

# Obliczenia Naukowe lista 5 - Sprawozdanie

Joel Kojma

22 stycznia 2026

## Pomysł na implementację eliminacji Gaussa dla macierzy rzadkich

1. Będziemy przechowywać macierz w postaci listy wektorów. Każdy wektor będzie odpowiadał jednemu wierszowi macierzy i będzie zawierał wartości od pierwszego niezerowego elementu w wierszu do ostatniego niezerowego elementu w wierszu. W ten sposób przechowujemy tylko niezerowe elementy macierzy. Dodatkowo będziemy używać tablicy offsetów (przesunięć), która mówi ile początkowych zer jest w każdym wierszu. Również będziemy mieli wektor długości wierszy - przechowuje długość tablicy.

## Złożoność pamięciowa

1. Tablice `row_offsets` i `row_lengths` służące do przeliczania indeksów mają rozmiar  $n$ .
2. W każdym wierszu pamiętamy elementy macierzy  $A_k$ , których jest dokładnie  $l$ , z macierzy  $C_k$  pamiętamy aż do elementu niezerowego na przekątnej, więc średnio jest to  $l/2$  elementów na wiersz. W macierzy  $B_k$  pamiętamy dokładnie średnio na wiersz  $\left(\frac{2l-1}{l^2}\right) \simeq \frac{2}{l}$  elementów.

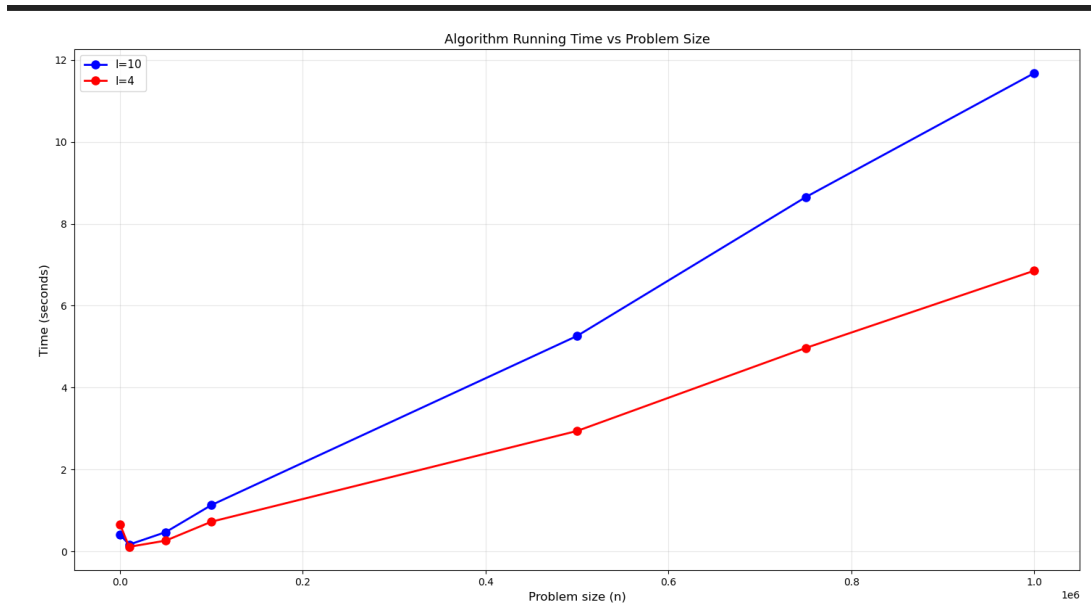
Zatem złożoność pamięciowa naszej implementacji eliminacji Gaussa wynosi:  $O(n \cdot l)$ , więc jeśli  $l$  jest stałe, to złożoność pamięciowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy  $n$ .

## Złożoność obliczeniowa

1. Eliminacja Gaussa: Doprowadzenie do postaci macierzy trójkątnej górnej:
  - Przechodzimy po wszystkich kolumnach macierzy ( $n$  kolumn)
  - Dla każdej kolumny przechodzimy przez wszystkie wiersze poniżej przekątnej (z własności macierzy jest ich nie więcej niż  $l$ ). W każdym wierszu wykonujemy eliminację gaussa. Mnożymy nie więcej niż  $2l$  razy, ponieważ nie musimy mnożyć przez elementy równe zero ponieważ nic nie zmieniają.
  - Zatem złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa wynosi  $O(n \cdot l \cdot 2l) = O(n \cdot l^2)$ , więc jeśli  $l$  jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy  $n$ .
  - Dla wariantu z częściowym wyborem elementu głównego, dodatkowo w każdej kolumnie musimy znaleźć maksymalny element w kolumnie spośród nie więcej niż  $l$  elementów, lecz dla stałego  $l$  złożoność dalej pozostaje  $O(n)$  liniowa.
2. Znajdzenie rozwiązania wektora  $x$  z macierzy trójkątnej górnej:
  - W każdym wierszu wykonujemy sumę nie więcej niż  $3l$  elementów.
  - Zatem złożoność obliczeniowa wynosi  $O(n \cdot 3l) = O(n \cdot l)$ , więc jeśli  $l$  jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy  $n$ .

