Geraden und Lineare Funktionen

Steigung der Geraden durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gleichung der Geraden durch (x_1, y_1) mit Steigung m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Gleichung der Geraden mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b:

$$y = mx + b$$

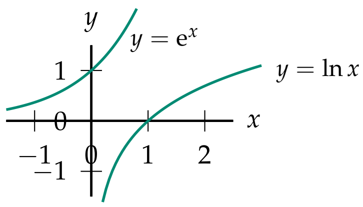
Rechnen mit Exponenten

$$\begin{aligned} a^x a^t &= a^{x+t} \\ \frac{a^x}{a^t} &= a^{x-t} \\ (a^x)^t &= a^{xt} \end{aligned}$$

Definition des natürlichen Logarithmus

$y = \ln x$ bedeutet $\mathrm{e}^y = x$

Beispiel: $\ln 1 = 0$ da $\mathrm{e}^0 = 1$



Identitäten

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{e}^x &= x \\ \mathrm{e}^{\ln x} &= x \end{aligned}$$

Rechnen mit Logarithmen

$$\begin{aligned} \ln(AB) &= \ln(A) + \ln(B) \\ \ln\left(\frac{A}{B}\right) &= \ln A - \ln B \\ \ln A^p &= p \ln A \end{aligned}$$

Abstände und Mittelpunktformeln

Abstand D zwischen den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2):

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mittelpunkt von (x_1, y_1) und (x_2, y_2):

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Quadratische Gleichungen Lösen

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösung(en)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faktorisierung spezieller Polynome

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

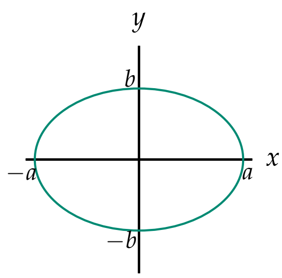
Kreise

Mittelpunkt (h, k) und Radius r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

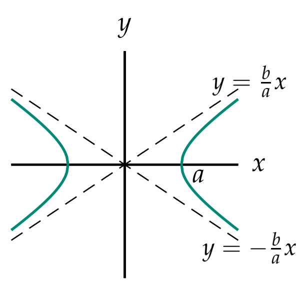
Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

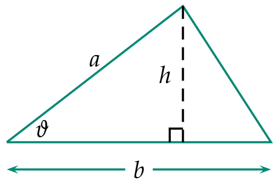


Geometrische Formeln

Umwandlung zwischen Radiant und Gradmass: $\pi = 180°$

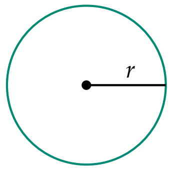
Dreieck

$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\vartheta$$



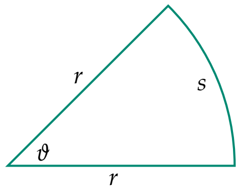
Kreis

$$A = \pi r^2$$
$$C = 2\pi r$$



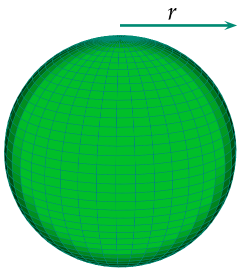
Kreissektor

$$A = \frac{1}{2}r^2\vartheta \quad (\vartheta \text{ in Radiant})$$
$$s = r\vartheta \quad (\vartheta \text{ in Radiant})$$



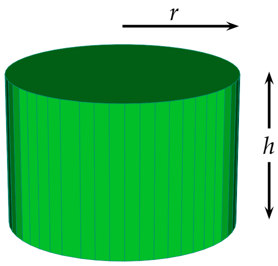
Kugel

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad A = 4\pi r^2$



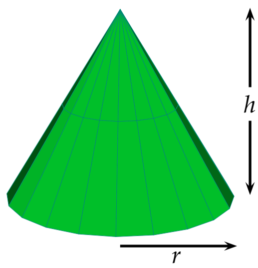
Zylinder

$V = \pi r^2 h$



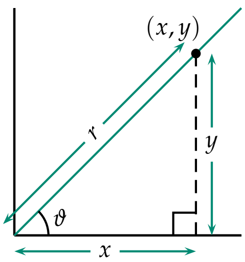
Kegel

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

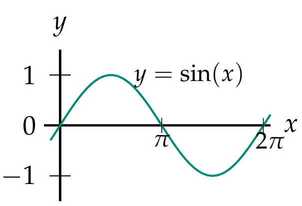


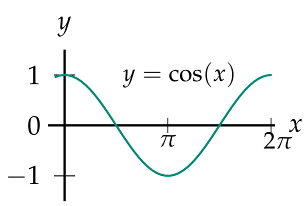
Trigonometrische Funktionen

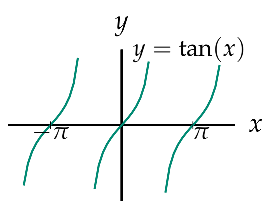
$$\sin\vartheta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\vartheta = \frac{x}{r}$$
$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$
$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$$

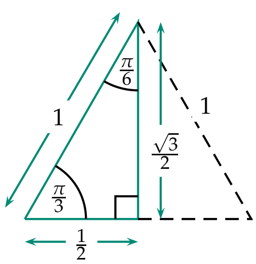


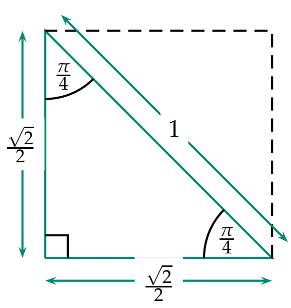
$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$
$$\sin(2A) = 2\sin A\cos A$$
$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1 = 1 - 2\sin^2(A)$$











Binomische Formeln

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n$$
$$(x-y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \ldots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

Ableitungsregeln

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(kf(x))' = kf'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a \quad (a > 0)$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Integrationsregeln

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_{x=a}^b g(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(w)\mathrm{d}w$
4. $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Tabelle von unbestimmten Integralen

I. Grundfunktionen

1. $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C, a > 0$
4. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$
5. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
6. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
7. $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

II. Produkte von e^x, $\cos x$ und $\sin x$

8. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + C$
9. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right) + C$
10. $\displaystyle\int \sin(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-a^2}\left(a\cos(ax)\sin(bx) - b\sin(ax)\cos(bx)\right) + C, a \neq b$

11. $\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-a^2}\left(b\cos(ax)\sin(bx) - a\sin(ax)\cos(bx)\right) + C,\, a \neq b$

12. $\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-a^2}\left(b\sin(ax)\sin(bx) + a\cos(ax)\cos(bx)\right) + C,\, a \neq b$

III. Produkt von Polynom $p(x)$ mit $\ln x$, e^x, $\cos x$, $\sin x$

13. $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C,\, n \neq -1$

14. $\int p(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}p(x)\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a}\int p'(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}p(x)\mathrm{e}^{ax} - \frac{1}{a^2}p'(x)\mathrm{e}^{ax} + \frac{1}{a^3}p''(x)\mathrm{e}^{ax} - \ldots$
(*Vorzeichen alterniert:* $+-+-+-\ldots$)

15. $\int p(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}p(x)\cos(ax) + \frac{1}{a}\int p'(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$
$= -\frac{1}{a}p(x)\cos(ax) + \frac{1}{a^2}p'(x)\sin(ax) + \frac{1}{a^3}p''(x)\cos(ax) - \ldots$
(*Vorzeichen alterniert in Paaren nach dem ersten Term:* $-++--++\ldots$)

16. $\int p(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}p(x)\sin(ax) - \frac{1}{a}\int p'(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x$
$= \frac{1}{a}p(x)\sin(ax) + \frac{1}{a^2}p'(x)\cos(ax) - \frac{1}{a^3}p''(x)\sin(ax) - \ldots$
(*Vorzeichen alterniert in Paaren:* $++--++--\ldots$)

IV. Ganze Potenzen von $\sin x$ und von $\cos x$

17. $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x,\;\; n$ positiv

18. $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x,\;\; n$ positiv

19. $\int \frac{1}{\sin^m x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{m-1}\frac{\cos x}{\sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{\sin^{m-2}x}\,\mathrm{d}x,\, m \neq 1,\, m$ positiv

20. $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\cos x)-1}{(\cos x)+1}\right| + C$

21. $\int \frac{1}{\cos^m x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m-1}\frac{\sin x}{\cos^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{\cos^{m-2}x}\,\mathrm{d}x,\, m \neq 1,\, m$ positiv

22. $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x)+1}{(\sin x)-1}\right| + C$

23. $\int \sin^m \cos^n x\,\mathrm{d}x$:
    - **Falls m ungerade ist**: Substitution $w = \cos x$
    - **Falls n ungerade ist**: Substitution $w = \sin x$
    - **Falls m und n gerade und positiv sind**: wandeln Sie alles in $\sin x$ oder $\cos x$ um (anhand von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) und benutzen Sie IV-17 oder IV-18
    - **Falls m und n gerade und eine negativ ist**: wandeln Sie alles in die Funktion um, die im Nenner vorkommt und benutzen Sie IV-19 oder IV-21
    - **Falls m und n gerade und negativ sind**: Substitution $w = \tan x$ wandelt den Integranden in einer rationale Funktion um, welche mit der Partialbruchzerlegung integriert werden kann

V. Rationale Funktionen mit Quadrat im Nenner

24. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\, a \neq 0$

25. $\int \frac{bx+c}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2}\ln\left|x^2+a^2\right| + \frac{c}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\, a \neq 0$

26. $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\left(\ln|x-a| - \ln|x-b|\right) + C,\, a \neq b$

27. $\displaystyle\int \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b}\left((ac+d)\ln|x-a| - (bc+d)\ln|x-b|\right) + C,\ a \neq b$

VI. Integranden mit $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $a > 0$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2\pm x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2\pm x^2} + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\,\mathrm{d}x\right) + C$

31. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x\right) + C$

Taylor-Polynome/Reihen

Entwicklung von $f(x)$ um den Punkt a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \ldots$$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k =$

wobei $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$.

Wichtige Taylorreihen

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad \text{(Geometrische Reihe)}$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad \text{(Binomische Reihe)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Die letzten drei Reihen konvergieren nur für $|x| < 1$

Komplexe Zahlen

Normalform einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$

$$z = x + y\mathrm{j} \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

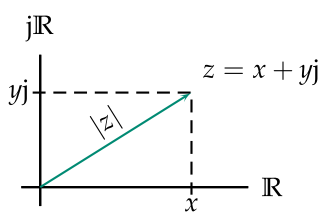
Real- und Imaginärteil

$$\mathrm{Re}(z) = x \quad \mathrm{Im}(z) = y$$

Betrag

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Gausssche Zahlenebene

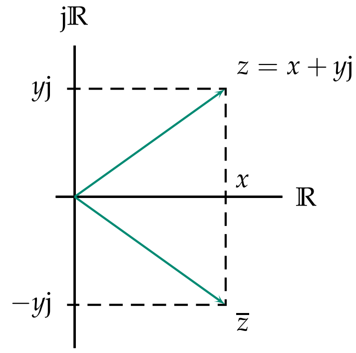


Die zu $z = x + y\mathrm{j}$ komplex konjugiert Zahl ist

$$\overline{z} = x - y\mathrm{j}$$

Division

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$



Eulersche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} = \cos t + \mathrm{j} \sin t \qquad \text{für} \qquad t \in \mathbb{R}$$

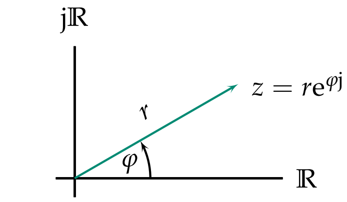
Polarform einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$

$$z = r\mathrm{e}^{\varphi \mathrm{j}} \quad \text{wobei} \quad r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$$

Umwandlung von $z = x + y\mathrm{j}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Gausssche Zahlenebene



Wurzeln

$$z = r\mathrm{e}^{\varphi \mathrm{j}} \quad \Rightarrow \quad z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})\mathrm{j}} \,|\, k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Komplexe harmonische Schwingung

$$\underline{s}(t) = \underline{A}\mathrm{e}^{\omega t \mathrm{j}} \qquad \text{mit} \qquad \underline{A} \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Re}(\underline{s}(t)) = a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{mit} \qquad \underline{A} = a - b\mathrm{j} = A\mathrm{e}^{\varphi \mathrm{j}}$$

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{a - b\mathrm{j}}{2}$$

Fourierreihen

Reelle Form

Periode 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Periode T

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x) \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega_0 x\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega_0 x\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Komplexe Form

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{n\omega_0 t \mathrm{j}}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \mathrm{e}^{-n\omega_0 t \mathrm{j}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Amplitudenspektrum

$$r_n = |c_n| \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Phasenspektrum

$$\varphi_n = \arg(c_n) \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

wobei

$$c_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} \qquad \text{mit} \qquad r_n \geq 0 \qquad \text{und} \qquad -\pi < \varphi_n \leq \pi$$

Energiespektrum

Energie einer T-periodischen Funktion

$$E = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Energiesatz mit Fourierkoeffizienten a_n, b_n $(n \in \mathbb{N})$ bzw. c_n $(n \in \mathbb{Z})$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{wobei} \quad A_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} c_0 \qquad \text{und} \qquad A_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4|c_n|^2 \qquad \text{für} \qquad n > 0$$

Energiespektrum

$$A_n^2 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

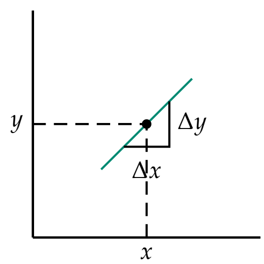
Richtungsfelder

Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

Steigung des Linienelements

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$$



Euler-Verfahren

Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

Anfangsbedingung

$$P_0 = (x_0, y_0)$$

Schrittweite

$$\Delta x$$

Euler-Schritt von $P = (x, y)$ nach $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$

$$\tilde{x} = x + \Delta x$$
$$\Delta y = f(x, y) \cdot \Delta x$$
$$\tilde{y} = y + \Delta y$$

Fehler

$$\text{Fehler} = \text{Exakter Wert} - \text{Näherungswert}$$

Fehlerabschätzung

n Schritte, festes Intervall $\Rightarrow$ Fehler ungefähr proportional zu $1/n$

Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Normalform

$$y' + g(x)y = s(x)$$

Zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y = Ky_1, \quad K = \text{const}$$

y_1: partikuläre Lösung

Allgemeine Lösung

$$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$$

y_h: allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung
y_p: partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

Variation der Konstanten

$y_\mathrm{h} = Ky_1$ allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\Rightarrow$ Ansatz $y = K(x)y_1$

Gleichgewicht

Gleichgewichtslösung: konstante Funktion, die eine Lösung ist
Stabiles Gleichgewicht: Lösungen konvergieren gegen das Gleichgewicht
Instabiles Gleichgewicht: Lösungen divergieren, d.h. entfernen sich vom Gleichgewicht

Wachstum und Zerfall

Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP$$

Allgemeine Lösung

$$P = P_0 \mathrm{e}^{kt} \quad \text{mit} \quad P_0 = P(0)$$

Newtons Abkühlungsgesetz

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(H - H_0) \quad \text{mit} \quad k > 0$$

$H(t)$: Temperatur des Körpers zur Zeit t
H_0: Umgebungstemperatur

Logistisches Modell

Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP(1 - \frac{P}{L})$$

Allgemeine Lösung

$$P = \frac{L}{1 + A\mathrm{e}^{-kt}} \quad \text{mit} \quad A = \frac{L - P_0}{P_0}, \; P_0 = P(0)$$

Maximum der Änderungsrate $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ bei

$$P = \frac{L}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln A}{k}$$

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Homogene Gleichung

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Diskriminante

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0$$

Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{\Delta}\right), & \Delta > 0 \quad \text{(zwei reelle Lösungen)} \\ -\frac{1}{2}a_1, & \Delta = 0 \quad \text{(eine reelle doppelte Lösung)} \\ \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}\right), & \Delta < 0 \quad \text{(zwei komplex konjugierte Lösungen)} \end{cases}$$

Allgemeine Lösung

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}$$

wobei

1. $\Delta > 0$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell und $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
2. $\Delta = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2$ reell und $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $y_2 = t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$
3. $\Delta < 0$: $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{j}\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{j}\beta$ komplex konjugiert und $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$

Inhomogene Gleichung

Normalform

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = s(x)$$

Allgemeine Lösung

$$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$$

y_h: allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung
y_p: partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

Schwingungen

Harmonische Schwingungen

Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Allgemeine Lösung

$$x = c_1 \sin\omega_0 t + c_2 \cos\omega_0 t$$

Gedämpfte Schwingungen

Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{mit} \qquad 2\rho = \frac{\mu}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Allgemeine Lösung

1. $\rho > \omega_0$ (überkritische Dämpfung): $x = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} < 0$
2. $\rho = \omega_0$ (kritische Dämpfung): $x = c_1\mathrm{e}^{-\rho t} + c_2 t\mathrm{e}^{-\rho t}$
3. $\rho < \omega_0$ (unterkritische Dämpfung): $x = c_1\mathrm{e}^{-\rho t}\cos\omega t + c_2\mathrm{e}^{-\rho t}\sin\omega t$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$

Erzwungene Schwingungen

Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t \qquad \text{mit} \qquad 2\rho = \frac{\mu}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad a_0 = \frac{F_0}{m}$$

Allgemeine Lösung

$$x = x_\mathrm{h} + x_\mathrm{p}$$

wobei

x_h: allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (es gilt: $\lim_{t\to\infty} x_\mathrm{h}(t) = 0$)

x_p: partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (*stationäre Lösung*)

Ansatz:

$$x_\mathrm{p} = A\cos\Omega t + B \sin \Omega t$$

Resonanz

Amplitude der äusseren Kraft: a_0

Amplitude der stationären Lösung: x_0

Phasenverschiebung der stationären Lösung (gegenüber Kosinusfunktion): δ_0

Vergrösserungsfaktor und Phasenverschiebung

$$V(\rho, \omega_0, \Omega) = \frac{|x_0|}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\rho^2\Omega^2}} \quad \text{und} \quad \tan\delta_0 = \frac{-2\rho\Omega}{\omega_0^2 - \rho^2}$$

Systeme von Differentialgleichungen

System von Differentialgleichungen für Funktionen x und y von t

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_1(x,y) \tag{1}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f_2(x,y) \tag{2}$$

Lösungsverfahren

1. Gleichung (1) ableiten
2. Gleichung (2) einsetzen
3. Mit Gleichung (1) y eliminieren
4. Erhaltene Differentialgleichung zweiter Ordnung für x lösen
5. Lösung x und Ableitung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ in Gleichung (1) einsetzen und nach y auflösen

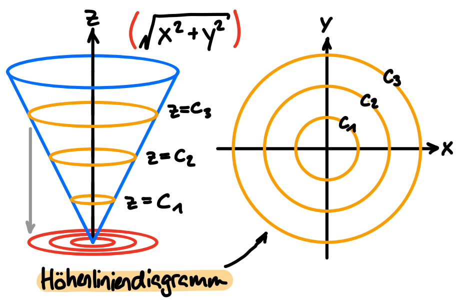
Funktionen von mehreren Variablen

Höhenlinien

Höhenlinie $z = c$

$$\boxed{f(x,y) = c}$$

wobei $f(x,y)$ eine Funktion in zwei Variablen



Niveaufläche

Niveaufläche $w = c$

$$\boxed{f(x,y,z) = c}$$

wobei $w = f(x,y,z)$ eine Funktion in drei Variablen

Partielle Ableitungen

Hier für Funktionen in zwei Variablen; in mehreren Variablen analog.

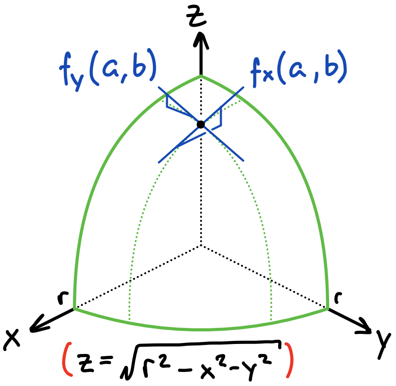
Definition

Partiellen Ableitungen im Punkt (a,b)

- Änderungsrate von f bezüglich x im Punkt (a,b)

$$\boxed{f'_1(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}}$$

- Änderungsrate von f bezüglich y im Punkt (a, b)



$$\boxed{f'^2(a,b) = f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}}$$

Notation

Partielle Ableitungsfunktionen

$$\boxed{f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}}$$

Partielle Ableitungen im Punkt (a, b)

$$\boxed{f_x(a,b) = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(a,b)} \qquad \text{und} \qquad f_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(a,b)}}$$

Höhere partielle Ableitung

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{xx} = (f_x)_x, & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= f_{yx} = (f_y)_x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f_{yy} = (f_y)_y, & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} &= f_{xy} = (f_x)_y \end{aligned}}$$

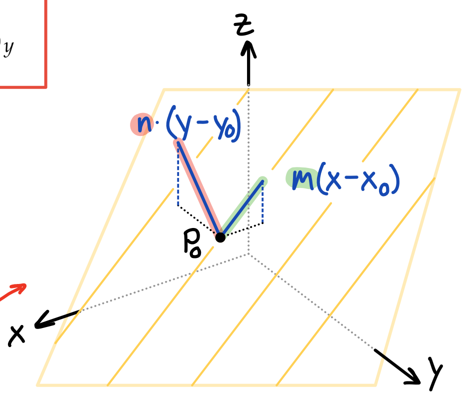
Gemischte Ableitungen

$$\boxed{f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)}$$

Lineare Funktionen

Definition

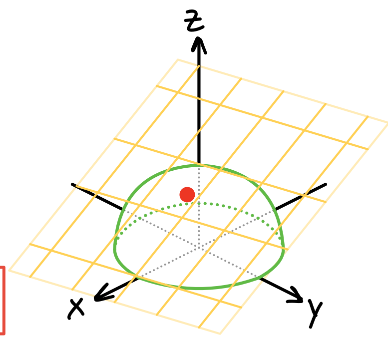
Ebene: m in x-Richtung, n Steigung in y-Richtung durch den Punkt (x_0, y_0, z_0):



$$\boxed{z = z_0 + m(x-x_0) + n(y-y_0)}$$

Tangentialebene / Linearisierung

Tangentialebene in (a, b) der Funktion $f(x, y)$:



$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

Approximation

Tangentialebene als Approximation an $f(x, y)$ für (x, y) in der Nähe von (a, b)

$$\boxed{f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

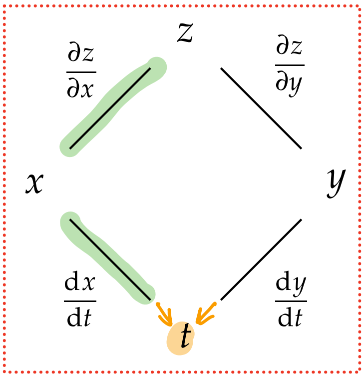
an Niveaufläche (muss differenzierbar sein)

$$\boxed{f_x(a,b,c)\cdot(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0}$$

Kettenregel

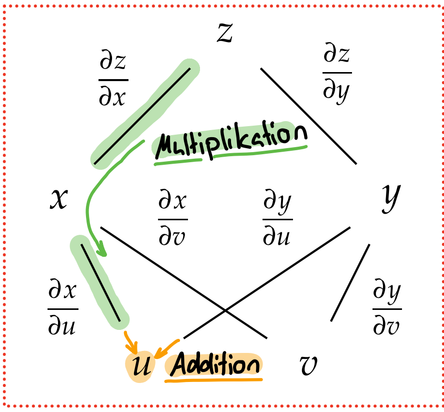
Für $z = f(x, y)$, $x(t)$, $y(t)$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$



Für $z = f(x, y)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$



Gradient

Gradient einer Funktion $z = f(x, y)$:

$$\boxed{\operatorname{grad} f = f_x\,\vec{e}_x + f_y\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}}$$

wobei $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.
Für Funktionen mit mehr als zwei Variablen analog.

Richtungsableitung

Hier für Funktionen mit zwei Variablen; für Funktionen mit mehr Variablen analog

Definition

Richtungsableitung von f in (a, b) in Richtung des Einheitsvektors $\vec{u} = u_1\,\vec{e}_x + u_2\,\vec{e}_y$ $(\|\vec{u}\| = 1)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = f_{\vec{u}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h}}$$

Richtungsableitung und Gradient

Richtungsvektor $\vec{u} = u_1\,\vec{e}_x + u_2\,\vec{e}_y$ und $\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = u_1^*\,\vec{e}_x + u_2^*\,\vec{e}_y$ zugehöriger Einheitsvektor:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = f_{\vec{u}}(a, b) = f_x(a, b)u_1^* + f_y(a, b)u_2^* = \operatorname{grad} f(a, b) \cdot \vec{e}_u}$$

Lokale Extrema

Test mit zweiter Ableitung für Funktionen mit zwei Variablen

Ist (x_0, y_0) ein Punkt mit $\operatorname{grad} f = \vec{0}$ und

$$\boxed{D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2}$$

- Ist $D > 0$ und $f_{xx} > 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein lokales Minimum.

- Ist $D > 0$ und $f_{xx} < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) ein lokales Maximum.
- Ist $D < 0$, dann hat f in (x_0, y_0) einen Sattelpunkt.
- Ist $D = 0$, so ist keine Aussage möglich: f kann in (x_0, y_0) ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt oder nichts von allem haben.

Nebenbedinungen: Lagrange-Multiplikatoren

$z = f(x, y)$ und $g(x, y) = c$ Nebenbedingung. Für Extrema unter Nebenbedingung $g = c$ in einem Punkt P_0 gilt:

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g} \quad \text{und} \quad \boxed{g = c}$$

im Punkt P_0 oder P_0 ist einer der Endpunkte der Nebenbedingung oder $\operatorname{grad} f = \vec{0}$. Um P_0 zu bestimmen, vergleichen wir die Werte von f in den Punkten, die diese drei Bedingungen erfüllen.
Die Zahl λ heisst *Lagrange-Multiplikator*.

Lagrange-Funktion

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Ist (x_0, y_0) ein Extremalpunkt von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = c$ ist, mit λ als Lagrange-Multiplikator, dann gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Für Funktionen mit mehr als zwei Variablen analog.

Stochastik

Kennzahlen

Gegeben sind die Datenpunkte $x_1, \ldots, x_n$.

Arithmetisches Mittel

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Empirische Varianz und Standardabweichung

$$\operatorname{Var}(x) = \frac{(x_1 - \overline{x}_n)^2 + (x_2 - \overline{x}_n)^2 + \cdots + (x_n - \overline{x}_n)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2$$

$$s_x = \sqrt{\operatorname{Var}(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2}$$

Grundbegriffe Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wichtige Rechenregeln

Für A,B Ereignisse, Ω das sichere Ereignis und $\emptyset$ das unmögliche Ereignis gilt

a) $P(\emptyset) = 0; \qquad P(\Omega) = 1, \qquad P(A) \geq 0$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad \text{wobei } \overline{A} = \Omega \backslash A$

Laplacemodell

Sind in alle Elementarereignisse im Grundraum Ω gleichwahrscheinlich, dann gilt für $P(E)$ mit $E \subset \Omega$, dann gilt

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{g}{m}$$

mit g günstige Anzahl und m mögliche Anzahl.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ ist definiert durch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formel von Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

wobei $A_1, \ldots, A_n$ Partition von Ω:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \qquad \text{und} \qquad A_i \cap A_j = \{\} \text{ für } i \neq j$$

Stochastisch unabhängige Ereignisse

Ereignisse A und B nennt man *stochastisch unabhängig*, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Diskrete Verteilungen

Allgemein

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X mit W_X der Wertebereich von X:

[loc]

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in W_X} x \cdot P(X = x)$$

Varianz und *Standardabweichung* σ:

[scale]^2 [scale]

! In Python wird σ anstatt die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in W_X} (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Werten in $\{0, 1, \ldots, n\}$ heisst *Binomial*(n, π)*-verteilt*, falls

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Dabei ist $0 \leq \pi \leq 1$ der Erfolgsparameter der Verteilung.
Es gilt für die Binomialverteilung:

$$\mathrm{E}(X) = n\pi; \qquad \mathrm{Var}(X) = n\pi(1 - \pi); \qquad \sigma(X) = \sqrt{n\pi(1 - \pi)}$$

Poissonverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ heisst Poisson(λ)-verteilt, falls

$$P(X = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter der Verteilung ist.
Es gilt für die Poissonverteilung:

$$\mathrm{E}(X) = \lambda; \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda; \qquad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Stetige Verteilungen

Allgemein

Kumulative Verteilungsfunktion [.cdf] → Inverse Funktion [.ppf] Percentile Point Function

Cumulative Distribution Function

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Dann gilt

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Eigenschaften:

$$0 \leq F(x) \leq 1; \qquad F(-\infty) = 0; \qquad F(\infty) = 1; \qquad F(a) \leq F(b) \text{ (für } a < b)$$

Dichtefunktion:

$$f(x) = F'(x)$$

Erwartungswert und *Varianz* sind wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Es gilt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

Gleichförmige Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = [a, b]$ heisst Uniform($[a, b]$) verteilt, falls

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zugehörige kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$$

Für $X \sim$ Uniform($[a, b]$) sind die Kennzahlen wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Exponentialverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ heisst *exponentialverteilt* mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$ falls

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir schreiben

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Zugehörige kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ sind die Kennzahlen wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}$ heisst *normalverteilt* mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ falls

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Wir schreiben

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sind die Kennzahlen wie folgt:

$$\mathrm{E}(X) = \mu; \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2; \qquad \sigma_X = \sigma$$

Die Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ heisst *Standardnormalverteilung*. Deren Dichte und kumulative Verteilungsfunktion werden wie folgt bezeichnet:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

