Hoofdstuk 4

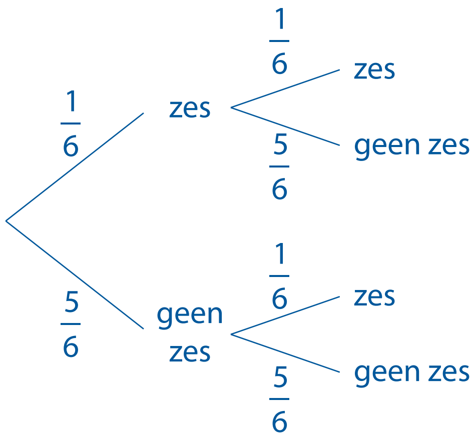
Kansverdelingen

Opdracht 1 bladzijde 130

Je gooit tweemaal na elkaar met een dobbelsteen.

1 Stel een kansboom op waarbij je bij elke worp slechts twee mogelijkheden voorziet: een 6 gooien of geen 6 gooien.

We gooien tweemaal na elkaar met de dobbelsteen en vinden de volgende kansboom.



2 Vul de tabel in.

aantal zessen	…	…	…
kans	…	…	…

De kans op geen enkele zes vinden we volgens de productregel: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Op analoge manier vinden we voor de kans op twee zessen $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Voor de kans op 1 zes moeten we twee takken bij elkaar optellen.

aantal zessen	0	1	2
kans	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Opdracht 2 bladzijde 133

Uit een vaas met vijf groene en drie blauwe knikkers trek je, zonder terugleggen, een knikker tot je een groene knikker trekt.

1 Stel een kansverdeling op voor de stochast X 'het aantal getrokken knikkers'.

- Eerste knikker is groen: $P(X=1)=\frac{5}{8}$
- Tweede is groen: $P(X=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$
- Derde is groen: $P(X=3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$
- Vierde is groen: $P(X=4)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$

Vermits er maar 3 blauwe knikkers zijn, kun je niet meer dan 4 knikkers trekken.

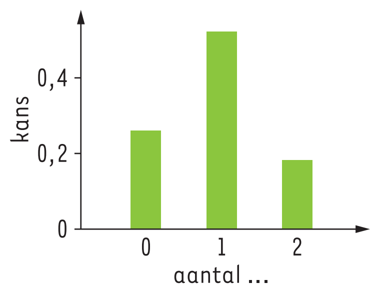
x	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

2 Controleer dat de som van de kansen 1 is.

Controle som van alle kansen: $\frac{5}{8}+\frac{15}{56}+\frac{5}{56}+\frac{1}{56}=\frac{35+15+5+1}{56}=1$.

Opdracht 3 bladzijde 133

Gegeven het kansexperiment 'tweemaal blindelings een knikker nemen, zonder teruglegging, uit een vaas met vijf witte en zes rode knikkers'. Gebruik het staafdiagram om de vragen te beantwoorden.



1 Bepaal de behandelde stochast bij dit kansexperiment.

Er zijn vijf witte en zes rode knikkers. De kans op 0 witte (= kans op 2 rode) moet dus groter zijn dan de kans op 0 rode (= kans op 2 witte).
De stochast X is dus het aantal witte knikkers.

2 Geef de kansverdeling van deze stochast met een tabel of een formule.

$$P(X=0)=\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{30}{110}$$

$$P(X=1)=\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}=\frac{60}{110}$$

$$P(X=2)=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{20}{110}$$

Kansverdeling:

x	0	1	2
P(X = x)	$\frac{30}{110}\approx 0{,}27$	$\frac{60}{110}\approx 0{,}55$	$\frac{20}{110}\approx 0{,}18$

Opdracht 4 bladzijde 133

Bij een quiz moet Tobias zeven juist-of-fout-vragen oplossen. Hij kan hierbij één punt per vraag verdienen en besluit te gokken. Neem als stochast *X* 'de score van Tobias op dit onderdeel van de quiz'.

Geef de kansverdeling van *X* met een formule.

Tobias kan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 of 7 vragen juist hebben. De waardenverzameling van de stochast is dus W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

We kunnen dit vraagstuk modelleren als een trekking met teruglegging: we trekken 7 keer een bal uit een urne met één witte en één zwarte bal. Als X overeenkomt met het aantal getrokken witte ballen, vinden we: $P(X = x) = \binom{7}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x} = \binom{7}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$.

Opdracht 5 bladzijde 133

Tijdens de koopjesperiode verkoopt Louise haar grote voorraad T-shirts aan € 20. Er zijn drie maten: small, medium en large. Haar winst op deze T-shirts is respectievelijk € 5, € 7 en € 4. De ervaring leert dat 30 % van de verkochte T-shirts small (S) zijn, 50 % medium (M) en 20 % large (L). Beschouw de stochast *X* 'winst op een T-shirt'.

maat	**S**	**M**	**L**
winst	5	7	4
kans	0,30	0,50	0,20

1 Louise verkoopt 300 T-shirts. Hoeveel winst mag ze verwachten?

30 % van de T-shirts zijn S, dat zijn er 300 · 0,30; de winst daarop is telkens € 5, zodat we dit aantal nog moeten vermenigvuldigen met 5. Analoog voor de maten M en L. Zo vinden we de totale winst: $300 \cdot 0{,}3 \cdot 5 + 300 \cdot 0{,}5 \cdot 7 + 300 \cdot 0{,}2 \cdot 4 = 1740$.

De winst is € 1740.

2 Hoeveel bedraagt de gemiddelde winst per T-shirt?

Er worden 300 T-shirts verkocht. We delen de totale winst door 300. De gemiddelde winst per T-shirt is € $\frac{1740}{300}$ = € 5,8.

3 Hoe zou je dit resultaat rechtstreeks kunnen berekenen uit de tabel?

Door de winst op een T-shirt telkens te vermengvuldigen met de kans erop en de bekomen producten op te tellen, vinden we hetzelfde resultaat.
$5 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 5{,}8$

Opdracht 6 bladzijde 135

Een onderzoek naar het aantal personen X dat tussen 19 u en 20 u belt naar een bepaalde hulplijn levert de volgende tabel.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,20	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05

1 Waarom geeft deze tabel een kansverdeling weer?

De som van de kansen is 1.

2 Bereken de verwachtingswaarde van X.

$E(X) = 0{,}30 + 0{,}40 + 0{,}45 + 0{,}40 + 0{,}25 = 1{,}80$

Opdracht 7 bladzijde 135

Bij een dobbelspel met twee personen A en B betaalt B € 1 aan A wanneer A een 1 of een 2 gooit. A krijgt € 0,25 van B bij het gooien van een 3 of een 4 maar A geeft € 0,50 aan B bij het werpen van een 5.

Welk bedrag moeten ze bij het gooien van een 6 voorzien om een eerlijk spel te hebben?

Stel X de winst voor A, in euro.

x	1	0,25	−0,50	a
P(X = x)	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bij gelijke kansen is E(X) = 0, dus: $\frac{1}{6}(2 + 0{,}5 - 0{,}5 + a) = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Bij het gooien van een zes verliest speler A € 2.

Opdracht 8 bladzijde 136

Voor een bepaald onderzoek wil men 10 000 personen testen op aids. We nemen aan dat in de geteste populatie 1 op 100 personen seropositief is (of drager van het aidsvirus).

Bij de bloedanalyse kan men een belangrijke besparing realiseren door de bloedmonsters van bijvoorbeeld 25 personen samen te voegen en het mengsel te onderzoeken. Is de uitslag negatief, dan is men zeker dat geen enkele van de 25 personen besmet is. Dit is een besparing van 24 proeven. Is de uitslag echter positief, dan moet men van elk van de 25 personen een nieuw bloedmonster analyseren. In totaal moeten er in dit geval dus 26 proeven worden uitgevoerd.

1 Controleer dat de kans op een negatief resultaat van een mengsel van 25 bloedmonsters gelijk is aan 0,777821 en op een positief resultaat 0,222179.

P(negatief resultaat) $= 0{,}99^{25} \approx 0{,}7778$

P(positief resultaat) $= 1 - 0{,}7778 \approx 0{,}2222$

2 Stel X 'het aantal uit te voeren bloedproeven voor een groep van 25 personen'.

Wat zijn de mogelijke waarden van X?

Waarden van X: 1 en 26.

3 Verifieer dat de verwachtingswaarde van X gelijk is aan 6,5545. Dit betekent dat per groep van 25 personen men gemiddeld 6,5545 proeven moet uitvoeren.

Hoeveel proeven moet men gemiddeld uitvoeren voor de 10 000 personen?

x	1	26
P(X = x)	0,7778	0,2222

$E(X) = 1 \cdot 0{,}7778 + 26 \cdot 0{,}2222 \approx 6{,}555$

Voor 10 000 (400 × 25) personen moet men gemiddeld 400 × 6,555 = 2622 proeven uitvoeren.

4 Ga na dat dit een besparing betekent van 73,78 %.

We bekomen een besparing van 10 000 – 2622 = 7378 proeven op 10 000, m.a.w. 73,78 %.

5 Veralgemeen je vorige redenering door de bloedmonsters van n personen samen te nemen en de verwachtingswaarde te berekenen voor de stochast X 'het aantal uit te voeren bloedproeven voor een groep van n personen'.

Vermits 1 op 100 personen seropositief is, is de kans dat een persoon positief test 0,01 en de kans dat hij negatief test 0,99. Volgens de productregel is de kans dat n personen negatief testen dan:

$P(\text{negatief resultaat}) = 0{,}99^n$ dus

x	1	n + 1
P(X = x)	$0{,}99^n$	$1 - 0{,}99^n$

Voor de verwachtingswaarde vinden we dan
$E(X) = 0{,}99^n + (n + 1)(1 - 0{,}99^n) = -n \cdot 0{,}99^n + n + 1$.

6 Per hoeveel bloedstalen moet je groeperen voor een maximale besparing? Hoeveel bespaar je dan?

Zonder groepering moeten we 10 000 testen uitvoeren. Er zijn $\frac{10\,000}{n}$ groepen van n personen. De besparing is dus $= \frac{10000}{n} \cdot n - \frac{10000}{n} \cdot E(X) = \frac{(n - E(X)) \cdot 10000}{n}$.

