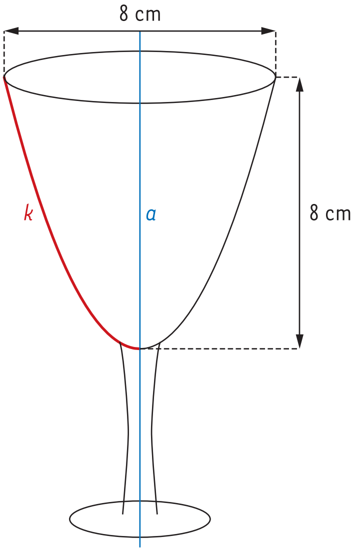
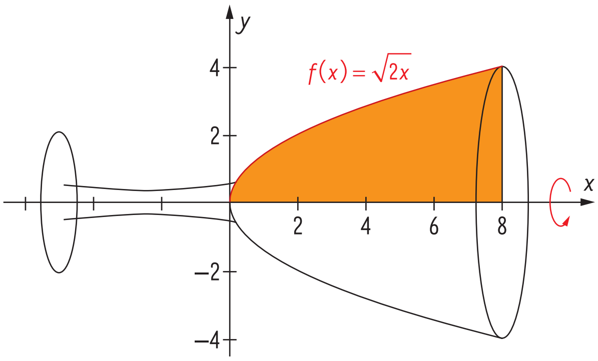
Hoofdstuk 6

Toepassingen van integralen

Opdracht 1 bladzijde 144

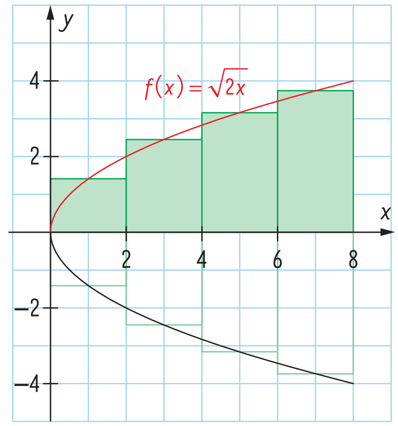
Een fabrikant van glazen wil weten wat de inhoud zou zijn van een bepaald wijnglas. Het bovenste deel ontstaat door de kromme k te laten wentelen over 360° om de verticale rechte a (afbeelding links).

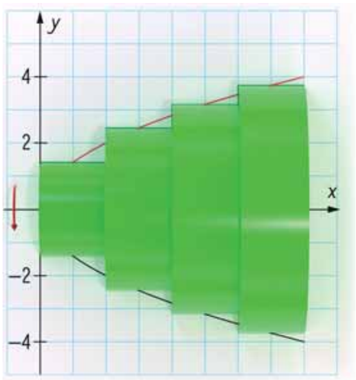


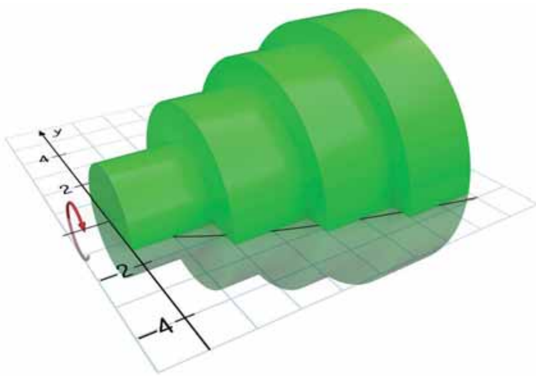


Leggen we het glas neer en kiezen we de x-as als omwentelingsas, dan kan de kromme k beschouwd worden als de grafiek van een functie. De fabrikant koos voor dit glas de functie met voorschrift $f(x) = \sqrt{2x}$, met cm als eenheid (afbeelding rechts).

We hernemen de aanpak met riemannsommen uit hoofdstuk 4. We verdelen het interval [0, 8] in vier gelijke deelintervallen met breedte $\Delta x = 2$. Het gebied tussen de grafiek en de x-as benaderen we telkens door een rechthoek. We gebruiken de x-waarde in het midden van elk interval om de hoogte van elke rechthoek te berekenen. Tot slot laten we de rechthoeken wentelen om de x-as over 360°. Zo ontstaan vier cilinders.







De som van hun inhouden is een ruwe benadering van de inhoud van het glas.

Schrijf deze som voluit en bereken deze tot twee cijfers na de komma.

De som van de inhouden is te berekenen als:

$\pi(f(1))^2 \cdot 2 + \pi(f(3))^2 \cdot 2 + \pi(f(5))^2 \cdot 2 + \pi(f(7))^2 \cdot 2$

$= 2\pi(2 + 6 + 10 + 14)$

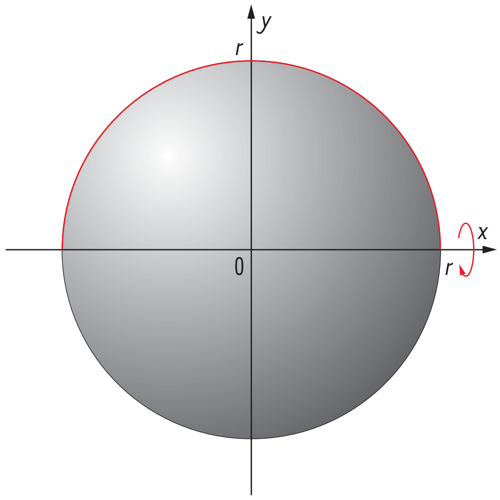
$= 64\pi$

De som van de inhouden is 64π cm$^3 \approx 201{,}06$ cm^3 (20,106 cl).

Opdracht 2 bladzijde 148

Een bol met straal r is te beschouwen als een omwentelingslichaam dat ontstaat door een halve cirkel met straal r te wentelen om zijn diameter.

In de afbeelding werd een orthonormaal assenstelsel gekozen met oorsprong in het middelpunt van de (halve) cirkel.



Bereken het volume van de bol.

De bovenste helft van de cirkel heeft als vergelijking $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

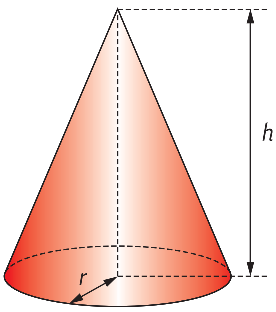
Het volume van de bol is:

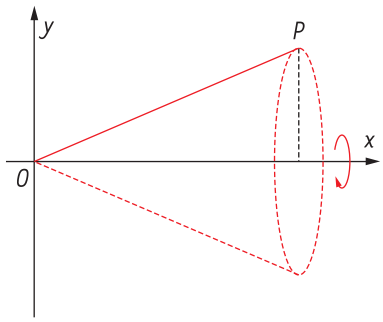
$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right)dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Opdracht 3 bladzijde 148

Een kegel is te beschouwen als een omwentelingslichaam dat ontstaat door een lijnstuk te wentelen om een as door één van zijn eindpunten. Hierbij mag het lijnstuk niet loodrecht op die as staan.

Neem je als omwentelingsas de x-as, dan ontstaat een kegel door er een lijnstuk $[OP]$, met O de oorsprong, om te wentelen. Stel dat een kegel straal r heeft en hoogte h.





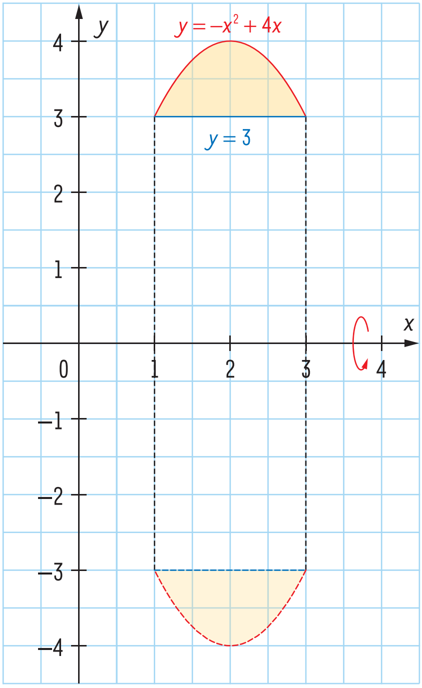
Bepaal het volume van de kegel.

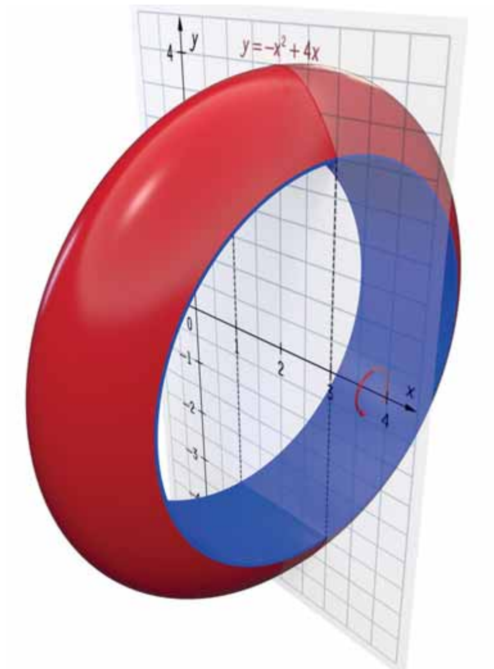
De vergelijking van de rechte door O(0, 0) en P(h, r) is $y = \frac{r}{h}x$.

Het volume van de kegel is: $V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

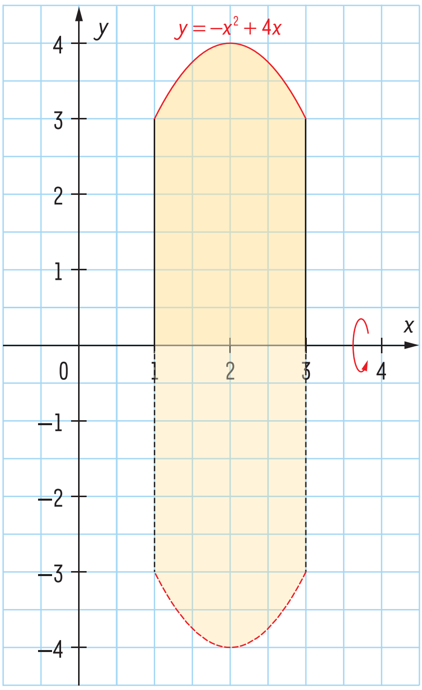
Opdracht 4 bladzijde 148

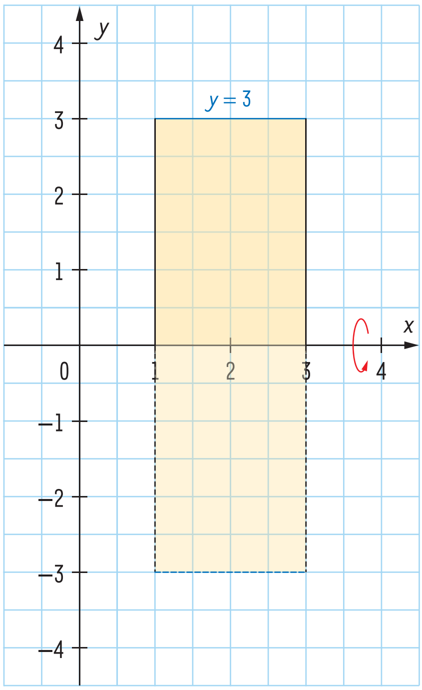
Beschouw het gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y = -x^2 + 4x$ en de rechte met vergelijking $y = 3$. Laten we dit gebied wentelen om de x-as, dan ontstaat een ringvormig omwentelingslichaam.





We kunnen dit lichaam beschouwen als het verschil van twee omwentelingslichamen.





1 Het eerste ontstaat door het vlakdeel begrensd door de parabool, de x-as en de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 3$ te wentelen om de x-as (afbeelding links).

Bereken het volume V_1 van dit lichaam.

$$V_1 = \int_1^3 \pi(-x^2 + 4x)^2\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{406\pi}{15}$$

2 Het tweede ontstaat door de rechthoek begrensd door de rechte met vergelijking $y = 3$, de x-as en de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 3$ om de x-as te wentelen (afbeelding rechts).

Bereken het volume V_2 van deze cilinder.

$V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi$

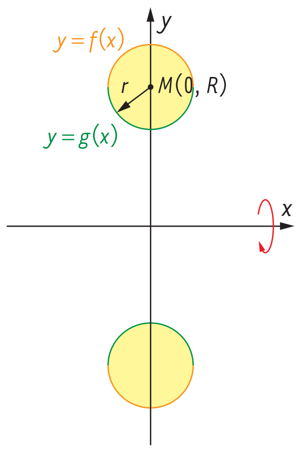
3 Bereken hieruit het volume V van de ring uit de opgave.

$$V = \frac{406\pi}{15} - 18\pi = \frac{136\pi}{15}$$

Opdracht 5 bladzijde 150

Een **torus** ontstaat door een cirkel met straal r en middelpunt $M(0, R)$ (met $R > r$) te wentelen om de x-as. Je verkrijgt een ring met cirkelvormige doorsnede.

Door zo'n torus te beschouwen als het verschil van twee omwentelingslichamen, kun je m.b.v. integralen het volume ervan bepalen.



1 Leid uit de vergelijking van de cirkel met middelpunt M en straal r de voorschriften $y = f(x)$ en $y = g(x)$, zoals aangegeven in de linkse figuur, af.

Uit $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ volgt, door te expliciteren naar y: $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$. Dit is ook te interpreteren als twee halve cirkels die over een afstand R naar boven verschoven zijn. De functievoorschriften zijn $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ en $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$.

2 Bereken nu het volume van de torus met behulp van integralen.

Bij manueel werken kan het rekenwerk wat vereenvoudigd worden door gebruik te maken van de symmetrie t.o.v. de y-as:

$$\begin{aligned}
V &= V_f - V_g \\
&= \int_{-r}^{r} \pi(f(x))^2\,dx - \int_{-r}^{r} \pi(g(x))^2\,dx \\
&= 2\pi\int_0^r (f(x))^2\,dx - 2\pi\int_0^r (g(x))^2\,dx \\
&= 2\pi\int_0^r \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right)dx \\
&= 2\pi\int_0^r (f(x) + g(x))(f(x) - g(x))\,dx \\
&= 2\pi\int_0^r 2R \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \\
&= 8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx
\end{aligned}$$

De integraal die overblijft, stelt de oppervlakte van een kwartcirkel met middelpunt de oorsprong en straal r voor. Bijgevolg is $V = 8\pi R \cdot \dfrac{\pi r^2}{4} = 2\pi^2 r^2 R$.

3 Iemand beweert dat hij het volume zonder integralen kan bepalen: ‘Knip de torus door en plooi hem open: je krijgt dan een rechte cilinder, waarvan je het volume kunt berekenen met de klassieke formules.’

Welke straal en hoogte zou jij nemen voor een dergelijke open geplooide cilinder? Bereken nu het volume van die cilinder en vergelijk met het exacte resultaat dat je m.b.v. integralen vond.

De straal zou overeenkomen met de straal van de wentelende cirkelschijf: r. Voor de lengte zou je de afstand kunnen nemen die het punt M aflegt tijdens één volledige omwenteling: $2\pi R$. Dit is een gemiddelde afstand: de punten op de grafiek van f zullen een grotere afstand afleggen en deze op g een kleinere (op de punten met y-coördinaat R na, die dezelfde afstand als M afleggen).

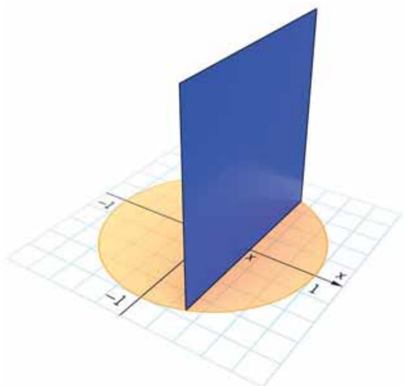
Het volume van zo’n cilinder is $V_{cil} = \pi r^2 \cdot 2\pi R$. Dit komt inderdaad overeen met het volume van een torus.

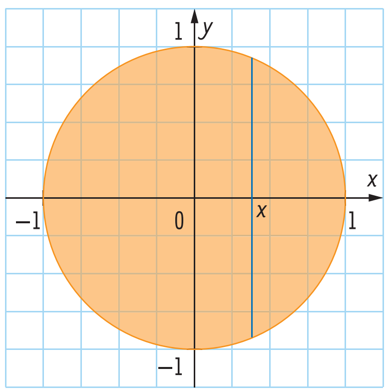
Deze eigenschap geldt niet alleen voor een torus, maar voor elk omwentelingslichaam en staat bekend als de **stelling van Pappus** (of van Guldin of Guldinus): het volume van lichaam dat ontstaat door een vlakke figuur met oppervlakte A te wentelen om een as die in het vlak van de figuur ligt, is gelijk aan het product van A met de afstand van het (meetkundig) zwaartepunt van de figuur tot die as. Het zwaartepunt van een cirkelschijf is het middelpunt ervan.

Opdracht 6 bladzijde 156

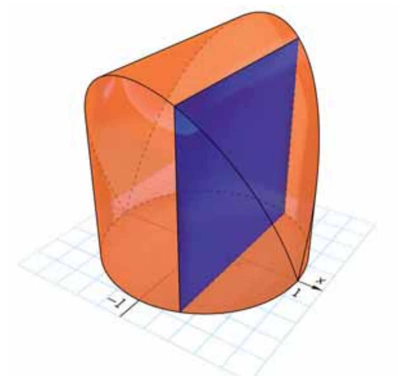
Een lichaam heeft als grondvlak een cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 1. Dwarsdoorsneden loodrecht op de *x*-as zijn telkens vierkanten, waarvan een zijde de koorde is waar de cirkel wordt gesneden.

In de afbeeldingen hieronder zie je een typische dwarsdoorsnede ter hoogte van *x*: links in een ruimtelijke voorstelling, rechts in bovenaanzicht.





Het volledige lichaam zie je hieronder, met de dwarsdoorsnede uit de bovenstaande voorstellingen.



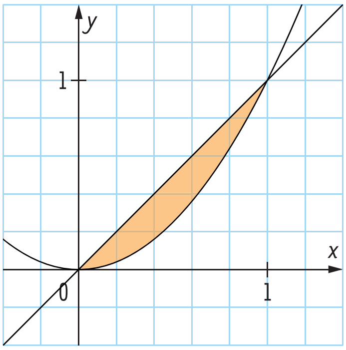
Bereken het volume van het lichaam.

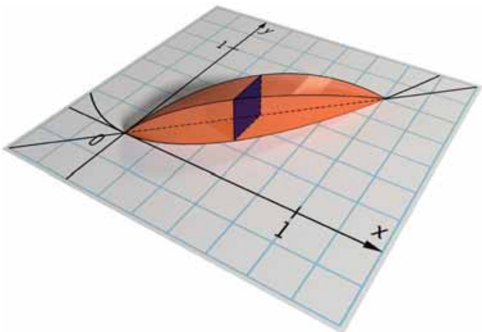
De vergelijking van de bovenste cirkelrand is $y = \sqrt{1 - x^2}$, zodat de zijde van de vierkante dwarsdoorsnede $2\sqrt{1 - x^2}$ is. Gebruik makend van de symmetrie vinden we het volume als

$$V = 2\int_0^1 \left(2\sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx = 8\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{3}.$$

Opdracht 7 bladzijde 156

Bereken het volume van het lichaam waarvan het grondvlak het gebied is tussen de rechte met vergelijking $y = x$ en de parabool met vergelijking $y = x^2$ en waarvan dwarsdoorsneden loodrecht op de x-as vierkanten zijn.





De zijde van een vierkante dwarsdoorsnede is $z(x) = x - x^2$, zodat de oppervlakte ervan gegeven wordt door $A(x) = (x - x^2)^2$.

Het volume van het lichaam is $\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 (x - x^2)^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{30}$.

Opdracht 8 bladzijde 160

Bereken de lengte van de grafiek van $f: x \longmapsto \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ over $[1, 9]$.

Invullen van de algemene formule geeft: $L = \displaystyle\int_1^9 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$

$$= \int_1^9 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-1}\right)}dx = \int_1^9 \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-1}}\,dx = \int_1^9 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^9 \left|\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right|dx = \int_1^9 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9 = \frac{32}{3}.$$

Opdracht 9 bladzijde 160

De lengte van de kromme met vergelijking $y = \ln(1 - x^2)$ over het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ kan berekend worden als

A $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}\,dx$

B $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\,dx$

C $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2 - 2x^2 + x^4}}{1 - x^2}\,dx$

D $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x - x^2}{1 - x^2}\,dx$

E $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + 2x - x^2}{1 - x^2}\,dx$

We berekenen eerst de afgeleide: $\dfrac{d}{dx}\ln(1 - x^2) = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$.

Bijgevolg:

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right|dx$$

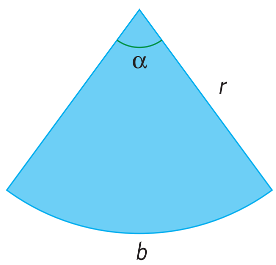
Aangezien zowel de teller als de noemer positief zijn over het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, mag de absolute waarde weggelaten worden.

Het juiste antwoord is dus: A.

Opdracht 10 bladzijde 161

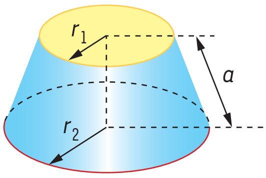
1 Beschouw een cirkelsector met straal r en tophoek α, uitgedrukt in radialen.

