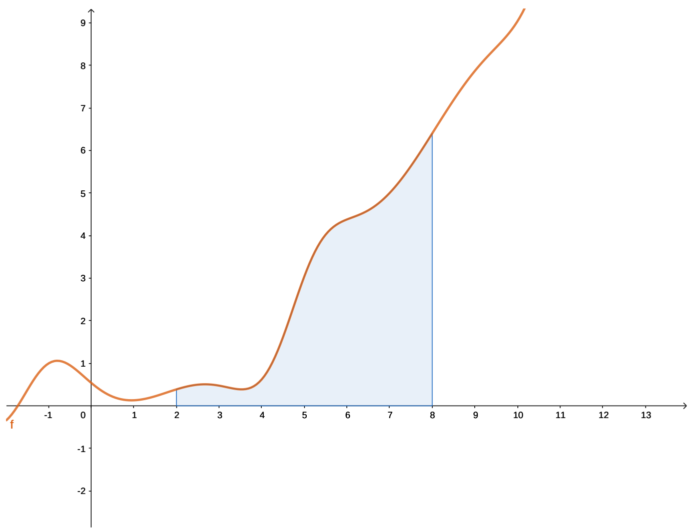
n°8 - Intégration, primitives, principes du calcul intégral
(Corrigé)

Notes de Cours

I Intégration

Intéprétation géométrique

Si $f \geq 0$ et $a \leq b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire en dessous de la courbe.



En général, on parle d'aire algébrique (elle est comptée négativement si $b < a$ ou si $f(t) \leq 0$).

Propriétés de l'intégrale

1. **Linéarité :** Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,dt$$
2. **Positivité :**
$$\forall t \in [a,b], f(t) \geq g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$$

3. **Inégalité triangulaire :**

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Théorème fondamental de l'analyse

Si $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Intégration par partie

Si F est une primitive de f, on a

$$\int_a^b \overbrace{f(x)}^{\uparrow}\underbrace{g(x)}_{\downarrow}\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Changement de variable

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx \underset{\substack{t=u(x) \\ \text{“}dt=u'(x)\,dx\text{''}}}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

II Exercices

II.A Intéprétation géométrique

1. (SF 60, 62, 1188) **Aire d'un triangle**

   (a) Calculer l'intégrale

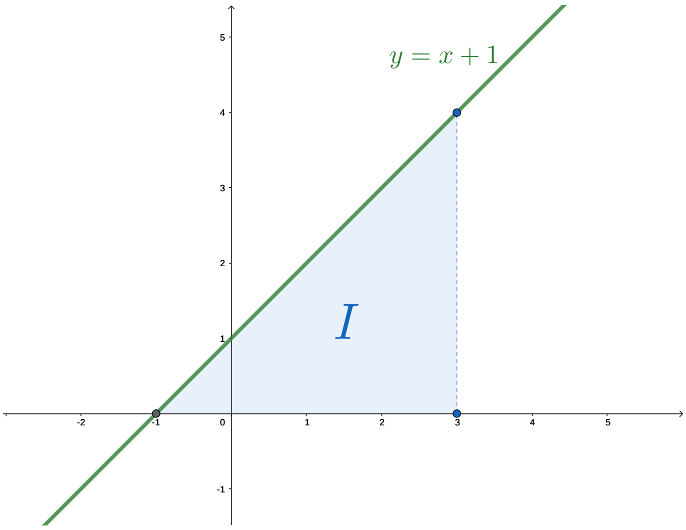
   $$I = \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx$$

   (b) Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$. Retrouver la valeur de I par un calcul d'aire.

Solution :

(a) On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3} \\ &= \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{16}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

(b) 

La quantité I correspond à l'aire sous le graphe de f entre -1 et 3, c'est-à-dire l'aire du triangle bleu. L'aire d'un triangle étant donnée par la formule $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$, on a donc

$$I = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

---

2. (SF 60, 62, 1188) **Un argument d'aire**

(a) Calculer les intégrales

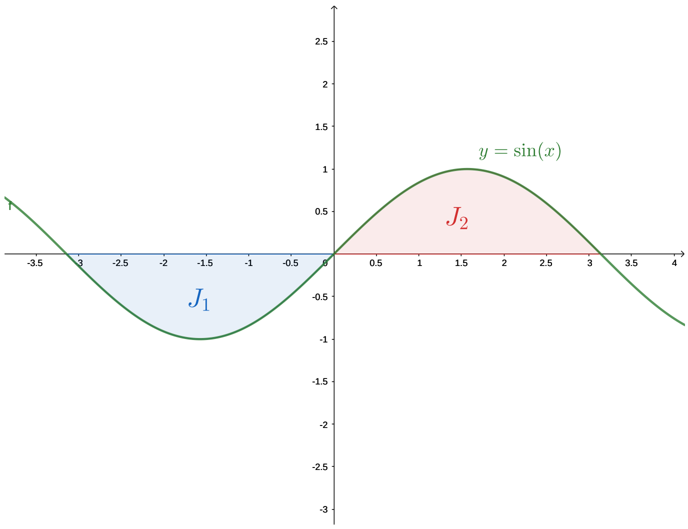
$$J_1 = \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,dx \qquad J_2 = \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx \qquad J_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

