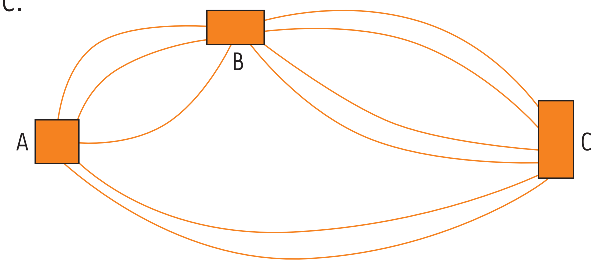
Hoofdstuk 1

Telproblemen

Opdracht 1 bladzijde 8

Bekijk het wegendiagram tussen de steden A, B en C.

Hoeveel routes zijn er tussen A en C?



Je kunt op 3 manieren van A naar B. Na elke weg van A naar B kun je kiezen uit 4 wegen om naar C te gaan. In totaal kun je dus op $3 \cdot 4 = 12$ manieren van A naar C via B.

Er zijn nog 2 rechtstreekse wegen van A naar C.

In totaal zijn er $12 + 2 = 14$ routes tussen A en C.

Opdracht 2 bladzijde 11

Een autofabrikant biedt zeven verschillende modellen aan. Voor elk model kunnen we kiezen uit vijf kleuren en drie soorten binnenbekleding.

Uit hoeveel verschillende wagens kunnen we kiezen?

model	kleur	binnenbekleding
↓	↓	↓
7	5	3

Het totaal aantal keuzemogelijkheden is $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$.

Opdracht 3 bladzijde 11

Hoeveel natuurlijke getallen van drie cijfers zijn er waarbij het cijfer van de eenheden kleiner is dan 8, dat van de tientallen even en dat van de honderdtallen een priemgetal?

honderdtallen	tientallen	eenheden
↓	↓	↓
4	5	8
(2, 3, 5, 7)	(0, 2, 4, 6, 8)	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

Het totaal aantal keuzemogelijkheden is $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$.

Opdracht 4 bladzijde 11

Een restaurant biedt een dagmenu aan voor een vaste prijs. Bij het voorgerecht kun je kiezen uit de dagsoep of een slaatje. Als hoofdgerecht serveert men vlees of vis of een vegetarisch alternatief. Voor het dessert is er gebak of pudding of een ijsje. In plaats van het dessert kun je ook een koffie of thee nemen.

Hoeveel verschillende dagmenu's kun je hiermee samenstellen?

voorgerecht	hoofdgerecht	dessert	of	voorgerecht	hoofdgerecht	koffie/thee
↓	↓	↓		↓	↓	↓
2	3	3		2	3	2

Het totaal aantal keuzemogelijkheden is $2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 18 + 12 = 30$.

Opdracht 5 bladzijde 11

Een palindroom is een woord dat hetzelfde blijft als je het van links naar rechts of van rechts naar links leest. Enkele voorbeelden: pop, negen, meetsysteem … Ook getallen zoals 101, 2002, 123 321 … voldoen aan deze eigenschap.

Hoeveel van die getallen liggen tussen 10 en 1000?

1ste cijfer	2de cijfer	of	1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓		↓	↓	↓
9	1		9	10	1
(het 1ste cijfer kan geen 0 zijn)	(het 2de cijfer moet gelijk zijn aan het 1ste)		(het 1ste cijfer kan geen 0 zijn)	(het 2de cijfer mag eender welk cijfer zijn)	(het 3de cijfer moet gelijk zijn aan het 1ste)

Het aantal getallen bestaande uit twee cijfers is $9 \cdot 1 = 9$.

Het aantal getallen van drie cijfers is $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$.

Het totaal aantal mogelijke getallen is $9 + 90 = 99$.

Opdracht 6 bladzijde 12

De pincode van een gsm bestaat uit vier cijfers.

Hoeveel dergelijke pincodes zijn er?

Elk cijfer kan op elke plaats voorkomen.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer
↓	↓	↓	↓
10	10	10	10

Er zijn $10^4 = 10\,000$ mogelijke pincodes.

Opdracht 7 bladzijde 13

Vier personen mogen elk een dessert kiezen uit een buffet dat nog voldoende aantallen bevat van appeltaart, rijstpap en bekertjes fruitsalade.

1 Verklaar waarom deze keuze een herhalingsvariatie is.

Stel A = appeltaart, R = rijstpap, F = fruitsalade.

Bij deze keuze is herhaling toegelaten: er zijn voldoende aantallen van elk soort dessert, zodat meerdere personen eenzelfde keuze kunnen maken, bijvoorbeeld ARFR.

De volgorde is van belang: zo is ARFR $\neq$ AFRR, omdat de tweede en derde persoon hierbij een ander dessert krijgen.

2 Geef het aantal keuzemogelijkheden.

1ste persoon	2de persoon	3de persoon	4de persoon
↓	↓	↓	↓
3	3	3	3

Er zijn $\overline{V}_3^4 = 3^4 = 81$ keuzemogelijkheden.

Opdracht 8 bladzijde 13

In een geheugenplaats van een computer is plaats voor 32 bits (bit = binary digit = 0 of 1).

Hoeveel verschillende binaire getallen kunnen we in deze geheugenplaats voorstellen?

1ste bit	2de bit	...	32ste bit
↓	↓		↓
2	2	...	2

We kunnen $\overline{V}_2^{32} = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ binaire getallen voorstellen.

Opdracht 9 bladzijde 13

In november 2010 werd de nummerplaat naar Europees model ingevoerd in België.

Deze nummerplaat bestaat uit een indexcijfer gekozen uit de cijfers 1 tot en met 7, gevolgd door drie letters en nadien drie cijfers.

1 Hoeveel dergelijke nummerplaten kunnen er uitgereikt worden?

indexcijfer	1ste letter	2de letter	3de letter	1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7	26	26	26	10	10	10

Er kunnen $7 \cdot \overline{V}_{26}^3 \cdot \overline{V}_{10}^3 = 7 \cdot 26^3 \cdot 10^3 = 123\,032\,000$ nummerplaten uitgereikt worden.

2 Bepaalde lettercombinaties worden geweerd. In België heeft de Dienst voor Inschrijvingen van Voertuigen (DIV) hiervoor een lijst van 100 lettercombinaties waarop onder andere afkortingen van politieke partijen en scheldwoorden in de drie landstalen vermeld staan.

Hoeveel mogelijke nummerplaten worden zo geweerd?

Er worden zo $7 \cdot 100 \cdot 10^3 = 700\,000$ nummerplaten geweerd.

Opdracht 10 bladzijde 13

Een pincode bestaat uit vier cijfers.

1 Hoeveel van deze codes beginnen met 1 en eindigen op 9?

1ste cijfer ↓ 1	2de cijfer ↓ 10	3de cijfer ↓ 10	4de cijfer ↓ 1
(1)	(elk cijfer is mogelijk)	(elk cijfer is mogelijk)	(9)

Er zijn $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 100$ mogelijkheden.

2 Hoeveel codes bevatten één keer het cijfer 0?

Volgende codes zijn mogelijk:

1ste cijfer ↓ 1	2de cijfer ↓ 9	3de cijfer ↓ 9	4de cijfer ↓ 9
(0)	(geen 0)	(geen 0)	(geen 0)

of

1ste cijfer ↓ 9	2de cijfer ↓ 1	3de cijfer ↓ 9	4de cijfer ↓ 9
(geen 0)	(0)	(geen 0)	(geen 0)

We verkrijgen een analoge situatie als het cijfer 0 op de 3de of 4de plaats staat.

Het totaal aantal mogelijke codes is $4 \cdot 9^3 = 2916$.

3 Je bent je pincode vergeten. Je weet wel dat ze het getal 35 bevat en dat de twee andere cijfers geen 3 en geen 5 zijn.

Hoeveel mogelijkheden blijven er over?

Mogelijke codes zijn:

1ste cijfer ↓	2de cijfer ↓	3de cijfer ↓	4de cijfer ↓
1	1	8	8
(3)	(5)	(geen 3 of 5)	(geen 3 of 5)

of

1ste cijfer ↓	2de cijfer ↓	3de cijfer ↓	4de cijfer ↓
8	1	1	8
(geen 3 of 5)	(3)	(5)	(geen 3 of 5)

of

1ste cijfer ↓	2de cijfer ↓	3de cijfer ↓	4de cijfer ↓
8	8	1	1
(geen 3 of 5)	(geen 3 of 5)	(3)	(5)

Het totaal aantal mogelijke codes is $3 \cdot 8^2 = 192$.

4 Hoeveel codes bevatten (minstens) een 3?

Bereken eerst het aantal mogelijke codes met vier cijfers: $\overline{V}_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$.

Bereken daarna het aantal codes zonder het cijfer 3: $\overline{V}_9^4 = 9^4 = 6561$.

Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: $10\,000 - 6561 = 3439$.

Er zijn 3439 codes die (minstens) een 3 bevatten.

Opdracht 11 bladzijde 14

10 stoelen staan naast elkaar op een rij.

1 Op hoeveel manieren kunnen 3 personen plaatsnemen op deze stoelen?

De eerste persoon kan kiezen uit 10 stoelen, de tweede uit 9 en de derde nog uit 8.

1ste persoon ↓	2de persoon ↓	3de persoon ↓
10	9	8

Er zijn $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ manieren waarop 3 personen kunnen plaatsnemen op 10 stoelen.

2 Op hoeveel manieren kunnen 10 personen hierop plaatsnemen?

1ste persoon ↓	2de persoon ↓	3de persoon ↓	...	9de persoon ↓	10de persoon ↓
10	9	8	...	2	1

Er zijn $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ manieren waarop 10 personen kunnen plaatsnemen op 10 stoelen.

Opdracht 12 bladzijde 16

Ons alfabet van 26 letters bevat zes klinkers: a, e, i, o, u en y. We spreken af dat elke opeenvolging van letters een 'woord' vormt.

1 Hoeveel verschillende woorden kun je vormen met vier verschillende klinkers?

1ste letter	2de letter	3de letter	4de letter
↓	↓	↓	↓
6	5	4	3

Er zijn $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ woorden met vier verschillende klinkers.

2 Hoeveel verschillende woorden kun je vormen met vier verschillende letters?

1ste letter	2de letter	3de letter	4de letter
↓	↓	↓	↓
26	25	24	23

Er zijn $V_{26}^4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$ woorden met vier verschillende letters.

Opdracht 13 bladzijde 16

Zeven leerlingen van een klasgroep moeten na elkaar mondeling examen geschiedenis afleggen.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze het rooster invullen?

uur	leerling
08.30 u	…
08.50 u	…
09.10 u	…
09.30 u	…
09.50 u	…
10.10 u	…
10.30 u	…

08.30u	08.50u	09.10u	09.30u	09.50u	10.10u	10.30u
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7	6	5	4	3	2	1

Ze kunnen dit rooster op $P_7 = 7! = 5040$ manieren invullen.

Opdracht 14 bladzijde 17

Met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5 en 6 vormen we getallen van vijf verschillende cijfers.

1 Hoeveel dergelijke getallen bestaan er?

1ste cijfer ↓ 6	2de cijfer ↓ 6	3de cijfer ↓ 5	4de cijfer ↓ 4	5de cijfer ↓ 3
(geen 0)	(0 wel mogelijk, maar verschillend van 1ste cijfer)	(verschillend van vorige cijfers)	(verschillend van vorige cijfers)	(verschillend van vorige cijfers)

Er bestaan $6 \cdot V_6^4 = 2160$ dergelijke getallen.

2 Hoeveel van deze getallen beginnen met het cijfer 3?

1ste cijfer ↓ 1	2de cijfer ↓ 6	3de cijfer ↓ 5	4de cijfer ↓ 4	5de cijfer ↓ 3
(3)				

$V_6^4 = 360$ van deze getallen beginnen met het cijfer 3.

3 Hoeveel van deze getallen eindigen op het cijfer 6?

1ste cijfer ↓ 5	2de cijfer ↓ 5	3de cijfer ↓ 4	4de cijfer ↓ 3	5de cijfer ↓ 1
(geen 0 of 6)	(0 wel mogelijk)			(6)

$5 \cdot V_5^3 = 300$ van deze getallen eindigen op het cijfer 6.

4 In hoeveel van deze getallen staan de cijfers 1, 2 en 3 in deze volgorde naast elkaar?

1ste cijfer ↓ 1	2de cijfer ↓ 1	3de cijfer ↓ 1	4de cijfer ↓ 4	5de cijfer ↓ 3
(1)	(2)	(3)		

of

1ste cijfer ↓ 3	2de cijfer ↓ 1	3de cijfer ↓ 1	4de cijfer ↓ 1	5de cijfer ↓ 3
(4, 5, 6)	(1)	(2)	(3)	(0 wel mogelijk, maar verschillend van 1ste cijfer)

of

1ste cijfer ↓ 3	2de cijfer ↓ 3	3de cijfer ↓ 1	4de cijfer ↓ 1	5de cijfer ↓ 1
(4, 5, 6)	(0 wel mogelijk, maar verschillend van 1ste cijfer)	(1)	(2)	(3)

Er zijn $4 \cdot 3 + 2 \cdot (3 \cdot 3) = 12 + 18 = 30$ mogelijkheden.

5 Hoeveel van deze getallen zijn even?

Deze getallen zijn even als ze eindigen op 0 of 2 of 4 of 6.

1ste cijfer ↓ 6	2de cijfer ↓ 5	3de cijfer ↓ 4	4de cijfer ↓ 3	5de cijfer ↓ 1
				(0)

of

1ste cijfer ↓ 5	2de cijfer ↓ 5	3de cijfer ↓ 4	4de cijfer ↓ 3	5de cijfer ↓ 1
(geen 0 of 2)	(0 wel mogelijk)			(2)

We verkrijgen een analoge situatie als het cijfer 4 of 6 op de 5de plaats staat.

Het totaal aantal mogelijke getallen is $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 360 + 3 \cdot 300 = 1260$.

6 Hoeveel van deze getallen zijn kleiner dan 40 000?

Deze getallen zijn kleiner dan 40 000 als ze 1 of 2 of 3 als eerste cijfer hebben.

1ste cijfer ↓ 3	2de cijfer ↓ 6	3de cijfer ↓ 5	4de cijfer ↓ 4	5de cijfer ↓ 3
(1, 2, 3)				

Het aantal mogelijke getallen is $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$.

