

# Variation über ein Thema von Knuth, Robinson, Schensted und Schützenberger

Dieter Bessenohl und Armin Jöllenbeck\*

## Zusammenfassung

The crucial point of many approaches to representation theory of symmetric groups is the algorithm of Robinson and Schensted. Roughly speaking, this is a sorting algorithm with documentation. From the theorem of Schützenberger we take the idea for a description of the Robinson-Schensted correspondence without using the documentation part of the algorithm, which therefore plays no rôle in our approach. On the other hand we analyze the Knuth relations more thoroughly than usual. By means of a slight generalization of the sorting part of the algorithm we get another associative product on the free monoid  $X^*$  over a countable alphabet  $X$ . The canonical map of  $X^*$  onto the plactic monoid is also a homomorphism with respect to this product.

*Adalbert Kerber zum 60. Geburtstag*

## 1 Einführung

Der Robinson-Schensted-Algorithmus ist das kombinatorische Herz der Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen – zumindest bei dem in [1] vorgestellten Aufbau dieser Theorie. Bei diesem Zugang mit Hilfe eines nichtkommutativen Überbaus aus geeigneten Bialgebren ist der Algorithmus von Robinson und Schensted auch der einzige, der benötigt wird. Abweichend vom üblichen Vorgehen werden dabei über den Satz von Robinson und Schensted hinaus allerdings auch die Sätze von Knuth und Schützenberger benutzt. Wir stellen deshalb hier eine Version vor, bei der alle für [1] notwendigen Ergebnisse in durchsichtiger Form erreicht werden. Der Robinson-Schensted-Algorithmus ist, kurz gesagt, ein Sortieralgorithmus mit Dokumentation. Wir verzichten auf die dokumentierende Hälfte und analysieren stattdessen genauer die Knuth-Relationen, wodurch sich am Ende die Robinson-Schensted-Bijektion in augenfälliger Weise ergibt.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$ , insbesondere  $\underline{0} := \emptyset$ . Für jede Menge  $X$  sei  $X^n := X^{\underline{n}} := \{f \mid f : \underline{n} \rightarrow X \text{ Abbildung}\}$  die Menge der  $n$ -Tupel über  $X$ . Mit  $S_n$  bezeichnen wir die Teilmenge der Bijektionen in  $(\underline{n})^n \subseteq \mathbb{N}^n$ , die *symmetrische Gruppe* auf  $\underline{n}$ . Für alle  $i \in \underline{n-1}$  sei  $\tau_i \in S_n$  die *Transposition*  $(i, i+1)$ . Für die Verknüpfung „Nacheinander von Abbildungen“ benutzen wir das Symbol  $\circ$ . Schließlich sei  $\mathbb{N}^* := \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{N}^k$ . Die Elemente von  $\mathbb{N}^*$  nennen wir Worte über  $\mathbb{N}$ . Ist  $q \in \mathbb{N}^k$ , so nennen wir

---

\*Dieser Artikel entstand im Rahmen des DFG-Projekts BL 488/1-1.

$|q| := k$  die Länge von  $q$  und schreiben  $q_i$  für das Bild von  $i$  unter der Abbildung  $q$ . Durch die *Konkatenation*  $qr := q_1 \dots q_n r_1 \dots r_m$ ,  $q \in \mathbb{N}^n$ ,  $r \in \mathbb{N}^m$ , wird  $\mathbb{N}^*$  zu einem freien Monoid mit neutralem Element  $\emptyset$ , frei erzeugt von  $\mathbb{N}$  ( $= \mathbb{N}^1$ ). Ist  $p = p_1 \dots p_k \in \mathbb{N}^k$  und  $p_1 + \dots + p_k = n$ , so heißt  $p$  eine *Zerlegung* von  $n$  ( $p \models n$ ). Gilt außerdem  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k$ , so heißt  $p$  *Partition* von  $n$  ( $p \vdash n$ ). Für jede Partition  $p = p_1 \dots p_k$  heißt

$$R(p) := \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p_i\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

der Rahmen zu  $p$ . Üblicherweise versteht man unter einem Standardtableau der Gestalt  $p$  eine Abbildung  $\tau : R(p) \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, monoton wachsend in den Zeilen und streng monoton wachsend in den Spalten von  $R(p)$  zu sein. Abweichend davon nennen wir das „von links unten nach rechts oben herausgelesene Wort“ ein *Standardtableau* zu  $p$ , und bezeichnen mit  $ST^p \subseteq \mathbb{N}^*$  die Menge aller solcher Standardtableaux. Man überlegt sich leicht, daß sich aus dem herausgelesenen Wort die Partition  $p$  eindeutig bestimmen läßt. Schließlich nennen wir die Elemente von  $SYT^p := ST^p \cap S_n$  *Standard-Young-Tableaux* zu  $p$ .