We vinden het maximum via de grafiek met het rekentoestel. De besparing is maximaal bij n = 10, dan worden er ongeveer 8045 testen bespaard, dit is 80,45 %.

Opdracht 9 bladzijde 138

Stan en Robin bepalen op een experimentele manier wie de beste schutter is. Hieronder zie je de kansverdelingen voor de stochasten X_1 'het aantal punten van Stan' en X_2 'het aantal punten van Robin'.

punten Stan	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kans	0,01	0,02	0,02	0,04	0,03	0,06	0,07	0,11	0,17	0,22	0,25

punten Robin	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kans	0,05	0,02	0,04	0,09	0,08	0,11	0,11	0,12	0,15	0,15	0,08

Uit de kansverdelingen kun je al vermoeden wie de meest ervaren schutter is.

Controleer je vermoeden door van beide stochasten de verwachtingswaarde en de standaardafwijking te berekenen.

We voeren de twee tabellen in het rekentoestel in en lezen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking af:

Stan: $E(X_1) = 7{,}63$ $\quad\sigma_1 = 2{,}42$

Robin: $E(X_2) = 6{,}09$ $\quad\sigma_2 = 2{,}74$

Stan is gemiddeld beter en bovendien is zijn spreiding ook kleiner. Hij is dus preciezer.

Opdracht 10 bladzijde 140

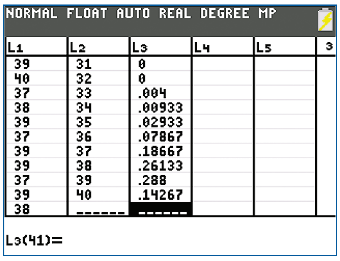
Een hotel heeft 38 kamers. Omdat klanten niet altijd komen opdagen, wordt aan 'overboeking' gedaan en worden elke dag 40 boekingen aanvaard. Als iemand geboekt heeft, is de kans dat hij daadwerkelijk komt, gelijk aan 0,95.

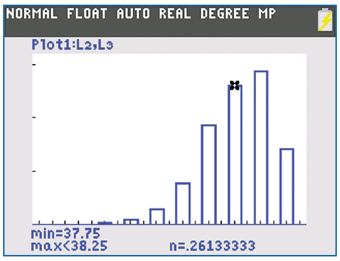
Onderzoek via een simulatie de kansverdeling van de stochast X 'het aantal klanten dat komt opdagen bij 40 boekingen'.

$\text{seq(sum(rand(40)} \leqslant 0.95), X, 1, 750) \rightarrow L_1$

$\text{seq}(X, X, 0, 40) \rightarrow L_2$

$\text{seq(sum}(L_1 = X)/750, X, 0, 40) \rightarrow L_3$





Opdracht 11 bladzijde 140

Tristan schaakt tegen de computer. Hij speelt tien spelletjes na elkaar. Hij verliest (V) en wint (W) in deze volgorde:

V V V W V W V W W W

Deze opeenvolging kan de indruk wekken dat hij naar het einde toe beter begint te spelen, maar misschien is het ook louter toeval. We onderzoeken dit met behulp van een simulatie.

Stel X 'het aantal keer dat Tristan wint in de vijf laatste spelletjes min het aantal keer dat hij wint in de vijf eerste spelletjes'.

1 Geef alle mogelijke waarden van deze stochast.

Van –5 tot 5.

2 Welke waarden van X kunnen erop wijzen dat Tristan beter wordt?

$X > 0$

3 Veronderstellen we dat hij naar het einde toe helemaal niet beter speelt, maar dat hij bij elk spelletje een kans van 50 % heeft om te winnen of te verliezen.

a Via welk commando kun je berekenen hoeveel keer hij de eerste vijf spelletjes wint?

b Vul dit commando nu aan om het verschil te berekenen van het aantal keer dat hij de eerste vijf spelletjes wint en het aantal keer de laatste vijf.

sum(rand(5) ⩽ 0.5)

sum(rand(5) ⩽ 0.5) – sum(rand(5) ⩽ 0.5)

4 Simuleer nu 800 spelletjes.

a Wat is de kans op het resultaat van Tristan, namelijk $X = 3$?

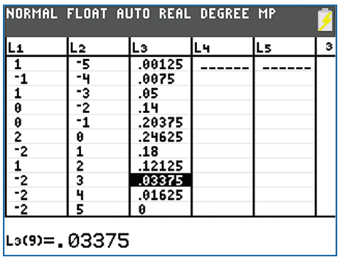
b Bepaal $P(X \geqslant 3)$.

seq(sum(rand(5) ⩽ 0.5) – sum(rand(5) ⩽ 0.5), X, 1, 800) $\rightarrow L_1$

seq(X, X, –5, 5) $\rightarrow L_2$

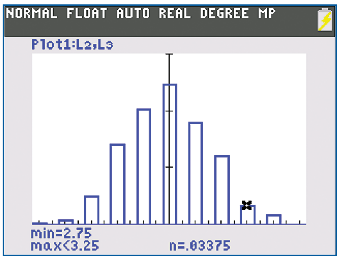
seq(sum(L_1 = X)/800, X, –5, 5) $\rightarrow L_3$

Tristan wint 1 van de 5 eerste spelletjes en 4 van de laatste 5 spelletjes. De waarde van de stochast is 4 – 1 = 3. We moeten dus P(X = 3) bepalen.


NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP

L1	L2	L3	L4	L5	3
1	-5	.00125	------	------	
-1	-4	.0075			
1	-3	.05			
0	-2	.14			
0	-1	.20375			
2	0	.24625			
-2	1	.18			
1	2	.12125			
-2	3	.03375			
-2	4	.01625			
-2	5	0			

L3(9)=.03375



We lezen af dat P(X = 3) = 0,03375.

5 Gebruik deze kansen om de oorspronkelijke vraag te beantwoorden: speelt Tristan naar het einde toe beter of is zijn resultaat louter toeval?

Bij dergelijke hypothesetesten berekenen we niet P(X = 3) maar P(X ⩾ 3) om te onderzoeken of X = 3 uitzonderlijk hoog is (zie ook de cursus Statistiek). De kans P(X ⩾ 3) kan geschat worden als 0,03375 + 0,01625 + 0 = 0,05000.

Louter op basis van het toeval zal je niet gauw 3 spelletjes (of meer) méér winnen in de tweede helft dan in de eerste. Als het toeval niet de oorzaak kan zijn, dan is het wellicht zo dat Tristan echt beter werd naar het einde toe.

Opdracht 12 bladzijde 143

Het is een traditie dat onze koningin Mathilde meter wordt van een zevende opeenvolgende dochter in een Belgisch gezin. De kans op een meisje is bij elke geboorte 48,65 %.

1 Bereken de kans op precies zeven opeenvolgende dochters in een willekeurig gezin met acht kinderen.

Er zijn twee mogelijkheden voor de kans op zeven opeenvolgende dochters, nl. eerst een zoon en dan zeven dochters of eerst zeven dochters en dan een zoon. We vinden dus $P(7 \text{ opeenvolgende dochters}) = 2 \cdot 0{,}4865^7 \cdot 0{,}5135 = 0{,}0066$.

De kans op precies 7 opeenvolgende dochters in een gezin met 8 kinderen is 0,66 %.

2 Stel X 'het aantal meisjes in een gezin met acht kinderen'.

Geef een formule voor $P(X = k)$.

We kunnen dit vraagstuk modelleren als een trekking met teruglegging. De kans op k meisjes in een gezin met 8 kinderen is $P(X = k) = \binom{8}{k} \cdot 0{,}4865^k \cdot 0{,}5135^{8-k}$.

Opdracht 13 bladzijde 146

Een medicijn heeft een genezingskans van 80 % en wordt toegediend aan tien patiënten. Stel X 'het aantal genezen patiënten'.

1 Welke waarde hebben de parameters n en p bij dit binomiaal kansexperiment?

$n = 10$ en $p = 0{,}8$

2 Bereken de kans dat de eerste acht patiënten wel genezen en de laatste twee niet.

$P(\text{enkel eerste 8 genezen}) = 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}67\ \%$, vermits de volgorde vast ligt.

3 Wat is de kans dat er precies acht van de tien patiënten genezen?

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 = 30{,}20\ \%$$

4 Hoe groot is de kans dat er ten hoogste zeven patiënten genezen?

$$P(X \leqslant 7) = 1 - \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 - \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} = 32{,}22\ \%$$

(TI-84: binomcdf(10, 0.8, 7))

5 Bereken de kans dat ten minste zes patiënten genezen.

$P(X \geqslant 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 96{,}72\ \%$

(TI-84: 1-binomcdf(10, 0.8, 5))

6 Hoeveel patiënten verwacht je dat er genezen zullen zijn?

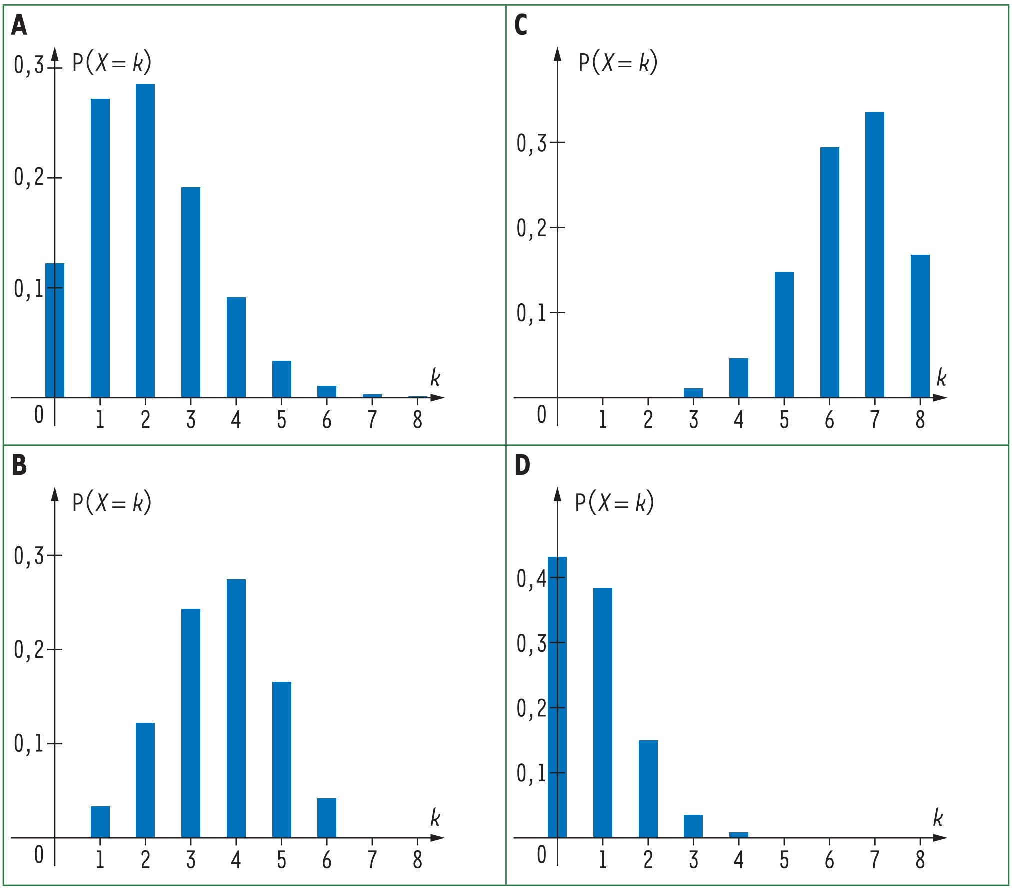
$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}8 = 8$