Opdracht 15 bladzijde 17

Op een boekenrek staan zes romans, twee gedichtenbundels en vijf detectiveverhalen. Je wil deze boeken herschikken zodat de gedichtenbundels achteraan komen; de overige boeken mogen willekeurig geplaatst worden.

Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk?

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	...	11de plaats	12de plaats	13de plaats
↓	↓	↓		↓	↓	↓
11	10	9	...	1	2	1
romans en detectiveverhalen					gedichtenbundels	

Er zijn $11! \cdot 2! = 79\,833\,600$ rangschikkingen mogelijk.

Opdracht 16 bladzijde 17

Vereenvoudig zonder rekentoestel.

1 $\frac{8!}{7!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8$

2 $\frac{4!}{6!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$

3 $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

4 $\frac{0!}{1!} = \frac{1}{1} = 1$

Opdracht 17 bladzijde 17

Bepaal het kleinste gemeen veelvoud van 4! en 6!.

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$

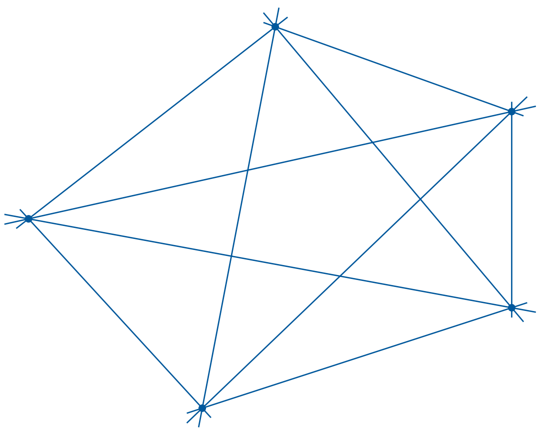
6! is dus het kleinste gemeen veelvoud van 4! en 6!.

Opdracht 18 bladzijde 18

Hoeveel rechten kun je tekenen door vijf verschillende punten waarvan er geen drie op eenzelfde rechte liggen?

We kunnen zo 10 rechten tekenen.

Merk op: $10 = \frac{20}{2} = \frac{V_5^2}{2}$. We kiezen 2 verschillende punten uit 5 (V_5^2), maar delen het aantal nadien door 2 omdat bv. rechte AB = rechte BA.



Opdracht 19 bladzijde 20

Een speler trekt 13 kaarten uit een spel van 52 kaarten.

1 Verklaar waarom deze trekking een combinatie voorstelt.

Bij een dergelijke trekking is herhaling niet mogelijk. Bovendien is de volgorde niet van belang, omdat bij verwisseling van positie het dezelfde kaarten blijven waarmee je kunt spelen.

2 Op hoeveel manieren kan deze trekking gebeuren?

Er zijn $C_{52}^{13} = \dfrac{52\,!}{13\,!\;39\,!} = 6{,}350 \cdot 10^{11}$ mogelijke trekkingen.

Opdracht 20 bladzijde 21

Voor deelname aan een interscolaire wedstrijd wordt uit een klas van 12 leerlingen een ploeg van 5 geselecteerd.

1 Op hoeveel manieren kan deze selectie gebeuren?

Op $C_{12}^{5} = \dfrac{12\,!}{5\,!\;7\,!} = 792$ mogelijke manieren.

2 Op hoeveel manieren kan deze selectie gebeuren als twee vooraf bepaalde leerlingen zeker tot de ploeg moeten behoren?

Er moeten nog 3 leerlingen gekozen worden uit 10.

Dit kan op $C_{10}^{3} = \dfrac{10\,!}{3\,!\;7\,!} = 120$ manieren.

Opdracht 21 bladzijde 21

Op hoeveel manieren kan een klas van 22 leerlingen in een groep van 8 en een groep van 14 leerlingen verdeeld worden?

Telkens je een groep van 8 gevormd hebt, blijft er een groep van 14 leerlingen over.

Het aantal mogelijkheden is dus $C_{22}^{8} = C_{22}^{14} = \dfrac{22\,!}{8\,!\;14\,!} = 319\,770$.

Opdracht 22 bladzijde 21

Op school wordt een quiz georganiseerd. Van elke deelnemende klas kunnen vijf leerlingen deelnemen. Eén van deze vijf leerlingen moet de rol van kapitein op zich nemen. De klas van Samet telt achttien leerlingen. Onder hen zijn er vier die kapitein willen zijn.

Op hoeveel manieren kan uit die klas een quizteam samengesteld worden?

Er moet één kapitein gekozen worden; hiervoor zijn er vier mogelijke kandidaten. Nadien moeten nog 4 leerlingen gekozen worden uit de overblijvende 17; de volgorde speelt bij deze keuze geen rol.

Uit die klas kan op $4 \cdot C_{17}^{4} = 4 \cdot \dfrac{17\,!}{4\,!\;13\,!} = 9520$ manieren een quizteam samengesteld worden.

Opdracht 23 bladzijde 21

Tien vrienden spelen een tennistornooi.

1 Hoeveel verschillende wedstrijden enkelspel kunnen er worden gespeeld?

Bij enkelspel worden 2 personen gekozen uit de 10 vrienden; de volgorde van kiezen, is niet van belang.

Er kunnen dus $C_{10}^{2} = \frac{10\,!}{2\,!\;8\,!} = 45$ verschillende wedstrijden enkelspel worden gespeeld.

2 Hoeveel verschillende wedstrijden dubbelspel kunnen er worden gespeeld?

Bij dubbelspel worden eerst 2 personen gekozen uit de 10 vrienden voor het eerste team, nadien 2 personen uit de overblijvende 8 vrienden voor het tweede team.

Deze keuze is op $C_{10}^{2} \cdot C_{8}^{2} = 45 \cdot 28 = 1260$ manieren mogelijk.

We moeten dit resultaat nog door $2\,! = 2$ delen. Stel bijvoorbeeld dat het eerste team bestaat uit de personen A en B en het tweede team uit C en D, dan zal deze keuze 'AB versus CD' hetzelfde dubbelspel geven als de keuze 'CD versus AB'.

Er kunnen bijgevolg 630 verschillende wedstrijden dubbelspel gespeeld worden.

Opdracht 24 bladzijde 22

Hoeveel codes van vijf verschillende cijfers bevatten twee even en drie oneven cijfers?

- Er zijn 5 even en 5 oneven cijfers.
- We berekenen eerst op hoeveel manieren we 2 even cijfers kunnen kiezen uit de 5 mogelijke, waarbij we geen rekening houden met de volgorde: $C_5^2 = 10$.
- Nadien berekenen we op hoeveel manieren we 3 oneven cijfers kunnen kiezen uit de 5 mogelijke, waarbij we geen rekening houden met de volgorde: $C_5^3 = 10$.
- Tot slot berekenen we hoeveel mogelijkheden er zijn om deze 5 cijfers te plaatsen: $P_5 = 5\,! = 120$.
- Het gevraagde aantal codes is dan het product van de gevonden resultaten: $C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot P_5 = 10 \cdot 10 \cdot 120 = 12\,000$.

Andere oplossingswijze:

- Er zijn 5 even en 5 oneven cijfers.
- Omdat de code uit 5 cijfers bestaat, berekenen we eerst op hoeveel manieren we 2 posities van de 5 kunnen kiezen voor de even cijfers: $C_5^2 = 10$. De overblijvende posities zijn dan bestemd voor de oneven cijfers.
- Nadien berekenen we op hoeveel manieren we 2 even cijfers kunnen kiezen uit de 5 mogelijke, waarbij we rekening houden met de volgorde: $V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.
- Tot slot berekenen we op hoeveel manieren we 3 oneven cijfers kunnen kiezen uit de 5 mogelijke, waarbij we rekening houden met de volgorde: $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Het gevraagde aantal codes is dan het product van de gevonden resultaten: $C_5^2 \cdot V_5^2 \cdot V_5^3 = 10 \cdot 20 \cdot 60 = 12\,000$.

Opdracht 25 bladzijde 24

Op tafel staan drie borden: een blauw, een rood en een groen.

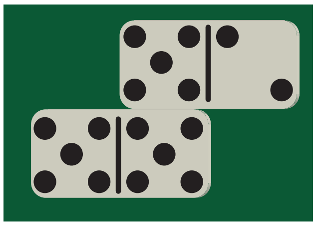
Op hoeveel manieren kun je tien identieke knikkers over deze drie borden verdelen?

Mogelijke verdelingen zijn BBBRRRGGGG of BGGGGGGGGG of ...

Deze verdeling kan op $\overline{C}_3^{10} = C_{10+3-1}^{10} = C_{12}^{10} = 66$ manieren.

Opdracht 26 bladzijde 24

De bovenkant van een dominosteen is verdeeld in twee helften.
Op elke helft kan ofwel niets staan, ofwel staan er 1, 2, 3, 4, 5 of 6 bolletjes op.



Hoeveel verschillende dominostenen zijn er?

We moeten per dominosteen 2 keer kiezen uit 7 mogelijkheden (aantal bolletjes varieert van 0 tot 6), waarbij herhaling toegelaten is en de volgorde niet van belang is.

Het aantal verschillende dominostenen is bijgevolg $\overline{C}_7^{2} = C_{2+7-1}^{2} = C_8^{2} = 28$.

Andere oplossingswijze:

Het aantal dominostenen met twee verschillende helften is: $C_7^2 = 21$.

Hier komen nog 7 dominostenen bij met gelijke helften (0 - 0, 1 - 1, ..., 6 - 6).

Het totaal aantal dominostenen is: $21 + 7 = 28$.

Opdracht 27 bladzijde 25

Hoeveel anagrammen kun je vormen van de volgende woorden?

1 bak

De mogelijke anagrammen zijn: bak, bka, abk, akb, kab, kba.

Omdat alle letters verschillend zijn, is het gevraagde aantal: $P_3 = 3! = 6$.

2 aap

De mogelijke anagrammen zijn: aap, apa, paa.

Omdat twee letters gelijk zijn, is het gevraagde aantal: $\frac{P_3}{2} = \frac{3!}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

3 bank

Omdat alle letters verschillend zijn, is het gevraagde aantal: $P_4 = 4! = 24$.

4 raap

Omdat twee letters gelijk zijn, is het gevraagde aantal: $\frac{P_4}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

Opdracht 28 bladzijde 26

Hoeveel bytes bestaan er met vijf bits 1 en drie bits 0?

Mogelijke bytes zijn 11111000 of 10101011 of ...

Het aantal bytes is $\overline{P}_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$.

Opdracht 29 bladzijde 26

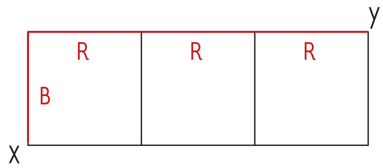
Op hoeveel manieren kunnen we acht verschillende boeken verdelen onder Louise, Eda en Finn, als Louise er vier krijgt en Eda en Finn elk twee?

Mogelijke verdelingen zijn: LLLLEEFF of EELFLLFL of ...

Het aantal verdelingen is $\bar{P}_8^{4,2,2} = \dfrac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420.$

Opdracht 30 bladzijde 27

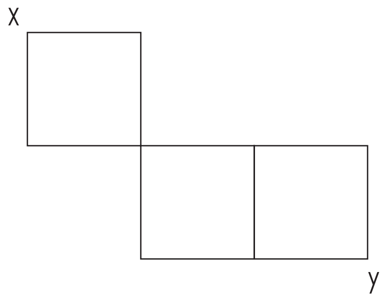
Een routeplanner is ingesteld op ‘kortste route’.
Een mogelijke kortste route van X naar Y in het onderstaande rooster is BRRR, met B = naar boven en R = naar rechts.



1 Vermeld alle andere kortste routes van X naar Y op een analoge manier.

RBRR, RRBR, RRRB

2 Noteer ook voor het onderstaande rooster alle mogelijke kortste routes.

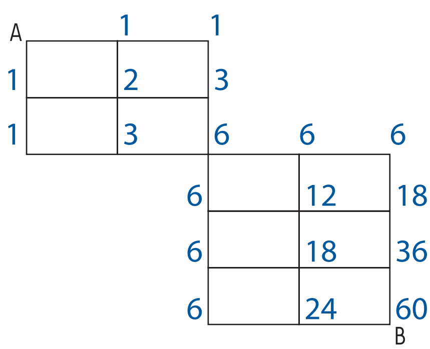


RBRRB, RBRBR, RBBRR, BRRRB, BRRBR, BRBRR met R = naar rechts en B = naar beneden

Opdracht 31 bladzijde 29

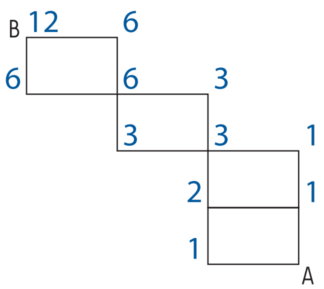
Bereken het aantal kortste routes van A naar B.

1



Er zijn 60 mogelijke kortste routes van A naar B.

2



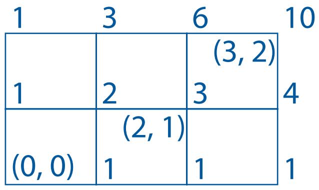
Er zijn 12 mogelijke kortste routes van A naar B.

Opdracht 32 bladzijde 29

De voetbalwedstrijd Club Brugge – KAA Gent heeft als eindstand 3-2.

Op hoeveel manieren had de score kunnen verlopen?

De eindstand 3 - 2 houdt in dat Club Brugge driemaal scoorde en KAA Gent tweemaal. We kunnen de scorestand in een rooster voorstellen waarbij we starten bij (0, 0) en eindigen in (3, 2). Alle tussenliggende roosterpunten zijn mogelijke tussenstanden. Via het rooster kunnen we tellen op hoeveel manieren elke tussenstand tot stand kan komen. Zo kan tussenstand 2 - 1 op 3 manieren bereikt worden: via 1 - 0, 2 - 0, 2 - 1 of via 1 - 0, 1 - 1, 2 - 1 of via 0 - 1, 1 - 1, 2 - 1.



De score had op 10 manieren kunnen verlopen.

Opdracht 33 bladzijde 33

We vormen codes bestaande uit drie verschillende cijfers.

