



Hoofdstuk 5

Goniometrische functies

- 5.1 Periodieke functies
- 5.2 Goniometrische getallen van willekeurige hoeken
 - 5.2.1 Positieve en negatieve hoeken
 - 5.2.2 Goniometrische getallen van willekeurige hoeken
- 5.3 Radialen
- 5.4 Verwante hoeken in radialen
 - 5.4.1 Supplementaire hoeken
 - 5.4.2 Tegengestelde hoeken
 - 5.4.3 Antisupplementaire hoeken
 - 5.4.4 Complementaire hoeken
- 5.5 Goniometrische basisfuncties
- 5.6 Algemene sinusfuncties
 - 5.6.1 Grafiek van $y = a \sin x$
 - 5.6.2 Grafiek van $y = \sin bx$
 - 5.6.3 Grafiek van $y = \sin(x - c)$
 - 5.6.4 Grafiek van $y = \sin x + d$
 - 5.6.5 Grafiek van $y = a \sin(b(x - c)) + d$
- 5.7 Som- en verschilformules
 - 5.7.1 Som- en verschilformules
 - 5.7.2 Formules voor de dubbele hoek
 - 5.7.3 Formules van Simpson
- 5.8 Goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden
 - 5.8.1 Goniometrische basisvergelijkingen
 - 5.8.2 Goniometrische vergelijkingen oplossen door ontbinding in factoren
 - 5.8.3 Goniometrische vergelijkingen herleidbaar tot veeltermvergelijkingen
 - 5.8.4 Goniometrische ongelijkheden
- 5.9 Cyclometrische functies



**Opdracht 1 bladzijde 232**

Een verschijnsel dat zich met vaste regelmaat herhaalt, noemen we een periodiek verschijnsel.

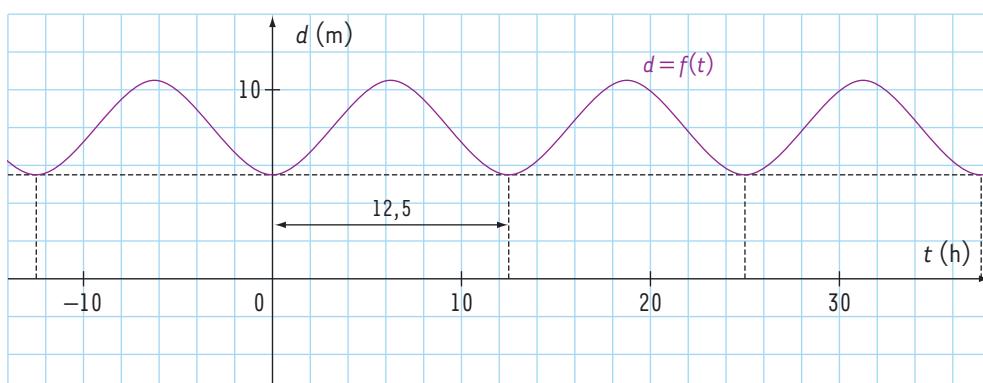
Gekende voorbeelden zijn: eb en vloed, terugkeer van de seizoenen ...

Geef zelf enkele andere voorbeelden van periodieke verschijnselen.

dagtemperatuur, daglengte, hartslag, harmonische trilling ...

Opdracht 2 bladzijde 232

De diepte van de vaargeul is voor de scheepvaart van groot belang. Door de werking van eb en vloed varieert deze diepte met de tijd. Stel dat de diepte d (in meter) van een vaargeul benaderend kan worden voorgesteld door de onderstaande grafiek, waarbij t de tijd voorstelt uitgedrukt in uren. De gemiddelde diepte is 8 m, bij vloed is de diepte 10,5 m en bij eb 5,5 m.



Eb en vloed komen meermaals per dag voor. De tijdsspanne tussen twee opeenvolgende tijdstippen van eb (of vloed) is 12,5 u.

1 Op het tijdstip $t = 0$ is het eb. Geef de andere tijdstippen waarop het eb is.

$$t = -12,5; 12,5; 25; 37,5; \dots$$

$$t = k \cdot 12,5 \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

2 Kies een willekeurig tijdstip t op de horizontale as en kijk naar het bijbehorende punt op de grafiek.

Geef drie getallen a , b en c waarvoor geldt:

$$f(t) = f(t+a) = f(t+b) = f(t+c)$$

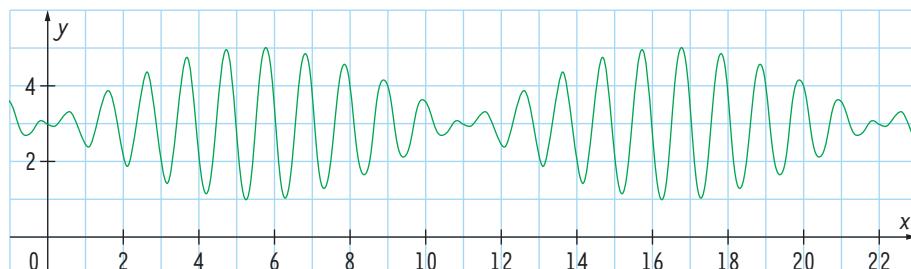
$$\text{bv. } a = 12,5$$

$$b = 25$$

$$c = 37,5$$

Opdracht 3 bladzijde 233

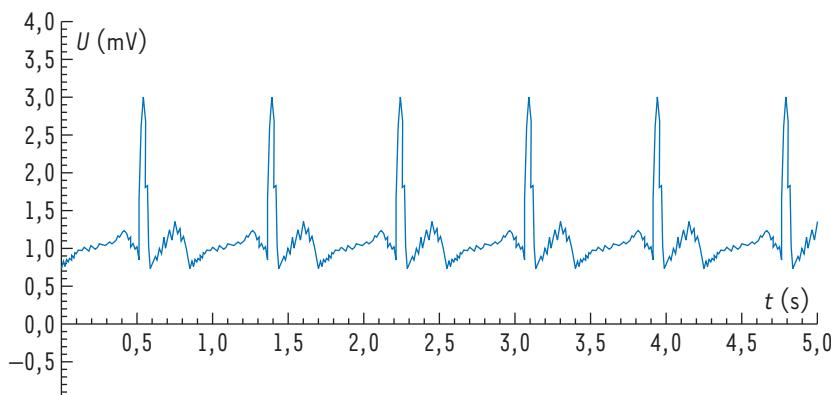
Bepaal de periode p van de volgende periodieke functie.



$$\mathbf{p = 11}$$

Opdracht 4 bladzijde 234

Een elektrocardiogram (ECG) geeft de elektrische activiteit van de hartspier weer. Op de horizontale as staat de tijd t in seconden, op de verticale as de elektrische spanning U in millivolt.



Geef de periode van deze periodieke functie bij benadering.

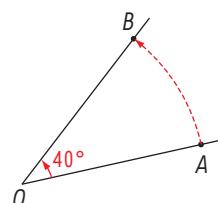
$$\mathbf{5p \approx 4,3 \text{ s dus } p \approx 0,86 \text{ s}}$$

Opdracht 5 bladzijde 235

B ontstaat door A te draaien (roteren) om O over 40° in tegenwijzerzin. Dit noteren we als $B = r_{(O, 40^\circ)}(A)$.

Vul aan: $A = r_{(O, \dots)}(B)$.

Geef meerdere oplossingen.



$$\mathbf{A = r_{(O, -40^\circ)}(B) = r_{(O, 320^\circ)}(B) = r_{(O, 680^\circ)}(B) \dots}$$

**Opdracht 6 bladzijde 236**Geef drie hoeken die hetzelfde beeldpunt hebben als dat van 100° .**-260°, 460°, 820° ...****Opdracht 7 bladzijde 237**

Welke ongelijkheid is fout? Los op zonder rekentoestel.

A $\sin 300^\circ < \sin 350^\circ$

D $\tan 300^\circ < \tan 350^\circ$

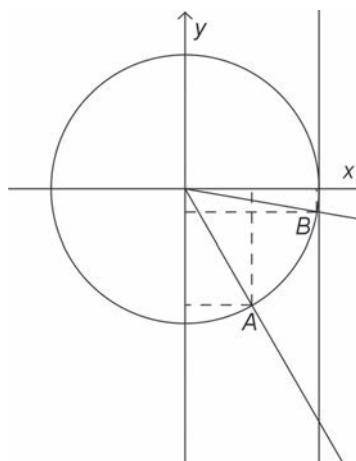
B $\cos 300^\circ < \cos 350^\circ$

E $\cot 300^\circ < \cot 350^\circ$

C $\sin 300^\circ < \cos 350^\circ$

A is het beeldpunt van 300° **B is het beeldpunt van 350°** **A. $\sin 300^\circ < \sin 350^\circ$: klopt****B. $\cos 300^\circ < \cos 350^\circ$: klopt****C. $\sin 300^\circ < \cos 350^\circ$: klopt****D. $\tan 300^\circ < \tan 350^\circ$: klopt****E. $\cot 300^\circ < \cot 350^\circ$: fout → E**

(Bron © VWO 1999, tweede ronde)



Opdracht 8 bladzijde 238

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$2 \quad \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$3 \quad \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Dit soort gelijkheden noemen we ook **goniometrische identiteiten**.

$$1) \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$\begin{aligned} &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1} \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$3) \quad \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Opdracht 9 bladzijde 239

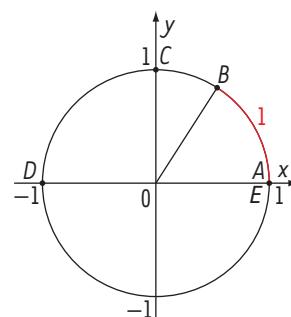
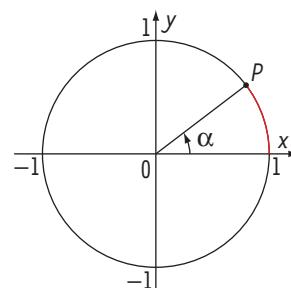
Een hoek α wordt voorgesteld door zijn beeldpunt P .

Met dit beeldpunt correspondeert een cirkelboog.
Cirkelbogen hebben een lengte.

We gaan nu hoeken berekenen op basis van de lengte van de corresponderende cirkelboog.

Vul de tabel aan.

cirkelboog	grootte middelpuntshoek	lengte cirkelboog
volledige cirkel \widehat{AE}	360°	
halve cirkel \widehat{AD}		
kwartcirkel \widehat{AC}		
\widehat{AB}		1



cirkelboog	grootte middelpuntshoek	lengte cirkelboog
volledige cirkel \widehat{AE}	360°	2π
halve cirkel \widehat{AD}	180°	π
kwartcirkel \widehat{AC}	90°	$\frac{\pi}{2}$
\widehat{AB}	$\frac{180^\circ}{\pi}$	1

Opdracht 10 bladzijde 241

Zet de volgende hoeken om in radialen.

1 0°

0 rad

6 10°

$$\frac{\pi}{180} \cdot 10 \text{ rad} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

2 90°

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

7 -45°

$$-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

3 180°

$$\pi \text{ rad}$$

8 60°

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4 270°

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

9 -100°

$$-\frac{10\pi}{18} \text{ rad} = -\frac{5\pi}{9} \text{ rad}$$

5 360°

$$2\pi \text{ rad}$$

10 200°

$$\frac{10\pi}{9} \text{ rad}$$

Opdracht 11 bladzijde 241

Met een grafisch rekentoestel kun je zestigdelige graden rechtstreeks omzetten in radialen. Bekijk het voorbeeld hiernaast, waarbij het rekentoestel in de mode 'radialen' staat.

$23^\circ 14' 56''$
• 4057696585

Zet de hoeken om in radialen. Rond af op drie cijfers na de komma.

1 $12^\circ 34' 56''$

$12^\circ 34' 56'' = 0,220 \text{ rad}$

2 $-57^\circ 17' 45''$

$-57^\circ 17' 45'' = -1,000 \text{ rad}$

3 $400^\circ 10' 5''$

$400^\circ 10' 5'' = 6,984 \text{ rad}$

**Opdracht 12 bladzijde 242**

Zet de volgende hoeken om in zestigdelige graden.

1 $\frac{\pi}{6}$ rad

30°

2 $-\frac{3\pi}{4}$ rad

-135°

3 $\frac{5\pi}{3}$ rad

300°**Opdracht 13 bladzijde 242**

Met een grafisch rekentoestel kun je radialen rechtstreeks omzetten in zestigdelige graden. Bekijk het voorbeeld hiernaast, waarbij het rekentoestel in de mode 'graden' staat.

4.128°
236.5169778
Ans>DMS
236°31'1.12"
■



Zet de hoeken om in zestigdelige graden.

1 1,5 rad

1,5 rad = 85°56'37"

2 9,425 rad

9,425 rad = 540°0'46"

3 3,1416 rad

3,1416 rad = 180°0'2"

Opdracht 14 bladzijde 242

Bereken zonder rekentoestel.

$$1 \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$4 \quad \cos\frac{5\pi}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{2} = 0$$

$$2 \quad 90^\circ$$

$$\sin 4\pi = 0$$

$$5 \quad \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$3 \quad \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6 \quad \tan\frac{7\pi}{3}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Opdracht 15 bladzijde 242De punten A en B liggen op de cirkel $c(M, 5)$.Bepaal de lengte van de boog \widehat{AB} als de middelpuntshoek $A\hat{M}B$ gelijk is aan

$$1 \quad \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

$$|\widehat{AB}| = \frac{2\pi}{5} \cdot 5 = 2\pi$$

$$2 \quad 2,25 \text{ rad}$$

$$|\widehat{AB}| = 2,25 \cdot 5 = 11,25$$

$$3 \quad 100^\circ$$

$$A\hat{M}B = 100^\circ = 1,7453\dots \text{ rad}$$

$$\text{dus } |\widehat{AB}| = 1,7453\dots \cdot 5 = 8,727$$

4 $43^\circ 15' 16''$

$$\hat{A}B = 43^\circ 15' 16'' = 0,7549\dots \text{ rad}$$

$$\text{dus } |\widehat{AB}| = 0,7549\dots \cdot 5 = 3,775$$

Opdracht 16 bladzijde 243

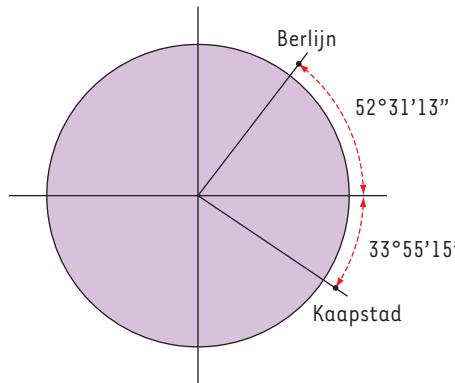
Een vliegtuig vliegt van Berlijn naar Kaapstad in vogelvlucht. Beide steden liggen op dezelfde meridiaan.

De noorderbreedte van Berlijn is $52^\circ 31' 13''$, de zuiderbreedte van Kaapstad is $33^\circ 55' 15''$.

Je mag ervan uitgaan dat de aarde een perfecte bol is met straal 6378 km. Het vliegtuig vliegt op een hoogte van 10 km.

Hoeveel kilometer bedraagt de vlucht?

- $52^\circ 31' 13'' + 33^\circ 55' 15'' = 86^\circ 26' 28''$
- $86^\circ 26' 28'' = 1,5086\dots \text{ rad}$
- $1,5086\dots \cdot 6378 \text{ km} = 9637,461 \text{ km}$



6378 + 10

Besluit: De vlucht Berlijn – Kaapstad bedraagt 9637 km.

Opdracht 17 bladzijde 244

Bepaal een hoek α zo dat $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Onderzoek door middel van de goniometrische cirkel of dit de enige oplossing is.

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$



$$\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 18 bladzijde 245

Bepaal alle hoeken α , op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\sin \alpha = 0,25$.

$$\sin \alpha = 0,25$$



$$\alpha = 0,253 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = 2,889 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 19 bladzijde 245

- 1 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- 2 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\sin \alpha = -1$.

$$\sin \alpha = -1$$



$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 20 bladzijde 245

Bepaal een hoek α zo dat $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Onderzoek door middel van de goniometrische cirkel of dit de enige oplossing is.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$



$$\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 21 bladzijde 247

Bepaal alle hoeken α , op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\cos \alpha = -0,3$.

$$\cos \alpha = -0,3$$



$$\alpha = \pm 1,875 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 22 bladzijde 247

- 1 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\cos \alpha = 0$.

$$\cos \alpha = 0$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- 2 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 23 bladzijde 247

Gebruik de goniometrische cirkel om alle oplossingen te bepalen van $\tan \alpha = 1$.

$$\tan \alpha = 1$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 24 bladzijde 248

Bepaal alle hoeken α , op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\tan \alpha = 14$.

$$\tan \alpha = 14$$

 \Updownarrow

$$\alpha = 1,499 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 25 bladzijde 248

Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

↔

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

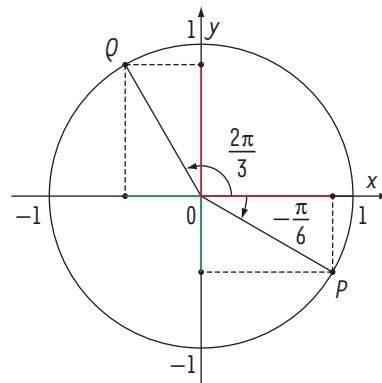
Opdracht 26 bladzijde 249

P en Q zijn de beeldpunten van $-\frac{\pi}{6}$ en $\frac{2\pi}{3}$.

- 1 Gebruik de goniometrische cirkel om verbanden te vinden tussen $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\frac{2\pi}{3}$ en $\sin\frac{2\pi}{3}$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$



- 2 Maak gebruik van je rekentoestel om deze verbanden te controleren.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0,866 = \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0,5 = \cos\frac{2\pi}{3}$$

Opdracht 27 bladzijde 250

Vereenvoudig.

$$\begin{aligned} 1 \quad & \cos \alpha + \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha) \\ &= \cos \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha - \cos \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$



Opdrachten

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha) - \cos(5\pi + \alpha) \cdot \cos(-\alpha) \\
 & = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - (-\cos \alpha) \cdot \cos \alpha \\
 & = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\
 & = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(\pi + \alpha)} \\
 & = \frac{-\cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)} \\
 & = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{\cos(\pi - \alpha) \cdot \tan(-\alpha)}{\tan \alpha \cdot \sin(3\pi - \alpha)} \\
 & = \frac{-\cos \alpha \cdot (-\tan \alpha)}{\tan \alpha \cdot \sin \alpha} \\
 & = \cot \alpha
 \end{aligned}$$



Opdracht 28 bladzijde 250

De hoeken α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ worden **anticomplementaire hoeken** genoemd.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \text{Toon aan dat } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha. \\
 & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\
 & = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\
 & = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 & = \cos \alpha
 \end{aligned}$$

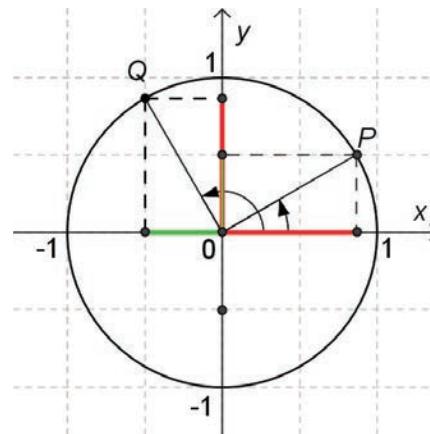
2 Toon aan dat $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

3 Controleer de bovenstaande formules op de goniometrische cirkel.

P is het beeldpunt van α

Q is het beeldpunt van $\frac{\pi}{2} + \alpha$



Opdracht 29 bladzijde 250

Bepaal alle waarden van α , op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt:

$$1 \quad \cos \alpha = -\frac{1}{5}$$

\Updownarrow

$$\alpha = \pm 1,772 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \quad \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

\Updownarrow

$$\alpha = 0,340 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = 2,802 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdrachten

3 $\tan \alpha = -2$



$$\alpha = -1,107 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4 $\cos \alpha = 1,3$

valse vergelijking; geen oplossingen

5 $\sin \alpha = -0,55$



$$\alpha = -0,582 + k \cdot 2\pi \text{ of } \alpha = 3,724 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6 $\tan \alpha = 0,8$



$$\alpha = 0,675 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 30 bladzijde 250

Welke van de volgende uitdrukkingen gelden in elke driehoek met hoeken α , β en γ ?



Verklaar de juiste en corrigeer de foute uitdrukkingen.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

1 $\sin \alpha = \sin(2\alpha + \beta + \gamma)$

$$\sin(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= \sin(\pi + \alpha)$$

$$= -\sin \alpha$$

2 $\tan \beta = \tan(2\alpha + \beta + 2\gamma)$

$$\tan(2\alpha + \beta + 2\gamma)$$

$$= \tan(2\pi - \beta)$$

$$= \tan(-\beta)$$

$$= -\tan \beta$$



$$3 \quad \sin \gamma = \cos \left(\frac{\alpha + \beta + 3\gamma}{2} \right)$$

$$\cos \left(\frac{\alpha + \beta + 3\gamma}{2} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi + 2\gamma}{2} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right)$$

$$= -\sin \gamma$$

$$4 \quad \tan \gamma = \cot \left(\frac{3\alpha + 3\beta + \gamma}{2} \right)$$

$$\cot \left(\frac{3\alpha + 3\beta + \gamma}{2} \right)$$

$$= \cot \left(\frac{3\pi - 2\gamma}{2} \right)$$

$$= \cot \left(\frac{3\pi}{2} - \gamma \right)$$

$$= \frac{\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \gamma \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \gamma \right)}$$

$$= \frac{-\sin \gamma}{-\cos \gamma}$$

$$= \tan \gamma$$

Opdracht 31 bladzijde 255

Is de gegeven functie f even, oneven of geen van beide? Verklaar dit.

1 $f: x \mapsto \sin x$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x): \text{ONEVEN}$$

2 $f: x \mapsto \cos x$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x): \text{EVEN}$$

3 $f: x \mapsto \tan x$

$$f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x): \text{ONEVEN}$$

Opdracht 32 bladzijde 255

Maak een tekentabel van de functie f over het gegeven interval.

1 $f: x \mapsto \sin x$ over $[0, 2\pi]$

x	0	+	π	-	2π
$\sin x$	0		0		0

2 $f: x \mapsto \cos x$ over $[0, 2\pi]$

x	0	+	$\frac{\pi}{2}$	-	$\frac{3\pi}{2}$	+	2π
$\cos x$	+		0		0	+	+

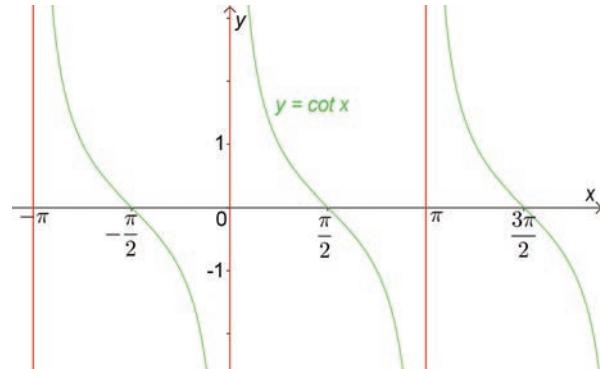
3 $f: x \mapsto \tan x$ over $[0, \pi]$

x	0	+	$\frac{\pi}{2}$	-	π
$\tan x$	0				0

Opdracht 33 bladzijde 255

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

1 Plot de grafiek van de functie f .



2 Bepaal:

a) $\text{dom } f$

b) $\text{ber } f$

c) de periode p

a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\text{ber } f = \mathbb{R}$

c) $p = \pi$

3 Wat zijn de nulpunten van f ?

$$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

4 Heeft deze functie asymptoten? Zo ja, geef de bijbehorende vergelijkingen.

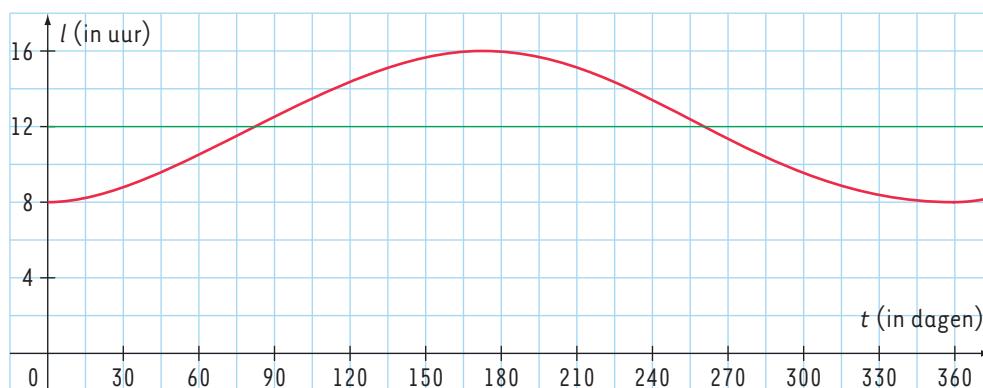
V.A.: $x = k\pi, \text{ met } k \in \mathbb{Z}$

5 Geef het verloopschema in $[0, \pi]$.



Opdracht 34 bladzijde 256

De daglengte l , dit is het aantal uren tussen zonsopgang en zonsondergang, varieert van dag tot dag. Voor Brussel is de daglengte bij het begin van de lente (21 maart) en de herfst (21 september) 12 uur. Op deze breedtegraad varieert de daglengte gedurende een jaar tussen 8 uur en 16 uur. In de onderstaande grafiek kun je de daglengte l (in uren) in functie van de tijd t (in dagen) aflezen gedurende één jaar. Het tijdstip $t = 0$ correspondeert met 1 januari.



1 De functie $l(t)$ is een periodieke functie. Wat is de periode?

$p = 365$ (of $p = 365,25$)

- 2 De grafiek beweegt zich om een evenwichtslijn, die hier de gemiddelde daglengte voorstelt. Geef een vergelijking van deze rechte.

$$y = 12$$

- 3 Geef de maximale uitwijking t.o.v. deze evenwichtslijn. Wat is hiervan de concrete betekenis?

$$4u$$

De langste dag heeft een lengte van $12u + 4u = 16u$
en de kortste dag heeft een lengte van $12u - 4u = 8u$.

- 4 De grafiek van l lijkt qua vorm op de grafiek van de sinusfunctie. Welke soorten transformaties moet je op de grafiek van de sinusfunctie uitvoeren om de bovenstaande grafiek te verkrijgen?

een horizontale en verticale verschuiving en

een horizontale en verticale uitrekking

Opdracht 35 bladzijde 256

Plot de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = 3 \sin x$ en

$$h(x) = -\frac{1}{2} \sin x \text{ voor } -3\pi \leq x \leq 3\pi.$$

Vergelijk de periode en de maximale uitwijking t.o.v. de x -as bij deze drie functies.

	periode	max. uitwijking t.o.v. x -as
f	2π	1
g	2π	3
h	2π	$\frac{1}{2}$

Opdracht 36 bladzijde 258

Plot de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 3x$ en

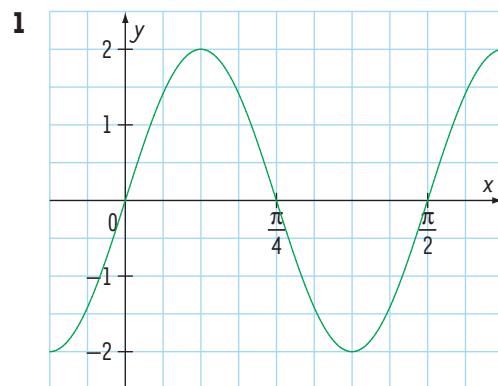
$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ voor } -3\pi \leq x \leq 3\pi.$$

Vergelijk de periode en de amplitude van deze drie functies.

	periode	amplitude
f	2π	1
g	$\frac{2\pi}{3}$	1
h	4π	1

Opdracht 37 bladzijde 259

Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = a \sin bx$.
Bepaal a en b en geef het bijbehorend voorschrift.

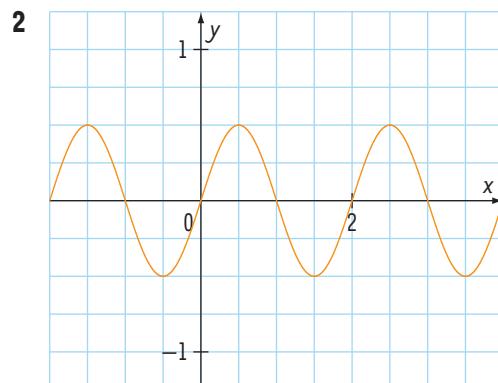


$$a = 2$$

$$p = \frac{\pi}{2}, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = 4$$

$$y = 2 \sin 4x$$



$$a = \frac{1}{2}$$

$$p = 2, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 2$$

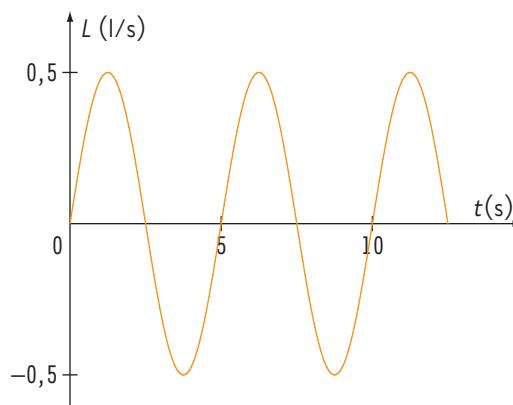
$$b = \pi$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \pi x$$

Opdracht 38 bladzijde 260

Een volwassene ademt gemiddeld twaalf keer per minuut.

De luchtstroomsnelheid L (in liter per seconde) wordt bij inademen positief en bij uitademen negatief gerekend. De luchtstroomsnelheid kan benaderd worden met een functie waarvan de grafiek hieronder gegeven is.



Bij hardlopen wordt de periode van de ademhalingscyclus gedeeld door drie en de luchtstroomsnelheid wordt vier keer zo groot.

Welke van de volgende antwoorden is de beste benadering van de luchtstroomsnelheid L bij hardlopen?

1 $0,125 \cdot \sin \frac{0,4\pi t}{3}$

3 $2 \cdot \sin \frac{0,4\pi t}{3}$

2 $0,125 \cdot \sin 1,2\pi t$

4 $2 \cdot \sin 1,2\pi t$

(Bron: toelatingsproef arts-tandarts)

- bij gegeven grafiek:

- amplitude = 0,5 dus $a = \frac{1}{2}$

- periode = 5, dus $\frac{2\pi}{b} = 5$

$$b = \frac{2\pi}{5}$$

voorschrift: $y = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} t$

- bij nieuw voorschrift:

- luchtstroomsnelheid vier keer zo groot,

dus $a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

- periode gedeeld door drie,

dus $p = \frac{5}{3}$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{6\pi}{5} = 1,2\pi$$

voorschrift: $y = 2 \sin 1,2\pi t \rightarrow \text{antwoord 4}$

Opdracht 39 bladzijde 260

Plot de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + 1)$.

Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f ?

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een horizontale verschuiving over een afstand 1 naar links.

Opdracht 40 bladzijde 260

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$ en $h(x) = \sin(x - 2)$.

Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f ? Controleer met je grafisch rekentoestel.

De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door een horizontale verschuiving over een afstand 2 naar rechts.

Opdracht 41 bladzijde 262

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x + 2$ en $h(x) = \sin x - 1$.

Hoe ontstaan de grafieken van g en h uit die van f ? Controleer met je grafisch rekentoestel.

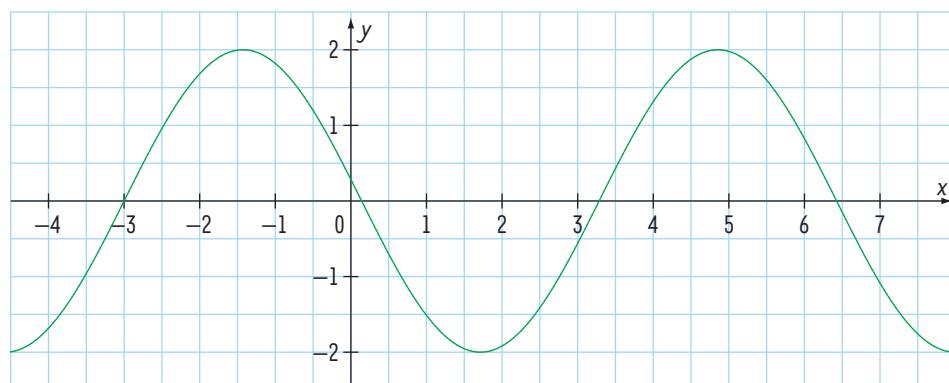
De grafiek van g (h) ontstaat uit de grafiek van f door een verticale verschuiving over een afstand 2 (1) naar boven (beneden).

**Opdracht 42 bladzijde 263**

Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = a \sin(x - c)$.

Bepaal a en c en geef het bijbehorend voorschrift.

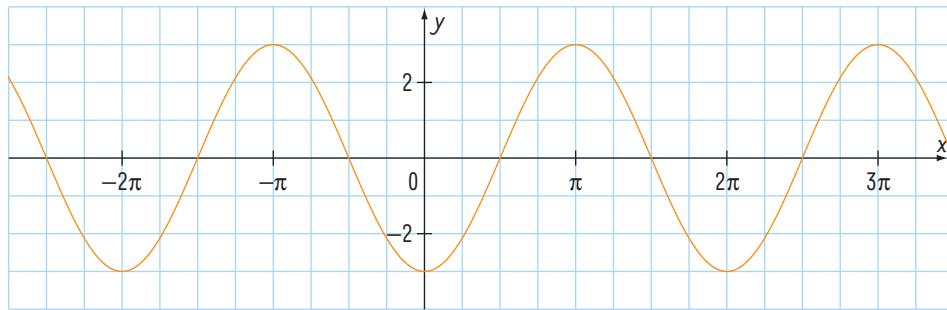
1



$$a = 2, c = -3$$

$$y = 2 \sin(x + 3)$$

2

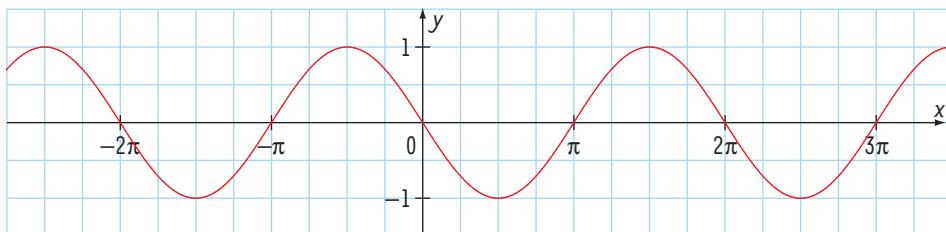


$$a = 3, c = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Opdracht 43 bladzijde 264

De grafiek van een functie met voorschrift $y = \sin(x - c)$ is gegeven.



- 1 Bepaal c en geef het bijbehorend voorschrift.

$$c = \pi$$

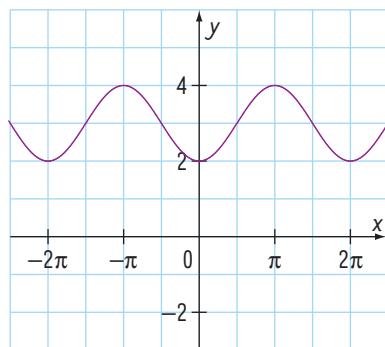
$$y = \sin(x - \pi)$$

- 2 Welke waarden van c zijn nog mogelijk? Verklaar.

$$c = \dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$$

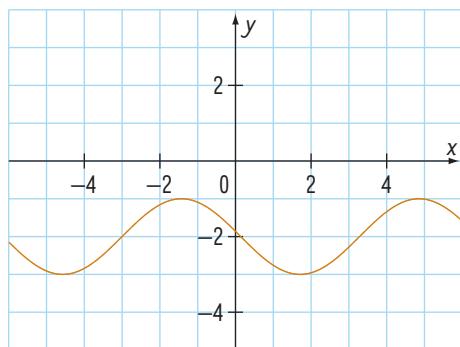
De grafiek is over een afstand π verschoven naar links of naar rechts.

Omdat de periode 2π is, kun je ook zeggen dat de grafiek over een afstand 3π (of 5π of 7π of...) naar links/rechts verschoven is.

**Opdracht 44 bladzijde 264**Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = \sin(x - c) + d$.Bepaal c en d en geef het bijbehorend voorschrift.**1**

$$c = \frac{\pi}{2}, d = 3$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

2

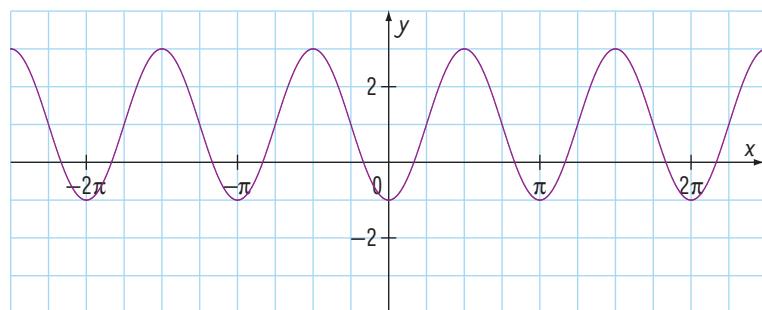
$$c = -3, d = -2$$

$$y = \sin(x + 3) - 2$$

Opdracht 45 bladzijde 267

De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.

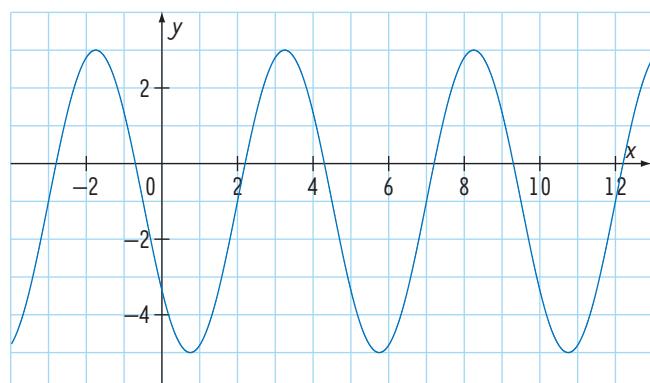
Bepaal een mogelijk voorschrift.

1

$$a = 2, c = \frac{\pi}{4}, d = 1$$

$$p = \pi, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = \pi, \text{ zodat } b = 2$$

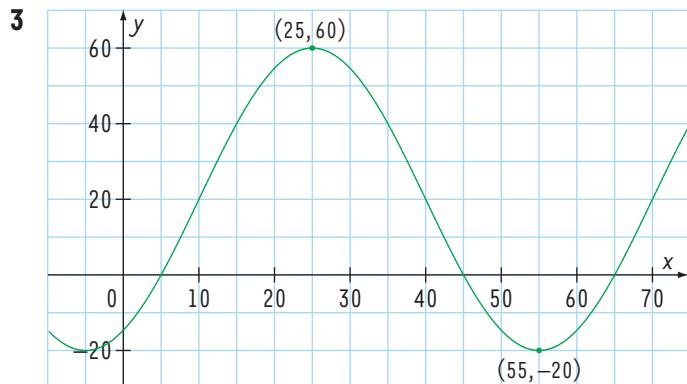
$$y = 2 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

2

$$a = 4, c = 2, d = -1$$

$$p = 5, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 5, \text{ zodat } b = \frac{2\pi}{5}$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}(x - 2)\right) - 1$$



$$a = 40, c = 10, d = 20$$

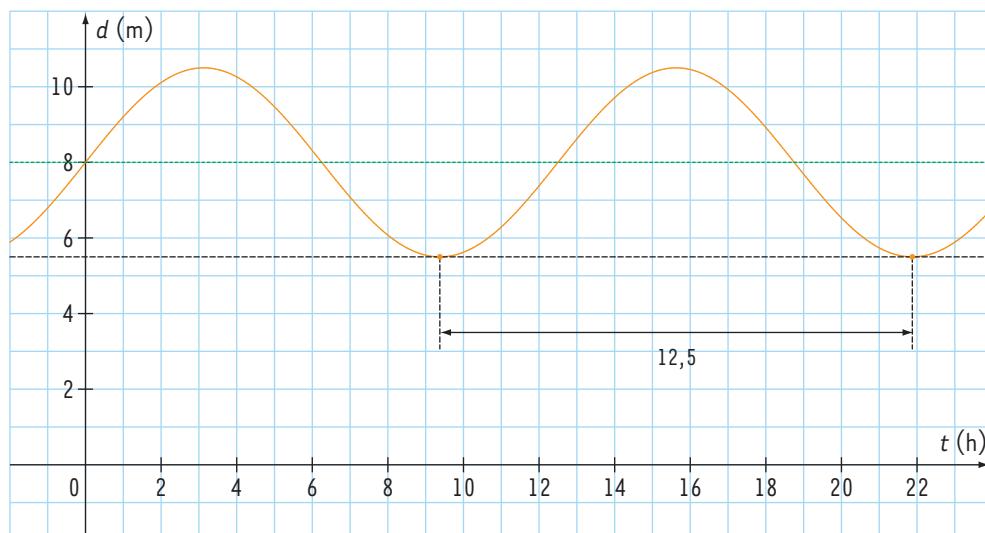
$$p = 60, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 60, \text{ zodat } b = \frac{\pi}{30}$$

$$y = 40 \sin\left(\frac{\pi}{30}(x - 10)\right) + 20$$



Opdracht 46 bladzijde 268

Door de werking van eb en vloed varieert de diepte d van een vaargeul met de tijd. De grafiek geeft deze diepte d benaderend weer voor een bepaalde havenstad, waarbij t de tijd voorstelt uitgedrukt in uren. De gemiddelde diepte is 8 m, bij vloed is de diepte 10,5 m en bij eb 5,5 m. De tijdsspanne tussen twee opeenvolgende tijdstippen van eb is 12,5 u. Op tijdstip $t = 0$ is de diepte 8 m.



- 1 Bepaal een mogelijk voorschrift voor $d(t)$.

$$a = 2,5 = \frac{5}{2}, c = 0, d = 8$$

$$p = 12,5, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 12,5 \text{ zodat } b = \frac{4\pi}{25}$$

$$d(t) = \frac{5}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right) + 8$$

- 2 Bepaal de tijdstippen waarop de diepte 9 m is.

$$\frac{5}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right) + 8 = 9$$

⇓

$$t = 0,819 + k \cdot 12,5 \quad \text{of} \quad t = 5,431 + k \cdot 12,5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

↓

↓

$$0 \text{ u } 49 \text{ min } 7 \text{ sec}$$

$$5 \text{ u } 25 \text{ min } 53 \text{ sec}$$

Opdracht 47 bladzijde 270

Toon aan met voorbeelden dat:

1 $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos \alpha - \cos \beta$

bv. $\alpha = \pi$ en $\beta = 0$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi - 0) = \cos \pi = -1$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

$$-1 \neq -2$$

2 $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$

bv. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

$$0 \neq 2$$

Opdracht 48 bladzijde 272

Bewijs de volgende formules.

1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta))$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos \alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot (-\sin \beta)$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

formules tegengestelde
hoeken

2 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha - (-\beta))$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan(-\beta)}{1 + \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan \alpha - (-\tan \beta)}{1 + \tan \alpha \cdot (-\tan \beta)}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

formules tegengestelde
hoeken

**Opdracht 49 bladzijde 272**

Gebruik de som- en verschilformules om de volgende uitdrukkingen te berekenen zonder rekentoestel.

$$1 \cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ$$

$$= \cos(20^\circ + 70^\circ)$$

$$= \cos 90^\circ$$

$$= 0$$

$$2 \cos 220^\circ \cos 40^\circ + \sin 220^\circ \sin 40^\circ$$

$$= \cos(220^\circ - 40^\circ)$$

$$= \cos 180^\circ$$

$$= -1$$

$$3 \sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ$$

$$= \sin(40^\circ + 50^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ$$

$$= 1$$

$$4 \sin 200^\circ \cos 20^\circ - \cos 200^\circ \sin 20^\circ$$

$$= \sin(200^\circ - 20^\circ)$$

$$= \sin 180^\circ$$

$$= 0$$

$$5 \cos 70^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \cos 65^\circ$$

$$= \cos 70^\circ \cos 25^\circ + \sin 70^\circ \sin 25^\circ$$

$$= \cos(70^\circ - 25^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$6 \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cos 50^\circ$$

$$= \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$$

$$= \sin(20^\circ + 40^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Opdracht 50 bladzijde 273

Vereenvoudig.

$$1 \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta} \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$

$$2 \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{-2 \sin \alpha \sin \beta} \\ &= -\cot \alpha \cdot \cot \beta \end{aligned}$$

$$3 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \gamma}{\cos \beta \cdot \cos \gamma} \\ &\quad + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha} \\ &= \tan \alpha - \tan \beta + \tan \beta - \tan \gamma + \tan \gamma - \tan \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha}{\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha} \\
 & = \frac{\cos 30^\circ \cdot \sin \alpha - \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha}{\sin 30^\circ \cdot \sin \alpha + \cos 30^\circ \cdot \cos \alpha} \\
 & = \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos(\alpha - 30^\circ)} \\
 & = \tan(\alpha - 30^\circ)
 \end{aligned}$$

Opdracht 51 bladzijde 273

Bewijs.

$$1 \quad \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\begin{aligned}
 & \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) \\
 & = (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\
 & = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \\
 & = \sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin^2 \beta \\
 & = \sin^2 \alpha - \cancel{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} - \sin^2 \beta + \cancel{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} \\
 & = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta
 \end{aligned}$$

$$2 \quad \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}
 & \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \\
 & = (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\
 & = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \\
 & = (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \beta) \\
 & = \cos^2 \beta - \cancel{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} - \sin^2 \alpha + \cancel{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} \\
 & = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$3 \quad \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\begin{aligned}
 & \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha \\
 & = \cos((\alpha + \beta) - \alpha) \\
 & = \cos \beta
 \end{aligned}$$



$$4 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \end{aligned}$$

$$5 \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta} - 1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}} \\ &= \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha \cdot \tan \beta} \cdot \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \beta + \tan \alpha} \\ &= \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} \\ &= \cot(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

OFWEL

$$\begin{aligned}
 \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\
 &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \\
 &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha} \\
 &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}
 \end{aligned}$$

Opdracht 52 bladzijde 273

Toon aan.

1 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\
 &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\
 &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\
 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

3 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$\begin{aligned}
 \tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} \\
 &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

**Opdracht 53 bladzijde 274**

Toon aan. Start hiervoor met de formule uit de vorige opdracht.

1 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

2 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

Opdracht 54 bladzijde 274

Welke van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk aan elkaar? Los op zonder rekentoestel.

A $2 \cos^2 40^\circ - 1$

E $\sin 40^\circ$

B $2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$

F $\cos 40^\circ$

C $\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ$

G $\sin 80^\circ$

D $1 - 2 \sin^2 40^\circ$

H $\cos 80^\circ$

$$\begin{aligned}&\bullet 2 \cos^2 40^\circ - 1 = \cos(2 \cdot 40^\circ) = \cos 80^\circ \text{ dus } A = H \\ &\bullet 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin(2 \cdot 20^\circ) = \sin 40^\circ \text{ dus } B = E \\ &\bullet \cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ = \cos(2 \cdot 20^\circ) = \cos 40^\circ \text{ dus } C = F \\ &\bullet 1 - 2 \sin^2 40^\circ = \cos(2 \cdot 40^\circ) = \cos 80^\circ \text{ dus } D = H\end{aligned}$$

zodat $A = D = H, B = E, C = F$

Opdracht 55 bladzijde 274

Schrijf als één goniometrisch getal.

1 $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha\end{aligned}$$



Opdrachten

2 $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= -\cos 2\alpha\end{aligned}$$

3 $4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$$4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 4\alpha$$

4 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha$

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{4} \sin 4\alpha\end{aligned}$$

5 $\cot \alpha - \tan \alpha$

$$\begin{aligned}\cot \alpha - \tan \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \\ &= 2 \cot 2\alpha\end{aligned}$$



Opdracht 56 bladzijde 274

Bewijs.

1 $\frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} - \cos 2\alpha &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} - \cos 2\alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$



$$2 \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\begin{aligned} & \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot 1 \\ &= \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$3 \frac{\cos 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 2\alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$4 \sin 2\alpha - \tan \alpha \cdot \cos 2\alpha = \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\alpha - \tan \alpha \cdot \cos 2\alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cancel{\cos^2 \alpha} - 2 \sin \alpha \cdot \cancel{\cos^2 \alpha} + \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$

$$5 \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \tan \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Opdracht 57 bladzijde 276

Maak gebruik van de formules voor $\cos(\alpha \pm \beta)$ om de volgende formules van Simpson te bewijzen.

$$1 \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ geeft: } \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad (3)$$

$$(1) - (2) \text{ geeft: } \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = x + y \\ 2\beta = x - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{array} \right.$$

Substitutie in (3) en (4) geeft:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Opdracht 58 bladzijde 276

Ontbind in factoren.

$$1 \quad \sin 7\alpha + \sin 5\alpha$$

$$= 2 \sin \frac{7\alpha + 5\alpha}{2} \cos \frac{7\alpha - 5\alpha}{2}$$

$$= 2 \sin 6\alpha \cos \alpha$$

$$2 \quad \cos 3\alpha - \cos \alpha$$

$$= -2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \sin \frac{3\alpha - \alpha}{2}$$

$$= -2 \sin 2\alpha \sin \alpha$$



$$3 \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} &= (\sin 3\alpha + \sin \alpha) + \sin 2\alpha \\ &= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \\ &= \sin 2\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1) \end{aligned}$$

$$4 \cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha$$

$$\begin{aligned} &= (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha) + \cos 5\alpha \\ &= 2 \cos 5\alpha \cos(-\alpha) + \cos 5\alpha \\ &= \cos 5\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1) \end{aligned}$$

Opdracht 59 bladzijde 276

Vereenvoudig.

$$1 \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \\ &= -\tan \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

$$2 \frac{\cos 5\alpha + \cos \alpha}{\sin 5\alpha - \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \cos 3\alpha \cdot \sin 2\alpha} \\ &= \cot 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} \\
 &= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)} + 2 \sin 6\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)}}{2 \cos 2\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)} + 2 \cos 6\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)}} \\
 &= \frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} \\
 &= \frac{2 \sin 4\alpha \cdot \cancel{\cos(-2\alpha)}}{2 \cos 4\alpha \cdot \cancel{\cos(-2\alpha)}} \\
 &= \tan 4\alpha
 \end{aligned}$$

Opdracht 60 bladzijde 276

In een driehoek ABC met hoeken α , β en γ geldt dat

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin(\beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)}.$$

Toon aan dat ΔABC gelijkbenig is.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ Gegeven: } \alpha + \beta + \gamma = \pi^* \\
 & \bullet \tan 2\alpha = \frac{\sin(\beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)} \\
 & \qquad \Updownarrow \\
 & \tan 2\alpha = \frac{2 \cos \beta \sin(-\gamma)}{2 \cos \beta \cos(-\gamma)} \\
 & \qquad \Updownarrow \\
 & \tan 2\alpha = \tan(-\gamma) \\
 & \qquad \Updownarrow \\
 & 2\alpha = -\gamma + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 & \qquad \Updownarrow^* \\
 & 2\alpha = \alpha + \beta - \pi + k \cdot \pi \\
 & \qquad \Updownarrow \\
 & \alpha = \beta + k' \cdot \pi \quad (k' \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Omdat α en β hoeken van een driehoek zijn, zal $0 < \alpha < \pi$ en $0 < \beta < \pi$.

Bijgevolg zal $k' = 0$, zodat $\alpha = \beta$, waardoor ΔABC gelijkbenig is.

Opracht 61 bladzijde 280

Los exact op.

$$1 \quad 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \quad \cos 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm x + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3 \quad \tan x = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x}{2} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$4 \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \tan \varphi \cdot \cos x = 2$$

$$\text{stel } -\sqrt{3} = \tan \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x = 2 \cos \varphi$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ (bv.)}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 62 bladzijde 280

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

$$1 \quad 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm 0,723 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 1,770 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = 0,324 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \quad 3 \sin x + 4 \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{4}{3} \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \tan \varphi \cdot \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\text{stel } \frac{4}{3} = \tan \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{1}{3} \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = 0,927 \text{ (bv)}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = 0,2$$

$$\Leftrightarrow x + 0,927 = 0,201 + k \cdot 2\pi$$

$$\quad \text{of} \quad x + 0,927 = 2,940 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -0,726 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = 2,013 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 63 bladzijde 280Gegeven is de functie $f: x \mapsto 6 \sin \frac{x}{2} - 3$.1 Bepaal de nulpunten van f exact.

$$f(x) = 6 \sin \frac{x}{2} - 3$$

$$6 \sin \frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



2 Bepaal de x -coördinaten waarvoor f een maximum of minimum bereikt.

- **maximum:**

$$\sin \frac{x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **minimum:**

$$\sin \frac{x}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\pi + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 64 bladzijde 280

Los exact op: $\sin x = \sin x \cdot \tan x$.

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin x \cdot \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad 1 - \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 65 bladzijde 281

Los exact op.

$$1 \cos 3x = \cos 2x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \quad \text{of} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$2 \sin x - \sin^3 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x \cdot (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \text{ of } \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ of } \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 66 bladzijde 281

Bepaal de nulpunten van de volgende functies exact.

$$1 f: x \mapsto \cos 5x + \sin 3x - \cos x$$

$$\cos 5x + \sin 3x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x - \cos x + \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 3x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \cdot (-2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \text{ of } \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = k \cdot \pi \text{ of } 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{3} \text{ of } x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $f: x \mapsto \sin 6x + \sin 5x - \sin 3x - \sin 2x$

$$\sin 6x + \sin 5x - \sin 3x - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 6x - \sin 2x) + (\sin 5x - \sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos 4x \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos 4x \cdot \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot (\sin 2x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot (2 \sin x \cdot \cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot \sin x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \text{ of } \sin x = 0 \text{ of } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } x = k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4} \text{ of } x = k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 67 bladzijde 282

Los op: $3 \cos^4 x - 5 \cos^2 x + 2 = 0$.

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\text{stel } \cos^2 x = t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ of } t = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3} \text{ of } \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ of } \cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ of } \cos x = 1 \text{ of } \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 0,615 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pm 2,526 + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 0,615 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pm 2,526 + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } x = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 68 bladzijde 282

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

$$1 \quad 9 \cos^2 x + 6 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (1 - \sin^2 x) + 6 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 \sin^2 x + 6 \sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{4}{3} \text{ of } \sin x = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -0,730 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 3,871 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \quad \tan 2x - 5 \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 5 \tan x$$

$$\Leftrightarrow 2 \tan x = 5 \tan x \cdot (1 - \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \tan x - 5 \tan x \cdot (1 - \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x \cdot (2 - 5 \cdot (1 - \tan^2 x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \text{ of } 2 - 5 + 5 \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \text{ of } \tan^2 x = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \text{ of } \tan x = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ of } \tan x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \text{ of } x = 0,659 + k \cdot \pi \text{ of } x = -0,659 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 69 bladzijde 282

Bepaal de nulpunten van de volgende functies exact.

$$1 \quad f: x \mapsto \cos 2x - 4 \cos x + 3$$

$$\cos 2x - 4 \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 4 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



2 $f: x \mapsto \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 3$

$$\tan^4 x - 4 \tan^2 x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ of } t = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \text{ of } \tan^2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \text{ of } \tan x = \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

stel $\tan^2 x = t$

Opdracht 70 bladzijde 283

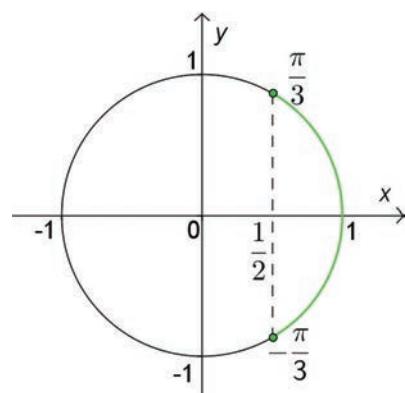
1 Los exact op: $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2 Teken de goniometrische cirkel en duid hierop de beeldpunten van de hoeken aan waarvoor

geldt: $\cos x \geq \frac{1}{2}$.