Opdracht 14 bladzijde 146

Hieronder zie je de grafische voorstelling van vier binomiale verdelingen.

Welke parameters horen bij welke verdeling?

1	2	3	4
$n = 20$ $p = 0,1$	$n = 8$ $p = 0,1$	$n = 6$ $p = 0,6$	$n = 8$ $p = 0,9$



Vergelijken we A en C, dan zien we dat A een situatie moet voorstellen met een kleine kans op succes p en C een met een grote kans op succes: bij A zijn kleine waarden uit de waardenverzameling namelijk het meest waarschijnlijk en bij C de grote. Daaruit kunnen we afleiden dat C overeenkomt met 4 (p = 0,9) en A met 1 of met 2 (p = 0,1).

Volgens dezelfde redenering komt B overeen met 3 (p = 0,6) en D eveneens met 1 of 2.

Het feit dat in D de uitkomsten 0 en 1 veel waarschijnlijker zijn dan in A wijst erop dat D overeenkomt met n = 8. Bij het 20 keer herhalen van het experiment is de kans op 0 successen veel kleiner dan bij 8 keer herhalen.

Besluit: 1A, 2D, 3B en 4C.

Uit deze opdracht blijkt dat de piek van een binomiale verdeling ongeveer overeenkomt met de waarde E(X). Dit biedt een snellere manier om parameters aan een grafische voorstelling te koppelen.

Opdracht 15 bladzijde 147

Bij een bepaald spel gebruikt men een dobbelsteen met zes vlakken waarbij er meer dan één vlak is met zes ogen. Femke berekent de kans op viermaal een zes gooien als volgt:

$$P(X=4)=\binom{15}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}.$$

1 Hoeveel keer heeft Femke met de dobbelsteen gegooid?

Femke heeft 15 keer met de dobbelsteen gegooid.

2 Hoeveel vlakken met zes ogen bevat de dobbelsteen?

De kans op 6 ogen is $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. De dobbelsteen bevat dus 4 vlakken met 6 ogen.

Opdracht 16 bladzijde 149

In een voorraad van 200 bloedstalen zijn er 5 besmet. Uit de stalen worden er lukraak 3 genomen.

1 Bereken met behulp van de hypergeometrische verdeling de kans dat geen enkele van deze 3 stalen besmet is.

$$N=200,\ G=5,\ n=3 \text{ en dus } P(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{195}{3}}{\binom{200}{3}}=0{,}9265.$$

2 Bereken de verwachtingswaarde van het aantal besmette stalen in deze set van 3 bloedstalen.

$$E(X)=n\cdot\frac{G}{N}=3\cdot\frac{5}{200}=0{,}075$$

Opdracht 17 bladzijde 149

Bij een levering van 100 wisselstukken wordt de volgende afspraak gemaakt. Uit de levering neemt men een steekproef van 10 stuks. Als er daarin niet meer dan 1 exemplaar defect is, wordt de partij aanvaard.

1 Stel dat in de levering 4 defecte stuks zitten.

Bereken de kans dat de levering aanvaard wordt.

X = 'aantal defecte stuks'

We gebruiken het model van een trekking zonder teruglegging, dus X heeft een hypergeometrische verdeling.

Hierbij is het aantal stuks N waaruit getrokken wordt, gelijk aan 100. Het aantal dat je trekt is n = 10, waaronder G = 4 defecte.

$$P(\text{aanvaard})=P(X=0)+P(X=1)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{96}{10}}{\binom{100}{10}}+\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{96}{9}}{\binom{100}{10}}=0{,}9512$$

2 Een luie werknemer test slechts 3 van de wisselstukken in plaats van de hele steekproef. Veronderstel dat er bij zijn 10 stuks 2 defecte exemplaren zitten, zodat de levering eigenlijk geweigerd zou moeten worden.

Bereken de kans dat de levering toch aanvaard wordt.

De parameters van de hypergeometrische verdeling wijzigen in N = 10, G = 2 en n = 3.

$$\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}+\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}=0{,}9333$$

Opdracht 18 bladzijde 155

De inhoud van flessen frisdrank is normaal verdeeld met parameters $\mu = 50{,}5$ cl en $\sigma = 0{,}25$ cl.

1 Bepaal de kans dat de inhoud minimaal 49,9 cl en maximaal 51,1 cl is.

$X \sim \text{Norm}(50{,}5;\ 0{,}25)$

$P(49{,}9 < X < 51{,}1) \approx 98{,}36\ \%$ (met TI84: normalcdf(49.9,51.1,50.5,0.25))

2 Wat is de kans dat de inhoud van een fles minstens 50,8 cl is?

$P(X > 50{,}8) \approx 11{,}51\%$ (met TI84: normalcdf(50.8,10^{99},50.5,0.25))

3 Bereken de kans dat de inhoud van een fles minder dan de geafficheerde hoeveelheid van 50 cl bevat.

$P(X < 50) \approx 2{,}28\ \%$ (met TI84: normalcdf(-10^{99},50,50.5,0.25))

Opdracht 19 bladzijde 155

Door de klimaatverandering neemt de gemiddelde jaarlijkse neerslag in Vlaanderen toe. Er zijn echter veel schommelingen: zo was 2016 uitzonderlijk nat met gemiddeld 942 mm neerslag, maar 2017 was eerder droog met gemiddeld 749 mm.

Stel X 'de gemiddelde jaarlijkse neerslag in Vlaanderen' met $X \sim \text{Norm}(758,\ 67)$.

1 Wat is de kans op een jaar dat nog natter is dan 2016?

De kans dat er meer dan 942 mm neerslag valt is normalcdf(942, 10^{99}, 758, 67) = 0,0030 of 0,30 %.

2 Wat is de kans dat de volgende vijf jaren er minstens één jaar natter is dan 2016?

Stel Y = '# jaar natter dan in 2016'. Y heeft een binomiale verdeling met n = 5 en p = 0,0030, de kans op een jaar dat nog natter is dan 2016.

Dus $Y \sim B(5;\ 0{,}0030)$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}997^5 = 0{,}0149 = 1{,}49\ \%$

3 Tussen 2007 en 2017 waren er drie extreem natte jaren met een gemiddelde jaarlijkse neerslag boven 900 mm.

Hoe groot is de kans dat je louter door toeval drie extreem natte jaren in een decennium hebt?

Z = '# jaar extreem nat'

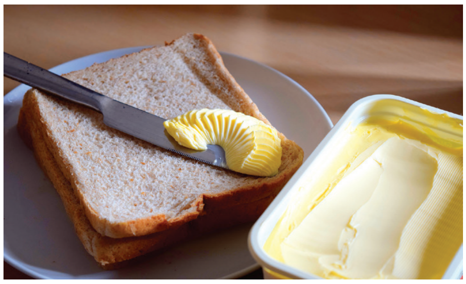
$Z \sim B(10,p)$ met $p = 0{,}017$ (TI84: normalcdf(900,10^{99},758,67))

$P(Z = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}017^3 \cdot 0{,}983^7 = 0{,}00052 = 0{,}052\ \%$.

Opdracht 20 bladzijde 155

Op pakjes margarine vind je meestal als gewicht 250 g ℮. Dit symbool komt van 'estimate'; deze EU-norm vereist dat hoogstens 4 % van de pakjes meer dan 9 g onder de aangegeven 250 g wegen.

Net / Netto : 250 g ℮



1 Stel X 'het gewicht van een vlootje margarine' met $X \sim \text{Norm}(252, 7)$.

Voldoen de pakjes margarine aan de Europese norm?

normalcdf(-10^{99}, 241, 252, 7) $= 0{,}058 > 0{,}04$

Dus de pakjes voldoen niet aan de Europese norm.

2 Je koopt tien van dergelijke vlootjes margarine.

Bereken de kans dat er drie minder dan 241 g wegen.

Stel Y het aantal vlootjes dat minder dan 241 g weegt, dan is $Y \sim B(10; 0{,}058)$.

$$P(Y=3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}058^3 \cdot 0{,}942^7 = 0{,}01541$$

3 Wat is de kans dat geen enkel van de tien gekochte vlootjes minder dan 241 g weegt?

$P(Y=0) = 0{,}942^{10} = 0{,}55012$

Opdracht 21 bladzijde 161

Een valsmunter vervalst geldstukken zodat de kans op munt $\frac{5}{8}$ wordt.

1 Stel de kansverdeling op van de toevalsvariabele X 'aantal keer munt bij een worp met vijf dergelijke muntstukken'.

$X \sim B\left(5, \frac{5}{8}\right)$

De kans op k successen wordt gegeven door de formule $P(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{5}{8}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^{5-k}$.