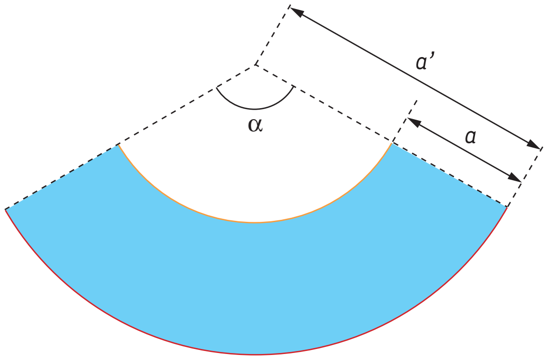
Toon aan dat de oppervlakte A van de cirkelsector gegeven wordt door de formule $A = \dfrac{b \cdot r}{2}$ waarbij b de lengte is van de cirkelboog.



Met de regel van drie kan een formule opgesteld worden voor de oppervlakte van een cirkelsector in functie van de tophoek α: $A = \dfrac{\alpha r^2}{2}$. Toepassen van dezelfde regel voor de booglengte levert: $b = \alpha r$. Combineren we dit met de formule voor A, dan vinden we: $A = \dfrac{b \cdot r}{2}$.

2 Beschouw een afgeknotte kegel met apothema a en stralen r_1 en r_2 (figuur links). Om de manteloppervlakte van dit lichaam te bepalen, snijden we de mantel open volgens een rechte lijn: na openvouwen ontstaat een figuur die beschouwd kan worden als een cirkelsector met straal a', waaruit een cirkelsector met straal $a' - a$ werd weggesneden (figuur rechts).





Toon aan dat $a' = \dfrac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot a$ en gebruik dit tussenresultaat om aan te tonen dat de manteloppervlakte A gegeven wordt door $A = \pi(r_1 + r_2)a$.

De grote (rode) cirkelboog kan berekend worden als $2\pi r_2$ en als α a', waaruit volgt dat $2\pi r_2 = \alpha a'$. Op dezelfde manier vinden we voor de kleine (oranje) boog dat $2\pi r_1 = \alpha(a' - a)$. Elimineren van α uit beide gelijkheden, bijvoorbeeld door de eerste door de tweede te delen, leidt snel tot $a' = \dfrac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot a$.

De gevraagde manteloppervlakte kan als het verschil van de oppervlakte van twee cirkelsectoren berekend worden, m.b.v. de formules uit deelvraag **1**:

$$A = \frac{2\pi r_2 \cdot a'}{2} - \frac{2\pi r_1 \cdot (a' - a)}{2} = \pi(r_2 - r_1)a' + \pi r_1 a = \pi r_2 a + \pi r_1 a = \pi(r_1 + r_2)a$$

Opdracht 11 bladzijde 164

Bereken met behulp van integralen de oppervlakte van een bol met straal r.
Kies daartoe eerst een passend assenstelsel.

We kiezen het assenstelsel zó dat de oorsprong samenvalt met het middelpunt van een cirkel met straal r. We beschouwen de bovenste helft van de cirkel als de grafiek van een functie f.

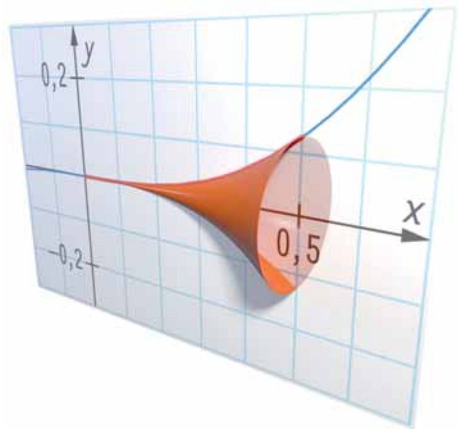
Het functievoorschrift is $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, zodat $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Voor x = r is de noemer van de afgeleide nul, zodat de te berekenen integraal *onbepaald* is. Strikt genomen moet dus via een limiet gewerkt worden:

$$A = \lim_{\substack{b \to r \\ <}} \left(2 \cdot \int_0^b 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \right) = \lim_{\substack{b \to r \\ <}} \left(4\pi r \int_0^b dx \right) = 4\pi r \lim_{\substack{b \to r \\ <}} b = 4\pi r^2$$

Opdracht 12 bladzijde 165

Bepaal de manteloppervlakte van het lichaam dat ontstaat door de grafiek van $f: x \longmapsto x^3$ te wentelen om de x-as in het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.



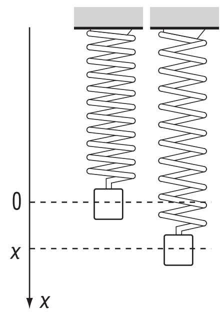
Toepassen van de formule geeft:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_1^{\frac{25}{16}} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{25}{16}} = \frac{61\pi}{1728}$$

Opdracht 13 bladzijde 170

Beschouw de veer hiernaast. In rust bevindt het vrije uiteinde zich op positie $x = 0$. De tegenwerkende kracht die je voelt wanneer je ze uitrekt of indrukt, is volgens de wet van Hooke evenredig met de uitrekking: $F = k \cdot x$. Hierin wordt de evenredigheidsconstante k de veerconstante genoemd.



Stel dat $k = 2000$ N/m.

1 Bereken de arbeid die nodig is om de veer vanuit haar evenwichtspositie 2 cm uit te rekken.

$$W = \int_0^{0,02} 2000x\,dx = 0,4$$

De vereiste arbeid is 0,4 joule.

2 Bereken de arbeid om de veer nóg 2 cm uit te rekken (van 2 cm tot 4 cm).

$$W = \int_{0,02}^{0,04} 2000x\,dx = 1,2$$

Nu is de vereiste arbeid 1,2 joule.

Opdracht 14 bladzijde 170

Bereken de ontsnappingssnelheid van een van de hemellichamen uit ons zonnestelsel.

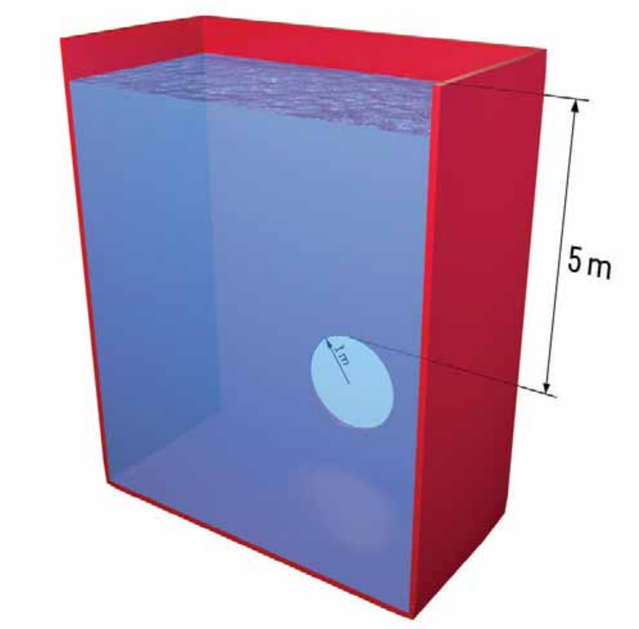
hemellichaam	straal (km)	massa (kg)
Zon	695 000	$1,99 \cdot 10^{30}$
Maan	1 738	$7,35 \cdot 10^{22}$
Mercurius	2 440	$3,30 \cdot 10^{23}$
Venus	6 052	$4,87 \cdot 10^{24}$
Mars	3 397	$6,42 \cdot 10^{23}$
Jupiter	71 492	$1,90 \cdot 10^{27}$
Saturnus	60 268	$5,68 \cdot 10^{26}$
Uranus	25 559	$8,68 \cdot 10^{25}$
Neptunus	24 766	$1,02 \cdot 10^{26}$
Pluto	1 150	$1,27 \cdot 10^{22}$

De ontsnappingssnelheid v wordt berekend door de massa m en straal r van elk hemellichaam in te vullen in de formule $v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$ met $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Opdracht 15 bladzijde 174

In de verticale wand van een watertank is vanaf een diepte van 5 meter een vlakke cirkelvormige uitlaatklep met een straal van 1 meter aangebracht. De bovenkant van de tank is open. De uitlaatklep is aan de achterkant blootgesteld aan de atmosferische druk.

Bereken de kracht die door het water op die uitlaatklep wordt uitgeoefend.



We brengen een naar onder georiënteerde verticale as aan, met nulpunt ter hoogte van het vloeistofoppervlak.

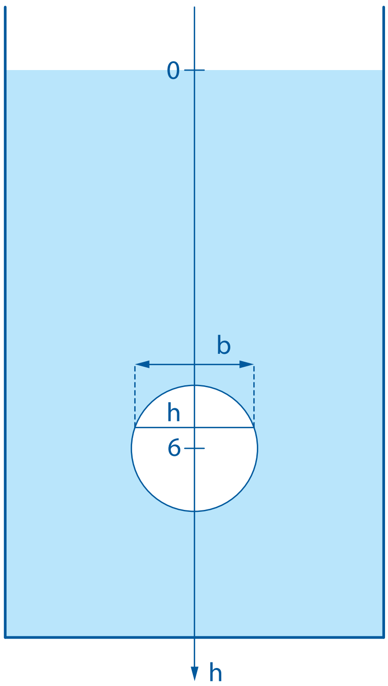
De breedte b van een zeer dunne strook van de uitlaatklep op een diepte h (met $5 \leqslant h \leqslant 7$) kan m.b.v. de stelling van Pythagoras of de vergelijking van een cirkel berekend worden: $b = 2\sqrt{1-(h-6)^2}$.

De totale (netto-) kracht op de uitlaatklep is:

$$F = \int_5^7 \rho g h \, 2\sqrt{1-(h-6)^2} \, dh$$

Deze integraal kan met een grafisch rekentoestel of andere software berekend worden.

Met $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en $g = 9{,}81 \text{ N/kg}$ vinden we op die manier, afgerond op één newton: $F = 184\,914$ N.



Opdracht 16 bladzijde 178

Een schip bevindt zich op 10 km van de kust en heeft een snelheid van 8 m/s.
Op een bepaald ogenblik worden de motoren stilgelegd en begint het schip te vertragen.

We kiezen een x-as die wijst van het schip naar de kust. De oorsprong komt overeen met de positie van het schip wanneer de motoren worden stilgelegd: de beginpositie x_0 is bijgevolg 0 m. De beginsnelheid is $v_0 = 8$ m/s. Aangezien de snelheid waarmee het schip de kust nadert afneemt, is de versnelling negatief. Ze wordt gegeven door $a(t) = 0{,}000025t - 0{,}02$ met $t \in [0, 800]$ en t in seconden.

1 Stel het voorschrift op voor de snelheid $v(t)$ en de positie $x(t)$.

$v(t) = \int a(t)dt = 1{,}25 \cdot 10^{-5}t^2 - 0{,}02t + c$. Aangezien $v(0) = 8$, is $c = 8$.

$x(t) = \int v(t)dt = \int (1{,}25 \cdot 10^{-5}t^2 - 0{,}02t + 8)dt = 4{,}17 \cdot 10^{-7}t^3 - 0{,}01t^2 + 8t + c$.

Uit $x(0) = 0$ leiden we af dat $c = 0$.

2 Na hoeveel seconden komt het schip tot stilstand?

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 1{,}25 \cdot 10^{-5}t^2 - 0{,}02t + 8 = 0 \overset{D=0}{\Leftrightarrow} t = 800$ (seconden)

3 Op hoeveel meter van de kust bevindt het schip zich dan?

De totale afgelegde weg is $x(800) \approx 2133$ (meter). Het schip bevindt zich dan op 7867 meter van de kust.

Opdracht 17 bladzijde 178

Een ballon stijgt op met een constante snelheid van 6 m/s. Op een hoogte van 200 m laat de ballonvaarder een steen vallen. De valversnelling die de steen ondergaat is 9,81 m/s^2.

1 Stel een voorschrift op voor de snelheid $v(t)$ en de hoogte $x(t)$ van de steen. Laat $t = 0$ overeenkomen met het ogenblik waarop de steen wordt losgelaten.

We kiezen de x-as naar boven georiënteerd, met x=0 op grondniveau.

$v(t) = \int a(t)dt = -9{,}81t + c$ met $v(0) = 6$, zodat $v(t) = -9{,}81t + 6$.

$x(t) = \int v(t)dt = -0{,}4905t^2 + 6t + c$ met $x(0) = 200$ zodat $x(t) = -0{,}4905t^2 + 6t + 200$.

2 Wat is de maximale hoogte die de steen bereikt (tot op 1 cm nauwkeurig)?

De maximale hoogte wordt bereikt wanneer $\frac{dx}{dt} = v(t) = 0$ (en v van teken verandert).

Dit doet zich voor bij $t = \frac{6}{9{,}81} = 0{,}612$ (s). De hoogte is dan $x(0{,}612) = 201{,}83$ (m).

3 Wat is de snelheid van de steen op het ogenblik dat hij de grond raakt?

De steen raakt de grond wanneer $x(t) = 0$, met $t > 0$. Oplossen van de vierkantsvergelijking levert $t = 7{,}026$ (s). Hieruit volgt: $v(7{,}026) = -62{,}93$. De snelheid waarmee de steen de grond raakt is dus 62,93 m/s (in de veronderstelling dat er geen luchtweerstand is).

Opdracht 18 bladzijde 181

De kostprijs (in \$) om x wasmachines te produceren, wordt gegeven door de formule
$k(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$.

De marginale kost, afgerond op 1 dollar, om 100 wasmachines te produceren is

A \$ 80 **B** \$ 90 **C** \$ 110 **D** \$ 11 000 **E** geen van de voorgaande

(Bron © ACTM Regional Calculus Competition, 2015)

De marginale kost MK voor 100 wasmachines is: MK(100) = k(101) – k(100) = 79,9.

Antwoord A is dus het goede antwoord.

Opdracht 19 bladzijde 181

Een bedrijf hanteert het volgende model voor haar marginale kosten van een bepaald product:
$MK(x) = 100 + 30x$ met x in eenheden per week en de marginale kost in euro.

Wat zou het extra kosten om de weekproductie van 80 naar 100 eenheden te brengen?

Bereken dit zowel via een som als met behulp van een integraal.

Noteren we de gevraagde verandering in de totale kost als ΔTK, dan vinden we:

- via een som: $\Delta TK = \sum_{x=80}^{99} (100 + 3x) = 55\,700$ (€);
- via een integraal: $\Delta TK = \int_{79,5}^{99,5} (100 + 3x)\,dx = 55\,700$ (€).

Bemerk dat bij een lineair model voor de marginale kost de som en de integraal altijd dezelfde waarde zullen opleveren.

Opdracht 20 bladzijde 185

Je laat de grafiek van de functie $f\colon x \longmapsto e^x$ wentelen om de x-as in het interval $[1, 3]$.

Wat is het volume van het lichaam dat zo ontstaat?

$$V = \int_1^3 \pi(e^x)^2\,dx = \pi\int_1^3 e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_1^3 = \frac{\pi}{2}(e^6 - e^2) = \frac{\pi e^2}{2}(e^4 - 1)$$

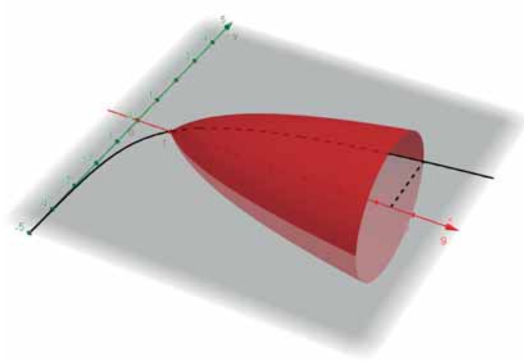
Opdracht 21 bladzijde 185

Beschouw de functie f: $x \longmapsto \ln x$.

1 Maak een schets van het omwentelingslichaam dat je verkrijgt wanneer je de grafiek van f wentelt om de x-as in het interval $[1, e^2]$. Bereken de inhoud ervan met behulp van een integraal.

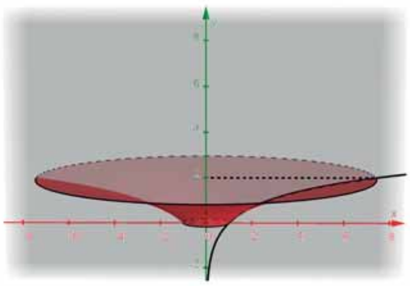
We passen twee keer partiële integratie toe om de ln weg te werken:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{e^2} \pi (\ln x)^2 \, dx \\ &= \pi\left(\left[x \cdot (\ln x)^2\right]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \ln x \, dx\right) \\ &= \pi\left(4e^2 - 2\left([x \cdot \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx\right)\right) \\ &= \pi(4e^2 - 4e^2 + 2(e^2 - 1)) \\ &= 2\pi(e^2 - 1) \end{aligned}$$



2 Stel nu dat je de grafiek van f wentelt om de y-as, in het interval $[0, 2]$. Maak een nieuwe schets. Bereken vervolgens dat volume.

Expliciteren naar x levert $x = e^y$. Het volume is $V = \int_0^2 \pi e^{2y} \, dy = \frac{\pi}{2}[e^{2y}]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$.



Opdracht 22 bladzijde 185

Je laat de kromme met vergelijking $y^2 = 4x$ wentelen om de x-as in het interval $[0, 4]$. Wat is het volume van het lichaam dat zo ontstaat?

We hebben enkel de bovenste helft van de grafiek met vergelijking $y^2 = 4x$ nodig: $y = 2\sqrt{x}$.

Het volume is: $V = \int_0^4 \pi \cdot 4x \, dx = 32\pi$.

Opdracht 23 bladzijde 185

Een plastic koffiebekertje is te beschouwen als een omwentelingslichaam dat ontstaat door een lijnstuk te wentelen om een as.

Het bekertje heeft als hoogte 7,5 cm. De diameter van de bodem is 4,5 cm en die van de bovenkant is 7 cm.

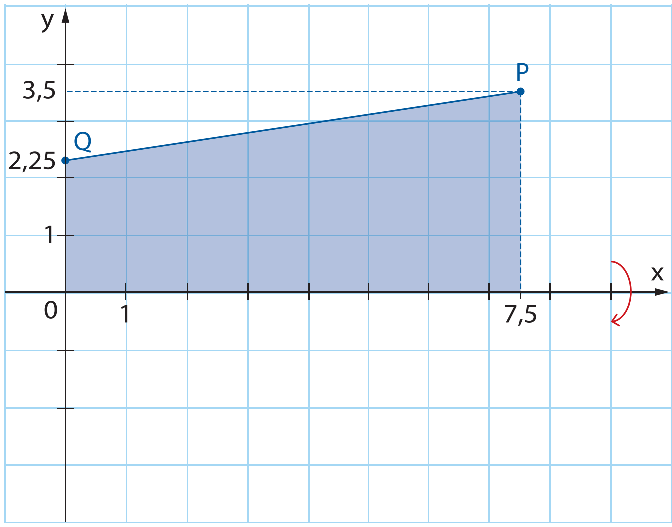
Bereken met een integraal de inhoud van het bekertje, op 1 ml nauwkeurig.

In het gekozen assenstelsel is

$\text{co}(P) = \left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}\right)$ en $\text{co}(Q) = \left(0, \frac{9}{4}\right)$.

De vergelijking van PQ is bijgevolg

$y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{4}$.



De inhoud is:

$$\int_0^{\frac{15}{2}} \pi\left(\frac{1}{6}x + \frac{9}{4}\right)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{108} + \frac{3x^2}{8} + \frac{81x}{16}\right]_0^{\frac{15}{2}}$$

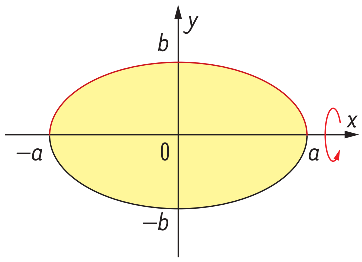
$$= \frac{2015\pi}{32}$$

$$\approx 198$$

Hierbij is de eenheid cm^3 = ml. Afgerond is de inhoud van het bekertje dus ongeveer 198 ml.

Opdracht 24 bladzijde 186

De vergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (met $a>0$ en $b>0$) beschrijft een ellips met middelpunt de oorsprong en waarbij de betekenis van a en b kan afgelezen worden op de afbeelding hiernaast.



We wentelen zo'n halve ellips om de x-as. Het lichaam dat dan ontstaat wordt een **ellipsoïde** genoemd.

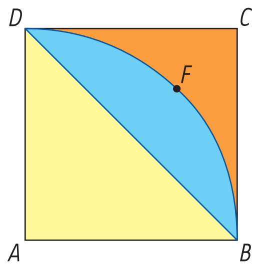
Stel een formule op voor het volume van dit omwentelingslichaam.

Expliciteren naar y levert: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Omwille van de symmetrie t.o.v. de y-as hebben we enkel het stuk in het eerste kwadrant nodig: $V=2\int_0^a \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

Opdracht 25 bladzijde 186

In een vierkant $ABCD$ tekent men de diagonaal BD. Met A als middelpunt en $|AB|$ als straal beschrijft men de cirkelboog $\overset{\frown}{BFD}$. Men laat nu het vierkant wentelen om AB.



Toon aan dat de inhouden, beschreven door de gekleurde gebieden, alle drie aan elkaar gelijk zijn.

Deze oefening kan, maar hoeft niet met integralen opgelost te worden.

De lengte van de zijden van het vierkant noemen we z.

Wentelen we ΔABD om AB, dan ontstaat een kegel met straal |AD| = z en hoogte |AB| = z.

