n°7 - Dérivation, interprétation géométrique, lemme de Rolle, Théorème des accroissements finis
(Corrigé)

Notes de Cours

I Dérivation et théorème des accroissements finis

I.A Dérivée et tangente

Définition I.1 (Dérivée)**.** *On dit que f est* ***dérivable en*** *a si la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite pour x tendant vers a (avec $x \neq a$). Quand elle existe, cette limite est appelée la dérivée en a de f, noté $f'(a)$:*

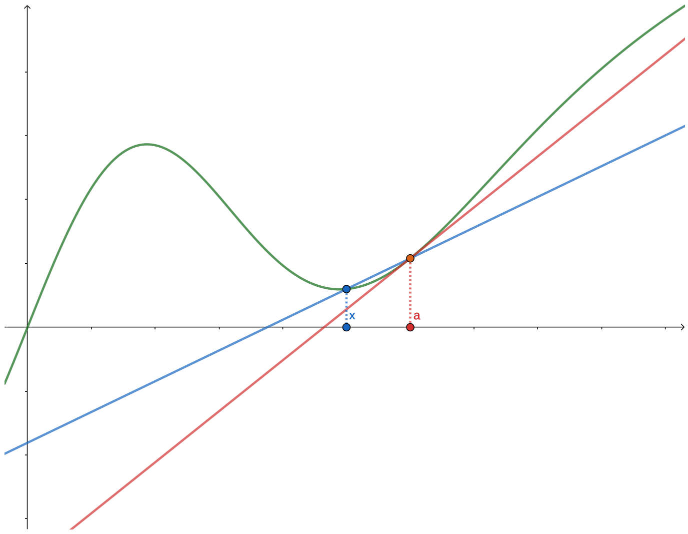
$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

De manière équivalente, en effectuant le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq a}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique :

Quand elle existe, la quantité $f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente en** a au graphe de f. En effet, la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, appelée **taux de variation** de f entre x et a, peut s'interpréter comme le coefficient directeur de la droite sécante au graphe de f aux points d'abscisses x et a. Or la dérivée de f en a est définie comme la limite du taux de variation de f entre a et x, donc cela correspond à la pente de la "secante limite", c'est-à-dire la tangente en a.



La secante (en bleu) s'approche de la tangente (en rouge) à mesure que x s'approche de a.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts, la sécante au graphe de f entre les points d'abscisses a et b a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

et si f est dérivable en f, on peut faire tendre b vers a pour obtenir la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

On obtient ainsi l'équation de la tangente en a au graphe de f.

I.B Rolle et TAF

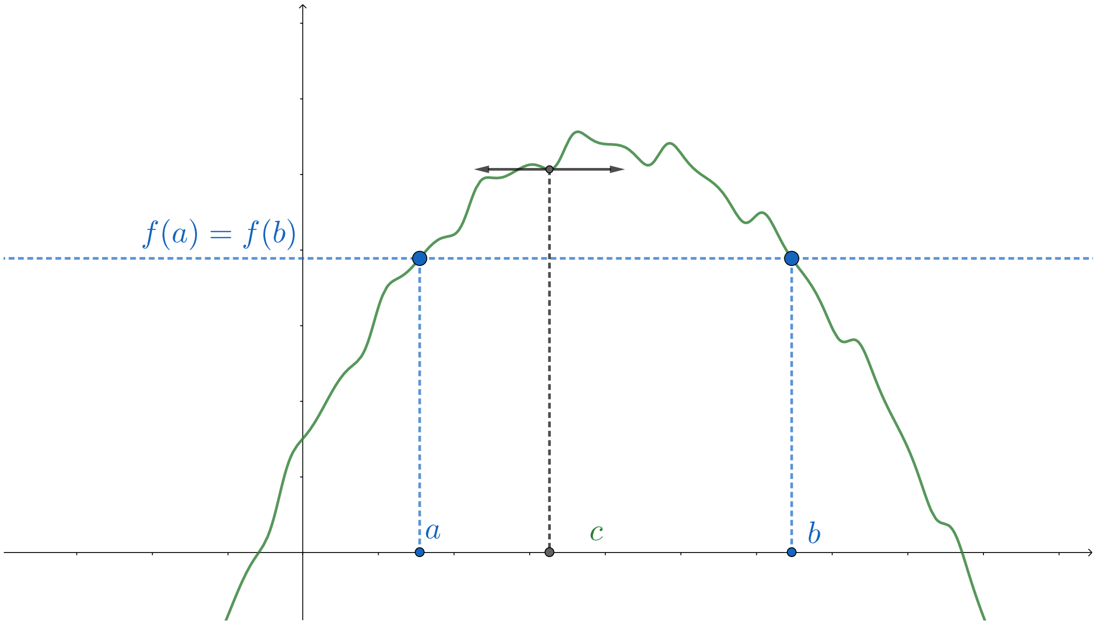
Le lemme de Rolle dit qu'une fonction f dérivable qui prend deux fois la même valeur possède un point d'annulation de sa dérivée entre les deux (ce qui correspond graphiquement à une tangente horizontale pour le graphe de la fonction f).

