Obliczenia Naukowe lista 5 - Sprawozdanie

Joel Kojma

22 stycznia 2026

Pomysł na implementację eliminacji Gaussa dla macierzy rzadkich

1. Będziemy przechowywać macierz w postaci listy wektorów. Każdy wektor będzie odpowiadał jednemu wierszowi macierzy i będzie zawierał wartości od pierwszego niezerowego elementu w wierszu do ostatniego niezerowego elementu w wierszu. W ten sposób przechowujemy tylko niezerowe elementy macierzy. Dodatkowo będziemy używać tablicy offsetów (przesunięć), która mówi ile początkowych zer jest w każdym wierszu. Również będziemy mieli wektor długości wierszy - przechowuje długość tablicy.

Złożoność pamięciowa

1. Tablice `row_offsets` i `row_lengths` służące do przeliczania indeksów mają rozmiar n.
2. W każdym wierszu pamiętamy elementy macierzy A_k, których jest dokładnie l, z macierzy C_k pamiętamy aż do elementu niezerowego na przekątnej, więc średnio jest to $l/2$ elementów na wiersz. W macierzy B_k pamiętamy dokładnie średnio na wiersz $\left(\frac{2l-1}{l^2}\right) \simeq \frac{2}{l}$ elementów.

   Zatem złożoność pamięciowa naszej implementacji eliminacji Gaussa wynosi: $O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność pamięciowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.

Zmiany w złożoności pamięciowej!!!

Dla pierwszego rzędu B_k musimy zaalokować miejsce na aż do $3l$ elementów, natomiast w pozostałych miejscach potrzebujemy $2l+1$ elementów. Jest to spowodowane tym, że gdy zamieniamy wiersze i wykonujemy eliminację gaussa, to potrzebujemy aktualizować, także te "zerowe"elementy. Nie ma to jednak wpływu na złożoność pamięciową, która dalej pozostaje $O(n \cdot l)$.

Złożoność obliczeniowa

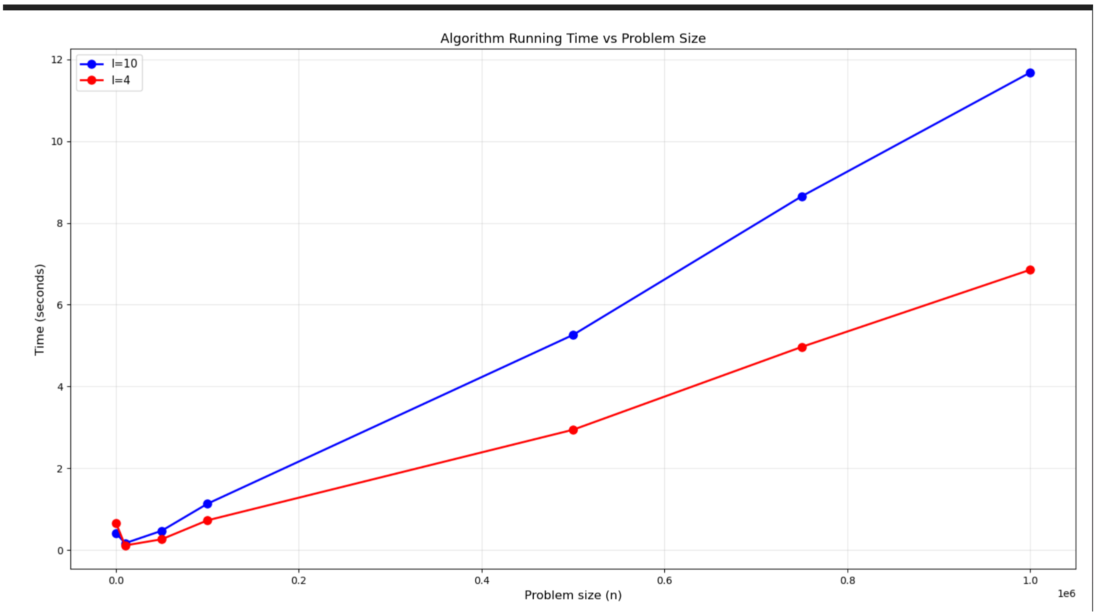
1. Eliminacja Gaussa: Doprowadzenie do postaci macierzy trójkątnej górnej:
   - Przechodzimy po wszystkich kolumnach macierzy (n kolumn)
   - Dla każdej kolumny przechodzimy przez wszystkie wiersze poniżej przekątnej (z własności macierzy jest ich nie więcej niż l). W każdym wierszu wykonujemy eliminację gaussa. Mnożymy nie więcej niż $2l$ razy, ponieważ nie musimy mnożyć przez elementy równe zero ponieważ nic nie zmieniają.
   - Zatem złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa wynosi $O(n \cdot l \cdot 2l) = O(n \cdot l^2)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.

