n°2 – Points, droites, vecteurs (corrigé)

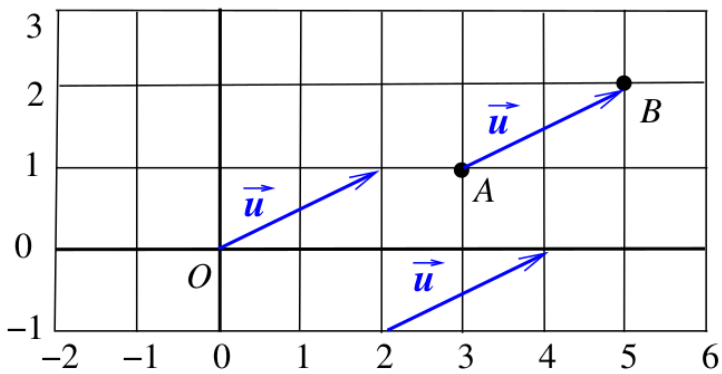
Notes de Cours

Vecteurs

Un vecteur est défini par une direction, un sens et une norme. La direction désigne son orientation par rapport aux vecteurs unitaires du repère, par exemple un vecteur peut être aligné avec l'axe Ox, ou être tourné d'un angle de $30\,°$, etc. Connaissant sa direction, un vecteur peut être défini dans un sens ou dans l'autre, qu'on représente graphiquement par la pointe de la flèche. Enfin la norme représente la longueur du vecteur. Un vecteur peut être décrit par ses coordonnées (x, y) dans le repère.

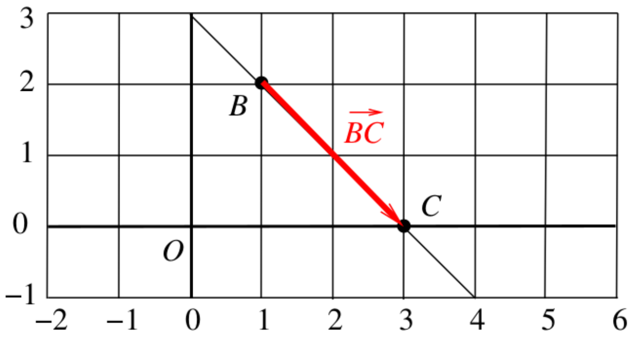
Soient deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). On peut représenter le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche allant de A vers B. Les coordonnées de ce vecteur sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

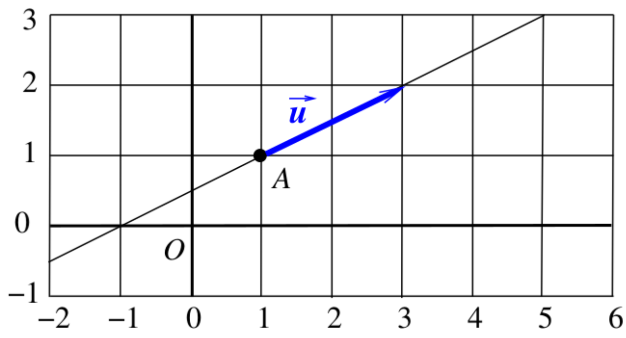
Deux vecteurs ayant la même direction, le même sens et la même norme sont égaux. Ceci signifie qu'un vecteur peut être dessiné en n'importe quel point du repère. Par exemple, tous les vecteurs $\vec{u}$ de la figure suivante sont égaux et ont pour coordonnées $(2, 1)$ puisqu'ils vont tous deux cases vers la droite et une case vers le haut. Vous pouvez vérifier que la formule $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ fonctionne bien.



Droites

On peut définir une droite à partir de deux points ou encore à partir d'un point et d'un vecteur. Dans le premier cas on définit par exemple une droite (BC) comme l'ensemble des points alignés avec les points B et C. Dans le second cas si on part d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$, on définit la droite comme étant l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il a la même direction mais pas forcément le même sens ni la même longueur. Ces deux cas de figure sont représentés sur le schéma suivant.

