Hoofdstuk 2

Verloop van functies

Opdracht 1 bladzijde 70

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \ln(9 - x^2) + x$.

1 Bepaal het domein van f.

Om het domein te bepalen, bepalen we de oplossingsverzameling van de ongelijkheid $9 - x^2 > 0 \iff -3 < x < 3$.

We vinden: dom f =]−3, 3[.

2 Bepaal exact de x-waarde(n) waarvoor f een relatief extremum bereikt.

$$f'(x) = \frac{-2x}{9 - x^2} + 1 = \frac{-x^2 - 2x + 9}{9 - x^2}$$

De noemer van f′(x) is steeds strikt positief binnen het domein.

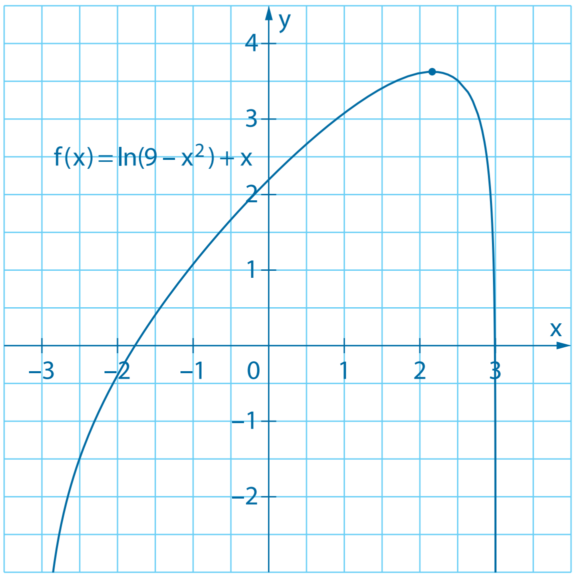
De teller is 0 voor $x = -1 - \sqrt{10} \approx -4{,}16 < -3$ en voor $x = -1 + \sqrt{10} \approx 2{,}16$.

We vinden als tekentabel van f′(x):

x	−3		$\sqrt{10} - 1$		3
f′(x)		+	0	−	

De eerste afgeleide gaat over van positief naar negatief voor $x = \sqrt{10} - 1$ zodat f er een relatief maximum bereikt.

Dit maximum is gelijk aan $f\left(\sqrt{10} - 1\right) \approx 3{,}63$.



Opdracht 2 bladzijde 75

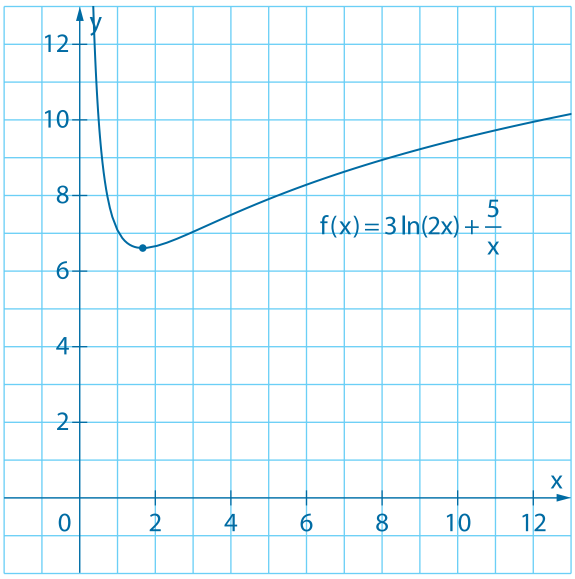
Onderzoek het stijgen en dalen en de relatieve extrema van de functie $f\colon x \mapsto 3\ln 2x + \frac{5}{x}$.

dom f =]0, +∞[

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 - \frac{5}{x^2} = \frac{3x - 5}{x^2}$$

x	0		$\frac{5}{3}$	
f′(x)		−	0	+
f(x)		↘	$3\ln\frac{10}{3} + 3$ min.	↗

f is dalend in $\left]0, \frac{5}{3}\right]$, stijgend in $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$ en bereikt een relatief minimum $3\ln\frac{10}{3} + 3$ voor $x = \frac{5}{3}$.



Opdracht 3 bladzijde 75

Voor welke waarde(n) van a bereikt de grafiek van $f: x \mapsto xe^{ax^2}$ een extremum gelijk aan 2?

$f'(x) = e^{ax^2} + xe^{ax^2} \cdot (2ax) = (1 + 2ax^2) \cdot e^{ax^2}$

De nulpunten van de eerste afgeleide, met tekenwissel, zijn de oplossingen van de vergelijking $1 + 2ax^2 = 0$, dit zijn $\pm\sqrt{\dfrac{-1}{2a}}$.

De extrema zijn dus gelijk aan

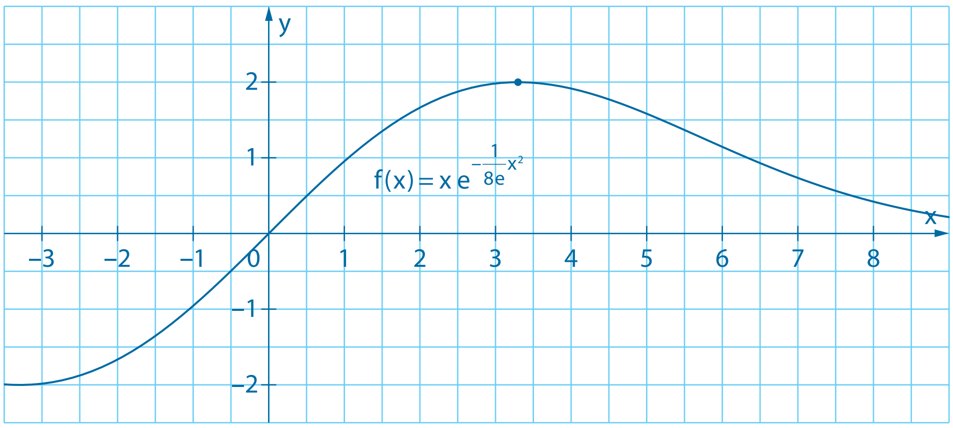
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{2a}}\right) = \pm\sqrt{\frac{-1}{2a}}\, e^{a\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{2a}}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{-1}{2a}}\, e^{-\frac{1}{2}}.$$

Dit kan alleen maar gelijk zijn aan 2 als we de positieve vierkantswortel nemen:

$$\sqrt{\frac{-1}{2a}}\, e^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2ae} = 4$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1}{8e}$$

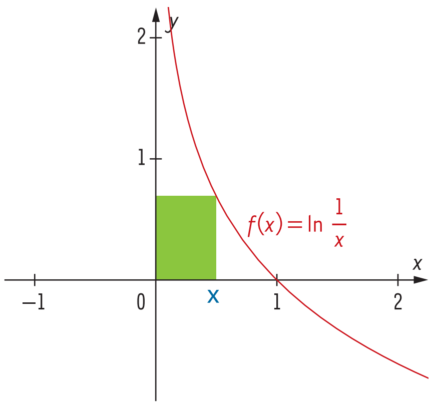


Opdracht 4 bladzijde 75

Gegeven de functie $f: x \mapsto \ln\dfrac{1}{x}$.

Een rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de x-as en met de y-as ligt tussen de grafiek van f en de assen in het eerste kwadrant.

Wat zijn de afmetingen van de rechthoek met de grootste oppervlakte?



De te maximaliseren oppervlakte is

$$A(x) = x \cdot \ln\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow A'(x) = \ln\frac{1}{x} + x \cdot x \cdot \frac{-1}{x^2} = \ln\frac{1}{x} - 1$$

De eerste afgeleide is nul als

$$\ln\frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

We gebruiken de tweede afgeleide test om na te gaan of dit een maximum is.

$$A''(x) = x \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Aangezien $A''\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e < 0$, bereikt de oppervlakte een maximum voor $x = \dfrac{1}{e}$.

Bij een maximale oppervlakte is de basis van de rechthoek $\dfrac{1}{e}$ en de hoogte $\ln e = 1$.

Opdracht 5 bladzijde 75

Bepaal de relatieve extrema van de functie $f: x \mapsto \sin 2x + 2\cos x$.

Gebruik de tweede afgeleide-test om te bepalen welke de maxima en welke de minima zijn.

$f(x) = \sin 2x + 2\cos x$

$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ of $\sin x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$f''(x) = -4\sin 2x - 2\cos x$

$$f''\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right)$$

$$= -4\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -3\sqrt{3} < 0$$

f bereikt relatieve maxima voor $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ gelijk aan $\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

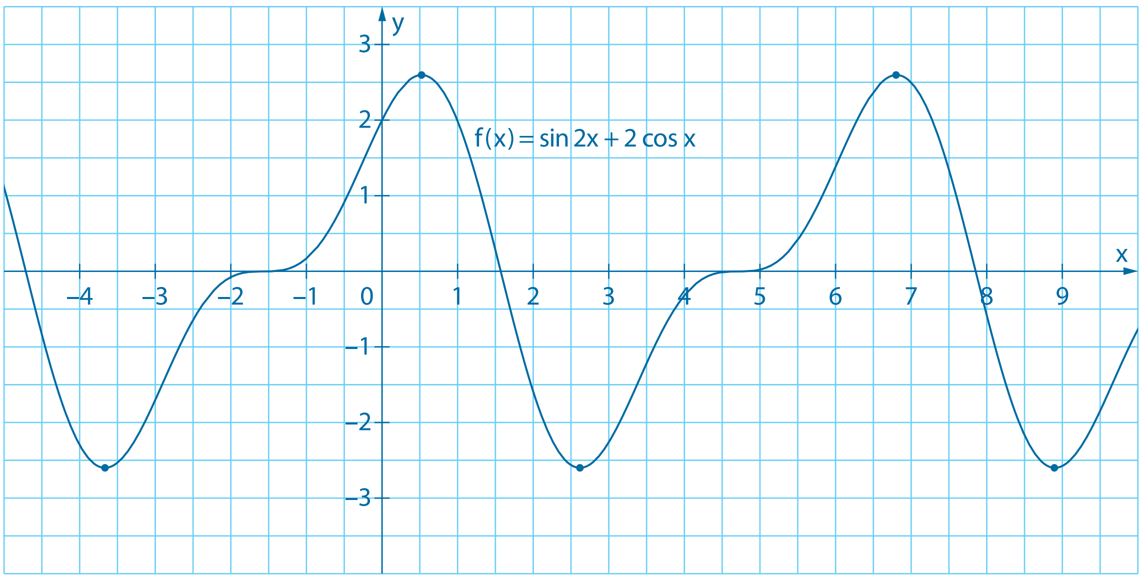
$$f''\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = -4\sin\left(\frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right)$$

$$= -4\sin\frac{5\pi}{3} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3} > 0$$

f bereikt relatieve minima voor $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ gelijk aan $\sin\frac{5\pi}{3} + 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

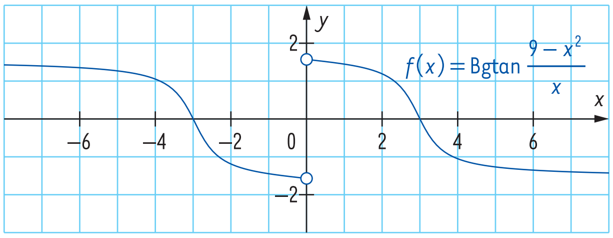
$$f''\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -4\sin(-\pi) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

f bereikt geen extremum voor $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.



Opdracht 6 bladzijde 75

Gegeven de grafiek van f: $x \longmapsto \text{Bgtan}\,\dfrac{9-x^2}{x}$.



1 Bepaal het domein van f.

$\text{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2 Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ en $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \text{Bgtan}\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{9-x^2}{x}\right) = \text{Bgtan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{(limiet van een samengestelde functie)}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \text{Bgtan}\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{9-x^2}{x}\right) = \text{Bgtan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

3 Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

Uit **2** volgt dat er geen verticale asymptoot met vergelijking $x = 0$ is.

De grafiek van f heeft wel twee horizontale asymptoten want

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{Bgtan}\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{9-x^2}{x}\right) = \text{Bgtan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{en} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{Bgtan}\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{9-x^2}{x}\right) = \text{Bgtan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

De rechten met vergelijking $y = -\dfrac{\pi}{2}$ en $y = \dfrac{\pi}{2}$ zijn de horizontale asymptoten van de grafiek van f.

4 Toon met een berekening aan dat f geen relatieve extrema heeft.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{9-x^2}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot (-2x) - (9-x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{-x^2-9}{x^2+(9-x^2)^2}$$

De eerste afgeleide is strikt negatief binnen het domein, dus zijn er geen extrema.

Opdracht 7 bladzijde 77

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto x^4 \cdot e^{-x}$.

Bepaal exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = (4x^3 - x^4)e^{-x}$

$f''(x) = (12x^2 - 4x^3)e^{-x} - (4x^3 - x^4)e^{-x} = (x^4 - 8x^3 + 12x^2)e^{-x}$

Het teken van de tweede afgeleide is het teken van $x^4 - 8x^3 + 12x^2 = x^2(x-2)(x-6)$.

De tweede afgeleide wordt nul met tekenwissel voor $x = 2$ en voor $x = 6$.

De grafiek van f heeft twee buigpunten: $P\left(2, \dfrac{16}{e^2}\right)$ en $Q\left(6, \dfrac{1296}{e^6}\right)$.

Opdracht 8 bladzijde 79

Bepaal het hol en bol verloop en de eventuele buigpunten van de grafiek van de functie $f\colon x \longmapsto e^{-x^2}$.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

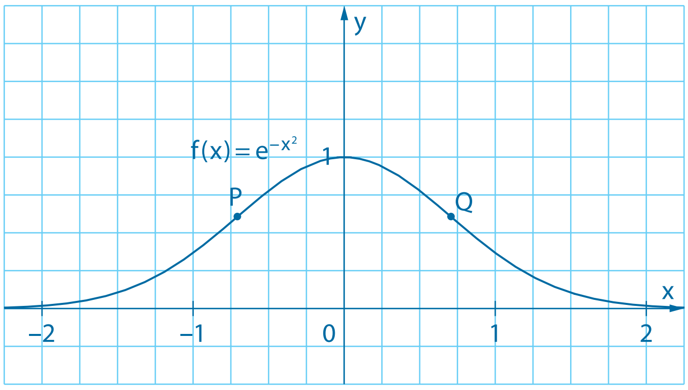
x		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
f″(x)	+	0	−	0	+
f(x)	$\cup$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ bgpt.	$\cap$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ bgpt.	$\cup$

De grafiek van f is hol in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

en in $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, bol in $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$

en heeft buigpunten $P\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

en $Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

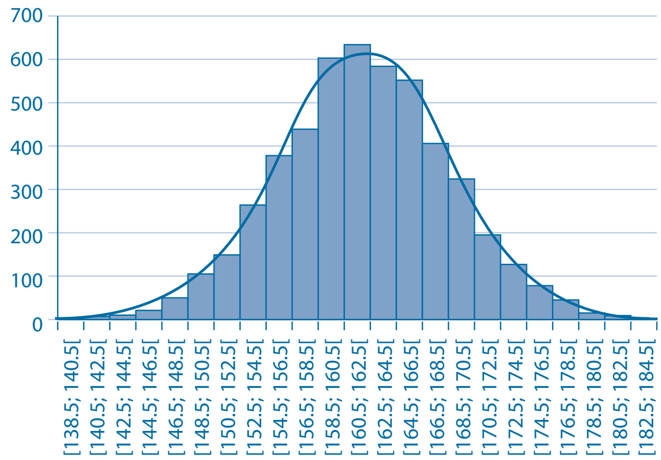


Opmerking

De grafiek van de functie $f(x) = e^{-x^2}$ heeft een klokvorm.

Dergelijke klokvormige curves komen voor in de kansrekening en in de statistiek. Zo worden de resultaten van de metingen van de lichaamslengte van 5000 vrouwen voor de magazijnen 'De Bijenkorf' (1947) in het onderstaand histogram samengebracht.

Wegens het groot aantal waarnemingen kunnen we het histogram benaderen door een vloeiende curve.



Lengte (cm)	Frequentie
[138.5; 140.5[	2
[140.5; 142.5[	7
[142.5; 144.5[	10
[144.5; 146.5[	21
[146.5; 148.5[	50
[148.5; 150.5[	105
[150.5; 152.5[	149
[152.5; 154.5[	264
[154.5; 156.5[	378
[156.5; 158.5[	439
[158.5; 160.5[	603
[160.5; 162.5[	634
[162.5; 164.5[	584
[164.5; 166.5[	552
[166.5; 168.5[	406
[168.5; 170.5[	324
[170.5; 172.5[	195
[172.5; 174.5[	127
[174.5; 176.5[	78
[176.5; 178.5[	45
[178.5; 180.5[	15
[180.5; 182.5[	9
[182.5; 184.5[	3

Deze curve heeft de vorm van een klok: een groot deel van de vrouwen heeft een lengte die niet veel afwijkt van het gemiddelde, terwijl erg grote of erg kleine vrouwen veel minder voorkomen.

We kunnen ook zeggen: de kans dat een vrouw een lengte heeft die niet veel afwijkt van het gemiddelde is tamelijk groot, terwijl de kans op een erg grote of erg kleine vrouw eerder gering is.

We zeggen dat de lengtes normaal verdeeld zijn. Andere voorbeelden van normaal verdeelde grootheden zijn de gewichten van pasgeboren baby's, het I.Q. van kinderen van een bepaalde leeftijd, fouten bij wetenschappelijke metingen, de resultaten van de Vlaamse Wiskunde Olympiade ...

De curve bij normale verdelingen noemt men een Gausskromme. De grafiek van $f(x) = e^{-x^2}$ is een voorbeeld van een Gausskromme. Meer over de normale verdeling vind je in handboeken statistiek.

Opdracht 9 bladzijde 79

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$.

De buigpunten van de grafiek van f liggen op de rechte t. Bepaal een vergelijking van t.

$$f'(x) = (-1)\,(2 + \sin x)^{-2}\,\cos x = \frac{-\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2+\sin x)^2 \sin x + \cos x \cdot 2(2+\sin x)\cos x}{(2+\sin x)^4} = \frac{2\sin x + \sin^2 x + 2\overbrace{\cos^2 x}^{(1-\sin^2 x)}}{(2+\sin x)^3}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + 2\sin x + 2}{(2+\sin x)^3}$$

De nulpunten van de tweede afgeleide (met tekenwissel) vinden we uit

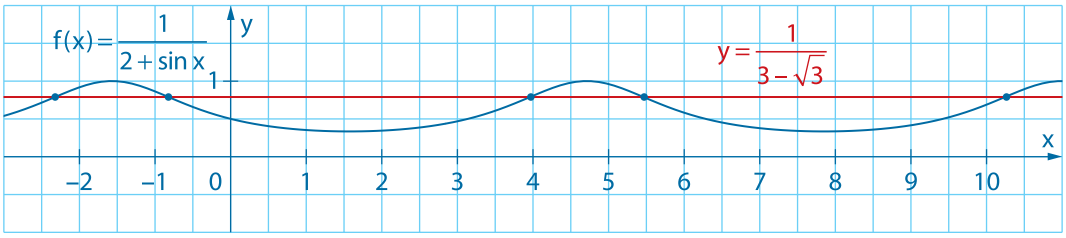
$-\sin^2 x + 2\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 1 + \sqrt{3} > 1 \quad \text{of} \quad \sin x = 1 - \sqrt{3}$

De y-coördinaat van de buigpunten is gemakkelijk te bepalen, aangezien $\sin x = 1 - \sqrt{3}$:

$y = \dfrac{1}{2 + 1 - \sqrt{3}} = \dfrac{1}{3 - \sqrt{3}}$.

Alle buigpunten liggen op de rechte $t \leftrightarrow y = \dfrac{1}{3 - \sqrt{3}}$.



Opdracht 10 bladzijde 84

Bereken met de regel van de l'Hôpital.

1 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{1} = \ln 2$

2 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

3 $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 9x^2}{4e^x + 4x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 18x}{4e^x + 4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 18}{4e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{4e^x} = \frac{1}{4}$

4 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos 3x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin x\cos x}{-3\sin 3x} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{-3\sin 3x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\cos 2x}{-9\cos 3x} = \dfrac{2}{9}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{\ln(e^{3x}+2)} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2}}$

$= \dfrac{1}{3\ln 10}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}+2}{xe^{3x}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \dfrac{1}{3\ln 10}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+3xe^{3x}}$

$= \dfrac{1}{3\ln 10}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+3x} = 0$

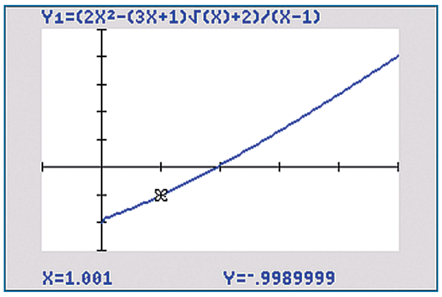
6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)\ln(1-x)}{(1-e^x)\cos x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+(2+x)\cdot\frac{-1}{1-x}}{(-e^x)\cos x-(1-e^x)\sin x} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

Opdracht 11 bladzijde 84

Schat $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$ door de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$ te bekijken in de omgeving van $x = 1$.

Bereken daarna deze limiet exact met de regel van de l'Hôpital.

$f: x \mapsto \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$



We vermoeden dat de limiet in 1 gelijk zal zijn aan –1.

