! Gut durchlesen & klar aufschreiben, ansonsten passieren Flüchtigkeitsfehler

Joel von Rotz

Potenzieren

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Logarithmen

$\log_b(a^r) = r \cdot \log_b(a)$

$\log_b x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} b} = \frac{\ln x}{\ln b}$

$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

$\log_b(1) = 0$

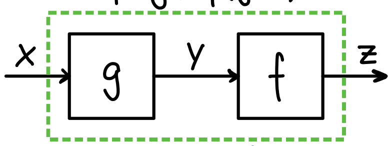
$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$

$\log_b(b) = 1$

$b^{\log_b(a)} = a$

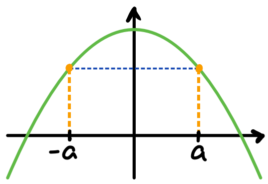
Verkettung

$f \circ g$ / $f(g(x))$

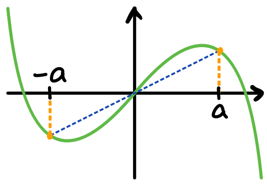


$\circ$ → g nach f

Gerade/Ungerade

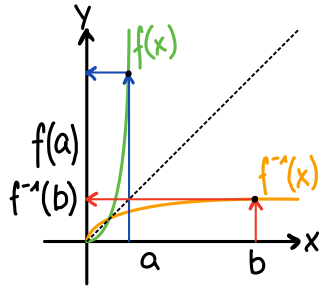


$y|_{x=a} = y|_{x=-a}$



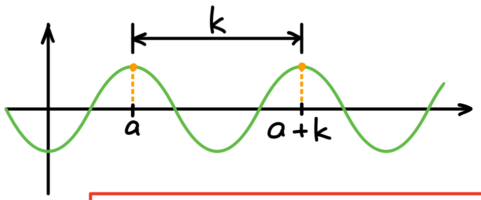
$y|_{x=a} = -y|_{x=-a}$

Umkehrfunktion



pro x ein y & pro y ein x (sonst nicht umkehrbar)

Periodische Funktionen



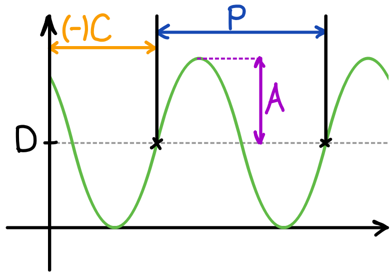
$y|_{x=a} = y|_{x=a+k} = y|_{x=a+2k}$

Harmonische Schwingung

$y = D + A \cdot \sin(B \cdot t + C)$

$B = \frac{2\pi}{P}$

A Amplitude (Streckung/Stauchung Y)
B Kreisfrequenz (Streckung/Stauchung X)
C Nullphasenwinkel
D Mittelwert
P Periode



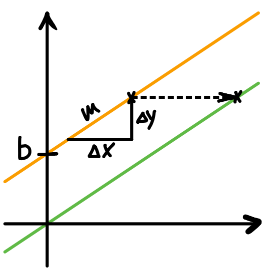
Funktionen

linear

$y = y_0 + \frac{\Delta y}{\Delta m} \cdot (x - x_1)$

$y = m \cdot (x + a) + b$

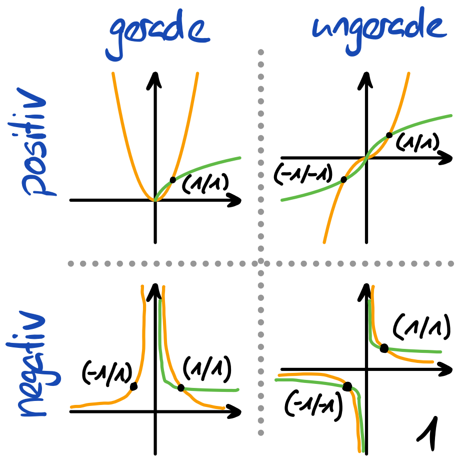
a "Drehpunkt" wenn m verändert wird



Potenzfunktion

$y = k \cdot x^p$

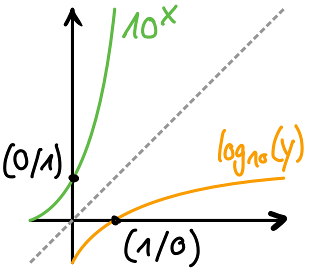
Ganzzahl
Bruch



1

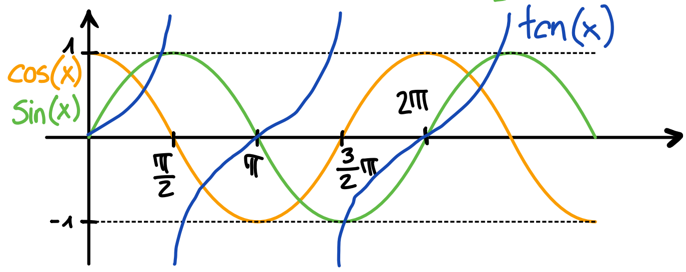
Logarithmus

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \log(x) \\ y = \ln(x) \end{array}}$$