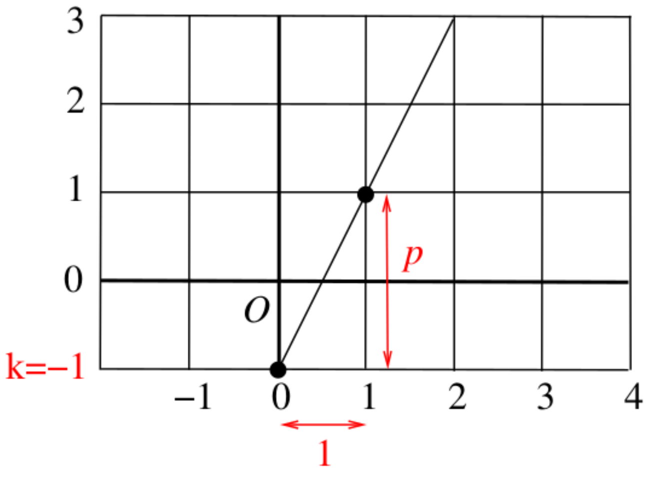




On appelle vecteur directeur le vecteur définissant une droite. Dans le cas d'une droite (BC) définie par deux points B et C, on peut dire qu'il s'agit également de la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

Une droite peut aussi être définie à l'aide d'une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des réels. La droite est alors l'ensemble des points de coordonnées (x, y) qui vérifient l'équation. Par exemple si on a $a = 0$, $b = 1$, et $c = 0$, l'équation s'écrit $y = 0$. Tous les points vérifiant cette équation doivent avoir une coordonnée y nulle, mais il n'y a aucune restriction sur x, il s'agit donc de tous les points d'ordonnée 0, autrement dit de l'axe Ox.

Une forme très utile de l'équation d'une droite est l'équation réduite, écrite ainsi : $y = px + k$ avec p et k des réels. La droite définie ainsi passe par le point de coordonnées $(0, k)$, on appelle donc k **l'ordonnée à l'origine**. Si l'ordonnée à l'origine est nulle, alors la droite passe par l'origine du repère. La grandeur p représente la **pente** de la droite, elle est donc appelée ainsi. En effet, si on se déplace d'une unité vers la droite, il faut se déplacer de p unités vers le haut pour rester sur la droite (si p est négatif, cela veut dire qu'il faut aller vers le bas). Si la pente est nulle, alors la droite est horizontale. Sur la figure suivante on peut voir la droite d'ordonnée à l'origine -1 et de pente 2, son équation réduite est donc $y = 2x - 1$.

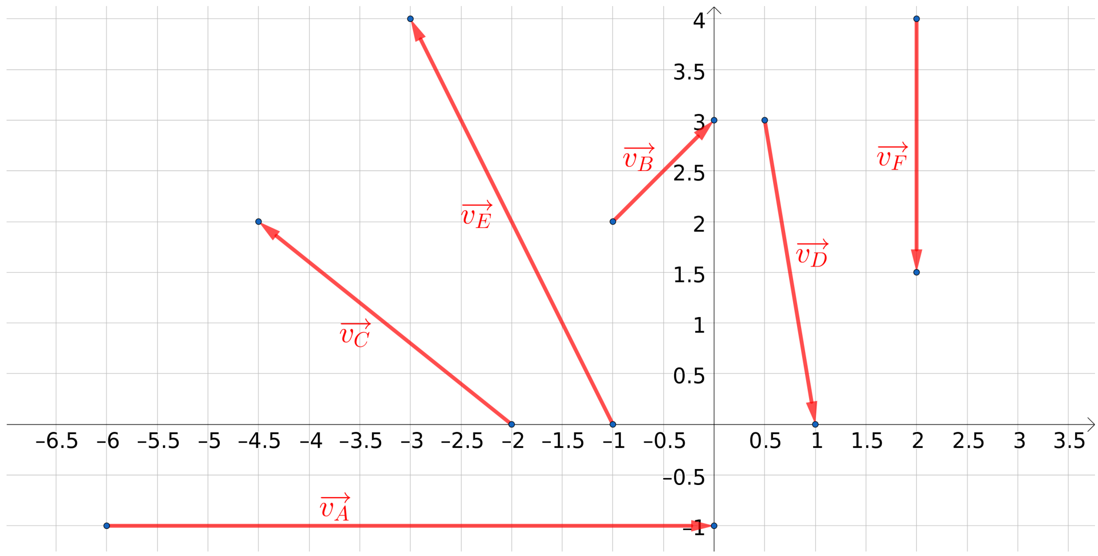


I Composantes (aspect fondamental)