Opdrachten

3 Noteer nu alle oplossingen van de ongelijkheid: $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

$$\cos x \geq \frac{1}{2}$$

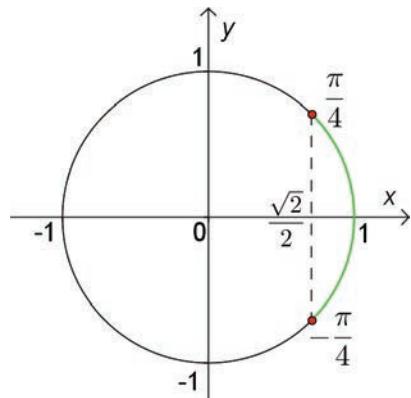
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 71 bladzijde 286

Los de volgende ongelijkheden exact op.

$$1 \quad \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

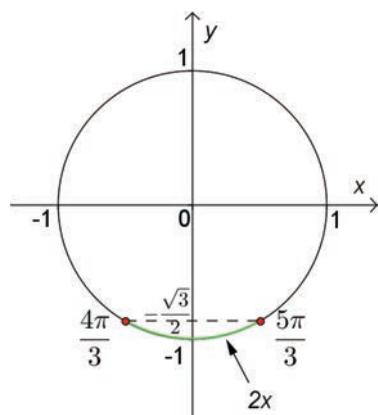
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$





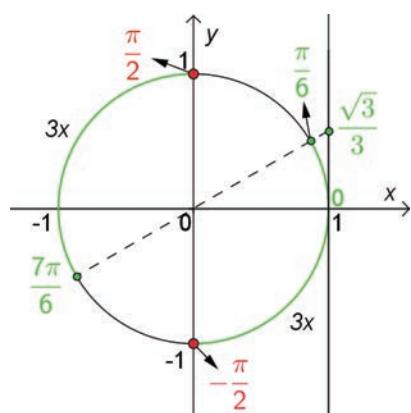
$$2 \sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

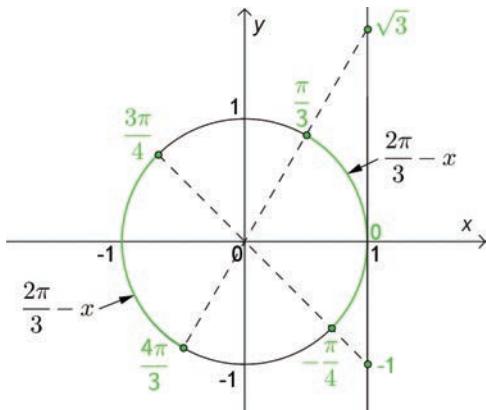


$$3 \tan 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

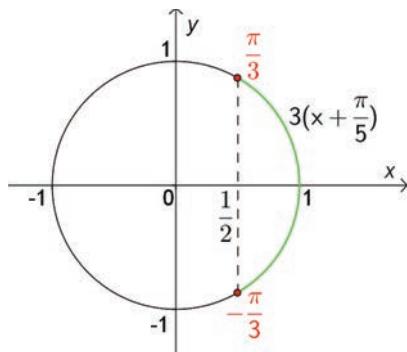
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < 3x \leq \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 4 \quad -1 &\leq \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \leq \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi &\leq \frac{2\pi}{3} - x \leq \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \\
 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} - k \cdot \pi &\leq x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} - k \cdot \pi \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi &\leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 5 \quad 4 \cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\right) + 2 &> 4 \\
 \Leftrightarrow \cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\right) &> \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi &< 3\left(x + \frac{\pi}{5}\right) < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} &< x + \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \\
 \Leftrightarrow -\frac{14\pi}{45} + k \cdot \frac{2\pi}{3} &< x < -\frac{4\pi}{45} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$



$$6 \quad 3 \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) < -\frac{5}{3}$$

valse ongelijkheid $\left(-\frac{5}{3} < -1\right)$; **geen oplossingen**

Opdracht 72 bladzijde 286

Op de kermis staat een draaimolen die behalve een horizontale draaiende beweging ook een verticale beweging maakt. De houten vloer van deze kermisattractie bevindt zich na t seconden op een hoogte h (in cm) vanaf de grond volgens het verband

$$h(t) = 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) + 65$$

Een kind op de draaimolen wil de kwast grijpen en zo een gratis ritje winnen.

De kwast is bereikbaar voor het kind van zodra de vloer zich 70 cm boven de grond bevindt.

Hoe lang bevindt de houten vloer van de attractie zich minstens 70 cm boven de grond tijdens één verticale beweging?



$$\begin{aligned}
 h(t) &= 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) + 65 \\
 \cdot \quad 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) + 65 &\geq 70 \\
 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) &\geq \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow 0,340 + k \cdot 2\pi &\leq \frac{\pi}{4}(t - 1) \leq 2,802 + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow 0,433 + k \cdot 8 &\leq t - 1 \leq 3,567 + k \cdot 8 \\
 \Leftrightarrow 1,433 + k \cdot 8 &\leq t \leq 4,567 + k \cdot 8 \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$4,567 - 1,433 = 3,135$$

De houten vloer bevindt zich 3,1 seconden minstens 70 cm boven de grond tijdens één verticale beweging.

- OFWEL (grafische oplossing)

$$y = 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) + 65$$

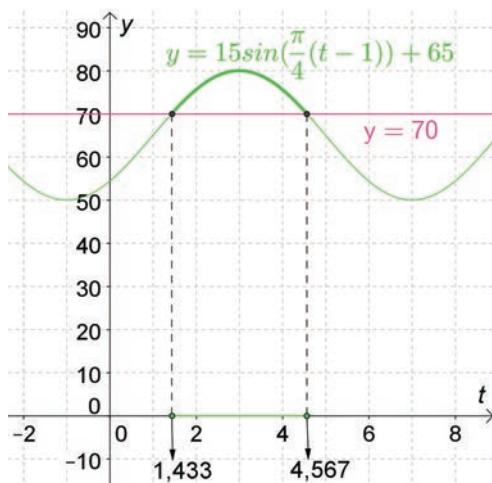
$$y = 70$$

Grafieken plotten en snijpunten bepalen in $[0, 8]$.

$$\text{(periode} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8)$$

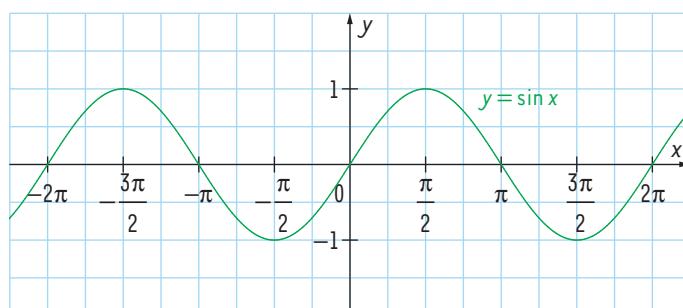
$$15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t - 1)\right) + 65 \geq 70$$

$$\Leftrightarrow 1,433 + k \cdot 8 \leq t \leq 4,567 + k \cdot 8 \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 73 bladzijde 287

Gegeven is de grafiek van de sinusfunctie.



- Waarom is de functie niet inverteerbaar?

De functie is niet inverteerbaar, omdat er verschillende x-waarden zijn met dezelfde y-waarde.



- 2 Geef een beperking van het domein zodat de functie wel inverteerbaar wordt. Vermeld meerdere mogelijkheden.

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \dots$$

Opdracht 74 bladzijde 291

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\text{Bgsin } \frac{1}{2}$

$$\text{Bgsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

2 $\text{Bgcos } 0$

$$\text{Bgcos } 0 = \frac{\pi}{2}$$

3 $\text{Bgtan } (-1)$

$$\text{Bgtan } (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

4 $\text{Bgsin } 1$

$$\text{Bgsin } 1 = \frac{\pi}{2}$$

5 $\text{Bgcos} \left(-\frac{1}{2} \right)$

$$\text{Bgcos} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

6 $\text{Bgtan} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

$$\text{Bgtan} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{6}$$



Opdrachten

Opdracht 75 bladzijde 291

Bereken zonder rekentoestel.

$$1 \quad \sin\left(\text{B}g\cos\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin\left(\text{B}g\cos\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \quad \tan\left(\text{B}g\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\tan\left(\text{B}g\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}$$



$$3 \quad \cos(\text{B}g\tan 1)$$

$$\cos(\text{B}g\tan 1)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

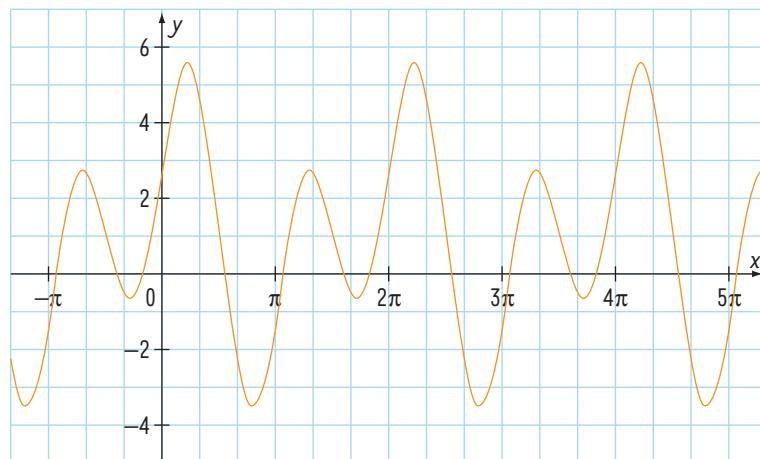
$$4 \quad \text{B}g\sin\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\text{B}g\sin\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

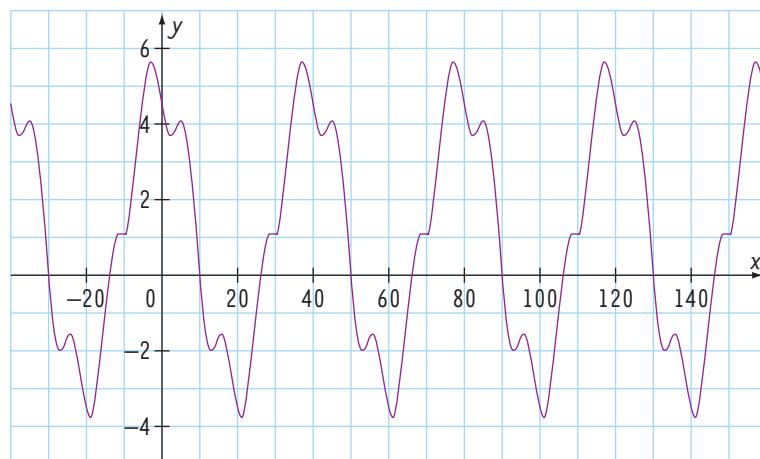
$$= \text{B}g\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$



**Opdracht 76 bladzijde 301**Bepaal de periode p van de volgende periodieke functies.**1**

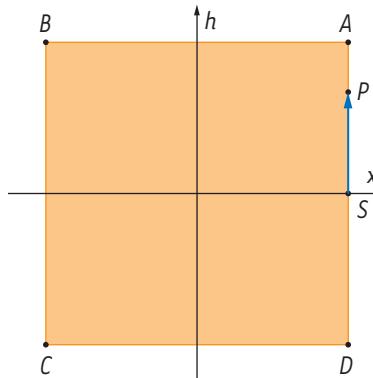
$$p = 2\pi$$

2

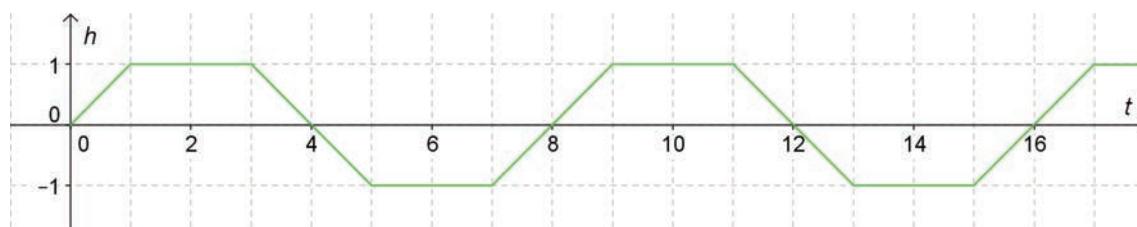
$$p = 40$$

Opdracht 77 bladzijde 301

Het vierkant $ABCD$ heeft zijde 2 m. Een punt P beweegt langs de omtrek met een constante snelheid van 1 m/s. P start in het punt S (met hoogte gelijk aan 0) en draait in tegenwijzerzin. We onderzoeken de hoogte h van het punt P in functie van de tijd t .



- Maak een grafiek van deze functie.



- De grafiek herhaalt zich met een vaste regelmaat. Om de hoeveel seconden gebeurt dit? Verklaar dit vanuit de opgave.

De grafiek herhaalt zich om de 8 seconden. Na 8 s is het punt P terug in het startpunt S en herhaalt alles zich.

Opdracht 78 bladzijde 302

De **frequentie** f van een periodiek verschijnsel is het aantal perioden p per tijdseenheid: $f = \frac{1}{p}$. De frequentie heeft als eenheid Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

- Een stemvork brengt de 'A' (la) voort door met een periode van 2,27 milliseconden te trillen.

Bepaal de frequentie in trillingen per seconde.

$$p = 2,27 \text{ ms} = 0,00227 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,00227} \text{ Hz} = 441 \text{ Hz}$$

- Een andere stemvork trilt 768 keer per seconde en brengt daardoor een 'G' (sol) voort.

Bepaal de periode van die trilling.

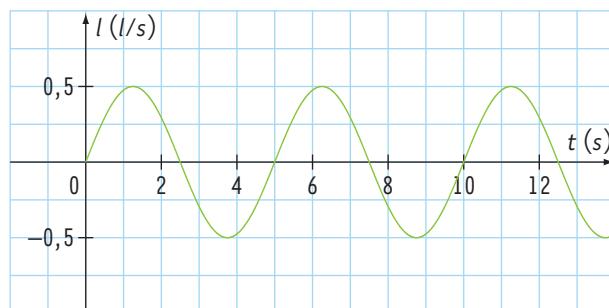
$$f = 768 \text{ Hz}$$

$$p = \frac{1}{f} = \frac{1}{768} \text{ s} = 0,00130 \text{ s} = 1,30 \text{ ms}$$

Opdracht 79 bladzijde 302

De onderstaande grafiek toont de luchtstroomsnelheid l (in liter per seconde) in functie van de tijd t (in seconden) bij de ademhaling van een volwassene in rust.

Bij het inademen wordt de luchtstroomsnelheid positief gerekend en bij het uitademen negatief.



- 1 Bepaal de periode van de luchtstroomsnelheid.

p = 5 s

- 2 Hoeveel keer ademt deze volwassene in en uit per minuut?

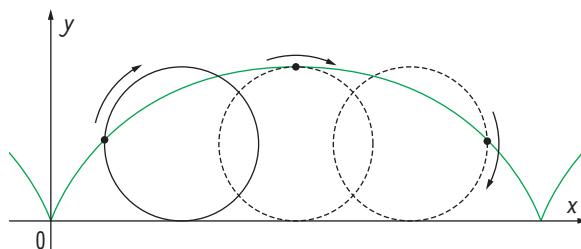
12 keer

- 3 Bepaal de frequentie van de luchtstroomsnelheid.

$$f = \frac{1}{p} = \frac{1}{5} \text{ Hz} = 0,2 \text{ Hz}$$

Opdracht 80 bladzijde 302

Een cycloïde is een kromme die gevormd wordt door een punt (bv. reflector) op een rollende cirkel.



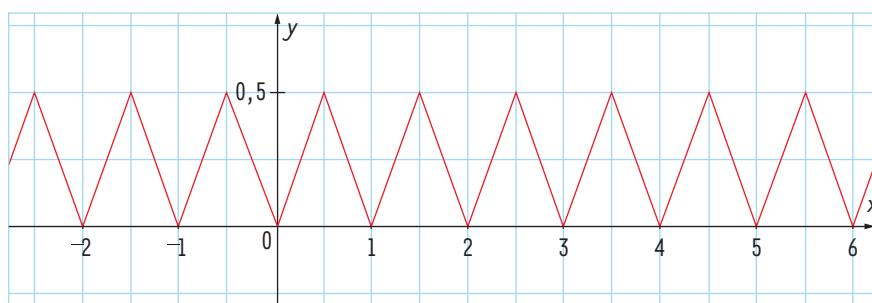
Druk de periode uit in functie van de straal van de cirkel.

p = $2\pi r$

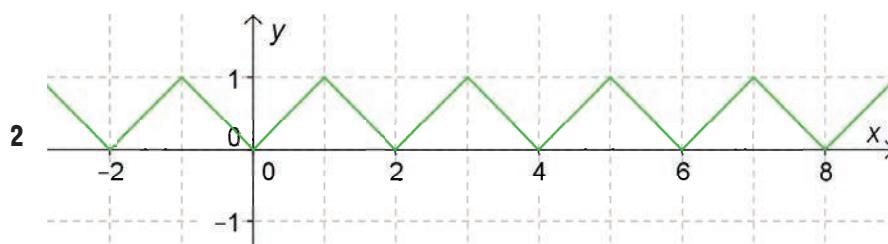
Opdracht 81 bladzijde 303

- 1 Hieronder is de grafiek gegeven van de functie g , waarbij $g(x)$ de afstand voorstelt van x tot het dichtsbijzijnde gehele getal.

Bepaal de periode.



$$p = 1$$



$$p = 2$$

Opdracht 82 bladzijde 303

In welk kwadrant is

- 1 $\cos \alpha > 0$ en $\sin \alpha < 0$?

$\cos \alpha > 0$ en $\sin \alpha < 0$: IV

- 2 $\cos \alpha < 0$ en $\sin \alpha < 0$?

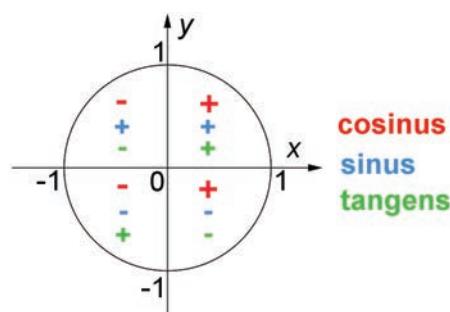
$\cos \alpha < 0$ en $\sin \alpha < 0$: III

- 3 $\cos \alpha < 0$ en $\tan \alpha > 0$?

$\cos \alpha < 0$ en $\tan \alpha > 0$: III

- 4 $\sin \alpha > 0$ en $\tan \alpha < 0$?

$\sin \alpha > 0$ en $\tan \alpha < 0$: II



Opdracht 83 bladzijde 303

Maak gebruik van de goniometrische cirkel en van de hoofdformule van de goniometrie om de ontbrekende waarden in de tabel te bepalen.

De tweede kolom vermeldt in welk kwadrant de hoek gelegen is.

	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
1	II	-0,6		
2	IV		-0,25	
3	I			1,6
4	III	-0,5		
5	II		0,7	
6	II			-4

	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$
1	II	-0,6	0,8	$-\frac{4}{3}$
2	IV	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	-0,25	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$
3	I	$\frac{5}{\sqrt{89}}$	$\frac{8}{\sqrt{89}}$	1,6
4	III	-0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
5	II	$-\frac{\sqrt{51}}{10}$	0,7	$-\frac{7}{\sqrt{51}}$
6	II	$-\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	-4

$$\begin{aligned}
 1) \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\
 &= 1 - \left(-\frac{6}{10} \right)^2 \\
 &= \frac{64}{100} \\
 \sin \alpha &= \pm \frac{8}{10} = \textcircled{\pm} 0,8 \\
 \alpha &\in \text{II, dus +}
 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 2) \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\
 &= 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^2 \\
 &= \frac{15}{16} \\
 \cos \alpha &= \textcircled{\pm} \frac{\sqrt{15}}{4} \\
 \alpha &\in \text{IV, dus +}
 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$3) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{16}{10}\right)^2} = \frac{100}{356}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{10}{\sqrt{356}} = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

$\alpha \in \text{I, dus +}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{16}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{356}} = \frac{16}{\sqrt{356}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

$$4) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha \in \text{III, dus -}$

$$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$5) \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$= \frac{51}{100}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$\alpha \in \text{II, dus -}$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{7}{10}}{-\frac{\sqrt{51}}{10}} = -\frac{7}{\sqrt{51}}$$

$$6) \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-4)^2} = \frac{1}{17}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\alpha \in \text{II}$, dus -

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -4 \cdot \frac{-1}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Opdracht 84 bladzijde 304

Vereenvoudig.

$$1 \quad 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$2 \quad 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$3 \quad \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$4 \quad \sqrt{(\sin \alpha - 2)^2} \\ = |\sin \alpha - 2| = 2 - \sin \alpha$$

Opdracht 85 bladzijde 304

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} & \tan \alpha + \cot \alpha \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \end{aligned}$$

$$2 \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$$

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \\ &= \sin \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= \cancel{\sin \alpha} - \cancel{\cos \alpha} + \cos^3 \alpha + \cancel{\cos \alpha} - \cancel{\sin \alpha} + \sin^3 \alpha \\ &= \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

$$3 \quad \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} \\ &= \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}_1 \\ &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

**Opdracht 86 bladzijde 304**

Vereenvoudig.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - 1 \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 1 \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot 1 - 1 \\
 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\
 &= \cancel{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha - \cancel{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \\
 &= -2 \sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \\
 &= \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \cos^2 \alpha \cdot (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\
 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \\
 &= \sin^2 \alpha - \cancel{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cancel{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \cos^2 \alpha \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$



Opdracht 87 bladzijde 304Bepaal het reëel getal k in de volgende identiteiten.

$$1 \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = k \cdot \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \\ &= \frac{(1+\sin\alpha)^2 - (1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha) \cdot (1+\sin\alpha)} \\ &= \frac{1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha - 1+2\sin\alpha-\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} \\ &= \frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= 4 \cdot \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha} \text{ dus } k = 4 \end{aligned}$$

$$2 \frac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha} + \frac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan\alpha + \cot\alpha + k$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha} + \frac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \\ &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} \\ &= \tan\alpha + \cot\alpha + 1 \text{ dus } k = 1 \end{aligned}$$

Opdracht 88 bladzijde 304

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \left(\frac{1}{\cos^4 \alpha} - \tan^4 \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^4 \alpha} - \cot^4 \alpha \right) = 1 + \frac{2}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\cos^4 \alpha} - \tan^4 \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^4 \alpha} - \cot^4 \alpha \right) \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot^2 \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \cot^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1 - \cancel{\sin^2 \alpha}}{\cancel{\cos^2 \alpha}} \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cancel{\sin^2 \alpha}} \cdot \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(1 + \sin^2 \alpha) \cdot (1 + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \\ &= 1 + \frac{2}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$2 (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} & (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 \cdot 1^2 + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$3 \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} & \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^3 - 3 \cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin^4 \alpha \\ &= 1^3 - 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$4 \quad \frac{\tan^3 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\cot^3 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tan^3 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\cot^3 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \\ &= \frac{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \frac{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}_1 + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}_1 \\ &= \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \end{aligned}$$

Opdracht 89 bladzijde 305Als $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$, wat is dan $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$?

- A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{5}$ C $\frac{2}{9}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{3}{10}$

(Bron © VWO 1998, tweede ronde)

- $\sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 3$
- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}$$

- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 3 \cos \alpha \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \cos^2 \alpha = \frac{3}{10} \rightarrow E$

Opdracht 90 bladzijde 305**Cotangens, secans en cosecans van een hoek**

We definieerden: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (met $\sin \alpha \neq 0$). De cotangens van een hoek α is dus het

omgekeerde van de tangens van α : $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

Analoog definiëren we:

- de secans van een hoek α is het omgekeerde van de cosinus van α :

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{met } \cos \alpha \neq 0)$$

- de cosecans van een hoek α is het omgekeerde van de sinus van α :

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{met } \sin \alpha \neq 0)$$

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

$$1 + \cot^2 \alpha$$

$$= 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \csc^2 \alpha$$

2 $\tan \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha \cdot \csc \alpha$

$$\tan \alpha + \cot \alpha$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$= \sec \alpha \cdot \csc \alpha$$

$$3 (\csc \alpha - \sin \alpha)(\sec \alpha - \cos \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\begin{aligned} & (\csc \alpha - \sin \alpha) \cdot (\sec \alpha - \cos \alpha) \\ &= \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tan \alpha + \cot \alpha} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) = (2) \text{ zodat } (\csc \alpha - \sin \alpha)(\sec \alpha - \cos \alpha)$$

$$= \frac{1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$4 (\cos \alpha - \sin \alpha)(\csc \alpha - \sec \alpha) = \sec \alpha \cdot \csc \alpha - 2$$

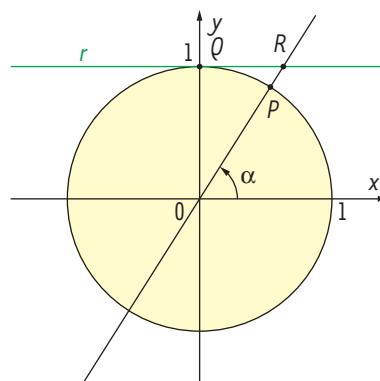
$$\begin{aligned} & (\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\csc \alpha - \sec \alpha) \\ &= \cos \alpha \cdot \csc \alpha - \cos \alpha \cdot \sec \alpha - \sin \alpha \cdot \csc \alpha + \sin \alpha \cdot \sec \alpha \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1 - 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} - 2 \\ &= \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} - 2 \\ &= \sec \alpha \cdot \csc \alpha - 2 \end{aligned}$$

Opdracht 91 bladzijde 305**1 Meetkundige betekenis van $\cot \alpha$**

$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ is het beeldpunt van de hoek α .

Noem R het snijpunt van de rechte OP met de raaklijn $r \leftrightarrow y = 1$ aan de goniometrische cirkel in het punt $Q(0,1)$.

Toon aan dat $co(R) = (\cot \alpha, 1)$.



$$\bullet OP \leftrightarrow y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x$$

$$OP \leftrightarrow y = \tan \alpha \cdot x$$

$$\bullet \text{snijpunt } R \text{ van } OP \text{ en } r \leftrightarrow y = 1 :$$

$$\tan \alpha \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$$

zodat $R(\cot \alpha, 1)$

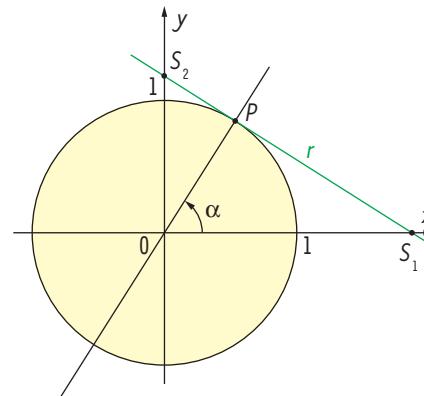
2 Meetkundige betekenis van $\sec \alpha$ en $\csc \alpha$

$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ is het beeldpunt van de hoek α .

r is de raaklijn aan de goniometrische cirkel in het punt P .

Noem S_1 het snijpunt van r met de x -as en S_2 het snijpunt van r met de y -as.

Toon aan dat $\text{co}(S_1) = (\sec \alpha, 0)$ en $\text{co}(S_2) = (0, \csc \alpha)$.