We kunnen ook een tabel opstellen van de kansverdeling door k = 0, 1, ..., 5 te nemen.

k	0	1	2	3	4	5
P(X = k)	0,0074	0,0618	0,2060	0,3433	0,2861	0,0954

2 Bereken

a $P(X \leqslant 2)$

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^{k} \left(\frac{3}{8}\right)^{5-k} = 27{,}52\,\%$$

b $P(X \geqslant 3)$

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 72{,}48\,\%$$

c $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \sum_{k=1}^{3} \binom{5}{k} \left(\frac{5}{8}\right)^{k} \left(\frac{3}{8}\right)^{5-k} = 61{,}11\%$$

3 Bereken de verwachtingswaarde en de variantie van de stochast X.

$$E(X) = np = 5 \cdot \frac{5}{8} = 3{,}125 \text{ en } Var(X) = npq = 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = 1{,}172$$

Opdracht 22 bladzijde 161

Men trekt drie knikkers uit een vaas die acht witte en zeventien rode knikkers bevat. Stel X 'het aantal getrokken witte knikkers'.

Bereken

1 $P(X \leqslant 1)$

$X \sim H(25, 8, 3)$

$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \frac{\binom{8}{0}\binom{17}{3}}{\binom{25}{3}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{442}{575}$$

2 $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = \frac{133}{575}$$

3 $P(X > 7)$

Vermits er maar 3 knikkers getrokken worden, is het maximaal mogelijke aantal witte knikkers 3, de kans op een groter aantal is dus 0.

Opdracht 23 bladzijde 161

Je gooit met twee dobbelstenen. De stochast X is het kleinste ogental en de stochast Y is het grootste ogental.

Geef de kansverdeling van beide stochasten met een formule of tabel.

We kunnen het kleinste ogental vinden in het volgend schema:

min	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	1	1	1	1	1
⚁	1	2	2	2	2	2
⚂	1	2	3	3	3	3
⚃	1	2	3	4	4	4
⚄	1	2	3	4	5	5
⚅	1	2	3	4	5	6

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Analoog vinden we voor het grootste ogental:

max	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	2	3	4	5	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	4	5	6
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	6	6	6	6	6

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Opdracht 24 bladzijde 161

Bij een eerlijke roulette hebben alle 37 nummers (0 tot en met 36) evenveel kans om uit te komen. Een speler zet telkens € 2,5 in op 13. Als zijn nummer uitkomt, ontvangt hij 36 maal zijn inzet. In het andere geval is hij zijn inzet kwijt.

Welke gemiddelde winst mag hij per spel verwachten?

Er zijn twee mogelijke waarden voor de stochast. Als je nummer niet uitkomt, win je niets en ben je je inzet kwijt. Als je nummer getrokken wordt, win je 36 keer je inzet min je inzet.

Stel X de winst per spel.

x	−2,50	87,5
P(X = x)	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$E(X) = \frac{1}{37}(-2{,}50 \cdot 36 + 87{,}5) = -0{,}07$$

Hij mag een verlies van 7 eurocent verwachten per spel.

Opdracht 25 bladzijde 161

Bij een gokspel werp je met een gewone dobbelsteen. Als je een oneven aantal ogen werpt, krijg je dat aantal ogen in euro. Als het aantal ogen echter even is, moet jij dat bedrag betalen. Stel *X* ‘je winst’ per spel.

Bereken de verwachtingswaarde van *X*.

ogen	1	2	3	4	5	6
x	1	−2	3	−4	5	−6
P(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{-3}{6} = -0{,}5$$

Opdracht 26 bladzijde 162

Je werpt met een dobbelsteen, net zo lang tot je zes ogen hebt gegooid.
Stel *X* ‘het benodigde aantal worpen’.

Je gooit met kans $\frac{1}{6}$ een zes, dan eindigt je aantal worpen. Als je n keer moet gooien, is de kans het product van n − 1 keer $\frac{5}{6}$ met $\frac{1}{6}$.

Bereken op vier decimalen nauwkeurig de kans dat je

1 zes keer moet gooien;

$$P(X = 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}0670$$

2 meer dan zes keer moet gooien.

$$P(X > 6) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - \ldots - P(X = 6)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} - \frac{25}{216} - \frac{125}{1296} - \frac{625}{7776} - \frac{3125}{46\,656} = 0{,}3349$$

Opdracht 27 bladzijde 162

In een picknickmand zitten twee broodjes kaas, vijf broodjes hesp en een broodje krabsla. Papa neemt blindelings twee broodjes uit de mand. Stel X 'het aantal broodjes hesp dat hij nam'.

1 Geef de kansverdeling van X.

$X \sim H(8, 5, 2)$

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

2 Bereken de verwachtingswaarde van X.

$E(X) = 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$

3 Bereken de kans dat hij een broodje kaas en een broodje krabsla neemt.
Is deze kans hetzelfde als $P(X = 0)$? Verklaar je antwoord.

$P(\text{kaas en krabsla}) = 2 \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

De kansen zijn niet gelijk, want $P(X = 0)$ is de kans op een broodje kaas en een broodje krabsla of twee broodjes kaas $\left(= \frac{1}{14} + \frac{1}{28}\right)$.

Opdracht 28 bladzijde 162

Een vaas bevat zeven knikkers: drie witte en vier zwarte. Een persoon trekt blindelings en zonder teruglegging de ene knikker na de andere uit de vaas. Noem de stochast X 'het aantal witte knikkers tot de eerste getrokken zwarte knikker'.

1 Stel de corresponderende kansverdeling op en controleer dat de som 1 is.

Eerste knikker is onmiddellijk zwart: $P(X = 0) = \frac{4}{7}$.

Tweede knikker is zwart: eerst wit met kans $\frac{3}{7}$ dan zwart met kans $\frac{4}{6}$.

Dus: $P(X = 1) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

Derde knikker is zwart: eerst twee witte knikkers dan een zwarte: $P(X = 2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$.

Vierde knikker is zwart: $P(X = 3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{35}$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

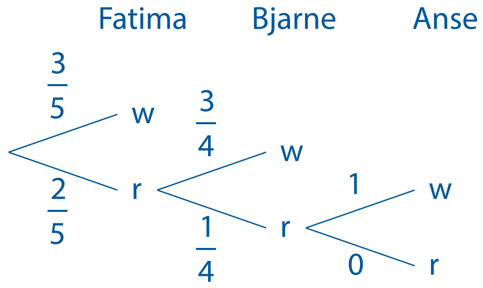
2 Bereken de verwachtingswaarde en de variantie.

$E(X) = \frac{3}{5}$ en $\text{Var}(X) = \frac{16}{25}$

Opdracht 29 bladzijde 162

Een bokaal bevat drie witte en twee rode knikkers. Fatima, Bjarne en Anse nemen in die volgorde een knikker en leggen hem niet terug. De eerste die een witte knikker trekt, wint € 2,5.

Welke gemiddelde winst mogen Fatima, Bjarne en Anse bij dit spel verwachten?



Gemiddelde winst voor:

Fatima: $\frac{3}{5} \cdot 2{,}50 \Rightarrow$ € 1,5

Bjarne: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2{,}50 \Rightarrow$ € 0,75

Anse: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2{,}50 \Rightarrow$ € 0,25

Opdracht 30 bladzijde 162

De St. Petersburgparadox

Je gooit een eerlijke munt op, tot je kop krijgt. De stochast X is 'het aantal benodigde worpen'. Als het aantal worpen k is, dan krijg je 2^k euro. Die uitbetaling is een nieuwe stochast Y. We noteren: $Y = 2^X$ waarbij X zelf een toevalsvariabele is die alle waarden k van 1 tot oneindig kan aannemen. We onderzoeken welke inzet je moet betalen om een eerlijk spel te krijgen.

1 Bepaal de kansverdeling van X.

Bij elke worp is de kans op kop gelijk aan de kans op munt: $\frac{1}{2}$. Als het aantal benodigde worpen k is, heb je k – 1 keer munt gegooid en de k-de keer kop. De kans hierop is $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$. De kansverdeling is dus: $P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$.

2 Bereken E(Y).

Je krijgt 2^k euro en de kans hierop is telkens $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$.

De verwachtingswaarde van Y is dan $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 1 + 1 + 1 + ... = +\infty$.

3 Bereken de kans dat je bij het spelen van één spelletje winst maakt bij een inzet van € 1000.

Je wint meer als je inzet, als de winst op een spelletje groter is dan € 1000.

Dus als $2^k \geqslant 1000$ of $k \geqslant 10$.

De gevraagde kans is bijgevolg $\sum_{k=10}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ of $1-\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{512}$.

De twee laatste vragen maken duidelijk waarom deze situatie een paradox wordt genoemd. Uit de verwachte winst blijkt dat, wat ook de inzet per spel is, je op termijn schatrijk zal worden. Maar je moet natuurlijk wel in staat zijn om telkens opnieuw het afgesproken bedrag in te zetten. De kans dat je in één spelletje een inzet van 1000 euro terugverdient is heel klein. Slechts eens om de zoveel honderd of duizend spelletjes zal je zoveel terug verdienen, dat al je vorige inzetten terugbetaald zijn. Tenzij je tegen dan bankroet bent …

Opdracht 31 bladzijde 163

In een vaas zitten evenveel rode als blauwe knikkers. Noem dit aantal *a*. Uit deze vaas worden, zonder teruglegging, twee knikkers genomen.

Geef een formule voor de standaardafwijking van de stochast *X* 'het aantal blauwe knikkers bij deze trekking' in functie van *a*.

De waardenverzameling van X is $W = \{0, 1, 2\}$.

$$P(X=0) = P(RR) = \frac{a}{2a}\cdot\frac{a-1}{2a-1} = \frac{a-1}{2(2a-1)}$$

$$P(X=1) = P(RB \text{ of } BR) = 2\cdot\frac{a}{2a}\cdot\frac{a}{2a-1} = \frac{a}{2a-1}$$

$$P(X=2) = P(BB) = \frac{a}{2a}\cdot\frac{a-1}{2a-1} = \frac{a-1}{2(2a-1)}$$

$$E(X) = \frac{2a}{2(2a-1)} + 2\cdot\frac{a-1}{2(2a-1)} = 1$$

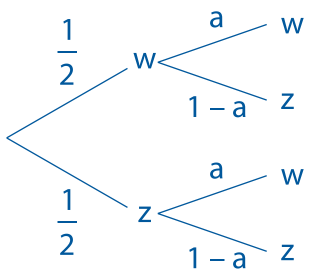
$$Var(X) = (0-1)^2\frac{a-1}{2(2a-1)} + 0 + (2-1)^2\cdot\frac{a-1}{2(2a-1)} = \frac{a-1}{2a-1}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{a-1}{2a-1}}$$

Opdracht 32 bladzijde 163

Een computerspel in een lunapark verloopt als volgt. Jij moet op een witte of een zwarte knop drukken. Er is evenveel kans dat je wit of zwart kiest. Onafhankelijk van jouw keuze selecteert de computer ook wit of zwart. Indien beide kleuren wit zijn, win jij één jeton. Zijn beide kleuren zwart, dan win jij drie jetons. Maar als beide kleuren verschillend zijn, verlies je twee jetons aan de machine. Het computerprogramma is zo gemaakt dat de kans op het selecteren van wit door de computer *a* is.