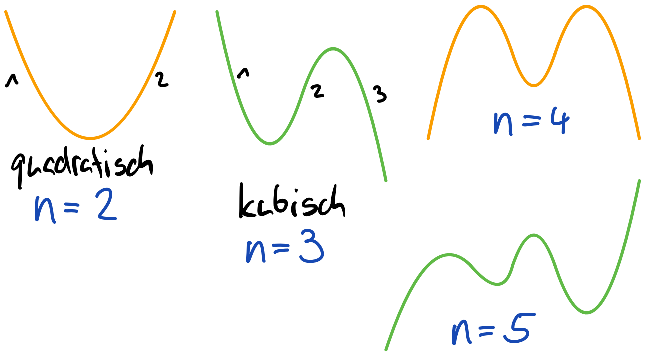
Sinus Kosinus Tangens

$\cos(x) \to 0$, $\tan(x) \to \pm\infty$



Polynomfunktion
ganzrationale F.

- Potenzen der Polynome …
  - ↳ gerade $(x^0, x^2, x^4, \ldots) \to$ Gerade Funktion
  - ↳ ungerade $(x^1, x^3, x^5, \ldots) \to$ Ungerade …
  - ↳ beides $(x^2, x^3, x^6, \ldots) \to$ Weder noch

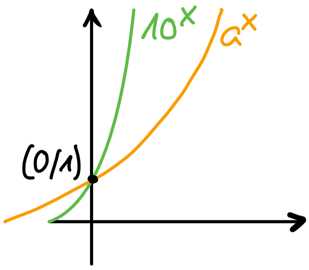


Exponential

Definition

$$\boxed{y = y_1 \cdot a^{\frac{x - x_1}{c}}}$$

$a = 1$ konstant
$a > 1$ Zunahme
$a < 1$ Abnahme



Definition Wachstum

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot a^{\frac{t}{T}}}$$

Basiswechsel

$$\boxed{a^{\frac{x}{c}} = b^{\frac{x}{d}} \text{ wenn } d = \frac{c}{\log_b(a)}}$$

↳ $a^{\frac{t}{T}} = b^x \mid \log_b$

Definition Normalform / kontinuierliches Wachstum

$$\boxed{y = y_0 \cdot e^{k \cdot x}}$$

Transformation

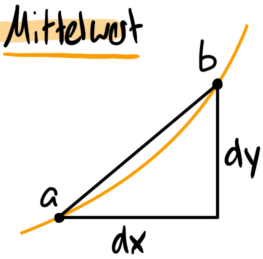
	X-Richtung ↔	Y-Richtung ↕
	$f(x \cdot c)$	$f(x) \cdot c$
Streckung	$0 < c < 1$	$c > 1$
Stauchung	$c > 1$	$0 < c < 1$
	$f(x + c)$	$f(x) + c$
Oben/Links	$c > 0$	$c > 0$
Unten/Rechts	$c < 0$	$c < 0$

Spiegelung an der y-Achse

an der y-Achse	$f(-x)$
an der x-Achse	$-f(x)$
am Ursprung (0/0)	$-f(-x)$

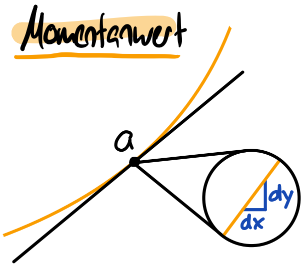
Mittelwert vs Momentanwert

Mittelwert



$$\boxed{\frac{b_y - b_x}{a_y - a_x}}$$

Momentanwert



$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = a_x}}$$

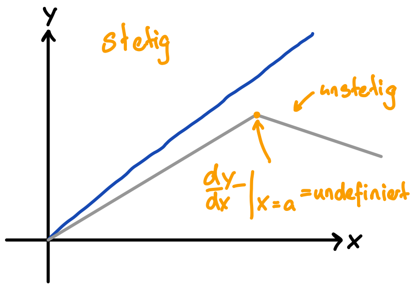
Mitternachtsformel & Diskriminante

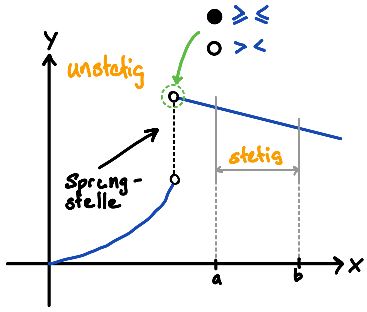
$ax^2 + bx + c = 0$

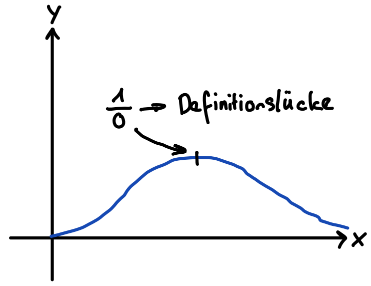
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Diskriminante
$=0$ 1 Lösung
>0 2 Lösungen
<0 keine

Stetige / unstetige Funktionen $\Rightarrow$ elementare Funktionen sind stetig







$$\left[\begin{array}{l} y \text{ ändert sich stetig mit } x \text{ im...} \\ \hookrightarrow \text{...im ganzen Definitionsbereich} \\ \hookrightarrow \text{... im Intervall } a \leq x \leq b \end{array}\right]$$

Zwischenwertsatz: Ist y eine stetige Funktion von x im Intervall $a \leq x \leq y$ und haben $y|_{x=a}$ & $y|_{x=b}$ unterschiedliche Vorzeichen, so nimmt y den Wert zwischen dem Intervall an.

