corrigé)

Notes de Cours

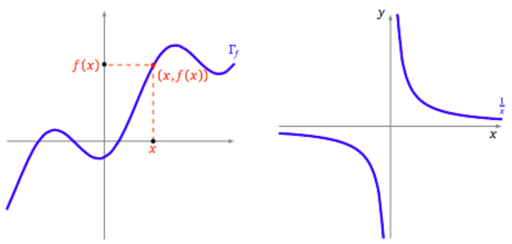
I Notions de fonction

I.A Définitions

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to R$, où U est une partie de R. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

La fonction inverse :

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$



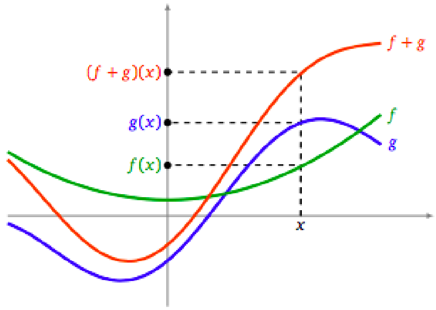
Le graphe d'une fonction $f : U \to R$ est la partie Γ_f de R^2 définie par $\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \mid x \in U\big\}$.
Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite). ;

I.B Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to$ et $g : U \to R$ deux fonctions définies sur une même partie U de R. On peut alors définir les fonctions suivantes :

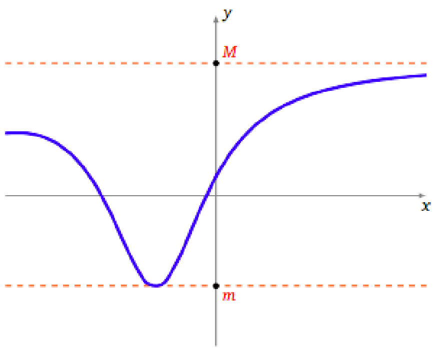
- la somme de f et g est la fonction $f + g : U \to R$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to R$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in R$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \to R$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Comment tracer le graphe d'une somme de fonction ?



I.C Fonctions majorées, minorées, bornées

Soient $f : U \to R$ et $g : U \to R$ deux fonctions. Alors :
— $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
— $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
— $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
— f est dite constante sur U si $\exists a \in R \;\; \forall x \in U \; f(x) = a$;
— f est dite nulle sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.
Soit $f : U \to R$ une fonction. On dit que :
— f est majorée sur U si $\exists M \in R \;\; \forall x \in U \; f(x) \leq M$;
— f est minorée sur U si $\exists m \in R \;\; \forall x \in U \; f(x) \geq m$;
— f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in R \; \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.
Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



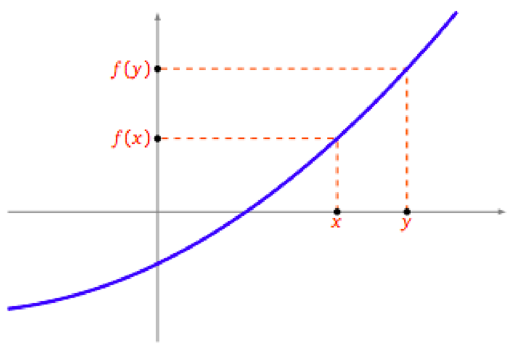
I.D Fonctions croissantes, décroissantes

Soit $f : U \to R$ une fonction. On dit que :

— f est croissante sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
— f est strictement croissante sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
— f est décroissante sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
— f est strictement décroissante sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$

— f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.

Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :



I.E Parité et périodicité

Soit I un intervalle de symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou R). Soit $f : I \to$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

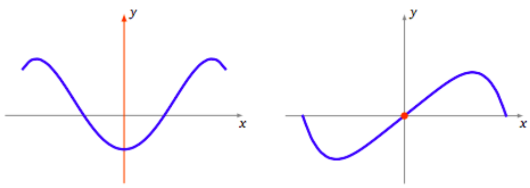
— f est paire si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,

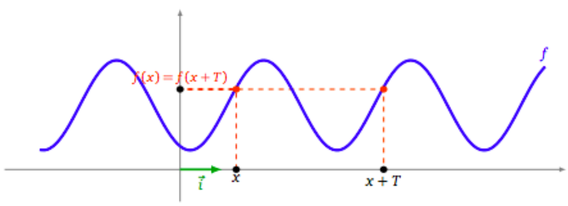
— f est impaire si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

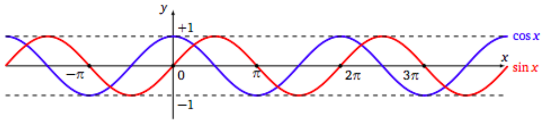
— f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

— f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).





Soit $f : R \to R$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \quad f(x+T) = f(x)$.



Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.

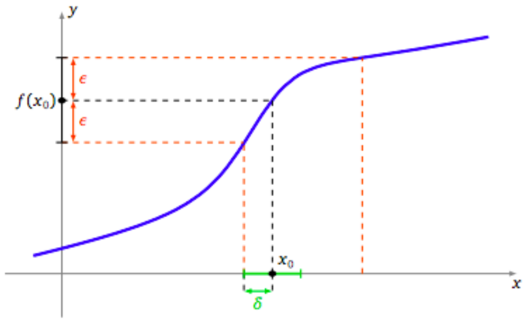
II Continuité en un point

II.A Définition

Soit I un intervalle de R et $f : I \to R$ une fonction.

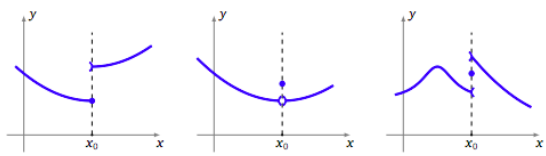
— On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

— On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



II.B Propriétés

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites. Soient $f, g : I \to$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

— $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in$),

— $f + g$ est continue en x_0,

- $f \times g$ est continue en x_0,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent). Soient $f : I \to$ et $g : J \to$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

II.C Prolongement par continuité

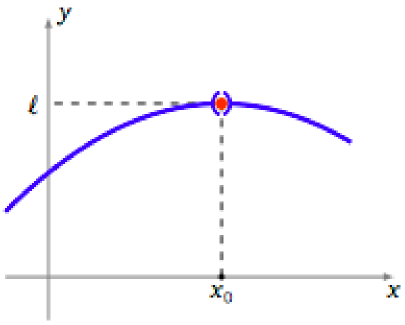
Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to$ une fonction.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim\limits_{x_0} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de $\tilde{f}$.



III Fonctions monotones et bijections

III.A Rappels : injection, surjection, bijection

Dans cette section nous rappelons le matériel nécessaire concernant les applications bijectives.

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de .

- f est injective si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$
- f est surjective si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$.

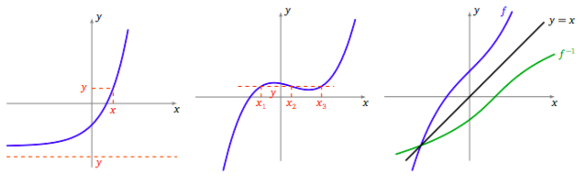
Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f =_E$ et $f \circ g =_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

- On rappelle que l'identité, $_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$.

— Alors que $f \circ g_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y$.

— Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Voici le graphe d'une fonction injective (à gauche), d'une fonction surjective (à droite) et enfin le graphe d'une fonction bijective ainsi que le graphe de sa bijection réciproque.

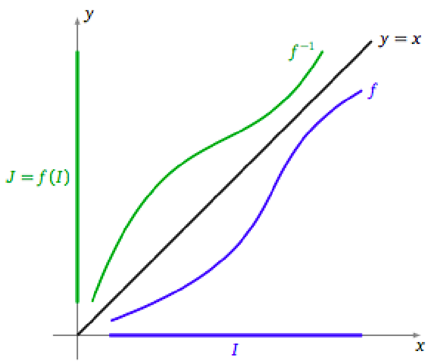


III.B Fonctions monotones et bijections

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

[Théorème de la bijection] Soit $f : I \to R$ une fonction définie sur un intervalle I de R. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.



En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to R$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

IV Exercices

IV.A Monotonie

1. (SF I2) (Aspect fondamental) Préciser le domaine de définition et la monotonie des fonctions suivantes :
   (a) La fonction racine carrée
   (b) Les fonctions exponentielle exp et logarithme ln.