We berekenen deze limiet exact met de regel van de l'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-3\sqrt{x}-\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}}{1} = 4-3-2 = -1$

Opdracht 12 bladzijde 84

Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van de functie *f*.

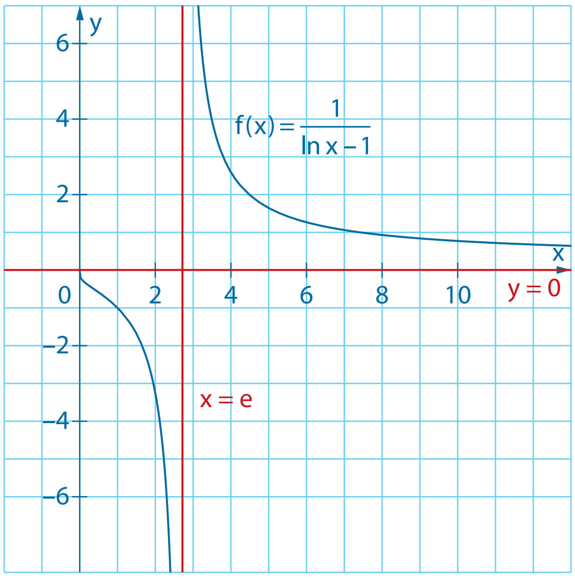
1 $f: x \mapsto \dfrac{1}{\ln x - 1}$

– dom f =]0, e[∪]e, +∞[

– Aangezien $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ <}} \dfrac{1}{\ln x - 1} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ >}} \dfrac{1}{\ln x - 1} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$, is de rechte met vergelijking x = e een verticale asymptoot van de grafiek van f.

De y-as is geen verticale asymptoot want

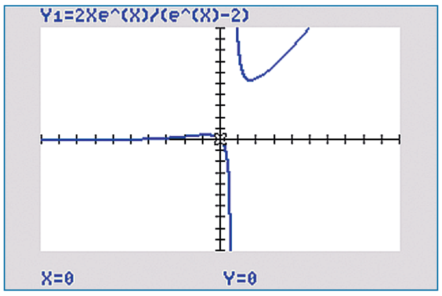
$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x - 1} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=} 0.$$



– Aangezien $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x - 1} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0$, is de rechte met vergelijking y = 0 een horizontale asymptoot van de grafiek van f.

2 $f: x \mapsto \dfrac{2xe^x}{e^x - 2}$

– dom f = $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$



– De rechte met vergelijking x = ln 2 is een verticale asymptoot (nulpunt van de noemer dat geen nulpunt van de teller is).

– Op basis van de grafiek vermoeden we een schuine asymptoot voor x ⟶ +∞ en een horizontale asymptoot voor x ⟶ –∞.

– Berekening van de schuine asymptoot:

$$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x - 2} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2$$

$$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2xe^x}{e^x - 2} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x}{e^x - 2} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{e^x} = 0$$

De schuine asymptoot is de rechte met vergelijking y = 2x.

– Berekening van de horizontale asymptoot:

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2xe^x}{e^x - 2} = \frac{0}{-2} = 0 \text{ aangezien } \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$$

De rechte met vergelijking y = 0 is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Opdracht 13 bladzijde 87

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-x\ln x}{\ln x(x-1)}$

$$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-x\ln x}{x-1+x\ln x}$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x-1}{1+\ln x+1}=-\frac{1}{2}$$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$$\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(x^x)\overset{0^0}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}e^{\ln(x^x)}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(-x)}=e^0=1$$

4 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x\overset{\infty^0}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}e^{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}e^{x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot x\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{x}{\ln\frac{1}{x}}}=e^0=1$$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{2x} \overset{1^{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{x}{x-3}\right)^{2x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x \ln\left(\frac{x}{x-3}\right)}$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \ln\left(\frac{x}{x-3}\right)}$

$= e^{2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x-3}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{(x-3)}{x} \cdot \frac{-3}{(x-3)^2}}{\frac{-1}{x^2}}}$

$= e^{6 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x-3)}} = e^6$

6 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (e^{2x} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{0^0}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\ln(e^{2x}-1)^{\frac{1}{\ln x}}}$

$= e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(e^{2x}-1)}{\ln x}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{2e^{2x}+4xe^{2x}}{2e^{2x}}}$

$= e^1 = e$

Opdracht 14 bladzijde 89
Bepaal de relatieve extrema van de volgende functies.

1 $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-2\cos x}$

$$f(x) = \frac{1}{1-2\cos x}$$

$f'(x) = \dfrac{-2\sin x}{(1-2\cos x)^2}$ heeft als nulpunten $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

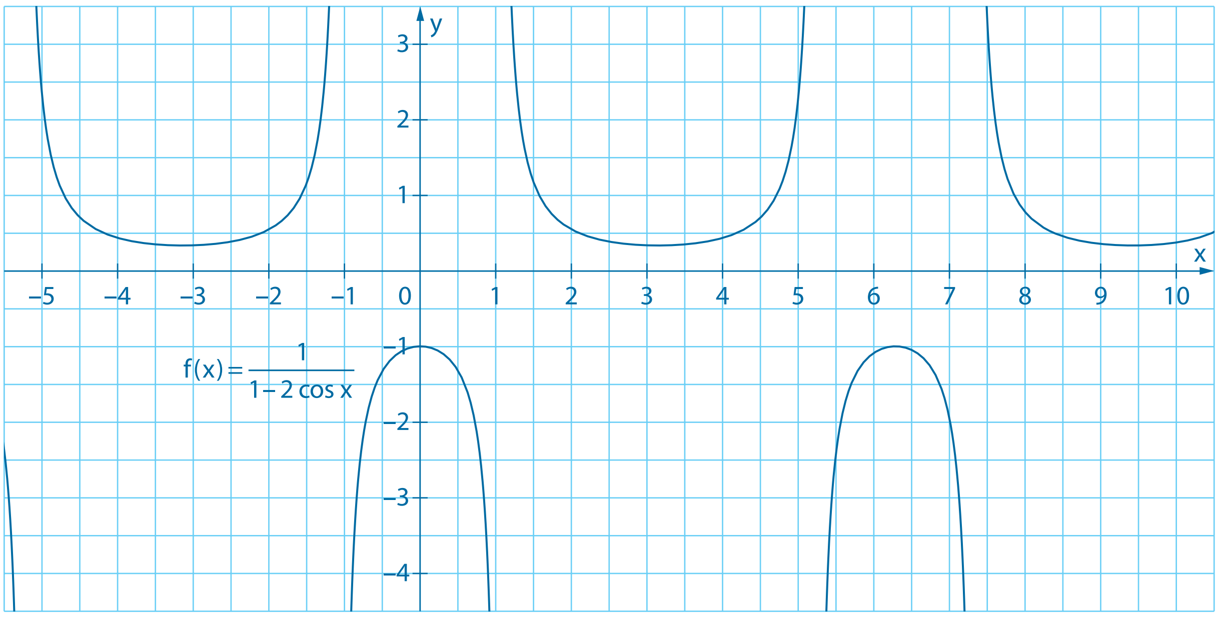
$$f''(x) = \frac{(1-2\cos x)^2 \cdot (-2\cos x) - (-2\sin x)\cdot 2(1-2\cos x)\cdot 2\sin x}{(1-2\cos x)^4}$$

$$= \frac{-2\cos x + 4\cos^2 x + 8\sin^2 x}{(1-2\cos x)^3}$$

$$= \frac{4 - 2\cos x + 4\sin^2 x}{(1-2\cos x)^3}$$

$f''(k\cdot 2\pi) = \dfrac{4-2}{-1} < 0$, bijgevolg bereikt f relatieve maxima voor $x = k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gelijk aan -1.

$f''(\pi + k\cdot 2\pi) = \dfrac{4+2}{27} > 0$, bijgevolg bereikt f relatieve minima voor $x = \pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) gelijk aan $\dfrac{1}{3}$.



2 $f: x \mapsto x - 2\sin x$

$f(x) = x - 2\sin x$

$f'(x) = 1 - 2\cos x$ met als nulpunten $\pm\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$f''(x) = 2\sin x$

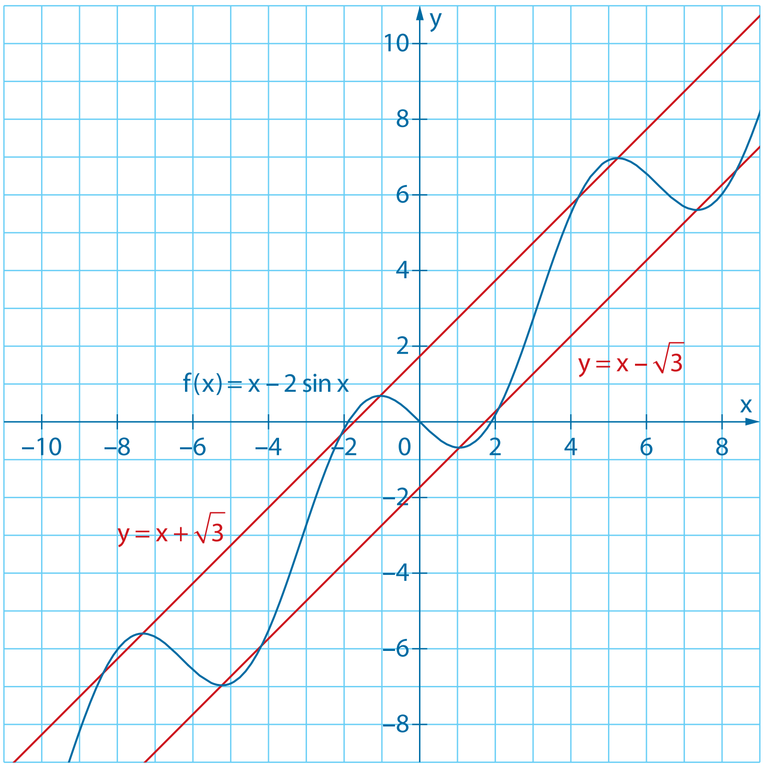
$f''\left(\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 0$ zodat f relatieve minima bereikt voor $x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ gelijk aan $\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi - \sqrt{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

$f''\left(-\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$ zodat f relatieve maxima bereikt voor $x = -\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ gelijk aan $-\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi + \sqrt{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Opmerking

Uit het voorgaande volgt dat de relatieve maxima op de rechte met vergelijking $y = x + \sqrt{3}$ liggen.

De relatieve minima liggen op de rechte met vergelijking $y = x - \sqrt{3}$.



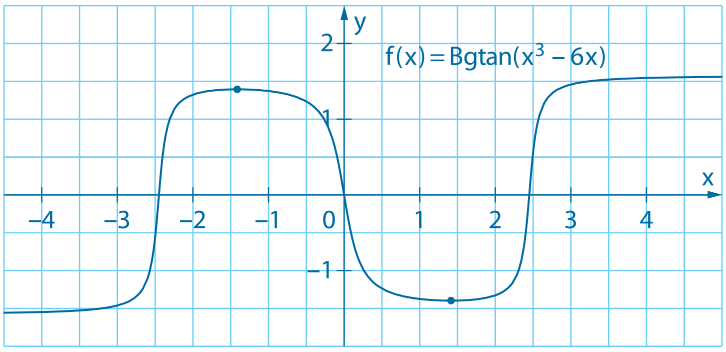
3 $f: x \mapsto \text{Bgtan}(x^3 - 6x)$

$f(x) = \text{Bgtan}(x^3 - 6x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6}{1 + (x^3 - 6x)^2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f′(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	1,40 max.	↘	–1,40 min.	↗

f bereikt een relatief maximum voor $x = -\sqrt{2}$ gelijk aan $\text{Bgtan}(4\sqrt{2}) \approx 1{,}40$ en een relatief minimum voor $x = \sqrt{2}$ gelijk aan $\text{Bgtan}(-4\sqrt{2}) \approx -1{,}40$.



4 $f: x \mapsto \text{Bgcos}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

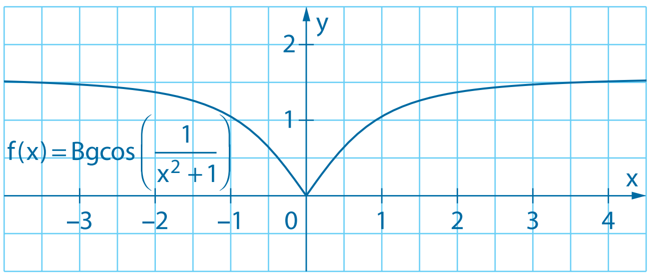
$f(x) = \text{Bgcos}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2 - 1}} = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4 + 2x^2}}$$

x		0	
f′(x)	–	|	+
f(x)	↘	0 min.	↗

f bereikt een relatief minimum 0 voor x = 0.

Merk op dat f niet afleidbaar is in dat minimum.



5 $f: x \mapsto x + \ln(x^2 - 1)$

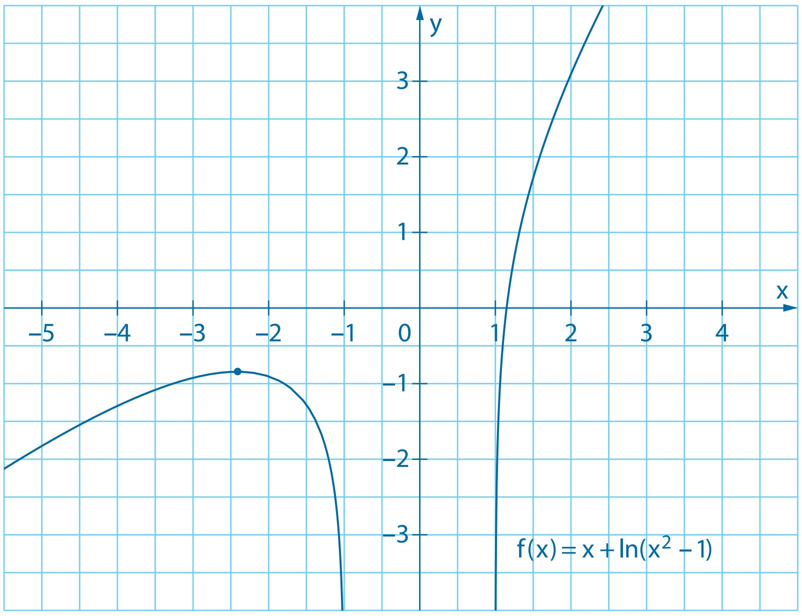
$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

- $\text{dom } f = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$
- $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

  f' heeft $-1+\sqrt{2}$ en $-1-\sqrt{2}$ als nulpunten. Enkel dit laatste nulpunt ligt binnen het domein.

x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-0{,}84$	$\searrow$						$\nearrow$
		max.							

f bereikt een relatief maximum $-1-\sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx -0{,}84$ voor $x = -1-\sqrt{2}$.



6 $f: x \mapsto x^2 \ln x$

$f(x) = x^2 \ln x$

– $\text{dom } f =]0, +\infty[$

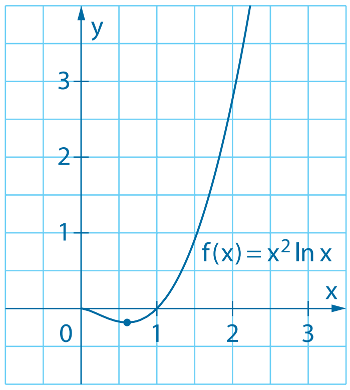
– $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ met als nulpunten 0 (buiten het domein) en $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

– $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$

Aangezien $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 > 0$, bereikt f een relatief minimum voor $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Dit minimum is gelijk aan

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$.



Opdracht 15 bladzijde 89

Gegeven de functie met voorschrift $f: x \mapsto \frac{2}{\sin x + 3}$.

1 Verklaar waarom de grafiek van *f* geen verticale asymptoten heeft.

Aangezien $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ is $2 \leqslant \sin x + 3 \leqslant 4$ zodat de noemer van het voorschrift van $f: x \mapsto \frac{2}{\sin x + 3}$ geen nulpunten heeft.

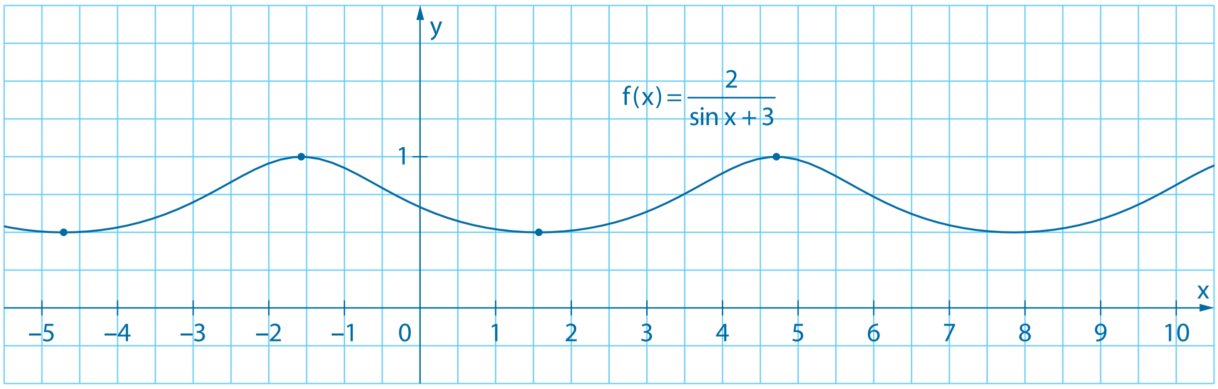
Het domein van f is bijgevolg $\mathbb{R}$ zodat de grafiek van f geen verticale asymptoten heeft.

2 Bepaal de relatieve extrema van *f*.

$f'(x) = \frac{-2 \cos x}{(\sin x + 3)^2}$ met als nulpunten $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Voor $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ is $\sin x = 1$, dus maximaal, zodat f een relatief minimum bereikt gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Voor $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ is $\sin x = -1$, dus minimaal, zodat f een relatief maximum bereikt gelijk aan 1.



Opdracht 16 bladzijde 89

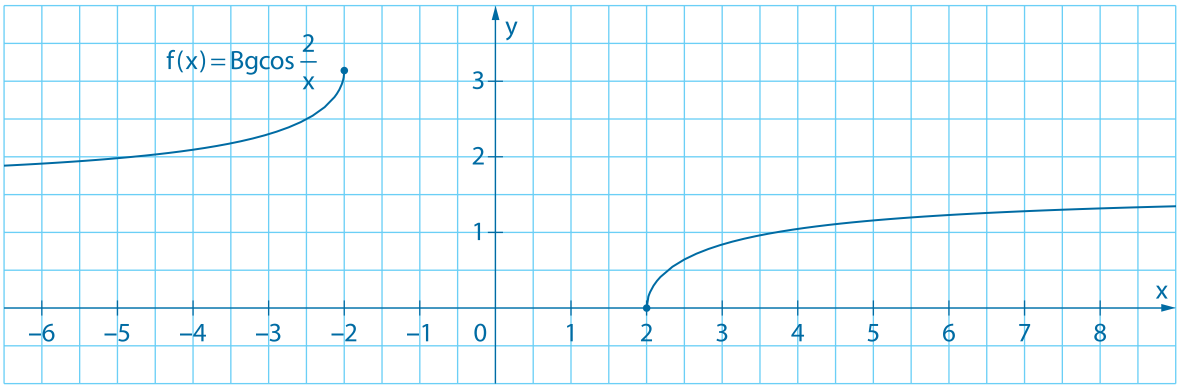
Bepaal het domein van de volgende functies.

1 $f: x \mapsto \text{Bgcos}\,\frac{2}{x}$

Aangezien [–1, 1] het domein van de boogcosinusfunctie is, moet $-1 \leqslant \frac{2}{x} \leqslant 1$.

Deze ongelijkheid kan grafisch opgelost worden en heeft als oplossingsverzameling $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

Besluit: dom f = $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.



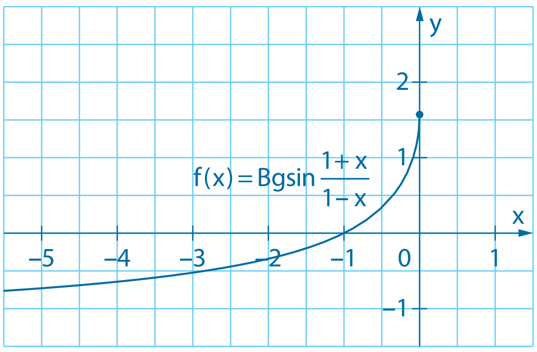
2 $f: x \mapsto \text{Bgsin}\,\frac{1+x}{1-x}$

Aangezien [–1, 1] het domein van de boogsinusfunctie is,

moet $-1 \leqslant \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1$.

Deze ongelijkheid kan grafisch opgelost worden.

We vinden: dom f = $]-\infty, 0]$.