Toon aan dat men de waarde van *a* zo kan instellen dat jij op lange termijn altijd verliest.



Stel X 'het aantal gewonnen jetons'.

x	−2	1	3
P(X = x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}(1-a)$

$E(X) = -1 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2} - a$

Door $a > \frac{1}{2}$ te nemen, verlies je op lange termijn.

Opdracht 33 bladzijde 163

Je verdeelt vier kaartjes, genummerd 1, 2, 3 en 4, over vier dozen zodat er in elke doos een kaartje terecht komt. Je verdeelt deze kaartjes blindelings over de vier dozen die eveneens genummerd zijn van 1 tot en met 4. Je krijgt € 1 voor elk kaartje dat in de doos werd gelegd met het corresponderende nummer.

Welke winst mag je verwachten?

Stel X 'je winst'.

Totaal aantal uitkomsten: 4! = 24

- 0 juist: $\left.\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\}$ 9 uitkomsten

- 1 juist: $C_4^1 \times 2 \times 1 = 8$ (indien het eerste kaartje in de juiste doos zit, moet het volgende fout zijn, hiervoor zijn nog twee mogelijkheden, voor de andere 2 kaartjes zijn geen keuzes meer).
- 2 juist: $C_4^2 = 6$ (twee van de vier kaartjes zitten in de juiste doos, hiervoor zijn 6 mogelijkheden, voor de andere 2 kaartjes zijn geen keuzemogelijkheden meer)
- 3 juist: kan niet, want als drie kaartjes in de juiste doos zitten, zal ook het vierde kaartje juist zijn.
- 4 juist: 1 mogelijkheid.

x	0	1	2	4
$P(X = x)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$

- $E(X) = \frac{1}{24}(8 + 12 + 4) = 1$

  De speler mag een gemiddelde winst van € 1 verwachten.

Opdracht 34 bladzijde 163

Simulatie

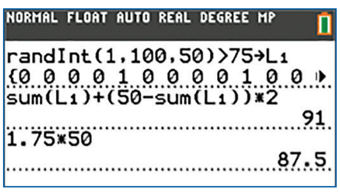
Een drankautomaat rekent € 1,75 aan voor een blikje. De eigenaar van de automaat wil echter niet langer kleine munten als wisselgeld in zijn automaat stoppen. Hij beslist dat de klanten voortaan ofwel € 1 ofwel € 2 moeten betalen. Hiertoe laat hij de machine willekeurig een getal tussen 1 en 100 genereren. Als het getal kleiner dan of gelijk is aan 75 betaalt de klant € 2. In het andere geval, als het getal groter is dan 75, betaalt de klant € 1.

1 Laat je rekentoestel een getal genereren tussen 1 en 100. Hoeveel zou je met dit getal betalen voor jouw drankje?

randInt(1,100) geeft bijvoorbeeld resultaat {78} en dan betaal je € 1.

2 Herhaal de simulatie 50 keer. Hoeveel betaal je in totaal voor deze 50 drankjes? Hoeveel zou je betaald hebben als de prijs per drankje € 1,75 was?

We simuleren dit 50 keer met randInt(1,100,50) en bekomen 50 getallen. We testen of de bekomen getallen groter zijn dan 75 en krijgen een lijst van 50 keer 0 of 1. Wanneer we de som hiervan maken, bekomen we het aantal drankjes van € 1. Dit is ook het bedrag dat dient betaald te worden aan drankjes van 1 euro. Het overblijvende deel van de 50 getallen moeten we vermenigvuldigen met 2 euro. In het voorbeeld is het totaal te betalen bedrag € 91. Moesten we € 1,75 per drankje betaald hebben, zou dit totale bedrag € 87,5 zijn.



Opdracht 35 bladzijde 163

Je kiest lukraak drie getallen uit de verzameling $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Deze getallen hoeven niet verschillend te zijn. De stochast X is het grootste getal van deze drie.

Geef de kansverdeling van X.

Vermits de getallen niet verschillend moeten zijn, is het totale aantal uitkomsten het aantal herhalingscombinaties van 3 uit 10.

Het getal k is het grootste getal als je naast k nog 2 al dan niet verschillende getallen kiest uit {1, …, k}. Ook dit zijn herhalingscombinaties.

De kansverdeling van X is dus $P(X = k) = \dfrac{\overline{C}_k^2}{\overline{C}_{10}^3} = \dfrac{C_{k+1}^2}{C_{12}^3} = \dfrac{k(k+1)}{440}$.

Opdracht 36 bladzijde 164

Beschouw het kansexperiment 'opgooien van vijf muntstukken' en als stochast X 'het aantal keer kop'.

1 Leg uit waarom dit kansexperiment een binomiaal experiment is.

Voor elke munt is de kans op kop (= succes) gelijk aan $\frac{1}{2}$. We kunnen het experiment beschouwen als een trekking met teruglegging.

2 Geef de parameters van deze binomiale verdeling.

$X \sim B\left(5, \dfrac{1}{2}\right)$

3 Bereken de kans om ten hoogste drie keer kop te gooien.

$$P(X \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{16} = 0{,}8125$$

Opdracht 37 bladzijde 164

De 4 batterijen van het rekentoestel van Cédric zijn leeg. Thuis is er een doos met 20 batterijen, waarin per vergissing 3 lege batterijen terecht zijn gekomen. Cédric neemt willekeurig 4 batterijen uit de doos.

1 De stochast X 'het aantal volle batterijen die hij nam' is hypergeometrisch verdeeld. Wat zijn de parameters?

De parameters zijn: N = 20, G = 17 en n = 4. Dus X ~ H(20, 17, 4).

2 Bereken de kans dat zijn rekentoestel onmiddellijk werkt.

$$P(X = 4) = \frac{\dbinom{3}{0}\dbinom{17}{4}}{\dbinom{20}{4}} = 0{,}4912 \text{ of } 49{,}12\,\%$$

Opdracht 38 bladzijde 164

Een bepaald geneesmiddel heeft schadelijke nevenreacties bij 1 op 1000 patiënten.

Bereken de kans dat bij toediening aan 2500 patiënten

1 drie onder hen last hebben van de nevenreactie;

Stel X 'het aantal personen met last van nevenreacties'.

$X \sim B(2500; 0{,}001)$

$$P(X=3)=\binom{2500}{3}\cdot 0{,}001^3 \cdot 0{,}999^{2497} = 0{,}2139$$

(TI84: binompdf(2500,0.001,3) = 0,2139.)

2 meer dan drie last hebben van de nevenreactie.

$$P(X>3)=1-P(X\leqslant 3) = 1-\sum_{k=0}^{3}\binom{2500}{k}\cdot 0{,}001^k \cdot 0{,}999^{2500-k} = 0{,}2424$$

Opdracht 39 bladzijde 164

Op een dag willen zes jongeren elk om beurt hun rijexamen afleggen. De kans dat een jongere slaagt is 65 %.

Hoe groot is de kans dat

1 de eerste vier slagen en de laatste twee niet;

De volgorde van wie slaagt en wie niet slaagt ligt vast, dus
P(eerste 4 wel en laatste 2 niet) $= 0{,}65^4 \cdot 0{,}35^2 = 0{,}0219$ of 2,19 %.

2 er vier van de zes slagen;

Stel X 'het aantal dat slaagt', dan geldt: $X \sim B(6; 0{,}65)$. Bijgevolg:

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot 0{,}65^4 \cdot 0{,}35^2 = 0{,}3280 \text{ of } 32{,}80\,\%$$

3 er meer wel slagen dan niet slagen?

De kans dat er meer slagen dan niet is $\sum_{k=4}^{6}\binom{6}{k} 0{,}65^k \cdot 0{,}35^{6-k}$. Met het rekentoestel

kunnen we dit ook berekenen als $1-P(X\leqslant 3) = 1 -$ binomcdf(6,0.65,3) = 0,6471 of 64,71 %.

Opdracht 40 bladzijde 164

Een leerling stelt vast dat hij geen enkele vraag van een multiple-choicetest kan beantwoorden. Hij besluit dan maar te gokken. Er zijn tien vragen met elk vijf mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één correct is.

Stel X 'het aantal vragen dat hij juist gegokt heeft'.
Het al of niet juist gokken op een bepaalde vraag heeft geen invloed op de andere vragen, dus is X binomiaal verdeeld: $X \sim B\left(10, \frac{1}{5}\right)$.

1 Wat is de kans dat hij de helft of meer van de vragen juist gegokt heeft?

$P(X \geqslant 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k} = 0{,}0328$ of 3,28 % (met de TI84: 1 – binomcdf(10,1/5,4))

2 De leerling verdient 1 punt voor elk juist antwoord. In het andere geval krijgt de leerling 0 punten.

Welk gemiddeld resultaat mag hij verwachten?

$E(X) = np = 2$

Opdracht 41 bladzijde 165

Op internet bestelt Ali 500 sensoren voor Arduino, een microcomputer waaraan je zelf allerlei sensoren en motoren kunt koppelen. In zijn zending zijn er precies 5 % defect.
Hij controleert willekeurig tien stuks uit de bestelling.

1 Waarom is de stochast *X* 'het aantal defecte stuks dat Ali tussen deze tien vindt' geen binomiale verdeling?

Aangezien het hier om een trekking zonder teruglegging gaat, zal de kans op een defecte sensor ('succes') veranderen na elke trekking.

