TD 1

1 Ou/et/non

1.1 Sans vocabulaire mathématique

Exercice 1 ().

Savoir-Faire

- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques
- SF90 : Savoir nier une phrase avec des connecteurs et/ou

Vous êtes devant deux cellules dont les portes sont fermées. Vous savez que derrière chacune de ces portes se cache soit une princesse sympathique soit un tigre affamé. Mais vous ne savez pas s'il y a 0, 1 ou 2 tigres (de même pour les princesses, du coup...) Sur chacune des portes, une affiche donne une information.

1. Dans cette question, vous savez que soit les deux pancartes mentent, soit elles disent toutes les deux la vérité.

   Porte 1 : Une au moins des deux cellules contient une princesse.
   Porte 2 : Il y a un tigre dans l'autre cellule. Que contiennent les cellules ?
2. Même problème, mais cette fois, l'une des pancartes dit la vérité, l'autre ment.

   Porte 1 : Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.
   Porte 2 : Il y a une princesse dans une cellule et un tigre dans une cellule
3. Toujours pareil. Cette fois, l'affiche de la cellule 1 dit vrai si une princesse s'y trouve et ment si un tigre s'y trouve, et pour l'affiche de la cellule 2, c'est le contraire !

   Porte 1 : Les deux cellules contiennent des princesses.
   Porte 2 : Les deux cellules contiennent des princesses.

Exercice 2 (QCM-720). *720*

Savoir-Faire

- SF90 : Savoir nier une phrase avec des connecteurs et/ou

Quelle est la négation de la phrase suivante : « J'aime le sport et le chocolat » ?
- ☐ Tu n'aimes pas le sport et tu n'aimes pas le chocolat.
- ☐ J'aime le sport ou le chocolat.
- ☐ Je n'aime ni le sport ni le chocolat.
- ☐ Je n'aime pas le sport, ou je n'aime pas le chocolat.

Solution sans rédaction

- ☐ Tu n'aimes pas le sport et tu n'aimes pas le chocolat.
- ☐ J'aime le sport ou le chocolat.
- ☐ Je n'aime ni le sport ni le chocolat.
- ■ Je n'aime pas le sport, ou je n'aime pas le chocolat.

Exercice 3 (QCM-721). *721*

Savoir-Faire

- SF90 : Savoir nier une phrase avec des connecteurs et/ou

Quelle est la négation de « J'aime le chocolat ou les gâteaux, et je n'aime pas les endives » ?

☐ Je n'aime pas le chocolat ou les gâteaux, et j'aime les endives.
☐ Je n'aime pas le chocolat ou les gâteaux, ou je n'aime pas les endives.
☐ Je n'aime ni le chocolat ni les gâteaux, et je n'aime pas les endives.
☐ Je n'aime ni le chocolat ni les gâteaux, ou bien j'aime les endives.

Solution sans rédaction

☐ Je n'aime pas le chocolat ou les gâteaux, et j'aime les endives.
☐ Je n'aime pas le chocolat ou les gâteaux, ou je n'aime pas les endives.
☐ Je n'aime ni le chocolat ni les gâteaux, et je n'aime pas les endives.
■ Je n'aime ni le chocolat ni les gâteaux, ou bien j'aime les endives.

1.2 En contexte mathématique

Exercice 4 (). *328*

Savoir-Faire

- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques

On suppose que P et Q sont deux propositions soit vraies soit fausses, remplir le tableau de vérité suivant.

P	Q	P ou Q	P et Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$	$\neg P$ et $\neg Q$	$\neg(P$ ou $Q)$	$\neg(P$ et $Q)$
V	V								
V	F								
F	V								
F	F								

Donner une autre écriture de $\neg(P$ ou $Q)$ et de $\neg(P$ et $Q)$ à l'aide de $\neg P$ et de $\neg Q$.

Solution sans rédaction

P	Q	P ou Q	P et Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$	$\neg P$ et $\neg Q$	$\neg(P$ ou $Q)$	$\neg(P$ et $Q)$
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

$\neg(P$ ou $Q) = \neg P$ et $\neg Q$ et $\neg(P$ et $Q) = \neg P$ ou $\neg Q$.

