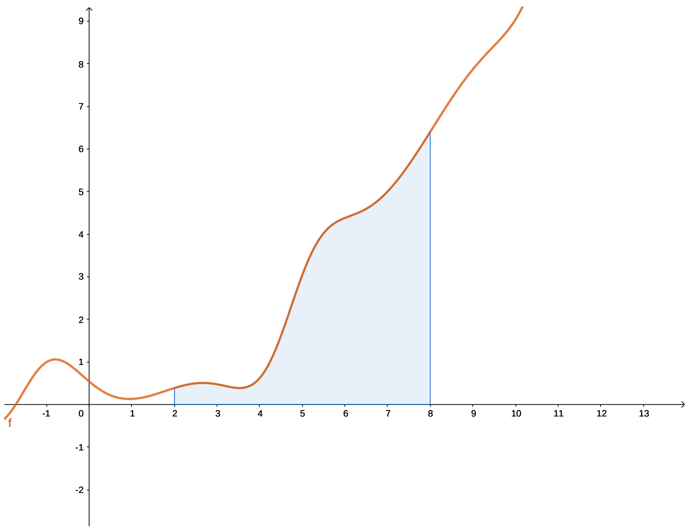
n°8 - Intégration, primitives, principes du calcul intégral

Notes de Cours

I Intégration

Intéprétation géométrique

Si $f \geq 0$ et $a \leq b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire en dessous de la courbe.



En général, on parle d'aire algébrique (elle est comptée négativement si $b < a$ ou si $f(t) \leq 0$).

Propriétés de l'intégrale

1. **Linéarité :** Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,dt$$

2. **Relation de Chasles :** Pour tout a, b, c

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$

3. **Positivité :**
$$\forall t \in [a,b], f(t) \geq g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$$
4. **Inégalité triangulaire :**
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Théorème fondamental de l'analyse
Si $F' = f$, alors
$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Intégration par partie
Si F est une primitive de f, on a
$$\int_a^b \overbrace{f(x)}^{\uparrow}\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Changement de variable
$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx \underset{\substack{t=u(x)\\ \text{“}dt=u'(x)\,dx\text{''}}}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

II Exercices

II.A Intéprétation géométrique

1. (SF 60, 62, 1188) **Aire d'un triangle**
   (a) Calculer l'intégrale
   $$I = \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx$$
   (b) Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x+1$. Retrouver la valeur de I par un calcul d'aire.
2. (SF 60, 62, 1188) **Un argument d'aire**
   (a) Calculer les intégrales
   $$J_1 = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx \qquad J_2 = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx \qquad J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$$
   (b) Tracer le graphe de la fonction $g : x \mapsto \sin(x)$ entre -2π et 2π. Comment justifier géométriquement que $J_1 = -J_2$?

II.B Calculs d'intégrales et primitives

3. (SF 61, 62) Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^{10} - 3x^3 + 4x - 5 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - \sin(x) \qquad f_3(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f_5(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f_6(x) = x(x^3 - 1)$$

4. (SF 61, 62, 64) Calculer les primitves suivantes en effectuant une intégration par partie.

$$\int \ln(x)\,dx \qquad \int x^3 \ln(x)\,dx \qquad \int (7-2x)e^{-2x}\,dx$$

$$\int (3x+1)\cos(x)\,dx$$

5. (SF 61, 62, 65) En effectuant un changement de variable affine, déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$f_1(x) = (3-2x)^5 \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f_4(x) = x^5 + 4x^2 - 5 \qquad f_5(x) = 3\cos(2x+1) - 4 \qquad f_6(x) = \frac{2}{8-5x}$$

6. (SF 1196) Math 104 En effectuant un changement de variable adapté, calculer les primitves suivantes

$$\int \tan(x)\,dx \qquad \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$$

II.C Intégration de fractions rationnelles

7. (SF 61, 62, 1195, 1196) Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{3}{2+5x}\,dx \qquad \int \frac{x-1}{x+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

8. (SF 61, 62, 1195) **Décomposition en éléments simples**

(a) Déterminer des coefficients $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$$

(b) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$.

9. (SF 61, 62, 1195) Math 101 : exercice 129 ($*$) **Décomposition en éléments simples** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}$$

(a) Trouver une racine réelle évidente du polynôme $x^3 + 3x^2 + 7x + 5$.

(b) On note x_0 la racine précédente. Déterminer les réels p, q tels que

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = (x - x_0)(x^2 + px + q)$$

(c) Déterminer les réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x - x_0} + \frac{bx + c}{x^2 + px + q}$$

(d) Déterminer les réels λ, μ tels que $bx + c = \lambda(2x + p) + \mu$.

(e) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 4}$$

Trouver une primitive de g.

(f) Conclure.

10. (SF 61, 62, 65)

(a) Mettre le polynôme $x^2 - 4x + 5$ sous forme canonique (c'est-à-dire sous la forme $a(x-b)^2 + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(b) En effectuant le changement de variable $t = x - 2$, calculer l'intégrale

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\, dx$$

11. (SF 60, 61, 62, 211) Math151 : exercice 6.2 Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{x^4}\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x-2}{x^2 - 4x - 12}\, dx \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$$

Indication : Pour I_2, on pourra mettre le polynôme $x^2 - 4x - 12$ sous forme canonique. Pour I_3, on cherchera à mettre l'intégrande sous la forme $a + \frac{b}{x^2+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes à déterminer.

II.D Problèmes

12. Math101 : exercice 130 **Comparaison série/intégrale**
Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$
(a) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = (x \ln(x))^{-1}$.
(b) En déduire que pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration
$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\, dt$$
puis donner pour tout $n \geq 2$ une minoration de u_n par une intégrale à préciser.
(c) Soit un entier $n \geq 2$. Calculer
$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)\, dt$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

13. $(*)$ **Théorème fondamental de l'analyse**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
Le but de cet exercice est de rédémontrer que F est une primitive de f, c'est-à-dire l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On fixe un point $a \in \mathbb{R}$
(a) Pour $x \neq a$, montrer que
$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t)\, dt$$
(b) En effectuant le changement de variable $u = \frac{t-a}{x-a}$, montrer que
$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) = \int_0^1 (f(a + (x - a)u) - f(a))\, du$$
(c) $(*)$ On fixe $\epsilon > 0$.
i. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - a| \leq \delta$, alors pour tout $u \in [0, 1]$,
$$|f(a + (x - a)u) - f(a)| \leq \epsilon$$
Indication : On pourra utiliser que f est continue en a.
ii. En déduire que si $|x - y| \leq \delta$, alors
$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| \leq \epsilon$$
iii. Conclure que
$$F'(a) = f(a)$$