## 1 Calculs de développements limités en 0

Exercice 1. — Sommes et produits

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x^3 + \frac{23}{4}x^4 + o(x^4), \qquad (1+x)\sqrt{1+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\sin(x)\cos(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4), \qquad e^x\sqrt{1+x} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{11}{128}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) - 1 - \frac{x}{2}\sin(x) = -x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

Exercice 2. — Quotient et composition

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{4} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^4), \qquad \frac{1}{1 - x + x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4)$$

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \qquad \sqrt{\frac{\sin(x)}{x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + o(x^4)$$

Exercice 3. — Intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \qquad \arcsin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$$

$$\int_0^x e^{t^2} dt = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Exercice 4. —

$$\ln(1+x)\sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5), \qquad \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -x - \frac{x^3}{8} - \frac{7x^5}{128} + o(x^5)$$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5), \qquad e^{x^2}\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{31}{30}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5), \quad \exp(\frac{1}{1-x}) = e\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \frac{73}{24}x^4 + \frac{167}{40}x^5 + o(x^5)\right)$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5), \qquad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + o(x^5)$$

#### 2 Limites, tangentes et positions relatives en 0.

Exercice 5. — Limites

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{6}, \qquad \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} -2$$

$$\frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1+x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1, \qquad \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1,$$

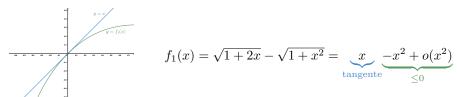
Exercice 6. — Limites

$$\frac{\sin(x) - x}{x \ln(1 - x^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{6}, \qquad \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{2 \ln(1 + x) - 2x - x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{3}{2}$$

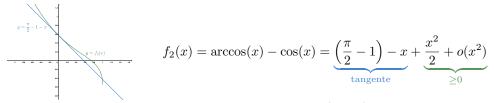
$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{3}$$

Exercice 7. — Tangente en 0 et position relative



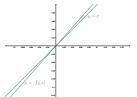
La tangente en 0 au graphe de  $f_1$  a pour équation y = x et le graphe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.



La tangente en 0 au graphe de  $f_2$  a pour équation  $y = (\frac{\pi}{2} - 1) - x$  et le graphe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

$$f_3(x)=e^{2x-x^2}=\underbrace{1+2x}_{ ext{tangente}}+\underbrace{x^2+o(x^2)}_{\geq 0}$$

La tangente en 0 au graphe de  $f_3$  a pour équation y = 1 + 2x et le graphe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.



$$f_4(x) = \int_0^x e^{t^2} dt = \underbrace{x}_{\text{tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}_{\text{signe de } x^3}$$

La tangente en 0 au graphe de  $f_4$  a pour équation y = x et le graphe passe de en dessous à au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

### 3 Développements limités en un point autre que 0

Exercice 9. —

$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{3+x}}{x-1}$$

1. La fonction f est définie sur  $]-3,+\infty[\setminus\{1\}=]-3,1[\cup]1,+\infty[$ . En posant u=x-1. On a  $u\underset{x\to 1}{\longrightarrow}0,$  donc pour x au voisinage de 1, on a

$$\begin{array}{rcl} 2-\sqrt{3+x} & = & 2-\sqrt{4+u} \\ & = & 2\left(1-\sqrt{1+\frac{u}{4}}\right) \\ & = & -\frac{u}{4}+o(u) \end{array}$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} -\frac{1}{4}$$

on peut donc prolonger f en 1 par continuité en posant  $f(1) = -\frac{1}{4}$ .

2. Pour x au voisinage de 1, on a

$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}u - \frac{1}{512}u^2 + o(u^2)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x-1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{1}{512}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

donc f est dérivable en 1 (et même  $C^2$ ), l'équation de la tangente en 1 est  $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x-1)$ , et le graphe est en dessous de la tangente.

#### Exercice 10. —

On pose u = x - 1. Pour x au voisinage de 1, u est au voisinage de 0, et on a

$$f(x) = 1 + \frac{9}{4}u - \frac{31}{128}u^2 + o(u^2) = \underbrace{1 + \frac{9}{4}(x-1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{31}{128}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

donc la tangente en au graphe de f en x=1 a pour équation  $y=1+\frac{9}{4}(x-1)$  et le graphe se situe en dessous de la tangente au voisinage de 1.

$$g(x) = \sqrt{3} \left( \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u) \right) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3} (x - 1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{9} (x - 1)^2 + o((x - 1)^2)}_{<0}$$

Exercice 11. —

$$f_1(x) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{x+1}{4}}_{\text{tangente en } -1} \underbrace{-\frac{(x+1)^2}{8} + o((x+1)^2)}_{\leq 0}$$

$$f_2(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}\ln(2) + \left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{\text{tangente en }\pi/4} \underbrace{-\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2 + o\left(\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2\right)}_{\leq 0}$$

$$f_3(x) = \underbrace{e - 3e(x-1)}_{\text{tangente en 1}} + \underbrace{\frac{13e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

# 4 Recherche d'asymptotes et positions relatives

**Exercice 12.** — Pour  $x \to +\infty$ , on a

$$f_1(x) = \underbrace{x+1}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_2(x) = \underbrace{x}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_3(x) = \underbrace{\ln(2)}_{ ext{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\geq 0}$$