Mathematik der Finanzmärkte II

Repetitionsblatt B: Schlüsselformeln Teil 2

Christoph Schmidhuber

1. Renditen und Zufallsvariablen

Renditen: sei X_0 der Barwert und X_1 der Endwert eines Assets.

- Gesamtrendite $R = X_1/X_0$, relative Rendite $r = R - 1$
- Portfoliogewichte $w_i = X_{0i}/X_0 \ \rightarrow \ \sum w_i = 1$
- Portfoliorendite $R_{pf} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$, $r_{pf} = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$
- Vekoren $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \rightarrow \ \boldsymbol{w^T r} = r_{pf}$, $\boldsymbol{w^T}\mathbf{1} = 1$

Leerverkäufe:

Zu Beginn einer Periode leiht man sich ein Wertpapier (z.B. von einem Broker) und verkauft es einem Drittem. Am Ende der Periode kauft man das Wertpapier zurück und retourniert es and den Broker. Während dieser Zeit anfallende Dividenden müssen an den ursprünglichen Besitzer gezahlt werden.

Der Gewinn/Verlust ist $-X_1 + X_0 = -(X_1 - X_0)$, äquivalent zu einer Anlage mit Gewicht -1.

Zufallsvariablen:

Eine Zufallsvariable X kann n mögliche Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_i \geq 0$ annehmen, wobei , $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ist.

- Erwartungswert $E[x] = \bar{x} = \sum_i p_i x_i$
- Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var(x)} = E[(x - \bar{x})^2] = E[x^2] - \bar{x}^2$
- Kovarianz zweier Zufallsvariablen $\mathrm{Cov}(x, y) = \sigma_{x,y} = E[(x - \bar{x})(y - y)] = E[xy] - \bar{x}\bar{y}$
- Korrelation $\rho_{xy} = \sigma_{xy}/(\sigma_x \sigma_y) \in [-1,1]$ ($\rho = 0$ bedeutet noch nicht Unabhängigkeit)
- Summer zweier Zufallszahlen: $E[x + y] = \bar{x} + \bar{y}$, $\mathrm{Var}[x + y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy}$
- Vektor von Zufallszahlen: $E[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\bar{x}},\ \xi = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} \rightarrow \mathrm{Var}(\xi) = \boldsymbol{w}^T \Sigma \mathbf{w}$
- Kovarianzmatrix $\Sigma = \mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$
- Portfolios von Zufallsvariablen: Rendite $r^{pf} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{r}$, Varianz $\sigma_{pf}^2 = \boldsymbol{w}^T \Sigma \boldsymbol{w}$

<u>*Übungsaufgaben:*</u>

Anna und Martin ziehen Kugeln aus einer Urne. Die Urne enthält 600 weisse und 400 schwarze Kugeln. Für eine weisse Kugel erhalten sie CHF 0, für eine schwarze Kugel CHF 2. Zunächst ziehen beide gemeinsam eine Kugel und teilen sich den Gewinn. Dann zieht jeder eine zweite Kugel nur für sich. Berechnen Sie

a. Den Erwartungswert des Gewinns von Anna

   Lösung (siehe Tabelle unten): $\bar{x} = \sum_i p_i x_i = 1.2$

b. Die Standardabweichung des Gewinns von Martin

   Lösung (siehe Tabelle unten): $\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 1.2 \rightarrow \sigma = 1.10$

c. Die Korrelation der Gewinne zwischen Anna und Martin

   Lösung: $\sigma_{xy} = E[xy] - \bar{x}\bar{y} = 0.24 \rightarrow \rho_{xy} = \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) = 0.17$

d. Martin spendet 1/4 seines Gewinns an den Tierschutzverein, Anna 3/4 ihres Gewinns. Berechnen Sie aus (b) und (c) die erwartete «Portfolio-Rendite» des Tierschutzvereins und ihre Standardabweichung

   Lösung: $r^{pf} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} = 1.2,\ \sigma_{pf}^2 = \boldsymbol{w}^T\Sigma\mathbf{w}$

$$= \left(\frac{1}{4}\sigma_{11} + \frac{3}{4}\sigma_{12} + \frac{3}{4}\sigma_{21} + \frac{9}{4}\sigma_{22}\right) = 3.36 \rightarrow \sigma_{pf} = 1.83$$

Tabelle:

Möglichkeiten für die Ziehungen (a, b, c) von Anna+Martin, Anna, Martin:

a, b, c	0,0,0	0,0,2	0,2,0	2,0,0	0,2,2	2,0,2	2,2,0	2,2,2
Wahrscheinl.	0.216	0.144	0.144	0.144	0.096	0.096	0.096	0.064
Gewinn A	0	0	2	1	2	1	3	3
Gewinn M	0	2	0	1	2	3	1	3

2. Portfolio-Diversifizierung

Unkorrelierte Zufallsvariablen:

Ein Portfolio bestehe aus n unkorrelierten Zufallsvariablen mit gleichem Mittelwert $\bar{r}_i = r$, gleicher Standardabweichung $\sigma_i = \sigma$, und gleichem Gewicht $w_i = 1/n$.

