# Hoofdstuk 7

## Verloop van veeltermfuncties

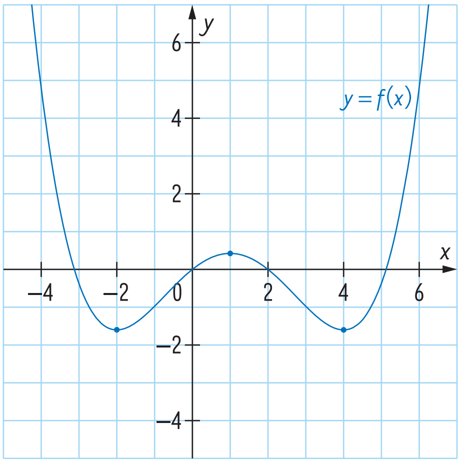


## Opdracht 1 bladzijde 66

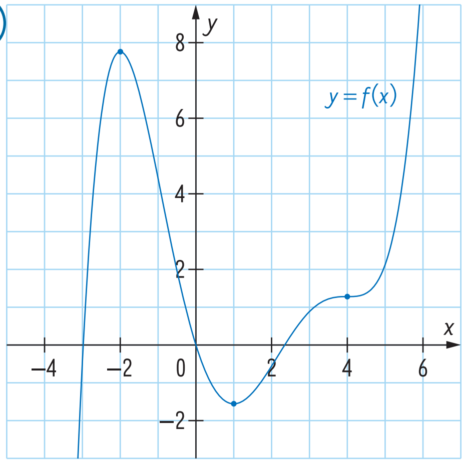
Welke functiegrafiek hoort bij de gegeven tekentabel van de afgeleide?

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

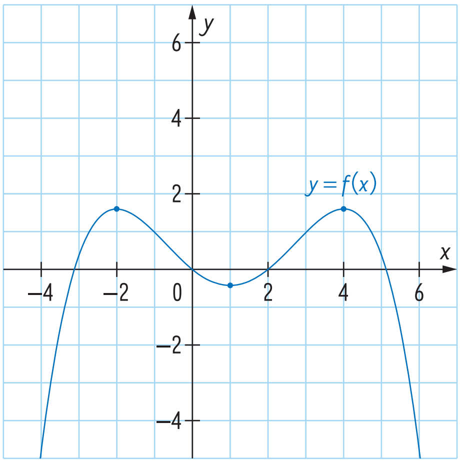
**a**



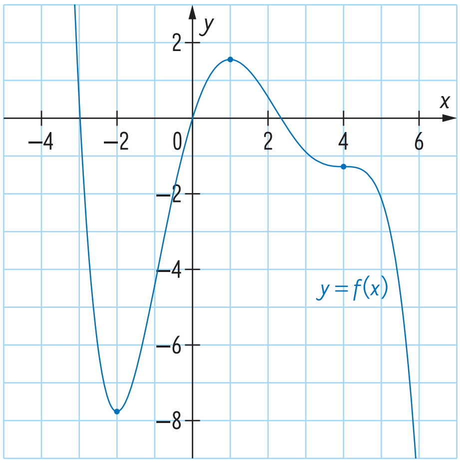

**c**




**b**




**d**




## Opdracht 2 bladzijde 69

Stel voor de volgende functies een verloopschema op.

**1** $f: x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad (D = 144)$

$\Leftrightarrow \; x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | $-1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $11$ | $\searrow$ | $-21$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | min. | |

**2** $f: x \longmapsto -x^3 + 6x^2 - 1$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$

$-3x^2 + 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 4$

| x | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | –1 | ↗ | 31 | ↘ |
| | | min. | | max. | |

**3** $f: x \longmapsto 3x^4 + 11x^3 + 15x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 12x^3 + 33x^2 + 30x + 9$

$12x^3 + 33x^2 + 30x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(12x^2 + 21x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{of} \quad 12x^2 + 21x + 9 = 0 \quad (D = 9)$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = -\frac{3}{4} \quad \text{of} \quad x = -1$

| | 12 | 33 | 30 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| –1 | | –12 | –21 | –9 |
| | 12 | 21 | 9 | 0 |

| x | | –1 | | $-\frac{3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | –4 | ↘ | –4,004 | ↗ |
| | | | | min. | |

**4** $f: x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 7$

$f'(x) = x^3 - 12x^2 + 34x$

$x^3 - 12x^2 + 34x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 12x + 34) = 0$

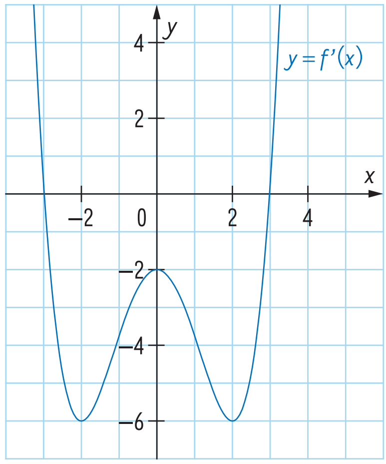
$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 - 12x + 34 = 0 \quad (D = 8)$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 6 + \sqrt{2} \quad \text{of} \quad x = 6 - \sqrt{2}$

| x | | 0 | | $6 - \sqrt{2}$ | | $6 + \sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | –7 | ↗ | 75,314 | ↘ | 52,686 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

**Opdracht 3 bladzijde 69**

De hellinggrafiek van een veeltermfunctie $f$ is gegeven. Welke van de onderstaande uitspraken zijn waar voor de functie $f$?




**1** $f$ bereikt een relatief minimum voor $x = 2$.

niet juist want $f'(2) < 0$

**2** $f$ bereikt een relatief minimum voor $x = 3$.

juist want $f'(3) = 0$ en in 3 gaat $f'$ over van – naar +

**3** De grafiek van $f$ heeft een horizontale raaklijn voor $x = -3$.

juist want $f'(-3) = 0$

**4** De grafiek van $f$ is stijgend in $]-2, 0[$.

niet juist want $f'(x) < 0$ voor $x \in\ ]-2, 0[$

**5** De grafiek van $f$ is dalend in $]0, 3[$.

juist want $f'(x) < 0$ voor $x \in\ ]0, 3[$

**Opdracht 4 bladzijde 69**

De functie met voorschrift $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ bereikt voor $x = -1$ een extremum gelijk aan 3.

**1** Bepaal $a$ en $b$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f(-1) = 3 \iff -1 + a + b = 3 \iff a + b = 4 \qquad (1)$

$f'(1) = 0 \iff 3 - 2a = 0 \iff a = \frac{3}{2} \qquad (2)$

(2) invullen in (1) geeft: $b = 4 - a = \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

**2** Is dit extremum een minimum of een maximum?

$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$

$f'(x) = 3x^2 + 3x$

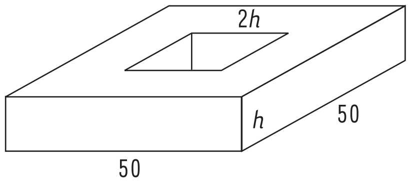
$3x^2 + 3x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | −1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 3 | ↘ | $\frac{5}{2}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Het extremum voor $x = -1$ is een maximum.

**Opdracht 5 bladzijde 71**

Een architect bouwt op een vierkant perceel van 50 m bij 50 m een gebouw.
Het zal bestaan uit appartementen rond een vierkante binnenplaats. De architect wil, omwille van de lichtinval, dat de zijde van de binnenplaats twee keer zo groot is als de hoogte.




**1** Druk het volume $V$ (in $m^3$) van het gebouw uit in functie van de hoogte $h$ (in m).

$$\begin{aligned} V &= 50^2h - (2h)^2h \\ &= 2500h - 4h^3 \\ &= 4h(625 - h^2) \end{aligned}$$

**2** Voor welke waarden van $h$ is $V$ strikt positief?

| h | −25 | 0 | | 25 | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | 0 | + | 0 | − |

Beperken we ons tot de zinvolle waarden van h (h > 0), dan vinden we:

$V > 0$ als $h \in\ ]0, 25[$.

**3** Voor welke waarde van $h$ is het volume $V$ van het gebouw maximaal?

$V'(h) = 2500 - 12h^2$

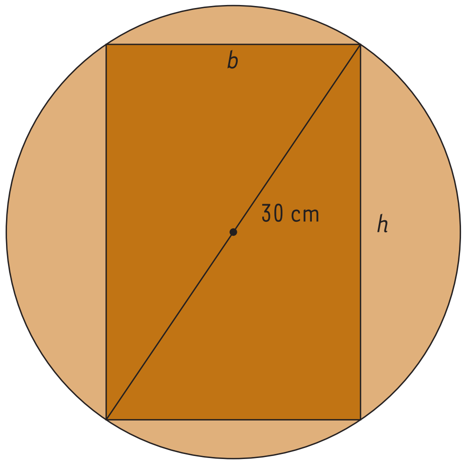
$V'(h) = 0 \iff h = -\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ of $h = \dfrac{25}{\sqrt{3}}$

| h | $-\frac{25}{\sqrt{3}}$ | 0 | | $\frac{25}{\sqrt{3}}$ | | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V′(h) | | | + | 0 | − | |
| V(h) | | | ↗ | max. | ↘ | |

Het volume van het gebouw is maximaal als $h = \dfrac{25}{\sqrt{3}}$ m ≈ 14,4 m.

### Opdracht 6 bladzijde 71

Uit een cilindrische boomstam met diameter 30 cm moet een balk gezaagd worden met breedte *b* (in cm) en hoogte *h* (in cm). Het draagvermogen *D* van de balk is recht evenredig met de breedte en met het kwadraat van de hoogte.




Bepaal *b* en *h* zo dat de draagkracht maximaal wordt.

Er geldt $b^2 + h^2 = 900 \iff h^2 = 900 - b^2$.

$D = kbh^2$ (met k een positieve evenredigheidsconstante)

$D = kb(900 - b^2) = 900kb - kb^3$

$D' = 900k - 3kb^2$

$$D' = 0 \iff b^2 = \frac{900k}{3k} = 300 \iff b = \sqrt{300} \text{ of } b = -\sqrt{300}$$

$$\iff b = 10\sqrt{3} \text{ of } b = -10\sqrt{3}$$

| b | $-10\sqrt{3}$ | | 0 | | $10\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D′ | | | | + | 0 | − |
| D | | | | ↗ | max. | ↘ |

D is maximaal als $b = 10\sqrt{3}$ cm $\approx 17{,}3$ cm.

De hoogte h is dan $h = \sqrt{900 - 300}$ cm $= 10\sqrt{6}$ cm $\approx 24{,}5$ cm.

### Opdracht 7 bladzijde 72

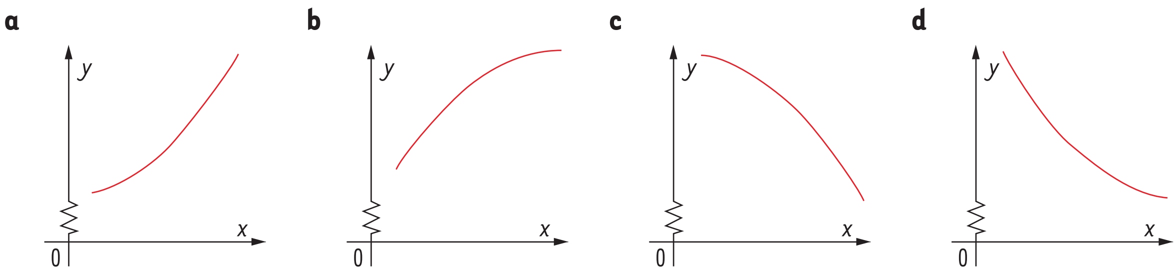
Hieronder vind je vier uitspraken en vier grafieken. Welke uitspraak hoort bij welke grafiek?

**1** In het afgelopen jaar is de economische groei in België afgenomen.

**2** In het eerste kwartaal van dit jaar was er een toenemende daling van het aantal werklozen.

**3** Nadat die partij aan de macht kwam, was er een steeds toenemende escalatie van het geweld.

**4** Door het gewijzigd rookgedrag nam het aantal gevallen van longkanker steeds minder snel af.

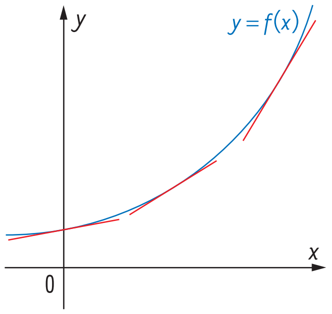



| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| b | c | a | d |

**Opdracht 8 bladzijde 72**

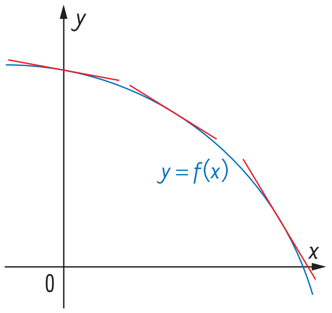
Kies bij elke grafiek van $f$ de omschrijving die ermee overeenstemt.