$R(3321)$

1	1	2
2	3	3
4	4	
5		

$544233112 \in ST^{3321}$

Für alle  $a, b \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit

$$\langle a, b \rangle := \{c \in \mathbb{N} \mid \min(a, b) \leq c \leq \max(a, b)\}$$

das „Intervall der natürlichen Zahlen zwischen  $a$  und  $b$ “. Für alle  $\pi \in S_n$  und  $a, b \in \underline{n}$  sei

$$\langle a, b \rangle_\pi := \langle a\pi^{-1}, b\pi^{-1} \rangle_\pi,$$

der Abschnitt in der „Bildzeile“ von  $\pi$  zwischen  $a$  und  $b$ .

Zunächst beschreiben wir den Algorithmus mitsamt seinen Hauptergebnissen, wobei wir uns auf Permutationen beschränken und auf alle Beweise verzichten. Sei  $\pi$  eine Permutation von  $\underline{n}$ . Der Algorithmus läuft in  $n$  Schritten ab. Im  $i$ -ten Zwischenschritt sind die Zahlen  $1\pi, 2\pi, \dots, i\pi$  zu einem Standardtableau verarbeitet. Dann ist  $(i+1)\pi$  in die „1. Zeile“ dieses Tableau einzuordnen, und zwar ans Ende, falls  $(i+1)\pi$  größer ist als alle Einträge in der 1. Zeile, sonst an die Stelle der kleinsten Zahl in der 1. Zeile größer als  $(i+1)\pi$ . Diese wird dann nach dem gleichen Verfahren in der 2. Zeile einsortiert usw. Nach  $n$  Schritten ist ein Standard-Young-Tableau entstanden. Wir illustrieren dies an einem Beispiel:  $\pi = 453281796 \in S_9$ .

4	45	35	25	258	158	157	1579	1569
		4	3	3	2	28	28	27
			4	4	3	3	3	38
					4	4	4	4

Entstanden ist der Rahmen  $R(4221)$  und das Standardtableau  $438271569 \in \text{SYT}^{4221}$ . Allgemein erhält man eine Partition  $p$  von  $n$  und ein Element von  $\text{SYT}^p$ , welches wir  $P(\pi)$  nennen. Dieser Algorithmus wird durch ein weiteres Tableau der gleichen Gestalt dokumentiert. Im  $i$ -ten Schritt bekommt das neu hinzugenommene Feld die Nr.  $i$ , im Beispiel also:

1	12	12	12	125	125	125	1258	1258
		3	3	3	3	37	37	37
			4	4	4	4	4	49
				6	6	6	6	6

Man erhält ein Standardtableau  $Q(\pi) = 649371258$ . Insgesamt haben wir so eine Abbildung definiert:

$$\text{RS} : S_n \rightarrow \bigcup_{p \vdash n} \text{SYT}^p \times \text{SYT}^p, \quad \pi \mapsto (P(\pi), Q(\pi))$$

Für die folgenden Resultate verweisen wir auf [2].

**Satz 1.1 (Robinson–Schensted).** *RS ist eine Bijektion.*

**Satz 1.2 (Schützenberger).** *Für alle  $\pi \in S_n$  gilt:*

$$\text{RS}(\pi^{-1}) = (Q(\pi), P(\pi))$$

**Korollar 1.3.** *Es gilt:*

$$\left| \{ \pi \mid \pi \in S_n, \pi^2 = \text{id}_n \} \right| = \left| \bigcup_{p \vdash n} \text{SYT}^p \right|$$

Seien  $\pi, \rho \in S_n$ . Wir nennen  $\pi$  einen *Links-Knuth-Nachbarn* von  $\rho$ , in Zeichen  $\pi \prec_K \rho$ , wenn es ein  $j \in \underline{n-1}$  gibt mit

$$(i) \quad (j, j+1) \circ \pi = \rho,$$

$$(ii) \quad (j-1)\pi \in \langle j\pi, (j+1)\pi \rangle \text{ oder } (j+2)\pi \in \langle j\pi, (j+1)\pi \rangle.$$

Z.B. ist  $2341 \prec_K 2314 \prec_K 2134$ .

**Satz 1.4 (Knuth).** *Für alle  $\pi, \rho \in S_n$  ist genau dann  $P(\pi) = P(\rho)$ , wenn es  $\pi_1, \dots, \pi_k \in S_n$  gibt mit  $\pi = \pi_1 \prec_K \dots \prec_K \pi_k = \rho$ .*

**Bemerkung 1.5.** *Für alle  $\pi \in S_n$  ist  $P(\pi) = P(P(\pi))$ .*

## 2 Eine Verknüpfung

Wir definieren  $\mathbb{N}_{\text{mon}}^* \subseteq \mathbb{N}^*$  durch  $\emptyset \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^*$  und

$$w = w_1 w_2 \dots w_k \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^* : \Longleftrightarrow w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_k.$$

Ist  $q = q^{(1)} \dots q^{(m)}$  mit  $q^{(1)}, \dots, q^{(m)} \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^*$  und dabei  $m$  minimal gewählt, so sind  $q^{(1)}, \dots, q^{(m)}$  eindeutig bestimmt. Wir nennen  $q^{(1)}, \dots, q^{(m)}$  die *monotonen Bausteine* und  $m$  die *monotone Länge* von  $q$ . Zum Beispiel ist für  $q = 1121345444$  die monotone

Länge gleich 3. Die monotonen Bausteine sind  $q^{(1)} = 112$ ,  $q^{(2)} = 1345$  und  $q^{(3)} = 444$ . Wir definieren Abbildungen

$$\triangleleft, \blacktriangleleft: \mathbb{N}_{\text{mon}}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

folgendermaßen: Sei  $w = w_1 \cdots w_k \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^*$ . Wir setzen

$$w \triangleleft \emptyset := w \quad \text{und} \quad w \blacktriangleleft \emptyset := \emptyset \quad .$$

Für alle  $x \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\begin{aligned} w \triangleleft x &:= wx \\ w \blacktriangleleft x &:= \emptyset \end{aligned} \quad , \quad \text{falls } w = \emptyset \text{ oder } w_k \leq x \text{ ist.}$$

Ist  $k > 0$  und  $x < w_k$ , so sei  $i := \min\{j \in \underline{k} \mid x < w_j\}$  und

$$\begin{aligned} w \triangleleft x &:= w_1 \cdots w_{i-1} x w_{i+1} \cdots w_k \quad , \\ w \blacktriangleleft x &:= w_i \quad . \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir

$$\begin{aligned} w \triangleleft x_1 \cdots x_l &:= (w \triangleleft x_1) \triangleleft x_2 \cdots x_l \quad , \\ w \blacktriangleleft x_1 \cdots x_l &:= (w \blacktriangleleft x_1) ((w \triangleleft x_1) \blacktriangleleft x_2 \cdots x_l) \quad . \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.** Für alle  $w \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^*$ ,  $x \in \mathbb{N}$  und  $q, u, v \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\begin{aligned} w \triangleleft uv &= (w \triangleleft u) \triangleleft v \quad , \\ w \blacktriangleleft uv &= (w \blacktriangleleft u) ((w \triangleleft u) \blacktriangleleft v) \quad , \end{aligned}$$

Wir definieren rekursiv eine Verknüpfung  $\diamond$  auf  $\mathbb{N}^*$  folgendermaßen:  
Sei  $q \in \mathbb{N}^*$  und  $q = q^{(1)} \cdots q^{(m)}$  die Zerlegung von  $q$  in monotone Bausteine. Wir setzen

$$q \diamond \emptyset := q \quad .$$

Für alle  $x \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\begin{aligned} q \diamond x &:= x \quad , \text{ falls } m = 0 \quad , \\ q \diamond x &:= (q^{(1)} \cdots q^{(m-1)} \diamond (q^{(m)} \blacktriangleleft x)) (q^{(m)} \triangleleft x) \quad \text{falls } m > 0. \end{aligned}$$

Schließlich setzen wir

$$q \diamond x_1 \cdots x_l := (q \diamond x_1) \diamond x_2 \cdots x_l \quad .$$

Z.B. ist  $12312 \diamond 211 = 123122 \diamond 11 = 3122112 \diamond 1 = 31222111$ .

**Bemerkung 2.2.** Für alle  $q, u, v, r \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\begin{aligned} q \diamond uv &= (q \diamond u) \diamond v \quad , \\ q \diamond r &= (q^{(1)} \cdots q^{(m-1)} \diamond (q^{(m)} \blacktriangleleft r)) (q^{(m)} \triangleleft r) \text{ falls } q \neq \emptyset \quad . \end{aligned}$$

Die Verknüpfung  $\diamond$  ist die Verallgemeinerung der sortierenden Hälfte des Robinson-Schensted-Algorithmus auf beliebige Worte, anstelle von Standardtableaux, wobei wir uns allerdings besonders für  $\emptyset \diamond r$  interessieren. In der üblichen Weise zeigt man:

**Satz 2.3.** Ist  $w$  ein Standardtableau und  $q \in \mathbb{N}^*$ , so ist  $w \diamond q$  ein Standardtableau. Insbesondere ist  $\emptyset \diamond q$  ein Standardtableau für alle  $q \in \mathbb{N}^*$ . Ist  $q$  ein Standardtableau, so ist  $\emptyset \diamond q = q$ .

