n°7 - Dérivation, interprétation géométrique, lemme de Rolle, Théorème des accroissements finis
(Corrigé)

Notes de Cours

I Dérivation et théorème des accroissements finis

I.A Dérivée et tangente

Définition I.1 (Dérivée)**.** *On dit que f est **dérivable en** a si la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite pour x tendant vers a (avec $x \neq a$). Quand elle existe, cette limite est appelée la dérivée en a de f, noté $f'(a)$:*

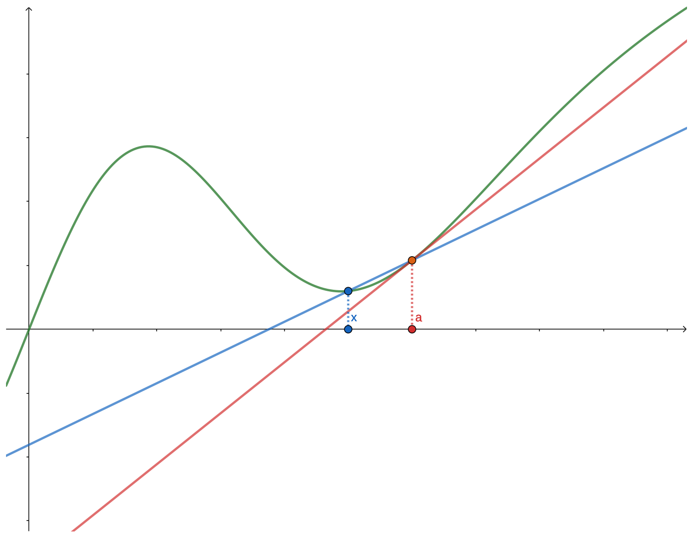
$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De manière équivalente, en effectuant le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq a}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique :

Quand elle existe, la quantité $f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente en** a au graphe de f. En effet, la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, appelée **taux de variation** de f entre x et a, peut s'interpréter comme le coefficient directeur de la droite sécante au graphe de f aux points d'abscisses x et a. Or la dérivée de f en a est définie comme la limite du taux de variation de f entre a et x, donc cela correspond à la pente de la "secante limite", c'est-à-dire la tangente en a.



La secante (en bleu) s'approche de la tangente (en rouge) à mesure que x s'approche de a.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts, la sécante au graphe de f entre les points d'abscisses a et b a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

et si f est dérivable en f, on peut faire tendre b vers a pour obtenir la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

On obtient ainsi l'équation de la tangente en a au graphe de f.

I.B Rolle et TAF

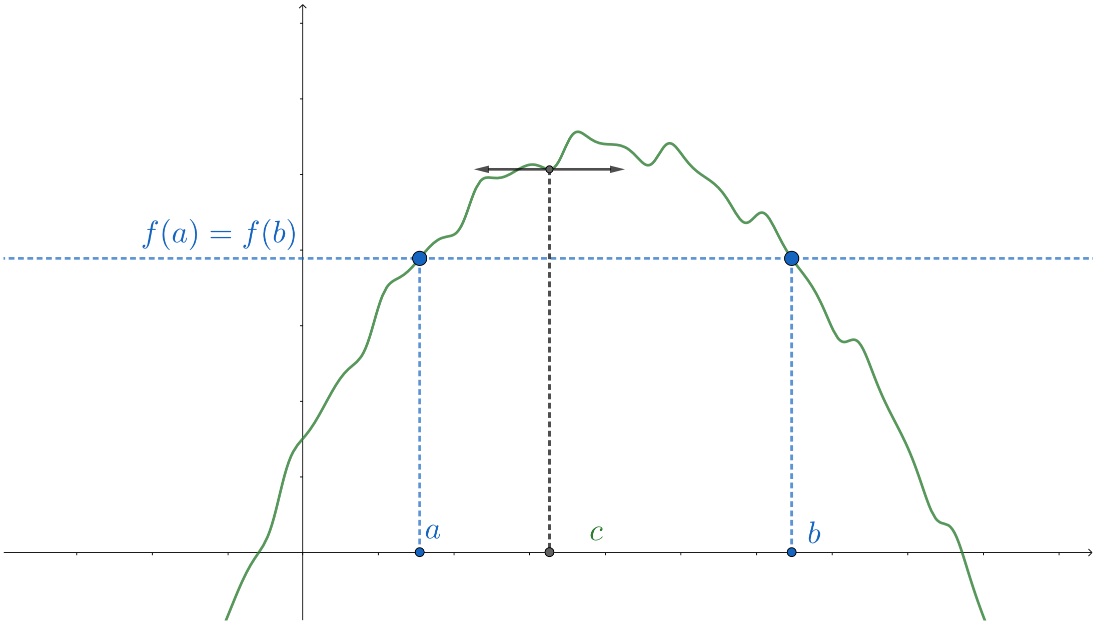
Le lemme de Rolle dit qu'une fonction f dérivable qui prend deux fois la même valeur possède un point d'annulation de sa dérivée entre les deux (ce qui correspond graphiquement à une tangente horizontale pour le graphe de la fonction f).