Het volume is $V_{kegel}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi z^2\cdot z=\frac{1}{3}\pi z^3$.

Wentelen we de cirkelboog $\overset{\frown}{BFD}$ om AB, dan krijgen we een halve bol met straal z en volume $\frac{2}{3}\pi z^3$. Trekken we daar het volume van de kegel van af, dan blijkt het volume van het gewentelde segment BFD gelijk te zijn aan $V_{BFD}=\frac{1}{3}\pi z^3$.

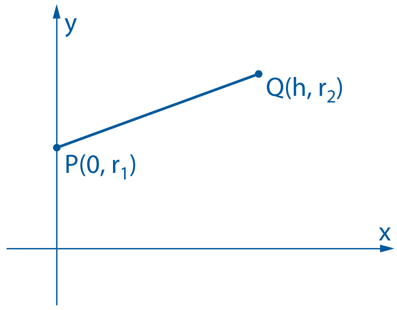
Wentelen we CD om AB, dan ontstaat een cilinder met straal |AD| = z en hoogte |AB| = z.
Het volume is $\pi\cdot z^2\cdot z=\pi z^3$. Trekken we daarvan het volume van de halve bol af, dan stellen we vast dat het overblijvende volume opnieuw $\frac{1}{3}\pi z^3$ is.

Opdracht 26 bladzijde 186

Bereken het volume van een afgeknotte kegel met hoogte h en stralen r_1 en r_2.

De rechte door $P(0, r_1)$ en $Q(h, r_2)$ heeft als vergelijking

$$y = \frac{r_2 - r_1}{h}x + r_1 .$$



Het volume is bijgevolg:

$$\int_0^h \pi\left(\frac{r_2 - r_1}{h}x + r_1\right)^2 dx = \pi\left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{3h^2}x^3 + \frac{r_2 - r_1}{h}x^2 + r_1^2 x\right]_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Opdracht 27 bladzijde 187

Kies het juiste antwoord.

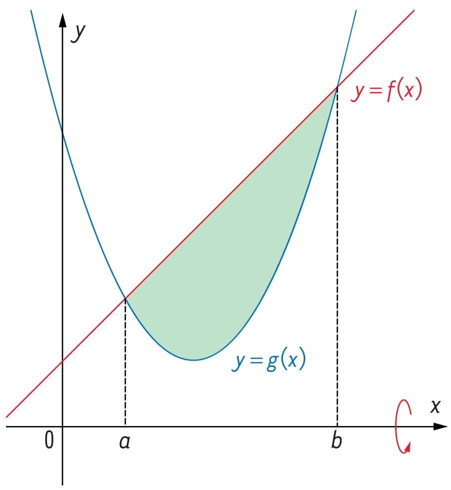
De inhoud van het lichaam dat ontstaat door het gekleurde gebied te wentelen om de x-as is

A $\int_a^b \pi[f(x) - g(x)]\,dx$

B $\int_a^b \pi[f(x) - g(x)]^2\,dx$

C $\pi\left(\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right)^2$

D $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx - \int_a^b \pi(g(x))^2\,dx$



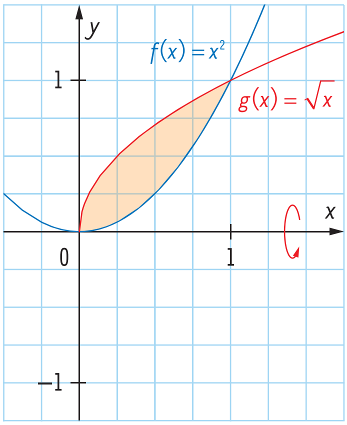
De inhoud is te berekenen als het verschil van twee inhouden:

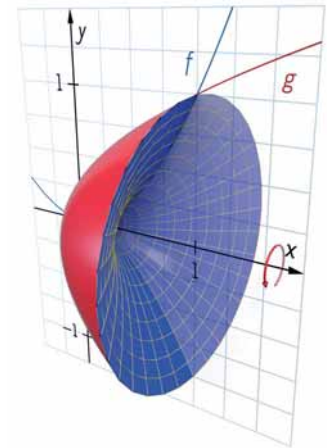
$$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx - \int_a^b \pi(g(x))^2\,dx .$$

Het juiste antwoord is dus D.

Opdracht 28 bladzijde 187

We laten het gebied begrensd door de grafieken van de functies $f: x \mapsto x^2$ en $g: x \mapsto \sqrt{x}$ wentelen om de x-as.





Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

De grafieken snijden elkaar in O(0, 0) en P(1, 1).

Het volume is $\int_0^1 \pi x\,dx - \int_0^1 \pi x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$.

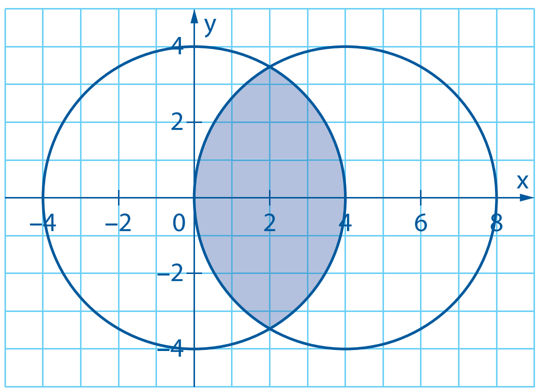
Opdracht 29 bladzijde 187

De cirkels met vergelijking $x^2 + y^2 = 16$ en $x^2 + y^2 - 8x = 0$ wentelen om de x-as.

Bereken de inhoud van het gemeenschappelijke deel van de twee ontstane bollen.

Om een schets te kunnen maken, is het nuttig de tweede vergelijking te herschrijven in de vorm $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$:

$$x^2 + y^2 = 8x \iff x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16$$
$$\iff (x-4)^2 + y^2 = 4^2$$



Beide cirkels hebben straal 4 en hun middelpunten liggen op de x-as, zodat hun snijpunten zich halverwege, bij x = 2, voordoen. We kunnen bovendien gebruik maken van de symmetrie en berekenen enkel het volume over het interval [2, 4], wat ons toelaat met de eenvoudige vergelijking van de eerst vermelde cirkel te werken: $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$.

We vinden als volume:

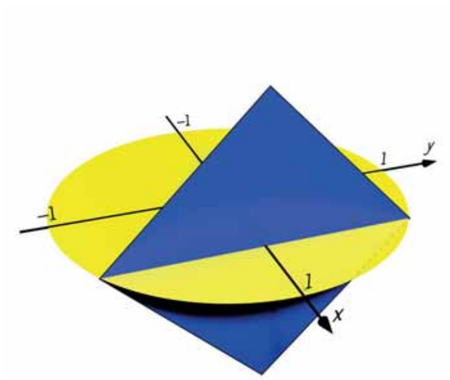
$$V = 2 \cdot \int_2^4 \pi(16 - x^2)\,dx = \frac{80\pi}{3}.$$

Opdracht 30 bladzijde 188

De verschillende lichamen hieronder worden in de x-richting begrensd door vlakken loodrecht op de x-as bij $x = 1$ en $x = -1$. Dwarsdoorsneden loodrecht op de x-as worden in de y-richting begrensd door de halfcirkels met vergelijking $y = \sqrt{1 - x^2}$ en $y = -\sqrt{1 - x^2}$. In de rechtse afbeelding is telkens één zo'n dwarsdoorsnede getekend.

Bereken het volume van het lichaam.

1 Dwarsdoorsneden zijn vierkanten, waarvan een diagonaal in het xy-vlak ligt.

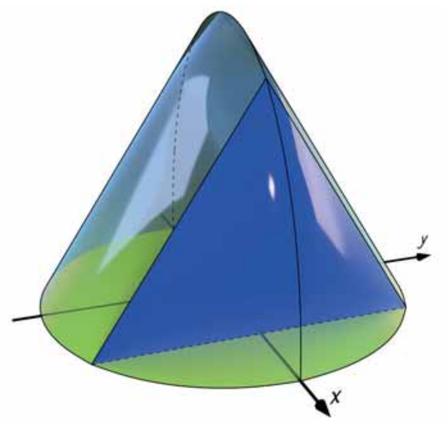


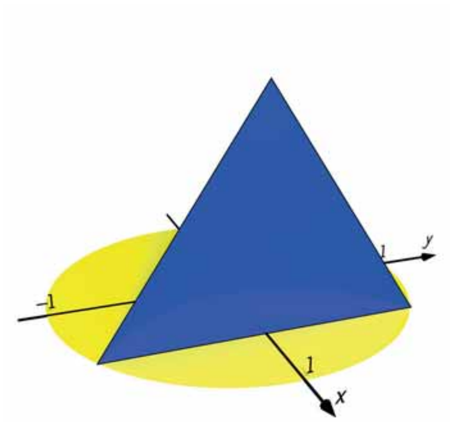
Stel z(x) de zijde van de doorsnede in functie van x, dan geldt voor de diagonaal: $D(x) = \sqrt{2}\, z(x)$. Uit de opgave blijkt dat $D(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$. Bijgevolg is

$z(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} D(x) = \sqrt{2}\sqrt{1 - x^2}$, zodat de oppervlakte van een dwarsdoorsnede gegeven wordt door $A(x) = 2(1 - x^2)$.

Het volume is: $V = \int_{-1}^{1} 2(1 - x^2)\,dx = 4\int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = 4\left[x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{8}{3}$.

2 Dwarsdoorsneden zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan een zijde in het xy-vlak ligt.



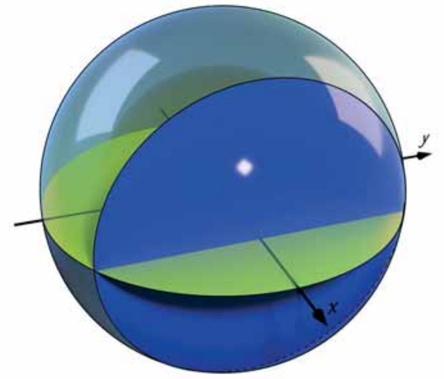


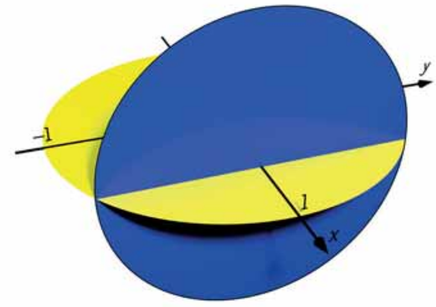
Stel z(x) de zijde van de gelijkzijdige driehoek in functie van x, dan is de hoogte van de driehoek $h(x) = z(x) \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} z(x)$. Uit de opgave weten we dat $z(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$.

De oppervlakte wordt dan gegeven door $A(x) = \dfrac{z(x) \cdot h(x)}{2} = \sqrt{3}(1 - x^2)$.

Hieruit volgt het volume: $V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1 - x^2)\,dx = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

3 Dwarsdoorsneden zijn cirkels, met middelpunt op de *x*-as.





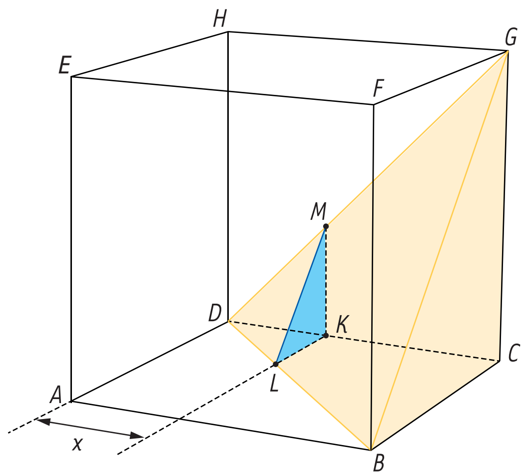
De straal van elke doorsnede wordt gegeven door $r(x) = \sqrt{1-x^2}$ zodat $A(x) = \pi(1-x^2)$.

We vinden: $V = \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\,dx = \dfrac{4\pi}{3}$.

Deze formule komt overeen met de formule die in opdracht 2 werd opgesteld.

Opdracht 31 bladzijde 189

Beschouw de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe *z*.



Door de punten *B*, *D* en *G* brengen we een vlak aan. Dit snijdt een viervlak *BCDG* van de kubus af.

Om het volume van dit viervlak te berekenen, beschouwen we doorsneden loodrecht op de ribbe *DC*. De doorsnede op een afstand *x* van *D* is de driehoek *KLM* (zie afbeelding).

1 Stel een formule op voor de oppervlakte van ΔKLM in functie van *x*.

Beschouwen we de driehoek DKL, dan weten we dat de hoek $\hat{D}$ 45° meet (DL is diagonaal van het vierkante grondvlak), $\hat{K}$ is een rechte hoek en dus is $\hat{L}$ ook 45° groot. De driehoek is gelijkbenig en dus is $|KD| = |KL| = x$. Eenzelfde redenering geldt in ΔDKM.

De oppervlakte A(x) wordt dus gegeven door: $A(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

2 Bereken hiermee het volume van het viervlak *BCDG*.

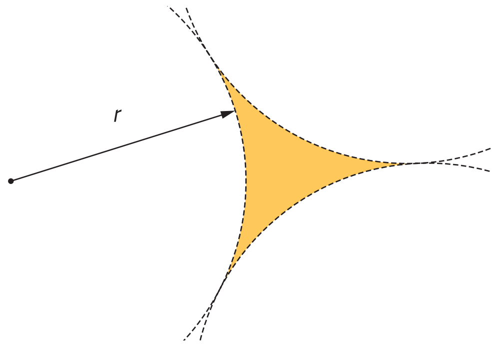
$$V = \int_0^z \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^z = \frac{1}{6}z^3$$

3 Wat is de verhouding van het volume van het viervlak tot dat van de kubus?

$$\frac{V}{V_{kubus}} = \frac{1}{6}$$

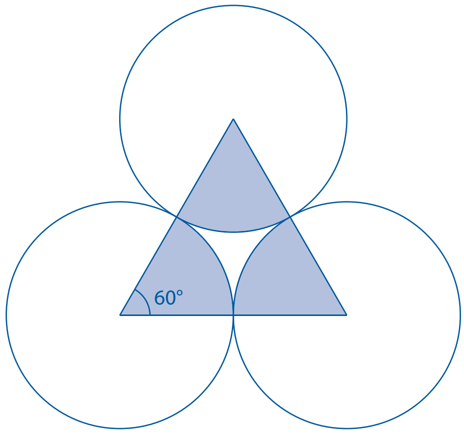
Opdracht 32 bladzijde 189

Drie cirkels met straal r raken elkaar. Het binnengebied is het grondvlak van een veralgemeende cilinder met hoogte h.



Bereken het volume.

We vervolledigen de cirkels. De middelpunten vormen een gelijkzijdige driehoek met basis 2r en hoogte $\sqrt{3}$r. Hieruit verwijderen we drie cirkelsectoren, met oppervlakte één zesde van de volledige cirkel, om het grondvlak van de veralgemeende cilinder uit de opdracht te verkrijgen.



De oppervlakte van het gevraagde gebied is:

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{driehoek}} - 3 \cdot A_{\text{sector}} \\ &= \frac{2r \cdot \sqrt{3}r}{2} - 3 \cdot \frac{\pi r^2}{6} \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2 \end{aligned}$$

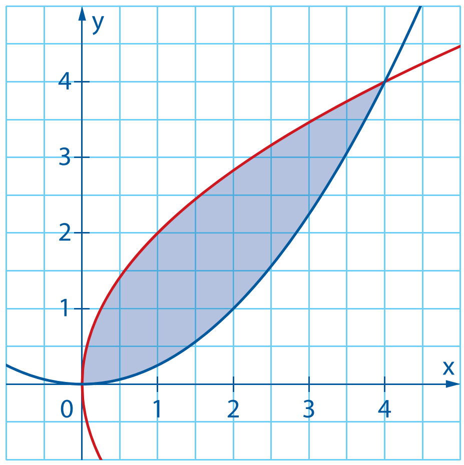
Het volume is dus $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2 h$.

Opdracht 33 bladzijde 189

Beschouw de vlakke figuur begrensd door de parabolen met vergelijking $y^2 = 4x$ en $x^2 = 4y$.

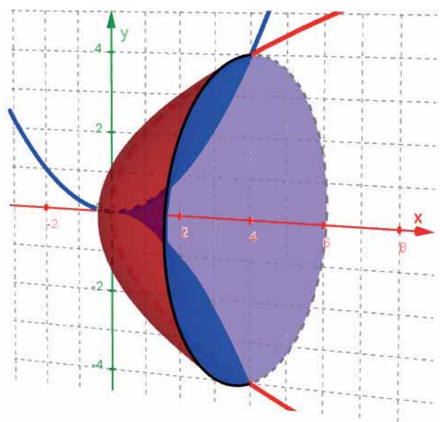
We werken tweemaal met een verschil van twee volumes. Beide grafieken snijden elkaar in P(4, 4).

Uit de symmetrie t.o.v. de eerste deellijn kan al voorspeld worden dat het volume bij wentelen om de x-as en gelijk zal zijn aan dat bij wentelen om de y-as.



1 We wentelen deze figuur om de x-as. Maak een schets van het lichaam dat zo ontstaat. Bereken het volume ervan.

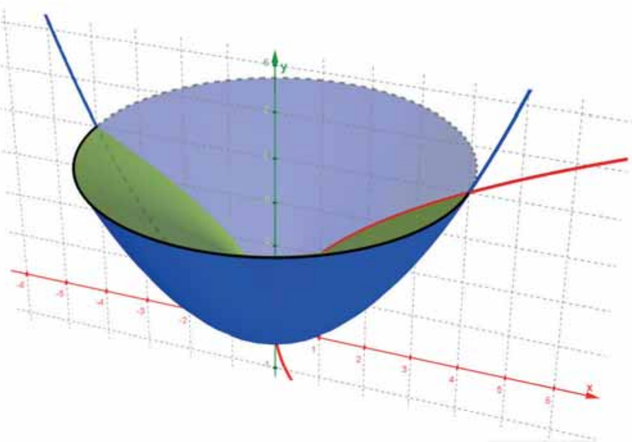
We expliciteren beide vergelijkingen naar y: $y = 2\sqrt{x}$ (we beperken ons tot het deel boven de x-as) en $y = \frac{1}{4}x^2$.



$$V = \int_0^4 \pi \cdot 4x\,dx - \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx = 32\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{96\pi}{5}$$

2 Maak een schets van het lichaam dat ontstaat wanneer je dat vlakdeel wentelt om de y-as. Wat is nu het volume?

Alleen al omwille van de symmetrie kan gesteld worden dat $V = \dfrac{96\pi}{5}$.



Om het volume daadwerkelijk te berekenen, expliciteren we beide vergelijkingen naar x:

$x = \dfrac{1}{4}y^2$ resp. $x = 2\sqrt{y}$

(deel rechts van de y-as).

$$V = \int_0^4 \pi \cdot 4y\,dy - \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{4}y^2\right)^2 dy = \frac{96\pi}{5}$$

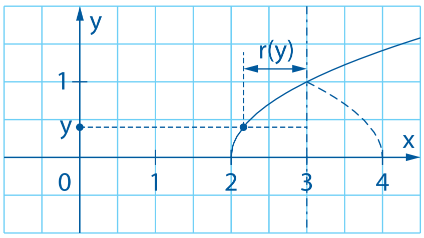
Opdracht 34 bladzijde 189

Gegeven is de functie $f: x \mapsto \sqrt{x-2}$. Het gekleurde gebied wordt gewenteld om de rechte met vergelijking $x = 3$.

Bereken het volume.

We wentelen om een as evenwijdig met de y-as, dus expliciteren we de vergelijking van de kromme eerst naar x: $x = y^2 + 2$.

Een eerste aanpak bestaat erin het lichaam te beschouwen als een stapeling van horizontale cilindrische plakjes.



Voor elke y (tussen 0 en 1) is de straal $r(y) = 3 - (y^2 + 2) = 1 - y^2$. De oppervlakte van de cirkelvormige doorsnede is bijgevolg $A(y) = \pi(1 - y^2)^2$.

Het volume is $V = \int_0^1 \pi(1-y^2)^2\,dy = \pi\left[y - \dfrac{2y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5}\right]_0^1 = \dfrac{8\pi}{15}$.

Een alternatieve aanpak bestaat erin de grafiek eerst horizontaal te verschuiven over 3 eenheden naar links en de verschoven grafiek te wentelen om de y-as. De integraal is dezelfde.

Opdracht 35 bladzijde 190

1 Toon aan dat de grafieken van de functies $f: x \mapsto \ln x$ en $g: x \mapsto \dfrac{x}{e}$ elkaar raken.

De snijpunten volgen uit de vergelijking $\ln x = \dfrac{x}{e}$, maar deze is niet zomaar oplosbaar.

Daarom zoeken we eerst voor welke x de raaklijnen evenwijdig zijn:

$f'(x) = g'(x) \iff \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e} \iff x = e$. Aangezien $f(e) = g(e) = 1$, is aangetoond dat beide grafieken elkaar raken.

2 Het vlakdeel begrensd door de grafiek van f, de grafiek van g en de x-as wordt gewenteld om de y-as.

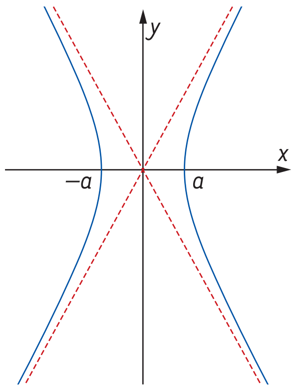
Bereken het volume van het ontstane lichaam.