**1**



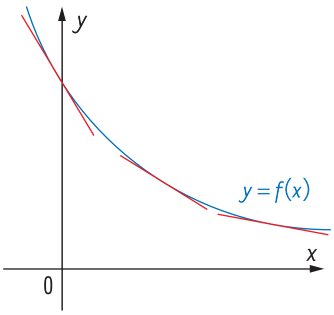

**A** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**B** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
**C** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**D** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**2**




**A** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**B** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
**C** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**D** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**3**




**A** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**B** $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
**C** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
**D** $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**Opdracht 9 bladzijde 76**

Geef in een schema een overzicht van het hol en bol verloop van de grafiek van $f$. Geef ook de coördinaten van de eventuele buigpunten.

**1** $f: x \longmapsto -x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = -3x^2 - 6x$

$f''(x) = -6x - 6$

$-6x - 6 = 0 \iff x = -1$

| x | | −1 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − |
| f(x) | $\cup$ | 0<br>bgpt. | $\cap$ |

buigpunt: (−1, 0)

**2** $f \colon x \mapsto x^4 - 18x^2 + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$12x^2 - 36 = 0 \iff x = -\sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = \sqrt{3}$

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $-41$<br>bgpt. | $\cap$ | $-41$<br>bgpt. | $\cup$ |

buigpunten: $\left(-\sqrt{3}, -41\right)$ en $\left(\sqrt{3}, -41\right)$

**Opdracht 10 bladzijde 76**

Voor welke waarde van $a$ heeft de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - ax^2$ een buigpunt voor $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 2ax$

$f''(x) = 6x - 2a$

$$\begin{aligned} f''(2) = 0 &\iff 12 - 2a = 0 \\ &\iff a = 6 \end{aligned}$$

Aangezien f″ een eerstegraadsfunctie is, zal ze van teken veranderen bij $x = 2$, zodat er zeker sprake is van een buigpunt.

**Opdracht 11 bladzijde 76**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, extrema, hol en bol verloop, buigpunten).

**1** $f \colon x \mapsto 8x^3 - 3x^2 - 10$

$f'(x) = 24x^2 - 6x$

$24x^2 - 6x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{1}{4}$

$f''(x) = 48x - 6$

$48x - 6 = 0 \iff x = \dfrac{1}{8}$

| $x$ | | $0$ | | $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-10$<br>max. | $\searrow$ | $-10{,}031$<br>bgpt. | $\searrow$ | $-10{,}063$<br>min. | $\nearrow$ |

**2** $f: x \longmapsto -2x^3 + 6x$

$f'(x) = -6x^2 + 6$

$-6x^2 + 6 = 0 \iff x = -1 \quad \text{of} \quad x = 1$

$f''(x) = -12x$

$-12x = 0 \iff x = 0$

| x | | −1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − |
| f(x) | $\searrow$ | −4 | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | |

**3** $f: x \longmapsto \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10\,x + 12$

$2x^3 - 4x^2 - 10\,x + 12 = 0$

$\iff (x-1)(2x^2 - 2x - 12) = 0$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x^2 - x - 6 = 0 \qquad (D = 25)$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x = 3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | −4 | −10 | 12 |
| 1 | | 2 | −2 | −12 |
| | 2 | −2 | −12 | 0 |

$f''(x) = 6x^2 - 8x - 10$

$6x^2 - 8x - 10 = 0 \iff 3x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad (D = 76)$

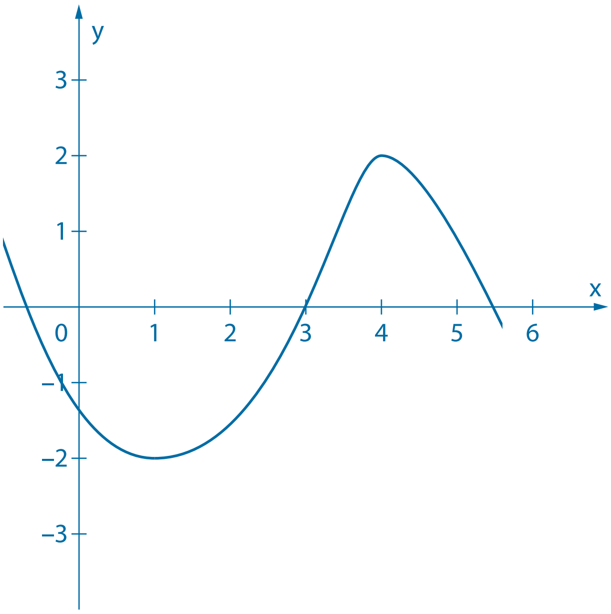
$\iff x = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3}$

| x | | −2 | | $\frac{2-\sqrt{19}}{3}$ | | 1 | | $\frac{2+\sqrt{19}}{3}$ | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | $\searrow$ | −24,333 | $\nearrow$ | −10,688 | $\nearrow$ | 7,167 | $\searrow$ | 1,367 | $\searrow$ | −3,5 | $\nearrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 12 bladzijde 76**

Gegeven is een deel van een samenvattende tabel van het verloop van een veeltermfunctie van de derde graad. Maak een schets van de grafiek van deze functie.

| $x$ | | 1 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | + | + | 0 | – |
| $f''(x)$ | + | + | + | 0 | – | – | – |

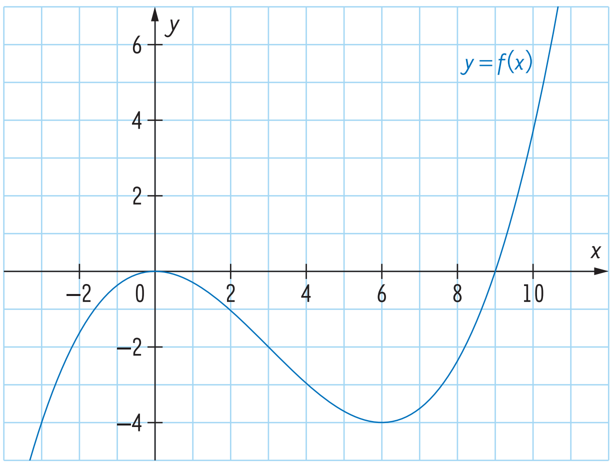



| x | | 1 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | + | + | 0 | – |
| f″(x) | + | + | + | 0 | – | – | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | bgpt. | ↗ | max. | ↘ |

**Opdracht 13 bladzijde 82**

Gegeven is de grafiek van een veeltermfunctie.

Geef een samenvattende tabel die het verloop van deze functie beschrijft.




| x | | 0 | | 3 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
| f″(x) | – | – | – | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↗ | 0<br>max. | ↘ | –2<br>bgpt. | ↘ | –4<br>min. | ↗ |

**Opdracht 14 bladzijde 82**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + mx^2$ varieert met de waarde van de parameter $m$.

**1** Bepaal $m$ zodat $f$ een relatief maximum heeft.
Bepaal ook de waarde van dit relatief maximum.

$f'(x) = 4x^3 + 2mx = 2x(2x^2 + m)$

- Als $m > 0$, dan heeft $2x^2 + m$ geen nulpunten. In 0 verandert $f'$ van negatief naar positief, zodat $f$ een relatief minimum bereikt voor $x = 0$.
- Als $m = 0$ dan is $f'(x) = 4x^3$. Ook nu bereikt de functie een relatief minimum voor $x = 0$.
- Als $m < 0$ dan geldt $2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{m}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\frac{m}{2}}$ of $x = +\sqrt{-\frac{m}{2}}$

| $x$ | | $-\sqrt{-\frac{m}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{-\frac{m}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

Voor $m < 0$ bereikt de functie dus een relatief maximum. Het relatief maximum treedt op voor $x = 0$ en is gelijk aan 0.

**2** Voor welke waarden van $m$ heeft de grafiek van $f$ buigpunten?
Bepaal ook de coördinaten van deze buigpunten.

$f''(x) = 12x^2 + 2m$

- Als $m > 0$ heeft $f''$ geen nulpunten.
- Als $m = 0$ heeft $f''$ 0 als nulpunt, maar er is geen tekenwissel, dus geen buigpunt.
- Als $m < 0$ dan zijn de nulpunten $\sqrt{-\frac{m}{6}}$ en $-\sqrt{-\frac{m}{6}}$

| $x$ | | $-\sqrt{-\frac{m}{6}}$ | | $\sqrt{-\frac{m}{6}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | bgpt. | $\cap$ | bgpt. | $\cup$ |

Voor $m < 0$ bereikt de functie 2 buigpunten. Deze buigpunten zijn

$P_1\left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}; -\frac{5m^2}{36}\right)$ en $P_2\left(\sqrt{-\frac{m}{6}}; -\frac{5m^2}{36}\right)$,

want $f\left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = f\left(\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = \frac{m^2}{36} + m\left(-\frac{m}{6}\right) = -\frac{5m^2}{36}$.

**3** Voor welke waarde van *m* is de afstand tussen de buigpunten gelijk aan 5?

$$d(P_1, P_2) \underset{\uparrow}{=} \sqrt{-\frac{m}{6}} - \left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = 2\sqrt{-\frac{m}{6}}$$

gelijke y-waarde

$$2\sqrt{-\frac{m}{6}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{m}{6}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{m}{6} = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{75}{2} = -37{,}5$$

**Opdracht 15 bladzijde 85**

Stel voor de volgende functies een verloopschema op. Bepaal ook de extrema.

**1** $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - x$

$f'(x) = -x - 1$

$-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| x | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ max. | ↘ |

De functie bereikt een maximum $\frac{1}{2}$ voor $x = -1$.

**2** $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 15x - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

$3x^2 + 12x - 15 = 0$ $\qquad (D = 324)$

$\Leftrightarrow x = -5$ of $x = 1$

| x | | $-5$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 99 max. | ↘ | $-9$ min. | ↗ |

De functie bereikt een relatief maximum 99 voor $x = -5$ en een relatief minimum $-9$ voor $x = 1$.

**3** $f: x \mapsto x^4 - 18x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$

$4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3$

| x | | −3 | | 0 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | −81 | ↗ | 0 | ↘ | −81 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

De functie bereikt een relatief maximum 0 voor x = 0 en een minimum −81 voor x = 3 en voor x = −3.

**4** $f: x \mapsto (x+1)^3(x-1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^3(x-1) \\ &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x-1) \\ &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$

$4x^3 + 6x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 + 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \qquad (D = 9)$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$

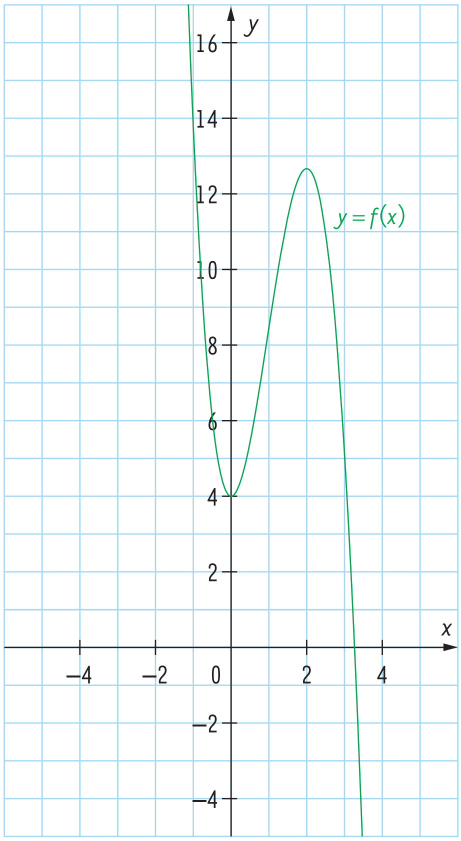
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 6 | 0 | −2 |
| −1 | | −4 | −2 | 2 |
| | 4 | 2 | −2 | 0 |

| x | | −1 | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↘ | −1,6875 | ↗ |
| | | | | min. | |

De functie bereikt een minimum $-\frac{27}{16} = -1{,}6875$ voor $x = \frac{1}{2}$.