Elementare Funktionen sind explizite Funktionen welche man durch nur x, Konstanten, die Grundrechenarten $(+, -, \cdot, :, \lambda^2, \lambda^x, \log)$, sowie trigonometrische Operationen (sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan) ausdrücken lassen.

Limes: Grenzverhalten von Funktionen

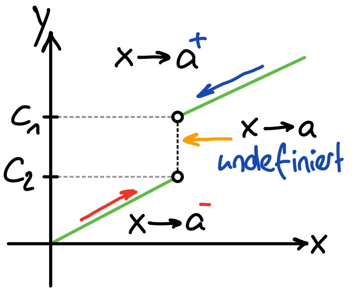
„y strebt gegen c wenn x gegen a strebt" $\longrightarrow$ $(y \to c$ wenn $x \to a)$

wenn y stetig

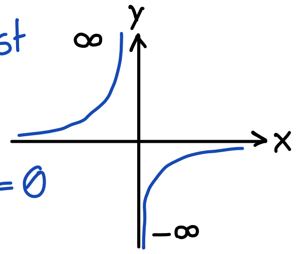
$$\boxed{\lim_{x \to a} y = y|_{x=a}}$$

wenn y unstetig

$$\boxed{\lim_{x \to a^{\pm}} y = c}$$



▸ Wenn $\lim_{x \to a} y = \pm\infty$, dann ist a eine Polstelle von y.



Polstelle $x = 0$

Abschätzen

momentan Geschwindigkeit

$$\boxed{v|_{t=a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\Big|_{t=a \,\&\, t=a+\Delta t}\right)}$$

▸ Man nimmt ein kleines $\Delta t/\Delta x$ und rechnet daraus die Steigung aus $\longrightarrow$ z.B. $4s \pm 0.001s$

Differential / Ableiten

konstantes Vielfaches

$$\boxed{d(k \cdot u) = k \cdot du}$$

$$\boxed{\frac{d(k \cdot u)}{dx} = k \cdot \frac{du}{dx}}$$

Summenregel

$$\boxed{d(y \pm z) = dy \pm dz}$$

$$\boxed{\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}}$$

Potenzregel

$$\boxed{d(x^k) = k \cdot x^{k-1}\, dx}$$

$$\boxed{\frac{d(x^k)}{dx} = k \cdot x^{k-1}}$$

Exponentialregel

$$\boxed{de^{kx} = k \cdot e^{k \cdot x}\, dx}$$

$$\boxed{\frac{de^{kx}}{dx} = k \cdot e^{k \cdot x}}$$

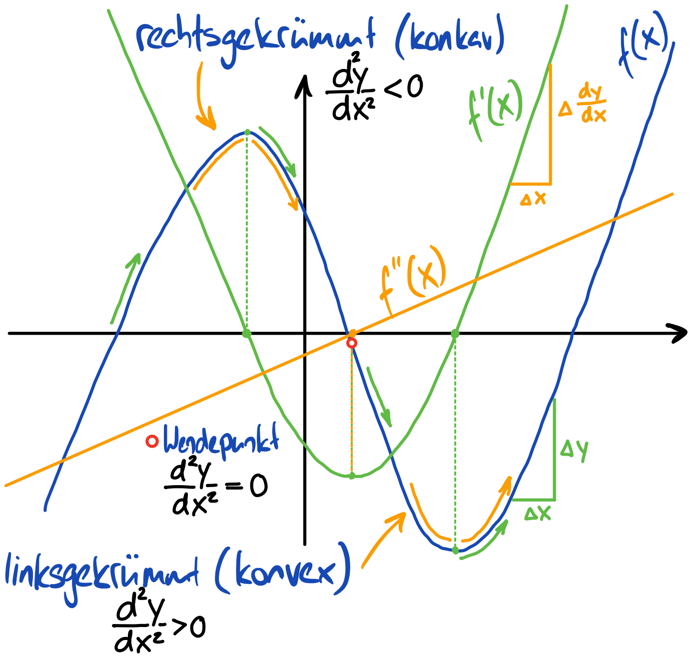
$$\left(\frac{da^{\frac{x}{c}}}{dx} = \frac{\ln(a)}{c} \cdot a^{\frac{x}{c}}\right)$$

$$\left(\frac{de^x}{dx} = e^x\right)$$

Produktregel

$$\boxed{d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv}$$

$$\boxed{\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}}$$



Kettenregel

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

Wenn z eine äussere Funktion von y ist und y eine innere Funktion von x ist.

