Hoofdstuk 3

Rekenen met kansen

Opdracht 1 bladzijde 70

Je kiest lukraak vier verschillende letters, te kiezen uit a, b, c, d, e en f. Daarmee vorm je een 'woord' door die letters in een bepaalde volgorde te plaatsen.

1 Hoeveel dergelijke woorden kun je vormen?

Het aantal woorden is $V_6^4 = 360$.

2 Wat is de kans dat het woord geen klinkers bevat?

In het vierde jaar maakten leerlingen al kennis met de formule van Laplace en met het gebruik van kansbomen om kansen te berekenen. We gebruiken hier de formule van Laplace.

Van de 360 mogelijk woorden zijn er $4! = 24$ zonder klinker. De gevraagde kans is $\frac{24}{360} = \frac{1}{15}$.

Opdracht 2 bladzijde 73

Geef voor de volgende vraagstukken een uitkomstenverzameling waarvan alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en bereken vervolgens de gevraagde kans.

1 In je pennenzak zitten zes identieke balpennen, waarvan er twee al een tijdje leeg zijn. Je neemt er twee lukraak uit.

Wat is de kans dat je er twee vasthebt die niet leeg zijn?

Maak de volle ('v') en lege ('l') balpennen verschillend:

$U = \{v_1 \text{ en } v_2, v_1 \text{ en } v_3, v_1 \text{ en } v_4, v_1 \text{ en } l_1, v_1 \text{ en } l_2, v_2 \text{ en } v_3, \ldots\}$ en

$A = \{v_1 \text{ en } v_2, v_1 \text{ en } v_3, v_1 \text{ en } v_4, v_2 \text{ en } v_3, v_2 \text{ en } v_4, v_3 \text{ en } v_4\}$.

De kans is $\frac{\#(A)}{\#(U)} = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$.

2 In je portefeuille zit een briefje van 5, van 10, van 20 en van 50 euro. Je neemt er lukraak twee uit.

Wat is de kans dat je 30 euro nam?

We identificeren het briefje met de waarde:
$U = \{5 \text{ en } 10, 5 \text{ en } 20, 5 \text{ en } 50, 10 \text{ en } 20, 10 \text{ en } 50, 20 \text{ en } 50\}$.

De kans is $\frac{\#(A)}{\#(U)} = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$.

Opdracht 3 bladzijde 73

Als een gezin zeven kinderen telt, wat is dan de kans dat ze allemaal op een verschillende dag van de week geboren zijn?

We voeren volgorde in, door bijvoorbeeld de kinderen van jong naar oud te rangschikken. Er zijn dan 7^7 mogelijke volgordes voor de dagen van de week waarop ze geboren zijn. Daarvan zijn er $7!$ met verschillende dagen. De kans is dus $\frac{7!}{7^7} = 0{,}00612$.

(In opdracht 41 wordt een gelijkaardige redenering gebruikt bij de verjaardagsparadox.)

Opdracht 4 bladzijde 73

Je gooit twee eerlijke dobbelstenen. Wat is dan de kans, afgerond tot op een procent, dat de som van de ogen groter is dan het product?

A 0 % **B** 6 % **C** 17 % **D** 31 % **E** 50 %

(Bron © Elon University Math Contest, 2015)

Het verschillend kleuren van de twee dobbelstenen laat toe de uitkomsten in een schema te plaatsen, zoals dat ook in het vierde jaar aan bod kwam. In het schema links staan de sommen, rechts de producten. De cellen waarin de som groter is dan het product zijn ingekleurd.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

×	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

De kans is $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$.

Opdracht 5 bladzijde 77

Onderzoek toont aan dat de kans op de geboorte van een meisje 48,65 % is.

Schat met een simulatie de kans dat er in een gezin met drie kinderen precies twee meisjes zijn.

Opmerking vooraf

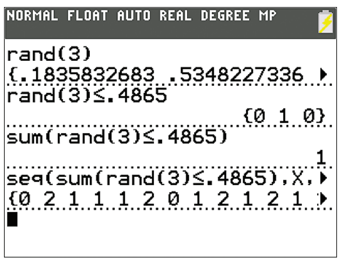
Indien leerlingen over toestellen beschikken waarop (sinds de aanschaf of de laatste update van het besturingssysteem) nog nooit simulaties zijn uitgevoerd, dan zullen hun toestellen alle dezelfde rij toevalsgetallen genereren. Om dit te vermijden, moet de 'seed value' (startwaarde) van de pseudorandomgenerator op alle toestellen anders worden ingesteld. Laat elke leerling een willekeurig natuurlijk getal kiezen en opslaan in **rand**, bijv. **123546789 → rand** (dezelfde rand waarmee willekeurige 'reële' getallen worden gegenereerd). Verschillende startwaarden zorgen voor verschillende rijen toevalsgetallen, gelijke startwaarden voor dezelfde rijen.

Opgave

Het commando om bij 750 gezinnen van drie kinderen het aantal meisjes te tellen, is perfect analoog aan dat van het voorbeeld over dyslexie blz. 76-77 in het theorieblok:

seq(sum(rand(3) ⩽ .4865),X,1,750)

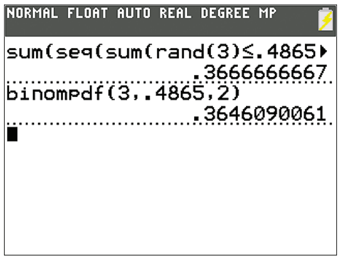
Ter informatie is in de schermafdruk het commando stap na stap uitgevoerd. Merk op dat in elke lijn het commando **rand** opnieuw wordt uitgevoerd, zodat er telkens nieuwe toevalsgetallen worden gegenereerd.



Om de kans op twee meisjes te berekenen, kan dit commando als volgt uitgebreid worden:

sum(seq(sum(rand(3) ⩽ .4865),X,1,750)=2)/750

De experimentele kans is 0,3667, wat een goede schatting is van de theoretische kans 0,3646.



Opdracht 6 bladzijde 78

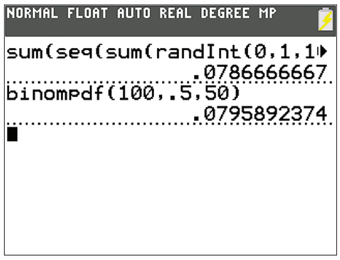
Je gooit 100 keer een eerlijke munt op. Je verwacht 50 keer munt, maar het toeval kan voor lichte afwijkingen zorgen.

Schat met een simulatie

1 de kans om precies 50 keer munt te gooien;

Een mogelijk commando is:

$$\underbrace{\mathbf{sum(}\underbrace{\mathbf{seq(}\underbrace{\underbrace{\mathbf{sum(}\underbrace{\mathbf{randInt(0,1,100)}}_{\text{100 keer een muntstuk opgooien}}\mathbf{)}}_{\text{aantal keer munt}}\mathbf{=50}}_{\text{'1' indien 50 keer munt}}\mathbf{,X,1,750)}}_{\text{750 keer herhalen: 1 telkens er 50 keer munt werd gegooid}}\mathbf{)}}_{\text{aantal keer dat 50 keer munt werd gegooid}}\mathbf{/750}$$



Het uitvoeren van dit commando duurt verschillende minuten. De experimentele kans is 0,0787. De theoretische kans is 0,0796.

Met het oog op de volgende opdracht is het interessanter niet meteen na te gaan of 50 keer munt werd gegooid, maar gewoon het aantal keer munt te tellen in elk experiment, en die aantallen op te slaan in een lijst:

seq(sum(randInt(0,1,100)),X,1,750) → $\mathbf{L_1}$

De kans om 50 keer munt te gooien kan nu berekend worden met het commando **sum($\mathbf{L_1}$ = 50) / 750**.

2 de kans om maximum 45 keer munt te gooien.

Ofwel voeren we de simulatie helemaal opnieuw uit met het commando

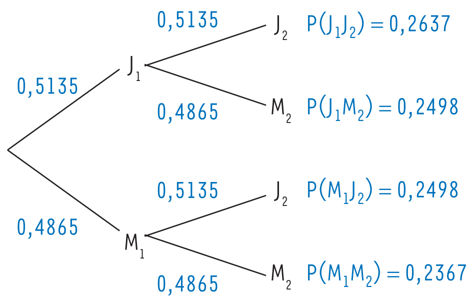
sum(seq(sum(randInt(0,1,100)) ⩽ 45,X,1,750))/750

Ofwel, indien we in de eerste deelvraag met de lijst uitkomsten L_1 werkten, voeren we het commando **sum($\mathbf{L_1}$ ⩽ 45) / 750** uit.

Opdracht 7 bladzijde 79

Uit statistisch onderzoek blijkt dat de kans op de geboorte van een jongen (J) ongeveer 51,35 % is, zodat de kans op een meisje (M) 48,65 % is.

Stel dat een gezin twee kinderen heeft, dan worden de mogelijke gezinssamen-stellingen, samen met de kans op elke situatie, overzichtelijk weergegeven in een kansboom. De index geeft weer of het over het eerste of het tweede kind gaat.



Deze oefening is bedoeld om de leerstof van het vierde jaar op te frissen: de som- en complementregel voor kansen, aan de hand van een kansboom.

1 Wat is de kans op twee kinderen van hetzelfde geslacht?

Hiervoor tellen we de kansen $P(J_1J_2)$ en $P(M_1M_2)$ op en vinden 0,5004.

2 Geef twee manieren om de kans op minstens één meisje te berekenen.

Ofwel worden de kansen $P(J_1M_2)$, $P(M_1J_2)$ en $P(M_1M_2)$ opgeteld, ofwel wordt $1 - P(J_1J_2)$ berekend.

Opdracht 8 bladzijde 79

Je trekt een kaart uit een goed geschud boek van 52 speelkaarten. De gebeurtenis *A* staat voor 'een rode kaart trekken' (harten of ruiten); *B* is 'een puntkaart trekken' (2, 3, ..., 10).

Verklaar waarom $P(A \text{ of } B) \neq P(A) + P(B)$.

De gebeurtenis A komt overeen met 26 en B met 36 uitkomsten, zodat $P(A) = \frac{26}{52}$ en $P(B) = \frac{36}{52}$. In de tellers 26 en 36 van beide kansen komen de rode puntkaarten twee keer voor, de eerste keer als rode kaart, de tweede keer als puntkaart. Vandaar dat $P(A) + P(B) = \frac{26 + 36}{52}$ niet overeenkomt met P(A of B).
(In dit voorbeeld is die som is bovendien groter dan 1, zodat ze sowieso al geen kans kan voorstellen, maar dat is niet de essentie van de vergissing.)

De gebeurtenis 'A of B' komt overeen met 44 uitkomsten: de 26 rode kaarten en dan nog 18 zwarte puntkaarten. Bijgevolg is $P(A \text{ of } B) = \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$.

Opdracht 9 bladzijde 83

Je trekt dertien kaarten uit een goed geschud boek kaarten.

1 Wat is de kans dat je minstens twee harten zal trekken?

Met de complementregel:

$$P = 1 - P(\text{0 harten of 1 harten}) = 1 - \left(\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} + \frac{13 \cdot \binom{39}{12}}{\binom{52}{13}} \right) = 0{,}9071.$$

2 Wat is de kans dat je enkel rode of enkel zwarte kaarten zal trekken?

De somregel geeft: $P(\text{enkel rode of enkel zwarte kaarten}) = 2 \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} = 3{,}276 \cdot 10^{-5}$.

Opdracht 10 bladzijde 83

Je wil enkele hoge bomen snoeien in je tuin. Dit kun je enkel doen op een droge, windloze dag. Stel dat de kans dat het droog is 0,85 is, de kans op wind 0,3 en de kans op een natte winderige dag 0,05.

Wat is de kans op

1 een natte dag?

P(nat) = 1 – P(droog) = 0,15

2 een dag die nat of winderig of beide is?

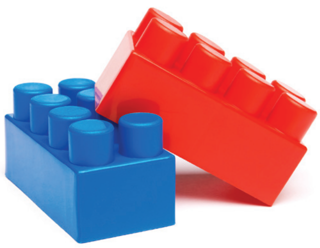
P(nat of winderig) = P(nat) + P(winderig) – P(nat en winderig) = 0,15 + 0,3 – 0,05 = 0,40

3 een dag waarop je de bomen kunt snoeien?

P(droog en windloos) = 1 – P(nat of winderig) = 0,60 (zie deelvraag 2)

Opdracht 11 bladzijde 83

Op een tafel liggen twaalf blokjes, vijf rode en zeven blauwe. Bij de rode blokken zijn er drie vierkant en twee rechthoekig. Bij de blauwe is er één vierkant en zes rechthoekig. Je neemt blindelings een blokje.



1 Hoe groot is de kans dat het blokje rood is?

$P = \frac{5}{12}$

2 Je voelt dat je een vierkant blokje hebt genomen.

Hoe groot is de kans dat het blokje rood is?

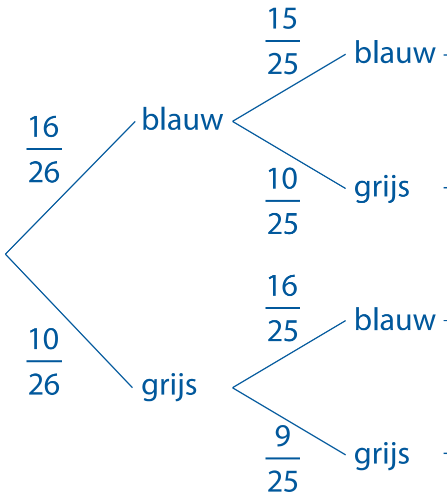
In totaal zijn er 4 vierkante blokjes, waarvan 3 rood, dus: $P = \frac{3}{4}$.

Opdracht 12 bladzijde 83

In een lade liggen 16 blauwe en 10 grijze sokken door elkaar. Je neemt er lukraak twee uit.

Bereken met een kansboom de kans dat je twee sokken van dezelfde kleur zal vasthebben.

De enige bedoeling van deze opdracht is leerlingen laten inzien dat de ze in het vierde jaar altijd al met kansen werkten die rekening houden met de uitkomst van de vorige trekking en dat de productregel daar ook gebruikt van maakt.



$$P(\text{blauw} - \text{blauw}) = \frac{16}{26} \cdot \frac{15}{25} = \frac{24}{65}$$

$$P(\text{blauw} - \text{grijs}) = \frac{16}{26} \cdot \frac{10}{25} = \frac{16}{65}$$

$$P(\text{grijs} - \text{blauw}) = \frac{10}{26} \cdot \frac{16}{25} = \frac{16}{65}$$

$$P(\text{grijs} - \text{grijs}) = \frac{10}{26} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{65}$$

De kans op twee sokken van dezelfde kleur is

$P(\text{blauw-blauw of grijs-grijs}) = \frac{24}{65} + \frac{9}{65} = \frac{33}{65}$.

Opdracht 13 bladzijde 86

Je trekt zonder teruglegging twee knikkers uit een vaas die acht witte, vijf rode en twee groene knikkers bevat. De gebeurtenis W_1 komt overeen met 'de eerste knikker is wit', R_2 met 'de tweede knikker is rood' en analoog voor de andere gebeurtenissen.

Bereken

1 $P(R_2 \mid W_1) = \frac{5}{14}$ (er zijn nog 14 knikkers over, waarvan 5 rode)

2 $P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ (analoog)

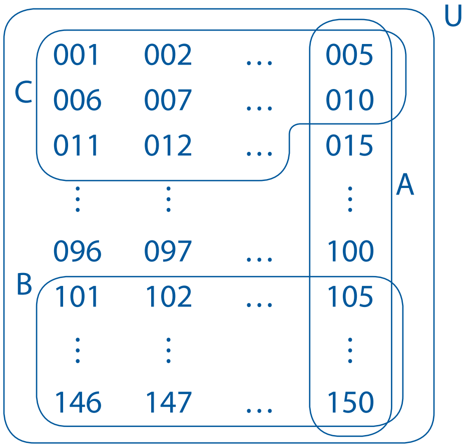
3 $P(G_2 \mid G_1) = \frac{1}{14}$ (analoog)

Opdracht 14 bladzijde 86

Bij een kermisloterij worden 150 loten verkocht. De loten zijn genummerd van 001 tot 150. Noem *A* de gebeurtenis 'het nummer is deelbaar door 5', *B* de gebeurtenis 'het nummer is groter dan 100' en *C* de gebeurtenis 'het nummer is kleiner dan 15'.

Door de situatie voor te stellen met verzamelingen, maakt deze opdracht duidelijk dat extra informatie de uitkomstenverzameling beperkt.

Dit sluit aan bij het eerste streepje van het voorbeeld uit het tekstblok blz. 84, wanneer de formule van Laplace gebruikt wordt. Algemeen geldt voor twee gebeurtenissen A en B, wanneer alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn: $P(A \mid B) = \dfrac{\#(A \text{ en } B)}{\#(B)} = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$.



Bereken

1 $P(A \mid B) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(B)} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$

2 $P(B \mid A) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

3 $P(A \text{ en } B) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(U)} = \dfrac{10}{150} = \dfrac{1}{15}$

4 $P(A \mid C) = \dfrac{\#(A \cap C)}{\#(C)} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

5 $P(B \mid C) = \dfrac{\#(B \cap C)}{\#(C)} = \dfrac{0}{14} = 0$

6 $P(A \text{ en } C) = \dfrac{\#(A \cap C)}{\#(U)} = \dfrac{2}{150} = \dfrac{1}{75}$

Opdracht 15 bladzijde 87

In 1987 onderzochten Rosner en Belkin bij 157 748 Israëlische jongens van 17 tot 19 jaar een mogelijk verband tussen bijziendheid en intelligentie. Een reconstructie van hun bevindingen staat in de kruistabel.

	IQ < 80	80 ⩽ IQ ⩽ 128	IQ > 128	TOTAAL
bijziend	1 151	22 439	1 334	**24 924**
niet bijziend	13 237	116 035	3 552	**132 824**
TOTAAL	**14 388**	**138 474**	**4 886**	**157 748**

We nemen aan dat de steekproef representatief is voor een willekeurige populatie van jongens van 17 tot 19 jaar.

1 Bereken de experimentele kansen P(bijziend) en P(bijziend | IQ > 128) en formuleer een passend besluit over het verband tussen een hoog IQ en bijziendheid in die populatie.

$$\text{P(bijziend)} = \frac{\#\text{(bijziend)}}{\#\text{(totaal)}} = \frac{24\,924}{157\,748} = 0{,}1580$$

$$\text{P(bijziend} \mid \text{IQ} > 128) = \frac{\#\text{(bijziend en IQ} > 128)}{\#(\text{IQ} > 128)} = \frac{1334}{4886} = 0{,}2730$$

In die populatie heeft een jongen met een IQ van meer dan 128 een veel hogere kans om bijziend te zijn, dan een willekeurige jongen uit het onderzoek.

2 Vergelijk nu ook P(IQ > 128) en P(IQ > 128 | bijziend).

$$\text{P(IQ} > 128) = \frac{4886}{157\,748} = 0{,}03097$$

$$\text{P(IQ} > 128 \mid \text{bijziend}) = \frac{1334}{24\,924} = 0{,}05352$$

Een jongen die bijziend is, heeft een veel hogere kans om een hoog IQ te hebben, dan een willekeurige jongen uit het onderzoek.

Opdracht 16 bladzijde 88

Je trekt een willekeurige kaart uit een boek van 52 kaarten. Gegeven zijn de gebeurtenissen

A: de getrokken kaart is een aas;

B: de getrokken kaart is schoppenaas;

C: de getrokken kaart is een harten.

1 Bereken P(B) en P($B \mid A$).

$$\text{P(B)} = \frac{\#\text{(B)}}{\#\text{(U)}} = \frac{1}{52} \text{ en } \text{P(B} \mid \text{A)} = \frac{\#\text{(A en B)}}{\#\text{(A)}} = \frac{1}{4}$$

2 Vergelijk P(C) met P($C \mid A$).

$$\text{P(C)} = \frac{\#\text{(C)}}{\#\text{(U)}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ en } \text{P(C} \mid \text{A)} = \frac{\#\text{(C en A)}}{\#\text{(A)}} = \frac{1}{4}$$

Opdracht 17 bladzijde 90

De tabel bevat resultaten van een onderzoek naar kleurenblindheid bij jongens en meisjes.

	kleurenblind	niet kleurenblind
jongen	399	4601
meisje	24	4976

Vergelijk P(jongen) met P(jongen | kleurenblind) om na te gaan of geslacht en kleurenblindheid afhankelijk of onafhankelijk zijn.

$$P(\text{jongen}) = \frac{5000}{10000} = 0{,}5000$$

$$P(\text{jongen} \mid \text{kleurenblind}) = \frac{399}{423} = 0{,}9433$$

Geslacht en kleurenblindheid zijn afhankelijk.

Opdracht 18 bladzijde 90

Het wiel van een Europese roulette bestaat uit 37 vakjes, waarvan 18 zwarte, 18 rode en 1 groen.

Op 18 augustus 1913 ontstond in het casino van Monte Carlo grote opwinding toen aan een bepaalde roulettetafel het balletje 26 keer na elkaar op zwart terecht kwam. Ondertussen had een toenemend aantal spelers grote bedragen verloren door telkens op rood in te zetten, denkend dat na een aantal keer zwart de kans op rood wel groter moest worden, 'om het evenwicht tussen zwart en rood te bewaren'. Deze denkfout wordt the *gambler's fallacy* genoemd.

1 Bereken de kans om op 26 beurten 26 keer op zwart uit te komen.

$$P(\text{26 keer zwart}) = \left(\frac{18}{37}\right)^{26} = 7{,}309 \cdot 10^{-9}$$

2 Bereken de kans om minstens één keer op rood uit te komen op 27 beurten.

$$P(\text{minstens één keer rood}) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{27} \approx 1$$

3 Bereken de kans om bij de 27e beurt op rood uit te komen, als gegeven is dat de vorige 26 beurten zwart opleverden.

$$P(\text{rood} \mid \text{26 keer zwart}) = \frac{18}{37} = P(\text{rood})$$

Opdracht 19 bladzijde 91

De tabel geeft van 1009 personen met eenzelfde aandoening weer of ze genezen waren na een maand behandeling met homeopathie of een maand zonder behandeling.

	homeopathie	geen behandeling	TOTAAL
genezen	93	160	**253**
niet genezen	281	475	**756**
TOTAAL	**374**	**635**	**1009**

1 Bereken P(genezen) en P(genezen | homeopathie).

$$P(\text{genezen}) = \frac{253}{1009} = 0{,}2507$$

$$P(\text{genezen} \mid \text{homeopathie}) = \frac{93}{374} = 0{,}2487$$

2 Wat zou je hieruit besluiten over de afhankelijkheid van beide gebeurtenissen?

Beide kansen zijn ongeveer gelijk. Aangezien het experimentele kansen betreft, is een exacte gelijkheid zeer onwaarschijnlijk. Deze bijna-gelijkheid versterkt wat je op basis van enig inzicht in wat homeopathie is, al kon vermoeden: beide gebeurtenissen zijn onafhankelijk, de kans op genezing verandert niet als je weet dat de persoon behandeld werd met homeopathie.

(De gegevens zijn fictief.)

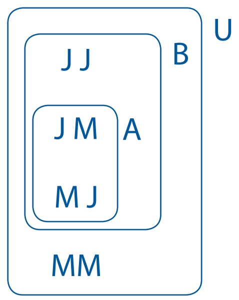
Opdracht 20 bladzijde 91

Uit alle Belgische gezinnen met n kinderen kies je willekeurig een gezin. Neem aan dat de kans op een jongen en een meisje dezelfde is.

Onderzoek of de gebeurtenissen A 'het gezin heeft zowel jongens als meisjes' en B 'het gezin heeft hoogstens één meisje' onafhankelijk zijn als

1 $n = 2$

Een voorstelling met verzamelingen is hier nuttig. De uitkomstenverzameling bevat vier gezinssamenstellingen (J staat voor jongen, M voor meisje). Elke uitkomst is even waarschijnlijk, zodat we de formule van Laplace kunnen toepassen.

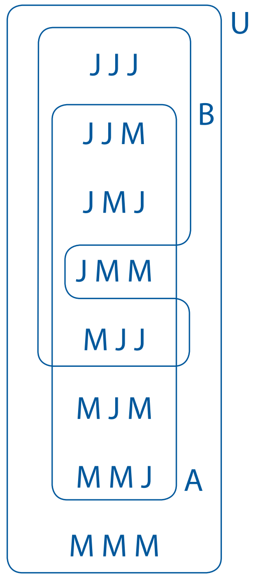


$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(U)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ en } P(A \mid B) = \frac{\#(A \text{ en } B)}{\#(B)} = \frac{2}{3}$$

Beide gebeurtenissen zijn afhankelijk.

2 $n = 3$

$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(U)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ en $P(A \mid B) = \frac{\#(A \text{ en } B)}{\#(B)} = \frac{3}{4}$



Nu blijken beide gebeurtenissen onafhankelijk te zijn.

Deze opdracht toont aan dat het afhankelijk of onafhankelijk zijn van gebeurtenissen niet zomaar op een natuurlijke manier uit de aard van de gebeurtenissen volgt.

Opdracht 21 bladzijde 91

Stel dat voor twee gebeurtenissen A en B geldt dat $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$ met $P(A)$ en $P(B)$ verschillend van nul.

Toon aan dat A en B dan onafhankelijk zijn.

Uit de productregel weten we dat $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. Bovendien is gegeven dat $P(A \text{ en } B) = P(A) \cdot P(B)$ Hieruit kunnen we besluiten dat $P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$.
Aangezien $P(A) \neq 0$ volgt hieruit dat $P(B) = P(B \mid A)$, zodat A en B onafhankelijk zijn.

Opdracht 22 bladzijde 91

1 Los de vraagstukken op met een methode naar keuze.

a In België heeft 46 % van de bevolking bloedgroep 0. Je kiest lukraak drie Belgen.

Wat is de kans dat precies één van hen bloedgroep 0 heeft?

In een kansboom komen drie van de acht takken overeen met precies één persoon met bloedgroep O. Elk van die drie takken heeft kans $0{,}46 \cdot 0{,}54^2$ zodat de gevraagde kans $3 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54^2 = 0{,}4024$ is.

b Je trekt de bovenste vijf kaarten uit een goed geschud pak van 52 kaarten.

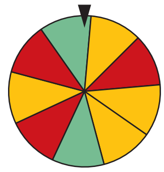
Wat is de kans dat je vijf hartenkaarten trekt?

Ook hier is een kansboom mogelijk, waarin slechts één tak overeenkomt met vijf keer een hartenkaart nemen. We kunnen ook meteen de productregel toepassen:

$$P(5 \text{ harten}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = 4{,}952 \cdot 10^{-4}.$$

We kunnen ook de formule van Laplace gebruiken, zoals in het tekstblok wordt voorgesteld, maar voor de eenvoudige situatie hier is de productregel even interessant.

c Bij een kermisspel mag je vier keer aan een rad draaien, waarop negen even grote segmenten zijn geschilderd, met kleuren zoals aangegeven op de figuur. Na het draaien aan het rad, is de uitkomst de kleur die door de zwarte pijl bovenaan wordt aangewezen. (Die pijl kan niet tussen twee kleuren terechtkomen.)



Wat is de kans dat je juist twee keer op geel terechtkomt?

Een kansboom met de gebeurtenis G (geel) en haar complement $\overline{G}$ (groen of rood) laat toe in te zien dat er 6 takken zijn die overeenkomen met precies twee keer G. Dit aantal kan ook berekend worden als C_4^2 of, met het oog op de notatie in hoofdstuk 4, $\binom{4}{2}$. Elk van deze 6 takken heeft als kans $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$, zodat de gevraagde kans

$6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 = 0{,}3658$ is.

2 Elk van de vorige kansvraagstukken kan herleid worden tot een van de volgende twee modellen.

(A) In een vaas zitten x witte en y zwarte ballen. Je neemt er één bal uit, noteert de kleur, en legt hem terug. Dit herhaal je n keer. Wat is de kans op k witte ballen?

(B) In een vaas zitten x witte en y zwarte ballen. Je neemt er één bal uit, noteert de kleur, en legt hem *niet* terug. Dit herhaal je n keer. Wat is de kans op k witte ballen?

Geef voor elk vraagstuk uit **1** het model dat je kunt gebruiken en geef de bijbehorende waarden van x, y, n en k. Voor deze parameters zijn meerdere oplossingen mogelijk.

a

Dit is model A, met 46 witte en 54 zwarte ballen. Het experiment wordt 3 keer herhaald en we berekenen de kans op 1 witte bal.

b

Dit is model B. Er zijn 13 witte ballen en 39 zwarte. Het experiment wordt 5 keer herhaald en we berekenen de kans op 5 witte ballen.

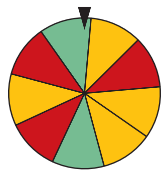
c

Dit is opnieuw model A, met 4 witte en 5 zwarte ballen. De trekking wordt 4 keer uitgevoerd, waarna de kans op 2 witte ballen wordt berekend.

Opdracht 23 bladzijde 95

Herneem het rad uit de inleidende opdracht.

Als je twintig keer aan het rad mag draaien, wat is dan de kans dat je twaalf keer op geel zal uitkomen?



Dit kan gemodelleerd worden als een trekking met teruglegging. Mochten we een kansboom opstellen, zouden er $\binom{20}{12}$ takken zijn die overeenkomen met 12 keer geel, elk met kans $\left(\frac{4}{9}\right)^{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{8}$. De gevraagde kans is dus $\binom{20}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{8} = 0{,}0679.$

Opdracht 24 bladzijde 95

Op een Lottoformulier kruis je zes van de vakjes, genummerd van 1 tot en met 45, aan. De winnende nummers worden bepaald door zes lukraak getrokken balletjes, genummerd van 1 tot en met 45.

Wat is de kans dat je in een rooster precies drie winnende nummers aangekruist zal hebben?

Dit komt overeen met een trekking zonder teruglegging. Er zijn 6 witte balletjes (de winnende nummers) en 39 zwarte, waaruit je er zonder teruglegging 6 (jouw nummers) trekt.

De gevraagde kans is $\dfrac{\binom{6}{3}\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}} = 0{,}0224.$

(Je kunt de witte balletjes ook laten overeenkomen met de nummers die jij koos en de 6 trekkingen komen dan overeen met de trekking van de 6 winnende nummers.)

Opdracht 25 bladzijde 95

Voor een tombola zijn er 150 loten. Vijf ervan komen overeen met een hoofdprijs van € 100, twintig komen overeen met een troostprijs van € 15. De overige loten leveren niets op.

Dit is opnieuw een trekking zonder teruglegging, maar nu zijn er drie kleuren voor de balletjes: 5 balletjes zijn rood (hoofdprijs), 20 balletjes zijn wit (troostprijs) en 125 balletjes zijn zwart (geen prijs).

1 Je koopt vijf loten. Wat is de kans dat je geen prijs zal hebben?

De gevraagde kans is $\dfrac{\binom{5}{0}\binom{20}{0}\binom{125}{5}}{\binom{150}{5}} = 0{,}3964.$

2 Je koopt twintig loten. Wat is de kans dat je één hoofdprijs en drie troostprijzen zal hebben?

Op dezelfde manier vinden we nu als kans $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{20}{3}\binom{125}{16}}{\binom{150}{20}} = 0{,}0978.$

Opdracht 26 bladzijde 97

Je beste vriendin is een tikkeltje bijgelovig. Op een dag schuift ze de volgende gegevens onder je neus. Aan tweehonderd personen werd gevraagd of ze de voorbije week een ongeval hadden en of ze in de week daarvoor al dan niet een zwarte kat hadden gezien.

	zwarte kat	geen zwarte kat	TOTAAL
ongeval	13	5	**18**
geen ongeval	129	53	**182**
TOTAAL	**142**	**58**	**200**

Voor haar is het zonneklaar dat zwarte katten ongeluk aankondigen: van de 18 personen die een ongeval hadden, zagen er 13 in de week ervoor een zwarte kat, dat is 72 %!

1 Met welke kans komt $\frac{13}{18}$ overeen: P(ongeval en zwarte kat), P(ongeval | zwarte kat) of P(zwarte kat | ongeval)?

Uit de noemer leiden we af dat we ons beperken tot die personen die een ongeval hadden, zodat dit de kans P(zwarte kat | ongeval) is.

2 Welke twee kansen moet je vergelijken om na te gaan of het zien van een zwarte kat de kans verhoogt dat je binnenkort een ongeval zal hebben?

We zijn geïnteresseerd in onze kans op een ongeval, dus vergelijken we P(ongeval) en P(ongeval | zwarte kat).

3 Bereken beide kansen en interpreteer.

$P(\text{ongeval}) = \frac{18}{200} = 0{,}09$ en $P(\text{ongeval} \mid \text{zwarte kat}) = \frac{13}{142} = 0{,}0909$. Het zien van een zwarte kat heeft geen invloed op de kans op een ongeval, aangezien beide experimentele kansen nagenoeg gelijk zijn.

Opdracht 27 bladzijde 101

Een machinefabriek produceert onderdelen die met een hoge precisie worden afgewerkt. De ondervinding heeft geleerd dat 8 % van de output defect is. Om de kwaliteit te verbeteren, plaatst men een controlesysteem dat de defecte onderdelen automatisch moet verwijderen. Het controlesysteem is echter niet volledig betrouwbaar: er is een kans van 5 % dat een foutief onderdeel niet wordt verwijderd en een kans van 10 % dat een foutloos onderdeel tóch wordt verworpen.

We stellen de gegevens voor in een kansboom.

1 Hoe noteer je de kans dat een onderdeel foutloos is en wordt verwijderd? Bereken die kans.

Die kans noteren we, met de terminologie uit de kansboom, als P(niet defect en verwijderd).

We vinden: P(niet defect en verwijderd) $= 0{,}92 \cdot 0{,}10 = 0{,}092$.

2 Hoe noteer je de kans dat een onderdeel defect is als het wordt verwijderd? Bereken die kans.

De notatie is: P(defect | verwijderd).

We vinden:

$$P(\text{defect} \mid \text{verwijderd}) = \frac{P(\text{defect en verwijderd})}{P(\text{verwijderd})} = \frac{0{,}08 \cdot 0{,}95}{0{,}08 \cdot 0{,}95 + 0{,}92 \cdot 0{,}10} = 0{,}4524.$$

3 Is de kans dat de klant een foutloos onderdeel krijgt nu verbeterd? Geef de correcte notatie en waarde van die kans.

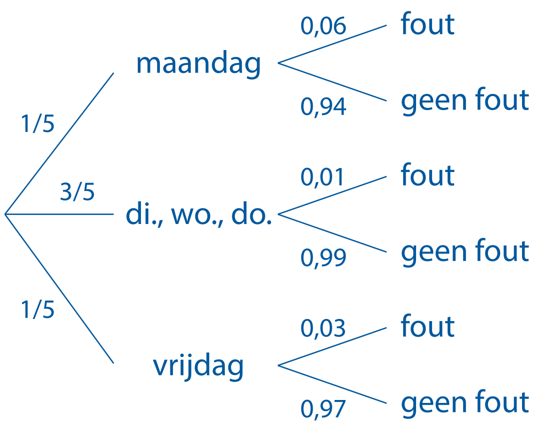
Vóór de installatie van het controlesysteem was de kans dat je als klant een foutloos onderdeel kreeg P(niet defect) = 0,92.

Nu is de kans P(niet defect | niet verwijderd) = $\dfrac{0{,}92 \cdot 0{,}90}{0{,}08 \cdot 0{,}05 + 0{,}92 \cdot 0{,}90} = 0{,}9952$. Als klant heb je nu een beduidend grotere kans om een foutloos onderdeel te ontvangen.

Opdracht 28 bladzijde 101

Van de radiotoestellen die op een maandag geassembleerd zijn, vertonen er 6 % een of andere constructiefout. Op een vrijdag bedraagt dat aantal 3 % en op een andere weekdag slechts 1 %. Tijdens het weekend wordt er niet gewerkt en elke dag worden evenveel radio's geproduceerd.

Als je nieuw radiotoestel een fout vertoont, wat is dan de kans dat het op een maandag gemaakt werd?



Uit een kansboom leiden we af: P(maandag | fout) = $\dfrac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}06}{\frac{1}{5} \cdot 0{,}06 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}03} = 0{,}5$.

Opdracht 29 bladzijde 107

Twee jongens en twee meisjes nemen plaats op een rij van vier stoelen.

Bereken de kans dat de eerste en de laatste stoel door ofwel twee jongens ofwel twee meisjes zijn bezet.

In totaal zijn er 4! mogelijke volgordes van de vier personen.

Zitten de jongens op de eerste en de laatste stoel, dan zijn er $2 \cdot 2 = 4$ mogelijke volgordes en idem als de meisjes op die stoelen zitten. Er zijn dus 8 gunstige volgordes.

De gevraagde kans is $\dfrac{8}{4!} = \dfrac{1}{3}$.

Opdracht 30 bladzijde 107

Je gooit met twee eerlijke zeszijdige dobbelstenen.

We gebruiken dezelfde schema's als in opdracht 4. De gunstige uitkomsten zijn met een kleur aangeduid.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

×	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

1 Wat is de kans dat som van de ogen even is?

$$P(\text{som even}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

2 Wat is de kans dat het product van de ogen even is?

$$P(\text{product even}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Opdracht 31 bladzijde 107

In een koelkast worden tien bloedzakjes bewaard: zes met bloed van het type A-positief en vier met bloed van het type A-negatief.

Als men lukraak drie zakjes uit de koelkast neemt, hoe groot is dan de kans dat er precies twee bij zijn met bloed van het type A-positief?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{3}{10}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{1}{6}$

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts, 2015)

We maken alle bloedzakjes verschillend.

Hoewel dat niet hoeft, voeren we bovendien volgorde in: op de toelatingsproef arts-tandarts mag geen rekentoestel gebruikt worden, en dan zijn variaties iets gemakkelijker te berekenen dan combinaties.

Er zijn in totaal $V_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$ mogelijke keuzes van drie bloedzakjes. De gunstige uitkomsten kunnen in de volgorde $++-$ of $+-+$ of $-++$ getrokken worden. Het aantal manieren waarop dat kan is $6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5$.

De kans is bijgevolg $\dfrac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$.

Opdracht 32 bladzijde 107

Uit de eerste tien letters van het alfabet worden lukraak vier verschillende letters gekozen. Daarna worden de gekozen letters willekeurig naast elkaar geplaatst.

Wat is de kans dat de vier letters in alfabetische volgorde staan?

Het aantal manieren om vier letters uit tien te kiezen is niet van belang.

Eens de vier letters gekozen zijn, zijn er $4! = 24$ manieren om ze te permuteren. Eén daarvan komt overeen met de alfabetische volgorde.

De gevraagde kans is daarom $\frac{1}{24}$.

Opdracht 33 bladzijde 107

Beschouw alle permutaties van de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5.

Wat is de kans dat het verkregen getal deelbaar is door 6?

Een getal is deelbaar door 6 als het deelbaar is door 2 en 3.

Alle $5!$ permutaties van 1, 2, 3, 4 en 5 zijn deelbaar door 3 aangezien $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ deelbaar is door 3. Om deelbaar te zijn door 2, moet het laatste cijfer van de permutatie 2 of 4 zijn. Met de technieken uit hoofdstuk 1 kunnen we narekenen dat er $2 \cdot 4!$ manieren zijn om een even permutatie te vormen.

De kans is daarom $\frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$.

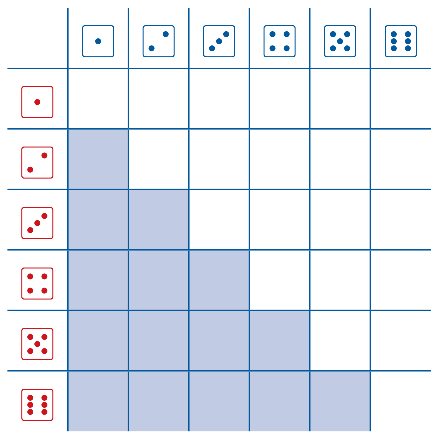
Opdracht 34 bladzijde 107

Je gooit een rode en een blauwe 20-zijdige dobbelsteen.

Wat is de kans dat het nummer van de rode dobbelsteen groter is dan het nummer van de blauwe?

Een schema zoals we gebruikten in de opdrachten 4 en 30 kan ook hier gebruikt worden, zij het nu dan in gedachten, omdat het te groot is om uit te schrijven.

Redeneren we eerst met een zeszijdige dobbelsteen, dan is het patroon meteen duidelijk: de diagonaal wordt geschrapt en de cellen onder die diagonaal zijn de gunstige.

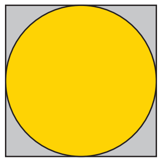


Bij twintigzijdige dobbelstenen zijn er 400 even waarschijnlijke uitkomsten. Na het verwijderen van de 20 cellen op de diagonaal, blijven er 380 cellen over en daarvan komen de onderste 190 overeen met situaties waarbij het nummer op de rode dobbelsteen groter is dan dat op de blauwe.

De gevraagde kans is $\frac{190}{400} = \frac{19}{40}$.

Opdracht 35 bladzijde 107

Een cirkel is ingeschreven in een vierkant.



Bereken de kans dat een punt dat willekeurig in het vierkant gekozen is, binnen de cirkel ligt.

Hier passen we een variant op de regel van Laplace toe:

P(punt binnen de cirkel) = $\frac{\text{gunstige oppervlakte}}{\text{totale oppervlakte}}$. (Die nieuwe regel is strikt genomen geen gevolg van de regel van Laplace, zoals geformuleerd in de eerste paragraaf, omdat die wet enkel bruikbaar is bij eindige uitkomstenverzamelingen.)

We kunnen het vierkant een zijde z of 1 of 2r geven (waarbij r dan de straal van de cirkel is). Kiezen we voor zijde 2r, dan is de verhouding van de oppervlakten $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$. Zoals vereist is die verhouding onafhankelijk van de concrete afmetingen.

Opdracht 36 bladzijde 108

In mijn portefeuille zitten vijf biljetten: 1 van 5 euro, 1 van 10 euro, 1 van 20 euro en 2 van 50 euro. Een dief steelt lukraak twee biljetten uit mijn portefeuille.

Hoe groot is de kans dat het gestolen bedrag meer dan 50 euro bedraagt?

A $\frac{3}{10}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{3}{5}$ **E** $\frac{7}{10}$

(Bron © VWO 2e ronde, 2014)

Door de twee biljetten van 50 euro verschillend te maken (noem ze 50_a en 50_b), zijn er $C_5^2 = 10$ even waarschijnlijke combinaties van twee biljetten. De gunstige uitkomsten zijn $50_a + 5$, $50_a + 10$, $50_a + 20$, $50_a + 50_b$, $50_b + 5$, $50_b + 10$ en $50_b + 20$. Dat er 7 gunstige uitkomsten zijn, zou ook via de complementregel berekend kunnen worden.

De gevraagde kans is dus $\frac{7}{10}$.

Opdracht 37 bladzijde 108

Wat is de kans dat je met drie van vier willekeurig gekozen letters uit het woord 'vriend' het woord 'den' kunt vormen?

Er zijn $C_6^4 = 15$ manieren om vier letters uit 'vriend' te kiezen. Onder die 15 zijn er 3 die de letters d, e en n bevatten: {d, e, n, v}, {d, e, n, r} en {d, e, n, i}.

De gevraagde kans is dus $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Opdracht 38 bladzijde 108

Een dobbelsteen in de vorm van een regelmatig achtvlak, met op de zijvlakken de cijfers 1 tot en met 8, wordt driemaal gegooid.

Wat is de kans dat het product van de uitkomsten gelijk is aan 72?

A $\frac{3}{16}$ **B** $\frac{3}{64}$ **C** $\frac{3}{128}$ **D** $\frac{3}{256}$ **E** $\frac{21}{512}$

(Bron © VWO 1e ronde, 2019)

Voeren we volgorde in, dan zijn er $8^3 = 512$ mogelijke uitkomsten.

Uit de priemfactorisatie $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ kan afgeleid worden dat er drie manieren zijn om 72 te schrijven als een product van drie factoren kleiner dan 8: $72 = 8 \cdot 3 \cdot 3$, $72 = 4 \cdot 3 \cdot 6$ en $72 = 2 \cdot 6 \cdot 6$. Voor de eerste en de laatste ontbinding zijn er telkens 3 mogelijke volgordes voor de factoren, voor de middelste zijn er $3! = 6$. Er zijn dus $3 + 6 + 3 = 12$ gunstige uitkomsten.

De gevraagde kans is $\frac{12}{512} = \frac{3}{128}$.

Opdracht 39 bladzijde 108

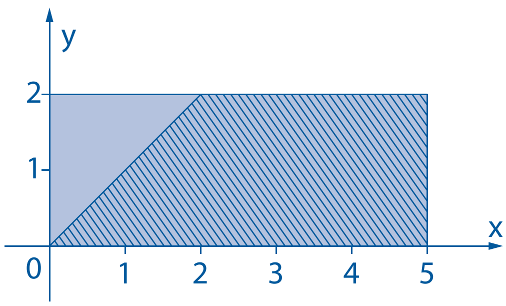
We kiezen een willekeurig reëel getal x uit het interval $[0, 5]$ en een willekeurig reëel getal y uit het interval $[0, 2]$.

Wat is de kans dat x groter is dan y?

A 40 % **B** 60 % **C** 70 % **D** 75 % **E** 80 %

(Bron © VWO 1e ronde, 2015)

Een klassieke oplossingswijze voor dergelijke vraagstukken is een meetkundige vertaling naar oppervlakten in een vlak, voorzien van een assenstelsel.



De mogelijke uitkomsten (x, y) zijn de punten van de rechthoek met basis 5 en hoogte 2, weergegeven in de figuur. De totale oppervlakte is 10.

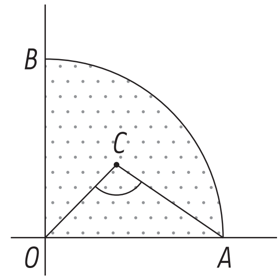
De gunstige uitkomsten zijn die punten van de rechthoek die onder de eerste deellijn liggen (gearceerde oppervlakte). De oppervlakte van dat trapezium is 8.

De gevraagde kans is bijgevolg $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ of 80 %.

Opdracht 40 bladzijde 108

In een cirkelsector *AOB* met middelpuntshoek gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ kiest men willekeurig een punt *C* zoals in de figuur.

Wat is de kans dat de hoek $O\hat{C}A$ stomp is?



A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{\pi}$ **E** $\frac{2}{3}$

(Bron © VWO 2e ronde, 2010)

In het vierde jaar leerden leerlingen dat als C op de halve cirkel met middellijn [OA] ligt, de hoek $O\hat{C}A$ recht is (omtrekshoek op een halve cirkel). Ligt C binnen die halve cirkel, dan zal $O\hat{C}A$ stomp zijn. De gevraagde kans is de verhouding van de oppervlakte van de halve cirkel met middellijn [OA] en de kwartcirkel AOB.

Stel dat $|OA| = r$, dan berekenen we de kans als $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\cdot\pi r^2} = \dfrac{1}{2}$.

Opdracht 41 bladzijde 108

1 Bereken de kans dat minstens twee leerlingen in een klas van twintig leerlingen dezelfde verjaardag hebben, als ze allemaal geboren zijn in 2007.

Voeren we volgorde in, dan zijn er in totaal 365^{20} mogelijke verjaardagen voor die 20 leerlingen.

Het aantal 20-tallen met minstens twee gelijke dagen berekenen we via de complementregel. Er zijn V_{365}^{20} manieren om 20 verschillende verjaardagen te kiezen, dus zijn er $365^{20} - V_{365}^{20}$ manieren om minstens twee gelijke dagen te verkrijgen.

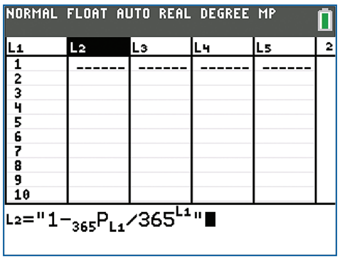
De gevraagde kans is $\dfrac{365^{20} - V_{365}^{20}}{365^{20}} = 1 - \dfrac{V_{365}^{20}}{365^{20}} = 0{,}4114$.

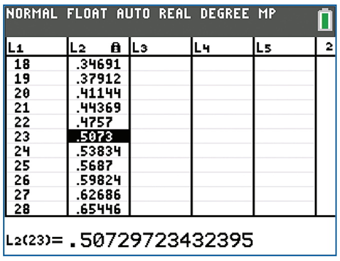
Merk op dat de leerlingen in het vierde jaar ook al de complementregel voor kansen ontmoetten en dus de tussenstap $\dfrac{365^{20} - V_{365}^{20}}{365^{20}}$ niet nodig hebben.

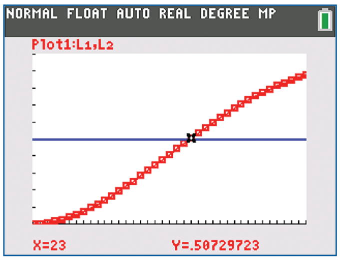
2 Vanaf hoeveel personen is de kans groter dan 50 %?

Hoewel veel leerlingen intuïtief verwachten dat je pas een kans van 50 % of meer zal krijgen voor een heel grote groep mensen (bijvoorbeeld 100 of ongeveer de helft van 365), blijkt het aantal veel lager te liggen.

Door te proberen, of met een rekentoestel of rekenblad, kun je nagaan dat de kans al meer dan 50 % is bij een groep van slechts 23 personen.







(Om een *overflow* te vermijden, mag de lijst L_1 enkel tot de waarde 39 gaan.)

Doordat dit beperkte aantal zo verrassend is, wordt dit vraagstuk de ‘verjaardagsparadox’ genoemd.

Opdracht 42 bladzijde 109

Een meerkeuzetoets bestaat uit tien vragen. Er zijn drie mogelijkheden per vraag, waarvan er altijd slechts één juist is. Per juist aangekruiste vraag krijg je 1 punt.

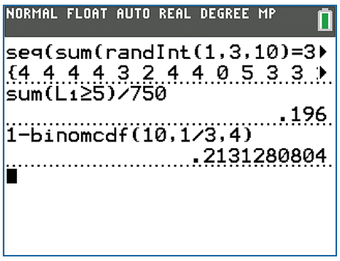
Om beide vragen met één simulatiecommando te kunnen beantwoorden, genereren we de score van de meerkeuzetoetsen en onderzoeken we later pas op welke toetsen de leerling geslaagd is.

Een mogelijk commando is **seq(sum(randInt(1,3,10)=3),X,1,750)→L_1**. Dit geeft de resultaten van 750 meerkeuzetoetsen die lukraak werden ingevuld.

1 Als je de toets lukraak invult, schat dan, via een simulatie, de kans dat je geslaagd bent.

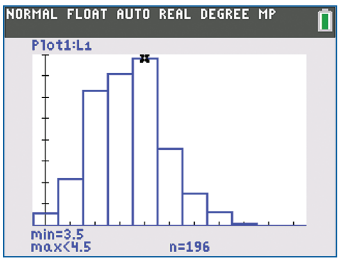
De kans dat een leerling geslaagd is, berekenen we als **sum(L_1⩾5)/750**. De uitgevoerde simulatie geeft als kans 0,196.

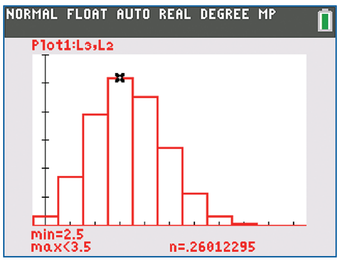
Dit is een redelijke schatting van de theoretische kans 0,2131.



2 Wat is volgens jouw simulatie de meest waarschijnlijke score die je op de toets zal halen?

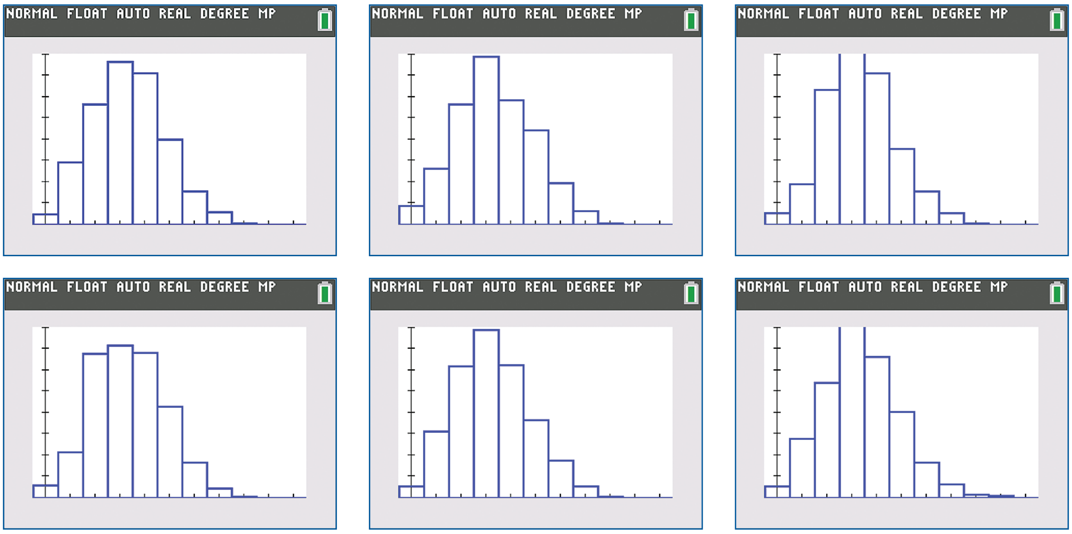
De meest frequente en dus meest waarschijnlijke score in deze simulatie is 4 op 10 (schermafdruk links), met een kans van $\frac{196}{750} = 0{,}2613$.





De schermafdruk rechts toont de theoretische (binomiale) kansverdeling. In werkelijkheid blijkt 3 op 10 de meest waarschijnlijke score te zijn, met kans 0,2601.

Een simulatie met slechts 750 herhalingen is duidelijk onvoldoende om zeer betrouwbare resultaten te verkrijgen. Ter illustratie van de wisselvalligheid van de resultaten hebben we de simulatie nog zes keer uitgevoerd en telkens de frequenties van de uitkomsten uitgezet in een staafdiagram, met dezelfde vensterinstellingen. De onderverdeling op de y-as is per 25.



In al deze simulaties is de meest waarschijnlijke uitkomst telkens 3 op 10, maar het is duidelijk dat er toch nogal wat variatie van de frequenties is. Deze variatie is niet het gevolg van de kwaliteit van de pseudorandomgenerator in het toestel, maar gewoon het resultaat van toeval.

Opdracht 43 bladzijde 109

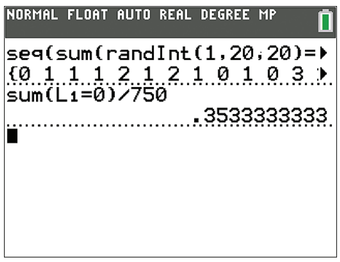
Verschillende onderzoeken leveren lichtjes verschillende cijfers op, maar een redelijke schatting is dat ongeveer 5 % van de bevolking homoseksueel is.

We gebruiken een commando dat toelaat beide vragen te beantwoorden:

seq(sum(rand(20)⩽ 0.05),X,1,750)→L$_1$ of **seq(sum(randInt(1,20,20)=1),X,1,750)→L$_1$**.

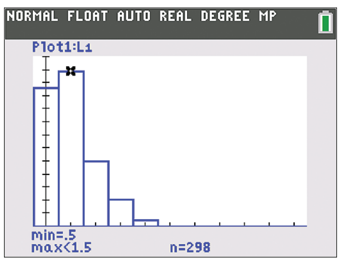
1 Schat via een simulatie de kans dat in een lukraak gekozen groep van 20 personen niemand homoseksueel is.

Als experimentele kans vinden we 0,3533, wat een goede benadering is van de theoretische kans 0,3585.



2 Welk aantal is volgens jouw simulatie het meest waarschijnlijk voor die groep van 20 personen?

De uitkomst met de hoogste frequentie (en dus kans) in deze simulatie is 1. Dit is ook wat we zouden vinden in de theoretische kansverdeling.



Opdracht 44 bladzijde 109

Je gooit éénmaal met vijf dobbelstenen. Bereken de kans op het verkrijgen van

1 twee gelijke en drie andere gelijke resultaten (bv. 2 - 3 - 3 - 2 - 2);

Voeren we volgorde in, dan zijn er 6^5 even waarschijnlijke uitkomsten. Er zijn 6 manieren om de twee gelijke getallen (aantal ogen) te kiezen. Er zijn $C_5^2 = 10$ manieren om de posities te kiezen waarop die twee gelijke getallen zullen staan. Vervolgens zijn er nog 5 mogelijkheden om de drie gelijke getallen te kiezen; die komen op de drie nog overblijvende posities. In totaal zijn er dus $6 \cdot 10 \cdot 5 = 300$ gunstige uitkomsten.

De gevraagde kans is $\dfrac{300}{6^5} = \dfrac{25}{648}$.

2 drie gelijke en twee andere verschillende resultaten (bv. 5 - 6 - 6 - 6 - 1);

Er zijn 6 manieren om de drie gelijke getallen te kiezen. Er zijn $C_5^3 = 10$ manieren om de posities van die drie gelijke getallen te kiezen. Vervolgens zijn er nog 5 mogelijke waarden voor de eerste vrije positie en 4 voor de tweede vrije positie. Het aantal gunstige uitkomsten is dus $6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$.

De kans op de gevraagde uitkomst is $\dfrac{1200}{6^5} = \dfrac{25}{162}$.

3 juist vier gelijke resultaten (bv. 6 - 6 - 5 - 6 - 6);

Er zijn 6 mogelijke getallen voor de vier gelijke resultaten en $C_5^4 = 5$ mogelijke posities voor die getallen. Voor de overblijvende positie zijn er 5 mogelijke waarden.

De kans is $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 5}{6^5} = \dfrac{25}{1296}$.

4 vijf opeenvolgende resultaten (bv. 2 - 1 - 4 - 3 - 5);

Er zijn al 2 mogelijkheden om vijf opeenvolgende getallen te kiezen en per keuze zijn er $5! = 120$ permutaties van die getallen.

De gevraagde kans is dus $\dfrac{2 \cdot 5!}{6^5} = \dfrac{5}{162}$.

5 precies vier opeenvolgende resultaten (bv.: 2 - <u>4</u> - <u>2</u> - <u>3</u> - <u>5</u>).

De vier opeenvolgende getallen zouden 1, 2, 3 en 4 kunnen zijn. Deze kunnen aangevuld worden met het getal 6 en dan zijn er $5! = 120$ volgorden. Ze kunnen ook aangevuld worden met een 1, 2, 3 of 4 en dan zijn er telkens $\overline{P}_5^{2,1,1,1} = \dfrac{5!}{2} = 60$ mogelijke volgorden. In totaal zijn er dus $120 + 4 \cdot 60 = 360$ mogelijkheden voor 1, 2, 3 en 4.

Je krijgt ook 360 mogelijkheden wanneer de vier opeenvolgende getallen 3, 4, 5 en 6 zijn.

Voor 2, 3, 4 en 5 is het enkel mogelijk aan te vullen met 2, 3, 4 of 5, wat telkens 60 mogelijkheden oplevert.

Het aantal gunstige uitkomsten is dus $360 + 360 + 240 = 960$.

De kans is $\dfrac{960}{6^5} = \dfrac{10}{81}$.

Opdracht 45 bladzijde 109

Bij een bridgespel worden 52 kaarten gelijk verdeeld onder vier spelers.

Bereken de kans dat elke speler precies één aas heeft.

De vier azen kunnen al op 4! manieren verdeeld worden over de vier spelers. De eerste speler kan op C_{48}^{12} manieren 12 kaarten erbij krijgen, voor de tweede is dat C_{36}^{12}, voor de derde C_{24}^{12} en de vierde speler krijgt dan de overblijvende twaalf kaarten.

De kans op precies één aas voor elke speler is $\dfrac{4! \cdot C_{48}^{12} \cdot C_{36}^{12} \cdot C_{24}^{12}}{C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13}} = 0{,}1055.$

Opdracht 46 bladzijde 109

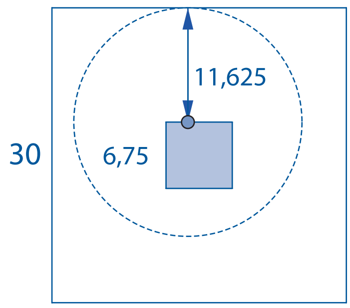
Een eenvoudig kermisspelletje gaat als volgt: vanop een afstand van 1,5 m gooi je een muntstuk van 1 euro op een tafel waarop vierkantjes van 3 cm zijn aangebracht. De diameter van een munt van 1 euro is 23,25 mm.

Als je euro volledig binnen een ruitje landt, krijg je een briefje van 5 euro, maar ben je je muntstuk kwijt. Anders verlies je gewoon je euro.

In de veronderstelling dat je muntstuk op de tafel terechtkomt, wat is je kans om 5 euro te krijgen?

Het muntstuk zal volledig binnen een ruitje van 30 mm vallen, wanneer het middelpunt van het muntstuk binnen het centrale vierkantje van 30 – 23,25 = 6,75 millimeter ligt, zoals aangegeven op de figuur.

De kans is de verhouding van de gunstige tot de totale oppervlakte: $\dfrac{6{,}75^2}{30^2} = 0{,}0506.$

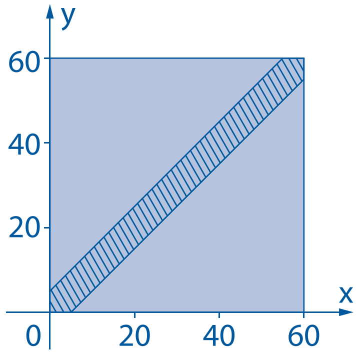


Opdracht 47 bladzijde 110

In het cowboydorpje Harmony is de traditie van het duel levend gehouden, maar er vallen zelden slachtoffers. Wanneer twee personen elkaar tot een duel hebben uitgedaagd, komen beiden op een lukraak ogenblik tussen 5u en 6u ochtends aan op de afgesproken plek. Ze vertrekken daar eervol precies vijf minuten later, tenzij de tegenstander in dat tijdsinterval aankomt. In dat geval gaat het duel door.

Wat is de kans dat een afgesproken duel tot een vuurgevecht leidt?

Aangezien de variabele continu is, is een meetkundige vertaling hier opnieuw interessant (zie ook opdracht 39). De mogelijke aankomsttijden x en y, uitgedrukt in minuten ten opzichte van 5u, komen overeen met punten (x, y) in het vierkant $[0,60] \times [0,60]$ in het vlak, voorzien van een orthonormaal assenstelsel.



Er is een vuurgevecht wanneer $x - 5 \leqslant y \leqslant x + 5$ (of, equivalent, wanneer $y - 5 \leqslant x \leqslant y + 5$). Merk op dat $\leqslant$ vervangen mag worden door <. Meetkundig vinden we dat de gunstige punten in de strook tussen de rechten met vergelijking $y = x - 5$ en $y = x + 5$ liggen.

De kans op een vuurgevecht is de verhouding van beide oppervlakten: $\dfrac{60^2 - 55^2}{60^2} = 0{,}1597$.

Opdracht 48 bladzijde 110

Een deelnemer van een spelletjesprogramma krijgt vijf voorwerpen te zien, die elk een ander bedrag waard zijn. Hij krijgt vijf prijsetiketten en moet het juiste etiket op elk voorwerp zien te plakken. Hij heeft geen idee van hun waarde, dus brengt hij de etiketten lukraak aan.

Wat is de kans dat hij precies twee etiketten juist heeft aangebracht?

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{5}$ **C** $\frac{3}{10}$ **D** $\frac{2}{5}$ **E** $\frac{1}{2}$

(Bron © St. Cloud State University Math Contest, 2018)

We leggen de vijf voorwerpen naast elkaar en redeneren enkel met de prijsetiketten.

Er zijn $5! = 120$ manieren om die op de voorwerpen aan te brengen.

Om het aantal gunstige manieren te berekenen, kiezen we eerst twee objecten die de juiste prijs opgeplakt krijgen: dit kan op $C_5^2 = 10$ manieren. De drie overblijvende prijsetiketten (noem ze a, b en c) van de drie overblijvende objecten (in de volgorde A-B-C) moeten nu zó aangebracht worden dat geen enkel bij het juiste object terechtkomt. Door te proberen, wordt snel duidelijk dat dit maar op twee manieren kan: c-a-b en b-c-a. In totaal zijn er dus $10 \cdot 2 = 20$ gunstige manieren.

De kans is $\dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$.

Opdracht 49 bladzijde 111

We werpen een muntstuk en een dobbelsteen. We beschouwen de gebeurtenissen *A* 'het muntstuk toont de muntzijde' en *B* 'de dobbelsteen toont 2 of 6'.

Bereken de kans van *A*, *B*, niet *A*, niet *B*, *A* en *B*, *A* en niet *B*.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(\text{niet } A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(\text{niet } B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $P(A \text{ en } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,
$P(A \text{ en niet } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Opdracht 50 bladzijde 111

Stel dat een dobbelsteen zó vervalst is dat de kans op een 6 gooien 50 % is en de kans op een 5 gooien 22 %. De andere uitkomsten hebben gelijke kansen.

Bepaal nu de kans dat bij het gooien van deze dobbelsteen

1 het resultaat oneven is;

$P(1 \text{ of } 3 \text{ of } 5) = 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}22 = 0{,}36$

2 het resultaat groter is dan 4;

$P(5 \text{ of } 6) = 0{,}22 + 0{,}50 = 0{,}72$

3 het resultaat een priemgetal is.

$P(2 \text{ of } 3 \text{ of } 5) = 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}22 = 0{,}36$

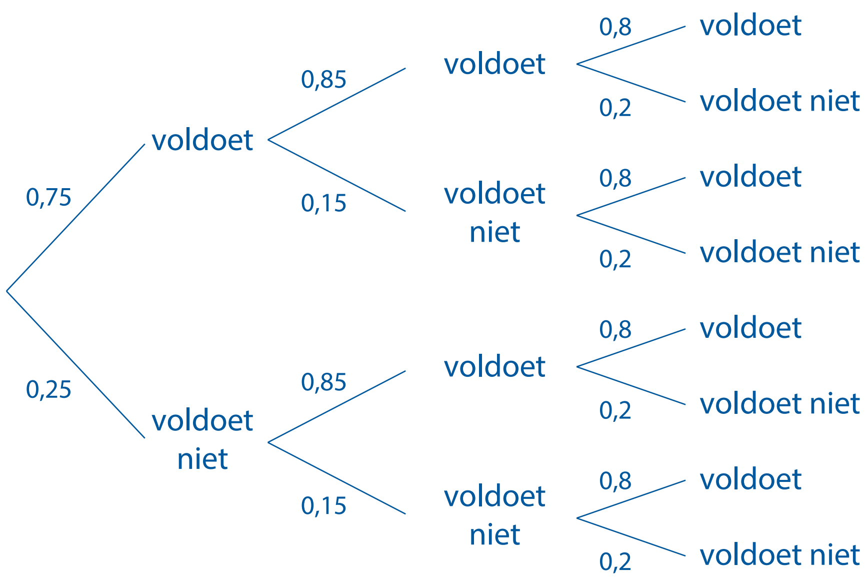
Opdracht 51 bladzijde 111

In een fabriek wordt hotelporselein vervaardigd. Er zijn drie controlebeurten. Bij de eerste controle wordt de vorm bekeken: 25 % voldoet niet aan de gestelde norm. Bij de tweede controle is de kleur aan de beurt: 85 % voldoet. Bij de derde controle worden oppervlaktefouten opgespoord: nu voldoet 80 %.

Alle porselein dat de drie controlebeurten gunstig doorstaat, wordt verkocht als eerste keus. Is slechts een van de controles negatief, dan hebben we tweede keus. Porselein met slechts één positieve controle wordt voor een prikje verkocht als derde keus. De rest wordt meteen vernietigd.

Als men nu willekeurig een stuk porselein kiest, bereken dan de kans dat het

We stellen de gegevens voor in een kansboom.



1 eerste keus is;

P(eerste keus) $= 0{,}75 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}51$

2 tweede keus is.

P(tweede keus) $= 0{,}75 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}75 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}3875$

Opdracht 52 bladzijde 111

Een meerkeuzetoets bestaat uit vijf vragen. Elke vraag bevat drie antwoordmogelijkheden. Je moet op elke vraag gokken.

Bereken de kans dat

1 alle vragen juist zijn ingevuld;

$$\text{P(alle vragen juist)} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

2 minstens vier vragen juist beantwoord zijn.

$$\text{P(minstens 4 vragen juist)} = \text{P(4 of 5 juist)} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243}$$

Opdracht 53 bladzijde 112

Een gezin heeft twee kinderen. De kans op de geboorte van een jongen en een meisje is even groot.

Als je weet dat minstens één ervan een meisje is, wat is dan de kans dat het gezin twee dochters heeft?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{3}{4}$

(Bron © ACTM State Exam Statistics, 2016)

Er zijn vier even waarschijnlijke gezinssituaties JJ, JM, MJ en MM (J staat voor jongen, M voor meisje). Door het gegeven wordt de uitkomstenverzameling beperkt tot de drie situaties JM, MJ en MM, waarvan één overeenkomt met twee meisjes.

De kans op twee dochters is dus $\frac{1}{3}$.

Opdracht 54 bladzijde 112

Gooien we twee keer een eerlijke munt op, dan is een mogelijke uitkomstenverzameling $U = \{KK, KM, MK, MM\}$ waarbij K staat voor kop en M voor munt. Stel dat A staat voor 'twee keer kop', B voor 'minstens één keer munt' en C voor 'minstens één keer kop'.

1 Bereken de kans op A.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#U} = \frac{1}{4}$$

2 Als je weet dat *B* zich heeft voorgedaan, wat is dan de kans op *A*?

$$P(A\,|\,B) = \frac{\#(A \text{ en } B)}{\#B} = \frac{0}{3} = 0$$

3 Als je weet dat *C* zich heeft voorgedaan, wat is dan de kans op *A*?

$$P(A\,|\,C) = \frac{\#(A \text{ en } C)}{\#C} = \frac{1}{3}$$

Opdracht 55 bladzijde 112

Op een website met Vlaamse onderwijsstatistieken staan de volgende gegevens voor het schooljaar 2017-2018 in verband met de gevolgde onderwijsvorm (aso, bso, kso en tso). De eerste tabel bevat absolute frequenties, de tweede relatieve.

	aso	bso	kso	tso	TOTAAL
Belg	110 677	61 132	5 805	79 984	**257 598**
niet-Belg	5 296	9 705	449	5 348	**20 798**
TOTAAL	**115 973**	**70 837**	**6 254**	**85 332**	**278 396**

	aso	bso	kso	tso	TOTAAL
jongens	0,1821	0,1416	0,0078	0,1771	**0,5086**
meisjes	0,2345	0,1129	0,0146	0,1294	**0,4914**
TOTAAL	**0,4166**	**0,2544**	**0,0225**	**0,3065**	**1,0000**

Bereken de kans dat

1 een leerling in het bso zit;

$$P(\text{bso}) = \frac{\#(\text{bso})}{\#(\text{totaal})} = \frac{70\,837}{278\,396} = 0{,}2544$$

2 een leerling die niet-Belg is, in het bso zit;

$$P(\text{bso}\,|\,\text{niet-Belg}) = \frac{\#(\text{bso en niet-Belg})}{\#(\text{niet-Belg})} = \frac{9\,705}{20\,798} = 0{,}4666$$

3 een leerling die in het bso zit, Belg is;

$$P(\text{Belg}\,|\,\text{bso}) = \frac{\#(\text{Belg en bso})}{\#(\text{bso})} = \frac{61\,132}{70\,837} = 0{,}8630$$

4 een leerling die kso volgt, een meisje is;

$$P(\text{meisje}\,|\,\text{kso}) = \frac{P(\text{meisje en kso})}{P(\text{kso})} = \frac{0{,}0146}{0{,}0225} = 0{,}6489$$

5 een leerling kso volgt en een meisje is;

$$P(\text{meisje en kso}) = 0{,}0146$$

6 een jongen geen aso volgt.

$$P(\text{geen aso}\,|\,\text{jongen}) = 1 - P(\text{aso}\,|\,\text{jongen}) = 1 - \frac{P(\text{aso en jongen})}{P(\text{jongen})} = 1 - \frac{0{,}1821}{0{,}5086} = 0{,}6420$$

Opdracht 56 bladzijde 113

Uit een goed geschud pak van 52 kaarten worden lukraak vijf kaarten genomen.

Wat is de kans, afgerond op een procent, dat er minstens één heer tussen zit?

A 8 % **B** 13 % **C** 19 % **D** 25 % **E** 34 %

(Bron © Elon University Math Contest, 2016)

$$\text{P(minstens één heer)} = 1 - \text{P(geen heer)} = 1 - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} = 0{,}34$$

Opdracht 57 bladzijde 113

Stel dat A en B elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn en $P(A) = 0{,}3$ en $P(B) = 0{,}5$.

Bereken:

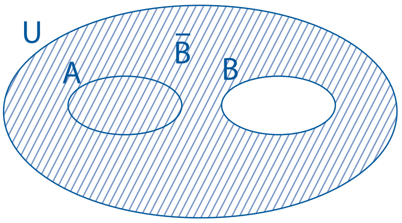
1 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}7$

2 $P(A \text{ en } B) = 0$, per definitie

3 $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0 = 0{,}8$

4 $P(A \text{ en } \overline{B})$

Voor deze kans is een voorstelling met een venndiagram nuttig. De verzamelingen A en B hebben geen doorsnede (een lege doorsnede). Het gearceerde deel stelt $\overline{B}$ voor. De doorsnede van A en $\overline{B}$ is duidelijk gelijk aan A.



$P(A \text{ en } \overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) = 0{,}3$

Opdracht 58 bladzijde 113

Linda is 31 jaar oud, woont alleen, heeft een uitgesproken mening en is zeer intelligent. Ze heeft een diploma filosofie. Als studente was ze zeer begaan met maatschappelijke thema's als discriminatie en sociale onrechtvaardigheid. Ze stapte ook mee in anti-oorlogsbetogingen.

Welke van de volgende twee uitspraken is het meest waarschijnlijk? Waarom?

A Linda werkt bij de bank.

B Linda werkt bij de bank en is actief in de vrouwenbeweging.

(Bron © Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow.*)

Hoewel iemand als Linda een bovengemiddelde kans heeft om actief te zijn in de vrouwenbeweging, zegt de kansrekening ons dat de kans op werken bij de bank én actief zijn in de vrouwenbeweging altijd kleiner is dan de kans op werken bij de bank.

Met symbolen:

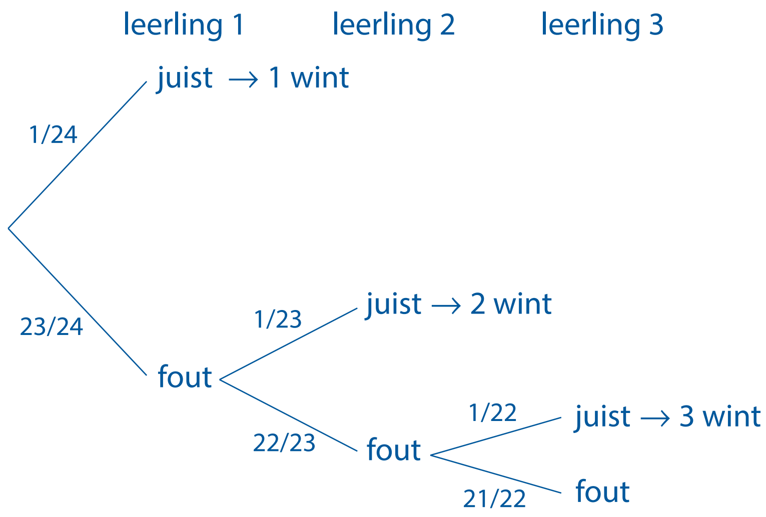
$$\begin{aligned} &\text{P(werken bank en actief vrouwenbeweging)} \\ &= \text{P(werken bank)} \cdot \underbrace{\text{P(actief vrouwenbeweging | werken bank)}}_{<1} \\ &< \text{P(werken bank)} \end{aligned}$$

Opdracht 59 bladzijde 113

Een leerkracht wil een prijs verloten in een klas van 24 leerlingen. Ze schrijft een getal van 1 tot en met 24 op dat ze willekeurig heeft bepaald en laat de leerlingen een voor een raden. Elke leerling zegt een getal hardop en is het getal juist, dan krijgt die meteen de prijs en is de loting afgelopen. Het zijn slimme leerlingen, dus is er geen enkele die een getal zegt dat al eens gegeven werd.

Is deze manier van verloten eerlijk? Verklaar met een berekening.

In de kansboom en de berekeningen geven we elke leerling een nummer, van 1 tot 24.



$$P(1\ \text{wint}) = \frac{1}{24}$$

$$P(2\ \text{wint}) = P(1\ \text{fout}) \cdot P(2\ \text{juist} \mid 1\ \text{fout}) = \frac{23}{24} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$$

$$P(3\ \text{wint}) = P(1\ \text{fout}) \cdot P(2\ \text{fout} \mid 1\ \text{fout}) \cdot P(3\ \text{juist} \mid 1\ \text{fout en 2 fout}) = \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{24}$$

Enzovoort. Elke leerling heeft een even grote kans om te winnen, deze werkwijze is eerlijk.

Opdracht 60 bladzijde 113

Tijdens de zomermaanden heeft men de binnenkant van de etiketten op de flesjes van je favoriete frisdrank een nummer gegeven. 50 % draagt nummer ‘1’, 25 % nummer ‘2’, 15 % nummer ‘3’ en 10 % nummer ‘4’.

Wanneer je vier verschillende nummers op een kaartje kleeft, krijg je een gratis flesje frisdrank.

Wat is de kans dat je na het kopen van exact vier flesjes een gratis flesje zal ontvangen?

Het is nuttig een kansboom te beginnen tekenen, met vier vertakkingen per knoop en vier niveaus.

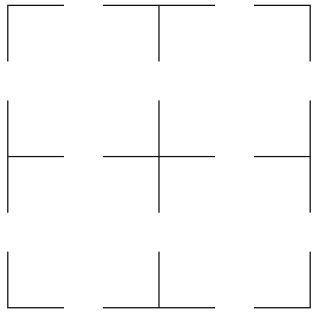
Er zijn $4!$ takken die met vier verschillende nummers overeenkomen en elke tak heeft als kans $0{,}50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}10$.

De gevraagde kans is $4! \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}10 = 0{,}045$.

Opdracht 61 bladzijde 114

In de figuur zie je een gebouw met vier kamers. Adrian staat binnen en gaat drie keer willekeurig door een deuropening.

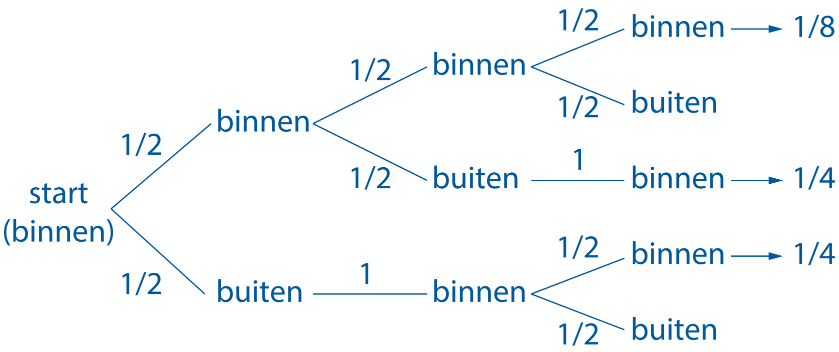
Wat is de kans dat hij daarna opnieuw binnen staat?



A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{3}{8}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{5}{8}$ **E** $\frac{4}{5}$

(Bron © VWO 1e ronde, 2017)

We plaatsen de mogelijke evolutie in een kansboom:



Hieruit lezen we af dat de gevraagde kans $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ is.

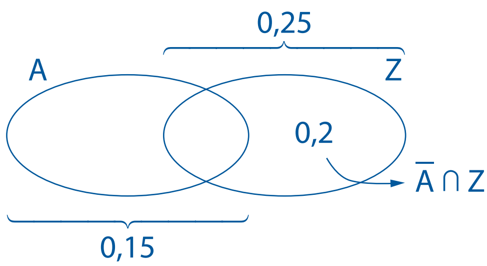
Opdracht 62 bladzijde 114

Een muzikale directeur wil in haar school een musical creëren en wil daar ook graag leerlingen in laten optreden. Wie wenst deel te nemen, moet toonvast kunnen zingen en ook kunnen acteren. Na enkele audities wordt duidelijk dat de kans dat een leerling voldoende kan acteren slechts 15 % is. Bovendien is de kans dat een leerling vals of onvoldoende zuiver zingt 75 %. De kans dat een leerling goed kan zingen, maar niet kan acteren, is 20 %.

Stel A de gebeurtenis 'de leerling kan acteren' en Z 'de leerling kan zingen'.

Gegeven is dat P(A) = 0,15, P(Z) = 0,25 en

P(niet-A en Z) = $P(\bar{A} \cap Z)$ = 0,2. Dit kan in een venndiagram voorgesteld worden.



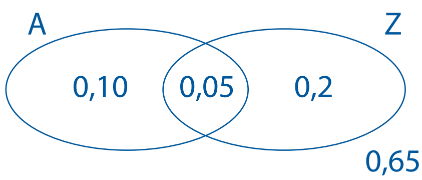
Met de gegeven informatie kan de kans van elke andere deelverzameling snel berekend worden.

1 Wat is de kans dat een leerling kan zingen of acteren of beide?

P(Z of A) = $P(Z \cup A)$ = 0,35

2 Wat is de kans dat een leerling kan zingen en acteren?

P(Z en A) = $P(Z \cap A)$ = 0,05

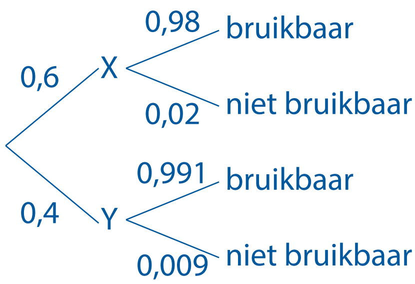


Opdracht 63 bladzijde 114

Voor het vervaardigen van sleutels van het type A kan men twee machines laten werken. Machine X zorgt voor een dagproductie van 60 %. De overige 40 % worden door machine Y gemaakt. Steekproeven geven aan dat machine X 2 % onbruikbare sleutels maakt en machine Y 0,9 %.

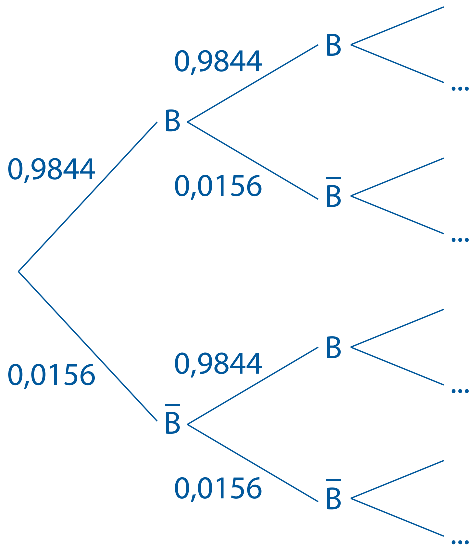
Frank wil op het einde van de dag nog even een steekproef doen en neemt aselect vijf geproduceerde sleutels.

Met een eerste kansboom berekenen we de kans dat een willekeurige sleutel bruikbaar is.



P(bruikbaar) = 0,6 · 0,98 + 0,4 · 0,991 = 0,9844.

Noteren we 'bruikbaar' verkort als B en 'niet bruikbaar' als $\overline{B}$, dan geven de eerste stappen van een tweede kansboom weer hoe we de kansen voor vijf sleutels moeten berekenen.



1 Hoe groot is de kans dat alle sleutels bruikbaar zijn?

Deze uitkomst komt overeen met één tak, met kans $0{,}9844^5 = 0{,}9244$.

2 Hoe groot is de kans op slechts één bruikbare sleutel?

Met deze uitkomst komen 5 takken overeen, elk met kans $0{,}9844 \cdot 0{,}0156^4$, zodat de gevraagde kans $5 \cdot 0{,}9844 \cdot 0{,}0156^4 = 2{,}915 \cdot 10^{-7}$ is.

3 Hoe groot is de kans op minstens één bruikbare sleutel?

Met de complementregel vinden we:

P(minstens één bruikbaar) = 1 – P(geen bruikbaar) = $1 - 0{,}0156^5 = 1 - 9{,}239 \cdot 10^{-10} \approx 1$.

Opdracht 64 bladzijde 114

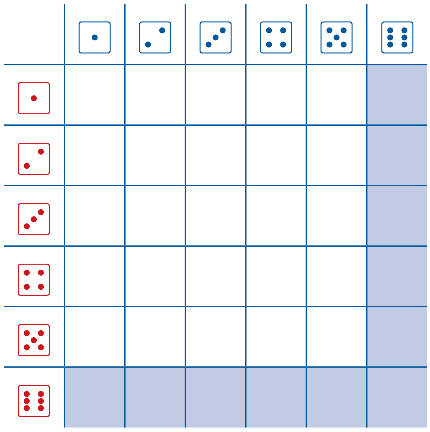
Miro gooit twee dobbelstenen.

1 Je kunt de dobbelstenen niet zien, maar hij zegt dat minstens één van de uitkomsten een zes is.

Wat is de kans dat met beide dobbelstenen zes werd gegooid?

De tabel laat zien dat de uitspraak van Miro de uitkomstenverzameling beperkt tot 11 uitkomsten, die alle even waarschijnlijk zijn.

De kans op een dubbele zes is daarom $\frac{1}{11}$.



2 Stel dat na het gooien een van de dobbelstenen zichtbaar wordt en je ziet dat het een zes is.

Wat is de kans dat met beide dobbelstenen zes werd gegooid?

De informatie waarover je beschikt, is nu anders. Je ziet één dobbelsteen. De uitkomstenverzameling is in deze situatie beperkt tot de 6 uitkomsten van de onzichtbare dobbelsteen. De kans op een tweede zes is nu $\frac{1}{6}$.

Opdracht 65 bladzijde 115

Een lade bevat tien verschillende paren handschoenen. Je kiest lukraak zes handschoenen.

Wat is de kans dat je geen enkel passend paar handschoenen genomen zal hebben?

A $\frac{C_{10}^{6}}{C_{20}^{6}}$ **B** $\frac{2 \cdot C_{10}^{6}}{C_{20}^{6}}$ **C** $\frac{2^6 \cdot C_{10}^{6}}{C_{20}^{6}}$ **D** geen van de vorige

(Bron © ACTM State Exam Statistics, 2016)

Er zijn C_{20}^{6} manieren om zes handschoenen te kiezen.

Een gunstige uitkomst kun je in twee stappen vormen: kies eerst 6 van de 10 paren (dit kan op C_{10}^{6} manieren) en kies dan uit elk paar een van beide handschoenen (dit kan op 2^6 manieren).

De gevraagde kans is $\frac{C_{10}^{6} \cdot 2^6}{C_{20}^{6}}$.

Opdracht 66 bladzijde 115

Een dobbelsteen is gemaakt door op een kubus zelfklevende stippen aan te brengen. Eén van de 21 stippen is echter verdwenen.

Hoe groot is de kans nu om in één worp 6 stippen te gooien met deze dobbelsteen met 20 stippen?

A $\frac{5}{7}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{10}{63}$ **D** $\frac{5}{36}$ **E** $\frac{5}{42}$

(Bron © VWO 1e ronde, 2012)

Het vlak met zes stippen moet ze nog alle zes hebben, dus moet het een van de 15 overige stippen zijn die verdwenen is. Die kans is $\frac{15}{21}$. De kans om een zes te gooien is $\frac{1}{6}$.

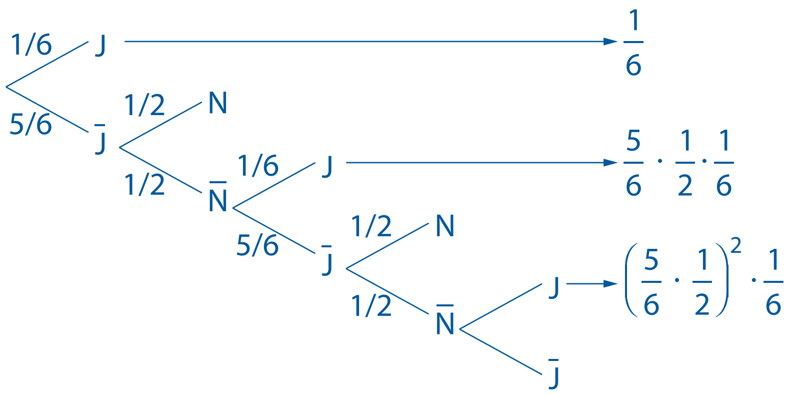
De gevraagde kans is bijgevolg $\frac{15}{21} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$.

Opdracht 67 bladzijde 115

Jonas en Nele gooien om beurten met een dobbelsteen. Nele wint wanneer zij een oneven resultaat gooit en Jonas wint wanneer hij een zes gooit. Jonas mag beginnen.

Deze opgave is enkel zinvol indien leerlingen al meetkundige reeksen behandelden, of over een computeralgebrasysteem beschikken.

Een kansboom laat toe het spelverloop en de bijbehorende kansen overzichtelijk weer te geven. We gebruiken de notaties J voor 'Jonas wint' en $\overline{J}$ voor 'Jonas wint niet' en analoog voor Nele. Enkel de eerste stappen zijn weergegeven.



1 Bereken de kans dat Nele het spel wint bij haar eerste spelbeurt.

De kans dat Nele wint bij haar eerste spelbeurt, is $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$.

2 Bereken de kans dat Jonas het spel wint bij de vijfde gooibeurt (dus zijn derde spelbeurt).

De kans dat Jonas wint bij zijn derde spelbeurt, is $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{864}$.

3 Bereken de kans dat Jonas wint.

De kans dat Jonas wint, is $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{7}$.

4 Bereken de kans dat Nele wint.

De kans dat Nele wint, vinden we met de complementregel: $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Opdracht 68 bladzijde 116

Deze opdracht is enkel zinvol indien leerlingen al de leerstof over genetica behandelden in de les biologie.

Populatiegenetica: regel van Hardy en Weinberg bij kruisingen

Stel dat p en q de procentuele kansen zijn van een allelenpaar A en a in een populatie (een allel is een variant van een gen die voor een alternatief zorgt bij een erfelijk kenmerk). De kansen van de drie mogelijke genotypes AA, Aa en aa zijn respectievelijk p^2, $2pq$ en q^2. Hierbij moeten – binnen de populatie – de kruisingen wel plaatsvinden volgens het toeval. Bovendien mag het evenwicht binnen de populatie niet verstoord worden door bijvoorbeeld een selectie, een bloedverwantschap …

1 Resuspositief en resusnegatief

Van de bevolking heeft 16 % resusnegatief bloed en 84 % resuspositief. Dit erfelijk kenmerk is afhankelijk van een gen (a). Resuspositief is dominant, dit wil zeggen dat iemand die resuspositief is van het type AA of Aa kan zijn; iemand van het type aa is dus resusnegatief.

Bereken de kans op de drie mogelijke genotypes (AA, Aa en aa).

Uit het gegeven volgt dat $P(aa) = q^2 = 0{,}16$ zodat $q = 0{,}4$ en $p = 0{,}6$. Bijgevolg is $P(AA) = p^2 = 0{,}36$ en $P(Aa) = 2pq = 0{,}48$.

2 Gespleten gehemelte

In een populatie komt gespleten gehemelte, te wijten aan een gen, voor bij één op 2500 personen. Een gespleten gehemelte is recessief, dit wil zeggen dat die persoon van het type aa is.

a Bereken de kansen van voorkomen van de drie genotypes.

Uit het gegeven volgt dat $P(aa) = q^2 = \frac{1}{2500} = 0{,}0004$, zodat $q = 0{,}02$ en $p = 0{,}98$.

Hieruit volgt dat $P(AA) = p^2 = 0{,}9604$ en $P(Aa) = 2pq = 0{,}0392$.

b Hoeveel van 2500 personen zijn drager van het allel voor een gespleten gehemelte?

De kans dat iemand drager is, is $P(aa \text{ of } Aa) = 0{,}0004 + 0{,}0392 = 0{,}0396$.
Op 2500 personen kun je dus $0{,}0396 \cdot 2500 = 99$ dragers van het gen verwachten.

Opdracht 69 bladzijde 116

Als een gebeurtenis A waarschijnlijker wordt als gevolg van B, dan zal B ook waarschijnlijker worden als gevolg van A.

In symbolen: als $P(A \mid B) > P(A)$, dan zal $P(B \mid A) > P(B)$.

Bewijs deze eigenschap. Je mag aannemen dat $P(A) \neq 0$ en $P(B) \neq 0$.

Uit $P(A \mid B) > P(A)$ volgt, wegens de definitie van voorwaardelijke kans dat $\frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} > P(A)$.

Aangezien kansen positief zijn, blijft de ongelijkheid behouden bij vermenigvuldigen of delen met kansen, zodat $\frac{P(A \text{ en } B)}{P(A)} > P(B)$ of $P(B \mid A) > P(B)$.

Opdracht 70 bladzijde 117

Je trekt aselect een kaart uit een boek van 52 speelkaarten, noteert het resultaat, en trekt opnieuw een kaart, zonder de vorige terug te leggen.

Bereken de kans dat

1 de eerste kaart een heer is en de tweede kaart een dame;

$$P(\text{eerst heer, dan dame}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

2 beide kaarten harten zijn;

$$P(\text{beide kaarten harten}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

3 minimum één kaart een aas is.

$$P(\text{minstens één aas}) = 1 - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \frac{33}{221}$$

Opdracht 71 bladzijde 117

De tabel die we in opdracht 4 gebruikten, laat toe de kansen op de verschillende sommen sneller te bepalen dan met de som- en productregel.

Je gooit twee keer na elkaar met twee eerlijke dobbelstenen. Bereken de kans dat

1 je de eerste keer som 2 gooit en de tweede keer som 3;

$$P(\text{eerst som 2, dan som 3}) = \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} = \frac{1}{648}$$

2 je twee keer som 5 gooit;

$$P(\text{2 keer som 5}) = \left(\frac{4}{36}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

3 je minstens één keer som 7 gooit.

$$P(\text{minstens één keer som 7}) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

Opdracht 72 bladzijde 117

Uit een boek van 52 kaarten trek je lukraak een kaart. Gegeven zijn de gebeurtenissen:

A: de kaart is een schoppen;
B: de kaart is zwart;
C: de kaart is een heer.

Onderzoek of A en B, A en C, B en C al dan niet onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ en $P(A\,|\,B) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$, zodat A en B afhankelijk zijn.

Uit $P(A\,|\,C) = \frac{1}{4}$ volgt dat A en C onafhankelijk zijn.

Ook B en C zijn onafhankelijk, want $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ en $P(B\,|\,C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Opdracht 73 bladzijde 117

Je gooit twee dobbelstenen. Gegeven zijn de gebeurtenissen:

A: de som van de twee worpen is zeven;
B: de som van de twee worpen is vijf;
C: de eerst worp is vier.

Onderzoek of *A* en *B*, *A* en *C*, *B* en *C* al dan niet onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

Uit $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ en $P(A \mid B) = 0$, volgt dat A en B afhankelijk zijn.

Uit $P(A \mid C) = \frac{1}{6}$ volgt dat A en C onafhankelijk zijn.

Uit $P(B) = \frac{5}{36}$ en $P(B \mid C) = \frac{1}{6}$ volgt dat B en C afhankelijk zijn.

Opdracht 74 bladzijde 117

Matteo en Giel dammen al heel lang samen. Die jarenlange ervaring leert dat de kans dat Matteo een partijtje dammen wint ongeveer 65 % is.

Bereken de kans dat Matteo exact twee van drie spelletjes wint.

Dit is te vertalen naar het vaasmodel, waarbij we trekken met teruglegging.

De gevraagde kans is $3 \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}35 = 0{,}4436$.

Opdracht 75 bladzijde 117

Een koninklijke muntslager verdeelt munten per honderd in kistjes. In elk kistje doet hij echter één valse munt en de goede houdt hij bij. De koning ruikt onraad en controleert uit elk van de honderd kistjes lukraak één munt.

Wat is de kans dat de muntslager niet ontmaskerd wordt?

De muntslager wordt niet ontmaskerd indien de koning uit elk van de honderd kistjes telkens een goede munt neemt. Die kans is $0{,}99^{100} = 0{,}3660$.

Opdracht 76 bladzijde 118

In een school van 600 leerlingen zitten 400 meisjes en 200 jongens.

1 Je kiest lukraak 6 personen. Wat is de kans dat je steekproef precies twee derde meisjes bevat?

Dit is een trekking zonder teruglegging. De kans op 4 meisjes is $\frac{\binom{400}{4}\binom{200}{2}}{\binom{600}{6}} = 0{,}3309$.

2 Stel dat je 60 personen kiest. Zal de kans op precies twee derde meisjes nu groter of kleiner zijn, denk je? Controleer door de kans te berekenen.

De kans op 40 meisjes wanneer je 60 personen kiest, zal wellicht kleiner zijn: nu zijn er 61 mogelijke uitkomsten in plaats van 7, zodat de kans op één specifieke uitkomst kleiner zal zijn, zelfs al hebben vele uitkomsten een kans die nagenoeg 0 is.

Ter controle: $\dfrac{\dbinom{400}{40}\dbinom{200}{20}}{\dbinom{600}{60}} = 0{,}1146.$

Opdracht 77 bladzijde 118

Bij een loterij met duizend lotjes zijn er vijftig prijzen. Dorine koopt twee lotjes.

Wat is de kans dat Dorine met haar twee lotjes

1 twee prijzen heeft;

$$P(2\text{ prijzen}) = \frac{\dbinom{50}{2}\dbinom{950}{0}}{\dbinom{1000}{2}} = 0{,}00245$$

2 minstens één prijs heeft?

$$P(\text{minstens 1 prijs}) = 1 - \frac{\dbinom{50}{0}\dbinom{950}{2}}{\dbinom{1000}{2}} = 0{,}09755$$

Opdracht 78 bladzijde 118

Je neemt in één keer dertien willekeurige kaarten uit een boek van 52 kaarten.

1 Bereken de kans dat juist twee kaarten azen zijn.

$$P(\text{juist 2 azen}) = \frac{\dbinom{4}{2}\dbinom{48}{11}}{\dbinom{52}{13}} = 0{,}2135$$

2 Bereken de kans dat er minstens één aas bij zit.

$$P(\text{minstens 1 aas}) = 1 - \frac{\dbinom{4}{0}\dbinom{48}{13}}{\dbinom{52}{13}} = 0{,}6962$$

Opdracht 79 bladzijde 118

Bij een telefonische enquête wil gemiddeld één op vier mensen vragen beantwoorden. Een enquêteur belt twintig verschillende, willekeurig gekozen mensen na elkaar op.

1 Wat is de kans dat niemand wil meewerken aan de enquête?

P(niemand werkt mee) $= 0{,}75^{20} = 0{,}003171$

2 Wat is de kans dat enkel de eerste vijf personen willen meewerken?

P(enkel de eerste 5 werken mee) $= 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^{15} = 1{,}305 \cdot 10^{-5}$

3 Wat is de kans dat vijf personen willen meewerken?

$$\text{P(5 personen werken mee)} = \binom{20}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}2023$$

Opdracht 80 bladzijde 118

In een urne zitten twintig blauwe en tien witte balletjes. Elise neemt blindelings één balletje uit de vaas, legt het terug en neemt daarna drie balletjes tegelijk.

Bereken de kans dat Elise

1 enkel witte balletjes genomen heeft;

$$\text{P(wit en driemaal wit)} = \frac{10}{30} \cdot \frac{\binom{10}{3}\binom{20}{0}}{\binom{30}{3}} = 0{,}0099$$

2 twee blauwe en twee witte balletjes genomen heeft.

P((wit en (wit en tweemaal blauw)) of (blauw en (tweemaal wit en blauw)))

$$= \frac{10}{30} \cdot \frac{\binom{10}{1}\binom{20}{2}}{\binom{30}{3}} + \frac{20}{30} \cdot \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{1}}{\binom{30}{3}}$$

$$= 0{,}3038$$

Opdracht 81 bladzijde 118

Vier mannelijke en vijf vrouwelijke verpleegkundigen zijn kandidaat voor de nachtdienst tijdens het komende weekend. De hoofdverpleegkundige besluit drie van hen via lottrekking aan te duiden. Noem P_V de kans dat er minstens één vrouw wordt gekozen en P_M de kans dat er minstens één man wordt gekozen.

Hoeveel is $P_V - P_M$?

A ong. 7 %   **B** ong. 10 %   **C** ong. 12 %   **D** ong. 15 %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2017)

Hier rekenen we zonder rekentoestel en zonder binomiaalgetallen.

$$P_V = 1 - \frac{{}^1\cancel{4}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{8}_1} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{7} = \frac{20}{21} \text{ en } P_M = 1 - \frac{5}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{{}^1\cancel{4}}{{}_2\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{7} = \frac{37}{42}, \text{ zodat } P_V - P_M = \frac{3}{42} = \frac{1}{14} \approx 0{,}07.$$

Opdracht 82 bladzijde 119

Een bepaalde medische aandoening bestaat in twee varianten. Variant A treft 14 % van de bevolking en variant B 20 %. Bijgevolg is 66 % van de bevolking vrij van de aandoening. Veronderstel dat tien personen lukraak gekozen worden.

Wat is de kans, afgerond tot op een duizendste, dat precies één persoon variant A heeft, precies twee personen variant B en de overige zeven personen geen aandoening hebben?

A 0,110 **B** 0,169 **C** 0,259 **D** 0,365 **E** 0,516

(Bron © St. Cloud State University Math Contest, 2015)

We veralgemenen de redenering voor het trekken met teruglegging.

In een kansboom zou elke tak die met een gunstige uitkomst overeenkomt, kans $0{,}14 \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}66^7$ hebben. Het aantal takken is $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2}$ (of $\binom{10}{7} \cdot \binom{3}{2}$ of … of $\overline{P}_{10}^{1,2,7}$).

De gevraagde kans is $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}66^7 = 0{,}110.$

Opdracht 83 bladzijde 118

Een vaas bevat tien ballen, genummerd van 1 tot en met 10. Er worden, met teruglegging, zes ballen aselect uit de vaas genomen.

Bereken de kans dat

1 er viermaal een 10 getrokken wordt;

$$P(\text{viermaal een 10}) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}001215$$

2 er zes verschillende nummers worden getrokken;

Hier is de formule van Laplace snel: $P(6 \neq \text{nummers}) = \dfrac{V_{10}^6}{10^6} = 0{,}1512.$

3 de zes nummers opeenvolgende natuurlijke getallen zijn (ze hoeven niet in oplopende volgorde getrokken te worden);

Er zijn vijf mogelijkheden voor de zes opeenvolgende getallen (123456, 234567 ...) en elk van die mogelijkheden komt overeen met 6! mogelijke volgordes.

Met Laplace: $P(6 \text{ opeenvolgende getallen}) = \dfrac{5 \cdot 6!}{10^6} = 0{,}0036.$

4 er hoogstens één 10 getrokken wordt.

$$P(0 \text{ keer 10 of 1 keer 10}) = \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 = 0{,}8857$$

Opdracht 84 bladzijde 118

In 1654 correspondeerde Chevalier de Méré[10] met Blaise Pascal over het volgende kansvraagstuk.

Wedden op het gooien van minstens één 1 in vier worpen van een dobbelsteen, is voordelig. Maar wedden op het gooien van minstens één dubbele 1 in vierentwintig worpen van twee dobbelstenen, blijkt nadelig. Dat had de Chevalier, die een verwoed gokker was, aan den lijve ondervonden.

Maar hij begreep het niet. De kans op een 1 bij één dobbelsteen is 1/6; de kans op een dubbele 1 bij twee dobbelstenen is 1/36, dus *6 keer minder* waarschijnlijk. Als je nu *6 keer vaker* twee dobbelstenen gooit, dus vierentwintig keer in plaats van vier keer, zou je toch dezelfde kans moeten krijgen voor beide spelletjes?

Bereken beide kansen.

$$P(\text{minstens één 1 in 4 worpen van 1 dobbelsteen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177$$

$$P(\text{minstens één dubbele 1 in 24 worpen van 2 dobbelstenen}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914$$

Opdracht 85 bladzijde 120

Bij een dobbelspel wordt 5 keer met een eerlijke dobbelsteen gegooid. Indien op de dobbelsteen 1 of 2 ogen zichtbaar zijn, dan ontvang je hiervoor een negatieve score van –0,25. Indien op de dobbelsteen een 5 of 6 tevoorschijn komt, dan krijg je hiervoor een positieve score van +1,0. Voor een 3 of een 4 krijg je een score van 0,0. De score van het spel is de som van de scores behaald in de 5 worpen samen.

Wat is de kans dat je een score hebt die minstens 3 punten bedraagt?

A $\frac{11}{3^5}$ **B** $\frac{16}{3^5}$ **C** $\frac{21}{3^5}$ **D** $\frac{26}{3^5}$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-informatica-fysica, 2018)

Er zijn drie situaties die de gewenste score opleveren: 3 keer 1 punt en dan twee keer 0 punten, of 4 keer 1 punt en dan 0 of –0,25 punten, of 5 keer 1 punt.

De kans is $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10+10+1}{3^5} = \frac{21}{3^5}$.

Opdracht 86 bladzijde 120

Je gooit herhaaldelijk een eerlijke, zeszijdige dobbelsteen tot je een zes gooit.

Bereken de kans dat je daartoe hoogstens tien worpen nodig zal hebben.

Toepassen van de som- en productregel levert een som van termen van een meetkundige rij op.

De kans is $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0{,}8385.$

Opdracht 87 bladzijde 120

Je hebt per ongeluk drie lege batterijen in een doos met goede batterijen van hetzelfde type gedaan. Die doos bevat nu tien batterijen. Je hebt vier nieuwe batterijen nodig voor je rekenmachine. Je neemt willekeurig een batterij uit de doos, test deze en legt ze apart. Zodra je vier goede batterijen hebt, stop je.

Wat is de kans dat je vier goede batterijen hebt na exact vijfmaal testen van een batterij?

Bij de eerste vier batterijen die je neemt, moeten er precies drie goede zitten en de vijfde batterij moet opnieuw een goede batterij zijn.

De kans op die situatie is $\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{3}.$

(De herhalingsopdracht 107 is analoog.)

Opdracht 88 bladzijde 120

Kansrekening in de rechtszaal: People versus Collins

De Amerikaanse rechtszaak ‘People versus Collins’ was een van de eerste waarbij een veroordeling voornamelijk op statistisch onderzoek en kansrekening gebaseerd was.

In 1964 werd in Los Angeles een zekere Juanita Brooks omvergeduwd terwijl ze met haar boodschappen naar huis wandelde. Terwijl ze rechtkwam zag ze een jonge vrouw weglopen en merkte ze dat haar portemonnee verdwenen was. Ze herinnerde zich dat de jonge vrouw blond was en haar haar in een paardenstaart had. Een andere getuige zag zo’n vrouw in een gele auto stappen, bestuurd door een zwarte man met baard en snor.

Een zekere Collins en zijn vrouw Janet voldeden aan de beschrijving, maar de getuigen herkenden hen niet met zekerheid. Daarom werd er een wiskundige bijgehaald. Die gaf de volgende tabel met kansen, gebaseerd op statistisch onderzoek.

Vrouw met blond haar: 1/3	Zwarte man met baard: 1/10
Vrouw met paardenstaart: 1/10	Man met snor: 1/4
Gele auto: 1/10	Blanke vrouw en zwarte man in zelfde auto: 1/1000

Hieruit leidde hij af dat de kans dat een lukraak koppel aan alle kenmerken zou voldoen gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{12000000}$.

Deze kans is zo klein, dat het wellicht onmogelijk werd geacht dat er buiten Collins en zijn vrouw nog zo'n koppel te vinden zou zijn. Ze werden beiden veroordeeld.

In 1968 werd het vonnis vernietigd door het Hooggerechtshof van Californië en kwamen Collins en zijn vrouw in hoger beroep vrij.

1 Bij het berekenen van de kans werd de vereenvoudigde productregel gebruikt. Leg uit waarom dit hier niet gerechtvaardigd is. Geef zoveel mogelijk argumenten.

Het hebben van een baard en van een snor gaan vaak samen: die twee gebeurtenissen zijn zeker niet onafhankelijk. Ook blond haar en paardenstaart zijn niet onafhankelijk: iemand met bruin of zwart haar heeft mogelijk kroezelhaar en dus geen paardenstaart. Tot slot is 'blanke vrouw en zwarte man in auto' niet onafhankelijk van 'vrouw met blond haar' en 'zwarte man met baard': zowel geslacht als ras wordt hier meermaals verrekend.

De verdediging kwam in hoger beroep met een meer subtiele redenering. De politie had een koppel gevonden dat aan de beschrijving van de getuigen voldeed, dus bestond er minstens één zo'n koppel. Om hen te kunnen veroordelen, moest je kunnen aantonen dat de kans dat er een tweede koppel aan de beschrijving kon voldoen, als je weet dat er al minstens zo'n koppel bestaat, heel erg klein is. Maar in een stad als Los Angeles, die in die tijd ongeveer 10 000 000 koppels telde, is die kans vrij groot: ongeveer 35 %, zelfs als je met de ongunstige kans van 1 op 12 miljoen uit het eerste proces rekent. Er werd daarmee redelijke twijfel gecreëerd dat Collins en zijn vrouw schuldig waren, zodat ze niet veroordeeld konden worden.

Stel A 'minstens twee koppels voldoen aan de beschrijving' en B 'minstens één koppel voldoet aan de beschrijving'.

2 Wat is $P(B \mid A)$?

Dit is triviaal: $P(B \mid A) = 1$.

3 Bereken $P(B)$.

We nemen aan dat de kans dat een koppel voldoet één op twaalf miljoen is en dat er tien miljoen koppels zijn in Los Angeles.

Dan is, met de complementregel: $P(B) = 1 - \left(\frac{11\,999\,999}{12\,000\,000}\right)^{10\,000\,000} = 0{,}5654$.

4 Bereken $P(A)$.

Op dezelfde manier:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{11\,999\,999}{12\,000\,000}\right)^{10\,000\,000} - 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{11\,999\,999}{12\,000\,000}\right)^{9\,999\,999} \cdot \frac{1}{12\,000\,000} = 0{,}2032.$$

5 Controleer nu of $P(A \mid B)$ inderdaad rond de 35 % ligt, zoals de verdediging beweerde.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0{,}2032 \cdot 1}{0{,}5654} = 0{,}3594.$$

Opdracht 89 bladzijde 122

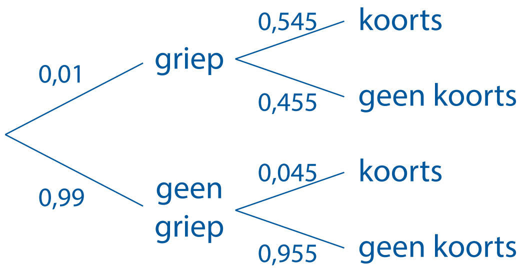
Bij een bepaalde populatie is griep de meest voorkomende ziekte. De kans dat iemand uit deze populatie griep heeft, is 1 %. Mensen met griep hebben 54,5 % kans om koorts te hebben. Mensen zonder griep (maar met mogelijk een andere ziekte) hebben 4,5 % kans om koorts te hebben. Beschouw een willekeurige persoon uit de populatie. De persoon heeft koorts.

Wat is de kans dat de persoon griep heeft?

A 1 % **B** 10,9 % **C** 45,5 % **D** 54,5 %

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-informatica-fysica, 2016)

Een kansboom is hier nuttig om de kansen overzichtelijk weer te geven.



$$P(\text{griep}\,|\,\text{koorts}) = \frac{P(\text{griep en koorts})}{P(\text{koorts})} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}545}{0{,}01 \cdot 0{,}545 + 0{,}99 \cdot 0{,}045} = 0{,}109$$

Opdracht 90 bladzijde 122

Nicosia, de hoofdstad van Cyprus, telt 25 % Turks en 75 % Grieks Cyprioten. Van de Griekse beheerst 20 % de Engelse taal en van de Turkse is dit 10 %. Een toerist vraagt aan een inwoner van Nicosia de weg in het Engels. Deze persoon antwoordt in het Engels.

Wat is de kans dat die persoon Grieks Cyprioot is?

$$P(\text{Grieks Cyprioot}\,|\,\text{Engels}) = \frac{P(\text{Grieks Cyprioot en Engels})}{P(\text{Engels})} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}20}{0{,}75 \cdot 0{,}20 + 0{,}25 \cdot 0{,}10} = 0{,}8571$$

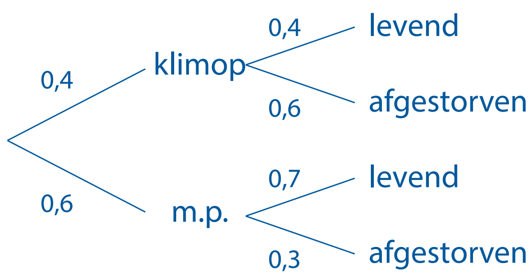
Opdracht 91 bladzijde 122

Je laat langs je huis een plantenborder aanleggen met klimop en maagdenpalm. 40 % van de nieuwe plantjes zijn klimop. De rest is maagdenpalm. Het regent een tijdje niet en door de droogte zijn een maand later 30 % van de maagdenpalmplantjes en 60 % van de klimopplantjes afgestorven.

Wat is de kans dat, als je na een maand een levend plantje ziet, dit een klimopplantje is?

A Minder dan 20 %
B Tussen 20 % en 25 %
C Tussen 25 % en 30 %
D Tussen 30 % en 35 %

(Bron © ijkingstoets bio-ingenieur, 2017)



$$P(\text{klimop}\,|\,\text{levend}) = \frac{P(\text{klimop en levend})}{P(\text{levend})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}4}{0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}7} = 0{,}2759$$

Opdracht 92 bladzijde 122

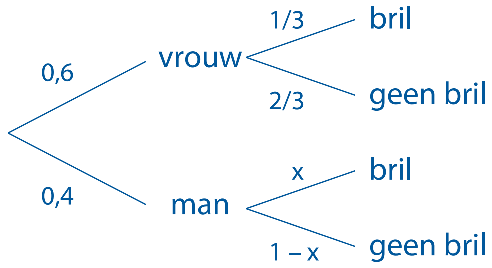
In een faculteit geneeskunde is 60 % van de professoren een vrouw. 1 op de 3 vrouwelijke professoren draagt een bril. Er is 40 % kans dat een willekeurig aangeduide professor (uit deze faculteit) die een bril draagt een vrouw is.

Hoeveel procent van de mannelijke professoren uit deze faculteit draagt een bril?

A 45 % **B** 50 % **C** 60 % **D** 75 %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2017)

Voor dit vraagstuk is een kansboom essentieel.



Uit het extra gegeven P(vrouw | bril) = 0,4 kunnen we x berekenen. We houden er ook rekening mee dat dit vraagstuk zonder rekentoestel opgelost moet kunnen worden. De gegeven kansen zijn wellicht zo gekozen dat enkele interessante vereenvoudigingen mogelijk zijn.

$$P(\text{vrouw} \mid \text{bril}) = 0{,}4 \Leftrightarrow \frac{0{,}6 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}6 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}4 \cdot x} = 0{,}4$$

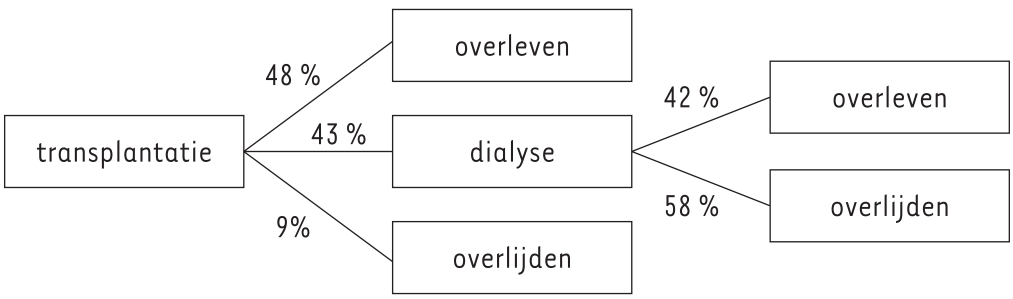
$$\Leftrightarrow \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}4x} = 0{,}4$$

De teller 0,2 en het rechterlid 0,4 impliceren dat in de noemer $\frac{1}{2}$ of dus 0,5 moet staan. Dat vereist dat $0{,}4x = 0{,}3$ zodat $x = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

(Opdracht 96 is vergelijkbaar, maar de onbekende kans zit op meerdere plaatsen in de kansboom.)

Opdracht 93 bladzijde 123

Gegeven is een schema met overlevingskans na vijf jaar bij personen die een niertransplantatie hebben ondergaan.



1 Wat is de kans dat een persoon die een niertransplantatie heeft ondergaan binnen de vijf jaar overlijdt?

$P(\text{overlijden}) = 0{,}09 + 0{,}43 \cdot 0{,}58 = 0{,}3394$

2 Wat is de kans dat een persoon die de transplantatie de eerste vijf jaar overleefd heeft, een nierdialyse ondergaan heeft?

$$P(\text{nierdialyse} \mid \text{overleven}) = \frac{0{,}43 \cdot 0{,}42}{0{,}48 + 0{,}43 \cdot 0{,}42} = 0{,}2734$$

Opdracht 94 bladzijde 123

Kansrekening in de rechtszaal: het effect van ooggetuigen

In een bepaalde stad zijn er twee taxibedrijven. Het ene bedrijf heeft groene taxi's, het andere blauwe. 85 % van de taxi's zijn blauw, de overige 15 % zijn groen.

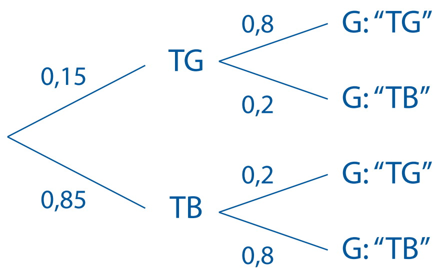
Op een nacht raakt een taxi betrokken in een auto-ongeluk. De taxichauffeur pleegt vluchtmisdrijf. Er was echter een getuige op de plaats van het gebeuren. Deze beweert dat de taxi groen was.

Het gerecht onderzoekt het kleurenonderscheidingsvermogen van de getuige, rekening houdend met de duisternis op het ogenblik van het ongeluk en de plaats van het gebeuren. Ze stellen tijdens die experimenten vast dat de getuige in 80 % van de gevallen de kleur juist ziet, maar zich in 20 % van de gevallen vergist.

We onderzoeken in welke mate dit de kans op een veroordeling voor de firma met groene taxi's beïnvloedt.

1 Plaats alle gegevens in een kansboom. Gebruik de gebeurtenissen 'taxi is groen'/'taxi is blauw' enerzijds en 'getuige zegt: "taxi is groen"'/'getuige zegt: "taxi is blauw"' anderzijds.

We gebruiken de afkortingen TG en TB voor 'Taxi is Groen' resp. 'Taxi is Blauw'; G: "TG" en G: "TB" staan voor 'getuige zegt: "de taxi is groen"' en analoog voor blauw.



2 Bereken de kans dat de taxi daadwerkelijk groen was, als je weet dat de getuige zei dat de taxi groen was. Interpreteer dit resultaat: kan de firma van de groene taxi's hiermee overtuigend veroordeeld worden? Vergelijk met de kans dat de taxi blauw was, rekening houdend met de ooggetuige.

$$P(TG \mid G\text{: "TG"}) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8}{0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}85 \cdot 0{,}2} = 0{,}4138$$

Ondanks de getuigenis is de kans nog altijd groter dat de taxi blauw was, dan dat hij groen was. Er is onvoldoende reden om de firma van groene taxi's te veroordelen. De kans dat het een blauwe taxi was, is met 58,62 % wellicht ook te laag om die firma te kunnen veroordelen. Meer getuigenissen of andere argumenten zullen nodig zijn.

Merk op dat de getuigenis de kans dat het een groene taxi was wel substantieel verhoogde, van 15 % naar 41,38 %.

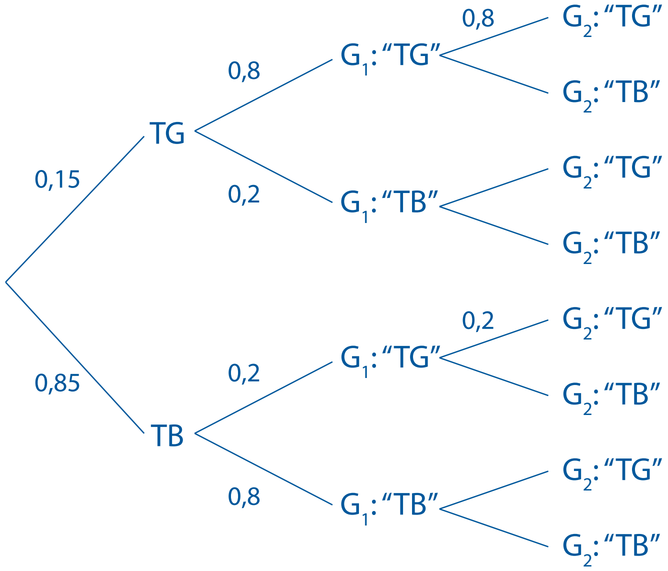
3 Een tweede ooggetuige duikt op die, onafhankelijk van de eerste, ook beweert dat de betrokken taxi groen was. Neem bovendien aan dat die persoon hetzelfde kleurenonderscheidingsvermogen heeft als de eerste getuige.

De rechter die over de zaak moet beslissen, twijfelt tussen twee strategieën.

- Veroordeel de firma van de groene taxi's enkel als de kans om twee dergelijke getuigenissen te krijgen, in de veronderstelling dat de taxi eigenlijk blauw was, heel klein is, bijvoorbeeld kleiner dan 5 %.
- Veroordeel de firma van de groene taxi's enkel als de kans dat het een groene taxi is, gegeven de twee getuigenissen, heel groot is, bijvoorbeeld groter dan 95 %.

Bereken beide kansen. Welke strategie zal voor een veroordeling zorgen?

We breiden de kansboom uit met de tweede getuige en gebruiken G_1 en G_2 om een onderscheid tussen beiden te maken. Bij de tweede getuige hebben we enkel kansen geplaatst op die takken die verder nodig zijn.



De eerste strategie gebruikt de kans $P(G_1\text{: "TG" en } G_2\text{: "TG"} \mid TB)$. Deze voorwaardelijke kans kan rechtstreeks uit de kansboom afgelezen worden, zonder formule van Bayes: $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

Deze kans is voldoende klein om te twijfelen aan de hypothese dat de taxi blauw was, zodat die hypothese verworpen wordt. De firma met de groene taxi's zal veroordeeld worden. (Indien de leerlingen al significantietesten behandelden in de cursus Statistiek, zien ze hier een duidelijk verband met die leerstof.)

Voor de andere strategie berekent de rechter de kans $P(TG \mid G_1\text{: "TG" en } G_2\text{: "TG"})$.

Daarvoor is de formule van Bayes nodig:

$$P(TG \mid G_1\text{: "TG" en } G_2\text{: "TG"}) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}85 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2} = 0{,}7385.$$

De tweede getuigenis maakt dat de kans dat het een groene taxi was verder gestegen is, maar de kans is nog niet overtuigend genoeg om tot een veroordeling van die firma over te gaan. Dat zal wellicht ook de argumentatie zijn van de advocaten van de firma van groene taxi's, wanneer de rechter de eerste strategie volgt.

4 Hoeveel onafhankelijke getuigen, allen met hetzelfde kleurenonderscheidings-vermogen, moeten beweren dat ze een groene taxi zagen, opdat de kans dat het daadwerkelijk een groene taxi was, rekening houdend met die getuigenissen, minstens 99 % zou zijn?

We zoeken n zodanig dat $\frac{0,15 \cdot 0,8^n}{0,15 \cdot 0,8^n + 0,85 \cdot 0,2^n} \geqslant 0,99$. Via een tabel, een grafiek of gewoon door proberen, blijkt n = 5 de kleinste waarde te zijn waarvoor de ongelijkheid geldt. De kans dat het dan een groene taxi is, is dan 0,9945.

Opdracht 95 bladzijde 124

Het driedeurenprobleem of Monty Hall probleem

Stel, je neemt deel aan een spelletjesprogramma en je moet een keuze maken uit drie deuren: achter een van die deuren zit een hippe sportwagen, achter de twee andere zit een geit. Je wil uiteraard de auto winnen.

Je zegt een deurnummer, bijvoorbeeld 1, en daarop opent de presentator, die weet wat er achter elke deur zit, een andere deur, bijvoorbeeld 2, waarachter een geit zit. En dan stelt hij je de vraag: "Wil je van deur veranderen?"

Is het voordelig om van deur te veranderen? Verklaar.

Er zijn talloze filmpjes op Youtube en elders, en verschillende manieren om duidelijk te maken waarom je altijd van deur moet veranderen.

Een ervan gaat als volgt. Bij je eerste keuze heb je een kans van 1 op 3 om de juiste deur te hebben (die met de auto) en dus een kans van 2 op 3 dat de prijs achter een van de twee andere deuren zit, al weet je niet dewelke. Door nu echter een van die deuren te openen, neemt de presentator alle twijfel weg. Er is nog altijd een kans van 1 op 3 dat de prijs achter jouw deur zit en de andere gesloten deur heeft de volledige kans van 2 op 3 om de juiste deur te zijn. Switchen is dus de boodschap.

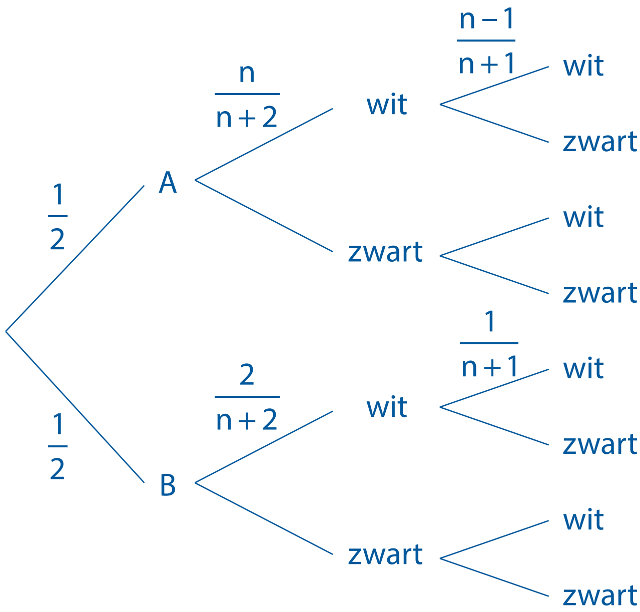
Wanneer kansen niet overtuigen, kunnen absolute frequenties dat vaak wel. Stel dat je het spelletje 3 miljoen keer speelt. Als je nooit van deur verandert, dan zal je ongeveer 1 miljoen keer met de auto naar huis gaan. Maar dat betekent dan dat je 2 miljoen keer de auto achter het enige gesloten deurtje hebt laten staan. Je had dus beter altijd dat andere deurtje geopend.

Opdracht 96 bladzijde 124

Je beschikt over twee koffers, A en B. Koffer A bevat *n* witte ballen en 2 zwarte; koffer B bevat 2 witte en *n* zwarte ballen. Je kiest lukraak een koffer en neemt er twee ballen uit, zonder terugleggen. Er is gegeven dat als beide getrokken ballen wit zijn, de kans dat je dan twee ballen uit koffer A hebt genomen, gelijk is aan $\frac{6}{7}$.

Bereken *n*.

We stellen de gegevens voor in een kansboom, waarbij we ons beperken tot de nuttige takken voor het noteren van de kansen.



Verder is gegeven dat $P(A \mid w \text{ en } w) = \frac{6}{7}$, waaruit volgt:

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n(n-1)}{\cancel{(n+2)(n+1)}}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n(n-1)}{\cancel{(n+2)(n+1)}} + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{(n+2)(n+1)}}} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow 7n(n-1) = 6n(n-1) + 12 \Leftrightarrow n(n-1) = 12$$

Op zicht vinden we de twee oplossingen $n = 4$ en $n = -3$, waarvan enkel de positieve mogelijk is.

Opdracht 97 bladzijde 125

Je gooit vier dobbelstenen.

1 Wat is de kans op een som van 24 ogen?

Dit kan enkel door vier keer een 6 te gooien, zodat de productregel of de formule van Laplace de kans $\frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$ oplevert.

2 Wat is de kans op een som van 23 ogen?

Dit vereist drie zessen en een vijf, waar vier volgordes voor mogelijk zijn. De kans is daarom $\frac{4}{1296} = \frac{1}{324}$.

Opdracht 98 bladzijde 125

Een vaas bevat vijf witte en twee zwarte ballen. We trekken willekeurig twee ballen, zonder teruglegging. W_1 is de gebeurtenis 'de eerste getrokken bal is wit', W_2 is de gebeurtenis 'de tweede getrokken bal is wit'.

Bereken

1 $P(W_1 \text{ en } W_2)$

$$P(W_1 \text{ en } W_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21}$$

2 $P(W_2 \mid W_1)$

Deze kans kunnen we aflezen in een kansboom: $P(W_2 \mid W_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3 $P(W_1 \mid W_2)$

Hiervoor gebruiken we de regel van Bayes: $P(W_1 \mid W_2) = \dfrac{\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{2}{3}$.

Opdracht 99 bladzijde 125

Stel dat 5 % van de bevolking een genetische afwijking heeft. Er is een test beschikbaar om deze afwijking te meten, maar die is niet perfect. Als een persoon de afwijking heeft, geeft de test in 95 % van de gevallen inderdaad positief, maar anders negatief. Als een persoon de afwijking niet heeft, geeft de test in 97 % van de gevallen inderdaad negatief, maar anders toch positief.

Stel dat bij een willekeurig persoon de test positief aangeeft. De kans P dat deze persoon inderdaad de afwijking heeft, voldoet aan

A $0{,}6 \leqslant P < 0{,}7$ **B** $0{,}7 \leqslant P < 0{,}8$ **C** $0{,}8 \leqslant P < 0{,}9$ **D** $0{,}9 \leqslant P < 1$

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2017)

$$P(\text{afwijking} \mid \text{positief}) = \frac{0{,}05 \cdot \cancel{0{,}95}}{0{,}05 \cdot \cancel{0{,}95} + \cancel{0{,}95} \cdot 0{,}03} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Opdracht 100 bladzijde 125

Stel dat een eerste dobbelsteen eerlijk is en een tweede vervalst, zodanig dat de kans op 6 ogen twee keer zo groot is als de kans op elke andere uitkomst.
Wat is de kans dat je bij het gooien van de twee dobbelstenen een som van 7 ogen verkrijgt?

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{7}$ C $\frac{4}{21}$ D $\frac{1}{14}$ E $\frac{1}{12}$

(Bron © Elon University Math Contest, 2010)

We zouden een variant van het schema uit vorige opdrachten kunnen gebruiken, maar nu doen we alsof een van de dobbelstenen zeven zijvlakken heeft.

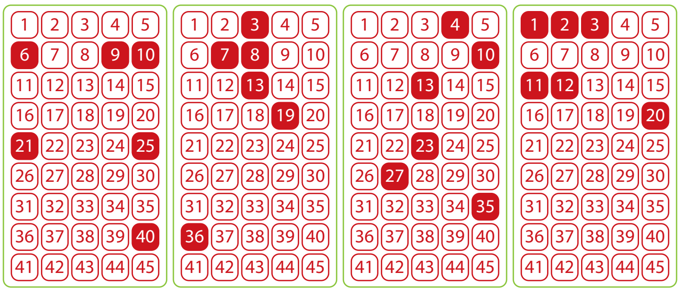
Elke uitkomst is opnieuw even waarschijnlijk en we lezen af dat de gevraagde kans $\frac{7}{42}=\frac{1}{6}$ is.

Een alternatief is de som- en productregel te gebruiken: $P(\text{som } 7)=5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{6}$.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7	7
⚁	3	4	5	6	7	8	8
⚂	4	5	6	7	8	9	9
⚃	5	6	7	8	9	10	10
⚄	6	7	8	9	10	11	11
⚅	7	8	9	10	11	12	12

Opdracht 101 bladzijde 126

Op een Lottoformulier kruis je 6 van de vakjes, genummerd van 1 tot en met 45, aan. Bij een trekking worden 6 nummers en 1 reservegetal lukraak getrokken.



De grootste winst behaal je in rang 1, als je de 6 nummers juist hebt. Daarna volgt rang 2 bij 5 juiste nummers en het reservegetal. In rang 3 kom je terecht bij 5 van de 6 juiste nummers.

Van 2015 tot en met 2017 werden in totaal 1 181 128 421 roosters ingevuld. Hierbij waren er 129 winnaars in rang 1, 788 in rang 2 en 31 505 in rang 3.

1 Bereken en vergelijk de experimentele en de theoretische kans op winst in rang 1.

De theoretische kans is $\dfrac{\binom{6}{6}\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}}=\dfrac{1}{\binom{45}{6}}=1{,}228\cdot10^{-7}$ en de experimentele kans is

$\dfrac{129}{1\,181\,128\,421}=1{,}092\cdot10^{-7}$.

2 Hoeveel keer is de theoretische kans op winst in rang 2 groter dan die in rang 1? Vergelijk met de verhouding van het echte aantal winnaars.

De theoretische kans is, redenerend met een vaas met ballen van 3 kleuren:

$$\frac{\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{38}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{6}{\binom{45}{6}}$$. Ze is dus precies 6 keer groter dan de kans op rang 1.

De verhouding van de experimentele kansen is $\frac{788}{129} = 6{,}11$.

3 Hoeveel keer is de theoretische kans op winst in rang 3 groter dan die in rang 1? Vergelijk ook hier met het echte aantal winnaars.

De theoretische kans is $\frac{\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{38}{1}}{\binom{45}{6}} = \frac{228}{\binom{45}{6}}$, dus 228 keer groter dan de kans op winst in rang 1. Voor de experimentele kans is de verhouding $\frac{31\,505}{129} = 244{,}22$.

Opdracht 102 bladzijde 126

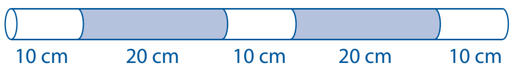
Een broze stok van 70 cm breekt in twee. Aan beide uiteinden (telkens 10 cm) kan de stok niet breken. Alle plaatsen waar de stok kan breken, zijn even waarschijnlijk.

Wat is de kans dat het verschil tussen het grootste en het kleinste deel van de stok minstens 10 cm is?

A 40 % **B** 50 % **C** 60 % **D** 70 % **E** 80 %

(Bron © VWO 2e ronde, 1998)

We berekenen de verhouding van de gunstige lengte tot de totale lengte.



De twee uiteinden van 10 cm komen niet in aanmerking, zodat de totale mogelijke lengte waarin zich een breuk kan voordoen 50 cm is. Daarvan vallen de 5 cm links en rechts van het midden weg. De gunstige zone is dus 40 cm lang.

De kans is $\frac{40\text{ cm}}{50\text{ cm}} = 0{,}8$.

Opdracht 103 bladzijde 126

N personen van verschillende lengte gaan lukraak in een rij staan. De kans dat door de plaatsverwisseling van precies twee personen de rij netjes geordend is van klein naar groot, bedraagt $\frac{1}{48}$.

Hoeveel personen staan in de rij?

A $N = 3$ **B** $N = 4$ **C** $N = 6$ **D** $N = 8$

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2018)

Er zijn N! manieren om N personen te rangschikken. Stel dat ze van klein naar groot staan, dan zijn er C_N^2 manieren om er twee van plaats te verwisselen.

Er is dus gegeven dat $\frac{C_N^2}{N!} = \frac{1}{48}$. Uitwerken en vereenvoudigen:

$\frac{\frac{N!}{2!(N-2)!}}{N!} = \frac{1}{48} \Leftrightarrow \frac{1}{2(N-2)!} = \frac{1}{48}$. Hieruit leiden we af dat $(N-2)! = 24$ zodat $N - 2 = 4$ en dus $N = 6$.

Opdracht 104 bladzijde 127

Het voorkomen van rood-groen kleurenblindheid bij een grote groep mensen is voldoende nauwkeurig in de tabel weergegeven zodat de getallen als kansen kunnen beschouwd worden.

	mannelijk	vrouwelijk	totaal
kleurenblind	4,23 %	0,65 %	**4,88 %**
normaal	48,48 %	46,64 %	**95,12 %**
totaal	**52,71 %**	**47,29 %**	**100 %**

Hoe groot is de kans op kleurenblindheid bij een man?

A 4,23 % **B** 4,88 % **C** 8,025 % **D** 8,725 %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2001)

$P(\text{kleurenblind} \mid \text{man}) = \frac{0{,}0423}{0{,}5271}$. Zonder rekentoestel kun je dat niet exact berekenen, maar je merkt wel dat als je teller en noemer met twee vermenigvuldigt, de noemer ongeveer 1 is en de teller ongeveer 0,08, zodat de kans ongeveer 8 % is. Antwoorden C en D komen in de buurt. Om precies 1 in de noemer te krijgen, moet je met een getal dat iets kleiner dan 2 is vermenigvuldigen, zodat in de teller een getal komt dat nipt boven de 0,08 uitkomt. Dus is C het antwoord.

(Antwoord A is P(kleurenblind en man) en antwoord B is P(kleurenblind).)

Opdracht 105 bladzijde 127

Gegeven zijn vier commando's.

A **sum(seq(sum(randInt(0,1,3)),X,1,750)⩾1)/750**

B **sum(randInt(0,1,3))**

C **sum(randInt(1,6,3))**

D **sum(rand(3) ⩽ 0.2)**

Welk van de commando's A, B, C of D hoort bij de simulatie van de gegeven kansexperimenten 1, 2 en 3?

1 De som van de ogen van drie dobbelstenen tellen.

Dit komt overeen met commando C.

2 Het aantal juist beantwoorde vragen berekenen bij het op goed geluk invullen van een meerkeuzetoets bestaande uit drie vragen met elk vijf mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

Dit is commando D.

3 De kans schatten om met drie eerlijke muntstukken minstens één keer kop te gooien.

Aangezien hier een kans wordt gevraagd, moet het commando vaak herhaald worden en moet op het einde gedeeld worden door het aantal simulaties. Enkel commando A voldoet hieraan.

Opdracht 106 bladzijde 127

We hebben vier stapels van telkens vijf speelkaarten. Elke stapel bevat juist één aas, één 2, één 3, één 4 en één 5 die respectievelijk 1, 2, 3, 4 en 5 punten waard zijn. Uit elke stapel trekken we juist één speelkaart. Elke speelkaart uit de stapel heeft dezelfde kans om getrokken te worden. Noem P de kans dat het puntentotaal van de vier getrokken kaarten samen even is.

Aan welke van de volgende ongelijkheden voldoet P?

A $\frac{300}{625} < P \leqslant \frac{310}{625}$ **B** $\frac{310}{625} < P \leqslant \frac{320}{625}$ **C** $\frac{320}{625} < P \leqslant \frac{330}{625}$ **D** $\frac{330}{625} < P \leqslant \frac{340}{625}$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-informatica-fysica, 2017)

Een even som doet zich voor wanneer 0, 2 of 4 van de kaarten oneven zijn. De vijf hoopjes zorgen ervoor dat we dit kunnen beschouwen als een trekking met teruglegging.

Die kans is $\left(\frac{2}{5}\right)^5 + \binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4\frac{2}{5} = \frac{1562}{3125}$. Dit getal voldoet aan

$\frac{310}{625} < P < \frac{320}{625}$.

Opdracht 107 bladzijde 128

Een urne bevat drie witte en vijf rode bollen. De bollen worden lukraak een voor een uit de urne getrokken en niet teruggelegd.

Bereken de kans dat je meer dan vijf pogingen nodig zult hebben om de drie witte bollen te trekken.

Zowel voor het bepalen van de kans of van haar complement moet de kans op drie mogelijke situaties berekend worden. De complementregel biedt geen voordeel.

We berekenen daarom de kans op 6 of op 7 of op 8 pogingen. We gebruiken de redenering uit opdracht 87:

P(n pogingen) = P(2 witte in de n – 1 eerste pogingen)

$\cdot$ P(witte in de n-de poging | 2 witte in de n – 1 eerste pogingen).

$$\text{P(6, 7 of 8 pogingen)} = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{4}}{\binom{8}{6}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{5}}{\binom{8}{7}} \cdot 1 = \frac{23}{28}$$

Opdracht 108 bladzijde 128

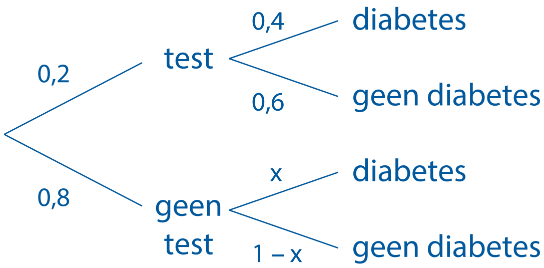
In een bepaalde regio heeft 12 % van de bevolking diabetes. Onderzoek toont aan dat 80 % van de inwoners van die regio zich nooit laat testen op diabetes en dat 40 % van de inwoners die zich wel laat testen ook effectief diabetespatiënt is.

Wat is de kans dat iemand die zich niet laat testen op diabetes wel diabetespatiënt is?

A 7 % **B** 6 % **C** 5 % **D** 4 %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2015)

Het gegeven dat 40 % van de personen die zich laat testen diabetespatiënt is, geeft aan dat de kansboom best als volgt wordt opgesteld.



De kans dat een willekeurige inwoner diabetes heeft, is 12 %, zodat $0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot x = 0{,}12$.

Hieruit volgt dat $x = \frac{0{,}04}{0{,}8} = \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Opdracht 109 bladzijde 128

In 1693 contacteerde Samuel Pepys de bekende wis- en natuurkundige Isaac Newton om hulp te vragen bij een kansvraagstuk.

De vraag was: "*Welke gebeurtenis is meer waarschijnlijk:*
(1) minstens één zes gooien bij 6 worpen van een dobbelsteen;
(2) minstens twee zessen gooien bij 12 worpen van een dobbelsteen;
(3) minstens 3 zessen gooien bij 18 worpen van een dobbelsteen?"
Pepys dacht dat optie (3) de grootste kans had.

Bereken de drie kansen.

$$P_1 = 1 - P(0\text{ zessen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}6651$$

$$P_2 = 1 - P(0\text{ zessen}) - P(1\text{ zes}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0{,}6187$$

$$P_3 = 1 - P(0\text{ zessen}) - P(1\text{ zes}) - P(2\text{ zessen}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - \binom{18}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 0{,}5973$$

Opdracht 110 bladzijde 128

Je wandelt op de stoep in een stad. De kans dat je in de volgende twintig minuten een auto zal zien, is $\frac{609}{625}$.
Wat is de kans dat je een auto zal zien in de volgende vijf minuten? Je mag aannemen dat de kans om een auto te zien op elk ogenblik dezelfde blijft doorheen de twintig minuten.

A $\frac{6}{625}$ **B** $\frac{609}{2500}$ **C** $\frac{2}{5}$ **D** $\frac{3}{5}$ **E** geen van de vorige

(Bron © Elon University Math Contest, 2018)

We delen de twintig minuten op in vier keer vijf minuten.

Stel x de kans dat je geen auto ziet in vijf minuten, dan is de kans dat je geen auto ziet in twintig minuten gelijk aan x^4. Uit de opgave weten we dat $1 - x^4 = \frac{609}{625}$, waaruit volgt dat $x = \frac{2}{5}$.

De kans dat je een auto zal zien in de volgende vijf minuten is daarom $1 - x = \frac{3}{5}$.