**Opdracht 16 bladzijde 85**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 7x^2 + 4$ is getekend.




**1** Lees op de grafiek af voor welke waarden van $x$ de functie een extremum bereikt.

De functie bereikt een extremum voor x = 0 en voor x = 2.

**2** Bereken $f'(x)$ en ga na of $f$ nog extrema heeft die niet in beeld zijn.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 14x$

$\frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 14x = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0 \text{ of } \frac{1}{2}x^2 - 8x + 14 = 0 \quad (D = 36)$

$\Leftrightarrow\ x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = 14$

| x | | 0 | | 2 | | 14 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

De functie f bereikt ook nog een extremum voor x = 14.

**Opdracht 17 bladzijde 86**

Een school van 820 leerlingen werd getroffen door een griepgolf. Het aantal leerlingen $N$ dat aanwezig was $t$ schooldagen na het uitbreken van de epidemie kan beschreven worden met de formule $N(t) = -0{,}008t^4 + 0{,}38t^3 - 4{,}5t^2 + 798$.

Na 23 schooldagen was de griepgolf over, zodat deze formule geldt voor $0 \leqslant t \leqslant 23$.

**1** Bereken het tijdstip $t$ tussen 0 en 23 waarvoor $N'(t) = 0$.
Wat is de betekenis van dit tijdstip?

$N'(t) = -0{,}032t^3 + 1{,}14t^2 - 9t$

$-0{,}032t^3 + 1{,}14t^2 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ of } -0{,}032t^2 + 1{,}14t - 9 = 0 \qquad (D = 0{,}1476)$

$\Leftrightarrow t = 0 \text{ of } t = 23{,}815 \text{ of } t = 11{,}810$

| x | 0 | | 11,8 | | 23,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | − | 0 | + | 0 |
| f(x) | | ↘ | min. | ↗ | |

Na 12 dagen is het aantal leerlingen dat aanwezig was, minimaal.

**2** Wat is het kleinste aantal leerlingen dat in deze periode aanwezig was?

Het kleinste aantal leerlingen is dan N(11, 8), ongeveer 641 leerlingen.

**3** Bereken $N'(10)$ en geef de betekenis van dit getal.

$N'(10) = -8$

10 dagen na het uitbreken van de griepgolf neemt het aantal aanwezigen af met 8 per dag.

**Opdracht 18 bladzijde 86**

De functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + 4x^2 + x - 7$ bereikt een extremum voor $x = 1$.

**1** Bepaal $a$.

$f'(x) = 3ax^2 + 8x + 1$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 8 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

**2** Is dit extremum een maximum of een minimum?

$f'(x) = -9x^2 + 8x + 1$

$-9x^2 + 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{9}$

| x | | $-\frac{1}{9}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

Het extremum is een maximum.

**Opdracht 19 bladzijde 86**

De rechte met vergelijking $y = b$ heeft precies twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Bepaal $b$ exact. Geef alle mogelijkheden.

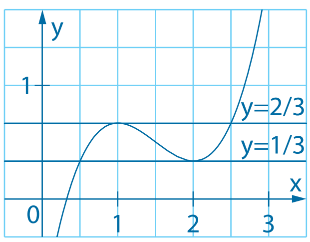
We bekijken het verloop van de functie f.

$f'(x) = 2x^2 - 6x + 4$

$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

| x | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{2}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Schets:




Voor $b = \frac{1}{3}$ en voor $b = \frac{2}{3}$ hebben beide krommen precies 2 punten gemeenschappelijk.

**Opdracht 20 bladzijde 86**

De afgeleide van de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx + c$ is $f'(x) = -3x^2 + 12$ en $f$ bereikt een maximum gelijk aan 3.

Bepaal $a$, $b$ en $c$.

Uit $f(x) = ax^3 + bx + c$ volgt dat $f'(x) = 3ax^2 + b$ , dus geldt dat $3a = -3$ en $b = 12$, m.a.w. $a = -1$ en $b = 12$.

Er geldt ook dat f een maximum bereikt met waarde 3.

De nulpunten van f′ zijn –2 en 2.

| x | | –2 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

Dus moet $f(2) = 3 \Leftrightarrow -8 + 24 + c = 3$

$\Leftrightarrow c = -13$

Besluit: $a = -1$, $b = 12$, $c = -13$.

**Opdracht 21 bladzijde 86**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + c$ bereikt links van de oorsprong een maximum dat op de $x$-as ligt.

Bepaal $c$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$

$3x^2 - 6x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{of} \quad x = 5$

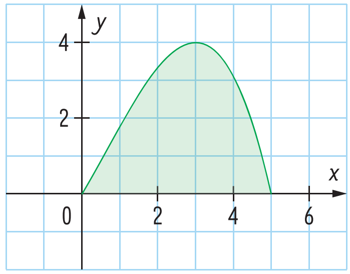
| x | | –3 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

Het maximum ligt op de x-as, dus

$f(-3) = 0 \Leftrightarrow -27 - 27 + 135 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -81$

**Opdracht 22 bladzijde 86**




We willen een profiel dat de vorm heeft van de getekende kromme. De breedte is 5 cm en op een afstand van 3 cm van de linkerkant moet de hoogte 4 cm zijn. De kromme is geen parabool (niet symmetrisch), en kan dus niet door een kwadratische functie bepaald worden.

Is er een derdegraadsfunctie met nulpunten 0 en 5 die een maximum 4 bereikt voor $x = 3$?
Bepaal deze indien mogelijk.

De derdegraadsfunctie moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

$f(0) = 0$

$f(5) = 0$

$f(3) = 4$

$f'(3) = 0$

Uit de eerste twee voorwaarden volgt dat het voorschrift van f geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-5)(ax+b) \\ &= (x^2-5x)(ax+b) \\ &= ax^3+bx^2-5ax^2-5bx \\ &= ax^3+(b-5a)x^2-5bx \end{aligned}$$

zodat $f(3) = 4 \iff 27a + (b-5a)9 - 15b = 4$

$\iff -9a - 3b = 2 \qquad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2(b-5a)x - 5b$

zodat $f'(3) = 0 \iff 3a9 + 2(b-5a)3 - 5b = 0$

$\iff -3a + b = 0$

$\iff b = 3a \qquad (2)$

Uit (1) en (2) volgt: $a = -\dfrac{1}{9}$

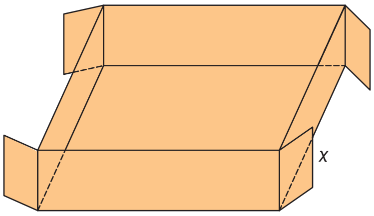
$b = -\dfrac{1}{3}$

Besluit: $f(x) = x(x-5)\left(-\dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{3}\right)$

**Opdracht 23 bladzijde 87**

In een kartonfabriek worden open dozen gemaakt uit vierkante stukken karton met een zijde van 40 cm. Aan de vier hoeken worden vierkantjes ingeknipt en gevouwen. Daarna wordt het geheel tot een doos geplakt.

Bij welke zijde *x* van de kleine vierkantjes is de inhoud maximaal?




Noemen we I de inhoud, dan geldt:

$I(x) = (40 - 2x)^2x = (1600 - 160x + 4x^2)x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

$I'(x) = 12x^2 - 320x + 1600$

$I'(x) = 0 \iff 3x^2 - 80x + 400 = 0 \qquad (D = 1600)$

$\iff x = 20 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{20}{3}$

| x | | $\frac{20}{3}$ | | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 4740,7 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Als de zijde van de vierkantjes $\dfrac{20}{3}$ cm is, is de inhoud maximaal.

**Opdracht 24 bladzijde 87**

De eigenaar van een appartementencomplex van 100 appartementen weet dat hij al zijn appartementen kan verhuren als hij een maandelijkse huur van € 600 vraagt. Uit een enquête gehouden onder zijn huurders verwacht hij dat elke verhoging van de huurprijs met € 10 tot gevolg heeft dat er één appartement meer leegstaat.

Welke huurprijs zal de eigenaar vragen als hij zijn inkomsten wil maximaliseren? Hoe groot zijn dan de inkomsten?

x = aantal leegstaande appartementen

inkomsten: $f(x) = (100 - x)(600 + 10x)$

$= 60\,000 + 1000x - 600x - 10x^2$

$= -10x^2 + 400x + 60\,000$

$f'(x) = -20x + 400$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{400}{20} = 20$

| x | | 20 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | 64 000 | ↘ |
| | | max. | |

Als de eigenaar € 800 per appartement vraagt, zijn de inkomsten maximaal, nl. € 64 000.
Er staan dan 20 appartementen leeg.

**Opdracht 25 bladzijde 87**

Een firma produceert potloden. De totale kosten (in €) om $x$ keer 1000 potloden te produceren, zijn gelijk aan $K(x) = 5x^3 - 45x^2 + 150x + 80$.
De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks.

**1** Voor welk aantal verkochte potloden is de winst maximaal? Hoeveel is die maximale winst?

omzet: $O(x) = 125x$

winst: $W(x) = O(x) - K(x)$

$= 125x - (5x^3 - 45x^2 + 150x + 80)$

$= -5x^3 + 45x^2 - 25x - 80$

$W'(x) = -15x^2 + 90x - 25$

$-15x^2 + 90x - 25 = 0 \qquad (D = 6600)$

$\iff x = 5{,}708 \quad \text{of} \quad x = 0{,}292$

| x | | 0,292 | | 5,708 | |
|---|---|---|---|---|---|
| W′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| W(x) | ↘ | –83,59 | ↗ | 313,59 | ↘ |
| | | min. | | max. | |

De winst is maximaal (€ 313,6) als x = 5,708, dus als er 5708 potloden verkocht worden.

**2** Hoeveel is de marginale winst als de winst maximaal is?
(marginale winst: zie hoofdstuk 6, opdracht 75)

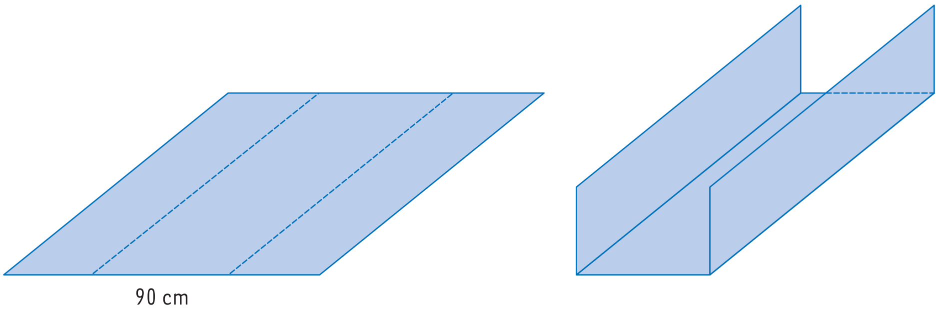
$W'(5{,}708) = 0$

De marginale winst is € 0.

**Opdracht 26 bladzijde 87**

Uit een aluminium plaat van 90 cm breed wil men goten maken voor een bevloeiingssysteem. Hiertoe worden de kanten 90° omgebogen.

Welke afmetingen moet de goot hebben zo dat de doorsnede maximaal is en er dus het meeste water kan doorstromen?




$x$ = hoogte van de goot

opp. doorsnede: $f(x) = x(90 - 2x)$ (opp. doorsnede maximaal $\rightarrow$ meeste water)

$$= 90x - 2x^2$$

$f'(x) = 90 - 4x$

$90 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 22{,}5$

| $x$ | | 22,5 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↗ | 1012,5<br>max. | ↘ |

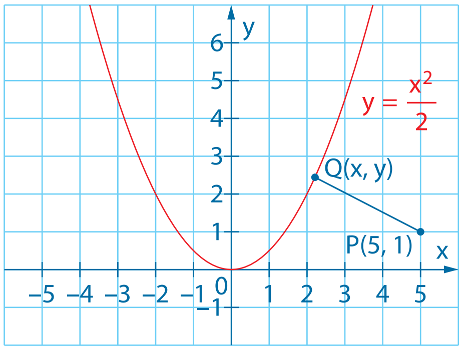
De inhoud is maximaal als $x = 22{,}5$ cm.

De afmetingen zijn dan: breedte 45 cm,
hoogte 22,5 cm.

**Opdracht 27 bladzijde 88**

Bepaal in een orthonormaal assenstelsel het punt $Q(x,\ y)$ op de parabool met vergelijking $y = \dfrac{x^2}{2}$ dat het dichtst bij $P(5,\ 1)$ ligt.

$Q(x, y)$ met $y = \dfrac{x^2}{2}$ en $P(5, 1)$




$$|PQ| = \sqrt{(x-5)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}$$

Als $|PQ|$ minimaal is, is ook $|PQ|^2$ minimaal en omgekeerd.

