Taller de Matemática Computacional

1. Lógica

La matemática, lógica y computación se encuentran fuertemente vinculadas.

La lógica estudia la forma del razonamiento. En **matemática**, para demostraciones y problemas. En **computación**, elaboración y revisión de programas. En **física**, para establecer el procedimiento para llevar a cabo un experimento e interpretar los resultados obtenidos. En **la vida cotidiana**, para poder establecer una comunicación.

Proposición lógica

Una proposición es una oración, frase o expresión matemática que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez.

- Una **proposición lógica** es una **expresión informativa** o declarativa, que puede ser **falsa o verdadera** pero **no ambas a la vez**
- Las **preguntas NO** son proposiciones lógicas
- Las **sentencias imperativas NO** son proposiciones lógicas
- Las **expresiones matemáticas SÍ** son proposiciones lógicas
- *Que una **expresión sea falsa**, no implica que no sea una proposición lógica, solo **significa que su "valor de verdad" es falso**. Por ejemplo: "El sol es un planeta"*

Ejemplos:

- 3 = 1 + 3

SÍ, es una proposición lógica con valor de verdad **F**

- *Mañana estará soleado*

SÍ, es una expresión declarativa. Su valor de verdad se definirá mañana

- *Ser o no ser*

SÍ, es una expresión declarativa. Su valor de verdad es siempre **V,** es una **Tautología**

- *Hagan todos los ejercicios del práctico*

NO, es una sentencia imperativa, una orden, no se le puede asignar valor de verdad

- *¿Cómo te llamás?*

NO, es una pregunta.

Proposiciones compuestas y operadores

Las proposiciones simples pueden estar combinadas por medio de operadores lógicos y formar proposiciones compuestas

Ejemplos:

- Hoy es lunes **y** mañana es martes
- **Si** hoy llueve **entonces** mañana estará soleado
- 2+2=4 **o** ahora es de noche

Operadores

NOT (negación): ¬p, ~p. Tiene como función negar una proposición.
AND (conjunción): p∧q. Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero.
OR (disyunción): p∨q. Se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera.
XOR (disyunción exclusiva): p⊻q. El resultado es verdadero si alguna de las proposiciones es cierta, pero no ambas.
CONDICIONAL (o implicancia): p→q. Se lee “si p entonces q”. Si el antecedente es VERDADERO y el consecuente es FALSO entonces es FALSO.
BICONDICIONAL (sí y sólo si): p↔q. Se lee “p si y sólo si q”. P implica Q y Q implica P.

Tabla de verdad

- Una **tabla de verdad** es una técnica para **determinar el valor de verdad** de una **proposición lógica**, dados todos **los posibles valores** de las **variables lógicas**
- Para usarla, la **proposición lógica** tiene que estar escrita en **lenguaje proposicional**
- A partir del **resultado de la tabla**, se define si una proposición es una **Tautología**, una **Contingencia** o una **Contradicción**
- Dos proposiciones son **equivalentes** si para los **mismos valores de las variables** proposicionales, el **resultado de la tabla es el mismo**

p	~p
F	V
V	F

OR

p	q	pvq
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	p∧q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

XOR

p	q	p⊻q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

p	q	p→q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	p↔q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Ejemplo:

Proposición: (P ∨ Q) ⊻ (R ∧ P)

1. ¿Cuántas variables lógicas (k) tiene la proposición? **k=3**
2. ¿Cuántas filas (n) tendrá la tabla? Esto es **n= 2^k**
3. Ordenar las variables en orden alfabético. **P,Q,R**
4. Armar las primeras k columnas de la tabla de verdad, con las variables ordenadas. Luego completar las columnas con los valores de verdad posibles para cada variable. Para ello, siga el siguiente procedimiento:

   a. **Primer columna**: Comenzando de la fila 1 y hasta la fila n, coloque de forma intercalada n/2 valores F y n/2 valores V.

P	Q	R
F	F	F
F	F	V
F	V	F
F	V	V
V	F	F
V	F	V
V	V	F
V	V	V

b. **Segunda columna**: Comenzando de la fila 1 y hasta la fila n, coloque de forma intercalada n/4 valores F y n/4 valores V.

c. **i-ésima columna**: Comenzando de la fila 1 y hasta la fila n, coloque de forma intercalada $n/(2^i)$ valores F y $n/(2^i)$ valores V.

5. Completar el resto de las columnas con las operaciones lógicas de la proposición.
Tenga cuidado en respetar el orden de [precedencia](#) de [operadores](#)!

P	Q	R	(P ∨ Q)	(R ∧ P)	(P ∨ Q) ⊻ (R ∧ P)
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	F

La última columna, contiene los valores de verdad de la proposición para cada entrada (fila)

Si siempre seguimos la misma metodología, podremos determinar si dos proposiciones son equivalentes verificando que:

a. Las dos proposiciones tengan las mismas variables
b. Que la columna final de las tablas sean iguales

Resultado de una Tabla de verdad

- Luego de completar una tabla de verdad, su **resultado** es la **última columna**
- El resultado puede ser
    - **Contingencia**, algunas filas con valor V y otras con F
        - Se denomina contingencia a una proposición compuesta cuyos valores resultantes en la tabla de verdad son ceros y unos. Ej: p , q⋀¬p , ¬p →r
- **Tautología**, todas las filas con valor V
    - Es aquella proposición que es verdadera para todos los valores de sus variables. Ej: q∨¬q , r↔r
- **Contradicción**, todas las filas con valor F
    - Una proposición es una contradicción o “absurdo” si al evaluarla el resultado es falso, para todos los posibles valores de verdad de sus variables. Ej: q⋀¬q , ¬(p⋁¬p) , r↔¬r.

A	B	C	B v C	A ^ (B v C)
F	F	F	F	F
F	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	V	V	V	F
V	F	F	F	F
V	F	V	V	V
V	V	F	V	V
V	V	V	V	V

P	Q	(P ^ Q)	(P ^ Q)→P
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

T	~T	T ^ ~T
F	F	F
V	V	F

Equivalencia

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad.

$(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q$					
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$\equiv p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Precedencia

Precedencia	Operador
1	()
2	$\neg$
3	$\wedge$
4	$\veebar$
5	$\vee$
6	$\to \leftrightarrow$

NOTA: A menos que esté indicado con paréntesis, **los operadores se asocian a izquierda**, ejemplos:

$P \to Q \to R \equiv (P \to Q) \to R$ $\quad$ $P \wedge Q \wedge R \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

$P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$ $\quad$ $P \vee Q \vee R \equiv (P \vee Q) \vee R$

Leyes del cálculo proposicional

Leyes asociativas
a) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
b) $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

Leyes distributivas
a) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
b) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Leyes de absorción
a) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
b) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

Leyes idempotentes
a) $P \vee P \equiv P$
b) $P \wedge P \equiv P$

Leyes de dominación
a) $P \vee T \equiv T$
b) $P \wedge F \equiv F$

Leyes inversas
a) $P \vee \neg P \equiv T$
b) $P \wedge \neg P \equiv F$

Leyes de De Morgan
a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Leyes de la doble negación
a) $\neg\neg P \equiv P$

Definición de implicación y doble implicación: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ $\quad$ $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

Cuantificadores

Cuando una **proposición lógica** expresa **condiciones o definiciones** sobre **elementos** de un determinado **conjunto**, muchas veces se desea expresar **cuántos** elementos de ese conjunto hacen que la **proposición sea verdadera o falsa**.

