

n°5 - Fonctions spéciales

Notes de Cours

I Fonctions exponentielles et logarithme

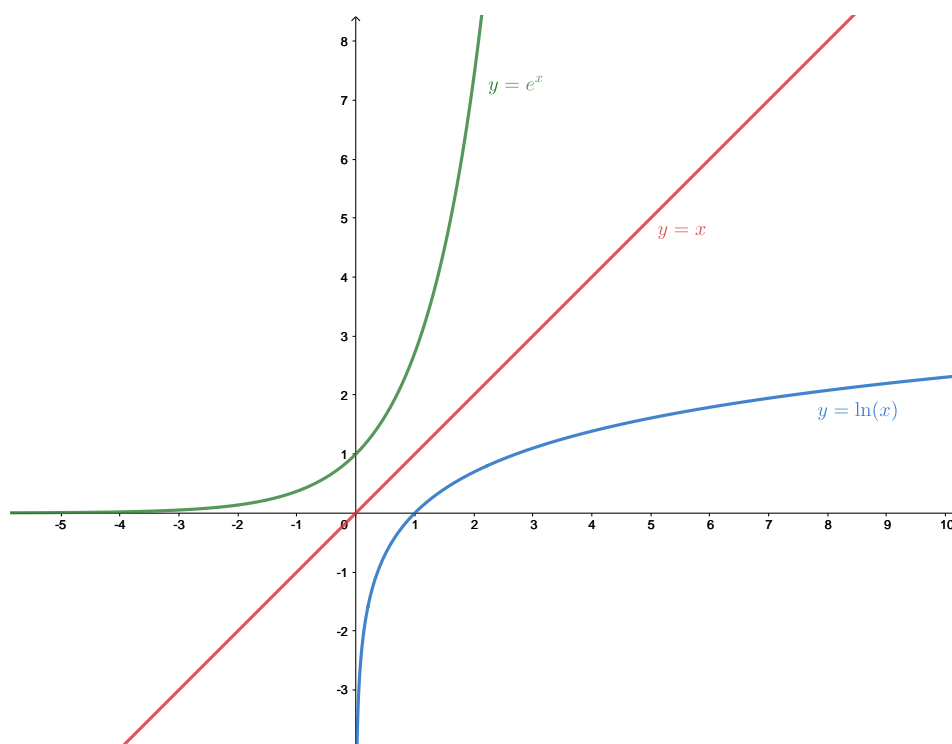


FIGURE 1 – Les graphes des fonction \ln et \exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = y$

Voici un formulaire des propriétés fondamentales à connaître et savoir utiliser.

1. Domaines de définition, variations :

$$\begin{array}{ll} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow]0, +\infty[\\ x & \longmapsto e^x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \ln :]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(x) \end{array}$$

Les fonctions \exp et \ln sont strictement croissantes sur \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* respectivement.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty$$

2. **Les fonctions sont réciproques l'une de l'autre :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x \qquad \forall y > 0, \quad e^{\ln(y)} = y$$

3. **Dérivée :**

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \qquad \frac{d \ln |x|}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

et plus généralement pour une fonction u , on a

$$(e^u)' = u' \times e^u \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

4. **Des sommes aux produits :** L'exponentielle transforme les sommes en produit. Et le logarithme transforme les produits en sommes. C'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 & \ln(1) &= 0 \\ e^1 &= e & \ln(e) &= 1 \\ e^{x+y} &= e^x \times e^y & \ln(a \times b) &= \ln(a) + \ln(b) \\ e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} & \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} & \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln(a) \\ e^{xy} &= (e^x)^y & \ln(a^b) &= b \times \ln(a) \\ e^{\frac{x}{y}} &= \sqrt[y]{e^x} & \ln(\sqrt[b]{a}) &= \frac{\ln(a)}{b} \end{aligned}$$

5. **Fonction puissance et logarithme en base $a > 0$:** Pour $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on définit

$$a^x := e^{x \ln(a)} \qquad \log_a(y) := \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

les fonctions $x \mapsto a^x$ et $y \mapsto \log_a(y)$ sont réciproques l'une de l'autre. Le logarithme népérien correspond au logarithme en base e (c'est-à-dire qu'on $\log_e = \ln$).

6. **Croissance comparée :** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si la limite en α de $(\ln(x))^a \cdot |x|^b \cdot e^{cx}$ est une forme indéterminée, alors

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (\ln(x))^a \cdot |x|^b \cdot e^{cx} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \alpha} e^{cx} & \text{si } c \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} |x|^b & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} (\ln(x))^a & \text{si } c = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

II Exercices

II.A Calculs élémentaires

1. (SF 31, 32) (Aspect fondamental) Mettre les expressions suivantes sous la forme $\ln(a)$:

$$\ln(6) + \ln(4) - \ln(12) = \ln(\dots) \qquad 3\ln(2) - 4\ln(\sqrt{2}) = \ln(\dots)$$

$$\frac{1}{2}\ln(t^2 + 4t + 4) = \ln(\dots) \qquad \ln(x^2 - 1) - \ln(x + 1) = \ln(\dots)$$

2. (SF 31, 33, 34) (Aspect fondamental) Mettre les expressions suivantes sous la forme e^a :

$$\sqrt[3]{e^{-12}} = e^{\dots} \qquad e^3 3^e = e^{\dots}$$

$$\frac{\sqrt{e^{-4x}}}{(e^{-\frac{x}{2}})^6 e^{5x}} = e^{\dots} \qquad u^{\frac{1}{\ln(u)}} = e^{\dots}$$

3. (SF 22, 23, 24, 25, 39) (Aspect fondamental) Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(3x - 2) & f_2(x) &= e^{x^2} \\ f_3(x) &= x \ln(x) - x & f_4(x) &= 3^x \\ f_5(x) &= \log_{10}(x) & f_6(x) &= \ln(e^x - x) \end{aligned}$$

4. (SF 32, 33, 34)

(a) Sachant $2^{10} = 1024$, $2^9 = 512$ et 10^3 , montrer que

$$3 \leq \log_2(10) \leq 3 + \frac{1}{3}$$

(b) Sachant que $10 \leq 33 < 100$, donner un encadrement de $\log_{10}(33)$ entre deux entiers.