### 3 Knuth-Relationen

Wir erklären die Links-Knuth-Nachbarschaft  $\prec_K$  auf  $\mathbb{N}^3$  wie folgt:

Für alle  $a, b, c \in \mathbb{N}$  mit  $a \leq b \leq c$  setzen wir

$$acb \prec_K cab, \text{ falls } b < c, \quad \text{und} \quad bac \prec_K bca, \text{ falls } a < b.$$

Außerdem sei  $\prec_K$  symmetrisch. Für alle  $q, r \in \mathbb{N}^*$  setzen wir ferner:

$$q \prec_K r \iff \begin{array}{l} \text{es gibt } u, v \in \mathbb{N}^* \text{ und } abc, a'b'c' \in \mathbb{N}^3 \text{ mit} \\ abc \prec_K a'b'c' \quad \text{und} \quad q = uabcv, r = ua'b'c'v. \end{array}$$

Schließlich definieren wir die Links-Knuth-Äquivalenz  $\sim_K$  auf  $\mathbb{N}^*$  als die transitive und reflexive Hülle der Links-Knuth-Nachbarschaft. Für jedes  $q \in \mathbb{N}^*$  heißt  $K[q] := \{r \in \mathbb{N}^* \mid q \sim_K r\}$  die Links-Knuth-Klasse von  $q$ . Z.B. sind die Äquivalenzklassen von  $\sim_K$  auf den Worten vom Inhalt 111, 21, 12 und 3:

$$\begin{aligned} &\{123\}, \{132, 312\}, \{213, 231\}, \{321\}, \\ &\{112\}, \{121, 211\}, \\ &\{122\}, \{212, 221\}, \\ &\{111\}. \end{aligned}$$

Wir bemerken noch, daß auf  $\mathbb{N}^0 \cup \mathbb{N}^1 \cup \mathbb{N}^2$  die Links-Knuth-Äquivalenz die Gleichheit ist.

Da  $\sim_K$  nach Definition eine Kongruenzrelation bzgl. der Konkatination auf  $\mathbb{N}^*$  ist, wird auf der Menge  $\mathbb{N}^*/\sim_K$  der Links-Knuth-Klassen eine assoziative Verknüpfung induziert – das plaktische Monoid [3]. Die folgenden Sätze zeigen u.a., daß  $\sim_K$  auch eine Kongruenzrelation bzgl.  $\Diamond$  ist (Schlußbemerkung iii).

**Satz 3.1.** Für alle  $q, r \in \mathbb{N}^*$  ist  $qr \sim_K q \Diamond r$  und insbesondere  $r \sim_K \emptyset \Diamond r$ .

**Satz 3.2.** Für alle  $w, q, r \in \mathbb{N}^*$  mit  $q \sim_K r$  gilt  $w \Diamond q = w \Diamond r$ .

**Korollar 3.3.** Für alle  $q, r \in \mathbb{N}^*$  gilt:  $q \sim_K r \iff \emptyset \Diamond q = \emptyset \Diamond r$ .

Der Zusammenhang von Links-Knuth-Nachbarschaft und Robinson-Schensted-Algorithmus zeigt sich besonders deutlich im Beweis des folgenden Spezialfalls von 3.1.

**Hilfssatz 3.4.** Für alle  $w \in \mathbb{N}_{\text{mon}}^*$  und  $x \in \mathbb{N}$  ist  $wx \sim_K w \Diamond x$ .

*Beweis.* Für  $w = \emptyset$  ist nichts zu zeigen. Sei also  $w = w_1 \dots w_k \in \mathbb{N}^k$  und  $k \geq 1$ . Ist  $w_k \leq x$ , so ist  $wx = w \Diamond x$  und ebenfalls nichts zu zeigen. Sei also  $x < w_k$  und  $i \in \underline{k}$  so gewählt, daß  $w_{i-1} \leq x < w_i$  ist. Wegen  $x < w_i \leq w_{i+1} \leq \dots \leq w_k$  ist

$$\begin{aligned} w_i \dots w_{k-1} w_k x &\sim_K w_i \dots w_{k-1} x w_k \sim_K w_i \dots w_{k-2} x w_{k-1} w_k \\ &\sim_K \dots \sim_K w_i x w_{i+1} \dots w_k. \end{aligned}$$

Wegen  $w_1 \leq \dots \leq w_{i-1} \leq x < w_i$  ist

$$\begin{aligned} w_1 \dots w_i x &\sim_K w_1 \dots w_i w_{i-1} x \sim_K w_1 \dots w_i w_{i-2} x \\ &\sim_K \dots \sim_K w_i w_1 \dots w_{i-1} x. \end{aligned}$$

Da  $\sim_K$  eine Kongruenzrelation ist, folgt

$$wx \sim_K w_i w_1 \dots w_{i-1} x w_{i+1} \dots w_k = w \Diamond x.$$

□

Satz 3.1 folgt mit Induktion nach der monotonen Länge von  $q$  und der Länge von  $r$  mittels 3.4. In 3.2 kann man sich wegen 2.2 auf den Fall  $q, r \in \mathbb{N}^3$  und  $q \prec_K r$  beschränken. Dann folgt der Satz mit Hilfe einer Induktion nach der monotonen Länge von  $w$ .

