Obliczenia Naukowe lista 3 - Sprawozdanie

Joel Kojma

21 listopada 2025

Zad 1

Intuicja

Będziemy szukać rozwiązania metodą bisekcji. Zamiast rekurencyjnie spróbuję wykonać zadanie iteracyjnie, aby zminimalizować liczbę wywołań funkcji.

Zad 2

Działanie algorytmu metody siecznych

Zaczynamy od punktu początkowego x_0. Liczymy pochodną funkcji f w tym punkcie i na jej podstawie wyliczamy styczną do funkcji w punkcie x_0. Następnie wyznaczamy punkt przecięcia tej stycznej z osią X i oznaczamy go jako x_1. Następnie powtarzamy to samo dla punktu x_1 i kolejnych x_n.

Zad 3

W metodzie siecznych musimy uważać na dzielenie przez zero. Czyli sytuację, kiedy $f(a)-f(b) = 0 \rightarrow$ Wtedy prosta wogóle nie przecina osi X.

Moje testy do zadań 1-3

Wielomian $f(x) = x^3 - x - 2$

Testowałem dla parametrów: $\delta = 10^{-5}, \epsilon = 10^{-5}, maxit = 100$.

Wyniki

algorytm	r	$f(r)$	iter	błąd względny [%]
m. bisekcji	1.52139×10^0	3.26082×10^{-5}	17	3.605981×10^{-4}
m. stycznych	1.52138×10^0	-1.53692×10^{-6}	7	1.699610×10^{-5}
m. siecznych	1.52138×10^0	-1.64365×10^{-7}	6	1.817644×10^{-6}

Tabela 1: Wyniki dla wielomianu $f(x) = x^3 - x - 2$

Zad 4

Funkcja $f(x) = \sin(x) - 0.25x^2$

algorytm	r	$f(r)$	iter	błąd względny [%]
m. bisekcji	1.93375×10^0	-2.70277×10^{-7}	16	1.057312×10^{-5}
m. stycznych	1.93375×10^0	-2.24233×10^{-8}	4	8.771914×10^{-7}
m. siecznych	1.93375×10^0	1.56453×10^{-7}	4	6.120361×10^{-6}

Tabela 2: Wyniki dla funkcji $f(x) = \sin(x) - 0.25x^2$

Obserwacje

Metoda stycznych i siecznych są 4 razy szybsze od metody bisekcji. Podobnie wyszło również dla moich testów. Metoda siecznych jest szybsza od metody bisekcji nawet pomimo tego, że ma dwa razy większy przedział początkowy.

Wniosek

Jeśli chcemy znaleźć miejsca zerowe funkcji na dużym przedziale w szybki sposób, to najlepiej używać metody stycznych albo siecznych.

Zad 5

Plan rozwiązania

Chcemy znaleźć wartości x dla których przecinają się funkcje $f(x) = 3x$ i $g(x) = e^x$

$$\begin{cases} y &= 3x \\ y &= e^x \end{cases} \Rightarrow 3x = e^x \Rightarrow e^x - 3x = 0$$

Więc aby rozwiązać zadanie, wystarczy znaleźć miejsca zerowe funkcji $h(x) = e^x - 3x$. Miejsca zerowe tej funkcji znajdują się w przedziałach $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$. Dla tych przedziałów użyjemy metody bisekcji.

Wyniki

$r_1 = 0.619140625 \rightarrow$ Algorytm wykonał 9 iteracji
$r_2 = 1.51171875 \rightarrow$ Algorytm wykonał 8 iteracji

Zad 6

Funkcja $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

Parametry wywołania

Łatwo można sprawdzić, że $f_1(0) > 0$ oraz $f_1(2) < 0$, więc miejsce zerowe znajduje się w przedziale $[0, 2]$. Miejsce zerowe znajduje się dokładnie w punkcie $x = 1$. Dla bisekcji dobieramy przedział początkowy $[0, 3]$. Gdybym wziął $[0, 2]$, to algorytm wykonałby tylko 1 iterację (szczęśliwy przypadek). Dla metody stycznych wybieram punkt startowy 1.5. Dla metody siecznych wybieram punkty początkowe 1.5 oraz 2.0.

algorytm	r	$f(r)$	iter
m. bisekcji	9.99996×10^{-1}	3.81470×10^{-6}	18
m. stycznych	1.00000×10^{0}	1.52638×10^{-9}	4
m. siecznych	1.00000×10^{0}	-3.42698×10^{-6}	5

Tabela 3: Wyniki dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

Wyniki

Eksperyment w metodzie Newtona $x_0 \in (1, \infty)$

Dla punktów startowych większych od 5, liczba iteracji zaczyna rosnąć bardzo gwałtownie. Wynika to z faktu, że funkcja się zaczyna wypłaszczać, wobec tego trzeba tworzyć coraz więcej stycznych, a wartości do których doszedł algorytm są ujemne.

Funkcja $f_2(x) = xe^{-x}$

Łatwo sprawdzić, że $f_2(0) = 0$ więc to jest miejsce zerowe, które musimy znaleźć. Funkcja w nieskończoności dąży do zera.

Parametry wywołania

Dla bisekcji wybieram przedział początkowy $[-3.23, 1.433]$. Dla metody stycznych wybieram punkt startowy 0.5. Dla metody siecznych wybieram punkty początkowe 0.5 oraz 0.8.

Wyniki

algorytm	r	$f(r)$	iter
m. bisekcji	4.08936×10^{-6}	4.08934×10^{-6}	14
m. stycznych	-3.06425×10^{-7}	-3.06425×10^{-7}	5
m. siecznych	-2.61460×10^{-6}	-2.61461×10^{-6}	8

Tabela 4: Wyniki dla funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$

Obserwacje

Najdokładniejsza jest metoda Newtona (stycznych).

Eksperyment w metodzie Newtona $x_0 \geq 1$

Funkcja $f_2(x)$ ma maksimum lokalne w punkcie $x = 1$. Dla $x > 1$ funkcja jest malejąca i zbiega do zera w nieskończoności. Metoda Newtona zamiast zbiegać do $x = 0$, będzie zbiegać do nieskończoności, ponieważ tam funkcja dąży do zera, ale nigdy do niego nie dociera. Podobnie dzieje się dla metody siecznych.
Dla $x = 1.0$ algorytm nie wykona się, ponieważ pochodna w tym punkcie jest równa zero, więc musielibyśmy podzielić przez zero, więc funkcja zwraca błąd.

Wnioski

Metody stycznych Newtona i siecznych są szybsze niż metoda bisekcji, ale nie gwarantują nam zbieżności do miejsca zerowego.