- Portfolio-Rendite: $r^{pf} = r$
- Portfolio-Varianz: $\sigma_{pf}^2 = \sigma^2/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$
- Das Risiko kann vollständig weg-diversifiziert werden

Angenommen, die Korrelationen sind nicht 0 sondern konstant $\rho_{ij} = 0.3$:

- Portfolio-Rendite: $r^{pf} = r$
- Portfolio-Varianz: $\sigma_{pf}^2 = \left(n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot 0.3\right)\sigma^2 = \left(\frac{0.7}{n} + 0.3\right)\sigma^2 \rightarrow 0.3$ für $n \rightarrow \infty$
- Es bleibt ein Rest-Risiko, das nicht weg-diversifiziert werden kann

Zwei Zufallsvariablen:

Ein Portfolio bestehe aus 2 Assets mit Renditen $\bar{r}_1, \bar{r}_2$, Standardabweichungen σ_1, σ_2, Korrelation ρ, und Gewichten $w_1 = 1 - \alpha, w_2 = \alpha, \alpha \in [0,1]$.

Wir zeichnen die Linie der Portfolios als Funktion von α im Risiko-Rendite-Diagramm (Fig. 1)

- Die Endpunkte $\alpha = 0,1$ sind die beiden Assets
- $\bar{r} = \bar{r}_1 + \alpha(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$ unabhängig von der Korrelation
- $\sigma^2 = \boldsymbol{w}^T\Sigma\boldsymbol{w} = (1-\alpha)^2\,\sigma_1^2 + \alpha^2\,\sigma_2^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)\,\sigma_1\sigma_2$
  (*)

Für $\rho = 1$ reduziert sich (*) auf $\sigma^2 = \left((1-\alpha)\,\sigma_1 + \alpha\,\sigma_2\right)^2 \rightarrow\ \sigma = \sigma_1 + \alpha(\sigma_2 - \ \sigma_1)$.
Es ergibt sich eine gerade Verbindungslinie zwischen den beiden Endpunkten.

Für $\rho = -1$ reduziert sich (*) auf $\sigma^2 = \left((1-\alpha)\,\sigma_1 - \alpha\,\sigma_2\right)^2 \rightarrow \sigma = |\sigma_1 - \alpha(\sigma_2 + \ \sigma_1)|$.
Es ergibt sich eine Dreieckslinie, die die $\bar{r}$ –Achse im Punkt $r_A = \frac{\bar{r}_1\sigma_2+\bar{r}_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$ schneidet.

Für $\rho = 0$ reduziert sich (*) auf $\sigma^2 = (1-\alpha)^2\,\sigma_1^2 + \alpha^2\,\sigma_2^2$. Es ergibt sich eine Hyperbel. Wenn Leerverkäufe erlaubt sind, erstreckt sie sich über die beiden Endpunkte hinaus.

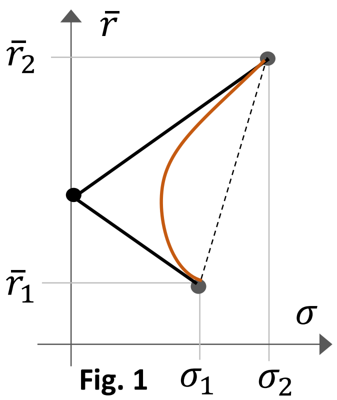

Fig. 1

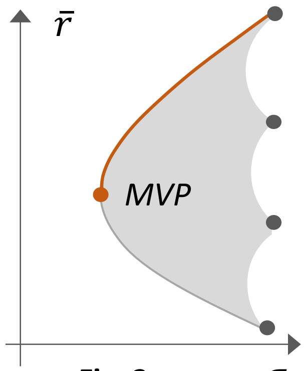

Fig. 2

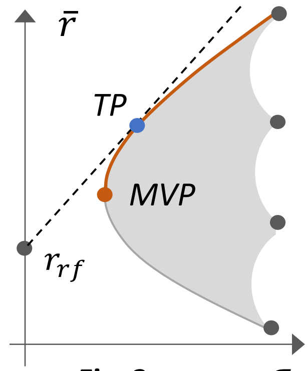

Fig. 3

Efficient Frontier:

- Das erreichbare Gebiet mit >2 Assets ist eine Fläche mit konvexem linken Rand
- Auf diesem Rand liegt das Portfolio mit minimaler Varianz (MVP)
- Der Rand oberhalb dieses Portfolios ist die „Efficient Frontier" (Fig. 2)
- Portfolios auf der Efficient Frontier minimieren das Risiko für vorgegebene Rendite, und sie maximieren die Rendite für vorgegebenes Risiko

Risikofreies Asset:

- Wenn Cash mit $\bar{r} = r_{rf}, \sigma = 0$ eines der erlaubten Assets ist, degeneriert die Efficient Frontier zu einer Geraden (gestrichelte Linie, Fig. 3)
- Die Gerade schneidet die bisherige Efficient Frontier im „super-effizienten Portfolio", oder „Tangentialportolio" (TP).
- Risiko-averse Investoren kombinieren das TP mit Cash (sind also nicht voll investiert): $\alpha \cdot \mathrm{Cash} + (1-\alpha)\cdot TP,\ \ 0 \le \alpha \le 1$
- Risikofreudige Investoren leihen sich Cash und hebeln das TP (Gerade oberhalb TP): $\alpha \cdot \mathrm{Cash} + (1-\alpha)\cdot TP,\ \ \alpha < 1$