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= f(x) = (x-5)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2\\ &= x^2 - 10x + 25 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1\\ &= \frac{x^4}{4} - 10x + 26\end{aligned}$$

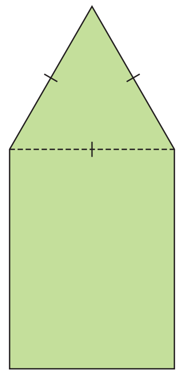
$f'(x) = x^3 - 10$

$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{10}$

| x | | $\sqrt[3]{10}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 9,84 | ↗ |
| | | min. | |

$|PQ|^2$ heeft als minimale waarde ongeveer 9,84, dus $|PQ| = \sqrt{9{,}84} \approx 3{,}14$. Het punt Q heeft als x-coördinaat $\sqrt[3]{10}$ en als y-coördinaat $\dfrac{\sqrt[3]{100}}{2}$.

**Opdracht 28 bladzijde 88**



Een venster heeft de vorm van een rechthoek met daarboven een gelijkzijdige driehoek.
We zoeken de afmetingen van het venster met een omtrek van 5 meter waarbij er zoveel mogelijk licht doorgelaten wordt.

**1** Kies een veranderlijke *x*.

x = zijde gelijkzijdige driehoek = breedte rechthoek

**2** Bepaal een formule voor de oppervlakte *A* (in m$^2$) van het venster en druk deze uit in functie van *x*.
Hou hierbij rekening met de omtrek van 5 meter.

$$A(x) = x \cdot h + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}$$

$$3x + 2h = 5 \iff h = \frac{5-3x}{2}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{5-3x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ &= \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ &= \frac{5}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 \end{aligned}$$

**3** Voor welke waarde van *x* is de oppervlakte *A* maximaal?
Wat zijn dan de afmetingen van het venster op 1 cm nauwkeurig?

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{5}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)x \end{aligned}$$

$$\text{nulpunt } A'\text{: } x = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} = 1{,}1715$$

| x | | 1,1715 | |
|---|---|---|---|
| A′(x) | + | 0 | – |
| A(x) | ↗ | max. | ↘ |

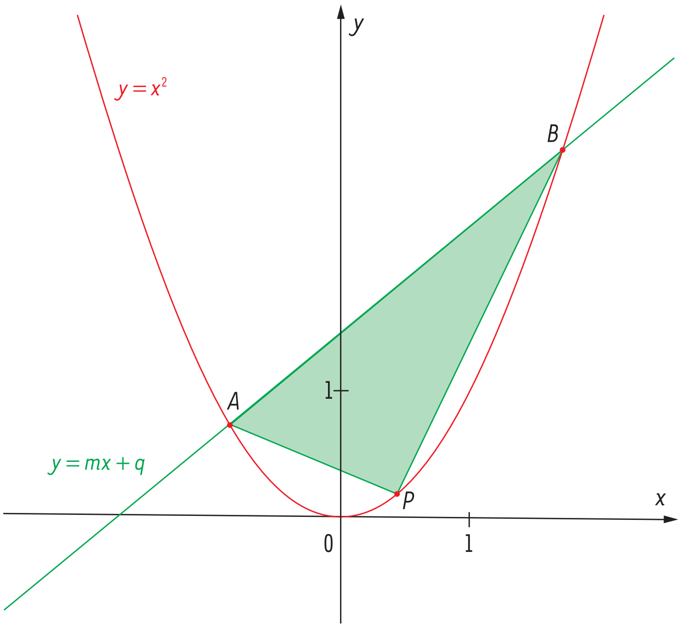
De oppervlakte is maximaal als x = 1,17 m.

De hoogte is dan $\frac{5 - 3 \cdot 1{,}1715}{2}$ m, dus ongeveer 0,74 m.

**Opdracht 29 bladzijde 88**

De rechte met vergelijking $y = mx + q$ snijdt de parabool met vergelijking $y = x^2$ in de punten $A$ en $B$.

Bepaal het punt $P$ op de parabool dat tussen $A$ en $B$ ligt waarvoor de oppervlakte van de driehoek $PAB$ maximaal is.




We bepalen de snijpunten van $y = mx + q$ en $y = x^2$.

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = mx + q \Leftrightarrow x^2 - mx - q = 0 \qquad (D = m^2 + 4q)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4q}}{2}$$

Aangezien $|AB|$ in $\Delta PAB$ constant is, maximaliseren we de hoogte $d(P, AB)$.

Normaalvergelijking van de rechte AB:

$$AB \leftrightarrow \frac{mx - y + q}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0$$

Stel $P(x, x^2)$, dan is $d(P, AB) = \dfrac{|mx - x^2 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Nu is $mx + q > x^2$ (want P ligt tussen A en B),

zodat $d(P, AB) = \dfrac{mx + q - x^2}{\sqrt{m^2 + 1}}$ (= functie van de tweede graad).

Deze functie heeft een maximum voor $x = \dfrac{-m}{-2} = \dfrac{m}{2}$ (x-coördinaat van de top van de parabool).

$$\Rightarrow P\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4}\right)$$

**Opdracht 30 bladzijde 89**

Geef in een schema een overzicht van het hol en bol verloop en de buigpunten van de grafiek van $f$.

**1** $f: x \longmapsto x^3 - 12x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \iff 6x = 0 \iff x = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ∩ | 4<br>bgpt. | ∪ |

**2** $f: x \longmapsto 6x^4 - 8x^3 + 1$

$f'(x) = 24x^3 - 24x^2$

$f''(x) = 72x^2 - 48x$

$f''(x) = 0 \iff 72x^2 - 48x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{2}{3}$

| x | | 0 | | $\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ∪ | 1<br>bgpt. | ∩ | −0,1852<br>bgpt. | ∪ |

**3** $f: x \longmapsto 5x - x^5$

$f'(x) = 5 - 5x^4$

$f''(x) = -20x^3$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − |
| f(x) | ∪ | 0<br>bgpt. | ∩ |

**4** $f: x \mapsto 6x^4 - 6x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 24x^3 - 18x^2 + 4x$

$f''(x) = 72x^2 - 36x + 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 36x + 4 = 0 \overset{D=144}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{3}$ of $x = \frac{1}{6}$

| x | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ∪ | 0,0324<br>bgpt. | ∩ | 0,0741<br>bgpt. | ∪ |

**Opdracht 31 bladzijde 89**

Zoek de eventuele buigpunten en vergelijkingen van de bijbehorende buigraaklijnen van de grafiek van de gegeven functies.

**1** $f: x \mapsto -x^3 + 6x^2 + 5$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$

$f''(x) = -6x + 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (buigpunt, want tekenwissel aangezien f" een eerstegraadsfunctie is)

$f(2) = 21 \longrightarrow$ buigpunt: (2, 21)

$f'(2) = 12$

$t \leftrightarrow y - 21 = 12(x - 2)$

$t \leftrightarrow y = 12x - 3$

**2** $f: x \mapsto x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 12$

$f''(x) = 12x^2 - 24x - 36$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \overset{D=16}{\Leftrightarrow} x = 3$ of $x = -1$ (beide buigpunten, want enkelvoudige nulpunten, dus tekenwissel)

$f(3) = -152 \longrightarrow$ buigpunt: (3, –152)

$f'(3) = -96$

$t_1 \leftrightarrow y + 152 = -96(x - 3)$

$t_1 \leftrightarrow y = -96x + 288 - 152$

$t_1 \leftrightarrow y = -96x + 136$

$f(-1) = = -24 \longrightarrow$ buigpunt: (–1, –24)

$f'(-1) = 32$

$t_2 \leftrightarrow y + 24 = 32(x + 1)$

$t_2 \leftrightarrow y = 32x + 32 - 24$

$t_2 \leftrightarrow y = 32x + 8$

**3** $f: x \longmapsto x^6 + x^4$

$f'(x) = 6x^5 + 4x^3$

$f''(x) = 30x^4 + 12x^2$

$f''(x) = 0 \iff x^2(30x^2 + 12) = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 = -\frac{12}{30}$

geen oplossingen

geen buigpunt, want dubbel nulpunt, dus geen tekenwissel

**4** $f: x \longmapsto -4x^4 + 7x^2 - 4x - 6$

$f'(x) = -16x^3 + 14x - 4$

$f''(x) = -48x^2 + 14$

$f''(x) = 0 \iff x^2 = \frac{14}{48} = \frac{7}{24} \iff x = -\sqrt{\frac{7}{24}} \approx -0{,}54 \quad \text{of} \quad x = \sqrt{\frac{7}{24}} \approx 0{,}54$ (beide buigpunten, want enkelvoudige nulpunten, dus tekenwissel)

$f\left(\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -6{,}46$

$f'\left(\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = 1{,}04$

buigpunt: (0,54; –6,46)

$t_1 \leftrightarrow y + 6{,}46 = 1{,}04\,(x - 0{,}54)$

$t_1 \leftrightarrow y = 1{,}04x - 7{,}02$

$f\left(-\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -2{,}14$

$f'\left(-\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -9{,}04$

buigpunt: (–0,54; –2,14)

$t_2 \leftrightarrow y + 2{,}14 = -9{,}04\,(x + 0{,}54)$

$t_2 \leftrightarrow y = -9{,}04x - 7{,}02$

**Opdracht 32 bladzijde 89**

Welke uitspraken zijn juist?

De functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{3}$

**A** heeft $P(2, 1)$ als buigpunt

**B** heeft een horizontale raaklijn in $P(2, 1)$

**C** bereikt een maximum voor $x = 1$

**D** bereikt een minimum voor $x = 3$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = 3$

| x | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{5}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Uitspraken C en D zijn juist.

$f''(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

| x | | 2 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | – | 0 | + |
| f(x) | ∩ | 1 | ∪ |
| | | bgpt. | |

Uitspraak A is juist.

B is niet juist want dan zou 2 een nulpunt van de eerste afgeleide moeten zijn.

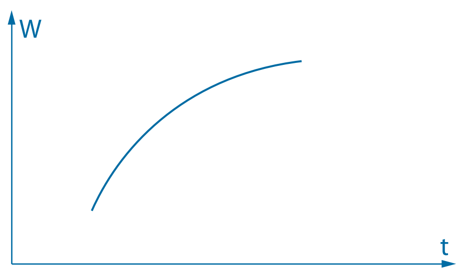
**Opdracht 33 bladzijde 89**

In de krant stond te lezen: ‘De werkloosheidsstijging neemt af’.

**1** Betekent dit dat het aantal werklozen vermindert?

Neen, het aantal werlozen stijgt nog, maar minder snel.

**2** Geef met een geschetste grafiek aan wat de journalist bedoelt.



**3** Veronderstel dat het aantal werklozen $W$ een functie van de tijd $t$ is waarvan de eerste en tweede afgeleide respectievelijk $W'$ en $W''$ zijn.
Wat weet je over $W'$ (positief, nul of negatief) op het tijdstip waarover de krant schrijft?

$W' > 0$ want W stijgt.

**4** Wat weet je over $W''$ op dat tijdstip?

$W'' < 0$ want de grafiek is bol (de toename neemt af).

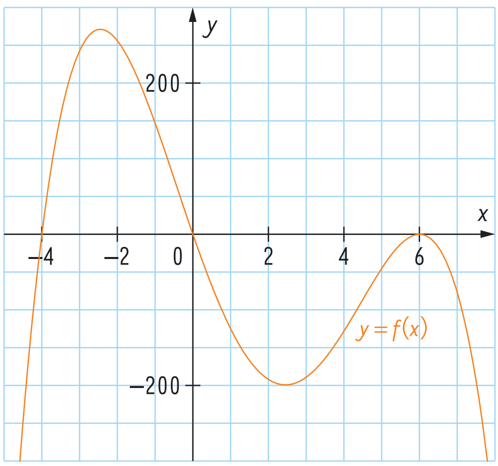
**5** Wat is de betekenis van een buigpunt van de grafiek van $W$?

Een buigpunt van de grafiek van W betekent de overgang tussen een afnemende stijging (daling) en een toenemende stijging (daling); of de overgang tussen een toenemende stijging (daling) en een afnemende stijging (daling). Het is een trendbreuk in de evolutie van de werkloosheid.

**Opdracht 34 bladzijde 90**

Gegeven de grafiek van de veeltermfunctie $f: x \longmapsto -x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 144x$.

Is $O(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek van $f$?