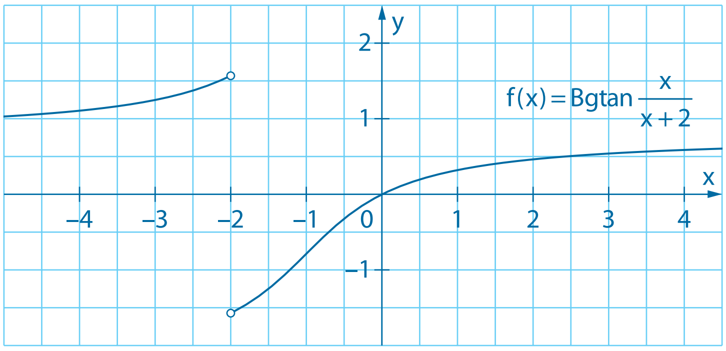


3 $f\colon x \mapsto \text{Bgtan}\,\dfrac{x}{x+2}$

Aangezien het domein van de boogtangensfunctie $\mathbb{R}$ is, is het domein van f dat van

$g: x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$.

Hieruit volgt: dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.



Opdracht 17 bladzijde 89

Bepaal a zo dat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{\ln x + a}{x}$ een relatief maximum bereikt voor $x = 3$.

$$f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x - a}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x - a)2x}{x^4} = \frac{2\ln x + 2a - 3}{x^3}$$

Aangezien f afleidbaar is binnen het domein, zal x = 3 een nulpunt zijn van de eerste afgeleide.

$$f'(3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \ln 3 - a}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 - \ln 3$$

Aangezien $f''(3) = -0{,}037 < 0$, bereikt f een relatief maximum voor $x = 3$.

Opdracht 18 bladzijde 89

De functie $f: x \mapsto \sin x + a \sin 2x$ bereikt voor een bepaalde waarde van a twee extrema in $[0, \pi]$ waarvan één voor $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

1 Bereken deze waarde van a.

$f'(x) = \cos x + 2a \cos 2x$

Aangezien f afleidbaar is in $\mathbb{R}$ en een extremum bereikt voor $x = \dfrac{5\pi}{6}$, moet $f'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 0$ zodat

$$\cos\frac{5\pi}{6} + 2a\cos\frac{5\pi}{3} = 0 \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0 \iff a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 Bereken voor deze waarde van a de x-coördinaat van het andere extremum in $[0, \pi]$.

(bron © Eindexamen VWO Nederland 2011)

$f'(x) = \cos x + \sqrt{3}\cos 2x$

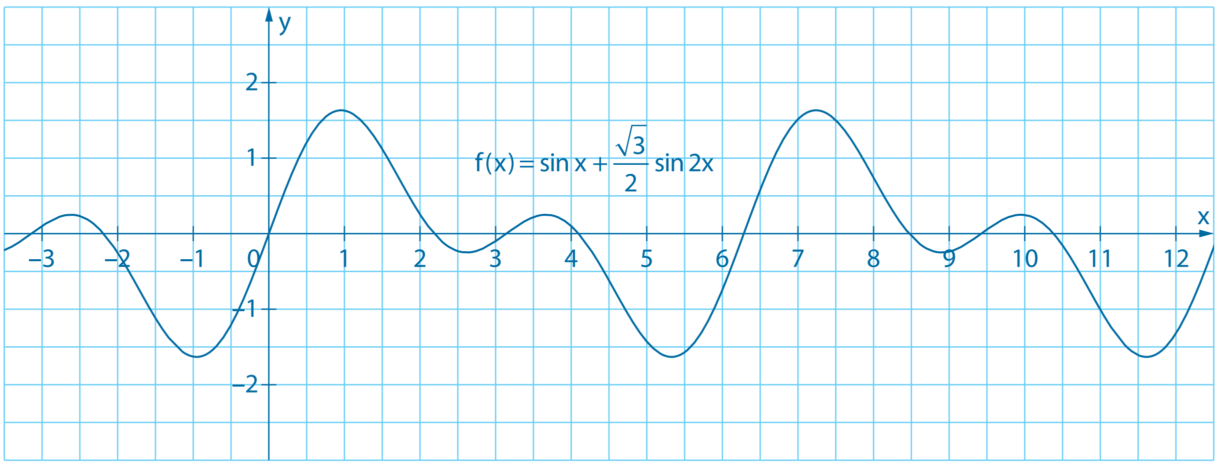
$f'(x) = 0$

$\iff \cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3} = 0$

$\iff \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ of $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\iff x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $x = \pm \text{Bgcos}\dfrac{\sqrt{3}}{3} + k \cdot 2\pi \approx \pm 0{,}955317 + k \cdot 2\pi$

Aangezien $f''(x) = -\sin x - 2\sqrt{3}\sin 2x$, is $f''(0{,}955317) \approx -4{,}08 < 0$ zodat f in $[0, \pi]$ een relatief maximum bereikt voor $x = \text{Bgcos}\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}955317$.



Opdracht 19 bladzijde 90

Voor welke waarde van $a > 0$ ligt het maximum van de grafiek van $f: x \mapsto 2a \ln x - x^2$ op de x-as?

$f(x) = 2a \ln x - x^2$

dom $f =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2a}{x} - 2x = \frac{2a - 2x^2}{x}$$

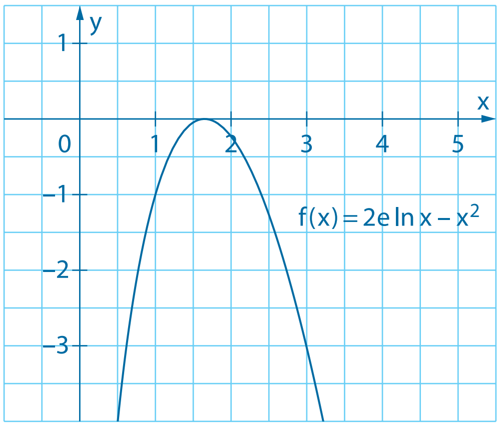
De teller heeft enkel nulpunten als $a > 0$.

We krijgen dan het volgende verloopschema:

x	$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$	
f′(x)	+	0	−	+	0	−
f(x)				↗	$2a\ln\sqrt{a} - a$ max.	↘

Als het maximum op de x-as ligt, is

$$2a \ln\sqrt{a} - a = 0$$
$$\overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 2\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln a = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = e$$



Opdracht 20 bladzijde 90

Kies het juiste antwoord. Gebruik geen rekentoestel.

Een populatiegrootte wordt aangeduid met N en ze varieert in de tijd volgens het voorschrift $N(t) = 70 - 25e^{-0,1t}$.

Wat gebeurt er op lange termijn met deze populatie?

A De populatie daalt naar de evenwichtswaarde 70.

B De populatie stijgt naar de evenwichtswaarde 70.

C De populatie sterft uit.

D De populatie groeit onbegrensd.

(bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

$N(t) = 70 - 25e^{-0,1t}$

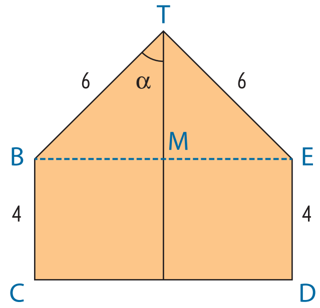
$\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(70 - 25e^{-0,1t}\right) = 70 - 25 \underbrace{\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,1t}}_{=0} = 70$ zodat 70 de evenwichtswaarde is.

$N'(t) = -25e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = 2,5e^{-0,1t} > 0$ zodat de populatie stijgt.

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 21 bladzijde 90

De oppervlakte van de gevel van een huis, met afmetingen (in m) zoals op de figuur weergegeven, is een functie van de scherpe hoek α.



1 Toon aan dat de oppervlakte A (in m^2) van de gevel gelijk is aan $18 \sin 2\alpha + 48 \sin \alpha$.

$|BM| = |ME| = 6 \sin \alpha$ en $|TM| = 6 \cos \alpha$ zodat de oppervlakte van ΔTBE gelijk is aan

$\frac{1}{2} \cdot 12 \sin \alpha \cdot 6 \cos \alpha = 36 \sin \alpha \cos \alpha = 18 \sin 2\alpha$.

De rechthoek BCDE heeft als oppervlakte $4 \cdot |BE| = 4 \cdot 12 \sin \alpha = 48 \sin \alpha$.

De totale oppervlakte is dus $A(\alpha) = 18 \sin 2\alpha + 48 \sin \alpha$.

2 Voor welke hoek α is A maximaal?

$$\begin{aligned} A'(\alpha) &= 36 \cos 2\alpha + 48 \cos \alpha \\ &= 36\,(2\cos^2 \alpha - 1) + 48 \cos \alpha \\ &= 72\cos^2 \alpha + 48 \cos \alpha - 36 \end{aligned}$$

De nulpunten van $A'(\alpha)$ vinden we uit

$$72 \cos^2 \alpha + 48 \cos \alpha - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 6 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$$

Aangezien $\frac{-2 - \sqrt{22}}{6} < -1$ zal $\cos \alpha = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6}$.

De enige oplossing in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ is $\alpha \approx 1{,}106$ rad (63°21′32″).

Dat dit een maximum is, kunnen we zien m.b.v. de tweede afgeleide-test:

$A''(\alpha) = -72 \sin 2\alpha - 48 \sin \alpha$ zodat

$A''(1{,}106) \approx -100{,}6 < 0$ waaruit volgt dat er een maximum bereikt wordt voor $\alpha \approx 1{,}106$.

3 Hoe hoog is de gevel als de oppervlakte maximaal is?

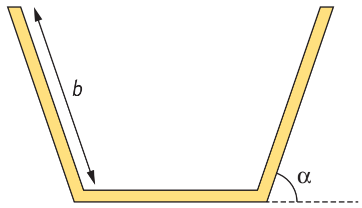
De hoogte van de gevel is dan $4 + 6 \cos \alpha = 4 - 2 + \sqrt{22} = 2 + \sqrt{22}$.

Dit is ongeveer 6,69 m.

Opdracht 22 bladzijde 90

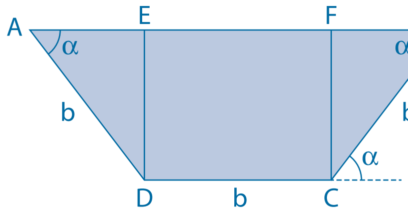
Met drie planken met breedte *b* wordt een symmetrische goot gemaakt die bovenaan open is en waarvan de onderste rand horizontaal is.

Hoe moet de scherpe hellingshoek α gekozen worden zodat de doorsnede maximaal is en er dus het meeste water door de goot kan stromen?



We moeten ervoor zorgen dat de doorsnede, d.i. de oppervlakte van het trapezium ABCD, maximaal is.

Deze oppervlakte A is een functie van de hellingshoek α.



- Om A te berekenen in functie van α, gebruiken we de formule:

  $$\text{oppervlakte trapezium} = \frac{(\text{kleine basis} + \text{grote basis}) \cdot \text{hoogte}}{2}$$

  We hebben: kleine basis $= |DC| = b$,

  grote basis $= |AB| = |EF| + 2|AE| = b + 2b\cos\alpha$,

  hoogte $= |DE| = b\sin\alpha$.

  Daaruit volgt: $A(\alpha) = \dfrac{2b^2\sin\alpha + 2b^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} = b^2\left(\sin\alpha + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$.

- De hoek α is gelegen tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$, het concrete domein van A is dus $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- Omdat A een afleidbare functie is, zal het eventuele maximum optreden bij een α-waarde waarvoor $A'(\alpha) = 0$.

  $$\begin{aligned} A'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\left[b^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\right] \\ &= b^2\frac{d}{d\alpha}\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \\ &= b^2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\alpha\right) \\ &= b^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

  Nu is $A'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow b^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 0$

  $\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$

  $\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$ $\qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

  $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ of $\cos\alpha = -1$

  $\Leftrightarrow \alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi + k\cdot 2\pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

Van deze hoeken ligt er slechts één in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, nl. $\frac{\pi}{3}$. Enkel daar kan er dus een extremum optreden.

Met de tweede afgeleide-test kunnen we nagaan dat een maximum bereikt wordt in $\frac{\pi}{3}$:

$A''(\alpha) = b^2(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha)$

zodat $A''\left(\frac{\pi}{3}\right) = b^2\left(-\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin 2\frac{\pi}{3}\right) = b^2 \cdot \frac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$ wat klopt voor een relatief maximum.

Natuurlijk kunnen we ook grafisch zien dat we met een maximum te maken hebben.

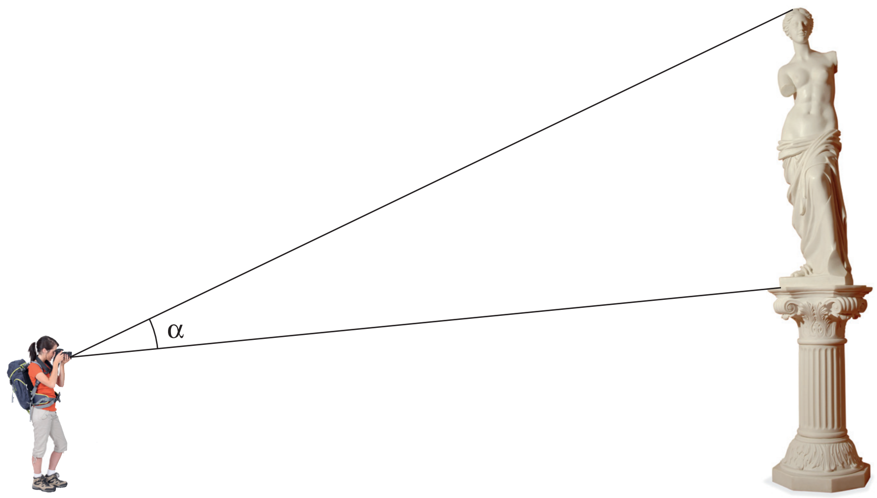
We berekenen nu ook nog $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = b^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3b^2\sqrt{3}}{4}$.

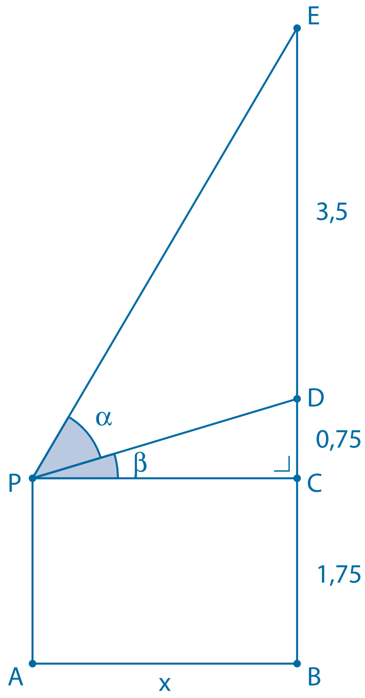
De doorsnede is dus maximaal als $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$; ze is dan gelijk aan $\frac{3b^2\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30\,b^2$.

Opdracht 23 bladzijde 91

Een toeriste met ooghoogte 1,75 meter kijkt naar een standbeeld. Zij wil er een foto van maken. Het standbeeld staat op een voetstuk met hoogte 2,5 meter en het beeld zelf is 3,5 meter hoog. De scherpe hoek tussen de kijklijnen naar het onderste en het bovenste punt van het standbeeld noemen we de kijkhoek α.

Hoe ver moet deze toeriste van het standbeeld gaan staan opdat haar kijkhoek maximaal zou zijn?





We bepalen $x = |AB|$ (in m) waarvoor α maximaal is.

In de rechthoekige driehoeken PCD en PCE vinden we:

$\tan\beta = \dfrac{0{,}75}{x}$ en $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{4{,}25}{x}$.

Hieruit volgt:

$\alpha = \mathrm{Bgtan}\,\dfrac{4{,}25}{x} - \mathrm{Bgtan}\,\dfrac{0{,}75}{x}$ zodat

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\dfrac{4{,}25}{x^2}}{1+\dfrac{4{,}25^2}{x^2}} - \frac{-\dfrac{0{,}75}{x^2}}{1+\dfrac{0{,}75^2}{x^2}}$$

$$= \frac{-4{,}25}{x^2+4{,}25^2} + \frac{0{,}75}{x^2+0{,}75^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0 \iff \frac{4{,}25}{x^2+4{,}25^2} = \frac{0{,}75}{x^2+0{,}75^2}$$

$$\iff 4{,}25\,x^2 + 4{,}25\cdot 0{,}75^2 = 0{,}75\,x^2 + 0{,}75\cdot 4{,}25^2$$

$$\iff 3{,}5\,x^2 = 0{,}75\cdot 4{,}25\cdot\left(4{,}25-0{,}75\right)$$

$$\overset{x>0}{\iff} x = \sqrt{0{,}75\cdot 4{,}25} = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

Met de tweede afgeleide-test tonen we aan dat bij deze waarde een maximum wordt bereikt:

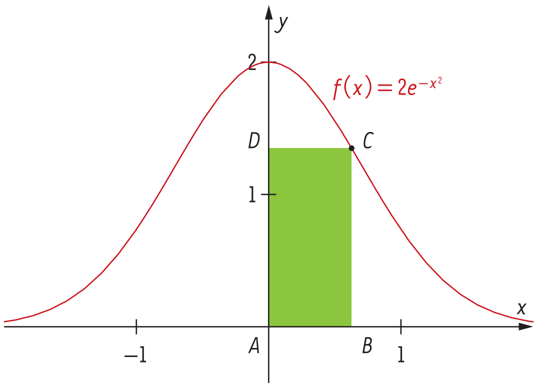
$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{4{,}25\cdot 2x}{\left(x^2+4{,}25^2\right)^2} - \frac{0{,}75\cdot 2x}{\left(x^2+0{,}75^2\right)^2} \quad \text{zodat} \quad \left.\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right|_{x=\frac{\sqrt{51}}{4}} -0{,}157 < 0.$$

De kijkhoek is maximaal voor een horizontale afstand van $\dfrac{\sqrt{51}}{4}$ m $\approx 1{,}79$ m.

Opdracht 24 bladzijde 91

Gegeven de functie met voorschrift
$f(x) = 2e^{-x^2}$.

We nemen een punt C op de grafiek van f en construeren een rechthoek $ABCD$ zoals op de figuur.



1 Bepaal de afmetingen van de rechthoek $ABCD$ zodat de oppervlakte ervan maximaal is.

We bepalen het maximum van de functie met voorschrift $g(x) = 2xe^{-x^2}$.

$g'(x) = 2e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$

$g'(x) = 0 \iff 1-2x^2 = 0 \overset{x>0}{\iff} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

De eerste afgeleide van g gaat over van positief naar negatief in $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en bereikt er dus een maximum gelijk aan $\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{e}} \approx 0{,}858$.

De basis van de rechthoek met maximale oppervlakte is $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en de hoogte is $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

2 Laten we de rechthoek $ABCD$ wentelen rond de y-as, dan verkrijgen we een cilinder waarvan de inhoud gelijk is aan I.

Bepaal $I(x)$ met $|AB| = x$.

De straal van het grondvlak van de cilinder is x en de hoogte is f(x).

$I(x) = 2\pi x^2 e^{-x^2}$

3 Bereken de afmetingen van de cilinder zodat de inhoud I ervan maximaal is.

$I'(x) = 4\pi x e^{-x^2} - 4\pi x^3 e^{-x^2} = 4\pi x(1-x^2)e^{-x^2}$

Het teken van de eerste afgeleide is het teken van $x(1-x^2)$.

x		−1		0		1	
$x(1-x^2)$	+	0	−	0	+	0	−

Uit de tabel blijkt dat de eerste afgeleide overgaat van positief naar negatief in 1.

De inhoud bereikt een maximum voor x = 1 gelijk aan $I(1) = \dfrac{2\pi}{e}$.

De straal van het grondvlak is dan gelijk aan 1 en de hoogte van de cilinder is $f(1) = \dfrac{2}{e}$.

Opdracht 25 bladzijde 91

Toon aan dat alle extrema van $f\colon x \mapsto x + 1 - m \cdot e^x$ met $m > 0$ op een rechte liggen en bepaal een vergelijking van deze rechte.

$f(x) = x + 1 - m \cdot e^x \quad$ met $m > 0$

$f'(x) = 1 - m \cdot e^x$

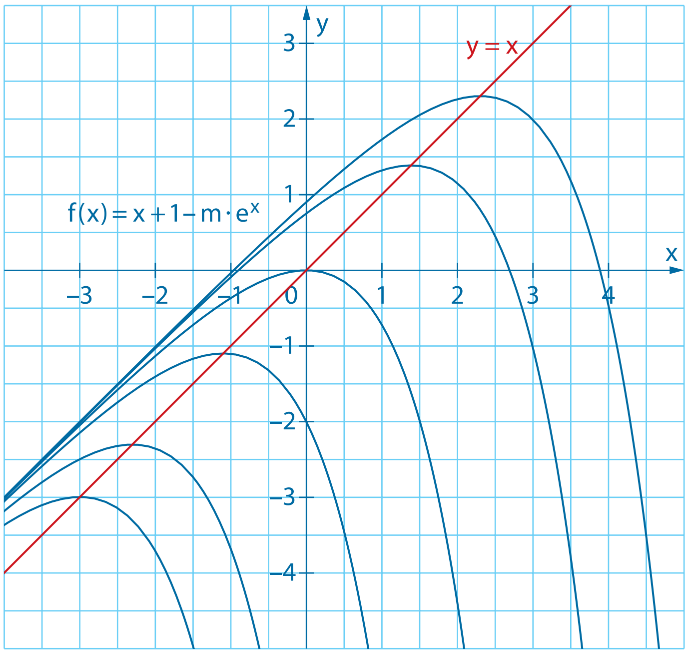
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow x = -\ln m$

$f''(x) = -m \cdot e^x < 0$ voor elke waarde van x zodat f een maximum bereikt voor $x = -\ln m$.