<u>Übungen:</u>

Ein Portfolio besteht aus 2 Assets mit Erwartungswerten $\bar{r}_1 = 1,\ \bar{r}_2 = 3$ und Standardabweichungen $\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 4$. Die Portfoliogewichte seien $w_1 = 1-\alpha, w_2 = \alpha$. Short Selling ist nicht erlaubt.

a. Zeichnen Sie die Portfolios mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ im Risiko-Rendite-Diagramm

b. Zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit $0 < \alpha < 1$ für $\rho = 1$

c. Zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit $0 < \alpha < 1$ für $\rho = -1$.
Was ist die risikofreie Rendite r_0?

d. Berechnen Sie $\bar{r}(\alpha), \sigma(\alpha)$ für $\rho = 0$ und zeichnen Sie in dem Diagramm die Linie der Portfolios mit $0 < \alpha < 1$

e. Short Selling sei nun erlaubt. Was ist das maximal erreichbare Sharpe Ratio?

Lösung a-d: ähnlich wie in Fig. 1
Lösung e: Sharpe Ratio wird maximiert für $\alpha \to \infty \Rightarrow S = \frac{r - r_0}{\sigma} \to \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$

3. Markowitz-Optimierung

Optimierungsproblem:

Wir suchen das Minimum der (halben) Varianz σ_{pf}^2 des Portfolios für eine vorgegebene Rendite $\bar{r}_{pf}$, wobei sich die Portfoliogewichte zu 100% aufsummieren müssen:

$$\text{Min } \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\Sigma\boldsymbol{w} \quad \text{mit Nebenbedingungen: } \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{1} = 1, \ \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} = \bar{r}_{pf}$$

Die Nebenbedingungen werden durch Lagrange-Multiplikatoren λ, μ eingebaut:

- Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{w}) = \min \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\Sigma\boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} - \bar{r}_{ptf}) - \mu(\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{1} - 1)$
- Gradient der Lagrange-Funktion muss verschwinden: $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathrm{L} = \Sigma\boldsymbol{w} - \lambda \cdot \boldsymbol{r} - \mu \cdot \boldsymbol{1} = 0$
- $(n + 2)$ lineare Gleichungen (inkl. Nebenbedingungen) für $(n + 2)$ Variablen (inkl. λ, μ)
- Leerverkäufe erlaubt (sonst nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbed. $w_i \geq 0$)

Minumum-Variance-Portfolio MVP:

Von allen Portfolios auf der Efficient Frontier ist das MVP das Portfolio mit minimaler Varianz, ohne die zweite Nebenbedingung $\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} = \bar{r}_{pf}$.

- Vereinfachtes Optimierungsproblem: $\Sigma\boldsymbol{w} = \mu \cdot \boldsymbol{1}$, wobei $\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{1} = 1$
- Lösung: $\boldsymbol{w} = \mu \cdot \Sigma^{-1}\boldsymbol{1}$, $\mu = \boldsymbol{1}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{1}$
- Σ^{-1} = inverse Kovarianzmatrix: $\Sigma\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1}\Sigma = 1_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ (diagonale Einheitsmatrix)

Beispiel mit unkorrellierten Assets:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \to \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} \\ \vdots \\ \sigma_n^{-2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_i (1/\sigma_i^2)}$$

→ Gewichte sind proportional zur inversen Varianz der Assets

Beispiel mit zwei korrellierten Assets:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \to \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_2/\sigma_1 & -\rho \\ -\rho & \sigma_1/\sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} \to \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sigma_2/\sigma_1 - \rho \\ \sigma_1/\sigma_2 - \rho \end{pmatrix}$$

→ Bei positiver Korrelation kann das MVP eine Short-Position enthalten

Tangential-Portfolio TP:

Wir suchen das TP, also das Portfolio mit maximalem Sharpe Ratio $S_{pf} = (\bar{r}_{pf} - r_{rf})/\ \sigma_{pf}$:

- Die Nebenbedingung $\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} = \bar{r}_{pf}$ wird umgeschrieben: $\boldsymbol{w}^T \cdot (\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}) = \bar{r}_{pf} - r_{rf}$
- Die andere Nebenbedingung $\boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{1} = 1$ wird danach fallengelassen
- Minimierung des Risikos führt nur für jedes $\bar{r}_{pf}$ zum Portfolio auf der Tangente (gestrichelt in Fig. 3)
- Vereinfachtes Optimierungsproblem: $\Sigma\boldsymbol{w} = \lambda\big(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}\big)$, $\boldsymbol{w}^T \cdot \big(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}\big) = \bar{r}_{pf} - r_{rf}$
- Lösung: $\boldsymbol{w} = \lambda\, \Sigma^{-1}\big(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}\big)$, $\lambda^{-1} = \mathbf{1}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1})$

Beispiel mit unkorrellierten Assets:

- $w_i \sim (\bar{r}_i - r_{rf})/\sigma_i^2 \to w_i \cdot \sigma_i \sim S_i$
- Intepretation: Die «risk weights» $w_i\sigma_i$ der Assets sind proportional zu den Sharpe Ratios

Hauptsatz der Portfolio Theorie (2-Fund-Theorem):

Aus 2 beliebigen Portfolios auf der Efficient Frontier lässt sich die gesamte Efficient Frontier rekonstruieren.