Hay dos tipos de cuantificadores,

- **Existencial,** $\exists$: Expresa que **al menos un** elemento del conjunto hace que la **proposición sea verdadera**. Se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en un conjunto con una condición o propiedad determinada.
- **Universal,** $\forall$: Expresa que **todos los elementos** del conjunto hacen que la proposición sea **verdadera.** Se utiliza para afirmar que TODOS los elementos de un conjunto, cumplen con una condición o propiedad determinada.

Ejemplos

• **Existencial,** $\exists$: $\exists y : y + 1 = 0$, Verdadero *Con y perteneciente a los números enteros* $\exists x : x^2 + 1 = 0$, Falso *Con x perteneciente a los números reales* $\exists c : H(c) \wedge A(c)$, Verdadero *Con c perteneciente al conjunto de tipos de cervezas, y las proposiciones con argumentos* *H(p): p es un tipo de cerveza con graduación alcohólica mayor a 0%* *A(p): p es un tipo de cerveza apta para celíaco*	• **Universal,** $\forall$ $\forall n : n + 1 > 0$, Verdadero *Con n perteneciente a los números naturales* $\forall x : x^2 = 0$, Falso *Con x perteneciente a los números reales* $\forall s : M(s) \vee G(s)$, Falso *Con s perteneciente al conjunto de tipos de sidras, y las proposiciones con argumentos* *M(p): p es un tipo de sidra hecha a partir de manzana* *G(p): p es un tipo de sidra sin alcohol*

Cuantificadores - Relación

Los cuantificadores se encuentran relacionados mediante la negación

$\boldsymbol{\sim(\forall x) : p(x) \equiv \exists x : \sim p(x)}$

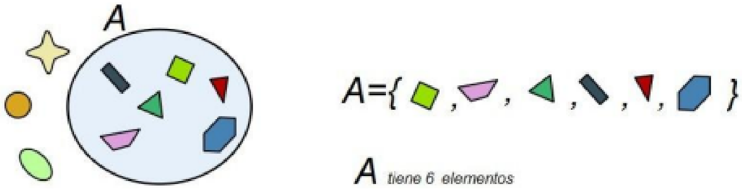
Negar esto implica cambiar el cuantificador universal por el cuantificador existencial y negar la proposición lógica

$\boldsymbol{\sim(\exists x) : p(x) \equiv \forall x : \sim p(x)}$

• **Existencial,** $\exists$: $\exists y : y + 1 = 0$, Verdadero *Con y perteneciente a los números naturales* $\sim(\exists x) : x^2 \geq 0$, Falso *Con x perteneciente a los números reales* $\exists c : H(c) \wedge A(c)$, Verdadero *Con c perteneciente al conjunto de tipos de cervezas, y las proposiciones con argumentos* *H(p) y A(p) las definidas anteriormente*	• **Universal,** $\forall$ $\sim(\forall y) : y + 1 \neq 0$, Verdadero *Con y perteneciente a los números naturales* $\forall x : x^2 < 0$, Falso *Con x perteneciente a los números reales* $\sim(\forall c) : \sim H(c) \vee \sim A(c)$, Verdadero *Con c perteneciente al conjunto de tipos de cervezas, y las proposiciones con argumentos* *H(p) y A(p) las definidas anteriormente*

2. Conjuntos

Un conjunto es una **colección bien definida de objetos**: números, personas, letras, etc.



Se lo representa con una letra mayúscula (ej. A), a sus elementos con letras minúsculas (ej. a, b, c), y se reconocen por el uso de llaves ({}). Ej. A = {perro, gato, ave}, a = perro.

Los elementos dentro de un conjunto:

- NO tienen orden (Su orden es irrelevante)
- NO se repiten

Conjuntos especiales

- El **conjunto vacío** es el conjunto sin **ningún elemento**, se denota por Ø o por {}.
- El **conjunto universal** (U) es el conjunto que **contiene todos los elementos posibles**, dentro del contexto considerado.

Relaciones básicas

Pertenencia: Dado un elemento x, éste puede pertenecer o no al conjunto A. Esto se indica como $x \in A$ ó $x \notin A$, respectivamente.

Inclusión e Igualdad: Dado un conjunto A, cualquier subcolección B de sus elementos es un subconjunto de A, y se indica como $B \subseteq A$. La igualdad se da sólo si A y B tienen los mismos elementos.

Definiciones. ¿Cómo definir un conjunto?

Por Extensión: Se listan los elementos que componen el conjunto.

- Útil cuando la cantidad de elementos es conocida y no es demasiado grande.
  Ej: A = {3, 6, 7} A = {perro, gato, avión}

Por Comprensión: Se enuncia una propiedad común a todos los elementos que permita distinguir cuáles pertenecen y cuáles no pertenecen al conjunto. Defino una propiedad que debe cumplir un elemento para formar parte del conjunto.

Si P es la propiedad común se escribe: A = { x / x tiene la propiedad P } Ej: A = { x / x $\in$ N y x es par}

- Útil cuando la cantidad de elementos es infinita o demasiado grande para definirla por comprensión.

Conjunto Finito: Es un conjunto que contiene una cantidad finita de elementos.

Conjunto Infinito: Es un conjunto que contiene una cantidad infinita de elementos.

Relaciones básicas

Pertenencia ∈:

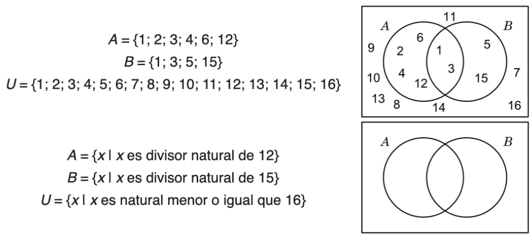
- Se usa para indicar si un elemento forma parte (∈) o no (∉) de un conjunto.
- Definida entre un elemento y un conjunto.

Inclusión e igualdad ⊆:

- Se usa para indicar si un conjunto está contenido o es igual a otro (⊆) o no (⊈).
- Definida entre dos conjuntos.
- A ⊆ B si todos los elementos de A están incluidos en B.

Diagrama de Venn

Son **esquemas gráficos** utilizados en teoría de conjuntos para **representar el contenido de diferentes conjuntos en simultáneo**.



Cada conjunto se representa con un círculo, dentro del cual se listan sus elementos.

- Tener en cuenta si un elemento pertenece a más de un conjunto a la vez.
- Representamos U con un rectángulo y colocamos dentro a los conjuntos.

Operaciones básicas

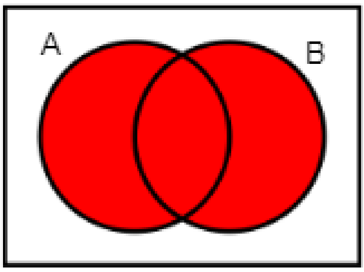
Unión. A ∪ B es un conjunto que contiene todos los elementos del conjunto A o del conjunto B.

A U B = { x : x ∈ A v x ∈ B }

Ejemplos para:

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = { 2, 4, 6, 8}
C = { 10, 20, 30, 40}

A U B = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
A U C = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 }
B U C = { 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 40 }



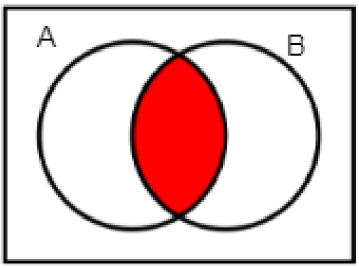
Intersección. A ∩ B es un conjunto que contiene todos los elementos comunes de A y B.