$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 24x - 144$

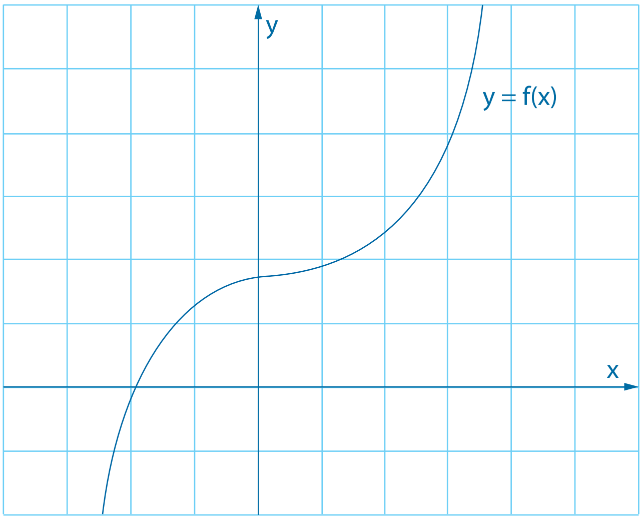
$f''(x) = -12x^2 + 48x + 24$

$f''(0) = 24 \neq 0$ dus $O(0, 0)$ is geen buigpunt.

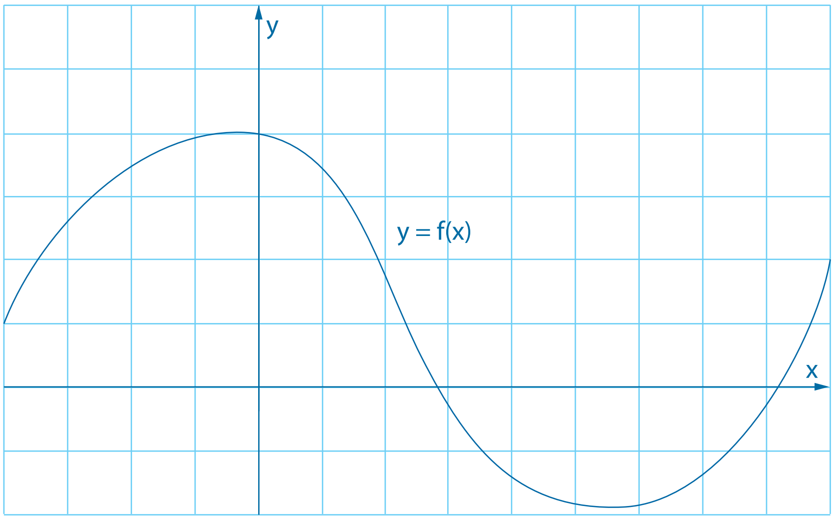
**Opdracht 35 bladzijde 90**

Schets een mogelijke grafiek van een functie met

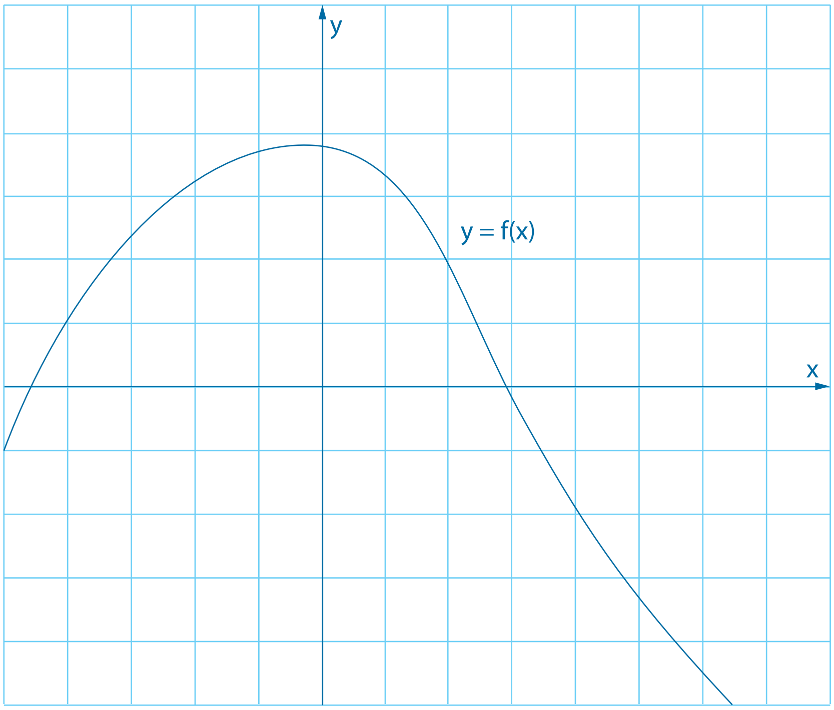
**1** juist één buigpunt en geen extrema



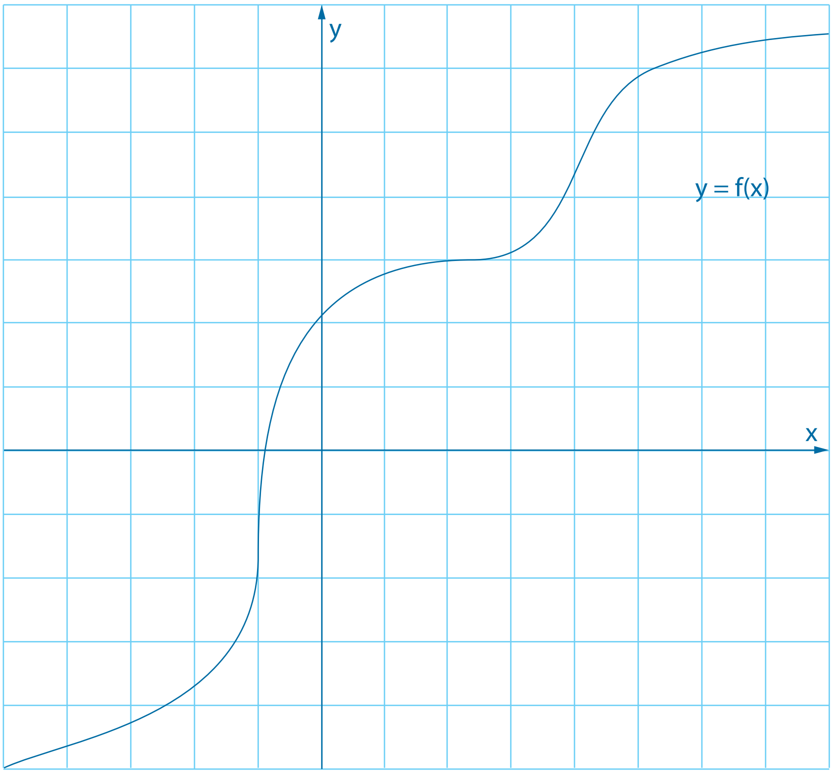

**2** juist één buigpunt, één maximum en één minimum



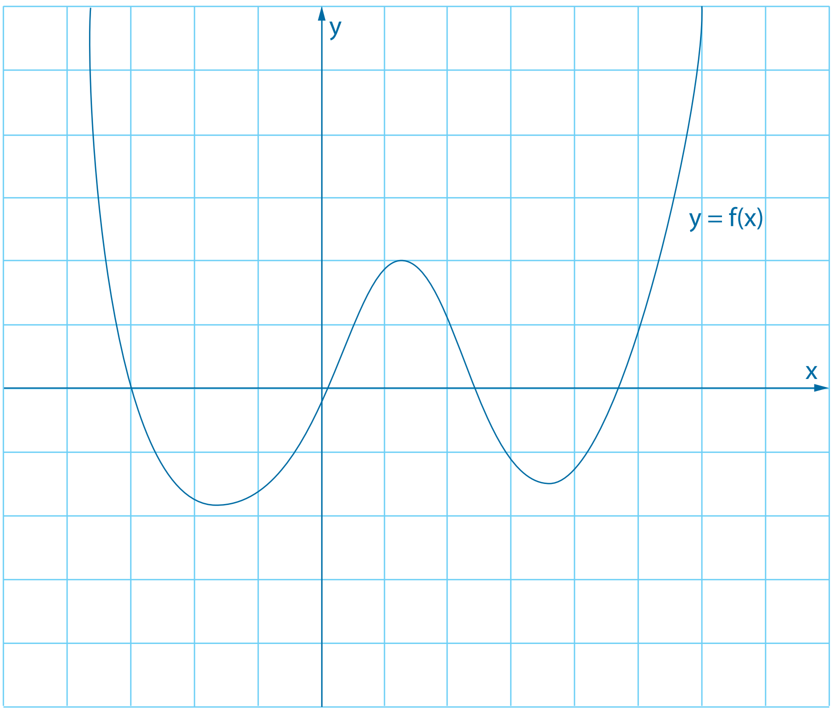

**3** juist één buigpunt, één maximum en geen minimum



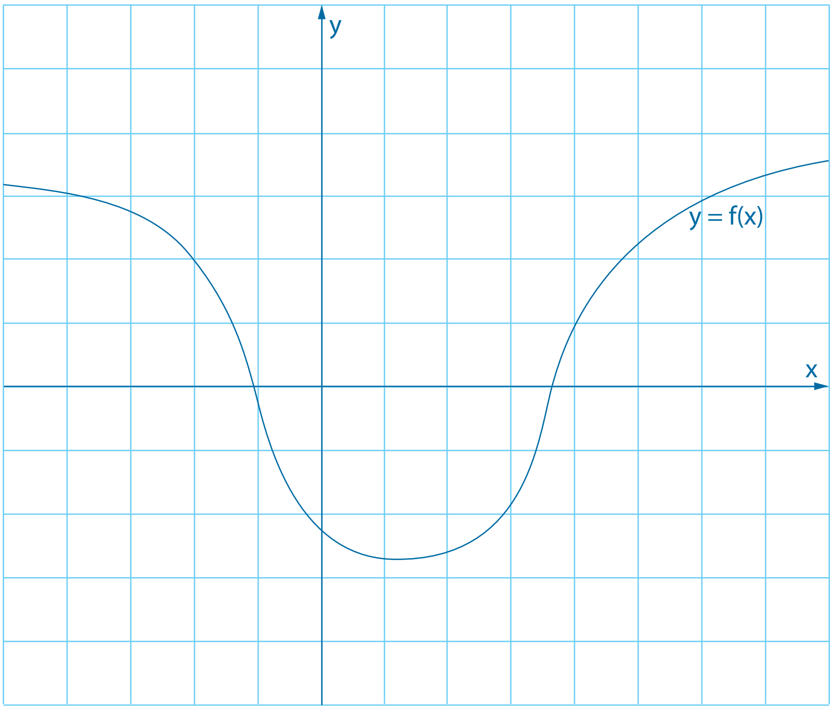
**4** drie buigpunten en geen extrema




**5** twee minima, één maximum en twee buigpunten



**6** twee buigpunten, één minimum en geen maxima




**Opdracht 36 bladzijde 90**

**1** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van een tweedegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ nooit buigpunten heeft.

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

f″ heeft geen tekenwissels, dus kan de grafiek van f geen buigpunten hebben.

**2** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van een derdegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ altijd juist één buigpunt heeft.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \iff x = -\dfrac{b}{3a}$ enkelvoudig nulpunt, dus tekenwissel, dus buigpunt

**3** Hoeveel buigpunten kan de grafiek van een vierdegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ hebben? Verklaar algebraïsch.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$D = 36b^2 - 4 \cdot 12a \cdot 2c = 36b^2 - 96ac$

- Als $D > 0$ dan heeft f″ twee enkelvoudige nulpunten, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten (want tekenwissel).
- Als $D = 0$ dan heeft f″ een dubbel nulpunt, dus is er geen tekenwissel. De grafiek van f heeft geen buigpunt.
- Als $D < 0$ dan heeft f″ geen nulpunten, geen tekenwissels en dus heeft de grafiek van f geen buigpunten.

**Opdracht 37 bladzijde 90**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ heeft een punt $P(a, f(a))$ waarbij $f'(a) = f''(a) = 0$.

**1** Bepaal de coördinaat van dit punt $P$.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \iff 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad \boxed{x = 1}$

$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$

$f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0 \overset{D=4}{\iff} \boxed{x = 1} \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{3}$

$f(1) = 1$

Het gevraagde punt is P(1,1).

**2** Welke van de volgende uitspraken zijn waar? Verklaar.

**a** In $P$ bereikt $f$ een maximum.

Dit is fout want 1 is een dubbel nulpunt van f′, dus is er geen tekenwissel en dus ook geen extremum.