Dit maximum is gelijk aan

$f(-\ln m) = -\ln m + 1 - m \cdot e^{-\ln m} = -\ln m.$

De extrema liggen bijgevolg op de rechte met vergelijking $y = x$.



Opdracht 26 bladzijde 91

1 Voor welke waarden van m heeft de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x + m}$ een relatief minimum gelijk aan 3?

$$f(x) = \frac{2\cos x + 1}{\cos x + m}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x + m)(-2\sin x) - (2\cos x + 1)(-\sin x)}{(\cos x + m)^2} = \frac{\sin x(1 - 2m)}{(\cos x + m)^2}$$

Voor $m = \dfrac{1}{2}$ is het functievoorschrift $f(x) = 2$ als $\cos x \neq -\dfrac{1}{2}$. Er zijn dan zeker geen extrema gelijk aan 3, dus we onderzoeken de nulpunten van sin x.

– Als $x = k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, dan is het extremum $\dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1 + m} = \dfrac{3}{1 + m}$,

als $x = \pi + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, dan is het extremum $\dfrac{2 \cdot (-1) + 1}{-1 + m} = \dfrac{1}{1 - m}$.

– We hebben een extremum gelijk aan 3 als

$\dfrac{3}{1 + m} = 3$ of $\dfrac{1}{1 - m} = 3$

$\Leftrightarrow 3 = 3 + 3m$ of $1 = 3 - 3m$

$\Leftrightarrow m = 0$ of $m = \dfrac{2}{3}$

– Voor $m = 0$ is $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x} = 2 + \dfrac{1}{\cos x}$.

$f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ en $f''(x) = \dfrac{\cos^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$

$f'(k \cdot 2\pi) = 0$ en $f''(k \cdot 2\pi) = 1 > 0$ zodat 3 een relatief minimum is.

– Voor $m = \dfrac{2}{3}$ is $f(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{\cos x + \frac{2}{3}}$.

$f'(x) = \dfrac{-3\sin x}{(3\cos x + 2)^2}$ en

$$f''(x) = \frac{(3\cos x + 2)^2 \cdot (-3\cos x) + 3\sin x \cdot 2(3\cos x + 2)(-3\sin x)}{(3\cos x + 2)^4}$$

$$= \frac{-3(3 + 2\cos x + 3\sin^2 x)}{(3\cos x + 2)^3}$$

$f'(\pi + k \cdot 2\pi) = 0$ en $f''(\pi + k \cdot 2\pi) = \dfrac{-3(3 - 2 + 0)}{(-3 + 2)^3} = 3 > 0$ zodat 3 opnieuw een relatief minimum is.

2 Bepaal voor de waarden van *m* uit **1** de relatieve maxima van *f*.

– Voor $m = 0$ is $f'(\pi + k \cdot 2\pi) = 0$ en $f''(\pi + k \cdot 2\pi) = -1 < 0$.

We vinden relatieve maxima voor $x = \pi + k \cdot 2\pi$ gelijk aan $f(\pi + k \cdot 2\pi) = 2 + \dfrac{1}{-1} = 1$.

– Voor $m = \dfrac{2}{3}$ is $f'(k \cdot 2\pi) = 0$ en $f''(k \cdot 2\pi) = \dfrac{-3(3 + 2 + 0)}{(3 + 2)^3} < 0$.

We vinden relatieve maxima voor $x = k \cdot 2\pi$ gelijk aan $f(k \cdot 2\pi) = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{\frac{5}{3}} = \dfrac{9}{5}$.

Opdracht 27 bladzijde 92

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto \sin\left(\dfrac{5\pi}{1+3x^2}\right)$.

Bereken exact de x-coördinaten van de punten waar f een extremum bereikt.

Vermeld ook telkens of het om een maximum of een minimum gaat.

$$f(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{1+3x^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{5\pi}{1+3x^2}\right)\cdot\frac{-30\pi x}{\left(1+3x^2\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{1+3x^2} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\text{ of }\; x = 0 \;\; (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{1+3x^2} = \frac{1+2k}{2} \;\text{ of }\; x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 = 1 + 2k + 3x^2 + 6kx^2 \;\text{ of }\; x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 - 2k = (3+6k)x^2 \;\text{ of }\; x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9-2k}{3+6k} \;\text{ of }\; x = 0$$

$x^2 = \dfrac{9-2k}{3+6k}$ heeft enkel oplossingen als $\dfrac{9-2k}{3+6k} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{1}{2} < k \leqslant \dfrac{9}{2}$

Met $k \in \mathbb{Z}$ vinden we de volgende oplossingen:

$k = 0$: $\; x^2 = \dfrac{9}{3} \;\Leftrightarrow\; x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$: maxima

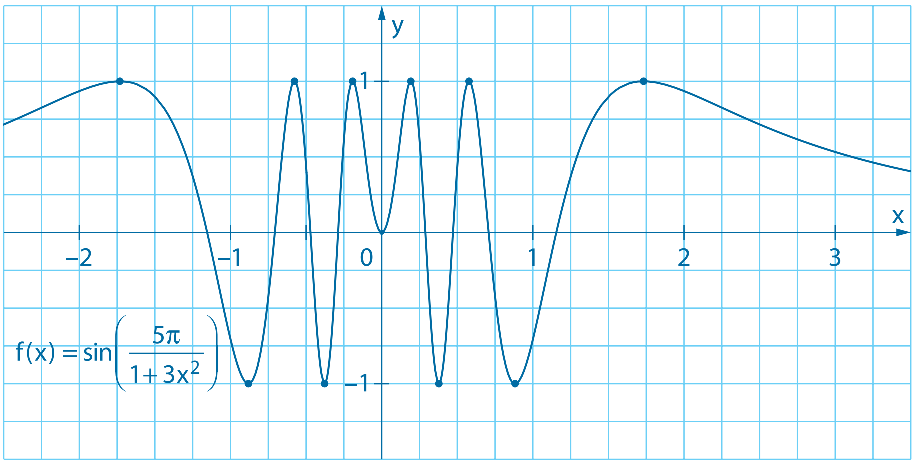
$k = 1$: $\; x^2 = \dfrac{7}{9} \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ of $x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$: minima

$k = 2$: $\; x^2 = \dfrac{5}{15} \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ of $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$: maxima

$k = 3$: $\; x^2 = \dfrac{3}{21} \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ of $x = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$: minima

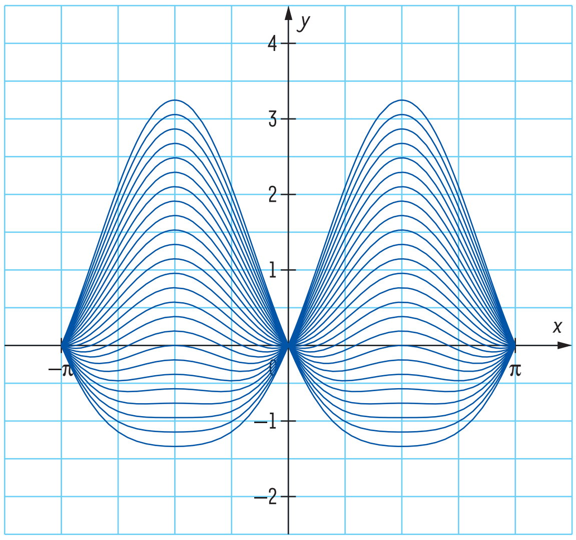
$k = 4$: $\; x^2 = \dfrac{1}{27} \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ of $x = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$: maxima

Er is ook nog een minimum voor $x = 0$.



Opdracht 28 bladzijde 92

De grafieken van enkele functies met voorschrift $f: x \longmapsto \sin^2 x + m \sin x$ zijn getekend in $[-\pi, \pi]$.



1 Voor welke waarde(n) van m heeft f vier relatieve extrema in $[-\pi, \pi]$?

Opdat deze functie vier relatieve extrema zou hebben in $[-\pi, \pi]$, moet $f'(x)$ vier keer van teken wisselen in dit interval.

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \sin x \cos x + m \cdot \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(2 \sin x + m) = 0$$

Voor $x = -\dfrac{\pi}{2}$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ is $\cos x = 0$ en verandert f van teken, er zijn zeker al twee extrema.

$2 \sin x + m$ moet dus nog twee keer van teken wisselen.

$$2 \sin x + m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{m}{2}$$

Als $-1 < -\dfrac{m}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < 2$ heeft $2 \sin x + m$ twee nulpunten met tekenwissel in $[-\pi, \pi]$.

Voor $m = 0$ vinden we echter twee randextrema, deze waarde moeten we uitsluiten.

We vinden dus voor $-2 < m < 2$ en $m \neq 0$ vier relatieve extrema in $[-\pi, \pi]$.

2 Voor welke waarde(n) van m heeft f een relatief extremum voor $x = \dfrac{\pi}{2}$?

Bij elke waarde van m heeft f een relatief extremum voor $x = \dfrac{\pi}{2}$, zie **1**.

Opdracht 29 bladzijde 92

Sommige medicijnen kennen een passieve en een actieve vorm. Ze worden in passieve vorm ingespoten en door het lichaam omgezet in actieve vorm.

De hoeveelheid medicijn in passieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten nog niet is omgezet in actieve vorm, stellen we voor door $p(t)$. Als 25 mg wordt ingespoten, geldt de volgende formule:

$$p(t) = 25 \cdot e^{-kt}$$

Hierbij is k een positieve constante waarvan de waarde afhangt van het type medicijn. Hoe groter k, hoe sneller het medicijn van passieve vorm wordt omgezet in actieve vorm.

1 Om de werkzaamheid van het medicijn te onderzoeken, meet men hoe lang het duurt tot 99 % van de hoeveelheid medicijn in passieve vorm is omgezet naar actieve vorm. Deze tijdsduur t_{99} hangt af van k.

Schrijf t_{99} in functie van k.

Als 99 % is omgezet, blijft nog 1 % over.

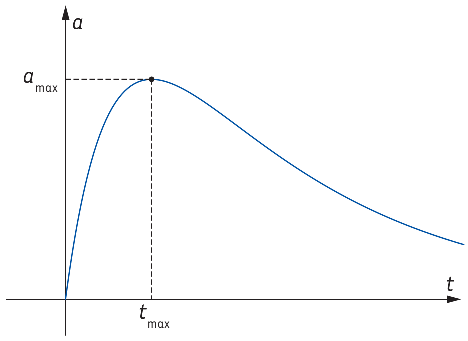
$$\begin{aligned} & p(t_{99}) = 25 \cdot 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & 25 \cdot e^{-kt_{99}} = 25 \cdot 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & e^{-kt_{99}} = 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & -kt_{99} = \ln 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & kt_{99} = \ln 100 \\ \Leftrightarrow\ & t_{99} = \frac{\ln 100}{k} \end{aligned}$$

2 Het medicijn in actieve vorm wordt door de lever afgebroken. De omzetting van medicijn in passieve vorm naar medicijn in actieve vorm en de afbraak van medicijn in actieve vorm vinden gelijktijdig plaats.

Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we $a(t)$. Voor $a(t)$ geldt:

$$a(t) = 25 \cdot (e^{-0,1t} - e^{-0,4t})$$

De grafiek van a in functie van t is getekend.



Het maximum van a noemen we a_{max} en dat wordt bereikt op $t = t_{max}$.

Bereken t_{max} en a_{max} exact.

$$a'(t) = 25 \cdot \left(e^{-0,1t} \cdot (-0{,}1) - e^{-0,4t} \cdot (-0{,}4)\right)$$

$$\begin{aligned} a'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow\ & e^{-0,1t} \cdot (-0{,}1) - e^{-0,4t} \cdot (-0{,}4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}4e^{-0,4t} = 0{,}1e^{-0,1t} \\ \Leftrightarrow\ & 4 = e^{0,3t} \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}3t = \ln 4 \\ \Leftrightarrow\ & t = \frac{10 \ln 4}{3} \end{aligned}$$

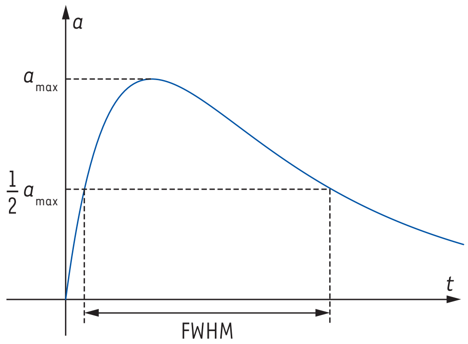
$a''(t) = 25 \cdot \left(e^{-0,1t} \cdot 0{,}01 - e^{-0,4t} \cdot 0{,}16\right)$ zodat $a''\left(\frac{10 \ln 4}{3}\right) \approx -0{,}472$ en we dus een relatief maximum hebben.

Bijgevolg is $t_{max} = \frac{10 \ln 4}{3} \approx 4{,}62$ en $a_{max} = \frac{75}{4 \cdot \sqrt[3]{4}} \approx 11{,}81.$

3 Om te weten hoe lang een medicijn werkzaam is, wordt gekeken naar de FWHM (Full Width at Half Maximum). Dit is de breedte van de piek in de grafiek van a ter hoogte van $\frac{1}{2}a_{max}$.

Anders gezegd: de FWHM geeft aan hoe lang de hoeveelheid medicijn in actieve vorm in het lichaam minstens 50 % is van de maximale hoeveelheid a_{max}.

Stel een vergelijking op waarmee je de FWHM kunt bepalen en los deze grafisch op. Geef de FWHM op 1 minuut nauwkeurig.



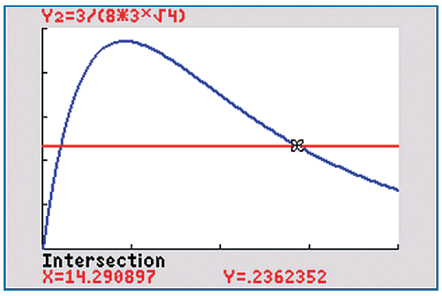
(bron © Examen Wiskunde B Nederland 2012)

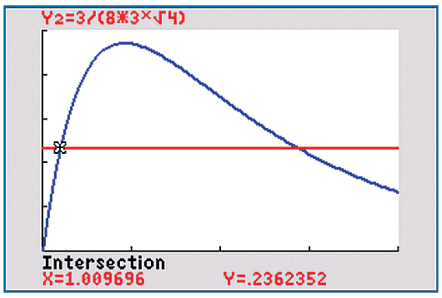
$$a(t)=\frac{1}{2}a_{max}$$

$$25\cdot\left(e^{-0,1t}-e^{-0,4t}\right)=\frac{75}{8\cdot\sqrt[3]{4}}$$

$$e^{-0,1t}-e^{-0,4t}=\frac{3}{8\cdot\sqrt[3]{4}}$$

Het verschil tussen de grootste en de kleinste oplossing van deze vergelijking is de FWHM.





De FWHM is (14,290897 – 1,00969) h = 13h 17min.

Opdracht 30 bladzijde 93

Als het minimum van de functie $f: x \mapsto \cos 2x - 2a(1+\cos x)$ gelijk is aan $-\frac{1}{2}$, dan is a gelijk aan

A $-2-\sqrt{3}$ **B** $-1-\sqrt{3}$ **C** -2 **D** $-2+\sqrt{3}$ **E** $2-\sqrt{3}$

(bron © University of South Carolina High School Math Contest 2013)

$$f(x)=\cos 2x-2a\left(1+\cos x\right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x+2a\sin x \\ &= -4\sin x\cos x+2a\sin x \\ &= 2\sin x(a-2\cos x) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x=0 \ \text{ of } \ \cos x=\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}) \ \text{ of } \ \cos x=\frac{a}{2}$$

$$f''(x)=-4\cos 2x+2a\cos x$$

Het minimum moet gelijk zijn aan $-\dfrac{1}{2}$.

- $x = k \cdot 2\pi$:

  $f(k \cdot 2\pi) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad \cos 4k\pi - 2a\left(1 + \cos 2k\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad 1 - 4a = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad a = \dfrac{3}{8}$

  In dat geval is $f''(k \cdot 2\pi) = -4\cos 4k\pi + 2 \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \cos 2k\pi = -\dfrac{13}{4} < 0$ zodat er een maximum bereikt wordt.

- $x = (2k+1) \cdot \pi$:

  $f\left((2k+1) \cdot \pi\right) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad -1 - 2a\left(1 - 1\right) = -\dfrac{1}{2}$

  Dit is onmogelijk, er bestaat geen waarde van a in dat geval.

- $\cos x = \dfrac{a}{2}$:

  $f(x) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 - 2a(1 + \cos x) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \dfrac{a^2}{4} - 1 - 2a\left(1 + \dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \quad a^2 - 2 - 4a - 2a^2 = -1$

  $\Leftrightarrow \quad a^2 + 4a + 1 = 0$

  $\Leftrightarrow \quad a = -2 + \sqrt{3}$ of $a = -2 - \sqrt{3}$

  Voor $a = -2 + \sqrt{3}$ geldt dan bij het extremum voor x_0 dat $\cos x_0 = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ met

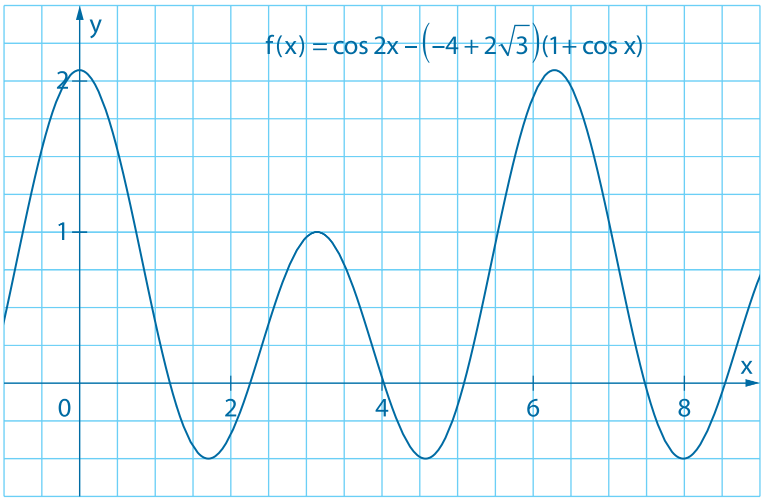
  $f''(x_0) = -4\left(2\left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right) + 2\left(-2 + \sqrt{3}\right)\left(-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$

  zodat er een minimum bereikt wordt.

  Voor $a = -2 - \sqrt{3}$ geldt dan bij het extremum voor x_0 dat $\cos x_0 = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ met

  $f''(x_0) = -4\left(2\left(-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right) + 2\left(-2 - \sqrt{3}\right)\left(-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$ zodat er een maximum bereikt wordt.

  Besluit: $a = -2 + \sqrt{3}$, antwoord D is het juiste.



Opdracht 31 bladzijde 93

Gegeven de functie f: $x \longmapsto \text{Bgsin}\,\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$.

1 Bepaal dom f.

Een eerste voorwaarde is $x \geqslant 0$ zodat $\sqrt{x}$ gedefinieerd is.

Een tweede voorwaarde stelt zich door de boogsinus: $-1 \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \leqslant 1$.

Stel $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$, dan is $g'(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}}$.

Nu is $g'(x) > 0$ als $0 < x < 1$ en $g'(x) < 0$ als $x > 1$.

g bereikt dus een absoluut maximum voor $x = 1$, dit is $g(1) = 1$.

Bovendien is $g(x) \geqslant 0$ voor elke (positieve) waarde van x.

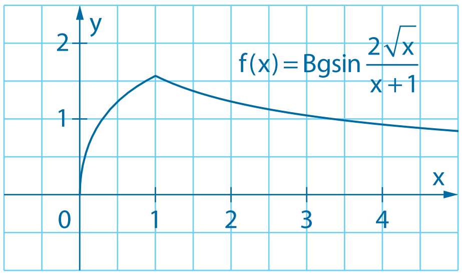
We vinden dus: $0 \leqslant \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \leqslant 1$ zodat we door de boogsinus geen extra beperking voor het domein krijgen.

Besluit: dom $f = \mathbb{R}^+$.

2 Bepaal de relatieve extrema van f.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x+1)^2-4x}\,(x+1)\sqrt{x}} = \frac{1-x}{(x+1)\sqrt{x(x-1)^2}}$$

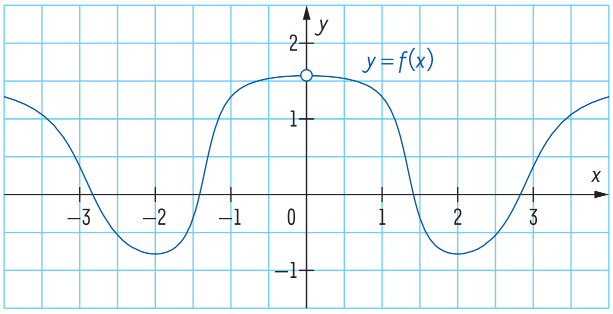
De eerste afgeleide heeft geen nulpunten, maar $f'(x) > 0$ als $0 < x < 1$ en $f'(x) < 0$ als $x > 1$ zodat er een relatief (en ook absoluut) maximum is gelijk aan $\dfrac{\pi}{2}$ voor $x = 1$.



In 1 is f niet afleidbaar, maar de functie bereikt er wel een maximum.

Opdracht 32 bladzijde 94

De getekende grafiek is die van de functie $f\colon x \mapsto \text{Bgtan}\left(\dfrac{x^4+2ax^2+b}{cx^4+dx^2+e}\right)$.



De rechte met vergelijking $y=\dfrac{\pi}{2}$ is een horizontale asymptoot van de grafiek van f, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\sqrt{2}$ is een nulpunt en f bereikt een minimum $-\dfrac{\pi}{4}$ voor $x=2$.

1 Bepaal a, b, c, d en e.

– $\sqrt{2}$ is een nulpunt van f, dus $\left(\sqrt{2}\right)^4+2a\left(\sqrt{2}\right)^2+b=0 \iff b=-4-4a$

– Aangezien $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\text{Bgtan}\,\dfrac{b}{e}=\dfrac{\pi}{2}$ en $\text{Bgtan}\,(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, is $e=0$ als $b\neq 0$.

– $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ en aangezien $\text{Bgtan}\,(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, zal $c=0$.

We hebben al: $f(x)=\text{Bgtan}\left(\dfrac{x^4+2ax^2-4-4a}{dx^2}\right)$.

– $f(2)=\text{Bgtan}\dfrac{16+8a-4-4a}{4d}=-\dfrac{\pi}{4}$

$$\iff \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16+8a-4-4a}{4d}$$
$$\iff -4d=12+4a$$
$$\iff d=-3-a$$

Er blijft nog maar 1 parameter over: $f(x)=\text{Bgtan}\left(\dfrac{x^4+2ax^2-4-4a}{(-3-a)x^2}\right)$.

– Nu moet $f'(2)=0$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x^4+2ax^2-4-4a}{(-3-a)x^2}\right)^2}\cdot\frac{x(4x^3+4ax)-(x^4+2ax^2-4-4a)2}{(-3-a)x^3}$$

Enkel de teller is van belang voor het nulpunt:

$f'(2)=0$

$\Leftrightarrow\ 2\cdot(4\cdot 2^3+4a\cdot 2)-(2^4+2a\cdot 2^2-4-4a)2=0$

$\Leftrightarrow\ 32+8a-(4a+12)=0$

$\Leftrightarrow\ 4a+20=0$

$\Leftrightarrow\ a=-5$

Dan is $d = -3 + 5 = 2$ en $b = -4 + 20 = 16$.

Besluit: $a = -5$, $b = 16$, $d = 2$ en $c = e = 0$.

Controleren kan door de grafiek van $f(x)=\text{Bgtan}\left(\dfrac{x^4-10x^2+16}{2x^2}\right)$ te plotten.

2 Bepaal de andere nulpunten van *f* exact.

$\text{Bgtan}\left(\dfrac{x^4-10x^2+16}{2x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ x^4-10x^2+16=0$

$\Leftrightarrow\ x^2=8 \text{ of } x^2=2$

$\Leftrightarrow\ x=\pm 2\sqrt{2} \text{ of } x=\pm\sqrt{2}$

De andere drie nulpunten zijn dus $-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ en $2\sqrt{2}$.

Opdracht 33 bladzijde 94

De functie $f\colon x \longmapsto \sin\left(\dfrac{n\pi x^2}{1+4x^2}\right)$ heeft 5 nulpunten, waaronder $-\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$.

1 Bepaal *n* als je weet dat $n \in \mathbb{N}$.

– $f: x \mapsto \sin\left(\dfrac{n\pi x^2}{1+4x^2}\right)$ heeft $-\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ als nulpunten, zodat

$\sin\left(\dfrac{2n\pi}{9}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2n\pi}{9}=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\ n=4{,}5k \quad (k\in\mathbb{Z})$

n is bijgevolg een 9-voud. (1)

– $\sin\left(\dfrac{n\pi x^2}{1+4x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{n\pi x^2}{1+4x^2}=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\ nx^2=k+4kx^2$

$\Leftrightarrow\ x^2=\dfrac{k}{n-4k}$

Nu is $\dfrac{k}{n-4k} \geqslant 0 \iff 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{4}$.

Dit zal ons een onder- en een bovengrens geven voor n:

voor $k = 0$ is $x = 0$ het eerste nulpunt;

voor $k = 1$ vinden we het tweede en het derde nulpunt: $\pm\sqrt{\dfrac{1}{n-4}}$: $n > 4$;

voor $k = 2$ vinden we het vierde en het vijfde nulpunt: $\pm\sqrt{\dfrac{2}{n-8}}$: $n > 8$; (2)

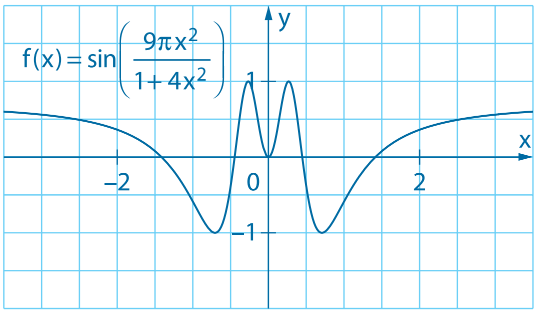
voor $k = 3$ zouden we nog de nulpunten $\pm\sqrt{\dfrac{3}{n-12}}$ krijgen, wat niet mogelijk is,

dus $n < 12$. (3)

Uit (1), (2) en (3) en $n \in \mathbb{N}$ volgt dat $n = 9$.

2 Bepaal de *x*-coördinaten van de relatieve extrema van *f* voor de gevonden waarde van *n*.

$$f(x) = \sin\left(\frac{9\pi x^2}{1+4x^2}\right)$$



$$f'(x) = \frac{18\pi x}{(1+4x^2)^2} \cdot \cos\left(\frac{9\pi x^2}{1+4x^2}\right) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ of } \cos\left(\frac{9\pi x^2}{1+4x^2}\right) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ of } \frac{9\pi x^2}{1+4x^2} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = 0 \text{ of } \frac{9x^2}{1+4x^2} = \frac{1+2k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = 0 \text{ of } 18x^2 = 1 + 2k + 8kx^2 + 4x^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = 0 \text{ of } (14-8k)x^2 = 1 + 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff x = 0 \text{ of } x^2 = \frac{1+2k}{14-8k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdat de vergelijking $x^2 = \dfrac{1+2k}{14-8k}$ reële oplossingen zou hebben, moet $-\dfrac{1}{2} \leqslant k < \dfrac{14}{8}$.

Aangezien $k \in \mathbb{Z}$ is dus $k = 0$ of $k = 1$.

– Voor $k = 0$ vinden we $x^2 = \dfrac{1}{14} \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{14}} \approx \pm 0{,}267$.

We zien op de grafiek dat in deze punten maxima bereikt worden.

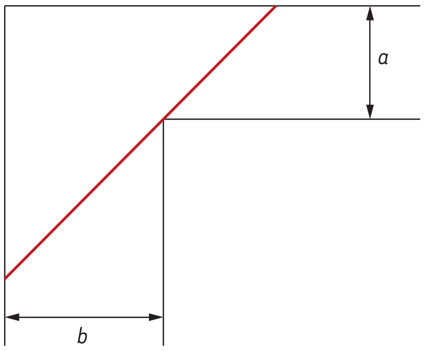
– Voor $k = 1$ wordt de vergelijking $x^2 = \dfrac{3}{6} \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}707$.

Voor deze x-waarden bereikt de grafiek minima.

– Tenslotte wordt voor $x = 0$ nog een minimum bereikt.

Opdracht 34 bladzijde 94

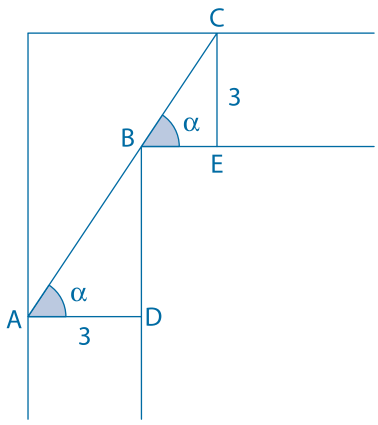
In een museum wil men een aantal schilderijen in een andere zaal ophangen. Voor de verplaatsing moet men noodgedwongen een bocht nemen in twee gangen die *a* meter en *b* meter breed zijn en loodrecht op elkaar staan.



1 Bereken de maximale lengte *l* van een schilderij dat zo verplaatst kan worden als $a = b = 3$.

De te maximaliseren lengte is

$l = |AB| + |BC|$ of $l = \dfrac{3}{\cos\alpha} + \dfrac{3}{\sin\alpha}$



met α de hoek in de figuur aangeduid.

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{3\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 3\cdot\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha}$$

$$\frac{dl}{d\alpha} = 0 \iff \sin^3\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

$$\iff \sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\iff \tan\alpha = 1$$

Aangezien $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ is de enige oplossing $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\frac{d^2l}{d\alpha^2} = \frac{3(1+\sin^2\alpha)}{\cos^3\alpha} + \frac{3(1+\cos^2\alpha)}{\sin^3\alpha} \text{ zodat } \left.\frac{dl}{d\alpha}\right|_{\alpha=\frac{\pi}{4}} > 0.$$

Bij het verplaatsen van het schilderij bereiken we het lastigste punt (met minimale lengte l) bij $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

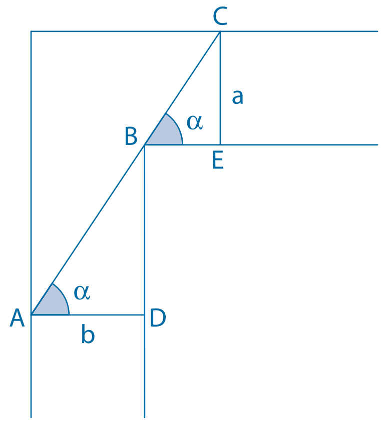
Dit geeft de maximale lengte van het schilderij dat mogelijk zo te verplaatsen is:

$l = \dfrac{3}{\cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{3}{\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$, dit is ongeveer 8,49 m.

2 Bereken deze maximale lengte *l* in functie van *a* en *b*.

De te maximaliseren lengte is

$l = |AB| + |BC|$ of $l = \dfrac{b}{\cos\alpha} + \dfrac{a}{\sin\alpha}$



met α de hoek in de figuur aangeduid.

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{b\sin^3\alpha - a\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$$

$$\frac{dl}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow b\sin^3\alpha - a\cos^3\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{b}\sin\alpha = \sqrt[3]{a}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Aangezien $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ is de enige oplossing $\alpha = \text{Bgtan}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

In het eerste kwadrant blijft de tweede afgeleide positief (zie **1**) zodat we opnieuw het minimum van $|AB| + |BC|$ gevonden hebben.

In ΔBCE vinden we met $|CE| = a$ en $\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ dat $|BE| = \sqrt[3]{a^2b}$, zodat $|BC| = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}}$.

In ΔABD vinden we met $|AD| = b$ en $\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ dat $|DB| = \sqrt[3]{ab^2}$, zodat $|AB| = \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$.

We vinden als de maximale lengte van het schilderij dat zo te verplaatsen is:

$l = \sqrt{a^2 + a\sqrt[3]{ab^2}} + \sqrt{b^2 + b\sqrt[3]{ba^2}}$.

Opdracht 35 bladzijde 94

Gegeven de familie functies $f\colon x \mapsto k \cdot \dfrac{\ln x}{x}$ met $k \neq 0$.

1 Voor welke waarde van k heeft f een maximum gelijk aan 3?

$f'(x) = k\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

Het teken van de eerste afgeleide hangt af van k:

– als $k > 0$:

x	0		e	
$k(1-\ln x)$		+	0	–
x^2		+	+	+
$f'(x)$		+	0	–

– als $k < 0$:

x	0		e	
$k(1-\ln x)$		–	0	+
x^2		+	+	+
$f'(x)$		–	0	+

Enkel in het geval $k > 0$ bereikt f een absoluut maximum voor $x = e$ gelijk aan $f(e) = k\dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{k}{e}$.

Dit maximum is gelijk aan 3 als $k = 3e$.

2 De rechte met vergelijking $y = p$ snijdt de y-as in het punt A en de grafiek van $f\colon x \mapsto 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$ in de punten B en C zodat $|AC| = 2 \cdot |AB|$.

Bereken p.

We bepalen p zodanig dat $|AC| = 2\,|AB|$.

Stellen we B(k, p), dan is C(2k, p).

We zoeken dus een getal k zodanig dat

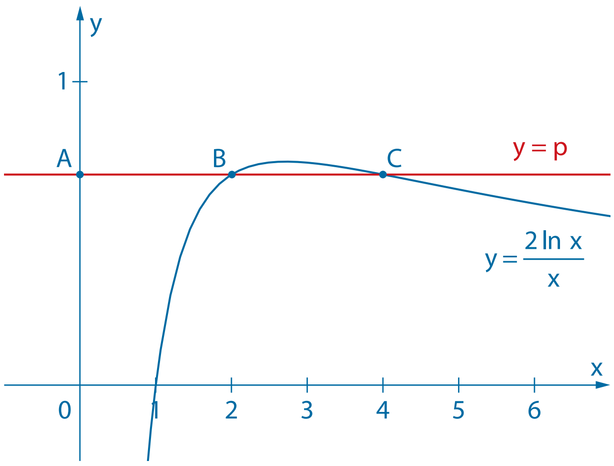
$$f(k) = f(2k) \Leftrightarrow \frac{2\ln k}{k} = \frac{2\ln 2k}{2k}$$

$$\overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\ln k = \ln 2k$$

$$\overset{k>0}{\Leftrightarrow} \ln k^2 = \ln 2k$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 2k$$

$$\overset{k>0}{\Leftrightarrow} k = 2$$



Dan is $p = \dfrac{2\ln 2}{2} = \ln 2$.

Opdracht 36 bladzijde 95

Bepaal de buigpunten van de grafiek van de functie *f*.

1 $f\colon x \longmapsto 4\cos^3 x - 3\cos x$

$f(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$f'(x) = 12\cos^2 x(-\sin x) + 3\sin x = 3\sin x(1 - 4\cos^2 x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\sin x \cdot 8\cos x \sin x + 3\cos x(1 - 4\cos^2 x) \\ &= 24\sin^2 x\cos x + 3\cos x - 12\cos^3 x \\ &= 24(1-\cos^2 x)\cos x + 3\cos x - 12\cos^3 x \\ &= 9\cos x(3 - 4\cos^2 x) \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$

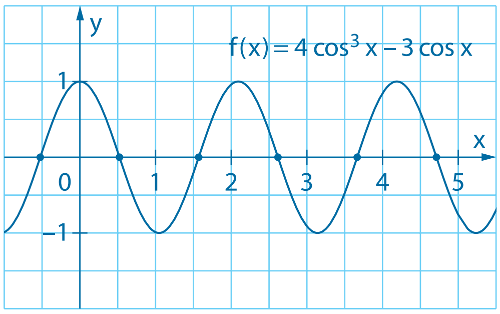
$\Leftrightarrow\ \cos x = 0 \text{ of } 3 - 4\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos x = 0 \text{ of } \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ of } \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ of } x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

De buigpunten zijn $\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ 0\right)$.



Opmerking

Uit de formules van het vijfde jaar, vinden we ook dat $f(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$.

Hiervan gebruik maken, vereenvoudigt het rekenwerk aanzienlijk.

2 $f: x \mapsto \sin x + \sin^2 x$

$f(x) = \sin x + \sin^2 x$

$f'(x) = \cos x + 2 \sin x \cos x = \cos x + \sin 2x$

$f''(x) = -\sin x + 2 \cos 2x = -\sin x + 2(1 - 2 \sin^2 x) = -4 \sin^2 x - \sin x + 2$

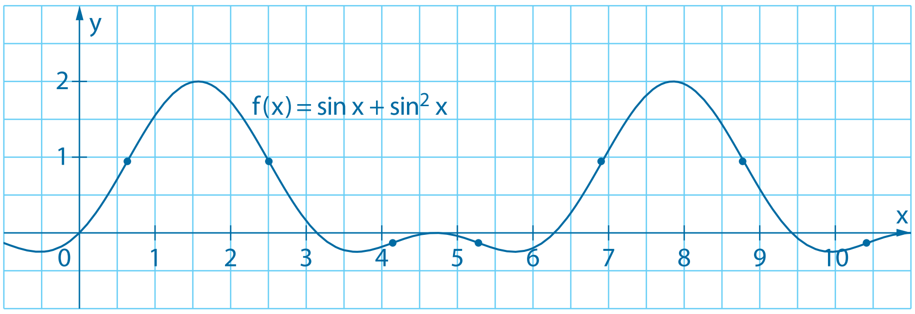
$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad -4 \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{-8}$

$\Leftrightarrow \quad x \approx 0{,}635 + k \cdot 2\pi$ of $x \approx 2{,}507 + k \cdot 2\pi$ of $x \approx 4{,}145 + k \cdot 2\pi$ of $x \approx 5{,}280 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

De buigpunten zijn $(0{,}635 + k \cdot 2\pi;\ 0{,}945)$, $(2{,}507 + k \cdot 2\pi;\ 0{,}945)$, $(4{,}145 + k \cdot 2\pi;\ -0{,}132)$ en $(5{,}280 + k \cdot 2\pi;\ -0{,}132)$.



Opdracht 37 bladzijde 95

Bepaal het hol en bol verloop en de eventuele buigpunten van de grafiek van

1 $f: x \mapsto (x-2)^2\, e^x$

$f'(x) = (x-2)^2 e^x + 2(x-2)e^x = (x^2 - 2x)e^x$

$f''(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f″(x)	+	0	−	0	+
f(x)	∪	2,834 bgpt.	∩	1,411 bgpt.	∪

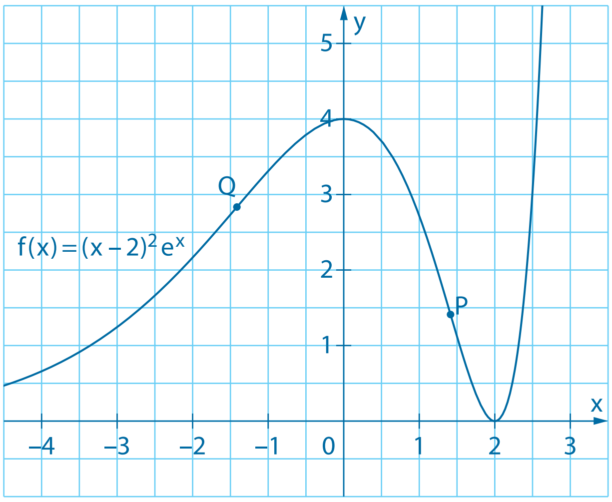
De grafiek van f is hol in $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$ en in $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ en bol in $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

De grafiek van f heeft twee buigpunten:

$P\left(\sqrt{2}, (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\right)$ en

$Q\left(-\sqrt{2}, (6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\right)$ of

$P\left(\sqrt{2}; 1{,}411\right)$ en $Q\left(-\sqrt{2}; 2{,}834\right)$.



2 $f: x \mapsto \dfrac{\ln x}{1 - 2\ln x}$

$\text{dom } f = \left]0, +\infty\right[\setminus \left\{\sqrt{e}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x(1-2\ln x)^2}$

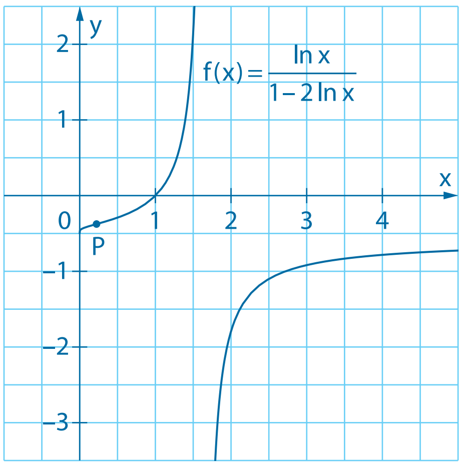
$f''(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{x^2(1-2\ln x)^3}$

De teller is 0 als $2\ln x = -3 \iff x = e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0{,}223$.

x	0		$\sqrt{e^{-3}}$		$\sqrt{e}$	
$2\ln x + 3$		–	0	+	+	+
$x^2(1-2\ln x)^3$		+	+	+	0	–
$f''(x)$		–	0	+	|	–
$f(x)$		$\frown$	$-\frac{3}{8}$ bgpt.	$\smile$	|	$\frown$

De grafiek van f is bol in $\left]0, \sqrt{e^{-3}}\right]$ en in $\left]\sqrt{e}, +\infty\right[$ en hol in $\left[\sqrt{e^{-3}}, \sqrt{e}\right[$.

Het buigpunt is $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}, -\dfrac{3}{8}\right)$.



Opdracht 38 bladzijde 95

Bepaal de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van $f: x \mapsto e^{-x} \cos x$.

$f(x) = e^{-x} \cos x$

$f'(x) = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$

$f''(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x) - e^{-x}(\cos x - \sin x) = 2e^{-x} \sin x$

De nulpunten (met tekenwissel) van de tweede afgeleide zijn de x-coördinaten van de buigpunten: $k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Opdracht 39 bladzijde 95

Voor welke waarde(n) van k heeft de grafiek van $f: x \mapsto e^{-2x^2 + kx - 2}$ een buigpunt voor $x = 1$?