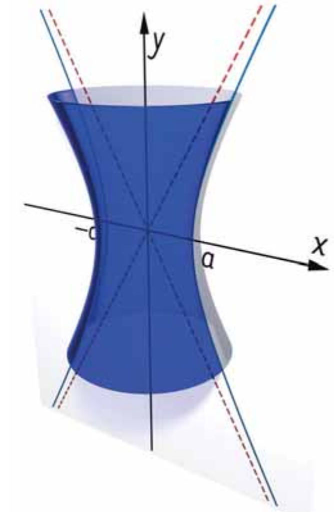
We expliciteren beide voorschriften naar x en vinden voor f dat $x = e^y$ en voor g dat $x = ey$.

Het volume is $V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 e^{2y}\,dy - \pi\int_0^1 e^2y^2\,dy = \pi\left[\dfrac{e^{2y}}{2} - e^2\dfrac{y^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{\pi(e^2-3)}{6}$.

Opdracht 36 bladzijde 189

De vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (met $a > 0$ en $b > 0$) beschrijft een **hyperbool** met middelpunt de oorsprong en met asymptoten de rechten met vergelijking $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$ (zie afbeelding links). Wentel je zo'n hyperbool om de y-as over een bepaald interval, dan verkrijg je een oppervlak dat een **éénbladige hyperboloïde** wordt genoemd (afbeelding rechts).



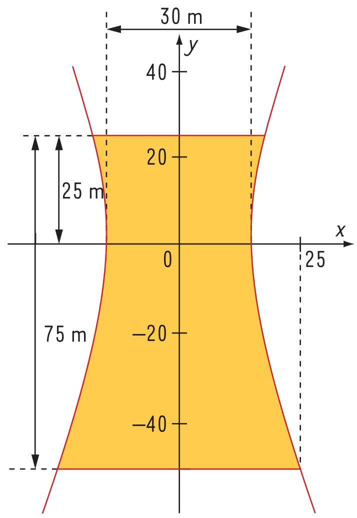


Wanneer je een bundel spaghettistokken enkel in het midden vasthoudt en dan lichtjes draait, zodat ze onder en boven uitwaaieren, krijg je ook een hyperboloïde.

Dit illustreert dat hyperboloïden zogenaamde regeloppervlakken zijn, dit zijn oppervlakken die volledig met rechten kunnen worden gemaakt. Daarom duiken ze geregeld op in bouwconstructies, bijvoorbeeld in koeltorens.

De koeltoren op de afbeelding is een hyperboloïde van 75 m hoog. De 'hals' ervan heeft een diameter van 30 m. Onderaan, 50 m onder de hals, heeft de koeltoren een diameter van 50 m.

Hoeveel kubieke meter waterdamp kan de koeltoren bevatten?



De vergelijking van de hyperbool H is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) en er is gegeven dat de punten met coördinaten (15, 0) en (25, –50) erop liggen. Invullen van het eerste punt levert $a = 15$. Het tweede punt levert $b = \frac{75}{2}$.

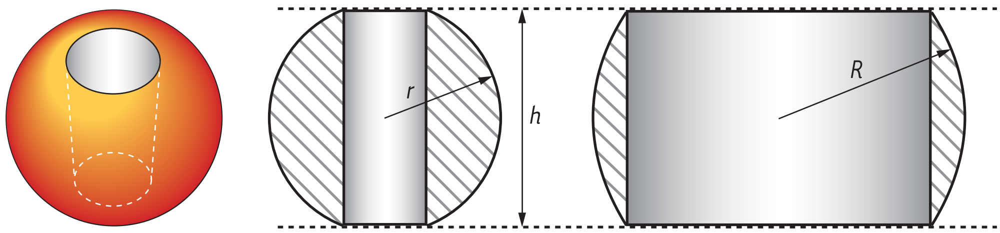
Aangezien gewenteld wordt om de y-as, expliciteren we naar x^2 (we zullen toch πx^2 integreren): $x^2 = 15^2\left(1 + \frac{4y^2}{75^2}\right)$.

Het volume is $V = \int_{-50}^{25} \pi \cdot 15^2\left(1 + \frac{4y^2}{75^2}\right) dy \overset{\text{ICT}}{=} 24\,375\,\pi \approx 76\,576 \text{ (m}^3\text{)}$.

Opdracht 37 bladzijde 191

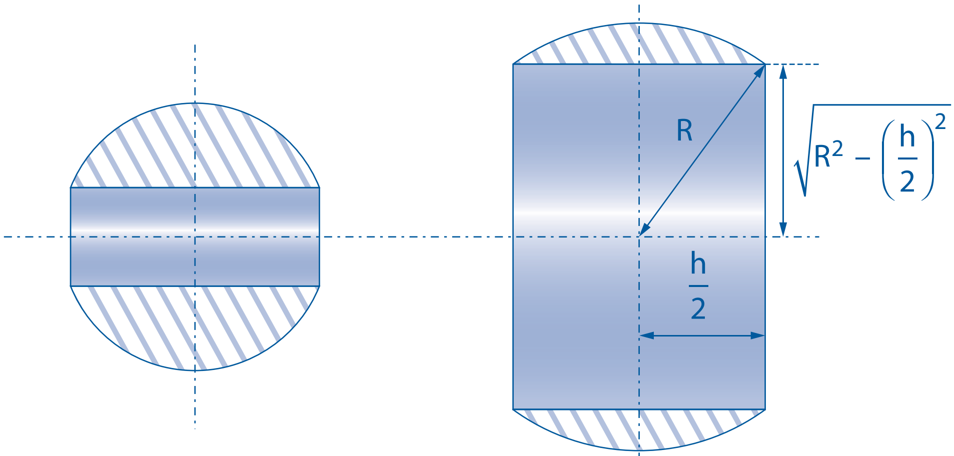
Cilindrische doorboring van een bol

De onderstaande bollen hebben als straal *r* en *R*, met *r* < *R*. Ze werden doorboord door een cilinder, zodanig dat de overblijvende ring in beide gevallen een hoogte *h* heeft.



In welke van beide situaties is het volume van de overblijvende ring het grootst? Toon aan met behulp van een berekening.

Door beide ringen een kwartslag te draaien, zijn ze te beschouwen als omwentelingslichamen, vergelijkbaar met die uit de opdrachten 4 en 5.



We beginnen met de rechterring, omdat zijn afmetingen het gemakkelijker maken alle maten aan te brengen. De kromme rand bovenaan heeft als voorschrift $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

De cilindrische doorboring heeft een straal $\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$. Het volume van de ring is een verschil van twee volumes:

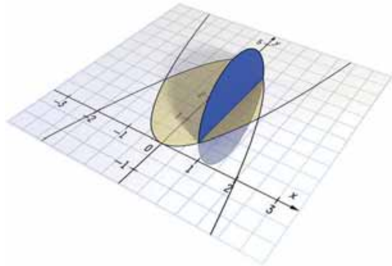
$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \left(\int_0^{\frac{h}{2}} \pi(R^2 - x^2)\,dx - \pi \cdot \left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) \cdot \frac{h}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\pi R^2 \frac{h}{2} - \pi \frac{h^3}{24} - \pi R^2 \frac{h}{2} + \pi \frac{h^3}{8} \right) \\ &= \frac{\pi h^3}{6} \end{aligned}$$

Voor de kleine ring zijn de berekeningen analoog, maar R moet vervangen worden door r. Het volume is echter niet afhankelijk van de straal. Beide ringen hebben dus hetzelfde volume.

Opdracht 38 bladzijde 191

Beschouw de parabolen met vergelijking $y = x^2$ en $y = 4 - x^2$.

1 Een lichaam wordt in de x-richting begrensd door de snijpunten van beide parabolen. Doorsneden loodrecht op de x-as zijn cirkels met middelpunt in het xy-vlak en begrensd door de parabolen. Op de figuur is zo'n doorsnede getekend.

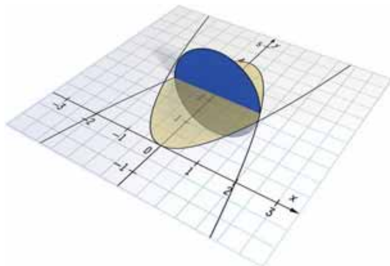


Bereken het volume van dat lichaam.

Voor elke x is de diameter van de dwarsdoorsnede $D(x) = 4 - x^2 - x^2 = 4 - 2x^2$, zodat de oppervlakte gegeven wordt door $A(x) = \pi(2 - x^2)^2$. De grafieken snijden elkaar voor $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$. De oppervlakte is bijgevolg:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} A(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \pi(2 - x^2)^2\,dx = 2\pi\left[4x - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

2 Wat is het volume van het lichaam waarbij de doorsneden loodrecht op de y-as cirkelvormig zijn?



Aangezien de parabolen elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de rechte $y = 2$, kunnen we het volume berekenen als $V = 2\int_0^2 A(y)\,dy$, met $A(y)$ de oppervlakte van een dwarsdoorsnede loodrecht op de y-as voor $y \in [0, 2]$.

Voor deze y-waarden is de begrenzende kromme $y = x^2$, dus is de straal van de doorsnede $r(y) = \sqrt{y}$ en bijgevolg is $A(y) = \pi y$.

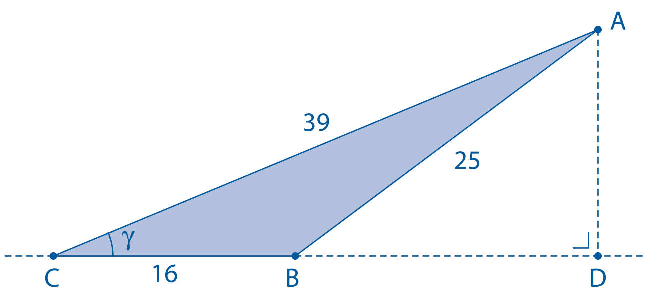
We vinden: $V = 2\int_0^2 \pi y\,dy = 4\pi$.

Opdracht 39 bladzijde 192

In de driehoek ABC geldt: $|AB| = 25$, $|BC| = 16$ en $|CA| = 39$. We wentelen deze driehoek om zijn kortste zijde.

Wat is het volume van het resulterende lichaam?

Dit vraagstuk kan zonder integralen opgelost worden, aangezien het lichaam beschouwd kan worden als het verschil van twee kegels.



Uit de cosinusregel in ΔABC vinden we, met a, b en c de zijden tegenover A, B resp. C:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12}{13}$$

Daaruit volgt voor de scherpe hoek γ dat $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \dfrac{5}{13}$.

In de rechthoekige driehoek CAD is:

$$|CD| = |AC| \cos\gamma = 36$$
$$|AD| = |AC| \sin\gamma = 15$$

Het volume van het omwentelingslichaam is het verschil van het volume van een kegel met hoogte 36 en straal 15 en dat van een kegel met hoogte 20 en straal 15.

We vinden: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 15^2(36 - 20) = 1200\,\pi$.

Opdracht 40 bladzijde 192

Een lichaam ontstaat door het wentelen om de x-as van de grafiek van een functie f over het interval $[0, b]$. Gegeven is dat $f(x) \geqslant 0$ voor $x \geqslant 0$. Het volume van dat lichaam is b^2 en dit ongeacht de waarde van $b > 0$.

Bestaat er een functie die aan deze eigenschap voldoet? Zo ja, geef een voorschrift.

Er moet dus gelden dat $\int_0^b \pi(f(x))^2\,dx = b^2$. Een mogelijke primitieve van $\pi(f(x))^2$ is dus x^2,

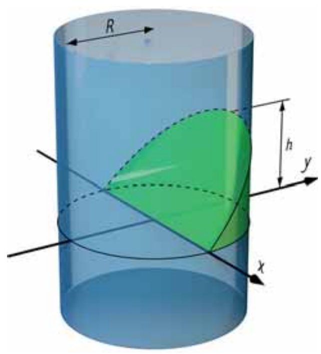
m.a.w. $\pi(f(x))^2 = 2x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$, aangezien $f(x) \geqslant 0$.

Opdracht 41 bladzijde 192

Wig uit een cilinder

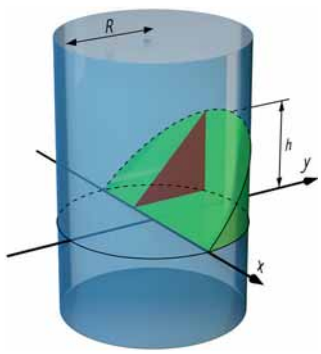
Uit een cilinder met straal R wordt een wig gezaagd, met (maximale) hoogte h, zoals aangegeven op de figuur. De wig komt tot net in het midden van de cilinder.

Om het volume van de wig te bepalen, kun je met doorsneden loodrecht op de x-as of de y-as werken. Elke methode moet hetzelfde volume opleveren.



1 Doorsneden loodrecht op de x-as zijn driehoeken. Maak hiervan gebruik om het volume van de wig te berekenen.

De doorsneden zijn rechthoekige driehoeken, die alle gelijkvormig zijn met de driehoek voor $x = 0$: de verhouding hoogte/basis voor die driehoek is h/R. Voor elke $x \in [0, R]$ is de oppervlakte van een driehoekige dwarsdoorsnede bijgevolg:

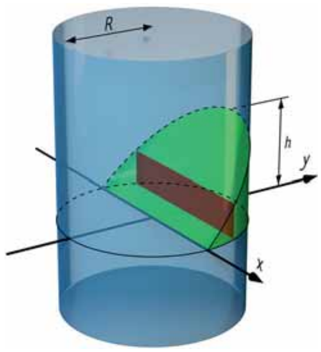


$$A(x) = \frac{\overbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\text{basis}} \cdot \overbrace{\frac{h}{R}\sqrt{R^2 - x^2}}^{\text{hoogte}}}{2} = \frac{h}{2R}(R^2 - x^2)$$

Het volume is dan $V = 2 \cdot \int_0^R \frac{h}{2R}(R^2 - x^2)\,dx = \frac{2hR^2}{3}$.

2 Doorsneden loodrecht op de y-as zijn rechthoeken.

Bepaal hun oppervlakte in functie van y en bereken hiermee het volume van de wig.

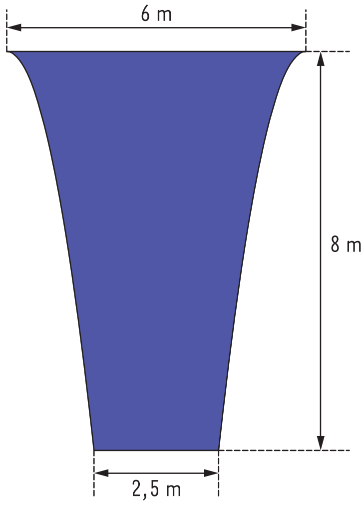


Door opnieuw gebruik te maken van gelijkvormigheid kan men afleiden dat de hoogte van de rechthoekige doorsneden voor elke y gegeven wordt door $\frac{h}{R} \cdot y$. De breedte volgt uit het voorschrift van een (halve) cirkel en is $2\sqrt{R^2 - y^2}$.

Het volume wordt nu geschreven als $V = \int_0^R \frac{h}{R} y \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \frac{2hR^2}{3}$.

Opdracht 42 bladzijde 193

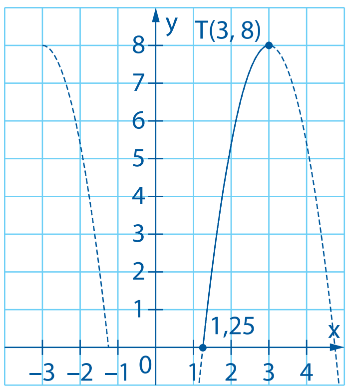
Om spanningsconcentraties en de daarbij horende scheurtjes in beton te vermijden, krijgen steunpilaren een afgeronde vorm (als je een verticale doorsnede beschouwt). Hieronder zie je zo'n pilaar in perspectief en in voor- of zijaanzicht.



Dwarsdoorsneden loodrecht op de verticale as zijn steeds vierkanten, waarvan het midden op de as ligt. In voor- en zijaanzicht zijn de zijwanden parabolen, waarvan de top op het bovenvlak van de pilaar ligt. De afmetingen vind je op de figuur.

De massadichtheid van het gebruikte beton bedraagt 2400 kg/m^3. Hoeveel weegt de pilaar?

We kiezen een assenstelsel zoals hiernaast weergegeven en stellen de vergelijking op van de rechtse parabool.



We vertrekken van $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ met (α, β) de coördinaat van de top. Hier geldt: $(\alpha, \beta) = (3, 8)$. De waarde van a volgt uit de eis dat ook (1,25; 0) op de parabool ligt: $a = -\frac{128}{49}$.

De zijde van een vierkante dwarsdoorsnede kunnen we berekenen in functie van y indien we de vergelijking expliciteren naar x:

$$y = -\frac{128}{49}(x-3)^2 + 8 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{\frac{49}{128}(8-y)}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \pm \frac{7\sqrt{2}}{16}\sqrt{8-y}$$

Voor onze berekening is het deel met $x \leqslant 3$ vereist: $x = 3 - \dfrac{7\sqrt{2}}{16}\sqrt{8-y}$.

De zijde van elke vierkante doorsnede is $2x$ zodat $A(y) = \left(6 - \dfrac{7\sqrt{2}}{8}\sqrt{8-y}\right)^2$.

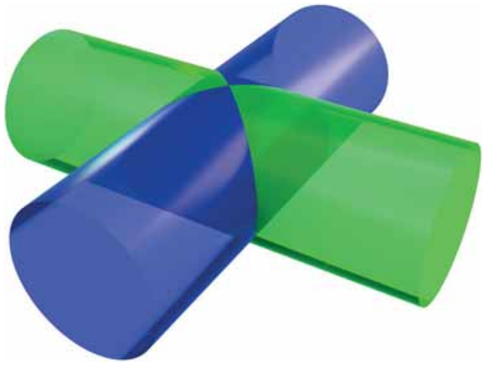
Het volume is:

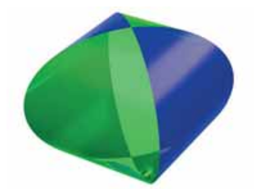
$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \left(\frac{193}{4} - \frac{21\sqrt{2}}{2}\sqrt{8-y} - \frac{49}{32}y\right)dy = \left[\frac{193}{4}y + 7\sqrt{2}(8-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{49}{64}y^2\right]_0^8 = 113$$

Het volume van de pilaar is 113 m^3. Dit komt overeen met een massa van 271 200 kg.

Opdracht 43 bladzijde 193

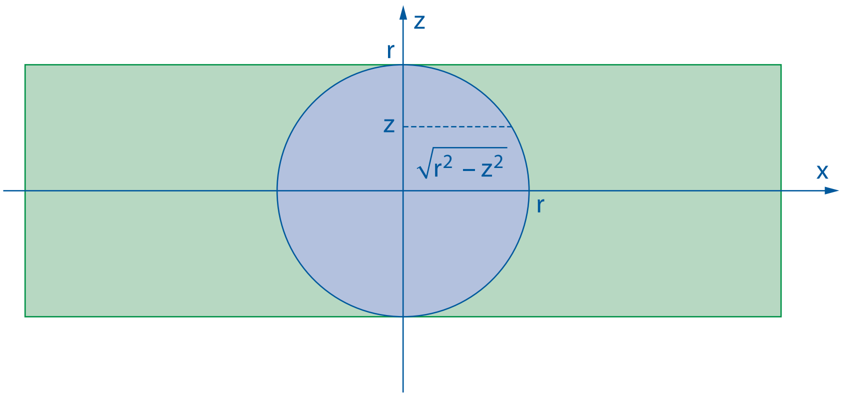
Bereken het volume van het gemeenschappelijke deel van twee cilinders met straal *r*, waarvan de assen elkaar loodrecht snijden. Dit gemeenschappelijk deel is rechts getekend.





Doorsneden evenwijdig met het vlak van de assen van de cilinders zijn vierkanten.

Kiezen we de x-as volgens de as van de groene cilinder en de z-as loodrecht op het vlak van beide assen, dan kunnen we gemakkelijk de zijde van zo'n vierkante doorsnede bepalen.

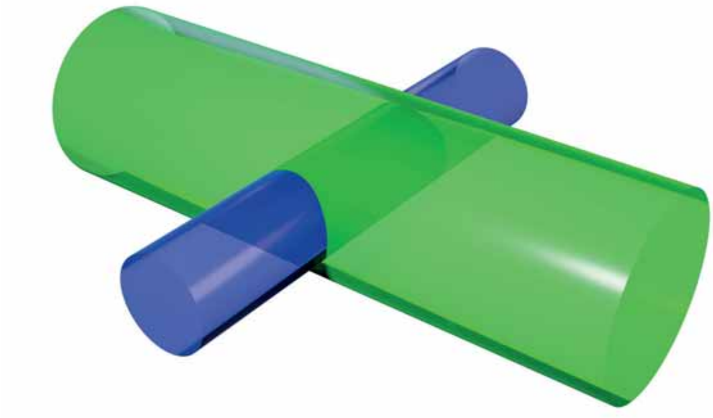


De zijde wordt in functie van z gegeven als $Z(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ zodat $A(z) = 4(r^2 - z^2)$.

Het volume is: $V = \int_{-r}^{r} A(z)\,dz = 2\int_0^r 4(r^2 - z^2)\,dz = 8\left[r^2 z - \dfrac{z^3}{3}\right]_0^r = \dfrac{16r^3}{3}$.

