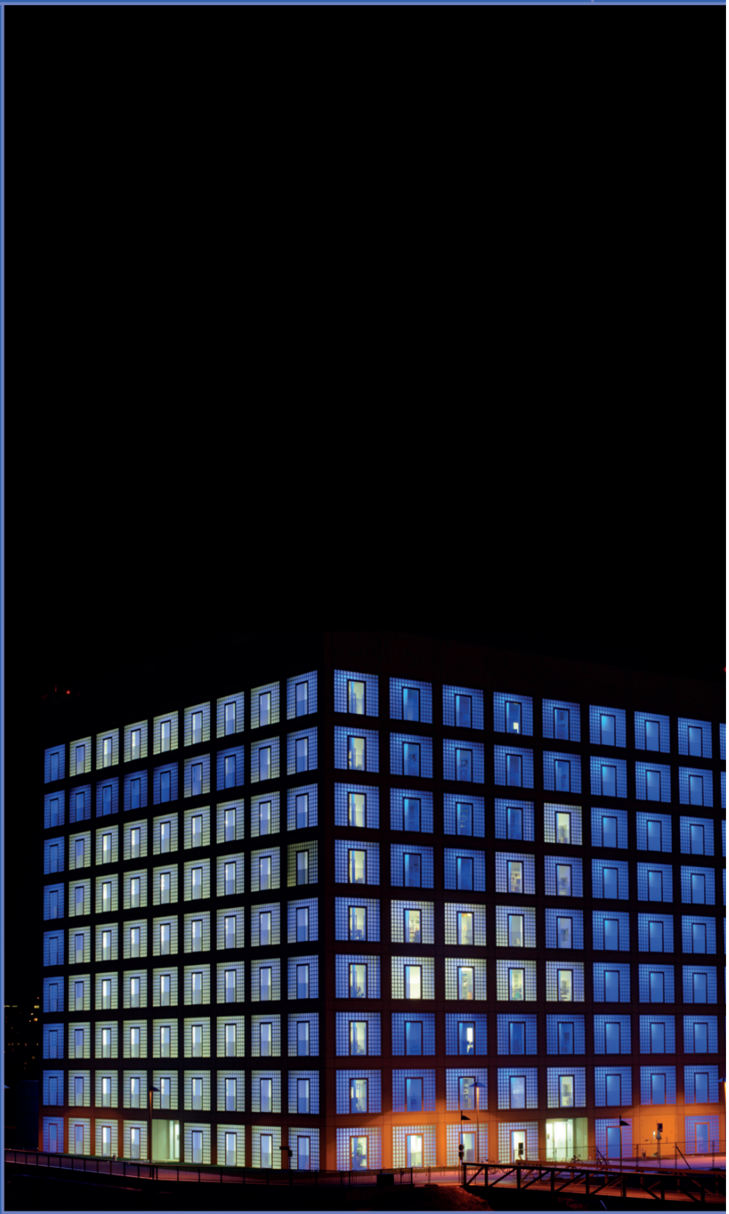
Hoofdstuk 1

Coördinaten en vectoren

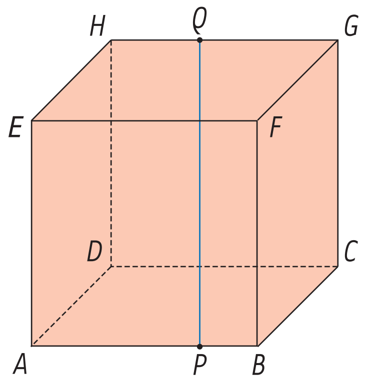


Opdracht 1 bladzijde 10

Als twee rechten in werkelijkheid evenwijdig zijn, dan zijn ze op de tekening ook evenwijdig.

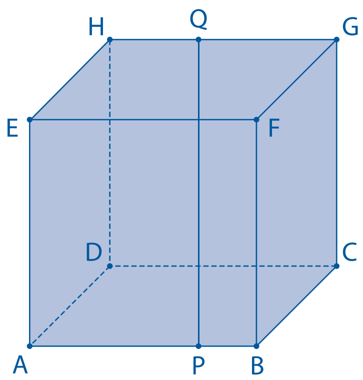
Geldt het omgekeerde ook: als twee rechten in de tekening evenwijdig zijn, zijn ze dan ook in werkelijkheid evenwijdig?

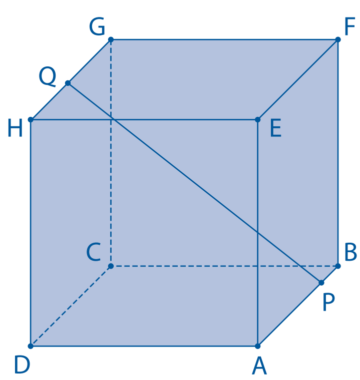
Verklaar je antwoord aan de hand van het lijnstuk $[PQ]$ in de kubus.



Nee, als twee rechten op de tekening evenwijdig zijn, zijn ze niet noodzakelijk in werkelijkheid evenwijdig.

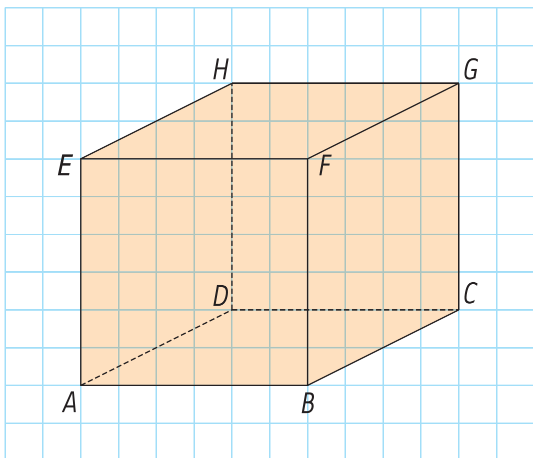
Zo lijkt PQ in de linkse tekening evenwijdig te zijn met BF, maar als we de kubus vanuit een ander standpunt bekijken (rechtse tekening), dan zien we dat PQ niet evenwijdig is met BF. Indien PQ evenwijdig zou zijn met BF, dan zouden we dit in elke tekening moeten zien.





Opdracht 2 bladzijde 10

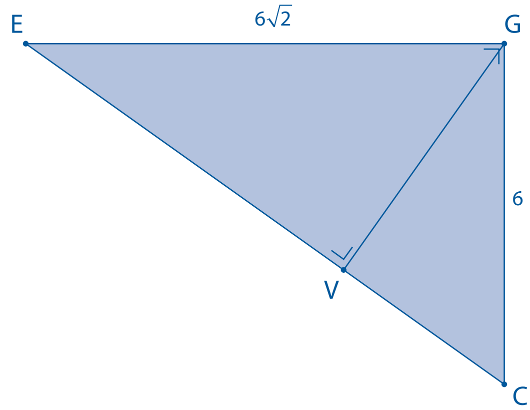
De kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 6 is getekend.



1 De ribbe $[EH]$ is niet in ware grootte getekend. Met welke factor is de ribbe verkort?

Met factor $\dfrac{\sqrt{4^2+2^2}}{6} \approx 0{,}75.$

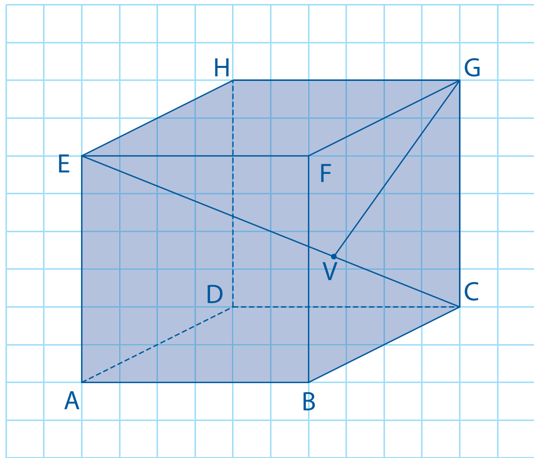
2 Noem V het voetpunt van de loodlijn vanuit G op EC. Bereken $|GV|$ door de oppervlakte van de driehoek ECG op twee manieren uit te drukken.



$$\frac{|EC|\cdot|GV|}{2}=\frac{|EG|\cdot|GC|}{2}$$

$$\Rightarrow |GV|=\frac{|EG|\cdot|GC|}{|EC|}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 6}{6\sqrt{3}}=6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3 Bereken $\frac{|EV|}{|EC|}$.



$$\frac{|EV|}{|EC|}=\frac{\sqrt{(6\sqrt{2})^2-\left(6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{72-24}}{6\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$

4 Teken nu $[GV]$ in de figuur. Steun daarbij op de tekenregel dat een verhouding op een lijnstuk in de ruimte behouden blijft in de tekening.

We tekenen het punt V op $[EC]$ zodanig dat $|EV|=\frac{2}{3}|EC|$.

5 Blijft de loodrechte stand van EC en GV behouden in de tekening?

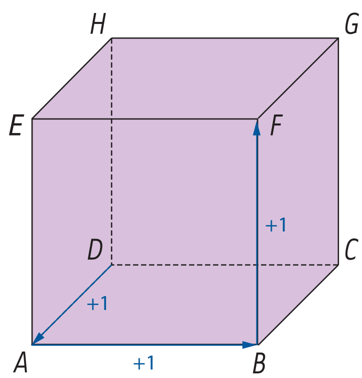
Neen.

Opdracht 3 bladzijde 11

De lengte van de ribben van de gegeven kubus nemen we als eenheid.

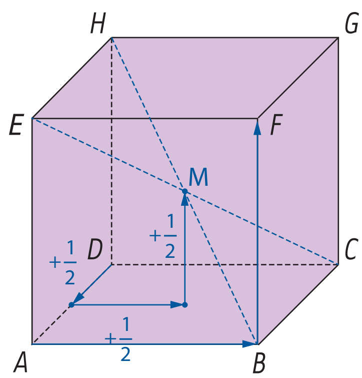
1 Welk hoekpunt van de kubus wordt bereikt als we vanuit D eerst evenwijdig met DA een eenheid afleggen, aansluitend daarna evenwijdig met DC een eenheid en aansluitend evenwijdig met DH weer een eenheid?

In F.



2 Welk punt wordt bereikt door telkens slechts een halve eenheid af te leggen?

In M, het middelpunt van de kubus (het snijpunt van de lichaamsdiagonalen).

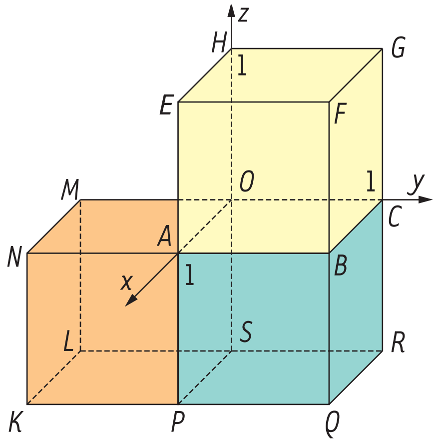


Opdracht 4 bladzijde 15

In een orthonormaal assenstelsel zijn drie kubussen met ribbe 1 getekend.

Bepaal de coördinaat van het punt

1 *F*
2 *M*
3 *Q*
4 *K*
5 *G*
6 *R*



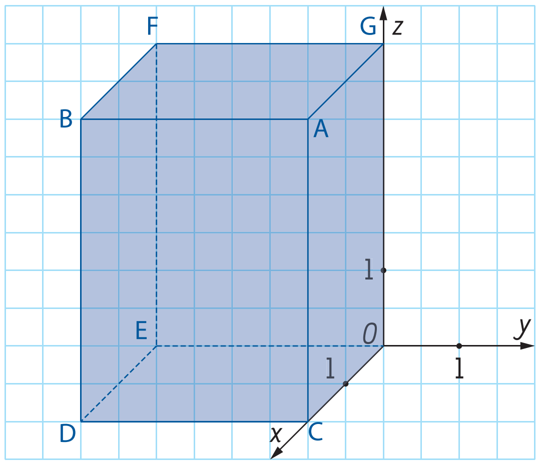
1 F(1,1,1)
2 M(0,–1,0)
3 Q(1,1,–1)
4 K(1,–1,–1)
5 G(0,1,1)
6 R(0,1,–1)

Opdracht 5 bladzijde 15

De coördinaat van het punt *B* is (2,–3,4).

1 Teken alle mogelijke coördinatenpaden die de oorsprong met *B* verbinden.

2 Benoem en geef de coördinaat van elk punt waar je bij deze coördinatenpaden van richting verandert.



O(0,0,0)
C(2,0,0)
D(2,–3,0)
E(0,–3,0)
G(0,0,4)
A(2,0,4)
B(2,–3,4)
F(0,–3,4)

3 Van welk lichaam zijn de punten uit **2** de hoekpunten?

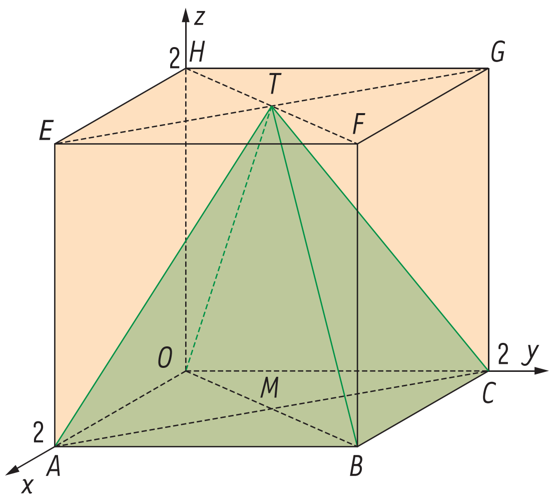
Van een balk.

Opdracht 6 bladzijde 16

In de kubus met ribbe 2 staat de piramide $\begin{pmatrix} & T & \\ A \quad B & & C \quad O \end{pmatrix}$.

1 Bepaal de coördinaat van de punten *A*, *B*, *C* en *T*.

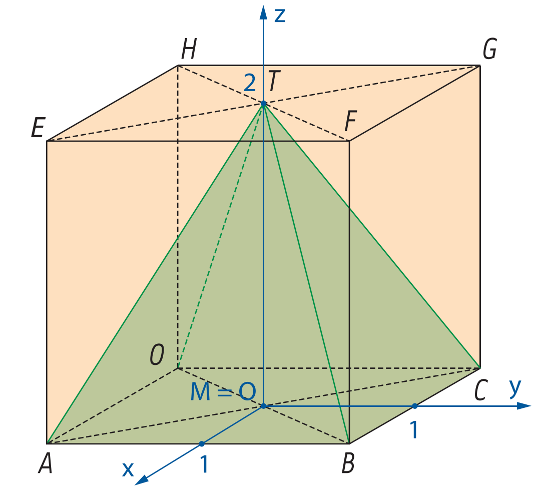
A(2,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0) en T(1,1,2).



2 Verschuif het assenstelsel zodat *M* de oorsprong wordt.

Geef de coördinaat van de punten *A*, *B*, *C*, *O* en *T* in dit nieuwe assenstelsel.

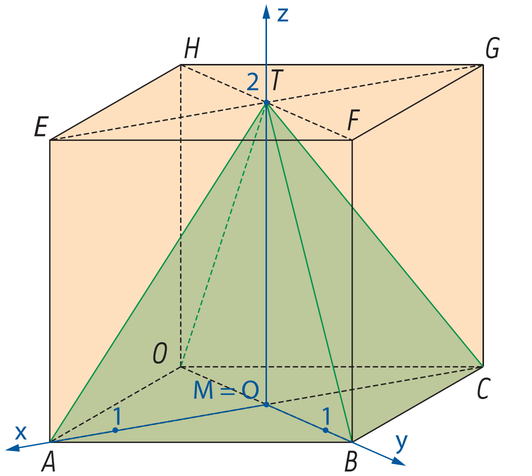
A(1,–1,0), B(1,1,0), C(–1,1,0), O(–1,–1,0) en T(0,0,2).



3 We voeren nogmaals een nieuw assenstelsel in. Hierbij is *M* de oorsprong, *T* ligt op de positieve *z*-as, *A* op de positieve *x*-as en *B* op de positieve *y*-as. De eenheid is dezelfde als in het vorige assenstelsel.

Verklaar waarom dit ook een orthonormaal assenstelsel is.

De eenheden op de coördinaatassen zijn gelijk en de assen staan twee aan twee loodrecht op elkaar. Ook de x- en de y-as staan loodrecht op elkaar want de diagonalen van een vierkant staan loodrecht op elkaar.



4 Geef in dit laatste assenstelsel de coördinaat van de punten *A*, *B*, *C*, *O* en *T*.

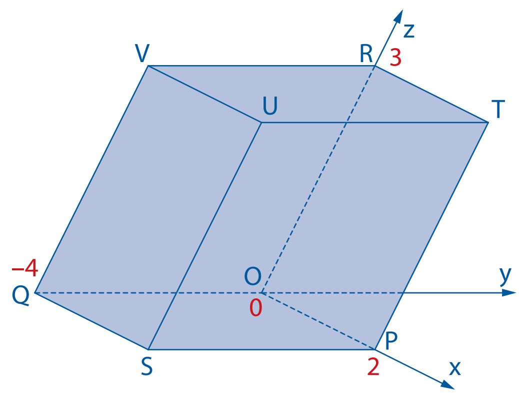
A($\sqrt{2}$,0,0), B(0,$\sqrt{2}$,0), C($-\sqrt{2}$,0,0), O(0,$-\sqrt{2}$,0) en T(0,0,2).

Opdracht 7 bladzijde 18

In een affien assenstelsel zijn de punten $P(2,0,0)$, $Q(0,-4,0)$ en $R(0,0,3)$ gegeven.

Maak een figuur en geef de coördinaten van alle hoekpunten van het parallellepipedum waarvan $[OP]$, $[OQ]$ en $[OR]$ drie ribben zijn.

O(0,0,0)	R(0,0,3)
P(2,0,0)	T(2,0,3)
S(2,–4,0)	U(2,–4,3)
Q(0,–4,0)	V(0,–4,3)

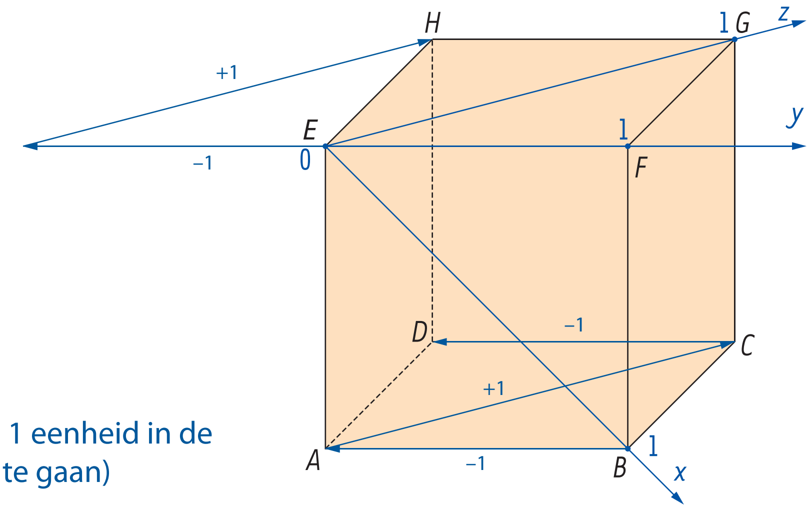


Opdracht 8 bladzijde 18

In de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een affien assenstelsel gekozen waarbij $[EB]$, $[EF]$ en $[EG]$ op de coördinaatassen liggen en de eenheden overeenkomen met de lengtes van die lijnstukken.

Bepaal de coördinaat van

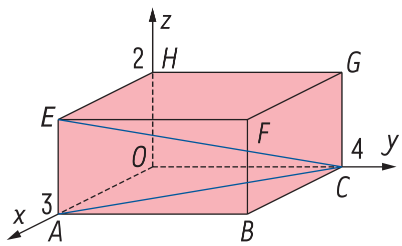
1 A
2 C
3 H
4 D



1 (1,–1,0)
2 (1,–1,1)
3 (0,–1,1)
4 (1,–2,1)

(D wordt bereikt door vanuit C 1 eenheid in de richting van de negatieve y-as te gaan)

Opdracht 9 bladzijde 18



1 Bereken $|AC|$ in de getekende balk.

In de rechthoekige driehoek ABC is

$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

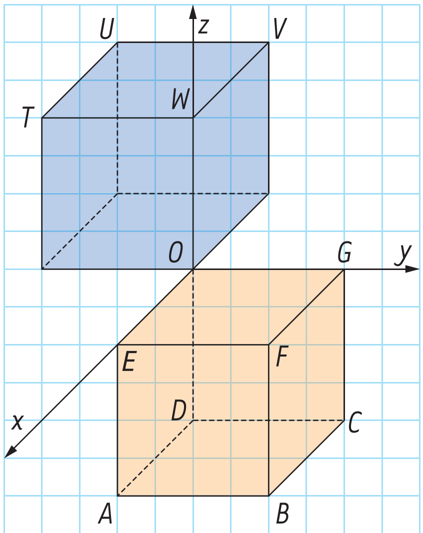
2 Bereken $|EC|$.

In de rechthoekige driehoek AEC is

$|EC| = \sqrt{|EA|^2 + |AC|^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$

Opdracht 10 bladzijde 21

In een orthonormaal assenstelsel zijn twee kubussen met ribbe 1 getekend.



Bereken

1 $|OB|$

2 $|OU|$

3 $|UB|$

4 $|TO|$

5 $|TC|$

6 $|AV|$

1 O(0,0,0) en B(1,1,–1) $\Rightarrow |OB| = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{3}$

2 O(0,0,0) en U(–1, –1,1) $\Rightarrow |OU| = \sqrt{(-1-0)^2+(-1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{3}$

3 U(–1, –1,1) en B(1,1,–1) $\Rightarrow |UB| = \sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

4 O(0,0,0) en T(0,–1,1) $\Rightarrow |TO| = \sqrt{(0-0)^2+(-1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$

5 T(0,–1,1) en C(0,1,–1) $\Rightarrow |TC| = \sqrt{(0-0)^2+(1+1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

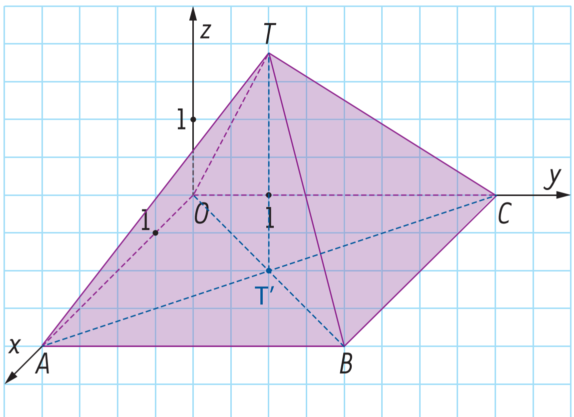
6 A(1,0,–1) en V(–1,0,1) $\Rightarrow |AV| = \sqrt{(-1-1)^2+(0-0)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Opdracht 11 bladzijde 21

In het getekende orthonormaal assenstelsel staat de regelmatige piramide $\begin{pmatrix} & & T & \\ O & A & B & C \end{pmatrix}$.

De lengte van alle ribben van de piramide is 4. De top *T* ligt loodrecht boven het midden van het grondvlak *OABC*.

Bepaal de coördinaat van *T*.



De projectie van T op het xy-vlak volgens de z-as is T′(2,2,0).

De coördinaat van T is bijgevolg (2,2,k).

Nu is

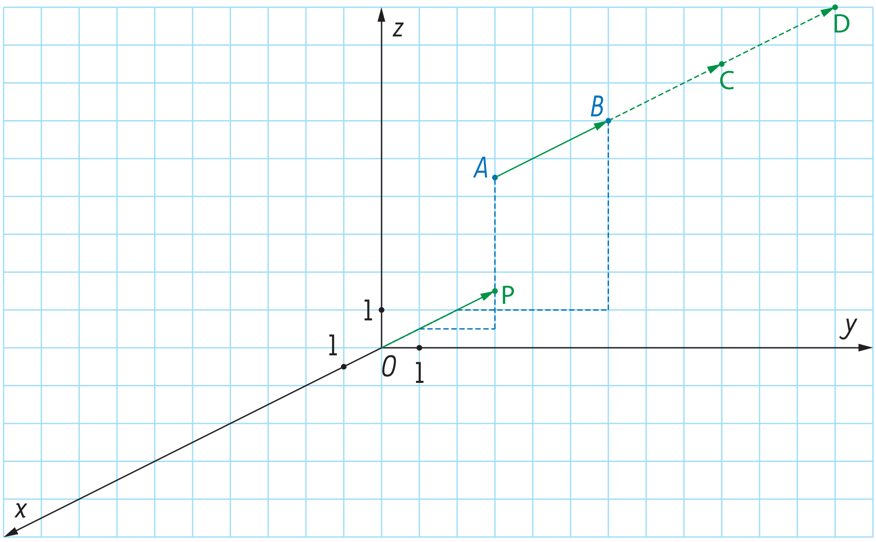
$$|OT| = 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(k-0)^2} = 4$$
$$\Leftrightarrow 8+k^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

Op de figuur zien we dat k positief moet zijn, zodat $T(2,2,2\sqrt{2})$.

Opdracht 12 bladzijde 21

Bij het opstijgen beweegt een vliegtuig met een constante snelheid op een rechte lijn.
Op een bepaald ogenblik bevindt het vliegtuig zich in het punt $A(-1,2,4)$.
30 seconden later bevindt het zich in $B(-2,4,5)$.

Alle coördinaatgetallen zijn in km gegeven.



1 Bepaal de coördinaat van de positie waar het vliegtuig zich bevindt

a 30 seconden nadat het zich in B bevindt;

Per seconde neemt de x-coördinaat van de positie van het vliegtuig met 1 eenheid af, de y-coördinaat neemt met 2 eenheden toe en de z-coördinaat neemt met 1 eenheid toe.
Zo komen we 30 seconden na B terecht in C(–3,6,6).

b 60 seconden nadat het zich in B bevindt.

30 seconden na C komen we terecht in D(–4,8,7).

2 Een ander vliegtuig stijgt op vanuit de oorsprong met dezelfde snelheid en volgens dezelfde richting en zin als het vorige vliegtuig.

Wat is de coördinaat van de positie van dit vliegtuig 30 seconden na het opstijgen?

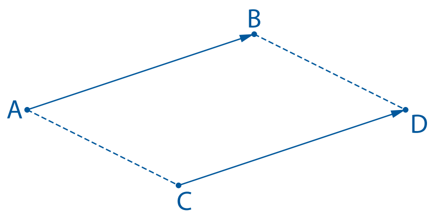
co(P) = (–1,2,1)

Opdracht 13 bladzijde 27

Gegeven: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ en C ligt niet op de rechte AB.

Schrijf nog drie andere paren gelijke vectoren, waarvan A, B, C en D begin- of eindpunt van een representant zijn.

Op een figuur is onmiddellijk te zien dat $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ en $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.



Opdracht 14 bladzijde 27

Gegeven zijn de punten $A(-1,3,3)$, $B(0,2,6)$, $C(1,-4,-2)$.

1 Bepaal de coördinaat van $\overrightarrow{AB}$ en van $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(1,-1,3)$ en $\overrightarrow{BC}(1,-6,-8)$

2 De vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$ zijn gelijk. Bepaal de coördinaat van D.

Stel co(D) = (x, y, z), dan is

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow$ (1,–1,3) = (x – 1, y + 4, z + 2)

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) = (2,–5,1)

De coördinaat van D is (2,–5,1).

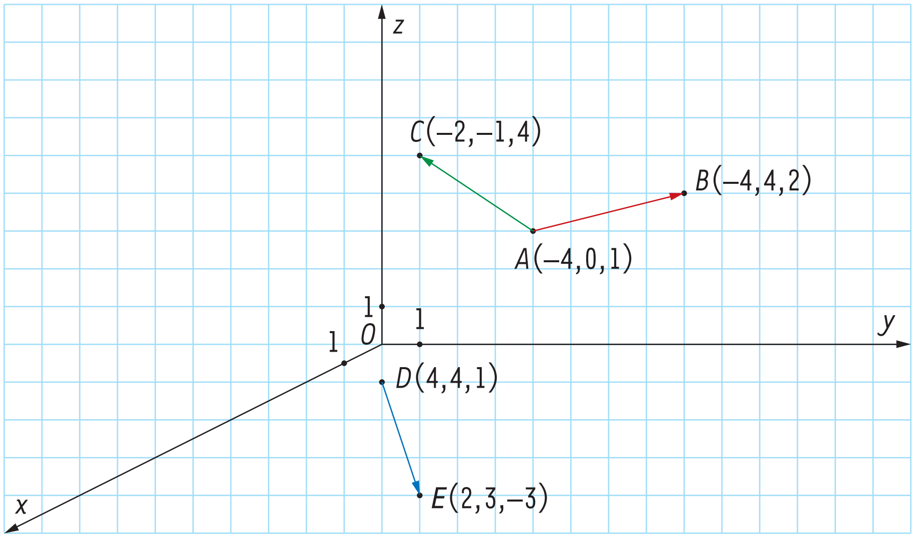
3 Bepaal de coördinaat van het beeld P van de oorsprong bij een verschuiving volgens $\overrightarrow{AD}$.

De coördinaat van $\overrightarrow{AD}$ is (3,–8,–2).

Aangezien $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OP}$, is co(P) = (3,–8,–2).

Opdracht 15 bladzijde 27

Gegeven de punten $A(-4,0,1)$, $B(-4,4,2)$, $C(-2,-1,4)$, $D(4,4,1)$ en $E(2,3,-3)$.



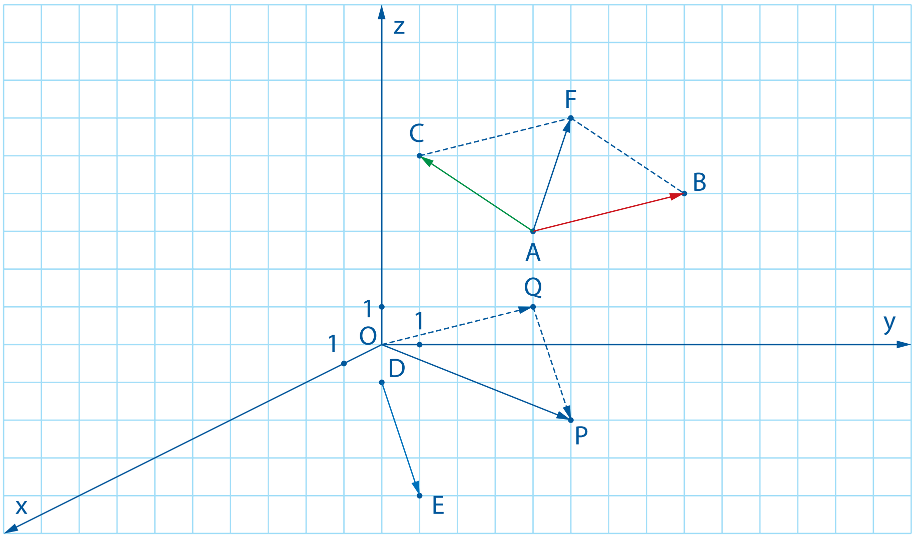
1 Bepaal de coördinaat van $\overrightarrow{AB}$ en van $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{AB}(0,4,1)$ en $\overrightarrow{DE}(-2,-1,-4)$

2 Verschuif de oorsprong volgens $\overrightarrow{AB}$ en verschuif het gevonden punt daarna volgens $\overrightarrow{DE}$.

Je komt in het punt P terecht. Construeer het punt P.

We noemen de vector $\overrightarrow{OP}$ de som van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{DE}$.



3 Bepaal de coördinaat van $\overrightarrow{OP}$.

$(0,4,1) + (-2,-1,-4) = (-2,3,-3) = \text{co}(\overrightarrow{OP})$

We tellen de afzonderlijke coördinaatgetallen op.

4 Construeer het punt F zodat $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

5 Bepaal de coördinaat van $\overrightarrow{AF}$.

$\text{co}(\overrightarrow{AF}) = \text{co}(\overrightarrow{AB}) + \text{co}(\overrightarrow{AC}) = (0,4,1) + (2,-1,3) = (2,3,4)$

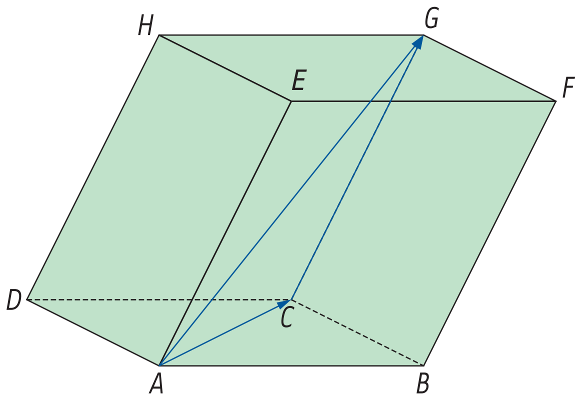
Opdracht 16 bladzijde 31

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een parallellepipedum.

Toon aan dat

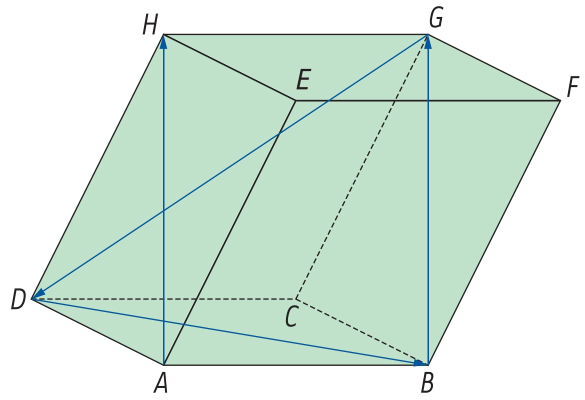
1 $\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AG}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AG}\end{aligned}$$



2 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{GG} = \vec{0}\end{aligned}$$



Opdracht 17 bladzijde 31

Bewijs dat voor vier willekeurige punten A, B, C en D van de ruimte geldt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Opdracht 18 bladzijde 31

Gegeven de punten $A(2,3,4)$, $B(0,-3,2)$ en $C(4,0,-6)$.

Bepaal de coördinaat van het punt D als $ABCD$ een parallellogram is.

Stel co(D) = (x, y, z)

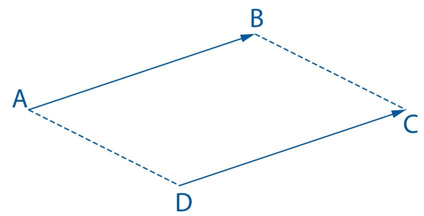
ABCD is een parallellogram

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow (-2,-6,-2) = (4-x, -y, -6-z)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (6, 6, -4)$

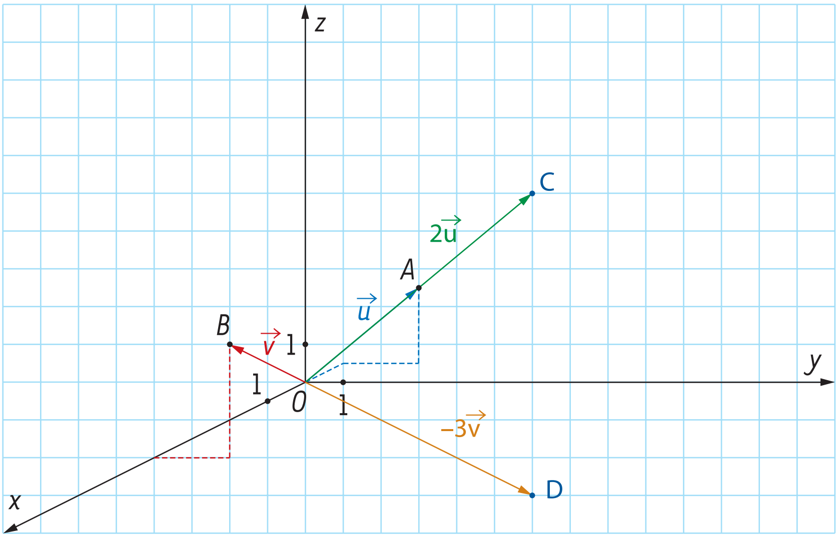
co(D) = (6,6,–4)



Opdracht 19 bladzijde 32

Gegeven de vectoren $\overrightarrow{OA} = \vec{u}(-1,2,2)$ en $\overrightarrow{OB} = \vec{v}(4,2,3)$.

1 Construeer de punten C en D zodanig dat $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OD} = -3 \cdot \overrightarrow{OB}$.



2 Bepaal de coördinaat van C en van D.

$\text{co}(\overrightarrow{OC}) = \text{co}(C) = (-2{,}4{,}4)$

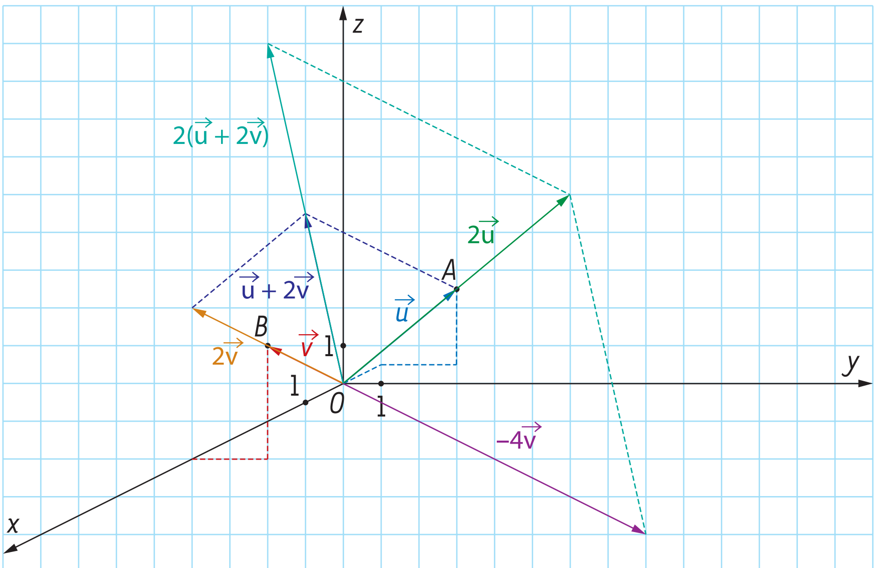
$\text{co}(\overrightarrow{OD}) = \text{co}(D) = (-12{,}-6{,}-9)$

3 Hoe zou je de uitdrukking $2 \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) - 4 \cdot \vec{v}$ kunnen vereenvoudigen?

Controleer op de figuur.

$2 \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) - 4 \cdot \vec{v} = 2\vec{u} + 4\vec{v} - 4\vec{v}$

$= 2\vec{u}$



Opdracht 20 bladzijde 35

Het trapezium $OABC$ heeft hoekpunten $O(0,0,0)$, $A(-4,2,-6)$ en $B(4,1,-3)$.
De zijde $[CB]$ is evenwijdig met $[OA]$ en heeft als lengte de helft van $|OA|$.

Bereken de coördinaat van C.

Stel co(C) = (x, y, z)

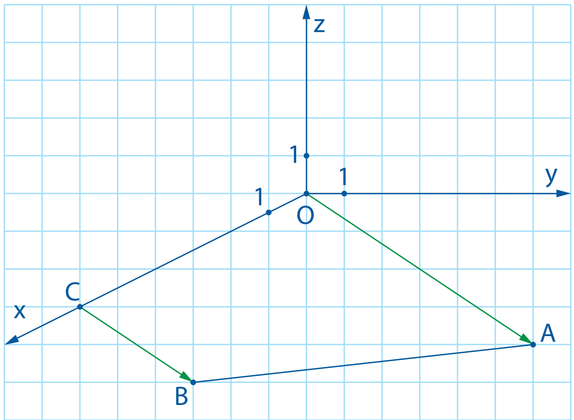
$\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow (-4,2,-6) = 2 \cdot (4 - x, 1 - y, -3 - z)$

$\Leftrightarrow (-4,2,-6) = (8 - 2x, 2 - 2y, -6 - 2z)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = (6,0,0)$

co(C) = (6,0,0)



Opdracht 21 bladzijde 35

Gegeven de punten $A(4,2,0)$, $B(4,0,6)$ en $C(0,-1,2)$.

Bepaal de coördinaat van P als

1 $\overrightarrow{PA} = 5\,\overrightarrow{BP}$

Stel co(P) = (x, y, z)

$\overrightarrow{PA} = 5 \cdot \overrightarrow{BP}$

$\Leftrightarrow (4 - x, 2 - y, -z) = 5 \cdot (x - 4, y, z - 6)$

$\Leftrightarrow (4 - x, 2 - y, -z) = (5x - 20, 5y, 5z - 30)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(4, \frac{1}{3}, 5\right)$

co(P) $= \left(4, \frac{1}{3}, 5\right)$

2 $\overrightarrow{PA} - 2\,\overrightarrow{PB} = 3\,\overrightarrow{PC}$

Stel co(P) = (x, y, z)

$\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PC}$

$\Leftrightarrow (4 - x, 2 - y, -z) - 2 \cdot (4 - x, -y, 6 - z) = 3 \cdot (-x, -1 - y, 2 - z)$

$\Leftrightarrow (x - 4, y + 2, z - 12) = (-3x, -3 - 3y, 6 - 3z)$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(1, -\frac{5}{4}, \frac{9}{2}\right)$

co(P) $= \left(1, -\frac{5}{4}, \frac{9}{2}\right)$

Opdracht 22 bladzijde 40

Als Z het zwaartepunt is van ΔABC, toon dan aan dat $\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{CZ}=\vec{0}$.

Stel P is een willekeurig punt van de ruimte, dan is

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{CZ}&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PZ}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PZ}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PZ}\\&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+3\cdot\overrightarrow{PZ}\\&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+3\cdot\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\\&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\\&=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{CC}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

Opdracht 23 bladzijde 40

$Z\left(\frac{1}{4},0,1\right)$ is het zwaartepunt van het viervlak $ABCD$ met $A(0,5,7)$ en $M(-3,5,-1)$ het midden van $[BC]$.

Bepaal de coördinaat van D.

Stel co(D) = (x, y, z)

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(1,0,4)-(0,5,7)-(-6,10,-2)$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(7,-15,-1)$$

co(D) = (7,–15,–1)

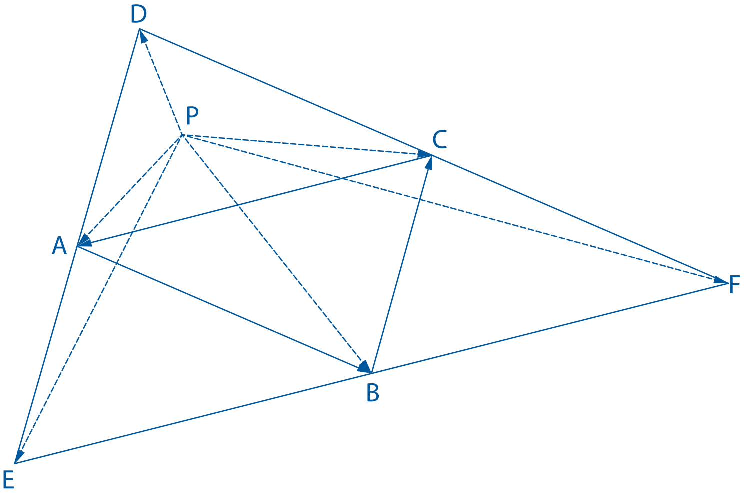
Opdracht 24 bladzijde 40

Beschouw een driehoek ABC en een willekeurig punt P.

1 Construeer de punten D, E en F zodanig dat $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB}$.

De constructies gebeuren met de regel van het parallellogram.

$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC}$ (1), $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CA}$ (2) en $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB}$ (3).



2 Bewijs dat de punten A, B en C de middens zijn van de zijden van ΔDEF.

Om te bewijzen dat A het midden is van [DE] tonen we aan dat $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PA} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$$

Door aan te tonen dat $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$ bewijzen we dat B het midden is van [EF]:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PB} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PF} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$$

Tenslotte bewijzen we dat $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$ waaruit volgt dat C het midden is van [DF]:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PC} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PF} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$$

3 Bewijs: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}$.

Uit (1), (2) en (3) volgt:

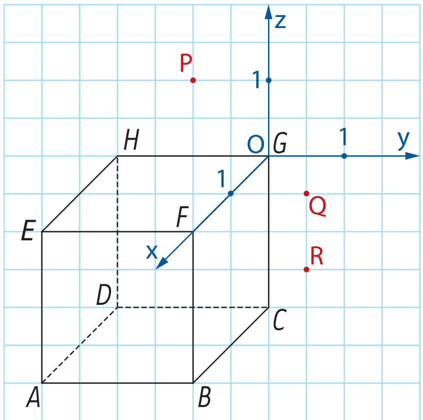
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}_{= \overrightarrow{AA} = \vec{0}} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \end{aligned}$$

Opdracht 25 bladzijde 43

De ribbe van de getekende kubus is 2 eenheden lang.

1 Teken in de figuur een orthonormaal assenstelsel waarin $(2,-2,-2)$ de coördinaat van het punt A is.
Neem hierbij de x-as evenwijdig met DA, de y-as evenwijdig met DC en de z-as evenwijdig met DH.

2 Teken in dat assenstelsel de punten $P(0,-1,1)$, $Q(1,1,0)$ en $R(-1,0,-2)$.



Opdracht 26 bladzijde 43

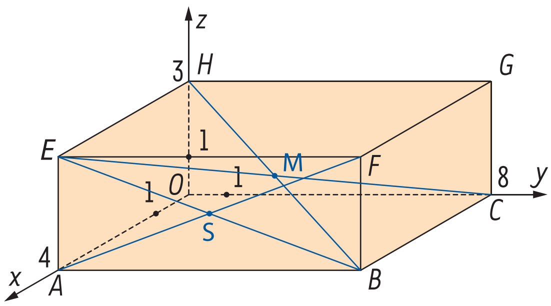
Gegeven de balk $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ in het getekende orthonormaal assenstelsel.

1 Bepaal de coördinaat van de punten A en F.

A(4,0,0) en F(4,8,3)

2 Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van $[AF]$ en $[BE]$.

$S\left(4,4,\frac{3}{2}\right)$



3 Bepaal de coördinaat van het snijpunt M van de lichaamsdiagonalen.

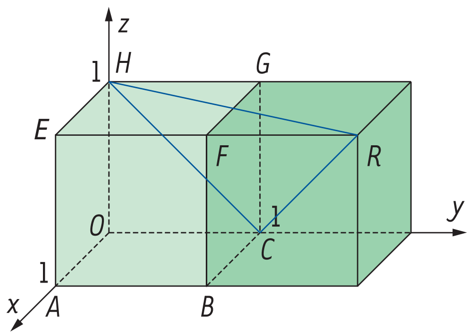
$M\left(2,4,\frac{3}{2}\right)$

4 Naar welk hoekpunt van de balk moet je het assenstelsel verschuiven, opdat alle hoekpunten uitsluitend negatieve coördinaten zouden hebben?

Naar F.

Opdracht 27 bladzijde 44

In een orthonormaal assenstelsel zijn twee kubussen getekend.
De lengte van elke ribbe van de twee gelijke kubussen is 1 eenheid.



1 Bepaal de coördinaat van de punten C, H en R.

C(0,1,0), H(0,0,1) en R(1,2,1)

2 Bereken $|CR|$, $|HR|$ en $|HC|$.

$$|CR| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$|HC| = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|HR| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}$$

3 Is de driehoek HCR rechthoekig? Toon aan.

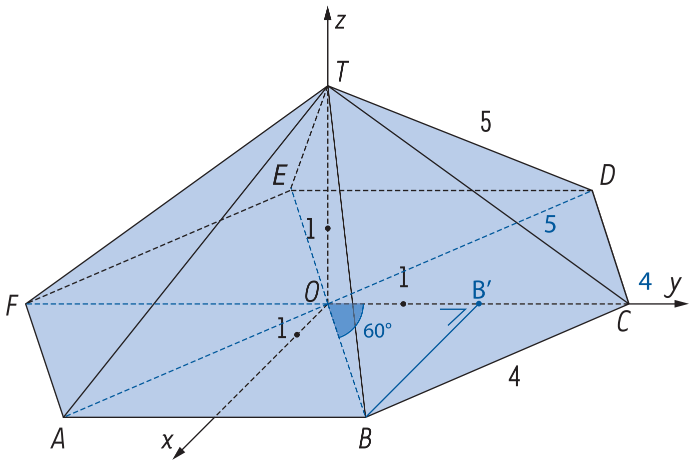
$$|HR|^2 = |CR|^2 + |HC|^2$$

$\Rightarrow$ de driehoek HCR is rechthoekig in C.

Opdracht 28 bladzijde 44

Het grondvlak *ABCDEF* van de zeszijdige piramide met top *T* ligt in het *xy*-vlak.
De hoekpunten *C* en *F* liggen op de *y*-as en de top *T* ligt op de *z*-as.
Het grondvlak is een regelmatige zeshoek met zijde 4.
De opstaande ribben van de piramide hebben 5 als lengte.

Bepaal de coördinaat van elk van de hoekpunten.



– De middelpuntshoek van een regelmatige zeshoek is 60°, zodat die kan verdeeld worden in 6 gelijkzijdige driehoeken.

  Hieruit volgt onmiddellijk: C(0,4,0) en F(0,–4,0).

– In de driehoek OBB′ lezen we de coördinaatgetallen van B af:

  B(4 sin 60°, 4 cos 60°,0) of B($2\sqrt{3}$,2,0).

– Uit de symmetrie van de zeshoek volgt dan: A($2\sqrt{3}$,–2,0), D($-2\sqrt{3}$,2,0) en E($-2\sqrt{3}$,–2,0).

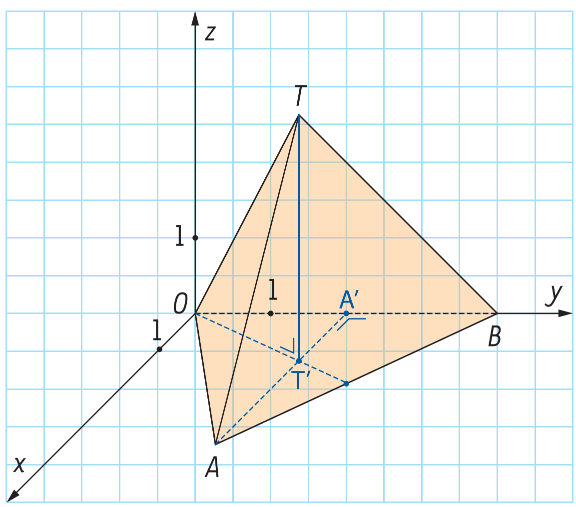
- In de rechthoekige driehoek OTC kunnen we de z-coördinaat van T berekenen:

  $T\left(0,0,\sqrt{5^2-4^2}\right)$ of T(0,0,3).

Opdracht 29 bladzijde 44

In het getekende orthonormaal assenstelsel staat een regelmatig viervlak *TOAB*. De lengte van alle ribben van het viervlak is vier eenheden.

Het grondvlak *OAB* ligt in het *xy*-vlak. De top *T* ligt loodrecht boven het zwaartepunt van de driehoek *OAB*.



Bepaal de coördinaat van

1 het punt *A*

De driehoek OAB is gelijkzijdig.

Bijgevolg is $y_A = |OA'| = 2$ en

$x_A = |AA'| = \sqrt{|OA|^2 - |OA'|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

De coördinaat van A is ($2\sqrt{3}$,2,0).

2 het punt T

In de driehoek OAB is T′ het zwaartepunt.

Bijgevolg is $x_T = \frac{1}{3} x_A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$y_T = y_{T'} = y_A = 2$.

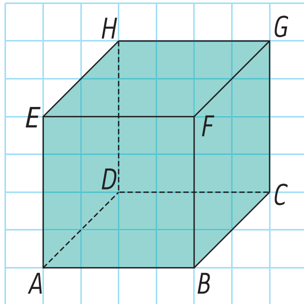
In de rechthoekige driehoek OTT′ vinden we

$$z_T = |TT'| = \sqrt{|OT|^2 - |OT'|^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

De coördinaat van T is $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

Opdracht 30 bladzijde 45

Teken een viervlak $TCDP$ dat in de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 2 staat en aan de volgende vier voorwaarden voldoet.

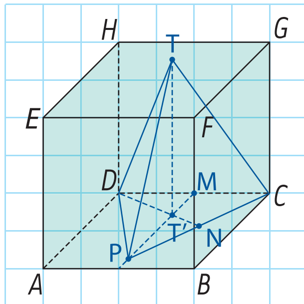


- Het grondvlak van het viervlak is een gelijkzijdige driehoek CDP.
- Het punt P ligt in het grondvlak $ABCD$ van de kubus.
- De top T ligt loodrecht boven het zwaartepunt van de driehoek CDP.
- De hoogte van het viervlak is gelijk aan de lengte van de ribben van het grondvlak.

De gelijkzijdige driehoek CDP met zijde 2 is het grondvlak van het viervlak TCDP.

Noem M het midden van [DC]. De hoogtelijn uit P op [DC] gaat door M en is evenwijdig met AD.

We kunnen deze hoogtelijn tekenen. Om precies te weten waar P zich op deze hoogtelijn bevindt, berekenen we $|PM|$ in de driehoek PMC:



$$|PM| = \sqrt{|PC|^2 - |MC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Aangezien $\sqrt{3} \approx 0{,}87 \cdot 2$ kan het punt P uitgezet worden, op een afstand van $0{,}87 \cdot |AD|$ gemeten vanaf M.

De hoogte van het viervlak is gelijk aan de lengte van de ribben van de kubus. Het zwaartepunt van de gelijkzijdige driehoek CDP is het snijpunt T′ van de zwaartelijnen. T ligt loodrecht boven T′, we tekenen dus door T′ een verticale en meten $|TT'| = 2$.

Opdracht 31 bladzijde 45

Gegeven de punten $A(2,0,-2)$ en $B(0,-2,1)$.

Bepaal de coördinaat van het punt C als je weet dat C op de z-as ligt en de afstand van C tot A de helft is van de afstand van C tot B.

- Stel co(C) = (0, 0, k)
- $|CA| = \frac{1}{2}|CB|$

  $\Leftrightarrow 4|CA|^2 = |CB|^2$

  $\Leftrightarrow 4\left((2-0)^2 + (0-0)^2 + (-2-k)^2\right) = (0-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-k)^2$

  $\Leftrightarrow 16 + 16 + 16k + 4k^2 = 4 + 1 - 2k + k^2$

  $\Leftrightarrow 3k^2 + 18k + 27 = 0$

  $\Leftrightarrow k = -3$
- Besluit: co(C) = (0,0,–3)

Opdracht 32 bladzijde 45

Gegeven de punten $A(-3,0,4)$ en $B(-5,4,2)$.

Bepaal de coördinaat van het punt C als je weet dat de driehoek ABC gelijkzijdig is en C in het xy-vlak ligt.

- Stel co(C) = (a, b, 0)
- $|AB| = \sqrt{(-5+3)^2 + (4-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{24}$
- $|AC| = |BC|$

  $\Leftrightarrow |AC|^2 = |BC|^2$

  $\Leftrightarrow (a+3)^2 + b^2 + (0-4)^2 = (a+5)^2 + (b-4)^2 + 4$

  $\Leftrightarrow 6a + 9 + 16 = 10a + 25 - 8b + 16 + 4$

  $\Leftrightarrow 8b = 20 + 4a$

  $\Leftrightarrow a = 2b - 5 \qquad (1)$
- $|AC| = \sqrt{24}$

  $\Leftrightarrow |AC|^2 = 24$

  $\Leftrightarrow (a+3)^2 + b^2 + (0-4)^2 = 24$

  $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (2b-2)^2 + b^2 + (0-4)^2 = 24$

  $\Leftrightarrow 4b^2 - 8b + 4 + b^2 + 16 = 24$

  $\Leftrightarrow 5b^2 - 8b - 4 = 0$

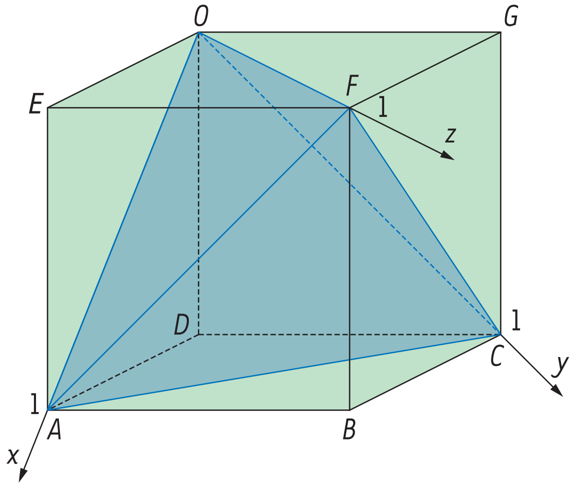
  $\Leftrightarrow b = 2 \text{ of } b = -\frac{2}{5}$
- Uit (1) volgt dan voor b = 2 dat a = –1 en voor $b = -\frac{2}{5}$ dat $a = -\frac{29}{5}$.
- Besluit: $co(C) = (-1,2,0)$ of $\left(-\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right)$

Opdracht 33 bladzijde 45

In de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & O \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ bevindt zich het regelmatige viervlak *OACF*.

De ribben $[OA]$, $[OC]$ en $[OF]$ van het viervlak liggen op de coördinaatassen van het gegeven affien assenstelsel.

De eenheid op elke coördinaatas is de lengte van de ribben van het viervlak.

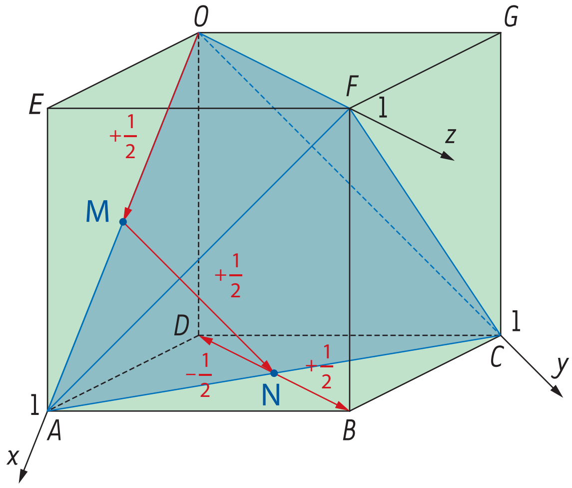


1 Bepaal de coördinaat van de hoekpunten van het viervlak *OACF* in het affien assenstelsel.

Deze punten liggen op de coördinaatassen en zijn dus rechtstreeks af te lezen:

O(0,0,0), A(1,0,0), C(0,1,0) en F(0,0,1).

2 Bepaal de coördinaat van *B* en van *D* in het affien assenstelsel.

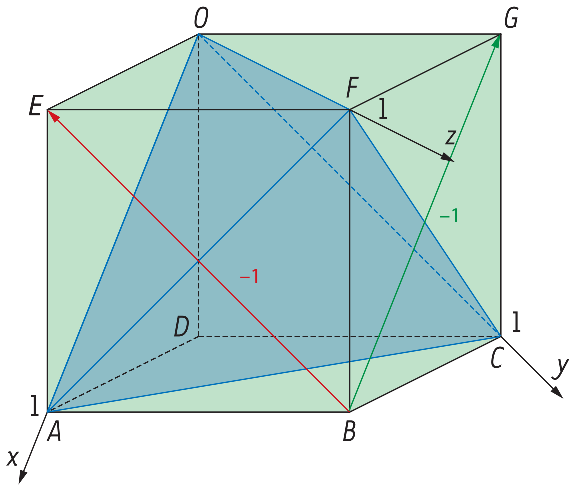


Beschouw het midden M van [OA] en het midden N van [DB]. De coördinaat van M is $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ en die van N is $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

Vanuit N kunnen we evenwijdig met de z-as (OF) in B en D geraken.

Bijgevolg is B$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ en D$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

3 Bepaal de coördinaat van *E* en van *G* in het affien assenstelsel.



We kunnen gebruik maken van de coördinaat van B om die van E en die van G te bepalen.

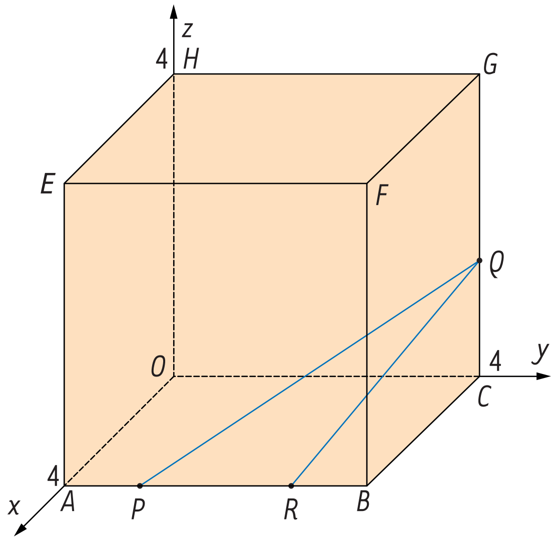
Van B naar E moeten we 1 eenheid in de richting van de negatieve y-as.

Hieruit volgt: E$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Van B naar G moeten we 1 eenheid in de richting van de negatieve x-as.

Hieruit volgt: G$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Opdracht 34 bladzijde 46



Gegeven is de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4, het punt $P(4,1,0)$ en het punt $R(4,3,0)$.
Q is een punt op de ribbe $[CG]$.

1 Bereken de kleinst mogelijke waarde van $|PQ|-|RQ|$.

Stel $\text{co}(Q) = (0,4,k)$ met $0 \leqslant k \leqslant 4$

$$\begin{aligned} |PQ|-|RQ| &= \sqrt{(0-4)^2+(4-1)^2+(k-0)^2} \\ &\quad - \sqrt{(0-4)^2+(4-3)^2+(k-0)^2} \\ &= \sqrt{25+k^2}-\sqrt{17+k^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{25+k^2}-\sqrt{17+k^2}\right)\left(\sqrt{25+k^2}+\sqrt{17+k^2}\right)}{\sqrt{25+k^2}+\sqrt{17+k^2}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{25+k^2}+\sqrt{17+k^2}} \end{aligned}$$

De noemer van deze uitdrukking noemt toe als k toeneemt ($0 \leqslant k \leqslant 4$).
Deze uitdrukking is bijgevolg minimaal als $k = 4$, dan is $|PQ|-|RQ| = \sqrt{41}-\sqrt{33}$.

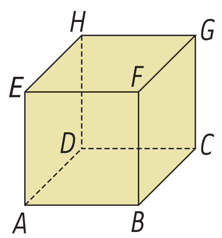
2 Bereken de grootst mogelijke waarde van $|PQ|-|RQ|$.

Opdat $|PQ|-|RQ| = \dfrac{8}{\sqrt{25+k^2}+\sqrt{17+k^2}}$ zo groot mogelijk zou zijn, moet de noemer minimaal zijn.

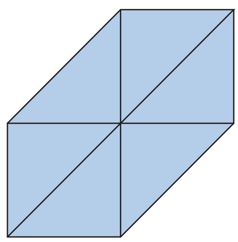
Dit minimum vinden we bij $k = 0$, dan is $|PQ|-|RQ| = 5-\sqrt{17}$.

Opdracht 35 bladzijde 46

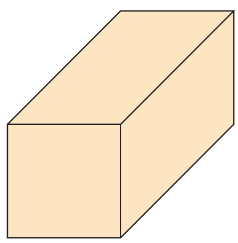
Onmogelijke figuren en de kunst van M. C. Escher



In de tekeningen hiernaast is een kubus in parallelperspectief getekend volgens verschillende vertekeningen.

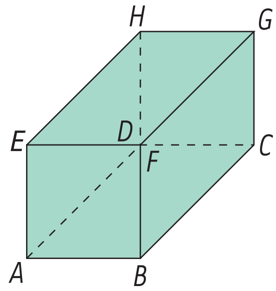


Wat er in de kubus hiernaast is afgebeeld, ervaar je waarschijnlijk niet als ruimtelijk. Je zult er een zeshoek in zien, opgebouwd uit congruente rechthoekige driehoeken.



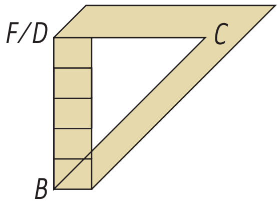
Laten we drie lijnstukjes weg, zoals op de tekening hiernaast is gebeurd, dan suggereert de tekening wel een ruimtelijk voorwerp.

Gebruiken we stippellijnen voor de onzichtbare ribben, dan versterkt dat de driedimensionale interpretatie nog.
Dat in de tekening de punten D en F samenvallen, alhoewel het in werkelijkheid twee verschillende punten zijn, blijft echter storend voor de ruimtelijke indruk die de tekening moet geven.



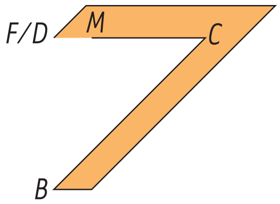
Anderzijds kun je dit samenvallen van punten, die in werkelijkheid verschillend zijn, gebruiken om 'onmogelijke figuren' te tekenen: ogenschijnlijk driedimensionale bouwsels die je wel op een plat vlak kunt tekenen, maar die in werkelijkheid onmogelijk kunnen bestaan.

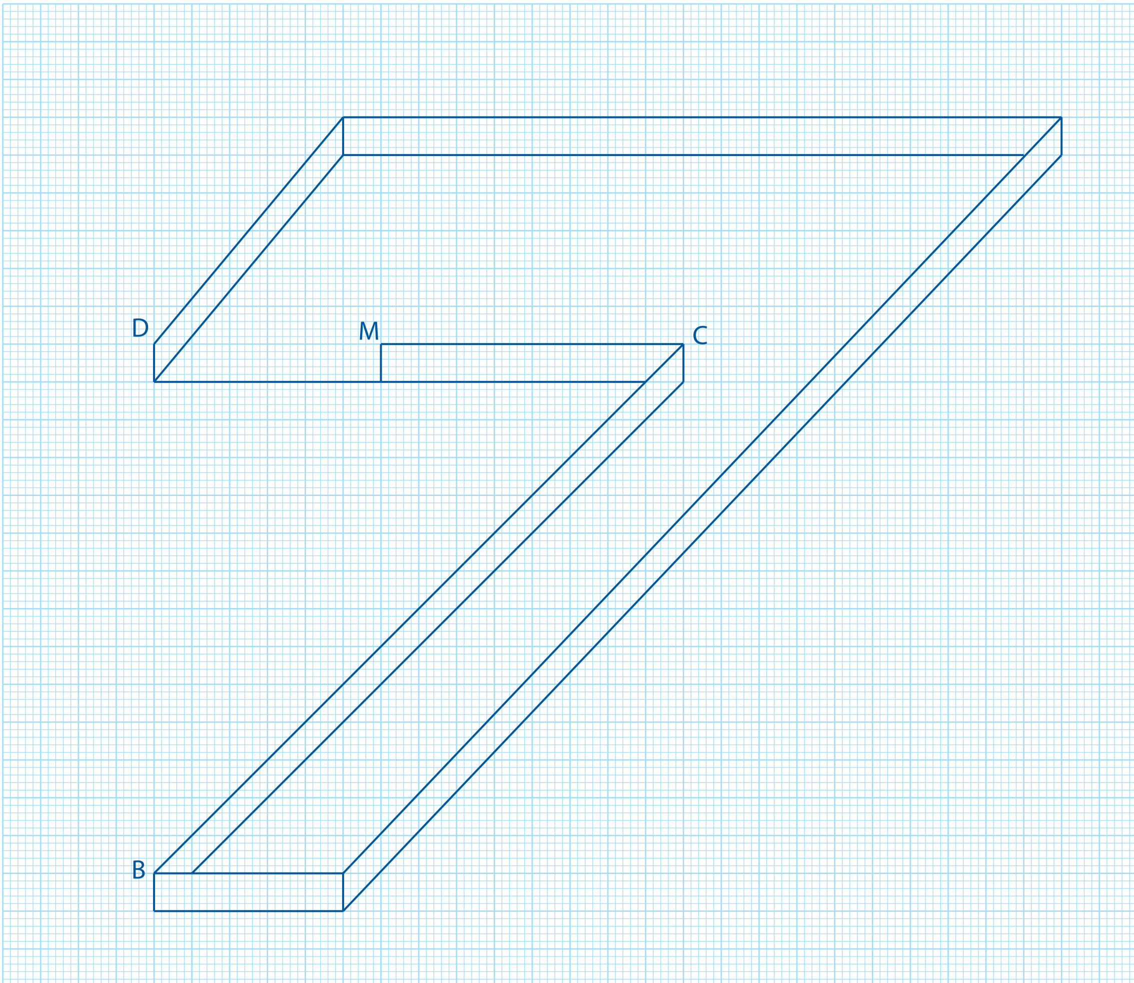
Neem je de ribben $[BF]$, $[BC]$ en $[CD]$ uit de bovenstaande balk en maak je gebruik van het samenvallen van D en F, dan heb je de basis van een onmogelijke figuur.



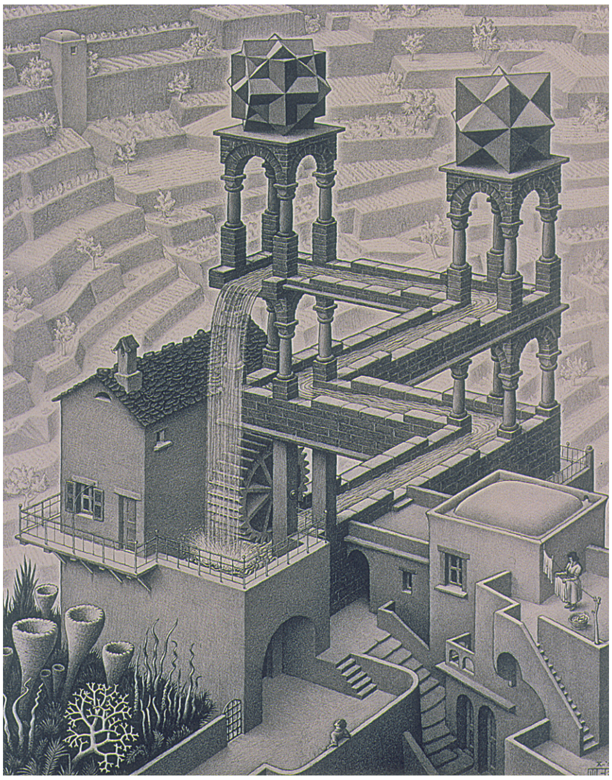
1 Teken, vertrekkend van deze figuur, een waterkanaal met een rechthoekige doorsnede waarbij de diepte een vijfde van de breedte is. Het kanaal is gesloten, behalve aan de bovenkant tussen D en M.

Vervang de ladder uit de voorgaande onmogelijke figuur in jouw tekening door een waterval.





De Nederlandse graficus M.C. Escher heeft virtuoze prenten gemaakt met onmogelijke figuren. Een van dergelijke prenten is de litho ‘Waterval’.



M.C. Escher's “Waterval” © 2017
The M.C. Escher Company B.V. - Baarn - Holland.
Alle rechten voorbehouden. www.mcescher.nl

2 Wie zich in de prent wil verdiepen, kan zich laten leiden door de volgende vragen.

- Is deze prent getekend in parallelperspectief?
- Wanneer wij een kubus tekenen, tekenen we twee evenwijdige zijvlakken van de kubus in ware vorm. Heeft Escher in deze prent muren van gebouwen in ware vorm getekend?
- De bodem van het waterkanaal is in werkelijkheid horizontaal. Waarom?
- Is de zichtbaarheid van het waterrad ten opzichte van het waterkanaal juist?
- Is de zichtbaarheid van het watermolengebouw ten opzichte van het waterkanaal juist?
- Waar in de prent heeft Escher rechten die in werkelijkheid kruisend zijn, bewust als snijdend voorgesteld? Wat wil hij daarmee bereiken?
- Escher heeft in zijn prenten vaak regelmatige ruimtelijke lichamen verwerkt. In deze prent zijn er twee getekend als versiering. Uit welke elkaar doordringende lichamen zijn ze hier opgebouwd?

We beschouwen de gebouwen vanuit het standpunt van de persoon die boven het midden van de onderrand van de prent is getekend: het watermolengebouw en het waterkanaal bevinden zich voor, boven en rechts van deze persoon.
Het waterkanaal verandert driemaal van richting: het waterkanaal begint ter plaatse van het waterrad en een eerste kanaaldeel loopt van links naar rechts, na een eerste bocht loopt het tweede kanaaldeel van voor naar achter, na een tweede bocht loopt het derde kanaaldeel van links naar rechts, na een derde bocht loopt het vierde kanaaldeel van voor naar achter.

Deze prent is niet getekend in parallelperspectief, maar wel in lijnperspectief (zie paragraaf 10.1 in Delta Nova 4B). Evenwijdige rechten in de ruimte blijven in parallelperspectief evenwijdig in de tekening, bij lijnperspectief zullen ze in de tekening elkaar snijden in een punt, het vluchtpunt. Wanneer de rechten echter evenwijdig zijn met het projectievlak blijven ze ook in lijnperspectief evenwijdig in de tekening. Alleen de verticale ribben van de gebouwen en bouwsels zijn in de prent evenwijdig. Andere evenwijdige ribben van gebouwen en bouwsels liggen in de prent op lijnen die elkaar snijden in een vluchtpunt.

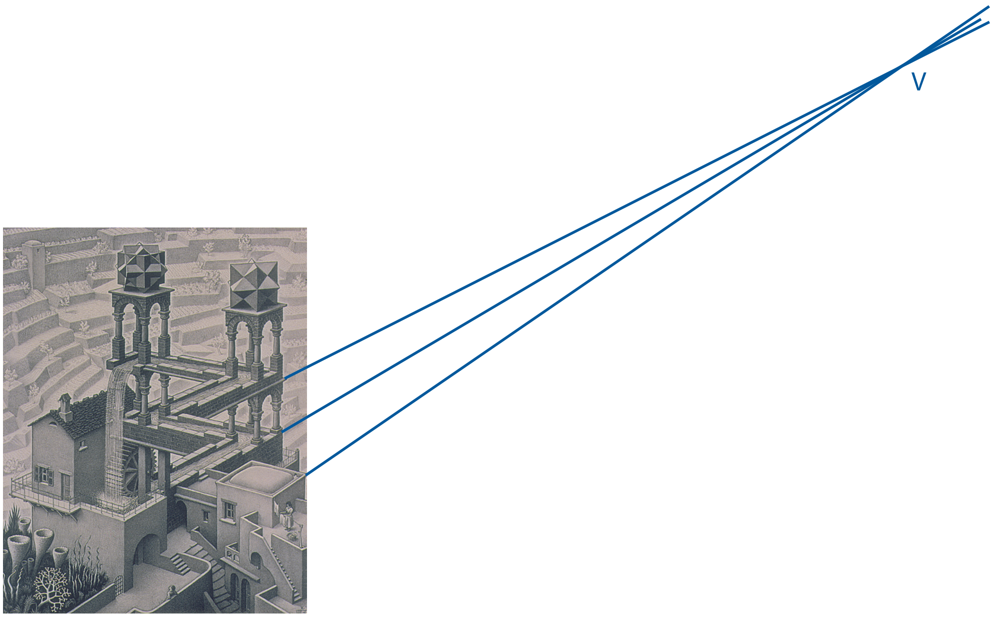
In deze prent zijn er geen muren van gebouwen in ware vorm getekend: twee snijdende zijden van een muur staan in werkelijkheid loodrecht op elkaar, de in de prent getekende muren hebben geen loodrecht snijdende zijden.

De bodem van het waterkanaal is horizontaal.
We kunnen aannemen dat de verticale muren van het gebouw waaraan de waslijn is bevestigd onderling loodrecht op elkaar staan, en evenwijdig zijn met muren van de onderbouw waarop het watermolengebouw staat. Van de bovenste randen van deze muren kunnen we aannemen dat ze in horizontale vlakken liggen.
Er is dus een horizontale ribbe van het eerst vermelde gebouw die evenwijdig is met een horizontale ribbe van de onderbouw. Wanneer we op de prent deze ribben verlengen vinden we het vluchtpunt V van de evenwijdige horizontale rechten waarop die ribben liggen. Ook voor de horizontale, evenwijdige ribben die loodrecht staan op die twee ribben vinden we een vluchtpunt.
Wanneer we ribben van de onderkant van het waterkanaal op de prent verlengen, gaan die lijnen door de gevonden vluchtpunten: die ribben zijn dus horizontaal en evenwijdig met de eerder vermelde ribben.
Twee snijdende ribben van de onderkant van het waterkanaal zijn dus in werkelijkheid horizontalen, zodat de onderkant van het waterkanaal een horizontaal vlak is.

Bovendien staan die twee ribben in werkelijkheid loodrecht op elkaar, zodat in elke bocht van het waterkanaal de twee kanaaldelen loodrecht op elkaar staan.

Het waterrad staat aan het begin van het waterkanaal, het eerste kanaaldeel loopt horizontaal van links naar rechts, het tweede kanaaldeel staat loodrecht op het eerste en loopt horizontaal van voor naar achter. Het waterrad staat dus boven, links van en voor het tweede kanaaldeel, evenals de muur van het watermolengebouw die het waterrad ondersteunt. In werkelijkheid verbergen waterrad en watermolengebouw het tweede kanaaldeel. Door bewust een fout te maken tegen de zichtbaarheid creëert Escher de illusie dat het waterrad lager staat dan de bodem van het tweede kanaaldeel, en bereikt daarmee dat we er op het eerste gezicht de conclusie aan vastbinden dat het waterkanaal stijgt.

Ter plaatse van de eerste en de tweede bocht in het waterkanaal tekent Escher telkens vier zuiltjes. De acht zuiltjes staan op het tweede deel van het waterkanaal en kunnen in werkelijkheid onmogelijk het derde en het vierde kanaaldeel ondersteunen omdat in de tweede bocht het kanaal van richting verandert. Toch laat Escher in de prent de lijnen van de zuiltjes en van de bogen die gedragen worden door zuiltjes, eindigen op lijnen van de bodem van het derde of vierde kanaaldeel. Hij wekt hierdoor de illusie dat de zuiltjes het derde en vierde kanaaldeel ondersteunen en bereikt daarmee dat we er op het eerste gezicht de conclusie aan vastbinden dat het waterkanaal stijgt.



Het ruimtelijk lichaam boven het einde van het waterkanaal bestaat uit drie elkaar doordringende kubussen. Van een eerste kubus zijn vier evenwijdige ribben verticalen. Van een tweede kubus zijn vier evenwijdige ribben evenwijdig met een diagonaal van het bovenvlak van de eerste kubus: een ribbe en de tegenoverstaande ribbe (tegenoverstaande ribben van een kubus zijn evenwijdig en liggen niet in hetzelfde zijvlak) van de tweede kubus liggen samen met die diagonaal in een verticaal vlak; van de twee andere ribben valt het midden telkens samen met het midden van een verticale ribbe van de eerste kubus. Een derde kubus neemt een gelijkaardige stand in als de tweede, maar nu met vier evenwijdige ribben die evenwijdig zijn met de andere diagonaal van het bovenvlak van de eerste kubus.

Het ruimtelijk lichaam boven de derde bocht in het waterkanaal bestaat uit drie elkaar doordringende regelmatige achtvlakken. Een achtvlak heeft zes hoekpunten, waarvan er vier de hoekpunten van een vierkant zijn. De drie achtvlakken zijn zo geschikt dat de drie vierkanten onderling loodrecht op elkaar staan en dat de middens van de twee evenwijdige zijden van een vierkant samenvallen met de middens van de twee evenwijdige zijden van een ander vierkant.

Opdracht 36 bladzijde 49

Bewijs dat voor vier willekeurige punten A, B, C en D van de ruimte geldt:

1 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} + 2\,\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2 $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

3 $2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{DA} - 7\,\overrightarrow{CD} = 10\,\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC} + 8\,\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA} - 7\overrightarrow{CD} &= 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BA} + 7\overrightarrow{DC} \\
&= 3\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + 7\overrightarrow{DC} \\
&= 3\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + 7\overrightarrow{DB} + 7\overrightarrow{BC} \\
&= 10\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + 7\overrightarrow{BC} \\
&= 10\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + 7\overrightarrow{BC} \\
&= 10\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + 8\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

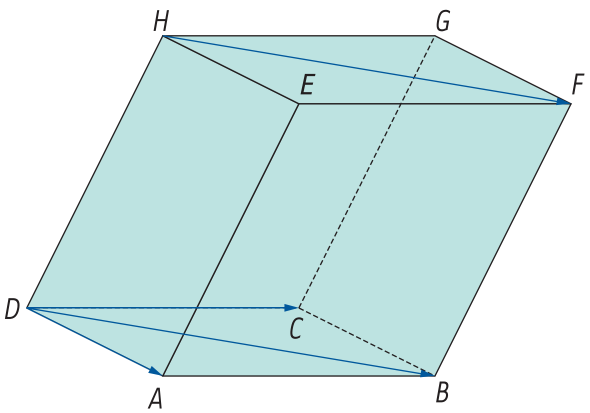
Opdracht 37 bladzijde 49

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een parallellepipedum.

Schrijf als een vector:

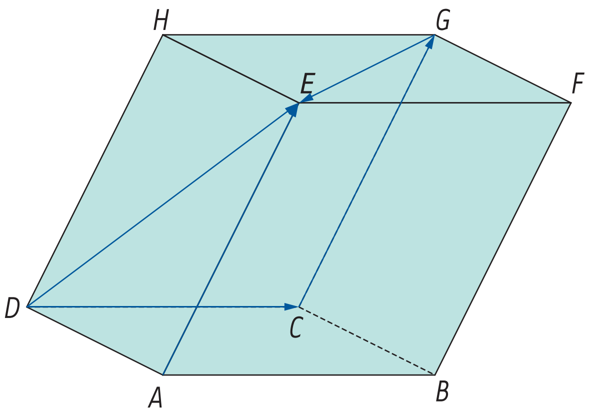
1 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HF}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HF} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{HF} \\
&= 2\overrightarrow{DB} \quad (\text{of } 2\overrightarrow{HF})
\end{aligned}$$



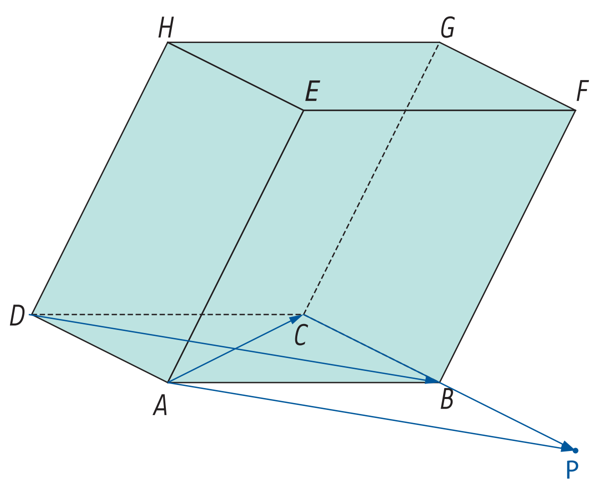
2 $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EA}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{AE} \\
&= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG} \\
&= \overrightarrow{DE}
\end{aligned}$$



3 $\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{BC}$

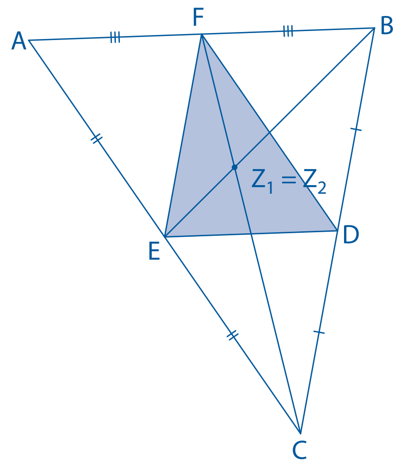
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$



Opdracht 38 bladzijde 49

In een driehoek ABC zijn D, E en F respectievelijk de middens van $[BC]$, $[AC]$ en $[AB]$.

Bewijs dat ΔABC en ΔDEF hetzelfde zwaartepunt hebben.



– Noem Z_1 het zwaartepunt van ΔABC, dan geldt voor elk punt P van de ruimte:

$$\overrightarrow{PZ_1} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \qquad (1)$$

– Noem Z_2 het zwaartepunt van ΔDEF, dan geldt voor elk punt P van de ruimte:

$$\overrightarrow{PZ_2} = \frac{\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}}{3}$$

Omdat D, E en F respectievelijk de middens van [BC], [AC] en [AB] zijn, geldt dan ook:

$$\overrightarrow{PZ_2} = \frac{\frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2} + \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}}{2} + \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}}{3} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \qquad (2)$$

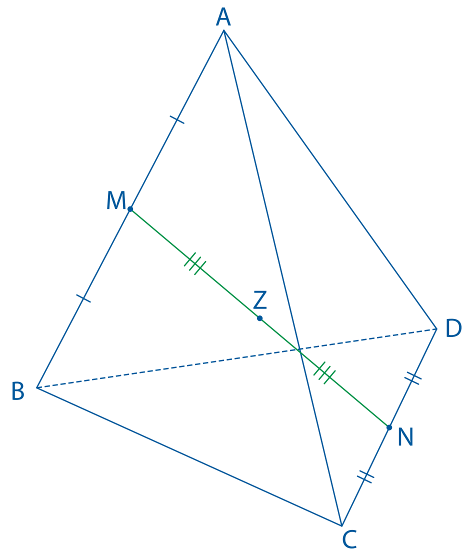
– Uit (1) en (2) volgt: $Z_1 = Z_2$.

Opdracht 39 bladzijde 49

M en *N* zijn de middens van twee overstaande ribben van een viervlak *ABCD*.

Toon aan dat het midden van $[MN]$ het zwaartepunt is van het viervlak.

Noem M het midden van [AB], N het midden van [CD] en Z het midden van [MN], dan geldt voor elk punt P van de ruimte:



$$\overrightarrow{PZ} = \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} + \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2}}{2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{4}$$

Bijgevolg is Z het zwaartepunt van het viervlak ABCD.

Opdracht 40 bladzijde 49

In het viervlak *ABCD* zijn *M*, *N*, *P* en *Q* de middens van respectievelijk $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ en $[DA]$.

Toon aan dat $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

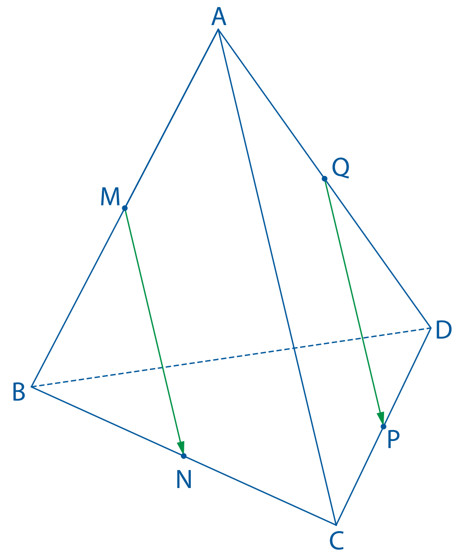
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP}$$

$$= \overrightarrow{QP}$$



Opdracht 41 bladzijde 49

$Z(1,2,3)$ is het zwaartepunt van de driehoek ABC met $A(1,-2,7)$ en $B(2,1,-4)$.

Bepaal de coördinaat van C.

Stel co(C) = (x, y, z)

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow\ (x, y, z) = (3,6,9) - (1,-2,7) - (2,1,-4)$$

$$\Leftrightarrow\ (x, y, z) = (0,7,6)$$

Besluit: co(C) = (0,7,6)

Opdracht 42 bladzijde 49

Gegeven de punten $P(-4,a,b)$, $Q(4,-2,4)$ en $R(2,1,7)$.

Bepaal a en b als

1 $\overrightarrow{QP} = 4\,\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{QP} = 4 \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$\Leftrightarrow (-8, a+2, b-4) = 4 \cdot (-2,3,3)$$

$$\Leftrightarrow (-8, a+2, b-4) = (-8,12,12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 16 \end{cases}$$

2 P, Q en R collineair zijn

P, Q en R zijn collineair

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = k \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$\Leftrightarrow (-8, a+2, b-4) = k \cdot (-2,3,3)$$

$$\Leftrightarrow (-8, a+2, b-4) = (-2k, 3k, 3k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ a = 10 \\ b = 16 \end{cases}$$

Opdracht 43 bladzijde 50

Gegeven een (niet-regelmatige) piramide met top T en grondvlak $ABCD$. Z_1 is het zwaartepunt van het viervlak $TABC$ en Z_2 is het zwaartepunt van het viervlak $TABD$.

Toon aan dat $\overrightarrow{Z_1Z_2} = k \cdot \overrightarrow{DC}$ en bepaal k.

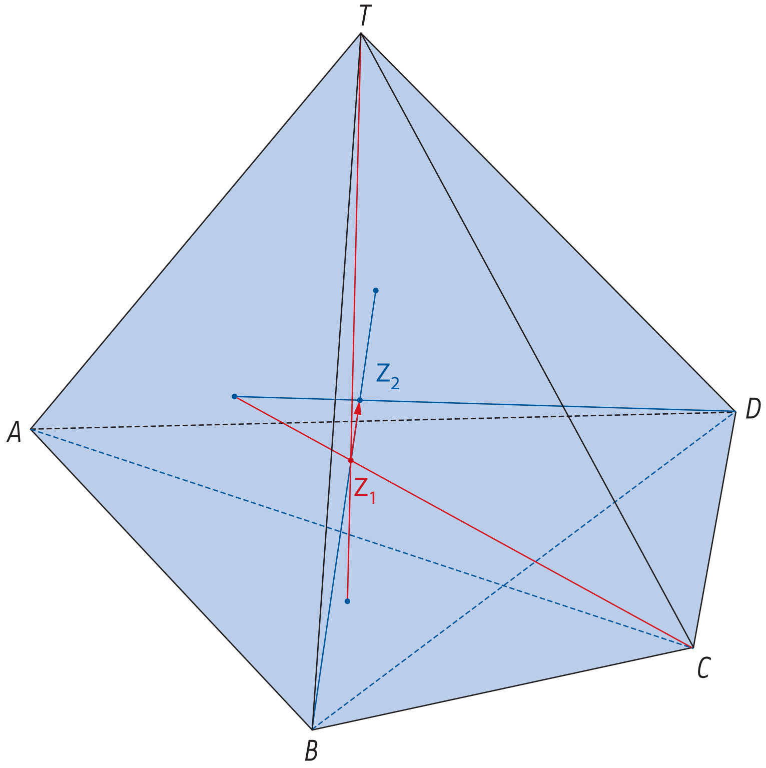
Uit de gegevens volgt voor een willekeurig punt P van de ruimte dat

$\overrightarrow{PZ_1} = \dfrac{\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{4}$ en $\overrightarrow{PZ_2} = \dfrac{\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{4}$.

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Z_1Z_2} &= \overrightarrow{Z_1P}+\overrightarrow{PZ_2} = \overrightarrow{PZ_2}-\overrightarrow{PZ_1}\\
&= \frac{\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{4} - \frac{\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{4}\\
&= \frac{\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PC}}{4} = \frac{\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{CP}}{4} = \frac{\overrightarrow{CD}}{4} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

zodat $k = -\dfrac{1}{4}$.

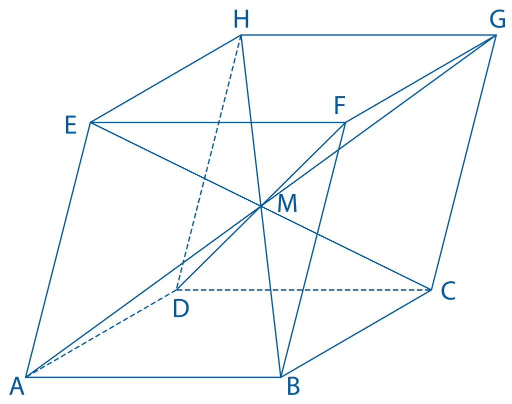


Opdracht 44 bladzijde 50

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een parallellepipedum.

1 Toon aan dat de lichaamsdiagonalen van het parallellepipedum hetzelfde midden M hebben.

We noemen M het middelpunt van het parallellepipedum.



Noem M_1 het midden van [AG], dan geldt

voor een willekeurig punt P: $\overrightarrow{PM_1} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}}{2}$ (1)

Noem M_2 het midden van [BH], dan geldt

voor een willekeurig punt P:

$$\overrightarrow{PM_2} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PH}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GH}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}}{2}. \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $M_1 = M_2$.

Noem M_3 het midden van [CE], dan geldt voor een willekeurig punt P:

$$\overrightarrow{PM_3} = \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PE}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GE}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}}{2}. \quad (3)$$

Uit (1) en (3) volgt: $M_1 = M_3$.

Noem M_4 het midden van [DF], dan geldt voor een willekeurig punt P:

$$\overrightarrow{PM_4} = \frac{\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PF}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GF}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}}{2}. \quad (4)$$

Uit (1) en (4) volgt: $M_1 = M_4$.

We besluiten dat de vier lichaamsdiagonalen van een parallellepipedum hetzelfde midden M hebben, m.a.w. de lichaamsdiagonalen van een parallellepipedum zijn concurrent en snijden elkaar middendoor.

2 Toon nu aan dat voor elk willekeurig punt P geldt:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH} = 8\overrightarrow{PM}$.

Uit (1), (2), (3) en (4) volgt:

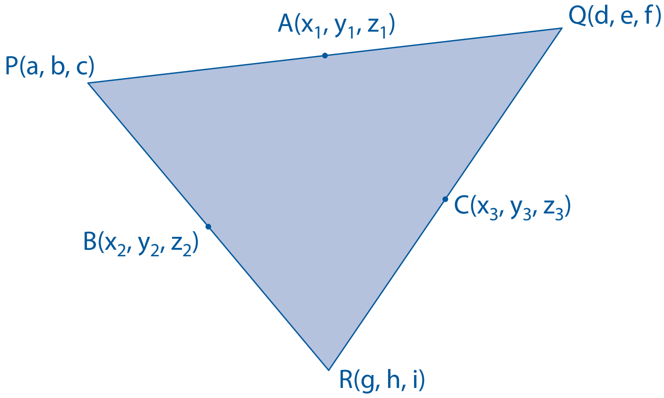
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PH}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PE}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PF}) \\ &= 2\overrightarrow{PM_1} + 2\overrightarrow{PM_2} + 2\overrightarrow{PM_3} + 2\overrightarrow{PM_4}\end{aligned}$$

Aangezien $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$ is dit laatste gelijk aan $8\overrightarrow{PM}$.

Opdracht 45 bladzijde 50

Gegeven de punten $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

De punten P, Q en R liggen zodanig dat A het midden is van $[PQ]$, B het midden is van $[PR]$ en C het midden is van $[QR]$.



1 Bepaal de coördinaat van P.

2 Bepaal de coördinaat van Q.

3 Bepaal de coördinaat van R.

Stel (a, b, c) is de coördinaat van P,
(d, e, f) is de coördinaat van Q en
(g, h, i) is de coördinaat van R,
dan geldt voor de x-cöordinaten van de middens A, B en C:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a+d}{2} & (1) \\ x_2 = \dfrac{a+g}{2} & (2) \\ x_3 = \dfrac{g+d}{2} & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) – (3) geeft $x_1 + x_2 - x_3 = a$

(1) – (2) + (3) geeft $x_1 - x_2 + x_3 = d$

(2) + (3) – (1) geeft $-x_1 + x_2 + x_3 = g$

Op een analoge manier vinden we via de y- en z-coördinaten van de middens A, B en C de andere onbekende coördinaatgetallen.

Besluit:

1 co (P) = $(x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3, z_1 + z_2 - z_3)$

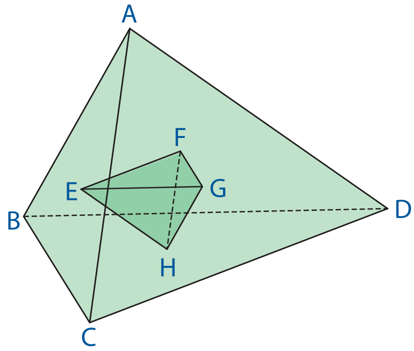
2 co (Q) = $(x_1 - x_2 + x_3, y_1 - y_2 + y_3, z_1 - z_2 + z_3)$

3 co (R) = $(-x_1 + x_2 + x_3, -y_1 + y_2 + y_3, -z_1 + z_2 + z_3)$

Opdracht 46 bladzijde 51

Een regelmatig viervlak is een ruimtelichaam dat opgebouwd is uit vier gelijkzijdige driehoeken.
Als we de zwaartepunten van de zijvlakken van een regelmatig viervlak verbinden, krijgen we het duale viervlak.

Hoeveel keer gaat het duale viervlak in het oorspronkelijke?



A 9 **B** 16 **C** 27 **D** 32 **E** 64

(Bron © VWO eerste ronde, 2011)

Stel E is het zwaartepunt van de driehoek ABC en F is het zwaartepunt van de driehoek ABD, dan geldt voor elk punt P van de ruimte:

$\overrightarrow{PE} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$ en $\overrightarrow{PF} = \dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{3}$.

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE} \\
&= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{3} - \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \\
&= \frac{\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}}{3} \\
&= \frac{\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CP}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

We kunnen een dergelijk verband aantonen voor elke ribbe van het duale viervlak EFGH.
Telkens vinden we dat de ribbe $\frac{1}{3}$ is van de overeenkomstige evenwijdige ribbe van het viervlak ABCD.

De inhoud van het viervlak ABCD is dan $3^3 = 27$ keer groter dan de inhoud van EFGH.

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 47 bladzijde 51

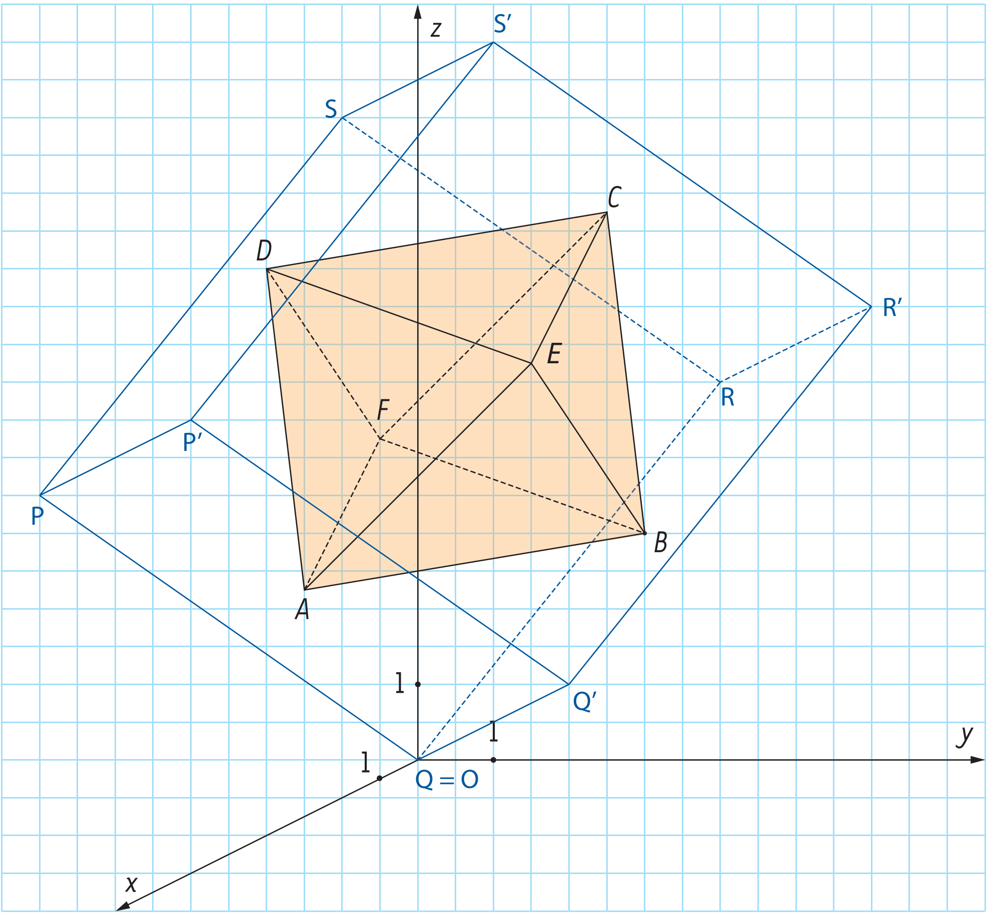
Verbinden we de middelpunten van de zijvlakken van een parallellepipedum met elkaar, dan ontstaat er een achtvlak of octaëder.
De hoekpunten van dit achtvlak zijn $A(3,0,3)$, $B(0,3,3)$, $C(-1,2,7)$, $D(2,-1,7)$, $E(3,3,6)$ en $F(-1,-1,4)$.

1 Toon aan dat dit een regelmatig achtvlak is, d.w.z. dat alle ribben even lang zijn.

Met de afstandsformule vinden we

$|EA| = |EB| = |EC| = |ED| = |FA| = |FB| = |FC| = |FD| = |AB| = |BC| = |CD| = |DA| = \sqrt{18}$

2 Construeer de 'omgeschreven kubus' van dit regelmatige achtvlak, d.i. de kubus waarvan de middelpunten van de zijvlakken de hoekpunten van het achtvlak zijn.



3 Bereken de coördinaat van elk van de hoekpunten van de kubus.

$|BD| = |AC| = |EF| = 6$ is de lengte van een ribbe van de kubus $\begin{pmatrix} P' & Q' & R' & S' \\ P & Q & R & S \end{pmatrix}$.

De coördinaat van P wordt gevonden uit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{EF}$

zodat $co(P) = (3,0,3) + \frac{1}{2} \cdot (2,-4,4) + \frac{1}{2} \cdot (-4,-4,-2) = (2,-4,4)$.

Om P' te vinden, maken we gebruik van de coördinaat van P.

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{FE}$ zodat $co(P') = (2,-4,4) + (4,4,2) = (6,0,6)$.

Verder is $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{DB}$ zodat $co(Q) = (2,-4,4) + (-2,4,-4) = (0,0,0)$.

Q valt samen met de oorsprong!

$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{FE}$ zodat $co(Q') = (4,4,2)$.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AC}$ zodat $co(R) = (-4,2,4)$.

$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{FE}$ zodat $co(R') = (-4,2,4) + (4,4,2) = (0,6,6)$.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{BD}$ zodat $co(S) = (-4,2,4) + (2,-4,4) = (-2,-2,8)$.

$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{FE}$ zodat $co(S') = (-2,-2,8) + (4,4,2) = (2,2,10)$.

Samengevat: de coördinaten van de hoekpunten van de kubus $\begin{pmatrix} P' & Q' & R' & S' \\ P & Q & R & S \end{pmatrix}$ zijn

P(2,–4,4), Q(0,0,0), R(–4,2,4), S(–2,–2,8), P'(6,0,6), Q'(4,4,2), R'(0,6,6) en S'(2,2,10).

Opdracht 48 bladzijde 52

Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel xyz en oorsprong O.

De driehoek met hoekpunten $O(0,0,0)$, $A(1,5,0)$ en $B(5,2,1)$ is

A rechthoekig en gelijkbenig

B rechthoekig, maar niet gelijkbenig

C niet rechthoekig en niet gelijkbenig

D niet rechthoekig, wel gelijkbenig, maar niet gelijkzijdig

E gelijkzijdig

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2015)

$$|OA| = \sqrt{(1-0)^2 + (5-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{26}$$

$$|OB| = \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{30}$$

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{26}$$

De driehoek is niet rechthoekig, gelijkbenig en niet gelijkzijdig.

Antwoord D is het juiste.

Opdracht 49 bladzijde 52

In het vlak met oorsprong O beschouwen we een parallellogram verdeeld in vier congruente parallellogrammen (zie figuur).
De vector $\vec{P}$ $(= \overrightarrow{OP})$ is gelijk aan

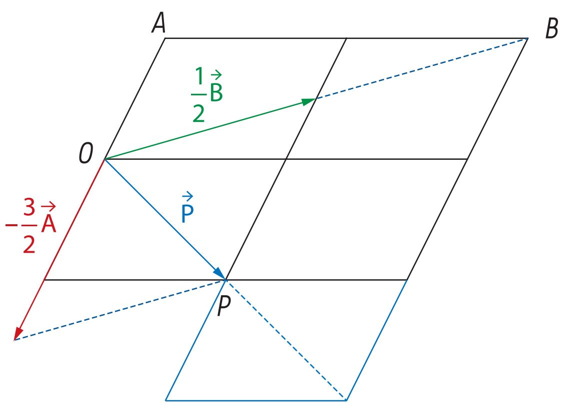
A $-\vec{A} - \vec{B}$

B $-\vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B}$

C $-\frac{1}{2}\vec{A} - \frac{1}{2}\vec{B}$

D $-2\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$

E $-\frac{3}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$



(Bron © VWO eerste ronde, 2006)

Antwoord E is het juiste.

Dat is rechtstreeks te zien door constructie, maar kan ook gevonden worden uit de betrekking

$2\overrightarrow{OP} = \vec{B} - 3\vec{A}$.

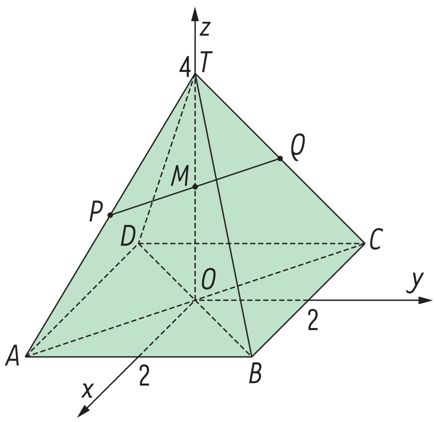
Opdracht 50 bladzijde 53

De piramide $\begin{pmatrix} & T & \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ heeft een vierkant grondvlak.

De lengte van de zijden van dat vierkant is vier eenheden.

De hoogte van de piramide is vier eenheden.

Het punt P is het midden van $[AT]$, Q is het midden van $[CT]$ en M is het midden van $[PQ]$.



1 Bereken de lengte $|CT|$ met de afstandsformule.

C(–2,2,0) en T(0,0,4)

$\Rightarrow |CT| = \sqrt{(0+2)^2 + (0-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

2 Bepaal de coördinaat van M, P en Q.

P(1,–1,2), Q(–1,1,2) en M(0,0,2)

3 Bereken de lengte $|PQ|$.

$|PQ| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Opdracht 51 bladzijde 53

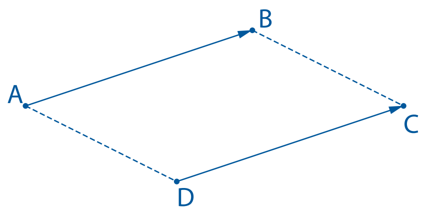
Bepaal a, b en c als $ABCD$ een parallellogram is met $A(a, a, -1)$, $B(1, b, c)$, $C(-4, 0, 2b)$ en $D(-1, 6, b)$.

ABCD is een parallellogram

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow (1-a, b-a, c+1) = (-3, -6, b)$

$\Leftrightarrow (a, b, c) = (4, -2, -3)$



Opdracht 52 bladzijde 53

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een parallellepipedum.

In een orthonormaal assenstelsel is $A(a,0,0)$, $B(b,a,0)$, $D(0,0,0)$ en $F(a,b,c)$.

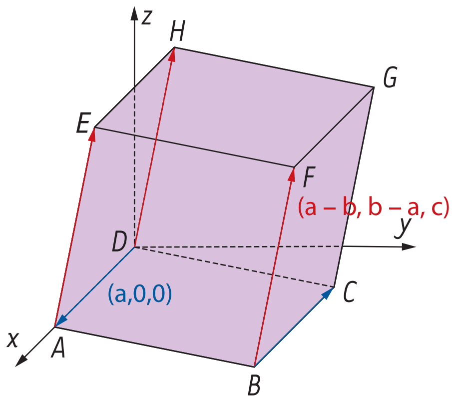
Bepaal de coördinaat van

1 C

2 E

3 G

4 H



$\overrightarrow{DA}(a,0,0)$ en $\overrightarrow{BF}(a-b, b-a, c)$

1 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$

$\Rightarrow \text{co}(C) = \text{co}(B) - \text{co}(A)$

$\Rightarrow \text{co}(C) = (b-a, a, 0)$

2 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BF}$

$\Rightarrow \text{co}(E) = \text{co}(A) + \text{co}(\overrightarrow{BF})$

$\Rightarrow \text{co}(E) = (2a-b, b-a, c)$

3 $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA}$

$\Rightarrow \text{co}(G) = \text{co}(F) - \text{co}(A)$

$\Rightarrow \text{co}(G) = (0, b, c)$

4 $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

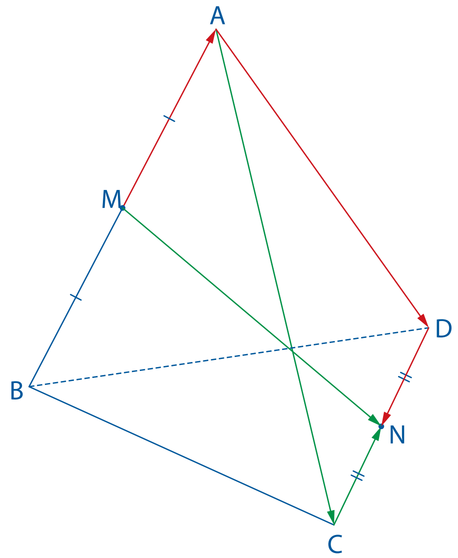
$\Rightarrow \text{co}(H) = \text{co}(\overrightarrow{BF})$

$\Rightarrow \text{co}(E) = (a-b, b-a, c)$

Opdracht 53 bladzijde 54

In een viervlak $ABCD$ is M het midden van $[AB]$ en N het midden van $[CD]$.

1 Toon aan dat $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

2 Toon aan dat $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

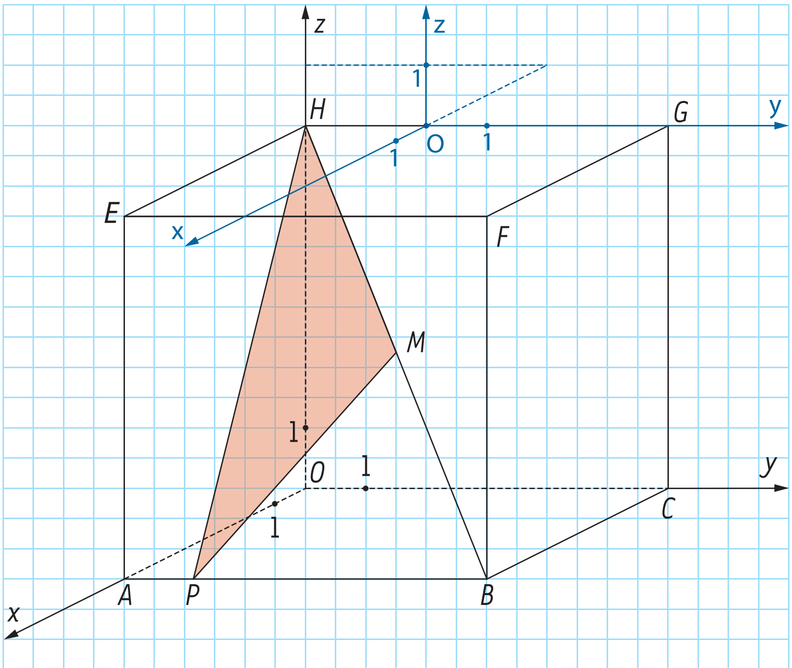
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})
\end{aligned}$$

Opdracht 54 bladzijde 53

In de kubus met ribbe 6 is de lichaamsdiagonaal $[HB]$ getekend.



1 Bepaal de coördinaat van M, het midden van $[HB]$.

H(0,0,6) en B(6,6,0) $\Rightarrow$ M(3,3,3)

2 Bereken $|MB|$.

$$|MB| = \sqrt{(6-3)^2 + (6-3)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

3 Het punt P ligt op AB.

Bereken de coördinaat van P als de driehoek HMP rechthoekig is in M.

Stel co(P) = (6, b,0).

De driehoek HMP is rechthoekig in M

$\Leftrightarrow |HM|^2 + |MP|^2 = |HP|^2$

$\Leftrightarrow 27 + 9 + (b-3)^2 + 9 = 36 + b^2 + 36$

$\Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 + 9 = b^2 + 36$

$\Leftrightarrow -6b = 18$

$\Leftrightarrow b = -3$

Besluit: co(P) = (6,–3,0).

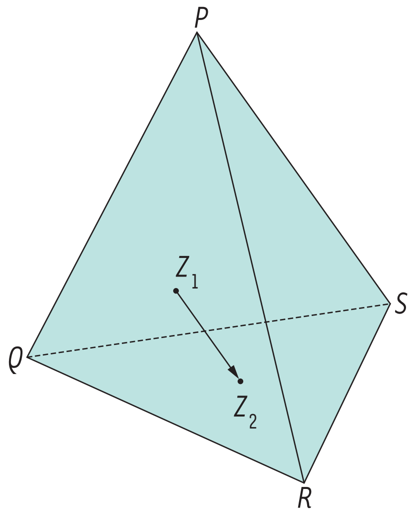
4 Breng op de figuur een orthonormaal assenstelsel aan met dezelfde eenheden voor de assen waarin H als coördinaat $(-4,-4,-1)$ heeft.

zie figuur

Opdracht 55 bladzijde 54

In het viervlak $PQRS$ is Z_1 het zwaartepunt van ΔPQR en Z_2 het zwaartepunt van ΔQRS.

Toon aan dat $\overrightarrow{Z_1Z_2} = k \cdot \overrightarrow{PS}$ en bepaal k.



Uit de gegevens volgt:

$$\overrightarrow{PZ_1} = \frac{\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}}{3} = \frac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}}{3} \text{ en}$$

$$\overrightarrow{PZ_2} = \frac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}}{3}.$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Z_1Z_2} &= \overrightarrow{Z_1P} + \overrightarrow{PZ_2}\\ &= \overrightarrow{PZ_2} - \overrightarrow{PZ_1}\\ &= \frac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}}{3} - \frac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}}{3}\\ &= \frac{\overrightarrow{PS}}{3}\end{aligned}$$

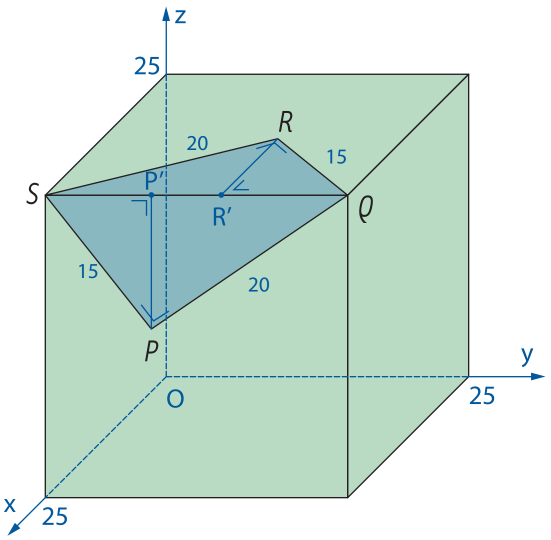
Bijgevolg is $k = \frac{1}{3}$.

Opdracht 56 bladzijde 54

Van een rechthoekig stuk papier $PQRS$ zijn de afmetingen $|PQ| = 20$ en $|QR| = 15$.

Het papier is op een kubus geplakt, zodanig dat Q en S op een hoekpunt terechtkomen.

Bereken de afstand van P tot R (door de kubus gemeten).



De ribbe van de kubus is gelijk aan $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

Breng een assenstelsel aan zoals op de figuur.

Om de coördinaat van P en van R te bepalen, maken we gebruik van metrische betrekkingen in de congruente rechthoekige driehoeken PQS en RSQ:

$$|SP|^2 = |SP'| \cdot |SQ| \Rightarrow |SP'| = \frac{15^2}{25} = 9$$

$$|PP'|^2 = |SP'| \cdot |P'Q| \Rightarrow |PP'| = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$$

Hieruit volgt: co(P) = (25,9,13) en co(R) = (13,16,25).

Met de afstandsformule vinden we: $|PR| = \sqrt{337}$.