**b** $P$ is een buigpunt van de grafiek van $f$.

Dit is juist want 1 is een enkelvoudig nulpunt van f″, dus is er een tekenwissel.
P is bijgevolg een buigpunt van de grafiek van f.

**c** De raaklijn aan de grafiek van $f$ in $P$ is horizontaal.

Dit is juist want $f'(1) = 0$.

**Opdracht 38 bladzijde 91**

**1** In welk punt van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 10$ is de helling maximaal?

De helling is maximaal als $f''(x) = 0$ en als f″ overgaat van + naar –.

$f'(x) = -3x^2 + 24x$

$f''(x) = -6x + 24$

$f''(x) = 0 \iff -6x = -24 \iff x = 4$

| x | | 4 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | – |
| f′(x) | ↗ | 48<br>max. | ↘ |

De helling is maximaal in P(4, 118).

**2** In welk punt van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^5 + 10x^2$ is de helling minimaal?

De helling is minimaal als f″(x) = 0 en als f″ overgaat van – naar +.

$f'(x) = 5x^4 + 20x$

$f''(x) = 20x^3 + 20$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| x | | −1 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | – | 0 | + |
| f′(x) | ↘ | −15<br>min. | ↗ |

De helling is minimaal in P(−1, 9).

**Opdracht 39 bladzijde 91**

De grafiek van $f: x \longmapsto ax^4 - 3x^3 - 12x^2 + 4x - 1$ heeft een buigpunt voor $x = 1$.

**1** Bepaal $a$.

$f'(x) = 4ax^3 - 9x^2 - 24x + 4$

$f''(x) = 12ax^2 - 18x - 24$

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12a - 18 - 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a = 42$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{7}{2}$$

**2** Bereken de $x$-coördinaat van het tweede buigpunt van de grafiek van $f$.

$f''(x) = 42x^2 - 18x - 24$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 42x^2 - 18x - 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad D = 121$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = -\frac{4}{7}$$

→ x-coördinaat van het tweede buigpunt van de grafiek van f

**Opdracht 40 bladzijde 91**

Bepaal $a$ en $b$ zodanig dat $P(2, 0)$ een buigpunt is van de grafiek van $f: x \longmapsto x^3 + ax^2 + bx$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a \;\rightarrow\;$ 1 nulpunt met tekenwissel

$P(2, 0)$ is buigpunt

$f''(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12 + 2a = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{a = -6}$

$f(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 8 + 4a + 2b = 0 \;\Leftrightarrow\; 2b = -4a - 8$

$\Leftrightarrow\; b = -2a - 4$

$\Leftrightarrow\; \boxed{b = 8}$

**Opdracht 41 bladzijde 91**

Aan welke voorwaarden moeten de parameters $p$ en $q$ voldoen opdat de grafiek van $f: x \longmapsto x^4 + px^3 + qx^2$ juist twee, juist één of geen buigpunt(en) zou hebben?

$f'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 2qx$

$f''(x) = 12x^2 + 6px + 2q$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 + 6px + 2q = 0$

$\Leftrightarrow\; 6x^2 + 3px + q = 0$

$D = 9p^2 - 24q$

$= 3(3p^2 - 8q)$

De functie bereikt twee buigpunten als $3p^2 - 8q > 0$ en geen buigpunten als $3p^2 - 8q \leqslant 0$.

**Opdracht 42 bladzijde 91**

Bewijs dat het buigpunt van de veeltermfunctie van de derde graad $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ steeds een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van $f$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

buigpunt: $\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d\right)$

We verschuiven de grafiek over $\vec{v}\left(\dfrac{b}{3a}, \dfrac{-2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a} - d\right)$ en verkrijgen de functie g met

$$g(x) = a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d$$

$$= a\left(x^3 - \frac{3b}{3a}x^2 + \frac{3b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(x^2 - \frac{2b}{3a}x + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cx - \cancel{\frac{bc}{3a}} + \cancel{d} - \frac{2b^3}{27a^2} + \cancel{\frac{bc}{3a}} \cancel{-d}$$

$$= ax^3 \cancel{-bx^2} + \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + \cancel{bx^2} - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{2b^3}{27a^2}$$

$$= ax^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)x \underbrace{- \frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{2b^3}{27a^2}}_{=0}$$

$= ax^3 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x \;\rightarrow\;$ g is een oneven functie $\Rightarrow$ de grafiek van g heeft de oorsprong als symmetriemiddelpunt

$\Rightarrow$ de grafiek van f heeft het buigpunt als symmetriemiddelpunt

**Opdracht 43 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema en buigpunten).

**1** $f: x \mapsto -x^3 + 9x$

$f'(x) = -3x^2 + 9$

$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{3}$

$f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$

| x | | $-\sqrt{3}$ | | 0 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − |
| f(x) | ↘ | −10,392 | ↗ | 0 | ↗ | 10,392 | ↘ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | |

**2** $f: x \mapsto 32x - x^4$

$f'(x) = 32 - 4x^3$

$f'(x) = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$

$f''(x) = -12x^2$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ (dubbel)

| x | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | − | 0 | − | − | − |
| f(x) | ↗ | 0 | ↗ | 48 | ↘ |
| | | | | max. | |

**3** $f: x \mapsto (x^2 - 4)^2$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x) = 0 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{of} \quad x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

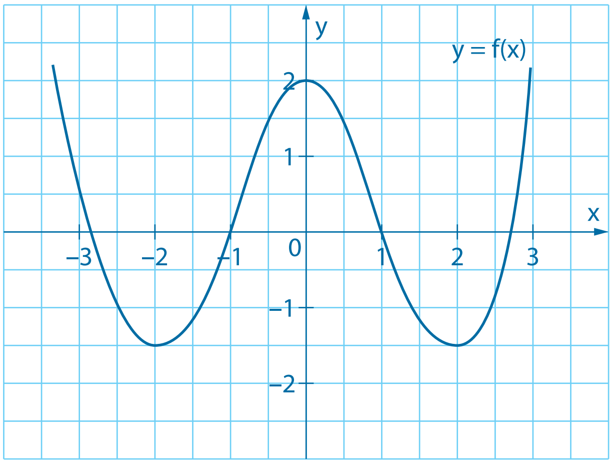
| x | | −2 | | $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ | | 0 | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↗ | 7,111 | ↗ | 16 | ↘ | 7,111 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 44 bladzijde 92**

Maak telkens een schets van een mogelijke grafiek van een functie *f* waarvan het tekenverloop van de eerste en de tweede afgeleide gegeven is.

**1**

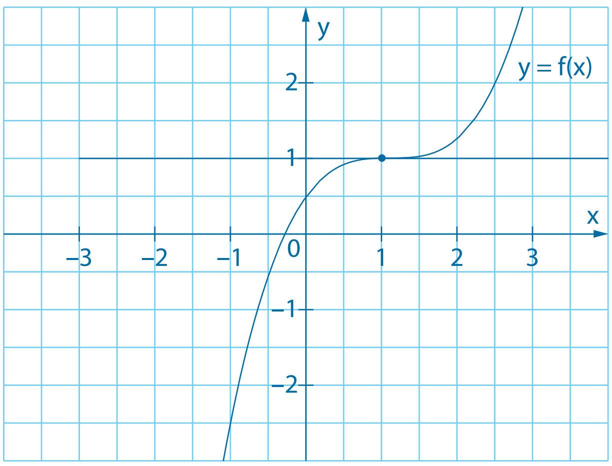
| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |




**2**

| $x$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| | | bgpt. | |

horizontale buigraaklijn, want f′(x) = 0



**Opdracht 45 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema en buigpunten).

**1** $f: x \mapsto -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-4x^2 - 2x + 2) = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-4$ | $-6$ | $0$ | $2$ |
| $-1$ | | $4$ | $2$ | $-2$ |
| | $-4$ | $-2$ | $2$ | $0$ |

$D = 36$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -12x^2 - 12x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $f''(x)$ | − | 0 | + | 0 | − | − | − |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | 1,6875 | ↘ |
| | | bgpt. | | bgpt. | | max. | |

**2** $f: x \mapsto x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 80x - 80$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(5x^2 - 20x + 20) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{(dubbel)}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $5$ | $-20$ | $0$ | $80$ | $-80$ |
| $-2$ | | $-10$ | $60$ | $-120$ | $80$ |
| | $5$ | $-30$ | $60$ | $-40$ | $0$ |
| $2$ | | $10$ | $-40$ | $40$ | |
| | $5$ | $-20$ | $20$ | $0$ | |

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 80$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{(dubbel)}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-3$ | $0$ | $4$ |
| $-1$ | | $-1$ | $4$ | $-4$ |
| | $1$ | $-4$ | $4$ | $0$ |
| $2$ | | $2$ | $-4$ | |
| | $1$ | $-2$ | $0$ | |

| x | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | − | − | − | 0 | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 256 | ↘ | 162 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 46 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de veeltermfuncties in functie van de reële parameter $m$.

**1** $f: x \longmapsto -x^2 + mx - 8$

$f'(x) = -2x + m$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

$$f\left(\frac{m}{2}\right) = -\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} - 8 = \frac{m^2}{4} - 8$$

| $x$ | | $\frac{m}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{m^2}{4} - 8$ | $\searrow$ |
| | | max. | |

$f''(x) = -2$ geen nulpunten, de grafiek is altijd bol

| $x$ | |
|---|---|
| $f''(x)$ | − |
| $f(x)$ | $\frown$ |

Samenvattende tabel

| $x$ | | $\frac{m}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f''(x)$ | − | − | − |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{m^2}{4} - 8$ | $\searrow$ |
| | | max. | |

**2** $f: x \mapsto x^3 + mx^2$

$f'(x) = 3x^2 + 2mx$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -\frac{2m}{3}$

- $m > 0$

| $x$ | | $-\frac{2m}{3}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{4m^3}{27}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | min. | |

$$f\left(-\frac{2m}{3}\right) = \left(-\frac{2m}{3}\right)^3 + m\left(-\frac{2m}{3}\right)^2$$

$$= -\frac{8m^3}{27} + \frac{4m^3}{9} = \frac{4m^3}{27}$$

$f(0) = 0$

- $m = 0$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

- $m < 0$

| $x$ | | $0$ | | $-\frac{2m}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{4m^3}{27}$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | min. | |

$f''(x) = 6x + 2m$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{m}{3}$

| $x$ | | $-\frac{m}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $\frac{2m^3}{27}$ | $\smile$ |
| | | bgpt. | |

$$f\left(-\frac{m}{3}\right) = \left(-\frac{m}{3}\right)^3 + m\left(-\frac{m}{3}\right)^2$$

$$= -\frac{m^3}{27} + \frac{m^3}{9} = \frac{2m^3}{27}$$

## Samenvattende tabellen

- $m > 0$

| $x$ | | $-\frac{2m}{3}$ | | $-\frac{m}{3}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{4m^3}{27}$ | $\searrow$ | $\frac{2m^3}{27}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

- $m = 0$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| | | bgpt. | |

- $m < 0$

| $x$ | | $0$ | | $-\frac{m}{3}$ | | $-\frac{2m}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{2m^3}{27}$ | $\searrow$ | $\frac{4m^3}{27}$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

**3** $f: x \longmapsto x^3 - 4x^2 + mx - 4$

- $f'(x) = 3x^2 - 8x + m$

  $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 8x + m = 0 \qquad D = 64 - 12m$

  * $D > 0 \iff m < \dfrac{16}{3}$

  $$x = \frac{8 + \sqrt{64 - 12m}}{6} \quad \text{of} \quad x = \frac{8 - \sqrt{64 - 12m}}{6}$$

  $$\iff x = \frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}$$

| x | | $\frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}$ | | $\frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $f\left(\frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}\right)$ | ↘ | $f\left(\frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3}\right)$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

  * $D = 0 \iff m = \dfrac{16}{3}$

  $x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

| x | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + |
| f(x) | ↗ | –1,630 | ↗ |
| | | bgpt. | |

  * $D < 0 \iff m > \dfrac{16}{3}$

  geen oplossing voor $f'(x) = 0$

| x | |
|---|---|
| f′(x) | + |
| f(x) | ↗ |

- $f''(x) = 6x - 8$

  $f''(x) = 0 \iff x = \dfrac{4}{3}$

| $x$ | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $f\left(\frac{4}{3}\right)$<br>bgpt. | $\cup$ |

- Samenvattende tabellen

* $m < \dfrac{16}{3}$

| $x$ | | $\frac{4-\sqrt{16-3m}}{3}$ | | $\frac{4}{3}$ | | $\frac{4+\sqrt{16-3m}}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | | max. | | bgpt. | | min. | |

* $m = \dfrac{16}{3}$

| $x$ | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | bgpt. | |

(horizontale buigraaklijn)

* $m > \dfrac{16}{3}$

| $x$ | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | bgpt. | |

(schuine buigraaklijn)

**Opdracht 47 bladzijde 92**

Gegeven de familie functies met voorschrift $f(x) = x^3 + mx^2$ waarbij $m \neq 0$.
Elk van deze functies heeft twee relatieve extrema waarvan er één zich voordoet bij $x = 0$.