1 Hoeveel dergelijke codes bestaan er?

Bij codes is de volgorde van de cijfers van belang en het eerste cijfer mag een 0 zijn.

Het aantal codes is $V_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

2 Hoeveel van die codes bevatten het cijfer 5?

1ste cijfer ↓ 1	2de cijfer ↓ 9	3de cijfer ↓ 8
(5)		

We verkrijgen een analoge situatie als het cijfer 5 op de 2de of 3de plaats staat.

$3 \cdot V_{9}^{2} = 3 \cdot (9 \cdot 8) = 216$ van die codes bevatten het cijfer 5.

Opdracht 34 bladzijde 33

We vormen getallen bestaande uit drie verschillende cijfers.

1 Hoeveel dergelijke getallen bestaan er?

Bij getallen is de volgorde van de cijfers van belang en het eerste cijfer mag geen 0 zijn.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓
9	9	8
(geen 0)	(0 wel mogelijk)	

Het aantal getallen is $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

2 Hoeveel van deze getallen bevatten het cijfer 5?

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓
1	9	8
(5)		

of

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓
8	1	8
(geen 5 of 0)	(5)	(0 wel mogelijk)

of

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓
8	8	1
(geen 5 of 0)	(0 wel mogelijk)	(5)

Het aantal getallen is $9 \cdot 8 + 2 \cdot (8 \cdot 8) = 72 + 128 = 200$.

Opdracht 35 bladzijde 33

Bij het spelletje Mastermind plaats je, onzichtbaar voor je tegenstander, vier pinnetjes, te kiezen uit de vijf kleuren rood, groen, blauw, geel en oranje, op een bord in een bepaalde volgorde. De pinnetjes hoeven niet noodzakelijk verschillend van kleur te zijn. Je tegenstander moet dan je keuze in opeenvolgende stappen raden.

Hoeveel mogelijkheden heb je voor de startkeuze?

Bij de keuze van de kleuren is herhaling toegelaten en de volgorde is van belang.

Het aantal mogelijkheden voor de startkeuze is $\overline{V}_5^4 = 5^4 = 625$.

Opdracht 36 bladzijde 33

Drie kinderen uit een gezin kunnen kiezen uit drie sporttakken.

1 Op hoeveel manieren is deze keuze mogelijk?

De drie kinderen kunnen eenzelfde sporttak kiezen; herhaling is dus toegelaten. De volgorde is van belang, omdat die aangeeft welk kind welke sporttak kiest.

De keuze is mogelijk op $\overline{V}_3^3 = 3^3 = 27$ manieren.

2 Op hoeveel manieren is de keuze mogelijk als elk kind een verschillende sporttak moet kiezen?

Omdat herhaling nu niet toegelaten is, is de keuze mogelijk op $P_3 = 3! = 6$ manieren.

Opdracht 37 bladzijde 33

Hoeveel getallen van vier verschillende cijfers liggen er tussen 2000 en 6000?

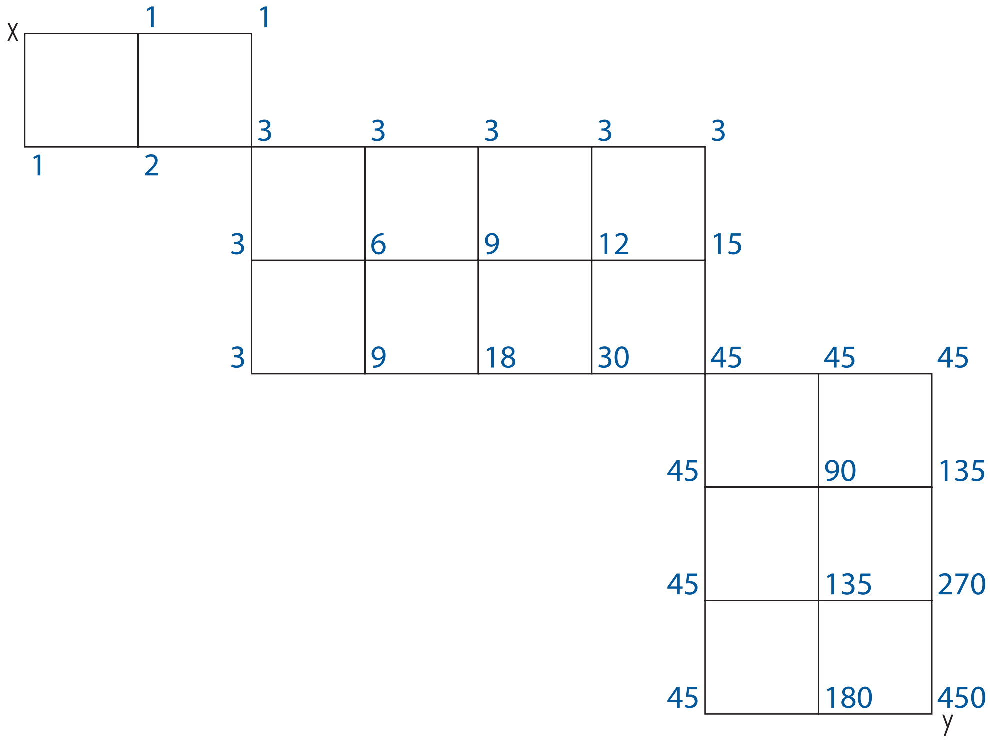
Deze getallen liggen tussen 2000 en 6000 als ze 2, 3, 4 of 5 als eerste cijfer hebben.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer
↓	↓	↓	↓
4	9	8	7
(2, 3, 4, 5)			

Het aantal mogelijke getallen is $4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2016$.

Opdracht 38 bladzijde 34

Bereken het aantal kortste routes van X naar Y.



Er zijn 450 mogelijke kortste routes van X naar Y.

Opdracht 39 bladzijde 34

Hoeveel anagrammen van het woord ZOMER bestaan er waarbij de eerste en de laatste letter een klinker is?

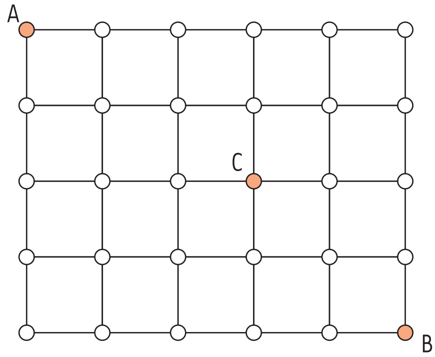
Het woord ZOMER bestaat uit 2 klinkers en 3 medeklinkers.

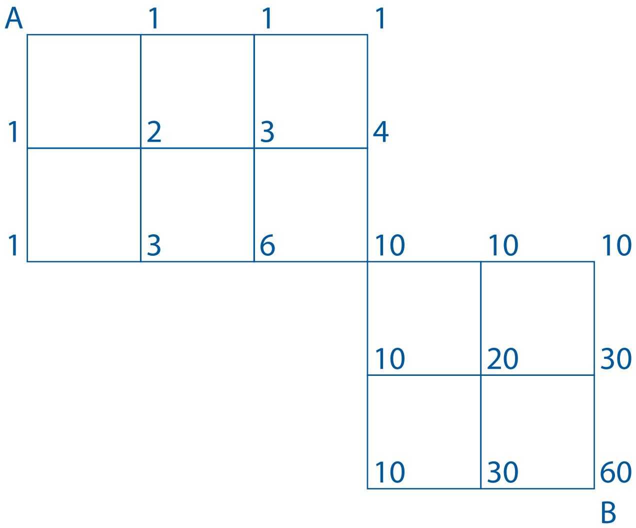
1ste letter	2de letter	3de letter	4de letter	5de letter
↓	↓	↓	↓	↓
2	3	2	1	1
(klinker)	(medeklinker)	(medeklinker)	(medeklinker)	(klinker)

Het gevraagde aantal anagrammen is $P_2 \cdot P_3 = 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$.

Opdracht 40 bladzijde 34

Bereken het aantal kortste routes van A naar B die over C lopen.





Er zijn 60 kortste routes van A naar B die over C lopen.

Opdracht 41 bladzijde 34

De trainer van onze nationale ploeg heeft 7 verdedigers, 6 middenvelders, 7 aanvallers en 3 doelmannen geselecteerd.

Op hoeveel manieren kan hij zijn nationaal elftal samenstellen als hij kiest voor een opstelling met 3 verdedigers, 4 middenvelders en 3 aanvallers (en één doelman uiteraard)?

Hij kiest 3 verdedigers uit 7, de volgorde is hierbij niet van belang. Dit kan op $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$ manieren.

Aanloog: 4 middenvelders uit 6 kiezen, kan op $C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ manieren.

3 aanvallers uit 7 kiezen, kan op $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$ manieren.

Voor de keuze van de doelman zijn er 3 mogelijkheden.

Alle spelers samen vormen het elftal. De trainer heeft $C_7^3 \cdot C_6^4 \cdot C_7^3 \cdot 3 = 35 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 3 = 55\,125$ keuzemogelijkheden voor de samenstelling ervan.

Opdracht 42 bladzijde 34

Ons alfabet van 26 letters bevat zes klinkers: a, e, i, o, u en y.

Hoeveel 'woorden' van vier letters beginnen en eindigen met dezelfde klinker?

1ste letter ↓ 6	2de letter ↓ 26	3de letter ↓ 26	4de letter ↓ 1
(klinker)	(de 2de letter mag eender welke letter zijn)	(de 3de letter mag eender welke letter zijn)	(de 4de letter moet gelijk zijn aan de 1ste)

Het gevraagde aantal woorden is $6 \cdot \overline{V}_{26}^2 = 6 \cdot 26^2 = 4056$.

Opdracht 43 bladzijde 35

Op hoeveel manieren kun je een klas van 20 leerlingen in twee groepen van 10 leerlingen verdelen als de ene groep Emma, Melike en Noa moet bevatten en de andere groep Mirac en Nicolas?

Omdat 5 leerlingen vooraf al verdeeld zijn over de groepen, blijven er nog 15 leerlingen over waaruit je kunt kiezen.

Voor de groep waarin Emma, Melike en Noa zitten, moet je nog 7 leerlingen kiezen uit deze 15. De volgorde is hierbij niet van belang. Deze keuze kan op $C_{15}^{7} = \frac{15!}{7!\,8!} = 6435$ manieren gebeuren.

De overblijvende 8 leerlingen zitten in de groep met Mirac en Nicolas.

De gevraagde verdeling is dus mogelijk op 6435 manieren.

Opdracht 44 bladzijde 35

In een manege staan tien paardenstallen naast elkaar. Er zijn twee witte en acht bruine paarden die elk een stal bezetten.

1 Op hoeveel manieren is de bezetting mogelijk?

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	...	9de plaats	10de plaats
↓	↓	↓		↓	↓
10	9	8	...	2	1

Er zijn $P_{10} = 10! = 3\,268\,800$ bezettingen mogelijk.

2 Op hoeveel manieren kan de bezetting gebeuren als de witte paarden elk aan een buitenkant moeten staan?

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	...	9de plaats	10de plaats
↓	↓	↓		↓	↓
2	8	7	...	1	1
(wit paard)	(bruin paard)	(bruin paard)		(bruin paard)	(wit paard)

Er zijn $2 \cdot P_8 = 2 \cdot 8! = 80\,640$ dergelijke bezettingen mogelijk.

3 Op hoeveel manieren is de bezetting mogelijk als de witte paarden naast elkaar moeten staan?

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	4de plaats	...	10de plaats
↓	↓	↓	↓		↓
2	1	8	7	...	1
(wit paard)	(wit paard)	(bruin paard)	(bruin paard)		(bruin paard)

of

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	4de plaats	...	10de plaats
↓	↓	↓	↓		↓
8	2	1	7	...	1
(bruin paard)	(wit paard)	(wit paard)	(bruin paard)		(bruin paard)

De twee witte paarden kunnen zo nog 7 keer naar rechts opschuiven.

Er zijn $9 \cdot 2 \cdot P_8 = 18 \cdot 8! = 725\,760$ dergelijke bezettingen mogelijk.

Opdracht 45 bladzijde 35

Voor een natuurlijk getal $k \neq 0$ noteren we met $k!$ het product van de natuurlijke getallen van k t.e.m. 1:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Zo is bijvoorbeeld $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Wat is het laatste cijfer van $\dfrac{(23\,527)!}{(23\,525)!}$?

A 2 **B** 5 **C** 6 **D** 7

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-informatica-fysica, 2016)

$$\frac{(23\,527)!}{(23\,525)!} = \frac{23\,527 \cdot 23\,526 \cdot (23\,525)!}{(23525)!} = 23\,527 \cdot 23526$$

Het laatste cijfer van dit getal is 2.

Antwoord A is juist.

Opdracht 46 bladzijde 35

$\dfrac{(10!)^2 - (9!)^2}{(10!)^2 + (9!)^2}$ is gelijk aan

A $\dfrac{9}{11}$ **B** $\dfrac{99}{101}$ **C** $\dfrac{81}{121}$ **D** $\dfrac{19}{181}$ **E** geen van de voorgaande

(Bron © Alabama Statewide Math Contest, 2016)

$$\frac{(10!)^2-(9!)^2}{(10!)^2+(9!)^2} = \frac{(10 \cdot 9!)^2-(9!)^2}{(10 \cdot 9!)^2+(9!)^2} = \frac{10^2 \cdot (9!)^2-(9!)^2}{10^2 \cdot (9!)^2+(9!)^2} = \frac{100-1}{100+1} = \frac{99}{101}$$

Antwoord B is juist.

Opdracht 47 bladzijde 35

Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor $n!$ deelbaar is door 5005.

$$\begin{array}{r|l} 5005 & 5 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$5005 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dus $13!$ is deelbaar door 5005.

13 is bovendien de kleinste waarde van n waarvoor $n!$ deelbaar is door 5005.

Opdracht 48 bladzijde 35

Op hoeveel manieren kun je het woord PROGRAMMA lezen, beginnend bij de P linksboven en eindigend bij de A rechtsonder?

P	R	O	G
R	O	G	R
O	G	R	A
G	R	A	M
R	A	M	M
A	M	M	A

Welke weg je ook volgt, je moet altijd 3 keer naar rechts (R) en 5 keer naar onder (O).