**Bemerkung 3.5.** Nach 2.3, 3.1 und 3.3 liegt in jeder Links-Knuth-Klasse genau ein Standardtableau.

Nach 3.1 und 3.2 ist für alle  $w, q, r \in \mathbb{N}^*$

$$(w \diamond q) \diamond r = w \diamond qr = w \diamond (q \diamond r) \quad ,$$

d.h.  $\diamond$  ist eine assoziative Verknüpfung.

Offenbar ist  $S_n$  (als Teilmenge von  $\mathbb{N}^*$ ) eine Vereinigung von Links-Knuth-Klassen. Für alle  $\pi, \rho \in S_n$  setzen wir

$$\begin{aligned} \pi \prec_K \rho & :\iff \pi^{-1} \prec_K \rho^{-1} \quad , \\ \pi \sim_K \rho & :\iff \pi^{-1} \sim_K \rho^{-1} \end{aligned}$$

und nennen  $\prec_K$  die Rechts-Knuth-Nachbarschaft und  $\sim_K$  die Rechts-Knuth-Äquivalenz auf  $S_n$ . Für jedes  $\pi \in S_n$  heißt  $[\pi]_K := \{\rho \in S_n \mid \pi \sim_K \rho\}$  die Rechts-Knuth-Klasse von  $\pi$ .

Die Links-Knuth-Nachbarschaft für Permutationen ist in der Einführung beschrieben. Durch Invertieren folgt daraus:

$$\begin{aligned} \pi \prec_K \rho & \iff \text{es gibt ein } i \in \underline{n-1} \text{ mit } \rho = \pi \circ \tau_i \\ & \text{und } \{(i-1), (i+2)\} \cap \langle i, i+1 \rangle_\pi \neq \emptyset \quad . \end{aligned}$$

Z.B. ist  $2314 \prec_K 1324 \prec_K 1423$ .

**Satz 3.6.** Für alle  $p \vdash n$  ist  $\text{SYT}^p$  eine Rechts-Knuth-Klasse.

Daß  $\text{SYT}^p$  gegen Rechts-Knuth-Nachbarschaft abgeschlossen ist, sieht man leicht. Durch Induktion nach  $n$  folgt andererseits, daß  $\text{SYT}^p$  in einer Rechts-Knuth-Klasse enthalten ist.

## 4 Teppiche

Wir definieren  $\rho \in S_n$  durch  $i\rho := n-i+1$  für  $1 \leq i \leq n$ . Es ist

$$\rho = n(n-1)(n-2) \dots 21$$

eine Involution in  $S_n$ . Für alle  $j \in \underline{n-1}$  ist

$$\rho \circ \tau_j = \tau_{n-j+1} \circ \rho \quad .$$

Für alle  $\pi, \phi, \psi \in S_n$  gilt:

$$\begin{aligned} \pi \prec_K \phi & \iff \pi \circ \rho \prec_K \phi \circ \rho \iff \rho \circ \pi \prec_K \rho \circ \phi \quad , \\ \pi \sim_K \psi & \iff \rho \circ \pi \sim_K \rho \circ \psi \iff \pi \circ \rho \sim_K \psi \circ \rho \end{aligned}$$

Die beiden folgenden Lemmata enthalten die entscheidenden Beziehungen zwischen Rechts- und Links-Knuth-Relationen.

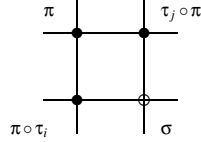
**Lemma 4.1.** Seien  $\pi \in S_n$  und  $i, j \in \underline{n-1}$  mit

$$\pi \circ \tau_i \smile_K \pi \smile_K \tau_j \circ \pi \quad .$$

Dann gibt es ein  $\sigma \in S_n$  mit

$$\pi \circ \tau_i \smile_K \sigma \smile_K \tau_j \circ \pi \quad .$$

Wir illustrieren dies mit:



*Beweis.* Sei

$$\pi = \begin{pmatrix} \cdots & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots \\ \cdots & a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix} \quad .$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$a \in \langle b, c \rangle \quad \text{oder} \quad d \in \langle b, c \rangle$$

und

$$i-1 \in \langle i, i+1 \rangle_\pi \quad \text{oder} \quad i+2 \in \langle i, i+1 \rangle_\pi \quad .$$

Indem man gegebenenfalls  $\pi$  durch  $\rho \circ \pi$  oder  $\pi \circ \rho$  oder  $\rho \circ \pi \circ \rho$  ersetzt, kann man o.B.d.A. annehmen

$$a \in \langle b, c \rangle \quad \text{und} \quad i-1 \in \langle i, i+1 \rangle_\pi \quad .$$

*1. Fall:*  $|\{i, i+1\} \cap \{a, b, c\}| \leq 1$ . Dann folgt  $a\tau_i \in \langle b\tau_i, c\tau_i \rangle$ . also  $\pi \circ \tau_i \smile_K \tau_j \circ (\pi \circ \tau_i)$ . Wäre nun  $i-1 \notin \langle i, i+1 \rangle_{\tau_j \circ \pi}$ , so wäre  $\{b, c\} = \{i-1, i+1\}$  und daher  $a = i$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist  $(\tau_j \circ \pi) \circ \tau_i \smile_K \tau_j \circ \pi$ .