(b) Tracer le graphe de la fonction $g : x \mapsto \sin(x)$ entre -2π et 2π. Comment justifier géométriquement que $J_1 = -J_2$?

Solution :

(a) On calcule

$$J_1 = -2 \qquad J_2 = 2 \qquad J_3 = J_1 + J_2 = 0$$

(b) 

Comme la fonction sin est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine, et donc leurs aires algébriques J_1 et J_2 sont opposées car correspondant à l'aire de domaines symétriques.

II.B Calculs d'intégrales et primitives

3. (SF 61, 62) Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^{10} - 3x^3 + 4x - 5 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - \sin(x) \qquad f_3(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f_5(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f_6(x) = x(x^3 - 1)$$

Solution :

$$F_1(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 - 5x \qquad F_2(x) = 2\sin(x) + \cos(x) \qquad F_3(x) = -\frac{3}{2x^2}$$

$$F_4(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad F_5(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \qquad F_6(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}$$

---

4. (SF 61, 62, 64) Calculer les primitves suivantes en effectuant une intégration par partie.

$$\int \ln(x)\,dx \qquad \int x^3\ln(x)\,dx \qquad \int (7-2x)e^{-2x}\,dx$$

$$\int (3x+1)\cos(x)\,dx$$

Solution :

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x \qquad \int x^3\ln(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16}$$

$$\int (7-2x)e^{-2x}\,dx = (x-3)e^{-2x} \qquad \int (3x+1)\cos(x)\,dx = (3x+1)\sin(x) + 3\cos(x)$$

5. (SF 61, 62, 65) En effectuant un changement de variable affine, déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$f_1(x) = (3-2x)^5 \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f_4(x) = x^5 + 4x^2 - 5 \qquad f_5(x) = 3\cos(2x+1) - 4 \qquad f_6(x) = \frac{2}{8-5x}$$

Solution :

$$F_1(x) = -\frac{(3-2x)^6}{12} + c \qquad F_2(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c \qquad F_3(x) = \sqrt{2x-1} + c$$

$$F_4(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x^3 - 5x + c \quad F_5(x) = \frac{3}{2}\sin(2x+1) - 4x + c \quad F_6(x) = -\frac{2}{5}\ln|8-5x| + c$$

6. (SF 1196) Math 104 En effectuant un changement de variable adapté, calculer les primitves suivantes

$$\int \tan(x)\,dx \qquad \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx \qquad \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$$

Solution :

$$\int \tan(x)\,dx = \ln|\cos(x)| \qquad \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = (\ln(x+1))^2$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \sqrt{2x^2+3} \qquad \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\sin(x)}$$

II.C Intégration de fractions rationnelles

7. (SF 61, 62, 1195, 1196) Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{3}{2+5x}\,dx \qquad \int \frac{x-1}{x+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

Solution :

$$\int \frac{3}{2+x}\,dx = \frac{3}{5}\ln(2+5x) \qquad \int \frac{x-1}{x+1}\,dx = x - 2\ln(x+1)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

---

8. (SF 61, 62, 1195) **Décomposition en éléments simples**
   (a) Déterminer des coefficients $a, b \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$$
   (b) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$.

Solution :

(a) On trouve
$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

(b) On a donc
$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \ln(x-3) - \ln(x-2) = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$$

---

9. (SF 61, 62, 1195) Math 101 : exercice 129 $(*)$ **Décomposition en éléments simples** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
   $$f(x) = \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5}$$
   (a) Trouver une racine réelle évidente du polynôme x^3+3x^2+7x+5.
   (b) On note x_0 la racine précédente. Déterminer les réels p, q tels que
   $$x^3+3x^2+7x+5 = (x-x_0)(x^2+px+q)$$
   (c) Déterminer les réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
   $$f(x) = \frac{a}{x-x_0} + \frac{bx+c}{x^2+px+q}$$

(d) Déterminer les réels λ, μ tels que $bx + c = \lambda(2x + p) + \mu$.

(e) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 4}$$

Trouver une primitive de g.

(f) Conclure.