Quotientenregel

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}\cdot v - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

Umkehrfunktionen

$$\boxed{\frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}} \qquad \boxed{\frac{d(\arctan(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$

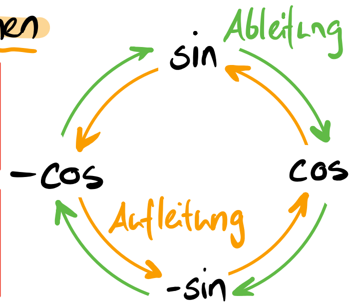
$$\boxed{\frac{d(\arcsin(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{\frac{d(\arccos(x))}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Trigonometrische Funktionen

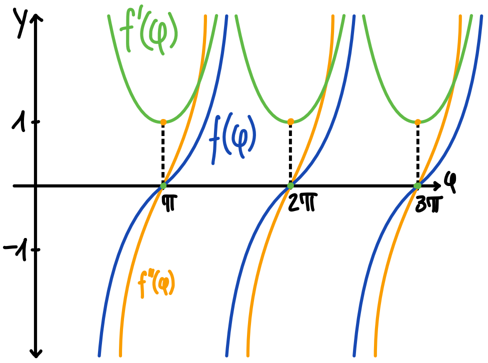
$$\boxed{\frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\sin(x)}$$

$$\boxed{\frac{d(\tan(x))}{dx} = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1+(\tan(x))^2}$$



$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$

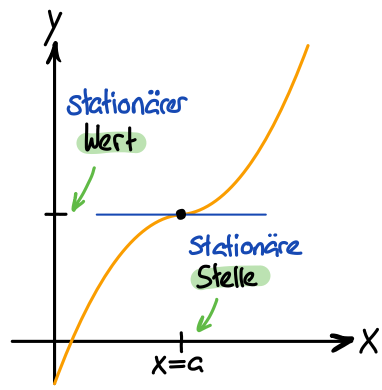


Änderungsrate von Umkehrfunktionen

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}} \qquad \boxed{f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}}$$

Stationarität

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = 0}$$

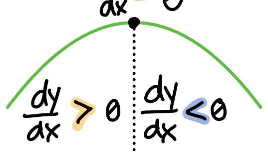


Maxima & Minima

Ein lokales Maxima oder Minima ist die tiefste oder höchste Stelle in einer Umgebung also $c<x<d$. Globale Maxima & Minima sind die aller tiefsten oder höchsten Stellen der Umgebung / Definitionsbereich.

Maxima

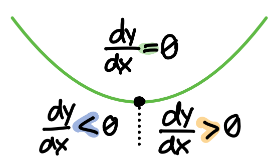
$\frac{dy}{dx} = 0$



$\frac{dy}{dx} > 0$ $\frac{dy}{dx} < 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Minima



$\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} < 0$ $\frac{dy}{dx} > 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

kritische Stellen

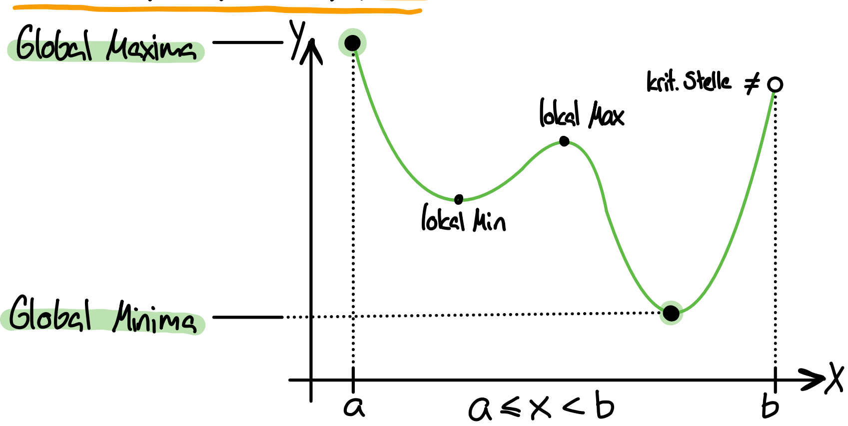
Kandidaten für Extremalstellen

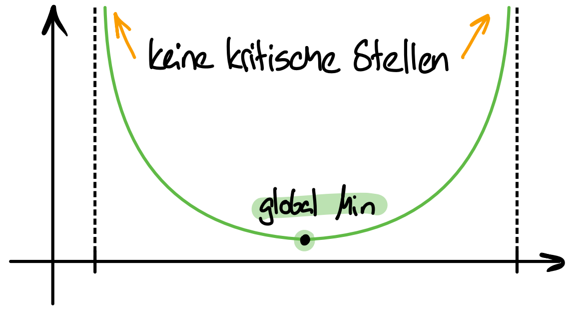
- y ist stationär mit x
- $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$ = undefiniert
- Stellen am Rand des Definitionsbereich

Wendestelle

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder = undefiniert, dann ist es möglicherweise eine Wendestelle.

Globale Maxima & Minima

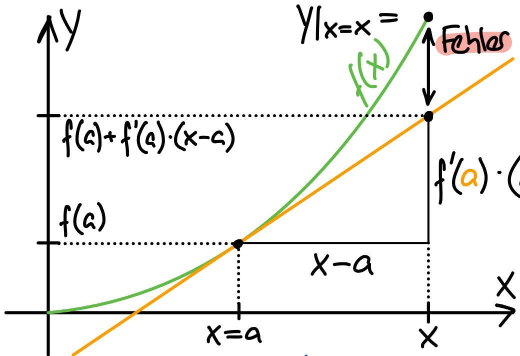




Linearisierung & Taylorpolynome

Linearisierung

$$\boxed{y \approx y|_{x=a} + \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}(x-a) \quad \text{wenn } x \approx a}$$



Entwicklungsstelle $x=a$

Taylorpolynome

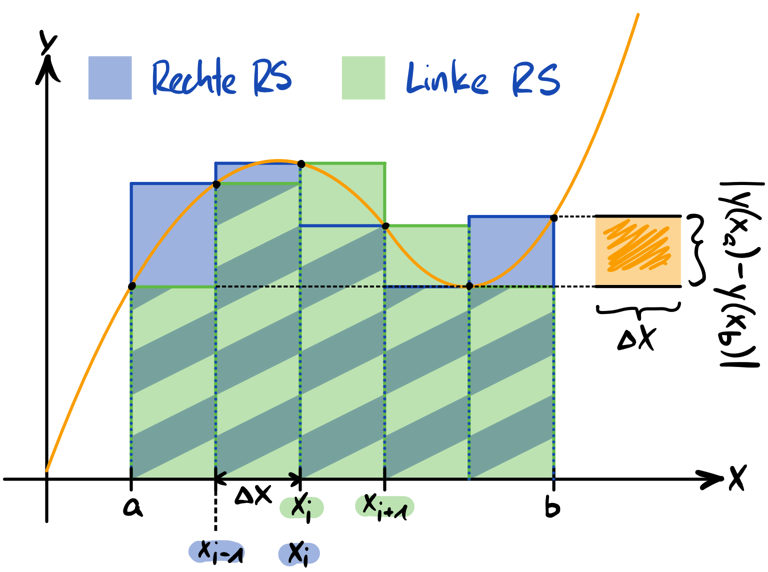
$$\boxed{y|_{x=a} + \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)}{1!} + \dots + \frac{d^n y}{dx^n}\Big|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}}$$

1\. Grad entspricht der Linearisierung.

Fehler der Linearisierung

$$\boxed{y - \left(y|_{x=a} + \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} \cdot (x-a)\right)}$$

Riemann-Summe



Riemann-Summe Genauigkeit

$$\boxed{G = |y|_{x=b} - y|_{x=a}| \cdot \Delta x} \qquad \boxed{\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}}$$

Linke RS

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \left(y|_{x=x_i} \cdot \Delta x\right)}$$

Rechte RS

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(y|_{x=x_i} \cdot \Delta x\right)}$$

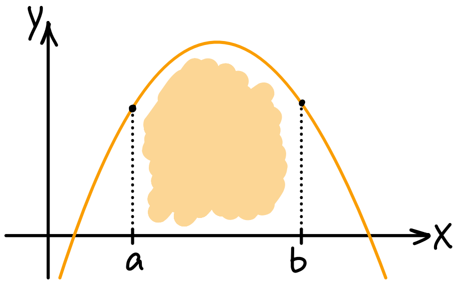
Stammfunktion der Nullfunktion

$$\left(\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow z = \text{konstant}\right)$$

z.B. $= C$

Die Genauigkeit gibt auch den Fehler oder Spielraum zwischen der rechten Summe und linken Summe.

Integral / Aufleiten



$$\int \frac{dy}{dx}\,dx = y + C$$

$$\int_{x=a}^{b} \frac{dy}{dx}\,dx = y|_{x=b} - y|_{x=a}$$

▶ Das Integral gibt nur die Änderung an und kennt daher den Funktionsursprung nicht!

Grenzentausch

$$\int_{x=a}^{b} y\,dx = -\int_{x=b}^{a} y\,dx$$

Summenregel

$$\int (y \pm z)\,dx = \int y\,dx \pm \int z\,dx$$

Zwischenstopp

$$\int_{x=a}^{b} y\,dx = \int_{x=a}^{c} y\,dx + \int_{x=c}^{b} y\,dx$$

Konstantes Vielfaches

$$\int k \cdot y\,dx = k \int y\,dx$$

Stammfunktion

Ist y die Ableitung von z nach x, so ist z eine Stammfunktion von y nach x

$$\int y\,dx = z + C$$

! +C bei unbestimmten Integralen nicht vergessen.

Substitution (Aufleitung Kettenregel)

Ist u eine Funktion von w & w eine Funktion von x, dann gilt.

$$\int u\left(\frac{dw}{dx}\right)dx = \int u\,dw$$

1. w definieren
2. w ableiten
3. nach dx auflösen
4. einsetzen

$$\int_{x=a}^{b} u\frac{dw}{dx}\,dx = \int_{w|_{x=a}}^{w|_{x=b}} u\,dw$$

Weitere Aufleitungsregeln

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$ für $n \neq 1$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int e^{k\cdot x}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

Partielle Integration (Aufleitung Produktregel)

$$\int u\,\frac{dv}{dx}\,dx = u \cdot v - \int \underbrace{\frac{du}{dx}\,v}\,dx$$

sollte immer eine elementare Stammfunktion haben.