Beispiel: seien $\boldsymbol{w}_{MVP}$ die Gewichte des MVP und $\boldsymbol{w}_{TP}$ die Gewichte des TP. Dann sind die Gewichte auf der Efficient Frontier $\alpha \cdot \boldsymbol{w}_{MVP} + (1-\alpha) \cdot \boldsymbol{w}_{TP}$.

Grenzen der Markovitz-Optimierung:

- Es wird angenommen, dass $\bar{r}_i, \sigma_i, \rho_{ij}$ eindeutig und bekannt sind. In der Praxis unterliegen diese Grössen Schätzfehlern und es besteht keine Einigkeit über ihre Werte.
- Es wird angenommen, dass die Varianz ein geeignetes Risikomass für alle Investoren ist. In der Praxis sind Investoren besonders über Tail Risk besorgt.
- Um das Tail Risk einzelner Assets abzuschätzen muss man neben erwarteter Rendite und Standardabweichung u.a. auch die Skewness und Kurtosis der Verteilungen kennen.

<u>Übungen:</u>

Ein Portfolio besteht aus 2 Aktien und 1 Anleihe mit Kovarianzmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{100}$.

Die erwarteten Renditen sind $\vec{r} = (3\%, 4\%, 2\%)^T$.

a. Berechnen Sie das Portfolio minimaler Varianz (MVP), seine Rendite und seine Standardabweichung

   Lösung: $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -5 & 0 \\ -5 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}\mathbf{1} \sim \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.18 \\ 0.58 \end{pmatrix}$

   (normiert so dass $\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{1} = 1$)

   $$\to \bar{r}_{pf} = \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} = 2.61\%, \sigma_{pf}^2 = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{w} \to \sigma_{pf} = 10.7\%$$

b. Der risikofreie Zins sei $r_{rf} = 1\%$. Berechnen Sie das super-effiziente Portfolio (TP), seine Rendite und seine Standardabweichung

Lösung: $\boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}(\boldsymbol{r} - r_{rf}\boldsymbol{1}) \sim \begin{pmatrix} 37 \\ 53 \\ 50 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.38 \\ 0.36 \end{pmatrix}$

(normiert so dass $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{1} = 1$)

$$\rightarrow \bar{r}_{pf} = \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{r} = 3.02\%, \sigma_{pf}^2 = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{w} \rightarrow \sigma_{pf} = 12.0\%$$

c. Berechnen Sie das Portfolio auf der Effizienzgrenze (ohne Cash) mit erwarteter Rendite 3%

Lösung: es muss eine Linearkombination von MVP und TP sein:

$$\alpha \cdot 2.61\% + (1-\alpha) \cdot 3.02\% = 3\% \rightarrow \alpha = \frac{3.00\% - 3.02\%}{2.61\% - 3.02\%} = 0.05$$

$$\rightarrow \boldsymbol{w} = 0.05 \cdot \boldsymbol{w}_{MVP} + 0.95 \cdot \boldsymbol{w}_{TP} = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.37 \\ 0.37 \end{pmatrix}$$

d. Sie wollen in das super-effiziente Portfolio mit Volatilität 2% investieren. Wieviel Cash müssen Sie halten, bzw. wieviel Geld müssen Sie sich leihen?

Lösung: $\sigma_{TP} = 12\% \rightarrow \frac{2\%}{12\%} = 17\%$ ist ins TP investiert, 83% ist Cash.

Ein Portfolio enthalte N unkorrelierte Assets mit Kovarianzmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$

e. Berechnen Sie das Portfolio minimaler Varianz

Lösung: $\boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}\boldsymbol{1} \rightarrow w_i = A/\sigma_i^2$ mit Normierungsfaktor $A = \sum_k (1/\sigma_k^2)$

f. Berechnen Sie das Tangential-Portfolio unter der Annahme, dass alle Assets das gleiche Sharpe Ratio haben

Lösung: *:* $\boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}\boldsymbol{\sigma} \rightarrow w_i = B/\sigma_i$ mit Normierungsfaktor $B = \sum_k (1/\sigma_k)$

g. Nehmen Sie nun an, dass alle Korrelationen 0.5 sind, und dass alle Assets die gleiche Standardabweichung σ haben. Was ist das Portfolio minimaler Varianz?

Lösung: da kein Asset vor einem anderen ausgezeichnet ist, sind alle $w_i = 1/N$.

h. Was ist die Standardabweichung des Portfolios in (c) im Limes $N \rightarrow \infty$?

