Universidad San Francisco de Quito

Cálculo II

Profesor: Ricardo López Celi

NRC: 2995

Proyecto

Joel del Castillo

Pamela Mena

Judith Brito

29 de Marzo del 2020

Desarrollo

1) **Sólidos de revolución**

a) *Utilizando el graficador Geogebra, realice un gráfico en 3D, donde se visulice la región delimitada por las funciones:* $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$, *y luego hagálo rotar alrededor del eje* $y = -1$ *para formar un sólido. Tambíen incluir una arandela que corte el sólido tomando en cuenta un corte que permita plantear la integral. (Deben enviar el archivo de Geogebra para que su profesor pueda correrlo en su computadora y verificar que pueden hacerlo rotar)*

Enlace archivo geogebra:

https://www.geogebra.org/m/yseffqjy

b) *Plantee la integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones delimitadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco cifras decimales.*

$$V = \int_{-1}^{1} A1 - A2 \, dx$$

$$A1 = \pi \left(r1\right)^2$$

$$A1 = \pi \left(e^{-x^2} + 1\right)^2$$

$$A2=\pi\left(r2\right)^2$$

$$A2=\pi\left(1\right)^2$$

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(r1\right)^2-\pi\left(r2\right)^2\ dx$$

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(e^{-x^2}+1\right)^2-\pi\left(1\right)^2\ dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(e^{-x^2}+1\right)^2-1dx$$

$$V=\int_{-1}^{1}e^{-2x^2}+2e^{-x^2}dx$$

Utilizando Geogebra:

$$V=\frac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}\left(4erf\left(1\right)+\sqrt{2}erf\left(\sqrt{2}\right)\right)\approx 13.14312u^3$$

La función error o “erf” es una función utilizada en los campos de la estadística y de la probabilidad, y está definida por la expresión:

$$erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt$$

(Weisstein, 2020)

2) **Patrones de comportamiento**

a) ***Usando un sistema de computación algebraico para evaluar las siguientes integrales:***

Se utilizó Wolfram Alpha

(i) $\int\frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$

$$\frac{1}{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

$$1=Ax+3A+Bx+2B$$

$$0=A+B$$

$$1=3A+2B$$

$$A=1;B=-1$$

$$\int \frac{1}{x+2} \ - \ \frac{1}{x+3} \ dx$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx = ln|x+2|$$

$$\int \frac{1}{X+3} dx = ln|x+3|$$

$$ln \ |x+2| - ln|x+3| + C$$

(ii) $\int \frac{1}{(x+1)(x+5)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)\,(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+5}$$

$$1 = Ax + 5A + Bx + B$$

$$0 = A + B$$

$$1 = 5A + B$$

$$A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{4\,(x+1)} \;-\; \frac{1}{4\,(x+5)}\;dx$$

$$\int \frac{1}{4\,(x+1)}dx = \frac{1}{4}\;ln\;|x+1|$$

$$\int \frac{1}{4\,(x+5)}dx = \frac{1}{4}\;ln\;|x+5|$$

$$\frac{1}{4}\;ln\;|x+1| - \frac{1}{4}\;ln\;|x+5| + C$$

(iii) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}\;dx$

$$\frac{1}{(x+2)\,(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x\;-\;5}$$

$$1 = Ax - 5A + Bx + 2B$$

$$0 = A + B$$

$$1 = -5A + 2B$$

$$A = -\frac{1}{7}\;; B = \frac{1}{7}$$

$$\int \frac{1}{7\left(x-5\right)} - \frac{1}{7\left(x+2\right)} \quad dx$$

$$\int \frac{1}{7\left(x-5\right)}dx = \frac{1}{7}\ ln\ |x-5|$$

$$\int \frac{1}{7\left(x+2\right)}dx = \frac{1}{7}\ ln\ |x+2|$$

$$\frac{1}{7}\ ln\ |x-5|\ - \frac{1}{7}\ ln\ |x+2|\ +C$$

(iv) $\int \frac{1}{(x+2)^2}\ dx$

$$u = x+2$$

$$du\ = 1dx$$

$$\int \frac{1}{u^2}\ dx$$

$$\int u^{-2}\ dx$$

$$\frac{u^{-2+1}}{-2+1}$$

$$\frac{(x+2)^{-2+1}}{2+1}$$

$$-\frac{1}{x+2}+C$$

b) ***Basado en el patrón de las respuestas del literal anterior, adivina el resultado de la siguiente integral:***