A ∩ B = { x : x ∈ A ∧ x ∈ B }

Ejemplos para:

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = { 2, 4, 6, 8}
C = { 10, 20, 30, 40}

A ∩ B = { 2, 4, 6, 8 }
A ∩ C = ∅
B ∩ C = ∅



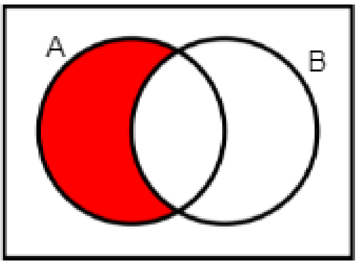
Diferencia. A-B es un conjunto que contiene los **elementos que están en A, excepto los que están en B**.

A - B = { x : x ∈ A ∧ x ∉ B }

Ejemplos para:

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
B = { 2, 4, 6, 8}
C = { 10, 20, 30, 40}

A - B = { 0, 1, 3, 5, 7, 9 }
A - C = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
B - C = { 2, 4, 6, 8 }



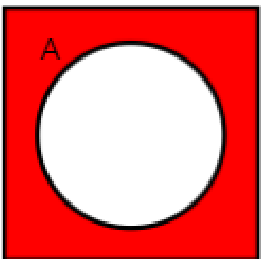
Complemento. A^C es un conjunto que contiene todos los elementos del conjunto Universal que no pertenecen a A.

A^c = { x : x ∈ U ∧ x ∉ A }

Ejemplos para:

A = { x : x ∈ R ∧ x + 2 = 14 }
B = { x : x ∈ R ∧ x2 + 2 ≥ 66 } }
C = ∅
D = U

$\mathbf{A^c}$ = { x : x ∈ R ∧ x + 2 ≠ 14 }
$\mathbf{B^c}$ = { x : x ∈ R ∧ x2 + 2 ≤ 66 }
$\mathbf{C^c}$ = U
$\mathbf{D^c}$ = ∅



Todas las operaciones entre conjuntos están definidas a partir de la lógica

A ∪ **B** = {x / x ∈ A ⋁ x ∈ B}

A ∩ **B** = {x / x ∈ A ⋀ x ∈ B}

A-B = {x / x ∈ A ⋀ x ∉ B} = {x / x ∈ A ⋀ ¬(x ∈ B)}

$\mathbf{A^C}$ = {x / x ∉ A}

Cardinalidad: |A| es el número de elementos que contiene el conjunto A

Ejemplos para:

A = { x : x ∈ R ∧ x + 2 = 14 } = { 12 }	|A| = 1
B = { 1, 2, 3, 4, 5 }	|B| = 5
C = ∅	|C| = 0
D = U	|D| = depende del universo que definamos (puede ser un número finito o infinito)

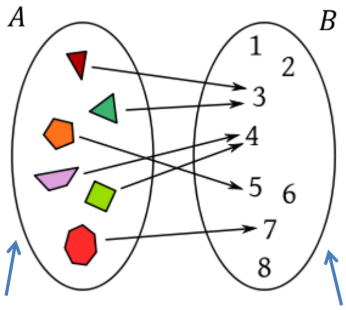
Leyes

Doble negación:	$A^{CC} = A$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencia:	$(A \cup A) = A$ $(A \cap A) = A$
de Morgan:	$(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C$ $(A \cap B \cap C)^C = A^C \cup B^C \cup C^C$
Equivalencia:	$A \cup (A^C \cap B) = A \cup B$
Contradicción:	$(A \cap A^C) = \varnothing$
De complemento:	$A \cup A^C = U$ $U^C = \varnothing$ $\varnothing^C = U$
De identidad:	$A \cup U = U$ $A \cap U = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup (A \cap B) = A$

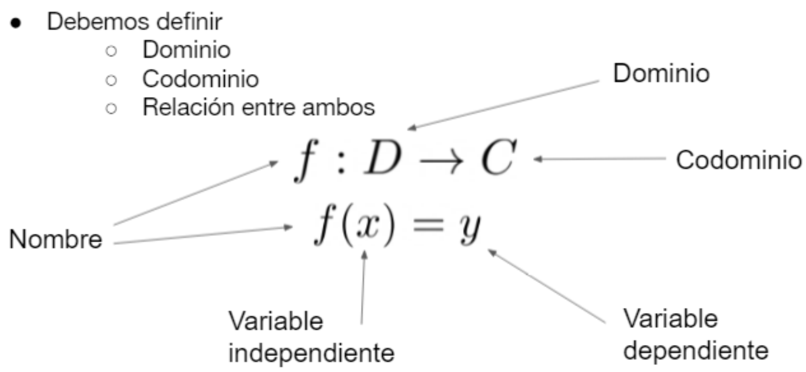
3. Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos:
Una función transforma de un conjunto origen (Dominio) a uno destino (Codominio)
Ejemplos:

- Área de un círculo
- Duración de un viaje



- ➔ Una función es una relación entre dos conjuntos (Dominio y Codominio).
- ➔ A cada elemento del Dominio le corresponde un único valor en el Codominio.
- ➔ El conjunto conformado por los valores alcanzados en el Codominio se denomina Imagen.
- ➔ Dominio no puede ser Ø
- ➔ Codominio no puede ser Ø
- ➔ Imagen ⊆ Codominio
- ➔ Para definir una función:



Ejemplos:

- $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- $g(x) = \ln x \quad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
- $h(x) = \frac{x-2}{x+1} \quad h:\ ? \to ?$

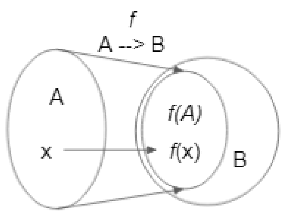
Sean A y B conjuntos no vacíos, y *f* una función, si para cada valor x ∈ A existe un sólo valor *f*(x) ∈ B, podemos decir que:

$f : A \to B$

Definimos el dominio de f:
Dom(*f*) = A

Definimos el codominio de f:
Cod(*f*) = B

La imagen de una función es el conjunto formado por todos los valores que efectivamente toma la función.



Para la función ***f* : A → B**, la imagen está definida como:
Im(*f*) = { y ∈ B | ∃ x ∈ A , f (x) = y }

La imagen siempre es un subconjunto del codominio: **Im(*f*) ⊆ Cod(*f*)**

Ejemplo:
Sea f: función para obtener el área de un círculo

- Variable independiente: radio
- Variable dependiente: área

Para cada valor del radio tenemos una única área:
f: A -> B
Dom(f) = {??}
Im(f) = {??}

Operaciones con funciones

Suma: $(f \pm g)(x) \ = \ f(x) \pm g(x)$

Producto: $(f.g)(x) \ = \ f(x).g(x)$

Cociente: $(f/g)(x) \ = \ f(x)/g(x)$ → Se deben excluir del dominio todos los x : g(x) = 0

Composición: $(f \circ g)(x) \ = \ f(g(x))$ → Para que la composición (g ∘ f) = g(f(x)) sea posible, se necesita que Im(f) ⊆ Dom(g). Luego g○f : Dom(f) → Codom(g)

Ejemplo:
Sea *f*(x) = x^2 , y *g*(x) = x-1:
Suma: (*f*±*g*)(x) = *f*(x)±*g*(x) =
Producto: (*f*.*g*)(x) = *f*(x).*g*(x) =
Cociente: (*f*/g)(x) = *f*(x)/*g*(x) =
Composición: (*f*○*g*)(x) = *f*(*g*(x)) =

Funciones polinómicas

Lineal: f(x) = ax + b
Cuadrática: f(x) = ax^2 + bx + c
Polinómica: f(x) = anxn + an-1xn-1 + … +a1x1 + a0x0