(c) La fonction valeur absolue $\longmapsto |x|$.

Solutions

— La fonction racine carrée $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow R \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante.

— Les fonctions exponentielle exp : $R \to R$ et logarithme ln :$]0,+\infty[\to R$ sont strictement croissantes.

— La fonction valeur absolue $\begin{cases} R \longrightarrow R \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ est strictement croissante.

IV.B Parité

1. (SF 38)(Aspect fondamental) Étudier la parité des fonctions suivantes :

(a) La fonction définie sur R par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in\ N)$.

(b) La fonction définie sur R par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in N)$.

(c) La fonction cos : $R \to R$ et a fonction sin : $R \to R$.

Solutions

(a) La fonction définie sur R par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in\ N)$ est paire.

(b) La fonction définie sur R par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in N)$ est impaire.

(c) La fonction cos : $R \to R$ est paire. La fonction sin : $R \to R$ est impaire.

IV.C Continuité

1. (sf 39)(Aspect fondamental) Quel est le domaine de continuité des fonctions suivantes :

(a) une fonction constante sur I.

(b) la fonction racine carrée

(c) les fonctions sin et cos

(d) la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$

(e) la fonction exp

(f) la fonction ln

(g) la fonction partie entière E .

Solutions

— une fonction constante sur un intervalle,
— la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$,
— les fonctions sin et cos sur R,
— la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur R,
— la fonction exp sur R,
— la fonction ln sur $]0,+\infty[$.

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in Z$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in R \setminus Z$, elle est continue en x_0.

IV.D Prolongement par continuité

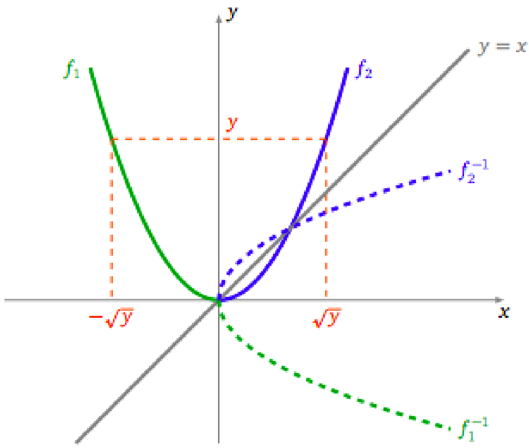
1. (SF I1) (Aspect fondamental) Considérons la fonction f définie sur R^* par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Est-elle prolongeable par continuité ? **Solutions**
   Comme pour tout $x \in R^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur R tout entier par :
   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

IV.E Injection, surjection, bijection

1. (SF 57 et 58)(Aspect fondamental) Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Bijectives ? Surjectives ? Pour chaque fonction, si elle ne l'est pas déjà, modifier l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée pour que f devienne bijective.
   (a) $f : [1, +\infty[\to R$ définie par $f(x) = 3x + 1$
   (b) $f : R \to R$ définie par $f(x) = x^3$
   (c) $f : [1, +\infty[\to R$ définie par $f(x) = \ln(x)$
   (d) $f : [0, 2\pi] \to R$ définie par $f(x) = \cos(x)$.
   Solutions

   (a) f est injective mais pas surjective. Il faut restreindre le domaine d'arrivée à $[4, +\infty[$.
   (b) f est bijective
   (c) f est injective mais pas surjective. Il faut restreindre le domaine d'arrivée à $[0, +\infty[$.
   (d) f n'est ni injective, ni surjective. Il faut restreindre le domaine d'arrivée à $[-1, 1]$. Pour le domaine de départ, on peut prendre par exemple $[0, 2\pi[$ ou $]0, 2\pi]$.
2. (SF 2) (Aspect fondamental)
   (a) Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$. Déterminez l'image de 0 et 2 par f. Déterminez le ou les antécédent de 5 par f.
   (b) Soit $g : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$. Déterminez l'image de 0 et 2 par g. Déterminez le ou les antécédent de 5 par g.
   Solutions

   (a) $f(0) = 1, f(2) = 5$. Un antécédent de f est un x vérifiant $f(x) = 5$. Or
   $$f(x) = 5 \iff x^2 + 1 = 5 \iff x^2 = 4 \iff x \in \{-2, +2\}.$$
   Donc -2 et 2 sont les deux antécédents de 5 par f.
   (b) $g(0) = -1, g(2) = 3$. On a
   $$g(x) = 5 \iff \frac{x+1}{x-1} = 5 \iff x + 1 = 5x - 5 \iff 4x = 6 \iff x = \frac{3}{2}.$$
   Donc $\frac{3}{2}$ est l'antécédent de 5 par g.
3. (SF 216 , 57 et 58) (Exercice de réflexion) Considérons la fonction carrée définie sur R par $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas bijective et étudier la bijectivité de sa restriction sur $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part. Généralisons pour $n \geq 1$, $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^n$.
   Solutions
   La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas strictement monotone sur R , d'ailleurs, on voit bien qu'elle n'est même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :
   $$f_1 : \left\{ \begin{array}{c}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{c} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{array} \right.$$



On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.Alors, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Soient deux réels x et y tels que $y \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty, 0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.
On remarque que la courbe totale en pointillé (à la fois la partie bleue et la verte), qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut pas être le graphe d'une fonction : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.

Généralisons en partie l'exemple précédent. Soit $n \geq 1$. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^n$. Alors f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors f est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} est notée : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ (ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$) : c'est la fonction racine n-ième. Elle est continue et strictement croissante.

4. (SF 5) Ecrire les fonctions suivantes comme une composée de deux fonctions que vous définirez.
   (a) $x \mapsto \sin(2x)$.
   (b) $x \mapsto e^{x^2+1}$
   (c) $x \mapsto \sqrt{x^3 - x}$.
   (d) $u \mapsto \frac{1}{u^2-3}$
   (e) $t \mapsto \ln(t)^2 - 1$

   Solutions

   (a) C'est $f \circ g$ pour $f : x \in R \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ et $g : x \in R \mapsto 2x \in R$.
   (b) C'est $f \circ g$ pour $f : x \in R \mapsto \exp(x) \in R_+^\star$ et $g : x \in R \mapsto x^2 + 1 \in [1, +\infty[$.
   (c) C'est $f \circ g$ pour $f : x \in R_+ \mapsto \sqrt{x} \in R_+$ et $g : x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[\mapsto x^3 - x \in R_+$.
   (d) C'est $f \circ g$ pour $f : x \in^\star \mapsto \frac{1}{x} \in R^\star$ et $g : x \in R \mapsto x^2 - 3 \in [-3, +\infty[$.
   (e) C'est $f \circ g$ pour $f : x \in \mapsto x^2 - 1 \in [-1, +\infty[$ et $g : x \in R_+^\star \mapsto \ln(x) \in R$.

5. (SF 37 et 38) Déterminer si les fonctions définies par les formules suivantes sont paires, impaires, périodiques. Dans le cas des fonctions périodiques, on précisera la période des fonctions considérées.

(a) $f(x) = \sin(2x) + \tan(3x)$

(b) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-4x+4}$

(d) $f(x) = \sin(x+3)\cos(2x-1)$

(e) $f(x) = \ln(|x|)\sqrt{1+\cos(x)}$

Solutions

(a) $f(-x) = \sin(-2x) + \tan(-3x) = -\sin(2x) - \tan(3x)$ car sin et tan sont impaires. Donc $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire. Par ailleurs sin est 2π périodique donc $x \mapsto \sin(2x)$ est $\pi-$périodique. La fonction tan est pi-périodique donc $x \mapsto \tan(3x)$ est $\pi/3-$périodique. Donc f est $\pi-$périodique.

(b) $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{\cos(x)}{x^2+1} = f(x)$ donc f est paire. Elle n'est en revanche pas périodique à cause du dénominateur.

(c) Cette fonction n'a aucune parité et périodicité.

(d) $f(x) = \sin(x+3)\cos(2x-1)$. Cette fonction n'a pas de parité. En revanche $x \mapsto \sin(x+3)$ est $2\pi-$périodique et $x \mapsto \cos(2x-1)$ est $\pi - priodique$. f est 2π-périodique.

(e) $f(-x) = \ln(|-x|)\sqrt{1+\cos(-x)} = \ln(|x|)\sqrt{1+\cos(x)} = f(x)$ donc f est paire. En revanche, elle n'a aucune périodicité à cause du ln.