- Dla wariantu z częściowym wyborem elementu głównego, dodatkowo w każdej kolumnie musimy znaleźć maksymalny element w kolumnie spośród nie więcej niż l elementów, lecz dla stałego l złożoność dalej pozostaje $O(n)$ liniowa.

2. Znalezienie rozwiązania wektora x z macierzy trójkątnej górnej:
    - W każdym wierszu wykonujemy sumę nie więcej niż $3l$ elementów.
    - Zatem złożoność obliczeniowa wynosi $O(n \cdot 3l) = O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.

Testy czasu działania

Obliczoną złożoność czasową potwierdzają testy czasu działania programu.



Rysunek 1: Porównanie czasu działania algorytmu eliminacji Gaussa dla macierzy A dla l=4 oraz l=10 w zależności od rozmiaru macierzy n.

Obserwacje i wnioski

Widzimy, że czas działania algorytmu rośnie liniowo wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy n. Dla większej wartości l czas działania jest większy, co również zgadza się z wyliczoną złożonością czasową $O(n \cdot l^2)$.

Wniosek: Im gęstsza macierz (większe l), tym większa złożoność czasowa i pamięciowa, a co za tym idzie dłuższy czas działania algorytmu.

Porównanie błędu obliczeń gdy wykonujemy eliminację Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego

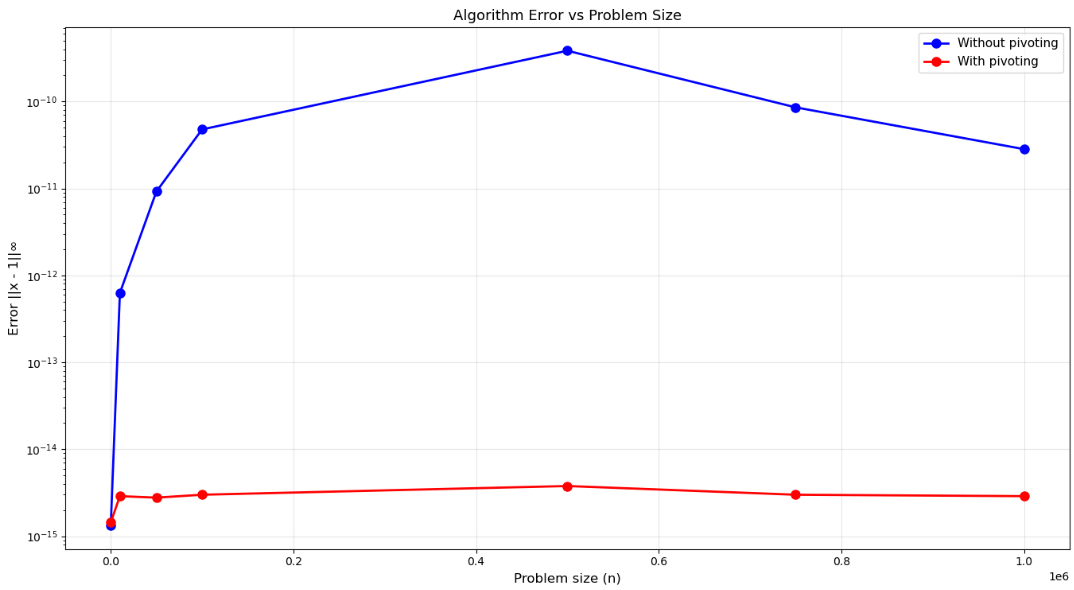
Gdy wykonujemy eliminację Gaussa bez częściowego wyboru elementu głównego, to możemy trafić na element przekątnej bliski zeru, co powoduje, że dzielimy przez bardzo małą liczbę i tracimy precyzję obliczeń. W efekcie błąd obliczeń rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy n. Aby temu zapobiec, stosujemy częściowy wybór elementu głównego, czyli w każdej kolumnie przed eliminacją szukamy największego elementu i zamieniamy wiersze tak, aby ten element znalazł się na przekątnej. W ten sposób unikamy dzielenia przez bardzo małe liczby i błąd obliczeń pozostaje niski nawet dla dużych rozmiarów macierzy n.

Na wykresie poniżej widzimy, że dla $n = 16$ błąd jest bardzo podobny, natomiast dla większych n błąd zaczyna rosnąć bardzo szybko.

Dla $n = 10000$ błąd bez częściowego wyboru elementu głównego jest 1000 razy większy niż z częściowym wyborem elementu głównego. Dla jeszcze większych n gdy nie robimy częściowego wyboru elementu głównego błąd rośnie aż do rzędu 10^{-10}. Dzięki wyborowi elementu głównego błąd możemy przybliżyć funkcją stałą równą około 3×10^{-15}.

Wniosek

Przy obliczaniu rozwiązań układów równań metodą eliminacji Gaussa, warto stosować częściowy wybór elementu głównego, ponieważ pozwala to zachować dużo lepszą precyzję obliczeń, a co za tym idzie dużo bardziej precyzyjny wynik.



Rysunek 2: Porównanie błędu obliczeń dla algorytmu eliminacji Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego.