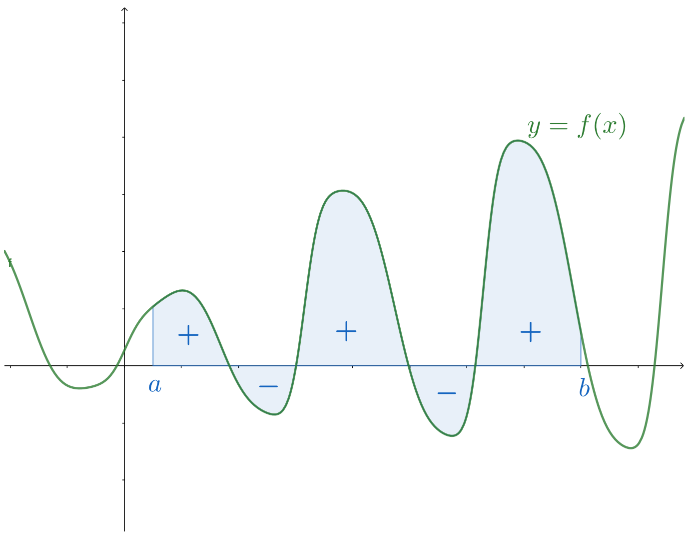
n°8 - Intégration : Interprétation géométrique et formule de la moyenne

Notes de Cours

I Aire algébrique et moyenne

I.A Aire algébrique

Si $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire algébrique comprise l'axe des abscisse et le graphe de f, délimitée par les abscisses a et b : on compte positivement les aires des parties où f est positive ou nulle, et négativement les aires où f est négative.



Par ailleurs, on pose par convention

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

I.B Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Interprétation géométrique

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut intérpréter la quantité $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ comme la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$. En particulier, on a

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

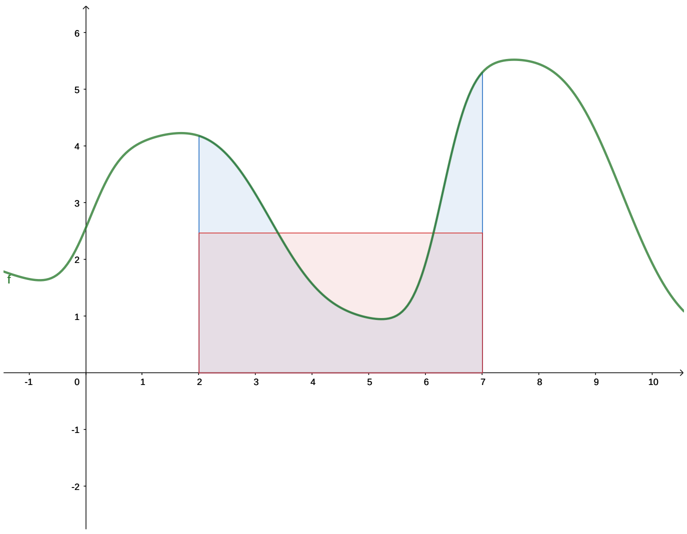
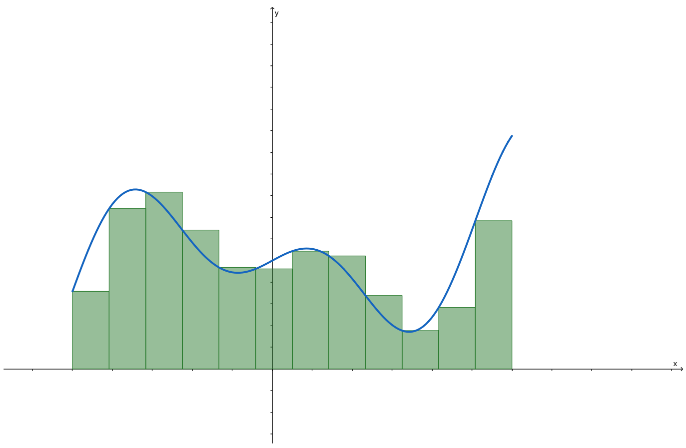


FIGURE 1 – L'aire sous la courbe entre 2 et 7 est égale entre à l'aire du rectangle rouge.

Sommes de Riemmann



Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, la valeur moyenne de f calculée en n points répartis régulièrement dans l'intervalle $[a,b]$ tend vers la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\frac{f(a+(b-a)/n)+f(a+2(b-a)/n)+\ldots+f(b)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

En particulier pour $a=0$ et $b=1$, on a

$$\frac{f(1/n)+f(2/n)+f(3/n)+\ldots+f(1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$$

Théorème et inégalité de la moyenne

Théorème I.1 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

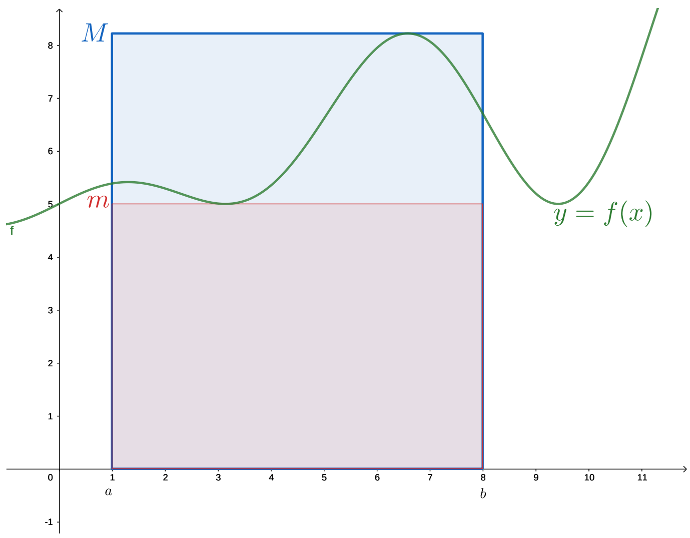
Théorème I.2 (Inégalité de la moyenne)**.** *Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. On suppose que f est bornée entre m et M : pour tout $x \in [a, b]$*

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors on a l'inégalité

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

L'inégalité de la moyenne nous dit que l'aire sous la courbe de f est comprise entre les aires des rectangles de hauteur m et M. Elle entraine également qu'une fonction comprise entre m et M possède une valeur moyenne comprise entre m et M.



II Exercices

II.A Calculs d'aires

1. (SF 1198) **Valeur absolue**
   On considère la fonction $f(x) = |x|$.
   (a) Tracer le graphe de f.

(b) Par un calcul d'aire, déterminer la valeur de

$$\int_{-3}^{5} |x|\, dx$$

2. (SF 1198) **Demi-cercle**
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
(a) Justifier que le graphe de f est un demi-cercle donc on précisera le centre et le rayon.
(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

II.B Théorème et inégalité de la moyenne

3. **Inégalité de la moyenne**
On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on pose

$$I = \int_{2}^{3} f(x)\, dx$$

(a) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$ (on dressera le tableau de variation avec les limites aux bornes).
(b) En déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[2, 3]$.
On donne les valeurs numériques approchées : $\frac{\ln(2)}{2} \simeq 0.34657$, $\frac{1}{e} = 0.36787$ *et* $\frac{\ln(3)}{3} \simeq 0.36620$
(c) En utilisant l'inégalité de la moyenne, donner un encadrement de I.

4. **Limite d'une suite**
Déterminer la limite de la suite

$$u_n = \int_{0}^{\frac{1}{n}} \sin(x^2)\, dx$$

définie pour $n \geq 1$.
Indication : On pourra utiliser l'inégalité de la moyenne

5. **Limite d'une suite**
Déterminer la limite de la suite

$$v_n = \int_{n}^{n+1} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

définie pour $n \geq 2$.

6. **Formule de la moyenne et TAF**
Dans cet exerice on se propose de démontrer le théorème de la moyenne. On se donne donc une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On définit la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

   (a) Justifier que F est continue et dérivable. Que vaut $F'(x)$?
   (b) En applicant le théorème des accroissement finis à F, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

II.C Sommes de Riemann

7. Math 101 : exercice 124 **Aire sous la parabole**
En utilisant les sommes de Riemmann, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.
On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

8. Math 101 : exercice 124 En utilisant des sommes de Riemmann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites suivantes :
   (a)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\alpha + k\beta}$$

   avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels.
   (b)

$$I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

9. (SF 64) Math 101 : exercice 125, examen 2018 Déterminer les limites des suites suivantes :
   (a)

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

   (b)

$$v_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$