Théorème I.2 (Lemme de Rolle)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.* ***On suppose*** *qu'il existe deux points distincts $a < b$ dans I tels que*

$$f(a) = f(b)$$

alors *il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$



Le point c n'est pas unique en général, le théorème assure l'existence d'**au moins** un point $c \in]a, b[$, mais il peut très bien y en avoir plusieurs (par exemple sur l'illustration ci-dessus, il y a plusieurs autres points où la tangente est horizontale).

Remarque I.3 (Un peu d'histoire)**.** *Rolle s'intéressait au problème d'encadrer les solutions des équations polynoniales et le théorème qu'il formule dans un ouvrage en 1690 ne concernait que les polynômes et ne faisait pas intervenir de calcul infinitésimal (la dérivée du polynôme était juste vue comme une opération formelle appelée "cascade"). Il n'était probablement pas le premier à avoir découvert ce résultat, il semble en effet que le mathématicien indien Bhāskara II (1114–1185) connaissait déjà ce thèorème plus de 500 ans avant Rolle.*

Une conséquence (et une généralisation) du lemme de Rolle est le théorème des Accroissements Finis (parfois abrégé en l'acronyme TAF) :

Théorème I.4 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour tous points distincts $a < b$ dans I, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. On considère la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. La fonction g est dérivable sur I et on a

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

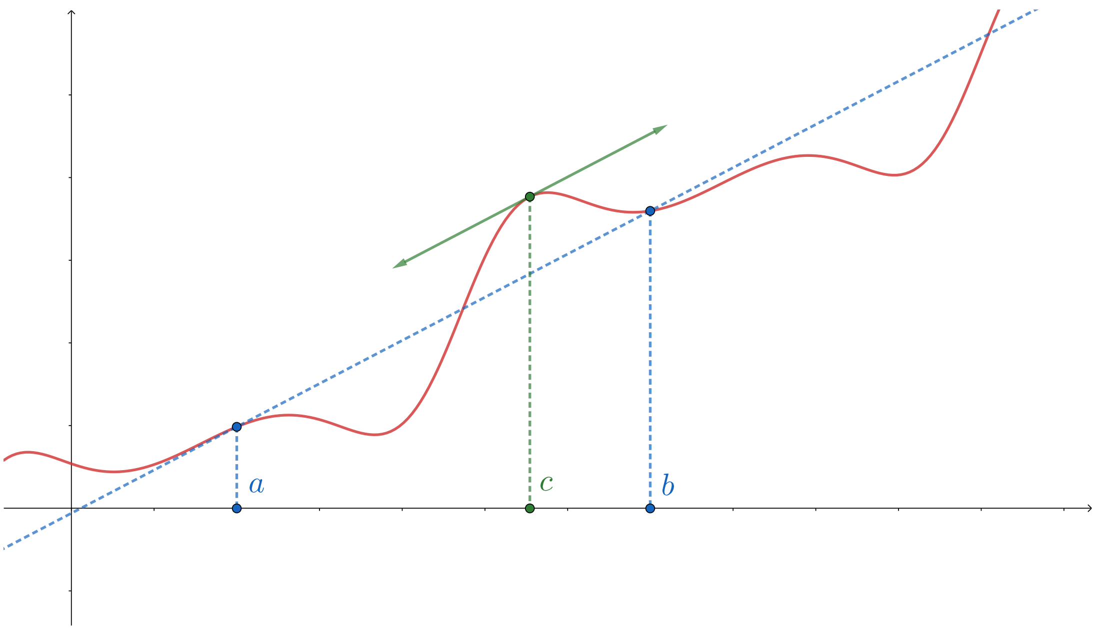
donc d'après le Lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Dans ce théorème, on peut interpréter géométriquement les quantités $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ comme la pente de la sécante entre a et b au graphe de f, et $f'(c)$ comme la pente de la tangente en c au graphe de f. Et une égalité de pentes revient à dire que ces deux droites sont parallèles. En d'autres termes, le théorème des accroissements finis nous dit que pour toute secante au graphe de f (prise entre des points a et b), il existe au moins une tangente au graphe de f (au point c) qui est parallèle à cette sécante.