2 Bereken de kans dat hij bij zijn controle precies vijf defecte stuks vindt.

5 % van 500 is 25, dus G = 25 en bijgevolg $X \sim H(500, 25, 10)$.

$$P(X=5) = \frac{\binom{25}{5}\binom{475}{5}}{\binom{500}{10}} = 0{,}0000426$$

Opdracht 42 bladzijde 165

In een klas van 24 leerlingen, waaronder 14 jongens en 10 meisjes, worden lukraak 4 leerlingen uitgekozen. Stel *X* 'het aantal jongens bij deze 4 leerlingen'.

Geef de kansverdeling van *X*.

We volgen hier het model van een trekking zonder teruglegging.

$X \sim H(24, 14, 4)$

We geven de kansverdeling met een formule:

$$P(X=k) = \frac{\binom{14}{k}\binom{10}{4-k}}{\binom{24}{4}}$$

Opdracht 43 bladzijde 165

Een doos bevat 5 glanzende en 4 doffe muntstukken. Je neemt lukraak 3 muntstukken één voor één uit de doos en legt ze niet terug.

Noem X 'het aantal getrokken doffe muntstukken'.

1 Stel een kansverdeling op van X.

$X \sim H(9, 4, 3)$

We geven de kansverdeling met een formule:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{9}{3}}$$

2 Bereken de verwachtingswaarde $E(X)$.

$$E(X) = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

Opdracht 44 bladzijde 165

Men gooit 100 maal 5 dobbelstenen en telt het aantal zessen bij elke worp. De resultaten staan in de volgende tabel.

aantal zessen	0	1	2	3	4	5
aantal worpen	42	38	18	2	0	0

1 Bereken de verwachtingswaarde op grond van deze experimentele verdeling.

Stel X 'het aantal zessen'.

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,42	0,38	0,18	0,02	0	0

$E(X) = 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}18 + 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}8$

2 Bereken de verwachtingswaarde op basis van de theoretische kansverdeling.

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

$$E(X) = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

Opdracht 45 bladzijde 165

Een vliegtuig heeft vier motoren. Als meer dan twee motoren het niet doen, stort het vliegtuig neer. Of een motor al dan niet werkt, is onafhankelijk van de werking van elk van de andere motoren. Voor elke motor is de kans dat die het doet p.

De kans dat het vliegtuig neerstort is:

A $(1-p)^4$

B $4p(1-p)^3+(1-p)^4$

C p^4

D $4(1-p)p^3+p^4$

Kiezen we voor X 'het aantal motoren die niet werken', dan is de kans op succes 1 – p.

De kans dat een vliegtuig neerstort is:

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)$$

$$=\binom{4}{3}(1-p)^3p+\binom{4}{4}(1-p)^4$$

Antwoord B.

Opdracht 46 bladzijde 166

We nemen aselect tien lampen uit een doos van dertig lampen waarvan er tien defect zijn. Stel X 'het aantal defecte lampen'.

1 Bereken $P(X=3)$ als

a de lampen na elke trekking teruggelegd worden;

Indien de lampen worden teruggelegd, beantwoordt de stochast X 'het aantal defecte lampen' aan een binomiale verdeling: $X\sim B\left(10,\frac{1}{3}\right)$. Bij elke trekking is de kans op een defecte lamp immers $\frac{1}{3}$. De kans op drie defecte lampen is gelijk aan

$$\binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0{,}2601.$$

b de lampen niet teruggelegd worden.

Indien de lampen niet worden teruggelegd, is X hypergeometrisch verdeeld:

$X\sim H(30, 10, 3)$. We vinden: $P(X=3)=\dfrac{\binom{10}{3}\binom{20}{7}}{\binom{30}{10}}\approx 0{,}3096.$

2 Stel dat er driehonderd lampen in de doos zitten waarvan er honderd stuk zijn.

Welke van beide kansen uit vraag **1** verandert hierdoor? Reken na.

a De kans op drie defecte lampen verandert niet, immers $X \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$, en is dus ongeveer gelijk aan 0,2601.

b De kans op drie defecte lampen is nu gelijk aan $\dfrac{\binom{100}{3}\binom{200}{7}}{\binom{300}{10}} \approx 0{,}2641$.

Merk op dat bij een groter aantal lampen de beide resultaten dichter bij elkaar liggen.

Opdracht 47 bladzijde 166

Een vliegtuig heeft 116 zitplaatsen. De ondervinding leert dat er gemiddeld 5 % van de passagiers niet opdaagt voor de geboekte vlucht.

Indien de maatschappij 120 tickets verkocht voor een vlucht met dit vliegtuig, bereken dan de kans dat er

1 meer dan 116 passagiers komen opdagen;

Stel X 'het aantal passagiers dat niet opdaagt'.

Of een bepaalde passagier niet opdaagt, wordt in het algemeen niet beïnvloed door het feit of een andere passagier niet opdaagt. We hebben dus te maken met een binomiale verdeling: $X \sim B(120; 0{,}05)$.

Er komen meer dan 116 passagiers opdagen of hoogstens 3 passagiers komen niet opdagen: $P(X \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{120}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{120-k} = 14{,}44\ \%$.

2 lege zitplaatsen zijn.

Er zijn lege zitplaatsen als er meer dan vier passagiers niet komen opdagen.

$P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) = 72{,}18\ \%$

Opdracht 48 bladzijde 166

Een dobbelsteen is bewerkt zodat de kans op 1 gooien minder is dan $\frac{1}{6}$.

Een experiment bestaat uit 25 worpen. Stel *X* 'het aantal enen'. Uit veel experimenten weet men dat de standaardafwijking 1,5 is.

1 Bepaal *p*.

$$\begin{aligned}
\sigma(X) = \sqrt{npq} = \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad npq = \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 25p(1-p) = \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -25p^2 + 25p = \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad p = \frac{9}{10} \text{ of } p = \frac{1}{10} \\
&\underset{p<\frac{1}{6}}{\Rightarrow} \quad p = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

2 Bereken de kans op juist driemaal 1 gooien.

$$P(X=3)=\binom{25}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^{22} \approx 0{,}2265 \ (22{,}65\,\%)$$

Opdracht 49 bladzijde 166

Bij de levering van een partij goederen wordt de volgende afspraak gemaakt. Uit de levering neemt men een steekproef van 20 artikelen. Bevat deze niet meer dan één defect artikel, dan wordt de partij aanvaard. Zijn er meer dan twee defecte bij, dan wordt de zending geweigerd. In geval van juist twee defecte stukken wordt een tweede steekproef van 20 genomen. Enkel als deze laatste geen enkel defect artikel bevat, wordt de partij aanvaard.

De kans dat de partij wordt aanvaard, is de som van twee kansen. We berekenen eerst de kans op een steekproef met niet meer dan één defect stuk. Hierbij tellen we de kans op dat er twee defecte stukken in de steekproef zitten én dat een volgende steekproef geen enkel defect stuk bevat.

1 Toon aan dat de kans op aanvaarding van de partij gelijk is aan $(1+19p)(1-p)^{19}+190p^2(1-p)^{38}$, waarin p de kans is op een defect artikel.

Stel X_1 het aantal defecte onderdelen bij de eerste steekproef en X_2 het aantal bij de tweede, indien die genomen wordt.

Dan is de kans dat de partij aanvaard wordt te schrijven als:

$$P(X_1=0 \text{ of } X_1=1 \text{ of } (X_1=2 \text{ en } X_2=0))$$
$$=P(X_1=0)+P(X_1=1)+P(X_1=2)\cdot P(X_2=0)$$
$$=\binom{20}{0}p^0(1-p)^{20}+\binom{20}{1}p(1-p)^{19}+\binom{20}{2}p^2(1-p)^{18}\binom{20}{0}p^0(1-p)^{20}$$
$$=(1-p)^{20}+20p(1-p)^{19}+190p^2(1-p)^{38}$$
$$=(1-p)^{19}(1+19p)+190p^2(1-p)^{38}$$

De kans op aanvaarding van de partij is $(1+19p)(1-p)^{19}+190p^2(1-p)^{38}$.

2 Bereken deze waarde voor $p=0{,}05$.

$p=0{,}05$

$\Rightarrow$ de kans op aanvaarding is ongeveer 0,8035 (80,35 %)

Opdracht 50 bladzijde 166

Alexandra en Lize spelen een spel waarbij ze 30 keer met een eerlijke munt gooien. Telkens als er kop valt, krijgt Alexandra een euro van Lize. Als er munt gegooid wordt, krijgt Lize een euro van Alexandra.

We kiezen als stochast X 'het aantal keer kop'.

1 Bereken de kans dat beide meisjes aan het einde van het spel niets verliezen.

Beide meisjes verliezen niets als ze evenveel keer kop als munt gooien dus:

$$P(X=15)=\binom{30}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=0{,}1445.$$

2 Bereken de kans dat Lize na de voorlaatste worp 1 euro winst heeft.

Na de voorlaatste worp heeft Lize 1 euro winst: dus er is 15 keer munt gegooid en 14 keer kop. We berekenen de kans op 14 keer kop bij 29 beurten:

$$P(X=14)=\binom{29}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{29}=0{,}1445.$$

3 Verklaar waarom je twee keer precies dezelfde kans vindt.

De formule geeft hetzelfde resultaat want

$$\binom{30}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\frac{30!}{15!\,15!}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$

$$=\frac{30\cdot 29!}{15\cdot 14!\,15!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$=\frac{30}{15}\cdot\frac{1}{2}\binom{29}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$=\binom{29}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

Het is verleidelijk om te denken dat deze kansen verschillend moeten zijn omdat de kans om beiden niets te verliezen, gegeven wordt door de laatste kans te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$ (nog een keer kop gooien). Dit is echter niet correct! Je moet hier immers nog de kans bij optellen dat in de laatste beurt munt wordt gegooid als er al 14 keer munt en 15 keer kop gegooid werd. Dit is hetzelfde getal maal $\frac{1}{2}$ zodat het totaal niet verandert.

Opdracht 51 bladzijde 167

Bij EuroMillions kruis je vijf getallen aan in een rooster van vijftig getallen (1 tot en met 50) en twee van de twaalf 'sterren' (eveneens getallen: 1 tot en met 12).
Per trekking worden vijf getallen uit de eerste vijftig en twee 'sterren' lukraak getrokken.

