

Remplir vos réponses directement sur le sujet. Merci d'indiquer votre nom. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Un barème est donné à titre indicatif.

Nom : ..... Prénom : .....

1. **(2 points)** Mettre les expressions suivantes sous la forme  $\ln(a)$  :

$$\ln(12) - \ln(3) + \ln(7) = \ln(\dots) \qquad 3 \ln\left(\frac{5}{3}\right) + 4 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = \ln(\dots)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(\dots) \qquad 5 = \ln(\dots)$$

2. **(2 points)** Si  $a > 0$  et  $b > 0$ , exprimer les quantités suivantes sans faire intervenir d'exposant :

$$\begin{aligned} \ln(a^b) &= \\ \ln\left(\ln\left(a^{b^c}\right)\right) &= \end{aligned}$$

3. **(\* 2 points)** Trouver des entiers relatifs  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $x \ln(2) + y \ln(5) = \ln(500)$ .

$$x = \qquad y =$$

4. **(2 points)** Mettre les expressions suivantes sous la forme  $e^a$  :

$$\pi^\pi = e^{\dots} \qquad \frac{e^a}{e^{\frac{a+b}{2}}} = e^{\dots}$$

$$\frac{\sqrt{e^{-4x^2}}}{\left(e^{-\frac{x}{5}}\right)^{10} e^{-7}} = e^{\dots} \qquad \ln(2) = e^{\dots}$$

5. **(5 points)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \qquad f'_1(x) =$$

$$f_2(x) = e^{\cos(x)} \qquad f'_2(x) =$$

$$f_3(x) = \ln(\ln(x)) \qquad f'_3(x) =$$

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad f'_4(x) =$$

$$f_5(x) = \ln\left(\frac{2x-5}{3x+2}\right) \qquad f'_5(x) =$$

6. **(3 points)** Calculer la valeur des logarithmes suivants arrondis à l'entier inférieur. *On rappelle que  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière inférieure du réel  $x$  (aussi appelé  $x$  "arrondi à l'entier inférieur"), c'est-à-dire l'unique entier relatif  $k_x \in \mathbb{Z}$  tel que  $k_x \leq x < k_x + 1$ . Par exemple on a  $\lfloor 23,45 \rfloor = 23$  et  $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$  et  $\lfloor -45,1 \rfloor = -46$  et  $\lfloor n \rfloor = n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  :*

$$\lfloor \log_2(8) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_3(81) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_5(5) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_7(3) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_{10}(2349242) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_2(15) \rfloor =$$

(\*) En supposant que la puissance de calcul des microprocesseurs est multipliée par un facteur  $\sqrt{2}$  tous les ans (et donc multipliée par 2 tous les 2 ans), dans combien d'années disposera-t-on de processeurs au moins 10 fois plus puissants que les processeurs actuels ? *Indication : On pourra chercher à encadrer  $10^2$  entre deux puissances successives de 2 pour en déduire un encadrement de  $\log_2(10)$  à  $1/2$  près.*

7. **(6 points) La fonction**  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

Dans cet exercice, on considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ .

(a) Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ? Quel est son ensemble de dérivabilité?

(b) Déterminer en justifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(c) Calculer la dérivée de  $f$  et tracer son tableau de variation.

(d) Parmi les nombres  $315840^{829174}$  et  $829174^{315840}$ , lequel des deux est le plus grand ?

*Indication : si  $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(y)}{y}$ , que peut-on dire de  $x^y$  et  $y^x$  ?*