Elementos de análisis en una función

- **Raíces o ceros**
- **Ordenada al origen**
- **Intervalos de crecimiento y decrecimiento**
- **Conjuntos de positividad y negatividad**
- **Inyectividad, suryectividad y biyectividad**

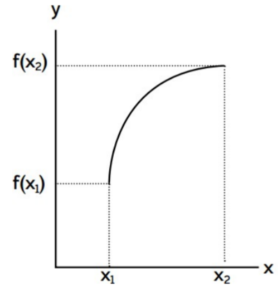
Raíz

Es la intersección entre la curva y el eje de las abscisas (eje x): **f(x) = 0**
Son puntos de la forma (x;0). Las hallamos igualando la función a cero. **C^0(f)= {x : x ∊ Dom(f), f(x) = 0}**

Ordenada al origen

El punto de intersección entre la función y el eje de las ordenadas: **y = f(0)**
Es un punto de la forma (0;y). Ordenada al origen = **{y : y ∊ Im(f), y = f(0)}**, Solo existe si **0 ∊ Dom(f), y si existe tiene un solo elemento.**

Crecimiento y decrecimiento



Creciente: Una función es creciente en un intervalo si para cualquier par de puntos se verifica que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente: Una función es decreciente en un intervalo si para cualquier par de puntos se verifica que $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Conjuntos de positividad y negatividad

Positividad: Es el conjunto de valores del dominio cuyas **imágenes son positivas**.

$$C^+(f)=\{x : x \in Dom(f),\ f(x) > 0\}$$

Negatividad: Es el conjunto de valores del dominio cuyas **imágenes son negativas**.

$$C^-(f)=\{x : x \in Dom(f),\ f(x) < 0\}$$

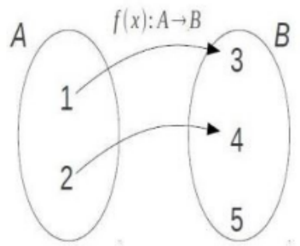
Inyectividad, Suryectividad y Biyectividad

***f* es inyectiva** ⇔ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

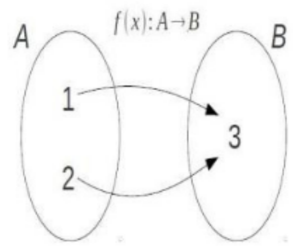
***f* es suryectiva** ⇔ $y \in$ Codominio, $\exists\, x \in$ Dominio tal que $y = f(x)$ *(La imagen es igual al Codominio)*

***f* es biyectiva** ⇔ *f* es inyectiva y *f* es suryectiva

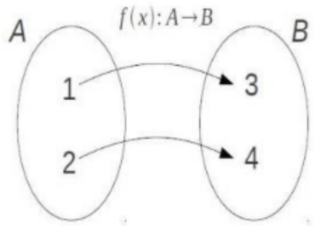
Función inyectiva no suryectiva.



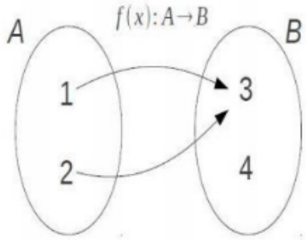
Función suryectiva no inyectiva.



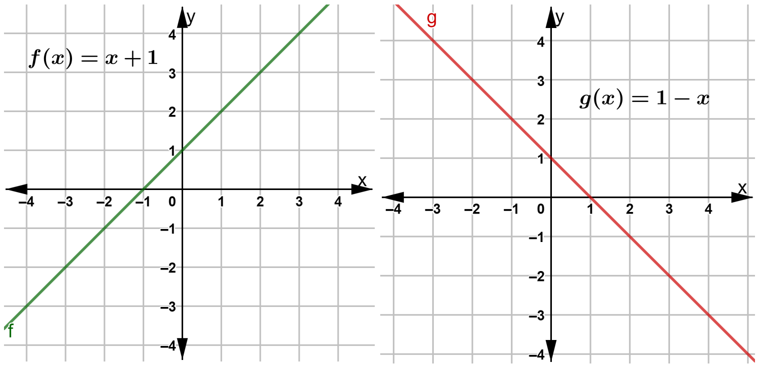
Función biyectiva (inyectiva y suryectiva).



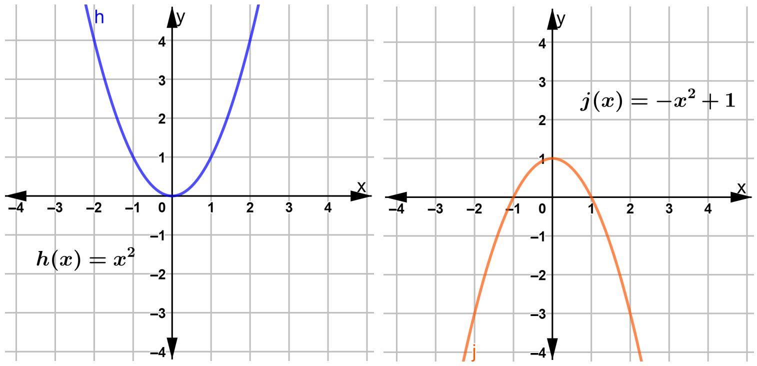
Función no inyectiva y no suryectiva.



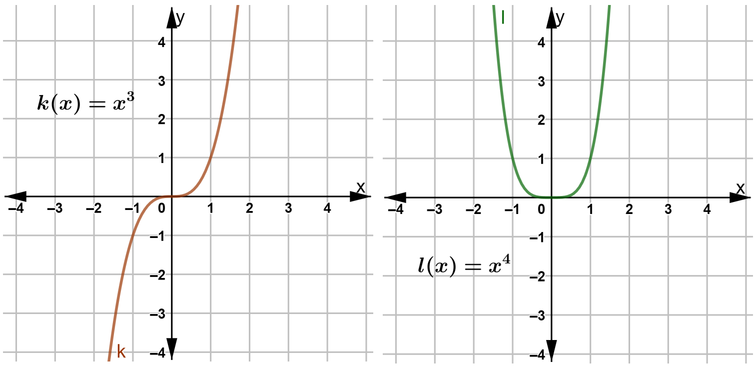
Funciones lineales



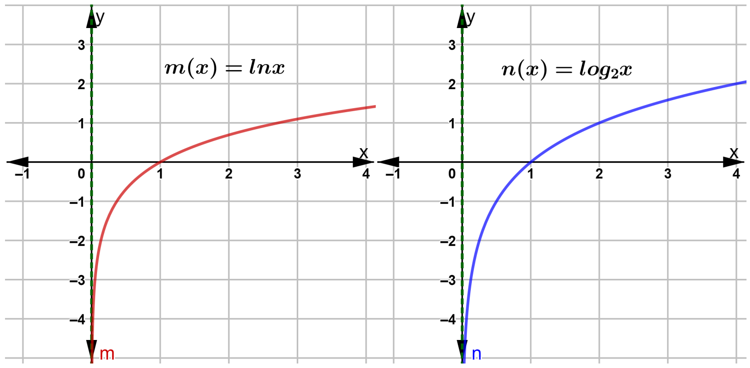
Funciones cuadráticas



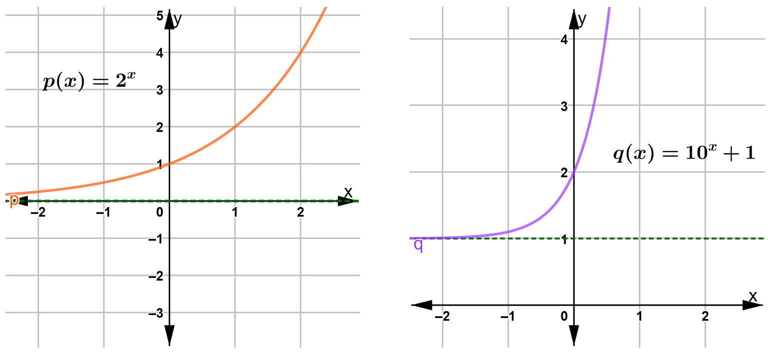
Funciones polinómicas de mayor orden



Funciones logarítmicas



Funciones exponenciales



4. Conteo

Se puede contar todo, siempre y cuando se puedan distinguir los elementos del conjunto a contar.