Een mogelijke route is RRROOOOO of ROROOOOR of ...

Het aantal mogelijkheden is $\overline{P}_8^{3,5} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = 56$.

Opdracht 49 bladzijde 36

Voor een beveiligingscode gebruikt een firma vierkante roosters verdeeld in 25 gelijke vierkanten. Elk vierkantje kan een blanco zijn of een 1 bevatten. Hiernaast zie je een voorbeeld van een beveiligingscode.

	1			
			1	
	1	1		

1 Hoeveel mogelijke codes zijn er?

Voor elk vierkantje zijn er 2 mogelijkheden.

Er zijn $\overline{V}_2^{25} = 2^{25} = 33\,554\,432$ mogelijke codes.

2 Hoeveel codes bevatten elfmaal een 1?

11 vierkantjes van de 25 moeten een 1 bevatten; hun onderlinge verwisseling geeft geen nieuwe code.

Er zijn $C_{25}^{11} = \dfrac{25!}{11!\,14!} = 4\,457\,400$ dergelijke codes.

3 Hoeveel codes hebben meer dan acht, maar minder dan twaalf keer een 1?

Deze codes hebben 9 of 10 of 11 keer een 1.

Er zijn $C_{25}^{9} + C_{25}^{10} + C_{25}^{11} = 2\,042\,975 + 3\,268\,760 + 4\,457\,400 = 9\,769\,135$ dergelijke codes.

Opdracht 50 bladzijde 36

Op hoeveel manieren kun je twaalf identieke munten verdelen onder vier personen?

Je moet 12 keer kiezen uit 4 personen, waarbij herhaling toegelaten is (je mag meerdere munten aan eenzelfde persoon geven) en de volgorde niet van belang is (omdat de munten identiek zijn).

Er zijn $\overline{C}_4^{12} = C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{12} = 455$ mogelijke verdelingen.

Opdracht 51 bladzijde 36

Hoeveel anagrammen van het woord VOGELS bestaan er waarbij de letter V één of meerdere plaatsen achter de letter L komt?

Er zijn in totaal $P_6 = 6! = 720$ anagrammen van het woord VOGELS.

Omdat in de helft van de anagrammen de letter V achter de letter L komt, delen we dit resultaat nog door 2.

Het gevraagde aantal anagrammen is dus 360.

Andere oplossingswijze:

1ste letter ↓ 1	2de letter ↓ 5	3de letter ↓ 4	4de letter ↓ 3	5de letter ↓ 2	6de letter ↓ 1
(L)					

of

1ste letter ↓ 4	2de letter ↓ 1	3de letter ↓ 4	4de letter ↓ 3	5de letter ↓ 2	6de letter ↓ 1
(geen V of L)	(L)	(V wel mogelijk)			

of

1ste letter ↓ 4	2de letter ↓ 3	3de letter ↓ 1	4de letter ↓ 3	5de letter ↓ 2	6de letter ↓ 1
(geen V of L)	(geen V of L)	(L)	(V wel mogelijk)		

of

1ste letter ↓ 4	2de letter ↓ 3	3de letter ↓ 2	4de letter ↓ 1	5de letter ↓ 2	6de letter ↓ 1
(geen V of L)	(geen V of L)	(geen V of L)	(L)	(V wel mogelijk)	

of

1ste letter ↓ 4	2de letter ↓ 3	3de letter ↓ 2	4de letter ↓ 1	5de letter ↓ 1	6de letter ↓ 1
(geen V of L)	(geen V of L)	(geen V of L)	(geen V of L)	(L)	(V)

Het gevraagde aantal anagrammen is bijgevolg $(5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 4! = 15 \cdot 4! = 360$.

Opdracht 52 bladzijde 36

Op hoeveel manieren kun je uit tien danskoppels lukraak tien personen kiezen, als er minstens één koppel bij moet zijn?

We lossen dit op via de complementregel.

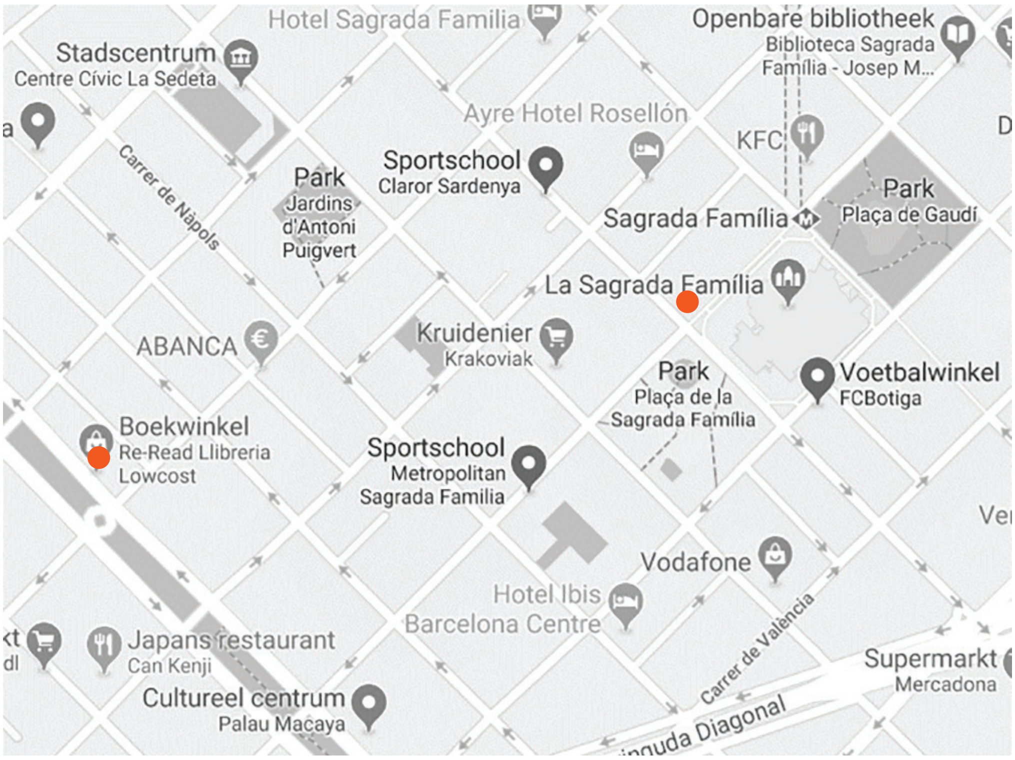
- Bereken eerst het aantal mogelijkheden waarbij 10 personen gekozen worden uit 20, de volgorde is hier niet van belang: $C_{20}^{10} = \dfrac{20!}{10!\,10!} = 184\,756$.
- Bereken daarna het aantal mogelijkheden waarbij geen enkel koppel zit in de groep van 10 personen. Kies hiervoor uit elk koppel telkens één persoon; dit kan op $\overline{V}_2^{10} = 2^{10} = 1024$ manieren.
- Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: $184\,756 - 1024 = 183\,732$.

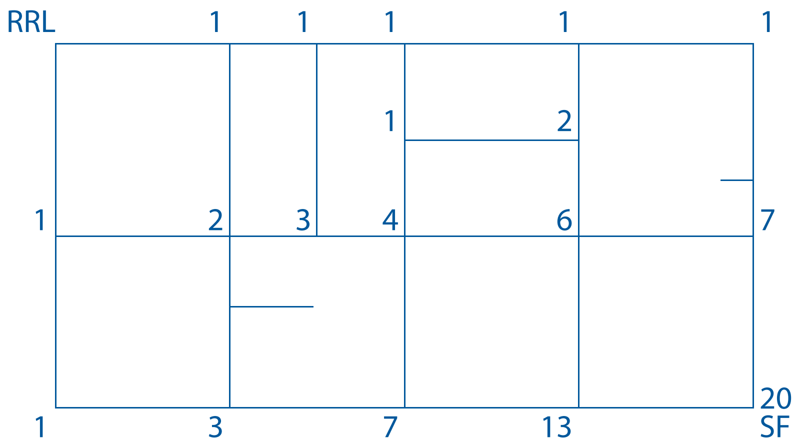
Er zijn 183 732 mogelijkheden waarbij minstens één koppel zit.

Opdracht 53 bladzijde 36

Als Erasmusstudent heb je in Barcelona een kamer gevonden boven de boekwinkel Re-Read Llibreria. Je werkt als jobstudent vlak bij de Sagrada Familia. Je gaat elke keer te voet naar je werk en neemt de kortste weg.

Na hoeveel dagen heb je alle mogelijke routes genomen als je nooit dezelfde wilt nemen?





Er zijn 20 mogelijke kortste routes van Re-Read Llibreria (RRL) naar de Sagrada Familia (SF).

Opdracht 54 bladzijde 37

Op hoeveel manieren kun je uit een spel van 52 kaarten twee harten, twee ruiten, twee klaveren en twee schoppen trekken?

De 2 mogelijke harten vormen een keuze van 2 kaarten uit 13, waarbij de volgorde niet van belang is. Er zijn zo $C_{13}^{2} = \dfrac{13!}{2!\,11!} = 78$ combinaties mogelijk.

Ook voor de 2 ruiten én de 2 klaveren én de 2 schoppen vinden we telkens 78 combinaties.

In totaal zijn er $C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2} = 78^4 = 37\,015\,056$ mogelijke manieren om uit een spel van 52 kaarten twee harten, twee ruiten, twee klaveren en twee schoppen te trekken.

Opdracht 55 bladzijde 37

Acht stoelen staan naast elkaar op een rij. Op hoeveel verschillende manieren kunnen drie Belgen, drie Nederlanders en twee Fransen plaatsnemen indien de personen van eenzelfde nationaliteit naast elkaar willen zitten?

A $2!(3!)^2$ **B** $2^4\,3^2$ **C** $2^4\,3^3$ **D** $\dfrac{8!}{2!(3!)^2}$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2018)

Het aantal mogelijkheden waarop de Belgen (B) naast elkaar kunnen zitten, is $P_3 = 3!$.

Voor de Nederlanders (N) zijn er ook $P_3 = 3!$ mogelijkheden en voor de Fransen (F) $P_2 = 2!$.

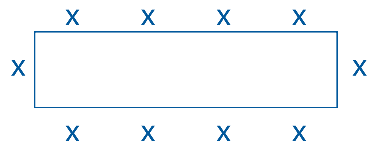
Tot slot kunnen de 3 nationaliteiten B, N en F onderling ook op $P_3 = 3!$ manieren wisselen.

Samen geeft dit $3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! = (3 \cdot 2 \cdot 1)^3 \cdot (2 \cdot 1) = 2^4 \cdot 3^3$ manieren.

Antwoord C is juist.

Opdracht 56 bladzijde 37

Gizem en Emma nodigen vier koppels uit. Op hoeveel manieren kan iedereen plaatsnemen aan een tafel met 10 plaatsen als iedereen naast zijn of haar partner wil zitten?



De eerste persoon kan kiezen uit 10 stoelen. De partner van de eerste persoon kan kiezen uit 2 plaatsen, namelijk links of rechts van de eerste persoon.

De derde persoon kan kiezen uit 8 stoelen. Zijn/haar partner heeft geen keuze en moet op die plaats gaan zitten die nog een even aantal vrije stoelen openlaat tussen iedereen die al zit.

Analoog zal de vijfde persoon kunnen kiezen uit 6 stoelen, de keuze van zijn/haar partner ligt vast. De zevende persoon kiest uit 4 stoelen en legt hiermee ook de keuze voor zijn/haar partner vast. De negende persoon kan nog kiezen uit 2 stoelen.

Het totaal aantal keuzemogelijkheden is hiermee $10 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 7680$.

Opdracht 57 bladzijde 37

Op hoeveel manieren kunnen 5 letters X en 4 letters O in een 3×3-rooster geplaatst worden?

A 45 **B** 63 **C** 126 **D** 3024 **E** 15120

(Bron © Elon University Math Contest, 2015)

5 roostervakjes van de 9 moeten een X bevatten; hun onderlinge verwisseling geeft geen nieuw rooster.

Er zijn $C_9^5 = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$ dergelijke roosters.

Antwoord C is juist.

Opdracht 58 bladzijde 37

In een labo worden wekelijks waterstalen van zeven zwembaden getest. De waterstalen worden verdeeld over twee laboranten.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de waterstalen verdeeld worden over de twee laboranten? Elke laborant moet minstens één staal testen.

A 12 **B** 47 **C** 64 **D** 126

(Bron © ijkingstoets bio-ingenieur, 2017)

We lossen dit op via de complementregel.

- We kiezen bij elk van de 7 stalen aan welke laborant (noem deze A en B) we dit staal toevertrouwen. Een mogelijke keuze is: BBABAAA. Dit kan op $2^7 = 128$ manieren.
- Omdat elke laborant minstens één staal moet testen, moeten we de mogelijkheden waarbij voor elke test laborant A gekozen wordt (AAAAAAA) of voor elke test laborant B, in mindering brengen.
- Er blijven dus $128 - 2 = 126$ manieren over om de stalen te verdelen.

Antwoord D is juist.

Alternatieve oplossingsmethode:

- Als de eerste laborant 1 staal test, dan zal de tweede laborant de overblijvende 6 stalen testen. Er zijn 7 manieren om 1 staal uit 7 te kiezen.
- Als de eerste laborant 2 stalen test, dan zal de tweede laborant de overblijvende 5 stalen testen. Er zijn $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!\,5!} = 21$ manieren om 2 stalen uit 7 te kiezen, waarbij de volgorde van geen belang is.
- Op een analoge manier kunnen de keuzemogelijkheden berekend worden waarbij de eerste laborant 3 of 4 of 5 of 6 stalen zal testen.
- Het totaal aantal keuzemogelijkheden is
  $C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 = 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 = 126.$

Antwoord D is juist.

Opdracht 59 bladzijde 37

Hoeveel 'woorden' kunnen we vormen die bestaan uit vier letters te kiezen uit $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ en die tenminste één klinker bevatten?

Bij de vorming van deze woorden is herhaling van de letters toegelaten en de volgorde van belang.

We lossen dit op via de complementregel.