1. (SF1185) Représenter les vecteurs de coordonnées suivantes dans un repère

$$\overrightarrow{v_A}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_B}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_C}\begin{pmatrix}-2,5\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_D}\begin{pmatrix}0,5\\-3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_E}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_F}\begin{pmatrix}0\\-2,5\end{pmatrix}.$$

Solutions



2. (SF1201) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{MN}$ défini par les deux points M et N dont les coordonnées dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont,

$$a)\ M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}\quad b)\ M\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix}15\\4\end{pmatrix}\quad c)\ M\begin{pmatrix}2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\end{pmatrix}.$$

Solutions

a) $\begin{pmatrix}x_N-x_M\\y_N-y_M\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{-11}{3}\end{pmatrix}$.

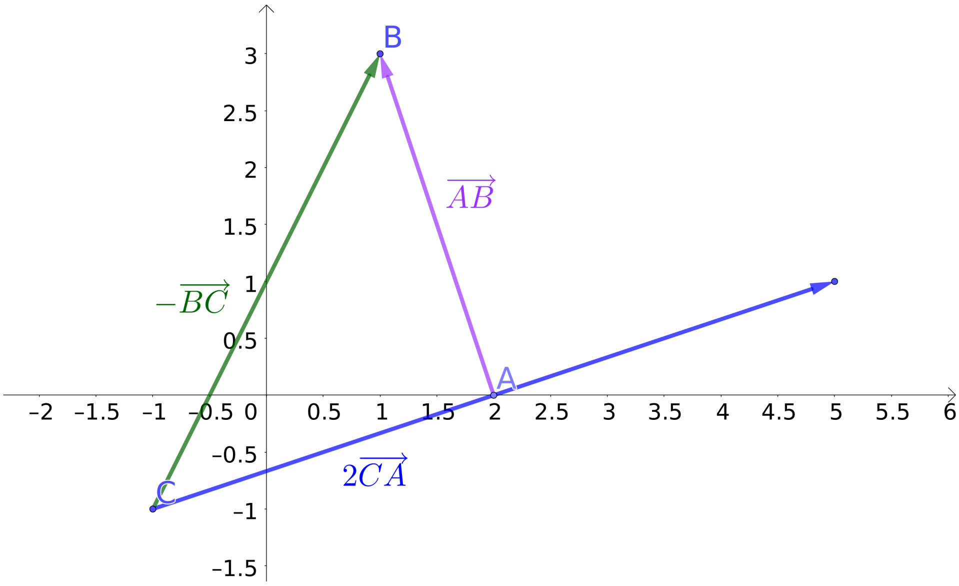
3. (SF1185, SF1201, SF1223) On définit trois points du plan : $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

   (a) Placer les points sur un repère

   (b) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{2CA}$, $-\overrightarrow{BC}$

   (c) Quel est le lien entre $-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}$?

   Solutions



(c) $-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$

II Combinaisons linéaires, milieu d'un segment

1. (SF1184) Développer puis simplifier les expressions vectorielles suivantes :
(a) $\vec{r} - 2(\vec{r} + \vec{s}) - \frac{1}{3}\vec{s}$; (b) $-\frac{2}{5}\vec{r} + \vec{r} - \frac{1}{4}(\vec{r} - \vec{s})$; (c) $\frac{1}{4}(\vec{r} + \vec{s}) - \frac{1}{2}\vec{s} + \frac{1}{4}(\vec{s} - \vec{r})$.
Solutions
(a) $-\vec{r} - \frac{7}{3}\vec{s}$, (b) $\frac{7}{20}\vec{r} + \frac{1}{4}\vec{s}$, (c) $\vec{0}$.
2. (SF1184) Développer les expressions suivantes :
   (a) $\overrightarrow{w} - 2(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{v}$
   (b) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$
   (c) $-\frac{2}{5}\overrightarrow{r} + \overrightarrow{t} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{t})$