Lineare Transformationen von Zufallsvariablen

Für

$$Y = a + bX$$

gelten dann folgende Beziehungen:

(i) $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(a + bX) = a + b\,\mathrm{E}(X)$

(ii) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X), \quad \sigma_Y = |b|\sigma_X$

(iii) $\alpha -$ Quantil von $Y = q_Y(\alpha) = a + bq_X(\alpha)$

(iv) $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$

Standardisierung einer Zufallsvariable

Für die transformierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X}$$

gilt

$$\mathrm{E}(Z) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z) = 1$$

Funktionen von mehreren Zufallsvariablen

Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ gleichverteilt, unabhängig (iid)

$$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{kumulative Verteilungsfkt. } F$$

Kennzahlen:

$$\boxed{\mathrm{E}(X_i) = \mu} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_X^2}$$

da jedes X_i identisch sind, haben alle die gleichen Erwartungswerte und Varianz

Kennzahlen von $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$:

$$\boxed{\mathrm{E}(S_n) = n\mu;} \quad \boxed{\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_i);} \quad \boxed{\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma_X}$$

Kennzahlen von $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$:

$$\boxed{\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \mu;} \quad \boxed{\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma_X^2}{n};} \quad \boxed{\sigma(\overline{X}_n) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

Münzenbeispiel:

$\overline{X}_{10} = 0.7 \leftrightarrow \overline{X}_{10000} = 0.5067$

Standardabweichung von $\overline{X}_n$ heisst auch *Standardfehler* des arithmetischen Mittels. Es gilt

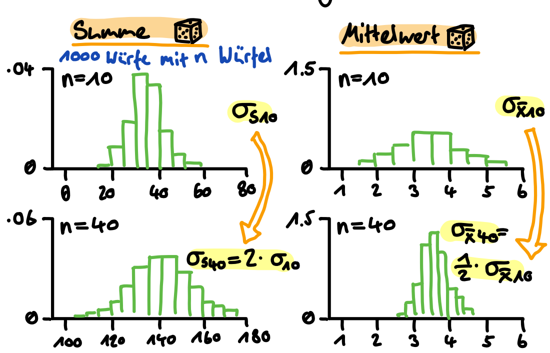
$$\boxed{\sigma_{\overline{X}_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_X}$$

Fehler nimmt nur mit Faktor $1/\sqrt{n}$ ab.
↳ Um den Fehler zu halbieren, benötigt es viermal so viele Beobachtungen.

Gesetz der grossen Zahlen

Für $n \to \infty$ geht die Streuung von $\overline{X}_n$ gegen null. Falls $X_1, \ldots, X_n$ iid, dann

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu \quad \text{für} \quad n \to \infty$$



Zentraler Grenzwertsatz

Falls $X_1, \ldots, X_n$ iid mit irgendeiner Verteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, dann gilt für n „gross":

Beschreibt eine Approximation für alle i.i.d. Verteilung. Wenn X_i unbekannt ist, kann damit eine Annäherung gemacht werden.

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &\approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma_X^2) \\ \overline{X}_n &\approx \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2/n) \end{aligned}}$$

Fehlerrechnung

Standardfehler der Messreihe:

$$\boxed{\overline{x}_n \pm \sigma_{\overline{x}_n} = \overline{x}_n \pm \frac{\sigma_x}{\underbrace{\sqrt{n}}_{}}}$$

Standartabweichung

absoluter Fehler

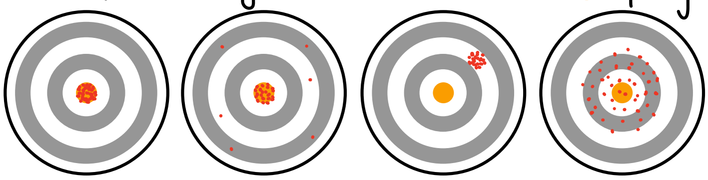
Relativer Fehler:

$$\boxed{\overline{x}_n \pm \frac{\sigma_{\overline{x}_n}}{\overline{x}_n}}$$

$\bar{t}_{100} = 4.2s$

$s_t = 0.8s$

$T = \bar{t}_{100} \pm \frac{s_t}{\sqrt{n}} = 4.2s \pm 0.08s$



	i.O.	grob	systematisch	zufällig
Abweichung	Optimal	keine Aussage möglich	gering	hoch
Qualität des Mittelwerts			schlecht	gut