Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas

Autómatas Industriales

Lista 1 de ejercicios

26 de Septiembre de 2021

Resuelva la siguiente lista de ejercicios. Se entrega por equipo (1-4 integrantes a anotarse en lista), cada integrante deberá subir la versión del equipo en la plataforma microsoft teams de manera individual, si no lo hace será penalizado. Se entregarán los problemas en formato .pdf, ya sea a mano o en formato latex (incluyendo archivos fuente y pdf resultante en una carpeta) así como los códigos de la toolbox asociados. La falta de algún elemento implicará una ponderación en la calificación. Fecha de entrega: 8 de octubre de 2021.

1. Usando el hecho que para dos vectores v_1, v_2, el producto punto está definido por $v_1 \cdot v_2 = v_1^\intercal v_2$, muestre que el producto punto de dos vectores no depende de la elección de los marcos coordenados sobre los cuales están definidos. Proponga un ejemplo numérico que lo ilustre.

2. Si una matriz R satisface $R^\intercal R = I$, muestre que los vectores columna de R son de longitud unitaria y mutuamente perpendiculares.

3. Muestre que el conjunto de matrices de transformación homogénea en el plano ($T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$) forma un grupo con la multiplicación de matrices como operación producto.

4. Considere la siguiente secuencia de rotaciones:

   a) Rotar un ángulo ϕ sobre el marco inercial x
   b) Rotar un ángulo θ sobre el marco actual z
   c) Rotar un ángulo ψ sobre el marco inercial y

   Escriba el producto matricial que representa la matriz de rotación resultante (puede desarrollarlo usando software con lenguaje simbólico). Ilustre la rotación con ángulos propuestos mediante la toolbox de Robótica.

5. Considere la siguiente secuencia de rotaciones:

   a) Rotar un ángulo ϕ sobre el marco inercial x
   b) Rotar un ángulo θ sobre el marco inercial z
   c) Rotar un ángulo ψ sobre el marco actual x

   Escriba el producto matricial que representa la matriz de rotación resultante (puede desarrollarlo usando software con lenguaje simbólico). Ilustre la rotación con ángulos propuestos mediante la toolbox de Robótica.

6. Considere la siguiente secuencia de rotaciones:

   a) Rotar un ángulo ϕ sobre el marco inercial x
   b) Rotar un ángulo θ sobre el marco actual z
   c) Rotar un ángulo ψ sobre el marco actual x

d) Rotar un ángulo α sobre el marco inercial z

Escriba el producto matricial que representa la matriz de rotación resultante (puede desarrollarlo usando software con lenguaje simbólico). Ilustre la rotación con ángulos propuestos mediante la toolbox de Robótica.

7. Considere la siguiente secuencia de rotaciones:

   a) Rotar un ángulo ϕ sobre el marco inercial x
   b) Rotar un ángulo θ sobre el marco inercial z
   c) Rotar un ángulo ψ sobre el marco actual x
   d) Rotar un ángulo α sobre el marco inercial z

   Escriba el producto matricial que representa la matriz de rotación resultante (puede desarrollarlo usando software con lenguaje simbólico). Ilustre la rotación con ángulos propuestos mediante la toolbox de Robótica.

8. Si el marco coordenado $o_1x_1y_1z_1$ se obtiene del marco coordenado $O_0x_0y_0z_0$, por una rotación de $\dfrac{\pi}{2}$ sobre el eje x, seguido de una rotación de $\dfrac{\pi}{2}$ sobre el eje y fijo, encuentre la matriz de rotación R asociada. Dibuje los marcos inicial y final usando la toolbox de robótica.

9. Suponga que los marcos coordenados $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$, $O_3x_3y_3z_3$, están dados, y suponga las siguientes matrices de rotación: $R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$; $\quad R_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Halle la matriz R_3^2.

10. Use la toolox de robótica, a partir de la clase UnitQuaternion, desarrolle las matrices de rotación anteriores, incluida la composición. Corrobore numérica y gráficamente. Así mismo, escriba una breve explicación del uso de comandos utilizados de la clase.