Opdracht 44 bladzijde 194

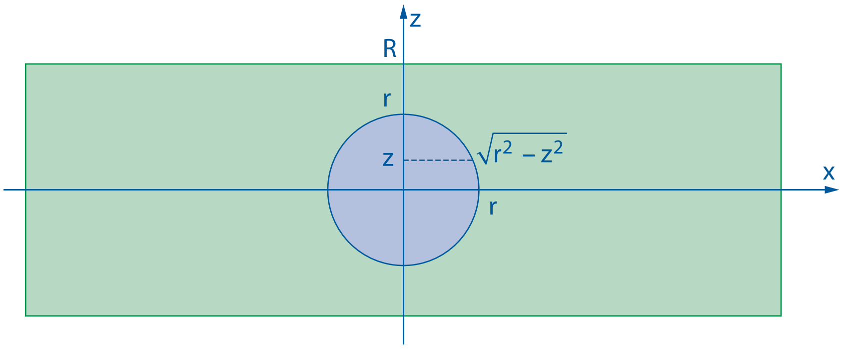
Een cilinder met straal *r* doorboort een cilinder met straal $R > r$ zo dat hun assen elkaar loodrecht snijden.

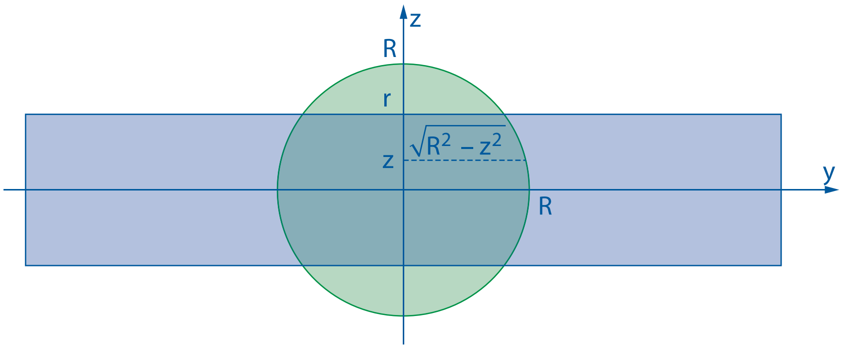


Geef een integraal waarmee je het volume van het gemeenschappelijk deel kunt bepalen.

Je hoeft de integraal niet te berekenen.

Doorsneden evenwijdig met het vlak van de assen van de cilinders zijn nu rechthoeken. Uit de voor- en zijaanzichten hieronder kunnen de afmetingen van die rechthoeken afgeleid worden.



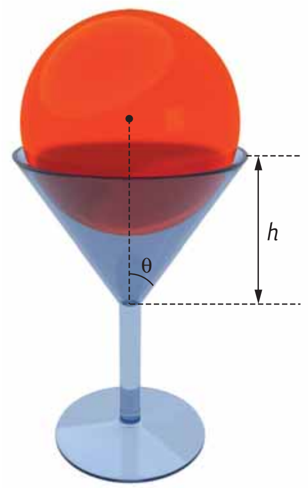


Er geldt nu: $A(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2} \cdot 2\sqrt{R^2 - z^2}$ zodat $V = \int_{-r}^{r} 4\sqrt{r^2 - z^2}\sqrt{R^2 - z^2}\,dz$.

Opdracht 45 bladzijde 194

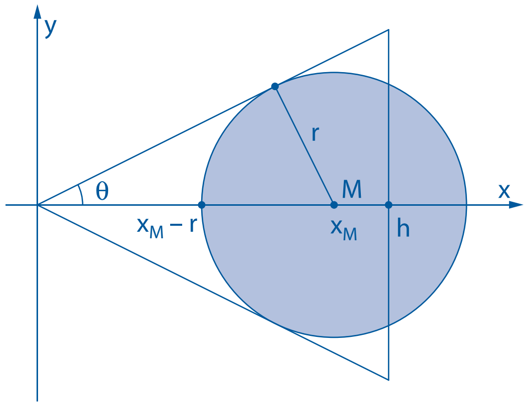
Een cocktailglas heeft de vorm van een kegel met hoogte *h* en halve verticale hoek θ (zie afbeelding) en is volledig gevuld met water. Een bol met straal *r* wordt in het glas gelegd, waardoor er water over de rand loopt.

Wat is de straal van de bol waarvoor het volume van het overlopend water maximaal is?



Uit de afbeelding kan het volgende afgeleid worden:

$$x_M \sin\theta = r \Rightarrow x_M = \frac{r}{\sin\theta}$$



De vergelijking van de cirkel is dan $(x - x_M)^2 + y^2 = r^2$, waaruit het voorschrift van de bovenste halve cirkel volgt: $y = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$.

Het volume verplaatst water is:

$$V = \int_{x_M - r}^{h} \pi\left(r^2 - (x - x_M)^2\right)dx$$

$$= \pi\left[r^2 x - \frac{(x - x_M)^3}{3}\right]_{x_M - r}^{h}$$

$$= \pi\left(r^2 h - \frac{1}{3}(h - x_M)^3 - r^2(x_M - r) - \frac{1}{3}r^3\right)$$

$$= \pi\left(r^2 h - \frac{1}{3}\left(h - \frac{1}{\sin\theta}r\right)^3 - r^3\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right) - \frac{1}{3}r^3\right)$$

Afleiden naar r geeft:

$$\frac{dV}{dr} = \pi\left(2hr + \left(h - \frac{1}{\sin\theta}r\right)^2 \frac{1}{\sin\theta} - 3r^2\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right) - r^2\right)$$

$$= \pi\left(\left[\frac{1}{\sin^3\theta} - \frac{3}{\sin\theta} + 2\right]r^2 + \left[2h\left(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\right]r + \frac{h^2}{\sin\theta}\right)$$

$$= \pi\frac{1}{\sin^3\theta}\left(\left[2\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 1\right]r^2 + \left[2h\sin\theta\,(\sin^2\theta - 1)\right]r + h^2\sin^2\theta\right)$$

Om de nulpunten van deze tweedegraadsveelterm in r te bepalen, zullen we de discriminant nodig hebben.

$$\begin{aligned} D &= 4h^2 \sin^2\theta(\sin^2\theta - 1)^2 - 4\left[2\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 1\right]h^2 \sin^2\theta \\ &= 4h^2 \sin^2\theta(\sin^4\theta - 2\sin^2\theta + 1 - 2\sin^3\theta + 3\sin^2\theta - 1) \\ &= 4h^2 \sin^4\theta(\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1) \\ &= \left(2h\sin^2\theta(\sin\theta - 1)\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = 2h\sin^2\theta(1 - \sin\theta)$$

We vinden twee oplossingen voor r:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-2h\sin\theta(\sin^2\theta - 1) \pm 2h\sin^2\theta(1 - \sin\theta)}{2\left[2\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 1\right]}$$

$$\Leftrightarrow r = h\frac{\sin\theta(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) \pm \sin^2\theta(1 - \sin\theta)}{(\sin\theta - 1)^2(2\sin\theta + 1)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{h\sin\theta}{(1 - \sin\theta)(2\sin\theta + 1)}(1 + \sin\theta \pm \sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{h\sin\theta}{(1 - \sin\theta)(2\sin\theta + 1)} = r_1 \quad \text{of} \quad r = \frac{h\sin\theta}{1 - \sin\theta} = r_2 \quad (\text{met } r_1 < r_2)$$

Aangezien $\frac{dV}{dr}$ een tweedegraadsfunctie in r is met positieve tweedegraadscoëfficiënt

$$\left(\text{immers, } \pi\frac{1}{\sin^3\theta}(2\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 1) = \pi\frac{1}{\sin^3\theta}(\sin\theta - 1)^2(2\sin\theta + 1) > 0\right),$$

zal $\frac{dV}{dr}$ van + naar – overgaan bij het kleinste nulpunt, m.a.w. bij $r = r_1$.

Besluit: het volume verplaatst water is maximaal voor $r = \frac{h\sin\theta}{(1 - \sin\theta)(2\sin\theta + 1)}$.

Opdracht 47 bladzijde 196

Bereken de lengte van de kromme met vergelijking $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ over [2, 4].

Met $y' = \sqrt{x - 1}$ vinden we de lengte als $\int_2^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right)$.

Opdracht 48 bladzijde 196

De booglengte van de kromme met vergelijking $y = x^3$ in het interval [–1, 1] wordt gegeven door

A $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 3x^2}\,dx$ **B** $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$ **C** $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^6}\,dx$

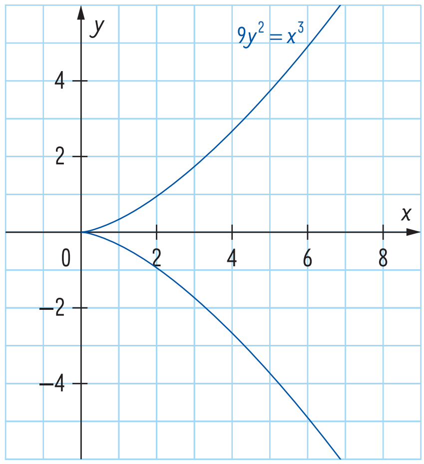
D $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^3}\,dx$ **E** geen van de voorgaande

(Bron © ACTM Regional Calculus Competition, 2015)

Invullen van de formule geeft: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$ zodat B het juiste antwoord is.

Opdracht 49 bladzijde 196

Bereken de lengte van één tak van de kromme met vergelijking $9y^2 = x^3$ voor $x \in [0, 6]$.



De bovenste tak van de grafiek heeft als expliciet voorschrift $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$, met afgeleide $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

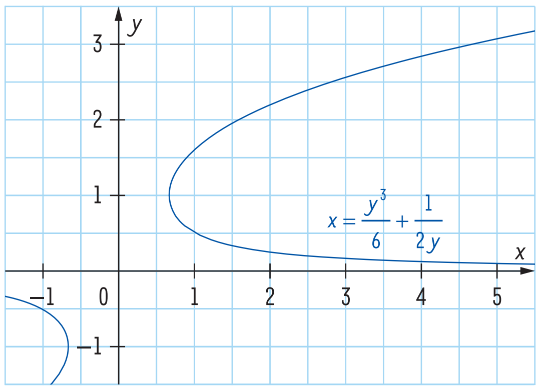
De lengte is:

$$\int_0^6 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \sqrt{4+x}\, d(4+x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6 = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{10} - 4\right)$$

Opdracht 50 bladzijde 196

Bereken exact de lengte van de kromme met vergelijking $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ van $y = 1$ tot $y = 3$.



Uit $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2y^2}$ volgt

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2y^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4}\right)} dy = \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4}}\, dy = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2y^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2y^2}\right) dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{1}{2y}\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Opdracht 51 bladzijde 197

De cosinushyperbolicus-functie is gedefinieerd als cosh: $x \mapsto \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

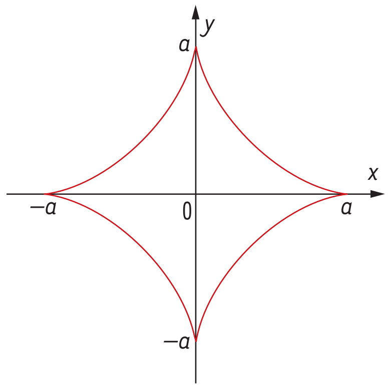
Bereken de lengte van de grafiek van cosh voor $x \in [-1, 1]$.

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ zodat } L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

Opdracht 52 bladzijde 197



Een kromme bepaald door de vergelijking $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (met $a>0$) wordt een **astroïde** genoemd.

1 Verklaar waarom je de lengte van de tak in het eerste kwadrant niet zomaar kunt berekenen als $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

De grafiek laat vermoeden dat de raaklijn in 0 aan de tak van het eerste kwadrant verticaal is, m.a.w. dat de functie niet afleidbaar is in 0. Via impliciet afleiden vinden we $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, waaruit inderdaad blijkt dat de afgeleide niet bestaat voor $x=0$.

2 Bereken de lengte van een tak van de astroïde met de geziene technieken uit hoofdstuk 4 en leid hieruit de totale lengte van een astroïde af.

Onder de wortel staat: $1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=1+\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}$.

In het integratie-interval hieronder is $x>0$, zodat $\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}}=|x|^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}$. De lengte is dan:

$$L=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}}\left[\int_\varepsilon^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx\right]=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}}\left[\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)\right]=\frac{3a}{2}.$$

De totale lengte is bijgevolg 6a.

Opdracht 53 bladzijde 197

Voor deze opdracht heb je een grafisch rekentoestel of software nodig om de integraal te berekenen.

Een fabrikant van golfplaten wil uit vlakke stukken metaal gegolfde platen maken, met een breedte van 72 cm en een hoogte van 18 cm, zoals in de figuur wordt geïllustreerd. Hij kiest ervoor om als profiel een sinusoïde te nemen.

1 De golfplaat kan beschreven worden door de vergelijking:

A $y = 18 \sin\left(\frac{\pi}{36}x\right)$

B $y = 9 \sin\left(\frac{\pi}{144}x\right)$

C $y = 9 \sin\left(\frac{\pi}{36}x\right)$

D $y = 9 \sin\left(\frac{\pi}{18}x\right)$

E $y = 18 \sin\left(\frac{\pi}{18}x\right)$

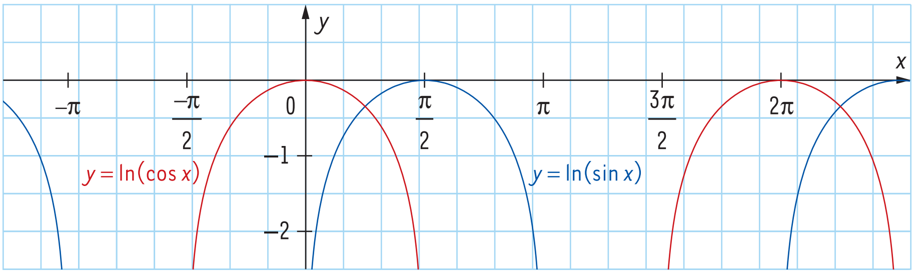
Uit de afbeelding blijkt dat de periode gelijk is aan 36 en de amplitude aan 9. Daaruit volgt dat $y = 9 \sin\left(\frac{2\pi}{36}x\right) = 9 \sin\left(\frac{\pi}{18}x\right)$. Antwoord D is dus correct.

2 Hoe moet je *b* kiezen opdat je, na plooien, een golfplaat van precies 72 cm zou verkrijgen?

Er moet gelden dat $\int_0^{72} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = b$ met $y' = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}x\right)$. Met een grafisch rekentoestel vinden we $b \approx 105{,}4$ cm.

Opdracht 54 bladzijde 198

De grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \ln(\sin x)$ en $g(x) = \ln(\cos x)$ vormen in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ een kromlijnige driehoek met de x-as.



Bereken de omtrek van deze kromlijnige driehoek. Maak daarbij, indien nodig, gebruik van een grafisch rekentoestel of software om de integraal te berekenen.

Het snijpunt van beide krommen kunnen we op basis van de eigenschappen van de sinus- en cosinusfunctie vinden, zonder berekeningen: $x = \frac{\pi}{4}$.

De afgeleide van $y = \ln(\sin x)$ is $y' = \cot x$ zodat de lengte van de bijbehorende kromme zijde gegeven wordt door $L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cot^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx.$

Deze integraal kan op verschillende manieren berekend worden, met verschillend ogende resultaten tot gevolg.

Door gebruik te maken van goniometrische formules (zie ook opdracht 52 in hoofdstuk 5) vinden we:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\, dx &= \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\, dx \\
&= -\int \frac{d\left(\cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}}\, dx + \int \frac{d\left(\sin \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}\, dx \\
&= \ln \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + c \\
&= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c
\end{aligned}$$

De lengte van een kromme zijde is dan:

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx = -\ln\left(\tan \frac{\pi}{8}\right)$$

Een andere manier om de integraal te berekenen is als volgt:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{-1}{1-u^2}du \qquad u = \cos x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du \qquad \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right), \text{ zie § 5.4.2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c$$

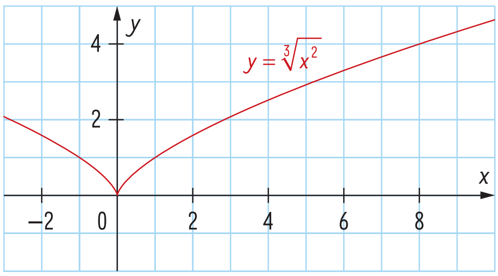
Met deze formule vinden we als lengte van een kromme zijde:

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

De totale omtrek van de kromlijnige driehoek is dan: $\frac{\pi}{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)$, wat ook geschreven kan worden als $\frac{\pi}{2} - 2\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$.

Opdracht 55 bladzijde 198

Beschouw de kromme met vergelijking $y = \sqrt[3]{x^2}$.



1 Verklaar waarom de geziene formule niet zomaar toegepast mag worden om de lengte van de kromme over [−1, 8] te berekenen.

Voor de afgeleide vinden we: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Ze is niet gedefinieerd voor x = 0. We zullen de integraal daarom via een limiet moeten berekenen.

2 Bereken met de gepaste methodes de lengte van de kromme over [−1, 8].

Het integrand is $\sqrt{1+(y')^2} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3|x|^{\frac{1}{3}}}$. De lengte van de kromme over [ε, 8] is:

$$L(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{8} \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}}{3x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{1}{18}\int_{\varepsilon}^{8}\sqrt{9x^{\frac{2}{3}}+4}\, d\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)$$

$$= \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\varepsilon}^{8}$$

$$= \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - \left(9\varepsilon^{\frac{2}{3}}+4\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

De lengte van de rechtertak is $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} L(\varepsilon) = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 8\right)$.

Voor de lengte van de linkertak maken we gebruik van de symmetrie van de grafiek en van de primitieve hierboven. De lengte is

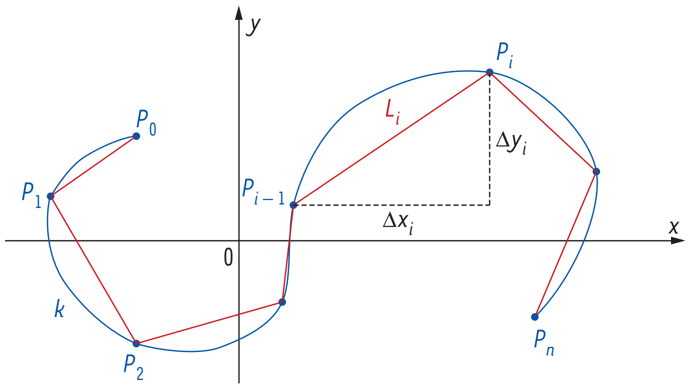
$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}}\left(\frac{1}{27}\left[\left(9x^{\frac{2}{3}} + 4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\varepsilon}^{1}\right) = \frac{1}{27}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}}\left(13^{\frac{3}{2}} - \left(9\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 4\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right)$$

Beide optellen geeft: $\frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} + 13^{\frac{3}{2}} - 16\right) = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} + 13\sqrt{13} - 16\right)$.

Opdracht 56 bladzijde 198

Beschouw een kromme k bepaald door een stel parametervergelijkingen $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

Om de lengte van die kromme te berekenen voor $t \in [a, b]$, verdelen we dit interval in n gelijke deelintervallen met lengte Δt. De intervalgrenzen noteren we als t_i, met $i = 0, 1, \ldots, n$, waarbij $t_0 = a$ en $t_n = b$. Met elke waarde t_i komt het punt P_i met coördinaat $\big(f(t_i), g(t_i)\big)$ overeen.



De lengte van de kromme tussen de punten P_{i-1} en P_i kunnen we benaderen door de lengte L_i van het lijnstuk $[P_{i-1}P_i]$.

1 Gebruik een redenering analoog aan die voor de lengte van een stuk functiegrafiek om te verantwoorden waarom de gevraagde lengte L berekend kan worden als

$$L = \int_a^b \sqrt{\big(f'(t)\big)^2 + \big(g'(t)\big)^2}\,dt.$$

(Men kan aantonen dat deze formule geldig is op voorwaarde dat f' en g' continu en nergens tegelijkertijd nul zijn in $[a, b]$ en op voorwaarde dat de kromme slechts één keer wordt doorlopen wanneer t van a naar b gaat.)

Een intuïtieve redenering zou als volgt kunnen gaan.

De lengte van de kromme tussen de punten P_{i-1} en P_i kan benaderd worden door de lengte L_i van het lijnstuk $[P_{i-1}\,P_i]$. Uit de stelling van Pythagoras volgt:

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$L_i = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

De som van al deze lengtes is een benadering van de gezochte lengte L. Wanneer het aantal deelintervallen toeneemt, zal de benadering steeds beter worden.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

Verder geldt: als $n \to +\infty$ zal $\Delta t \to 0$ en bijgevolg zal $\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_i} = f'(t_i)$ en $\frac{\Delta y_i}{\Delta t} \to \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_i} = g'(t_i)$.

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_i}\right)^2 + \left(\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_i}\right)^2}\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(t_i))^2 + (g'(t_i))^2}\,\Delta t$$

In het rechterlid staat nu een riemannsom en de limiet voor $n \to +\infty$ kan als een integraal berekend worden.

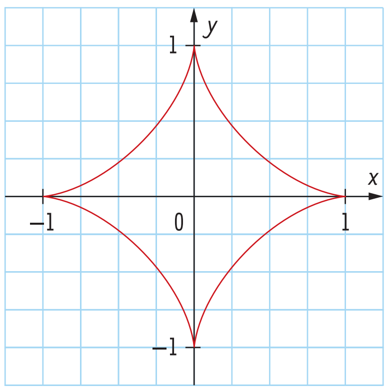
Besluit:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t\right) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt$$

2 De parametervergelijkingen $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ met $t \in [0, 2\pi]$

beschrijven een astroïde (zie ook opdracht 52).

Bereken de lengte van één tak en leid hieruit de totale lengte van deze astroïde af.