   Solutions

   (a) $-\overrightarrow{w} - \frac{7}{3}\overrightarrow{v}$
   (b) $\frac{1}{6}\overrightarrow{a} - \frac{5}{6}\overrightarrow{b}$
   (c) $-\frac{13}{20}\overrightarrow{r} + \frac{5}{4}\overrightarrow{t}$
3. (SF1184, SF1204) On définit les vecteurs $\overrightarrow{p}(3,2)$, $\overrightarrow{q}(-2,0)$, $\overrightarrow{r}(1,1)$, $\overrightarrow{s}(-1,-5)$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$
   (b) $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$
   (c) $\overrightarrow{r} + 2\overrightarrow{s}$

(d) $3\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}$
(e) $-\overrightarrow{p} + \frac{4}{3}\overrightarrow{q} - \frac{3}{5}\overrightarrow{r} - \frac{5}{2}\overrightarrow{s}$

Solutions

(a) $(1, 2)$
(b) $(5, 2)$
(c) $(-1, -9)$
(d) $(6, -1)$
(e) $(-\frac{113}{30}, \frac{99}{10})$

4. (SF1184, SF1201, R1) Soient deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Soit I le milieu du segment $[AB]$.

(a) Quelles sont les coordonnées du point I ?

(b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

(c) Donner les coordonnées du point I et du vecteur $\overrightarrow{IA}$ si les coordonnées des points sont $A(5, \frac{8}{3})$, $B(0, -3)$.

Solutions

(a) $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.
(b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
(c) $I(\frac{5}{2}, -\frac{1}{6})$, $\overrightarrow{IA}(\frac{5}{2}, \frac{17}{6})$.

III Droites (aspect fondamental)

1. (R2) On considère la droite d'équation $4x - 2y + \frac{1}{3} = 0$. Est-ce que les points suivants appartiennent à la droite ?
(a) $A(0, 0)$; (b) $B(0, \frac{1}{6})$; (c) $C(1, 2)$; (d) $D(\frac{1}{4}, 0)$; (e) $E(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$.
Solutions
(a) non ; (b) oui ; (c) non ; (d) non ; (e) oui.

2. (R3) On considère la droite d'équation $ax+by+c = 0$. Que peut-on dire dans les cas particuliers suivants ?
(a) $a = 0$ et $b \neq 0$; (b) $a \neq 0$ et $b = 0$; (c) $c = 0$.
Solutions

(a) On a $by + c = 0$ ou encore $y = -\frac{c}{b}$. La droite est horizontale, sa pente est nulle.
(b) On a $ax + c = 0$ ou encore $x = -\frac{c}{a}$. La droite est verticale, sa pente est infinie.
(c) On a $ax + by = 0$, donc le point $(0, 0)$ vérifie l'équation. La droite passe donc par l'origine.

3. (SF300) **(exercice difficile et optionnel)** Trouver l'équation de la droite passant par le point $A(4,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,3)$. Indication : on peut par exemple prendre un point $M(x,y)$ quelconque sur la droite et exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ de deux façons différentes : en fonction du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et en fonction des coordonnées de A et M.

   Solutions

   Voici une solution possible, mais il existe plusieurs façons de faire.

   On suit l'indication de l'énoncé et on définit $M(x,y)$. Grâce aux coordonnées on obtient $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x-4, y-1)$. Mais on sait aussi que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ car c'est comme cela qu'on définit la droite. Dire qu'ils sont colinéaire, c'est dire que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ où t est un réel. En effet les deux vecteurs ont la même direction, mais pas forcément le même sens ou la même longueur, donc ils sont égaux à un facteur multiplicatif près. On a donc $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} = (2t, 3t)$.

   On peut donc égaliser les deux expressions du vecteur, par exemple la première composante : $2t = x-4$, ce qui donne $t = \frac{x}{2} - 2$. Puis la deuxième composante : $3t = y-1$, qui devient grâce à l'expression de t obtenue : $\frac{3}{2}x - 6 = y - 1$. En multipliant par 2 on obtient $3x - 12 = 2y - 2$, et on simplifie pour trouver la solution : $3x - 2y - 10 = 0$.