# Testy czasu działania

Obliczoną złożoność czasową potwierdzają testy czasu działania programu.



Rysunek 1: Porównanie czasu działania algorytmu eliminacji Gaussa dla macierzy A dla  $l=4$  oraz  $l=10$  w zależności od rozmiaru macierzy  $n$ .

## Obserwacje i wnioski

Widzimy, że czas działania algorytmu rośnie liniowo wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy  $n$ . Dla większej wartości  $l$  czas działania jest większy, co również zgadza się z wyliczoną złożonością czasową  $O(n \cdot l^2)$ .

**Wniosek:** Im gęstsza macierz (większe  $l$ ), tym większa złożoność czasowa i pamięciowa, a co za tym idzie dłuższy czas działania algorytmu.

## Porównanie błęd obliczeń gdy wykonujemy eliminację Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego

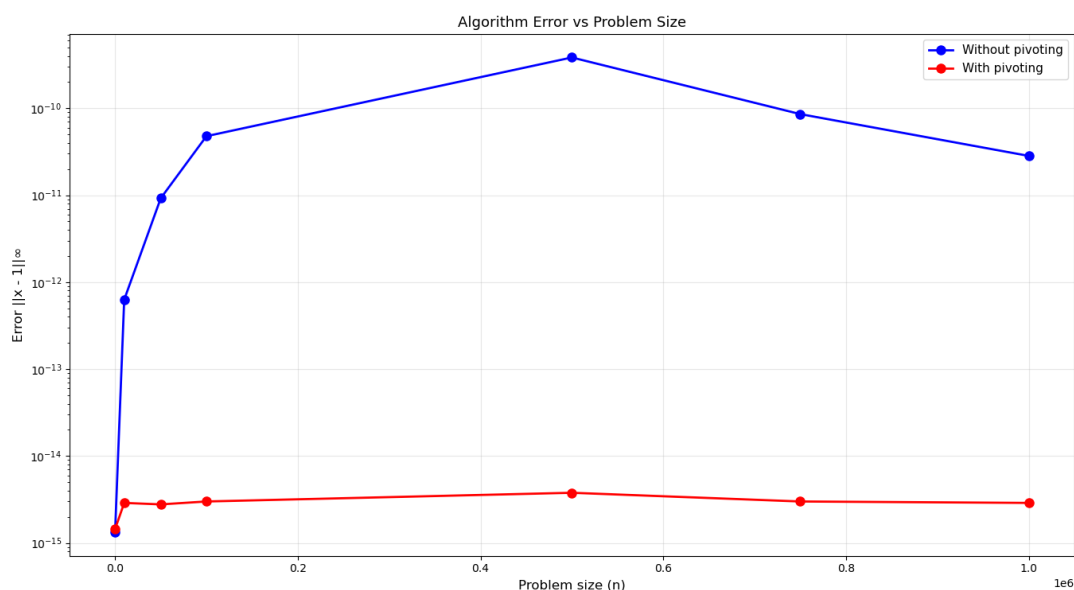
Gdy wykonujemy eliminację Gaussa bez częściowego wyboru elementu głównego, to możemy trafić na element przekątnej bliski zeru, co powoduje, że dzielimy przez bardzo małą liczbę i tracimy precyzję obliczeń. W efekcie błąd obliczeń rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy  $n$ . Aby temu zapobiec, stosujemy częściowy wybór elementu głównego, czyli w każdej kolumnie przed eliminacją szukamy największego elementu i zamieniamy wiersze tak, aby ten element znalazł się na przekątnej. W ten sposób unikamy dzielenia przez bardzo małe liczby i błąd obliczeń pozostaje niski nawet dla dużych rozmiarów macierzy  $n$ .

Na wykresie poniżej widzimy, że dla  $n = 16$  błąd jest bardzo podobny, natomiast dla większych  $n$  błąd zaczyna rosnąć bardzo szybko.

Dla  $n = 10000$  błąd bez częściowego wyboru elementu głównego jest 1000 razy większy niż z częściowym wyborem elementu głównego. Dla jeszcze większych  $n$  gdy nie robimy częściowego wyboru elementu głównego błąd rośnie aż do rzędu  $10^{-10}$ . Dzięki wyborowi elementu głównego błąd możemy przybliżyć funkcją stałą równą około  $3 \times 10^{-15}$ .

### Wniosek

Przy obliczaniu rozwiązań układów równań metodą eliminacji Gaussa, warto stosować częściowy wybór elementu głównego, ponieważ pozwala to zachować dużo lepszą precyzję obliczeń, a co za tym idzie dużo bardziej precyzyjny wynik.



Rysunek 2: Porównanie błęd obliczeń dla algorytmu eliminacji Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego.