Zurich University
of Applied Sciences

School of
Engineering

IDP Institute of
Data Analysis and
Process Design

# Risk Engineering:
# Multivariate Modelle

ZHAW:
Wirtschaftsingenieurwesen — Wirtschaftmathematik

Wolfgang Breymann

11. März 2014

# Gliederung

# Hinweis

Dieser Vorlesung liegt das Buch

> *Quantitative Risk Management — Concepts, Techniques, Tools von A. J. McNeil, R. Frey und P. Embrechts (McNeil et al., 2005)*

zugrunde. Ausserdem wird Material aus

> *P. Embrechts, Lectures at the Federal Reserve Bank of Boston, September 26-30, 2005 (Embrechts, 2005)*

verwendet. Sämtliche Fehler gehen jedoch auf das Konto des Autors dieser Vorlesung.

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

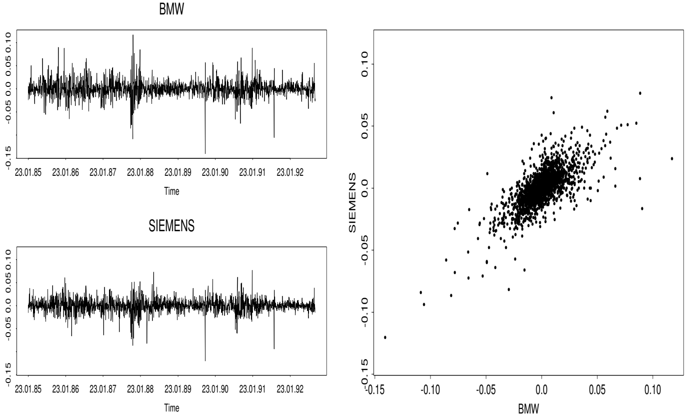
# Multivariate Risikofaktoren: Allgemeines

Angenommen, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ seien beobachtete Risikofaktor-Änderungen, entweder tägliche (log.) Renditen im Zusammenhang von Marktrisiken oder um Renditen zu längeren (monatlichen/jährlichen) Zeithorizonten im Falle von Kreditrisiko. Wie sehen geeignete multivariate Modelle aus?

- Verteilungsbasierte Modelle: Die unbedingte Risikomodellierung erfordert geeignete multivariate Verteilungen, die unter der Annahme stationärer Beobachtungen kalibriert werden.
- Dynamische Modelle: Bei der bedingten Modellierung werden multivariate Zeitreihenmodelle benutzt, die Risikovorhersagen ermöglichen.

Dieses Kapitel behandelt unbedingte Modelle.

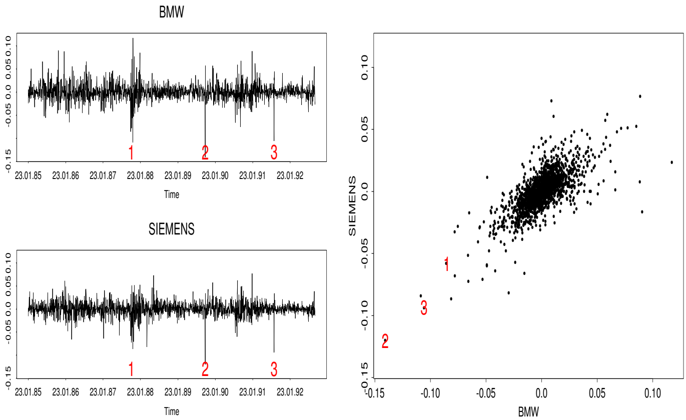
# Bivariate tägliche Renditen




BMW- und Siemensaktie: 2000 tägliche Renditen von 1985–1993.

(Aus Embrechts, 2005)

# Drei extreme Tage




Die extremen Tage: 19.10.1987, 16.10.1989, 19.08.1991

(Aus P. Embrechts, Lectures at the Federal Reserve Bank of Boston, September 26-30, 2005.)

# Geschichte


The Philadelphia Inquirer
Dow Dives 508.32 Points
In Panic on Wall Street
Navy blasts Iran oil site in retaliation
Billions lost in trading
Archive Photos/Ed Carlin

New York, 19. Oktober 1987

Berliner Mauer 

16. Oktober 1989

Der Kremel, 19. August 1991 

(Aus P. Embrechts, Lectures at the Federal Reserve Bank of Boston, September 26-30, 2005.)

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Multivariate Verteilung & Überlebensfunktionen

Ein $d$-dim. Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^\mathsf{T}$ von Risikofaktor-Änderungen hat die gemeinsame Verteilung

$$F_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = F_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_d) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d).$$

Die Randverteilung $F_i$ des $i$-ten Risikos lautet

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty).$$

Manchmal arbeitet man mit der sog. Überlebensfunktion

$$\bar{F}_\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \bar{F}_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_d) = P(\mathbf{X} > \mathbf{x}) = P(X_1 > x_1, \ldots, X_d > x_d)$$

und den entsprechenden Randverteilungen

$$\bar{F}_i(x_i) = P(X_i > x_i) = \bar{F}(-\infty, \ldots, -\infty, x_i, -\infty, \ldots, -\infty).$$

# Wahrscheinlichkeitsdichten und Unabhängigkeit

**Wahrscheinlichkeitsdichten.** Wenn die Dichte $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ existiert, dann gilt folgende Beziehung:

$$F(x_1, \ldots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, \ldots, u_d) \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_d$$

**Unabhängigkeit.** Die Komponenten von $\mathbf{X}$ werden paarweise unabhängig genannt genau dann, wenn

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} F_i(x_i), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

oder, falls $\mathbf{X}$ eine gemeinsame Dichte der Form besitzt, genau dann, wenn

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

# Momente

Der Mittelwertvektor von $\mathbf{X}$ ist gegeben als $E(\mathbf{X}) := (E(X_1), \ldots, E(X_d))^\top$ und die Kovarianzmatrix als

$$\operatorname{cov}(\mathbf{X}) = E((\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^\top)$$

(unter der Annahme, dass beide Momente endlich sind).
Mit der Schreibweise $\Sigma$ für $\operatorname{cov}(\mathbf{X})$ ist das Matrixelement $(i, j)$ gegeben als $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$.
Die Korrelationsmatrix $P$ von $\mathbf{X}$ hat die Matrixelemente

$$P_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\operatorname{var}(X_i)\operatorname{var}(X_j)}},$$

d.h., die gewöhnliche, paarweise lineare Korrelation von $X_i$ und $X_j$.
Mit der Definition $\Delta := \operatorname{diag}(\sqrt{\sigma_{11}}, \ldots, \sqrt{\sigma_{dd}})$ gilt $P = \Delta^{-1}\Sigma\Delta^{-1}$.

# Momente II

Mittelwertvektoren und Kovarianzmatrizen verhalten sich sehr einfach unter linearen Operationen auf dem Vektor $\mathbf{X}$.

Für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und jeden Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\begin{aligned} E(B\mathbf{X} + \mathbf{b}) &= BE(\mathbf{X}) + \mathbf{b} \\ \operatorname{cov}(B\mathbf{X} + \mathbf{b}) &= B \operatorname{cov}(\mathbf{X}) B^\mathsf{T}. \end{aligned} \tag{1}$$

Kovarianzmatrizen (und folglich auch Korrelationsmatrizen) müssen positiv semidefinit sein; mit $\Sigma = \operatorname{cov}(\mathbf{X})$ folgt sofort aus Gl. (1), dass $\operatorname{var}(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\Sigma\,\mathbf{a} \geq 0$ für beliebige $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$.

# Schätzer für Mittelwertvektor, Kovarianz und Korrelation

Es wird angenommen, die Beobachtungen $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ sind iid oder zumindest seriell unkorreliert mit Mittelwert-Vektor $\boldsymbol{\mu}$, endlicher Kovarianzmatrix $\Sigma$ und Korrelationsmatrix $P$.
Standard "Methods-of-moments" Schätzer von $\boldsymbol{\mu}$ und $\Sigma$ sind durch den Stichproben-Mittelwertvektor $\bar{\mathbf{X}}$ und die Stichproben-Kovarianzmatrix $S$ gegeben. Sie sind definiert als

$$\bar{\mathbf{X}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i, \qquad S := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^{\mathsf{T}}.$$

$\bar{\mathbf{X}}$ ist erwartungstreuer Schätzer, aber $S$ hat einen Bias.
Für die erwartungstreue Version gilt $S_u = nS/(n-1)$.
Das Element $(j,k)$ der Stichproben-Korrelationsmatrix $R$ ergibt sich als $r_{jk} = s_{jk}/\sqrt{s_{jj}s_{kk}}$.
Mit $D = \operatorname{diag}(\sqrt{s_{11}}, \ldots, \sqrt{s_{dd}})$ gilt $R = D^{-1}SD^{-1}$.

# Eigenschaften der Schätzer?

- Eigenschaften der Schätzer $\bar{\mathbf{X}}$, $S$ und $R$ hängen stark von der wahren multivariaten Verteilung der Beobachtungn ab. Sie sind nicht immer notwendigerweise die besten Schätzer von $\boldsymbol{\mu}$, $\Sigma$ und $P$. Im Finanz-Risikomanagement werden diese Schätzer routinemässig benutzt, und dieser Punkt wird oft ausser Acht gelassen.
- Wenn die Daten $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ iid normalverteilt sind, dann sind $\bar{\mathbf{X}}$ und $S$ die Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) von Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\Sigma$. Ihr Verhalten als Schätzer ist wohl-bekannt, und das statistische Schließen auf die Modellparameter ist relativ unproblematisch.
- Für Risiko-Faktor-Renditen über kurze Zeitintervalle ist die multivariate Normalverteilung jedoch häufig keine gute Beschreibung, und andere Schätzer des wahren Mittelwertvektors $\boldsymbol{\mu}$ und der Kovarianzmatrix $\Sigma$ können bezüglich **Effizienz** und **Robustheit** geeigneter sein.

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Multivariaten Normalverteilung: Dichte

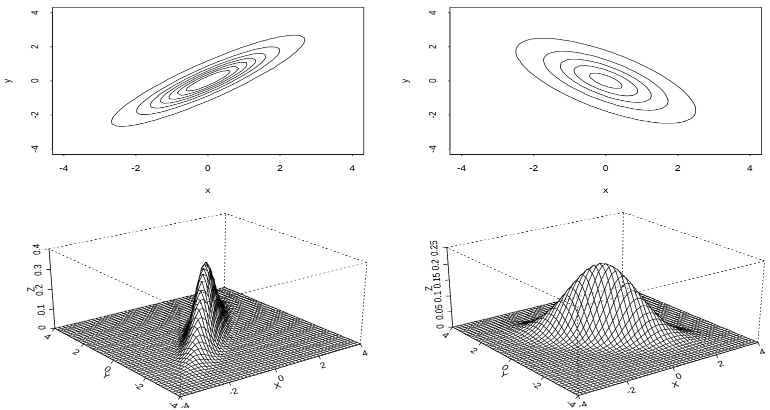
Die multivariate Normalverteilung hat die gemeinsame Dichte

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist eine positiv semi-definite Matrix.

- Wenn $\mathbf{X}$ Dichte $f$ hat, dann ist der Mittelwertvektor dieser Verteilung $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\operatorname{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma$.
- Klarerweise sind die Komponenten von $\mathbf{X}$ genau dann paarweise unabhängig, wenn $\Sigma$ diagonal ist. Beispielsweise ist $\mathbf{X} \sim N_d(\mathbf{0}, I_d)$ dann und nur dann, wenn $X_1, \ldots, X_d$ iid $N(0,1)$ sind, d.h., standard-normalverteilt.

# Bivariaten Normalverteilung: Illustration




Links: $\rho = 0.9$; rechts: $\rho = -0.7$.

# Multivariate Normalverteilung: Eigenschaften

- Randverteilung sind univariat normalverteilt.
- Linearkombinationen $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X} = a_1X_1 + \ldots + a_dX_d$ sind univariat normalverteilt mit Verteilung $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{X} \sim N(\mathbf{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^\mathsf{T}\Sigma\mathbf{a})$.
- Bedingte Verteilungen sind univariat normalverteilt.
- Die Konvolution zweier unabhängiger, normalverteilter Zufallsvektoren $\mathbf{X} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ und $\mathbf{Y} \sim N_d(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\Sigma})$ ist normalverteilt mit $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim N_d(\boldsymbol{\mu} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$.
- Summe der Quadrate: $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\mathsf{T}\Sigma^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_d^2$ (chi-quadrat).

Simulationsalgorithmus:

1. Führe Cholesky-Dekomposition $\Sigma = AA^\mathsf{T}$ durch.
2. Erzeuge Vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_d)^\mathsf{T}$ mit iid $Z_i \sim N(0, 1)$.
3. Berechne $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z}$.

# Testen auf multivariate Normalverteilung

- Die univariaten Randverteilungen müssen normal sein, was sich grafisch mit QQplots beurteilen oder formal mit Hilfe von Tests (z.B. Jarque-Bera oder Anderson-Darling) bestellen lässt.
- Normalität der Randverteilungen ist nicht hinreichend für gemeinsame Normalität. Es gibt spezielle numerische Tests (siehe Skript). Grafische Beurteilung ist möglich mit Hilfe der Größen

$$\{(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^\mathsf{T} S^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) : i = 1, \ldots, n\}.$$

  Sie müssen (näherungsweise) eine Stichprobe von einer $\chi^2_d$-Verteilung darstellen, was sich ebenfalls mit Hilfe eines QQPlots grafisch beurteilen lässt.

# Multivariate Normalverteilung: Unzulänglichkeiten

- Die Ränder der univariaten Normalverteilung sind nicht stark genug; sie geben extremen Ereignissen nicht genug Gewicht.
- Gleichzeitige extreme Ereignisse in verschiedenen Randverteilungen sind zu selten. Die gemeinsamen Ränder der Verteilung geben gemeinsamen Extremwerten nicht genug Gewicht.
- Die Verteilungen haben eine starke Symmetrie, bekannt als elliptische Symmetrie. Beobachtungen fordern häufig schiefe Verteilungen.

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Normale Mischverteilungen: Grundlagen

- Seien $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, I_d)$ Vektor standard-normalverteilter, iid ZVs, $W \geq 0$ ist eine nicht-negative, skalare ZV unabhängig von $\mathbf{Z}$ und $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ eine konstante Matrix bzw. Vektor.
- Der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ folgt einer (multivariaten) Varianz-Mischung von Normalverteilungen, wenn gilt

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W} A \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

- Direkte Rechnung: $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ und $cov(\mathbf{X}) = E(W)\Sigma$ mit $\Sigma = AA^{\mathsf{T}}$.
- $\mu$ und $\Sigma$ heißen **Lagevektor** und **Dispersionsmatrix**.
- Es gilt $\mathbf{X}|W = w \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, w\Sigma)$ mit $\Sigma = AA^{\mathsf{T}}$.
- $W$ ist Modell von Schock als Folge neuer Information, die die Volatilität sämtlicher Komponenten beeinflusst.
- Verteilung von $\mathbf{X}$ ist Mischung von Normalverteilungen, aber selbst nicht normalverteilt.

# Normale Mischverteilungen: Beispiele

- Multivariate 2-Punkt Mischung von Normalverteilungen.

  $$W = \begin{cases} k_1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ k_2 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases} \qquad k_1 > 0, k_2 > 0, k_1 \neq k_2.$$

  Ließe sich zur Modellierung zweier Regime (normal und extrem) benutzen.

- Multivariate $t$-Verteilung:
  $W$ ist invers-gamma verteilt, $W \sim \mathrm{Ig}(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu)$. Dies resultiert in einer multivariaten $t$-Verteilung mit $\nu$ Freiheitsgraden.
  Gleichwertig damit: $\nu/W \sim \chi^2_\nu$.

- Symmetrische verallgemeinerte hyperbolische Verteilung:
  $W$ folgt einer GIG (verallgemeinerten invers-Gaußschen) Verteilung.

# Multivariate $t$-Verteilung

Dichte:

$$f(\mathbf{x}) = k_{\Sigma,\nu,d} \left(1 + \frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-(\nu+d)/2}.$$

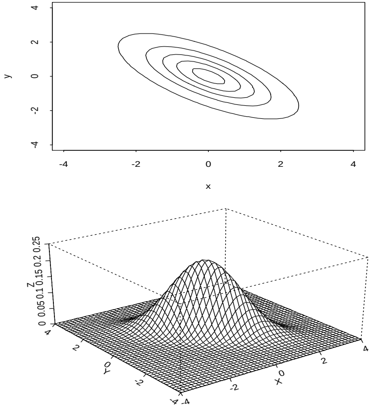
mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, positiv definiter Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$, Freiheitsgrade $\nu$ und Normierungskonstante $k_{\Sigma,\nu,d} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+d)\right)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu)(\pi\nu)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}}$.

- Wenn $\mathbf{X}$ Dichte $f$ hat, dann gilt

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \operatorname{cov}(\mathbf{X}) = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma,$$

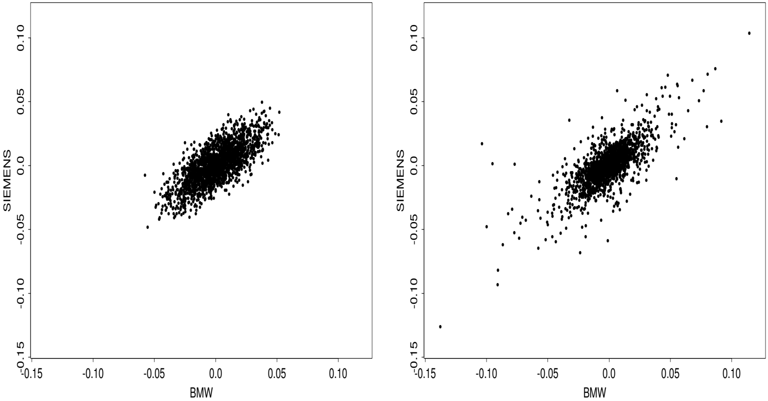
  mit Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Dispersionsmatrix $\Sigma$.
- Wenn $\Sigma$ diagonal, dann sind die Komponenten von $\mathbf{X}$ unkorreliert. Sie sind jedoch nicht unabhängig!
- Die multivariate $t$-Verteilung hat „Heavy Tails“.

# Bivariate Normalverteilung und $t$-Verteilung



Bivariate Dichte der Normalverteilung (links) und $t$-Verteilung (rechts). $\rho = -0.7$, $\nu = 3$. Varianzen gleich 1 in beiden Abbildungen.

# Gefittete Normal- und $t_3$-Verteilung




2000 simulierte Datenpunkte. Modell: Normalverteilung (links) und $t_3$-Verteilung (rechts), gefitted mit Maximum-Likelihood-Methode an BMW-Siemens-Daten.

# Multivariate Mittelwert-Varianz-Mischungen

Normale Varianzmischungen haben elliptische Symmetrie. Man kann Asymmetrie und Schiefe einführen, indem man folgende, allgemeinere Mischungen betrachtet:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} + \sqrt{W}A\mathbf{Z},$$

wobei $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor von Asymmetrieparametern ist und sämtliche anderen Größen wie in Gl. (2) definiert sind.
Für $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ ergibt sich wieder die elliptische Familie von Varianzmischungen.
Wichtigtes Beispiel:
Wenn $W$ einer GIG-Verteilung folgt, erhalten wir die verallgemeinerte hyperbolische Verteilungsfamilie.

# Momente von Mittelwert-Varianz-Mischungen

- Bei gegebenem Wert $W = w$ gilt für die bedingte Verteilung

$$\mathbf{X}|W = w \sim N_d(\boldsymbol{\mu} + w\boldsymbol{\gamma}, w\Sigma).$$

- Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= E(E(\mathbf{X}|W)) = \mu + E(W)\boldsymbol{\gamma} && (3) \\ \mathrm{cov}(\mathbf{X}) &= E(\mathrm{cov}(\mathbf{X}|W)) + \mathrm{cov}(E(\mathbf{X}|W)) \\ &= E(W)\Sigma + \mathrm{var}(W)\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}, && (4) \end{aligned}$$

- Bemerkungen:
  - Die Kovarianzmatrix existiert nur, wenn $\mathrm{var}(W) < \infty$. (Bei (symmetrischen) Varianzmischungen wird lediglich $E(W) < \infty$ gefordert).
  - Aus (3) und (4) folgt, dass
    - $\boldsymbol{\mu}$ in der Regel nicht der Mittelwertvektor und
    - $\Sigma$ nicht die Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ ist.

# Verallgemeinerte inverse Gaußsche Verteilung

- Dichte der verallgemeinerten invers-Gaußschen Verteilung:

$$f(w) = C \cdot w^{\lambda-1} \exp(-\frac{1}{2}(\chi w^{-1} + \psi w))$$

mit Normierungskonstante

$$C = \frac{\chi^{-\lambda} \left(\sqrt{\chi\psi}\right)^{\lambda}}{2K_\lambda \left(\sqrt{\chi\psi}\right)}.$$

- $K_\lambda$ bezeichnet die modif. Besselfunktion dritter Art mit Index $\lambda$
- Die Parameter erfüllen folgende Bedingungen:
  - $\chi > 0$, $\psi \geq 0$, falls $\lambda < 0$;
  - $\chi > 0$, $\psi > 0$, falls $\lambda = 0$;
  - $\chi \geq 0$, $\psi > 0$, falls $\lambda > 0$.
- Spezialfall:
  Wenn $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ und $\psi = 0$, dann ist die Mischverteilung von (27) eine multivariate $t$-Verteilung.

# Simulation normaler Mischvertilungen

Algorithmus zur Erzeugung von Zufallsvariablen, die einer normalen Mittelwert-Varianz-Mischung folgen:

1. Erzeuge $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, I_d)$.
2. Erzeuge positiv mischende Variable $W$ unabhängig von $\mathbf{Z}$.
3. Berechne $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} + \sqrt{W} A\mathbf{Z}$.

Beispiel: $t$- (und schiefe $t$-) Verteilung:

$W \sim \text{Ig}(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu)$.
Alternativ kann man $V \sim \chi^2_\nu$ erzeugen und $W = \nu/V$ setzen.

Beispiel: Verallgemeinerte hyperbolische Verteilung:

Erzeuge GIG-verteiltes $W$ mit Hilfe des R-Paketes ghyp.

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Dichte

Mischung von Normalverteilungen:

$$f(\mathbf{x}) = \int w^{-d/2} \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2w} - \frac{\gamma^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma}{2/w} \right\} h(w)\mathrm{d}w$$

mit Normierungskonstante

$$C = \frac{e^{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma}}{(2\pi)^{d/2}\left|\Sigma\right|^{1/2}}.$$

Dabei ist $h$ (Dichte von $W$) die Dichte einer GIG-Verteilung.

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Dichte II

$$f(\mathbf{x}) = c\frac{K_{\lambda-d/2}\left(\sqrt{(\chi+Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}))(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})}\right)\exp((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma)}{\left(\sqrt{(\chi+Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}))(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})}\right)^{\frac{d}{2}-\lambda}}$$

mit

$$Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

und Normierungskonstante

$$c = \frac{\left(\sqrt{\chi\psi}\right)^{-\lambda}\psi^{\lambda}(\psi+\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{\frac{d}{2}-\lambda}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}K_{\lambda}\left(\sqrt{\chi\psi}\right)}.$$

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Eigenschaften

- Notation:
$$\mathbf{X} \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$$
- Abschluss unter linearen Operationen:
Sei $\mathbf{X} \sim GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ und $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + \mathbf{b}$ mit $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathbf{Y} \sim GH_k(\lambda, \chi, \psi, B\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, B\Sigma B^\mathsf{T}, B\boldsymbol{\gamma})$
    - GIG-Parameter ändern sich nicht
    - Randverteilungen leicht zu berechnen: $X_i \sim GH_1(\lambda, \chi, \psi, \mu_i, \Sigma_{ii}, \gamma_i)$.
    - Version der Portfoliooptimierung (Mittelwert-Varianz-Methode) auf der Grundlage eines GH-Modells möglich.

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Eigenschaften II

- Unbestimmtheit der Parameter:
  $GH_d(\lambda, \chi/k, k\psi, \boldsymbol{\mu}, k\Sigma, k\boldsymbol{\gamma})$ und $GH_d(\lambda, \chi, \psi, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \boldsymbol{\gamma})$ für jedes $k > 0$ identisch.
- Identifizierungsproblem beim Schätzen.
- Lösung:
  Beim Anpassen Vorgabe eines Wertes für $|\Sigma|$
- Beeinflusst Werte der Parameter $\chi$ und $\psi$, Produkt $\chi\psi$ bleibt jedoch invariant.
- Produkt $\bar{\alpha}^2 := \chi\psi$ ist daher nützlicher Parameter zur Beschreibung dieser Verteilungen.
  (Nicht möglich für $-1 \leq \lambda \leq 0$ und $\psi = 0$.)

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Spezialfälle

- Wenn $\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$, $d$-dimensionale hyperbolische Verteilung. Univariaten Randverteilungen dieser Verteilung haben auch $\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$ haben und sind daher keine 1-dim. hyperbolischen Verteilungen.
- Wenn $\lambda = 1$, dann sind die 1-dim. Randverteilungen hyperbolische Verteilungen sind.
  Häufig benutzt in der univeriaten Analyse von Finanzrenditen.
- Wenn $\lambda = -\frac{1}{2}$, dann NIG (normal inverse gaussian) Verteilung. Im univariaten Fall ebenfalls häufig für die Analyse von Finanzrenditen. Ähnelt der hyperbolischen Verteilung, jedoch mit etwas stärkeren Rändern.
- Wenn $\lambda > 0$ und $\chi = 0$, dann Grenzfall mit den Namen verallgemeinerte Laplace-, Bessel- oder Varianz-Gamma-Verteilung.

# Verallgemeinerte Hyperbolische Verteilungen: Spezialfälle II

- Wenn $\lambda = -\frac{1}{2}\nu$, $\chi = \nu$ und $\psi = 0$, dann asymmetrische oder schiefe $t$-Verteilung. Die Dichte lautet:

$$f(\mathbf{x}) = c\,\frac{K_{(\nu+d)/2}\left(\sqrt{(\nu + Q(\mathbf{x}))\gamma^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma}\right)\exp((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma)}{\left(\sqrt{(\nu + Q(\mathbf{x}))\gamma^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\gamma}\right)^{-(\nu+d)/2}(1+(Q(\mathbf{x})/\nu))^{(\nu+d)/d}}$$

mit $Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$ und der Normierungskonstanten

$$c = \frac{2^{1-(\nu+d)/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}(\pi\nu)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}.}$$

Im symmetrischen Fall ($\gamma \to \mathbf{0}$) reduziert sich die Dichte auf die multivariate Standard-$t$-Dichte.