- Bereken eerst het aantal mogelijke woorden met vier letters uit de gegeven verzameling: $\overline{V}_{11}^4 = 11^4 = 14\,641.$
- Bereken daarna het aantal dergelijke woorden zonder klinkers: $\overline{V}_8^4 = 8^4 = 4096.$
- Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: $14\,641 - 4096 = 10\,545.$

Andere oplossingswijze:

- In de gegeven verzameling zitten 3 mogelijke klinkers: a, e en i.
- Bereken eerst het aantal mogelijke woorden met vier letters uit de gegeven verzameling die één klinker bevatten. Deze klinker kan op 4 mogelijke plaatsen staan. Het aantal mogelijke woorden dat hiermee correspondeert, is: $(3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot 4 = 6144.$
- Bereken daarna het aantal woorden met twee klinkers. Het aantal mogelijke plaatsen voor deze klinkers is $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$. Het aantal woorden met twee klinkers is: $(3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8) \cdot 6 = 3456.$
- Analoog vinden we het aantal woorden met drie klinkers: $(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8) \cdot 4 = 864.$
- En met vier klinkers: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$
- De som van alle vorige resultaten geeft het gevraagde aantal:
  $6144 + 3456 + 864 + 81 = 10\,545.$

Opdracht 60 bladzijde 37

Bij hoeveel anagrammen van het woord KANSREKENEN staan de drie letters E naast elkaar?

- KANSREKENEN bestaat uit 11 letters, waarbij K tweemaal, N driemaal, E driemaal en alle andere letters éénmaal voorkomen.
- We kunnen het anagram starten met EEE. Het aantal mogelijkheden om de andere letters te plaatsen, is dan: $\overline{P}_8^{2,3} = \dfrac{8!}{2!\,3!} = 3360$.
- De lettergroep EEE kan in totaal op 9 verschillende plaatsen staan:
  EEE........ of .EEE....... of ..EEE...... of ...EEE..... of ....EEE.... of .....EEE... of ......EEE.. of ....EEE. of ....EEE
- Het gevraagde aantal anagrammen is bijgevolg $9 \cdot 3360 = 30\,240$.

Opdracht 61 bladzijde 37

In een wegrestaurant is de keuze van de broodjes beperkt tot broodjes met kaas, met ham of met tonijn. Je koopt vier broodjes.

Hoeveel keuzemogelijkheden heb je?

Je moet 4 keer kiezen uit 3 soorten beleg, waarbij herhaling toegelaten is (je mag meerdere broodjes met eenzelfde beleg kiezen) en de volgorde niet van belang is.

Er zijn $\overline{C}_3^4 = C_{4+3-1}^4 = C_6^4 = 15$ keuzemogelijkheden.

Opdracht 62 bladzijde 38

Bij EuroMillions wordt het winnende lot, bestaande uit 5 nummers en 2 sterren, bepaald aan de hand van twee afzonderlijke trekkingen. Eerst worden de 5 nummers getrokken uit een reeks van 50 genummerde ballen (van 1 tot en met 50) en nadien de 2 sterren uit een reeks van 12 genummerde ballen (van 1 tot en met 12).

1 Hoeveel verschillende keuzemogelijkheden heeft EuroMillions?

- Bij de trekking van de 5 nummers uit de reeks van 50 ballen is de volgorde niet van belang. Het aantal mogelijke combinaties is: $C_{50}^5 = \dfrac{50!}{5!\,45!} = 2\,118\,760$.
- Analoog voor de 2 sterren uit de reeks van 12 ballen. Het aantal combinaties is: $C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!\,10!} = 66$.
- In totaal zijn er $C_{50}^5 \cdot C_{12}^2 = 2\,118\,760 \cdot 66 = 139\,838\,160$ keuzemogelijkheden bij EuroMillions.

EuroMillions werkt met meerdere winstrangen. Rang 1, die de jackpot oplevert, correspondeert met 5 juiste nummers en 2 juiste sterren. Er is maar één formulier dat deze keuze kan geven; het is uiteraard wel mogelijk dat meerdere personen deze specifieke keuze op hun formulier aankruisten. Maar ook als je niet alle nummers en/of niet alle sterren juist koos, kun je winnen in een lagere rang.

2 Rang 3 hoort bij een juiste keuze van de 5 nummers en geen enkele correcte keuze voor de sterren.

Hoeveel verschillende formulieren corresponderen hiermee?

De sterren op deze formulieren zijn gekozen uit de 10 overblijvende.

Dit is mogelijk op $C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2!\,8!} = 45$ manieren.

3 Wie 5 juiste nummers kiest en 1 correcte ster, zit in rang 2.

Hoeveel verschillende formulieren horen bij rang 2?

Voor de correcte ster zijn er 2 mogelijkheden. De andere ster op deze formulieren is gekozen uit de 10 overblijvende.

Bij rang 2 horen $2 \cdot 10 = 20$ formulieren.

4 Rang 8 hoort bij een juiste keuze van 2 nummers en van beide sterren.

Hoeveel verschillende formulieren corresponderen hiermee?

- Voor de juiste keuze van 2 nummers kun je kiezen uit de 5 getrokken nummers.
  Dit is mogelijk op $C_{5}^{2} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$ manieren.
- De andere 3 nummers op deze formulieren zijn gekozen uit de 45 overblijvende.
  Dit is mogelijk op $C_{45}^{3} = \dfrac{45!}{3!\,42!} = 14\,190$ manieren.
- Met rang 8 corresponderen $C_{5}^{2} \cdot C_{45}^{3} = 10 \cdot 14\,190 = 141\,900$ formulieren.

5 Wie 3 juiste nummers kiest en 1 correcte ster, zit in rang 9.

Hoeveel verschillende formulieren horen bij rang 9?

- De keuze van 3 juiste en 2 andere nummers is mogelijk op $C_{5}^{3} \cdot C_{45}^{2}$ manieren.
- De keuze van 1 correcte ster kan op 20 manieren (zie **3**).
- Bij rang 9 horen $C_{5}^{3} \cdot C_{45}^{2} \cdot 20 = 10 \cdot 990 \cdot 20 = 198\,000$ formulieren.

6 Rang 13 is de laagste rang waarbij men nog winsten verdeelt. Hiervoor moet je 2 nummers juist gekozen hebben en geen enkele ster.

Hoeveel verschillende formulieren horen hierbij?

- De keuze van 2 juiste en 3 andere nummers is mogelijk op $C_{5}^{2} \cdot C_{45}^{3}$ manieren (zie **4**).
- De keuze van geen enkele correcte ster kan op C_{10}^{2} manieren (zie **2**).
- Bij rang 9 horen $C_{5}^{2} \cdot C_{45}^{3} \cdot C_{10}^{2} = 10 \cdot 14\,190 \cdot 45 = 6\,385\,500$ formulieren.

Opdracht 63 bladzijde 38

Bij een auto-ongeval met vluchtmisdrijf herinnert een getuige zich dat de nummerplaat van de gevluchte auto bestaat uit 3 verschillende letters (alle verschillend van de letter O), gevolgd door 3 cijfers waarvan er juist 2 gelijk zijn (cijfers 0 tot en met 9 zijn mogelijk).

Hoeveel mogelijkheden zijn er?

A $2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 23$

B $2^4 \times 3^4 \times 5^3 \times 23$

C $2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 23$

D $2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 23$

E $2^2 \times 5^8$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-infomatica-fysica, 2015)

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	4de plaats	5de plaats	6de plaats
↓	↓	↓	↓	↓	↓
25	24	23	10	1	9
(letter)	(letter)	(letter)	(cijfer)	(zelfde cijfer)	(ander cijfer)

of

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	4de plaats	5de plaats	6de plaats
↓	↓	↓	↓	↓	↓
25	24	23	10	9	1
(letter)	(letter)	(letter)	(cijfer)	(ander cijfer)	(cijfer gelijk aan cijfer op 4de plaats)

of

1ste plaats	2de plaats	3de plaats	4de plaats	5de plaats	6de plaats
↓	↓	↓	↓	↓	↓
25	24	23	10	9	1
(letter)	(letter)	(letter)	(cijfer)	(ander cijfer)	(cijfer gelijk aan cijfer op 5de plaats)

Het aantal mogelijkheden is: $(25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1) \cdot 3 = (5^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3^2) \cdot 3$
$= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 23.$

Antwoord B is juist.

Opdracht 64 bladzijde 39

Een klas bestaat uit 24 leerlingen. Voor een groepswerk moet de klas verdeeld worden in vier groepen van zes leerlingen.

1 Op hoeveel manieren kan dit als elk groepje een *verschillende* opdracht krijgt?

- Voor het eerste groepje van 6 leerlingen zijn er C_{24}^{6} mogelijkheden, want de volgorde is niet van belang.
- Voor het tweede groepje van 6 leerlingen moeten we kiezen uit de overgebleven 18 leerlingen, zodat er C_{18}^{6} mogelijkheden zijn.
- Voor het derde groepje kiezen we 6 leerlingen uit de overgebleven 12, waardoor er C_{12}^{6} mogelijkheden zijn.
- Er blijven nog 6 leerlingen over die het vierde groepje vormen.
- De klas kan op $C_{24}^{6} \cdot C_{18}^{6} \cdot C_{12}^{6} = 134\,596 \cdot 18\,564 \cdot 924 = 2{,}309 \cdot 10^{12}$ manieren in vier groepen van zes leerlingen verdeeld worden.

2 Op hoeveel manieren kan dit als elk groepje een *gelijke* opdracht krijgt?

- Als elk groepje een gelijke opdracht krijgt, moeten we de onderlinge verwisseling van de 4 groepjes wegdelen. In dat geval is bijvoorbeeld de verdeling ABCDEF - GHIJKL - MNOPQR - STUVWX dezelfde als GHIJKL - STUVWX - ABCDEF - MNOPQR.
- Het gevraagde aantal manieren wordt dan: $\dfrac{C_{24}^{6} \cdot C_{18}^{6} \cdot C_{12}^{6}}{4!} = 9{,}620 \cdot 10^{10}$.

Opdracht 65 bladzijde 39

Je krijgt tien extra oefeningen. Je moet minstens drie van de eerste vijf oefeningen oplossen. Voor de laatste vijf oefeningen ben je vrij om ze al dan niet op te lossen.

Op hoeveel manieren kun je je oefeningen kiezen?

Je kiest 3 of 4 of 5 van de eerste 5 oefeningen. Bij deze keuze is de volgorde niet van belang (bv. de 1ste en 3de en 5de oefening oplossen, is hetzelfde als de 3de en 1ste en 5de oefening oplossen). Het aantal mogelijkheden voor deze keuze is
$C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 10 + 5 + 1 = 16$.

Voor de laatste 5 oefeningen heb je telkens 2 keuzes (wel of niet oplossen), waardoor je $2^5 = 32$ mogelijkheden hebt.

Wat de 10 oefeningen tesamen betreft, heb je dus $16 \cdot 32 = 512$ mogelijke keuzes.

Andere oplossingswijze:

Voor de laatste 5 oefeningen kun je het aantal mogelijkheden ook berekenen via:
$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

Opdracht 66 bladzijde 39

In de eerste ronde van een internationaal pingpongtornooi zal elke speler één match spelen tegen elke andere speler. Er worden zo 91 matchen gespeeld.

Hoeveel spelers doen er mee aan het tornooi?

Veronderstel dat er n spelers meedoen aan het tornooi.

Per match moeten er telkens 2 spelers uit deze n gekozen worden, waarbij de volgorde niet van belang is. Dit kan op C_n^2 manieren.

Er worden 91 matchen gespeeld, dus

$$
\begin{aligned}
& C_n^2 = 91 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 91 \\
\Leftrightarrow\ & n \cdot (n-1) = 182 \\
\Leftrightarrow\ & n^2 - n - 182 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n = -13 \ \text{ of } \ n = 14
\end{aligned}
$$

De enige mogelijke oplossing hier is n = 14.

Er doen dus 14 spelers mee aan dit tornooi.

Opdracht 67 bladzijde 39

Hoeveel getallen van vijf verschillende cijfers bevatten twee even en drie oneven cijfers?

We lossen dit op via de complementregel.

- Bereken eerst het aantal mogelijkheden waarbij de gevraagde getallen aan de gestelde voorwaarden voldoen, maar waarbij 0 ook als eerste cijfer kan voorkomen. In opdracht **24** berekenden we dat er zo $C_5^2 \cdot C_5^3 \cdot P_5 = 10 \cdot 10 \cdot 120 = 12\,000$ getallen (codes) mogelijk zijn.
- Bereken daarna het aantal mogelijkheden waarbij 0 het eerste cijfer is. Er moet dan nog 1 even cijfer gekozen worden uit de 4 overblijvende en 3 oneven cijfers; dit kan op $C_4^1 \cdot C_5^3 \cdot P_4 = 4 \cdot 10 \cdot 24 = 960$ manieren.
- Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: 12 000 – 960 = 11 040.

Andere oplossingswijze:

- Er zijn 5 even en 5 oneven cijfers.
- Bereken eerst het aantal getallen waarbij het eerste cijfer even is.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
4	4	5	4	3
(even, geen 0)	(even, 0 wel mogelijk)	(oneven)	(oneven)	(oneven)

Het tweede even cijfer kan zoals hierboven op de 2de plaats staan, maar ook op de 3de of 4de of 5de.

Het aantal gevraagde getallen waarbij het eerste cijfer even is, vinden we als volgt:
$(4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 4 = (4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot \overline{P}_4^3 = 960 \cdot 4 = 3840.$

– Bereken daarna het aantal getallen waarbij het eerste cijfer oneven is.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
5	4	3	5	4
(oneven)	(oneven)	(oneven)	(even)	(even)

De twee oneven en twee even cijfers op de 2de tot 5de plaats kunnen onderling nog van plaats wisselen op $\overline{P}_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ manieren.

Het aantal gevraagde getallen waarbij het eerste cijfer oneven is, vinden we als volgt:
$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 6 = 1200 \cdot 6 = 7200.$

– Het aantal getallen van vijf verschillende cijfers met twee even en drie oneven cijfers is de som van de vorige resultaten: $3840 + 7200 = 11\,040$.

Opdracht 68 bladzijde 39

In hoeveel natuurlijke getallen, kleiner dan 1000, komt het cijfer 1 voor?

We lossen dit op via de complementregel.

– Er zijn 1000 natuurlijke getallen kleiner dan 1000 (van 0 tot en met 999).