11. Para la parametrización de rotaciones tipo Cardano (R_{XYZ}) obtenga:

    a) La matriz de rotación $R = \mathrm{Rot}_{x,\theta_y}\mathrm{Rot}_{y,\theta_p}\mathrm{Rot}_{z,\theta_r}$ (los subíndices corresponden a yaw, pitch, roll).
    b) Dada $R = (r_{ij})$ obtenga las expresiones para obtener los ángulos θ_y, θ_p, θ_r.

12. Sea $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, $\theta = 90°$, encuentre $R_{k,\theta}$. (Compruebe esa rotación mediante la toolbox de robótica).

13. Calcule la matriz de rotación dada por el producto:

$$R_{x,\theta}R_{y,\phi}R_{z,\pi}R_{y,-\phi}R_{x,-\theta}$$

14. Suponga R representa la rotación de 90° sobre y_0, seguida de una rotación de 45° sobre z_1. Encuentre R. Grafique los marcos inicial y resultante mediante la toolbox.

15. Encuentre la matriz de rotación correspondiente a los ángulos de Euler $\left\{\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{\pi}{4}\right\}$. ¿Cuál es la dirección de x_1 especto al marco inercial? Grafique los marcos inicial y resultante mediante la toolbox.

16. Los números complejos de magnitud unitaria ($(a+ib)$ tales que $a^2+b^2=1$) se pueden usar para representar orientación en el plano. En particular, para el número complejo $a+ib$, se define el ángulo $\theta = \text{atan2}(a, b)$. Muestre que la multiplicación de dos números complejos corresponde a la adición de los ángulos correspondientes.

17. Muestre que los números complejos con la operación de multiplicación compleja definen un grupo. ¿Cuál es el elemento identidad del grupo?, ¿Cuál es el elemento inverso para cualquier $a+ib$?

18. Usando el hecho que $Q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, n_x \sin\frac{\theta}{2}, n_y \sin\frac{\theta}{2}, n_z \sin\frac{\theta}{2}\right)$ y la representación eje ángulo, determine la matriz de rotación R que corresponden a la rotación representada por el cuaternión (q_0, q_1, q_2, q_3).

19. Determine el cuaternión Q que representa la misma rotación dada por una matriz de rotación $R = r_{ij}$.

20. Calcule la transformación homogénea que representa la traslación de 3 unidades a lo largo del eje x seguida de una rotación de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ sobre el eje z actual, seguido de una traslación de una unidad a lo largo del eje fijo y. Dibuje el marco resultante y original con la toolbox. ¿Cuáles son las coordenadas del origen O_1 respecto al marco original?

21. Considere la figura 1. Encuentre las transformaciones homogéneas H_1^0, H_2^0, H_2^1 que representan las transformaciones sobre los tres marcos coordenados definidos. Muestre que $H_2^0 = H_1^0 H_2^1$. Grafique los marcos resultantes usando la toolbox.

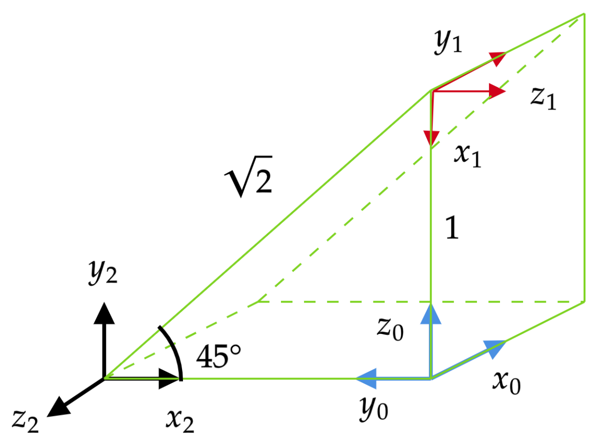

Figura 1: Marcos coordenados para el problema 20.