Obliczenia Naukowe lista 5 - Sprawozdanie

Joel Kojma

30 grudnia 2025

Pomysł na implementację eliminacji Gaussa dla macierzy rzadkich

1. Będziemy przechowywać macierz w postaci listy wektorów. Każdy wektor będzie odpowiadał jednemu wierszowi macierzy i będzie zawierał wartości od pierwszego niezerowego elementu w wierszu do ostatniego niezerowego elementu w wierszu. W ten sposób przechowujemy tylko niezerowe elementy macierzy. Dodatkowo będziemy używać tablicy offsetów (przesunięć), która mówi ile początkowych zer jest w każdym wierszu. Również będziemy mieli wektor długości wierszy - przechowuje długość tablicy.

Złożoność pamięciowa

1. Tablice `row_offsets` i `row_lengths` służące do przeliczania indeksów mają rozmiar n.
2. W każdym wierszu pamiętamy elementy macierzy A_k, których jest dokładnie l, z macierzy C_k pamiętamy aż do elementu niezerowego na przekątnej, więc średnio jest to $l/2$ elementów na wiersz. W macierzy B_k pamiętamy dokładnie średnio na wiersz $\left(\dfrac{2l-1}{l^2}\right) \simeq \frac{2}{l}$ elementów.

   Zatem złożoność pamięciowa naszej implementacji eliminacji Gaussa wynosi: $O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność pamięciowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.

Złożoność Obliczeniowa

1. Eliminacja Gaussa: Doprowadzenie do postaci macierzy trójkątnej górnej:
   - Przechodzimy po wszystkich kolumnach macierzy (n kolumn)
   - Dla każdej kolumny przechodzimy przez wszystkie wiersze poniżej przekątnej (z własności macierzy jest ich nie więcej niż l). W każdym wierszu wykonujemy eliminację gaussa. Mnożymy nie więcej niż $2l$ razy, ponieważ nie musimy mnożyć przez elementy równe zero ponieważ nic nie zmieniają.
   - Zatem złożoność obliczeniowa eliminacji Gaussa wynosi $O(n \cdot l \cdot 2l) = O(n \cdot l^2)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.
   - Dla wariantu z częściowym wyborem elementu głównego, dodatkowo w każdej kolumnie musimy znaleźć maksymalny element w kolumnie spośród nie więcej niż l elementów, lecz dla stałego l złożność dalej pozostaje $O(n)$ liniowa.
2. Znalezienie rozwiązania wektora x z macierzy trójkątnej górnej:
   - W każdym wierszu wykonujemy sumę nie więcej niż $2l$ elementów.
   - Zatem złożoność obliczeniowa wynosi $O(n \cdot 2l) = O(n \cdot l)$, więc jeśli l jest stałe, to złożoność obliczeniowa jest liniowa względem rozmiaru macierzy n.