Exercice 2. —

1. $y' + 7y = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = ce^{-7t}$
2. $(1+t^2)y' + 2y = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = ce^{-2\arctan(t)}$
3. $\sqrt{1+t^2}y' + 3ty = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = ce^{-3\sqrt{1+t^2}}$
4. $(e^t+1)y' - e^t y = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = c(e^t+1)$
5. $\cos(t)y' + t\sin(t)y = 0$: Sur l'intervalle $]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), les solutions sont de la forme
$$y(t) = c_k \exp\left(-\int_{k\pi}^{t} u\tan(u)\,du\right)$$
pour $t \in]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$. Il n'y a pas de formule plus simple à ma connaissance.

Exercice 3. —

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^t} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\ln(1+e^t) + c)\,e^{-t}$
2. Après recollement (il faut traiter séparément les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$), les seules solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation $ty' - y = t^2$ sont les fonctions la forme $t \mapsto t^2 + ct$ avec $c \in \mathbb{R}$.
3. $y' - 2ty = t \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$
4. $y' + y = \sin(t) \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{\sin(t)-\cos(t)}{2} + ce^{-t}$
5. $y' + 2ty = 2te^{-t^2} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (t^2+c)e^{-t^2}$

Exercice 4. —

1. $y' + y = te^t \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{2t-1}{4}e^t + ce^{-t}$
2. $y' + 2y = t^2 + 2t \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{2t^2+2t-1}{4}e^t + ce^{-2t}$
3. $y' - y = \cos(t) \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{\cos(t)+\sin(t)}{2} + ce^{-t}$
4. $y' + 3t^2y = 2te^{-t} \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \left(\int_0^t 2ue^{u^3-u}du + c\right)e^{-t^3}$
5. $y' + t^2y = t^2 \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = 1 + ce^{-t^3}$