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\ dx$$

Si a $\neq$ b. ¿Qué pasaría si a = b?

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+a)}\ dx$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}\ dx$$

Si poseen el mismo valor no hay manera de ocupar el método de fracciones parciales debido a que se presenta un binomio cuadrático por tanto es imprescindible buscar un método diferente para resolver y en este caso se utilizará la sustitución.

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}\ dx$$

$$u = x + a$$

$$du = 1dx$$

$$\int \frac{1}{u^2}\, du$$

$$-\frac{1}{u} + C \rightarrow -\frac{1}{x+a} + C$$

Supongamos un caso en el que a y b son iguales a 2, el procedimiento para realizar esta integral debería corresponder al mismo método utilizado en la anterior sección. Al contrario, si se utiliza fracciones parciales, esto sucede:

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+2)}\, dx$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = Ax + 2A + Bx + 2B$$

$$0 = A + B$$

$$1 = 2A + 2B$$

$$A = -B$$

$$1 = -2B + 2B$$

$$1 = -2\left(B - B\right)$$

$$1 \neq 0$$

Por tanto, se demuestra que $\boldsymbol{a}$ tiene que ser diferente de $\boldsymbol{b}$ debido a que al integrar por el método de fracciones parciales se llega a una contradicción.

c) ***Prueba tu respuesta del literal anterior derivando el resultado.***

$$Respuesta\ anterior = -\frac{1}{x+a} + C$$

$$\frac{d}{dx} = -\frac{-1\left(1\right)}{\left(x+a\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx} = -\frac{-1\,(1)}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+a)^2}$$

La integral representa el proceso inverso de la derivación de una función, por lo que si se deriva el resultado de una integral obtendremos la función original, probando así la respuesta planteada.

3) **Curvas paramétricas y coordenadas polares**

Una circunferencia C de radio 2r tiene su centro en el origen. Un circulo de radio r rueda sin resbalar en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, 0 < b < r. Sea L la recta desde el centro de C al centro del círculo giratorio y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.

a) ***Usando θ como un perímetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por p son:***

$$x = b\cos(3\theta) + 3r\cos(\theta)$$

$$y = b\sin(3\theta) + 3r\sin(\theta)$$

Demostración con transformaciones de series de Fourier

La sumatoria de vectores en el plano complejo crean patrones y para obtener sus ecuaciones se utilizan series de Fourier.

Si asumimos el eje x como números reales y el eje y como números complejos, es posible determinar la función de la gráfica.

La gráfica en particular tiene 2 vectores, un vector de radio 3r y otro de r.

Ver gráfico 1

> **Nota:** El vector no tiene radio 2r ya que son sumas de vectores, así que es necesario que ambos vectores sean adyacentes y la diferencia entre ambos es r.

El vector 3r da rotaciones a una velocidad de:

$$F1 = \frac{1 \text{ ciclo}}{perodo}$$

Ya que el segundo vector tiene un radio 3 veces menor, tiene una velocidad de:

$$F2 = \frac{3 \text{ ciclos}}{perodo}$$

> **Nota:** Si cambiamos la longitud de b, va a seguir teniendo la misma velocidad, ya que el segundo vector sigue la misma trayectoria de su radio r.