Voor een kwart van de astroïde vinden we:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-3\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2}\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\,dt \qquad \cos t \geqslant 0 \text{ en } \sin t \geqslant 0 \text{ als } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

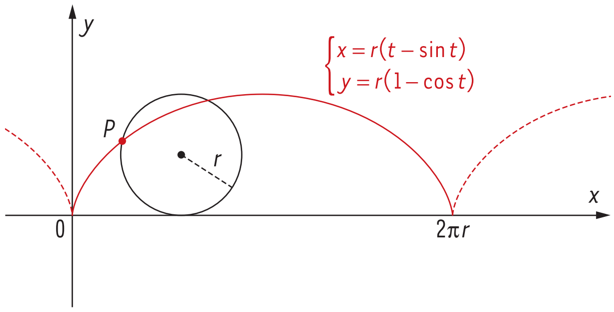
$$= 3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

De totale lengte van deze astroïde is bijgevolg 6.

3 Een cirkel met straal r rolt zonder glijden over de x-as. Op de cirkel is een punt P aangebracht. De baan die het punt P volgt wordt een **cycloïde** genoemd.

Bevindt het punt P zich voor $t = 0$ in de oorsprong, dan wordt de cycloïde beschreven door de parametervergelijkingen $x = r(t - \sin t)$ en $y = r(1 - \cos t)$. De eerste boog van de cycloïde ontstaat bij de eerste volledige omwenteling van de cirkel en dit komt overeen met $t \in [0, 2\pi]$.



Bereken de lengte van zo'n cycloïdeboog.

Het toepassen van de formule geeft:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt \\
&= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt \qquad\qquad \sin\frac{t}{2} \geqslant 0 \text{ voor } t \in [0, 2\pi] \\
&= 4r\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 8r
\end{aligned}
$$

Opdracht 57 bladzijde 200

Bereken de manteloppervlakte van het lichaam dat ontstaat door de kromme met vergelijking $y = \sqrt{x}$ te wentelen om de x-as over $[1, 2]$.

$$A = \int_1^2 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = \pi\int_1^2 \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{\pi}{6}\left[(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5^{\frac{3}{2}}\right)$$

Opdracht 58 bladzijde 200

De parabool met vergelijking $y^2 = 4ax$, met $a > 0$, wordt gewenteld om de x-as.

Bereken de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat, voor $0 \leqslant x \leqslant 3a$.

Expliciteren naar y geeft $y = 2\sqrt{ax}$ (we beperken ons tot het deel boven de x-as), zodat $y' = \sqrt{\frac{a}{x}}$.

De manteloppervlakte is: $A = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_\varepsilon^{3a} 2\pi \cdot 2\sqrt{ax} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(4\pi\sqrt{a}\int_\varepsilon^{3a} \sqrt{x+a}\,dx\right)$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]_\varepsilon^{3a}\right) = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left(8a\sqrt{a} - a\sqrt{a}\right) = \frac{56\pi a^2}{3}.$$

Opdracht 59 bladzijde 200

De kromme met vergelijking $y = x^3$, met $x \in [1, 2]$, wentelt om de x-as.

Bereken de manteloppervlakte van dit omwentelingslichaam.

$$A = \int_1^2 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{18}\int_1^2 \sqrt{1+9x^4}\,d(1+9x^4) = \frac{\pi}{27}\left[(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{\pi}{27}\left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right)$$

Opdracht 60 bladzijde 200

Een **catenoïde** ontstaat door de kettinglijn met vergelijking $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (met $a > 0$) te wentelen om de x-as.

Bereken de manteloppervlakte van de catenoïde bepaald door $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ met x in het interval $[-1, 1]$.

De afgeleide is $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Het integrand kan vereenvoudigd worden tot

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

De manteloppervlakte is

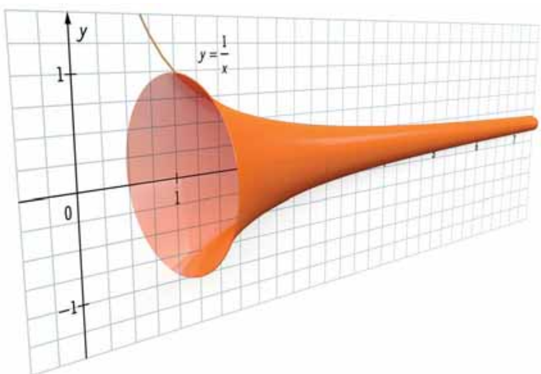
$$A = \int_{-1}^{1} 2\pi\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$$

Opdracht 61 bladzijde 200

De paradox van de verf

Beschouw de functie $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, getekend in een orthonormaal assenstelsel waarbij de eenheid 1 dm voorstelt.

1 Laat de grafiek wentelen om de x-as over het interval $[1, +\infty[$. Je verkrijgt een oneindig lang trechtervormig lichaam, ook wel 'de trompet van Torricelli'[(4)] genoemd.



Welke volume verf kun je in dat lichaam gieten?

In een verkorte notatie, zonder limieten, vinden we: $V = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \pi$.

De inhoud is dus iets meer dan 3 liter.

2 Je laat die verf vervolgens uit het lichaam lopen om er de mantel mee te schilderen. Met één liter verf kun je ongeveer 15 m^2 bedekken.
Zal je genoeg verf hebben?

Maak gebruik van de integraal

$$\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} + c.$$

De primitieve vind je o.a. als volgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx &= \int \frac{x^4+1}{x^3\sqrt{x^4+1}}dx \\ &= \int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}dx + \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^4+1}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}d(x^2) + \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}\cdot\frac{1}{x^5}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}d\left(1+\frac{1}{x^4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} + c\end{aligned}$$

Voor de manteloppervlakte vinden we, in een verkorte notatie:

$$A = \pi\left[\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right]_1^{+\infty} = +\infty$$

Het blijkt dus niet mogelijk de cilinder te verven met de verf die erin zat, hoe dun de verflaag ook zou zijn.

Opdracht 62 bladzijde 201

Je laat de parabool $p \Leftrightarrow y^2 = 4x$ wentelen om de x-as. Bepaal de waarde van k opdat de manteloppervlakte over het interval $[0, k]$ gelijk zou zijn aan 5.

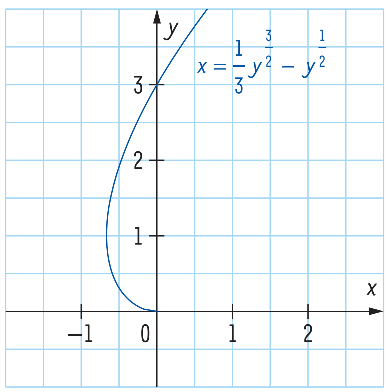
Uit $y = 2\sqrt{x}$ volgt $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Voor de manteloppervlakte vinden we:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\int_{\varepsilon}^{k} 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx \right) \\
&= 4\pi \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\int_{\varepsilon}^{k} \sqrt{x+1}\,dx \right) \\
&= 4\pi \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \left(\frac{2}{3} \left((k+1)^{\frac{3}{2}} - (\varepsilon+1)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{8\pi}{3} \left((k+1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Deze waarde is gelijk aan 5 a.s.a. $k = \left(\dfrac{15}{8\pi} + 1 \right)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Opdracht 63 bladzijde 201

De kromme met vergelijking $x = \dfrac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$ wordt gewenteld om de y-as, met $y \in [0, 3]$.



Bereken de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

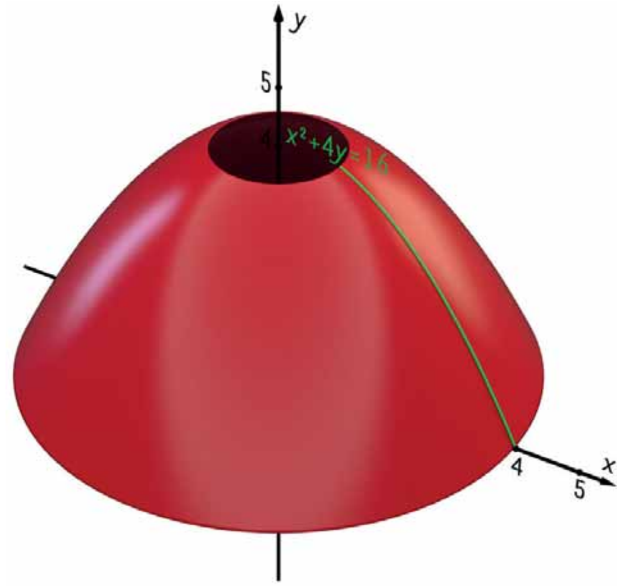
Aangezien $\dfrac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \leqslant 0$ voor $y \in [0, 3]$, werken we met het tegengestelde voorschrift om de manteloppervlakte te berekenen.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^3 2\pi \left(-\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right)^2}\,dy \\
&= \int_0^3 2\pi \left(-\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right)^2}\,dy \\
&= \int_0^3 2\pi \left(-\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right) dy \\
&= \int_0^3 \pi \left(-\frac{1}{3} y^2 + \frac{2}{3} y + 1 \right) dy \\
&= \pi \left[-\frac{y^3}{9} + \frac{y^2}{3} + y \right]_0^3 \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Opdracht 64 bladzijde 201

Een kromme heeft als vergelijking $x^2 + 4y = 16$. Het deel met $x \in [1, 4]$ wordt gewenteld om de y-as.

Bereken de manteloppervlakte van dit omwentelingslichaam.



Het deel van de grafiek rechts van de y-as heeft als vergelijking $x = 2\sqrt{4-y}$.

De grenswaarde $x = 1$ komt overeen met $y = \dfrac{15}{4}$ en $x = 4$ komt overeen met $y = 0$.

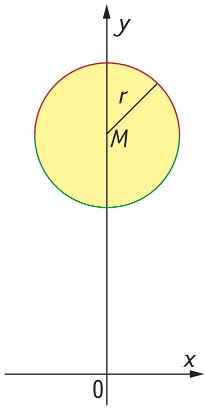
Bijgevolg kan de manteloppervlakte berekend worden als:

$$A = \int_0^{\frac{15}{4}} 2\pi \cdot 2\sqrt{4-y} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{4-y}}\right)^2}\,dy = 4\pi \int_0^{\frac{15}{4}} \sqrt{5-y}\,dy$$

$$= 4\pi \left[-\frac{2}{3}(5-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{15}{4}} = \frac{35\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Opdracht 65 bladzijde 202

Beschouw een torus die ontstaat door een cirkel met straal r en middelpunt $M(0, R)$ (met $R > r$) te wentelen om de x-as.



1 Stel een formule op om de manteloppervlakte van de torus te berekenen als een combinatie van integralen.

De bovenste halve cirkel heeft als vergelijking $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ en voor de onderste is het $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$.
De bijbehorende afgeleide is $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Beide manteloppervlakten moeten *opgeteld* worden, dus is de te berekenen integraal:

$$A = \int_{-r}^{r} 2\pi\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx + \int_{-r}^{r} 2\pi\left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2 \cdot \left\{\int_{0}^{r} 2\pi\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx + \int_{0}^{r} 2\pi\left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx\right\}$$

2 Door de verschillende integralen te combineren tot één integraal, kun je heel wat rekenwerk besparen.
Toon aan dat die integraal gelijk is aan $8\pi r R\left[\operatorname{Bgsin}\dfrac{x}{r}\right]_0^r$ en bereken tot slot de totale manteloppervlakte.

Samennemen van beide integralen geeft:

$$A = 4\pi \int_0^r 2R\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 8\pi R \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 8\pi R r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$= 8\pi R r\left[\operatorname{Bgsin}\frac{x}{r}\right]_0^r$$

$$= 4\pi^2 R r$$

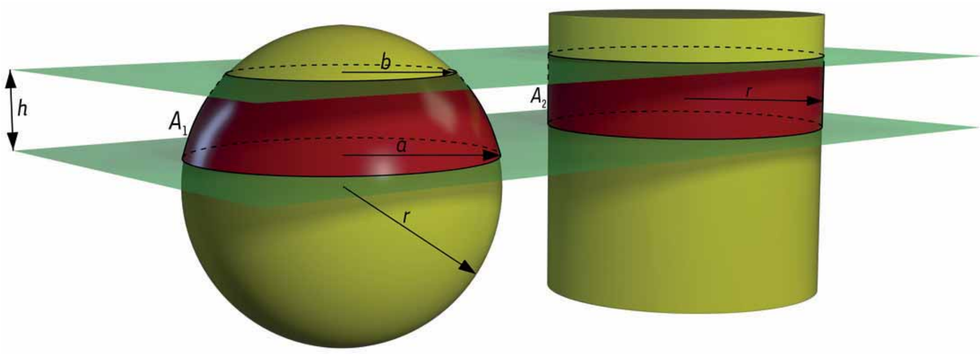
Bemerk dat ook voor oppervlakten een regel van Guldin of Pappus geldt (zie opdracht 5). De manteloppervlakte $4\pi^2 Rr$ van de torus kan geïnterpreteerd worden als de manteloppervlakte $2\pi r \cdot 2\pi R$ van een cilinder met straal r en hoogte $2\pi R$.

Opdracht 66 bladzijde 202

De 'hoedendoos-stelling' van Archimedes

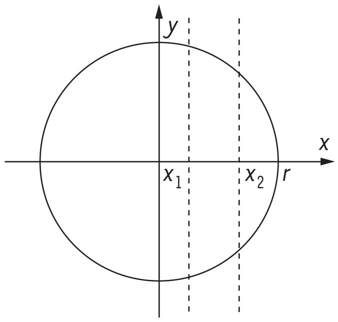
Beschouw een bol met straal r. Daaruit wordt d.m.v. twee evenwijdige vlakken een zogenaamde **bolzone** met hoogte h en stralen a en b gesneden.

Indien je nu die bol in een cilindrische 'hoedendoos' steekt, die dezelfde straal heeft als de bol, dan is de manteloppervlakte van de bolzone gelijk aan deze van de cilinder tussen dezelfde snijvlakken. Met de symbolen van de tekening hieronder: $A_1 = A_2$.



Deze stelling was door Archimedes al gekend, lang vóór er van integralen sprake was.

1 Bereken met integralen de oppervlakte van een bolzone van een bol met straal r en met middelpunt in de oorsprong, begrensd door twee vlakken loodrecht op de x-as ter hoogte van $x = x_1$ en $x = x_2$.



Bevestigt dit de stelling van Archimedes?

Aangezien de bovenste halve cirkel als vergelijking

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ heeft, vinden we:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r\,dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi rh$$

Hiermee is de stelling van Archimedes aangetoond.

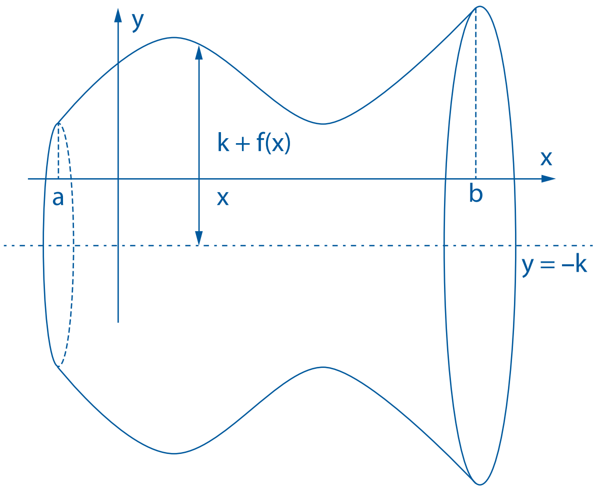
2 Geef op basis van de stelling van Archimedes een formule voor de oppervlakte van een bol.

Voor een bol is de 'hoogte' van de bolzone 2r, zodat de oppervlakte $4\pi r^2$ is.

Opdracht 67 bladzijde 203

Beschouw een functie f die afleidbaar is en positief in $[a, b]$.

Stel een formule op voor de manteloppervlakte van het lichaam dat ontstaat wanneer de kromme met vergelijking $y = f(x)$ rond de as met vergelijking $y = -k$ (met $k > 0$) wordt gewenteld over het interval $[a, b]$.



De straal van een wentelend stukje van de grafiek wordt k + f(x), terwijl het apothema onveranderd blijft. Immers:
$\dfrac{d}{dx}(k + f(x)) = \dfrac{d}{dx}f(x)$. Daarom:

$$A = \int_a^b 2\pi(k + f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Een andere benadering bestaat erin de grafiek van f verticaal te verschuiven volgens de vector $\vec{v}(0, k)$ en de nieuwe grafiek te wentelen om de x-as.

Opdracht 68 bladzijde 203

We beschouwen de sinusoïde met vergelijking $y = \sin x$ over het interval $[0, \pi]$.

1 Bereken de manteloppervlakte van het lichaam dat je verkrijgt door dit stuk van de sinusoïde te wentelen om de x-as.

$$A = \int_0^\pi 2\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2}\,du$$

De integraal $\int\sqrt{1 + x^2}\,dx$ kan berekend worden m.b.v. een combinatie van partiële integratie en een klassieke kunstgreep bij irrationale functies. De volgorde waarin je beide toepast, maakt niet uit. Hieronder beginnen we met de kunstgreep.

$$\int\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int\frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}dx$$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}dx + \int\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}_{v'}dx$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + \left(x\cdot\sqrt{1 + x^2} - \int\sqrt{1 + x^2}\,dx\right)$$

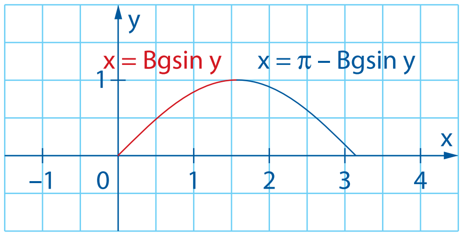
De te berekenen integraal komt terug in het rechterlid. Overbrengen naar het linkerlid en delen door 2 levert:

$$\int\sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1 + x^2} + c$$

De manteloppervlakte is:

$$A = \int_0^{\pi} 2\pi \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,du$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}\ln\left| u + \sqrt{1+u^2} \right| + \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} \right]_{-1}^{1}$$
$$= \pi\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{2}\right)$$
$$= \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 2\sqrt{2}\right)$$

2 Welke oppervlakte krijg je bij wentelen om de y-as? Bereken m.b.v. je rekentoestel of computer.



Bij wenteling om de y-as komt de grafiek overeen met twee functies: $x = \text{Bgsin } y$ en $x = \pi - \text{Bgsin } y$. Deze laatste ontstaat immers door $x = \text{Bgsin } y$ eerst $\frac{\pi}{2}$ eenheden naar links te verschuiven $\left(x = \text{Bgsin } y - \frac{\pi}{2}\right)$, vervolgens te spiegelen om de y-as $\left(x = -\text{Bgsin } y + \frac{\pi}{2}\right)$ en tot slot $\frac{\pi}{2}$ eenheden naar rechts te verschuiven $\left(x = \left(-\text{Bgsin } y + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = -\text{Bgsin } y + \pi\right)$.

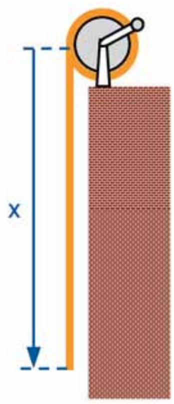
De oppervlakte is:

$$A = \int_0^1 2\pi \,\text{Bgsin } y \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{1-y^2}}\,dy + \int_0^1 2\pi(\pi - \text{Bgsin } y) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{1-y^2}}\,dy$$
$$= 2\pi^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{2-y^2}{1-y^2}}\,dy$$
$$\approx 37{,}7$$

Opdracht 69 bladzijde 204

Een kabel met uniforme dichtheid hangt volledig uitgerold langs een gebouw. Hij is 40 m lang en weegt 240 N.

Hoeveel arbeid moet er geleverd worden om dit touw 10 m omhoog te trekken?



Het touw heeft een gewicht per lengte-eenheid $\lambda = 6$ (N/m). Het gewicht G(x) van een stuk van x meter is dus $G(x) = 6x$ (N). Dit is de kracht die overwonnen moet worden om het touw op te tillen.

De te leveren arbeid kan, op het teken na, berekend worden als

$W = \int_{40}^{30} 6x\,dx = -2100$ (J).

Er moet dus een arbeid van 2100 joule geleverd worden.

Opdracht 70 bladzijde 204

Een zandzakje weegt oorspronkelijk 40 kg en wordt met een constante snelheid 15 m omhooggehaald. Tijdens het ophalen verliest het echter voortdurend zand: wanneer het helemaal boven is, is de helft van het zand verdwenen. De massa van het touw is verwaarloosbaar.

Hoeveel arbeid moet worden verricht om het zandzakje 15 m hoog te tillen?

De massa m (in kg) in functie van de hoogte h (in m) wordt gegeven door de formule

$m = 40 - \dfrac{20}{15}h = 40 - \dfrac{4}{3}h.$

Afgerond tot op 1 joule vinden we voor de arbeid: $W = \displaystyle\int_0^{15} \left(40 - \frac{4}{3}h\right) g \; dh \approx 4415$ (J).

Er moet ongeveer 4415 joule arbeid geleverd worden.

Opdracht 71 bladzijde 204

Een aquarium is 0,8 m lang, 0,6 m breed en 0,6 m hoog. Het is tot op 0,05 m van de bovenrand gevuld met water.

Bereken de nettokracht, uitgeoefend door het water, op elke zijwand van het aquarium.

Hieronder gebruiken we $\rho = 1000$ kg/m^2 en $g = 9{,}81$ m/s^2.

Op een smalle zijwand (breedte 0,6 m) is de nettokracht $\displaystyle\int_0^{0{,}55} h\rho g \; 0{,}6 \; dh \approx 890$ (N).