Lösung: $\sigma_{pf}^2 = \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\Sigma\boldsymbol{w} = \frac{1}{N^2}\sigma^2(N + 0.5 \cdot N(N-1)) \rightarrow 0.5\,\sigma^2$ für $N \rightarrow \infty$

Es bleibt ein nicht wegdiversifizierbares Risiko.

4. CAPM Model

Was geschieht, wenn sich alle Investoren über $\bar{r}, \Sigma, r_{rf}$ einig sind, alle die Varianz als Risikomass verwenden und alle in das gleiche optimale Tangentialportfolio investieren?

- Das Tangentialportfolio TP wird zum «Marktportfolio», in dem jede Aktie, und allgemein jedes Asset gemäss seiner Marktkapitalisierung gewichtet ist.
- Investoren kombinieren das TP mit Cash. Ihre Portfoliorenditen liegen daher auf der Kapitalmarktlinie im $\sigma - \bar{r}$ –Diagramm. Ihre Steigung ist der «Marktpreis für Risko»:

  $\bar{r} = r_{rf} + \frac{\bar{r}_M - r_{rf}}{\sigma_M} \cdot \sigma$

- Alle erwarteten Asset-Renditen liegen auf der «Wertpapierlinie» im $\beta - \bar{r}$ –Diagramm:

  $$\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i(\bar{r}_M - r_{rf}), \quad \text{wobei} \quad \beta_\mathrm{i} = \frac{1}{\sigma_M^2}\mathrm{Cov}(r_i, r_M) = \frac{1}{\sigma_M^2}(\Sigma \cdot \mathbf{w})_i$$

  Beweis: $\boldsymbol{\beta} \sim \Sigma \cdot \boldsymbol{w} \sim \Sigma\Sigma^{-1}(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}) = C(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1})$

  Der Normierungsfaktor C folgt aus Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $\boldsymbol{w}$:

  $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sigma_M^2}\mathrm{Cov}(r_M, r_M) = 1,\ \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}) = (r_M - r_{rf}) \to C^{-1} = (r_M - r_{rf})$

Um die erwartete Rendite eines Assets zu bestimmen, muss also nur dessen Beta zum Marktportfolio bekannt sein. Die Marktpreise stellen sich demnach durch Angebot und Nachfrage automatisch so ein, dass die Renditen dem Capital Asset Pricing Model folgen.

- Assets mit $\beta = 0$ haben erwartete Rendite $r_i = r_{rf}$: keine Risikoprämie für weg-diversifizierbares Risiko
- Assets mit $\beta < 0$ haben erwartete Rendite $r_i < r_{rf}$: man «zahlt drauf» für «save-haven-assets», die negativ mit dem Markt korrelliert sind.

Systematisches vs. Idiosynchratische Risiko:

Die Renditen können modelliert werden als

$r_i = r_{rf} + \beta_i(r_M - r_{rf}) + \epsilon_i \quad \text{mit} \quad E(\epsilon_i) = cov(r_M, \epsilon_i) = cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0,$

wobei ϵ_i unabhängige $N(0, \mathrm{Var}(\epsilon_i))$ verteilte Zufallsvariablen sind. Das CAPM Model zerlegt die Varianz der Assets in systematisches Risiko $\beta_i^2\sigma_M^2$ und idiosynchratisches Risiko $\mathrm{Var}(\epsilon_i)$:

$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \mathrm{Var}(\epsilon_i)$

- Systematisches Risiko ist nicht weg-diversifizierbar und verdient eine Risikoprämie
- Idiosynchratisches Risiko ist weg-diversifizierbar und verdient keine Risikoprämie

Performance-Messung:

- Jensen's Alpha J misst die Über- bzw. Unterperformance eines Portfolios relativ zur Erwartung des CAPM-Modells: $r_{pf} - r_{rf} = \beta_i(\bar{r}_M - r_{rf}) + J$.
- Das Sharpe-Ratio eines Portfolios $S_{pf} = (r_{pf} - r_{rf})/\sigma_{pf}$ misst das Verhältnis von Überschussrendite zu Risiko. Es kann mit dem Marktpreis für Risiko, also mit dem Sharpe Ratio des Marktportfolios verglichen werden.

Übungen:

Im Inselstaat Isolatien besteht der Aktienmarkt aus 5 Aktien, deren Betas zum Marktportfolio gegeben sind durch $\beta_i = (0.8,1.3,1.7,1,0.2)$. Rendite und Risiko des Marktportfolios sind $r_M = 5\%, \sigma_M = 10\%$. Der risikofreie Zins ist $r_{rf} = 1\%$.

a. Was ist die Gleichung für die Kapitalmarktlinie?

   Lösung: $\bar{r} = r_{rf} + \frac{\bar{r}_M - r_{rf}}{\sigma_M} \cdot \sigma = 1\% + 0.4 \cdot \sigma$

b. Berechnen Sie die erwarteten Renditen der 5 Aktien

   Lösung: $\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i(\bar{r}_M - r_{rf}) \rightarrow \bar{r}_i = (4.2,6.2,7.8,5.0,1.8)\%$

c. Angenommen, die 5 Aktien sind unkorrelliert, haben gleiche Volatilität σ, und das Marktportfolio ist eine Kombination dieser 5 Aktien. Was ist deren jeweilige Marktkapitalisierung? Der Gesamtwert des Aktienmarkts ist 1 Mio Iso-$.

