



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Teoria de Grafos e suas Aplicações

Polyanna Possani da Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2011

511.5 C838t	Costa, Polyanna Possani da Teoria de Grafos e suas Aplicações/ Polyanna Possani da Costa- Rio Claro: [s.n.], 2011. 77 f. : il., figs., tabs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Orientador: Thiago de Melo 1. grafo planar. 2. grafo Euleriano. 3. grafo Hamiltoniano. 4. árvore. 5. coloração. I. Título
----------------	---

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Polyanna Possani da Costa
TEORIA DE GRAFOS E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Prof. Dr. Eliris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - UNESP/Rio Claro - SP

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior
Departamento de Matemática - UFSCar/São Carlos - SP

Rio Claro, 01 de Dezembro de 2011

*Aos meus amados pais Maria Luiza e Milton
à minha irmã Katia
e ao meu noivo Tiago*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e à Nossa Senhora, por terem me dado forças para me dedicar em meus estudos e sabedoria para poder desenvolver e concluir este trabalho.

Agradeço imensamente aos meus queridos e amados pais e à minha irmã, que não mediram esforços para me manter aqui, pelas palavras de apoio quando eu acreditava ser impossível, pelo carinho, amor e por acreditarem em mim.

Ao meu noivo, que mesmo de longe esteve sempre presente me incentivando e apoiando, pelo seu companheirismo e amor.

À minha família, por todo o apoio dispensado.

Ao meu orientador, professor Dr. Thiago de Melo, meu sincero agradecimento pela disponibilidade de tempo e paciência com que me orientou, um professor com quem aprendi muito e que admiro pela sua dedicação.

Aos docentes da Matemática Universitária, por contribuir em minha formação.

Aos funcionários do Departamento de Matemática do IGCE, pelo acompanhamento, conversas de apoio e até mesmo amizades.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNEMAT - Sinop, que me acompanharam durante a minha graduação, pelos ensinamentos e incentivos para a continuação da minha caminhada acadêmica.

Aos grandes amigos que fiz em Rio Claro, pessoas que se tornaram especiais e que foram minha família durante todo esse período. Amigos que levarei para o resto da minha vida.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho e a realização deste sonho.

Resumo

Neste trabalho estudamos a Teoria de Grafos e a aplicamos na solução de alguns problemas clássicos, como por exemplo *O Problema das Pontes de Königsberg*, *O Problema do Caixeiro Viajante*, *Classificação dos Poliedros Regulares* e *Coloração de Mapas*. As ferramentas básicas foram Topologia Geral e Álgebra.

Palavras-chave: grafo planar, grafo Euleriano, grafo Hamiltoniano, árvore, coloração.

Abstract

In this work we study Graph Theory and we apply it in the solution of some classical problems, for example *Königsberg Bridges Problem*, *Travelling Salesman Problem*, *Classification of Regular Polyhedra* and *Map Coloring*. The prerequisites are General Topology and Algebra.

Keywords: planar graph, Eulerian graph, Hamiltonian graph, tree, coloring.

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de grafo simples e grafo.	18
1.2	Exemplo de grafo completo com 4 vértices e sua subdivisão.	19
1.3	Grafo para exemplificar isomorfismo entre grafos.	19
1.4	Grafo do Problema das Casas.	21
1.5	Exemplo de grafo não planar.	22
2.1	Exemplos de percurso, trilha, caminho, circuito e ciclo.	24
2.2	Grafo das Pontes de Königsberg.	24
2.3	Grafo Euleriano.	25
2.4	Dodecaedro e seu grafo associado.	27
2.5	Exemplos de árvore e floresta	30
2.6	Grafo conexo e duas possíveis árvores geradoras.	32
2.7	Exemplo de um grafo peso.	32
2.8	Aplicação do algoritmo “greedy” para a construção da árvore geradora com peso total mínimo.	34
2.9	Grafos do Exemplo 2.28.	35
2.10	Exemplo de um grafo com sua árvore geradora e seus limitantes inferiores.	36
2.11	Exemplo de um grafo com suas árvores geradoras e seus possíveis limi- tantes inferiores.	37
2.12	Exemplo de um grafo e seus possíveis ciclos Hamiltonianos de menor peso.	37
3.1	Exemplo de grafo bipartido.	39
3.2	Grafo bipartido com $X = Y = 3$	40
3.3	Grafo regular de grau 4.	43
3.4	Exemplo do dual de um grafo.	44
3.5	Grafos e seus duais.	45
3.6	Exemplo de grafo regular com dual não regular.	46
3.7	Grafos Completamente Regulares.	48
3.8	Projeção Estereográfica.	48
3.9	Poliedros Regulares.	50
4.1	Exemplo de um grafo com uma 4-coloração e uma 6-coloração.	52
4.2	Exemplo de grafo 3-cromático.	52

4.3	Grafos ciclos C_4 e C_5	52
4.4	Exemplo de um grafo com colorações próprias diferentes.	54
4.5	Exemplo da cadeia de Kempe de um grafo.	55
4.6	Grafo do Teorema 4.8.	56
4.7	Grafo bipartido com $X = 2$ e $Y = 4$	58
4.8	Grafos com números clique 5 e 4, respectivamente.	59
4.9	Exemplo de grafo 5-colorível.	60
A.1	Grafo G gerado com o Maple.	72

Sumário

Introdução	14
1 Conceitos Introdutórios	17
1.1 O que é um grafo?	17
1.2 O Problema das Casas	20
2 Trilhas e Caminhos	23
2.1 Grafo Euleriano e o Problema das Pontes de Königsberg	24
2.2 Grafo Hamiltoniano	27
2.3 Árvores	29
2.4 O Problema do Caixeiro Viajante	34
3 Grafos Planares e Poliedros Regulares	39
3.1 Fórmula de Euler	41
3.2 Grafos Planares	41
3.3 Grafo Dual	43
3.4 Grafos Completamente Regulares	45
3.5 Poliedros Regulares	47
4 Colorindo Grafos	51
4.1 Algumas Limitações do Número Cromático	53
4.2 Teorema das Cinco Cores	59
Considerações Finais	60
Referências	63
A Um Algoritmo para Colorir Grafos	65
B Tabela de Símbolos	75

Introdução

O objetivo deste trabalho é a elaboração de um texto introdutório sobre a Teoria de Grafos, de modo que possa ser utilizado em um estágio de iniciação científica para alunos de graduação em Matemática ou áreas afins. Assim sendo, os assuntos estudados estão expostos de uma maneira simples e detalhada. Procuramos também formalizar as ideias (às vezes intuitivas) encontradas na maioria dos livros introdutórios, como por exemplo [1].

De acordo com [1] e [2], diferente de muitos dos ramos da Matemática que foram motivados por problemas envolvendo cálculos, movimento, entre outros, o desenvolvimento da Teoria de Grafos se deu através de problemas envolvendo jogos e quebra-cabeças, o que do ponto de vista matemático parecia insignificante, mas apesar da aparente trivialidade, cada vez mais chamava a atenção de matemáticos pelos seus resultados teóricos de uma surpreendente variedade e profundidade.

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) escreveu o primeiro artigo relacionado a grafos, de considerável importância não só para esta teoria como também para a Matemática como um todo. Euler iniciou seus estudos em grafos discutindo um enigma, hoje conhecido como *O Problema das Pontes de Königsberg*, o qual ele resolveu e determinou um método geral para problemas do mesmo tipo.

Um problema também muito famoso na Teoria de Grafos é *O Problema das Quatro Cores*. Tal problema surgiu por volta de 1852 e durante mais de cem anos muitos métodos para abordá-lo foram desenvolvidos, mas foi apenas em 1976 que se chegou à “sua solução”. Porém isto só foi possível por meio de cálculos realizados com o auxílio de computadores e com isso, apesar de hoje em dia a demonstração ter sido aceita, este ainda é um problema polêmico entre os matemáticos, já que uma verificação à mão se torna praticamente impossível.

Desenvolvimentos recentes na Matemática, particularmente nas suas aplicações, deram grande importância a tal teoria. Já no século XIX, grafos foram usados em circuitos elétricos e diagramas moleculares. Hoje em dia, além dos grafos aparecerem em campos como a Economia e Biologia, existem tópicos na matemática pura que os utilizam como ferramenta. A Teoria de Grafos é classificada como um ramo da Topologia, mas está fortemente ligada à Álgebra e à Teoria de Matrizes.

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos os principais conceitos para o estudo da Teoria dos

Grafos, como por exemplo, grafos simples, graus máximo e mínimo, isomorfismo entre grafos, entre outros.

No capítulo 2, com o objetivo de estudar alguns grafos especiais, apresentamos teoremas que garantem condições suficientes para a existência destes grafos. Tais resultados são utilizados principalmente para a resolução do *Problema das Pontes de Königsberg* e do *Problema do Caixeiro Viajante*.

O capítulo 3 consta de definições e resultados que servirão para um estudo mais aprofundado de grafos planares. Com o auxílio da Fórmula de Euler encontramos condições para um grafo ser planar. Utilizando tais conceitos, estudamos ainda grafos duais e grafos completamente regulares e a partir destes, provamos a existência de exatamente cinco poliedros regulares.

No capítulo 4, fazemos um breve estudo sobre a coloração de grafos, em especial, sobre o número cromático que diz respeito a uma coloração mínima de um grafo. Finalizamos este capítulo com o *Teorema das Cinco Cores*, que garante que cinco cores são suficientes para colorir um grafo planar. Este teorema foi obtido durante as tentativas de se resolver o *Problema das Quatro Cores*.

Finalmente, no Apêndice A, apresentamos um programa desenvolvido no Maple para a construção de um grafo k -colorível.

1 Conceitos Introdutórios

Neste capítulo formalizamos conceitos básicos de grafos e suas principais características, através de algumas definições e resultados. Tais conceitos serão importantes para nossos estudos nos capítulos seguintes.

Ressaltamos que neste trabalho estudamos grafos finitos e escrevemos apenas grafos.

1.1 O que é um grafo?

Definição 1.1. Um *grafo* (finito) G é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito não vazio e $A(G)$ uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de $V(G)$. Uma família é uma coleção de elementos, os quais podem ser repetidos.

Definição 1.2. Um *grafo simples* G é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto não vazio e $A(G)$ um conjunto de pares distintos não ordenados de elementos distintos de $V(G)$.

Definições Preliminares. A seguir apresentamos algumas definições básicas sobre grafos, a saber, aresta múltipla, laço, grau, entre outros. Tais definições podem ser melhor compreendidas utilizando os grafos da Figura 1.1.

Os elementos de $V(G)$ são chamados *vértices* e os elementos de $A(G)$, *arestas*. Quando não houver risco de confusão, denotamos $V(G)$ e $A(G)$ apenas por V e A . Uma aresta $\{a, b\} \in A(G)$ será denotada simplesmente por ab , além disso, dizemos que a aresta ab *contém* os vértices a e b , ou que a e b pertencem à aresta ab . $G - ab$ representa o grafo G menos a aresta ab e $G - v$ o grafo G menos o vértice v e toda aresta que contém v .

Duas arestas $ab, cd \in A$ em um grafo G são *adjacentes* se possuem um vértice em comum, isto é, $a = c$ ou d , ou $b = c$ ou d . Dizemos que uma aresta que ocorre mais de uma vez na família A é uma *aresta múltipla* e o número de ocorrência é sua *multiplicidade*. Uma aresta é um *laço* se para $v \in V$, $vv \in A$ (observe que arestas múltiplas e laços, não podem ocorrer em grafos simples). O *grau* de um vértice v

é o número de arestas que contêm v , denotado por $g(v)$. Assim, um *vértice ímpar* (respectivamente *par*) é um vértice com grau ímpar (respectivamente *par*).

O *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é definido por:

$$\Delta(G) = \max\{g(v) | v \in V(G)\}.$$

O *grau mínimo*, denotado por $\delta(G)$, é definido por:

$$\delta(G) = \min\{g(v) | v \in V(G)\}.$$

A *vizinhança* de um vértice v é o conjunto dos vértices adjacentes a v , denotada por $\mathcal{V}(v)$:

$$\mathcal{V}(v) = \{w \in V | vw \in A\}.$$

A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade do conjunto V , denotada por $|V|$, e a *dimensão* de G é a cardinalidade do conjunto A , denotada por $|A|$.

Quando trabalhamos com grafos é muito útil representá-los graficamente por diagramas, onde os vértices são pontos e as arestas são segmentos (ou curvas) determinados por somente dois desses pontos, ou seja, não contendo outros vértices.

Como exemplo, considere um grafo G com $V = \{a, b, c, d\}$ e tomemos A de duas maneiras, a saber $A = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$ e $A = \{ad, ad, db, dc, cc\}$. No primeiro caso temos A formado por pares distintos de elementos distintos de V , o que resulta G um grafo simples (Figura 1.1(a)), no outro caso A é constituído por pares (nem todos distintos) de elementos (nem todos distintos) de V , donde obtemos que G é apenas um grafo (Figura 1.1(b)).

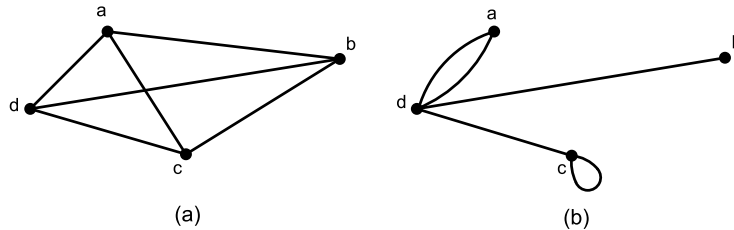


Figura 1.1: (a) Grafo Simples; (b) Grafo.

Sejam dois grafos $G = (V(G), A(G))$ e $H = (V(H), A(H))$. Dizemos que H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. A *reunião* $J = G \cup H$ é um grafo com o conjunto de vértices $V(J) = V(G) \cup V(H)$ e a família de arestas $A(J) = A(G) \cup A(H)$.

Um grafo G que não possui arestas, isto é, $A(G) = \emptyset$, é dito *nulo* e seus vértices são isolados. Denotamos um grafo nulo com n vértices por N_n .

Dizemos que um grafo G é *completo* se, para quaisquer $a, b \in V$, temos $ab \in A$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Por exemplo, o grafo da Figura 1.1(a) é um grafo K_4 .

Em um grafo G , uma *subdivisão* de uma aresta uv é a substituição da aresta uv por uma sequência de novas arestas cujos vértices pertencem à uv , incluindo u e v . Dizemos que um grafo H é uma *subdivisão* de G se H pode ser obtido de G por uma sequência finita de subdivisões (veja a Figura 1.2).

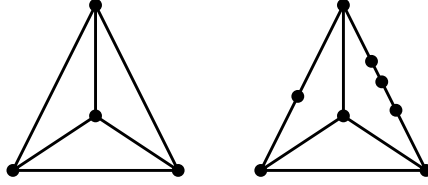


Figura 1.2: Exemplo de grafo completo com 4 vértices e sua subdivisão.

Definição 1.3. Dois grafos são *homeomorfos* se ambos podem ser obtidos de um mesmo grafo por uma sequência finita de subdivisões. Em particular, qualquer subdivisão de G é homeomorfo a G .

Definição 1.4. Sejam dois grafos $G = (V(G), A(G))$ e $H = (V(H), A(H))$. Dizemos que G e H são *isomorfos* se existir uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $ab \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in A(H)$.

Agora, observemos o grafo H da Figura 1.3, e o grafo G da Figura 1.1(a). Temos que $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e $V(H) = \{x, y, z, w\}$ e definimos uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ dada por $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$, $\varphi(c) = z$ e $\varphi(d) = w$, de modo que $ab \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in A(H)$, $bc \in A(G) \Leftrightarrow \varphi(b)\varphi(c) \in A(H)$, e da mesma maneira para as outras arestas. Logo G é isomorfo a H .

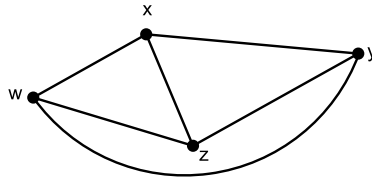


Figura 1.3: Grafo H .

Observe ainda que se somarmos os graus dos quatro vértices do grafo H , teremos como resultado o dobro do número de arestas. Este resultado é válido para um grafo qualquer, como veremos no seguinte Lema.

Lema 1.5. Seja G um grafo com $V = \{a_1, \dots, a_n\}$, cujos graus são dados por $g(a_1), \dots, g(a_n)$. O número m de arestas em G é dado por:

$$m = \frac{1}{2} \{g(a_1) + \dots + g(a_n)\}.$$

Em particular, a soma dos graus de G é um número par.

Demonstração. De fato, cada vértice a_i fornece $g(a_i)$ arestas e como cada aresta contém exatamente dois vértices, devemos dividir a soma dos graus por dois. \square

Como consequência deste Lema, temos:

Teorema 1.6. *Todo grafo G tem um número par de vértices ímpares.*

Demonstração. Suponha que G tenha um número ímpar de vértices ímpares, de modo que os graus sejam $2k_1 + 1, 2k_2 + 1, \dots, 2k_{2n+1} + 1, k_i, n \in \mathbb{N}$. Fazendo a soma dos graus,

$$(2k_1 + 1) + \dots + (2k_{2n+1} + 1) = \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i + 1) = \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i) + 2n + 1 = 2 \left(n + \sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) + 1,$$

um número ímpar. Mas, pelo Lema anterior, temos que a soma dos graus de um grafo é um número par. Logo G deve ter um número par de vértices ímpares. \square

Um grafo G cujos vértices são todos de mesmo grau r é chamado *regular de grau r* ou *r -regular*. Assim, temos que o seu número de arestas é $m = \frac{1}{2}nr$, onde n é o número de vértices. Ao observarmos um grafo completo K_n , vemos que K_n é regular de grau $n - 1$. O grafo da Figura 1.1(a), como já vimos é um grafo K_4 , mas também é um grafo 3-regular.

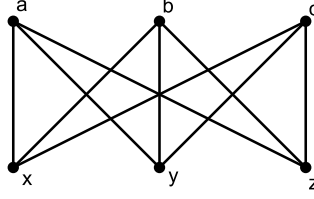
1.2 O Problema das Casas

Definição 1.7. Dizemos que um grafo G é *planar* se possui uma representação gráfica (ver página 18) na qual quaisquer duas arestas se interceptam (possivelmente) apenas em vértices. Neste caso, temos uma *representação planar*.

Observe que o grafo H (Figura 1.3) isomorfo ao grafo G (Figura 1.1(a)) é um grafo planar, porém nem sempre é possível obter tal isomorfismo, como veremos no seguinte problema.

Problema: Havendo três casas e as redes de água, esgoto e elétrica, é possível fornecer os três serviços para as três casas sem que as redes se “cruzem”?

Na Figura 1.4, os vértices a, b, c representam as casas e os vértices x, y, z , os serviços. Será possível obtermos um grafo isomorfo a F tal que suas arestas, duas a duas, não se interceptam, isto é, um grafo planar? Para a solução deste problema, precisamos do Teorema da Curva de Jordan. Para mais detalhes, sugerimos [3, pg. 474] ou [4, Cap.2, §5] para resultados mais gerais.

Figura 1.4: Grafo F .

Teorema da Curva de Jordan ([3, pg. 474]): *Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, regular, simples e fechada. $\mathbb{R}^2 - \alpha([0, 1])$ resulta em exatamente duas componentes conexas e $\alpha([0, 1])$ é a fronteira comum destas componentes.*

Corolário 1.8. *Se quaisquer dois pontos p, q em uma curva α , como acima, são ligados por uma curva contínua pq cujos os únicos pontos em comum com α são seus extremos, então a curva pq está inteiramente contida (exceto os extremos, claro) na região interna de α ou na região externa de α .*

Demonstração. De fato, seja uma curva $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua tal que $f(0) = p \in \alpha$, $f(1) = q \in \alpha$ e $f(t) \notin \alpha$, para todo $t \in (0, 1)$.

Suponha que a curva não está inteiramente contida na região interna de α nem na região externa de α . Então existem $t_0, t_1 \in (0, 1)$ tais que $f(t_0) = r$ pertence à região interna de α e $f(t_1) = s$ à externa de α (podemos supor $t_0 < t_1$).

Considere a curva $\bar{f} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ restrição de f ao intervalo $[t_0, t_1]$, pelo Teorema da Curva de Jordan, existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que $\bar{f}(t_2) = v \in \alpha$, contradizendo a hipótese. Daí segue o resultado \square

Corolário 1.9. *Se considerarmos pontos quaisquer na curva α , como acima, na seguinte ordem $puqv$ tal que a curva contínua pq não intercepte a curva contínua uv , então uma das curvas está inteiramente contida na região interna de α , enquanto a outra inteiramente contida na região externa de α .*

Demonstração. De fato, pelo Corolário 1.8, cada uma das curvas pq e uv deve estar inteiramente contida na região interna ou externa de α . Suponhamos pq e uv ambas na região interna de α . Consideremos agora uma nova curva fechada $D = pqv$, obtida compondo pq , qv , vp , onde qv e vp estão contidas em α e a região interna de D está contida na região interna de α , como mostra a Figura 1.5(a). Pelo Teorema da Curva de Jordan, uv intercepta a curva D em algum ponto $x \neq v$, contrariando a hipótese.

Logo, se pq pertence à região interna de α então uv pertence à região externa de α . \square

Voltando ao problema, primeiramente vamos construir uma curva C . Sejam o conjunto das casas e o de serviços, $K = \{a, b, c\}$ e $S = \{x, y, z\}$, respectivamente, e ainda, como não é necessário um percurso entre as casas, sem perda de generalidade,

podemos construir a curva C com a sequência $azcybxa$. Assim, se construirmos as curvas restantes ay , bz e cx sem interseções, nosso problema estará resolvido. Pelo Corolário 1.8, temos que cada uma das curvas restantes está inteiramente contida na região interna ou externa de C . Como são três curvas para duas regiões, duas delas estarão na mesma região e, pelo Corolário 1.9, se interceptam. Logo não é possível obter uma solução para este problema. Em outras palavras, obter um grafo planar isomorfo ao grafo F . Veja a Figura 1.5(b).

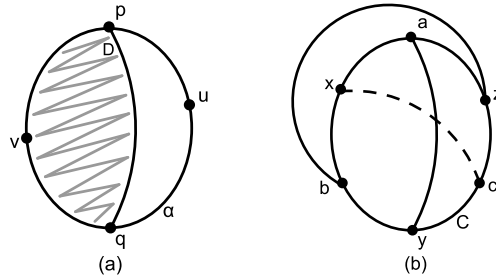


Figura 1.5: (a) Figura do Corolário 1.9; (b) Grafo não planar.

2 Trilhas e Caminhos

Neste capítulo, entre outros conceitos, estudamos principalmente os grafos de Euler e de Hamilton e apresentamos também alguns problemas envolvendo esses grafos. Para tanto, definimos a seguir um percurso.

Definição 2.1. Um *percurso* $v_1v_2 \dots v_n$ em um grafo G é uma sequência de vértices (não necessariamente distintos) v_1, v_2, \dots, v_n tal que $v_i v_{i+1} \in A(G)$, para $1 \leq i \leq n-1$. Dizemos que este é um percurso $v_1 - v_n$, e que v_1 e v_n são, respectivamente, os pontos inicial e final do percurso. O *comprimento* de um percurso é o número de arestas do percurso (considerando repetições).

Para nossos estudos, precisamos de alguns tipos particulares de percurso, definidos abaixo.

Definição 2.2. Dizemos que um percurso em um grafo G , tal que $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$, $1 \leq i, j \leq n-1$, é uma *trilha* em G e um percurso tal que $v_i \neq v_j$, exceto possivelmente $v_1 = v_n$, é um *caminho* em G .

Assim podemos dizer que em uma trilha as arestas não se repetem e que em um caminho os vértices são todos distintos, exceto o ponto inicial que pode ser igual ao ponto final. Um caminho com $v_1 = v_n$ é chamado *ciclo*, e uma trilha com $v_1 = v_n$ é chamado *circuito* (ou trilha cíclica).

Se alguma aresta possuir multiplicidade maior que 1, isto nos permitirá ter duas arestas com os mesmos vértices, porém distintas.

Para ilustrar os conceitos definidos acima, optamos por representar na Figura 2.1 cada um destes objetos: (a) $ebfbc$ é um percurso, (b) $afdefb$ é uma trilha, (c) $acbf e$ é um caminho, (d) $afdefbca$ é um circuito, (e) $fbcadef$ é um ciclo.

Definição 2.3. Um grafo G é *conexo* se $G = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2 grafos, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ implicar $G_1 = \emptyset$ ou $G_2 = \emptyset$. Sejam G um grafo e $v \in V$, o maior subgrafo conexo de G que contém v é a componente conexa de G contendo v , ou simplesmente componente de G .

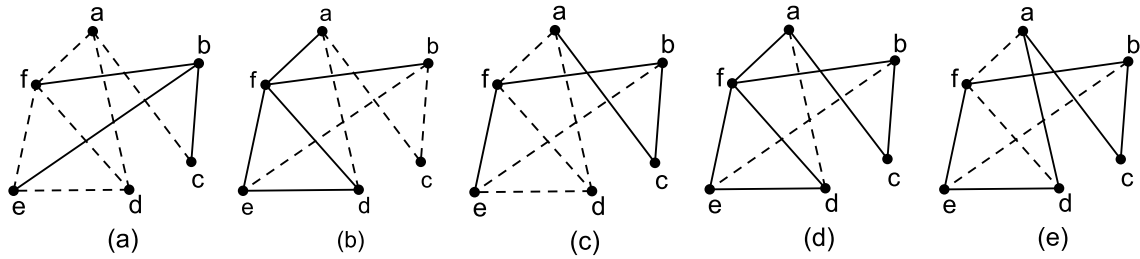


Figura 2.1: Exemplos de percurso, trilha, caminho, circuito e ciclo.

2.1 Grafo Euleriano e o Problema das Pontes de Königsberg

De acordo com [1], Leonard Euler (1707-1783), que é considerado o primeiro matemático a escrever um documento sobre a teoria dos grafos, iniciou seus estudos, sobre tal teoria, estudando e tentando resolver um problema conhecido como *Problema das Pontes de Königsberg*. A cidade de Königsberg (atual Caliningrado), na região da Prússia, estava localizada nas margens e em duas ilhas do rio Preguel, as quais eram ligadas por sete pontes. A discussão entre os moradores da cidade era a seguinte: *É possível sair de casa, atravessar cada ponte apenas uma vez e retornar à casa?*

O diagrama que representa este problema é como na Figura 2.2, onde os vértices a, b, c, d são as margens e as ilhas, e as arestas correspondem as pontes.

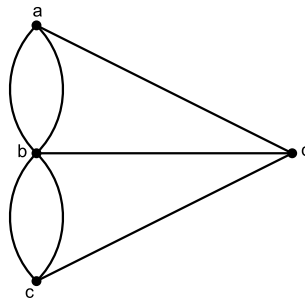


Figura 2.2: Grafo das Pontes de Königsberg.

Observando este diagrama, notamos que para este problema ter uma solução é preciso traçar uma trilha fechada contendo todas as arestas, ou seja, um circuito contendo todas as arestas.

Desta forma, Euler iniciou seus estudos com o problema: *Em que grafo é possível encontrar um circuito contendo todas as suas arestas?* Daí, vem as definições:

Definição 2.4. Uma trilha que contém todas as aresta de um grafo G é chamada *Trilha Euleriana*. Da mesma forma, um circuito que contém todas as arestas de G é dito *Circuito Euleriano*. Se G contém um circuito Euleriano dizemos que G é um *grafo Euleriano*.

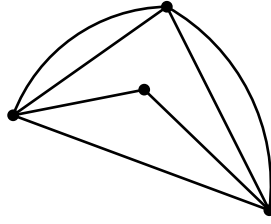


Figura 2.3: Grafo Euleriano.

Agora, para resolver o “Problema das Pontes de Königsberg” apresentamos alguns resultados.

Lema 2.5. *Se G é um grafo cujo grau de cada vértice é pelo menos 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Caso G tenha algum laço ou aresta múltipla, o resultado é imediato.

Suponhamos então que G seja um grafo simples. Dado $v \in V$, construiremos um ciclo através de um processo recursivo, escolhemos v_1 um vértice qualquer adjacente a v e, para cada $i > 1$, escolhemos v_{i+1} algum vértice diferente de v_{i-1} adjacente a v_i . Temos que a existência de tais vértices é garantida por hipótese (pois cada vértice pertence a no mínimo duas arestas) e como G tem um número finito de vértices, devemos em algum momento escolher um vértice já escolhido antes. Se v_k é o primeiro tal vértice, então o percurso entre as duas ocorrências de v_k é um ciclo, como queríamos. \square

Observação 2.6. Para a prova do Teorema 2.7, observamos que um grafo conexo G contendo apenas uma aresta possui todos os vértices pares se, e somente se, esta aresta é um laço.

Teorema 2.7. *Seja G um grafo conexo. G é Euleriano se, e somente se, cada vértice de G é par.*

Demonstração. (\implies) Suponha T um circuito Euleriano de G . Se T passa por um vértice qualquer v , então T contribui com pelo menos duas arestas para o grau de v (caso T contribuísse com somente uma aresta, então T seria uma trilha mas não um circuito ou não seria uma trilha). Como T é um circuito, cada aresta de G ocorre exatamente uma vez em T , assim todos os vértices de G tem as características do vértice v . Logo cada vértice de G é par.

(\impliedby) Suponha que cada vértice de G seja par. Provaremos por indução no número de arestas de G . Para o número de arestas de G igual a 1, pela Observação 2.6, existe um circuito Euleriano.

Agora, seja G um grafo qualquer. Como G é conexo, cada vértice tem grau no mínimo 2 (caso contrário seria 0, isto é, vértice nulo, e então G não seria conexo). Assim, pelo Lema 2.5, G contém um ciclo C . Se C contém todas as arestas de G a prova está completa. Se não, removemos de G as arestas de C para formar um novo

grafo H (possivelmente desconexo) com cada vértice par. Como $H \subsetneq G$, H tem menos arestas do que G e pela hipótese de indução, cada componente de H tem um circuito Euleriano. Pela conexidade de G , cada componente de H tem no mínimo um ponto em comum com C . Obtemos assim um circuito Euleriano em G seguindo as arestas de C até um vértice não isolado de H , trançando o circuito Euleriano da componente H que contém este vértice e continuando ao longo das arestas de C , até alcançarmos um vértice pertencente a outra componente de H e assim sucessivamente, até retornarmos ao vértice inicial. \square

Observação 2.8. Seja um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana $T = v_1v_2 \dots v_n$. Considere um vértice $v \neq v_1, v_n$, isto é, $v = v_i$, $2 \leq i \leq n-1$. Se $i = 2$ as arestas v_1v e vv_3 contêm v ; se $i = n-1$, as arestas $v_{n-2}v$ e vv_n contêm v ; caso contrário, teremos $v_{i-1}v$ e vv_{i+1} contendo v , isto é, em qualquer situação T contribui com duas arestas para o vértice v . Logo qualquer vértice $v \neq v_1, v_n$ é par.

Teorema 2.9. *Um grafo conexo G contém uma trilha Euleriana $T_{ab} = av_2 \dots v_{n-1}b$, $a \neq b$, se, e somente se, a e b são os únicos vértices ímpares.*

Demonstração. (\implies) Suponha que G tenha uma trilha Euleriana T_{ab} . Se $v_i \neq a, b$, pela Observação 2.8, v_i é par. Agora mostremos que os vértices a e b são ímpares.

Como T_{ab} tem início no vértice a , T_{ab} contribui com uma aresta para a , e se também $v_i = a$, $2 \leq i \leq n-1$, então pelo mesmo argumento, T_{ab} contribuirá com mais duas arestas para a . Logo, o vértice a sempre terá grau ímpar. Analogamente, o vértice b é ímpar.

(\impliedby) Suponha que a e b sejam os únicos vértices ímpares de G . Definimos um grafo H por $V(H) = V(G)$ e $A(H) = A(G) \cup \{ab\}$ e assim a aresta ab aumenta em 1 o grau dos vértices a e b . Portanto, todos os vértices de H tem grau par e, pelo Teorema 2.7, H tem um circuito Euleriano $U = v_0v_1 \dots v_iabv_j \dots v_nv_0$. Sem perda de generalidade, podemos reescrever $U = bv_j \dots v_nv_0v_1 \dots v_iab$.

Agora, retirando a aresta ab do circuito Euleriano U , teremos como resultado uma trilha Euleriana $T = bv_j \dots v_nv_0v_1 \dots v_ia$ em G , isto é, T_{ab} . \square

Teorema 2.10. *Um grafo conexo G contém uma trilha Euleriana se, e somente se, existem no máximo dois vértices ímpares.*

Demonstração. (\implies) Suponha que G tenha uma trilha Euleriana $T = v_1v_2 \dots v_n$. Pela observação 2.8, qualquer vértice $v \neq v_1, v_n$ é par e portanto existem no máximo dois vértices ímpares.

(\impliedby) Suponha G com no máximo dois vértices ímpares. Pelo Teorema 1.6, temos que G possui um número par de vértices ímpares e assim nos resta mostrar apenas que, se G possui 0 ou 2 vértices ímpares, então G tem uma trilha Euleriana.

Se G não possui vértice ímpar, ou seja, todos os vértices são pares, pelo Teorema 2.7, G é Euleriano e assim possui uma trilha Euleriana (na verdade, um circuito, que

é uma trilha fechada). Por fim, se G possui 2 vértices ímpares, pelo Teorema 2.9, G também possui uma trilha Euleriana. \square

Teorema 2.11. *Um grafo conexo com $2k$ vértices ímpares contém uma família de k trilhas distintas que, juntas, contêm todos os vértices do grafo.*

Demonstração. Sejam G um grafo conexo e a_1, \dots, a_k e b_1, \dots, b_k os vértices ímpares de G . Adicionando as k arestas a_1b_1, \dots, a_kb_k , obtemos um grafo H tal que $A(H) = A(G) \cup \{a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_kb_k\}$ (podendo algumas destas serem arestas múltiplas). Note que as arestas $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_kb_k$ aumentam em 1 o grau dos vértices a_1, \dots, a_k e b_1, \dots, b_k . Assim, H possui todos os vértices pares e, pelo Teorema 2.7, H possui um circuito Euleriano $C = v \dots a_1b_1 \dots a_2b_2 \dots a_kb_k \dots v$. Retirando as k arestas a_ib_i em C , $i = 1, \dots, k$, obtemos as trilhas $v \dots a_1$, $b_1 \dots a_2$, $b_2 \dots a_k$, $b_k \dots v$ em G . Como as trilhas $b_k \dots v$ e $v \dots a_1$ possuem v em comum, então estas formam uma única trilha $b_k \dots v \dots a_1$. Portanto G contém k trilhas distintas que, juntas, contêm todos os vértices de G . \square

Resolvendo o Problema das Pontes de Königsberg: Com os resultados que acabamos de apresentar, podemos concluir que é impossível obtermos um circuito Euleriano no grafo que representa as pontes de Königsberg, pois vimos que um grafo é Euleriano se, e somente se, possui todos os vértices pares. Porém, este grafo possui todos os vértices ímpares.

Note que mesmo não exigindo que o trajeto inicie e termine no mesmo local, ainda não temos uma solução, pois neste caso, pelo Teorema 2.9, é necessário e suficiente exatamente dois vértices ímpares.

2.2 Grafo Hamiltoniano

Conforme [1], em 1859, o matemático irlandês William Hamilton inventou um jogo chamado “The Icosian Game”, com um peculiar enigma envolvendo um dodecaedro, em que cada um dos 20 vértices foram nomeados com nomes de cidades importantes. O objetivo do jogo era, utilizando as 30 arestas do dodecaedro, *passar por cada uma das cidades apenas uma vez, começando e terminando na mesma cidade*.

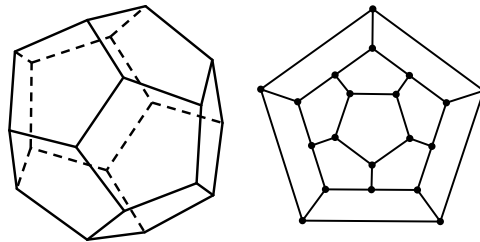


Figura 2.4: Dodecaedro e seu grafo associado.

Tal como no problema das pontes, buscamos a solução por meio da construção de um ciclo contendo todos os vértices do grafo que modela o problema.

Definição 2.12. Um caminho que contém todos os vértices de um grafo G é dito *caminho Hamiltoniano* de G . Do mesmo modo, um ciclo que contém todos os vértices de G , dizemos ser um *ciclo Hamiltoniano*. Se G contém um ciclo Hamiltoniano, dizemos que G é um *grafo Hamiltoniano*.

Um exemplo de grafo Hamiltoniano é o grafo associado do dodecaedro (Figura 2.4).

Note que existe uma relação entre ciclos Hamiltonianos e circuitos Eulerianos, pois o primeiro deve conter todos os vértices e o segundo, todas as arestas. Porém, apesar de conhecermos condições necessárias e suficientes para um grafo ser Euleriano, temos apenas condições suficientes para ser Hamiltoniano.

Nesta linha de raciocínio, o Teorema 2.14, conhecido como Teorema de Dirac, mostra que condições sobre o grau mínimo $\delta(G)$ são suficientes. Este Teorema sai como consequência do Teorema de Ore (Teorema 2.16), que também fornece condições suficientes envolvendo o grau de dois vértices não adjacentes.

Para a demonstração do Teorema de Dirac, faremos uso do seguinte.

Lema 2.13. *Seja G um grafo de ordem n . Se $\delta(G) \geq (n-1)/2$, então G é conexo.*

Demonstração. Mostremos por indução. Se $n = 1$, $\delta(G) \geq 0 = (n-1)/2$, e claramente G é conexo.

Suponhamos que $\delta(G) \geq (n-1)/2$ implica G conexo.

Se G tem ordem $n+1$ e $\delta(G) \geq ((n+1)-1)/2 = n/2 > (n-1)/2$, fixamos um $v \in V(G)$ e tomamos H subgrafo de G com $V(H) = V(G) - \{v\}$ e $A(H) = A(G) - \{vw_i; w_i \in \mathcal{V}(v)\}$.

Assim, H tem ordem n e $\delta(H) \geq \delta(G) > (n-1)/2$ e, por hipótese de indução, é conexo.

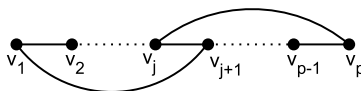
Como G é obtido de H adicionando o vértice v e as arestas conectando v ao H , segue que G é conexo. \square

Teorema 2.14 (Dirac). *Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$. Se $\delta(G) \geq n/2$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Suponhamos que G não seja Hamiltoniano. Seja P um caminho $v_1 v_2 \dots v_p$ em G com comprimento máximo, e portanto, todo vértice adjacente de v_1 e todo vértice adjacente de v_p estão em P ($g(v_1), g(v_p) \leq p-1$) e como $\delta(G) \geq n/2$, v_1 e v_p têm no mínimo $n/2$ vizinhos em P .

Afirmamos que deve existir algum j , $1 \leq j \leq p-1$, tal que $v_j \in \mathcal{V}(v_p)$ e $v_{j+1} \in \mathcal{V}(v_1)$. Suponhamos que este não seja o caso, ou seja, se $v_j \in \mathcal{V}(v_p)$ então $v_{j+1} \notin \mathcal{V}(v_1)$. Assim, como $g(v_p) \geq \delta(G) \geq n/2$ então

$$g(v_1) \leq p-1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$



contrariando a hipótese de $\delta(G) \geq n/2$.

Agora, seja o ciclo $C = v_1v_2 \dots v_jv_pv_{p-1} \dots v_{j+1}v_1$, com os mesmos vértices de P porém com $v_jv_p, v_{j+1}v_1$ arestas a mais. Como G é não Hamiltoniano, existe no mínimo um vértice w de G que não está em P . Mas, como $\delta(G) \geq n/2 \geq (n-1)/2$, pelo Lema 2.13, G é conexo e portanto w deve ser adjacente a algum vértice v_i de P . Tomando o caminho em G que começa em w , passa por v_i , e continua no ciclo C obtemos um caminho mais longo que P , o que é um absurdo.

Logo não podemos ter G não Hamiltoniano, ou seja, G é Hamiltoniano. \square

Exemplo 2.15. O grafo K_n , $n \geq 3$, é Hamiltoniano. De fato, $\delta(K_n) = n-1 \geq n/2$.

Teorema 2.16 (Ore). *Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$. Se $g(x) + g(y) \geq n$, para todo par x, y de vértices não adjacentes, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Dado G nas condições do Teorema, suponhamos G não Hamiltoniano. Adicione em G , se possível, o maior número de arestas de modo que G continue não Hamiltoniano, após isto, qualquer aresta a mais tornará G Hamiltoniano. Observe que com a adição destas arestas, ainda temos $g(x) + g(y) \geq n$. Seja $C = v_1v_2 \dots v_n$ um caminho em G que contém todos os vértices (tal caminho existe, pois com uma aresta a mais o grafo seria Hamiltoniano fornecendo então um ciclo Hamiltoniano). Como G não é Hamiltoniano, C não é ciclo e então os vértices v_1 e v_n não são adjacentes. Portanto, $g(v_1) + g(v_n) \geq n$ e de modo análogo ao Teorema anterior, mostramos que existe algum vértice v_i adjacente à v_1 tal que v_{i-1} é adjacente à v_n .

Deste modo obtemos um ciclo $v_1v_2 \dots v_{i-1}v_nv_{n-1} \dots v_{i+1}v_iv_1$ contendo todos os vértices de G , ou seja, um ciclo Hamiltoniano. Mas isso contradiz as hipóteses sobre G e portanto G deve ser Hamiltoniano. \square

Como observado anteriormente o Teorema 2.14 segue do Teorema 2.16, desde que para todo par de vértices x, y , adjacentes ou não, $g(x) + g(y) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

Aplicaremos a teoria de grafos Hamiltonianos para buscarmos uma solução para o Problema do Caixeiro Viajante (Ver Seção 2.4). Porém, ainda precisamos de algumas outras ferramentas, como por exemplo, grafos particulares chamados de árvores, definidos a seguir.

2.3 Árvores

Um grafo conexo que não contém ciclos é chamado de *árvore*. Um grafo que não contém ciclos é uma *floresta*, ou seja, uma floresta é uma reunião disjunta de (uma ou

mais) árvores. Em particular, N_1 é um *tronco*, K_2 é um *galho* e um vértice com grau 1 é uma *folha*. Uma aresta ab é uma *ponte* se o grafo $G - ab$ possui mais componentes que G . Por exemplo, na Figura abaixo, a aresta xy é uma ponte e o vértice z uma folha.

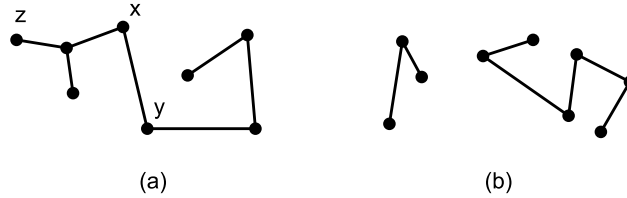


Figura 2.5: (a) Uma árvore; (b) Uma floresta formada por duas árvores.

Proposição 2.17. *Toda aresta em uma árvore é uma ponte.*

Demonstração. Sejam G uma árvore e $ab \in A(G)$ uma aresta. Se $G - ab$ ainda é conexo, então existe um percurso $C = av_1 \dots v_nb$ com todos os vértices distintos (pois caso contrário teríamos um ciclo em G), ou seja, C é um caminho.

Acrescentando a aresta ab ao caminho C , temos um ciclo, ou seja, um absurdo, pois G é uma árvore. Logo $G - ab$ é desconexo e portanto ab é uma ponte. \square

Teorema 2.18. *Se G é uma árvore com n vértices, então G possui $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Provaremos por indução no número de vértices de G . Se $n = 1$, qualquer aresta em G é da forma aa , o que gera um ciclo em G . Como G é uma árvore, então G não possui arestas (zero).

Suponhamos que o resultado seja válido para árvores com no máximo $n - 1$ vértices. Sejam G uma árvore com n vértices e ab alguma aresta de G . Como G é uma árvore, pela Proposição 2.17, $G - ab$ é desconexo, com duas componentes conexas, cada uma sendo uma árvore de grau menor que n . Sejam G_1 e G_2 estas duas componentes com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, e assim $n_1 + n_2 = n$. Como $n_1, n_2 < n$, por hipótese de indução, G_1 tem $n_1 - 1$ arestas e G_2 tem $n_2 - 1$ arestas.

Mas, $A(G)$ é a união disjunta $A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{ab\}$, com cardinalidade $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$, o que completa a demonstração. \square

Teorema 2.19. *Se F é uma floresta com n vértices e k componentes conexas, então F contém $n - k$ arestas.*

Demonstração. Por definição, cada componente C_i de F é uma árvore com n_i vértices e $n_i - 1$ arestas. Sejam C_1, \dots, C_k as k componentes de F e $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$, suas respectivas quantidades de arestas. Assim, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Logo $A(F) = \cup A(C_i)$, com cardinalidade $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = n - k$, como queríamos. \square

Teorema 2.20. *Seja G um grafo de ordem n . G é uma árvore se, e somente se, G é conexo e contém $n - 1$ arestas.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se G é uma árvore de ordem n , por definição G é conexo e, pelo Teorema 2.18, contém $n - 1$ arestas.

(\Leftarrow) Seja G um grafo de ordem n , conexo e com $n - 1$ arestas. Para que G seja uma árvore resta mostrar que G não contém ciclos. Suponhamos que G contém um ciclo C . Como C tem comprimento finito, podemos remover o maior número de arestas de modo que G continue conexo. Se ainda existirem ciclos em G , repetimos o processo acima até obtermos um grafo conexo e sem ciclos, ou seja, uma árvore, porém com menos de $n - 1$ arestas, que é um absurdo pelo Teorema 2.18.

Portanto G não possui ciclos. \square

Teorema 2.21. *Seja G um grafo de ordem n . G é uma árvore se, e somente se, G não possui ciclos e contém $n - 1$ arestas.*

Demonstração. (\Rightarrow) Imediato da definição de árvore e do Teorema 2.18.

(\Leftarrow) Seja G um grafo de ordem n , sem ciclos e com $n - 1$ arestas. Basta mostrar que G é conexo. Sejam G_1, G_2, \dots, G_k as componentes conexas de G . Como G não possui ciclos, cada uma das componentes é uma árvore e assim G é uma floresta. Pelo Teorema 2.19, G tem $n - k$ arestas, e por hipótese, $n - 1$ arestas, logo $k = 1$. \square

Observando o conceito de árvore, podemos notar que a árvore N_1 (tronco) não possui folhas. Para os outros tipos de árvores, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.22. *Seja T uma árvore de ordem $n \geq 2$. Então T possui no mínimo duas folhas.*

Demonstração. Provaremos por indução na ordem de T . Se $n = 2$, temos que a única árvore com dois vértices é $T = K_2$, que tem duas folhas. Suponhamos o resultado válido para árvores de ordem $n - 1 > 2$ e consideremos uma árvore T , de ordem n , que pelo Teorema 2.18, possui $n - 1$ arestas.

Se toda aresta de T contém uma folha, então T contém no mínimo duas folhas. Suponhamos então que existe alguma aresta $a = uv$ de T que não contém folhas. O grafo $T - a$ é um par de árvores T_1 e T_2 , cada uma de ordem menor que n . Vamos supor que $u \in V(T_1)$ e $v \in V(T_2)$ com $|V(T_1)| = n_1$, $|V(T_2)| = n_2$. Como u, v não são folhas de T , seus graus $g(u)$ e $g(v)$ (calculados em T_1 e T_2) são pelo menos 1 e portanto n_1 e n_2 são pelo menos 2. Por hipótese de indução, T_1 e T_2 possuem duas folhas no mínimo. Mas ao considerarmos a aresta uv poderemos eliminar no máximo duas folhas de T , uma em T_1 e outra em T_2 , de modo que T ainda contém no mínimo duas folhas. \square

Exemplo 2.23. Dado um grafo conexo G , vejamos qual o menor número de arestas que devemos remover de modo a obtermos uma árvore.

Para isso, suponhamos que o grafo G não seja uma árvore e que tenha n vértices e q arestas. Consideremos uma aresta ab pertencente a algum ciclo de G . Tomamos $H = G - ab$, também conexo, e caso ainda existam ciclos, repetimos este procedimento até obtermos uma árvore T .

Note que T tem o mesmo número n de vértices de G , que pelo Teorema 2.18, possui $n - 1$ arestas. Logo, removemos de G exatamente $\gamma = q - (n - 1) = q - n + 1$ arestas.

A árvore construída no Exemplo acima é chamada *árvore geradora* de G . Caso G tenha k componentes, fazendo este procedimento em cada componente, obtemos a chamada *floresta geradora* de G . A Figura 2.6, ilustra o fato da não unicidade de uma árvore geradora.

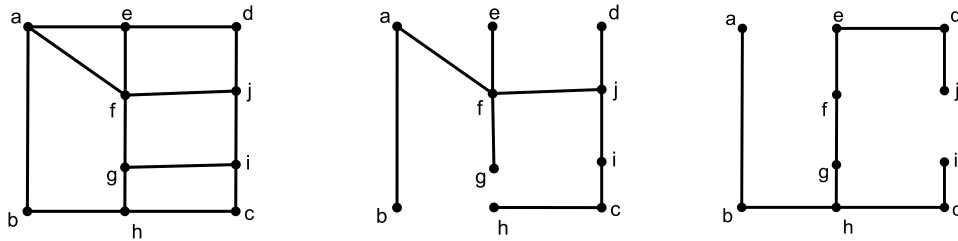


Figura 2.6: Grafo conexo e duas possíveis árvores geradoras.

Observação 2.24. Árvores geradoras obtidas de um mesmo grafo não são isomorfas. Por exemplo, na Figura anterior, observe que independente da bijeção que tomarmos entre os conjuntos de vértices das árvores geradoras, a árvore geradora da esquerda possui um vértice de grau 4 (vértice f) enquanto a outra árvore geradora não possui nenhum vértice com esse mesmo grau.

Definição 2.25. Um *grafo com peso* é um grafo cujas arestas possuem valores associados à cada uma delas. Se a aresta $\alpha \in A(G)$, o valor associado é chamado peso de α , denotado por $p(\alpha)$. Além disso, definimos o peso total de G por $P(G) = \sum_{\alpha \in A} p(\alpha)$.

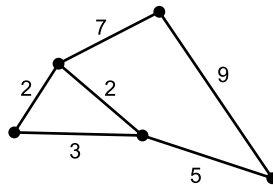


Figura 2.7: Grafo com peso.

Exemplo 2.26. Considere uma malha rodoviária interligando n cidades. Conhecendo-se o custo de viagem para cada par de cidades vizinhas. Buscamos determinar um roteiro que permite visitar quaisquer duas cidades de modo que, após visitarmos todas elas, o custo total seja mínimo.

Utilizamos grafo com peso para resolver esse problema, ou seja, consideramos um grafo conexo, com n vértices, cujas arestas e seus pesos representam as rodovias e os custos, respectivamente.

Note que a solução desse problema é uma árvore geradora, pois caso contrário, teríamos um ciclo gerando assim um gasto desnecessário. A construção desta árvore é obtida através de um algoritmo, conhecido como “greedy”.

Iniciamos escolhendo uma aresta α_1 , de menor peso. Repetimos esse processo sempre escolhendo uma aresta, de menor peso, de modo que *não sejam criados ciclos*.

A veracidade do algoritmo acima é mostrado no Teorema a seguir.

Teorema 2.27. *Seja G um grafo conexo com n vértices. A seguinte construção fornece uma árvore geradora T de peso total $P(T)$ mínimo.*

1. *Seja α_1 uma aresta de G de menor peso;*
2. *Para $2 \leq i \leq n - 1$, escolhamos uma aresta α_i de menor peso (não necessariamente adjacente à α_{i-1}) tal que não sejam formado ciclos.*
3. *Seja T o subgrafo de G com $V(T) = V(G)$ e $A(T) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.21, T é uma árvore geradora de G por construção. Resta mostrar que o peso total de T é mínimo e para isso iremos supor que S seja uma árvore geradora de G com peso total mínimo, isto é, $P(S) \leq P(T)$ e mostrar que $S = T$.

Se $S \neq T$, então T tem pelo menos uma aresta que não está em S . Seja $\alpha_i = uv$ a primeira aresta de T (segundo a enumeração escolhida) que não está em S e considere P_{uv} um caminho em S “ligando” o vértice u ao vértice v . Se adicionarmos a aresta α_i à S , o grafo $S + \alpha_i$ terá um ciclo $C = P_{uv} + \alpha_i$. Mas T não possui ciclos e então C deve conter no mínimo uma aresta α'_i que não está em T . Removendo a aresta α'_i obtemos a árvore $S' = S + \alpha_i - \alpha'_i$, com os mesmos vértices de S e com $P(S') = P(S) + p(\alpha_i) - p(\alpha'_i)$. Como S tem peso mínimo, segue que $p(\alpha_i) \geq p(\alpha'_i)$ (pois caso contrário teríamos $P(S') \leq P(S)$).

Agora, como α_i é a primeira aresta de T que não está em S , então $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ são arestas comuns à T e S , e quando adicionamos a aresta α_i ou α'_i à sequência anterior, nenhum ciclo é criado (pois α_i e α'_i são arestas de T e S , respectivamente). Como $\alpha_i \in T$, então $p(\alpha_i) \leq p(\alpha'_i)$ ¹ e portanto $p(\alpha_i) = p(\alpha'_i)$. Assim S' tem peso mínimo, isto é, $P(S') = P(S)$ e é uma árvore com uma aresta a mais em comum com T , do que S . Repetimos este processo até obtermos uma árvore com custo mínimo que coincide com T . \square

Para exemplificar, tomemos as cinco cidades a, b, c, d e e , como na Figura 2.8. O primeiro passo é escolhermos a aresta de menor peso do grafo. Assim, escolhemos a

¹Pois caso contrário, o processo de construção de T exigiria que α'_i fosse escolhida.

aresta ab e em seguida bd . Como não podemos escolher da pois produziria um ciclo, então a próxima aresta que escolhemos é de . Como não podemos escolher ea nem eb , escolhemos então bc . Como não podemos escolher ac , ce nem cd , completamos a árvore geradora T do grafo G , de peso mínimo, com as arestas ab, bd, de, bc . Note que o valor γ do Exemplo 2.23, neste caso é $\gamma = 10 - 5 + 1 = 6$, ou seja, foram removidas 6 arestas de G .

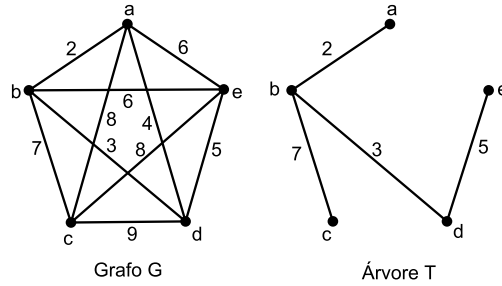


Figura 2.8: Aplicação do algoritmo “greedy” para a construção da árvore geradora com peso total mínimo.

2.4 O Problema do Caixeiro Viajante

No Exemplo 2.26, da seção anterior, construímos uma árvore geradora de peso total mínimo, de modo que quaisquer dois vértices possam ser conectados por um caminho de menor peso. Porém não sabemos como construir um ciclo de menor peso ou nem mesmo um ciclo Hamiltoniano de menor peso. Nesta seção, apresentamos o famoso *Problema do Caixeiro Viajante*, que aborda estas duas situações. Mais precisamente:

Como partir de uma determinada cidade, visitar todas as outras uma única vez e retornar à cidade de origem, de modo que o custo total desta viagem seja o menor possível?

Os Teoremas 2.14 e 2.16, fornecem condições suficientes para um grafo ser Hamiltoniano, mas não nos diz como construir tal ciclo. Mais ainda, se o grafo possui peso, não temos um processo que sempre nos fornece o ciclo Hamiltoniano de menor peso. Uma possibilidade seria calcular todos os pesos totais para todos os possíveis ciclos Hamiltonianos, o que se torna inviável para grafos de ordem $n > 5$. Por exemplo, se $n = 20$ existem $19!/2 \simeq 6 \times 10^{16}$ possibilidades.

A seguir apresentaremos um procedimento que, utilizando o Exemplo 2.26, fornece um limitante inferior para o peso mínimo de um ciclo Hamiltoniano. Observamos que podemos supor sempre que o grafo é completo, pois este é o maior grafo com n vértices.

Seja G um grafo completo e C um ciclo Hamiltoniano em G . Então $H = G - v$ possui um caminho Hamiltoniano, que deve ser uma árvore geradora de H com exatamente

duas folhas. Assim, o ciclo Hamiltoniano deve ser obtido a partir de uma árvore geradora de um subgrafo H como acima, adicionando duas das possíveis arestas que contêm v .

Se G possui peso, em $G - v$ utilizamos o Exemplo 2.26 para obtermos uma árvore geradora com peso total mínimo. Adicionamos as duas arestas α e β de menor peso (não necessariamente distintos) que contêm v . Agora, temos duas possibilidades:

1. Se criamos um ciclo, este é o ciclo desejado;
2. Se não criamos um ciclo, obtemos um limitante inferior para o peso total do ciclo, pois as duas arestas σ e κ que formaram este ciclo, satisfazem $p(\sigma) + p(\kappa) \geq p(\alpha) + p(\beta)$.

A seguir apresentamos dois exemplos, para os dois itens acima.

Exemplo 2.28. Consideremos os dois grafos da Figura 2.9, que diferem apenas no peso da aresta bd , que vale 4 no grafo G_1 e 3 no grafo G_2 .

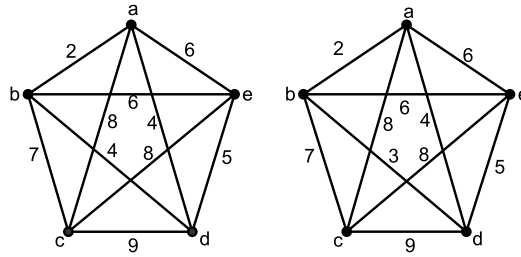


Figura 2.9: Grafos G_1 (esquerda), G_2 (direita).

Grafo G_1 . Pelo Exemplo 2.15, o grafo G_1 é Hamiltoniano e portanto é possível obtermos o ciclo Hamiltoniano. Aplicaremos agora o procedimento descrito acima, para sabermos quais das possibilidades ocorrem.

Removendo o vértice a : teremos um grafo com vértices $\{b, c, d, e\}$, cuja árvore geradora com o peso mínimo 16 é dada pelas arestas $\{bd, de, bc\}$. Como os dois menores pesos das arestas que contêm a são $p(ab) = 2$ e $p(ad) = 4$, obtemos o limitante inferior $16 + 2 + 4 = 22$. Veja Figura 2.10.

Removendo o vértice b : teremos um grafo com vértices $\{a, c, d, e\}$, cujas árvores geradoras com o peso mínimo 17 são dadas pelas arestas $\{ad, de, ec\}$ e $\{ad, de, ac\}$. Como os dois menores pesos das arestas que contêm b são $p(ba) = 2$ e $p(bd) = 4$, obtemos o limitante inferior $17 + 2 + 4 = 23$.

Removendo o vértice c : teremos um grafo com vértices $\{a, b, d, e\}$, cujas árvores geradoras com o peso mínimo 11 são dadas pelas arestas $\{ab, bd, de\}$ e $\{ab, ad, de\}$. Como os dois menores pesos das arestas que contêm c são $p(cb) = 7$ e $p(ca) = p(ce) = 8$, obtemos o limitante inferior $11 + 7 + 8 = 26$. Veja Figura 2.11.

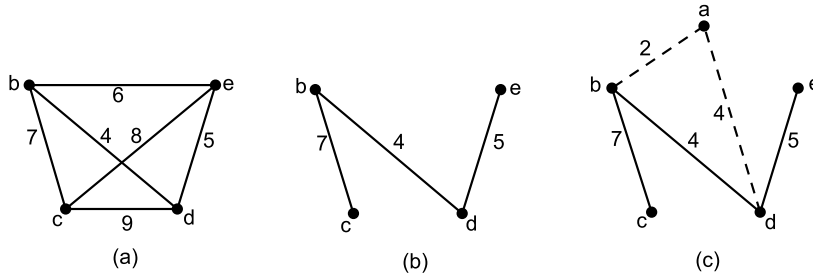


Figura 2.10: (a) Grafo $G_1 - a$; (b) Árvore geradora de peso mínimo; (c) Lim. inferior= 22.

Removendo o vértice d : teremos um grafo com vértices $\{a, b, c, e\}$, cujas árvores geradoras com o peso mínimo 15 são dadas pelas arestas $\{ab, be, bc\}$ e $\{ab, ae, bc\}$. Como os dois menores pesos das arestas que contêm d são $p(de) = 5$ e $p(da) = p(db) = 4$, obtemos o limitante inferior $15 + 5 + 4 = 24$.

Removendo o vértice e : teremos um grafo com vértices $\{a, b, c, d\}$, cujas árvores geradoras com o peso mínimo 13 são dadas pelas arestas $\{ab, bd, bc\}$ e $\{ab, ad, bc\}$. Como os dois menores pesos das arestas que contêm e são $p(ed) = 5$ e $p(ea) = p(eb) = 6$, obtemos o limitante inferior $13 + 5 + 6 = 24$.

Baseado nos cinco casos acima, temos que o melhor limitante inferior é 26, obtido removendo o vértice c . Ainda neste caso, apenas uma árvore geradora pode ser estendida para formar um ciclo Hamiltoniano, como mostrado na Figura 2.11. Para todos os outros vértices, nenhuma árvore geradora pode ser estendida.

Grafo G_2 . Como G_2 é idêntico ao G_1 , exceto o peso, G_2 é Hamiltoniano. Para obtermos seu ciclo, procedemos de maneira análoga ao grafo G_1 e obtemos os seguintes limitantes inferiores para o peso total mínimo: 21 (removendo a), 22 (removendo b), 25 (removendo c), 22 (removendo d) e 23 (removendo e). Portanto qualquer ciclo Hamiltoniano possuirá peso total mínimo maior ou igual à 25.

Agora, diferente do grafo G_1 , para qualquer vértice removido, ao adicionarmos as duas arestas de menor peso, não obtemos um ciclo Hamiltoniano e portanto este procedimento não fornecerá a solução. Neste caso, devemos adicionar duas arestas que formem um ciclo.

Por exemplo, com a árvore obtida retirando o vértice e , não é possível obter um ciclo pois ela possui mais de duas folhas. Testando para os outros vértices, é possível obter solução com a retirada do vértice a , do vértice b (2 distintas) e dos vértices c e d .

Conhecendo todos os ciclos citados acima, chegamos que existem duas soluções para o problema: os ciclos $adecba$ (retirando b), Figura 2.12(a), e $abdeca$ (retirando c), Figura 2.12(b).

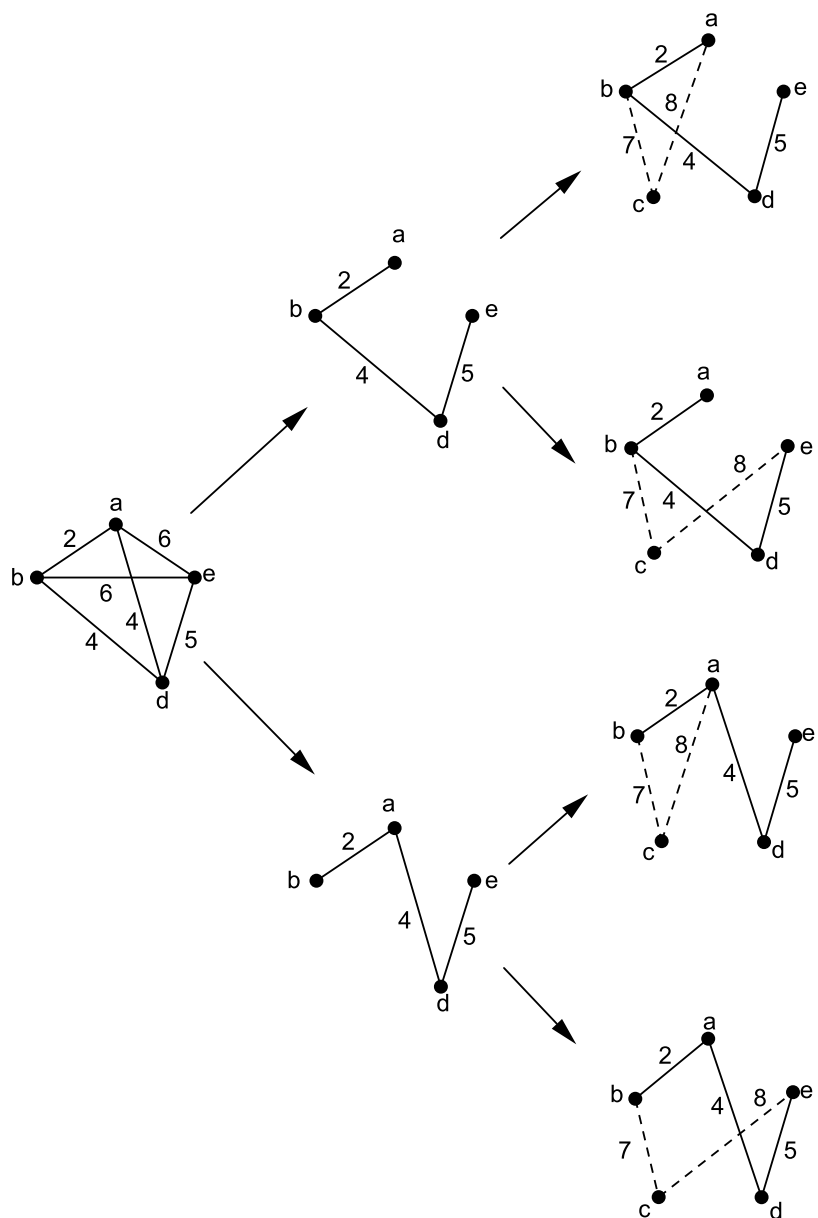


Figura 2.11: Grafo $G_1 - c$, árvores geradoras de peso mínimo de $G_1 - c$ e seus possíveis limitantes inferiores.

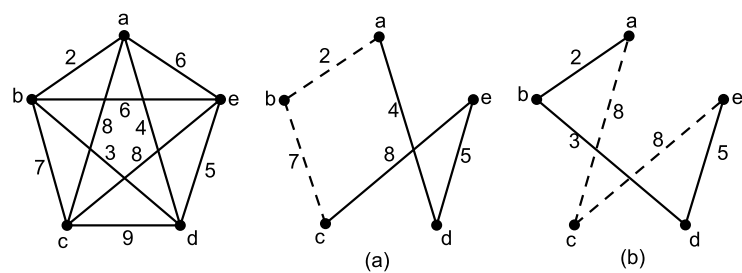


Figura 2.12: Grafo G_2 e seus possíveis ciclos Hamiltonianos de menor peso.

3 Grafos Planares e Poliedros Regulares

Como já vimos no capítulo 1, um grafo é planar se não houver interseções entre suas arestas, exceto nos extremos que são os vértices. Vimos também, com o Problema das Casas, que nem todo grafo pode ter uma representação planar, porém não foi dado uma condição para que isto ocorra. Assim, neste capítulo, temos como objetivo apresentar resultados que nos garantem se um grafo é planar e além disso, fazendo relações com tais grafos, estudar também os poliedros regulares.

Primeiramente apresentamos alguns conceitos que nos servirão de ferramentas para tal.

Definição 3.1. Um grafo G é *bipartido* se V pode ser particionado em dois conjuntos (não vazios) X e Y tais que toda aresta de G possui um vértice em X e o outro em Y . X e Y são chamados de *conjunto partição*.

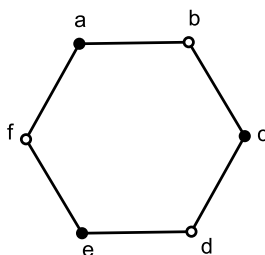
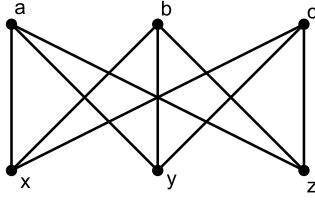


Figura 3.1: Grafo bipartido com os conjuntos partição $X = \{a, c, e\}$ e $Y = \{b, d, f\}$.

Definição 3.2. Um grafo bipartido G com os conjuntos partição X e Y é chamado *grafo bipartido completo* se todas as possíveis conexões de vértices de X com vértices de Y pertencem à A , isto é,

$$A = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Denotamos este tipo de grafo por $K_{|X|,|Y|}$, onde $| \mid$ denota cardinalidade.

Figura 3.2: Grafo $K_{3,3}$.

Por exemplo, o grafo utilizado no problema das casas da Seção 1.2, mostrado novamente na Figura 3.2, é um grafo bipartido completo com $|X| = |Y| = 3$, ou seja, $K_{3,3}$.

Definição 3.3. Um *ciclo par* (respectivamente *ímpar*) possui um número par (respectivamente ímpar) de vértices.

Teorema 3.4. *Seja G um grafo com no mínimo dois vértices. G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. (\implies) Seja G um grafo bipartido com os conjuntos partição X e Y . Se G não possui ciclos, não temos o que provar. Seja então $C = v_1 v_2 \dots v_k$ um ciclo de G , e sem perda de generalidade, assumiremos $v_1 \in X$. Assim, da definição de grafo bipartido, teremos $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e assim sucessivamente, ou seja, $v_i \in X$ para todo i ímpar e $v_i \in Y$ para todo i par. Como v_k é adjacente ao v_1 (pois C é um ciclo), k deve ser par e então C é um ciclo par.

(\impliedby) Seja G um grafo com no mínimo dois vértices e que não contém ciclos ímpares. Podemos supor, sem perda de generalidade, G conexo, pois caso contrário considerariamos cada componente conexa separadamente. Fixemos um vértice v em G e definimos o conjunto X dos vértices x de V tais que o menor caminho de x à v tem comprimento par e tomamos $Y = V - X$.

Sejam x e x' vértices em X . Para que G seja bipartido devemos mostrar que quaisquer dois vértices de X não podem ser adjacentes. Suponhamos que x e x' sejam adjacentes. Se $x = v$ então o menor caminho de v à x' tem comprimento um, o que implica que $x' \in Y$, uma contradição. Assim devemos ter $x \neq v$ e da mesma forma $x' \neq v$. Sejam $P_1 = v_0 v_1 \dots v_{2k}$ o caminho de menor comprimento de v_0 à v_{2k} , com $v = v_0$ e $x = v_{2k}$ e $P_2 = w_0 w_1 \dots w_{2t}$ o caminho de menor comprimento de w_0 à w_{2t} , com $v = w_0$ e $x' = w_{2t}$, de modo que P_1 e P_2 têm o vértice v em comum.

Agora, seja v' o último vértice que P_1 e P_2 têm em comum e chamemos de P'_1 o caminho $v' - x$ e P'_2 o caminho $v' - x'$, tendo apenas v' em comum. Assim, temos que P'_1 e P'_2 são os menores caminhos de v' à x e de v' à x' , respectivamente, e além disso devemos ter $v' = v_i = w_j$, para algum par (i, j) . Note que i e j possuem mesma paridade, pois se i é par, o comprimento do caminho $v - v'$ é par e então $v' = v_i \in X$ e como $v_i = w_j$, j também deve ser par (argumento análogo se i é ímpar). Mas como

$x = v_{2k}$ e $x' = v_{2t}$ são adjacentes, $v_i v_{i+1} \dots v_{2k} w_{2t} w_{2t-1} \dots w_j$ é um ciclo de comprimento $(2k - i) + (2t - j) + 1$, que é ímpar, contrariando a hipótese. Assim, quaisquer dois vértices em X (ou em Y) não são adjacentes e portanto G é bipartido com os conjuntos partições X e Y . \square

3.1 Fórmula de Euler

Em 1752, Euler demonstrou uma relação entre o número de arestas, vértices e faces de um grafo planar conexo. Essa relação é conhecida como *Fórmula de Euler* e é uma das mais conhecidas da matemática.

Se G possui uma representação planar no plano π , uma *face* F de G é uma componente conexa de $\pi - G$. Se esta componente é ilimitada dizemos que F é uma *face infinita*. Note que a fronteira de uma face é composta por uma união finita de arestas de G e que uma aresta pode estar contida na fronteira de uma ou duas faces. Diremos que cada uma destas arestas *limita* F se cada uma também estiver na fronteira de uma face $F' \neq F$. O número de arestas que limitam F é chamado de *grau* de F , denotado por $g(F)$.

Fórmula de Euler: *Se G é um grafo planar conexo com n vértices, q arestas e f faces, então $n - q + f = 2$.*

Demonstração. Provaremos por indução no número de arestas de G . Se $q = 0$, então G deve ser um grafo nulo, e como G é conexo devemos ter $n = 1$ e assim $f = 1$. Portanto a fórmula é válida. Suponhamos o resultado válido para todo grafo planar conexo com $q - 1$ arestas.

Seja G um grafo com q arestas. Caso G seja uma árvore, temos que $q = n - 1$, pois G possui n vértices. Como G não possui ciclos, $\pi - G$ é uma componente conexa, ou seja, G possui uma face. Assim, $n - q + f = n - (n - 1) + 1 = 2$, como queríamos. Caso G não seja uma árvore, considere C um ciclo em G e a uma aresta de C . Então o grafo $G - a$ é conexo, com n vértices, $q - 1$ arestas e $f - 1$ faces (pois ao removermos uma aresta de C , estamos unindo duas faces de G). Assim, aplicando a hipótese de indução em $G - a$,

$$2 = n - (q - 1) + (f - 1) \Rightarrow 2 = n - q + f.$$

\square

3.2 Grafos Planares

Por meio da Fórmula de Euler podemos obter vários resultados para grafos planares, bem como mostrar a existência de grafos não planares.

Proposição 3.5. *Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e q arestas, então $q \leq 3n - 6$. Além disso, se a igualdade vale, então toda face é limitada por 3 arestas.*

Demonstração. Seja $C = \sum_F g(F)$ a soma dos graus de todas as faces F . Como toda aresta de G pode limitar no máximo duas faces, cada aresta deve contribuir com 2 na soma dos graus das faces e assim $C \leq 2q$. Mas como cada face é limitada por no mínimo 3 arestas (pois G é um grafo simples), então $C \geq 3f$. Assim,

$$3f \leq 2q \Rightarrow 3(2 + q - n) \leq 2q \Rightarrow q \leq 3n - 6.$$

Se a igualdade vale, então

$$q = 3n - 6 \Rightarrow q = 3(2 + q - f) - 6 \Rightarrow 3f = 2q$$

e assim $2q = C = 3f$. Como $g(F_i) \geq 3$, se o grau de alguma face for estritamente maior que 3, a soma dos graus será maior que $3f$. Portanto, toda face é limitada por 3 arestas. \square

Proposição 3.6. *Se G é um grafo planar simples então G contém um vértice de grau no máximo 5 e portanto $\delta(G) \leq 5$.*

Demonstração. Suponha G com n vértices e q arestas. Como $g(v) \leq n - 1$, se $n \leq 6$ o resultado é imediato e portanto suponhamos $n > 6$. Se o grau de todos vértices de G é no mínimo 6, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 6n.$$

Pelo Lema 1.5, $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2q$ e assim $2q \geq 6n$, isto é, $q \geq 3n$. Mas pela Proposição 3.5, $q \leq 3n - 6$. Assim G deve ter pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5. \square

Lema 3.7. *O grafo $K_{3,3}$ é não planar.*

Demonstração. Suponha que $K_{3,3}$ seja planar (Figura 3.2). Como $n = 6$ e $q = 9$, a fórmula de Euler fornece $f = 5$.

Seja $C = \sum_F g(F) \leq 2q = 18$. Além disso, como não há triângulos em grafos bipartidos¹, cada face de $K_{3,3}$ tem no mínimo quatro arestas e assim $C \geq 4f = 20$.

Em resumo, se $K_{3,3}$ for planar, teremos $C \leq 18$ e $C \geq 20$, que é obviamente impossível. Logo, $K_{3,3}$ é não planar. \square

Lema 3.8. *O grafo K_5 é não planar.*

Demonstração. K_5 tem $n = 5$ vértices e $q = 10$ arestas e assim $3n - 6 = 9 < 10 = q$. Pela Proposição 3.5, K_5 é não planar. \square

¹Pois um triângulo possui três vértices e dois deles devem estar em um mesmo conjunto partição de G .

Além dos grafos $K_{3,3}$ e K_5 , um grafo G contendo um destes dois como subgrafo também é não planar, pois qualquer representação planar de G (se existir) deve conter uma representação planar de $K_{3,3}$ ou K_5 . Temos assim uma condição necessária para G ser planar. O Teorema 3.9, conhecido como Teorema de Kuratowski, fornece também uma condição suficiente, cuja demonstração é extremamente avançada e elaborada de modo que recomendamos a referência [5, pg. 109].

Teorema 3.9 (Kuratowski). *Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém subgrafo homeomorfo ao $K_{3,3}$ ou K_5 .*

Exemplo 3.10. O único grafo planar simples 4-regular possui 6 vértices, 12 arestas e 8 faces.

De fato, seja G um grafo planar 4-regular com n vértices, q arestas e f faces. Pelo Lema 1.5, $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2q$, mas como G é regular de grau 4 temos também que $\sum_{v \in V(G)} g(v) = 4n$, ou seja, $2q = 4n$, isto é, $q = 2n$.

Agora, como G é planar, pela Proposição 3.5,

$$q \leq 3n - 6 \Rightarrow 2n \leq 3n - 6 \Rightarrow n \geq 6$$

e portanto $q = 2n \geq 12$. Pela fórmula de Euler, obtemos um limitante superior para f , pois

$$6 - 12 + f = 2 \Rightarrow f \leq 8.$$

Assim, temos $n \geq 6$, $q \geq 12$ e $f \leq 8$. A seguir, para cada possível valor de f obtemos os possíveis valores para n e q .

Se $f = 1$, obtemos $n = q + 1 = 2n + 1$, isto é, $n = -1$, valor não compatível. Para todos os outros valores possíveis de f , apenas para $f = 8$ obtivemos valores compatíveis, mais precisamente 6 vértices, 12 arestas e 8 faces. O que mostra a unicidade da solução do exemplo, representada graficamente na Figura abaixo.

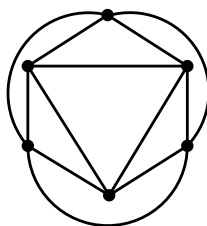


Figura 3.3: Grafo 4-regular.

3.3 Grafo Dual

A partir de um grafo planar G , podemos construir um novo grafo G^* , que recebe o nome de *grafo dual* de G . Observamos que, pelo fato de um grafo ser um tipo particular

de complexo simplicial, o grafo dual G^* é construído exatamente como o dual de um complexo simplicial. Para mais detalhes sugerimos livros introdutórios de Topologia Algébrica, como por exemplo [6].

Definição 3.11. Seja G um grafo planar, com uma representação planar fixada. O *grafo dual* G^* da representação planar de G é dado pela seguinte construção:

1. Em cada face F de G (incluindo a face infinita) selecionamos um ponto v^* , que será vértice de G^* ;
2. Para cada aresta $b \in A(G)$, construímos uma aresta $b^* \in A(G^*)$ do seguinte modo: se a aresta b limita duas faces F_1 e F_2 , então a aresta $b^* = v_1^*v_2^*$ deve interceptar apenas b e exatamente uma vez, onde $v_1^* \in F_1$ e $v_2^* \in F_2$; se a aresta b não limita faces, $b^* = v^*v^*$ (laço) deve interceptar apenas b e uma única vez, onde v^* pertence a mesma face de G que contém um vértice de b .

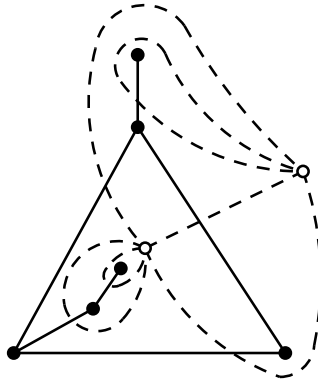


Figura 3.4: Grafo e seu dual.

Observação 3.12. Na definição de grafo dual, fixamos uma representação planar de G pois diferentes representações planares de um mesmo grafo podem possuir diferentes duais, isto é, grafos isomorfos podem ter seus duais não isomorfos. Veja que, na Figura a seguir, os dois grafos G_1 e G_2 , representados por arestas contínuas, são isomorfos. Porém, os vértices $v_1^* \in G_1^*$ e $v_2^* \in G_2^*$ nas faces infinitas de G_1 e G_2 , possuem graus distintos, de modo que G_1^* e G_2^* não são isomorfos. Isto mostra que apenas a tripla (n, q, f) não é suficiente para determinar um grafo.

Dizemos que se um grafo G é planar então seu dual G^* também é, isto pode ser justificado devido ao fato das faces de G serem conexas por caminhos e as arestas de G^* serem curvas abertas ou laços. Assim, sempre será possível evitar interseções. O resultado a seguir nos dá uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de G e G^* .

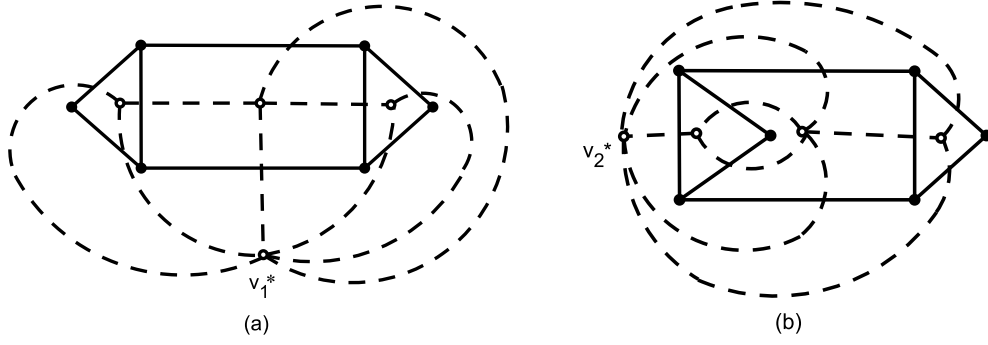


Figura 3.5: (a) Grafo G_1 e seu dual G_1^* ; (b) Grafo G_2 e seu dual G_2^* .

Teorema 3.13. *Seja G um grafo planar conexo com n vértices, q arestas e f faces e seja G^* o dual de G com n^* vértices, q^* arestas e f^* faces. Então, $n^* = f$, $q^* = q$ e $f^* = n$.*

Demonstração. As igualdades $n^* = f$ e $q^* = q$ seguem imediatamente dos itens (1) e (2) da Definição 3.11, respectivamente.

A igualdade $f^* = n$ segue da Fórmula de Euler, pois

$$2 = n^* - q^* + f^* = f - q + f^* \Rightarrow f^* = 2 + q - f = n.$$

□

Vamos supor agora que a face F^* do grafo planar G^* , correspondente ao vértice v de G , possui $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ como arestas limitantes. Então, pela construção de G^* , cada uma destas arestas a_i^* intercepta uma aresta correspondente a_i de G e estas arestas a_i contêm o vértice v . Assim, F^* contém o vértice v .

Teorema 3.14. *Se G é um grafo conexo planar, então G é isomorfo ao seu dual duplo $G^{**} = (G^*)^*$.*

Demonstração. Como observamos, qualquer face F^* do dual G^* contém no mínimo um vértice de G , ou seja, seu vértice v correspondente. Pelo Teorema 3.13, o número de faces de G^* é o mesmo que o número de vértices de G . Disto, segue que v é o único vértice de G que a face F^* contém. Consequentemente, na construção de G^{**} , podemos escolher o vértice v para ser o vértice em G^{**} correspondente à face F^* de G^* . Esta escolha nos dá o isomorfismo que queríamos. □

3.4 Grafos Completamente Regulares

Vimos no capítulo 1 que um grafo é k -regular se seus vértices possuem mesmo grau k . Dizemos que um grafo planar G é *completamente regular* se G e seu dual G^* forem regulares. Note que G regular não implica que G^* também seja, como mostra o contraexemplo abaixo.

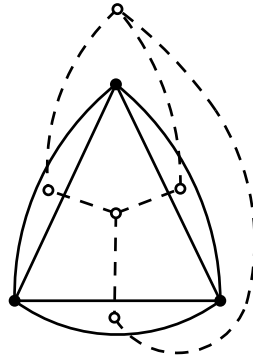


Figura 3.6: Grafo 4-regular com dual não regular.

Nesta seção, temos como objetivo obter todos os grafos completamente regulares. Para isso, precisamos nos restringir apenas a grafos que não possuem pontes. Tais grafos são chamados de *grafos poligonais*.

Sejam G e G^* grafos poligonais regulares de grau k e k^* , respectivamente. Como, para cada vértice v^* de G^* , existe uma face F de G correspondente e como o número k^* de arestas que contêm v^* é o mesmo número de arestas que limitam F , isto é, $k^* = g(v^*) = g(F)$, segue que toda face de G é limitada pelo mesmo número k^* de arestas. Assim, $2q = kn$, $2q^* = k^*n^*$ e portanto $2q = k^*f$.

Logo, temos

$$q = \frac{1}{2}kn \quad \text{e} \quad f = \frac{kn}{k^*}. \quad (3.1)$$

Substituindo na Fórmula de Euler vem

$$n + f - q = n + \frac{kn}{k^*} - \frac{1}{2}kn = n\left(1 + \frac{k}{k^*} - \frac{1}{2}k\right) = 2. \quad (3.2)$$

Multiplicando a Equação (3.2) por $2k^*$ temos

$$n(2k + 2k^* - kk^*) = 4k^*. \quad (3.3)$$

Como n e k^* são inteiros positivos, temos que

$$\begin{aligned} 2k + 2k^* - kk^* > 0 &\Rightarrow kk^* - 2k - 2k^* < 0 \Rightarrow \\ &kk^* - 2k - 2k^* + 4 < 4 \Rightarrow (k - 2)(k^* - 2) < 4. \end{aligned}$$

Para resolvermos a desigualdade, estudamos primeiramente o caso em que os fatores $k - 2$ e $k^* - 2$ são ambos positivos, ou seja, k e k^* maiores que 2.

Caso $k, k^* > 2$. Para que o produto seja menor que 4 devemos ter

$$(k - 2, k^* - 2) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}.$$

Dessa forma, obtemos $k - 2 \leq 3$ e $k^* - 2 \leq 3$, e assim os únicos valores que k e k^* podem assumir são 3, 4 e 5.

Para encontrar os valores para n , q e f , substituímos os possíveis valores de k e k^* na Equação (3.3) e em seguida, nas igualdades de (3.1).

Por exemplo, substituindo $k = 3$ e $k^* = 3$ na Equação (3.3), obtemos $n = 4$, e por meio de (3.1), temos $q = 6$ e $f = 4$. De modo análogo, para os outros valores obtemos os resultados da Tabela abaixo.

k	k^*	n	q	f	Figura
3	3	4	6	4	3.7(a)
3	4	8	12	6	3.7(b)
3	5	20	30	12	3.7(c)
4	3	6	12	8	3.7(g)
5	3	12	30	20	3.7(h)

Caso $k = 2$. Neste caso G será um grafo conexo com duas arestas em cada vértice, ou seja, um ciclo. Assim, k^* será igual ao número q de arestas de G (Figura 3.7(d)).

Caso $k^* = 2$. Pela Equação (3.3), obtemos $n = 2$, isto é, G será um grafo com dois vértices, q arestas e cada face será limitada por duas arestas, como mostra a Figura 3.7(i).

Observe que o dual de um ciclo com n vértices e n arestas ($k = 2$) é um grafo com dois vértices, n arestas e n faces. Desta forma, temos que os grafos dos casos $k = 2$ e $k^* = 2$ são duais.

Caso $k = 1$. A inequação é satisfeita para qualquer número positivo que k^* assumir. Mas, um grafo conexo 1-regular deve ser uma única aresta e assim, $n = 2$, $q = f = 1$ e $k^* = 2$ (Figura 3.7(e)).

Caso $k^* = 1$. Temos um grafo formado por um único laço, e então $n = q = 1$ e $k = f = 2$ (Figura 3.7(j)).

Como G^{**} é isomorfo a G , temos que o dual de um grafo completamente regular também é completamente regular. Assim, os grafos que obtivemos são duais uns dos outros. A Figura 3.7 representa todos os grafos completamente regulares, onde o grafo (f) é dual de (a); (g) é dual de (b); (h) é dual de (c); (i) é dual de (d); (j) é dual de (e).

3.5 Poliedros Regulares

Nesta seção buscamos estudar alguns resultados de poliedros e, principalmente, mostrar a existência de exatamente cinco poliedros regulares. Para isso, iremos associá-los a grafos, utilizando a projeção estereográfica para obtermos uma representação

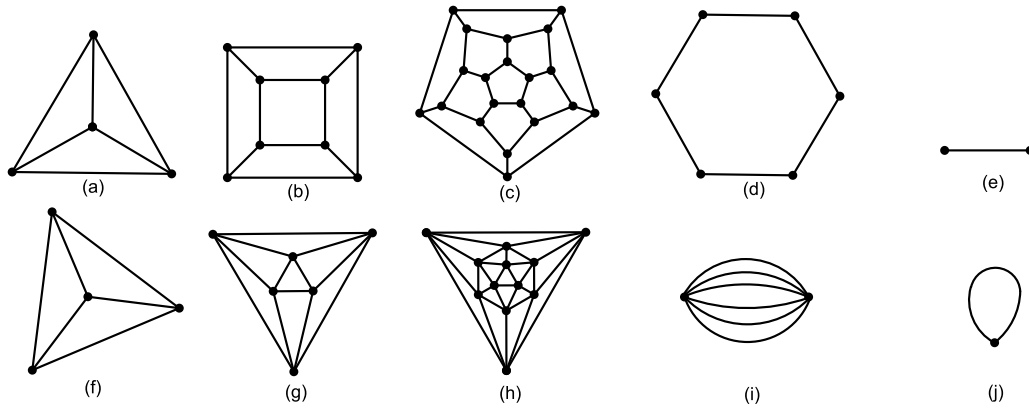


Figura 3.7: Grafos Completamente Regulares.

planar do objeto. Para mais detalhes sobre tal projeção sugerimos a leitura de [4, pg.6].

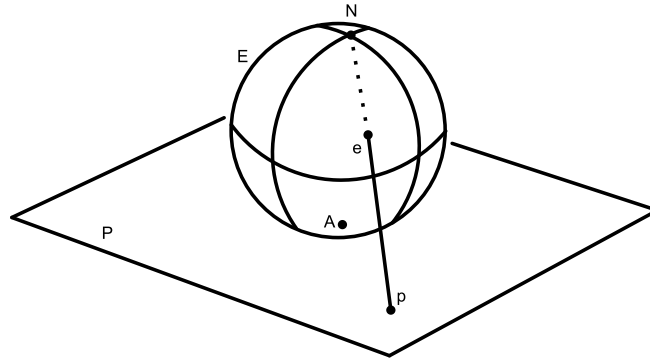


Figura 3.8: Projeção Estereográfica.

Dessa forma, por existir essa correspondência, podemos aplicar alguns resultados de grafos planares aos poliedros. O Teorema 3.16 segue da Fórmula de Euler, e o Teorema 3.17 é similar à Proposição 3.6.

Definição 3.15. O grau mínimo de um poliedro P é dado por:

$$\rho(P) = \min\{g(F) \mid F \text{ uma face de } P\}.$$

O Teorema a seguir é obtido por meio do grafo associado ao poliedro através da projeção estereográfica e da Fórmula de Euler.

Teorema 3.16. Se um poliedro possui V vértices, A arestas e F faces, então

$$V - A + F = 2.$$

Teorema 3.17. Para todo poliedro P , $3 \leq \rho(P) \leq 5$.

Demonstração. Como uma ou duas arestas não formam fronteira para uma face de P , temos que $\rho(P) \geq 3$. Assim nos resta provar $\rho(P) \leq 5$.

Seja P um poliedro e G seu grafo associado. Suponha que P tenha V vértices, A arestas e F faces. Para cada k , seja V_k o número de vértices de grau k e seja F_k o número de faces de P (ou de G) que possuem grau k . Para $k = 1$ ou $k = 2$, $V_k = F_k = 0$ e desta forma podemos considerar $k \geq 3$. Como toda aresta de P contém dois vértices e é fronteira de duas faces, temos que

$$\sum_{k \geq 3} kV_k = 2A = \sum_{k \geq 3} kF_k.$$

Suponha que cada face é limitada por 6 ou mais arestas, isto é, $\rho(P) \geq 6$, de modo que $F_1 = \dots = F_5 = 0$ e portanto

$$2A = \sum_{k \geq 3} kF_k = \sum_{k \geq 6} kF_k \geq \sum_{k \geq 6} 6F_k = 6 \sum_{k \geq 6} F_k = 6F \Rightarrow F \leq \frac{1}{3}A.$$

Ainda, como $k \geq 3$,

$$2A = \sum_{k \geq 3} kV_k \geq \sum_{k \geq 3} 3V_k = 3 \sum_{k \geq 3} V_k = 3V \Rightarrow V \leq \frac{2}{3}A.$$

Portanto, pelo Teorema 3.16 e pelas duas desigualdades acima temos

$$A = V + F - 2 \leq \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A - 2 = A - 2,$$

que é uma contradição. Logo $\rho(P) \leq 5$. □

Os dois Teoremas acima nos permitem obter o principal resultado desta Seção.

Teorema 3.18 (Classificação dos poliedros regulares). *Existem exatamente cinco poliedros regulares.*

Demonstração. Sejam P um poliedro regular e G seu grafo planar associado. Considere V , A e F o número de vértices, arestas e faces de P , respectivamente. Como as faces de P são congruentes, cada uma delas é limitada pelo mesmo número k de arestas. Pelo Teorema 3.17, temos que $3 \leq k \leq 5$. Além disso, como o poliedro P é regular, segue que G também é regular. Seja r o grau dos vértices de G , onde $r \geq 3$. Novamente pelo Teorema 3.17, temos $rV = 2A = kF$. Agora, pelo Teorema 3.16,

$$\begin{aligned} 8 &= 4V + 4F - 4A \\ &= 4V + 4F - 2A - 2A \\ &= 4V + 4F - rV - kF \\ &= (4 - r)V + (4 - k)F. \end{aligned}$$

Sabendo que V , A e F são positivos, $3 \leq k \leq 5$ e $r \geq 3$ e ainda, como r não possui um limitando superior, devemos determinar os possíveis valores de r para cada um dos três possíveis valores de k , de modo a valerem as equações

$$rV = kF, \quad 8 = (4 - r)V + (4 - k)F. \quad (3.4)$$

Tomando $k = 3$ na Equação (3.4), obtemos $rV = 3F$ e $8 = (4 - r)V + F$. Substituindo $F = \frac{rV}{3}$ na segunda equação,

$$8 = (4 - r)V + \frac{rV}{3} \Rightarrow 24 = 12V - 3rV + rV \Rightarrow$$

$$24 = (12 - 2r)V \Rightarrow V = \frac{24}{12 - 2r} \Rightarrow V = \frac{12}{6 - r}.$$

Os possíveis divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12 e portanto os possíveis valores para r são 5, 4, 3, 2, 0 e -6 . Mas como $r \geq 3$, devemos ter $r = 3, 4, 5$.

Fazendo a mesma análise para $k = 4$ e $k = 5$, obtemos $r = 3$ em ambos os casos.

Para cada par (k, r) determinados acima, obtemos os possíveis valores para V, A, F por meio das Equações (3.4).

Para $k = 3$ e $r = 3$: As equações $V = F$ e $8 = V + F$ fornecem $V = F = 4$, ou seja, um tetraedro.

Para $k = 3$ e $r = 4$: As equações $4V = 3F$ e $8 = F$ fornecem $V = 6$, ou seja, um octaedro.

Para $k = 3$ e $r = 5$: As equações $5V = 3F$ e $8 = -V + F$ fornecem $V = 12$ e $F = 20$, ou seja, um icosaedro.

Para $k = 4$ e $r = 3$: As equações $3V = 4F$ e $8 = V$ fornecem $F = 6$, ou seja, um cubo.

Para $k = 5$ e $r = 3$: As equações $3V = 5F$ e $8 = V - F$ fornecem $F = 12$ e $V = 20$, ou seja, um dodecaedro.

Portanto, existem apenas 5 poliedros regulares. □

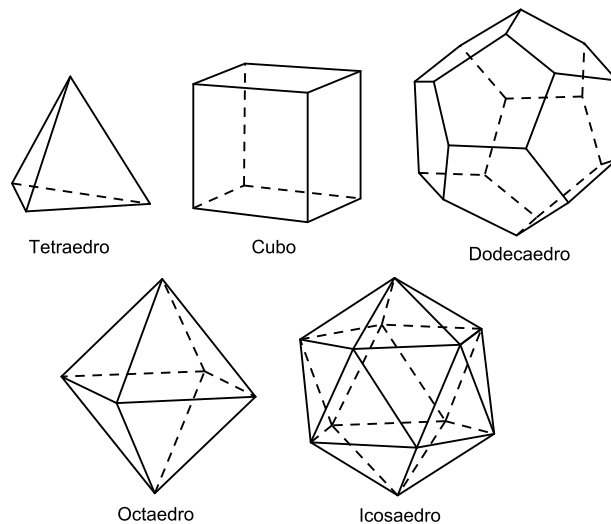


Figura 3.9: Poliedros Regulares.

Observação 3.19. A projeção dos cinco poliedros regulares no plano são grafos planares completamente regulares, mostrados na Figura 3.7, itens a, b, c, g, h.

4 Colorindo Grafos

Um problema também muito conhecido na Teoria de Grafos é o Problema das Quatro Cores, ou seja,

É possível, em um mapa qualquer, colorir os países com no máximo quatro cores, de tal forma que os países adjacentes possuam diferentes cores?

Para buscarmos uma possível solução fazemos uso de coloração de grafos, uma vez que podemos representar o mapa por um grafo, cujos vértices denotam os países e as arestas indicam quais destes são adjacentes. Apesar deste problema não possuir uma solução teórica, ou seja, obtida por resultados matemáticos e por deduções lógicas, sabe-se que com o auxílio de computadores, este problema é solucionável.

Assim sendo, nesta seção fazemos um estudo sobre coloração de grafos, apresentamos alguns resultados e finalizamos nosso trabalho com o *Teorema das Cinco Cores*. Para tal, trabalhamos apenas com grafos simples, porém os chamamos de grafos.

Definição 4.1. Seja G um grafo e k um inteiro positivo. Uma k -coloração de G é uma função $K : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Cada $i \in \{1, \dots, k\}$ é uma *cor* da coloração e k é o *número de cores* desta coloração de G .

Definição 4.2. Dizemos que K é uma k -coloração *própria* de G se para todo par de vértices adjacentes u, v de G , $K(u) \neq K(v)$. Neste caso, G é k -colorível.

Chamemos de X_i a imagem inversa de cada i , ou seja, X_i é o conjunto formado pelos vértices que são coloridos com a cor i . Representamos graficamente uma coloração para G , rotulando os vértices v_j com $K(v_j)$. Na Figura 4.1, temos um grafo com uma coloração com 4 cores (4.1(a)) e uma coloração própria com 6 cores (4.1(b)).

Tornar um grafo G k -colorível é uma tarefa simples, uma vez que basta atribuir uma cor diferente para cada par de vértices adjacentes. Por outro lado, determinar a menor quantia de cores para uma coloração própria pode ser extremamente difícil. A seguir, temos uma definição para este número.

Definição 4.3. O *número cromático* de um grafo G é o menor inteiro positivo k tal que G seja k -colorível, denotado por $\chi(G)$. Neste caso, dizemos que esta coloração é mínima para G e que G é $\chi(G)$ -cromático.

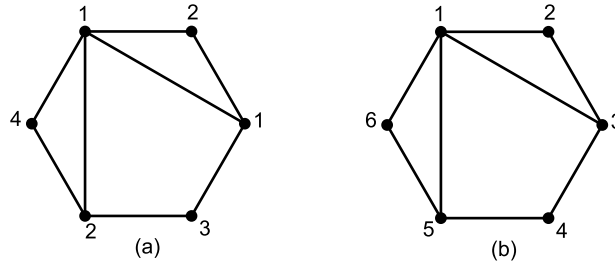


Figura 4.1: (a) Grafo com uma 4-coloração; (b) Grafo com uma 6-coloração própria (ou 6-colorível).

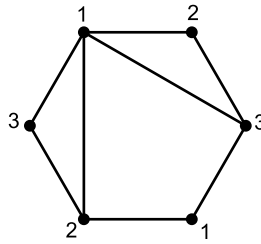


Figura 4.2: Grafo 3-cromático.

Alguns exemplos de números cromáticos: A seguir apresentamos alguns grafos e seus respectivos números cromáticos.

(a) Os números cromáticos dos grafos N_n e K_n são, respectivamente, 1 e n .

De fato, para o grafo nulo é imediato que $\chi(N_n) = 1$, já que o mesmo não possui arestas. Por outro lado, cada vértice de um grafo completo K_n é adjacente a todos os outros vértices do grafo, e portanto necessitamos de n cores, ou seja, $\chi(K_n) = n$.

(b) Observe os grafos ciclos C_4 e C_5 na Figura 4.3. Buscamos determinar $\chi(C_4)$ e $\chi(C_5)$ e encontrar o número cromático dos ciclos C_n em geral.

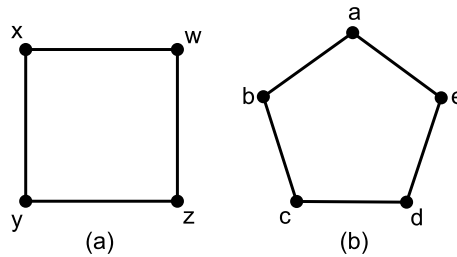


Figura 4.3: (a) Grafo C_4 ; (b) Grafo C_5 .

No grafo C_4 , como os vértices x e z são não adjacentes, definimos suas cores por 1, isto é, $K(x) = K(z) = 1$ e da mesma forma $K(y) = K(w) = 2$. Logo $\chi(C_4) = 2$.

Agora, fazendo a mesma análise para o grafo C_5 , temos $K(a) = K(c) = 1$ e $K(b) = K(d) = 2$ e ainda, como e é adjacente tanto ao vértice a quanto ao vértice d , $K(e) = 3$. Portanto $\chi(C_5) = 3$.

Com estes dois ciclos, onde um possui ordem par e outro ordem ímpar, podemos afirmar que

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

De fato, se $n = 2k$ então v_i e v_j são adjacentes se, e somente se, $i - j \equiv 1 \pmod{2}$ ¹. Neste caso podemos definir $K(v_{2i-1}) = 1$ e $K(v_{2i}) = 2$, $1 \leq i \leq k$. Se $n = 2k + 1$, v_i e v_j são adjacentes se $i - j \equiv 1 \pmod{2}$, porém v_1 e v_n também são adjacentes, tornando obrigatório o uso de uma terceira cor, ou seja, definimos

$$K(v_{2i-1}) = 1, \quad K(v_{2i}) = 2 \quad (1 \leq i \leq k), \quad K(v_{2k+1}) = 3.$$

(c) O número cromático de um grafo G é 2 se, e somente se, G é bipartido.

De fato, da definição de grafo bipartido temos que os vértices pertencentes ao mesmo conjunto partição são não adjacentes e portanto possuem a mesma cor. Como grafos bipartidos possuem dois conjuntos partição, segue que $\chi(G) = 2$. Por outro lado se $\chi(G) = 2$, temos os conjuntos X_1 e X_2 formados pelos vértices coloridos com as cores 1 e 2, respectivamente. Assim as arestas de G contêm um vértice em X_1 e outro em X_2 . Logo G é bipartido.

4.1 Algumas Limitações do Número Cromático

Como citamos anteriormente, exceto em grafos bem conhecidos (como os grafos dos exemplos (a) e (b), página 52) ou em grafos de ordem baixa, determinar o número cromático de um grafo qualquer, em geral, é difícil. Sendo assim, existem limitantes para este número e portanto, nesta seção, buscamos apresentar alguns destes.

Até agora podemos fazer as seguintes afirmações. Um grafo G com n vértices é n -colorível e consequentemente $\chi(G) \leq n$. E como temos que $\chi(K_n) = n$ (exemplo (a), página 52), se um grafo G possuir um subgrafo K_r então $\chi(G) \geq r$. Limitar o número cromático superiormente, pela ordem de um grafo não fornece grandes avanços, ao contrário de quando limitamos por meio dos graus dos vértices de um grafo, como mostram os Teoremas 4.6 e 4.8.

Um algoritmo muito simples utilizado para colorir grafos é descrito a seguir (também é chamado de algoritmo “greedy”, como na seção 2.3 (página 33), pois seguem o mesmo raciocínio, ou seja, minimizar a escolha em cada estágio). Seja G um grafo com n vértices. Primeiramente ordenamos os vértices por v_1, v_2, \dots, v_n e as possíveis cores na ordem $1, 2, \dots, n$. Então, iniciamos a coloração atribuindo a cor 1 ao vértice v_1 . Em seguida, se v_1 e v_2 são adjacentes atribuímos ao vértice v_2 a cor 2, caso contrário,

¹Um inteiro x é dito ser congruente à um inteiro y módulo m , se $m \mid x - y$. Neste caso, escreve-se $x \equiv y \pmod{m}$.

utilizamos a cor 1 novamente. Em geral, para colorir o vértice v_i , usamos a primeira das possíveis cores que não foram usadas anteriormente para colorir qualquer vizinho de v_i . De um modo mais preciso, definimos a função K por: $K(v_1) = 1$ e para $2 \leq i \leq n$

$$K(v_i) = \min\{\{1, \dots, n\} - \{K(v_j); v_j \in \mathcal{V}(v_i), j < i\}\}.$$

Perceba que a coloração que obtemos através do algoritmo “greedy” depende exclusivamente do índice que associamos a cada vértice. Assim, se indexar-mos os vértices de um mesmo grafo em ordens diferentes, além de produzirmos diferentes colorações podemos obter também alguma coloração com mais ou menos cores que outra. A Figura a seguir ilustra este caso.

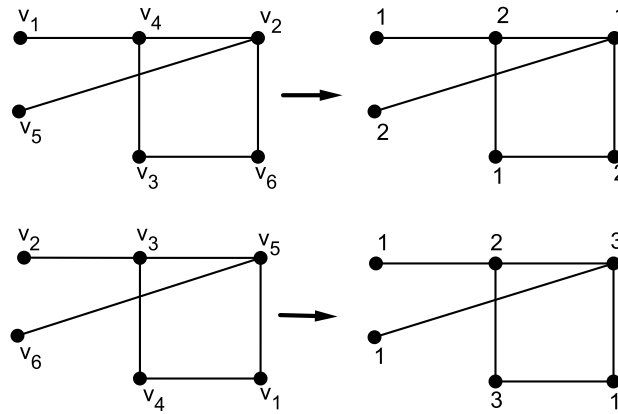


Figura 4.4: Grafo G com 2-coloração própria e 3-coloração própria.

Proposição 4.4. *Seja G um grafo. $\chi(G) = 2$ se, e somente se, G não é nulo e não contém ciclo ímpar.*

Demonstração. Pelo Exemplo 4, $\chi(G) = 2$ é equivalente a G ser bipartido. Assim, o resultado segue da caracterização de grafos bipartidos no Teorema 3.4 (página 40). \square

Proposição 4.5. *Para todo grafo G tem-se $\chi(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt{2|A(G)| + \frac{1}{4}}$.*

Demonstração. Seja $\{1, \dots, k\}$ uma coloração mínima para G . Então para todo $i \neq j$, existe uma aresta com um extremo em X_i e outro em X_j . Assim, $|A(G)| \geq \binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$ e estudando o sinal da função $f(k) = k^2 - k - 2|A(G)|$, obtemos que a desigualdade anterior equivale à $k \leq (1 + \sqrt{8|A(G)| + 1})/2$. \square

Teorema 4.6. *Qualquer grafo G é $(\Delta + 1)$ -colorível, onde Δ é o grau máximo de G .*

Demonstração. Provaremos por indução na ordem de G , ou seja, na cardinalidade de $V(G)$. Se $|V| = 1$, o resultado é imediato. Seja G um grafo de ordem n e x um vértice qualquer de G . Assim, $H = G - x$ possui $n - 1$ vértices e grau máximo $\Delta_H \leq \Delta$. Por hipótese de indução H é colorível com $\Delta_H + 1 \leq \Delta + 1$ cores. Uma $(\Delta + 1)$ -coloração para G é então obtida colorindo x com uma cor diferente das (no máximo Δ) cores de vizinhos de x . \square

A afirmação do Teorema acima é equivalente a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Este nem sempre é um bom limitante para o número cromático, como por exemplo, se tomarmos o grafo $K = K_{1,25}$, que possui $\Delta(K) = 25$, o Teorema acima diz que K é 26-colorível. Mas, já sabemos que um grafo bipartido completo possui $\chi(G) = 2$.

Note que quando G é um grafo completo ou um ciclo ímpar, obtemos a igualdade no Teorema 4.6, isto é, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ (Exemplos (a) e (b) na seção anterior). O Teorema a seguir, conhecido como Teorema de Brooks, mostra que tal igualdade é válida somente para grafos completos ou ciclos ímpares, ou seja, se G não for um destes dois grafos, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Antes de apresentarmos o Teorema de Brooks, precisamos da seguinte definição.

Definição 4.7. Dados G um grafo qualquer e K uma coloração própria de G , uma *cadeia de Kempe de G* correspondente a duas cores i, j de K é o subgrafo formado exatamente pelos vértices de cores i ou j . Em outras palavras, tal cadeia de Kempe é um subgrafo G_{ij} com $V(G_{ij}) = K^{-1}(i) \cup K^{-1}(j)$ e $A(G_{ij})$ formado por todas as arestas de G que contêm tais vértices.

Na Figura abaixo temos o exemplo de um grafo G (linhas pontilhadas) e a sua cadeia de Kempe G_{12} (linhas contínuas).

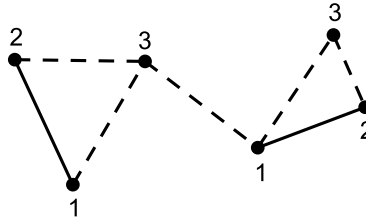


Figura 4.5: Grafo G e sua cadeia de Kempe G_{12} .

Teorema 4.8 (Brooks). *Se G é um grafo² conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grafo de ordem n como no enunciado e $\Delta = \Delta(G)$. Sabemos que $\Delta \neq 0, 1$ (caso contrário, G seria completo ou desconexo). Se $\Delta = 2$, G deve ser um ciclo par ou um caminho (pois G é conexo), e em ambos os casos temos $\chi(G) = 2 = \Delta$. Assim, vamos supor $\Delta \geq 3$.

Provaremos por indução em n . Assumimos que o resultado é válido para todos os grafos com menos que n vértices e dividimos a demonstração em dois casos.

1. G não é regular. Seleccionemos um vértice v tal que $g(v) < \Delta$. Então $G - v$ tem menos que n vértices e, pela hipótese de indução, pode ser colorido com $\Delta(G - v) \leq \Delta$ cores, ou seja, $G - v$ é Δ -colorível. Como $g(v) < \Delta$, haverá menos que Δ cores utilizadas

²Lembramos que neste capítulo quando citamos um grafo, estamos tratando de um grafo simples.

nos vértices adjacentes a v em G , de modo que existe uma cor não usada em qualquer um destes vértices. Apliquemos tal cor a v e então G é colorido com Δ cores.

2. G é Δ -regular. Suponhamos que G não pode ser colorido com Δ cores. Por hipótese de indução, $G - v$ é Δ -colorível. Além disso, podemos assumir que os vizinhos de v recebem Δ cores (pois caso contrário, poderíamos usar para colorir v a cor ainda não utilizada, como no caso anterior).

Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vizinhos de v e $K(v_p) = p$. Tomemos dois destes vizinhos, v_p e v_q , e consideremos a cadeia de Kempe G_{pq} . Se v_p e v_q estão em diferentes componentes de G_{pq} (e portanto não são adjacentes) podemos permutar as cores p e q em todos os vértices da componente que contém v_p e ainda teremos uma coloração própria (Figura 4.6). Mas, nesta nova coloração não haverá vértice de cor p adjacente a v (pois agora v_p possui cor q) e assim v pode receber a cor p , tornando G Δ -colorível. Desta forma precisamos considerar apenas o caso no qual v_p e v_q estão em uma mesma componente de G_{pq} , para todo p e q . Isto significa que para todo par de vizinhos v_p e v_q de v , existe um caminho P_{pq} de v_p a v_q com todos os vértices coloridos com p ou q por K .

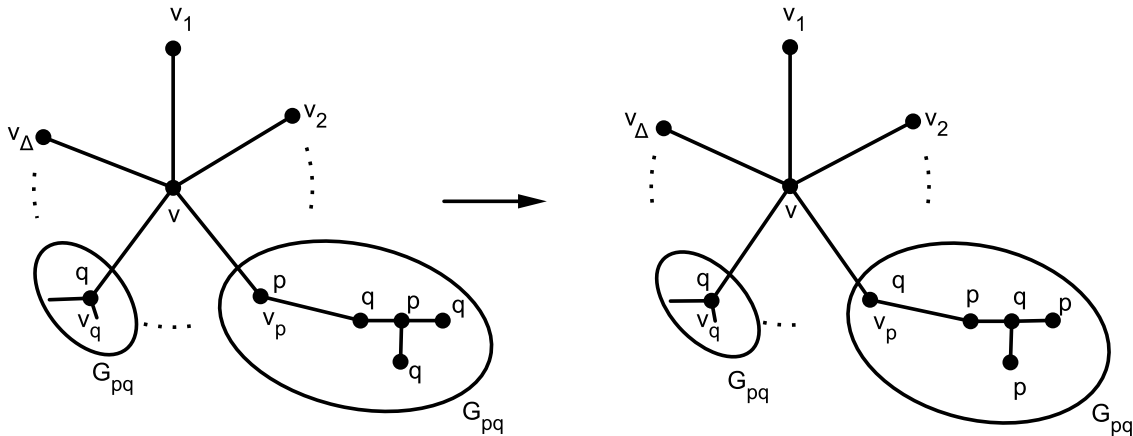


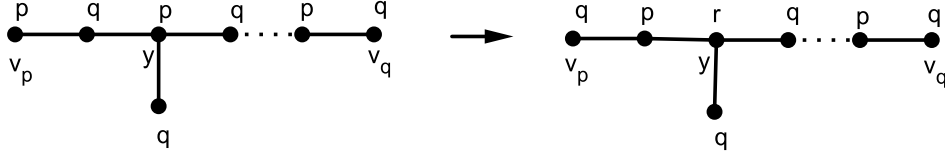
Figura 4.6: Recoloração dos vértices da componente G_{pq} que contém v_p .

Mostraremos agora que $G_{pq} = P_{pq}$. Suponha $g(v_p) \geq 2$ em G_{pq} . Então v_p possui dois vizinhos de cor q e, como $g(v_p) = \Delta$, com certeza uma cor r não será usada³ para os vizinhos de v_p . Podemos recolorir v_p com r e v com p , obtendo G Δ -colorível, o que contradiz a hipótese. Assim, v_p e similarmente v_q possuem grau 1 em G_{pq} .

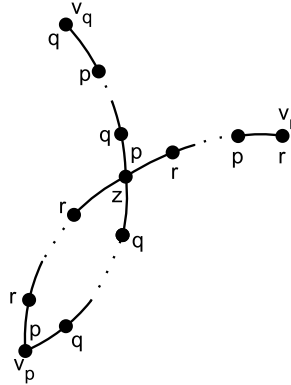
Digamos que v_p tem o vizinho v_{p_1} em G_{pq} , então $v_{p_1} = v_q$ ou $g(v_{p_1}) > 2$ ou v_{p_1} tem um único vizinho v_{p_2} em G_{pq} diferente de v_p . Para estas duas últimas possibilidades fazemos o mesmo raciocínio e assim sucessivamente, obtendo uma coleção de vértices da forma v_{p_k} em G_{pq} . Como $g(v_q) = 1$ algum dos vértices da coleção anterior será seu único vizinho.

³Pois a cor q foi utilizada duas vezes.

Se G_{pq} não é um caminho, existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a 3, obtido pelo processo acima. Seja y , dentre estes vértices, o mais próximo (em G_{pq}) de v_p . Se $K(y) = p$, então y é adjacente a três vértices com cor q e assim deve existir uma cor, digamos r , não utilizada nos vizinhos de y (pelo mesmo argumento anterior). Podemos recolorir v_p com q , v_{p_1} com p , v_{p_2} com q , ..., y com r e v com p (Figura abaixo), tornando G Δ -colorível, que é um absurdo. O caso onde $K(y) = q$ pode ser tratado similarmente. Portanto G_{pq} deve ser um caminho de v_p a v_q .



Mostraremos agora que duas cadeias G_{pq} e G_{pr} , $r \neq q$, interceptam-se apenas em v_p . Suponha z um elemento de ambas G_{pq} e G_{pr} . Então $K(z) = p$, e a menos que $z = v_p$, z tem dois vizinhos coloridos com q e dois coloridos com r . Novamente existe uma cor não utilizada em vértices adjacentes à z e portanto é possível recolorir G como anteriormente, gerando um absurdo.



Agora suponhamos que dois vizinhos de v , v_p e v_q , são não adjacentes em G . Então eles são não adjacentes em $G - v$ e o caminho G_{pq} contém um vértice diferente de v_q , digamos y , adjacente a v_p com $K(y) = q$. Selecione alguma cor r (diferente de p e q) e troque as cores dos vértices da cadeia G_{pr} de modo que v_p receba a cor r . Considere a cadeia de Kempe para essa nova coloração própria de $G - v$. Assim, G_{pq} é a nova cadeia G'_{rq} e teremos uma outra cadeia G'_{pq} que vai do vértice v_r ao vértice v_q . Claramente $y \in G'_{rq}$, pois é adjacente ao vértice v_p e $y \in G'_{pq}$, pois possui cor q . Mas isto contraria o parágrafo anterior, pois temos duas cadeias de Kempe interceptando-se em um vértice diferente dos extremos.

Assim, todos vizinhos de v são adjacentes entre si e como v é qualquer, G deve ser um grafo completo (pois é conexo), o que contradiz a hipótese inicial. Logo G é Δ -colorível. \square

Finalizamos esta seção com mais dois limitantes para o número cromático. Para isto definimos *Conjunto independente* e *clique*.

Definição 4.9. Um conjunto de vértices de um grafo G é *independente* (ou *estável*) se seus vértices são dois a dois não adjacentes, isto é, qualquer aresta de G não contém seus vértices no conjunto.

Por exemplo, se G possui uma coloração própria K , cada X_i é um conjunto independente.

Definição 4.10. Dizemos que um conjunto independente I é *maximal* se não existe um conjunto independente J com $I \subsetneq J$, e é *máximo* se $|I| \geq |J|$, para todo conjunto independente J . Chamamos de *número independente* a cardinalidade de um conjunto independente máximo e o denotamos por $\alpha(G)$.

Observação 4.11. Todo conjunto independente máximo I é um conjunto independente maximal, pois caso contrário existiria J conjunto independente contendo propriamente I e portanto teríamos $|I| < |J|$ (pois ambos são finitos). A recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.12. No grafo $K_{2,4}$ os conjuntos partição X e Y são independentes e são os únicos maximais. Ainda, o conjunto Y é um conjunto independente máximo, uma vez que $|Y| = 4 > 2 = |X|$ e portanto $\alpha(K_{2,4}) = 4$.

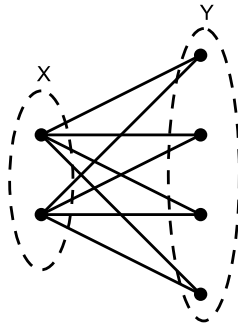


Figura 4.7: Grafo $K_{2,4}$.

Proposição 4.13. Para todo grafo G tem-se $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

Demonstração. Seja $K : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ uma k -coloração própria de G . Como $|X_i| \leq \alpha(G)$, para cada i , temos $|V(G)| = |X_1| + \dots + |X_k| \leq k\alpha(G)$, de onde segue $k \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. Mas, $\chi(G) = \min\{k\}$ e portanto segue o resultado. \square

Definição 4.14. Um conjunto *clique* (ou *completo*) de um grafo G é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes.

Definição 4.15. Dizemos que um conjunto clique I é *maximal* se não existe um conjunto clique J tal que $I \subsetneq J$, e é *máximo* se $|I| \geq |J|$, para todo conjunto clique J . Chamamos de *número clique* a cardinalidade de um conjunto clique máximo e o denotamos por $\omega(G)$.

Na Figura abaixo, $\omega(G_1) = 5$ e $\omega(G_2) = 4$.

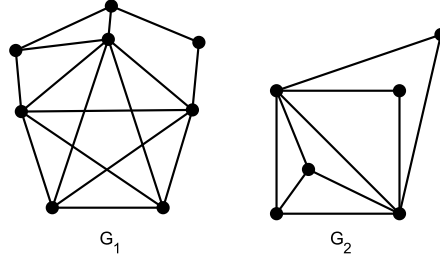


Figura 4.8: Grafos com números clique 5 e 4, respectivamente.

O resultado a seguir é uma consequência imediata dos seguintes fatos: se $H \subseteq G$, $\chi(H) \leq \chi(G)$; $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.

Proposição 4.16. Para todo grafo G , $\chi(G) \geq \omega(G)$.

4.2 Teorema das Cinco Cores

Como já citado anteriormente, o Teorema das Quatro Cores (4CT) não possui uma demonstração teórica. Mas, durante as tentativas de se obter uma prova, concluiu-se que cinco cores são suficientes para colorir um grafo planar. Este resultado é conhecido como *Teorema das Cinco Cores*. Também muitos outros teoremas equivalentes ao 4CT foram obtidos, de modo que a demonstração de um deles acarreta na demonstração do 4CT. Para mais detalhes sugerimos o artigo de Robin Thomas *An update on the four-color theorem* [7].

Observamos que no Teorema a seguir estamos considerando simplesmente grafos planares e sem laços, ou seja, múltiplas arestas são permitidas.

Teorema 4.17 (Teorema das Cinco cores). *Todo grafo planar é 5-colorível.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução na ordem n de um grafo planar G . Podemos assumir G conexo e com no mínimo três vértices, pois se $n = 1$ ou 2 , o resultado é imediato⁴.

Pela Proposição 3.6, G possui um vértice v de grau no máximo 5. Se v tem grau no máximo 4, consideramos o grafo $G - v$, que por hipótese de indução é 5-colorível, e então podemos estender esta 5-coloração própria ao grafo G , pois existe uma cor não utilizada em $\mathcal{V}(v)$.

⁴Para $n = 3, 4$ ou 5 , o resultado também é imediato, mas a demonstração se aplica a eles.

Suponhamos v de grau 5. Seja J o subgrafo de G cujos vértices são os vizinhos de v e as arestas são aquelas de G que contêm estes vértices. Note que J possui dois vértices distintos v_1 e v_2 não adjacentes, pois caso contrário, J teria $\binom{5}{2} = 10$ arestas⁵, contradizendo a desigualdade $|A(J)| \leq 3|V(J)| - 6$ (Proposição 3.5).

Seja H o grafo obtido de $G - v$ identificando v_1 e v_2 por um único vértice, ainda planar. Pela hipótese de indução existe uma 5-coloração própria para H , que dá origem a uma 5-coloração própria ϕ para $G - v$ com $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ (a identificação foi feita apenas para garantir que as cores de v_1 e v_2 em $G - v$ pela ϕ sejam as mesmas). Assim, os cinco vizinhos de v são coloridos usando no máximo 4 cores e, portanto, ϕ pode ser estendida para uma 5-coloração própria de G , como desejado. \square

Finalizamos este capítulo apresentando abaixo um grafo planar G de ordem $n = 16$ e dimensão $q = 25$ juntamente com uma 5-coloração própria.

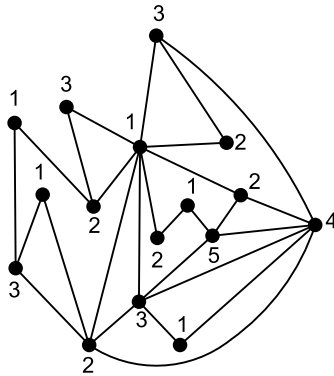


Figura 4.9: Grafo 5-colorível.

⁵ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

Considerações Finais

Neste trabalho elaboramos um texto que possa ser utilizado por alunos em um estágio de iniciação científica, relativo ao estudo introdutório da Teoria de Grafos. Para tanto, empenhamo-nos em elaborar um texto que formalizasse, da maneira mais detalhada possível, tais conceitos. Principalmente os que foram apresentados intuitivamente pelas referências consultadas.

Entre todos os resultados discutidos, destacamos alguns problemas considerados clássicos na Teoria de Grafos, como *O Problema das Pontes de Königsberg*, *O Problema do Caixeiro Viajante*, *Classificação dos Poliedros Regulares* e *Coloração de Mapas*.

Consideramos ainda que, com os conceitos abordados neste trabalho, o leitor pode seguir estudando outras aplicações, que é o ponto forte dessa teoria, como por exemplo, problemas de jogos, problemas de grade de horários, encontrar resultados relevantes em sites de busca, entre muitos outros.

Referências

- [1] ORE, O. *Graphs and their Uses*. 2. ed. Washington: The Mathematical Association of America, 1990.
- [2] BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. *Graph Theory 1736-1936*. 1. ed. New York: Clarendon Press, 1998.
- [3] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [4] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- [5] HARARY, F. *Graph Theory*. 1. ed. Oxford: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [6] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1984.
- [7] THOMAS, R. An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS*, v. 45, p. 848-859, 1998.
- [8] CLARK, J.; HOLTON, D. A. *A First Look At Graph Theory*. 1. ed. New Delhi: Allied Publishers Limited, 1995.
- [9] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. São Paulo, 2009. www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/. Acessado em: 24 de Março de 2011.
- [10] HARRIS, J. M.; HIRST, J. L.; MOSSINGHOFF, M. J. *Combinatorics and Graph Theory*. 2. ed. New York: Springer, 2008.
- [11] WALLIS, W. D. *A Beginner's Guide to Graph Theory*. 2. ed. Boston: Birkhauser, 2007.
- [12] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*. 4. ed. Harlow: Longman, 1996.

A Um Algoritmo para Colorir Grafos

A seguir, apresentamos um programa desenvolvido com o *software* Maple, que faz uso do algoritmo “greedy” (ver seção 33) e produz aleatoriamente um grafo G propriamente colorido, a partir da ordem n e dimensão q .

O objetivo aqui não é ensinar a linguagem de programação mas tentaremos, na medida do possível, explicar o que cada procedimento fornece.

Os procedimentos são iniciados por `Nome:=proc()` e finalizados por `end:`. Para aplicarmos um procedimento, precisamos executá-lo, passando os valores para suas variáveis, se necessário. Alguns deles produzirão uma saída na tela e outros apenas guardarão informações nas variáveis, que poderão ser utilizadas em outros procedimentos.

Quando um procedimento retornar algo na tela, exibiremos a saída centralizada e em itálico, possuindo assim uma formatação parecida com a do próprio Maple.

Iniciando o programa

A linha abaixo limpa a memória e carrega dois pacotes, `plottools` e `plots`.

```
restart: with(plottools): with(plots):
```

A seguir guardamos as possíveis cores (padrões do Maple) na variável `paleta`, que serão utilizadas na coloração, e calculamos o número total de cores da paleta, `TotalCoresPaleta`. Por fim, definimos a função `Cor` que associa a um inteiro positivo k a k -ésima cor da paleta.

```
paleta:={red,green,blue,brown,cyan,navy,yellow,gold,grey,magenta,  
         orange,pink,plum,sienna,tan,turquoise,violet,wheat};  
TotalCoresPaleta:=nops(paleta); Cor:=k->paleta[k];
```

$$TotalCoresPaleta := 18$$
$$Cor := k \rightarrow paleta_k$$

O procedimento `Parametros` possui duas variáveis n e q , a ordem e a dimensão do grafo desejado, respectivamente. Primeiramente, testamos se $n < 1$ e neste caso

uma mensagem é exibida alertando que n deve ser maior ou igual a 1; caso contrário, guardamos o valor de n na variável `NVertices` e criamos o conjunto N dos números de 1 a n . O número máximo de arestas $n(n-1)/2$ é guardado na variável `TotalArestas`. A seguir, testamos se $0 \leq q \leq n(n-1)/2$: se o teste é falso uma mensagem é exibida solicitando uma alteração para q ; se o teste é verdadeiro, guardamos o valor de q na variável `NArestas` e uma mensagem de validação é exibida e testamos se $q = n(n-1)/2$: se verdadeiro, obtemos um aviso que o grafo em construção será completo K_n ; caso contrário, são exibidos os valores das variáveis `NVertices`, `NArestas` e `TotalArestas`, que são n , q e $n(n-1)/2$, respectivamente.

```
Parametros:=proc(n,q)
  global NVertices,TotalArestas,NArestas,N:
  if n<1 then
    print('número mínimo de vértices deve ser 1'):
  else
    NVertices:=n:
    N:={seq(i,i=1..NVertices)}:
    TotalArestas:=NVertices*(NVertices-1)/2:
    if q>TotalArestas or q<0 then
      print('número de arestas entre 0 e ',TotalArestas):
    else
      NArestas:=q:
      print('tudo OK, continuando...'):
      if NArestas=TotalArestas then
        print('Grafo completo K',NVertices):
      else
        print('número de vértices=',NVertices,' número de arestas=',
          NArestas,' de um total de',TotalArestas):
      fi:
    fi:
  fi:
end:
```

Após criarmos o procedimento (com o bloco acima), precisamos executá-lo de modo a obtermos as saídas nele definidas, ou seja, executamos o comando abaixo, escolhendo valores para n e q , como por exemplo, $n = 8$, $q = 20$. Ao final do programa, se os valores escolhidos forem permitidos, teremos um grafo G com 8 vértices e 20 arestas, colorido propriamente.

```
Parametros:=proc(8,20);
```

tudo OK, continuando...

número de vértices = 8, número de arestas = 20, de um total de 28

Com o intuito de evitarmos vértices colineares na representação do grafo a ser construído, definimos a seguir o procedimento **Colinear**, cujas variáveis são um ponto a e um conjunto S . O procedimento verifica se a é colinear com quaisquer dois pontos arbitrários de S e ao final retorna a variável **aceita**, cujo valor é *verdadeiro* (se, e somente se, a não é colinear com nenhum par de pontos de S) ou *falso* (se a é colinear com algum par de pontos de S). Este procedimento será utilizado várias vezes na criação do conjunto $V(G)$.

```
Colinear:=proc(a,S)
  global aceita:
  local det,z,w,vetor1,vetor2,temp:
  temp:={}:
  aceita:=true:
  for z in S do
    temp:=temp union {z}:
    for w in S minus temp do
      vetor1:=[(a-z)[1],(a-z)[2]]:
      vetor2:=[(a-w)[1],(a-w)[2]]:
      det:=vetor1[1]*vetor2[2]-vetor2[1]*vetor1[2]:
      if det=0 then
        aceita:=false:
      fi:
    od:
  od:
  RETURN(aceita):
end:
```

A seguir, definimos o procedimento **CriaVertices** que depende da variável n . Este procedimento faz uso da função **sorteio** (que retorna um inteiro positivo aleatório entre 1 e n) e cria o conjunto **Vertices** formado por n pontos, três a três não colineares (devido ao uso da função **Colinear**). O conjunto resultante **Vertices** será o conjunto de vértices do grafo, ou seja, $V(G)$.

```
sorteio:=rand(1..NVertices):
CriaVertices:=proc(n)
  global Vertices
  local v:
  Vertices:={}:

```

```

while nops(Vertices) < n do
  v:=[sorteio(),sorteio()]:
  if Colinear(v,Vertices) then
    Vertices:=Vertices union {v}:
  fi:
od:
RETURN(Vertices):
end:

```

Executamos o procedimento acima e guardamos a saída na variável *VG*, um conjunto contendo os $n = 8$ vértices escolhidos aleatoriamente, como desejado.

Observe que cada vértice é representado por uma lista de dois inteiros positivos, definida com o uso de colchetes (e não de parênteses, como na geometria analítica). É assim que o Maple trabalha com pares ordenados.

```
VG:=CriaVertices(NVertices);
```

$$VG:=\{[1, 4], [1, 6], [2, 1], [2, 7], [3, 2], [3, 5], [4, 6], [8, 8]\}$$

No bloco seguinte, definimos o procedimento *CriaArestas*, que depende da variável *q*, que cria o conjunto *Arestas* formado por pares distintos de pontos distintos do conjunto *Vertices* (criado anteriormente), ou seja, não obtemos arestas múltiplas e nem laços.

```

CriaArestas:=proc(q)
  global Arestas:
  local a:
  Arestas:={}:
  while nops(Arestas) < q do
    a:=[Vertices[sorteio()],Vertices[sorteio()]];
    if evalb(a[1]=a[2] or [a[1],a[2]] in Arestas
      or [a[2],a[1]] in Arestas)
    then
      Arestas:=Arestas;
    else
      Arestas:=Arestas union {a}:
    fi:
  od:
  RETURN(Arestas):
end:

```

Observe que cada aresta é formada por uma lista de *duas listas de dois números*, ou seja, uma lista de *dois vértices*.

```
AG:=CriaArestas(NArestas);
```

$$AG = \{[[1, 4], [2, 1]], [[1, 4], [2, 7]], [[1, 4], [3, 5]], [[1, 4], [4, 6]], [[1, 6], [4, 6]],$$

$$[[2, 1], [1, 6]], [[2, 1], [4, 6]], [[2, 7], [3, 5]], [[2, 7], [4, 6]], [[2, 7], [8, 8]],$$

$$[[3, 2], [1, 4]], [[3, 5], [1, 6]], [[3, 5], [2, 1]], [[3, 5], [3, 2]], [[3, 5], [8, 8]],$$

$$[[4, 6], [3, 5]], [[8, 8], [1, 4]], [[8, 8], [1, 6]], [[8, 8], [3, 2]], [[8, 8], [4, 6]]\}$$

A seguir, definimos o procedimento **Vizinhanca**, que determina quais são os vizinhos de cada vértice, ou seja, determina o conjunto $\mathcal{V}(v)$. Além disso, é calculado o grau de cada vértice. Este procedimento será utilizado na execução do algoritmo “greedy” durante o processo de coloração.

```
Vizinhanca:=proc()
  local i,a:
  global V,GrauV:
  for i from 1 to NVertices do
    V[i]:={}:
    GrauV[i]:=0:
    for a in AG do
      if evalb(VG[i] in a and VG[i]=a[1]) then
        V[i]:= {a[2]} union V[i]:
        GrauV[i]:=nops(V[i]):
      else
        if evalb(VG[i] in a) then
          V[i]:= {a[1]} union V[i]:
          GrauV[i]:=nops(V[i]):
        else
          V[i]:=V[i]:
          GrauV[i]:=nops(V[i]):
        fi:
      fi:
    od:
    print('Vizinhanca de v',i,' = ',V[i],' Grau do vertice
    =' ,GrauV[i]):
  od:
end:
```

Executamos o procedimento acima com o comando **Vizinhanca()**; e obtemos como saída as informações:

<i>Vizinhança de v_1</i>	$= \{[2, 1], [2, 7], [3, 2], [3, 5], [4, 6], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 6$
<i>Vizinhança de v_2</i>	$= \{[2, 1], [3, 5], [4, 6], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 4$
<i>Vizinhança de v_3</i>	$= \{[1, 4], [1, 6], [3, 5], [4, 6]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 4$
<i>Vizinhança de v_4</i>	$= \{[1, 4], [3, 5], [4, 6], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 4$
<i>Vizinhança de v_5</i>	$= \{[1, 4], [3, 5], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 3$
<i>Vizinhança de v_6</i>	$= \{[1, 4], [1, 6], [2, 1], [2, 7], [3, 2], [4, 6], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 7$
<i>Vizinhança de v_7</i>	$= \{[1, 4], [1, 6], [2, 1], [2, 7], [3, 5], [8, 8]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 6$
<i>Vizinhança de v_8</i>	$= \{[1, 4], [1, 6], [2, 7], [3, 2], [3, 5], [4, 6]\},$	<i>Grau do vértice</i>	$= 6$

Agora, com o procedimento Greedy, definimos como deverá ser feita a coloração do grafo. Neste caso, definimos uma coloração própria, isto é, vértices adjacentes receberão cores distintas. Observe que a cada vértice será associado um número K_i , que será utilizado para selecionar uma cor da paleta.

```
Greedy:=proc()
  global K:
  local i,j,T:
  K[1]:=1:
  if NVertices > 1 then
    for i from 2 to NVertices do
      T[i]:={}:
      for j from 1 to NVertices while j < i do
        if evalb(VG[j] in V[i]) then
          T[i]:={K[j]} union T[i]:
        fi:
      od:
      K[i]:= min(op(N minus T[i])):
      print('vértice v',i,' será colorido com a cor',K[i]):
    od:
  fi:
end:

Greedy();
```

vértice v_1 será colorido com a cor 1
vértice v_2 será colorido com a cor 1
vértice v_3 será colorido com a cor 2
vértice v_4 será colorido com a cor 2
vértice v_5 será colorido com a cor 2
vértice v_6 será colorido com a cor 3
vértice v_7 será colorido com a cor 4
vértice v_8 será colorido com a cor 5

As três linhas a seguir calculam os graus máximo $\Delta(G)$ e mínimo $\delta(G)$ e a quantia de cores suficientes para uma coloração própria do grafo G em construção.

```
Delta:=max(seq(GrauV[i],i=1..NVertices));
delta:=min(seq(GrauV[i],i=1..NVertices));
CoresSuficientes:=max(seq(K[i],i=1..NVertices));
```

$$\Delta := 7$$

$$\delta := 3$$

$$CoresSuficientes := 5$$

Por fim, criamos o procedimento *Desenhar*, o mais elaborado dentre todos, que utilizará todas as informações acima para exibir um grafo com os critérios desejados. O procedimento começa verificando se há cores suficientes na paleta: se *sim*, o procedimento confirma e continua; se *não*, pede para adicionarmos mais cores à paleta ou diminuirmos a quantia de arestas.

Sugerimos a leitura minuciosa dos comandos utilizados, de modo a perceber como o desenho foi construído.

```
raio:=i->1/3:
lambda:=1.1:
Desenhar:=proc()
  local i,j:
  global aresta,arvore,vertice,texto,grVG,grAG,grtexto,Xmax,Ymax:
  if nops(paleta) < CoresSuficientes then
    print('quantia de cores insuficiente'):
    print('adicione mais cores à paleta ou atualize AG'):
  else
    Xmax:=NVertices+1:
    Ymax:=Xmax:
    for i from 1 to NVertices do
      vertice[i]:=disk(VG[i],raio(i),color=Cor(K[i])):
      texto[i]:=PLOT(TEXT(evalf(VG[i]+[lambda*raio(i),lambda*raio(i)]),
        convert(K[i],roman),COLOR(RGB,1,0,0)),
        TEXT(evalf(VG[i]+[-lambda*raio(i),lambda*raio(i)]),
        convert(i,string),COLOR(RGB,0,0,1)),
        TITLE('Vértices (arábico) ordenados em azul.
          \nCores (romano) utilizadas em vermelho.',
          FONT(HELVETICA,BOLD,12))):
    if GrauV[i]>0 then
      for j from 1 to GrauV[i] do
```

```

    aresta[j]:=line(V[i][j],VG[i],thickness=2):
  od:
  arvore[i]:=seq(aresta[j],j=1..GrauV[i]):
else
  arvore[i]:=vertice[i]:
fi:
od:
fi:
grAG:=(seq(arvore[i],i=1..NVertices)):
grVG:=(seq(vertice[i],i=1..NVertices)):
grtexto:=(seq(texto[i],i=1..NVertices)):
RETURN(display(grAG,grVG,grtexto,
  scaling=constrained,axes=none
  view=[0..Xmax,0..Ymax])):
end:

```

Executamos o procedimento `Desenhar()`; para obtermos o grafo G . Observamos apenas que, para obtermos uma melhor qualidade visual do grafo neste texto, optamos por construir o desenho abaixo diretamente no \LaTeX , ao invés de exportarmos a figura do Maple, que é muito semelhante a esta, mas difere apenas pelas informações laterais e pela grade numerada.

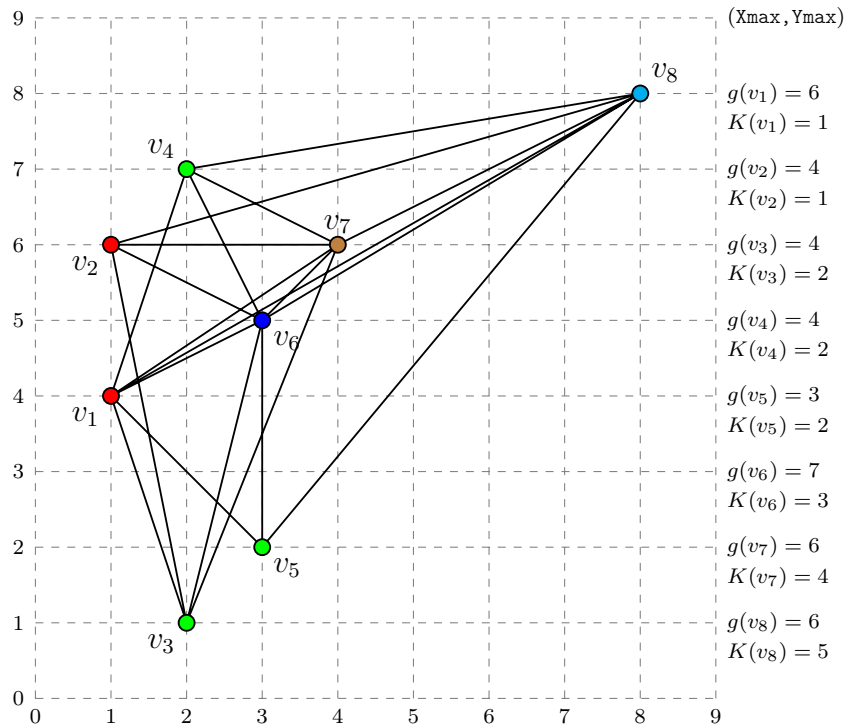
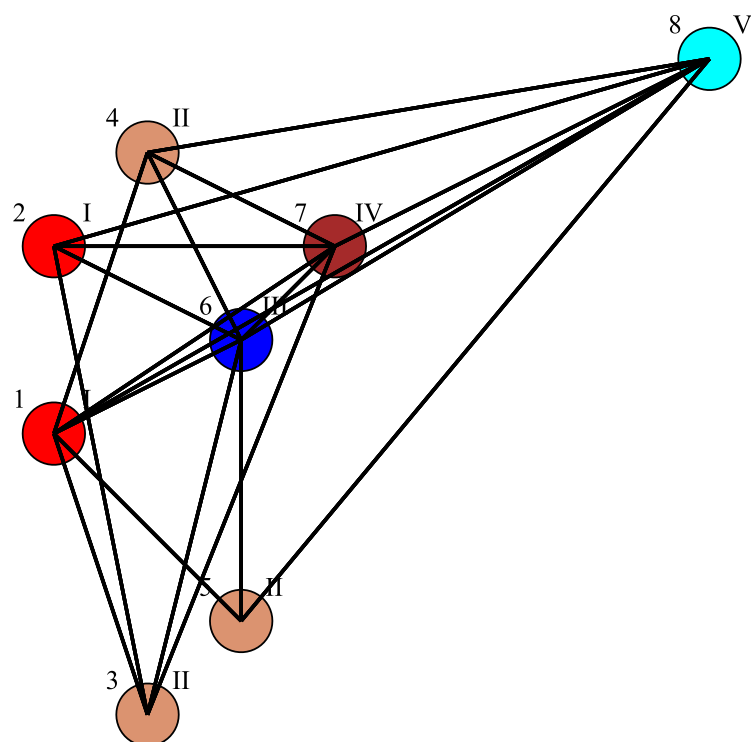


Figura A.1: Grafo G de ordem 8 e dimensão 20, colorido por meio do algoritmo “greedy”.

Apenas para fins comparativos, mostramos abaixo a Figura obtida no Maple.

Vértices (arábico) ordenados em azul.
Cores (romano) utilizadas em vermelho.



B Tabela de Símbolos

A seguir apresentamos os símbolos que utilizamos em nosso trabalho e seus respectivos significados.

Símbolo	Significado
$\alpha(G)$	Número independente de G
$\delta(G)$	Grau mínimo de G
$\Delta(G)$	Grau máximo de G
$\rho(P)$	Grau mínimo do poliedro P
$\chi(G)$	Número cromático de G
$\omega(G)$	Número clique de G .
$ A $	Dimensão do grafo que contém o conjunto de arestas A
$ V $	Ordem do grafo que contém o conjunto de vértices V
$g(v)$	grau do vértice v
$g(F)$	grau da face F
$p(v_1v_2)$	Peso da aresta v_1v_2
r -regular	Grafo regular cujos vértices possuem grau r
$v_1 - v_n$	Percurso cujos vértices inicial e final são respectivamente v_1 e v_n
C_n	Grafo ciclo com n vértices
G^*	Grafo dual de G
G^{**}	Grafo dual duplo de G
G_{ij}	Cadeia de Kempe formada pelos vértices coloridos com as cores i e j
$K(v)$	Coloração própria do vértice v
K_n	Grafo completo com n vértices
$K_{ X , Y }$	Grafo bipartido completo
N_n	Grafo nulo com n vértices
$P(G)$	Peso total do grafo com peso G
$\mathcal{V}(v)$	Vizinhança do vértice v

Índice Remissivo

Algoritmo greedy, 33, 53

Aresta(s)

adjacentes, 17

múltipla, 17

Árvore, 29

geradora, 32

Cadeia de Kempe, 55

Caminho, 23

Hamiltoniano, 28

Ciclo, 23

Hamiltoniano, 28

par, 40

ímpar, 40

Circuito, 23

Euleriano, 24

Coloração, 51

própria, 51

Conjunto

clique, 58

maximal, 59

máximo, 59

independente, 58

maximal, 58

máximo, 58

partição, 39

Dimensão, 18

Face, 41

infinita, 41

Floresta, 29

geradora, 32

Fórmula de Euler, 41

Grafo, 17

bipartido, 39

completo, 39

colorível, 51

com peso, 32

completamente regular, 45

completo, 18

conexo, 23

Dual, 43

Euleriano, 24

Hamiltoniano, 28

nulo, 18

planar, 20

poligonal, 46

regular, 20

simples, 17

Grau

de um vértice, 17

de uma face, 41

máximo, 18

mínimo, 18

Homeomorfismo, 19

Isomorfismo, 19

Laço, 17

Número

clique, 59

cromático, 51

independente, 58

Ordem, 18

Percurso, 23

Poliedro regular, 47

Poliedros regulares, 49

Ponte, 30

Problema

das casas, 20

das pontes de Königsberg, 24

do caixeiro viajante, 34

Projeção estereográfica, 47

Representação planar, 20

Reunião de grafos, 18

Subdivisão, 19

Subgrafo, 18

Teorema

das cinco cores, 59

de Brooks, 55

de Dirac, 28

de Kuratowski, 43

de Ore, 29

Trilha, 23

Euleriana, 24

Vizinhança, 18

Vértice

par, 18

ímpar, 18