Utilizamos la identidad de Euler ya que describe la rotación de un número complejo en el plano complejo:

$$C = me^{i\theta}$$

Donde m representa la magnitud del vector y θ representa el ángulo inicial que forma el eje imaginario con del eje real. Si es que θ es negativo, el vector gira en sentido de las manecillas del reloj, si asumimos que no gira, el ángulo es 0, por lo que se convierte en solo una constante. Si es que se multiplica o divide para un factor, ese factor representara la velocidad de giro del vector.

$$me^{i\theta} = m\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

De esta forma podemos transformar nuestros vectores en fórmulas.

Primer vector: 3r (V1):

$$3re^{1i\theta} = 3r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

Segundo vector: r (V2):

$$be^{3i\theta} = b\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right)$$

Para completar la ecuación que ambos vectores realizan, se suman.

$$V1 + V2 = 3r\left(\cos\theta + i\sin\theta\ \right) + b\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right)$$

Para devolver esta fórmula al plano cartesiano, extraemos las partes reales que corresponden al eje x y de igual manera con eje imaginario.

Así:

$$x = 3r\ \ (\cos\theta\ ) + b\,(\cos 3\theta)$$

$$y = 3r\,(\sin\theta\ ) + b\,(\sin 3\theta)$$

b) ***Grafique la curva (usando geogebra) para varios valores de b entre 0 y r***

(i) Para la demostración, se encuentra adjunto un programa de nuestra autoría que grafica el epitrocoide dependiendo de b.

(ii) Si b = 0.99

Ver gráfico 2

(iii) Si b = 0.5

Ver gráfico 3

(iv) Si b = 0.01

Ver gráfico 4

c) ***Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el centro del epicotroide y que su centroide está sobre la circunferencia de radio b con centro en el origen.***

Debido a que la suma es conmutativa, el orden de la suma de los vectores no afecta al resultado. Podemos intercambiar vectores para mayor facilidad. Ahora, el vector r se encuentra en el centro y el vector 3r en el exterior.

Ver gráfico 5

Para la demostración asumimos que el centroide va a girar alrededor del vector r.

De esta manera, la longitud desde el centroide hasta uno de los puntos del triángulo debe ser de 3r.

Ver gráfico 6

Así la longitud m de uno de los lados del triángulo es:

$$\frac{m/2}{3r} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$m = 3\sqrt{3}\ r$$

Debido a que el vector r gira con una velocidad de 3θ , los lados del triángulo rotan a su misma posición cuando el vector r da una vuelta completa y θ es:

$$2\pi k = 3 \times \theta$$

$$k \in Z$$

$$\frac{2\pi k}{3} = \theta$$

Así, por cada vuelta del vector r ($\frac{2\pi}{3}$), el triángulo y su centroide estarán a la misma posición que la vuela anterior y cada vértice del triángulo ocupara la posición del otro.

De esta manera vemos que el epitrocoide trazado por P, es trazado simultáneamente por los otros 2 vértices.

Para comprobar que la longitud de cada lado del triángulo sea de $3\sqrt{3}$ y que su centroide se encuentra alrededor del vector r: Con r = 1 y b = r.

Iniciamos con el primer punto, que por conveniencia será en $\theta = 0\pi$.

Entonces:

$$x = 3\left(\cos\left(0\right)\ \right) + \left(\cos\left(3 \times 0\right)\right)$$

$$x_1 = 4$$

$$y = 3r\ \ \left(\sin\left(0\right)\ \right) + \left(\sin\left(3 \times 0\right)\right)$$

$$y_1 = 0$$

De la misma manera el segundo punto, donde se supone que debería estar el siguiente vértice del triángulo en $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$x = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\ \right) + \left(\cos\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = 3r\ \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\ \right) + b\left(\sin\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Y para comprobar que la longitud entre ambos debe ser $3\sqrt{3}$:

$$3\sqrt{3} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$3\sqrt{3} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2}$$

$$3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

d) ***En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de circunferencia con centro en los vértices opuestos como en la parte iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor se ajusta en el epitrocoide si b*** $\leq \frac{3}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) r$

En el literal C se comprobó que la longitud de los lados del triángulo equilátero que se forma es:

$$m = 3\sqrt{3}\ r$$

Por tanto, este es la longitud obtenida al unir dos vértices del epitrocoide y se la puede llamar diámetro del epitrocoide.

Para probar que el rotor se ajusta al epitrocoide, es suficiente probar que para cualquier posición que adopte el punto **P**, no existen puntos en el lado opuesto del rotor que se encuentren fuera del epitrocoide.

Para esto, es conveniente hallar los valores que toman las coordenadas de P cuando P se interseca con el eje Y pues esos valores de P serían los más lejanos del centro del epitrocoide. Los ángulos de intersección con el eje Y son $= \frac{\pi}{2}$ y $= \frac{3\pi}{2}$.

Entonces, reemplazamos los valores $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ en las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de P:

$$x = b\cos(3\theta) + 3r\cos(\theta)$$

$$y = b\sin(3\theta) + 3r\sin(\theta)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$x = b\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + 3r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = b\,(0) + 3r\,(0)$$

$$x = 0$$

$$y = b\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) + 3r\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = b\left(-1\right) + 3r\left(1\right)$$

$$y = -b + 3r$$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$x = b\cos\left(9\frac{\pi}{2}\right) + 3r\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$x = b\left(0\right) + 3r\left(0\right)$$

$$x = 0$$

$$-y = b\sin\left(9\frac{\pi}{2}\right) + 3r\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$y = -b\left(1\right) - 3r\left(-1\right)$$

$$y = -b + 3r$$

Ahora, planteamos que el diámetro del rotor sea siempre menor que la distancia entre los puntos más alejados del centro que puede tomar P, los cuáles corresponde a las intersecciones de P con el eje Y, y despejamos en función de b:

$$3\sqrt{3}\ r \leq 2\left(-b + 3r\right)$$

$$3\sqrt{3}\ r \leq -2b + 6r$$

$$3\sqrt{3}r - 6r \leq -2b$$

$$-3\sqrt{3}r + 6r \geq 2b$$

$$3r\left(-\sqrt{3} + 2\right) \geq 2b$$

$$\frac{3r\left(-\sqrt{3} + 2\right)}{2} \geq b$$

Con lo que se demuestra que el **rotor se ajusta en el epitrocoide si b** $\leq \frac{3}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) r$

Lista de Anexos

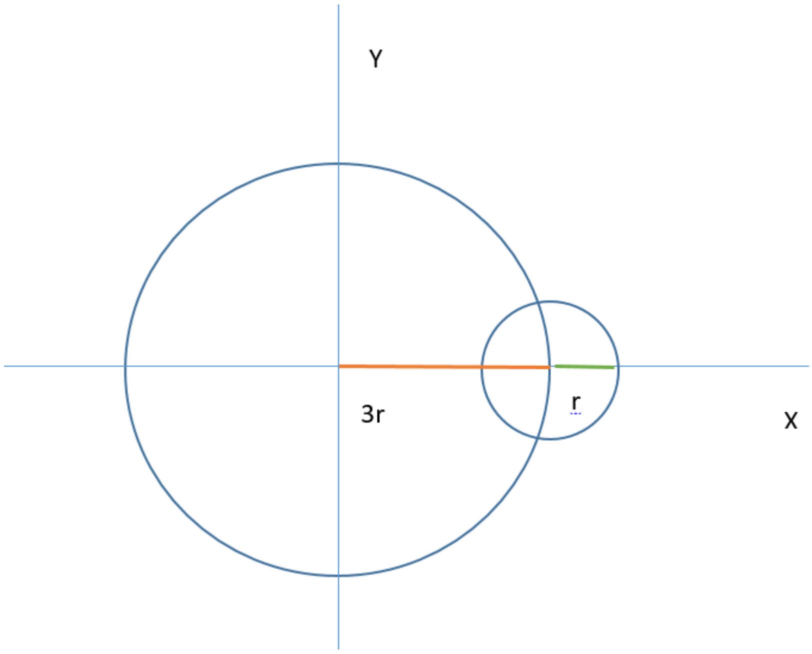

Gráfico 1: Suma de los dos vectores 3r + r.

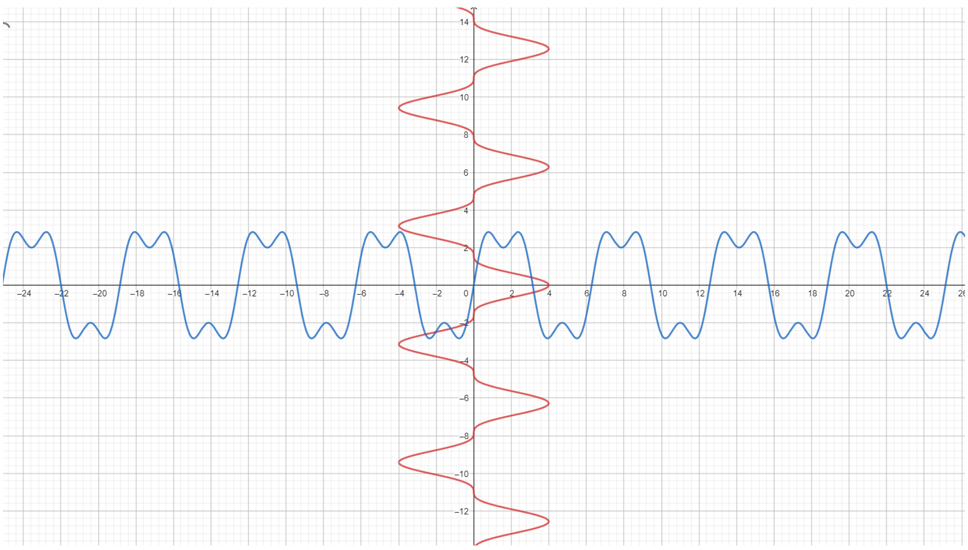

Gráfico 2: Ecuaciones de las curvas paramétricas del epitrocoide cuando b = 0.99.