   Lösung: $\boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}(\boldsymbol{r} - r_{rf}\mathbf{1}) \rightarrow w_i = \frac{1}{\sigma^2}(r_i - 1\%)$

   $\rightarrow \mathrm{w_i} = (168,248,312,200,72) \cdot 1000$ Iso-$ nach Normierung auf 1 Mio Iso-$

d. Der lokale Portfoliomanager hat mit diesen 5 Aktien eine Portfoliorendite von 7% bei einer Volatilität von 12% und einem Beta von 1.3 erzielt. Was sind das Sharpe Ratio und Jensen's α?

   Lösung: $r_{pf} - r_{rf} = \beta_i(\bar{r}_M - r_{rf}) + J \rightarrow 6\% = 1.3 \cdot 4\% + J \rightarrow J = 0.8\%$

   $S_{pf} = \frac{r_{pf} - r_{rf}}{\sigma} = 0.5$, also höher als für das Marktportfolio (0.4).

5. Faktormodelle

Faktormodelle reduzieren die Risikoquellen auf wenige Faktoren, und reduzieren damit die Fehlerquellen für die Schätzung der Parameter $\bar{r}, \Sigma$ für die Portfolio-Optimierung.

1-Faktormodell mit Faktorrenditen f mit Erwartungswert $\bar{f}$ und Standardabweichung σ_f:

- Modellierung der Renditen: $r_i = a_i + b_i f + \epsilon_i$ mit $E(\epsilon_i) = cov(f, \epsilon_i) = cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$
- Die Achsenabschnitte a_i und Faktorladungen b_i werden durch Regression geschätzt
- Erwartete Renditen: $\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f}$
- Erwartete Varianz: $\sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$
- Erwartete Kovarianz: $\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2$ für $i \neq j$
- Rendite von Portfolios mit Gewichten $\vec{w}$: $r = \vec{w} \cdot \vec{a} + \vec{w} \cdot \vec{b}\, f + \vec{w} \cdot \vec{\epsilon}\,,\ \sigma_e^2 = \sum_i w_i^2\, e_i^2$
- Idiosynchratisches Risiko σ_e^2 kann wegdiversifiziert werden

Multi-Faktormodelle mit Faktorrenditen $f_1, \dots, f_n$:

- 2-Faktor-Modell: $r_i = a_i + b_{i1} f_1 + b_{i2}\, f_2 + \epsilon_i$
- Multifaktormodelle: $\boldsymbol{r}_i = a_i + \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{f} + \epsilon_i$
- Typischerweise 3-15 Faktoren

- Externe Faktoren: Wirtschaftswachstum, Inflation, Arbeitslosenquote, …
- Extrahierte Faktoren: Aktienmarktindizes, Zinsen, Rohstoffpreise, Wechselkurse, …
- Firmeneigenschaften: PE-Ratio, Dividend Yield, Earnings Forecasts, …

Arbitrage Pricing Theory (APT):

- Angenommen, wir haben den Markt vollständig durch n Faktoren beschrieben: $\boldsymbol{r}_i = a_i + \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{f} + \epsilon_i$, wobei die ϵ_i unabhängige $N(0, \sigma_i^2)$ verteilte Variablen sind
- Arbitrage-Freiheit im weiteren Sinn: Kein Profit ohne systematisches Risiko
- Daraus folgt: $\bar{r}_i - r_{rf} = \boldsymbol{b}_i(\bar{\boldsymbol{f}} - r_{rf}\mathbf{1})$, also $\bar{r}_i = r_{rf}(1 - \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{b}_i) = r_{rf}$ wenn $\boldsymbol{b}_i = 0$

CAPM Model vs. APT:

- Bisher konnten die erwarteten APT-Faktorenditen $\bar{\boldsymbol{f}}$ beliebig sein
- Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Faktorrenditen dem CAPM-Modell folgen: $\bar{f}^{(k)} - r_{rf} = \beta_f^{(k)}(r_M - r_{rf})$ mit $\beta_f^{(k)} = \frac{1}{\sigma_M^2} \operatorname{Cov}(f^{(k)}, M)$
- Dann folgt auch die Rendite jedes einzelnen Assets dem CAPM Modell: $\bar{r}_i - r_{rf} = \beta_i(r_M - r_{rf})$ mit $\beta_i = \sum_k \operatorname{Cov}(r_i, f^{(k)})\, \beta_f^{(k)}$
- Das CAPM Modell ist also ein APT-Modell mit zusätzlicher Effizienzannahme. Es ist *nicht* nur ein 1-Faktor-Modell, denn es erlaubt eine beliebige Kovarianzmatrix zwischen den Assets (im 1-Faktor-Modell wäre $\operatorname{Cov}_{ij} = b_i b_j \sigma_M^2$).