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{pente de la tangente en } c} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pente de la sécante entre } a \text{ et } b}$$



Tout comme dans le lemme de Rolle, le point c dépend de a et b et n'est pas forcément unique.

Mentionnons la généralisation à l'ordre n du théorème des acrroissements finis : la formule de Taylor Lagrange, qui permet si la fonction est n fois dérivable en un point, de l'approximer autour de ce point par un polynôme de degré $n-1$.

Théorème I.5 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Soit $a \in I$, pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

I.C Inégalité des accroissements finis

Une conséquence du théorème des accroissements finis est l'inégalité des accroissements finis qui permet de majorer les variations de f si on peut borner sa dérivée.

Théorème I.6 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que la dérivée est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tels que* *pour tout $x \in I$,*

$$|f'(x)| \leq M$$

alors pour tout $a, b \in I$ distincts, on a

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$$

Démonstration. On se donne $a, b \in I$ distincts. Quitte à inverser les noms de a et b, on peut supposer $a < b$ (cela ne change rien car $|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$ et $|b - a| = |a - b|$). Comme f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$

et donc en prenant la valeur absolue

$$|f(a) - f(b)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq M} \cdot |b - a| \leq M|b - a|$$

□

II Exercices

II.A Calculs de dérivées

1. (SF 22, 23, 24) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^5 + 3x^2 + 2 \qquad f_2(x) = 7x\cos(x) \qquad f_3(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$f_4(x) = x\sin(x) + \ln(x)\cos(x) \qquad f_5(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad f_6(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^4 + x\sin(x) + 2}$$

Solution :

$$f_1'(x) = 15x^4 + 6x \qquad f_2'(x) = 7\cos(x) - 7x\sin(x)$$

$$f_3'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2} \qquad f_4'(x) = \sin(x) + x\cos(x) + \frac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)$$

$$f_5'(x) = \frac{2\cos(x) + 1}{(2+\cos(x))^2} \qquad f_6'(x) = \frac{2x^5 + x^4\sin(x) + 5x^3\cos(x) - x^2\sin(x) - 3x + \sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)}{(x^4 + x\sin(x) + 2)^2}$$

---

2. (SF 22, 23, 24, 25) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3(2x+5)^5 \qquad f_2(x) = e^{5x^4} \qquad f_3(x) = \sin(3x+2)$$

$$f_4(x) = (\ln(x))^2 \qquad f_5(x) = \ln(\cos(x)) \qquad f_6(x) = \cos(\ln(x))$$

Solution :

$$f_1'(x) = 30(2x+5)^5 \qquad f_2'(x) = 20x^3 e^{5x^4} \qquad f_3'(x) = 3\cos(3x+2)$$

$$f_4'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} \qquad f_5'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \qquad f_6'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$$

3. (SF 22, 23, 24, 25) Math101 : Exercice 79 Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(f(x^2)), \qquad f_2(x) = \sin(f(x)^2), \qquad f_3(x) = \sin^2 f(x),$$

$$f_4(x) = \sqrt{1+f(x)^4}, \qquad f_5(x) = \ln(2+\cos(f(x))), \qquad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2+f(x)^2}$$

