

Obliczenia Naukowe lista 5 - Sprawozdanie

Joel Kojma

22 stycznia 2026

Pomysł na implementację eliminacji Gaussa dla macierzy rzadkich

1. Będziemy przechowywać macierz w postaci listy wektorów. Każdy wektor będzie odpowiadał jednemu wierszowi macierzy i będzie zawierał wartości od pierwszego niezerowego elementu w wierszu do ostatniego niezerowego elementu w wierszu. W ten sposób przechowujemy tylko niezerowe elementy macierzy. Dodatkowo będziemy używać tablicy offsetów (przesunięć), która mówi ile początkowych zer jest w każdym wierszu. Również będziemy mieli wektor długości wierszy - przechowuje długość tablicy.

Złożoność pamięciowa

1. Tablice `row_offsets` i `row_lengths` służące do przeliczania indeksów mają rozmiar n .
2. W każdym wierszu pamiętamy elementy macierzy A_k , których jest dokładnie l , z macierzy C_k pamiętamy aż do elementu niezerowego na przekątnej, więc średnio jest to $l/2$ elementów na wiersz. W macierzy B_k pamiętamy dokładnie średnio na wiersz $\left(\frac{2l-1}{l^2}\right) \simeq \frac{2}{l}$ elementów.

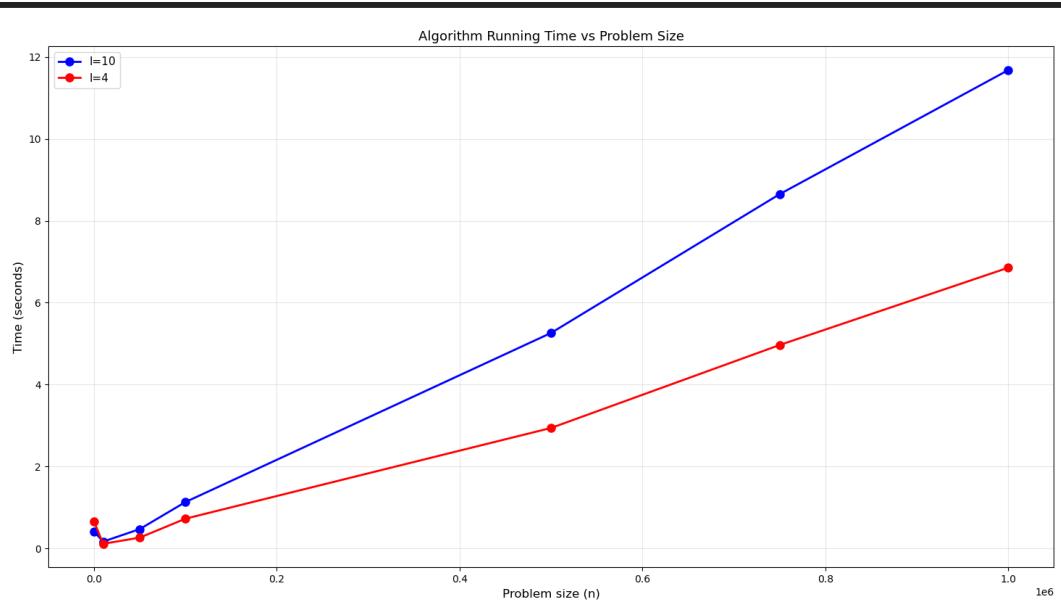
Zatem złożoność pamięciowa naszej implementacji eliminacji Gaussa wynosi: $O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność pamięciowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n .

Złożoność obliczeniowa

1. Eliminacja Gaussa: Doprowadzenie do postaci macierzy trójkątnej górnej:
 - Przechodzimy po wszystkich kolumnach macierzy (n kolumn)
 - Dla każdej kolumny przechodzimy przez wszystkie wiersze poniżej przekątnej (z własności macierzy jest ich nie więcej niż l). W każdym wierszu wykonujemy eliminację gaussa. Mnożymy nie więcej niż $2l$ razy, ponieważ nie musimy mnożyć przez elementy równe zero ponieważ nic nie zmieniają.
 - Zatem złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa wynosi $O(n \cdot l \cdot 2l) = O(n \cdot l^2)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n .
 - Dla wariantu z częściowym wyborem elementu głównego, dodatkowo w każdej kolumnie musimy znaleźć maksymalny element w kolumnie spośród nie więcej niż l elementów, lecz dla stałego l złożoność dalej pozostaje $O(n)$ liniowa.
2. Znalezienie rozwiązania wektora x z macierzy trójkątnej górnej:
 - W każdym wierszu wykonujemy sumę nie więcej niż $3l$ elementów.
 - Zatem złożoność obliczeniowa wynosi $O(n \cdot 3l) = O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n .