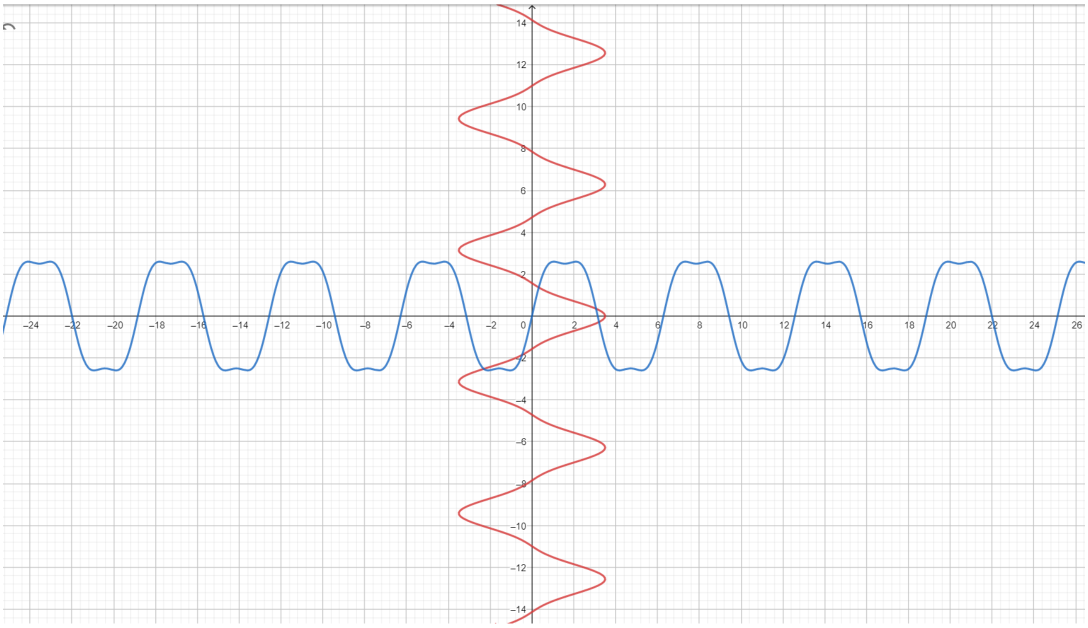

Gráfico 3: Ecuaciones de las curvas paramétricas del epitrocoide cuando b = 0.5.

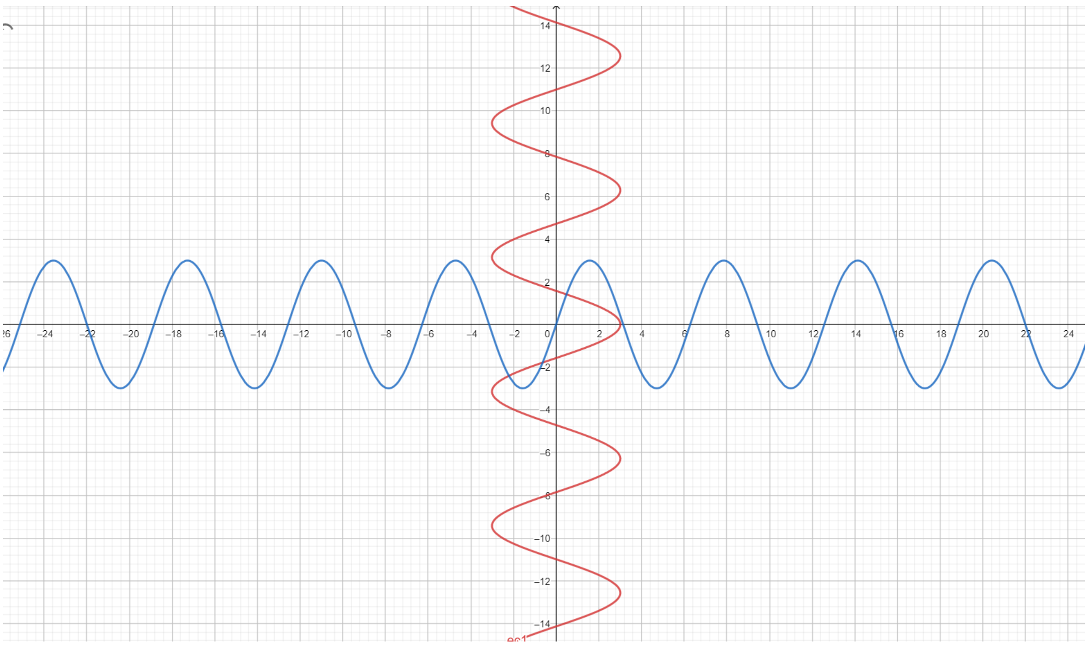

Gráfico 4: Ecuaciones de las curvas paramétricas del epitrocoide cuando b = 0.01.