# GH Familie: Empirische Ergebnisse

| | Gauss | t-Modell | | NIG-Modell | | Hyperbolisch | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aktie | log $L$ | $\nu$ | log $L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | log $L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | log $L$ |
| *Tägliche Renditen: symmetrische Modelle* | | | | | | | |
| AXP | 4945.7 | 5.8 | 5001.8 | 1.6 | **5002.4** | 1.3 | 5002.1 |
| EK | 5112.9 | 3.8 | **5396.2** | 0.8 | 5382.5 | 0.6 | 5366.0 |
| BA | 5054.9 | 3.8 | **5233.5** | 0.8 | 5229.1 | 0.5 | 5221.2 |
| C | 4746.6 | 6.3 | **4809.5** | 1.9 | 4806.8 | 1.7 | 4805.0 |
| K | 5319.6 | 5.1 | **5411.0** | 1.4 | 5407.3 | 1.3 | 5403.3 |
| MSFT | 4724.3 | 5.8 | **4814.6** | 1.6 | 4809.5 | 1.5 | 4806.4 |
| HWP | 4480.1 | 4.5 | **4588.8** | 1.1 | 4587.2 | 0.9 | 4583.4 |
| INTC | 4392.3 | 5.4 | **4492.2** | 1.5 | 4486.7 | 1.4 | 4482.4 |
| JPM | 4898.3 | 5.1 | 4967.8 | 1.3 | 4969.5 | 0.9 | **4969.7** |
| DIS | 5047.2 | 4.4 | **5188.3** | 1 | 5183.8 | 0.8 | 5177.6 |

# GH Familie: Empirische Ergebnisse II

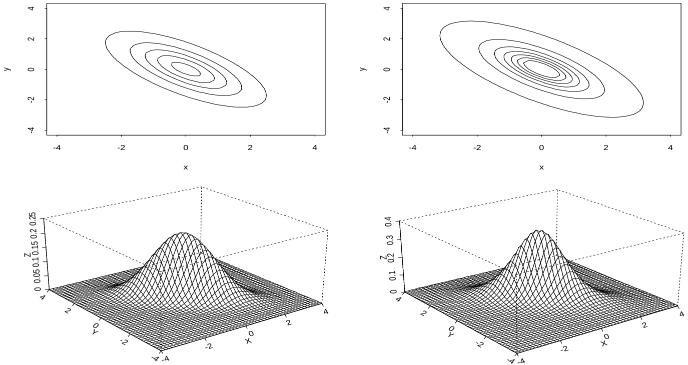
| | Gauss | $t$-Modell | | NIG-Modell | | Hyperbolisch | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aktie | $\log L$ | $\nu$ | $\log L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | $\log L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | $\log L$ |
| *Wöchentliche Renditen: symmetrische Modelle* | | | | | | | |
| AXP | 719.9 | 8.8 | 724.2 | 3.0 | **724.3** | 2.8 | 724.3 |
| EK | 718.7 | 3.6 | **765.6** | 0.7 | 764.0 | 0.5 | 761.3 |
| BA | 732.4 | 4.4 | **759.2** | 1.0 | 758.3 | 0.8 | 757.2 |
| C | 656.0 | 5.7 | **669.6** | 1.6 | 669.3 | 1.3 | 669.0 |
| K | 757.1 | 6.0 | 765.7 | 1.7 | 766.2 | 1.3 | **766.3** |
| MSFT | 671.5 | 6.3 | **683.9** | 1.9 | 683.2 | 1.8 | 682.9 |
| HWP | 627.1 | 6.0 | 637.3 | 1.8 | **637.3** | 1.5 | 637.1 |
| INTC | 595.8 | 5.2 | **611.0** | 1.5 | 610.6 | 1.3 | 610.0 |
| JPM | 681.7 | 5.9 | **693.0** | 1.7 | 692.9 | 1.5 | 692.6 |
| DIS | 734.1 | 6.4 | 742.7 | 1.9 | **742.8** | 1.7 | 742.7 |

# GH Familie: Empirische Ergebnisse III

| | Gauss | *t*-Modell | | NIG-Modell | | Hyperbolisch | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aktie | $\log L$ | $\nu$ | $\log L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | $\log L$ | $\sqrt{\chi\psi}$ | $\log L$ |
| *Wöchentliche Renditen: asymmetrische Modelle* | | | | | | | |
| C | NA | 6.1 | **671.4** | 1.7 | 671.3 | 1.3 | 671.2 |
| INTC | NA | 6.3 | **614.2** | 1.8 | 613.9 | 1.7 | 613.3 |

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Elliptische Verteilungen: Bildhafte Einführung




Eine Verteilung heisst elliptisch wenn die Linien (im 2-dimensionalen), Flächen (im 3-dimensionalen) oder Hyperflächen (in mehr als 3 Dimensionen) auf einer Ellipse bzw. einem Ellipsoid liegen.