*2. Fall:*  $\{i, i+1\} \subseteq \{a, b, c\}$ . Dann ist  $\{i, i+1\} = \{a, c\}$  und  $b = i-1$ . Wegen  $a \in \langle b, c \rangle$  folgt  $c = i+1, a = i$  und damit

$$\pi \circ \tau_i \smile_K \tau_{j-1} \circ (\pi \circ \tau_i) = (\tau_j \circ \pi) \circ \tau_{i-1} \smile_K \tau_j \circ \pi \quad .$$

□

**Lemma 4.2.** Seien  $\pi, \rho, \rho^* \in S_n$  mit

$$\pi \smile_K \rho \quad , \quad \pi \smile_K \rho^* \quad \text{und} \quad \rho \smile_K \rho^* \quad .$$

Dann ist

$$\rho = \rho^* \quad .$$

*Beweis.* Sei  $\rho = \pi \circ \tau_i, \rho^* = \pi \circ \tau_l$ . Angenommen, es ist  $i \neq l$ . Nach Voraussetzung gibt es  $\rho_1, \dots, \rho_k \in S_n$  mit

$$\rho = \rho_1 \smile_K \rho_2 \smile_K \cdots \smile_K \rho_k = \rho^* \quad ,$$

d.h. es gibt  $j_2, \dots, j_k \in \underline{n-1}$  mit

$$\rho^* = \tau_{j_k} \circ \cdots \circ \tau_{j_2} \circ \rho \quad ,$$

also

$$\pi \circ \tau_l \circ \tau_i = \tau_{j_k} \circ \dots \circ \tau_{j_2} \circ \pi \quad .$$

Wegen  $i \neq l$  gibt es ein  $m \in \underline{n-1}$ , so daß  $m$  und  $m+1$  in den Bildzeilen von  $\pi$  und  $\pi \circ \tau_l \circ \tau_i$  in verschiedener Reihenfolge stehen. Die Reihenfolge von  $m$  und  $m+1$  bleibt aber unter Links-Knuth-Vertauschungen ungeändert, ein Widerspruch.  $\square$

Wir nennen zwei Rechts-Knuth-Klassen  $A$  und  $B$  benachbart, wenn es  $\alpha \in A$  und  $\beta \in B$  gibt mit  $\alpha \prec_K \beta$ . Analog nennen wir Links-Knuth-Klassen  $C$  und  $D$  benachbart, wenn es Rechts-Knuth-Nachbarn  $\gamma \in C$  und  $\delta \in D$  gibt.

**Satz 4.3.** *Die Links-Knuth-Nachbarschaft stiftet zwischen je zwei benachbarten Rechts-Knuth-Klassen eine Bijektion, d.h., sind  $A, B$  benachbarte Rechts-Knuth-Klassen, so gibt es zu jedem  $\pi \in A$  genau ein  $\pi' \in B$  mit  $\pi \prec_K \pi'$  und umgekehrt.*

*Beweis.* Seien  $\alpha \in A$  und  $\beta \in B$  mit  $\alpha \prec_K \beta$  und sei  $\pi \in A$ . Dann gibt es  $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in A$  mit

$$\alpha = \alpha_0 \prec_K \alpha_1 \prec_K \dots \prec_K \alpha_k = \pi \quad .$$

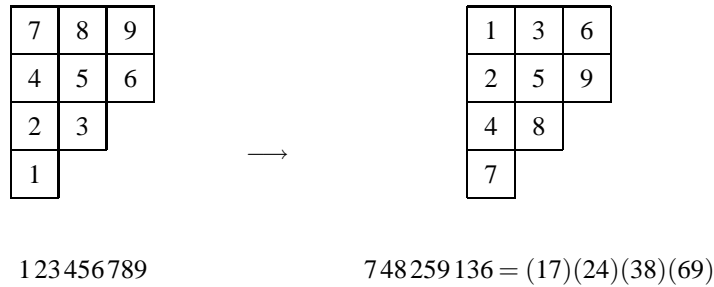
Eine  $k$ -fache Anwendung von 4.1 liefert  $\beta_0, \dots, \beta_k \in B$  mit

$$\beta = \beta_0 \prec_K \beta_1 \prec_K \dots \prec_K \beta_k$$

und  $\beta_i \prec_K \alpha_i$  für  $0 \leq i \leq k$ , insbesondere  $\pi \prec_K \beta_k$ . Aus 4.2 folgt, daß es höchstens ein  $\pi' \in B$  geben kann mit  $\pi \prec_K \pi'$ .  $\square$

Durch Invertieren erhält man die analoge Aussage für Links-Knuth-Klassen.

