Variables discrètes finies - Exercices pratiques

Exercice 1 - Loi d'un dé truqué - *Deuxième année* - ⋆

1. X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X=k)=ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^{6} P(X=k)=1 \iff a\frac{6\times 7}{2}=1 \implies a=1/21.$$

On a donc :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule que $E(X)=\frac{13}{3}$.

2. On a $Y=k \iff X=1/k$. Y prend donc ses valeurs dans $\{1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6\}$, et la loi est donnée par :

k	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$P(Y=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :

$$E(Y)=\frac{2}{7}.$$

Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que $Y=1/X$ que $E(Y)=1/E(X)$!!!.

Exercice 2 - Garagiste - *Deuxième année* - ⋆

1. Z est élément de $\{0,1,2\}$. On a :

$$P(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=\frac{8}{25}.$$

2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X\geq 1$ et $Z=0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y=0)=P(X=0)+P(X\geq 1\cap Z=0)=P(X=0)+P(X\geq 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0)=0,1+0,9\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=0,136.$$

De même, l'événement $Y=1$ se produit si $X=1$ et $Z\geq 1$ ou bien si $X\geq 2$ et $Z=1$. On en déduit :

$$P(Y=1)=P(X=1)P(Z\geq 1)+P(X=2)P(Z=1)=0,48.$$

Enfin, l'événement $Y=2$ est réalisé si $X\geq 2$ et $Z=2$. Ceci donne :

$$P(Y=2)=P(X\geq 2)P(Z=2)=0,6\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y)=300(0\times 0,136+1\times 0,48+2\times 0,384)=374,4.$$

Exercice 3 - Vaches laitières - *Deuxième année* - ⋆

1. Y_n ne prend que deux valeurs, $1/n$ et $1+1/n$. On a en outre :

$$(Y_n=1/n)\iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où $P(Y_n=1/n)=0,85^n$. On en déduit - la loi de Y est une loi de probabilité - $P(Y=1+1/n)=1-(0,85)^n$. Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n)=\frac{0,85^n}{n}+\frac{n+1}{n}(1-0,85^n)=1+\frac{1}{n}-0,85^n.$$

2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $f'(x)=\frac{1+ax}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1+ax$, ce qui permet de dire que f est croissante sur $]0,-1/a[$, et décroissante ensuite. La limite de f en $+\infty$ est $-\infty$, il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de $f(n)$, on a $f(17)>0,07$ et $f(18)<-0,03$. 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(n)$ est positive. En outre, $f(1)<0$ alors que $f(2)>0$. L'ensemble d'entiers recherché est donc $\{2,\dots,17\}$.
3. On a :

$$\begin{aligned}E(Y_n)<1 &\iff 1+\frac{1}{n}-0,85^n<1\\ &\iff 0,85^n>\frac{1}{n}\\ &\iff n\ln(0,85)>-\ln n.\end{aligned}$$

Par suite, $E(Y_n)<1 \iff f(n)>0$. L'étude précédente montre que les entiers n pour lesquels $f(n)>0$ est $\{2,\dots,17\}$. On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

Variables discrètes finies - Exercices théoriques

Exercice 4 - Maximiser l'espérance - *Oral ESCP* - ⋆⋆

1. On a $Y(\Omega)=\{1,\dots,n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
   – si $k\leq a$, $P(Y=k)=P\left((X_1=k)\cap(X_2\leq a)\right)=\frac{1}{n}\times\frac{a}{n}$.
   – si $k>a$, $P(Y=k)=P\left((X_1=k)\cap(X_2\leq a)\right)+P\left((X_2=k)\cap(X_2>a)\right)=\frac{a}{n^2}+\frac{1}{n}$.
   On a bien $a\times\frac{a}{n^2}+(n-a)\times\left(\frac{a}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=1$.
2. Le calcul de l'espérance est facile :
$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{a}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}\frac{k}{n}\\&=\frac{a(n+1)}{2n}+\frac{(a+n+1)(n-a)}{2n}\\&=E(X_1)+\frac{a}{2n}(n-a)\geq E(X_1).\end{aligned}$$
3. On vérifie que :
$$E(Y)=\frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2+n-(a-n/2)^2\right).$$
   Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a-n/2|$ le plus petit possible :
   – si n est pair, c'est pour $a=n/2$.
   – si n est impair, c'est pour $a=(n-1)/2$ ou $a=(n+1)/2$.

Exercice 5 - Entropie d'une variable aléatoire - *L3* - ⋆⋆

1. Si X est constante, on a $p_i=1$ pour un i et $p_j=0$ pour $j\neq i$. On en déduit que $H(X)=-1\times\ln(1)=0$.
2. Si X est équirépartie, on a $p_i=1/n$ pour tout i. On en déduit
$$H(X)=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\ln(1/n)}{n}=-\ln(1/n)=\ln(n).$$
3. Posons $f(x)=-x\ln(x)$. Cette fonction est concave, car sa dérivée seconde est $f''(x)=-\frac{1}{x}<0$. On a donc
$$\frac{1}{n}f(p_1)+\dots+\frac{1}{n}f(p_n)\leq f\left(\frac{p_1+\dots+p_n}{n}\right)\leq f(1/n)$$
   ce qui se traduit encore en
$$\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\leq\sum_{i=1}^{n}f(1/n)=\ln n.$$
   Ainsi, on a toujours $H(X)\leq\ln n$ et cette valeur est atteinte quand X est équidistribuée. $H(X)$ mesure le désordre engendré par X. Lorsque X ne prend qu'une seule valeur, son entropie est nulle (pas de désordre). Lorsque la variable est équidistribuée, le désordre est maximal et l'entropie aussi.