# Elliptische Verteilungen: Definition

- Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^\mathsf{T}$ ist sphärische verteilt, wenn seine Verteilung invariant unter Drehungen und Spiegelungen ist; d.h., wenn für jedes $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ (d.h. Drehungen und Spiegelungen, für die $UU^\mathsf{T} = U^\mathsf{T} U = I_d$) gilt:

$$U\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}$$

- $\mathbf{X}$ heisst elliptisch, wenn es durch affine Transformation aus dem sphärischen Zufallsvektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)^\mathsf{T}$ hervorgeht:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Y},$$

  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$.
- Eine normale Varianz-Mischverteilungen mit $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\Sigma} = I$ ist sphärisch; beliebige normale Varianz-Mischverteilungen sind elliptisch.

# Literaturhinweise


- [McNeil et al., 1998]
  A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, Quantitative Risk Management. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [Embrechts, 2005]
  P. Embrechts, Lectures at the Federal Reserve Bank of Boston, September 26-30, 2005,
  http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/tammerfors08/embrechts_tuesday.pdf
- [Barndorff-Nielsen and Shephard, 1998]
  (Verallgemeinerte hyperbolische Verteilungen)
- [Barndorff-Nielsen, 1997] (NIG Verteilung)
- [Eberlein and Keller, 1995]
- [Prause, 1999] (GH Verteilungen - Dissertation)
- [Fang et al., 1990] (Elliptische Verteilungen)

# Risk Engineering: Multivariate Modelle

# Faktormodelle: Idea

- Die typische Situation:
  (Zehn-, Hundert-)Tausende von stochastischen Einflussfaktoren.
- Lassen sich nicht alle modellieren und schon gar nicht schätzen.
- Drastische Dimensionsreduktion ist unerlässlich
- **Idee:**
  Erkläre die Zufälligkeit der Komponenten eines $d$-dim. Vektors $\mathbf{X}$ mit Hilfe einer kleineren Menge **gemeinsamer Faktoren** (= Risikotreiber).

$\rightarrow$ Faktormodelle

# Faktormodelle: Definition

- **Definition:**
  Der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ folgt einem $p$-Faktormodell wenn er in folgender Weise zerlegt werden kann:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a} + B\mathbf{F} + \varepsilon, \tag{5}$$

1. $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_p)'$ eine Zufallsvektor mit **gemeinsamen Faktoren** mit $p < d$ und einer (strikt) positiv definiten Kovarianzmatrix ist;
2. $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)'$ ein Zufallsvektor mit **idiosynkratischen Fehlertermen** ist, unkorreliert und mit verschwindendem Mittelwert;
3. $B \in \mathbb{R}^{d \times p}$ eine konstante Matrix der **Faktorladungen** und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ein konstanter Vektor ist; und
4. $\operatorname{cov}(\mathbf{F}, \boldsymbol{\varepsilon}) = E((\mathbf{F} - E(\mathbf{F}))\boldsymbol{\varepsilon}') = 0.$

# Anmerkungen zur Theorie der Faktormodelle

- Gl. (5) impliziert, dass die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{cov}(\mathbf{X})$ die Beziehung
$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}) = B\,\mathrm{cov}(\mathbf{F})\,B' + \mathrm{cov}(\varepsilon)$$
erfüllt.
Man beachte, dass $\mathrm{cov}(\varepsilon)$ diagonal ist.
- Faktoren lassen sich immer diagonalisieren, sodass gilt:
$$\Sigma = BB' + \mathrm{cov}(\varepsilon). \tag{6}$$
- Wenn umgekehrt (6) für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ eines Zufallsvektors $\mathbf{X}$ erfüllt ist, dann folgt $\mathbf{X}$ dem Modell (5) für gewisse $\mathbf{a}$, $\mathbf{F}$ und $\varepsilon$.
- Wenn $\mathbf{X}$ zusätzlich normalverteilt ist, dann können für $\mathbf{F}$ und $\varepsilon$ unabhängige, normalverteilte Vektoren gewählt werden, sodass die komponenten von $\varepsilon$ unabhängig sind.