sollte einfacher sein als das ursprüngliche Integral

! bei unbestimmten Integralen das +C am Schluss nicht vergessen!

$$\int_{x=a}^{b} u\,\frac{dv}{dx}\,dx = uv|_{x=a}^{b} - \int_{x=a}^{b} \frac{du}{dx}\,v\,dx$$

Logarithmus aufleiten

$$\int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,dx = x(\ln(x)-1) + C$$

$$g(x) = \int 1\,dx = x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dx$$

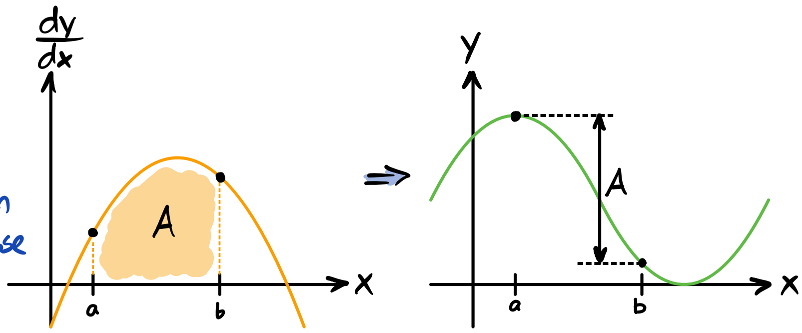
$$= \underline{x \cdot \ln(x) - x}$$

Hauptsätze der Differential- & Integralrechnung

Hauptsatz #1: Integral der Ableitungsfunktion

$$\int_{x=a}^{b} \frac{dy}{dx}\,dx = y|_{x=b} - y|_{x=a}$$

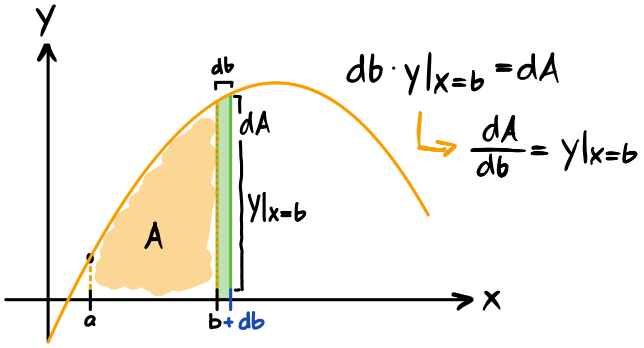
Die Summe aller unendlich kleinen Änderungen einer Grösse ist die Gesamtänderung der Grösse



Hauptsatz #2: Stammfunktion

$$\frac{d}{db}\left(\int_{x=a}^{b} y\,dx\right) = y|_{x=b}$$

Das bestimmte Integral ist die Stammfunktion von der darin enthaltenen Ableitung.



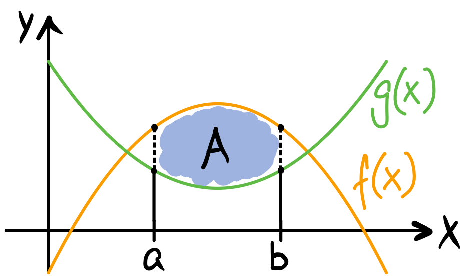
Nicht elementar integrierbare Funktionen (Beispiele)

$$e^{-x^2},\ \frac{e^x}{x},\ \sin(x^2),\ \sqrt{1-x^4},\ \ln(\ln(x)),\ \cos(x^2),\ \frac{1}{\ln(x)},\ e^{e^x},\ \frac{\sin(x)}{x}$$

Flächendifferenz

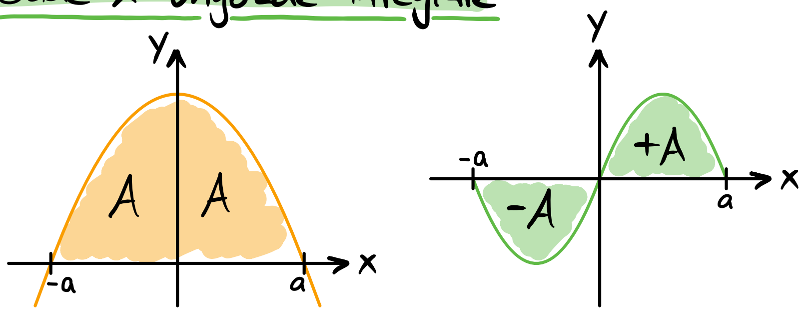
Flächeninhalt

$$\left|\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{b} g(x)\,dx\right|$$



$$\int_{x=a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

Gerade & Ungerade Integrale

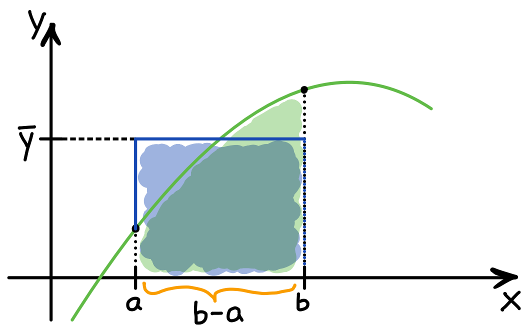


$$\int_{x=-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{x=0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{x=-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Mittelwert einer Funktion in einem Bereich