$f(x) = e^{-2x^2 + kx - 2}$

$f'(x) = e^{-2x^2 + kx - 2} \cdot (-4x + k)$

$f''(x) = e^{-2x^2 + kx - 2} \cdot (-4x + k)(-4x + k) - 4\, e^{-2x^2 + kx - 2} = \left[(-4x + k)^2 - 4\right] e^{-2x^2 + kx - 2}$

In een buigpunt is de tweede afgeleide nul:

$f''(1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[(-4 + k)^2 - 4\right] e^{-2 + k - 2} = 0$

$\Leftrightarrow (-4 + k)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (-4 + k)^2 = 4$

$\Leftrightarrow k = 2 \text{ of } k = 6$

In een buigpunt verandert ook het teken van de tweede afgeleide:

- voor $k = 2$ is $f''(x) = \left[(-4x + 2)^2 - 4\right] e^{-2x^2 + 2x - 2} = 16x(x - 1)e^{-2x^2 + 2x - 2}$,
  zodat duidelijk is dat de tweede afgeleide van teken verandert in 1.
- voor $k = 6$ is $f''(x) = \left[(-4x + 6)^2 - 4\right] e^{-2x^2 + 6x - 2} = 16(x - 1)(x - 2)e^{-2x^2 + 2x - 2}$,
  ook hier verandert de tweede afgeleide van teken in 1.

Opdracht 40 bladzijde 95

Gegeven de familie van functies $f: x \mapsto (x^2 + a)\, e^x$.

$f(x) = (x^2 + a) \cdot e^x$

$f'(x) = (x^2 + a) \cdot e^x + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x + a)$

1 Voor welke waarde(n) van *a* heeft de grafiek van *f* geen buigpunten?

$f''(x) = e^x(x^2 + 2x + a) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + a + 2).$

De grafiek van f heeft geen buigpunt als de tweede afgeleide niet van teken verandert, dit is als $x^2 + 4x + a + 2$ één of geen nulpunten heeft, dus als

$4^2 - 4(a + 2) \cdot 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad 16 - 4a - 8 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad a \geqslant 2$

2 Voor welke waarde(n) van *a* heeft de grafiek van *f* een buigpunt met horizontale raaklijn?

$f'(x) = (x^2 + a) \cdot e^x + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x + a)$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + a = 0$

Er is een horizontale raaklijn zonder tekenverandering van de eerste afgeleide als a = 1.

In dat geval is $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$ en heeft de grafiek van f een buigpunt $P(-1,\ 2e^{-1})$ met horizontale raaklijn.

Opdracht 41 bladzijde 95

Beschouw de familie functies $f: x \mapsto (e^x - 1)(e^x - m)$ met *m* een reële parameter.

1 Voor welke waarde(n) van *m* heeft de grafiek van *f* een buigpunt?

$f(x) = (e^x - 1)(e^x - m)$

$f'(x) = e^x(e^x - m) + e^x(e^x - 1) = e^x(2e^x - m - 1)$

$f''(x) = e^x(2e^x) + e^x(2e^x - m - 1) = e^x(4e^x - m - 1)$

De tweede afgeleide heeft een nulpunt met tekenverandering als

$4e^x - m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \dfrac{m+1}{4}$ een oplossing heeft.

Dit is zo als $\dfrac{m+1}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -1.$

Het buigpunt is dan $P\left(\ln\dfrac{m+1}{4},\ \dfrac{m+1-4}{4} \cdot \dfrac{m+1-4m}{4}\right)$ of $P\left(\ln\dfrac{m+1}{4},\ \dfrac{(m-3)(1-3m)}{16}\right)$.

2 Voor welke waarde(n) van *m* ligt dit buigpunt in het derde kwadrant?

Als de x- én de y-coördinaat van het buigpunt strikt negatief zijn, ligt dit buigpunt in het derde kwadrant.

We bepalen dus m zodanig dat $\begin{cases} \ln\dfrac{m+1}{4} < 0 \\ \dfrac{(m-3)(1-3m)}{16} < 0 \end{cases}$

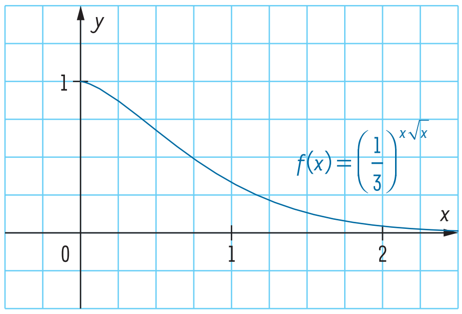
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{m+1}{4} < 1 \\ m < \dfrac{1}{3} \text{ of } m > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m < \dfrac{1}{3} \text{ of } m > 3 \end{cases}$$

Als $-1 < m < \frac{1}{3}$ ligt het buigpunt in het derde kwadrant.

Opdracht 42 bladzijde 95

De grafiek van $f\colon x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}$ is getekend.



Bepaal exact de *x*-coördinaat van het buigpunt van de grafiek van *f*.

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f''(x)=\left(\ln\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}\cdot\frac{9}{4}x+\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}\cdot\frac{3}{4\sqrt{x}}=\frac{3}{4}\ln\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{x}}\left(3x\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

We berekenen het nulpunt van de tweede afgeleide:

$f''(x)=0$

$$\Leftrightarrow\quad 3x\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -3x\ln 3+\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

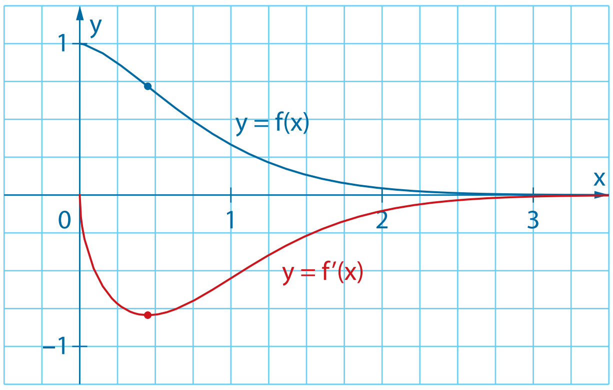
$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{x}}=x\ln 3^3$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\ln 27}=x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\left(\frac{1}{\ln 27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

We zien op de grafiek dat de eerste afgeleide een minimum bereikt voor $x = \left(\frac{1}{\ln 27}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0,45.$

De grafiek van f heeft voor deze x-waarde dan een buigpunt.



Opdracht 43 bladzijde 96

Bereken met de regel van de l'Hôpital.

1 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2}{3x^2 + 4x - 3} = \frac{3}{4}$

2 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \frac{4x^3}{1} = 4$

3 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 10} - 3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x + 10}}} = 6$

4 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{{}^{a}\log(1 + x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1 + x)\ln a}}{1} = \frac{1}{\ln a}$

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x - 1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$

6 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{8^x \ln 8 - 2^x \ln 2}{4} = \frac{\ln 8 - \ln 2}{4} = \frac{1}{4} \ln 4 = \ln 4^{\frac{1}{4}} = \ln \sqrt{2}$

7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 5$

8 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + x^2}{e^x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + 2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^2 + 2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{24x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{24}{e^x} \overset{\frac{24}{+\infty}}{=} 0$

9 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\ln(1-x) + 1}{(x-1)^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{-2}{1-x}}{2(x-1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0$

10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln(\ln x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$

Opdracht 44 bladzijde 96

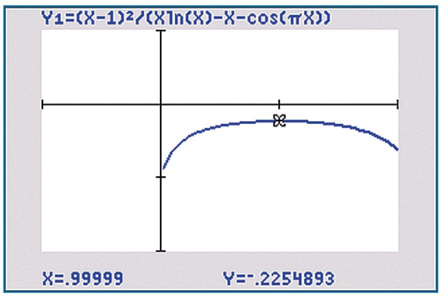
Schat de waarde van $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$ door de grafiek van de functie

$f\colon x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$ te bekijken in de omgeving van $x = 1$.

Bereken daarna deze limiet exact met de regel van de l'Hôpital.

De limiet van $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$ in 1

zal ongeveer gelijk zijn aan $-0{,}2255$.



Berekening:

$$\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{\ln x + 1 - 1 + \pi \sin \pi x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{\frac{1}{x} + \pi^2 \cos \pi x} = \frac{2}{1 - \pi^2} \approx -0{,}225$$

Opdracht 45 bladzijde 96

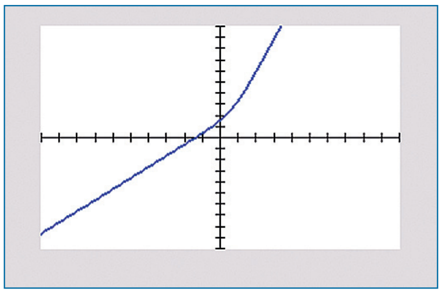
Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van f.

1 $f: x \mapsto x + \ln(e^{2x} + 4)$

dom $f = \mathbb{R}$ aangezien $e^{2x} + 4 > 0$ voor elke x.

Er zijn bijgevolg geen verticale asymptoten.

We plotten de grafiek van f en vermoeden twee schuine asymptoten.



– voor $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln(e^{2x} + 4)}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4)}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 4}}{1}$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 4}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}}$$

$$= 1 + 2 = 3$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln(e^{2x} + 4) - 3x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^{2x} + 4) - 2x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^{2x} + 4) - \ln(e^{2x})\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{e^{2x} + 4}{e^{2x}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 4}{e^{2x}}\right)$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}\right) = \ln 1 = 0$$

De eerste schuine asymptoot heeft als vergelijking $y = 3x$.

– voor $x \to -\infty$:

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \ln(e^{2x} + 4)}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 4)}{x}$$

$$\overset{\frac{\ln 4}{\infty}}{=} 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \ln(e^{2x} + 4) - x\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\ln(e^{2x} + 4)\right)$$

$$= \ln 4$$

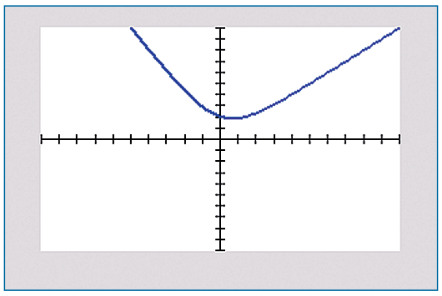
De tweede schuine asymptoot heeft als vergelijking $y = x + \ln 4$.

2 $f: x \mapsto 3\ln(e^x + 1) - 2x$

dom f = ℝ aangezien $e^x + 1 > 0$ voor elke x.

Er zijn bijgevolg geen verticale asymptoten.

We vermoeden twee verschillende schuine asymptoten uit de grafiek van f.



– voor $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln(e^x+1)-2x}{x}$$

$$= -2 + 3\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} -2 + 3\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} -2 + 3\cdot 1 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(3\ln(e^x+1) - 3x\right)$$

$$= 3\cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^x+1) - \ln(e^x)\right)$$

$$= 3\cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$= 3\cdot\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} 3\cdot\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\right) = 3\cdot\ln 1 = 0$$

Er is een eerste schuine asymptoot met vergelijking $y = x$.

– voor $x \to -\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\ln(e^x+1)-2x}{x}$$

$$= -2 + 3\cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x}$$

$$\overset{\frac{0}{-\infty}}{=} -2 + 0 = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} 3\ln(e^x+1)$$

$$= 3\ln 1 = 0$$

De tweede schuine asymptoot heeft als vergelijking $y = -2x$.

Opdracht 46 bladzijde 96

$f: x \mapsto \dfrac{2\ln 4x}{m+\ln x}$

1 Voor welke waarde van *m* heeft de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{2\ln 4x}{m+\ln x}$ de rechte $r \leftrightarrow x = e^2$ als asymptoot?

$r \leftrightarrow x = e^2$ is een verticale asymptoot van de grafiek van f als e^2 een nulpunt is van de noemer en niet van de teller van het voorschrift van f,

dus $m + \ln(e^2) = 0 \iff m = -2$.

2 Heeft de grafiek van *f* voor deze gevonden waarde van *m* nog andere asymptoten? Verklaar.

De grafiek van f heeft nog een horizontale asymptoot met vergelijking y = 2,

aangezien $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln 4x}{-2+\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$

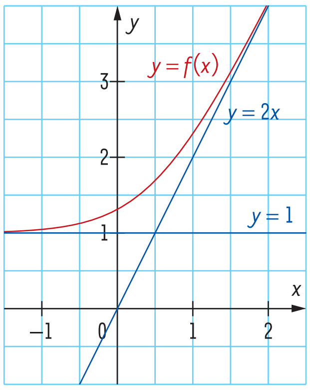
Opmerking

Het domein van f is $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{e^2\}$, toch is er geen verticale asymptoot voor x = 0 want

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{2\ln 4x}{-2+\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{2\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{2x}{x} = 2.$$

Opdracht 47 bladzijde 97

De grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \ln(e^{ax}+b)$ heeft een schuine asymptoot met vergelijking $y = 2x$ voor $x \to +\infty$ en een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 1$ voor $x \to -\infty$.
Bepaal *a* en *b*.



$f(x) = \ln(e^{ax}+b)$

– Er is een schuine asymptoot met vergelijking y = 2x voor $x \to +\infty$, zodat

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{ax}+b)}{x} = 2$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ als } a>0}{\underset{H}{\iff}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ae^{ax}}{e^{ax}+b} = 2$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{\iff}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^2e^{ax}}{ae^{ax}} = 2$$

$$\iff a = 2$$

Ter controle:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{2x}+b)-2x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{2x}+b)-\ln e^{2x}\right] = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+b}{e^{2x}}\right)$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2e^{2x}}\right) = \ln 1 = 0$$

- y = 1 is een vergelijking van de horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$, bijgevolg is

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{2x}+b) = 1 \iff \ln b = 1 \iff b = e.$$

Opdracht 48 bladzijde 97

Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van $f\colon x \mapsto x \cdot \ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

Om het domein van f te bepalen, moeten we de ongelijkheid $e+\frac{1}{x}>0$ oplossen.

- Als $x > 0$ geldt:

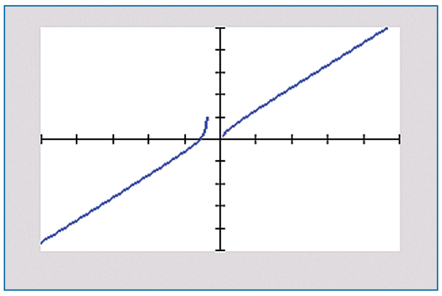
  $$e+\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow ex+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{e}$$

  Dit is steeds voldaan voor $x > 0$.

- Als $x < 0$ geldt:

  $$e+\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow ex+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{e}$$

Besluit: $\text{dom } f = \left]-\infty, -\frac{1}{e}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.



We plotten de grafiek van f.

Er is vermoedelijk een schuine en een verticale asymptoot.

- Berekening van de schuine asymptoot:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to\pm\infty}\left(e+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \ln e = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right]$$
$$\overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

De schuine asymptoot heeft als vergelijking $y = x + \frac{1}{e}$.

– Berekening van de verticale asymptoot:

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{e} \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{e} \\ <}} \left[x \cdot \ln\left(e + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{e} \cdot \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{e} \\ <}} \ln\left(e + \frac{1}{x} \right)$$

$$\overset{-\frac{1}{e}\cdot(-\infty)}{=} +\infty$$

Er is een verticale asymptoot met vergelijking $x = -\frac{1}{e}$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x \cdot \ln\left(e + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln\left(e + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{e + \frac{1}{x}} = 0$$

De y-as is bijgevolg geen verticale asymptoot, maar (0,0) is een opening in de grafiek van f.

Opdracht 49 bladzijde 97

Bepaal a en b als $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2) + \cos ax + b}{x^2} = \dfrac{17}{18}$.

(bron © Zelftest analyse KU Leuven)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) + \cos ax + b}{x^2} = \frac{17}{18}$$

– Om een eindige limiet te hebben, moet de teller 0 zijn voor $x = 0$:

$\sin 0 + \cos 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$

- We passen nu de regel van de l'Hôpital toe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) + \cos ax - 1}{x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x - a \sin ax}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x^2) \cdot 4x^2 + 2\cos(x^2) - a^2 \cos ax}{2}$$

$$= \frac{2 - a^2}{2}$$

Nu is

$$\frac{2 - a^2}{2} = \frac{17}{18}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{17}{9} = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ of } a = -\frac{1}{3}$$

Opdracht 50 bladzijde 97

1 Bepaal a en b zodanig dat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + a\cos 2x + b\cos 4x}{x^4}$ eindig is.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + a\cos 2x + b\cos 4x}{x^4}$ is eindig als de teller 0 is voor $x = 0$:

$1 + a\cos 0 + b\cos 0 = 0$

$\Leftrightarrow\ a + b = -1$

$\Leftrightarrow\ b = -1 - a \qquad (1)$

We berekenen nu de limiet met de regel van de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + a\cos 2x + (-1-a)\cos 4x}{x^4}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-2a\sin 2x + 4(1+a)\sin 4x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-a\sin 2x + 2(1+a)\sin 4x}{2x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{-2a\cos 2x + 8(1+a)\cos 4x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-a\cos 2x + 4(1+a)\cos 4x}{3x^2} \qquad (2)$$

Om verder te kunnen gaan tot een eindige limiet, moet de teller opnieuw 0 zijn voor $x = 0$:

$-a\cos 0 + (4 + 4a)\cos 0 = 0$

$\Leftrightarrow\ -a + 4 + 4a = 0$

$\Leftrightarrow\ a = -\dfrac{4}{3}$

Uit (1) volgt dat $b = \dfrac{1}{3}$.

2 Bereken deze limiet voor de gevonden waarde van *a* en *b*.

We berekenen de limiet verder vertrekkend van (2):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3}\cos 2x - \frac{4}{3}\cos 4x}{3x^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin 2x + 4\sin 4x}{6x}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-\sin 2x + 2\sin 4x}{3x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos 2x + 8\cos 4x}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{3} = \frac{8}{3}$$

Opdracht 51 bladzijde 97

Bereken met de regel van de l'Hôpital.

1 $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2 \cdot \ln x) \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

2 $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\frac{e}{1+\ln x}} \overset{0^0}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\ln x^{\frac{e}{1+\ln x}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{e \ln x}{1+\ln x}} = e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e\ln x}{1+\ln x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{e}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e} = e^e$$

3 $$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{\infty^0}{=} \lim_{x \to +\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

4 $$\lim_{x \to 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x \to 0} e^{\ln(1-3x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1-3x)}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{-3}{1-3x}}{1}} = e^{-3}$$

5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\sin x)^{\tan x} \overset{0^0}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\ln(\sin x)^{\tan x}}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\tan x \cdot \ln(\sin x)}$

$\overset{0\cdot\infty}{=} e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}}$

$= e^{-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\sin x \cos x)}$

$= e^0 = 1$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)}$

$\overset{\infty\cdot 0}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x+2}\cdot\frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}}$

$= e^{2\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+2}} = e^2$

7 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^{\tan x} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\ln(\sin x - \cos x)^{\tan x}}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\tan x \cdot \ln(\sin x - \cos x)}$

$\overset{\infty\cdot 0}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x - \cos x)}{\cot x}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}}$

$= e^{\frac{1}{-1}} = e^{-1}$

8 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1 + \sin 4x)^{\cot x} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\ln(1+\sin 4x)\cot x}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}}$

$= e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^4$

9 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{bx \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$

$\overset{\infty \cdot 0}{=} e^{b \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{b \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}$

$= e^{b \cdot a \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{a}{x}}} = e^{ab}$

10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 5}\right)^{2x+5} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{3x^2+2x+3}{3x^2+5}\right)^{2x+5}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(2x+5)\ln\left(\frac{3x^2+2x+3}{3x^2+5}\right)}$

$\overset{\infty \cdot 0}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{3x^2+2x+3}{3x^2+5}\right)}{\frac{1}{2x+5}}}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2+5}{3x^2+2x+3} \cdot \frac{-6x^2+12x+10}{(3x^2+5)^2}}{\frac{-2}{(2x+5)^2}}}$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5}{3x^2+2x+3} \cdot \frac{-6x^2+12x+10}{(3x^2+5)^2} \cdot \frac{(2x+5)^2}{-2}}$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-72x^6}{-54x^6}}$

$= e^{\frac{4}{3}}$

Opdracht 52 bladzijde 97

Bereken $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{2+\sqrt{4x^2+1}}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{2+\sqrt{4x^2+1}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{2+\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}}{\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)\sqrt{4x^2+1}}{8x\sqrt{x^2+x+3}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{8x\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(2x+1)\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{-8x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{8x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}\right)$$

$$= \ln\frac{2\sqrt{4}}{8\sqrt{1}} = \ln\frac{1}{2}$$

Opdracht 53 bladzijde 98

Voor welke waarde van a is $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e$?

Uit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e$ bepalen we a door eerst de limiet in het linkerlid uit te rekenen.

Dit is een limiet van de vorm 1^∞.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

$$\overset{\infty \cdot 0}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{-2a}{(x-a)^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2ax^2}{x^2 - a^2}} = e^{2a}$$

Aangezien e^{2a} gelijk moet zijn aan e, zal $a = \dfrac{1}{2}$.

Opdracht 54 bladzijde 98

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = \ln \dfrac{e}{e^{bx} - c}$ met b en c twee parameters strikt groter dan 0.

Bepaal de waarde voor b en c zodanig dat dom $f =]-3, +\infty[$ en zodanig dat de grafiek als verticale asymptoot de rechte met vergelijking $x = -3$ en als schuine asymptoot de rechte met vergelijking $y = -3x + 1$ heeft.