10. (SF 61, 62, 65)

(a) Mettre le polynôme $x^2 - 4x + 5$ sous forme canonique (c'est-à-dire sous la forme $a(x-b)^2 + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(b) En effectuant le changement de variable $t = x - 2$, calculer l'intégrale

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\, dx$$

Solution :

(a) On a

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4x + 5}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1}\, dt \\
&= [\arctan(t)]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

---

11. (SF 60, 61, 62, 211) Math151 : exercice 6.2 Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 4}{x^4}\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x - 2}{x^2 - 4x - 12}\, dx \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$$

Indication : Pour I_2, on pourra mettre le polynôme $x^2 - 4x - 12$ sous forme canonique. Pour I_3, on cherchera à mettre l'intégrande sous la forme $a + \frac{b}{x^2+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes à déterminer.

Solution :

$$I_1 = \frac{19}{24} + \ln(2) \qquad I_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \qquad I_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$$

II.D Problèmes

12. Math101 : exercice 130 **Comparaison série/intégrale**

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

(a) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = (x \ln(x))^{-1}$.

(b) En déduire que pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\, dt$$

puis donner pour tout $n \geq 2$ une minoration de u_n par une intégrale à préciser.

(c) Soit un entier $n \geq 2$. Calculer

$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)\, dt$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution :

(a) La fonction f est définie et dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{\underbrace{x^2 \ln^2(x)}_{\geq 0}}$$

$f'(x)$ est du signe de $-(\ln(x) + 1)$, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > \frac{1}{e}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

(b) On fixe $k \geq 2$. La fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$ donc pour n particulier pour tout $t \geq k$, on a

$$f(k) \geq f(t)$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on a

$$\int_k^{k+1} f(k)\,dt \geq \int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

d'où

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

On en déduit une minoration de u_n,

$$\begin{aligned} u_n &= f(2) + f(3) + \dots f(n) \\ &\geq \int_2^3 f(t)\,dt + \int_3^4 f(t)\,dt + \dots + \int_n^{n+1} f(t)\,dt \\ &\geq \int_2^{n+1} f(t)\,dt \end{aligned}$$

(c) On calcule

$$I_n = \int_2^{n+1} f(t)\,dt = [\ln(\ln(n))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

(d) On a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$

et

$$u_n \geq I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

---

13. (∗) **Théorème fondamental de l'analyse**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Le but de cet exercice est de rédémontrer que F est une primitive de f, c'est-à-dire l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On fixe un point $a \in \mathbb{R}$

(a) Pour $x \neq a$, montrer que

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$$

(b) En effectuant le changement de variable $u = \frac{t-a}{x-a}$, montrer que

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) = \int_0^1 (f(a + (x-a)u) - f(a))\,du$$

(c) ($*$) On fixe $\epsilon > 0$.

i. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x-a| \leq \delta$, alors pour tout $u \in [0,1]$,

$$|f(a+(x-a)u) - f(a)| \leq \epsilon$$

Indication : On pourra utiliser que f est continue en a.

ii. En déduire que si $|x-y| \leq \delta$, alors

$$\left| \frac{F(x)-F(a)}{x-a} - f(a) \right| \leq \epsilon$$

iii. Conclure que

$$F'(a) = f(a)$$

Solution :

(a) En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} &= \frac{1}{x-a}\left(\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} - f(a) &= \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \\ &\underset{t=\frac{t-a}{x-a}}{=} \int_0^1 (f(a+(x-a)u) - f(a))\,du \end{aligned}$$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} - f(a) = \int_0^1 (f(a+(x-a)u) - f(a))\,du$$

(c) i. Comme f est continue en a alors il existe $\delta > 0$ tel que si $|t-a| \leq \delta$,

$$|f(t) - f(a)| \leq \epsilon$$

Soit x tel que $|x-a| \leq \delta$ et $u \in [0,1]$. On posant $t = a + (x-a)u$, on a

$$|t-a| = |u(x-a)| = \underbrace{u}_{\leq 1}\underbrace{|x-a|}_{\leq \delta} \leq \delta$$

donc

$$|f(a+(x-a)u) - f(a)| = |f(t) - f(a)| \leq \epsilon$$

ii. En intégrant l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-f(a)\right| &= \left|\int_0^1 (f(a+(x-a)u)-f(a))\,du\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(a+(x-a)u)-f(a)|\,du \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \int_0^1 \epsilon\,du \qquad \text{(question précédente)} \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

iii. On a donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout x tel que $|x-a| \leq \delta$, on ad $\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a} - f(a)\right| \leq \epsilon$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f(a)$$

et donc

$$F'(a) = f(a)$$