<u>Übungen:</u>

Betrachten Sie den S&P500 als einzigen Marktfaktor mit Volatilität $\sigma_f = 16\%$ und langfristiger Rendite $\bar{f} = 7\%$ bei einem risikolosen Zins von $r_{rf} = 3\%$. Die Rendite zweier Aktien sei gegeben durch $r_i = a_i + b_i f + \epsilon_i$ mit $b_1 = 0.6, b_2 = 1.2$, und Volatilitäten der zufälligen Fluktuationen $\sigma_{\epsilon_1} = 8\%, \sigma_{\epsilon_2} = 10\%$.

a. Benutzen Sie Arbitrage Pricing Theory, um a_1 und a_2 zu berechnen

   Lösung: $a_1 = r_{rf}(1 - b_1) = 1.2\%, a_2 = r_{rf}(1 - b_2) = -0.6\%$

b. Berechnen Sie die erwarteten Renditen und Volatilitäten der beiden Aktien

   Lösung: $\bar{r}_1 = a_1 + b_1\bar{f} = 5.4\%$, $\bar{r}_2 = a_2 + b_2\bar{f} = 7.8\%$

   $\sigma_1^2 = b_1^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_1}^2 \rightarrow \sigma_{\epsilon_1} = 12.5\%$, $\sigma_2^2 = b_2^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon_2}^2 \rightarrow \sigma_{\epsilon_2} = 21.6\%$

c. Zerlegen Sie die Varianz der Aktien in je eine systematische und eine idiosynchratische Komponente. Was ist das Verhältnis beider Komponenten?

   Lösung: $\frac{b_1^2\sigma_f^2}{\sigma_{\epsilon_1}^2} = 1.44$, $\frac{b_2^2\sigma_f^2}{\sigma_{\epsilon_2}^2} = 3.69$

d. Berechnen Sie die Kovarianz und die Korrelation der beiden Aktien

   Lösung: $\sigma_{12} = b_1 b_2 \sigma_f^2 = 0.0184$, $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = 0.68$

6. Daten & Statistik

Einfluss der Periodenlänge bei p gleich langen Perioden pro Jahr:

- Jährliche erwartete Rendite $\bar{r}_y$ → erwartete Rendite über Periode: $\bar{r}_p = \frac{\bar{r}_y}{p}$
- Jährliche Standardabweichung σ_y → Standardabweichung über Periode: $\bar{\sigma}_p = \frac{\sigma_y}{\sqrt{p}}$
- Verhältnis Signal $\bar{r}_p$ zu Rauschen σ_p: $\frac{1}{\sqrt{p}}$
- Beispiel: $\bar{r}_y = 6\%$, $\sigma_y = 24\%$, $p = (1, 12, 260)$ (Jahr, Monat, Tag):
  $\bar{r}_p = (6\%, 0.5\%, 0.023\%)$, $\bar{\sigma}_\mathrm{p} = (24\%, 6.9\%, 1.5\%)$, $\bar{r}_p : \bar{\sigma}_\mathrm{p} = (1{:}4, 1{:}14, 1{:}64)$

Schätzungen basierend auf Sample r_t einer $N(\bar{r}, \sigma^2)$ Verteilung (hier: t = Zeit)

- Schätzung der erwarteten Rendite: $\hat{\bar{r}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$
- Schätzfehler der erwarteten Rendite: $\sigma_{\hat{\bar{r}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$
- Schätzung der Varianz: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \hat{\bar{r}})^2 \to E[s^2] = \sigma^2$
- Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$ statt $\frac{1}{n}$ kompensiert dafür, dass $\hat{\bar{r}}$ aus dem gleichen Sample geschätzt wird
- Schätzfehler der Varianz: $\mathrm{Var}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \to \mathrm{Std}(s^2) = \sigma^2 \sqrt{2/(n-1)}$

Beispiel

- $\bar{r}_y = 4\%$, $\sigma_y = 20\%$, $n = (12, 120, 1200)$ monatliche Renditen (1,10,100) Jahre
- Geschätzte Rendite: $4\% \pm (5.8\%, 1.8\%, 0.6\%)$
- Geschätzte Varianz: $0.04 \pm (0.009, 0.0036{,}0.0016)$

Die Renditeschätzung hat selbst über 10 Jahre einen hohen Fehler. Über 100 Jahre ist der Fehler zwar klein genug, aber das Ergebnis kann heute nicht mehr als relevant betrachtet werden. Dagegen ist der Schätzfehler für die Varianz ist schon über 10 Jahre klein genug

Für zuverlässigere Schätzungen der erwarteten Renditen muss man die Schätzung aus historischen Daten ergänzen bzw. anpassen durch weitere Informationen, z.B. durch fundamentale Aktien- und Marktanalyse, oder durch die Vorhersage des CAPM Modells.

<u>Übungen:</u>

Eine Aktie habe eine mittlere tägliche Rendite von 0.02% und eine tägliche Standardabweichung von 1%, also ein Signal-to-Noise-Ratio von 1:50.

a. Berechnen Sie die mittlere Rendite, die Standardabweichung, und das Signal-to-Noise-Ratio für die Periodenlängen
    i. 5 Handelstage (1 Woche)
    ii. 20 Handelstage (1 Monat)
    iii. 260 Handelstage (1 Jahr)
    iv. 10 Jahre

Lösung für (i,ii,iii,iv):

Rendite $\bar{r} = 0.02\% \cdot (5,20,260,2600) = (0.1\%, 0.4\%, 5.2\%, 52\%)$

Standardabweichung $\sigma = 1\% \cdot (\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{260}, \sqrt{2600}) = (2.2\%, 4.5\%, 16.1\%, 51\%)$

Signal-to-noise $= \frac{1}{50} \cdot (\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{260}, \sqrt{2600}) \sim \left(\frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}\right)$

b. Die 5 täglichen Renditen der ersten Woche seien $(0.72\%, -1.21\%, 0.22\%, 1.13\%, -0.53\%)$. Schätzen Sie Mittelwert und Varianz.

Lösung: $\hat{\bar{r}} = \frac{1}{5}\sum_{t=1}^{5} r_t = 0.066\%$, $s^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(r_i - \hat{\bar{r}})^2 = 0.000089$

c. Berechnen Sie den Schätzfehler der mittleren täglichen Rendite, wenn diese basierend auf täglichen Renditen über die Perioden (i,ii,iii,iv) geschätzt wird

Lösung: $\sigma_{\hat{\bar{r}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (0.67\%, 0.22\%, 0.062\%, 0.020\%)$

d. Berechnen sie den Schätzfehler der Varianz über die gleichen Perioden

Lösung: $\mathrm{Std}(s^2) = \sigma^2 \sqrt{2/(n-1)} = (1\%)^2 \cdot (0.71, 0.32, 0.088, 0.028)$

Ein Portfolio besteht aus 2 Assets mit Standardabweichung 10% (für beide Assets) und Korrelation ρ. Die erwarteten Renditen sind identisch: $r_1 = r_2 = 6\% \pm 2\%$ (d.h. mit Schätzfehler 2%). Der risikofreie Zins ist Null.

e. Was sind die optimalen Gewichte, also die Gewichte des Tangentialporfolios? Was sind die optimalen Sharpe Ratios in den Fällen $\rho = (0, +0.8, -0.8)$?

Lösung: $\Sigma = \frac{1}{100} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \to \Sigma^{-1} = \frac{100}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} \sim \Sigma^{-1}\bar{\boldsymbol{r}}$,

$$\text{normiert, so dass } w_1 + w_2 = 1 \to \text{ Für alle } \rho\text{: } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}$$

f. Drei Portfoliomanager Armin, Beate und Chris schätzen die Renditen basierend auf drei verschiedenen Samples:

i. Sample A: $\bar{r}_1 = 4\%, \bar{r}_2 = 8\%$
ii. Sample B: $\bar{r}_1 = 6\%, \bar{r}_2 = 6\%$
iii. Sample C: $\bar{r}_1 = 8\%, \bar{r}_2 = 4\%$

Basierend auf diesen Schätzungen konstruieren Armin, Beate und Chris jeweils ihr vermeintliches super-effizientes Portfolio. Was sind die vermeintlichen optimalen Gewichte $w_A^{(1)}, w_A^{(2)}, w_B^{(1)}, w_B^{(2)}, w_C^{(1)}, w_C^{(2)}$ im Fall $\rho = 0$?

Lösung: $\boldsymbol{w}_A = \begin{pmatrix} 33\% \\ 67\% \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_B = \begin{pmatrix} 50\% \\ 50\% \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_C = \begin{pmatrix} 67\% \\ 33\% \end{pmatrix}$

g. Was sind die Sharpe Ratios, die Armin, Beate und Chris jeweils (i) erwarten, (ii) tatsächlich langfristig erreichen? Vergleichen Sie mit den optimalen Sharpe Ratios aus Aufgabe (a)

Lösung: $\hat{S} = \boldsymbol{w} \cdot \hat{\hat{\boldsymbol{r}}}/\sigma,\ \sigma^2 = \boldsymbol{w}^T \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \sigma_A = \sigma_C = 10\% \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}$, $\sigma_B = 10\% \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

A,C: erwartet: $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4\% \\ 8\% \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sigma_A}$ =0.89, erreicht: $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\% \\ 6\% \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sigma_A} = 0.81$

B erwartet, erreicht, und optimal: $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\% \\ 6\% \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sigma_A}$ =0.85

Die erwarteten Sharpe Ratios von A und C sind höher, die tatsächlich von A und C langfristig erreichten Sharpe Ratios sind niedriger als die optimalen Sharpe Ratios.

h. Wiederholen Sie die Analyse für $\rho = (+0.8, -0.8)$. Wie beeinflusst die Korrelation die Differenz zwischen erwarteten und tatsächlich erreichten Sharpe Ratios?

Lösung: Die Diskrepanz zwischen erwarteten und langfristig tatsächlich erreichten Sharpe Ratios wird grösser bei positiver Korrelation, und geringer bei negativer Korrelation:

Sharpe Ratios	A und C erwartet	A und C erreicht	B und Optimal
$\rho = 0.8$	0.89	0.45	0.63
$\rho = 0$	0.89	0.81	0.85
$\rho = -0.8$	1.91	1.89	1.90