$f(x) = \ln \dfrac{e}{e^{bx} - c}$ met $b > 0$ en $c > 0$

- $x = -3$ is een vergelijking van de verticale asymptoot van de grafiek van f, bijgevolg is

  $$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \ln \frac{e}{e^{bx} - c} = \infty.$$

  Dit is het geval als $e^{-b \cdot 3} - c = 0 \iff c = e^{-3b}$ (1).

- $y = -3x + 1$ is een vergelijking van de schuine asymptoot van de grafiek van f, bijgevolg is

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \frac{e}{e^{bx} - c}}{x} = -3.$$

Aangezien $b > 0$, hebben we in het linkerlid de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen:

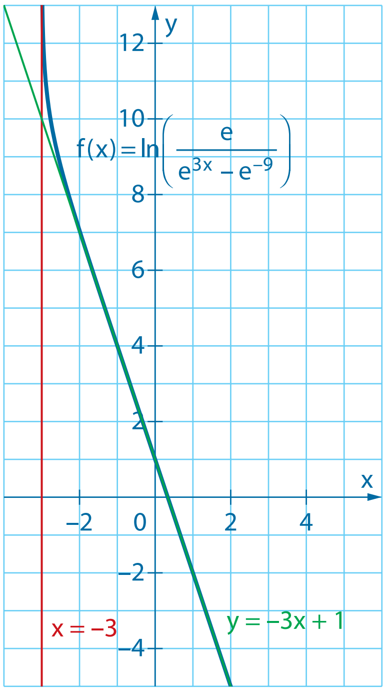
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{e^{bx}-c}{e} \cdot \dfrac{-e \cdot be^{bx}}{\left(e^{bx}-c\right)^2}}{1} = -3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{-be^{bx}}{e^{bx}-c} = -3$$

$$\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-b^2e^{bx}}{be^{bx}} = -3$$

$$\Leftrightarrow b = 3$$

Uit (1) volgt dan dat $c = e^{-9}$.



Opdracht 55 bladzijde 99

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto xe^x$.

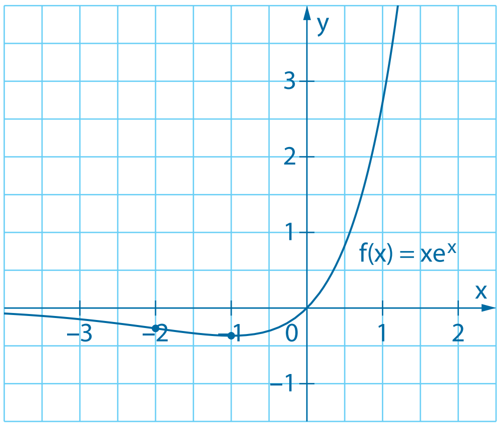
dom $f = \mathbb{R}$

1 Bepaal het stijgen en dalen en de relatieve extrema van *f*.

$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$

x		−1	
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	$\frac{-1}{e}$ min.	↗

f is dalend in $]-\infty, -1]$, stijgend in $[-1, +\infty[$ en bereikt een relatief minimum $\frac{-1}{e}$ voor $x = -1$.



2 Bepaal het hol en bol verloop en de buigpunten van de grafiek van *f*.

$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2)$

x		−2	
f″(x)	−	0	+
f(x)	∩	$\frac{-2}{e^2}$ bgpt.	∪

De grafiek van f is bol in $]-\infty, -2]$, hol in $[-2, +\infty[$ en heeft een buigpunt $P\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$.

Opdracht 56 bladzijde 99

Bepaal de relatieve extrema van de functie $f\colon x \longmapsto \ln\left(x^2 - x\right)$ zonder gebruik te maken van je rekentoestel.

(bron © Toelatingsproef arts/tandarts)

$f(x) = \ln(x^2 - x)$

- $x^2 - x > 0 \iff x < 0$ of $x > 1$

  zodat $\text{dom } f =]-\infty, 0[\ \cup \ ]1, +\infty[$

- $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x}$

  f is afleidbaar binnen het domein, dus bij een extremum moet de eerste afgeleide 0 zijn.

  Het enige nulpunt van f′ is $\frac{1}{2}$, wat buiten het domein ligt.

$f: x \longmapsto \ln(x^2 - x)$ heeft geen relatieve extrema.

Opdracht 57 bladzijde 99

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto x - 4\,\text{Bgtan}\,x$.

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

1 Bepaal vergelijkingen van de schuine asymptoten van de grafiek van f.

in $+\infty$:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 4\,\text{Bgtan}\,x}{x}$$

$$= 1 - 4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Bgtan}\,x}{x}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (x - 4\,\text{Bgtan}\,x - x)$$

$$= -4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \text{Bgtan}\,x$$

$$= -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

in $-\infty$:

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 4\,\text{Bgtan}\,x}{x}$$

$$= 1 - 4 \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{\text{Bgtan}\,x}{x}$$

$$\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (x - 4\,\text{Bgtan}\,x - x)$$

$$= -4 \cdot \lim_{x \to -\infty} \text{Bgtan}\,x$$

$$= -4 \cdot \frac{-\pi}{2} = 2\pi$$

De schuine asymptoten hebben als vergelijking $y = x - 2\pi$ en $y = x + 2\pi$.

2 Voor welke *x*-waarden bereikt *f* een extremum?

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2+1} = \frac{x^2-3}{x^2+1}$$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
f′(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	2,46 max.	↘	–2,46 min.	↗

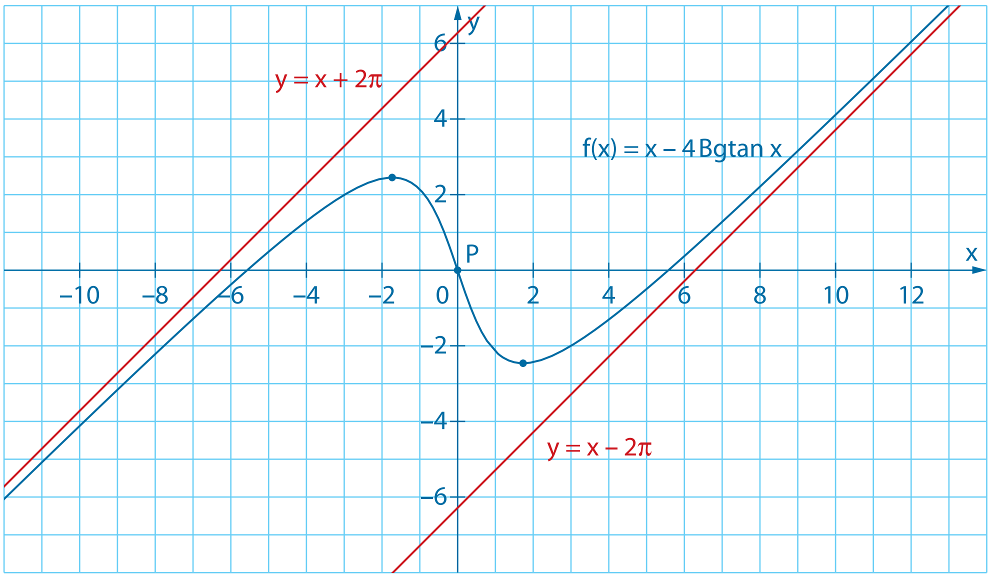
f bereikt een relatief maximum voor $x = -\sqrt{3}$ en een relatief minimum voor $x = \sqrt{3}$.

3 Bepaal de coördinaat van het buigpunt van de grafiek van *f*.

$$f''(x) = \frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

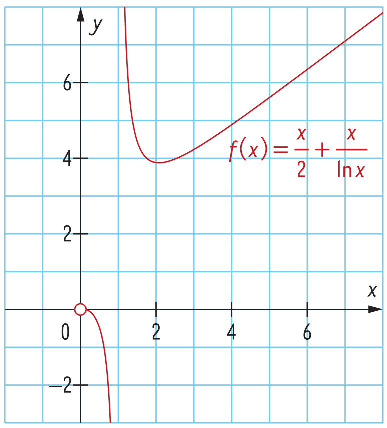
Het enige nulpunt (met tekenwissel) van de tweede afgeleide is 0.

De grafiek van f heeft P(0,0) als buigpunt.



Opdracht 58 bladzijde 99

Gegeven de grafiek van de functie $f: x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{x}{\ln x}$.



1 Bepaal het domein van *f*.

f(x) bestaat als $x > 0$ en $\ln x \neq 0$.

Bijgevolg is dom $f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2 Op de grafiek is duidelijk te zien dat *f* een relatief minimum heeft.

Bepaal exact voor welke waarde van *x* dit minimum bereikt wordt.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = -\frac{1}{2} \\ \overset{\ln x \neq 0}{\Leftrightarrow}\ & \ln^2 x + 2\ln x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln x = -1 + \sqrt{3} \quad \text{of} \quad \ln x = -1 - \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = e^{-1+\sqrt{3}} \approx 2{,}079 \quad \text{of} \quad x = e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0{,}065 \end{aligned}$$

Om aan te tonen dat een relatief maximum en een relatief minimum wordt bereikt, gebruiken we de tweede afgeleide-test.

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - (\ln x - 1) \cdot 2\frac{\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - (2\ln x - 2)}{x \ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

$f''(e^{-1+\sqrt{3}}) \approx 1{,}55 > 0$ waaruit volgt dat een relatief minimum wordt bereikt voor $x = e^{-1+\sqrt{3}}$.

$f''(e^{-1-\sqrt{3}}) \approx -3{,}56 < 0$ zodat ook nog een relatief maximum wordt bereikt voor $x = e^{-1-\sqrt{3}}$.

Merk op dat dit relatief maximum niet te zien is op de grafiek.

3 Toon aan dat *f* ook een relatief maximum bereikt.

zie 2

4 Heeft de grafiek van *f* een buigpunt? Verklaar met een berekening.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \approx 7{,}39$

Het is onmiddellijk duidelijk dat de tweede afgeleide van teken verandert in e^2, zodat de grafiek van f het punt $P(e^2, e^2)$ als buigpunt heeft.

5 Heeft de grafiek van *f* een schuine asymptoot? Verklaar met een berekening.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{maar} \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

De grafiek van f heeft geen schuine asymptoot.

Opdracht 59 bladzijde 99

Voor welke waarden van a en b bereikt de functie met voorschrift $f(x) = axe^{bx^2}$ een maximum voor $x = 2$ dat gelijk is aan 1?

$f(x) = axe^{bx^2}$

$f'(x) = ae^{bx^2} + axe^{bx^2} \cdot (2bx) = ae^{bx^2}(1+2bx^2)$

$f''(x) = ae^{bx^2}(1+2bx^2) \cdot 2bx + ae^{bx^2} \cdot 4bx = 2abxe^{bx^2}(2bx^2+3)$

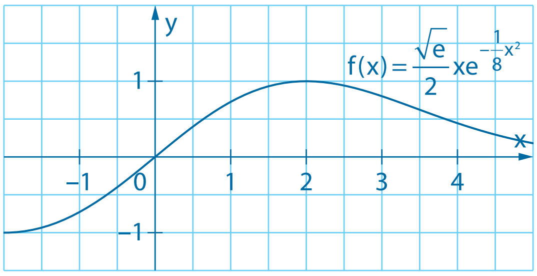
1) $f(2) = 1 \Leftrightarrow 2ae^{4b} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{e^{-4b}}{2}$ (1)

2) $f'(2) = 0 \Leftrightarrow ae^{4b}(1+8b) = 0$

Aangezien f(2) = 1, is $a \neq 0$ zodat

$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 1+8b = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{8}$.

In (1) invullen geeft $a = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.



$f''(2) = -\dfrac{\sqrt{e}}{8} \cdot 2e^{-\frac{1}{2}}(-1+3) < 0$ zodat er voor deze waarden van a en b een maximum bereikt wordt voor x = 2.

Opdracht 60 bladzijde 100

Voor welke waarde(n) van p ligt het buigpunt van de grafiek van $f\colon x \longmapsto 2\ln^2 x - p\ln x$ op de rechte $r \leftrightarrow x = 2$?

$f(x) = 2\ln^2 x - p\ln x$

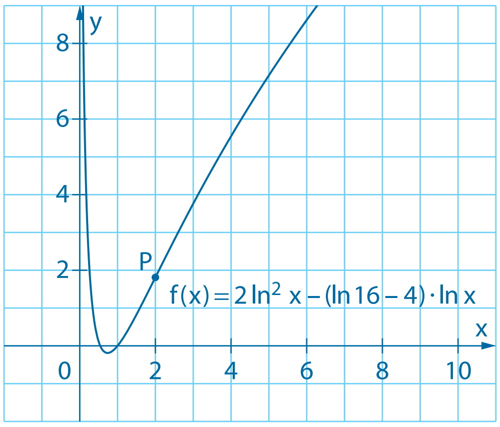
$f'(x) = \dfrac{4\ln x}{x} - p \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\ln x - p}{x}$

$f''(x) = \dfrac{x \cdot \frac{4}{x} - (4\ln x - p)}{x^2} = \dfrac{4 + p - 4\ln x}{x^2}$

$f''(2) = 0$

$\Leftrightarrow 4 + p - 4\ln 2 = 0$

$\Leftrightarrow p = 4\ln 2 - 4 = \ln 16 - 4$



Op de grafiek zien we voor deze waarde van p een buigpunt P.

Opdracht 61 bladzijde 100

Een besmettelijke ziekte breekt uit in een geïsoleerd stadje met 2000 inwoners.

Wetenschappers hebben de volgende formule opgesteld die het (gecumuleerd) aantal personen geeft dat t dagen na het uitbreken van de ziekte besmet is:

$$N(t) = \frac{2000}{1+1999e^{-0,2t}}.$$

1 Na hoeveel dagen neemt het aantal zieken het snelst toe?

Dit is de vraag naar het buigpunt van de grafiek van $N: t \mapsto \dfrac{2000}{1+1999e^{-0,2t}}$.

$N'(t) = \dfrac{799\,600\, e^{-0,2t}}{(1+1999e^{-0,2t})^2}$, hieruit blijkt al dat N(t) overal stijgend is, want N′(t) > 0.

$$\begin{aligned} N''(t) &= 799\,600\,\frac{-0,2\,(1+1999e^{-0,2t})\,e^{-0,2t} + 0,4e^{-0,2t}\cdot 1999e^{-0,2t}}{(1+1999e^{-0,2t})^3} \\ &= 799\,600\,e^{-0,2t}\,\frac{-0,2-399,8e^{-0,2t}+799,6e^{-0,2t}}{(1+1999e^{-0,2t})^3} \\ &= 799\,600\,e^{-0,2t}\,\frac{399,8e^{-0,2t}-0,2}{(1+1999e^{-0,2t})^3} \end{aligned}$$

De tweede afgeleide gaat over van positief naar negatief als

$$399,8e^{-0,2t} - 0,2 = 0 \iff t = -5\ln\frac{0,2}{399,8} \approx 38.$$

Na 38 dagen neemt het aantal zieken het snelst toe.

2 Bereken $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$.

Wat is de betekenis van deze limiet?

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{2000}{1+1999e^{-0,2t}} = \frac{2000}{1+1999\cdot 0} = 2000.$$

Uiteindelijk zal iedereen besmet zijn.

Opdracht 62 bladzijde 100

De daglengte l, d.i. het aantal uren tussen zonsopgang en zonsondergang, is een periodieke functie van de tijd t gemeten in dagen vanaf het begin van het jaar ($t = 0$ komt overeen met 1 januari).

Het voorschrift van deze functie is $l(t) = 4{,}205 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right] + 12{,}125$.

1 **a** Op welke dag van het jaar is de daglengte het kortst?

$$l'(t) = 4{,}205 \cdot \frac{2\pi}{365} \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right]$$

$$l'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-79) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{365}(t-79) = \frac{1+2k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t - 79 = \frac{365+730k}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 170{,}25 + k \cdot 182{,}5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Voor k = 1 hebben we t = 352,75 als extremum (19 december).

Dit is een minimum want

$$l''(t) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right]$$

en dus $l''(352{,}75) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(352{,}75-79)\right] \approx 0{,}00125 > 0$.

Volgens dit model zijn de dagen het kortst op 19 december.

b Op welke dag het langst?

Voor $k = 0$ vinden we $t = 170{,}25$ als extremum (20 juni).

Dit is een maximum want

$$l''(170{,}25) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(170{,}25 - 79)\right] \approx -0{,}00125 < 0.$$

Volgens dit model zijn de dagen het langst op 20 juni.

2 **a** Op welke dag van het jaar lengen de dagen het meest?

We zoeken de extrema van $l'(t)$.

$$l''(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t - 79) = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 79 + k \cdot 182{,}5 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Voor $k = 0$ vinden we $t = 79$ als extremum (20 maart).

Dit is een maximum want $l^{(3)}(t) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^3 \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right]$ en dus

$$l^{(3)}(79) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^3 \cos 0 < 0.$$

Volgens dit model lengen de dagen het meest op 20 maart.

b Op welke dag korten ze het meest?

Voor $k = 1$ hebben we $t = 261{,}5$ als extremum (19 september).

Dit is een minimum want $l^{(3)}(t) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^3 \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right]$

en dus $l^{(3)}(261{,}5) = -4{,}205 \cdot \left(\frac{2\pi}{365}\right)^3 \cos \pi > 0.$

Volgens dit model korten de dagen het meest op 19 september.

Opdracht 63 bladzijde 100

Bereken met de regel van de l'Hôpital.

1 $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

2 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x \ln 10}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln 10}{x + 1} = \ln 10$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{1-\cos 2x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1-x}}{2\sin 2x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-1}{(1-x)^2}}{4\cos 2x} = -\dfrac{1}{4}$

5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{Bgtan}\,2x}{3x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{1+4x^2}}{3} = \dfrac{2}{3}$

6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2-\sin^2 x} \underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{2x-2\sin x\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{2x-\sin 2x}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2-2\cos 2x}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{4\sin 2x}$

$\underset{H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{8\cos 2x} = \dfrac{1}{4}$

Opdracht 64 bladzijde 101

Bepaal alle waarden van a en b waarvoor $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+\cos bx}{x^2} = -4$.

- De noemer nadert tot 0, dus om de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ te krijgen, die een eindige limiet kan geven, moet $\lim\limits_{x\to0}[a+\cos bx]=0$.

  Dus $a + 1 = 0 \iff a = -1$.
- Passen we nu de regel van de l'Hôpital toe op het linkerlid van $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1+\cos bx}{x^2}=-4$, dan vinden we $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-b\sin bx}{2x}=-4$.

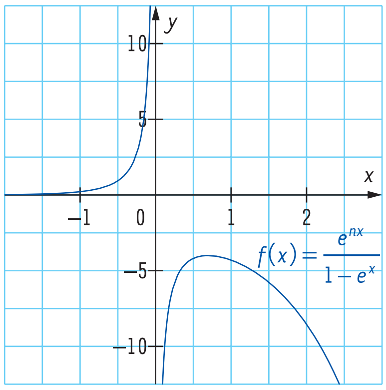
  Dit is opnieuw de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$, dus nogmaals de l'Hôpital toepassen:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-b^2\cos bx}{2}=-4$

$\iff \dfrac{-b^2}{2}=-4$

$\iff b=2\sqrt{2}$ of $b=-2\sqrt{2}$

Opdracht 65 bladzijde 101



De grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{e^{nx}}{1-e^x}$ is afgebeeld met n een natuurlijk getal.

f bereikt een maximum voor $x = \ln 2$.

1 Bereken n.

$$f(x)=\frac{e^{nx}}{1-e^x}$$

$$f'(x)=\frac{n(1-e^x)e^{nx}+e^xe^{nx}}{(1-e^x)^2}=\frac{e^{nx}(n-ne^x+e^x)}{(1-e^x)^2}$$

Aangezien f afleidbaar is binnen haar domein, moet f′(ln 2) = 0:

$$f'(\ln 2)=0 \iff \frac{e^{n\ln 2}(n-n\,e^{\ln 2}+e^{\ln 2})}{(1-e^{\ln 2})^2}=0$$

$$\iff 2^n(n-2n+2)=0$$

$$\iff 2-n=0$$

$$\iff n=2$$

We hebben dus $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1-e^x}$ en $f'(x)=\dfrac{e^{2x}(2-2e^x+e^x)}{(1-e^x)^2}=\dfrac{e^{2x}(2-e^x)}{(1-e^x)^2}$.

We zien dat de eerste afgeleide van teken verandert voor x = ln 2.

2 Verklaar aan de hand van eigenschappen van exponentiële functies dat f een horizontale asymptoot heeft voor $x \to -\infty$ en een verticale asymptoot voor $x \to 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{1-e^x}=\frac{0}{1}=0$ zodat de x-as een horizontale asymptoot is van de grafiek van f voor $x \to -\infty$.

Aangezien 0 een nulpunt is van de noemer en niet van de teller van f(x), is de y-as een verticale asymptoot.

3 De rechte met vergelijking $y=\dfrac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in een punt met abscis q. Bepaal q.

$$\frac{1}{2}=\frac{e^{2x}}{1-e^x}$$

$$\underset{e^x\neq 1}{\iff} 2e^{2x}+e^x-1=0$$

$$\iff e^x=\frac{1}{2} \quad \text{of} \quad e^x=-1$$

De enige oplossing is $x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$, dit is q.