**Satz 4.4.** *Für alle  $p \vdash n$  enthält  $\text{SYT}^p$  eine Involution.*



Sei  $p \vdash n$ . Wir nennen

$$\mathcal{T}^p := \{\pi \in S_n \mid \emptyset \diamond \pi \in \text{SYT}^p\}$$

den Teppich zu  $p$ . Nach 3.3 ist  $\mathcal{T}^p$  eine Vereinigung von Links-Knuth-Klassen. Nach 3.5 gilt  $|A \cap \text{SYT}^p| = 1$  für jede Links-Knuth-Klasse  $A \subseteq \mathcal{T}^p$ . Nach 3.6 ist  $\text{SYT}^p$  eine Rechts-Knuth-Klasse, also  $(\text{SYT}^p)^{-1}$  eine Links-Knuth-Klasse, die wegen 4.4 in  $\mathcal{T}^p$  enthalten ist. Wegen 4.3 haben alle in  $\mathcal{T}^p$  enthaltenen Links-Knuth-Klassen die gleiche Mächtigkeit, nämlich  $|(\text{SYT}^p)^{-1}| = |\text{SYT}^p|$ . Durch Invertieren werden aus den in  $\mathcal{T}^p$  enthaltenen Links-Knuth-Klassen die Rechts-Knuth-Klassen der Elemente von  $(\text{SYT}^p)^{-1}$ . Eine mehrfache Anwendung von 4.3 zeigt, daß  $\mathcal{T}^p$  Vereinigung



von Rechts-Knuth-Klassen ist. Aus 4.3 folgt weiter, daß jede Rechts-Knuth-Klasse  $A \subseteq \mathcal{T}^p$  und jede Links-Knuth-Klasse  $B \subseteq \mathcal{T}^p$  einen nichtleeren Schnitt haben. Da  $|A| = |\text{SYT}^p|$  und dies auch die Anzahl der in  $\mathcal{T}^p$  enthaltenen Links-Knuth-Klassen ist, folgt  $|A \cap B| = 1$ .

**Korollar 4.5.** Für jedes  $\pi \in \mathcal{T}^p$  seien  $T(\pi)$  und  $T^-(\pi)$  definiert durch

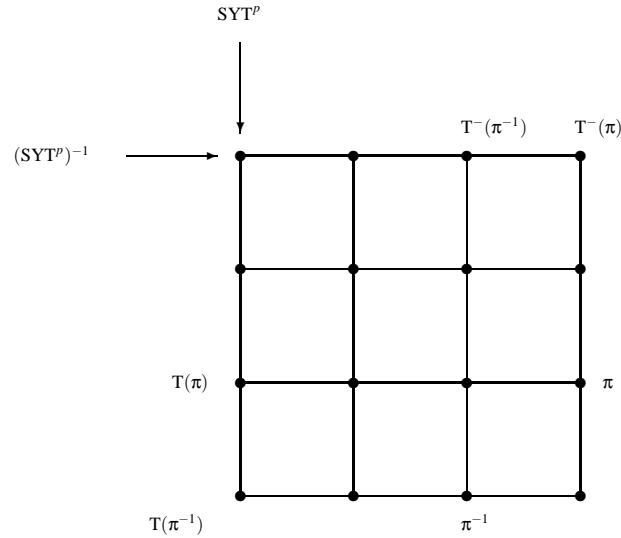
$$\{T(\pi)\} := {}_K[\pi] \cap \text{SYT}^p \quad \text{und} \quad \{T^-(\pi)\} := [\pi]_K \cap (\text{SYT}^p)^{-1}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\pi \mapsto (T(\pi), T^-(\pi))$$

eine Bijektion von  $\mathcal{T}^p$  auf  $\text{SYT}^p \times (\text{SYT}^p)^{-1}$ . Außerdem ist

$$T(\pi) = \emptyset \diamond \pi \quad \text{und} \quad T^-(\pi) = T(\pi^{-1})^{-1}.$$



## 5 Schlußbemerkungen

- (i) Man macht sich leicht klar, daß die Abbildung  $P$  aus der Einführung mit  $T$  übereinstimmt, d.h. daß  $\emptyset \diamond \pi$  das Standard-Young-Tableau  $P(\pi)$  zu  $\pi$  ist. Daß andererseits  $Q(\pi) = T^-(\pi)^{-1} = T(\pi^{-1}) = P(\pi^{-1})$  ist, haben wir nicht bewiesen. Dies ist der Satz von Schützenberger, der gerade besagt, daß  $\emptyset \diamond \pi^{-1}$  den Algorithmus, der zu  $\emptyset \diamond \pi$  führt, dokumentiert – und vice versa. Die Robinson-Schensted-Bijektion

$$RS : S_n \rightarrow \bigcup_{p \vdash n} (\text{SYT}^p \times \text{SYT}^p)$$

erscheint in unserer Version also in der Form

$$\pi \mapsto (T(\pi), T(\pi^{-1})) = (\emptyset \diamond \pi, \emptyset \diamond \pi^{-1}).$$