- $OP \leftrightarrow y = \tan \alpha \cdot x$

- $r \perp OP \Rightarrow \text{rico } r = \frac{-1}{\tan \alpha} = -\cot \alpha$

- $r \leftrightarrow y - \sin \alpha = -\cot \alpha \cdot (x - \cos \alpha)$

$$r \leftrightarrow y = -\cot \alpha \cdot x + \cot \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha$$

- snijpunt S_1 van r en x -as $\leftrightarrow y = 0$:

$$-\cot \alpha \cdot x + \cot \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

$$x = \frac{-\cot \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha}{-\cot \alpha}$$

$$x = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$x = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$x = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$x = \sec \alpha$$

zodat $S_1(\sec \alpha, 0)$

- snijpunt S_2 van r en y -as $\leftrightarrow x = 0$:

$$y = -\cot \alpha \cdot 0 + \cot \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$y = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha$$

$$y = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$y = \csc \alpha$$

zodat $S_2(0, \csc \alpha)$

Opdracht 92 bladzijde 306

Vul de tabel aan. Gebruik je rekentoestel.

graden	$15^{\circ}12'13''$		$-63^{\circ}54'18''$	
radialen		0,77 rad		-9,3456 rad

graden	$15^{\circ}12'13''$	$44^{\circ}7'4''$	$-63^{\circ}54'18''$	$-535^{\circ}27'48''$
radialen	0,265 rad	0,77 rad	-1,115 rad	-9,3456 rad

Opdracht 93 bladzijde 306

De secondenwijzer van een klok is 6 cm lang.

Welke afstand legt het uiteinde van de wijzer af in 40 seconden?

De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

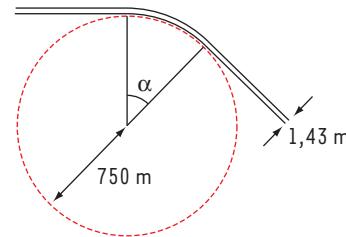
- $\frac{40}{60} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}$
- $\frac{4\pi}{3} \cdot 6 \text{ cm} = 8\pi \text{ cm} = 25,1 \text{ cm}$

Het uiteinde van de secondenwijzer legt in 40 s een afstand van 25,1 cm af.

Opdracht 94 bladzijde 306

Een spoorweg maakt een bocht. Deze bocht heeft de vorm van een cirkelboog met een middelpuntshoek $\alpha = 21^\circ 35'$. De straal van die cirkelboog is 750 m voor de binnenste rail. Beide rails liggen op een onderlinge afstand van 1,43 m.

Bereken het verschil in lengte tussen beide rails in de bocht tot op 1 cm nauwkeurig.

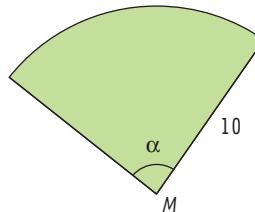


- $21^\circ 35' = 0,3767\dots \text{ rad}$
- $\text{lengte korte rail} = 0,3767\dots \cdot 750 \text{ m} = 282,525 \text{ m}$
- $\text{lengte lange rail} = 0,3767\dots \cdot 751,43 \text{ m} = 283,064 \text{ m}$
- $283,064 - 282,525 = 0,539$

**Het verschil in lengte tussen beide rails in de bocht bedraagt
0,54 m = 54 cm.**

Opdracht 95 bladzijde 307

Bereken de oppervlakte van de cirkelsector met een middelpuntshoek van α rad en een straal 10 als



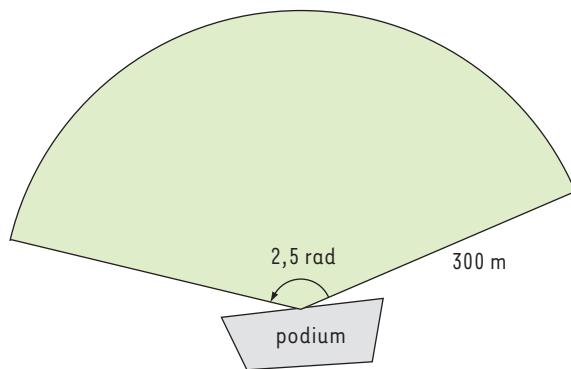
- 1 $\alpha = \pi$ rad
- 2 $\alpha = 1$ rad
- 3 $\alpha = 5,223$ rad

Cirkel met straal 10

	middelpuntshoek	opp. cirkelsector
	2π rad	$\pi \cdot 10^2 = 100\pi$
1)	π rad	50π
2)	1 rad	50
3)	5,223 rad	$50 \cdot 5,223 = 261,15$

Opdracht 96 bladzijde 307

Het terrein voor een popconcert heeft de vorm van een cirkelsector met een middelpuntshoek van 2,5 rad en een straal van 300 m.



- 1 Bereken de omtrek van het terrein.

- $\text{omtrek} = 300 + 300 + \text{booglengte} = 600 + \text{booglengte}$
- $\text{booglengte} = 2,5 \cdot 300 = 750$

De omtrek van het terrein is 1350 m.

2 Hoeveel concertgangers kunnen op het terrein als men voor de veiligheid 2 m^2 per persoon voorziet?

opp. cirkelsector (zie opdracht 95)

$$= \frac{\pi \cdot 300^2}{2\pi} \cdot 2,5 \text{ m}^2$$

$$= 112\,500 \text{ m}^2$$

• aantal concertgangers

$$= \frac{112\,500 \text{ m}^2}{2 \text{ m}^2}$$

$$= 56\,250$$

56 250 concertgangers kunnen op dit terrein.

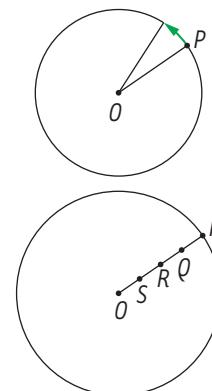
Opdracht 97 bladzijde 307

De snelheid van een punt op een cirkel kan op twee manieren worden gegeven:

- de **hoeksnelheid** (in rad/s) is het aantal radialen waarover OP per tijdseenheid draait
- de **baansnelheid** (in m/s) is de afstand die P per tijdseenheid aflegt langs de cirkel

Een draaimolen met een straal van 4 meter draait met een hoeksnelheid van 0,5 rad/s.

Bereken de baansnelheden van de punten P , Q , R en S die de straal in 4 gelijke stukken verdelen.



hoeksnelheid = 0,5 rad/s

- P: straal = 4 m \Rightarrow baansnelheid = $4 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$
- Q: straal = 3 m \Rightarrow baansnelheid = $3 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$
- R: straal = 2 m \Rightarrow baansnelheid = $2 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$
- S: straal = 1 m \Rightarrow baansnelheid = $1 \cdot 0,5 \text{ m/s} = 0,5 \text{ m/s}$

Opdracht 98 bladzijde 307

De gemiddelde afstand aarde–zon bedraagt 149,6 miljoen km. Als je veronderstelt dat de aarde rond de zon draait in een cirkelvormige baan en je weet dat één omwenteling 365,25 dagen duurt, bereken dan de baansnelheid van de aarde. Druk je resultaat uit in km/h.

$$\text{baansnelheid} = \frac{149\,600\,000 \cdot 2\pi}{365,25 \cdot 24} \text{ km/h}$$

$$= 107\,228 \text{ km/h}$$

**Opdracht 99 bladzijde 308**

Mars draait rond zijn as met een hoeksnelheid van 0,2552 rad/h.

Hoeveel uren, minuten en seconden telt een dag op Mars?



$$\frac{2\pi \text{ rad}}{0,2552 \text{ rad/h}} = 24,6206 \text{ h} = 24 \text{ u } 37 \text{ min } 14 \text{ sec}$$

Opdracht 100 bladzijde 308

Een waterrad heeft een straal van 1,5 m. Als de stroom ervoor zorgt dat het rad 8 omwentelingen per minuut maakt, wat is dan de snelheid van de rivierstroom?



- **8 omwentelingen per minuut**
= **480 omwentelingen per uur**

- **bijbehorende booglengte**
= **$480 \cdot 2\pi \cdot 1,5 \text{ m}$**
= **4524 m**
= **4,5 km**

De snelheid van de rivierstroom is 4,5 km/h.

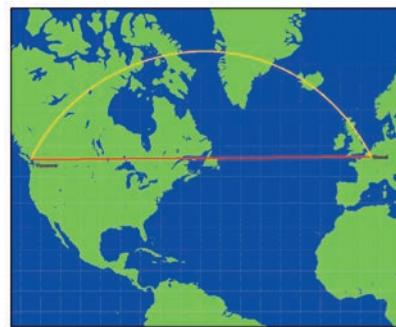




Opdracht 101 bladzijde 308

Hiernaast zie je twee mogelijke routes om van Brussel naar Vancouver (Canada) te vliegen. De onderste rechte lijn lijkt de kortste route te geven, maar in werkelijkheid wordt die gegeven door de bovenste gebogen lijn.

De vlakke kaart hiernaast geeft namelijk een vervormde weergave van de driedimensionale wereldbol.



Uit de tweede figuur – die het 3D-effect beter weergeeft – kun je afleiden dat de bovenste lijn inderdaad korter blijkt te zijn dan de onderste.

De kortste afstand tussen twee punten op een bol wordt gemeten via een 'grote cirkel', dit is een cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol. Je kunt zo'n cirkel bekijken als de doorsnede van de bol met een vlak door het middelpunt van de bol.



In wat volgt berekenen we de lengtes van de twee aangegeven routes Brussel – Vancouver.

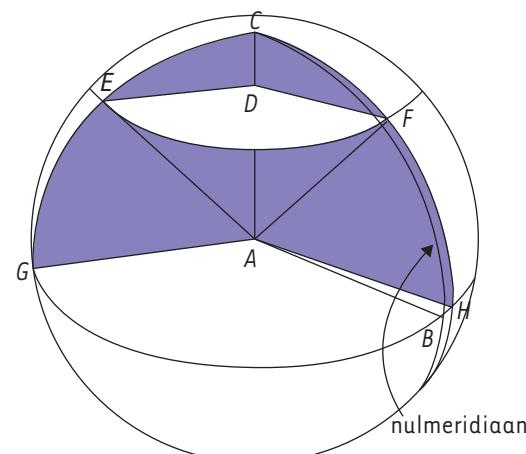
Beide steden liggen op 50° noorderbreedte. Brussel ligt op de meridiaan met oosterlengte $4,3^\circ$ en Vancouver heeft als westerlengte $123,1^\circ$.

We berekenen eerst de afstand via een parallelcirkel, dit is een cirkel evenwijdig met de evenaar (de rode route).

- Als Brussel op de figuur voorgesteld wordt door F en Vancouver door E , welke hoeken geven dan de noorderbreedte van Brussel, respectievelijk Vancouver weer?

noorderbreedte Brussel: $H\hat{A}F$
noorderbreedte Vancouver: $G\hat{A}E$

Om de gevraagde booglengte $|FDE|$ te berekenen, hebben we de straal $|DF|$ nodig en de hoek $E\hat{D}F$ in radialen.

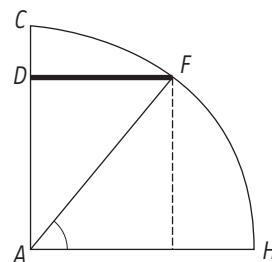


- 2 De hoek $\hat{E}DF$ kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden.

Geef deze hoek in zestigdelige graden en in radialen.

$$\hat{E}DF = 123,1^\circ + 4,3^\circ = 127,4^\circ = 127^\circ 24' = 2,2235\ldots \text{ rad}$$

- 3 Bereken de straal $|DF|$ met behulp van de figuur hiernaast. De straal van de aarde is ongeveer 6378 km.



$$\cos H\hat{A}F = \frac{|DF|}{|AF|}$$



$$\cos 50^\circ = \frac{|DF|}{6378}$$



$$|DF| = 6378 \cdot \cos 50^\circ = 4099,699\ldots \text{ km}$$

- 4 Bereken nu de booglengte $|\widehat{FDE}|$ die de afstand Brussel – Vancouver weergeeft volgens de rode route.

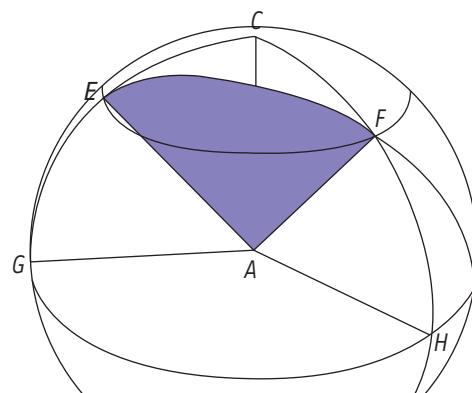
$$|\widehat{FDE}| = 4099,699\ldots \cdot 2,2235\ldots = 9115,88 \text{ km} \approx 9116 \text{ km}$$

We berekenen ook de gele route, dit is de afstand via een grote cirkel door de punten F en E .

De grote cirkel door F en E ligt boven de boog \widehat{FDE} en heeft als middelpunt het middelpunt van de aardbol.

Om de booglengte $|\widehat{FAE}|$ te berekenen, hebben we de straal $|AF|$ nodig en de hoek $\hat{E}AF$ in radialen.

De straal $|AF|$ is de straal van de aarde en dus 6378 km.



- 5 De hoek $\hat{E}AF$ kunnen we berekenen via de cosinusregel in de driehoek FAE . Hiervoor hebben we ook $|EF|$ nodig, die we berekenen via een andere driehoek.

$$\begin{aligned} |EF|^2 &= |DE|^2 + |DF|^2 - 2 \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \cos \hat{E}DF \\ &= 4099,699\ldots^2 + 4099,699\ldots^2 \\ &\quad - 2 \cdot 4099,699\ldots \cdot 4099,699\ldots \cdot \cos 127,4^\circ \\ &= 54032051,25 \\ &\downarrow \\ |EF| &= 7350,6497\ldots \text{ km} \end{aligned}$$

- 6 Bereken nu de hoek \hat{EAF} (in rad) via de cosinusregel in de driehoek FAE.

$$|EF|^2 = |AE|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |AF| \cdot \cos \hat{EAF}$$

↓

$$\cos \hat{EAF} = \frac{|EF|^2 - |AE|^2 - |AF|^2}{-2 \cdot |AE| \cdot |AF|}$$

↓

$$\cos \hat{EAF} = \frac{54032051,25 - 2 \cdot 6378^2}{-2 \cdot 6378^2} = 0,33587\dots$$

↓

$$\hat{EAF} = 1,228\dots \text{ rad}$$

- 7 Bereken tenslotte de booglengte $|\widehat{FAE}|$ die de afstand Brussel – Vancouver weergeeft volgens de gele route.

$$|\widehat{FAE}| = 6378 \cdot 1,228\dots = 7833,88 \text{ km} \approx 7834 \text{ km}$$

- 8 Hoe groot is het verschil in afstand tussen beide routes?

$$9116 \text{ km} - 7834 \text{ km} = 1282 \text{ km}$$

**Opdracht 102 bladzijde 310**

Kies het juiste antwoord (er is slechts één juist antwoord per vraag).

1 $\frac{\pi}{3}$ rad en $\frac{4\pi}{3}$ rad zijn

- A tegengestelde hoeken C supplementaire hoeken
B complementaire hoeken D antisupplementaire hoeken
D

2 De sinus van $\frac{\pi}{4}$ rad is dezelfde als de sinus van

- A $\frac{3\pi}{4}$ rad C $-\frac{\pi}{4}$ rad
B $\frac{5\pi}{4}$ rad D $-\frac{3\pi}{4}$ rad

A

3 $\sin(\pi - \alpha)$ is gelijk aan

- A $\sin(\pi + \alpha)$ C $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
B $\cos(\pi + \alpha)$ D $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

D

4 $\cos(5\pi + \alpha)$ is gelijk aan

- A $\cos \alpha$ C $-\cos \alpha$
B $\sin \alpha$ D $-\sin \alpha$
C

Opdracht 103 bladzijde 311

Bepaal exact alle hoeken waarvoor geldt

$$1 \cos^2 \alpha = 1$$

↔

$$\cos \alpha = \pm 1$$

↔

$$\alpha = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 |\sin \alpha| = \frac{1}{2}$$

↔

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

↔

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } \alpha = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3 \tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

↔

$$\tan^2 \alpha = 1$$

↔

$$\tan \alpha = \pm 1$$

↔

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 104 bladzijde 311

Bepaal alle hoeken waarvoor de volgende voorwaarde geldt. Rond af op 3 cijfers na de komma.

$$1 \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

↔

$$\alpha = \pm 1,823 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

↔

$$\alpha = 0,848 + k \cdot 2\pi \text{ of } \alpha = 2,294 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $\tan \alpha = -2$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1,107 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 105 bladzijde 311

Is $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ dan is

A $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

D $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

B $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$

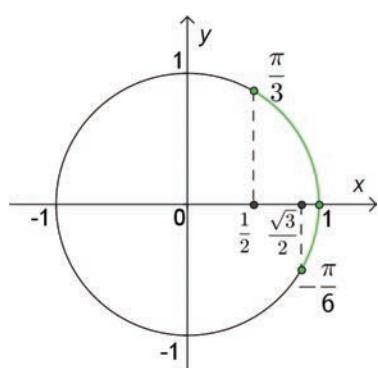
E $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

C $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(Bron © VWO 1997, eerste ronde)

$$\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

zodat $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1 \rightarrow B$



Opdracht 106 bladzijde 311

Vereenvoudig.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \sin \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$2 \quad \frac{\sin(\alpha + 4\pi) \cdot \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\alpha - 9\pi) \cdot \cos(-\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\cos(\alpha - \pi) \cdot \cos \alpha} \\
 &= \frac{-\sin^2 \alpha}{-\cos^2 \alpha} \\
 &= \tan^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$3 \quad \frac{\sin(-\alpha)}{\tan(7\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\sin \alpha}{\tan \alpha \cdot (-\cos \alpha)} \\
 &= \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

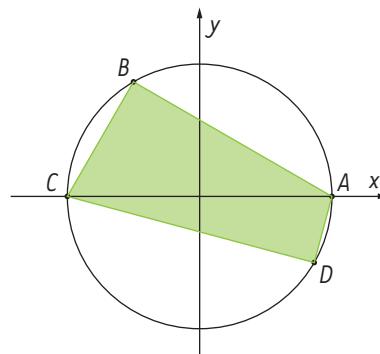
Opdracht 107 bladzijde 312

Op de goniometrische cirkel is

- A het beeldpunt van 0°
- B het beeldpunt van 120°
- C het beeldpunt van 180°
- D het beeldpunt van 330°

De oppervlakte van koordenvierhoek $ABCD$ is dan gelijk aan

- A** $\sqrt{3} + 1$ **B** $\sqrt{3} - 1$ **C** $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ **E** $\frac{2\sqrt{3} + 3}{6}$



(Bron © VWO 1993, eerste ronde)

opp. koordenvierhoek ABCD

$$\begin{aligned}
 &= \text{opp. } \triangle ABC + \text{opp. } \triangle ACD \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \rightarrow \mathbf{C}
 \end{aligned}$$

Opdracht 108 bladzijde 312

Kies telkens het juiste antwoord.

- 1** $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

- A** $\cos \alpha = a$ **B** $\sin \alpha = a$ **C** $\tan \alpha = a$

B want $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

- 2** $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{11\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

- A** $\cos \alpha = a$ **B** $\sin \alpha = a$ **C** $\tan \alpha = a$

A want $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$

3 $\frac{\pi}{6}$ en $-\frac{7\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos \alpha = a$

B $\sin \alpha = a$

C $\tan \alpha = a$

B want $\frac{-7\pi}{6} = (\pi - \frac{\pi}{6}) - 2\pi$

4 $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{7\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos \alpha = a$

B $\sin \alpha = a$

C $\tan \alpha = a$

C want $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$

Opdracht 109 bladzijde 312

Welke van de volgende uitspraken gelden voor elke α ? Verklaar je antwoord.

1 $\sin \alpha = \sin(4\pi + \alpha)$

$\sin(4\pi + \alpha) = \sin(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \sin \alpha \rightarrow \text{wel}$

2 $\sin \alpha = \sin(3\pi - \alpha)$

$\sin(3\pi - \alpha) = \sin(2\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \rightarrow \text{wel}$

3 $\cos \alpha = \cos(3\pi - \alpha)$

$\cos(3\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \rightarrow \text{niet}$

4 $\tan \alpha = \tan(3\pi - \alpha)$

$\tan(3\pi - \alpha) = \tan(2\pi + \pi - \alpha) = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \rightarrow \text{niet}$

5 $\tan \alpha = \tan(3\pi + \alpha)$

$\tan(3\pi + \alpha) = \tan(2\pi + \pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \rightarrow \text{wel}$

6 $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha \rightarrow \text{wel}$

7 $\sin \alpha = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(2\pi - \frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \rightarrow \text{wel}$$

8 $\sin \alpha = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \rightarrow \text{wel}$$

9 $\tan \alpha = \tan(4\pi - \alpha)$

$$\tan(4\pi - \alpha) = \tan(2 \cdot 2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \rightarrow \text{niet}$$

10 $\cos \alpha = \cos(4\pi - \alpha)$

$$\cos(4\pi - \alpha) = \cos(2 \cdot 2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha \rightarrow \text{wel}$$

Opdracht 110 bladzijde 313

Bewijs de volgende formules.

1 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

2 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= -\sin \alpha\end{aligned}$$



3 $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \pi) &= \sin(-(\pi - \alpha)) \\ &= -\sin(\pi - \alpha) \\ &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

4 $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \pi) &= \cos(-(\pi - \alpha)) \\ &= \cos(\pi - \alpha) \\ &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

5 $\tan(\alpha - 3\pi) = \tan \alpha$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - 3\pi) &= \tan(-(3\pi - \alpha)) \\ &= -\tan(3\pi - \alpha) \\ &= -\tan(2\pi + \pi - \alpha) \\ &= -\tan(\pi - \alpha) \\ &= \tan \alpha\end{aligned}$$



Opdracht 111 bladzijde 313

Bereken zonder rekentoestel.

$$\begin{aligned}1 \quad &\sin \frac{7\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} \\ &= \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin(2\pi - \frac{7\pi}{5}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin(-\frac{7\pi}{5}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



Opdrachten

$$\begin{aligned}
 2 & \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{9\pi}{7} - \cos \frac{11\pi}{7} - \cos \frac{13\pi}{7} \\
 &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{13\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{11\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{9\pi}{7} \\
 &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{\pi}{7}) + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{3\pi}{7}) \\
 &\quad + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{5\pi}{7}) \\
 &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos(-\frac{\pi}{7}) + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos(-\frac{3\pi}{7}) + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos(-\frac{5\pi}{7}) \\
 &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 & \tan \frac{\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{7\pi}{4} + \tan \frac{9\pi}{4} - \cot \frac{11\pi}{4} \\
 &= 1 - (-1) + 1 - (-1) + 1 - (-1) \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{19\pi}{7}} \\
 &= \frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{2\pi}{7} - \cos(2\pi + (\pi - \frac{2\pi}{7}))} \\
 &= \frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{2\pi}{7} - \cos(\pi - \frac{2\pi}{7})} \\
 &= \frac{\sin \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7}} \\
 &\qquad \frac{3\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} - \frac{4\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} \\
 &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7})}{2 \cos \frac{2\pi}{7}} \\
 &= \frac{\cos \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{2\pi}{7}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$$5 \frac{\tan \frac{20\pi}{9} - \tan \frac{7\pi}{9}}{\cot \left(-\frac{23\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{\tan \frac{20\pi}{9} - \tan (\pi + (\pi - \frac{20\pi}{9}))}{\cot \left(\frac{-23\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{\tan \frac{20\pi}{9} - \tan (\pi - \frac{20\pi}{9})}{\cot \left(\frac{-23\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{\tan \frac{20\pi}{9} + \tan \frac{20\pi}{9}}{\cot \left(-\frac{23\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{40\pi}{18}}{\cot \left(-\frac{23\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{2 \tan (2\pi + \frac{4\pi}{18})}{\cot \left(-\pi - \frac{5\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{2 \tan \left(\frac{4\pi}{18} \right)}{-\cot \left(\pi + \frac{5\pi}{18} \right)}$$

$$= \frac{-2 \tan \frac{4\pi}{18}}{\cot \frac{5\pi}{18}}$$

$$= \frac{-2 \tan \frac{4\pi}{18}}{\cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{18} \right)}$$



$$= \frac{-2 \tan \frac{4\pi}{18}}{\tan \frac{4\pi}{18}}$$

$$= -2$$

Opdracht 112 bladzijde 313

Welke van de volgende vijf betrekkingen geldt **niet** in elke driehoek ABC met hoeken α , β en γ ?

A) $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$

D) $\cos(\alpha - \beta + \gamma) = \cos(\beta - \alpha - \gamma)$

B) $\cos 2\alpha = \cos 2(\beta + \gamma)$

E) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$

C) $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta + \gamma}{2}$

(Bron © VWO 1995, eerste ronde)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

A) $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha)$

$$= \sin \alpha \rightarrow \text{wel}$$

B) $\cos 2(\beta + \gamma) = \cos 2(\pi - \alpha)$
 $= \cos(2\pi - 2\alpha)$
 $= \cos(-2\alpha)$
 $= \cos 2\alpha \rightarrow \text{wel}$

C) $\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \tan \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right)$
 $= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$
 $= \cot \frac{\alpha}{2} \rightarrow \text{niet}$

D) $\cos(\beta - \alpha - \gamma) = \cos(-(\alpha - \beta + \gamma))$
 $= \cos(\alpha - \beta + \gamma) \rightarrow \text{wel}$



$$\text{E) } \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{\alpha}{2} \rightarrow \text{wel}$$

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 113 bladzijde 314

Bepaal alle hoeken α waarvoor de volgende gelijkheden gelden.

1 $\sin 4\alpha = \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$

\Updownarrow

$$4\alpha = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 4\alpha = \pi - (2\alpha - \frac{\pi}{2}) + k \cdot 2\pi$$

\Updownarrow

$$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 6\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

\Updownarrow

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{3\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

\Updownarrow

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$2 \quad \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{18}\right) = \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{9}\right)$$

↔

$$\alpha + \frac{\pi}{18} = 2\alpha - \frac{\pi}{9} + k \cdot \pi$$

↔

$$-\alpha = -\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{18} + k \cdot \pi$$

↔

$$-\alpha = -\frac{3\pi}{18} + k \cdot \pi$$

↔

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3 \quad \sin \alpha = \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$$

↔

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$$

↔

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \pm\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + k \cdot 2\pi$$

↔

$$-3\alpha = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

↔

$$\alpha = \frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{-7\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{OFWEL } \sin \alpha = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{12})$$

 \Updownarrow

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - (2\alpha + \frac{\pi}{12}))$$

 \Updownarrow

$$\sin \alpha = \sin(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha)$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{5\pi}{12} - 2\alpha + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \pi - (\frac{5\pi}{12} - 2\alpha) + k \cdot 2\pi$$

 \Updownarrow

$$3\alpha = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad -\alpha = \frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{of} \quad \alpha = -\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$4 \quad \tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{9} - 3\alpha\right)$$

 \Updownarrow

$$\tan \alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{9} - 3\alpha))$$

 \Updownarrow

$$\tan \alpha = \tan(\frac{7\pi}{18} + 3\alpha)$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{7\pi}{18} + 3\alpha + k \cdot \pi$$

 \Updownarrow

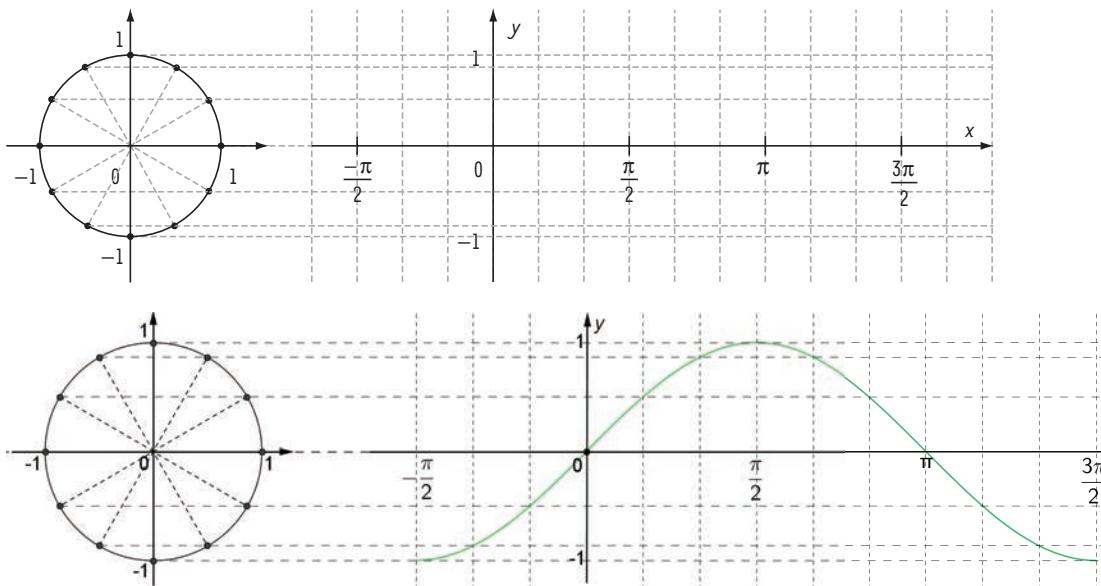
$$-2\alpha = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \pi$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{-7\pi}{36} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 114 bladzijde 314

Teken de sinusfunctie in het interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

**Opdracht 115 bladzijde 314**

Hoeveel verschillende gehele waarden kan $3 - 3 \cdot |\cos x|$ aannemen?

- A 2 B 3 C 4 D 6 E 7

(Bron © VWO 1998, tweede ronde)

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1$$

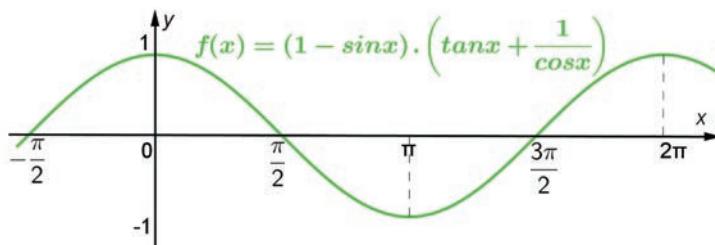
- als $|\cos x| = 0$, dan $3 - 3|\cos x| = 3$
- als $|\cos x| = \frac{1}{3}$, dan $3 - 3|\cos x| = 2$
- als $|\cos x| = \frac{2}{3}$, dan $3 - 3|\cos x| = 1$
- als $|\cos x| = 1$, dan $3 - 3|\cos x| = 0$

Antwoord C

**Opdracht 116 bladzijde 314**

Plot de volgende functiegrafieken en leid daaruit een goniometrische identiteit af. Bewijs daarna deze identiteit algebraïsch.

1 $f(x) = (1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\cos x} \right)$



$$f(x) = (1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= (1 - \sin x) \cdot \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

$$= \frac{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{\cos x}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$$

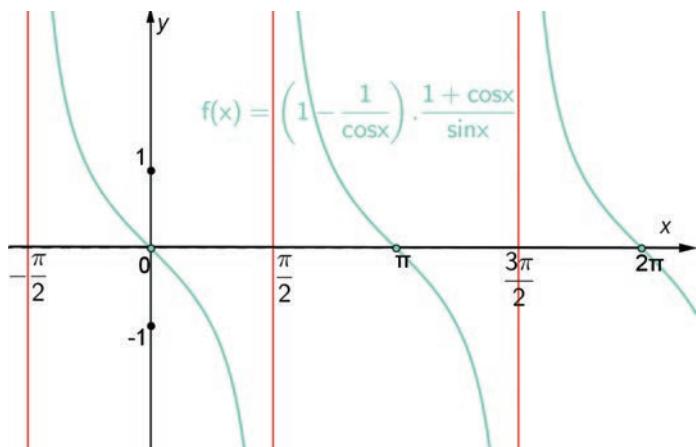
$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \cos x$$

De identiteit is $(1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\cos x} \right) = \cos x$.



2 $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x}$



$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\sin x}$$

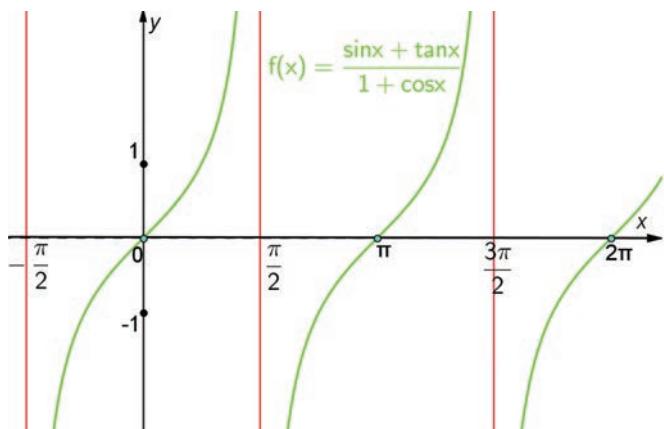
$$= \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x \cdot \sin x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}$$

$$= -\tan x$$

De identiteit is $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x} = -\tan x.$

3 $f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x}$



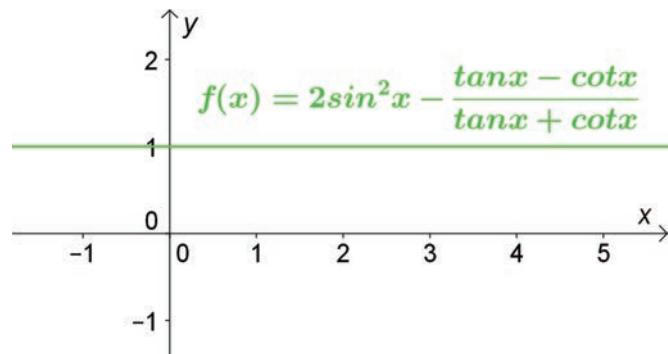
$$f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin x \cdot \cos x + \sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\sin x \cdot (\cos x + 1)}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \tan x \end{aligned}$$

De identiteit is $\frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x} = \tan x$



4 $f(x) = 2 \sin^2 x - \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 \sin^2 x - \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} \\
 &= 2 \sin^2 x - \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \\
 &= 2 \sin^2 x - \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \cancel{-} \sin x} \cdot \frac{\cos x \cdot \sin x}{\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1} \\
 &= 2 \sin^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

De identiteit is $2 \sin^2 x - \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1$

**Opdracht 117 bladzijde 315**

Stel dat f een functie is zodanig dat voor elk reëel getal x geldt dat

$$f(x) + 2 f(-x) = \sin x, \text{ dan is } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ gelijk aan}$$

- A** -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** 0 **D** $\frac{1}{2}$ **E** 1

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2005)

$$\cdot f(x) + 2 f(-x) = \sin x$$



$$f(x) = \sin x - 2 f(-x)$$

$$\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - 2 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\cdot f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

$$\cdot (1) \& (2) : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 \cdot (-1 - 2 f\left(\frac{\pi}{2}\right))$$

$$= 1 + 2 + 4 f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



$$-3 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \rightarrow A$$

Opdracht 118 bladzijde 315

Herleid de volgende functies tot algemene sinusfuncties.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad y &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin(\pi + (x + \frac{\pi}{3})) \\ &= \sin(x + \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad y &= \sin(-2(x - 1)) \\ &= -\sin(2(x - 1)) \\ &= \sin(\pi + 2(x - 1)) \\ &= \sin(\pi + 2x - 2) \\ &= \sin(2 \cdot (x + \frac{\pi - 2}{2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \quad y &= -\frac{1}{2} \sin\left(-3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5 \\ &= \frac{1}{2} \sin(3(x - \frac{\pi}{2})) + 5 \end{aligned}$$

Opdracht 119 bladzijde 315

Tijdens een gehoortest krijgt een proefpersoon een aantal tonen te horen die variëren in frequentie en sterkte. Op een monitor worden de tonen zichtbaar gemaakt.

De proefpersoon krijgt vier tonen te horen met vergelijking:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad y &= 5 \sin(400\pi t) \\ a = 5, p &= \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200} \rightarrow f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad y &= 5 \sin(800\pi t) \\ a = 5, p &= \frac{2\pi}{800\pi} = \frac{1}{400} \rightarrow f_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \quad y &= 5 \sin(1000\pi t) \\ a = 5, p &= \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500} \rightarrow f_3 \end{aligned}$$

4 $y = 2 \sin(1000\pi t)$

$$a = 2, p = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500} \rightarrow f_2$$

Opdracht 120 bladzijde 316

De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.
Bepaal een mogelijk voorschrift.

1 • mogelijk startpunt: $(\frac{\pi}{2}, 1)$, dus $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$

• amplitude = 3, dus $a = 3$

• periode = 4π , dus $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$y = 3 \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})) + 1$$

2 • mogelijk startpunt: $(-3, -2)$, dus $c = -3$, $d = -2$

• amplitude = 2, dus $a = 2$

• periode = 8 , dus $\frac{2\pi}{b} = 8$

$$b = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 2 \sin(\frac{\pi}{4}(x + 3)) - 2$$

3 • mogelijk startpunt: $(-1, -\frac{7}{2})$, dus $c = -1$, $d = -\frac{7}{2}$

• amplitude = $\frac{5}{2}$, dus $a = \frac{5}{2}$

• periode = 4 , dus $\frac{2\pi}{b} = 4$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{5}{2} \sin(\frac{\pi}{2}(x + 1)) - \frac{7}{2}$$

4 · mogelijk startpunt: $(\frac{\pi}{4}, 1)$, dus $c = \frac{\pi}{4}$, $d = 1$

· amplitude = $\frac{5}{2}$, dus $a = \frac{5}{2}$

· periode = π , dus $\frac{2\pi}{b} = \pi$

$$b = 2$$

$$y = \frac{5}{2} \sin(2(x - \frac{\pi}{4})) + 1$$

Opdracht 121 bladzijde 317

Bepaal het voorschrift van een mogelijke periodieke functie met de volgende kenmerken.

1 amplitude: 3

periode: 10

faseverschuiving: 2

amplitude = 3, dus $a = 3$

periode = 10, dus $\frac{2\pi}{b} = 10$

$$b = \frac{\pi}{5}$$

faseverschuiving = 2, dus $c = 2$

mogelijk voorschrift: $y = 3 \sin(\frac{\pi}{5}(x - 2))$

2 amplitude: 5

periode: $\frac{\pi}{2}$

faseverschuiving: π

verticale verschuiving: -4

amplitude = 5, dus $a = 5$

periode = $\frac{\pi}{2}$, dus $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$

$$b = 4$$

faseverschuiving = π , dus $c = \pi$

verticale verschuiving = -4, dus $d = -4$

mogelijk voorschrift: $y = 5 \sin(4(x - \pi)) - 4$

3 amplitude: 2periode: 3π faseverschuiving: $-\frac{1}{2}$

$$\text{amplitude} = 2, \text{ dus } a = 2$$

$$\text{periode} = 3\pi, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 3\pi$$

$$b = \frac{2}{3}$$

$$\text{faseverschuiving} = -\frac{1}{2}, \text{ dus } c = -\frac{1}{2}$$

$$\text{mogelijk voorschrift: } y = 2 \sin\left(\frac{2}{3}(x + \frac{1}{2})\right)$$

4 amplitude: $\frac{7}{2}$ periode: 3π faseverschuiving: $-\frac{\pi}{3}$

verticale verschuiving: 5

$$\text{amplitude} = \frac{7}{2}, \text{ dus } a = \frac{7}{2}$$

$$\text{periode} = 3\pi, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 3\pi$$

$$b = \frac{2}{3}$$

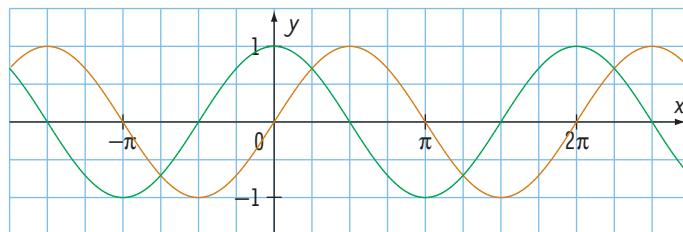
$$\text{faseverschuiving} = -\frac{\pi}{3}, \text{ dus } c = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{verticale verschuiving} = 5, \text{ dus } d = 5$$

$$\text{mogelijk voorschrift: } y = \frac{7}{2} \sin\left(\frac{2}{3}(x + \frac{\pi}{3})\right) + 5$$

**Opdracht 122 bladzijde 317**

De grafiek van de cosinusfunctie is een verschuiving van de grafiek van de sinusfunctie.



- 1 Welke grafiek stelt de cosinusfunctie voor?

De groene grafiek stelt de cosinusfunctie voor.

- 2 Kijk naar de grafieken hierboven en vul aan: $\cos x = \sin(x \dots)$.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- 3 Verklaar de bovenstaande gelijkheid door gebruik te maken van formules voor verwante hoeken.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{complementaire hoeken}$$

$$= \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \quad \text{supplementaire hoeken}$$

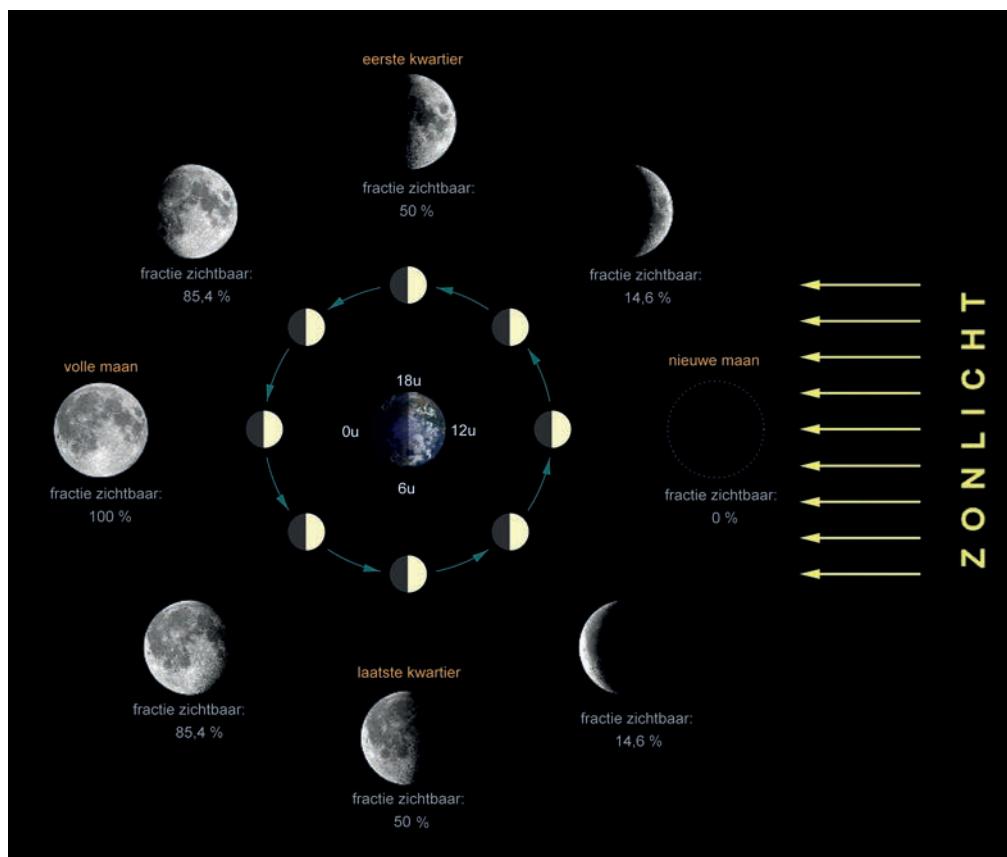
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Opdracht 123 bladzijde 318

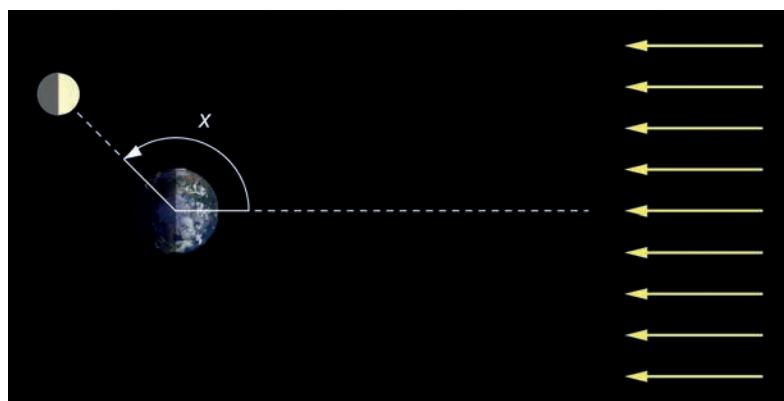
Terwijl de aarde rond de zon draait, draait de maan in tegenwijzerzin om de aarde. De zon verlicht steeds de helft van de maanbol, maar van op aarde zien we die verlichte helft zelden volledig. Zo ontstaan de schijngestalten van de maan: nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier.



Bij 'nieuwe maan' is de verlichte helft vanaf de aarde niet te zien. Het verlichte deel dat zichtbaar is, neemt vanaf dan toe. Is de maan 45° verder gedraaid, dan is een smalle sikkels zichtbaar, die overeenkomt met 14,6 % van de totale vanaf de aarde zichtbare maanoppervlakte. Bij het 'eerste kwartier' is precies de helft van dit deel zichtbaar, waarna het toeneemt tot 100 %, bij 'volle maan', om vervolgens opnieuw af te nemen tot 0 %.

Het percentage F van het vanaf de aarde zichtbare maanoppervlak dat verlicht is, hangt af van de hoek x in radialen tussen de verbindingslijn aarde-zon en aarde-maan, met $0 \leq x \leq 2\pi$. De formule is:

$$F(x) = 50(1 - \cos x)$$





1 Bepaal x en $F(x)$ bij volle maan.

$$x = \pi$$

$$F(\pi) = 50 \cdot (1 - \cos \pi) = 100$$

2 Bepaal x en $F(x)$ bij nieuwe maan.

$$x = 0$$

$$F(0) = 50 \cdot (1 - \cos 0) = 0$$

3 Bepaal x en $F(x)$ bij het eerste of het laatste kwartier.

• **eerste kwartier:**

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 50 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = 50$$

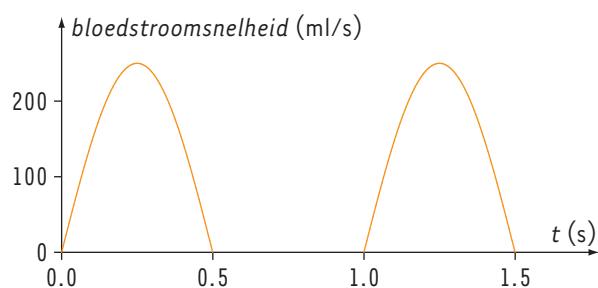
• **laatste kwartier:**

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 50 \cdot \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2}\right) = 50$$

Opdracht 124 bladzijde 319

Bij een volwassene in rust pompt het hart bloed in de grote bloedsomloop. De bloedstroomsnelheid kan benaderd worden door het positieve deel van een algemene sinusfunctie waarvan de grafiek gegeven is.



Bij inspanning verdubbelt de frequentie van de cyclus en wordt de bloedstroomsnelheid vier keer zo groot.

Bij welke van de volgende voorschriften is het positieve deel de beste benadering van de bloedstroomsnelheid bij inspanning?

- A** $1000 \sin(2\pi t)$
- B** $1000 \sin(4\pi t)$
- C** $1000 \sin(8\pi t)$
- D** $2000 \sin(\pi t)$

(Bron: toelatingsproef arts-tandarts)

bij gegeven grafiek:

- amplitude = 250, dus $a = 250$
- periode = 1, dus $\frac{2\pi}{b} = 1$, zodat frequentie = $\frac{1}{1} = 1$
 $b = 2\pi$

voorschrijf: $y = 250 \sin(2\pi t)$

bij nieuw voorschrijf:

- bloedstroomsnelheid vier keer zo groot, dus $a = 4 \cdot 250 = 1000$
- frequentie verdubbelt, dus frequentie = $2 \cdot 1 = 2$

$$\text{zodat periode} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{2}$$

$$b = 4\pi$$

voorschrijf: $y = 1000 \sin(4\pi t) \rightarrow \mathbf{B}$

Opdracht 125 bladzijde 320

Onder de astronomische daglengte verstaan we de tijd die verloopt tussen zonsopgang en zonsondergang. Voor Ukkel bedraagt deze daglengte ongeveer:

21.01	21.02	21.03	21.04	21.05	21.06	21.07	21.08	21.09	21.10	21.11	21.12
8,7	10,5	12,3	14,2	15,8	16,5	15,8	14,2	12,3	10,4	8,7	8,0

- 1 Gebruik een grafisch rekentoestel (of computer) om de best passende algemene sinusfunctie te vinden die de astronomische daglengte uitdrukt in functie van het dagnummer. Laat hiervoor 21 januari corresponderen met het dagnummer 21.

L1	L2	via sinusregressie :
21	8,7	$y = 4,1654 \cdot \sin(0,0167x - 1,3034) + 12,1613$
52	10,5	
80	12,3	
111	14,2	
141	15,8	
172	16,5	
202	15,8	
233	14,2	
264	12,3	
294	10,4	
325	8,7	
355	8,0	

- 2 Bepaal de daglengte op 31 mei met deze algemene sinusfunctie.

31 mei heeft dagnummer 151

$$y = 16,0704 \text{ u} \approx 16,1 \text{ u} = 16 \text{ u } 4 \text{ min}$$

- 3 De leg van kippen is sterk afhankelijk van de lengte van de dag. Als het minder dan 13 uren per dag licht is, stoppen kippen met het leggen van eieren.
Wanneer is het legseizoen in Ukkel?

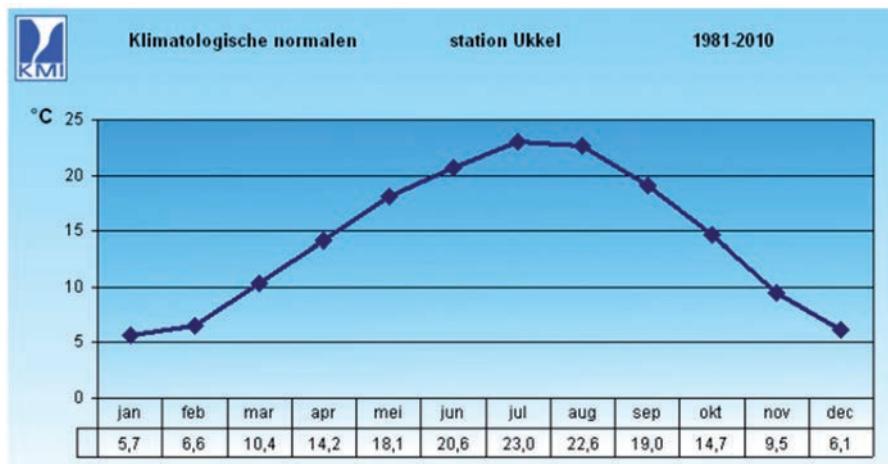
Snijpunten zoeken met rechte met vgl $y = 13$:

$$x_1 = 90,19 \text{ en } x_2 = 254,04$$

Het legseizoen in Ukkel is van 31 maart tot 11 september.

Opdracht 126 bladzijde 320

De gemiddeldes van de maximumtemperaturen in Ukkel over de periode 1981–2010 zijn gegeven.



- 1 Bepaal met de gegevens van januari en juli een voorschrift van de vorm $T(t) = a \sin(b(t - c)) + d$ met de temperatuur T in °C en t het nummer van de maand. Neem hierbij januari als maand 1, februari als maand 2 ...

$$\cdot a = \frac{23,0 - 5,7}{2} = 8,65$$

$$\cdot \text{periode} = 12, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 12$$

$$b = \frac{\pi}{6}$$

- maximum bij $t = 7$ i.p.v. bij $t = \frac{12}{4} = 3$ (maximum wordt bereikt als

$\frac{1}{4}$ van de periode verstrekken is), dus $c = 4$

- maximum is 23,0 i.p.v. 8,65,
dus $d = 23,0 - 8,65 = 14,35$

$$T(t) = 8,65 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - 4)\right) + 14,35$$

- 2 Bereken met de gevonden formule de temperatuur voor elke maand.
Voor welke maand is de afwijking tussen je model en de werkelijkheid het grootst?

(Bron: www.meteo.be)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T(t)	5,7	6,9	10,0	14,4	18,7	21,8	23	21,8	18,7	14,4	10,0	6,9
A	0	+0,3	-0,4	+0,2	+0,6	+1,2	0	-0,8	-0,3	-0,3	+0,5	+0,8

A = afwijking tussen model en werkelijkheid**Voor t = 6 (maand juni) is de afwijking het grootst.****Opdracht 127 bladzijde 321**

Een automobilist ziet de reflecterende pedalen van een fietser voor hem in een rechte lijn op en neer gaan. Die op- en neergaande beweging kan voor het rechterpedaal beschreven worden met de functie met voorschrift

$$h(t) = 17 \sin 2\pi t + 28$$

waarbij h de hoogte van het pedaal t.o.v. het wegdek (in cm) en t de tijd (in s) voorstelt.

- 1 Wat betekenen de getallen 17 en 28 in deze situatie?

$$\begin{aligned} \text{maximale hoogte van het pedaal} &= (28 + 17) \text{ cm} \\ &= 45 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimale hoogte van het pedaal} &= (28 - 17) \text{ cm} \\ &= 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

28 geeft de gemiddelde hoogte van het pedaal weer, 17 geeft de maximale afwijking t.o.v. deze gemiddelde hoogte weer.

- 2 Hoe lang duurt één omwenteling?

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Eén omwenteling duurt 1 seconde.

- 3 Bepaal het voorschrift dat de op- en neergaande beweging van het linkerpedaal beschrijft.

Het linkerpedaal ligt een halve periode voor (of achter) bij het rechterpedaal, dus $c = \frac{1}{2}$.

$$h(t) = 17 \cdot \sin\left(2\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + 28$$

- 4 Eenmaal ronddraaien van de trappers brengt de fiets 5 meter vooruit.
Bereken de snelheid van de fietser in km/h.

Eén omwenteling duurt 1 seconde (zie 2).

Dus:

per seconde: 5 m

per minuut: $60 \cdot 5 \text{ m} = 300 \text{ m}$

per uur: $60 \cdot 300 \text{ m} = 18000 \text{ m} = 18 \text{ km}$

gevraagde snelheid = 18 km/h

Opdracht 128 bladzijde 321

Aan welke van de rechtse uitdrukkingen zijn de linkse gelijk?

1 $\cos 3\alpha$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$$

$$= \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \rightarrow \mathbf{B}$$

2 $\cos 4\alpha$

$$\cos 4\alpha = \cos(2 \cdot 2\alpha)$$

$$= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \rightarrow \mathbf{C}$$

3 $\sin 3\alpha$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha \rightarrow \mathbf{A}$$

4 $\sin 4\alpha$

$$\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot 2\alpha)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \rightarrow \mathbf{D}$$

Opdracht 129 bladzijde 322

Gegeven: $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ met $\alpha \in \text{III}$ en $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ met $\beta \in \text{II}$.

$$\cdot \sin \alpha = -\frac{12}{13} \text{ en } \alpha \in \text{III}$$

↓

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\cdot \cos \beta = -\frac{4}{5} \text{ en } \beta \in \text{II}$$

↓

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Bereken de volgende goniometrische getallen, zonder gebruik te maken van je rekentoestel.

1 $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{25}{169} - \frac{144}{169}$$

$$= -\frac{119}{169}$$

2 $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{-12}{13} \cdot \frac{-5}{13}$$

$$= \frac{120}{169}$$

3 $\cos(\alpha - \beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{-5}{13} \cdot \frac{-4}{5} + \frac{-12}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{20 - 36}{65}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

4 $\cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{-5}{13} \cdot \frac{-4}{5} - \frac{-12}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{20 + 36}{65}$$

$$= \frac{56}{65}$$

5 $\sin(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{-12}{13} \cdot \frac{-4}{5} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{48 + 15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

6 $\sin(\alpha + \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= \frac{-12}{13} \cdot \frac{-4}{5} + \frac{-5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{48 - 15}{65}$$

$$= \frac{33}{65}$$

**Opdracht 130 bladzijde 322**

Vereenvoudig.

$$1 \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha}$$

$$= \frac{2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \sec \alpha$$

$$2 \frac{\cos 4\alpha - 1}{\sin \alpha - \sin 3\alpha}$$

$$= \frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha - 1}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin(-\alpha)}$$

$$= \frac{-2 \sin^2 2\alpha}{-2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \tan 2\alpha$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} \\
 &= \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 2\alpha} \\
 &= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \cos 2\alpha} \\
 &= \frac{\sin 2\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1)}{\cos 2\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1)} \\
 &= \tan 2\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \beta}{-2 \sin \alpha \cdot \sin \beta} \\
 &= -\cot \beta
 \end{aligned}$$

Opdracht 131 bladzijde 322

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$\begin{aligned}
 1 \quad \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\
 &\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\
 &= \tan \alpha + \tan \beta
 \end{aligned}$$

$$2 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \end{aligned}$$

$$3 1 + \cos 2\alpha = 2 - \tan \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\begin{aligned} & 2 - \tan \alpha \cdot \sin 2\alpha \\ &= 2 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cancel{\cos \alpha} \\ &= 2 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 + 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 + \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$4 \sin 2\alpha = \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} \\ &= \frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \\ &= \frac{2}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}} \rightarrow 1 \\ &= 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$5 \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cancel{\cos^2 \alpha}} \cdot \underbrace{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}_1 \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Opdracht 132 bladzijde 322

Bereken $\sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$ zonder rekentoestel.

$$\begin{aligned} &\sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2} (2 \cdot \sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96}) \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2 \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48}) \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Opdracht 133 bladzijde 322

Kies telkens het juiste antwoord.

$$1 \quad 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha =$$

$$\begin{aligned} &= (\cos \alpha + 1) \cdot \tan \alpha \\ &= \sin \alpha + \tan \alpha \rightarrow A \end{aligned}$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1$$

$$2 \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{1+\cos \alpha} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} - \frac{2}{\cancel{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ &\quad \cancel{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{-\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= -1 \rightarrow B \end{aligned}$$

$$3 \quad \tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2} - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &\quad \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{-\cos \alpha}{\frac{1}{2} \sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cot \alpha \rightarrow D \end{aligned}$$

Opdracht 134 bladzijde 323

Als $\tan \alpha = 3$ en $\cot \beta = 2$, bereken dan $\cos^2(\alpha + \beta)$ zonder rekentoestel.

$$\bullet \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\bullet \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{10}} = \frac{\pm 3}{\sqrt{10}}$$

$$\bullet \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

$$\cot^2 \beta + 1 = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{\cot^2 \beta + 1} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\bullet \cos \beta = \cot \beta \cdot \sin \beta = 2 \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{5}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}$$

$$\bullet \cos^2(\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{50}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

$$\text{OFWEL } \cos^2(\alpha + \beta) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{-3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

$$\text{OFWEL } \cos^2(\alpha + \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)^2 \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)^2 \\ = \frac{1}{50}$$

$$\text{OFWEL } \cos^2(\alpha + \beta) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{-3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \right)^2 \\ = \left(\frac{-1}{\sqrt{50}} \right)^2 \\ = \frac{1}{50}$$

Opdracht 135 bladzijde 323

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin \frac{\alpha}{2}$ als $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ en $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$

$$\cos \alpha = \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right], \text{ dus } \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$$

$$\text{dus } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$



Opdrachten

2 $\cos \frac{\alpha}{2}$ als $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ en $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$

$$\cdot \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

↓

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

↓

$$\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cdot \cos \alpha = \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2} = \frac{-\frac{4}{5} + 1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right], \text{ dus } \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\text{dus } \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$



3 $\sin \frac{\alpha}{2}$ als $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ en $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

• $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 8} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ dus } +$$

• $\cos \alpha = \cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ dus } \frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

dus $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Opdracht 136 bladzijde 323**

Als $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{4}$, dan is $\cos 2\alpha$ gelijk aan

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{4}$$

 \Downarrow

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$$

 \Downarrow

$$1^3 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1) = \frac{1}{4}$$

 \Downarrow

$$\frac{3}{4} = 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

 \Downarrow

$$4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

 \Downarrow

$$\sin^2 2\alpha = 1$$

 \Downarrow

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - 1 = 0$$

 \Downarrow

$$\cos 2\alpha = 0 \rightarrow A$$



Opdracht 137 bladzijde 323

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} \\ &= \frac{2 \cancel{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \cancel{\cos(\alpha - \beta)}}{2 \cancel{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \cancel{\cos(\alpha - \beta)}} \\ &= \tan(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$2 \quad \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\ &= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}{(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \end{aligned}$$

$$3 \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

$$\frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} + \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}}{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} - \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}}$$

$$= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) + (\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta}$$

$$\cdot \frac{(1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta)}{(\tan \alpha + \tan \beta) (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) - (\tan \alpha - \tan \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta)}$$

$$= \frac{\cancel{\tan \alpha + \tan \beta} + \cancel{\tan^2 \alpha \cdot \tan \beta} + \tan \alpha \cdot \tan^2 \beta + \cancel{\tan \alpha - \tan \beta} - \cancel{\tan^2 \alpha \cdot \tan \beta} + \tan \alpha \cdot \tan^2 \beta}{\cancel{\tan \alpha + \tan \beta} + \cancel{\tan^2 \alpha \cdot \tan \beta} + \cancel{\tan \alpha - \tan \beta} + \tan \beta + \cancel{\tan^2 \alpha \cdot \tan \beta} - \cancel{\tan \alpha - \tan \beta}}$$

$$= \frac{2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \beta)}{2 \tan \beta (1 + \tan^2 \alpha)}$$

$$= \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}}{\tan \beta \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \beta \cdot \cos \beta}$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \beta \cdot \cos \beta}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

$$4 \quad \tan 2\alpha = \tan \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\&= \tan \alpha \cdot \frac{2}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\&= \tan \alpha \cdot \frac{2}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\&= \tan \alpha \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\&= \tan \alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} \\&= \tan \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right)\end{aligned}$$

$$5 \quad \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \\&= 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\end{aligned}$$

$$6 \quad \sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} \\
 &= \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha}{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} - \tan \alpha} \\
 &= \frac{2 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha - \tan \alpha \cdot (1 - \tan^2 \alpha)} \\
 &= \frac{2 \tan^2 \alpha}{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)} \\
 &= \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\
 &= 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \\
 &= \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$



$$7 \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\begin{aligned}& \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \\&= \frac{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\&= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \\&= \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)} \\&= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\&= \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\end{aligned}$$





8
$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{1 + \sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{\cos(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})^2}{(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}$$

9 $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= \cos(2 \cdot 2\alpha) \\&= 2 \cos^2 2\alpha - 1 \\&= 2 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 \\&= 2 \cdot (4 \cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 1) - 1 \\&= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1\end{aligned}$$



$$10 \cot 2\alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

cot 2α + tan α

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tan 2\alpha} + \tan \alpha \\ &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} + \tan \alpha \\ &= \frac{1 - \tan^2 \alpha + 2 \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} \\ &= \frac{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\sin 2\alpha} \end{aligned}$$

Opdracht 138 bladzijde 324

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

sin 3α

$$\begin{aligned} &= \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$2 \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

cos 3α

$$\begin{aligned} &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$3 \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

tan 3α

$$\begin{aligned} &= \tan(2\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha \cdot (1 - \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$4 \quad 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

3 sin α - sin 3α

$$\begin{aligned} &= 3 \sin \alpha - \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= 3 \sin \alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 2 \sin^3 \alpha \\ &= 4 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot 2 \sin^2 \alpha \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

$$5 \quad \cos^2 2\alpha - \cos^2 \alpha = -\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$$

cos² 2α - cos² α

$$\begin{aligned} &= (\cos 2\alpha - \cos \alpha) \cdot (\cos 2\alpha + \cos \alpha) \\ &= -2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= -2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= -\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$6 \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$

$$= \frac{\sin 3\alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin(3\alpha - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$$= 2$$

Opdracht 139 bladzijde 324

Vereenvoudig

$$1 \frac{\cos n\alpha - \cos(n+2)\alpha}{\sin(n+2)\alpha - \sin n\alpha}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2\sin(n+1)\alpha \cdot \sin(-\alpha)}{2\cos(n+1)\alpha \cdot \sin\alpha} \\ &= \frac{\sin(n+1)\alpha \cdot \cancel{\sin\alpha}}{\cos(n+1)\alpha \cdot \cancel{\sin\alpha}} \\ &= \tan(n+1)\alpha \end{aligned}$$

$$2 \cos^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + \sin^3\alpha \cdot \sin 3\alpha$$

$$\begin{aligned} &= \cos^3\alpha \cdot \cos(2\alpha + \alpha) + \sin^3\alpha \cdot \sin(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos^3\alpha \cdot (\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha) \\ &\quad + \sin^3\alpha \cdot (\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha) \\ &= \cos^4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos^3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \sin^3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \\ &\quad + \sin^4\alpha \cdot \cos 2\alpha \\ &= \cos 2\alpha \cdot (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} \\ &= \cos 2\alpha \cdot (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 \\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha \\ &= \cos^3 2\alpha \end{aligned}$$

Opdracht 140 bladzijde 324

- 1 Bewijs de **omgekeerde formules van Simpson**, die toelaten een product te vervangen door een som of een verschil.

a $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{(x+y) + (x-y)}{2} \cdot \cos \frac{(x+y) - (x-y)}{2} \\ &= \sin x \cdot \cos y \end{aligned}$$

b $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{(x+y) + (x-y)}{2} \cdot \cos \frac{(x+y) - (x-y)}{2} \\ &= \cos x \cdot \cos y \end{aligned}$$

c $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ &= \frac{1}{2} (-2 \cdot \sin \frac{(x-y) + (x+y)}{2} \cdot \sin \frac{(x-y) - (x+y)}{2}) \\ &= -\sin x \cdot \sin(-y) \\ &= \sin x \cdot \sin y \quad \sin(-y) = -\sin y \end{aligned}$$



Opdrachten

2 Zet om naar een som of een verschil.

a $\sin 3x \cdot \cos y$

$$= \frac{1}{2} (\sin(3x + y) + \sin(3x - y))$$

b $\cos 5x \cdot \cos 3y$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(5x + 3y) + \cos(5x - 3y))$$

c $\sin 4x \cdot \sin 5x$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(4x - 5x) - \cos(4x + 5x))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(-x) - \cos 9x)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos x - \cos 9x)$$

**Opdracht 141 bladzijde 324**

Als je de grafiek van $f: x \mapsto \sin^2 x$ bekijkt, dan kun je vermoeden dat deze functie een algemene sinusfunctie voorstelt.

1 Toon aan dat $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2} = \frac{2 \sin^2 x}{2} = \sin^2 x$$



- 2 Vertrek van de bovenstaande formule en gebruik formules van verwante hoeken om aan te tonen dat f een algemene sinusfunctie is.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin^2 x \\&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\&= \frac{1}{2} \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$



**Opdracht 142 bladzijde 325**

In een driehoek ABC met hoeken α , β en γ geldt dat $\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \sin \alpha$.
Toon aan dat ΔABC rechthoekig is in A .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (*)$$

$$\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$$

$$= \tan \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi - \alpha}{2} \right) \quad (*)$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

zodat $\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \sin \alpha$

 \Updownarrow

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sin \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right)$$

 \Updownarrow

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

 \Updownarrow

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 0$$

 \Updownarrow

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ of } \cos \alpha = 0$$

 \Updownarrow

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

 \Updownarrow

$$\underbrace{\alpha = \pi + k \cdot 2\pi}_{\text{onmogelijk}} \text{ of } \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

 \downarrow

in een driehoek: $k = 0$, want $0 < \alpha < \pi$

$$0 < \alpha < \pi$$

 \Updownarrow

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

 \Updownarrow

$\triangle ABC$ is rechthoekig in A

Opdracht 143 bladzijde 325

α , β en γ zijn de hoeken van een driehoek. Eén van de hoeken heeft als grootte het gemiddelde van de andere twee hoekgroottes.

$$\text{Toon aan dat } \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} = \sqrt{3}.$$

$$\cdot \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\cdot \text{ stel } \frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$$

$$\text{dan } \alpha + \beta = 2\gamma$$

$$2\gamma + \gamma = \pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3}$$

$$\cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\pi}{3}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\pi}{3}}{2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 \right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 \right)}$$

$$= \sqrt{3}$$

**Opdracht 144 bladzijde 325**

Bewijs dat de volgende gelijkheden gelden in elke driehoek ABC met hoeken α , β en γ .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\begin{aligned} 1 \quad & \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \\ & \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\pi - (\alpha + \beta)) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(-\frac{\beta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$



2 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$

$$\begin{aligned}
 & \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \\
 &= \tan(\alpha + \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta) + \tan \gamma \\
 &= \tan(\pi - \gamma) \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta) + \tan \gamma \\
 &= -\tan \gamma \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta) + \tan \gamma \\
 &= \tan \gamma \cdot (-1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta + 1) \\
 &= \tan \gamma \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta \\
 &= \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma
 \end{aligned}$$

3 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$

$$\begin{aligned}
 & \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \\
 &= 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos(2\pi - 2(\alpha + \beta)) \\
 &= 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos(2(\alpha + \beta)) \\
 &= 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + (2 \cos^2(\alpha + \beta) - 1) \\
 &= 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) - 1 \\
 &= 2 \cos(\pi - \gamma) \cdot (2 \cos \alpha \cdot \cos(-\beta)) - 1 \\
 &= -2 \cos \gamma \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta - 1 \\
 &= -1 - 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma
 \end{aligned}$$

4 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\
 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\pi - (\alpha + \beta)) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2(\alpha + \beta) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) \\
 &= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
 &= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot (2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(-\beta)) \\
 &= 1 + \cos(\pi - \gamma) \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \\
 &= 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma
 \end{aligned}$$



$$5 \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \quad \cos \alpha = \cos(2 \frac{\alpha}{2})$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \frac{1 - \cos \beta}{2} - \sin^2 \left(\frac{\pi - (\alpha + \beta)}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= 1 - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$= 1 - \cos \left(\frac{\pi - \gamma}{2} \right) \cdot \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{-\beta}{2} \right)$$

$$= 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$



Opdracht 145 bladzijde 325Bepaal a en b als

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \left(\cos \frac{x}{2} + \cos 2x + \cos \frac{7x}{2} + \cos 5x \right) \cdot \sin \frac{3x}{4} = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & \left(2 \cdot \cos \frac{5x}{4} \cdot \cos \left(\frac{-3x}{4} \right) + 2 \cdot \cos \frac{17x}{4} \cdot \cos \left(\frac{-3x}{4} \right) \right) \cdot \sin \frac{3x}{4} \\
 & = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos \frac{3x}{4} \cdot \sin \frac{3x}{4} \left(\cos \frac{5x}{4} + \cos \frac{17x}{4} \right) = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & \sin \frac{3x}{2} \cdot 2 \cos \frac{22x}{8} \cdot \cos \left(\frac{-12x}{8} \right) = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & 2 \cdot \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{11x}{4} = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & \sin 3x \cdot \cos \frac{11x}{4} = \sin ax \cdot \cos bx \\
 \Leftrightarrow & a = 3 \text{ en } b = \pm \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

$$2 \sin x \cdot (2 - \sin^2 x - \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cdot \left(2 - \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 - \cos 8x}{2} \right) \\
 & = \sin ax \cdot \cos bx
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (\cos 2x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 8x) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \cos 4x \cdot \cos(-2x) + 2 \cos 6x \cdot \cos(-2x)) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot (\cos 4x + \cos 6x) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos 2x \cdot 2 \cos 5x \cdot \cos(-x) = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos 5x = \sin ax \cdot \cos bx$$



$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos 5x = \sin a x \cdot \cos b x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos 5x = \sin a x \cdot \cos b x$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \text{ en } b = \pm 5$$

Opdracht 146 bladzijde 325

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) = 1 + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha + \beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$$

$$= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(-\beta)$$

$$= 1 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$$





2 $\sin \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{1}{16} (\sin 5\alpha + 3 \sin 3\alpha + 2 \sin \alpha)$

$$\frac{1}{16} \cdot (\sin 5\alpha + 3 \sin 3\alpha + 2 \sin \alpha)$$

$$= \frac{1}{16} (\sin 5\alpha + \sin 3\alpha + 2 \cdot (\sin 3\alpha + \sin \alpha))$$

$$= \frac{1}{16} (2 \cdot \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 2 \cos \alpha \cdot (\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{8} \cos \alpha \cdot (2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{8} \cos \alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot (\cos 2\alpha + 1)$$

$$= \frac{1}{4} \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos^4 \alpha$$



Opdracht 147 bladzijde 326

Welke van de volgende vergelijkingen heeft als oplossing precies alle gehele veelvouden van $\frac{\pi}{2}$?

A $\sin x = 0$

\Updownarrow

$$x = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \rightarrow \text{niet}$$

B $\cos x = 0$

\Updownarrow

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \rightarrow \text{niet}$$

C $\sin 2x = 0$

\Updownarrow

$$2x = k \cdot \pi$$

\Updownarrow

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \rightarrow \text{wel}$$

D $\cos 2x = 0$

\Updownarrow

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

\Updownarrow

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \rightarrow \text{niet}$$

E $\sin 3x = 0$

\Updownarrow

$$3x = k \cdot \pi$$

\Updownarrow

$$x = k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \rightarrow \text{niet}$$

Antwoord C

**Opracht 148 bladzijde 326**

Los exact op.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{2\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$2 \quad \sin 3x = \sin 2x$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & 3x = 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot 2\pi \text{ of } 5x = \pi + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$3 \quad \cos 6x = \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & 6x = \pm 2x + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & 4x = k \cdot 2\pi \text{ of } 8x = k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ of } x = k \cdot \frac{\pi}{4} \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$



$$4 \tan x = \tan(-3x)$$

$$\Leftrightarrow x = -3x + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$5 \sin \frac{5x}{3} = -\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{5x}{3} = \sin(-3x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{3} = -3x + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{5x}{3} = \pi + 3x + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{14x}{3} = k \cdot 2\pi \text{ of } -\frac{4x}{3} = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{3\pi}{7} \text{ of } x = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot \frac{3\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$6 \cos 3x = -\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } 3x = -\pi + 2x + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 5x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ of } x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \sin^2 x - \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = 1 \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \\
 \Leftrightarrow & x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 3 \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \frac{3}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{3}{\sqrt{3}} \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \tan \varphi \cdot \cos x = \sqrt{3} \quad \text{stel } \sqrt{3} = \tan \varphi \\
 \Leftrightarrow & \sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \cos \varphi \\
 \Leftrightarrow & \sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$10 \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \tan \varphi \cdot \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{stel } \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos \varphi \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ (bv)}$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x + \varphi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{4\pi}{12} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 149 bladzijde 326

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

$$1 \quad 5 \sin(2(x - 1)) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2(x - 1)) = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1) = 0,927 + k \cdot 2\pi \text{ of } 2(x - 1) = 2,214 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0,464 + k \cdot \pi \text{ of } x - 1 = 1,107 + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = 1,464 + k \cdot \pi \text{ of } x = 2,107 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin^2 2x = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ of } \sin 2x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0,464 + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 2,678 + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } 2x = -0,464 + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = 3,605 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 0,232 + k \cdot \pi \text{ of } x = 1,339 + k \cdot \pi$$

$$\text{of } x = -0,232 + k \cdot \pi \text{ of } x = 1,803 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ofwel

$$\sin^2 2x = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm 0,927 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 0,232 + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3 \tan x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x - (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad D = 5$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0,666 + k \cdot 2\pi \text{ of } x = 2,475 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$4 \tan^4 x - \tan^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = -1 \text{ of } \tan^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{2} \text{ of } \tan x = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0,955 + k \cdot \pi \text{ of } x = -0,955 + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 0,955 + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 150 bladzijde 326

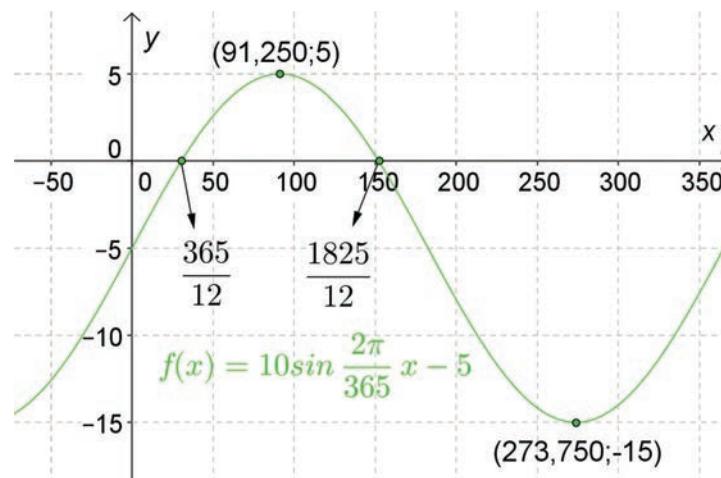
Gegeven is de functie $f: x \mapsto 10 \sin \frac{2\pi}{365}x - 5$.

- 1 Bepaal grafisch de nulpunten en de coördinaten van de toppen van f .

- nulpunten voor $x = \frac{365}{12} + k \cdot 365$ of $x = \frac{1825}{12} + k \cdot 365$

- maxima: $(91,250 + k \cdot 365; 5)$

- minima: $(273,750 + k \cdot 365; -15) \quad (k \in \mathbb{Z})$





- 2 Bepaal algebraïsch de nulpunten en de x -coördinaten waarvoor f een maximum of een minimum bereikt. Bereken deze waarden exact.

• **nulpunten via $f(x) = 0$**

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \frac{2\pi}{365} x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{365}{12} + k \cdot 365 \quad \text{of} \quad x = \frac{1825}{12} + k \cdot 365 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• **maxima via $f(x) = 5$ (of rechtstreeks via $\sin \frac{2\pi}{365} x = 1$)**

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = 5$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{365}{4} + k \cdot 365 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• **minima via $f(x) = -15$ (of rechtstreeks via $\sin \frac{2\pi}{365} x = -1$)**

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = -15$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{365}{4} + k \cdot 365 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

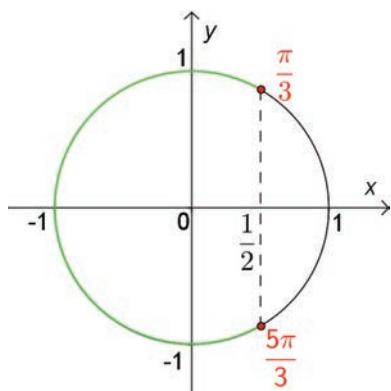
Merk op dat $273,75 = -\frac{365}{4} + 365$.

**Opdracht 151 bladzijde 327**

Los exact op.

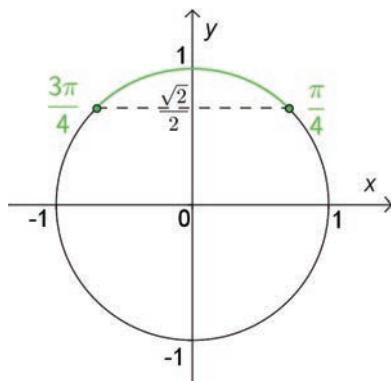
$$1 \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$2 \quad \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

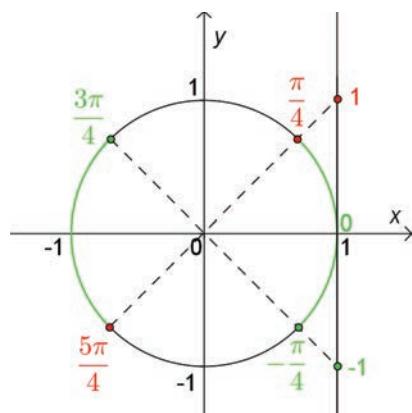
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Oprachten

3 $-1 \leq \tan x < 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



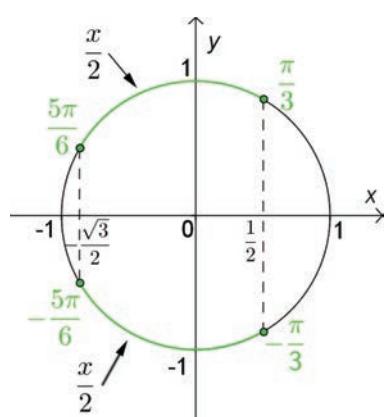
4 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq \frac{x}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi$$

$$\text{of } -\frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi \leq x \leq -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$





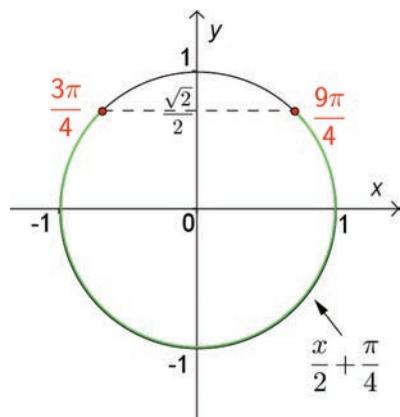
$$5 \quad \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} < 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi + k \cdot 4\pi < x < 4\pi + k \cdot 4\pi$$

$$\Leftrightarrow -3\pi + k \cdot 4\pi < x < k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$6 \quad 4 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1 > 3$$

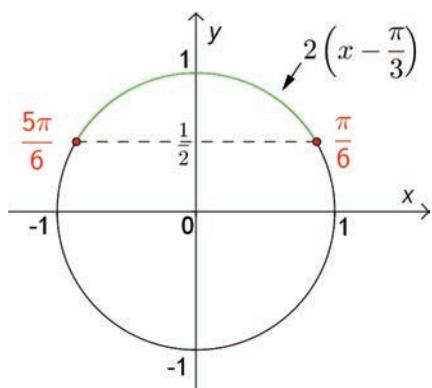
$$\Leftrightarrow \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi < x < \frac{9\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi < x < \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

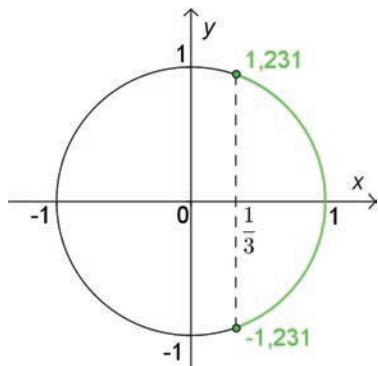


Opdracht 152 bladzijde 327

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

$$1 \quad \cos x \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -1,231 + k \cdot 2\pi \leq x \leq 1,231 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



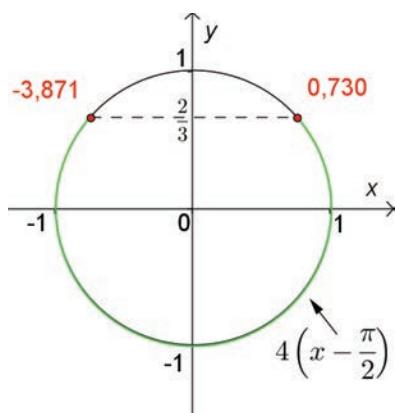
$$2 \quad 3 \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) < \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow -3,871 + k \cdot 2\pi < 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < 0,730 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -0,968 + k \cdot \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{2} < 0,182 + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0,603 + k \cdot \frac{\pi}{2} < x < 1,753 + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

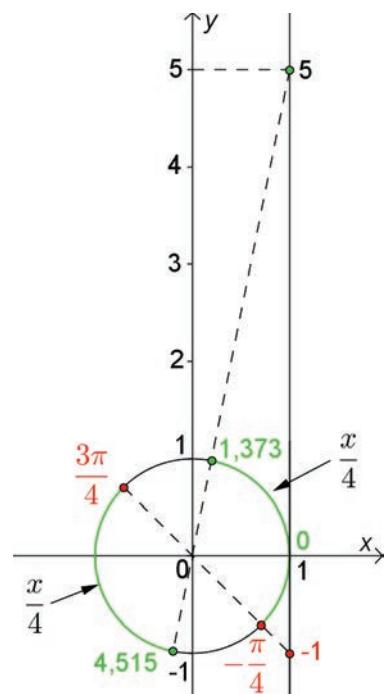




3 $-1 < \tan \frac{x}{4} \leq 5$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < \frac{x}{4} \leq 1,373 + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi + k \cdot 4\pi < x \leq 5,494 + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 153 bladzijde 327

De daglengte l , dit is het aantal uren van zonsopgang tot zonsondergang, kan voor een Antwerpse boerderij beschreven worden door de functie met voorschrift

$$l(t) = \frac{13}{3} \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] + 12$$

Hierbij stelt t het dagnummer voor, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 1 januari.

Om eieren te leggen, heeft een kip minimaal 13 uur daglicht nodig.

Hoeveel dagen per jaar mag je eieren verwachten?

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{13}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right) + 12 \geq 13 \\ & \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right) \geq \frac{3}{13} \\ & \Leftrightarrow 0,233 + k \cdot 2\pi \leq \frac{2\pi}{365}(t - 79) \leq 2,909 + k \cdot 2\pi \\ & \Leftrightarrow 13,528 + k \cdot 365 \leq t - 79 \leq 168,972 + k \cdot 365 \\ & \Leftrightarrow 92,528 + k \cdot 365 \leq t \leq 247,972 + k \cdot 365 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\cdot 247,972 - 92,528 = 155,445$$

Je mag gedurende 155 dagen eieren verwachten.

OFWEL (grafische oplossing)

$$\cdot y = \frac{13}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right) + 12$$

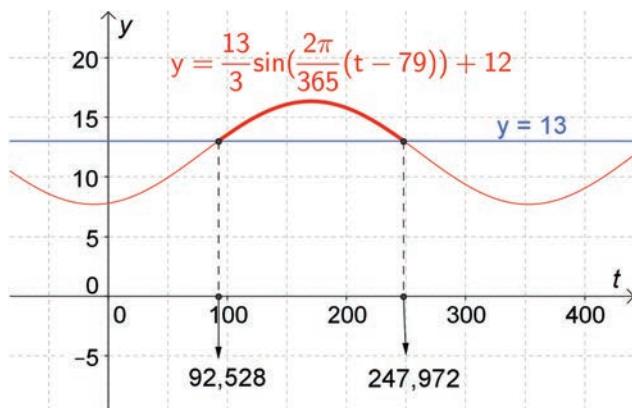
$$y = 13$$

Grafieken plotten en snijpunten bepalen in $[0, 365]$.

$$\left(\text{periode} = \frac{\frac{2\pi}{2\pi}}{\frac{365}{365}} = 365 \right) \downarrow$$

$$\cdot \frac{13}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right) + 12 \geq 13$$

$$\Leftrightarrow 92,528 + k \cdot 365 \leq t \leq 247,972 + k \cdot 365 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Opdracht 154 bladzijde 328**

Door de werking van eb en vloed varieert de diepte d van een vaargeul met de tijd. Voor een bepaalde havenstad wordt deze diepte benaderend beschreven met behulp van het voorschrift

$$d(t) = 2,5 \sin \frac{t}{2} + 8.$$

Hierbij is d uitgedrukt in meter en t in uur.

- 1 Hoelang mag een schip met een diepgang van 7 meter erover doen om de haven binnen te varen? Een schip heeft onder de kiel nog 20 % van zijn diepgang aan water nodig om veilig te kunnen varen.

$$2,5 \sin \frac{t}{2} + 8 \geq 7 + \frac{1}{5} \cdot 7$$

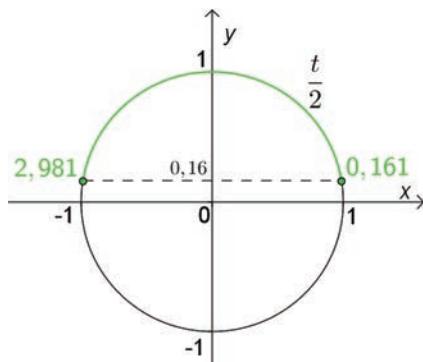
$$\Leftrightarrow 2,5 \sin \frac{t}{2} \geq 0,4$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{t}{2} \geq 0,16$$

$$\Leftrightarrow 0,161 + k \cdot 2\pi \leq \frac{t}{2} \leq 2,981 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 0,321 + k \cdot 4\pi \leq t \leq 5,962 + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Gevraagde tijdsduur} = 5,962 - 0,321 = 5,640 \approx 5 \text{ u } 38 \text{ min } 25 \text{ sec}$$



- 2 Bereken de maximale diepgang die een schip mag hebben om veilig de haven te kunnen binnenvaren als je weet dat de reis van de ingang van de haven tot de aanlegsteiger anderhalf uur duurt.

• Het waterpeil is het hoogst als $t = \pi$.

Het schip kan de haven binnenvaren vanaf $\frac{3}{4}$ u voor $t = \pi$ en buitenvaren tot $\frac{3}{4}$ u na $t = \pi$.

• Diepte bij $t = \pi - \frac{3}{4}$ (of $t = \pi + \frac{3}{4}$)

$$= 2,5 \cdot \sin \frac{\pi - \frac{3}{4}}{2} + 8$$

$$= 10,326 \text{ m}$$

• Stel gevraagde maximale diepgang = x,
dan :

$$x + \frac{1}{5}x = 10,326$$

$$x = 8,605$$

De gevraagde maximale diepgang is 8,60 m.

Opdracht 155 bladzijde 328

Los exact op.

$$1 \quad \sin^4 x - \cos^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) \text{ of } \sin \frac{x}{2} = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) \text{ of } \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } \frac{x}{2} = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{2} = \pi - \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{5x}{6} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5} \text{ of } x = 3\pi + k \cdot 12\pi$$

$$\text{of } x = -3\pi + k \cdot 12\pi \text{ of } x = \frac{9\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5} \quad \text{of} \quad x = \pm 3\pi + k \cdot 12\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{6\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $\sin x + \sin 3x - \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 3x) - (\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos(-x) - 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot (\sin 2x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot (2 \sin x \cos x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4 $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{of} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

5 $7 \sin^2 2x = \sin^2 4x + 1$

$$\Leftrightarrow 7 \sin^2 2x - (2 \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7 \sin^2 2x - 4 \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7 \sin^2 2x - 4 \sin^2 2x \cdot (1 - \sin^2 2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^4 2x + 3 \sin^2 2x - 1 = 0 \quad D = 25$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sin^2 2x} = -1 \text{ of } \sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \text{ of } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6 $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ of } \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$7 \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \quad D = 9$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -2 \text{ of } \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$8 \quad \sin x + \cos \frac{2x}{3} = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3} \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\cos \left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \text{ of } \cos \left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \text{ of } \frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4} = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{6} \right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{2x}{3} = k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + k \cdot 6\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot 3\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 156 bladzijde 328

Los exact op.

$$1 \quad \cos^2 x < \frac{1}{2}$$

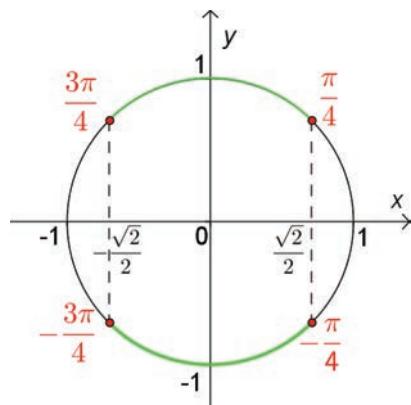
$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\cos x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos^2 x - \frac{1}{2}$	+	0	0





$$2 \quad \tan^2 x \geq 3$$

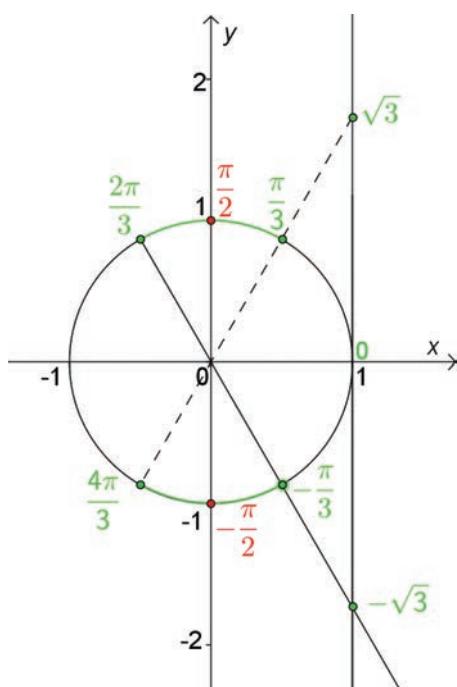
$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \geq 0$$

$\tan x$		$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	
$\tan^2 x - 3$	+	0	-	0 +

$$\Leftrightarrow \tan x \leq -\sqrt{3} \text{ of } \sqrt{3} \leq \tan x$$

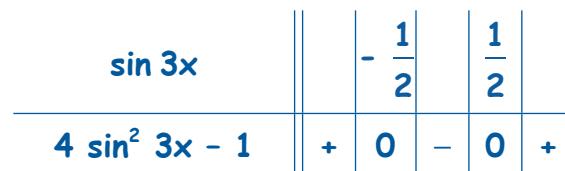
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x \leq -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$\text{of } \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$3 \quad 4 \sin^2 3x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \leq -\frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{2} \leq \sin 3x$$

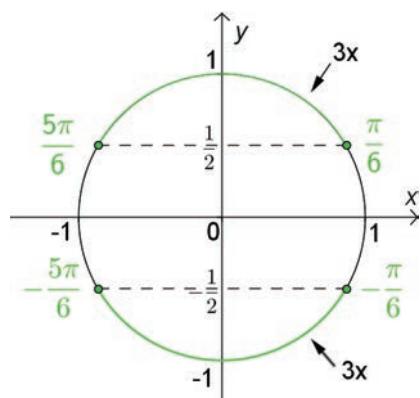


$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq 3x \leq -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{or } \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq 3x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{or } \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$4 \quad 2 \sin^2 x - \sin x < 0$$

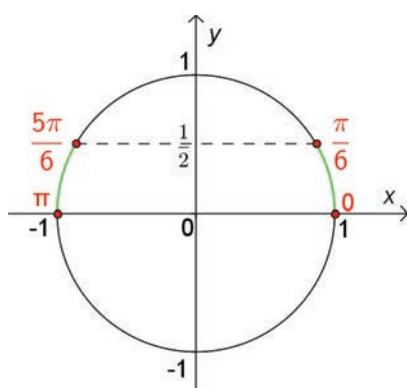
$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \sin x - 1) < 0$$

$\sin x$		0		$\frac{1}{2}$	
$\sin x$	-	0	+	+	+
$2 \sin x - 1$	-	-	-	0	+
y	+	0	-	0	+

$$\Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

of $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Opdracht 157 bladzijde 328

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\cos 15\theta = \cos 3\theta$ met $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$?

$$\cos 15\theta = \cos 3\theta \text{ met } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 15\theta = \pm 3\theta + k \cdot 360^\circ \text{ met } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 12\theta = k \cdot 360^\circ \text{ of } 18\theta = k \cdot 360^\circ \text{ met } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = k \cdot 30^\circ \text{ of } \theta = k \cdot 20^\circ \text{ met } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ en } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ,$$

$$100^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 150^\circ, 160^\circ, 180^\circ$$



13 oplossingen



antwoord C

Opdracht 158 bladzijde 329

Maak gebruik van de omgekeerde formules van Simpson (zie opdracht 140) om de volgende vergelijkingen exact op te lossen.

$$1 \quad \sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \text{ of } \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi \text{ of } 2x = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \text{ of } x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \cdot \sin(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \text{ of } \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi \text{ of } x = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 159 bladzijde 329

Bepaal exact de nulpunten van de functie

$$f: x \mapsto \cos x \cdot \sin 2x + \sin 2x \cdot \cos 3x + \cos 3x \cdot \sin 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x.$$

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot (\cos x + \cos 3x) + \sin 4x \cdot (\cos 3x + \cos 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos(-x) + \sin 4x \cdot 2 \cos 4x \cdot \cos(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \cos x \cdot 2 \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos x \cdot (1 + 2 \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \text{ of } \cos x = 0 \text{ of } \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } 4x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

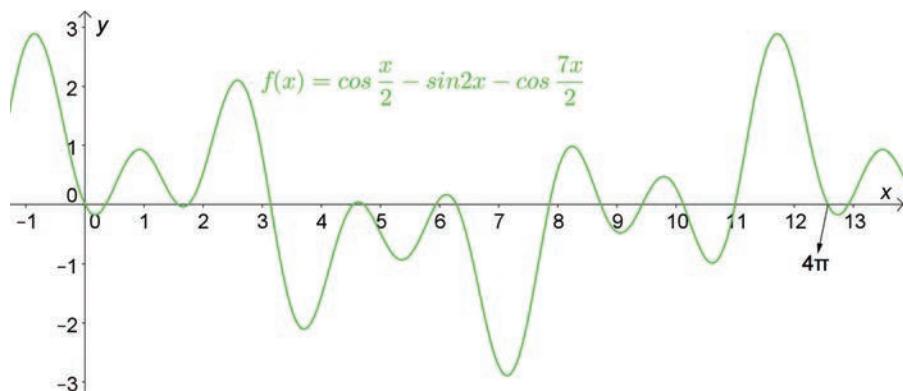
$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \text{ of } x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Oprachten

Opracht 160 bladzijde 329

Gegeven de functie $f: x \mapsto \cos \frac{x}{2} - \sin 2x - \cos \frac{7x}{2}$ over $[0, 4\pi]$.

- 1** Plot de grafiek van f over $[0, 4\pi]$. Hoeveel nulpunten heeft f in dit interval?



f heeft 15 nulpunten in $[0, 4\pi]$

- 2** Bereken deze nulpunten in $[0, 4\pi]$ exact.

$$\cos \frac{x}{2} - \sin 2x - \cos \frac{7x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{7x}{2} - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 2x \cdot \sin \left(\frac{-3x}{2} \right) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \left(2 \sin \frac{3x}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ of } \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k \cdot \pi \text{ of } \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ of } x = \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{4\pi}{3} \text{ of } x = \frac{5\pi}{9} + k \cdot \frac{4\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



nulpunten in $[0, 4\pi]$:

$$\cdot 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi$$

$$\cdot \frac{\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{25\pi}{9}$$

$$\cdot \frac{5\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}, \frac{29\pi}{9}$$

3 Maak gebruik van de grafiek van f en de oplossingen uit de vorige vraag om de ongelijkheid

$$\cos \frac{x}{2} - \sin 2x - \cos \frac{7x}{2} < 0 \text{ op te lossen in } [0, 4\pi].$$

$$\cos \frac{x}{2} - \sin 2x - \cos \frac{7x}{2} < 0 \text{ in } [0, 4\pi]$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{\pi}{9}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}[\cup]\pi, \frac{13\pi}{9}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{9}[$$

$$\cup]2\pi, \frac{5\pi}{2}[\cup]\frac{25\pi}{9}, 3\pi[\cup]\frac{29\pi}{9}, \frac{7\pi}{2}[$$



**Opdracht 161 bladzijde 330**

Bereken zonder rekentoestel.

$$1 \text{ a } \sin\left(\operatorname{Bgsin}\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin\left(\operatorname{Bgsin}\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b } \sin(\operatorname{Bgsin}(-1))$$

$$\sin\left(\operatorname{Bgsin}(-1)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$2 \text{ a } \operatorname{Bgsin}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{Bgsin}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Bgsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{b } \operatorname{Bgsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{Bgsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{Bgsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$3 \text{ a } \cos\left(\operatorname{Bgcose}\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos\left(\operatorname{Bgcose}\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b } \cos\left(\operatorname{Bgcose}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$\cos\left(\operatorname{Bgcose}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



4 a $Bgcos(\cos 2\pi)$

$$Bgcos(\cos 2\pi) = Bgcos 1 = 0$$

b $Bgcos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$$Bgcos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = Bgcos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

5 a $\tan(Bgtan(-\sqrt{3}))$

$$\tan(Bgtan(-\sqrt{3})) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

b $\tan(Bgtan 1)$

$$\tan(Bgtan 1) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

6 a $Bgtan(\tan \pi)$

$$Bgtan(\tan \pi) = Bgtan 0 = 0$$

b $Bgtan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$Bgtan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = Bgtan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Opdracht 162 bladzijde 330

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = B \sin(\sin x)$.

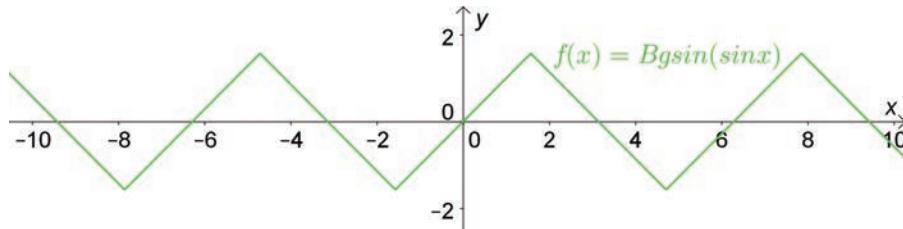
- 1 Het domein van f is gelijk aan \mathbb{R} . Verklaar dit.

dom $B \sin = [-1, 1]$ en $\forall x \in \mathbb{R}: \sin x \in [-1, 1]$ zodat $\text{dom } f = \mathbb{R}$

- 2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

$$\text{ber } f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

- 3 Plot de grafiek van de functie f over het interval $[-3\pi, 3\pi]$. Wat stel je vast?



De grafiek is een aaneenschakeling van 2 aan 2 evenwijdige lijnstukken.

De functie f is periodiek.



- 4 Toon aan, met behulp van de definitie van de boogsinusfunctie, dat $f(x) = x + k \cdot 2\pi$ of $f(x) = \pi - x + k \cdot 2\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

$$y = \text{Bgsin } x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ met } x \in [-1, 1] \text{ en } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

zodat $f(x) = \text{Bgsin}(\sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin f(x) = \sin x \text{ met } f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x + k \cdot 2\pi \text{ of } f(x) = \pi - x + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{met } f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Opdracht 163 bladzijde 330

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \sin(Bgcos x)$.

- 1 Het domein van f is gelijk aan $[-1, 1]$. Verklaar dit.

dom $Bgcos = [-1, 1]$, zodat dom $f = [-1, 1]$

- 2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

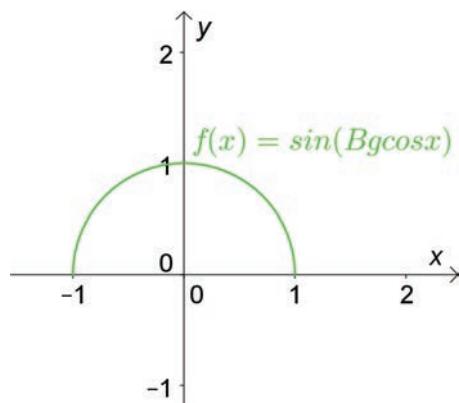
ber $f = [0, 1]$, want $Bgcos x \in [0, \pi]$,

zodat $\sin(Bgcos x) \in [0, 1]$

Opdrachten

- 3 Plot de grafiek van de functie f .

Wat stel je vast?



De grafiek is de bovenste helft van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

- 4 Toon aan, met behulp van de definitie van de boogcosinusfunctie, dat

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = Bgcos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$

$$\text{zodat } f(x) = \sin(Bgcos x)$$

$$= \sin y \text{ met } y \in [0, \pi]$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

**Opdracht 164 bladzijde 331**Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \tan(2 \operatorname{Bgtan} x)$.**1** Wat is het domein van f ?

- $\tan(2 \operatorname{Bgtan} x)$ is niet gedefinieerd als

$$2 \operatorname{Bgtan} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,$$

$$\text{dus als } \operatorname{Bgtan} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- $\operatorname{Bgtan} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

Tesamen: $\operatorname{Bgtan} x \neq \frac{\pi}{4}$ en $\operatorname{Bgtan} x \neq -\frac{\pi}{4}$

zodat $x \neq 1$ en $x \neq -1$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

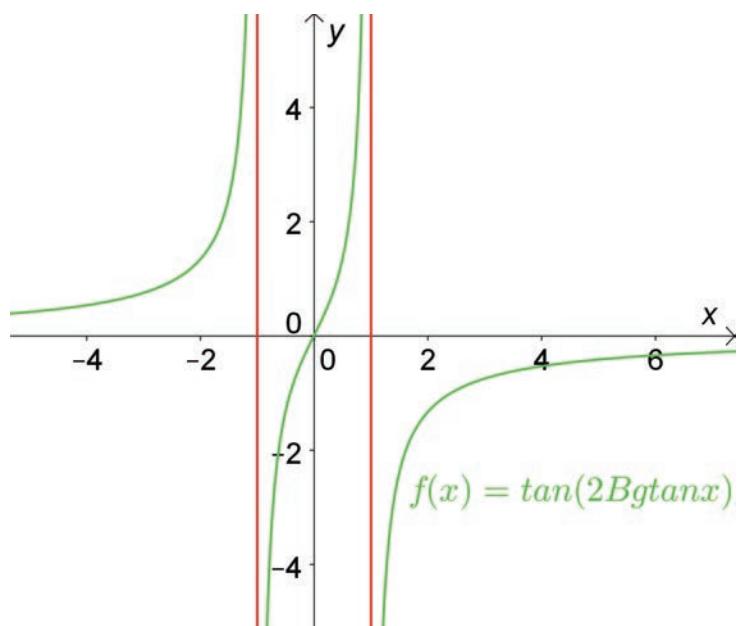
2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

ber f = R





- 3 Plot de grafiek van de functie f .
Wat stel je vast in verband met de symmetrie?



Dit is een oneven functie; de oorsprong is symmetriemiddelpunt.

- 4 Welke zijn de asymptoten van de grafiek van f ?

V.A.: $x = 1$ en $x = -1$

H.A.: $y = 0$

- 5 Toon aan dat $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

$f(x) = \tan(2Bgtanx)$

$$= \frac{2\tan(Bgtanx)}{1 - \tan^2 Bgtanx}$$

$$= \frac{2x}{1 - x^2}$$

Opdracht 165 bladzijde 331

Bereken zonder rekentoestel.

$$1 \quad \sin\left(2 \operatorname{Bgtan} \frac{1}{2}\right)$$

• Stel $\operatorname{Bgtan} \frac{1}{2} = x$,

dan $\tan x = \frac{1}{2}$ en $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

• $\sin\left(2 \operatorname{Bgtan} \frac{1}{2}\right)$

$= \sin 2x$

$= 2 \sin x \cdot \cos x$

$= 2 \tan x \cdot \cos^2 x$

$= 2 \tan x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$

$= 1 \cdot \frac{1}{\frac{5}{4}}$

$= \frac{4}{5}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$



Opdrachten

$$\begin{aligned}
 2 & \cos\left(2 \operatorname{Bgcosec} \frac{3}{5}\right) \\
 &= 2 \cos^2\left(\operatorname{Bgcosec} \frac{3}{5}\right) - 1 \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\
 &= 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 \\
 &= -\frac{7}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 &= 2 \cos^2 \alpha - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Bgcosec} \frac{2}{3}\right) \\
 &= -\sin\left(\operatorname{Bgcosec} \frac{2}{3}\right) \\
 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\
 &= -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} \\
 &= -\frac{\sqrt{5}}{3}
 \end{aligned}$$

anticomplementaire hoeken

(zie opdracht 163)



$$\begin{aligned}
 4 \quad & \sin(\pi + 2 \operatorname{Bgtan} 3) \\
 &= -\sin(2 \operatorname{Bgtan} 3) \\
 &= -\sin 2x \\
 &= -2 \sin x \cdot \cos x \\
 &= -2 \tan x \cdot \cos^2 x \\
 &= -2 \tan x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\
 &= -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 + 3^2} \\
 &= \frac{-6}{10} \\
 &= \frac{-3}{5}
 \end{aligned}$$

stel $\operatorname{Bgtan} 3 = x$,
dan $\tan x = 3$ en
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \cos\left(\operatorname{Bgsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Bgtan} \frac{5}{12}\right) \\
 &= \cos\left(\operatorname{Bgsin} \frac{4}{5}\right) \cdot \cos\left(\operatorname{Bgtan} \frac{5}{12}\right) - \sin\left(\operatorname{Bgsin} \frac{4}{5}\right) \cdot \sin\left(\operatorname{Bgtan} \frac{5}{12}\right)
 \end{aligned}$$

stel $\operatorname{Bgsin} \frac{4}{5} = x$ en $\operatorname{Bgtan} \frac{5}{12} = y$

dan $\sin x = \frac{4}{5}$ en $\tan y = \frac{5}{12}$

met $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

zodat $\cos x \geq 0$ en $\cos y \geq 0$ en $\sin y \geq 0$

$$\begin{aligned}
 &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\
 &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 y}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 y} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{25}{144}}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 y}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{144}{169}}$$

$$= \frac{36}{65} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$$

$$= \frac{16}{65}$$

6 $\tan\left(Bg\sin\frac{4}{5} - Bg\cos\frac{12}{13}\right)$

$$= \frac{\tan\left(Bg\sin\frac{4}{5}\right) - \tan\left(Bg\cos\frac{12}{13}\right)}{1 + \tan\left(Bg\sin\frac{4}{5}\right) \cdot \tan\left(Bg\cos\frac{12}{13}\right)}$$

stel $Bg\sin\frac{4}{5} = x$ en $Bg\cos\frac{12}{13} = y$

dan $\sin x = \frac{4}{5}$ en $\cos y = \frac{12}{13}$

met $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}}{1 + \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} - \frac{\sqrt{1 - \cos^2 y}}{\cos y}}{\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} - \frac{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}} \right) \cdot \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} \right) \cdot \frac{36}{56} \\
 &= \frac{11}{12} \cdot \frac{36}{56} \\
 &= \frac{33}{56}
 \end{aligned}$$

Opdracht 166 bladzijde 331

Bereken $\operatorname{Bgtan} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{Bgtan} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}$.

$$\text{Stel } \operatorname{Bgtan} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{Bgtan} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \alpha$$

dan:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}{1 - \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} \cdot \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{\frac{2a^2\sqrt{3} - ab\sqrt{3} + 2b^2\sqrt{3} - ab\sqrt{3}}{3ab}}{3ab - 4ab + 2a^2 + 2b^2 - ab} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(a^2 - ab + b^2)}{2(a^2 - ab + b^2)} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{zodat } \alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Stel } \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} = x \text{ en } \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = y$$

$$\text{dan: } \operatorname{Bgtan} x + \operatorname{Bgtan} y = \alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (1)$$

$$\text{met } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Bgtan} x < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Bgtan} y < \frac{\pi}{2}$$

zodat $-\pi < \operatorname{Bgtan} x + \operatorname{Bgtan} y < \pi$ (2)

$$(1) \& (2): \operatorname{Bgtan} x + \operatorname{Bgtan} y = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{of } \operatorname{Bgtan} x + \operatorname{Bgtan} y = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Besluit: } \operatorname{Bgtan} \frac{2a - b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{Bgtan} \frac{2b - a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{of } \operatorname{Bgtan} \frac{2a - b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{Bgtan} \frac{2b - a}{a\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

**Opdracht 167 bladzijde 331**

Los de volgende cyclometrische vergelijkingen op.

$$1 \quad \text{Bgtan}(2x) + \text{Bgtan}(3x) = \frac{3\pi}{4}$$

Stel $\text{Bgtan}(2x) = \alpha$ en $\text{Bgtan}(3x) = \beta$

$$\text{dan: } \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ en } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$$

zodat:

$$\tan(\alpha + \beta) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 3x}{1 - 2x \cdot 3x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{1 - 6x^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 5x = -1 + 6x^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 1 = 0 \qquad D = 49$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \text{ of } x = 1$$

$$\text{Bgtan}\left(-\frac{1}{3}\right) + \text{Bgtan}\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{en } \frac{3\pi}{4} > 0$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \text{Bgsin } x + \text{Bgsin} (x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow & \text{Bgsin} (x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \text{Bgsin } x \\
 \Rightarrow & \sin (\text{Bgsin} (x\sqrt{3})) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \text{Bgsin } x \right) \\
 \Rightarrow & x\sqrt{3} = \cos (\text{Bgsin } x) \\
 \Rightarrow & x\sqrt{3} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 (\text{Bgsin } x)} \\
 & \quad \rightarrow \text{Bgsin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ en hier is cosinus positief} \\
 \Rightarrow & x\sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2} \quad (*) \\
 \Rightarrow & 3x^2 = 1 - x^2 \\
 \Rightarrow & x^2 = \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow & x = \frac{1}{2} \text{ of } x = -\frac{1}{2} \\
 & \quad \downarrow \\
 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \neq \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2} \quad (**)
 \end{aligned}$$

$$3 \quad B \sin x + 2 B \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow B \sin x = \frac{\pi}{2} - 2 B \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(B \sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2 B \cos x\right)$$

$$\Rightarrow x = \cos(2 B \cos x)$$

$$\Rightarrow x = 2 \cos^2(B \cos x) - 1$$

$$\Rightarrow x = 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \qquad \qquad D = 9$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{2}$$

↓

$$B \sin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 B \cos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2}$$

OFWEL

$$B \sin x + B \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{zodat } B \sin x + 2 B \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + B \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow B \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

4 $\sin(3 \operatorname{Bgsin} x) = \cos(2 \operatorname{Bgcos} x)$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(\operatorname{Bgsin} x) - 4\sin^3(\operatorname{Bgsin} x) = 2\cos^2(\operatorname{Bgcos} x) - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x^3 = 2x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot (4x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} \text{ of } \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ of } \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

5 $\operatorname{Bgtan} \frac{x}{4} + \operatorname{Bgtan} \frac{1}{13} + \operatorname{Bgtan} \frac{1}{21} + \operatorname{Bgtan} x = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan \left(\left(\operatorname{Bgtan} \frac{x}{4} + \operatorname{Bgtan} \frac{1}{13} \right) + \left(\operatorname{Bgtan} \frac{1}{21} + \operatorname{Bgtan} x \right) \right) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x}{4} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{13}} + \frac{\frac{1}{21} + x}{1 - \frac{1}{21} \cdot x} \\ \Rightarrow & \frac{\frac{x}{4} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{13}} \cdot \frac{\frac{1}{21} + x}{1 - \frac{1}{21} \cdot x} = 1 \\ \Rightarrow & \frac{\left(\frac{13x + 4}{52} \cdot \frac{21 - x}{21} + \frac{52 - x}{52} \cdot \frac{1 + 21x}{21} \right)}{\frac{52 - x}{52} \cdot \frac{21 - x}{21} - \frac{13x + 4}{52} \cdot \frac{1 + 21x}{21}} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (13x + 4)(21 - x) + (52 - x) \cdot (1 + 21x)$$

$$= (52 - x) \cdot (21 - x) - (13x + 4)(1 + 21x)$$

$$\Rightarrow (13x + 4)(21 - x + 1 + 21x) + (52 - x)(1 + 21x - 21 + x) = 0$$

$$\Rightarrow (13x + 4)(22 + 20x) + (52 - x)(22x - 20) = 0$$

$$\Rightarrow 238x^2 + 1530x - 952 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{x = -7} \text{ of } x = \frac{4}{7}$$

invullen in linkerlid van opgave geeft $-2,356 \neq \frac{\pi}{4}$

Opdracht 168 bladzijde 332

Kies telkens het juiste antwoord.

1 $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \\ &= \cot \alpha \cdot \cot \beta \rightarrow \mathbf{B} \end{aligned}$$

2 $k^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + (2k \sin \alpha \cos \alpha)^2 =$

$$= k^2 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= k^2 \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)$$

$$= k^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2$$

$$= k^2 \cdot 1^2$$

$$= k^2 \rightarrow \mathbf{B}$$

Opdracht 169 bladzijde 332

Kies 6 hoeken uit de volgende reeks waarvan de beeldpunten de hoekpunten van een regelmatige zeshoek vormen.

- onderling verschil tussen opeenvolgende middelpuntshoeken van een regelmatige zeshoek

$$= \frac{2\pi}{6} \text{ rad} = \frac{4\pi}{12} \text{ rad}$$

- hoeken met een zelfde beeldpunt:

- $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3\pi}{12} \text{ rad}$
- $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{6\pi}{12} \text{ rad}$
- $\frac{7\pi}{12} \text{ rad}$
- $-\frac{7\pi}{12} \text{ rad}$
- $-\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = -\frac{8\pi}{12} \text{ rad}$
- $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{9\pi}{12} \text{ rad}$
- $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$
- $\frac{13\pi}{12} \text{ rad}, -\frac{11\pi}{12} \text{ rad}$
- $-\frac{23\pi}{12} \text{ rad}, \frac{\pi}{12} \text{ rad}$
- $-\frac{\pi}{4} \text{ rad} = -\frac{3\pi}{12} \text{ rad}$

- hoeken waarvan de beeldpunten de hoekpunten vormen van een regelmatige zeshoek:

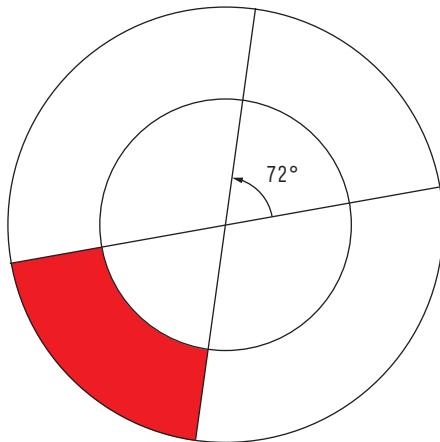
$$-\frac{11\pi}{12} \text{ rad}, -\frac{7\pi}{12} \text{ rad}, -\frac{3\pi}{12} \text{ rad}, \frac{\pi}{12} \text{ rad}, \frac{5\pi}{12} \text{ rad}, \frac{9\pi}{12} \text{ rad},$$

$$\text{of } \frac{13\pi}{12} \text{ rad}, \frac{-7\pi}{12} \text{ rad}, \frac{-\pi}{4} \text{ rad}, \frac{-23\pi}{12} \text{ rad}, \frac{5\pi}{12} \text{ rad}, \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Opdracht 170 bladzijde 332

Bereken de omtrek van het ingekleurde vlakdeel.

De stralen van de cirkels zijn 4 cm en 7 cm.



De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

- gevraagde omtrek

$$\begin{aligned}
 &= \left(7 \cdot \frac{2\pi}{5} + 3 + 4 \cdot \frac{2\pi}{5} + 3 \right) \text{ cm} \\
 &= \left(\frac{22\pi}{5} + 6 \right) \text{ cm} \quad (= 19,823\dots \text{ cm})
 \end{aligned}$$

Opdracht 171 bladzijde 333

De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.
Bepaal een mogelijk voorschrift.

1 • mogelijk startpunt: $\left(-\frac{3\pi}{2}, 2\right)$, dus $c = -\frac{3\pi}{2}$, $d = 2$

• amplitude = 2, dus $a = 2$

• periode = 4π , dus $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) + 2$$

2 • mogelijk startpunt: $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, dus $c = -\frac{3}{2}$, $d = -2$

• amplitude = $\frac{3}{2}$, dus $a = \frac{3}{2}$

• periode = 4, dus $\frac{2\pi}{b} = 4$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) - 2$$

3 • mogelijk startpunt: $(-1, 4)$, dus $c = -1$, $d = 4$

• amplitude = 1, dus $a = 1$

• periode = 4, dus $\frac{2\pi}{b} = 4$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right) + 4$$

**Opdracht 172 bladzijde 333**

Hoeveel van de volgende vijf uitdrukkingen in een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken \hat{B} en \hat{C} zijn gelijk aan 1?

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot \sin^2(\hat{B} + \hat{C}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 = 1 \quad \rightarrow \text{wel}$$

$$\begin{aligned} \cdot \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} &= \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) \\ &= \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} \\ &= 1 \quad \rightarrow \text{wel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot (\sin \hat{B} + \sin \hat{C})^2 &= \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} + 2 \sin \hat{B} \sin \hat{C} \\ &= 1 + 2 \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \quad \rightarrow \text{niet} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\rightarrow \neq 0} \end{aligned}$$

$$\cdot \cos^2(\hat{B} + \hat{C}) = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0^2 = 0 \quad \rightarrow \text{niet}$$

$$\begin{aligned} \cdot \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} &= \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) \\ &= \cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} \\ &= 1 \quad \rightarrow \text{wel} \end{aligned}$$

→ antwoord C



Opdracht 173 bladzijde 334

Het London Eye bestaat uit 32 capsules die met een constante snelheid ronddraaien. De hoogte h (in meter) van een gondel is een functie van de tijd t (in minuten) en wordt bepaald door het voorschrift

$$h(t) = 65 \sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 8)\right) + 70.$$

- 1** Hoe lang duurt één omwenteling van een bepaalde gondel?

periode = $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$, dus één omwenteling duurt 30 minuten

- 2** Wat is de maximale hoogte die de gondel bereikt en op welke tijdstippen gebeurt dit?

- maximale hoogte = $(65 \cdot 1 + 70)$ m = 135 m

- $\sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 8)\right) = 1$

$$\frac{\pi}{15}(t - 8) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

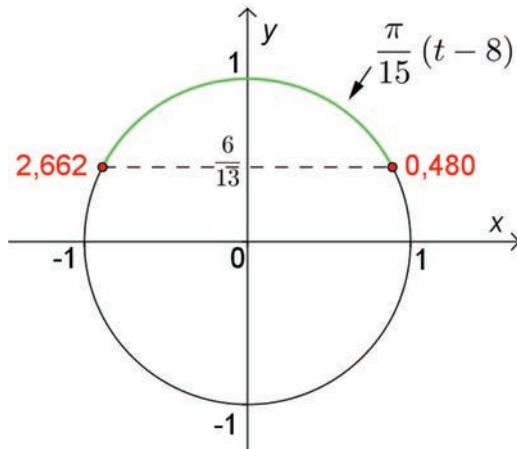
$$t - 8 = \frac{15}{2} + k \cdot 30$$

$$t = 15,5 + k \cdot 30 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

De maximale hoogte wordt bereikt na 15,5 min en dan telkens 30 min later.

3 Hoe lang bevindt een bepaalde gondel zich boven 100 m gedurende één omwenteling?

$$\begin{aligned} & \cdot 65 \sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 8)\right) + 70 > 100 \\ & \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{15}(t - 8)\right) > \frac{30}{65} = \frac{6}{13} \\ & \Leftrightarrow 0,480 + k \cdot 2\pi < \frac{\pi}{15}(t - 8) < 2,662 + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow 2,291 + k \cdot 30 < t - 8 < 12,709 + k \cdot 30$$

$$\Leftrightarrow 10,291 + k \cdot 30 < t < 20,709 + k \cdot 30$$

$$\cdot 20,709 - 10,291 = 10,419 = 10 \text{ min } 25 \text{ sec}$$

Een bepaalde gondel bevindt zich 10 min 25 sec boven 100 m gedurende één omwenteling.

Opdracht 174 bladzijde 334

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad \frac{2 \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot^2 \alpha - 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ &= \cot^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$



$$2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{(1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

$$= 1 + \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$$

$$3 \cos 2\alpha = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$$

$$\frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cancel{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} \cdot \frac{\cancel{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{1}$$

$$= \cos 2\alpha$$

$$4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^3 \alpha = \frac{1}{16} (2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} \cdot (2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (2 \sin \alpha + 2 \cos 4\alpha \cdot \sin(-\alpha)) \\ &= \frac{2}{16} \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \sin \alpha \cdot (1 - (1 - 2 \sin^2 2\alpha)) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \sin \alpha \cdot 2 \sin^2 2\alpha \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned}$$



Opdracht 175 bladzijde 334

Los exact op.

$$\begin{aligned} 1 \tan^2 2x + \tan 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan 2x \cdot (\tan 2x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan 2x &= 0 \quad \text{of} \quad \tan 2x = -1 \\ \Leftrightarrow 2x &= k \cdot \pi \quad \text{of} \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \\ \Leftrightarrow x &= k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$



2 $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ of } \tan x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ of } \sin x = 1 \quad D = 9$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4 $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ of } \cos x = -\frac{1}{2} \quad D = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \\
 \Leftrightarrow & \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right) \\
 \Leftrightarrow & \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \\
 \Leftrightarrow & 4x = \frac{\pi}{4} + 2x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 4x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & 2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 6x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{3} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \sin x + \sin 3x = 1 + \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin 2x \cdot \cos(-x) = 1 + 2 \cos^2 x - 1 \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cdot (\sin 2x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 x (2 \sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$



$$7 \quad \sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$8 \quad 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \tan \varphi \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{stel } -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \cos \varphi \quad \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ (bv)}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Opdracht 176 bladzijde 335**

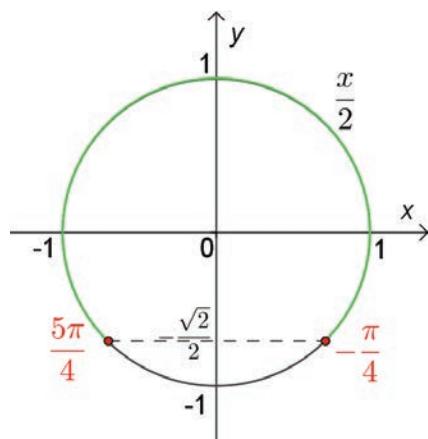
Los exact op.

$$1 \quad 2 \sin \frac{x}{2} > -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi < x < \frac{5\pi}{2} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



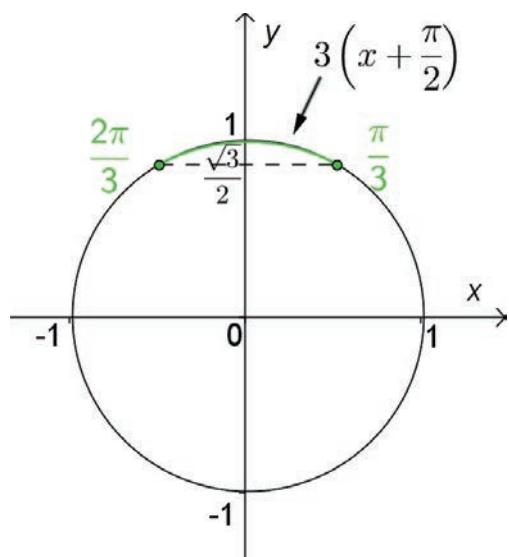
$$2 \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{-5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$





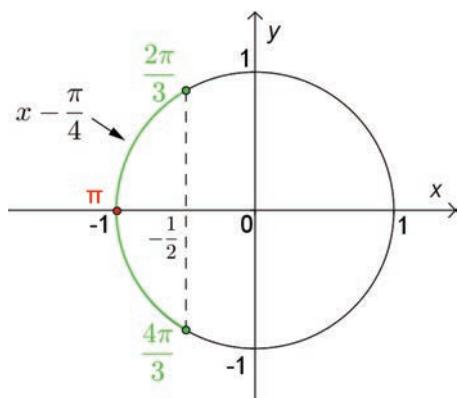
$$3 \quad -1 < \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x - \frac{\pi}{4} < \pi + k \cdot 2\pi$$

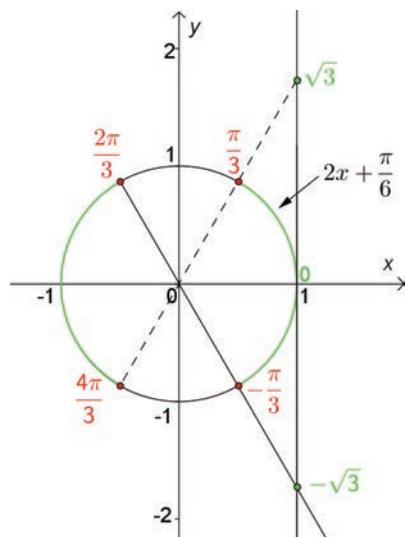
$$\text{of } \pi + k \cdot 2\pi < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x \leq \frac{19\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$\begin{aligned}
 4 \quad & \left| \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \right| < \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & -\sqrt{3} < \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < 2x < \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$



Opdracht 177 bladzijde 335

Bewijs de volgende gelijkheden.

$$1 \quad \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) = 4 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x+z}{2} \cdot \sin \frac{y+z}{2}$$

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \sin \left(-\frac{x+y}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y+2z}{2} \right)$$

$$= -4 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x+z}{2} \cdot \sin \left(-\frac{y+z}{2} \right)$$

$$= 4 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x+z}{2} \cdot \sin \frac{y+z}{2}$$

$$2 \quad \frac{1-\sin 2x}{1-4\sin^2 x + 4\sin^4 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$\frac{1 - \sin 2x}{1 - 4 \sin^2 x + 4 \sin^4 x}$$

$$= \frac{1 - \sin 2x}{(1 - 2 \sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{(1 - \sin 2x)(1 + \sin 2x)}{\cos^2 2x \cdot (1 + \sin 2x)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 2x}{\cancel{\cos^2 2x} \cdot (1 + \sin 2x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

OFWEL

$$\frac{1 - \sin 2x}{1 - 4 \sin^2 x + 4 \sin^4 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x) \cdot (\cos x + \sin x)^2 = (1 - 2 \sin^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x) = \cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x) \cdot (1 + \sin 2x) = \cos^2 2x$$

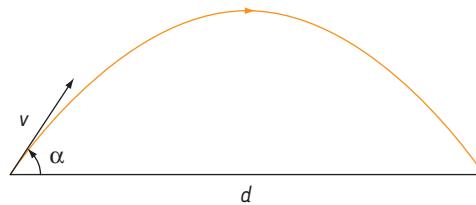
$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x = \cos^2 2x$$

Opdracht 178 bladzijde 335

Als een projectiel gelanceerd wordt met een snelheid v onder een hoek α , dan wordt de horizontale afstand d die het aflegt gegeven door de formule

$$d = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{9,81}$$

met d in m en v in m/s.



- 1** Een kogel wordt afgevuurd met een snelheid van 250 m/s.

Onder welke hoek moet die afgeschoten worden om een doel te raken dat 1750 m verwijderd is?

$$d = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{9,81}$$

$$\frac{250^2 \cdot \sin 2\alpha}{9,81} = 1750$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1750 \cdot 9,81}{250^2} = 0,27468$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 15,943^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \text{of} \quad 2\alpha = 164,057^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 7^\circ 58'17'' + k \cdot 180^\circ \quad \text{of} \quad \alpha = 82^\circ 1'43'' + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

De kogel moet onder een hoek van $7^\circ 58'17''$ of $82^\circ 1'43''$ afgeschoten worden.

- 2 Een voetbal wordt weggetrapt met een snelheid van 22 m/s en komt 41 m verder op de grond terecht.

Onder welke hoek is de voetbal weggetrapt?

$$\frac{22^2 \cdot \sin 2\alpha}{9,81} = 41$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{41 \cdot 9,81}{22^2} = 0,831$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 56,203^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ of } 2\alpha = 123,797^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 28^\circ 6'5'' + k \cdot 180^\circ \text{ of } \alpha = 61^\circ 53'55'' + k \cdot 180^\circ$$

De voetbal is weggetrapt onder een hoek van $28^\circ 6'5''$ of $61^\circ 53'55''$.

- 3 Onder welke hoek kun je met een gegeven lanceersnelheid het verst geraken? Verklaar.

Als v constant is, dan zal d maximaal zijn, als $\sin 2\alpha$ maximaal is, dus:

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Met een gegeven lanceersnelheid geraak je het verst onder een hoek van 45° .

**Opdracht 179 bladzijde 336**

Een verkiezingsaffiche van 2 m hoogte wordt opgehangen aan de muur van een leegstaand gebouw. De onderrand van de affiche bevindt zich op 1 m boven de ooghoogte van een voorbijganger die zich op een afstand van x meter van de muur bevindt.

- 1 Toon aan dat de hoek γ , waaronder de voorbijganger de affiche ziet, voldoet aan

$$\bullet \quad \tan \alpha = \frac{3}{x}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{x}$$

$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$\bullet \quad \tan \gamma = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}}$$

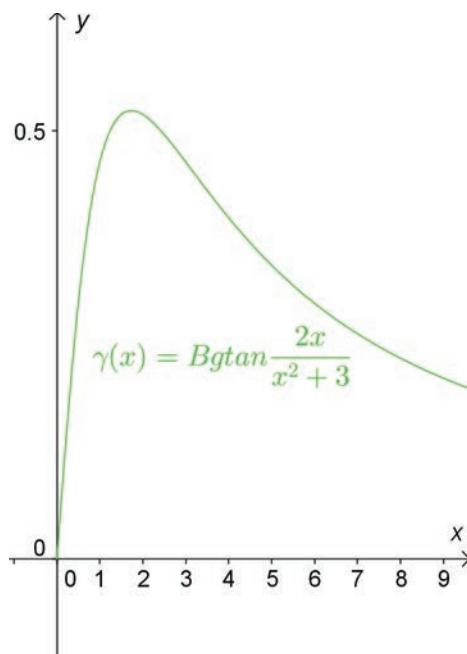
$$= \frac{2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$\text{zodat } \gamma(x) = \operatorname{Bgtan} \frac{2x}{x^2 + 3}$$



- 2 Plot de grafiek van de functie γ .



- 3 Hoe ver moet de voorbijganger zich van de muur verwijderen om de affiche onder een maximale hoek te zien?

Maximum via grafisch rekentoestel bij $x = 1,732$ m



Opdracht 180 bladzijde 336

Op welke tekening zijn de punten (x, y) voorgesteld waarvoor geldt dat $\cos x = \cos y$?

$$\cos x = \cos y$$

$$\Leftrightarrow x = \pm y + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

D
↙

Opdracht 181 bladzijde 337

Als je de grafiek van $f: x \mapsto \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin x$ bekijkt, dan kun je vermoeden dat deze functie een algemene sinusfunctie voorstelt.

- 1** Gebruik som- en verschilformules om het voorschrift van deze algemene sinusfunctie exact te bepalen.

$$f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{8} \sin 8x \end{aligned}$$

- 2** Bereken, met behulp van het voorschrift uit de vorige vraag,

de exacte oplossingen van $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$.

$$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 8x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 182 bladzijde 337

Bewijs dat de volgende gelijkheid geldt in elke driehoek ABC met hoeken α , β en γ .

$$1 \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

$$= \cos \alpha + \cos \beta + \cos (\pi - (\alpha + \beta))$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta)$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1\right)$$

$$= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$= 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \left(-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{-\beta}{2}\right)$$

$$= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

$$= 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$2 \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \sin(2\pi - 2(\alpha + \beta))$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin(2(\alpha + \beta))$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos(-\beta)$$

$$= 2 \sin(\pi - \gamma) \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$= 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma$$

Opdracht 183 bladzijde 337

In een driehoek ABC , waarvan α , β en γ de hoeken zijn, geldt dat $\sin(2\beta - 4\alpha) - \sin 6\beta + \sin(2\beta - 4\gamma) - \sin 2\beta = 0$ en $\cos 2\beta \neq 0$.

Toon aan dat ΔABC rechthoekig is.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ en } \cos 2\beta \neq 0 \quad (*)$$

$$\sin(2\beta - 4\alpha) - \sin 6\beta + \sin(2\beta - 4\gamma) - \sin 2\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(4\beta - 2\alpha) \cdot \sin(-2\beta - 2\alpha) + 2\cos(2\beta - 2\gamma) \sin(-2\gamma) = 0$$

$$-2\beta - 2\alpha = -2\pi + 2\gamma$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(4\beta - 2\alpha) \cdot \sin 2\gamma - 2\cos(2\beta - 2\gamma) \cdot \sin 2\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2\gamma \cdot (\cos(4\beta - 2\alpha) - \cos(2\beta - 2\gamma)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2\gamma \cdot (-2 \sin(3\beta - \alpha - \gamma) \cdot \sin(\beta - \alpha + \gamma)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\gamma \cdot \sin(3\beta + \beta - \pi) \cdot \sin(\pi - \alpha - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin 2\gamma \cdot \sin 4\beta \cdot \sin 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \sin 2\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 0 \text{ of } \sin 2\beta = 0 \text{ of } \sin 2\gamma = 0 \text{ of } \cos 2\beta = 0 \quad \xrightarrow{*} (*)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = k \cdot \pi \text{ of } 2\beta = k\pi \text{ of } 2\gamma = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ of } \beta = k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ of } \gamma = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{en } 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Besluit: } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ of } \beta = \frac{\pi}{2} \text{ of } \gamma = \frac{\pi}{2}$$

zodat ΔABC rechthoekig is

Hersenbreker 1 bladzijde 338

Alle katten met blauwe ogen zijn sloom. Een slome kat kan geen muizen vangen.
Alle witte katten hebben blauwe ogen. Ik zag mijn kat Bourbaki een muis vangen.

Wat kan je zeker besluiten?

- A** Bourbaki had voordien nog nooit een muis gevangen.
- B** Bourbaki is sloom.
- C** Bourbaki is niet wit.
- D** Bourbaki heeft blauwe ogen.
- E** Bourbaki heeft bruine ogen.

Antwoord C: Bourbaki is niet wit.

Verklaring: Als Bourbaki wel wit zou zijn, dan heeft hij blauwe ogen.

Maar alle katten met blauwe ogen zijn sloom en een slome kat kan geen muizen vangen. Dit is in tegenstrijd met het feit dat ik Bourbaki een muis zag vangen. Dus Bourbaki is niet wit.

Hersenbreker 2 bladzijde 338

De rechthoek $ABCD$ heeft als zijden $|AB| = 15$ en $|BC| = 9$.

Een grote cirkel gaat door A en raakt in C aan CD .
Een kleine cirkel raakt aan AB , aan BC en aan de grote cirkel.

- 1 Wat is de straal van de grote cirkel?

Noem middelpunt grote cirkel M en straal grote cirkel R en stel

$$|BM| = x,$$

dan geldt $|MA| = |MC| = R$,

zodat $|MA|^2 = |MC|^2$

$$15^2 + x^2 = (9 + x)^2$$

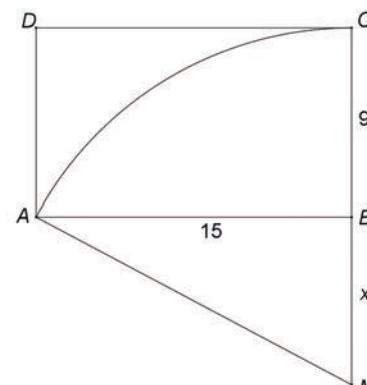
$$225 + x^2 = 81 + 18x + x^2$$

$$18x = 144$$

$$x = 8$$

$$R = 9 + x = 9 + 8 = 17$$

De straal van de grote cirkel is 17.



2 Wat is de straal van de kleine cirkel?

Noem straal kleine cirkel r .

Dan geldt in $\triangle MEF$:

$$(8 + r)^2 + r^2 = (17 - r)^2$$

$$64 + 16r + r^2 + r^2 = 289 - 34r + r^2$$

$$r^2 + 50r - 225 = 0$$

$$D = 3400$$

$$r = \frac{-50 + \sqrt{3400}}{2} \quad \text{of} \quad r = \frac{-50 - \sqrt{3400}}{2}$$

$$r = 4,155 \quad \text{of} \quad r = -54,155$$

De straal van de kleine cirkel is 4,2.