Solution :

$$f_1'(x) = 2xf'(x^2)\cos(f(x^2)), \qquad f_2'(x) = 2f'(x)f(x)\cos(f(x)^2),$$

$$f_3'(x) = 2\cos(f(x))\sin(f(x)), \qquad f_4'(x) = \frac{2f'(x)f(x)^3}{\sqrt{1+f(x)^4}},$$

$$f_5'(x) = \frac{-f'(x)\sin f(x)}{2+\cos f(x)}, \qquad f_6'(x) = -\frac{2\pi f'(x)f(x)}{(2+f(x)^2)^2}\left(1+\tan^2\frac{\pi}{2+f(x)^2}\right)$$

4. (SF 22, 23, 24, 25, 39) Math101 : Exercice 82 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1(x) = x^2+1+x^{11}+x^{101}, \qquad f_2(x) = x^5\cos(x), \qquad f_3(x) = e^x\sin(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1+x}{x-7}, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}, \qquad f_6(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2},$$

$$f_7(x) = \frac{x+\sin x}{\cos x}$$

Solution :

(a) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_1'(x) = 2x + 11x^{10} + 101x^{100}$$

(b) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_2'(x) = 5x^4\cos(x) - x^5\sin(x)$$

(c) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_3'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

(d) f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{7\} =]-\infty, 7[\cup]7, +\infty[$, et

$$f_4'(x) = -\frac{-8}{x-7}$$

(e) f_5 est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$, et

$$f_5'(x) = \frac{2x - x\ln(x) - 2}{2x(x-1)\sqrt{x-1}}$$

(f) f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, et

$$f_6'(x) = -\frac{x^3 + 3x^2 + 2}{(1+x)^3}$$

(g) f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$, et

$$f_7'(x) = \frac{1 + \cos(x) + x\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

---

5. (SF 28) Math151 : Test 1 (2014)

(a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto \sin(2x)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.

(b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 3.

(c) ($*$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$. On suppose que la tangente au graphe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.

Solution :

(a) La tangente a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f_1(\pi/12) + f_1'(\pi/2)\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin(\pi/6) + 2\cos(\pi/6)\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

(b) La tangente a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f_2(1) + f_2'(1)(x-1) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-1) \end{aligned}$$

(c) L'équation de la tangente en 0 au graphe de g nous donne les valeur de $g(0)$ et $g'(0)$. En effet l'équation de la tangente en 0 à g est donnée par $y = g(0) + g'(0)x$, donc on en déduit que

$$g(0) = 1, \qquad g'(0) = 3$$

Par ailleurs, en calculant la dérivée de g, on trouve des équations qui nous permettent de déduire les valeurs $f(0)$ et $f'(0)$. En effet, on calcule que $g(0) = e^{f(0)}$, d'où $f(0) = 0$. Et $3 = g'(0) = f'(0)\underbrace{e^{f(0)}}_{=1}$ donc $f'(0) = 3$. On conclut que la tangente en 0 au graphe de f à pour équation

$$y = 3x$$

6. (SF 28) Soit $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.
   (a) Déterminer l'équation de la sécante graphe de f aux points d'abscisses respectives -1 et 3.
   (b) Déterminer toutes les tangentes au graphe de f qui sont parallèles à cette sécante.

Solution :

(a) Nous savons que la droite passe par les points $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ et $(3, f(3)) = (3, 15)$. Sa pente est donc donnée par
$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$
La sécante recherchée est la droite de pente $\frac{7}{2}$ qui passe par le point de coordonées $(-1, 1)$, elle a donc pour équation
$$y - 1 = \frac{7}{2}(x + 1)$$
Alternativement, on peut aussi écrire qu'il s'agit la droite de pente $\frac{7}{2}$ qui passe par le point de coordonées $(3, 15)$, ce qui donne l'équation
$$y - 15 = \frac{7}{2}(x - 3)$$
Ces deux équations sont bien équivalentes car elle peuvent toutes deux se réécrire sous forme canonique
$$y = \frac{7}{2}x + \frac{9}{2}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse a a pour pente $f'(a) = 2a + 1$. Cette tangente est parallèle à la sécante si et seulement si sa pente vaut $\frac{7}{2}$, c'est-à-dire
$$2a + 1 = \frac{7}{2} \iff a = \frac{5}{4}$$
donc l'unique tangente parallèle à la sécante précédente est celle au point d'abscisse $\frac{5}{4}$ qui admet d'ailleurs pour équation
$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = \frac{61}{16} + \frac{7}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) = \frac{7}{2}x - \frac{9}{16}$$