Théorème I.2 (Lemme de Rolle)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.* ***On suppose*** *qu'il existe deux points distincts $a < b$ dans I tels que*

$$f(a) = f(b)$$

alors *il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$



Le point c n'est pas unique en général, le théorème assure l'existence d'**au moins** un point $c \in]a, b[$, mais il peut très bien y en avoir plusieurs (par exemple sur l'illustration ci-dessus, il y a plusieurs autres points où la tangente est horizontale).

Une conséquence (et une généralisation) du lemme de Rolle est le théorème des Accroissements Finis (parfois abrégé en l'acronyme TAF) :

Théorème I.3 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour tous points distincts $a < b$ dans I, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. On considère la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. La fonction g est dérivable sur I et on a

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

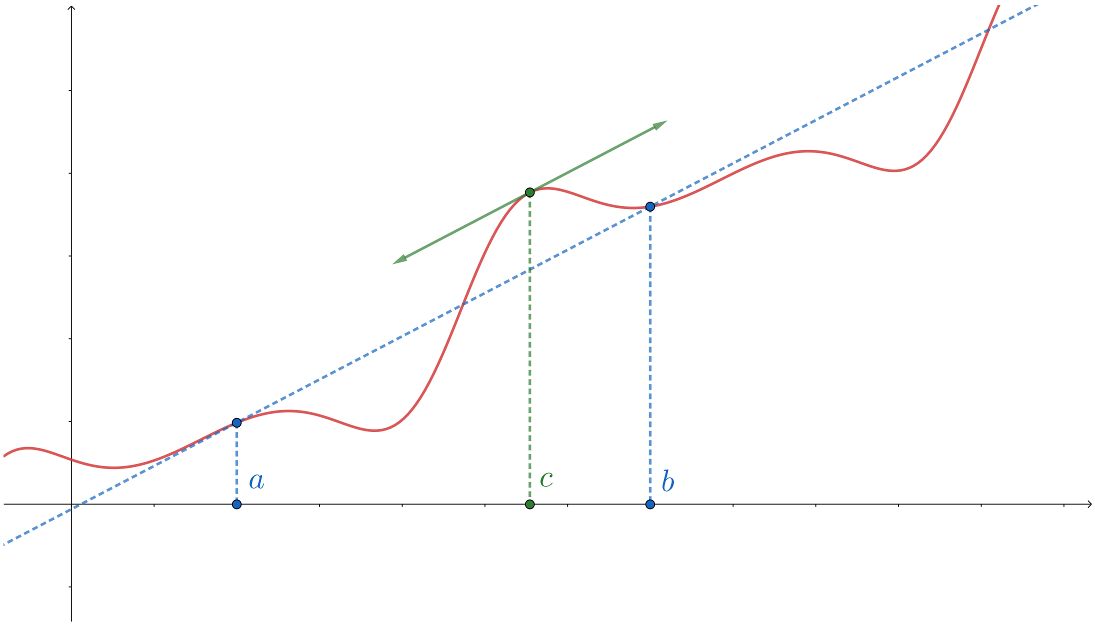
donc d'après le Lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Dans ce théorème, on peut interpréter géométriquement les quantités $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ comme la pente de la sécante entre a et b au graphe de f, et $f'(c)$ comme la pente de la tangente en c au graphe de f. Et une égalité de pentes revient à dire que ces deux droites sont parallèles. En d'autres termes, le théorème des accroissements finis nous dit que pour toute secante au graphe de f (prise entre des points a et b), il existe au moins une tangente au graphe de f (au point c) qui est parallèle à cette sécante.