Las técnicas de conteo nos permiten contar combinaciones de elementos de uno o más conjuntos que cumplen con ciertos criterios.

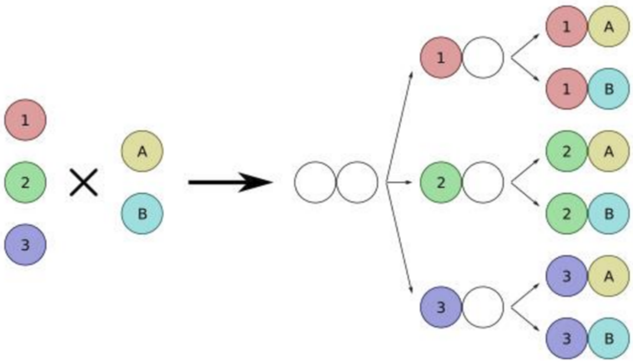
Es importante que identifiquemos bien:

- Qué **elementos** queremos combinar
- Si importa o no el **orden** de la combinación de elementos
- Si pueden o no **repetirse** los elementos

Principios fundamentales

Producto

Si una operación se puede hacer de n formas, y cada una de m maneras distintas, se dice que se puede llevar a cabo de n x m formas distintas.



Se desea conocer el número de chapas patentes que se pueden generar con 2 letras mayúsculas, seguidas de 3 números, y por último otras 3 letras.

10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
27 letras mayúsculas (A, B, C, D, E, F, G, H, I, …, X, Y, Z)

27x27x10x10x10x27x27 = 531 441 000

Adición

Si una operación se puede llevar a cabo en n o m formas distintas, entonces el evento se puede realizar de n+m maneras.

Ejemplo: Juan tiene que ir a un casamiento. Puede elegir vestirse de etiqueta o “elegante sport”. Tiene 2 trajes de etiqueta y 5 conjuntos “elegante sport”. ¿Cuántas opciones de vestimenta tiene Juan?

|Etiqueta| + |Elegante Sport| = 2 + 5 = 7

Permutaciones SIN repetición

Las permutaciones son el número de **formas distintas** en que se puede **ordenar (permutar) los elementos de un conjunto.**

En términos de conteo, se define como el número de formas distintas en las que se puede contar los elementos de un conjunto.

Generalmente lo usamos cuando queremos saber de cuántas maneras distintas se puede ordenar una serie de elementos.

- Los elementos **no se repiten (sin repetición!)**
- **Importa el orden en el que se los elige** (porque una vez elegido, no vuelve)

Ejemplo: Un grupo de 5 personas debe conformar una lista de candidatos para cubrir 5 cargos diferentes. Si cada persona puede tomar un solo lugar, ¿cuántas listas diferentes pueden armarse?

5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Si un conjunto tiene n elementos, el número de permutaciones posibles es n!

P = n (n-1) (n-2) … 1 = n!

0! = 1

1! = 1

n! = n(n-1)(n-2)...(2)1 ∀ n > 1

Ejemplo: 5 personas quieren conformar una lista de 3 candidatos. $5x4x3 = \frac{5x4x3x2x1}{2x1} = 60 \equiv \frac{5!}{(5-3)!}$

Si un conjunto tiene n elementos, y se quieren tomar r, el número de permutaciones posibles es:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutaciones CON repetición

¿Qué sucede cuando las repeticiones son combinaciones válidas?

- Los elementos **se pueden repetir**
- **Importa el orden**

Permutaciones con repetición:

Si un conjunto tiene **n** elementos, y se quieren ocupar **r** lugares con posibilidad de repetir. La cantidad de permutaciones es

$$n^r$$

Permutaciones circular

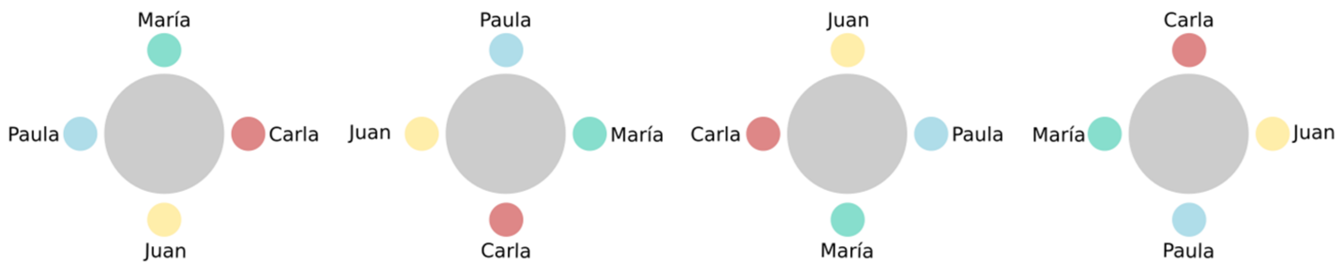
Son permutaciones en las que ordenamos los elementos en círculos

➔ Nos interesa el orden relativo de los elementos (quién está antes/después de quién) y no su ubicación (las posiciones en el círculo no están indexadas).
  - Los elementos no se repiten
  - Importa el orden relativo
  - Los elementos se ordenan en círculo

Ejemplo: ¿De cuántas formas se pueden sentar Paula, Juan, María y Carla alrededor de una mesa circular?

Importante! Las siguientes permutaciones son todas iguales entre sí, porque la posición relativa de los amigos es la misma para todos los casos, así que hay que considerar solamente una de estas por caso!

Solución: Lo que hacemos es "fijar" uno de los amigos, y contar de cuántas formas se pueden ordenar los otros tres amigos restantes.



Por ejemplo: Si "fijamos" a Carla, nos queda ordenar a Juan, Paula y María en los 3 lugares restantes.

- Los elementos no se repiten
- Ahora sí nos importa el orden

Nos quedan 3x2x1 = 3! Formas distintas de ordenarlos.