Exercice 5 (). *327*

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence
- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques

Dans chacun des cas suivants, dites si les propositions sont vraies ou fausses :

1. $4 > 0$ ou $4 = 0$.
2. $4 > 0$ et $2 > 0$.
3. $4 > 0$ et $2 = 0$.

Solution sans rédaction

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai
5. Vrai
6. Vrai
7. Vrai

Exercice 6 (QCM-722). *722*

Savoir-Faire

- SF90 : Savoir nier une phrase avec des connecteurs et/ou

Quelle est la négation de « $x = 1$ ou $x = -1$ » ?

☐ $x \neq 1$ ou $x \neq -1$
☐ $x \neq 1$ ou $x = -1$
☐ $x = 1$ et $x = -1$
☐ $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Solution sans rédaction

☐ $x \neq 1$ ou $x \neq -1$
☐ $x \neq 1$ ou $x = -1$
☐ $x = 1$ et $x = -1$
■ $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Exercice 7 (). *58*

Savoir-Faire

- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques
- SF86 : Savoir enchainer les étapes d'un raisonnement simple

(1) Soit p la phrase "n est multiple de 2" et q la phrase "n est multiple de 3". Peut-on écrire de manière plus synthétique les entiers n vérifiant "p et q" ? Et ceux vérifiant "p ou q" ? Vous pouvez choisir parmi les phrases suivantes : "n est multiple de 2", "n est multiple de 3", "n est multiple de 6".

(2) Même question, où cette fois p est la phrase "n est un multiple de 6" et q est la phrase "n est un multiple de 4".

Correction

(1) Les entiers vérifiant p et q sont les multiples de 6. Ceux vérifiant p ou q sont les entiers multiples de 2 et les entiers multiples de 3.
(2) Les entiers vérifiant p et q sont les multiples de 12. Ceux vérifiant p ou q sont les entiers multiples de 4 et les entiers multiples de 6 (ce sont les entiers doubles de ceux qui vérifient p ou q pour le (1)).

Exercice 8 (Annales du test 1 2018-2019).

Savoir-Faire

- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques
- SF90 : Savoir nier une phrase avec des connecteurs et/ou

Ecrire les négations des affirmations suivantes en utilisant les mots "injective" et "surjective". Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$. f est bien définie et bijective.
2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$. f est bien définie et bijective.

Correction

La négation pour les deux est : "f n'est pas bien définie ou f n'est pas bijective" ce qui revient à dire "f n'est pas bien définie ou f n'est pas injective ou f n'est pas surjective" car bijective signifie injective ET surjective.

1. f n'est pas surjective car il existe des réels appelés nombres irrationnels qui ne s'écrivent pas sous la forme d'une fraction. Exemple $\sqrt{2}, e, \pi$.
2. f est surjective car si $p \geq 0$, $p = f(2p)$ et si $p < 0$, $p = f(-2p-1)$.
   Elle est injective car si $f(n) = f(m)$ alors
   - soit $\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$ et alors $n = m$.
   - soit $-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$ et alors $n = m$ (multiplier par -2 et retrancher 1 des deux côtés).
   - on ne peut pas avoir $\frac{n}{2} = -\frac{m+1}{2}$ car sinon on aurait égalité entre un nombre positif et un strictement négatif.

2 Implication/négation d'implications

2.1 Implication

2.1.1 Sans vocabulaire mathématique

Exercice 9 ().

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence

On suppose que l'affirmation suivante est vraie : "s'il pleut alors je prends mon parapluie".

1. S'il ne pleut pas, que peut-on dire ? Choisissez parmi les propositions suivantes : "je prends mon parapluie","je ne prends pas mon parapluie", "on ne peut rien conclure".
2. Si je prends mon parapluie, que peut-on dire ? Choisissez parmi les propositions suivantes : "il pleut","il ne pleut pas", "on ne peut rien conclure".
3. Si je ne prends pas mon parapluie, que peut-on dire ? Choisissez parmi les propositions suivantes : "il pleut","il ne pleut pas", "on ne peut rien conclure".