– Het aantal getallen hierbij zonder het cijfer 1 is $9^3 = 729$. We kiezen namelijk driemaal uit de 9 cijfers 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9, waarbij herhaling toegelaten is en de volgorde van belang is. Bij een getal mag het eerste cijfer niet 0 zijn, maar in onze berekening correspondeert hiermee dan een getal met 2 cijfers (0 vooraan) of 1 cijfer (00 vooraan) of het getal 0 (000).

– Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: $1000 - 729 = 271$.

Alternatieve oplossingsmethode:

– Er zijn 1000 natuurlijke getallen kleiner dan 1000 (van 0 tot en met 999).

– Bereken het aantal getallen met 3 cijfers, waarin het cijfer 1 niet voorkomt: $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer
↓	↓	↓
8	9	9
(het 1ste cijfer kan geen 0 of 1 zijn)	(0 wel mogelijk)	(0 wel mogelijk)

– Bereken het aantal getallen met 2 cijfers, waarin het cijfer 1 niet voorkomt: $8 \cdot 9 = 72$.

1ste cijfer ↓ 8	2de cijfer ↓ 9
(het 1ste cijfer kan geen 0 of 1 zijn)	(0 wel mogelijk)

– Het aantal getallen met 1 cijfer dat verschillend is van 1, is 9 (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

– Het verschil van alle resultaten geeft het gevraagde aantal: $1000 - 648 - 72 - 9 = 271$.

Opdracht 69 bladzijde 39

Bepaal het aantal getallen van zes cijfers waarin tweemaal het cijfer 2, tweemaal het cijfer 1 en tweemaal het cijfer 0 voorkomt.

We berekenen het aantal 'anagrammen' van '221100', met als extra voorwaarde dat op de eerste plaats geen 0 mag staan.

We lossen dit op via de complementregel.

– Het aantal anagrammen van 221100 is $\overline{P}_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$.

– Het aantal anagrammen van 221100 waarbij 0 het eerste cijfer is, vinden we via $\overline{P}_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$.

– Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: $90 - 30 = 60$.

Andere oplossingswijze:

– Twee derde van alle anagrammen van 221100 heeft als eerste cijfer 1 of 2.

– Het gevraagde aantal is dus: $\dfrac{2}{3} \cdot \overline{P}_6^{2,2,2} = \dfrac{2}{3} \cdot 90 = 60$.

Opdracht 70 bladzijde 39

Het getal 25! eindigt op een aantal opeenvolgende nullen. Hoeveel zijn dit er?

Het gevraagde aantal opeenvolgende nullen wordt bepaald door de hoogste macht van 10 ($= 5 \cdot 2$) die je kunt afzonderen bij het schrijven van 25! als een product.

$$\begin{aligned}
25! &= 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\
&\quad \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= (5^2) \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot (5 \cdot 2^2) \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot (5 \cdot 3) \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 9 \cdot 8 \\
&\quad \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5) \cdot (2^2) \cdot 3 \cdot (2) \cdot 1 \\
&= 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (5^6 \cdot 2^6) \\
&= 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (10^6)
\end{aligned}$$

Het getal 25! eindigt op 6 opeenvolgende nullen.

Opdracht 71 bladzijde 39

We nemen alle permutaties van de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 en rangschikken de getallen van klein naar groot.

Wat is het 79e getal in deze rij?

- We tellen het aantal getallen die beginnen met een '1': $P_4 = 4! = 24$.
- Er zijn dus ook 24 getallen die beginnen met een '2'; in totaal hebben we nu 48 getallen.
- 24 getallen beginnen met een '3', waardoor we al 72 getallen hebben.
  Het gevraagde getal zal 4 als eerste cijfer hebben.
- Het aantal getallen dat start met '41' is: $P_3 = 3! = 6$. In totaal hebben we nu 78 getallen.
- Het 79ste getal is dan 42 135.

Opdracht 72 bladzijde 39

Op hoeveel manieren kan men $n + 1$ verschillende boeken verdelen onder n leerlingen waarbij elke leerling minstens één boek moet ontvangen?

- Eén leerling zal twee boeken krijgen, alle n – 1 andere leerlingen krijgen één boek. De twee boeken kunnen op C_{n+1}^{2} manieren gekozen worden.
- We maken hiermee n boekenpakketten: 1 met twee boeken en n – 1 met één boek.
- Deze n boekenpakketten kunnen we op $P_n = n!$ manieren verdelen onder de n leerlingen.
- Het gevraagde aantal mogelijkheden is: $C_{n+1}^{2} \cdot P_n = \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} \cdot n! = \dfrac{n \cdot (n+1)!}{2}$.

Andere oplossingswijze:

- We laten n leerlingen kiezen uit n + 1 boeken. Deze keuze kan op $V_{n+1}^{n} = (n+1)!$ manieren.
- Het overblijvende boek kan bij elk van de n leerlingen terechtkomen; er zijn dus n manieren om dit te verdelen.
- Tesamen vinden we zo $(n + 1)! \cdot n$ mogelijke verdelingen.
- Dit resultaat moeten we nog delen door 2, omdat de volgorde bij de leerling die 2 boeken krijgt, niet van belang is. Stel dat deze leerling eerst boek A gekozen had en later boek X krijgt als tweede boek, dan is dit hetzelfde als eerst boek X kiezen en later boek A krijgen.
- Het gevraagde aantal mogelijkheden is bijgevolg $\dfrac{(n+1)! \cdot n}{2}$.

Opdracht 73 bladzijde 39

Hoeveel oplossingen (x, y, z, u) met $x, y, z, u \in \mathbb{N}$ zijn er die voldoen aan $x + y + z + u = 19$?

Enkele mogelijke resultaten zijn: (18, 1, 0, 0) of (4, 5, 3, 7) of ...

We kunnen dit bekijken als een verdeling van 19 identieke munten over 4 personen.

Er zijn $\overline{C}_4^{19} = C_{19+4-1}^{19} = C_{22}^{19} = 1540$ mogelijke oplossingen.

Opdracht 74 bladzijde 40

Op hoeveel manieren kun je een trap van 9 treden beklimmen als je stappen neemt van 1 of 2 treden?

A 34 **B** 54 **C** 89 **D** 144 **E** geen van de voorgaande

(Bron © St. Cloud State University Math Contest, 2017)

We tellen het aantal mogelijkheden via de stappen van twee treden. Als de trap uit 9 treden bestaat, dan kunnen we 0, 1, 2, 3 of maximaal 4 stappen van twee treden nemen.

Bij de laatste trede kunnen we enkel een stap van één trede nemen.

- We kunnen 0 stappen van twee treden nemen (en 9 van één trede). Dit kan op 1 manier.
- Als we 1 stap van twee treden nemen, kunnen we kiezen uit 8 (= 9 – 1) mogelijkheden.
- Bij 2 stappen van twee treden, kunnen we kiezen uit 7 (= 9 – 2) mogelijkheden.
  De laatste trede is sowieso niet mogelijk. Maar als we kiezen om bijvoorbeeld bij de 3de trede een stap van twee treden te nemen, dan wordt de 4de trede automatisch overgeslagen.
  Het aantal keuzemogelijkheden is bijgevolg: $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!\,5!} = 21$.
- Analoog kunnen we bij 3 stappen van twee treden kiezen uit 6 (= 9 – 3) mogelijke treden. Het aantal mogelijkheden is $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$.
- Tot slot het aantal mogelijkheden bij 4 stappen van twee treden: $C_5^4 = \dfrac{5!}{4!\,1!} = 5$.

Er zijn $C_9^0 + C_8^1 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4 = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$ manieren om de trap te beklimmen.

Antwoord E is juist.

Deze opdracht kan ook opgelost worden als een variant op de rij van Fibonacci (zie 'rijen en reeksen').

Opdracht 75 bladzijde 40

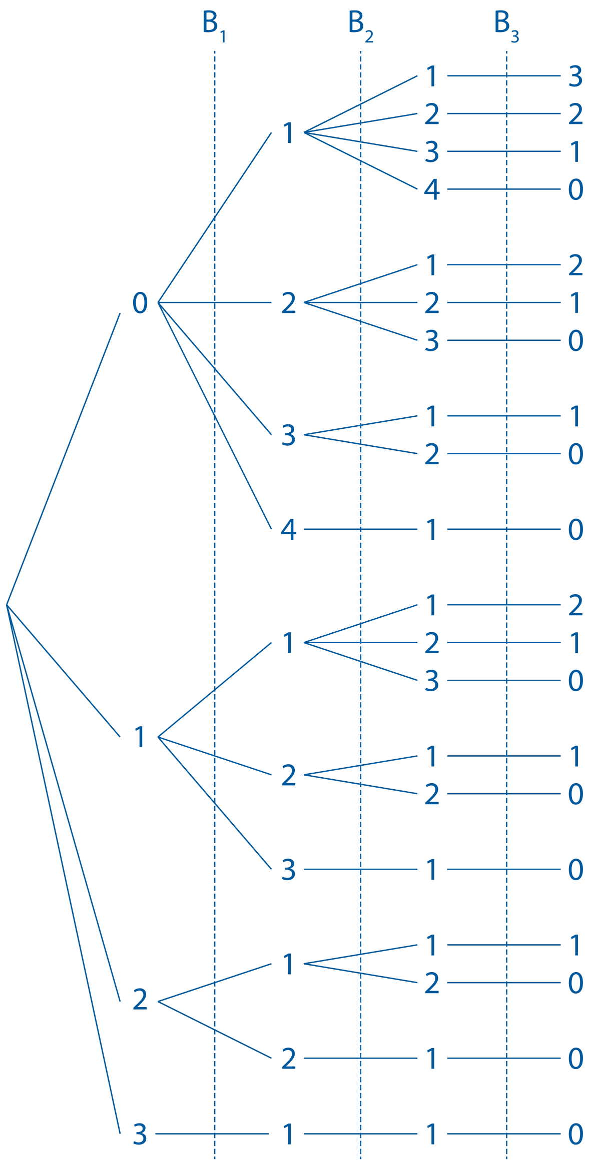
Op hoeveel manieren kunnen drie broers en vijf andere jongens naast elkaar zitten op een rij als geen twee broers naast elkaar mogen zitten?

(Bron © Elon University Math Contest, 2018)

Het aantal mogelijkheden waarop de drie broers (B_1, B_2, B_3) onderling van plaats kunnen wisselen, is $P_3 = 3!$.

Voor de vijf andere jongens zijn er $P_5 = 5!$ mogelijkheden.

Tot slot zijn er 20 mogelijkheden om de broers en de andere jongens te plaatsen als geen twee broers naast elkaar mogen zitten. In het onderstaande schema kun je aflezen hoeveel jongens er telkens naast en tussen de broers zitten.



Samen geeft dit $3! \cdot 5! \cdot 20 = 6 \cdot 120 \cdot 20 = 14\,400$ manieren.

Opdracht 76 bladzijde 40

Bij een kaartspel krijgt iedere speler vijf kaarten uit een boek van 52 kaarten. We kijken enkel naar de waarde van de kaarten: aas, twee, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, negen, tien, boer, dame, heer.

Op hoeveel manieren kan de volgende trekking voorkomen:

1 een 'carré', dus vier dezelfde kaarten en een andere?

- Voor de vier dezelfde kaarten hebben we de keuze uit 13 waarden (aas, twee, ..., heer).
- De andere kaart moet uit de 12 overgebleven waarden gekozen worden. Hierbij moeten we ook de 4 mogelijkheden van de soort (harten, ruiten, klaveren, schoppen) in rekening brengen. Tesamen geeft dit 48 mogelijkheden.

  We kunnen dit deelresultaat ook sneller vinden: de andere kaart kan willekeurig gekozen worden uit de 48 overgebleven kaarten.
- Deze trekking kan op $13 \cdot 12 \cdot 4 = 13 \cdot 48 = 624$ manieren voorkomen.

2 een 'full house', dus drie dezelfde kaarten en twee dezelfde kaarten?

- Voor de drie dezelfde kaarten hebben we de keuze uit 13 waarden (aas, twee, ..., heer).

  Per gekozen waarde hebben we nog $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$ mogelijkheden wat de soorten (harten, ruiten, klaveren, schoppen) betreft.
- De twee dezelfde kaarten kunnen uit de 12 overgebleven waarden gekozen worden. Nu zijn er $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ mogelijkheden voor de soorten.
- Deze trekking kan op $13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$ manieren voorkomen.

3 een 'tris', dus drie dezelfde en twee andere, onderling verschillende?

- Voor de drie dezelfde kaarten hebben we de keuze uit 13 waarden (aas, twee, ..., heer).

  Per gekozen waarde hebben we nog $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$ mogelijkheden wat de soorten (harten, ruiten, klaveren, schoppen) betreft.
- De twee andere kaarten kunnen uit 12, respectievelijk 11 overgebleven waarden gekozen worden. Nu zijn er telkens 4 mogelijkheden voor de soorten. Omdat verwisseling van deze twee kaarten geen nieuw resultaat geeft, delen we het bijbehorende resultaat nog door 2.
- Deze trekking kan op $13 \cdot C_4^3 \cdot \dfrac{12 \cdot C_4^1 \cdot 11 \cdot C_4^1}{2} = 13 \cdot 4 \cdot \dfrac{12 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 4}{2} = 54\,912$ manieren voorkomen.

4 een 'dubbel paar', dus tweemaal twee dezelfde (maar geen carré) en een andere?

- Voor de eerste twee dezelfde kaarten hebben we de keuze uit 13 waarden (aas, twee, ..., heer).

  Per gekozen waarde hebben we nog $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ mogelijkheden wat de soorten (harten, ruiten, klaveren, schoppen) betreft.
- De andere twee dezelfde kaarten kunnen uit de 12 overgebleven waarden gekozen worden. Ook hier zijn er $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ mogelijkheden voor de soorten.
- Omdat verwisseling van deze twee duo's geen nieuw resultaat geeft, delen we het bijbehorende resultaat nog door 2.
- De andere kaart wordt uit de 11 overgebleven waarden gekozen. Er zijn 4 mogelijkheden voor de soort.
- Deze trekking kan op $\dfrac{13 \cdot C_4^2 \cdot 12 \cdot C_4^2}{2} \cdot 11 \cdot C_4^1 = \dfrac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 6}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 123\,552$ manieren voorkomen.

5 een 'paar', dus twee dezelfde en drie andere, onderling verschillende?