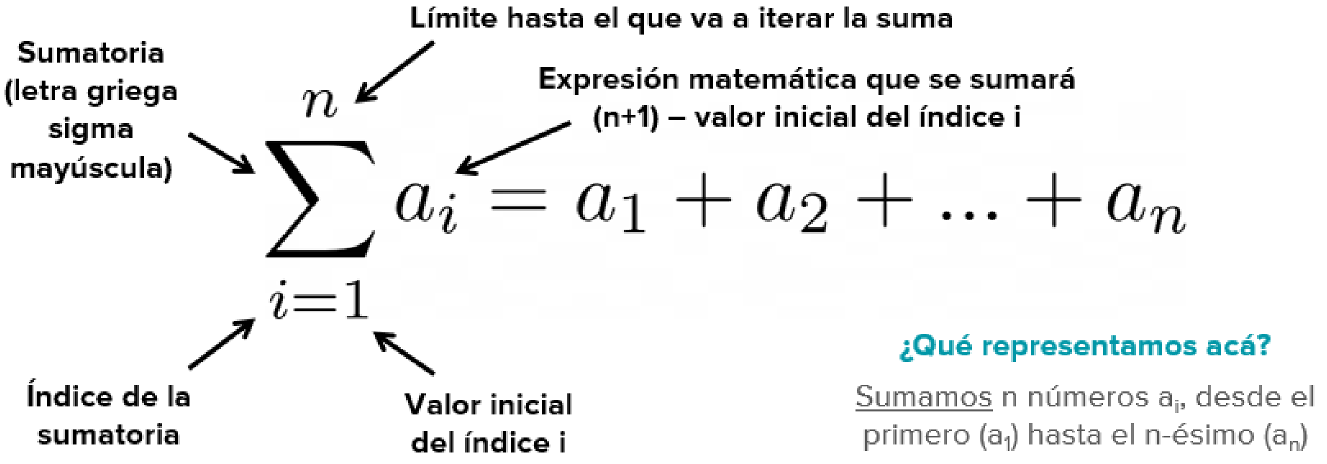
Combinaciones

Una combinación es un **subconjunto** de elementos tomados de un conjunto, donde **el orden de sus elementos no importa.**
El número de subconjuntos de **k** elementos tomados a partir de un conjunto con **n** elementos se calcula usando el **número combinatorio de n en k**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

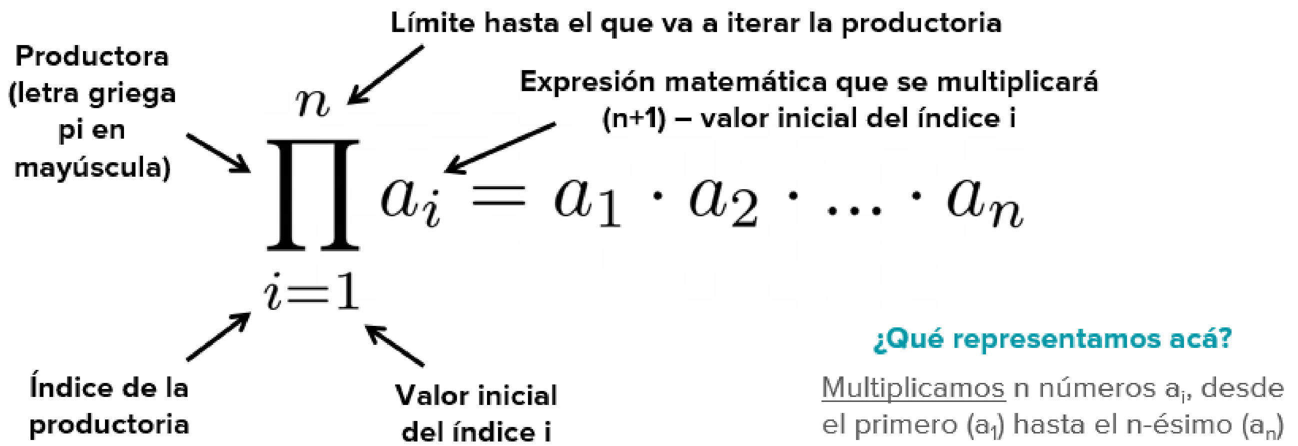
Sumatorias

La **sumatoria** es una **notación simbólica** que nos permite representar **sumas de muchos sumandos**, o incluso infinitos, **sin tener que usar puntos suspensivos**!



Productorias

La **productoria** es una **notación simbólica** que nos permite representar **productos de muchos factores**, incluso infinitos, **sin tener que usar puntos suspensivos**!



5. Probabilidad

Experimentos aleatorios

Un experimento se considera aleatorio si los resultados posibles son conocidos, pero no hay forma de predecir cuál de los posibles resultados ocurrirá.

Ejemplos:

- Tirar un dado y observar el resultado.
- Observar si mañana lloverá.
- Poner en una bolsa opaca 100 papeles numerados del 0 al 99. Retirar un papel y observar el número.

El estudio de probabilidades nos permite analizar los posibles resultados de experimentos aleatorios.
Es importante que identificamos bien:

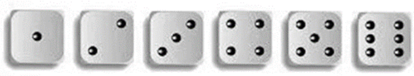
- ¿Cuál es el experimento aleatorio?
- ¿Cuál es el espacio muestral (los posibles resultados)?
- ¿La probabilidad de qué suceso preciso calcular?

Espacio muestral

Si realizamos un experimento aleatorio, llamaremos espacio muestral del experimento al **conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento**. Notar que es un conjunto.

Suceso Elemental

Se denomina a cada elemento que forma parte del espacio muestral.



Suceso o evento aleatorio

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Es uno o varios elementos del espacio muestral.

Operaciones entre sucesos

Si realizamos un experimento aleatorio y consideramos varios sucesos asociados a dicho experimento, podemos realizar varias operaciones entre ellos.

Las más importantes son:

1. **Igualdad de sucesos**: Dos sucesos A y B son iguales si están compuestos por los mismos elementos. Lo expresaremos por $A = B$.
2. **Intersección de sucesos**: Llamaremos suceso intersección de los sucesos A y B, y lo representaremos por $A \cap B$, al suceso "ocurren A y B a la vez".
3. **Unión de sucesos**: Llamaremos unión de los sucesos A y B, y lo representaremos por $A \cup B$, al suceso "ocurren A o B".

Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos, todos igualmente probables, entonces para la probabilidad de ocurrencia de un proceso A es:

$$P(A) = \frac{\#\text{Casos favorables de A}}{\#\text{Casos posibles}}$$

Propiedad condicional

Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y B otro suceso que sabemos que ha ocurrido:
Llamamos probabilidad de A condicionada a B y lo expresamos como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Independencia

Cuando la ocurrencia (o no) de un suceso no influye en la probabilidad de que otro suceso ocurra, decimos que estos eventos son independientes. Si la ocurrencia de un suceso B, no modifica la ocurrencia de A:

$$P(A/B) = P(A)$$

Entonces se dice que A y B son **Independientes**. Si A y B son independientes:

$$P(A/B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Experimentos con reposición y sin reposición

- **Con reposición:** El mismo suceso elemental puede ocurrir varias veces seguidas, el espacio muestral no varía.
- **Sin reposición:** El mismo suceso elemental no puede ocurrir varias veces seguidas, ya que dicho suceso se quita del espacio muestral.

6. Algebra lineal

Es una rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

Es ampliamente utilizada en áreas desde la computación gráfica hasta el modelado computacional.

Vectores

Un vector es una tupla de n números. El conjunto de todos los vectores reales de dimensión **n** se expresa como $\mathbb{R}^n$

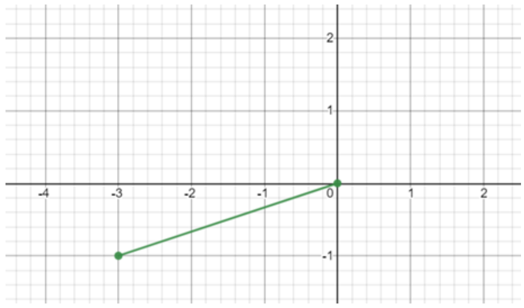
Ejemplos:

v = (0, -1, 3.5) $\in \mathbb{R}^3$

w = (1, 2, 3, 4, 5, 6) $\in \mathbb{R}^6$

Podemos representar gráficamente un vector en el espacio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: **v = (-3, -1)** **$w(n) = w_n$**



Podemos referirnos a cada elemento de un vector teniendo en cuenta su posición. La primer posición siempre es la número **1**.