Testy czasu działania

Obliczoną złożoność czasową potwierdzają testy czasu działania programu.



Rysunek 1: Porównanie czasu działania algorytmu eliminacji Gaussa dla macierzy A dla $l=4$ oraz $l=10$ w zależności od rozmiaru macierzy n .

Obserwacje i wnioski

Widzimy, że czas działania algorytmu rośnie liniowo wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy n . Dla większej wartości l czas działania jest większy, co również zgadza się z wyliczoną złożonością czasową $O(n \cdot l^2)$.

Wniosek: Im gęstsza macierz (większe l), tym większa złożoność czasowa i pamięciowa, a co za tym idzie dłuższy czas działania algorytmu.

Porównanie błędu obliczeń gdy wykonujemy eliminację Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego

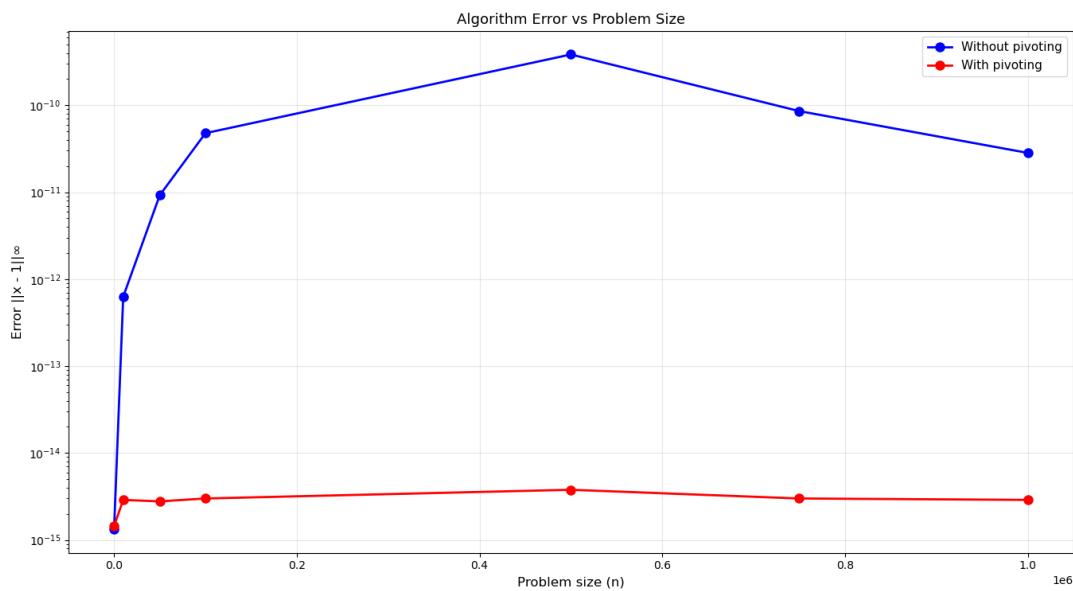
Gdy wykonujemy eliminację Gaussa bez częściowego wyboru elementu głównego, to możemy trafić na element przekątnej bliski zeru, co powoduje, że dzielimy przez bardzo małą liczbę i tracimy precyzję obliczeń. W efekcie błąd obliczeń rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy n . Aby temu zapobiec, stosujemy częściowy wybór elementu głównego, czyli w każdej kolumnie przed eliminacją szukamy największego elementu i zamieniamy wiersze tak, aby ten element znalazł się na przekątnej. W ten sposób unikamy dzielenia przez bardzo małe liczby i błąd obliczeń pozostaje niski nawet dla dużych rozmiarów macierzy n .

Na wykresie poniżej widzimy, że dla $n = 16$ błąd jest bardzo podobny, natomiast dla większych n błąd zaczyna rosnąć bardzo szybko.

Dla $n = 10000$ błąd bez częściowego wyboru elementu głównego jest 1000 razy większy niż z częściowym wyborem elementu głównego. Dla jeszcze większych n gdy nie robimy częściowego wyboru elementu głównego błąd rośnie aż do rzędu 10^{-10} . Dzięki wyborowi elementu głównego błąd możemy przybliżyć funkcją stałą równą około 3×10^{-15} .

Wniosek

Przy obliczaniu rozwiązań układów równań metodą eliminacji Gaussa, warto stosować częściowy wybór elementu głównego, ponieważ pozwala to zachować dużo lepszą precyzję obliczeń, a co za tym idzie dużo bardziej precyzyjny wynik.



Rysunek 2: Porównanie błędu obliczeń dla algorytmu eliminacji Gaussa z i bez częściowego wyboru elementu głównego.