- Voor de twee dezelfde kaarten hebben we de keuze uit 13 waarden (aas, twee, ..., heer).

  Per gekozen waarde hebben we nog $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ mogelijkheden wat de soorten (harten, ruiten, klaveren, schoppen) betreft.
- De drie andere kaarten kunnen uit 12, respectievelijk 11 en 10 overgebleven waarden gekozen worden. Nu zijn er telkens 4 mogelijkheden voor de soorten. Omdat de onderlinge verwisseling van deze drie kaarten geen nieuw resultaat geeft, delen we het bijbehorende resultaat nog door 3!.
- Deze trekking kan op

  $13 \cdot C_4^2 \cdot \dfrac{12 \cdot C_4^1 \cdot 11 \cdot C_4^1 \cdot 10 \cdot C_4^1}{3!} = 13 \cdot 6 \cdot \dfrac{12 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 4}{6} = 1\,098\,240$ manieren voorkomen.

Opdracht 77 bladzijde 40

Gegeven: $N = 26! - 23! - 22!$. Het aantal opeenvolgende nullen waarop het getal N eindigt is

A gelijk aan 0.

B gelijk aan 3.

C gelijk aan 4.

D strikt groter dan 4.

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur & wiskunde-informatica-fysica, 2017)

Het gevraagde aantal opeenvolgende nullen wordt bepaald door de hoogste macht van 10 (= 5 · 2) die je kunt afzonderen bij het schrijven van N als een product.

$$N = 26! - 23! - 22!$$
$$= 22! \cdot \underbrace{(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 - 23 - 1)}_{\text{eindigt op 6, dus niet deelbaar door 5}}$$
$$= 22 \cdot 21 \cdot (5 \cdot 2^2) \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot (5 \cdot 3) \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5) \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2) \cdot 1 \cdot (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 - 23 - 1)$$
$$= 22 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 - 23 - 1) \cdot (5^4 \cdot 2^4)$$
$$= 22 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 - 23 - 1) \cdot (10^4)$$

Het getal N eindigt op 4 opeenvolgende nullen.

Antwoord C is juist.

Opdracht 78 bladzijde 40

Een doos bevat blauwe, groene en rode knikkers, minstens twaalf van elke kleur. Op tafel staat een blauw, een groen en een rood bord. Men trekt twaalfmaal een knikker en legt deze telkens in het bord van de overeenstemmende kleur.

1 Op hoeveel manieren kunnen de borden worden gevuld?

Je moet 12 keer kiezen uit 3 kleuren, waarbij herhaling toegelaten is en de volgorde niet van belang is (enkel het aantal knikkers per bord is belangrijk, niet de volgorde waarin ze gevuld worden).

Er zijn $\overline{C}_3^{12} = C_{12+3-1}^{12} = C_{14}^{12} = 91$ mogelijke manieren om de borden te vullen.

2 Hoeveel mogelijkheden zijn er om de borden te vullen wanneer elk bord minstens één knikker moet bevatten?

We leggen eerst in elk bord een knikker van de overeenstemmende kleur. Er moeten dan nog 9 knikkers verdeeld worden.

Er blijven $\overline{C}_3^{9} = C_{9+3-1}^{9} = C_{11}^{9} = 55$ manieren over om de borden te vullen.

3 Op hoeveel manieren kunnen de borden worden gevuld als juist één blauwe knikker werd getrokken en minstens één groene?

We leggen eerst één blauwe en één groene knikker in het bord van de overeenstemmende kleur. Er moeten dan nog 10 knikkers gekozen worden uit 2 mogelijke kleuren (groen en rood).

Er zijn $\overline{C}_2^{10} = C_{10+2-1}^{10} = C_{11}^{10} = 11$ mogelijkheden om de borden op deze manier te vullen.

Opdracht 79 bladzijde 40

Toon aan dat er meer mogelijkheden zijn om 30 leerlingen te plaatsen in een lokaal met 30 banken dan dat er waterdruppels zijn in de oceanen over de hele wereld. Om een idee te hebben over de afmetingen op aarde, is het nuttig te weten dat de straal van de aarde ongeveer 6370 km is.

- Het aantal mogelijkheden om 30 leerlingen te plaatsen in een lokaal met 30 banken is $P_{30} = 30! = 2{,}653 \cdot 10^{32}$.
- De oppervlakte van een bol met straal r is $4\pi r^2$.

  Voor het aardoppervlakte geeft dit $4\pi \cdot 6370^2\ \text{km}^2 = 509\,904\,364\ \text{km}^2$.
- Als 70 % van het aardoppervlak bedekt is met water en we uitgaan van een gemiddelde diepte van 5 km voor de oceanen, dan is het volume water:
  $509\,904\,364 \cdot 0{,}7 \cdot 5\ \text{km}^3 = 1\,784\,665\,274\ \text{km}^3 \approx 1{,}8 \cdot 10^9\ \text{km}^3$.

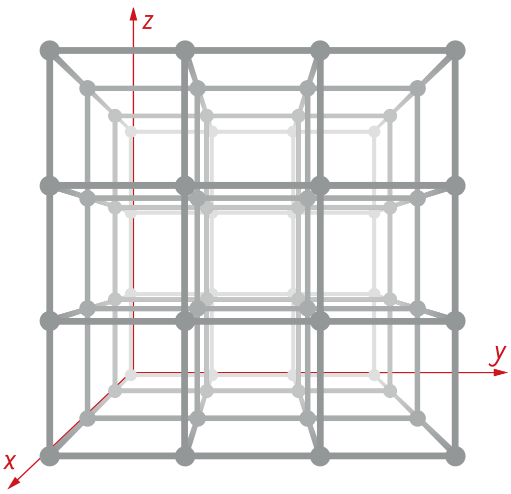
  Uitgedrukt in mm^3 wordt dit: $1{,}8 \cdot 10^9\ \text{km}^3 = 1{,}8 \cdot 10^9 \cdot 10^{18}\ \text{mm}^3 = 1{,}8 \cdot 10^{27}\ \text{mm}^3$.
- Stel dat het volume van een waterdruppel 1 mm^3 is, dan zijn er dus $1{,}8 \cdot 10^{27}$ waterdruppels in de oceanen.

We hebben de gemiddelde diepte van de oceanen een beetje overschat en het volume van een waterdruppel onderschat. Het aantal mogelijkheden om 30 leerlingen te plaatsen in een lokaal met 30 banken ($2{,}653 \cdot 10^{32}$) is duidelijk groter dan het aantal waterdruppels in de oceanen over de hele wereld ($1{,}8 \cdot 10^{27}$).

Opdracht 80 bladzijde 41

In het driedimensionele rooster hiernaast komen de snijpunten van de stangen overeen met punten met gehele coördinaten (a, b, c). De oorsprong en de coördinaatassen liggen zoals op de figuur aangeduid. Het rooster is oneindig uitgestrekt.

Geef een formule voor het aantal kortste routes, langs de stangen, vanuit de oorsprong naar het punt $A(17, 6, 11)$. De numerieke waarde moet je niet berekenen.



Om vanuit de oorsprong (0, 0, 0) het punt A(17, 6, 11) te bereiken via een kortste route, zijn er 17 + 6 + 11 = 34 stappen nodig.

17 stappen van de 34 moeten volgens de x-richting, 6 stappen van de overgebleven 17 volgens de y-richting en de resterende 11 stappen volgens de z-richting.

Een formule voor dit aantal kortste routes is $C_{34}^{17} \cdot C_{17}^{6} = \dfrac{34!}{17!\,17!} \cdot \dfrac{17!}{6!\,11!} = \dfrac{34!}{17!\,6!\,11!}$.

Opdracht 81 bladzijde 42

Voor een bedrijfsbezoek kiezen tien leerlingen elk één van de vijf bedrijven uit de regio.

Op hoeveel manieren kan deze keuze gebeuren?

De tien leerlingen kunnen eenzelfde bedrijf kiezen; herhaling is dus toegelaten.
De volgorde is van belang, omdat die aangeeft welke leerling welk bedrijf kiest.

De keuze is mogelijk op $\overline{V}_5^{10} = 5^{10} = 9\,765\,625$ manieren.

Opdracht 82 bladzijde 42

We bekijken codes bestaande uit vijf cijfers.

Hoeveel codegetallen zijn er

1 die bestaan uit verschillende cijfers?

Bij codegetallen is de volgorde van belang en het eerste cijfer mag een 0 zijn.

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
10	9	8	7	6

Er zijn $V_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ codegetallen die bestaan uit verschillende cijfers.

2 waarvan enkel de eerste twee cijfers gelijk zijn?

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
10	1	9	8	7
	(gelijk aan 1ste cijfer)	(verschillend van vorige cijfers)	(verschillend van vorige cijfers)	(verschillend van vorige cijfers)

Er zijn $V_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ mogelijkheden.

3 met juist twee gelijke cijfers, niet noodzakelijk naast elkaar?

Zie opdracht **2**.

De twee gelijke cijfers kunnen nu op $C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ mogelijke plaatsen staan.

Het totaal aantal mogelijkheden is bijgevolg $V_{10}^{4} \cdot C_5^2 = 5040 \cdot 10 = 50\,400$.

4 met vier gelijke cijfers?

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
10	1	1	1	9
	(gelijk aan 1ste cijfer)	(gelijk aan 1ste cijfer)	(gelijk aan 1ste cijfer)	(verschillend van vorig cijfer)

Het cijfer dat verschillend is van de andere vier kan op 5 verschillende plaatsen staan.

Er bestaan $V_{10}^{2} \cdot 5 = (10 \cdot 9) \cdot 5 = 450$ dergelijke codegetallen.

5 met vijf gelijke cijfers?

1ste cijfer	2de cijfer	3de cijfer	4de cijfer	5de cijfer
↓	↓	↓	↓	↓
10	1	1	1	1
	(gelijk aan 1ste cijfer)	(gelijk aan 1ste cijfer)	(gelijk aan 1ste cijfer)	(gelijk aan 1ste cijfer)

Er bestaan 10 codegetallen met vijf gelijke cijfers.

Opdracht 83 bladzijde 42

In een treincoupé staan twee zitbanken voor drie personen.

Op hoeveel manieren kunnen vijf personen plaatsnemen in deze coupé als de lege zitplaats een van de twee zitplaatsen is langs het gangpad?

Nummer de zitplaatsen zodat de plaatsen aan het gangpad nummer 1 en 6 hebben.

Ofwel is zitplaats 1 leeg:

1ste zitplaats	2de zitplaats	3de zitplaats	4de zitplaats	5de zitplaats	6de zitplaats
↓ 1	↓ 5	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 1
(lege zitplaats langs gang-pad)					(gangpad)

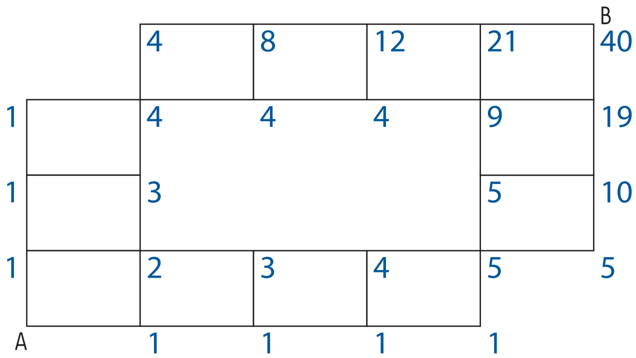
Ofwel is zitplaats 6 leeg:

1ste zitplaats	2de zitplaats	3de zitplaats	4de zitplaats	5de zitplaats	6de zitplaats
↓ 5	↓ 4	↓ 3	↓ 2	↓ 1	↓ 1
(gangpad)					(lege zitplaats langs gang-pad)

Er zijn in totaal $P_5 \cdot 2 = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 2 = 240$ mogelijkheden.

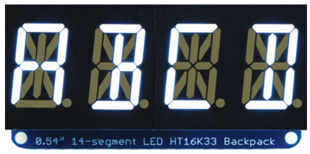
Opdracht 84 bladzijde 42

Bepaal het aantal kortste routes van A naar B.



Er zijn 40 kortste routes van A naar B.

Opdracht 85 bladzijde 43



De tekens op sommige displays zijn opgebouwd uit één of meerdere lijnstukjes (segmentjes) van een rooster met 14 segmenten. Hiernaast zie je de letters A, B, C en D die op zo'n display zijn weergegeven.

1 Hoeveel verschillende tekens zijn er in totaal mogelijk? Je mag 'blanco' ook als een teken beschouwen.

Voor elk segmentje zijn er 2 mogelijkheden: AAN of UIT.

Er zijn $\overline{V}_2^{14} = 2^{14} = 16\,384$ verschillende tekens mogelijk.

2 Hoeveel verschillende tekens zijn er waarbij er 8 van de 14 segmenten AAN staan? De tekens moeten hierbij geen bekende letters of cijfers voorstellen; elk teken is toegestaan.

8 segmenten van de 14 moeten AAN staan; hun onderlinge verwisseling geeft geen nieuw teken.

Er zijn $C_{14}^{8} = \dfrac{14!}{8!\,6!} = 3003$ dergelijke tekens.

Opdracht 86 bladzijde 43

10 identieke ballen worden verdeeld over 4 verschillende dozen.

1 Op hoeveel manieren is dit mogelijk als hierbij dozen leeg mogen blijven?

Je moet 10 keer kiezen uit 4 dozen, waarbij herhaling toegelaten is en de volgorde niet van belang is (de ballen zijn identiek).

Er zijn $\overline{C}_4^{10} = C_{10+4-1}^{10} = C_{13}^{10} = 286$ mogelijke manieren om de ballen te verdelen.

2 Op hoeveel manieren is dit mogelijk als hierbij geen enkele doos leeg mag blijven?

We leggen eerst in elk doos een bal. Er moeten dan nog 6 ballen verdeeld worden.

Er blijven $\overline{C}_4^{6} = C_{6+4-1}^{6} = C_9^{6} = 84$ manieren over om de ballen te verdelen.

Opdracht 87 bladzijde 43

10 balletjes genummerd van 1 tot 10 worden verdeeld over 5 vakjes gelabeld met A, B, C, D en E, op zulke wijze dat in elk vakje precies twee balletjes terechtkomen.

Op hoeveel verschillende manieren kan dit gedaan worden?