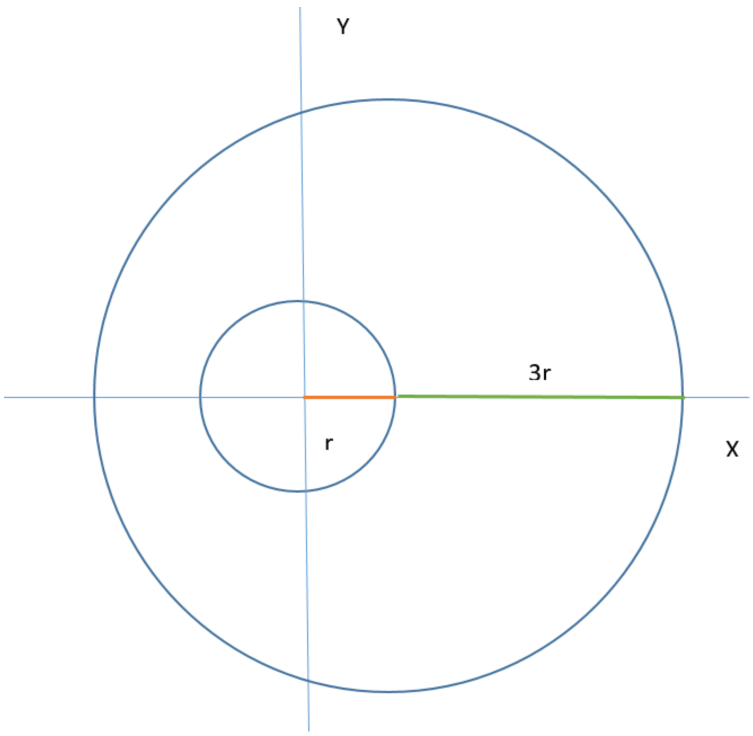

Gráfico 5: Suma de los dos vectores r + 3r.

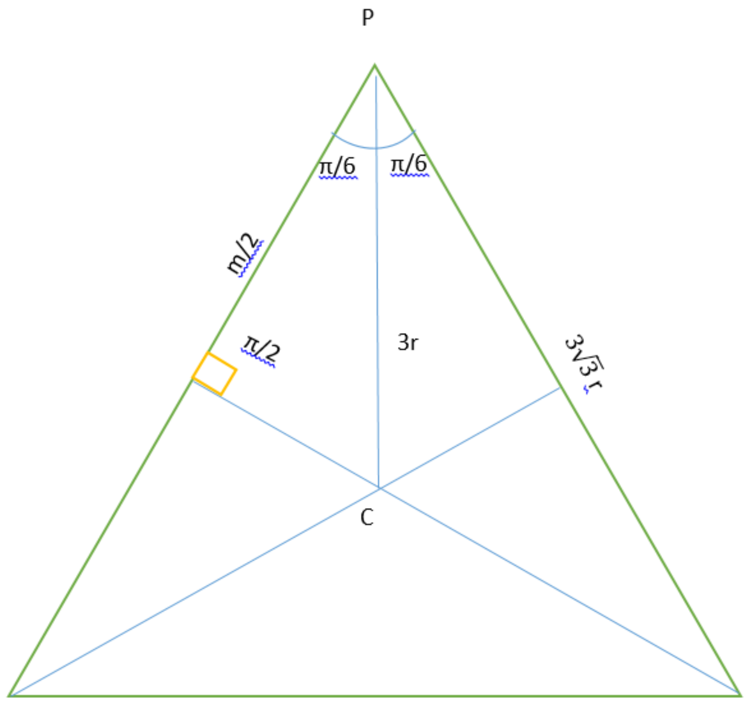

Gráfico 6: Demostración de los lados del triángulo equilátero dentro del epitrocoide.

Referencias

Sanderson, Grant. [3Blue1Brown], (2019, Junio 30). *But what is a Fourier series? From heat flow to circle drawings | DE4* [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k& t=986s

Shiffman, Daniel. [The Coding Train], (2018, Diciembre 19). *Coding Challenge # 125: Fourier Series* [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Mm2eYfj0SgA& t=379s

Weisstein, E. W. (2020). Erf. Retrieved from Wolfram MathWorld: https://mathworld.wolfram.com/Erf.html

Yamamoto, Kenichi. (1981). *Rotary engine.* Toyo Kogyo Co. Ltd., Mazda, Ed.1981. Hiroshima: Japón. Recuperado de: http://foxed.ca/rx7manual/manuals/REbyKenichiYamamoto-1981.pdf