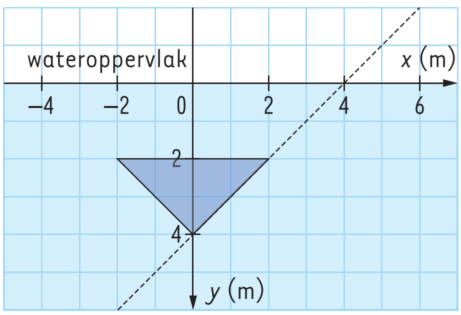
Aangezien een brede zijwand een oppervlakte heeft die 4/3 keer die van een zijwand is, is ook de kracht 4/3 keer zo groot: $890 \cdot \dfrac{4}{3} \approx 1187$.

Op de zijwanden wordt dus een kracht van 890 N of 1187 N uitgeoefend.

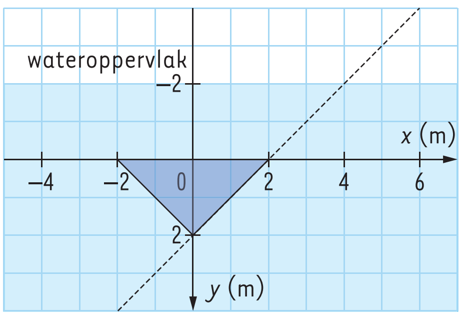
Opdracht 72 bladzijde 204

Een plaat heeft de vorm van een rechthoekige, gelijkbenige driehoek en is volledig ondergedompeld in water. Bereken de kracht op de plaat veroorzaakt door de hydrostatische druk, door gebruik te maken van het gegeven assenstelsel.

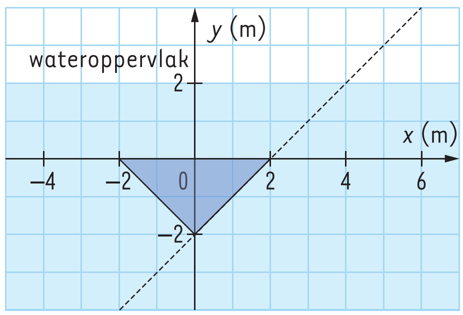
1



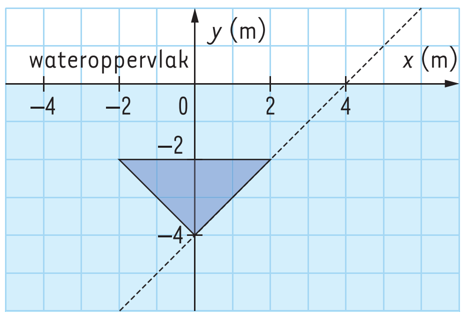
2



3



4



In het overzicht hieronder wordt telkens de breedte b (in m) van de plaat gegeven, in functie van de diepte y (in m), gevolgd door de integraal die berekend moet worden om de totale kracht op de plaat te berekenen.

1. $b(y) = 2(4 - y)$ $\qquad F = \int_2^4 y\,\rho\,g\,2(4-y)\,dy$
2. $b(y) = 2(2 + y)$ $\qquad F = \int_{-2}^0 (2-y)\,\rho\,g\,2(2+y)\,dy$
3. $b(y) = 2(2 - y)$ $\qquad F = \int_0^2 (y+2)\,\rho\,g\,2(2-y)\,dy$
4. $b(y) = 2(4 + y)$ $\qquad F = \int_{-4}^{-2} -y\,\rho\,g\,2(4+y)\,dy$

Alle integralen geven dezelfde waarde: 104 640 N.

Opdracht 73 bladzijde 205

Een voorwerp beweegt op een rechte lijn. Op het ogenblik $t = 0$ (t in s) is zijn positie 30 m. Zijn snelheid neemt af volgens het voorschrift $v(t) = 20 - 2t$ (v in m/s).

1 Wat is zijn positieverandering na 10 seconden? Wat is zijn positie dan?

De positieverandering is $\Delta x = \int_0^{10} (20 - 2t)\,dt = 100$ (m).

De positie is dan $x(10) = 130$ (m).

2 Wat is zijn positieverandering tussen $t = 0$ en $t = 20$? Wat is de afgelegde weg gedurende die 20 seconden?

$\Delta x = \int_0^{20} (20 - 2t)\,dt = 0$ (m): het voorwerp bevindt zich terug in de startpositie.

Splitsen we de beweging op in een deel met positieve en met negatieve snelheid, dan vinden we de afgelegde weg: $\int_0^{10} (20 - 2t)\,dt - \int_{10}^{20} (20 - 2t)\,dt = 200$ (m).

3 Geef zijn positie in functie van de tijd.

$x(t) = 20t - t^2 + c$ met $x(0) = 30$. Daaruit volgt: $x(t) = 20t - t^2 + 30$ (in meter).

4 Wat is zijn versnelling in functie van de tijd?

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -2$ (m/s^2). De versnelling (vertraging, in dit geval) is constant.

Opdracht 74 bladzijde 205

De eenparig versnelde beweging m.b.v. onbepaalde integralen

Een voorwerp bevindt zich voor $t = 0$ op de positie x_0 en heeft op dat ogenblik een snelheid v_0. Het ondervindt op elk tijdstip t een constante versnelling $a(t) = a$, waarbij a constant is. Men spreekt van een **eenparig versnelde beweging**.

1 Stel m.b.v. onbepaalde integralen het voorschrift op voor $v(t)$.

$v(t) = \int a\,dt = at + c$. Uit $v(0) = v_0$ volgt: $v(t) = at + v_0$.

2 Stel met integralen eveneens het voorschrift op voor $x(t)$.

$x(t) = \int (at + v_0)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + c$. Aangezien $x(0) = x_0$, vinden we als voorschrift:

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$.

3 Wat worden deze voorschriften wanneer $a = 0$? Men spreekt dan van een **eenparig rechtlijnige beweging**.

Voor $a = 0$ (m/s^2) worden de vergelijkingen: $v(t) = v_0$ en $x(t) = v_0t + x_0$.

Opdracht 75 bladzijde 205

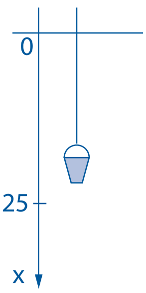
Een emmer met een gewicht van 18 N hangt aan een touw van verwaarloosbaar gewicht en wordt gebruikt om water op te halen, dat 25 m diep in een waterput te vinden is. De emmer wordt vol water opgehaald met een snelheid van 60 cm/s en weegt bij zijn vertrek 180 N. Maar er is een gaatje in de bodem van de emmer, waardoor hij water verliest a rato van 0,9 N/s.

Bereken de vereiste arbeid om de emmer boven te halen.

Het gewicht van de emmer in functie van de tijd wordt gegeven door $G(t) = 180 - 0{,}9t$ (N).

Het duurt $\frac{25}{0{,}6} = \frac{125}{3} \approx 41{,}7$ seconden om de emmer boven te halen; de emmer weegt na die tijd nog $G(41{,}7) = 142{,}47$ newton en bevat op het einde dus nog altijd water.

Om $W = \int_{x_1}^{x_2} G(x)\,dx$ te kunnen berekenen, met x de positie van de emmer, moeten we een verband tussen t en x vinden. Met de x-as zoals hiernaast, is het verband $x = 25 - 0{,}6t$.



Om de arbeid te berekenen, kunnen we nu G(t) schrijven in x, ofwel dx schrijven in t.

- Methode 1

  Uit $x = 25 - 0{,}6t$ volgt dat $t = \frac{5}{3}(25 - x)$ zodat $G(x) = 180 - 0{,}9 \cdot \frac{5}{3}(25 - x) = 1{,}5x + 142{,}5$.

  De arbeid is dan $W = \int_{25}^{0} (1{,}5x + 142{,}5)\,dx \approx -4031$ (J).

- Methode 2

  De arbeid is $W = \int_{0}^{\frac{125}{3}} (180 - 0{,}9t)\,d(25 - 0{,}6t)$, waarbij de grenzen nu begin- en eindtijden zijn: wanneer $x = 25$ is $t = 0$ en wanneer $x = 0$ is $t = \frac{125}{3}$. Ook deze integraal levert, afgerond, 4031 J op.

Opdracht 76 bladzijde 205

Een positieve en een negatieve elektrische lading trekken elkaar aan, twee positieve of twee negatieve ladingen stoten elkaar af. Volgens de wet van Coulomb[(6)] wordt deze kracht gegeven door:

$$F = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}$$

Hierin is $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2 de constante van Coulomb, zijn q_1 en q_2 de (absolute waarden van de) ladingen (in C) en is r de onderlinge afstand tussen de geladen deeltjes (in m), die als punten worden beschouwd.

De kern van een waterstofatoom bevat één proton; eromheen cirkelt een elektron op een afstand van ongeveer $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m. De lading van een proton is $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, deze van een elektron $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

1 Welke arbeid is nodig om het elektron op een twee keer zo grote afstand van de kern te brengen?

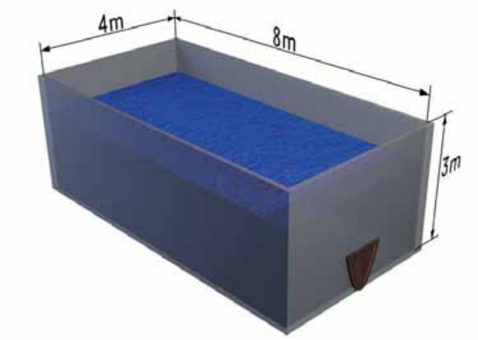
$$W = \int_{5,3\cdot10^{-11}}^{10,6\cdot10^{-11}} 9 \cdot 10^9\,\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{r^2}\,dr = 2{,}304 \cdot 10^{-28}\left[-\frac{1}{r}\right]_{5,3\cdot10^{-11}}^{10,6\cdot10^{-11}} = 2{,}17 \cdot 10^{-18}\ \text{(J)}.$$

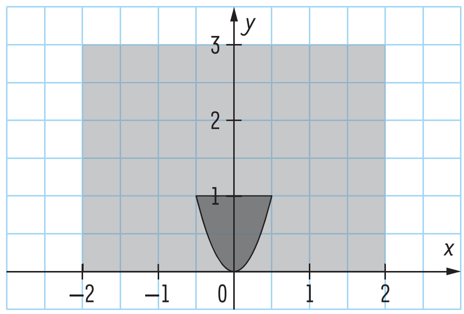
2 Welke arbeid is nodig om het elektron van het atoom los te rukken (‘op oneindig’ te brengen)?

De integraal blijft dezelfde, enkel de bovengrens wordt $+\infty$ (de limietberekening wordt niet expliciet vermeld): $2{,}304 \cdot 10^{-28}\left[-\frac{1}{r}\right]_{5,3\cdot10^{-11}}^{+\infty} = 4{,}35 \cdot 10^{-18}$ (J).

Opdracht 77 bladzijde 206

Een tank is 8 m lang, 4 m breed en 3 m hoog en kan gevuld worden met water. Om het water te laten weglopen is een luik voorzien. Het heeft onderaan de vorm van een parabool en is op een hoogte van 1 meter horizontaal begrensd, zoals weergegeven op de figuur rechts. In het gegeven assenstelsel is de vergelijking van de parabool $y = 4x^2$.





1 Bereken de kracht t.g.v. de hydrostatische druk op het luik wanneer de tank helemaal vol is.

De breedte b van het luik op een hoogte y wordt gegeven door het voorschrift

$b(y) = 2\frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$ met $y \in [0, 1]$.

De totale kracht is (met $\rho = 1000$ kg/m^3 en $g = 9{,}81$ m/s^2):

$$F = \int_0^1 (3 - y)\,\rho\,g\sqrt{y}\,dy = \rho\,g\left[2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{5}\,\rho\,g \approx 15\,696\ \text{(N)}.$$

2 Op $t = 0$ wordt de lege tank gevuld met een debiet van 5 l/s. Door een ontwerpfout kan het luik maar een kracht van 10 000 N verdragen. Bij een hogere druk barst het open. Bereken het tijdstip, in uren, minuten en seconden, waarop het luik het begeeft.

Stel H de hoogte van het water wanneer het luik het begeeft. Er geldt dan:

$$\int_0^1 (H-y)\,\rho\, g\sqrt{y}\,dy = 10\,000 \Leftrightarrow \rho\, g\left[\frac{2H}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \rho\, g\left(\frac{2H}{3} - \frac{2}{5}\right) = 10\,000$$

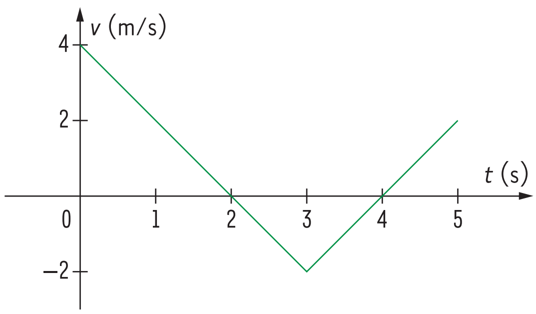
$$\Leftrightarrow H = \frac{15\,000}{\rho\, g} + \frac{3}{5} \approx 2{,}129051988$$

Stel h(t) de hoogte (in m) van het water in functie van de tijd t (in s), dan betekent een debiet van $5 \cdot 10^{-3}$ m^3/s dat $8 \cdot 4 \cdot h(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot t$ of dus dat $h(t) = \dfrac{5 \cdot 10^{-3}}{32}t$. Uit h(t) = H volgt dat t = 13 625,93272. Het luik begeeft het na 3 uur 47 minuten en 6 seconden.

(Hierbij hebben we verondersteld dat alle gegevens voldoende nauwkeurig gemeten zijn om de tijd tot op de seconde te kunnen berekenen.)

Opdracht 78 bladzijde 206

De grafiek stelt de snelheid voor van een bal die een rechtlijnige beweging uitvoert:



Op welk(e) tijdstip(pen) is de bal het verst verwijderd van zijn positie op het tijdstip $t = 0$ s?

A $t = 2$ s **B** $t = 3$ s **C** $t = 4$ s **D** $t = 5$ s **E** $t = 2$ s en $t = 4$ s

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, juli 2012)

x(t) bereikt een relatief maximum wanneer x′(t) = v(t) overgaat van + naar –. Op de grafiek lezen we af dat dit gebeurt voor t = 2.

Vanaf t = 4 neemt de afstand van de bal t.o.v. zijn beginpositie opnieuw toe, maar de toename van de positie $\int_4^5 v(t)\,dt$ is minder groot dan de afname $\int_2^4 v(t)\,dt$.

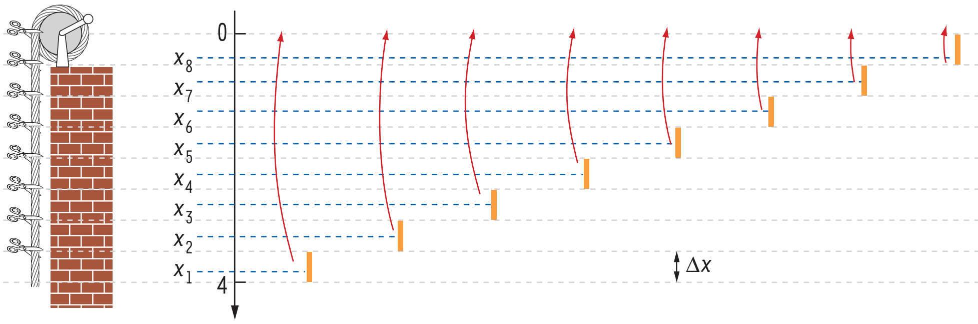
Het juiste antwoord is dus A.

Opdracht 79 bladzijde 207

Een andere methode om arbeid te berekenen

Voorbeeld

We passen deze tweede methode toe op het vraagstuk uit de theorie: een touw weegt 3 kg per strekkende meter en is 4 meter afgerold. Hoeveel arbeid moet geleverd worden om het touw helemaal op te rollen?
In plaats van de beweging op te splitsen in deelbewegingen, kun je ook het touw opsplitsen in kleine stukjes met lengte Δx die je individueel tot helemaal boven brengt.



Het volledige touw werd hierboven opgesplitst in 8 stukjes met lengte $\Delta x = \frac{4}{8}$ m $= \frac{1}{2}$ m, die alle een deelmassa $m = 3 \cdot \Delta x = 1{,}5$ kg hebben. Het i-de stukje touw moet over een afstand x_i verplaatst worden, bij benadering. Hierbij is x_i lukraak gekozen in het i-de interval. Dit vergt een arbeid W_i.

De te leveren arbeid W kan daarom benaderd worden door:

$$W \approx \sum_{i=1}^{8} W_i = \sum_{i=1}^{8} \underbrace{\underbrace{3 \cdot \Delta x}_{\text{deelmassa}} \cdot g}_{\substack{\text{deelgewicht} \\ (=\text{kracht})}} \cdot x_i$$

Verdelen we het touw in n stukjes, dan is $\Delta x = \frac{4}{n}$. Voor $n \longrightarrow +\infty$ krijgen we tenslotte:

$$W = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} 3 \cdot \Delta x \cdot g \cdot x_i \right) = \int_0^4 3\, gx \, dx \approx 235$$

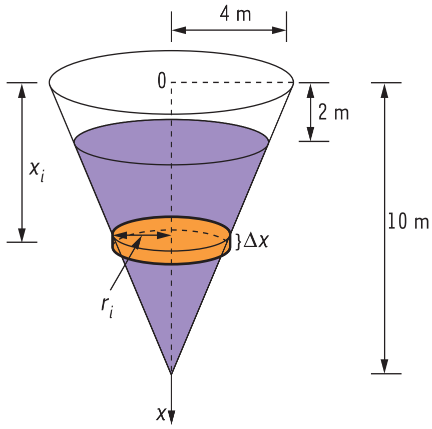
Bemerk dat de integraal formeel identiek is aan deze van de eerste methode, maar dat de betekenis van de gebruikte symbolen verschillend is.

Vandaar het belang van een duidelijke tekening, waarop alle optredende symbolen aangegeven staan.

Pas deze methode nu toe op de onderstaande situatie.

Een reservoir heeft de vorm van een omgekeerde kegel van 10 m hoog, met een straal van 4 m. Het is tot 8 m hoogte gevuld met water. Doorheen de vragen hieronder moet je berekenen hoeveel arbeid verricht moet worden om al het water over de rand van het reservoir te pompen.

1 De tekening hiernaast suggereert dat we de tweede methode om arbeid te berekenen zullen toepassen: we delen de hele massa water op in *n* kleine deelmassa's, die we over een grote afstand verplaatsen.
Vind een formule voor de straal r_i op een diepte x_i en leid daaruit het volume af van een cilindrisch waterplakje met dikte Δx.



M.b.v. gelijkvormige driehoeken vinden we dat

$\dfrac{r_i}{10 - x_i} = \dfrac{4}{10}$ waaruit volgt dat $r_i = \dfrac{2}{5}(10 - x_i)$. Het

volume V_i van het i-de cilindrisch plakje is bijgevolg

$$V_i = \pi r_i^2\,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i)^2\,\Delta x.$$

2 Bereken de massa en vervolgens het gewicht van dat plakje.

De massa van het plakje is $m_i = V_i \cdot \rho = 160\pi(10 - x_i)^2\Delta x$ en het gewicht is $G_i = m_i g = 160 g\pi(10 - x_i)^2\Delta x$.

3 Met welke riemannsom kun je de totale benodigde arbeid *W* benaderen als je het volume in *n* plakjes verdeelt?

$$W \approx \sum_{i=1}^{n}(G_i \cdot x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(160 g\pi(10 - x_i)^2\,\Delta x\right) \cdot x_i\right]$$

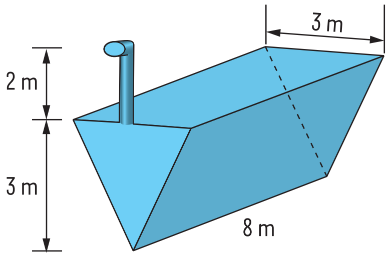
4 Bereken die arbeid nu exact d.m.v. een integraal.

$$W = \int_2^{10} 160 g\pi(10 - x)^2\,x\,dx \approx 3{,}37 \cdot 10^6 \text{ (J).}$$

Er moet dus ongeveer $3{,}37 \cdot 10^6$ joule geleverd worden om al het water over de rand van het reservoir te pompen.

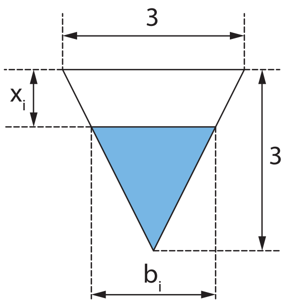
Opdracht 80 bladzijde 208

Het reservoir in de afbeelding heeft de vorm van een prisma met als dwarsdoorsnede een gelijkbenige driehoek. Het is gevuld met water. We willen de arbeid berekenen die nodig is om het water via de uitlaat bovenaan eruit te pompen.



1 Benader de arbeid eerst door een riemannsom. Geef de symbolen die je gebruikt duidelijk aan op een tekening.

We splitsen het watervolume op in horizontale plakjes met dikte (hoogte) Δx op een diepte x_i, die over een verticale afstand $(x_i + 2)$ verplaatst moeten worden (eens zo'n plakje ter hoogte van de 'mond' van de uitlaat is gebracht, loopt het vanzelf naar buiten, zonder dat dit extra arbeid kost).