A $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

B $2^8 \times 3^4 \times 5 \times 7$

C $2^8 \times 3^4 \times 7$

D $2^7 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

E $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2015)

Mogelijke verdelingen zijn: AABBCCDDEE of ABCDEEDCBA of ...

Het aantal verdelingen is:

$$\begin{aligned}\overline{P}_{10}^{2,2,2,2,2} &= \frac{10!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7\end{aligned}$$

Antwoord E is juist.

Andere oplossingswijze:

We kiezen eerst 2 balletjes uit de 10 balletjes voor vakje A. Dit kan op C_{10}^2 manieren.

Nadien kiezen we 2 balletjes uit de overgebleven 8 voor vakje B. Hiervoor zijn er C_8^2 mogelijkheden.

Voor vakje C en D zijn er respectievelijk C_6^2 en C_4^2 mogelijkheden. De overgebleven 2 balletjes komen in vakje E terecht.

In totaal is het aantal mogelijke verdelingen:

$$\begin{aligned}C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 &= \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \\ &= \frac{10!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= 5 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7\end{aligned}$$

Antwoord E is juist.

Opdracht 88 bladzijde 43

Hoeveel verschillende uitkomsten kunnen we verkrijgen bij het k keer na elkaar gooien van een dobbelsteen

1 als de volgorde van belang is?

Bij deze uitkomsten is de volgorde van belang en herhaling toegelaten.

Er zijn $\overline{V}_6^k = 6^k$ verschillende uitkomsten mogelijk.

2 als de volgorde niet van belang is?

Nu is de volgorde niet van belang en herhaling toegelaten.

Er zijn $\overline{C}_6^k = C_{k+6-1}^k = C_{k+5}^k = \dfrac{(k+5)!}{k!\,5!}$ verschillende uitkomsten mogelijk.

Opdracht 89 bladzijde 43

Zeven objecten A, B, C, D, E, F en G worden in een rij geplaatst, zodat object G zich links van object C bevindt.

Op hoeveel verschillende manieren kan dit gedaan worden?

A 1260 **B** 2520 **C** 2660 **D** 2820 **E** 5040

(Bron © St. Cloud State University Math Contest, 2016)

Er zijn in totaal $P_7 = 7! = 5040$ mogelijkheden om de zeven objecten in een rij te plaatsen. Omdat in de helft hiervan object G zich links van object C bevindt, delen we dit resultaat nog door 2.

Het gevraagde aantal manieren is dus 2520.

Antwoord B is juist.

Andere oplossingswijze:

1ste object ↓ 1	2de object ↓ 6	3de object ↓ 5	4de object ↓ 4	5de object ↓ 3	6de object ↓ 2	7de object ↓ 1
(G)						

of

1ste object ↓ 5	2de object ↓ 1	3de object ↓ 5	4de object ↓ 4	5de object ↓ 3	6de object ↓ 2	7de object ↓ 1
(geen G of C)	(G)	(C wel mogelijk)				

of

1ste object ↓ 5	2de object ↓ 4	3de object ↓ 1	4de object ↓ 4	5de object ↓ 3	6de object ↓ 2	7de object ↓ 1
(geen G of C)	(geen G of C)	(G)	(C wel mogelijk)			

of

1ste object ↓ 5	2de object ↓ 4	3de object ↓ 3	4de object ↓ 1	5de object ↓ 3	6de object ↓ 2	7de object ↓ 1
(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(G)	(C wel mogelijk)		

of

1ste object ↓ 5	2de object ↓ 4	3de object ↓ 3	4de object ↓ 2	5de object ↓ 1	6de object ↓ 2	7de object ↓ 1
(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(G)	(C wel mogelijk)	

of

1ste object ↓ 5	2de object ↓ 4	3de object ↓ 3	4de object ↓ 2	5de object ↓ 1	6de object ↓ 1	7de object ↓ 1
(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(geen G of C)	(G)	(C)

Het gevraagde aantal manieren is bijgevolg $(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 5! = 21 \cdot 120 = 2520$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 90 bladzijde 44

We vormen 'woorden' van 6 letters met de letters van het woord 'lokaal'. In deze context is een 'woord' een willekeurige lettercombinatie, die dus niet noodzakelijk een zinvolle betekenis heeft.

1 Hoeveel dergelijke 'woorden' kunnen er worden gevormd?

A 120 **B** 180 **C** 360 **D** 720 **E** 840

Mogelijke woorden zijn AAKLLO of LOKALA of ...

Het aantal woorden is $\overline{P}_6^{2,2} = \dfrac{6!}{2!\,2!} = 180$.

Antwoord B is juist.

2 Als men alle gevormde 'woorden' alfabetisch rangschikt, op de hoeveelste plaats staat dan 'koalla'?

A 86^e **B** 87^e **C** 146^e **D** 147^e **E** 171^e

- Het aantal woorden dat start met A is: $\overline{P}_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.
- Het aantal woorden dat start met KA is: $\overline{P}_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$.
- Het aantal woorden dat start met KL is: $\overline{P}_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$.
- In totaal hebben we nu 84 woorden. Het 85ste woord is KOAALL, het 86ste woord is KOALAL. Bijgevolg is KOALLA het 87ste woord.
- Antwoord B is juist.

3 Hoeveel van deze 'woorden' starten NIET met 'l'?

A 30 **B** 60 **C** 90 **D** 120 **E** 150

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2014)

We lossen dit op via de complementregel.

- Er zijn in totaal 180 woorden mogelijk (zie **1**).
- Het aantal woorden dat start met L is: $\overline{P}_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.
- Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: 180 – 60 = 120.

Antwoord D is juist.

Opdracht 91 bladzijde 44

Tijdens een sportkamp waaraan 20 jongeren deelnemen, worden vier extra sporten aangeboden: waterpolo, mountainbike, tafeltennis en hockey.

Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal als elke deelnemer minstens één extra sport moet beoefenen?

Elke deelnemer kan kiezen uit 1 of 2 of 3 of 4 extra sporten. Het aantal keuzemogelijkheden (sportpakketten) per deelnemer is bijgevolg: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$.

De 20 jongeren kiezen dus uit deze 15 sportpakketten, herhaling is toegelaten. De volgorde is van belang, omdat die aangeeft welke jongere welk sportpakket kiest.

De keuze is mogelijk op $\overline{V}_{15}^{20} = 15^{20} = 3{,}325 \cdot 10^{23}$ manieren.

Merk op dat het aantal sportpakketten ook via de complementregel kan gevonden worden.

Elke deelnemer kan voor elk van de 4 extra sporten WEL of NIET kiezen; de mogelijkheid waarbij telkens NIET gekozen wordt, moeten we schrappen. Dit kan op $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ manieren.

Opdracht 92 bladzijde 44

Een vriendengroep bestaat uit zeven mannen en vijf vrouwen. Louis en Louise zijn het enige gehuwde koppel.

Op hoeveel manieren kunnen hieruit drie mannen en drie vrouwen gekozen worden waarin het gehuwde koppel niet samen zit?

We lossen dit op via de complementregel.

- We kiezen 3 mannen uit 7 en 3 vrouwen uit 5, de volgorde is hierbij niet van belang. Dit kan op $C_7^3 \cdot C_5^3 = \dfrac{7!}{3!\,4!} \cdot \dfrac{5!}{3!\,2!} = 35 \cdot 10 = 350$ manieren.
- We berekenen daarna het aantal mogelijkheden waarbij het gehuwde koppel wel samen zit. We moeten hiervoor nog 2 mannen kiezen uit de overblijvende 6 en 2 vrouwen uit de overblijvende 4.
  Dit kan op $C_6^2 \cdot C_4^2 = \dfrac{6!}{2!\,4!} \cdot \dfrac{4!}{2!\,2!} = 15 \cdot 6 = 90$ manieren.
- Het verschil van beide resultaten geeft het gevraagde aantal: 350 – 90 = 260.

Andere oplossingswijze:

– We berekenen het aantal mogelijkheden waarbij Louis *wel* en Louise *niet* zit:

$$C_6^2 \cdot C_4^3 = \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{3!\,1!} = 15 \cdot 4 = 60.$$

– We berekenen het aantal mogelijkheden waarbij Louis *niet* en Louise *wel* zit:

$$C_6^3 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 20 \cdot 6 = 120.$$

– We berekenen het aantal mogelijkheden waarbij Louis *niet* en ook Louise *niet* zit:

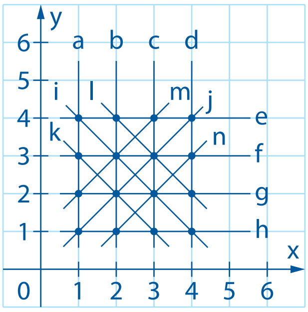
$$C_6^3 \cdot C_4^3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{4!}{3!\,1!} = 20 \cdot 4 = 80.$$

– De som van alle resultaten geeft het gevraagde aantal: $60 + 120 + 80 = 260$.

Opdracht 93 bladzijde 44

Bepaal het aantal driehoeken met een strikt positieve oppervlakte en waarvan de hoekpunten gehele coördinaten (x, y) hebben zodanig dat $1 \leqslant x \leqslant 4$ en $1 \leqslant y \leqslant 4$.

We kunnen een driehoek tekenen door 3 niet-collineaire punten.



We lossen dit op via de complementregel.

– We kiezen 3 punten (x, y) uit de 16 mogelijke (waarbij x en y geheel zijn en $1 \leqslant x \leqslant 4$ en $1 \leqslant y \leqslant 4$), de volgorde is hierbij niet van belang. Dit kan op $C_{16}^3 = \frac{16!}{3!\,13!} = 560$ manieren.

– Er zijn 10 lijnen (4 verticale a, b, c, d en 4 horizontale e, f, g, h en 2 diagonale i en j) waarop 4 punten liggen. Het aantal manieren om hieruit 3 punten te kiezen, die dus collineair zijn, is: $10 \cdot C_4^3 = 10 \cdot \frac{4!}{3!\,1!} = 10 \cdot 4 = 40$.

– Er zijn 4 lijnen (k, l, m, n) waarop 3 punten liggen. Het aantal manieren om hieruit 3 punten te kiezen, die dus collineair zijn, is: $4 \cdot C_3^3 = 4 \cdot 1 = 4$.

– Het verschil van alle resultaten geeft het gevraagde aantal: $560 - 40 - 4 = 516$.

Opdracht 94 bladzijde 44

Op hoeveel manieren kun je twaalf verschillende boeken verdelen over tien personen waarbij elke persoon minstens één boek krijgt?

- We berekenen eerst het aantal manieren waarbij twee personen 2 boeken krijgen en alle acht andere één boek.
  - De twee keer twee boeken die samen verdeeld worden, kunnen op $C_{12}^{2} \cdot C_{10}^{2}$ manieren gekozen worden.
  - We maken hiermee 10 boekenpakketten: 2 met twee boeken en 8 met één boek.
  - Deze 10 boekenpakketten kunnen we op $P_{10} = 10!$ manieren verdelen onder de 10 personen.
    We moeten dit resultaat nog door 2 delen. Stel bijvoorbeeld dat het eerste boeken-pakket met twee boeken bestaat uit A en B en het tweede uit C en D, dan zal dit dezelfde keuzemogeljkheid geven als C en D in het eerste boekenpakket en A en B in het tweede.
- We berekenen daarna het aantal manieren waarbij één persoon 3 boeken krijgt en alle negen andere één boek.
  - De drie boeken die samen verdeeld worden, kunnen op C_{12}^{3} manieren gekozen worden.
  - We maken hiermee 10 boekenpakketten: 1 met drie boeken en 9 met één boek.
  - Deze 10 boekenpakketten kunnen we op $P_{10} = 10!$ manieren verdelen onder de 10 personen.
- Het gevraagde aantal mogelijkheden is dan:

$$C_{12}^{2} \cdot C_{10}^{2} \cdot \frac{10!}{2} + C_{12}^{3} \cdot 10!$$

$$= 66 \cdot 45 \cdot \frac{3\,628\,800}{2} + 220 \cdot 3\,628\,800$$

$$= 5\,388\,768\,000 + 798\,336\,000$$

$$= 6\,187\,104\,000$$

Andere oplossingswijze:

- We laten met elke persoon een letter corresponderen: ABCDEFGHIJ.
- We berekenen eerst het aantal manieren waarbij 2 personen twee boeken krijgen en alle acht andere één boek.
  - Deze 2 personen worden gekozen uit de 10, de volgorde is niet van belang. Dit kan op C_{10}^{2} manieren gebeuren.
  - De 2 gekozen personen krijgen een extra letter. Stel dat de eerste en derde persoon twee boeken krijgen, dan hebben we nu 12 letters: AABCCDEFGHIJ.
  - Het aantal verdelingen van de 12 boeken over 10 personen, waarbij de eerste en derde persoon er twee krijgen, kan nu bekeken worden als het aantal anagrammen van AABCCDEFGHIJ. Dit aantal is $\overline{P}_{12}^{2,2}$.
  - Tesamen zijn er $C_{10}^{2} \cdot \overline{P}_{12}^{2,2}$ verdelingen waarbij 2 personen twee boeken krijgen.

- We berekenen daarna het aantal manieren waarbij één persoon 3 boeken krijgt en alle negen andere één boek.
  - Deze ene persoon kan willekeurig gekozen worden uit de 10. Dit kan op 10 manieren gebeuren.
  - De gekozen persoon krijgt twee extra letters. Stel dat de tweede persoon drie boeken krijgt, dan hebben we nu 12 letters: ABBBCDEFGHIJ.
  - Het aantal verdelingen van de 12 boeken over 10 personen, waarbij de tweede persoon er drie krijgt, kan nu bekeken worden als het aantal anagrammen van ABBBCDEFGHIJ. Dit aantal is $\bar{P}_{12}^{3}$.
  - Tesamen zijn er $10 \cdot \bar{P}_{12}^{3}$ verdelingen waarbij één persoon drie boeken krijgt.
- Het gevraagde aantal mogelijkheden is dan:

$$C_{10}^{2} \cdot \bar{P}_{12}^{2,2} + 10 \cdot \bar{P}_{12}^{3}$$

$$= \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{12!}{2!\,2!} + 10 \cdot \frac{12!}{3!}$$

$$= 5\,388\,768\,000 + 798\,336\,000$$

$$= 6\,187\,104\,000$$