7. (SF 22, 23, 24, 25, 28, 39) Math151 : Exercice 2.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine définition, domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes, puis donner l'équation de la tangente à son graphe au point indiqué entre parenthèses.
$$f_1(x) = \frac{9x^3 - 4}{8x^3 + 6} \quad \text{(en 1)} \qquad f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \quad \text{(en 1)}$$
$$f_3(x) = x^3 e^{\sin(x)} \quad \text{(en } \pi\text{)} \qquad f_4(x) = \ln(\ln(x)) \quad \text{(en } e\text{)}$$

Solution :

(a) f_1 est définie et dérivable sur $]-\sqrt[3]{3}, +\infty[$. On a
$$f_1'(x) = -\frac{3x(6x^3 - 8x - 9)}{(4x^3 + 3)^2}$$
La tangente en 1 au graphe de f_1 a pour équation
$$y = \frac{5}{14} + \frac{129}{98}(x - 1)$$

(b) f_2 est définie sur $[0,+\infty[$, et dérivable sur $]0,+\infty[$. On a

$$f_2'(x) = \frac{(5x+1)(x-1)^2}{2x\sqrt{x}}$$

La tangente en 1 au graphe de f_2 a pour équation $y=0$.

(c) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f_3'(x) = (3x^2 + x^3\cos(x))e^{\sin(x)}$$

La tangente en π au graphe de f_3 a pour équation

$$y = \pi^3 - (\pi-3)\pi^2(x-\pi)$$

(d) f_4 est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$. On a

$$f_4'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

La tangente en e au graphe de f_4 a pour équation

$$y = \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e} - 1$$

II.B Limites du taux de variations

La définition de la dérivée comme limite du taux de variation peut tantôt être utilisée de deux manière : soit pour calculer la dérivée d'une fonction qu'on ne connaît pas (à supposer qu'on sache déterminer la limite du taux de variation), soit pour calculer la limite d'un taux de variation (à supposer qu'on sache dériver la fonction).

8. **Dérivées de polynômes**

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$. En calculant la limite du taux de variation, retrouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $f'(x) = a$.

(b) On considère la fonction $g : x \mapsto x^2$. En calculant la limite du taux de variation, retrouver que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $g'(x) = 2x$.

(c) Généraliser avec la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Puisqu'on a démontré que la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ et que la dérivée d'une somme est obtenu en dérivant chaque terme de la somme, on peut alors conclure que de manière générale, que la dérivée du polynôme $x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est le polynôme $x \mapsto na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$

Solution :

(a) Fixons $x \in \mathbb{R}$, et calculons le taux de variation entre x et $x+h$ avec $h \neq 0$, puis on cherchera la limite quand $h \to 0$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} \\ &= a \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} a\end{aligned}$$

ce qui veut dire que f est dérivable au point x et que $f'(x) = a$.

(b) De même que précédemment, fixons $x \in \mathbb{R}$, calculons le taux de variation entre x et $x+h$ avec $h \neq 0$, puis on cherchera la limite quand $h \to 0$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\\ &= 2x+h\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2x\end{aligned}$$

ce qui veut dire que g est dérivable au point x et que $g'(x) = 2x$.

(c) De même que précédemment, fixons $x \in \mathbb{R}$, calculons le taux de variation entre x et $x+h$ avec $h \neq 0$, puis on cherchera la limite quand $h \to 0$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &= \frac{x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2}+\ldots+nh^{n-1}x+h^n-x^2}{h}\\ &= nx^{n-1}+h\left(\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\ldots+nh^{n-2}x+h^{n-2}\right)\\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} nx^{n-1}\end{aligned}$$

ce qui veut dire que f_n est dérivable au point x et que $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

---

9. **Dérivée de l'exponentielle**
En admettant que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, montrer que la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée en tout point.