1 Toon aan dat de kans dat je geen enkel getal juist hebt, gelijk is aan 0,5766. Met de sterren hoef je in deze vraag geen rekening te houden.

We gebruiken het model van een trekking zonder teruglegging.

Kiezen we voor X 'het aantal juiste getallen', dan geldt: $X \sim H(50, 5, 5)$.

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}}=0{,}5766$$

2 Bereken de kans op 4 juiste getallen en 1 juiste 'ster'.

De kans op vier juiste getallen wordt gegeven door:

$$P(X=4)=\frac{\binom{5}{4}\binom{45}{1}}{\binom{50}{5}}=0{,}000106.$$

Stel Y 'het aantal juiste sterren', dan is $Y \sim H(12, 2, 2)$, zodat

$$P(Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{10}{1}}{\binom{12}{2}}=0{,}3030303.$$

De kans op vier juiste getallen EN een juiste ster vinden we met de productregel.

$P(X = 4 \text{ en } Y = 1) = 0{,}00003218$

Opdracht 52 bladzijde 167

Bij het spel 'chuck a luck' mag een speler € *a* inzetten op een van de getallen 1, 2, 3, 4, 5 of 6. Daarna worden drie dobbelstenen gegooid. Indien het resultaat telkens het ingezette nummer is, ontvangt de speler zijn inzet terug vermeerderd met nog drie keer de waarde van zijn inzet. Indien er twee resultaten juist zijn, krijgt hij zijn inzet en tweemaal het bedrag van die inzet terug. Bij één juist resultaat ontvangt hij zijn inzet plus eenmaal de waarde van de inzet. Indien echter geen enkel resultaat overeenkomt met het ingezette nummer, verliest hij zijn inzet. Noem de stochast *X* 'de winst bij één spel'.

Bereken de verwachte winst.

$X \sim B\left(3, \frac{1}{6}\right)$

- verlies van € a: $P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$
- winst van € a: $P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$
- winst van € 2a: $P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$
- winst van € 3a: $P(X=3)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

x	$-a$	a	$2a$	$3a$
$P(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$E(X)=\frac{a}{216}(-125+75+30+3)=-\frac{17}{216}a=-0{,}08a$$

$\Rightarrow$ een verlies van ongeveer 8 % van de inzet.

Opdracht 53 bladzijde 167

Op een rooster van een Lottoformulier kruis je zes van de vakjes, genummerd van 1 tot en met 45, aan. De winnende nummers worden bepaald door de zes lukraak getrokken balletjes, genummerd van 1 tot en met 45. Stel *X* 'het aantal winnende nummers in een rooster'.

1 Toon aan dat de kans dat je minstens twee winnende nummers aankruist 0,1753 is.

We gebruiken een hypergeometrische verdeling met N = 45, G = 6 en n = 6 en berekenen de kans op minstens 2 successen.

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}} - \frac{\binom{6}{1}\binom{39}{45}}{\binom{45}{6}} = 0{,}175308$$

2 Geef de formule voor de kans op *k* keer succes.

$$P(X=k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{39}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

3 Stel dat twaalf vrienden op die manier een Lottoformulier invullen.

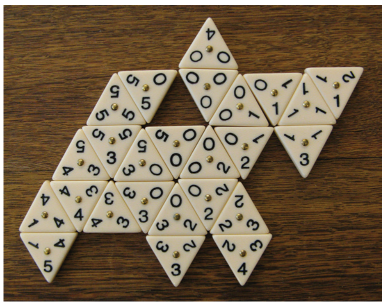
Wat is de kans dat minstens drie personen minstens twee winnende nummers aankruisen?

Stel Y 'het aantal personen dat minstens twee winnende nummers aankruist'.

$Y \sim B(12, p)$ waarbij $p = P(X \geqslant 2) = 0{,}1753$.

$$P(Y \geqslant 3) = 1 - P(Y \leqslant 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{12}{k} \cdot 0{,}1753^k \cdot 0{,}8247^{12-k} = 0{,}3534$$

Opdracht 54 bladzijde 168



Het spel Triominos bestaat uit driehoekige stenen. Op elke steen staan drie cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan een 0, 1, 2, 3, 4 of 5 zijn. Voor de stenen met drie verschillende cijfers geldt dat met de klok meedraaiend de cijfers in grootte oplopen als je met het kleinste cijfer begint. Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor.
Het spel bestaat uit 56 verschillende stenen. Je kunt de stenen in drie soorten verdelen:

- stenen met drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 5-5-5;
- stenen met precies twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-5-5;
- stenen met drie verschillende cijfers, bijvoorbeeld 3-4-5.

In de tabel zie je het begin van een overzicht van de aantallen stenen van elke soort. De laatste kolom van de tabel is nog niet helemaal ingevuld.

soort stenen	aantal
stenen met drie dezelfde cijfers	6
stenen met precies twee dezelfde cijfers	…
stenen met drie verschillende cijfers	…

1 Bereken de ontbrekende getallen zonder gebruik te maken van het gegeven dat het spel uit 56 stenen bestaat.

– Stenen met 2 dezelfde cijfers

We gebruiken de productregel. Er zijn 6 mogelijkheden voor de 2 gelijke cijfers en nog 5 mogelijkheden voor het derde cijfer dus $6 \cdot 5 = 30$.

– Stenen met 3 verschillende cijfers

$$\binom{6}{3} = 20$$

2 Bij het begin van het spel worden alle stenen zo op tafel gelegd dat de cijfers niet te zien zijn. Een steen met drie dezelfde cijfers erop heet een trio. Iedere speler moet zeven stenen pakken. De speler die begint pakt zeven stenen uit de 56 stenen die op tafel liggen.

Bereken de kans dat precies twee van deze zeven stenen trio's zijn.

(Bron © examen Wiskunde HAVO, mei 2008)

Stel X 'het aantal trio's', dan geldt: $X \sim H(56, 6, 7)$.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{50}{5}}{\binom{56}{7}} = 0{,}1370$$

Opdracht 55 bladzijde 169

Een sportarts beweert dat twintig procent van alle professionele wielrenners doping gebruikt. Neem aan dat hij gelijk heeft.

Na afloop van een rit in de Ronde van Frankrijk worden 10 toevallig geselecteerde renners op doping gecontroleerd. Stel dat de dopingcontrole volkomen betrouwbaar is.

Stel X 'het aantal renners dat op doping wordt betrapt', dan geldt: $X \sim B(10; 0{,}20)$.

1 Hoe groot is de kans dat er niemand van deze renners op doping wordt betrapt?

$P(X = 0) = 0{,}80^{10} = 0{,}1074$

2 Wat is de kans dat er precies 4 renners worden betrapt op dopinggebruik?

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}20^4 \cdot 0{,}80^6 = 0{,}0881$$

3 Bereken de verwachtingswaarde van het aantal renners dat doping gebruikte.

$E(X) = np = 10 \cdot 0{,}2 = 2$

4 De Ronde van Frankrijk telt 22 ritten. Na elke rit worden 10 aselect gekozen renners getest. De stochast *Y* geeft 'het aantal ritdagen dat er geen enkele renner van die 10 op doping wordt betrapt'.

Bereken de kans dat er minstens op 5 ritdagen geen dopinggebruik werd geconstateerd.

Stel Y 'het aantal dagen dat geen enkele renner van die 10 op doping wordt betrapt'.

Dan is $Y \sim B(22, p)$, met $p = 0{,}1074$.

$P(Y \geqslant 5) = 1 - P(Y \leqslant 4) = 0{,}0797$

Opdracht 56 bladzijde 169

Gegeven een binomiaal experiment met kans op succes p. Stel X 'het aantal herhalingen tot het eerste succes'.

1 Stel een formule op voor $P(X = k)$ met $k = 1, 2, \ldots$
We noemen deze kansverdeling de **geometrische** verdeling.

We berekenen eerst de kans dat we onmiddellijk succes hebben:
$P(X = 1) = p$

Vervolgens dat we na 2 keer succes hebben, dan na 3 keer enz. …
$P(X = 2) = p \cdot (1 - p)$
$P(X = 3) = p \cdot (1 - p)^2$

Algemeen:
$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$

2 Toon aan dat de som van alle kansen 1 is.

De som van alle kansen is $p + p(1 - p) + ... + p(1 - p)^{k-1} + ...$

We gebruiken de formule voor de reekssom van een meetkundige reeks met eerste term u_1 en reden (of quotiënt) $q < 1$: $\frac{u_1}{1-q}$. Hier is $u_1 = p$ en $q = 1 - p$.

We vinden: $\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$

3 Geef een formule voor $P(X > k)$.

$P(X > k) = p(1-p)^k + p(1-p)^{k+1} + \ldots$

$= p(1-p)^k \left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots\right]$

$= p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$

Opdracht 57 bladzijde 169

Gebruik de geometrische verdeling uit de vorige oefening om het volgende probleem op te lossen:

"Twee vrienden bezoeken een stad met 20 cafés. Ze hebben om 12 u met elkaar afgesproken in één van de cafés maar weten niet meer welk. Ze besluiten beiden volgende strategie te volgen. Beginnend om 12 u gaan ze om de 10 minuten willekeurig naar een van de 20 cafés, wachten daar en herhalen dit tot ze elkaar treffen."

1 Wat is de kans dat ze elkaar in het eerste café al treffen?

Vermits er 20 café's zijn, is de kans op succes bij het binomiaal experiment: $p = \frac{1}{20}$.

De formule voor de kans op succes bij een geometrische verdeling is

$P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ dus $P(X = 1) = \frac{1}{20}$.

2 Wat is de kans dat ze elkaar treffen voor 13 u?
Je kunt hiervoor gebruik maken van de formule uit de laatste vraag van de vorige opdracht.

Tussen 12 u en 13 u zijn er 6 perioden van 10 minuten. Het gevraagde komt neer op het berekenen van $P(X < 6)$.

$P(X < 6) = 1 - P(X > 5) = 1 - \left(1 - \frac{1}{20}\right)^5 = 22{,}62\,\%$

3 De verwachtingswaarde van een geometrische verdeling is $E(X) = \frac{1}{p}$.

Wat is het verwachte tijdstip waarop ze elkaar treffen?