$$\bar{y} \overset{def}{=} \frac{1}{b-a}\int_{x=b}^{a} y\,dx$$

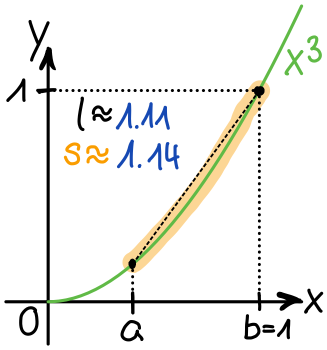


Bogenlänge einer Funktion

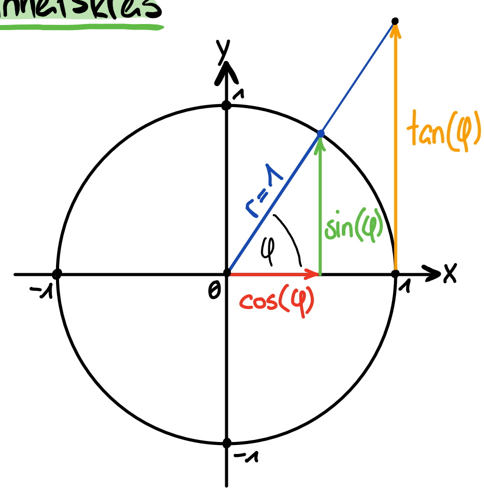
Im Bereich $a \leq x \leq b$

$$\boxed{s = \int_{x=a}^{b} ds = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \rightarrow \cancel{\frac{ds}{dx}}\, dy$



Einheitskreis



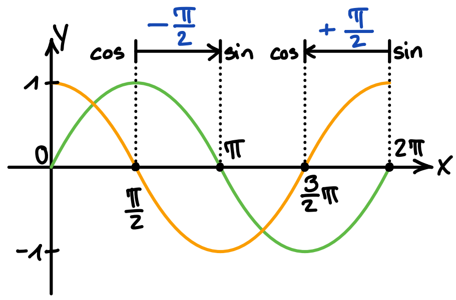
Sinus, Kosinus, Tangens

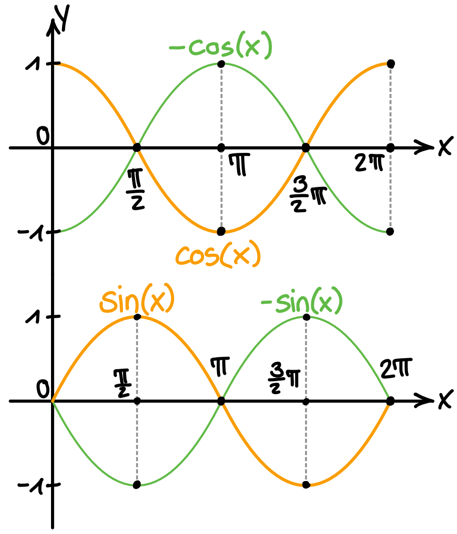
$$\boxed{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1}$$

Phasenverschiebung

$$\boxed{\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$



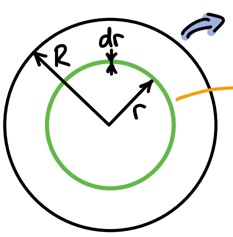


$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

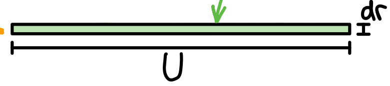
$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}$$ $\Rightarrow$ Wenn $\cos(x)=0$ dann $\tan(x) = \pm\infty$

Flächen & Volumen

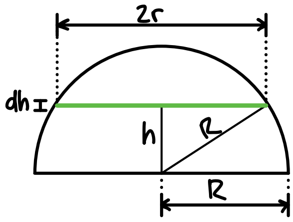


$U = r \cdot 2\pi$

$dA = U \cdot dr$



$\dfrac{dA}{dr} = r \cdot 2\pi$



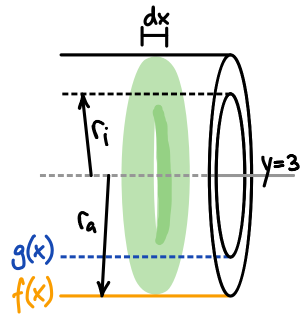
$dA = dh \cdot 2r$

$r = \sqrt{R^2 - h^2}$

$\dfrac{dA}{dh} = \sqrt{R^2 - h^2}$

- Kurven & Krümmungen sehen bei infinitesimaler kleiner Auflösung gerade aus.
- Bei Rotationskörper wird meistens der Radius berechnet.