Solution : Fixons $x \in \mathbb{R}$, et calculons le taux de variation entre x et $x+h$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\frac{e^h-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} e^x \times 1 = e^x$$

donc la fonction exponentielle est dérivable en x et $\exp'(x) = \exp(x)$.

---

10. **Dérivée du cosinus** Math101 : partiel 2 (2019)

(a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin(x)\sin(y)$$

(b) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

(c) En admettant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-1}{x} = 1$, montrer que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

(a) On peut retrouver cette formule en developpant les formules pour $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$. Montrons une méthode faisant intervenir les complexes en utilisant $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) - \cos(x-y) &= \mathrm{Re}(e^{i(x+y)}) - \mathrm{Re}(e^{i(x-y)}) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix}(e^{iy} - e^{-iy})\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ix} 2i\sin(y)\right) \\
&= \sin(y)\,\mathrm{Re}\left(2ie^{ix}\right) \\
&= -2\sin(y)\sin(x)
\end{aligned}$$

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$. On a alors $x + y = a$ et $x - y = b$. En appliquant la formule trouvée en question précédente, on trouve bien

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

(c) Fixons $x \in \mathbb{R}$, et calculons le taux de variation entre x et $x + h$. Pour $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{-2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}
\end{aligned}$$

Posons $u = \frac{h}{2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \frac{\sin(u)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$$

donc $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ et au final

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin(x+0) \times 1 = -\sin(x)$$

Ainsi cos est dérivable au point x et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

---

11. **Faire apparaître des taux de variation**
En faisant apparaître de taux de variation, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\cos(\pi x)+1}{x+1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x}$$

Solution :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = -1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\cos(\pi x)+1}{x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = 0$$

---

12. **Règle de L'Hôpital (1)**
La règle de l'Hôpital est utile pour lever des formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ en faisant appel à la dérivation. Elle généralise la technique de l'exercice précédent.
   (a) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, on se donne $a \in I$ un point de l'intervalle. On suppose f et g dérivables en a, avec $g(a) \neq 0$. Montrer que
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$
   (b) En utilisant ce résulat, calculer les limites suivantes
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x)-1}{\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(4x)}{\tan(3x)} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}-e}{\ln(x)}$$

Solution :

(a) Si $x \neq a$, on multiplie en haut et en bas par $\frac{1}{x-a}$, ce qui donne
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$
et fait apparaître deux taux de variations qui tendent respectivement vers $f'(a)$ et $g'(a)$, on a donc
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(b) En appliquant la règle de l'Hôpital, on trouve
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x)-1}{\ln(1+x)} = 0 \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(4x)}{\tan(3x)} = \frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}-e}{\ln(x)} = 2e$$

Remarque II.1 (Le nom l'Hôpital)**.** *Le nom de cette règle n'a pas de rapport avec un hôpital, mais elle vient du mathématicien français Guillaume François Antoine de L'Hôpital. En effet, on trouve le résultat pour la première fois dans son ouvrage* l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes *publié en 1696. Il est possible que le véritable auteur de la règle soit en fait Jean Bernoulli, que L'Hôpital payait 300 livres par an pour le tenir informé des progrès du calcul infinitésimal, ainsi que le droit d'utiliser ses découvertes. Pour ne pas s'attribuer les travaux de Bernouilli, L'Hôpital publia son livre anonymement, mais la règle n'en fut pas moins nommée d'après lui.*

II.C Applications du lemme de Rolle

13. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - x$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]-1, 1[$ telles que $f'(c) = 0$.

