n°6 - Nombres complexes

Rappels de Cours

I Le corps des complexes

Formes algébrique (cartesienne) : Tout complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire de manière unique $z = a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \mathrm{Im}(z) = b$$

Unicité de l'écriture : L'unicité de l'écriture permet d'identifier deux écritures sous forme algébriques d'un même nombre complexe pour obtenir 2 égalités de nombres réels. C'est-à-dire que si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ on a :

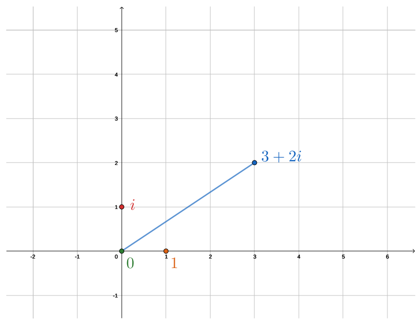
$$a + i\,b = a' + i\,b' \implies \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Opérations sur les complexes (en forme algébrique) Les opérations sur les nombres complexes se font selon les règles usuelles de l'algèbre (développements, fractions, etc) en prenant en compte que $i^2 = -1$. Soient $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes, avec $z_2 \neq 0$.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \qquad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_2y_1 + x_1y_2) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Plan complexe : A tout nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on associe le point du plan de coordonnées (x, y). Et réciproquement, à tout point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On dit que le point a pour **affixe** z.



Conjugué, module : Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit

$$\overline{z} = x - iy \qquad\qquad |z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Interprétation géométrique du module : Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la quantité $|z_1 - z_2|$ représente la distance dans le plan complexe entre les points d'affixes z_1 et z_2. En particulier, $|z|$ est la distance du point d'affixe z à l'origine.

Propriétés de la conjugaison : Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad\qquad \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Propriétés du module : Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \qquad\qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Exponentielle complexe : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

en particulier on a

$$e^{i\,\pi} = -1 \qquad e^{i\,\pi/2} = i \qquad e^{i\,\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad e^{i\,\pi/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad e^{i\,2\pi} = 1$$

Propriétés de l'exponentielle : Pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$e^{i\,\theta_1} \times e^{i\,\theta_2} = e^{i\,(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{e^{i\,\theta_1}}{e^{i\,\theta_2}} = e^{i\,(\theta_1-\theta_2)} \qquad \left(e^{i\,\theta_1}\right)^n = e^{i\,n\theta_1}$$

$$\overline{e^{i\,\theta_1}} = \frac{1}{e^{i\,\theta_1}} = e^{-i\,\theta_1} \qquad \left|e^{i\,\theta_1}\right| = 1$$

et

$$e^{i\,\theta_1} = e^{i\,\theta_2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \iff \theta_1 \equiv \theta_2 \mod 2\pi$$

Forme exponentielle : Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ non nul peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Le réel strictement positif r est appelé le **module** de z. Le réel θ est appelé **argument** de z. Il est unique à 2π près, c'est-à-dire qu'il y a un unique choix possible dans $[0, 2\pi[$ (parfois appelé mesure principale de l'argument), et que tous les autres choix sont décalés de celui-ci d'un multiple de 2π. Pour $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, a donc

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \implies \begin{cases} r &= r' \\ \theta &\equiv \theta' \mod 2\pi \end{cases}$$

Interpretation géométrique de l'argument : L'argument de z est l'angle orienté formé entre le vecteur d'affixe z et l'axe réel. Plus généralement, si les points A, B, C ont pour affixes respectives z_A, z_B, z_C, alors le complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ a pour argument l'angle orienté $\widehat{BAC}$.

Si $x > 0$, alors le complexe $x + iy$ a pour argument $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

Polynôme dans $\mathbb{C}$: Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots a_1 x + a_0$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors l'équation $P(z) = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$ et on peut factoriser P sous la forme

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)$$

où les z_i sont les solutions (pas forcément toutes distinctes) de l'équation.

II Exercices

II.A Forme algébrique

1. (SF 77, 78) (Aspect fondamental) Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme algébrique (c'est-à-dire $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$) :

$$z_1 = (1+2i) - 2(3-4i) \qquad z_2 = (2+3i)(3-4i) \qquad z_3 = -\frac{5}{3-4i}$$

$$z_4 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad z_5 = (2+i)^2 + (2-i)^2 \qquad z_6 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

2. (SF 77, 78) (Aspect fondamental) Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme algébrique (c'est-à-dire $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$) :

$$z_1 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \qquad z_2 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} \qquad z_3 = \frac{1+3i}{1-3i}$$

$$z_4 = \left(\frac{1+2i}{1+i}\right)^2 \qquad z_5 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad z_6 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

3. (SF 77, 78) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
   (b) Montrer que z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

4. (SF 77, 78) A quelle condition sur $z = x + iy \in \mathbb{C}$ le nombre $z^2 + z + 1$ est-il réel ? A quoi correspond géométriquement l'ensemble des points d'affixe z tel que $z^2 + z + 1$ est réel ?
   Indication : On pourra soit utiliser le critère démontré dans l'exercice précédent, soit mettre $z^2 + z + 1$ sous forme algébrique.