Komplexe Form



$dV = dx \cdot A$

$A = (r_a^2\pi - r_i^2\pi)$

$r_a = 3 - f(x)\ ;\ r_i = 3 - g(x)$

Unendliche Reihen & Folgen

Definition
Eine Folge von X'n ist eine Abbildung a die jeder natürlichen Zahl n ein X zuordnet.

$$a: \mathbb{N} \to X$$
$$n \mapsto a(n)$$

Rekursive Definition

Definition

$$\boxed{a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \text{ wenn alle } n > k}$$

Fibonacci-Folge:

$$a = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n < 3 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

! n entspricht Ganzzahlen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$
$(1, 2, 3, \dots)$ oder $(0, 1, 2, 3, \dots)$

Fakultät

$0! =$	1	1
$1! =$	1	1
$2! =$	$1 \cdot 2$	2
$3! =$	$1 \cdot 2 \cdot 3$	6

Geometrische Reihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot x^n = c \overset{\cdot x}{\curvearrowright} + cx \overset{\cdot x}{\curvearrowright} + cx^2 + \dots = \frac{c}{1-x} \quad \text{wenn } |x| < 1}$$

Ist $|x| \geq 1$, dann divergiert diese Reihe ins Unendliche.

z.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{(-1)}{2}}_{x}\Big)^n \Rightarrow \left|-\tfrac{1}{2}\right| < 1 \to \text{konvergiert zu } \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{3}{2}}_{x}\Big)^n \Rightarrow \left|\tfrac{3}{2}\right| > 1 \to \text{divergiert zu } \infty$$

Taylorreihe

(-polynom $f(x) \approx \sum_{n=0}^{k} \dots$)

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)}{1!} + \dots}$$

Entwicklungsstelle

Gilt wenn a konstant ist!

Entwicklung

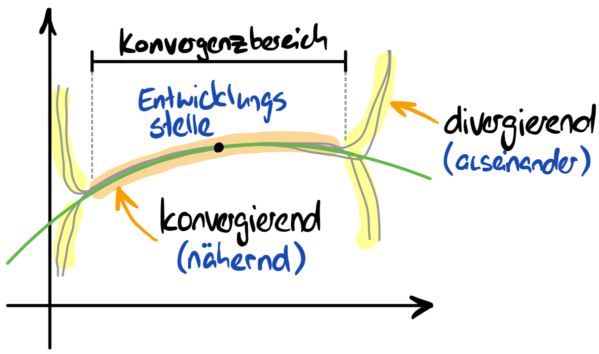
$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \to x = 0$$

$$1 - \frac{(x+\pi)^2}{2!} + \frac{(x+\pi)^3}{3!} - \dots \to x = -\pi$$

Konvergenz einer Folge

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n}$$

Wenn X konstant ist & ...
... $|x| < 1 \to$ konvergierend
... $|x| > 1 \to$ divergierend



$$\boxed{|a_n - L| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0}$$

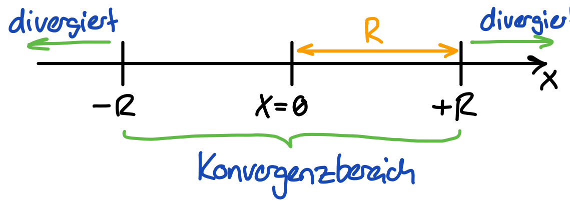
L Grenzwert

bestimmt ob der Wert divergiert oder konvergiert.

Unendliche Reihen als Limes der Partialsummen

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)}$$

Konvergenz einer Potenzreihe $(c_0+c_1\cdot x+c_2x^2\ldots)$



z.B. $1+\overset{x}{\frac{x}{3}}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3$

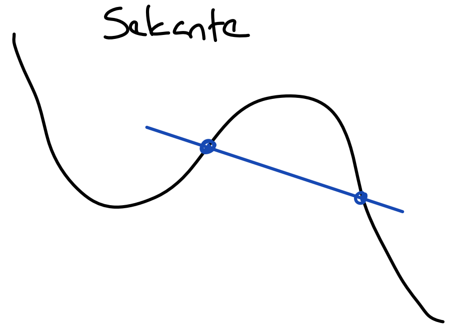
$|x|<1 \to \left|\frac{x}{3}\right|<1 \to \underline{|x|<3} \nearrow R$

Potenzreihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots}$$

↖ Koeffizient

Sekante



Beispiel komplexe Reihe

Entwicklung in Potenzen von $\frac{v}{c} \to x=\frac{v}{c}$; die ersten zwei Terme

$$t_1=\frac{2l_2}{c\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}-\frac{2l_1}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_2=\frac{2l_2}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-\frac{2l_1}{c\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} \qquad \Delta t=t_1-t_2=\frac{2l_2}{c\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}-\frac{2l_1}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-$$

$$\frac{2l_2}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}+\frac{2l_1}{c\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}=\frac{2l_2+2l_1}{c(1-x^2)}-\frac{(2l_1+2l_2)}{c\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(l_1+l_2)}{c(1-x^2)}-\frac{2(l_1+l_2)}{c\sqrt{1-x^2}}$$

$-x^2=u$

$$\frac{2(l_1+l_2)}{c}\left((1+u)^{-1}-(1+u)^{-\frac{1}{2}}\right)=\underline{\underline{\frac{2(l_1+l_2)}{c}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{8}x^2\right)}}$$

$$(1+u)^{-1}=1-x+x^2-x^3$$

$$-(1+u)^{-\frac{1}{2}}=-\left(1-\frac{x}{2}\pm\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3\right) \to 1-1-x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{3}{8}x^2$$