Bepaal een vergelijking van de kromme waarop alle andere extrema liggen.

$f'(x) = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

Daar $m \neq 0$ heeft $f'$ twee verschillende nulpunten, nl. 0 en $-\frac{2}{3}m$, met tekenwissel.

De functie f heeft dus twee relatieve extrema, voor $x = 0$ en voor $x = -\frac{2}{3}m$.

Als $x = -\frac{2}{3}m$ dan is $f(x) = -\frac{8}{27}m^3 + \frac{4}{9}m^3 = \frac{4}{27}m^3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}m\right)^3$.

Als $x = 0$, dan is $f(x) = 0 = -\frac{1}{2}0^3$.

De relatieve extrema liggen op de kromme met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x^3$.

**Opdracht 48 bladzijde 93**

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto x^3 + x^2 - (2m - 1)x$ met $m$ een reële parameter.

**1** Voor welke waarde van $m$ geldt dat de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $P(1,\ y)$ als richtingscoëfficiënt 1 heeft?

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2m + 1$

$f'(1) = 3 + 2 - 2m + 1 = 6 - 2m$

$6 - 2m = 1 \iff m = \frac{5}{2}$

**2** Voor welke waarden van $m$ heeft $f$ geen extrema?

De functie bereikt geen extrema als $f'(x)$ geen tekenverandering ondergaat, m.a.w. de discriminant van $3x^2 + 2x - 2m + 1$ moet kleiner of gelijk zijn aan nul.

$D = 4 - 12(-2m + 1) = 8(3m - 1)$

Nu is $8(3m - 1) \leqslant 0$ als en slechts als $m \leqslant \frac{1}{3}$.

**3** Voor welke waarden van $m$ snijdt de grafiek van $f$ de $x$-as in drie verschillende punten?

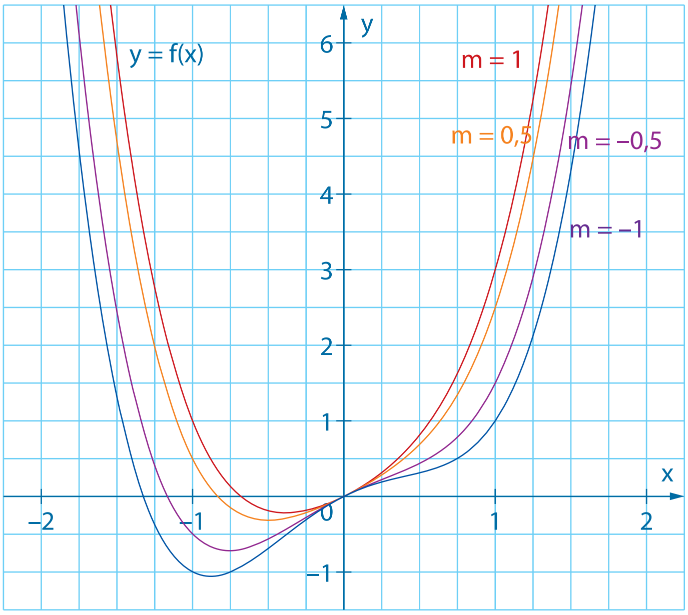
De functie $f(x) = x(x^2 + x - 2m + 1)$ heeft drie verschillende nulpunten als de discriminant van $x^2 + x - 2m + 1$ strikt positief is en $x = 0$ geen oplossing is van $x^2 + x - 2m + 1 = 0$.

Dus moet $1 - 4(1 - 2m) > 0$ en $-2m + 1 \neq 0$; m.a.w. $m > \frac{3}{8}$ en $m \neq \frac{1}{2}$.

**Opdracht 49 bladzijde 93**

Beschouw de familie van veeltermfuncties met voorschrift $f(x) = x^4 + mx^2 + x$ ($m$ is een reële parameter).

Plot enkele functies die behoren tot deze familie om na te gaan welke vormen mogelijk zijn.




**1** Bepaal de waarde van $m$ waarvoor het aantal buigpunten wijzigt.

$f'(x) = 4x^3 + 2mx + 1$

$f''(x) = 12x^2 + 2m = 2(6x^2 + m)$

$f''(x) = 0 \iff x^2 = -\dfrac{m}{6}$

Voor $m \geqslant 0$ zijn er geen buigpunten en voor $m < 0$ zijn er twee buigpunten.

Het aantal buigpunten wijzigt bij $m = 0$.

**2** Er is een andere waarde van $m$ waarvoor het aantal relatieve extrema wijzigt.

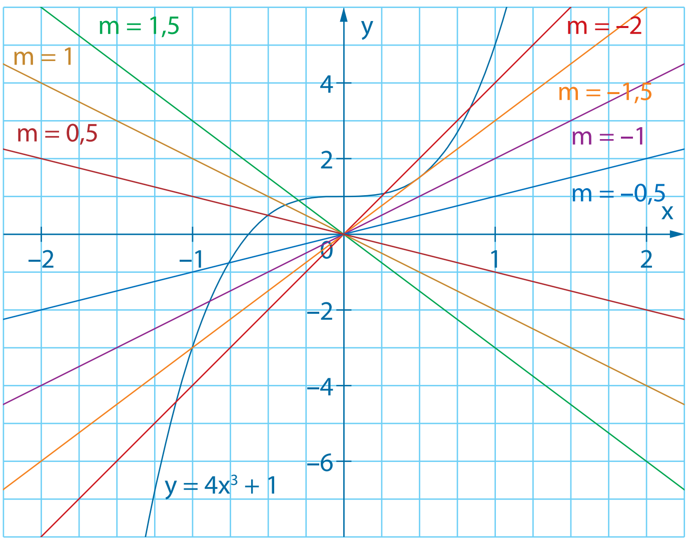
Bepaal deze waarde van $m$.

$f'(x) = 0 \iff 4x^3 + 2mx + 1 = 0$

$\iff 4x^3 + 1 = -2mx$

We onderzoeken het aantal snijpunten van $y = 4x^3 + 1$ en $y = -2mx$ in functie van m.

De raaklijn $y = -2mx$ aan $g(x) = 4x^3 + 1$ bepaalt de overgang van 1 naar 3 snijpunten.



Noem het raakpunt $P(x_0, y_0)$ en de raaklijn t, dan is rico $t = g'(x_0)$, dus $-2m = 12x_0^2$. (1)
Bovendien is:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= -2mx_0 \\ y_0 &= 4x_0^3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2mx_0 = 4x_0^3 + 1 \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $12x_0^3 = 4x_0^3 + 1 \iff x_0 = \frac{1}{2}$,

zodat $m = -6x_0^2 = -6 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$.

Bij $m = -\frac{3}{2}$ wijzigt het aantal extrema.

**Opdracht 50 bladzijde 93**

Bespreek het verloop van de functie (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema, buigpunten).

**1** $f\colon x \mapsto x^5 + x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ (dubbel) of $5x^2 + 3 = 0$ → geen oplossingen

$f''(x) = 20x^3 + 6x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ of $20x^2 + 6 = 0$ → geen oplossingen

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + |
| f″(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 0 | ↗ |
| | | bgpt. | |

**2** $f\colon x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 1$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ (dubbel) of $x = 1$

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$

| x | | 0 | | $\frac{2}{3}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | + | 0 | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↘ | 1 | ↘ | $\frac{11}{27}$ | ↘ | 0 | ↗ |
| | | bgpt. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 51 bladzijde 93**

Gegeven zijn de grafieken van vier functies die elk aan één van de volgende reeks voorwaarden voldoen.
Welke voorwaarden horen bij welke grafiek?

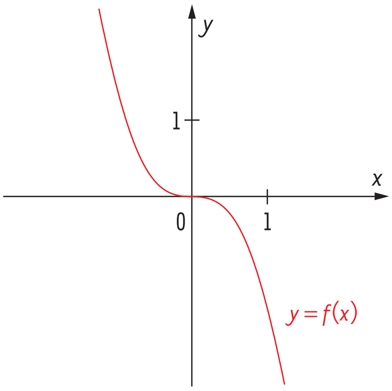
**a** $f'(0) = 0;\ f''(0) < 0$

**b** $f'(0) > 0;\ f''(0) > 0$

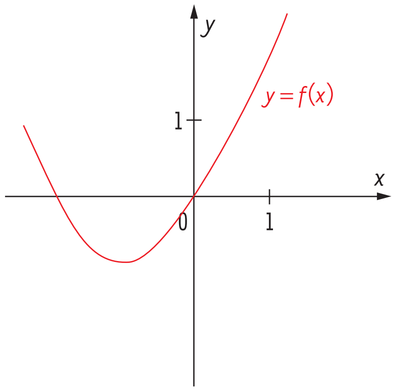
**c** $f'(0) > 0;\ f''(0) = 0$

**d** $f'(0) = 0;\ f''(0) = 0$

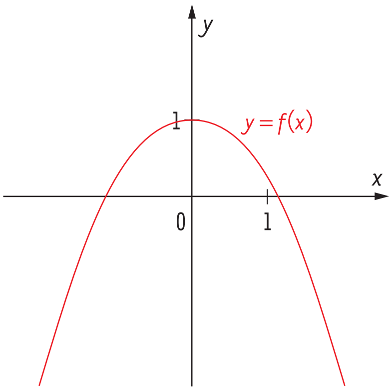
**1**



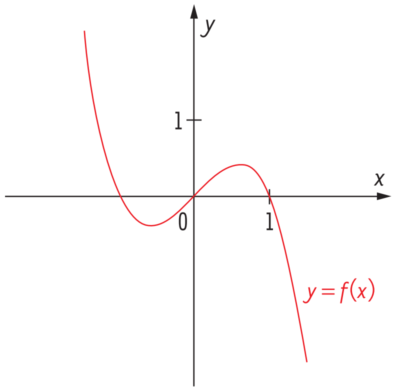

**2**



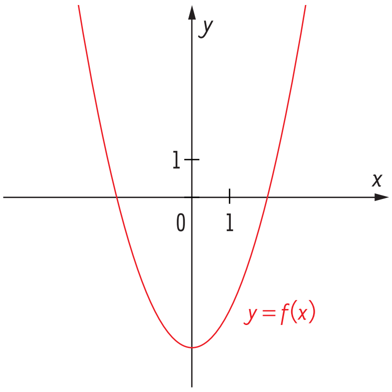

**3**



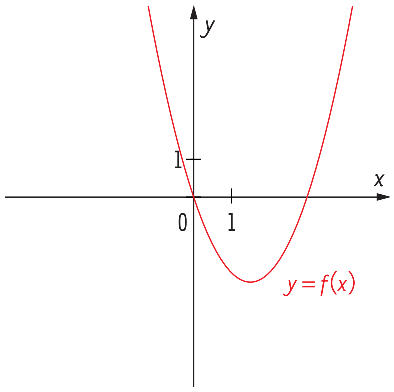

**4**




**5**




**6**




a → grafiek 3

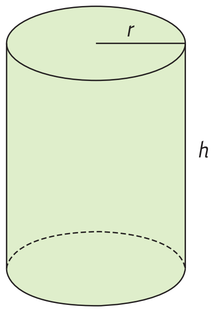
b → grafiek 2

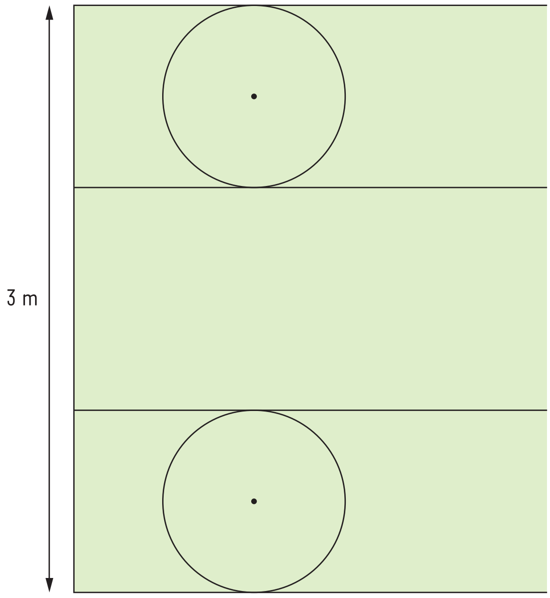
c → grafiek 4

d → grafiek 1

**Opdracht 52 bladzijde 94**

Een cilindervormig blik met straal *r* (in m) en hoogte *h* (in m) wordt gesneden uit een plaat met hoogte 3 m zoals op de figuur is weergegeven.