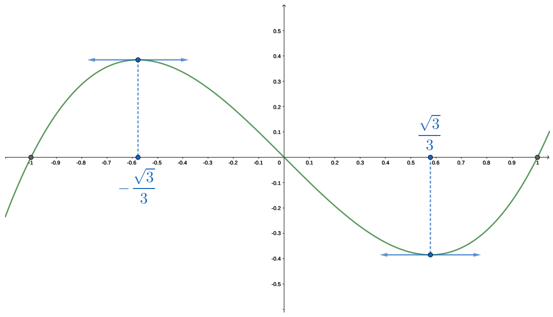
Solution :

(a) La fonction f est dérivable sur $[-1, 1]$ et on a $f(-1) = f(1) = 0$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) On a $f'(x) = 3x^2 - 1$, donc

$$f'(c) = 0 \iff c^2 = \frac{1}{3} \iff c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

il y a donc deux solutions qui sont $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



---

14. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \cos(2x)$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.

(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]0, 2\pi[$ telles que $g'(c) = 0$.

Solution :

(a) On a $g(0) = g(2\pi) = 1$, et la fonction g est dérivable sur $[0, 2\pi]$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.

(b) On a $g'(x) = -2\sin(2x)$, donc l'équation $g'(c) = 0$ possède trois solutions dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ qui sont $c = \pi/2$, $c = \pi$ ou $c = 3\pi/2$.

---

15. (SF 39) **Un contre-exemple à Rolle ?**
On considère la fonction $h(x) = \tan(x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition D_h, et de dérivabilité $D_{h'}$ de h ?

(b) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) \geq 1$ pour tout $x \in D_{h'}$.

(c) Montrer que $h(0) = h(\pi)$. Montrer qu'il n'existe pas de point $c \in]0, \pi[$ tel que $h'(c) = 0$. Est-ce en contradiction avec le lemme de Rolle ?

Solution :

(a) h est définie et dérivable sur $D_h = D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$.

(b) Pour tout $x \in D_h$, on a

$$h'(x) = 1 + \underbrace{\tan^2(x)}_{\geq 0} \geq 1$$

(c) On a $h(0) = h(\pi) = 0$. Par ailleurs, comme $h'(x) \geq 1$ (pour tout $x \in D_{h'}$), il est imposible que la dérivée s'annule. Il n'existe donc aucun point $c \in]0, 2\pi[$ tel que $h'(c) = 0$.

Il ne s'agit pas réellement d'une contradiction du lemme de Rolle, car les hypothèses nécessaires pour l'appliquer ne sont pas toutes vérifiées ici : la fonction h n'est pas définie et dérivable **sur l'intervalle** $[0, \pi]$ **tout entier** (elle n'est pas définie en $\pi/2$).

---

16. **Démonstration du TAF**
Dans cet exercice, on cherche à déduire le théorème des accroissements finis à partir du lemme de Rolle. Pour cela, on se donne un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $a < b$ dans I. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. En utilisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(b) Conclure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Solution :

(a) On calcule $h(a) = h(b) = f(a)$. Or comme h est dérivable sur I (en tant que somme de fonctions dérivables), d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(b) On calculer que pour $x \in I$,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc le point c que l'on a trouvé à la question précédente convient, car $h'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

---

17. On considère le polynôme

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$$

Montrer que P' admet au moins une racine dans $]0, 2[$.

Solution : La fonction P est définie et dérivable sur I. On a $P(0) = P(2) = 7$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]0, 2[$ tel que $P'(c) = 0$, ce qui répond à la question.

---

18. Math 151 : test 2 (2019) Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$. Montrer qu'il existe $c \in]1, 3[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis le lemme de Rolle.

Solution : Comme f est continue (puisque dérivable) et que $f(1) < 1 < f(3)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]1, 2[$ tel que $f(a) = 1$. Comme f est dérivable, et que $f(1) = f(a)$ alors d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]1, a[\subset]1, 3[$ tel que $f'(c) = 0$.

---

19. **Double Rolle**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **deux fois** dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < a_3$ dans I tels que

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$$

(a) Montrer qu'il existe $c_1 < c_2$ dans I tels que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

(b) En déduire qu'il existe $c_3 \in I$ tel que

$$f''(c_3) = 0$$

II.D Théorème et inégalité des accroissements finis

20. Math151 : test 2 (2019) Existe-t-il une fonction dérivable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) \leq -2$ pour tout $x \in [0,1]$?