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{pente de la tangente en } c} \qquad = \qquad \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pente de la sécante entre } a \text{ et } b}$$



Tout comme dans le lemme de Rolle, le point c dépend de a et b et n'est pas forcément unique.

Mentionnons la généralisation à l'ordre n du théorème des acrroissements finis : la formule de Taylor Lagrange, qui permet si la fonction est n fois dérivable en un point, de l'approximer autour de ce point par un polynôme de degré $n-1$.

Théorème I.4 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Soit $a \in I$, pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \; + \; \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

I.C Inégalité des accroissements finis

Une conséquence du théorème des accroissements finis est l'inégalité des accroissements finis qui permet de majorer les variations de f si on peut borner sa dérivée.

Théorème I.5 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que la dérivée est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tels que pour tout $x \in I$,*

$$|f'(x)| \leq M$$

alors pour tout $a, b \in I$ distincts, on a

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b-a|$$

Démonstration. On se donne $a, b \in I$ distincts. Quitte à inverser les noms de a et b, on peut supposer $a < b$ (cela ne change rien car $|f(a)-f(b)| = |f(b)-f(a)|$ et $|b-a| = |a-b|$). Comme f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b-a)$$

et donc en prenant la valeur absolue

$$|f(a) - f(b)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq M} \cdot |b-a| \leq M|b-a|$$

□

II Exercices

II.A Calculs de dérivées

1. (SF 22, 23, 24) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^5 + 3x^2 + 2 \qquad f_2(x) = 7x\cos(x) \qquad f_3(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$f_4(x) = x\sin(x) + \ln(x)\cos(x) \qquad f_5(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad f_6(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^4 + x\sin(x) + 2}$$

Solution :

$$f_1'(x) = 15x^4 + 6x \qquad f_2'(x) = 7\cos(x) - 7x\sin(x)$$

$$f_3'(x) = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2} \qquad f_4'(x) = \sin(x) + x\cos(x) + \frac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\sin(x)$$

$$f_5'(x) = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2} \qquad f_6'(x) = \frac{2x^5 + x^4\sin(x) + 5x^3\cos(x) - x^2\sin(x) - 3x + \sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)}{(x^4 + x\sin(x) + 2)^2}$$

---

2. (SF 22, 23, 24, 25) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3(2x+5)^5 \qquad f_2(x) = e^{5x^4} \qquad f_3(x) = \sin(3x+2)$$

$$f_4(x) = (\ln(x))^2 \qquad f_5(x) = \ln(\cos(x)) \qquad f_6(x) = \cos(\ln(x))$$

Solution :

$$f_1'(x) = 30(2x+5)^5 \qquad f_2'(x) = 20x^3e^{5x^4} \qquad f_3'(x) = 3\cos(3x+2)$$

$$f_4'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} \qquad f_5'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \qquad f_6'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$$

---

3. (SF 22, 23, 24, 25) Math101 : Exercice 79 Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(f(x^2)), \qquad f_2(x) = \sin(f(x)^2), \qquad f_3(x) = \sin^2 f(x),$$

$$f_4(x) = \sqrt{1+f(x)^4}, \qquad f_5(x) = \ln(2+\cos(f(x))), \qquad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2+f(x)^2}$$

Solution :

$$f_1'(x) = 2xf'(x^2)\cos(f(x^2)), \qquad f_2'(x) = 2f'(x)f(x)\cos(f(x)^2),$$

$$f_3'(x) = 2\cos(f(x))\sin(f(x)), \qquad f_4'(x) = \frac{2f'(x)f(x)^3}{\sqrt{1+f(x)^4}},$$

$$f_5'(x) = \frac{-f'(x)\sin f(x)}{2+\cos f(x)}, \qquad f_6'(x) = -\frac{2\pi f'(x)f(x)}{(2+f(x)^2)^2}\left(1+\tan^2\frac{\pi}{2+f(x)^2}\right)$$