**1** Geef de formule die de inhoud *I* van het blik weergeeft in functie van de straal *r*.

Verband tussen r en h:

$4r + h = 3$

$\Leftrightarrow \; h = 3 - 4r$

$I = \pi r^2 h = \pi r^2(3 - 4r) = 3\pi r^2 - 4\pi r^3$

**2** Voor welke waarde van de straal is de inhoud van het blik maximaal?

$I'(r) = 6\pi r - 12\pi r^2 = 6\pi r(1 - 2r)$

$I'(r) = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 0 \quad \text{of} \quad r = \frac{1}{2}$

| r | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| I′(r) | – | 0 | + | 0 | – |
| I(r) | | | ↗ | max. | ↘ |

De inhoud van het blik is maximaal als de straal gelijk is aan 0,5 m.

**3** Wat is deze maximale inhoud?

De maximale inhoud is dan $3\pi \cdot \frac{1}{4} - 4\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ dus $\frac{\pi}{4}$ m$^3$ of ongeveer 0,79 m$^3$.

**Opdracht 53 bladzijde 94**

Bepaal een vergelijking van de rechte evenwijdig met de $x$-as die precies drie punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$.

We bekijken het verloop van de functie f.

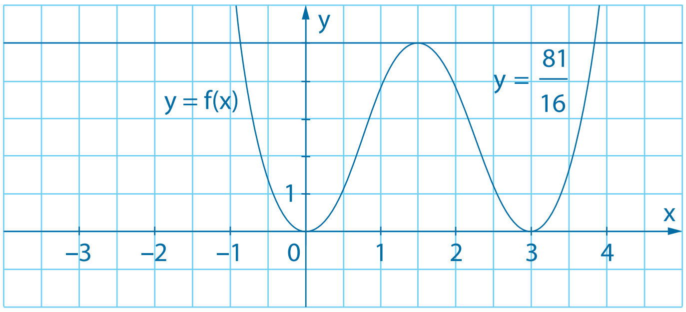
$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 18x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad 2x^2 - 9x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{of} \quad x = 3$

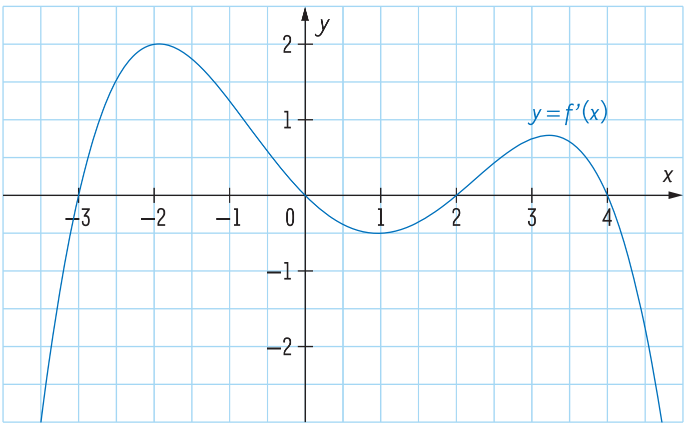
| x | | 0 | | $\frac{3}{2}$ | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{81}{16}$ | ↘ | 0 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

De rechte met vergelijking $y = \frac{81}{16}$ zal precies drie punten gemeen hebben met de grafiek van f.




**Opdracht 54 bladzijde 96**

De hellinggrafiek van een functie $f$ is gegeven.




**1** Bij $x = -3$ heeft de grafiek van $f$ een extremum. Is dit een maximum of een minimum? Verklaar.

Dit extremum is een relatief minimum want f′ gaat voor x = –3 over van negatieve naar positieve waarden en de functie f dus van dalen naar stijgen.

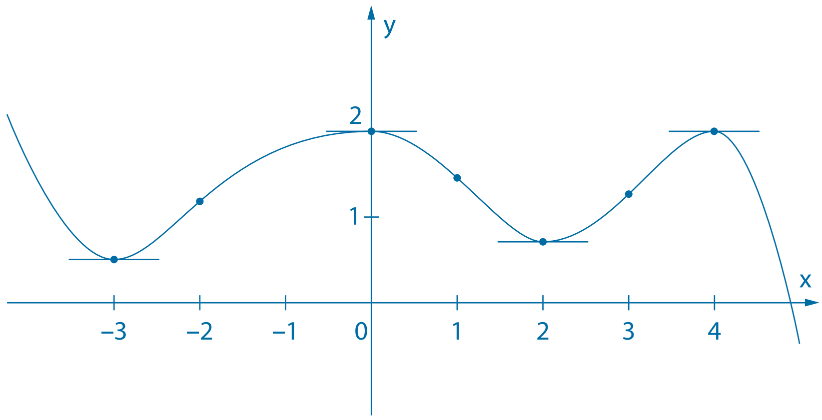
**2** Wat weet je van de grafiek van $f$ bij $x = 0$?

Bij $x = 0$ gaat de functie $f'$ over van positieve naar negatieve waarden en de functie $f$ gaat er over van stijgen naar dalen. De functie $f$ bereikt een relatief maximum voor $x = 0$.

**3** Bij $x = 1$ bereikt de grafiek van $f'$ een relatief minimum. Wat betekent dat voor de grafiek van $f$?

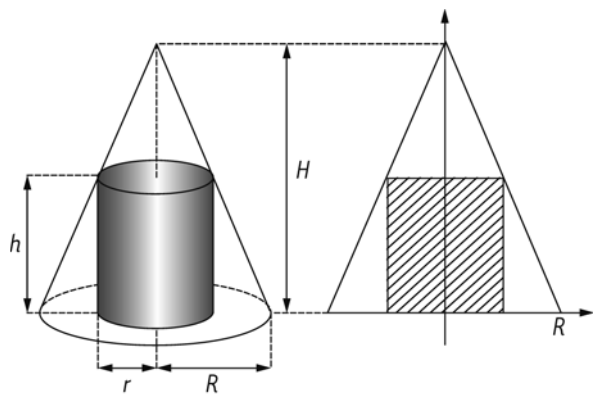
Dit betekent dat $f''$ overgaat van negatieve naar positieve waarden en dat dus de grafiek van $f$ overgaat van bol naar hol. De funcie $f$ bereikt een buigpunt in $P(1, f(1))$.

**4** Schets een mogelijke grafiek van $f$ als je weet dat $f(0) = f(4) = 2$.

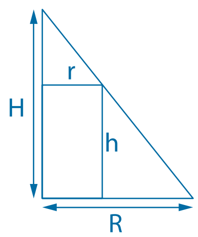



**Opdracht 55 bladzijde 96**

Een cilinder met straal $r$ en hoogte $h$ is beschreven in een kegel met hoogte $H$ en straal $R$.
In de figuur is een ruimtelijke voorstelling en een doorsnede getekend.




**1** Toon aan dat het volume van de cilinder gelijk is aan $V = \pi r^2 H - \dfrac{\pi r^3 H}{R}$.




$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{R-r}{R} \cdot H$$

$$\begin{aligned} V_{cilinder} &= \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 \frac{R-r}{R} \cdot H \\ &= \frac{\pi r^2 RH}{R} - \frac{\pi r^3 H}{R} \\ &= \pi r^2 H - \frac{\pi r^3 H}{R} \end{aligned}$$

**2** Wat is de verhouding van het volume van de kegel en het volume van de cilinder als het volume van de cilinder maximaal is?

$$V'(r) = \pi 2rH - \frac{\pi 3r^2H}{R}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\pi}2r\cancel{H} - \frac{\cancel{\pi}3r^2\cancel{H}}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left(2 - \frac{3r}{R}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \text{of} \quad r = \frac{2R}{3}$$

$$V_{\text{cilinder maximaal}} = \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 \frac{\left(R - \frac{2R}{3}\right)H}{R}$$

$$= \pi \frac{4R^2}{9} \frac{\frac{1}{3}\cancel{R}H}{\cancel{R}}$$

$$= \frac{4}{9}\frac{\pi R^2H}{3}$$

$$V_{\text{kegel}} = \frac{\pi R^2H}{3}$$

$$\frac{V_{\text{kegel}}}{V_{\text{cilinder maximaal}}} = \frac{\frac{\pi R^2H}{3}}{\frac{4}{9}\frac{\pi R^2H}{3}} = \frac{9}{4}$$

**Opdracht 56 bladzijde 96**

Bespreek het verloop van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2$ in functie van de reële parameter $m$.

- $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx$

  $= 2x(2x^2 + 6x + m)$

  $\downarrow$

  $D = 36 - 8m$

  – $D < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{2}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 0<br>min. | ↗ |

  – $D = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = -\frac{3}{2}$ (dubbel)

| x | | $-\frac{3}{2}$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ | ↘ | 0<br>min. | ↗ |

  – $D > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{-3-\sqrt{9-2m}}{2} \text{ of } x = \frac{-3+\sqrt{9-2m}}{2}$

  $m < 0$

| x | | $\frac{-3-\sqrt{9-2m}}{2}$ | | 0 | | $\frac{-3+\sqrt{9-2m}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

$m = 0$

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

$0 < m < \dfrac{9}{2}$

| $x$ | | $\dfrac{-3-\sqrt{9-2m}}{2}$ | | $\dfrac{-3+\sqrt{9-2m}}{2}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

- $f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m \;\rightarrow\; D = 576 - 96\,m = 96(6 - m)$

  – $D < 0 \;\Leftrightarrow\; m > 6$

| $x$ | |
|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ |

  – $D = 0 \;\Leftrightarrow\; m = 6$

  $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $3$ | $\cup$ |

  – $D > 0 \;\Leftrightarrow\; m < 6$

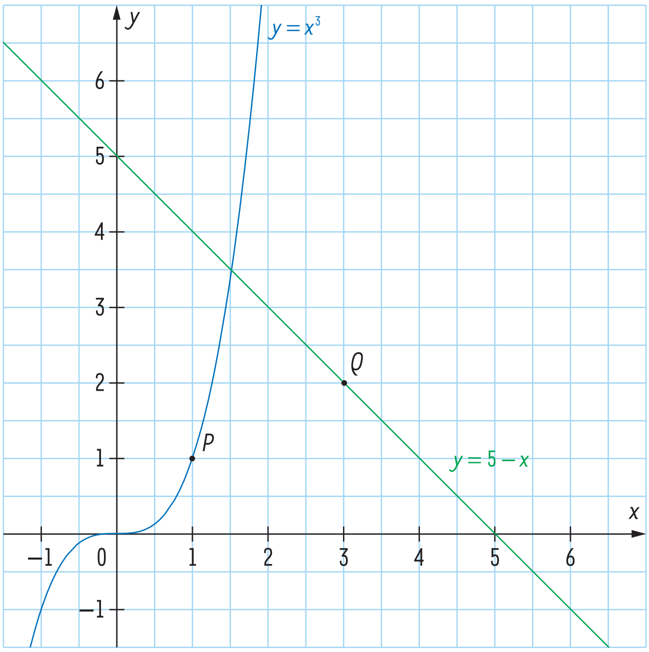
  $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-6-\sqrt{36-6m}}{6}$ of $x = \dfrac{-6+\sqrt{36-6m}}{6}$

| $x$ | | $\dfrac{-6-\sqrt{36-6m}}{6}$ | | $\dfrac{-6+\sqrt{36-6m}}{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | bgpt. | $\cap$ | min. | $\cup$ |

**Opdracht 57 bladzijde 97**

De krommen met vergelijking $y = x^3$ en $y = 5 - x$ stellen twee wegen voor, die verbonden moeten worden door een derde weg tussen de punten $P$ en $Q$.
De verbindingsweg is een veeltermfunctie van de derde graad die raakt aan de krommen in de verbindingspunten.

Bepaal het voorschrift van deze functie.




$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(1) = 1 \iff a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 \iff 3a + 2b + c = 3$

$f(3) = 2 \iff 27a + 9b + 3c + d = 2$

$f'(3) = -1 \iff 27a + 6b + c = -1$

$a = \frac{1}{4}$

$b = -\frac{5}{2}$

$c = \frac{29}{4}$

$d = -4$

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{29}{4}x - 4$