Operaciones con vectores

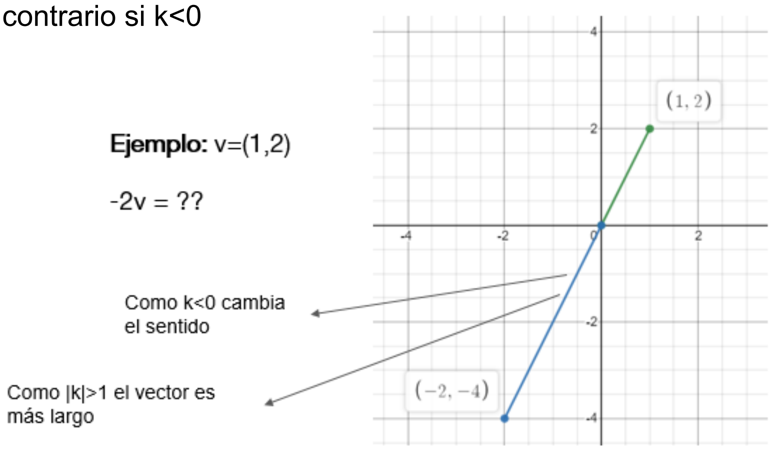
Producto por un escalar

Cuando multiplicamos un vector por una constante, debemos multiplicar cada uno de sus elementos por esa constante.

El resultado es un vector

- De igual dimensión
- Con la misma dirección
- El sentido del vector resultante será el mismo que el vector original si k>0, o será el sentido contrario si k<0

$$k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$



Suma

La suma de los vectores u y v es un nuevo vector w

- Cada elemento wi es la suma de los elementos de u_i y v_i
- Para que la suma sea posible, los vectores deben tener la misma dimensión

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\\\vdots\\u_n+v_n\end{bmatrix}\qquad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\u_3-v_3\\\vdots\\u_n-v_n\end{bmatrix}$$

Ejemplo:

u = (3 , 1), v = (1 , 2)

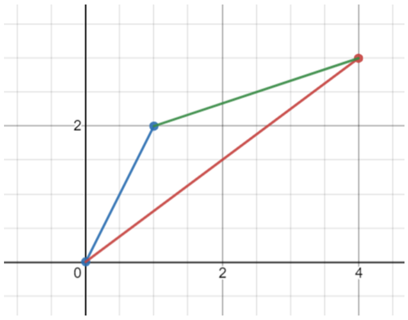
Norma

La norma euclídea de un vector determina su longitud, para un vector v∈ ℝn, se calcula de la siguiente manera:

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+\cdots+v_n{}^2}$$

Ejemplo: v = (1, 2, 0, 3, 1, -3, -1)
|v| = √ $[1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2 + 1^2 + (-3)^2 + (-1)^2]$
|v| = √ [1 + 4 + 0 + 9 + 1 + 9 + 1]
|v| = 5

Norma (Propiedad)



$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$$

La igualdad se da cuando los vectores tienen la misma dirección (son paralelos)

Producto interno (producto escalar)

El resultado del producto interno de dos vectores es un valor real.

- Es la sumatoria del producto miembro a miembro de los elementos de los vectores
- Para que sea posible, los vectores deben tener la misma dimensión

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\underbrace{\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_n\end{bmatrix}}_{1 \times N}\underbrace{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}}_{N \times 1}=\underbrace{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}_{1 \times 1}$$

Ejemplo 1:
u = (2, 4, 9)   v = (1, -2)
u.v = No se puede, u y v no tienen la misma dimensión
Ejemplo 2
u = (2, 4, 9)   v = (1, -2, 0)
u.v = 2 x 1 + 4 x (-2) + 9 x 0 = -6

Ángulo entre vectores

Propiedad del producto escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos\theta$ ángulo formado entre los dos vectores

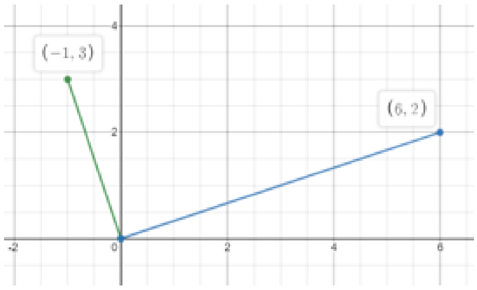
Ejemplo: ¿Cuál es el ángulo formado entre los vectores (-1,3) y (6,2)?

-1 x 6 + 3 x 2 = √[(-1)2 + 32] √[62 + 22] cosθ

0 = √10 √40 cosθ

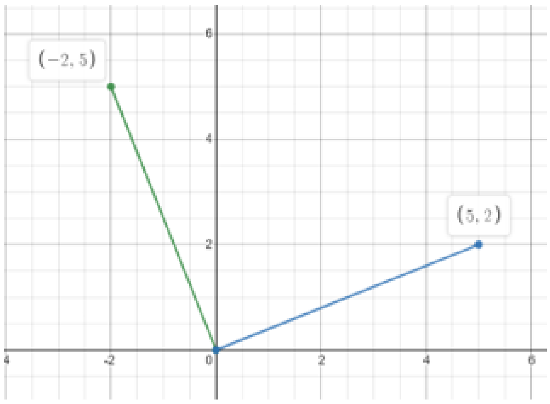
0 = cosθ

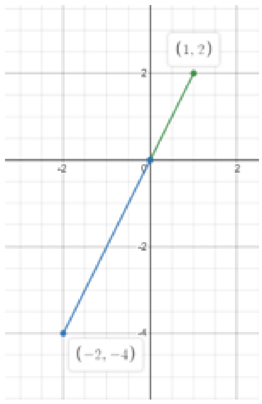
θ = 90º



Los vectores son ortogonales

- Dos vectores son ortogonales si el ángulo que forman es de 90º
- Dos vectores son paralelos si el ángulo que forman es de 0º o de 180º





Matrices

Una matriz es arreglo bidimensional de **nxm** números. Donde siempre se indica la cantidad de filas (*n*) y luego la cantidad de columnas (*m*).

El conjunto de todas las matrices de dimensión **nxm** se expresa como $\mathbb{R}^{nxm}$

$$a = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \dots a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \dots a_{2,m} \\ \dots & & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \dots a_{n,m} \end{pmatrix} \in R^{nxm}$$

Podemos referirnos a cada elemento de una matriz teniendo en cuenta su posición.

$$\text{Ejemplo: } M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \mathbf{-2} & 7 \end{pmatrix} \quad M(2,1) = -2$$

Operaciones con matrices

Suma

El resultado de la suma de dos matrices es una matriz.

- Es la suma elemento a elemento de las matrices
- Para que sea posible, las matrices deben tener **las mismas dimensiones**

Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M + N = \begin{pmatrix} 1+3 & 4+5 \\ -2+0 & 7+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

Cuando multiplicamos una matriz por un escalar, debemos multiplicar cada uno de sus elementos por ese valor.

El resultado es una matriz de iguales dimensiones

Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad 3\,M = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$$

Producto entre matrices

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots a_{1m}b_{m2} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots a_{2m}b_{m2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

El número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B

El resultado de multiplicar una matriz de $A_{n\times m}$ por una matriz $B_{m\times p}$ es una matriz $C_{n\times p}$

La matriz resultado tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B

$$A_{nxm} * B_{mxp} = C_{nxp}$$

Cada elemento C_{ij} de C lo calculamos haciendo el producto escalar entre la fila i de A y la columna j de B
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A * B = X No se puede. La cantidad de columnas de A es distinto a la cantidad de filas de B

B * A = ✓

$$B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad C_{3x2} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{pmatrix}$$

Propiedades

- Conmutativa respecto de la suma: A + B = B + A
- Asociativa respecto de la suma: (A + B) + C = A + (B + C)
- Distributiva:
  - k (A + B) = kA + kB
  - (k + r) A = kA + rA
  - A * (B + C) = A * B + A * C
- No hay conmutatividad respecto al producto: A * B ≠ B * A

Transposición de matrices

La trasposición de una matriz A es una operación que consiste en colocar las filas de A en forma de columna, respetando su orden. Se obtiene de esta manera otra matriz que se llamará la traspuesta de A y se representará por $\mathbf{A^t}$.