Variables discrètes infinies

Exercice 6 - Une certaine variable aléatoire - *Oral ESCP* - $\star$

1. L'événement $X=n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un face. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :
$$P(X=n)=(n+1)p^2(1-p)^n.$$
2. La série définisant $E(X)$ est évidemment convergente, et sa sommation est facile (si elle vous semble difficile, il faut réviser comment faire, par exemple en utilisant les séries entières). On trouve :
$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(X=n)=\frac{2(1-p)}{p}.$$
3. Si $n\geq 1$ est fixé, et $k\in\{0,\dots,n\}$, on a clairement :
$$P(Y=k|X=n)=\frac{1}{n+1}.$$
Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty}P(Y=k|X=n)P(X=n)\\ &= \sum_{n=k}^{\infty}(n+1)p^2(1-p)^n\frac{1}{n+1}=p(1-p)^k.\end{aligned}$$
On reconnait que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :
$$E(Y)=\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p}.$$
Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.
4. On a :
$$(Z=h)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(Y=j)\cap(X=h+j)\right].$$
Cette réunion étant disjointe, il vient :
$$\begin{aligned}P(Z=h) &= \sum_{j=0}^{\infty}P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}p^2(1-p)^{h+j}\\ &= p(1-p)^h.\end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} P[(Z=h),(Y=j)] &= P(X=h+j, Y=j) = P(Y=j|X=h+j)P(X=h+j) \\ &= p^2(1-p)^{h+j}. \end{aligned}$$

Ceci est égal à $P[(Z=h),(Y=j)]$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 7 - Deux fois pile - *Deuxième année* - $\star$

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement $(X=2)$ correspond à :

$$(X=2) = P_1P_2 \implies p_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De même,

$$(X=3) = F_1P_2P_3 \implies p_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Pour $(X=4)$, cela se corse un peu !

$$(X=4) = F_1F_2P_3P_4 \cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4 = \frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X=n$, on peut :
   - ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer (proba 2/3). Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X=2$), donc avec encore une probabilité de 2/3. Maintenant, il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$ième. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}.
   - ou bien avoir obtenu face au 1er lancer (proba 1/3). Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ième, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}.

   D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2 = r/3 + 2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement :

$$p_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes. On obtient :

$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. Il est bien connu que pour tout $q \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}np_n=\frac{17}{4}.$$

Exercice 8 - Loi de Pascal - *L2* - $\star$

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r,r+1,\dots,\}$. Soit $k\geq r$. Remarquons que si $X=k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X=k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{r-k}$. On en déduit que :

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.$$

Exercice 9 - Rangée de spots - *Oral ESCP* - $\star\star$

1. Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant n, c'est qu'il y a eu la succession d'événement A_k : "le spot S_1 est éclairé à l'instant k". Par la formule des probabilités composées, on trouve que :
$$P(A_1\cap\dots\cap A_n)=P(A_n|A_1\dots A_{n-1})\dots P(A_1)=\frac{1}{4^n}.$$
2. Clairement(!), on a $P(X=1)=1/4$. D'autre part, $(X=2)$ est réalisé, soit si le spot S_1 reste allumé à l'instant 1 et le spot S_2 s'allume à l'instant 2, soit si le spot S_3 s'allume à l'instant 1 (et S_2 s'allumera automatiquement à l'instant 2). Ces deux cas sont disjoints, donc :
$$P(X=2)=\frac14\times\frac14+\frac14=\frac{5}{16}.$$
3. Soit $n\geq 3$. S_3 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$, et S_2 s'allume à l'instant n.
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$, et S_3 s'allume à l'instant $n-1$.
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$, et S_4 s'allume à l'instant $n-2$.
   Ces cas étant disjoints, on obtient :
$$\forall n\geq 3,\ P(X=n)=\frac{1}{4^{n-1}}\frac14+\frac{1}{4^{n-2}}\frac14+\frac{1}{4^{n-3}}\frac14=\frac{21}{4^n}.$$
4. La convergence de la série étant évidente, on obtient :
$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)\\&=\frac14+\frac58+21\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{4^n}.\end{aligned}$$
   La somme de la série se calcule en utilisant $\sum_{x\geq 0}x^n=1/(1-x)$ pour $|x|<1$, en dérivant cette égalité, et en faisant $x=1/4$. On obtient finalement :
$$E(X)=\frac73.$$

Exercice 10 - Une autre expression de l'espérance - *L2/L3/Master Enseignement* - ⋆⋆

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k)-nP(X>n)+P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)-nP(X>n).\end{aligned}$$

   (b) On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

   La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

   (c) Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

   Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

   (d) On utilise le même type d'argument :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P(X>k)-n^2P(X>n).\end{aligned}$$

   Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n^2P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X=k).$$

   Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)P(X>k).$$

2. (a) On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

(b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(c) On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

(d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$