Solution : C'est impossible ! Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, alors d'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = -1 > -2$.

21. Math151 : Exercice 2.10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

(a) En utilisant l'inégalité des accroissement finis, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

(b) Interpréter graphiquement cette inégalité dans le cas $b = 0$.

Solution :

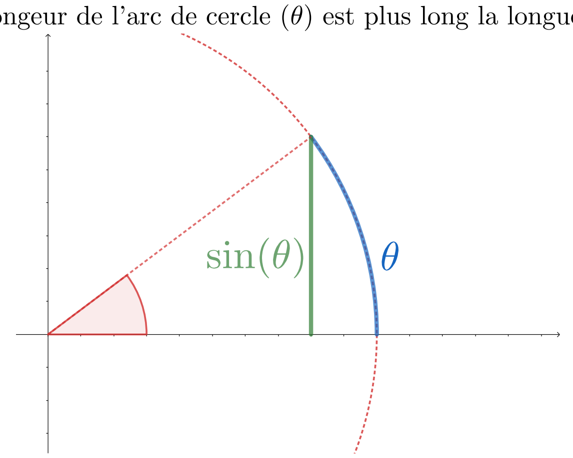
(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)$. On a $|f'(x)| \leq 1$ donc d'après l'inégalité des accroissement finis, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

(b) En particulier l'inégalité

$$\underbrace{|\sin(\theta)|}_{\text{corde}} \leq \underbrace{|\theta|}_{\text{arc de cercle}}$$

s'interprète géométriquement comme l'affirmation que pour le point du cercle trigonométrique à angle θ, la longueur de l'arc de cercle (θ) est plus long la longueur de la corde ($\sin(\theta)$).



22. **Série Harmonique** Math101 : Partiel 2 (2018)
On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(a) Soit $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$$

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H_n$

Solution :

(a) On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et appliquant le TAF entre les points n et $n+1$, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

or $n < c < n+1$ par construction, donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ et au final on obtient bien

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

(b) On a dans un sens

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &> (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + (\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)}) + \ldots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}) \\ &> \ln(n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \\ &> \ln(n+1) \end{aligned}$$

et si $n \geq 2$, on procède de même pour l'autre inégalité en majorant tous les termes sauf le premier

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &< 1 + (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + \ldots + (\ln(n) - \cancel{\ln(n-1)}) \\ &< 1 + \ln(n) \end{aligned}$$

(c) On a $H_n > \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$$

---

23. **Monotonie et signe de la dérivée**
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et dérivable sur I. On cherche dans cet exercice à démontrer l'équivalence

$$f \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

(a) On suppose dans cette question que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. On cherche à montrer que f est croissante sur I.

i. Montrer que pour tous $x < y$ dans I, il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En déduire que f est croissante sur I.

(b) On suppose dans cette question que f est croissante sur I. On cherche à démonter que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

i. Soit $x \in I$. Montrer que pour tous $y \in I \setminus \{x\}$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Indication : On pourra séparer les cas $x < y$ et $x > y$.

ii. En passant à la limite quand $y \to x$ dans l'inégalité précédente, montrer que

$$f'(x) \geq 0$$

Solution :

(a) i. f est dérivable sur I donc en appliquant le TAF entre x et y on obtient qu'il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c_{x,y})}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc $f(y) \geq f(x)$. Ceci étant vrai pour tous $x < y$ dans I, on a montré que f est croissante sur I.

(b) i. On sépare les cas $x < y$ et $x > y$.

Si $x > y$, on a $f(x) \geq f(y)$ (par croissance de f), et donc

$$\frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{y - x}_{>0}} \geq 0$$

Inversement, si $y < y$, on a $f(y) \leq f(x)$ (par croissance de f), et donc

$$\frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{y - x}_{<0}} \geq 0$$

donc l'égalité est vraie dans tous les cas.

ii. Pour tout $y \in I$ différent de x, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

en passant à la limite pour $y \to x$, on obtient finalement

$$f'(x) \geq 0$$

Le point x ayant été choisi quelconque au départ, l'inégalité est valable pour tout point $x \in I$.