---

4. (SF 22, 23, 24, 25, 39) Math101 : Exercice 82 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1(x) = x^2+1+x^{11}+x^{101}, \qquad f_2(x) = x^5\cos(x), \qquad f_3(x) = e^x\sin(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1+x}{x-7}, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}, \qquad f_6(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2},$$

$$f_7(x) = \frac{x+\sin x}{\cos x}$$

Solution :

(a) f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_1'(x) = 2x+11x^{10}+101x^{100}$$

(b) f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_2'(x) = 5x^4\cos(x) - x^5\sin(x)$$

(c) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f_3'(x) = e^x(\sin(x)+\cos(x))$$

(d) f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{7\} =]-\infty,7[\cup]7,+\infty[$, et

$$f_4'(x) = -\frac{-8}{x-7}$$

(e) f_5 est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$, et

$$f_5'(x) = \frac{2x - x\ln(x) - 2}{2x(x-1)\sqrt{x-1}}$$

(f) f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, et

$$f_6'(x) = -\frac{x^3+3x^2+2}{(1+x)^3}$$

(g) f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2, k\in\mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi-\pi/2, k\pi+\pi/2[$, et

$$f_7'(x) = \frac{1+\cos(x)+x\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

---

5. (SF 28) Math151 : Test 1 (2014)

(a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_1 : x\mapsto \sin(2x)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.

(b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_2 : x\mapsto \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 3.

(c) $(*)$ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x)=e^{f(x)}$. On suppose que la tangente au graphe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y=3x+1$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.

Solution :

(a) La tangente a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f_1(\pi/12) + f_1'(\pi/2)\left(x-\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin(\pi/6) + 2\cos(\pi/6)\left(x-\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

(b) La tangente a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f_2(1) + f_2'(1)(x-1) \\ &= 2+\frac{1}{4}(x-1) \end{aligned}$$

(c) L'équation de la tangente en 0 au graphe de g nous donne les valeur de $g(0)$ et $g'(0)$. En effet l'équation de la tangente en 0 à g est donnée par $y=g(0)+g'(0)x$, donc on en déduit que

$$g(0)=1, \qquad g'(0)=3$$

Par ailleurs, en calculant la dérivée de g, on trouve des équations qui nous permettent de déduire les valeurs $f(0)$ et $f'(0)$. En effet, on calcule que $g(0)=e^{f(0)}$, d'où $f(0)=0$. Et $3=g'(0)=f'(0)\underbrace{e^{f(0)}}_{=1}$ donc $f'(0)=3$. On conclut que la tangente en 0 au graphe de f à pour équation

$$y=3x$$

---

6. (SF 22, 23, 24, 25, 28, 39) Math151 : Exercice 2.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine définition, domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes, puis donner l'équation de la tangente à son graphe au point indiqué entre parenthèses.

$$f_1(x)=\frac{9x^3-4}{8x^3+6} \quad (\text{en } 1) \qquad\qquad f_2(x)=\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \quad (\text{en } 1)$$

$$f_3(x)=x^3e^{\sin(x)} \quad (\text{en } \pi) \qquad\qquad f_4(x)=\ln(\ln(x)) \quad (\text{en } e)$$

Solution :

(a) f_1 est définie et dérivable sur $]-\sqrt[3]{3},+\infty[$. On a

$$f_1'(x) = -\frac{3x(6x^3-8x-9)}{(4x^3+3)^2}$$

La tangente en 1 au graphe de f_1 a pour équation

$$y = \frac{5}{14} + \frac{129}{98}(x-1)$$

(b) f_2 est définie sur $[0,+\infty[$, et dérivable sur $]0,+\infty[$. On a

$$f_2'(x) = \frac{(5x+1)(x-1)^2}{2x\sqrt{x}}$$

La tangente en 1 au graphe de f_2 a pour équation $y = 0$.

(c) f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f_3'(x) = (3x^2 + x^3\cos(x))e^{\sin(x)}$$

La tangente en π au graphe de f_3 a pour équation

$$y = \pi^3 - (\pi-3)\pi^2(x-\pi)$$

(d) f_4 est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$. On a

$$f_4'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

La tangente en e au graphe de f_4 a pour équation

$$y = \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e} - 1$$

II.B Applications du lemme de Rolle

7. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - x$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]-1,1[$ telles que $f'(c) = 0$.