Ejemplo:

$$M_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^t_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa

La inversa de una matriz M **cuadrada** se denota M^{-1} y cumple que:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$M * M^{-1} = M^{-1} * M = I$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de 0

Sistema de ecuaciones

Podemos usar matrices para resolver

sistemas de ecuaciones

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$A^{-1}A\,x = A^{-1}\,b$$
$$I\,x = A^{-1}\,b$$
$$x = A^{-1}\,b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ad - bc = -5

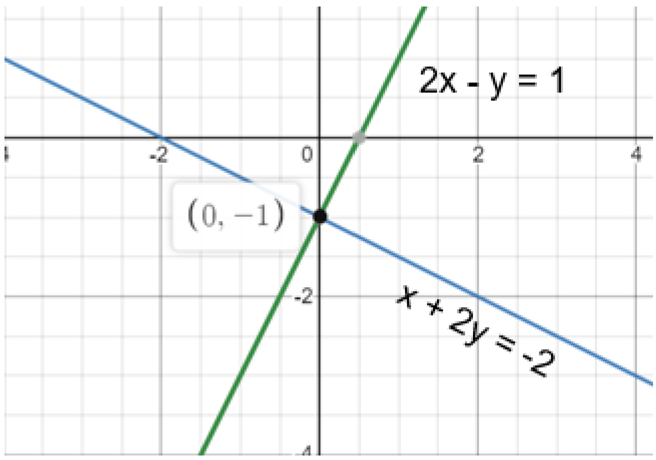
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/-5 & -2/-5 \\ -2/-5 & 1/-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

El sistema de ecuaciones es válido para (x,y) = (0,-1)

Gráficamente podemos ver que ambas funciones se intersecan en el punto (x , y) = (0 , -1)



7. Sistemas numéricos

Son formas de **representar** números con una codificación basada en los elementos de un conjunto, llamados **dígitos**. La cardinalidad de dicho conjunto se denomina **base**.

La base de un sistema nos da la noción de “*unidad*, *decena*, *centena*, …”

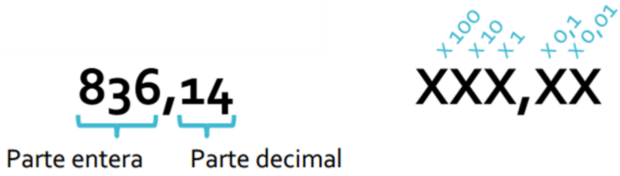
Estos conceptos se basan en las **potencias de la base**, es la forma en que se codifican los números usando **notación posicional**.

Sistemas decimal (base 10)

Las cantidades se representan mediante los 10 dígitos tradicionales: **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**

Estas cifras permiten expresar cantidades hasta el 9.

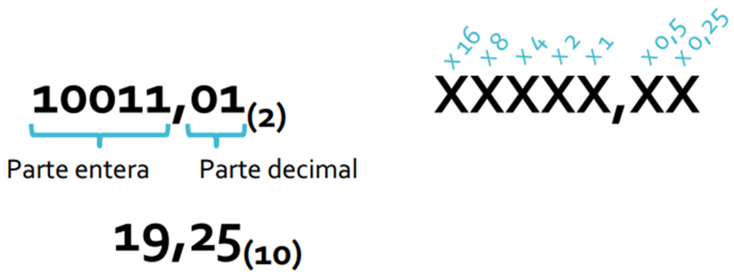
Para expresar números mayores a este valor, se utiliza la **representación posicional**:



$$836,14 = 8 \times 100 + 3 \times 10 + 6 \times 1 + 1 \times 0.1 + 4 \times 0.01$$
$$836,14 = 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

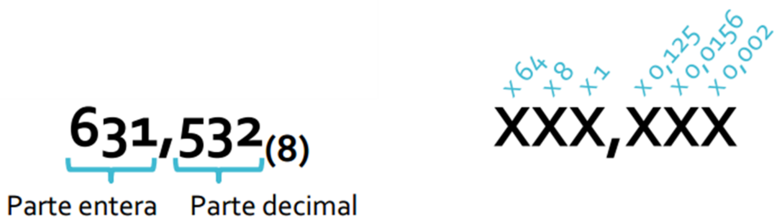
Sistemas binario (base 2)

Las cantidades se representan mediante 2 dígitos: **{0, 1}**



Sistemas octal (base 8)

Las cantidades se representan mediante 8 dígitos: **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**



Sistemas hexadecimal (base 16)

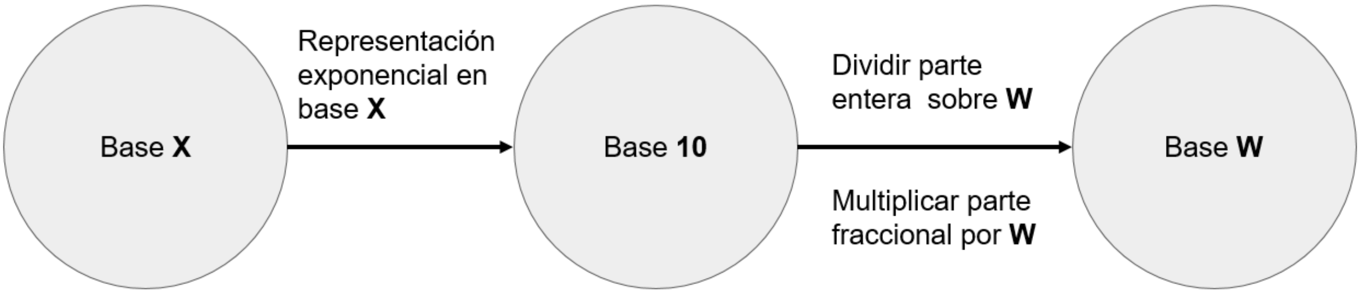
Las cantidades se representan mediante 16 dígitos: **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}**

$$\underbrace{631}_{\text{Parte entera}},\underbrace{532}_{\text{Parte decimal}}{}_{(16)}$$

$\times 16^2$ $\times 16^1$ $\times 16^0$ $\times 16^{-1}$ $\times 16^{-2}$ $\times 16^{-3}$

XXX,XXX

Cambio de base - caso general



Decimal a binario

$28,37_{(10)}$

Parte entera $11100_{(2)}$

$28 \div 2 = 14$, resto 0
$14 \div 2 = 7$, resto 0
$7 \div 2 = 3$, resto 1
$3 \div 2 = 1$, resto 1
1

Parte decimal $01011_{(2)}$

$0,37 \times 2 = 0,74$
$0,74 \times 2 = 1,48$
$0,48 \times 2 = 0,96$
$0,96 \times 2 = 1,92$
$0,92 \times 2 = 1,84$

Se puede seguir haciendo para aproximar mejor

Octal a binario

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$631,532_{(8)}$

6	3	1	,	5	3	2
110	011	001		101	011	010

$110011001,101011010_{(2)}$

Binario a octal

011010100000111101011010.0001101$_{(2)}$

Parte entera

011	010	100	000	111	101	011	010
3	2	4	0	7	5	3	2

Parte decimal

000	110	100
0	6	4

32407532,064$_{(8)}$

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111