II.B Forme exponentielle

5. (SF 79) (Aspect fondamental) Calculer le module des nombres suivants :

$$z_1 = 3 - 4i \qquad z_2 = 2 + i \qquad z_3 = \frac{1}{2+i}$$

$$z_4 = \frac{3-4i}{2+i} \qquad z_5 = (2+i)^6 \qquad z_6 = \frac{2}{1+i\sqrt{3}}$$

6. (SF 79) (Aspect fondamental) Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :
   (a) le nombre complexe de module 6 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
   (b) le nombre complexe de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$
   (c) le nombre complexe de module 3 et d'argument 5π.
   (d) le nombre complexe de module π et d'argument $\frac{\pi}{2}$
   (e) le nombre complexe de module $\cos(2)$ et d'argument 1

7. (SF 79) (Aspect fondamental) Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle (c'est-à-dire sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$).

$$z_1 = 3 - 3i \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{3-3i}{1-i\sqrt{3}}$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad z_5 = -5 \qquad z_6 = (1-i)^{100}$$

8. (SF 31, 32, 33, 79) Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle (c'est-à-dire sous la forme $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$)

$$u = 1 + i \qquad v = 3i + \sqrt{3} \qquad w = -e^{\ln(3)+5i} \qquad z = \frac{-e^{\frac{2i\pi}{5}}}{1+i}$$

II.C Le plan complexe

9. (SF 1189) (Aspect fondamental)
   (a) Placer les points A, B, C d'affixes respectives $1 - 2i$, $4 + 2i$ et $5 - 5i$ dans le plan.
   (b) Calculer les 3 longueurs AB, BC et CA. En déduire que le triangle ABC est isocèle en A.
10. (SF 1189) Soit M_0 le point d'affixe $z = 5 + 2i$.
   (a) Placer M_0 dans le plan complexe.
   (b) Placer sur le dessin, puis déterminer les affixes des points suivants :
      i. M_1 : le symétrique de M_0 par rapport à 0
      ii. M_2 : l'image de M_0 par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
      iii. M_3 : le symétrique de M_0 par rapport à l'axe des abscisses
      iv. M_4 : le symétrique de M_0 par rapport à l'axe des ordonnées
      v. M_5 : le symétrique M_2 par rapport à l'axe des orddonnées
      vi. M_6 : le point d'affixe $i\overline{z}$
      vii. M_7 : le point d'affixe $-iz$
   (c) L'octogone formé par ces 8 points est-il régulier ?
11. (SF 1189, 77, 78, 79) Décrire géométriquement et dessiner dans le plan les ensembles suivants

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 3 + 4i| = 5\} \qquad E_2 = \{z \in \mathbb{C}, z + \overline{z} = 6\} \qquad E_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = |z-i|\}$$

12. (SF 1189, 79) **Triangle équilatéraux**
   On se donne trois points distincts A, B, C dans le plan, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
   (a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$$

   (b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\pi/3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) En déduire que les points d'affixes $z_A = 2 - i$, $z_B = 6 - 7i$ et $z_C = (4 + 3\sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} - 4)$ forment un triangle équilatéral.

13. (SF 77, 78, 79) **Caractérisations des complexes de module** 1
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(a) $x^2 + y^2 = 1$
(b) $|z| = 1$
(c) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
(d) $\overline{z} = \frac{1}{z}$

14. Montrer que pour tout $z \neq 1$ de module 1, la quantité $u = \frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pure.

II.D Trigonométrie

15. (SF 77, 78, 79, 82) (Aspect fondamental)
(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Dans l'exercice qui suit, on se propose de redémontrer quelques formule de trigonométrie en utilisant uniquement les propriétes données dans les rappels plus haut. C'est autant un prétexte à manipuler ces propriété qu'un moyen de les retrouver en cas de trou de mémoire !

16. (SF 77, 82, 83, 1256, 1257) **Démontrer les formules de trigonométrie avec les complexes :**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel. On note $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
(a) Exprimer $\overline{z}$ sous forme exponentielle et algébrique. En déduire les formules

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

(b) Exprimer $-z$ sous forme exponentielle et algébrique. En déduire les formules

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

(c) Exprimer iz sous forme exponentielle et algébrique. En déduire les formules

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

(d) Adapter la méthode pour montrer les formules

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

17. (SF 82, 83, 1256, 1257) En exprimant le produit $e^{ia} \times e^{ib}$ sous forme algébrique et exponentielle, retrouver les formules

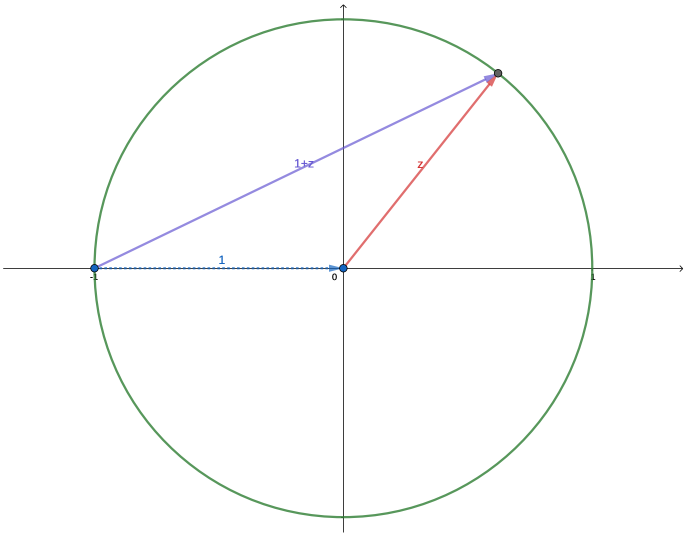
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

La technique qui suit, appelée technique du demi-angle, est astucieuse mais un grand classique. Elle sert à mettre sous forme exponentielle la somme de deux nombre complexes de module 1.