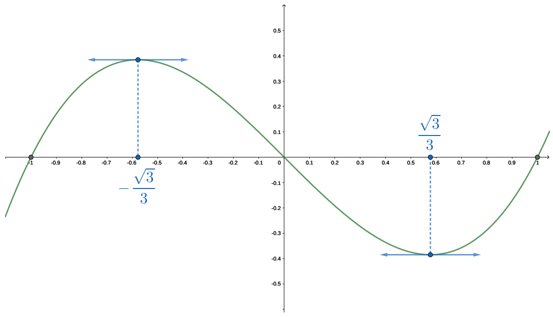
Solution :

(a) La fonction f est dérivable sur $[-1,1]$ et on a $f(-1) = f(1) = 0$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) On a $f'(x) = 3x^2 - 1$, donc

$$f'(c) = 0 \iff c^2 = \frac{1}{3} \iff c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

il y a donc deux solutions qui sont $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



8. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \cos(2x)$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.
(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]0, 2\pi[$ telles que $g'(c) = 0$.

Solution :

(a) On a $g(0) = g(2\pi) = 1$, et la fonction g est dérivable sur $[0, 2\pi]$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]0, 2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.
(b) On a $g'(x) = -2\sin(2x)$, donc l'équation $g'(c) = 0$ possède trois solutions dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ qui sont $c = \pi/2$, $c = \pi$ ou $c = 3\pi/2$.

9. (SF 39) **Un contre-exemple à Rolle ?**
On considère la fonction $h(x) = \tan(x)$.
(a) Déterminer le domaine de définition D_h, et de dérivabilité $D_{h'}$ de h ?
(b) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) \geq 1$ pour tout $x \in D_{h'}$.
(c) Montrer que $h(0) = h(\pi)$. Montrer qu'il n'existe pas de point $c \in]0, \pi[$ tel que $h'(c) = 0$. Est-ce en contradiction avec le lemme de Rolle ?

Solution :

(a) h est définie et dérivable sur $D_h = D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$.
(b) Pour tout $x \in D_h$, on a

$$h'(x) = 1 + \underbrace{\tan^2(x)}_{\geq 0} \geq 1$$

(c) On a $h(0) = h(\pi) = 0$. Par ailleurs, comme $h'(x) \geq 1$ (pour tout $x \in D_{h'}$), il est imposible que la dérivée s'annule. Il n'existe donc aucun point $c \in]0, 2\pi[$ tel que $h'(c) = 0$.
Il ne s'agit pas réellement d'une contradiction du lemme de Rolle, car les hypothèses nécessaires pour l'appliquer ne sont pas toutes vérifiées ici : la fonction h n'est pas définie et dérivable **sur l'intervalle** $[0, \pi]$ **tout entier** (elle n'est pas définie en $\pi/2$).

10. **Démonstration du TAF**
Dans cet exercice, on cherche à déduire le théorème des accroissements finis à partir du lemme de Rolle. Pour cela, on se donne un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $a < b$ dans I. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. En utilisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(b) Conclure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Solution :

(a) On calcule $h(a) = h(b) = f(a)$. Or comme h est dérivable sur I (en tant que somme de fonctions dérivables), d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(b) On calculer que pour $x \in I$,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc le point c que l'on a trouvé à la question précédente convient, car $h'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

---

11. On considère le polynôme

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$$

Montrer que P' admet au moins une racine dans $]0, 2[$.

Solution : La fonction P est définie et dérivable sur I. On a $P(0) = P(2) = 7$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]0, 2[$ tel que $P'(c) = 0$, ce qui répond à la question.

---

12. Math 151 : test 2 (2019) Soit $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$. Montrer qu'il existe $c \in]1, 3[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis le lemme de Rolle.

Solution : Comme f est continue (puisque dérivable) et que $f(1) < 1 < f(3)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]1, 2[$ tel que $f(a) = 1$. Comme f est dérivable, et que $f(1) = f(a)$ alors d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]1, a[\subset]1, 3[$ tel que $f'(c) = 0$.

---

13. **Double Rolle**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **deux fois** dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < a_3$ dans I tels que

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$$

(a) Montrer qu'il existe $c_1 < c_2$ dans I tels que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

(b) En déduire qu'il existe $c_3 \in I$ tel que

$$f''(c_3) = 0$$

II.C Théorème et inégalité des accroissements finis

14. Math151 : test 2 (2019) Existe-t-il une fonction dérivable $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) \leq -2$ pour tout $x \in [0, 1]$?

Solution : C'est impossible ! Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, alors d'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = -1 > -2$.

---

15. Math151 : Exercice 2.10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

(a) En utilisant l'inégalité des accroissement finis, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

(b) Interpréter graphiquement cette inégalité dans le cas $b = 0$.

Solution :

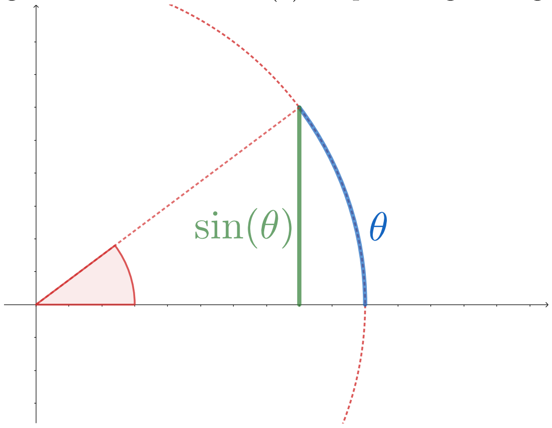
(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)$. On a $|f'(x)| \leq 1$ donc d'après l'inégalité des accroissement finis, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

(b) En particulier l'inégalité

$$\underbrace{|\sin(\theta)|}_{\text{corde}} \leq \underbrace{|\theta|}_{\text{arc de cercle}}$$

s'interprète géométriquement comme l'affirmation que pour le point du cercle trigonométrique à angle θ, la longeur de l'arc de cercle (θ) est plus long la longueur de la corde ($\sin(\theta)$).



---

16. Math101 : Partiel 2 (2019) **Série Harmonique**

On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(a) Soit $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$$

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H_n$

Solution :

(a) On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et appliquant le TAF entre les points n et $n + 1$, il existe $c \in]n, n + 1[$ tel que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

or $n < c < n+1$ par construction, donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ et au final on obtient bien

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

(b) On a dans un sens

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &> (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + (\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)}) + \ldots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}) \\ &> \ln(n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \\ &> \ln(n+1) \end{aligned}$$

et si $n \geq 2$, on procède de même pour l'autre inégalité en majorant tous les termes sauf le premier

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &< 1 + (\cancel{\ln(2)} - \ln(1)) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + \ldots + (\ln(n) - \cancel{\ln(n-1)}) \\ &< 1 + \ln(n) \end{aligned}$$

(c) On a $H_n > \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$$

---

17. **Monotonie et signe de la dérivée**
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et dérivable sur I. On cherche dans cet exercice à démontrer l'équivalence

$$f \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

(a) On suppose dans cette question que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. On cherche à montrer que f est croissante sur I.

i. Montrer que pour tous $x < y$ dans I, il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En déduire que f est croissante sur I.

(b) On suppose dans cette question que f est croissante sur I. On cherche à démonter que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

i. Soit $x \in I$. Montrer que pour tous $y \in I \setminus \{x\}$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Indication : On pourra séparer les cas $x < y$ et $x > y$.

ii. En passant à la limite quand $y \to x$ dans l'inégalité précédente, montrer que

$$f'(x) \geq 0$$

Solution :

(a) i. f est dérivable sur I donc en appliquant le TAF entre x et y on obtient qu'il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c_{x,y})}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc $f(y) \geq f(x)$. Ceci étant vrai pour tous $x < y$ dans I, on a montré que f est croissante sur I.

(b) i. On sépare les cas $x < y$ et $x > y$.
Si $x > y$, on a $f(x) \geq f(y)$ (par croissance de f), et donc

$$\frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{y-x}_{>0}} \geq 0$$

Inversement, si $y < y$, on a $f(y) \leq f(x)$ (par croissance de f), et donc

$$\frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{y-x}_{<0}} \geq 0$$

donc l'égalité est vraie dans tous les cas.

ii. Pour tout $y \in I$ différent de x, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \geq 0$$

en passant à la limite pour $y \to x$, on obtient finalement

$$f'(x) \geq 0$$

Le point x ayant été choisi quelconque au départ, l'inégalité est valable pour tout point $x \in I$.