Correction

1. On ne peut rien conclure, on simplement une information en cas de pluie.
2. On ne peut rien dire, la question posée est de savoir si la réciproque de l'affirmation est vraie, ce qui est différent de l'affirmation de départ.
3. Si je ne prends pas mon parapluie alors il ne pleut pas car s'il pleuvait, j'aurais pris mon parapluie ce qui est n'est pas le cas. On a ici écrit la contraposée dee l'affirmation qui est équivalente à l'affirmation initiale. Si a et b sont deux assertions on a
$$a \Longrightarrow b \iff \neg b \Longrightarrow \neg a.$$

2.1.2 En contexte mathématique

Exercice 10 (). *327*

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence
- SF89 : Connaître la signification du et/ou en mathématiques

Dans chacun des cas suivants, dites si les propositions sont vraies ou fausses :

1. $x > 1 \Longrightarrow x \geq 0$.
2. $x > 0 \Longrightarrow x \leq 4$.
3. $x > 0 \Longrightarrow e^x \neq 1$.
4. $(1 < x \leq 10 \text{ et } 3 < x \leq 15) \Longrightarrow 3 \leq x \leq 10$.
5. (x est un nombre pair) et (y est un nombre impair) $\Longrightarrow x + y$ est un nombre pair.

Exercice 11 ().

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :
$x + 1 = 0 \Longrightarrow x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = -1$. Donc les solutions de $x + 1 = 0$ sont $x = 0$ et $x = -1$.

Correction

On a juste montré que si $x+1 = 0$ alors $x = 0$ ou $x = -1$. C'est une implication. La réciproque n'a pas été prouvé, on ne peut donc pas affirmer que les solutions sont 0 et -1. Par ailleurs, seule -1 est solution.

Exercice 12 (Travail sur la correction de l'exo 2 de maths 101).

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence

Voici différents raisonnements : déterminer si les symboles $\heartsuit$ doivent être remplacés par une implication ou une équivalence. Déterminer alors les solutions de l'équation.

1. $x-1 = \sqrt{x+2} \heartsuit (x-1)^2 = x+2 \heartsuit x^2-2x+1 = x+2 \heartsuit x^2-3x-1 = 0 \heartsuit x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.
2. $\ln(x^2-1) + 2\ln(2) = \ln(4x-1) \heartsuit \ln(4x^2-4) = \ln(4x-1) \heartsuit 4x^2-4 = 4x-1 \heartsuit 4x^2-4x-3 = 0$ $\heartsuit x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 13 ().

Savoir-Faire

- SF88 : Comprendre implication et équivalence

• Est ce que $a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$? Si c'est vrai prouvez-le, si c'est faux trouvez un contre-exemple puis trouver les conditions qui rendraient ces implications vraies.
• Même question pour la réciproque.

2.2 Négation d'implication

2.2.1 Sans vocabulaire mathématique

Exercice 14 (QCM-718). *718*

Savoir-Faire

- SF87 : Savoir nier une implication

Quelle est la négation de la phrase : « S'il pleut, alors je prends mon parapluie. » ?

☐ Si je prends mon parapluie alors il pleut.
☐ Si je ne prends pas mon parapluie alors il ne pleut pas.
☐ S'il ne pleut pas, alors je ne prends pas mon parapluie.

☐ Il pleut et je ne prends pas mon parapluie.

Nous vivons dans un monde où tous les moutons sont blancs ou noirs. Quelle est la négation de "si un mouton est écossais alors c'est un mouton noir".

Solution sans rédaction

☐ Si je prends mon parapluie alors il pleut.
☐ Si je ne prends pas mon parapluie alors il ne pleut pas.
☐ S'il ne pleut pas, alors je ne prends pas mon parapluie.
■ Il pleut et je ne prends pas mon parapluie.

2.2.2 En contexte mathématique

Exercice 15 (QCM-719). *719*

Savoir-Faire

- SF87 : Savoir nier une implication

Quelle est la négation de « $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geqslant 2$ » ?

☐ $x^2 \geqslant 4$ et $x < 2$
☐ $x^2 < 4$ ou $x \geqslant 2$
☐ $x^2 \geqslant 4$ et $x \geqslant 2$
☐ $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$

Solution sans rédaction

■ $x^2 \geqslant 4$ et $x < 2$
☐ $x^2 < 4$ ou $x \geqslant 2$
☐ $x^2 \geqslant 4$ et $x \geqslant 2$
☐ $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$

Exercice 16 (Annales des 2 premiers tests 2018-2019).

Savoir-Faire

- SF87 : Savoir nier une implication

Nier les affirmations suivantes puis dites si elles sont vraies ou fausses en justifiant soit par une preuve soit par un contre-exemple.