18. (SF 77, 78, 79, 82, 213) **La technique du demi-angle :**

(a) i. Soit x un réel, montrer que $1+e^{2ix} = 2\cos(x)e^{ix}$. *Indication : On pourra factoriser par e^{ix}.*

ii. En utilisant la question précédente et le dessin ci-dessous, retrouver le résultat de géométrie que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.



iii. Mettre sous forme exponentielle les nombres $1+e^{i\pi/6}$ et $1+e^{-i\pi/6}$.

(b) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Quel est le module et l'argument de $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$?

Indication : On pourra factoriser par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ et discuter selon le signe de $\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$.

L'exercice suivant est une belle application de la formule exprimant la somme des termes d'une suite géométrique.

19. (SF 82, 83, 1256, 1257) **Somme géométrique**

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit les sommes

$$E_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}, \quad C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

(a) Que vaut $E_n(\theta)$ si $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$?

(b) Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Indication : Pour la deuxième expression, factoriser $e^{i(n+1)\theta/2}$ en haut, et $e^{i\theta/2}$ en bas.

(c) En déduire une expression des sommes $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$.

Remarque II.1. *La fonction E_n est à quelque chose près ce qu'on appelle le noyau de Dirichlet d'ordre n, et intervient de manière centrale dans la théorie des Séries de Fourier. En utilisant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on peut vérifier que $\lim_{\theta\to 0} E_n(\theta) = n+1$, donc la fonction se prolonge par continuité aux points 0 (tous les points $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).*

20. (SF 82, 83, 1256, 1257) [1] **Sommes de sinusoïdes de même fréquence** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels. Montrer qu'il existe $\theta_{a,b} \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\theta_{a,b})$$

Indication : On pourra considérer $(a-ib)e^{ix}$ et l'exprimer sous forme algébrique et géométrique.

1. Exercice 7 - Math101

Remarque II.2. *La moralité de cette exercice, est qu'une somme de signaux sinusoïdaux de même fréquence est encore sinusoïdal (et de cette fréquence). Si les fréquence sont différentes on peut obtenir des signaux plus compliqués (voire arbitrairement compliqués si on s'autorise à faire des sommes infinies, ce qui est notamment l'objet de la théorie des séries de Fourier).*

21. (SF 82, 83, 1256, 1257) Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel. En exprimant le cube de e^{ix} sous forme algébrique et exponentielle, montrer que
$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$
et
$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\cos(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Remarque II.3. *En procédant de même, on pourrait ainsi trouver des formule pour* $\cos(nx)$ *et* $\sin(nx)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

II.E Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

22. (SF 1256) **Racines carrées complexes :** Caluler les racines carrées des nombres complexes suivants
$$z_1 = 7 + 24i, \qquad z_2 = -15 - 8i, \qquad z_3 = 5 - 12i, \qquad z_4 = i,$$
Indication : Si $z = x + iy$ est un racine carrée de $a + ib$, calculer z^2 et identifier. On pourra aussi se servir de la relation $|z|^2 = |a + ib|$.

23. (SF 1256) **Equations quadratiques dans $\mathbb{C}$:** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad z^2 = 7 + 24i \qquad z^2 - (5 + 6i)z + 1 - 13i = 0$$
Indication : Calculer les racines complexes du discriminant Δ comme dans l'exercice précédent. Puis utiliser la "formule du delta" qui exprime les racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

24. (SF 1256) **Racines cubiques de l'unité**
    (a) Montrer que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
    (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$ (on donnera les solutions sous forme algébrique et exponentielle). Placer les solutions sur un dessin dans le plan complexe. Quelle figure forment-ils.

25. (SF 1256) **Racines $4^{\text{ème}}$ de l'unité**
    En factorisant le polynôme $z^4 - 1$ dans $\mathbb{C}$, déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$. Placer les solutions sur le plan complexe. Quelle figure forment-ils.

26. (SF 1256) **Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité**
    On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, et on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
    (a) Montrer que $\omega^n = 1$. En déduire que pour $0 \leq k \leq n - 1$, ω^k est racine du polynôme $P(x) = x^n - 1$.
    (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$.
    Indication : On pourra utiliser qu'une equation polynomiale de degré n possède au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

Remarque II.4. *Les n nombres complexes ω^k sont appelés racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Dans le plan complexe, ils forment un polygone régulier à n coté inscrit dans le cercle trigonométrique.*