(c) Que vaut la partie entière de $\log_{10}(3827939174323)$?

(Indication : trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k \leq 3827939174323 < 10^{k+1}$)

II.B Calculs de limites

5. (SF 13, 14, 16) Calculer les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} & \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x^2 + x + 1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(e^x - 1) & \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(-\frac{1}{2+x})} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{3-4x}} & \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

6. (SF 13, 14, 15, 16, 17) Calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln(x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} - e^{2x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{-x} - 5e^{2x} + 1}{3e^{2x} - e^x} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

7. (SF 13,16, 19)

- (a) Calculer les limites suivantes (on pourra faire apparaître des taux de variation)

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) & \end{array}$$

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite suivante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

II.C Trigonométrie hyperbolique

Définition II.1 (sinus, cosinus et tangente hyperbolique). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

8. (SF 31, 32, 33) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

9. (SF 38, 39, 40, 41) Dans cet exercice, on cherche à étudier les fonctions sh et ch.

- (a) Déterminer la parité des fonctions ch et sh.
- (b) Dériver les fonctions ch et sh (exprimer le résultat en fonction de ch et sh).
 - i. Développer le produit $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \geq 1$.
 - ii. Calculer les limites de la fonction sh en $-\infty$ et $+\infty$.
 - iii. En déduire le tableau de variation de la fonction sh
- (c)
 - i. Déterminer le signe de $\operatorname{sh}(x)$ en fonction de x (on pourra se servir du tableau de variation).
 - ii. Calculer les limites de la fonction ch en $-\infty$ et $+\infty$.
 - iii. En déduire la tableau de variation de la fonction ch.
- (d) Dessiner l'allure du graphe de sh et ch.

10. (SF 31, 32, 38, 39, 40, 41) Dans cet exercice, on étudie la fonction th.

- (a) Déterminez le domaine de définition de th. Quelle est sa parité?
- (b)
 - i. Calculer la dérivée de th et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

- ii. Calculer les limites de $\operatorname{th}(x)$ en $\pm\infty$.
- iii. Tracer le tableau de variation et l'allure du graphe.

II.D Etude de la fonction x^x

11. (SF 15, 31, 33, 34, 38, 39, 40, 41) Dans cet exercice, on cherche à étudier la fonction $f(x) = x^x$.
- (a) Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = e^{g(x)}$ avec g une fonction qu'on explicitera. En déduire le domaine de définition de f .
 - (b)
 - i. Calculer la dérivée de f .
 - ii. Calculer la limite de f en $+\infty$. Calculer la limite en 0^+ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
 - iii. Tracer le tableau de variation.

II.E Propriétés du logarithme

Comment démontre-t-on les propriétés du logarithme ? Dans cette partie on propose quelques preuves en partant de zéro. C'est-à-dire qu'on prend la définition suivante du logarithme et qu'on en déduit ses propriétés.

Définition II.2 (Logarithme). Pour $x > 0$, on pose

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

12. (SF 65, 57) **Le logarithme transforme les produits en sommes**

L'objectif de cet exercice est de démontrer que le logarithme transforme les produits en sommes. Pour cela, on ne s'autorisera à utiliser que la définition II.2 ci-dessus (on ne suppose pas que l'on connaît déjà les autres propriétés du logarithme).

- (a) Que vaut $\ln(1)$?
- (b) Montrer que pour tout $a, b > 0$, on a

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln(b) - \ln(a)$$

- (c) En effectuant le changement de variable $u = ty$, montrer que pour tout $x, y > 0$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \int_y^x \frac{du}{u}$$

- (d) En déduire que pour tout $x, y > 0$,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

- (e) En déduire que pour tout $x, y > 0$, on a également

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

puis

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

13. (SF 57, 1253, 329) **Bijektivité du logarithme**

Dans cet exercice, on ne s'autorise à utiliser que l'expression $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ et les propriétés du logarithme démontrées dans l'exercice précédent.

- (a) Montrer que la fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
- (b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $\ln(2^n) = n \ln(2)$.

- (c) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

puis que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

(Indication : pour déduire la limite en 0^+ , on pourra faire le changement de variable $y = \frac{1}{x}$)

- (d) Justifier que la fonction \ln est continue. En déduire que c'est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

II.F Propriétés de l'exponentielle

Le fait que la fonction \ln soit une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} assure qu'il existe une fonction réciproque de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Cela nous autorise à prendre la définition suivante de l'exponentielle.

Définition II.3 (exponentielle). *La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est définie comme la réciproque de la fonction \ln . En particulier c'est une fonction strictement positive, strictement croissante sur \mathbb{R} et on a les limites*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

14. (SF 22, 25, 67) Lien avec les équations différentielles

- (a) En utilisant la relation $\ln(e^x) = x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\exp'(x) = \exp(x)$.
- (b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) = af(x)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ce^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (Indication : On pourra considérer $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$, et dériver g .)