De lengte van elk plakje is 8 m; de breedte b_i varieert met de hoogte. M.b.v. gelijkvormige driehoeken vinden we dat

$\dfrac{b_i}{3 - x_i} = \dfrac{3}{3}$, m.a.w. $b_i = 3 - x_i$. Het volume van het i-de plakje is $V_i = 8 \cdot b_i \cdot \Delta x = 8(3 - x_i)\Delta x$.

De totale vereiste arbeid kan benaderd worden door:

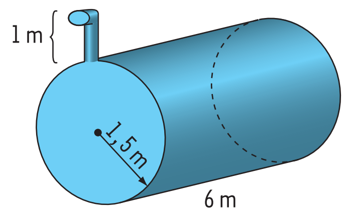
$$W \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{V_i \cdot \rho \cdot g}_{G_i} \cdot \underbrace{(x_i + 2)}_{\text{afstand}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(8(3 - x_i)\Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot (x_i + 2)\right)$$

2 Bereken de arbeid nu exact met een integraal.

$$W = 8\rho g\int_0^3 (6 + x - x^2)\,dx \approx 1{,}06 \cdot 10^6 \text{ (J)}.$$

Er is ongeveer $1{,}06 \cdot 10^6$ joule nodig om de tank leeg te pompen.

Opdracht 81 bladzijde 208

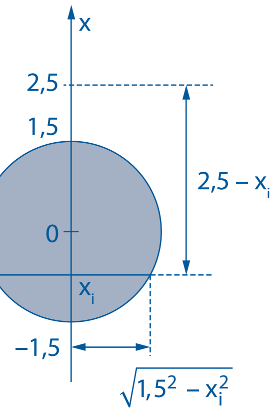


Bereken hoeveel energie nodig is om de mazouttank hiernaast leeg te pompen via de uitlaat bovenaan.

Geef daartoe eerst een benadering van die arbeid d.m.v. een riemannsom. Zorg dat de symbolen die je daarvoor gebruikt terug te vinden zijn op een tekening.

Stel daarna de integraal op.

De massadichtheid van stookolie is 920 kg/m^3.



We verdelen de stookolie in horizontale plakjes met dikte Δx, die verticaal worden verplaatst tot de mond van de uitlaat.

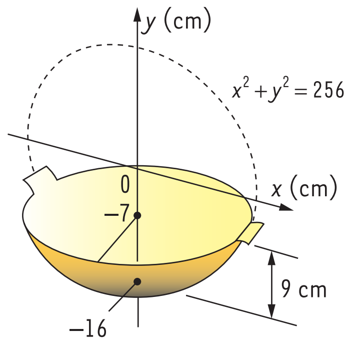
Met het assenstelsel hiernaast is de breedte van een plakje op verticale positie x_i gegeven door $b_i = 2\sqrt{1{,}5^2 - x_i^2}$. Het volume van elk plakje is dan $V_i = 6 \cdot b_i \cdot \Delta x = 12\sqrt{1{,}5^2 - x_i^2}\,\Delta x$. De vereiste arbeid wordt benaderd door:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n}\Bigg(\underbrace{V_i \cdot \rho \cdot g}_{G_i} \cdot \underbrace{(2{,}5 - x_i)}_{\text{afstand}}\Bigg) = \sum_{i=1}^{n}\left(12\sqrt{1{,}5^2 - x_i^2}\,\Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot (2{,}5 - x_i)\right)$$

De exacte waarde van de arbeid is:

$$W = 12\rho g\int_{-1{,}5}^{1{,}5} \sqrt{1{,}5^2 - x^2}\,(2{,}5 - x)\,dx \approx 9{,}57 \cdot 10^5 \text{ (J)}$$ (de integraal berekenden we m.b.v. een rekentoestel).

Opdracht 82 bladzijde 209



De wokpan hiernaast is een deel van een bol met straal 16 cm en heeft een diepte van 9 cm.

Bereken de inhoud van die pan.

$$V = \int_{-16}^{-7} \pi(256 - y^2)\,dy =$$

$$= \pi\left[256y - \frac{y^3}{3}\right]_{-16}^{-7} = 1053\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Opdracht 83 bladzijde 209

We wentelen het gebied begrensd door de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$, de y-as en de rechte met vergelijking $x = 3$ rond de y-as.

De inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat, is gelijk aan

A 4 **B** $\frac{244\pi}{3}$ **C** $\frac{472\pi}{3}$

D $\frac{500\pi}{3}$ **E** geen van de voorgaande

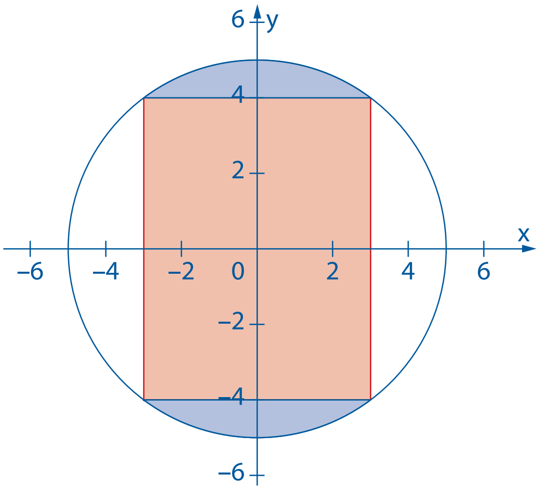
(Bron © ACTM State Calculus Competition, 2012)

Het lichaam kan opgesplitst worden in een cilinder met straal 3 en hoogte 8 $\left(= 2\sqrt{25 - 3^2}\right)$ en twee bolkappen met hoogte 1.

Het volume is:

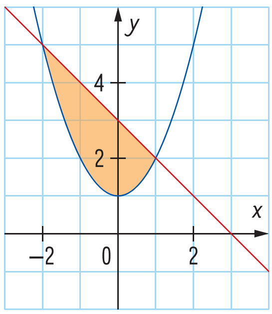
$\pi \cdot 3^2 \cdot 8 + 2 \cdot \int_4^5 \pi(25 - y^2)\,dy = \frac{244\pi}{3}$.

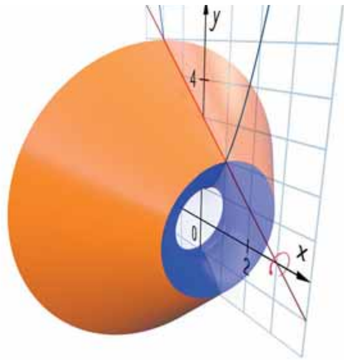
Het juiste antwoord is B.

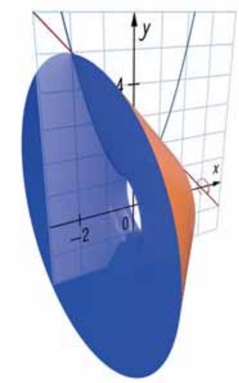


Opdracht 84 bladzijde 209

Het gebied begrensd door de krommen met vergelijking $y = x^2 + 1$ en $y = -x + 3$ wordt om de x-as gewenteld.







Bereken het volume van dit lichaam.

Beide grafieken snijden elkaar voor $x = -2$ en $x = 1$. Het volume is:

$$V = V_1 - V_2 = \int_{-2}^{1} \pi(-x+3)^2\,dx - \int_{-2}^{1} \pi(x^2+1)^2\,dx = 39\pi - \frac{78}{5}\pi = \frac{117\pi}{5}$$

Opdracht 85 bladzijde 210

Beschouw het stuk van de sinusfunctie in het interval $[0, 2\pi]$.

1 Wat is het volume van het lichaam dat je verkrijgt als je de grafiek om de x-as wentelt?

We maken gebruik van de formule $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ om $\sin^2 x$ om te zetten:

$$V = \int_0^{2\pi} \pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi^2.$$

2 Schets het lichaam dat ontstaat bij wenteling om de rechte met vergelijking $y = 1$. Wat is het volume?

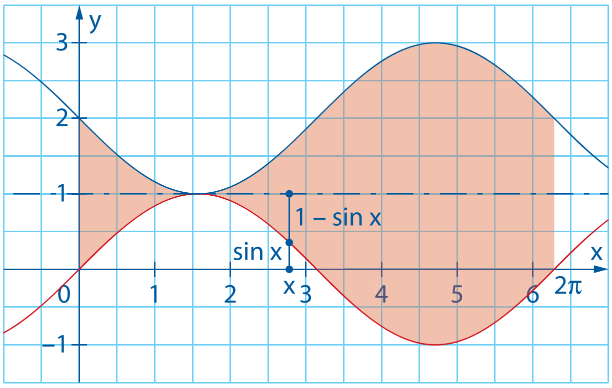
De straal van de cirkelvormige dwarsdoorsneden is $1 - \sin x$, ook voor $\sin x < 0$, zodat het volume berekend wordt als:

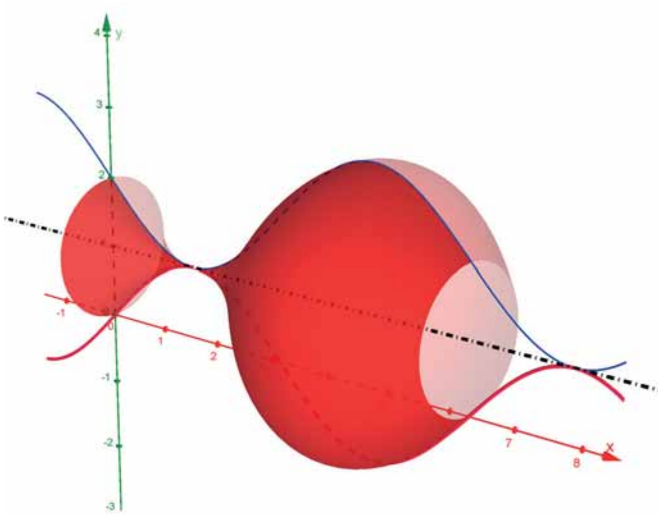
$$V = \int_0^{2\pi} \pi(1 - \sin x)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin x + \sin^2 x)\, dx$$

$$= \pi\left[x + 2\cos x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi(2\pi + 2 + \pi - 2) = 3\pi^2$$



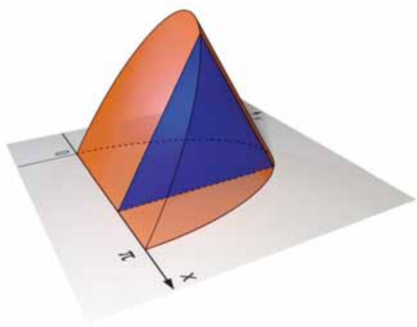


Opdracht 86 bladzijde 210

Het grondvlak van een lichaam wordt begrensd door de x-as en de kromme met vergelijking $y = 3\sqrt{\sin x}$ over het interval $[0, \pi]$.

Doorsneden loodrecht op de x-as zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan één zijde samenvalt met het grondvlak.

Bereken het volume van het lichaam.



De zijde van een doorsnede wordt gegeven door $z(x) = 3\sqrt{\sin x}$. Aangezien elke doorsnede een gelijkzijdige driehoek is, is de hoogte $h(x) = z(x) \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = z(x) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bijgevolg is de oppervlakte: $A(x) = \dfrac{z(x) \cdot h(x)}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\sin x$.

Het volume is: $V = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{9\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx = \frac{9\sqrt{3}}{4}[-\cos x]_0^{\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Opdracht 87 bladzijde 210

De kromme met vergelijking $y = \sin x$ wordt in $[0, \pi]$ gewenteld om de rechte met vergelijking $y = c$. Hierbij is $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Voor welke waarde van c is het volume van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat minimaal?

Een redenering gelijkaardig aan die uit opdracht 85.2 leidt tot de volgende formule voor het volume:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\pi}(c - \sin x)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}(c^2 - 2c\sin x + \sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\left[c^2x + 2c\cos x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \pi\left(\pi c^2 - 4c + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Deze tweedegraadsfunctie is minimaal voor $c = \dfrac{4}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

Opdracht 88 bladzijde 210

Bepaal het voorschrift van een functie f waarvan de grafiek door de oorsprong gaat en waarvoor de booglengte tussen de punten $A(1, f(1))$ en $B(4, f(4))$ gelijk is aan $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{16x}}\,dx$.

Aangezien $\sqrt{1 + \dfrac{1}{16x}}$ overeenkomt met $\sqrt{1 + (f')^2}$ moet $f' = \pm\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$. De functies die hieraan voldoen zijn van de vorm $f(x) = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{x} + c$. Aangezien de functie door de oorsprong moet gaan, moet $c = 0$.

Opdracht 89 bladzijde 210

Bepaal de lengte van de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ van $x = 1$ tot $x = e$.

$y' = x - \frac{1}{4x}$, zodat $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}$. In het beschouwde interval is $x + \frac{1}{4x} > 0$, zodat $\sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} = \left|x + \frac{1}{4x}\right| = x + \frac{1}{4x}$.

De lengte is $\int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln x\right]_1^e = \frac{2e^2 - 1}{4}$.

Opdracht 90 bladzijde 211

Twee elektronen, op een afstand van r meter van elkaar, stoten elkaar af met een kracht $F(r) = \frac{23 \cdot 10^{-29}}{r^2}$ (newton).

1 Stel dat een elektron zich in de oorsprong bevindt. Hoeveel arbeid moet geleverd worden om een tweede elektron vanop een afstand van 2 tot 1 ångström (1 ångström, genoteerd 1 Å, is 10^{-10} m) te verplaatsen?

$$W = \int_{2\cdot 10^{-10}}^{1\cdot 10^{-10}} \frac{23 \cdot 10^{-29}}{r^2}dr = 23 \cdot 10^{-29}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2\cdot 10^{-10}}^{10^{-10}} = -1{,}15 \cdot 10^{-18} \text{ (J)}.$$

Er moet een arbeid van $1{,}15 \cdot 10^{-18}$ joule geleverd worden.

2 Stel dat twee elektronen zich in de punten (1, 0) en (–1, 0) bevinden, waarbij de eenheid opnieuw 1 Å is. Hoeveel arbeid moet geleverd worden om een derde elektron van de positie (6, 0) naar (3, 0) te verplaatsen?

Stel dat het beweeglijk elektron abscis r heeft, dan is zijn afstand tot de vaste elektronen r + 1en r – 1. Met alle afstanden in meter vinden we voor de totale arbeid:

$$W = \int_{6\cdot 10^{-10}}^{3\cdot 10^{-10}} \frac{23 \cdot 10^{-29}}{(r - 10^{-10})^2}dr + \int_{6\cdot 10^{-10}}^{3\cdot 10^{-10}} \frac{23 \cdot 10^{-29}}{(r + 10^{-10})^2}dr \approx -9{,}36 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}.$$

Er is nu ongeveer $9{,}36 \cdot 10^{-19}$ joule nodig.

Opdracht 91 bladzijde 211

Een automobilist rijdt met een snelheid van 30 m/s en remt af met een vertraging van 2 m/s^2 tot hij tot stilstand komt.

1 Schrijf de snelheid *v* en de positie *x* in functie van de tijd *t*.

$v(t) = \int a(t)\,dt = -2t + c$. Aangezien $v(0) = 30$, geldt dat $v(t) = 30 - 2t$.

$x(t) = \int v(t)\,dt = -t^2 + 30t + c$. Er is geen beginpositie gegeven, zodat voor c geen concrete waarde gevonden kan worden. Noemen we de (ongekende) beginpositie x_0, dan is $x(t) = -t^2 + 30t + x_0$.

2 Hoeveel bedraagt de remweg?

De remtijd vinden we als volgt: $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$. De remweg is $\Delta x = \int_0^{15} v(t)\,dt$; we kunnen hem ook vinden als $\Delta x = x(15) - x(0)$. We vinden $\Delta x = 225$ m.

3 De auto weegt 1200 kg. Hoeveel arbeid moeten de remmen leveren (hoeveel energie moeten ze dus absorberen) om de auto tot stilstand te brengen? Veronderstel dat er geen ander energieverlies is, bijv. via wrijving met de weg of wrijving in de motor.

De vertragende kracht die de auto ondervindt is $F = m \cdot a = 1200 \cdot 2 = 2400$ (N).

De arbeid is dus $\int_0^{225} 2400\,dx = 540\,000$ (J).

Een andere redenering bestaat erin te zeggen dat de energie die de remmen moeten absorberen overeenkomt met de kinetische energie die de auto heeft bij $t = 0$ (en die volledig verdwenen is wanneer hij tot stilstand komt). Die kinetische energie is

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot 30^2 = 540\,000 \text{ (J)}.$$

4 Hoeveel arbeid moeten de remmen leveren om de snelheid van 30 m/s terug te brengen tot 20 m/s?

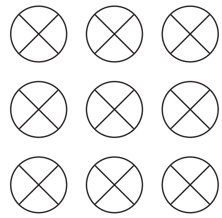
De twee werkwijzen uit de vorige deelvraag kunnen gebruikt worden.

$v(t) = 20 \Leftrightarrow t = 5$, waaruit volgt dat $\Delta x = 125$.

$W = \int_0^{125} 2400\,dx = 300\,000$ (J).

Hersenbreker 1 bladzijde 212

Negen lampjes zijn in een vierkant opgesteld. Elk lampje kan *aan* of *uit* zijn. Als je op een lampje drukt, veranderen dat lampje en de lampjes in dezelfde rij of kolom van toestand: van *aan* naar *uit* of omgekeerd.
In het begin zijn alle lampjes *aan*.



Wat is het kleinste aantal keren drukken dat nodig is om alle lampjes *uit* te krijgen?

A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 9 **E** Dat kan niet.

(Bron © NWO eerste ronde, 2013)

Noteren we de lampjes als L_{ij} met i het rij- en j het kolomnummer, dan kunnen alle lampjes uitgeschakeld worden door bijvoorbeeld L_{21}, L_{23} en L_{22}, te drukken.

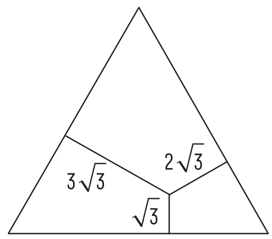
Het juiste antwoord is dus A.

Hersenbreker 2 bladzijde 212

In een gelijkzijdige driehoek trekt men vanuit een punt binnen de driehoek de drie loodlijnen op de zijden.
De afstanden van dat punt tot de zijden zijn $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ en $3\sqrt{3}$.

Hoe groot is de zijde van die driehoek?

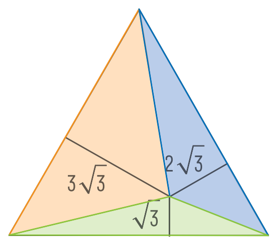
A $5\sqrt{3}$ **B** $6\sqrt{3}$ **C** 12 **D** 15 **E** 18



(Bron © VWO eerste ronde, 2011)

Stel z de zijde van de driehoek, dan kan de oppervlakte op twee manieren berekend worden.

Enerzijds kunnen we de gelijkzijdige driehoek opsplitsen in drie driehoekjes met basis z en hoogtes resp. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ en $3\sqrt{3}$ (zie afbeelding hiernaast).



De totale oppervlakte is $\dfrac{z \cdot \sqrt{3}}{2} + \dfrac{z \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{z \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}z$

Anderzijds is de hoogte van de gelijkzijdige driehoek $z \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ zodat de oppervlakte

ook gelijk is aan $\dfrac{z \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} z}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} z^2$

Beide gelijkstellen geeft uiteindelijk: z = 12. Antwoord C is dus correct.

Hersenbreker 3 bladzijde 212

Twee cilindervormige kaarsen van dezelfde hoogte maar met een verschillende diameter worden terzelfdertijd aangestoken. De eerste is na 4 uren opgebrand en de tweede na 3 uren. Ze verbranden beide met een constante snelheid.

Hoe lang na het aansteken was de eerste kaars twee keer zo hoog als de tweede?

A 1 u　　**B** 1 u 12 min　　**C** 2 u　　**D** 2 u 12 min　　**E** 2 u 24 min

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2014)

Aangezien de kaarsen verbranden met een constante snelheid, neemt hun volume lineair af. De straal blijft constant, zodat ook de hoogte lineair afneemt.

Stel H de beginhoogte van beide kaarsen. Voor de hoogte h_1 van de eerste kaars geldt dan:

$h_1(t) = H - \frac{H}{4}t$. Voor de tweede kaars vinden we: $h_2(t) = H - \frac{H}{3}t$.

Stel t_0 het tijdstip waarop de eerste kaars twee keer zo lang is als de tweede. Dan geldt:

$$h_1(t_0) = 2 \cdot h_2(t_0)$$
$$\Leftrightarrow H - \frac{H}{4}t_0 = 2H - \frac{2H}{3}t_0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)t_0 = 2 - 1$$
$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Omgezet in uren en minuten is dit 2 u 24 min. Antwoord E is dus correct.

Hersenbreker 4 bladzijde 212

In het product $8 \cdot \underbrace{888...888}_{k \text{ cijfers}}$ heeft de tweede factor *k* cijfers 8. Het resultaat is een geheel getal waarvan de som van de cijfers 1000 is.

Wat is de waarde van *k*?

We herschrijven het product als volgt:

$$8 \cdot \underbrace{888...888}_{\text{k cijfers}} = 8 \cdot 8 \cdot \underbrace{111...111}_{\text{k cijfers}} = 64 \cdot \underbrace{111...111}_{\text{k cijfers}}$$

Manueel vermenigvuldigen levert het volgende op:

$$\begin{array}{r} 111...1111 \\ 64 \\ \hline 444...4444 \\ 6666...666 \\ \hline 7\underbrace{111...1}_{\text{k − 2 cijfers 1}}104 \end{array}$$

De som van de cijfers van het product is 7 + (k – 2) + 4 = k + 9 Deze som is 1000 voor k = 991.