1. Si une suite réelle (u_n) est telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow -1$ alors (u_n) converge.
2. Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Négation d'implications). *60*

Savoir-Faire

- SF87 : Savoir nier une implication
- SF1151 : Savoir rédiger la réciproque d'une implication

(1) Nier les implications suivantes :

a) Si $x \geq 0$ alors $x^2 + 1 \geq 0$.

b) Si $a \neq 2x$ alors $a > 2x$.

c) $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$.

d) $sin(x) = 1/2 \Rightarrow x = \pi/3$

e) $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$
f) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
g) $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
h) $x > 2 \Rightarrow e^x > 2$
i) Si $x > y$ alors $f(x) > f(y)$
j) Si $f(x) = f(y)$ alors $x \neq y$
k) Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$.

(2) Dans chaque cas, écrire la réciproque.

(3) Ecrire la négation des réciproques que vous venez d'écrire.

Correction

Exercice 1
(1) Négation : $x \geq 0$ et $x^2 + 1 < 0$.
Réciproque : Si $x^2 + 1 \geq 0$ alors $x \geq 0$.
Négation de la réciproque : $x^2 + 1 \geq 0$ et $x < 0$.
(2) Négation : $a \neq 2x$ et $a \leq 2x$.
Réciproque : Si $a > 2x$ alors $a \neq 2x$.
Négation de la réciproque : $a > 2x$ et $a = 2x$.
(3) Négation : $e^x = 3$ et $x \neq \ln(3)$.
Réciproque : $x = \ln(3) \Rightarrow e^x = 3$.
Négation de la réciproque : $x = \ln(3)$ et $e^x \neq 3$.
(4) Négation : $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{3}$.
Réciproque : $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$.
Négation de la réciproque : $x = \frac{\pi}{3}$ et $\sin(x) \neq \frac{1}{2}$.
(5) Négation : $f(x) = 3x$ et $f'(x) \neq 3$.
Réciproque : $f'(x) = 3 \Rightarrow f(x) = 3x$.
Négation de la réciproque : $f'(x) = 3$ et $f(x) \neq 3x$.
(6) Négation : $x^2 = 4$ et $x \neq 2$.
Réciproque : $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.
Négation de la réciproque : $x = 2$ et $x^2 \neq 4$.
(7) Négation : $x^3 = 8$ et $x \neq 2$.
Réciproque : $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$.
Négation de la réciproque : $x = 2$ et $x^3 \neq 8$.
(8) Négation : $x > 2$ et $e^x \leq 2$.
Réciproque : $e^x > 2 \Rightarrow x > 2$.
Négation de la réciproque : $e^x > 2$ et $x \leq 2$.
(9) Négation : $x > y$ et $f(x) \leq f(y)$.
Réciproque : Si $f(x) > f(y)$ alors $x > y$.
Négation de la réciproque : $f(x) > f(y)$ et $x \leq y$.
(10) Négation : $f(x) = f(y)$ et $x = y$
Réciproque : Si $x \neq y$ alors $f(x) = f(y)$.
Négation de la réciproque : $x \neq y$ et $f(x) \neq f(y)$.
(11) Négation : $x = y$ et $f(x) \neq f(y)$
Réciproque : Si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$ (cela revient à dire que f est injective)
Négation de la réciproque : $f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.

Exercice 18 (Dans le style de maths 101). On considère l'ensemble des suites réelles. On considère les couples de propriétés de suite suivants définies dans votre cours de maths 101.

1. bornée/majorée.
2. bornée/convergente.
3. bornée/divergente vers $+\infty$.
4. bornée/croissante.
5. convergente/majorée.
6. convergente/croissante.
7. majorée/minorée.
8. majorée/divergente vers $+\infty$.
9. divergente/divergente vers $+\infty$.
10. majorée/croissante.
11. divergente vers $+\infty$, croissante.

Déterminer si l'une des notions du couple implique l'autre. Si ce n'est pas le cas, déterminez un contre-exemple.

Reprendre enfin ces propriétés (bornée/majorée/convergente/croissante/majorée/minorée/divergente vers $+\infty$/divergente) et déterminez des couples de propriétés impliquant une troisième propriété. Etudiez alors la réciproque de vos implications.