- (ii) Ist  $A \subseteq S_n$  eine Links-Knuth-Klasse, so ist  $A^{-1}$  eine Rechts-Knuth-Klasse, die im gleichen Teppich wie  $A$  enthalten ist. Wie oben gezeigt ist  $|A \cap A^{-1}| = 1$ . Wegen  $(A \cap A^{-1})^{-1} = A^{-1} \cap A$  ist das einzige Element von  $A \cap A^{-1}$  eine Involution. Die Involutionen bilden daher ein gemeinsames Repräsentantensystem für die Links- und für die Rechts-Knuth-Klassen in  $S_n$ , woraus insbesondere 1.3 folgt.
- (iii) Wegen 3.1 ist  $\sim_K$  nicht nur eine Kongruenzrelation bzgl. Konkatination sondern auch bzgl.  $\diamond$  und  $\mathbb{N}^*/\sim_K$  mit der von  $\diamond$  induzierten Verknüpfung das plaktische Monoid. Die von  $\mathbb{N}$  ( $= \mathbb{N}^1$ ) zusammen mit  $\emptyset$  erzeugte Halbgruppe von  $(\mathbb{N}^*, \diamond)$  besteht genau aus den Standardtableaux und ist nach 3.5 ein Repräsentantensystem für  $\mathbb{N}^*/\sim_K$ , insbesondere isomorph zum plaktischen Monoid. Nach 3.1 ist dabei  $\emptyset$  neutrales Element in dieser Halbgruppe.
- (iv) Für alle  $p \vdash n$  bezeichne  $p'$  die zu  $p$  konjugierte Partition. Man kann sich leicht überlegen, daß  $\emptyset \diamond (\rho \circ \pi) \in ST^{p'}$  ist für alle  $\pi \in ST^p$ . Genauer gesagt ist  $\emptyset \diamond (\rho \circ \pi)$  dasjenige Standardtableau, das aus  $\pi$  durch „Spiegeln an der Hauptdiagonalen“ entsteht wie im folgenden Beispiel:

1	2	6
3	7	9
4	8	
5		

$$\pi = 548379126$$

1	3	4	5
2	7	8	
6	9		

$$\emptyset \diamond (\rho \circ \pi) = 692781345$$

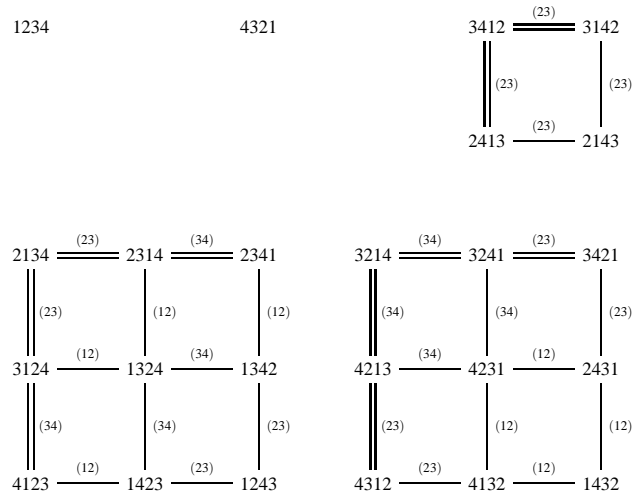
Wegen  $(\tau^p)^{-1} = \tau^p$  folgt insbesondere, da  $\rho \circ \tau^p$  ein Teppich ist,

$$\rho \circ \tau^p = \tau^{p'} = (\tau^{p'})^{-1} = \tau^p \circ \rho$$

und daher

$$\rho \circ \tau^p \circ \rho = \tau^p \quad .$$

(v) Die Teppiche der  $S_4$ :



Dabei markieren Doppelstriche die Klassen  $\text{SYT}^p$  bzw.  $(\text{SYT}^p)^{-1}$ .

(vi) Eine ausführlichere Darstellung dieser Variation des Robinson-Schensted-Algorithmus enthalten die in Vorbereitung befindlichen Lecture Notes „Nichtkommutative Charaktere der symmetrischen Gruppen“ der beiden Autoren.

## Literatur

- [1] A. Jöllenbeck: Nichtkommutative Charaktertheorie. Dissertation Kiel 1998. Bayreuther Mathematische Schriften, p. 1-41, Heft 56, 1999.
- [2] D. E. Knuth: The art of computer programming. Vol. 3: Sorting and searching. Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. Reading, Mass. 1974.
- [3] M. Lothaire: Combinatorics on words (2nd ed.). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 17. Cambridge University Press 1997.