4 Bepaal het bereik van *f*.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2-e^{x})}{(1-e^{x})^{2}}$$

Het teken van de eerste afgeleide is het teken van $2 - e^{x}$.

$f'(x) > 0$ voor $x < 0$ en voor $0 < x < \ln 2$ en $f'(x) < 0$ voor $x > \ln 2$.

Er wordt een relatief maximum bereikt voor $x = \ln 2$ gelijk aan $f(\ln 2)=\dfrac{e^{2\ln 2}}{1-e^{\ln 2}}=\dfrac{e^{\ln 2^{2}}}{1-2}=-4$.

Aangezien de x-as een horizontale asymptoot is van de grafiek van f, volgt hieruit dat het bereik van f gelijk is aan $]-\infty, -4] \cup\ ]0, +\infty[$.

5 Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in het punt $Q\left(q, \dfrac{1}{2}\right)$.

$f'(-\ln 2)=\dfrac{3}{2}$ zodat de raaklijn t in $Q\left(-\ln 2, \dfrac{1}{2}\right)$ de volgende vergelijking heeft:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(x+\ln 2) \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1+3\ln 2}{2}.$$

6 Toon aan dat de grafiek van *f* geen schuine asymptoot heeft.

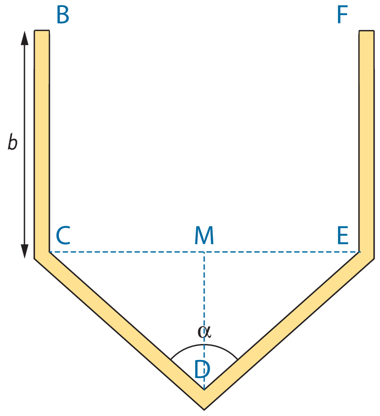
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x(1-e^{x})}\\
&\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1-e^{x}-xe^{x}}\\
&\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{-2e^{x}-xe^{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{x}}{-2-x}\\
&\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{x}}{-1}=-\infty
\end{aligned}$$

Er is geen schuine asymptoot voor $x \to +\infty$.

Opdracht 66 bladzijde 101

Met vier planken met breedte *b* wordt een symmetrische goot gemaakt die van boven open is en waarvan twee wanden evenwijdig zijn.

Hoe moet de hoek α tussen de twee andere wanden gekozen worden opdat de dwarsdoorsnede maximaal zou zijn?



– De oppervlakte van de driehoek CDE is

$$\frac{|CE|\cdot|MD|}{2}=\frac{2b\sin\frac{\alpha}{2}\cdot b\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{b^2\sin\alpha}{2}.$$

De oppervlakte van de rechthoek BCEF is dan

$$|BC|\cdot|CE|=b\cdot 2b\sin\frac{\alpha}{2}=2b^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

De totale oppervlakte is dan $A(\alpha)=\frac{b^2\sin\alpha}{2}+2b^2\sin\frac{\alpha}{2}$ met $0<\alpha\leqslant\pi$.

– $A'(\alpha)=\frac{b^2\cos\alpha}{2}+b^2\cos\frac{\alpha}{2}$

$A'(\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\cos\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}366\quad\text{of}\quad\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<-1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{2}\approx\pm 1{,}196+k\cdot 2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha\approx\pm 2{,}392+k\cdot 4\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

De enige oplossing tussen 0 en π is 2,392.

– We gebruiken de tweede afgeleide-test om na te gaan of dit een maximum is.

$$A''(\alpha)=-\frac{b^2\sin\alpha}{2}-\frac{b^2}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$A''(2{,}392)=-\frac{b^2}{2}\left(\sin 2{,}392+\sin\frac{2{,}392}{2}\right)\approx -0{,}806b^2<0$$

De hoek waarbij de dwarsdoorsnede maximaal is, is 2,392 rad of ongeveer 137°.

Opdracht 67 bladzijde 101

Gegeven is de familie van functies $f\colon x \mapsto \dfrac{ae^x}{e^x + a}$ met $a \neq 0$.

1 Bepaal vergelijkingen van de horizontale asymptoten van de grafiek van f.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ae^x}{e^x + a} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{ae^x}{e^x} = a$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{ae^x}{e^x + a} = \frac{0}{a} = 0$$

De rechten met vergelijking $y = 0$ en $y = a$ zijn de horizontale asymptoten van de grafiek van f.

2 Voor welke waarden van a heeft de grafiek van f een verticale asymptoot?

De teller heeft geen nulpunten, bijgevolg is er een verticale asymptoot als de noemer nulpunten heeft.

$e^x + a = 0 \iff e^x = -a$ heeft een oplossing als $a < 0$.

3 Toon aan dat de grafieken van f voor elke waarde van $a \neq 0$ stijgend zijn.

$$f'(x) = \frac{(e^x + a)ae^x - ae^x \cdot e^x}{(e^x + a)^2} = \frac{a^2e^x}{(e^x + a)^2}$$

Het is duidelijk dat $f'(x) > 0$ voor elke waarde van x in het domein, zodat de grafiek van f overal stijgend zal zijn.

4 Bepaal het voorschrift van de inverse functie van f.

$$y = \frac{ae^x}{e^x + a}$$

$$\iff ye^x + ay = ae^x$$

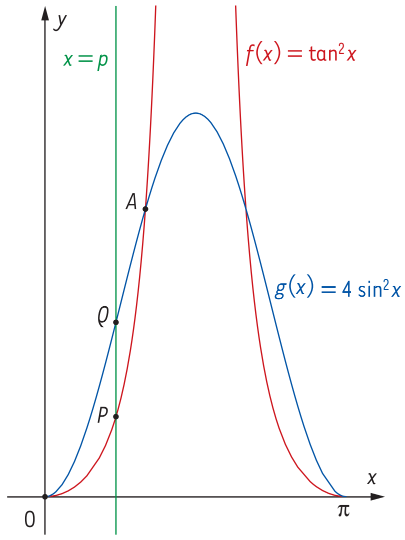
$$\iff e^x = \frac{ay}{a - y}$$

$$\iff x = \ln \frac{ay}{a - y}$$

Bijgevolg is $f^{-1}: x \mapsto \ln \dfrac{ax}{a - x}$.

Opdracht 68 bladzijde 102

De functies $f: x \longmapsto \tan^2 x$ en $g: x \longmapsto 4\sin^2 x$ zijn gegeven in $[0, \pi]$.



1 $A(a, f(a))$ met $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ is een snijpunt van de grafieken van f en g.

Bereken a.

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \tan^2 x = 4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - 4\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \cos^2 x = \frac{1}{4}$

$a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, dus moet $\cos a = \frac{1}{2}$, dus $a = \frac{\pi}{3}$.

2 De rechte $r \leftrightarrow x = p$ snijdt de grafiek van f in P en de grafiek van g in Q. De punten P en Q liggen op de grafiek tussen O en A.

Bereken de maximale lengte $|PQ|$.

$|PQ| = 4\sin^2 x - \tan^2 x = h(x)$

Om het maximum te bepalen, onderzoeken we

$$h'(x) = 8\sin x\cos x - \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = \frac{8\sin x\cos^4 x - 2\sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x(4\cos^4 x - 1)}{\cos^3 x}.$$

We zoeken een nulpunt van $h'(x)$ in $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, dit is een oplossing van $\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De maximale lengte van $[PQ]$ wordt bereikt voor $x = \frac{\pi}{4}$, en is gelijk aan

$$4\sin^2\frac{\pi}{4} - \tan^2\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1.$$

Er wordt een maximum bereikt want

$$h''(x) = \frac{d}{dx}\left(4\sin 2x - \frac{2\tan x}{\cos^2 x}\right)$$

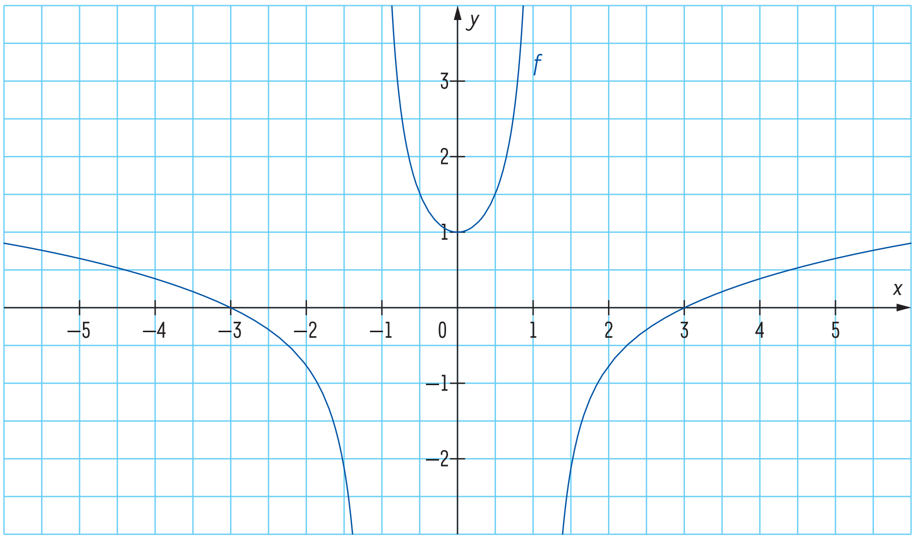
$$= 8\cos 2x - \frac{\left(2\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x \cdot 2\cos x(-\sin x)\right)}{\cos^4 x}$$

$$= 8\cos 2x - \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

en $h''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16 < 0$.

Opdracht 69 bladzijde 102

De grafiek is die van de functie f: $x \longmapsto \tan\left(\pi\,\dfrac{4x^2+3}{3x^2+12}\right)$.



1 Toon algebraïsch aan dat −3 en 3 de enige nulpunten zijn van f.

$f(x)=0$

$\Leftrightarrow \tan\left(\pi\,\dfrac{4x^2+3}{3x^2+12}\right)=0$

$\Leftrightarrow \pi\cdot\dfrac{4x^2+3}{3x^2+12}=k\cdot\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 4x^2+3=3kx^2+12k$

$\Leftrightarrow (4-3k)x^2=12k-3$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{12k-3}{4-3k}$

Er zijn enkel nulpunten als $\dfrac{12k-3}{4-3k}\geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{4}\leqslant k<\dfrac{4}{3}$.

Met $k\in\mathbb{Z}$ is de enige mogelijkheid dat $k=1$.

De enige nulpunten zijn bijgevolg de oplossingen van $x^2=\dfrac{12-3}{4-3}=9$, dus −3 en 3.

2 Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van *f*.

De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y = \sqrt{3}$ want

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\tan\left(\pi \frac{4x^2+3}{3x^2+12} \right) \right) = \tan\left(\lim_{x \to \pm\infty} \pi \frac{4x^2+3}{3x^2+12} \right) = \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

De verticale asymptoten vinden we uit het oplossen van de vergelijking

$$\pi \cdot \frac{4x^2+3}{3x^2+12} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+3}{3x^2+12} = \frac{1+2k}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+6 = 3x^2+12+6kx^2+24k$$

$$\Leftrightarrow (5-6k)x^2 = 24k+6$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{24k+6}{5-6k}$$

Er zijn enkel oplossingen als $\frac{24k+6}{5-6k} \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leqslant k < \frac{5}{6}$.

Met $k \in \mathbb{Z}$ is de enige mogelijkheid dat $k = 0$.

We vinden dan $x^2 = \frac{6}{5}$.

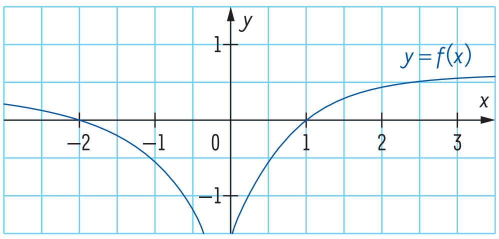
De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

Opdracht 70 bladzijde 103

De figuur toont de grafiek van een functie met voorschrift

$$f(x) = \text{Bgsin}\left(\frac{x^2+ax+b}{cx^2+d} \right) \quad \text{met } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

De grafiek heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y = \frac{\pi}{6}$, snijdt de x-as in de punten $(1, 0)$ en $(-2, 0)$ en de y-as in $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.



1 Bepaal *a*, *b*, *c* en *d*.

- De nulpunten van f zijn 1 en −2 en aangezien Bgsin 0 = 0, moet $x^2 + ax + b = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$.

  Bijgevolg zijn a = 1 en b = −2.

  We hebben al $f(x) = \text{Bgsin}\left(\dfrac{x^2 + x - 2}{cx^2 + d}\right)$.

- Het snijpunt met de y-as is $\left(0, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, zodat

  $\text{Bgsin}\left(-\dfrac{2}{d}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{d} \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{2}{d} \Leftrightarrow d = 2.$

  We hebben nu $f(x) = \text{Bgsin}\left(\dfrac{x^2 + x - 2}{cx^2 + 2}\right)$.

- Tenslotte is $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{6}$ zodat $\text{Bgsin}\,\dfrac{1}{c} = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow c = 2$.

  Besluit: a = 1, b = −2, c = 2, d = 2 en dus $f(x) = \text{Bgsin}\left(\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2}\right)$

2 Bepaal het domein van *f*.

$f(x) = \text{Bgsin}\left(\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2}\right)$

Aangezien [−1, 1] het domein van de boogsinusfunctie is, moet

$-1 \leqslant \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2} \leqslant 1$

$$\overset{2x^2+2>0}{\Leftrightarrow} \quad -2x^2 - 2 \leqslant x^2 + x - 2 \leqslant 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 - x \leqslant 0 \quad \text{en} \quad -x^2 + x - 4 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 - x \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leqslant -\frac{1}{3} \quad \text{of} \quad x \geqslant 0$$

$\text{dom } f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] \cup [0, +\infty[$

3 Heeft de grafiek van *f* nog andere asymptoten? Zo ja, met welke vergelijking?

(bron © Toelatingsproef burgerlijk ingenieur 2002 VUB)

We berekenen $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} f(x)$ en $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} \operatorname{Bgsin}\left(\frac{x^2+x-2}{2x^2+2}\right) = \operatorname{Bgsin}\left(\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} \frac{x^2+x-2}{2x^2+2}\right) = \operatorname{Bgsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \operatorname{Bgsin}\left(\frac{x^2+x-2}{2x^2+2}\right) = \operatorname{Bgsin}\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2+x-2}{2x^2+2}\right) = \operatorname{Bgsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

De grafiek van f heeft geen verticale asymptoten.

De enige asymptoot is de gegeven rechte met vergelijking $y = \frac{\pi}{6}$.

Opdracht 71 bladzijde 103

Gegeven de familie functies $f: x \mapsto \frac{\ln(kx)}{x}$ met $k \neq 0$.

1 Bepaal het extremum van *f*.

Toon aan dat dit extremum op de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{x}$ ligt.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln kx}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \ln kx = 0 \iff x = \frac{e}{k}$$

$$f''(x) = \frac{2\ln kx - 3}{x^3} \text{ zodat } f''\left(\frac{e}{k}\right) = \frac{-k^3}{e^3}$$

Als $k > 0$ is $f''\left(\frac{e}{k}\right) < 0$ en dus bereikt f een relatief maximum voor $x = \frac{e}{k}$.

Als $k < 0$ is $f''\left(\frac{e}{k}\right) > 0$ en dus bereikt f een relatief minimum voor $x = \frac{e}{k}$.

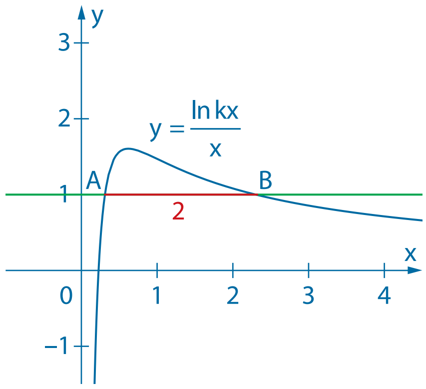
In elk geval is het enige extremum gelijk aan $f\left(\frac{e}{k}\right) = \frac{k \ln e}{e} = \frac{k}{e}$.

De coördinaat van het extremum is $\left(\frac{e}{k}, \frac{k}{e}\right)$ zodat dit op de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{x}$ ligt.

2 De waarde van k wordt zodanig gekozen dat de grafiek van f de rechte met vergelijking $y = 1$ snijdt in de punten A en B. De lengte van $[AB]$ hangt af van de keuze van k.

Wat is de kleinste gehele waarde van k waarvoor de lengte van $[AB]$ groter is dan 2?

We zoeken de waarde van k waarvoor de lengte van [AB] precies gelijk is aan 2.



Stel $A(x_0, 1)$, dan is $B(x_0 + 2, 1)$ en

$$\frac{\ln kx_0}{x_0} = 1 \text{ of } \ln kx_0 = x_0 \text{ (1) en}$$

$$\frac{\ln\left[k(x_0 + 2)\right]}{x_0 + 2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[k(x_0 + 2)\right] = x_0 + 2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ln\left[k(x_0 + 2)\right] = \ln kx_0 + \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[k(x_0 + 2)\right] = \ln(kx_0 e^2)$$

$$\overset{k \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0 + 2 = x_0 e^2$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{2}{e^2 - 1}$$

Uit (1) volgt dan

$$\ln k = x_0 - \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow k = e^{x_0 - \ln x_0} \approx 4{,}37$$

De gezochte kleinste gehele waarde is dus $k = 5$.

Hersenbrekers bladzijde 104

1 Als aan 8 liter droog zand 6 liter water wordt toegevoegd, dan is het totale volume 10 liter. Dit is te verklaren doordat een deel van het toegevoegde water alle ruimte tussen de zandkorrels vult.

Wat is het totale volume als aan 6 liter droog zand van diezelfde soort 5 liter water wordt toegevoegd?

A 6 liter **B** 6,5 liter **C** 7 liter **D** 7,5 liter **E** 8 liter

(bron © VWO eerste ronde 2014)

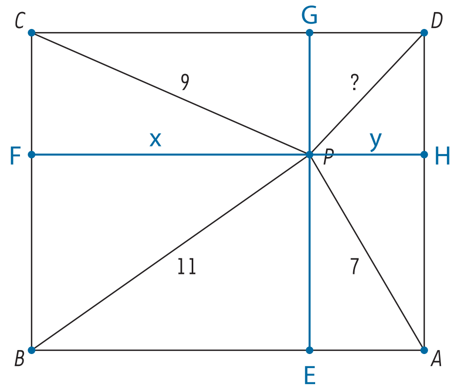
8 liter droog zand en 6 liter water geven in totaal 10 liter. Dit betekent dat 4 l water de ruimte opvult tussen 8 liter zandkorrels, dit is de helft van het aantal liter zand.

Als we nu 6 liter droog zand hebben, dan vult 3 l water de ruimte tussen de korrels op. Van de 5 l water is er bijgevolg nog 2 liter over om het volume te laten toenemen.

In totaal hebben we dan 8 liter.

Antwoord E is het juiste.

2 Gegeven zijn een rechthoek *ABCD* en een punt *P* binnen deze rechthoek zodanig dat $|AP| = 7$, $|BP| = 11$ en $|CP| = 9$.



Bereken $|DP|$.

Stel $|FP| = x$ en $|PH| = y$, dan geldt
in de rechthoekige driehoeken CFP en PBE:

$|CF| = \sqrt{81 - x^2}$ en $|FB| = \sqrt{121 - x^2}$.

Bijgevolg is

$|DH| = \sqrt{81 - x^2}$ en $|HA| = \sqrt{121 - x^2}$.

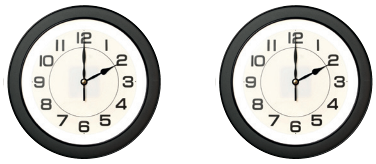
In de rechthoekige driehoek PHA is dan

$49 = 121 - x^2 + y^2$ of $y^2 = x^2 - 72$.

Dit geeft in de driehoek PDH:

$|DP| = \sqrt{y^2 + |DH|^2} = \sqrt{x^2 - 72 + 81 - x^2} = 3$

3 De wijzers van twee klokken, zoals in de figuur hiernaast, draaien met constante snelheid rond. Beide klokken lopen niet meer goed: de één loopt precies 1 % sneller dan de werkelijke tijd en de ander zelfs precies 5 % sneller dan de werkelijke tijd. Op een bepaald moment wijzen ze allebei precies 2 uur aan. Na verloop van tijd wijzen de klokken voor het eerst opnieuw dezelfde tijd aan.



Welke tijd wijzen ze op dat moment aan?

5 uur.

Per 12 uur loopt de urenwijzer van de eerste klok $\frac{1}{100}$ rondje uit ten opzichte van de juiste tijd, en die van de tweede klok zelfs $\frac{5}{100}$ rondje. Per 12 uur loopt de tweede klok dus $\frac{5-1}{100} = \frac{1}{25}$ rondje uit op de eerste klok. Het duurt dus 25 · 12 uur voordat de urenwijzer van de tweede precies een rondje meer heeft gemaakt dan die van de eerste klok. Op dat moment geven de klokken voor het eerst dezelfde tijd aan.

Na deze 25 · 12 uur is de urenwijzer van de eerste klok $\frac{101}{100} \cdot 25 = 25\frac{1}{4}$ rondje gedraaid.

De eerste klok (en dus ook de tweede klok) geeft dan een tijd aan van 2 + 3 = 5 uur.