4. (SF1260, R3, R4) On a expliqué dans les notes de cours que l'équation d'une droite pouvait s'écrire ainsi : $ax + by + c = 0$, ou encore parfois ainsi : $y = px + k$, avec a, b, c, p, k des réels. Si on considère une droite qui peut être décrite par ces deux formules, pouvez-vous trouver le lien entre les réels a, b, c et les réels p et k ?

   Solutions

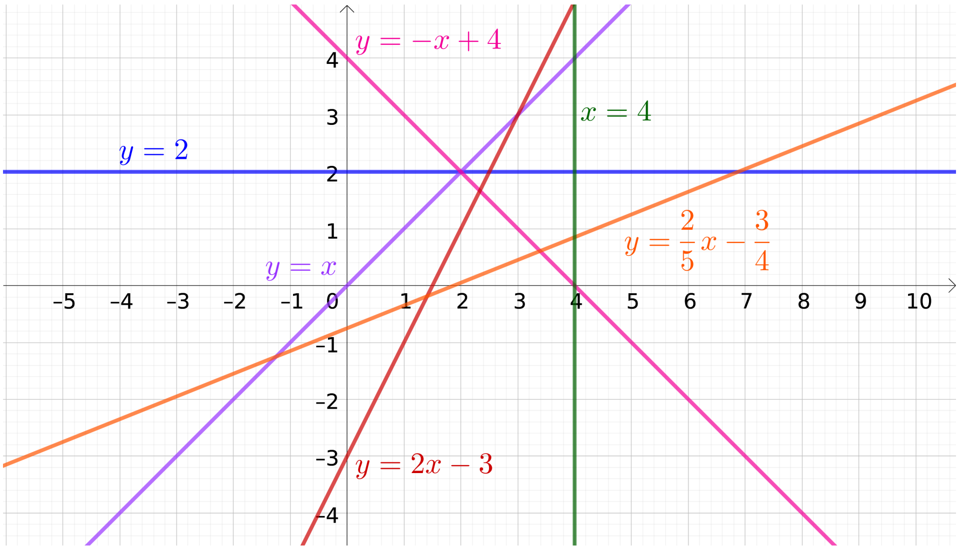
   Il faut que le réel *b* soit non nul, alors on divise la première équation par b : $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$, on ré-organise les termes et on trouve : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. On reconnaît bien la deuxième équation avec $p = -\frac{a}{b}$ et $k = -\frac{c}{b}$.

5. (SF1260) Donner l'ordonnée à l'origine, la pente et l'ordonnée du point d'abscisse 1 pour les droites suivantes :

   (a) $y = 2$; (b) $y = x$; (c) $y = -x + 4$; (d) $y = 2x - 3$; (e) $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}$; (f) $x = 4$.

   Solutions

   (a) L'ordonnée à l'origine est 2 et la pente 0. La droite passe par le point $(1,2)$.
   (b) L'ordonnée à l'origine est 0 et la pente 1. La droite passe par le point $(1,1)$.
   (c) L'ordonnée à l'origine est 4 et la pente -1. La droite passe par le point $(1,3)$.
   (d) L'ordonnée à l'origine est -3 et la pente 2. La droite passe par le point $(1,-1)$.
   (e) L'ordonnée à l'origine est $-\frac{3}{4}$ et la pente $\frac{2}{5}$. La droite passe par le point $(1, -\frac{7}{20})$.
   (f) Cette droite est verticale, parallèle à l'axe Oy et coupe l'axe Ox à la valeur 4. Elle ne coupe pas l'origine donc l'ordonnée à l'origine n'existe pas ! On peut voir que cette droite n'admet en effet pas d'équation réduite. Sa pente est infinie et elle ne passe par aucune point d'abscisse 1.


$y = -x + 4$
$x = 4$
$y = 2$
$y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}$
$y = x$
$y = 2x - 3$
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
4 3 2 1 –1 –2 –3 –4