$E(X) = 20$, dus 20 keer 10 min na 12u is 15.20 u.

Opdracht 58 bladzijde 170

De massa in kg van dozen waspoeder is normaal verdeeld met parameters $\mu = 7{,}92$ en $\sigma = 0{,}20$.

Wat is de kans dat een doos waspoeder minder dan 8 kg weegt?

Stel X 'de massa in kg', dan is $X \sim \text{Norm}(7{,}92; 0{,}20)$

$P(X < 8) \approx 0{,}6554 \;\; (65{,}54\,\%)$

Opdracht 59 bladzijde 170

De levensduur van een bepaald type lampen is normaal verdeeld met $\mu = 1000$ u en $\sigma = 120$ u.

Wat is de kans dat een lukraak gekozen lamp meer dan 900 uren brandt?

Stel X 'de levensduur in uren', dan geldt: $X \sim \text{Norm}(1000, 120)$.

$P(X > 900) \approx 0{,}7977 \;\; (79{,}77\,\%)$

Opdracht 60 bladzijde 170

De pH van het bloed wordt de zuurgraad van het bloed genoemd. Bij mensen is deze normaal verdeeld met parameters $\mu = 7{,}4$ en $\sigma = 0{,}2$.

Stel X 'de pH van het bloed', dan geldt: $X \sim \text{Norm}(7{,}4; 0{,}2)$.

1 Wat is de kans dat bij een willekeurig geteste persoon de zuurgraad een waarde heeft tussen 7,25 en 7,55?

$P(7{,}25 < X < 7{,}55) \approx 0{,}5467 \;\; (54{,}67\,\%)$

2 Indien de pH-waarde kleiner is dan 7,15 of groter is dan 7,7 moet er een extra test worden gedaan.

Bereken de kans op een extra test.

$P(X < 7{,}15) + P(X > 7{,}7) \approx 0{,}1725 \;\; (17{,}25\,\%)$

Opdracht 61 bladzijde 170

Een stochast is normaal verdeeld met verwachtingswaarde 100 en standaardafwijking 10.

Hoe groot is de kans dat een resultaat meer dan 4 afwijkt van 100?

$X \sim \text{Norm}(100, 10)$

$P(X < 96) + P(X > 104) = 1 - P(96 \leqslant X \leqslant 104) \approx 0{,}6892 \;\; (68{,}92\,\%)$

Opdracht 62 bladzijde 170

De bevolking op een zeker continent bestaat uit 50 % mannen en 50 % vrouwen. De lengte van de mannen is normaal verdeeld, met gemiddelde 180 cm en standaardafwijking 5 cm. De lengte van de vrouwen is ook normaal verdeeld, met gemiddelde 170 cm en standaardafwijking 10 cm. Twee personen worden lukraak gekozen.

Bereken de kans dat beide personen minstens 180 cm groot zijn.

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, juli 2018)

$P(\text{man} > 180) = \frac{1}{2}$ want $\mu = 180$.

$P(\text{vrouw} > 180) = 0{,}16$ want volgens de vuistregel ligt 68 % van de meetresultaten binnen het interval $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [160, 180]$, dus ligt 16 % voorbij 180 cm.

We kiezen lukraak twee personen. Hierbij is de kans op 2 mannen 0,25; de kans op 2 vrouwen is ook 0,25; de kans op een man en een vrouw is 0,50.

P(twee personen groter dan 180 cm)

$= 0{,}25 \cdot 0{,}50^2 + 0{,}50 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}16 + 0{,}25 \cdot 0{,}16^2$

$= 0{,}1089$

Opdracht 63 bladzijde 171

Een fabrikant van oliedrukmeters garandeert zijn klanten een eenmalige gratis vervanging in geval van defect binnen het eerste jaar en daarna tegen halve prijs bij defect binnen twee jaar. De levensduur van een oliedrukmeter heeft een normale verdeling met gemiddelde 3,5 jaar en standaardafwijking 0,85 jaar.

1 Bereken de kans op een defect

a binnen het jaar;

b binnen twee jaar (maar na meer dan één jaar).

Stel X 'de levensduur van een oliedrukmeter', dan geldt: $X \sim \text{Norm}(3{,}5; 0{,}85)$.

a $P(X < 1) = 0{,}0016 = 0{,}16\ \%$

b $P(1 < X < 2) = 0{,}0372 = 3{,}72\ \%$

2 Als de verkoopprijs € 12,50 bedraagt, waarvan € 7,50 productiekosten zijn, bereken dan de verwachte winst per verkochte oliedrukmeter (een meter wordt slechts eenmaal vervangen).

Vervanging binnen het jaar geeft een verlies van € 5 – € 12,5 = – € 7,5.
De kans hierop is 0,0016.

Vervanging tussen 1 en 2 jaar geeft een verlies van € 5 – € 6,25 = – € 1,25.
De kans hierop is 0,0372.

In alle andere gevallen (100 % – 3,88 % = 96,12 %) is er € 5 winst.

Dit geeft voor de verwachtingswaarde:

E(X) = – € 7,5 · 0,0016 – € 1,25 · 0,0372 + € 5 · 0,9612 = € 4,7475.

De verwachte winst is € 4,75.

Opdracht 64 bladzijde 171

Het IQ van een bepaalde bevolkingsgroep is normaal verdeeld met gemiddelde 100 en standaardafwijking 15.

Wat is de kans dat minstens vijf van tien willekeurig gekozen personen uit de bevolking een IQ heeft van minstens 125?

Stel X 'het IQ van een bepaalde bevolkingsgroep', dan geldt X ~ Norm(100, 15).
De kans dat een willekeurig persoon een IQ heeft van minstens 125 is
$P(X \geqslant 125) = \text{normalcdf}(125, 10^{99}, 100, 15) = 0{,}04779$.

Stel Y 'het aantal personen met een IQ groter dan 125', dan geldt: Y ~ B(10; 0,04779).
De gevraagde kans is $P(Y > 5) = 1 - P(Y \leqslant 5) = 0{,}000212\ \%$.

Opdracht 65 bladzijde 171

Vooraf: voor een normaal verdeelde toevalsvariabele X geldt de 68-95-99,7 vuistregel:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$; $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$; $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.

De score van een examen in eerste zittijd is normaal verdeeld met gemiddelde μ_1 en standaardafwijking σ_1. De score van het examen in tweede zittijd is ook normaal verdeeld met gemiddelde μ_2 en standaardafwijking σ_2. Stel dat $\mu_2 = \mu_1 + \sigma_1$ en $\sigma_2 = 2\sigma_1$ en beschouw de score $x = \mu_2 + \sigma_2$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

A De kans om in de tweede zittijd minstens de score x te behalen is ongeveer 10 keer kleiner dan de kans om in de eerste zittijd minstens de score x te behalen.

B De kans om in de tweede zittijd minstens de score x te behalen is ongeveer gelijk aan de kans om in de eerste zittijd minstens de score x te behalen.

C De kans om in de tweede zittijd minstens de score x te behalen is ongeveer 10 keer groter dan de kans om in de eerste zittijd minstens de score x te behalen.

D De kans om in de tweede zittijd minstens de score x te behalen is ongeveer 100 keer groter dan de kans om in de eerste zittijd minstens de score x te behalen.

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2017)

Omdat $\sigma_2 = 2\sigma_1$ en $\mu_2 = \mu_1 + \sigma_1$ vinden we voor de eerste zittijd:
$x = \mu_2 + \sigma_2 = \mu_1 + \sigma_1 + 2\sigma_1 = \mu_1 + 3\sigma_1$.

Ongeveer 99,7 % van de scores ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$. Dus ligt ongeveer $\frac{1}{2} \cdot 0{,}3\ \%$ of 0,15 % van de scores rechts van $\mu + 3\sigma$.
In de eerste zittijd geldt dus: $P(X > x) = 0{,}0015$.

De score x is gegeven in de tweede zittijd: $x = \mu_2 + \sigma_2$.

Ongeveer 68 % van de resultaten ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$. Dus ligt ongeveer $\frac{32}{2}\ \%$ of 16 % van de scores rechts van $\mu + \sigma$. Daaruit volgt dat in de tweede zittijd $P(X > x) = 0{,}16$.

Deze kans is ongeveer 100 keer groter dan die in eerste zittijd.

Antwoord D is juist.

Opdracht 66 bladzijde 172

Bij een continue stochast berekenen we de kans dat een resultaat in een bepaald interval $[x_1, x_2]$ ligt als oppervlakte tussen de dichtheidskromme en de x-as over dat interval. We moeten dus de integraal van de kansdichtheidsfunctie f over dit interval berekenen: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

1 Een stochast X is gedefinieerd in het interval $[0, k]$. De bijbehorende kansdichtheidsfunctie heeft in dat interval als voorschrift $f(x) = x^2$.

Bepaal de waarde van k.

De totale oppervlakte onder de kansdichtheidsfunctie over het gegeven interval moet gelijk zijn aan 1: $\int_0^k x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^k = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3}{3} = 1.$$

Bijgevolg is $k = \sqrt[3]{3}$.

2 Pakjes bloemsuiker hebben niet altijd exact de vereiste massa van 250 g. Onderzoek bij een bepaalde vulmachine heeft uitgewezen dat hun massa varieert tussen 237,5 g en 262,5 g en dat elke massa even waarschijnlijk is. Op basis hiervan heeft men het voorschrift $f(x) = 0{,}04$ opgesteld voor de kansdichtheidsfunctie van de continue stochast X 'de massa van een pakje bloemsuiker in gram'.

a Toon aan dat dit een goede kansdichtheidsfunctie is.

De oppervlakte onder de dichtheidsfunctie over het interval is hier de oppervlakte van een rechthoek met lengte 262,5 – 237,5 = 25 en hoogte 0,04. Deze oppervlakte is 1. Het is dus een goede kansdichtheidsfunctie.

b Bereken de kans dat een pakje bloemsuiker meer dan 255 g weegt.

$P(X > 255) = 7{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}3$

3 De tijd in uren tot een belangrijk onderdeel van een machine stukgaat, heeft als kansdichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{2000} \cdot e^{\frac{-1}{2000}x}$ met $x \geqslant 0$.

a Ga na dat dit een goede kansdichtheidsfunctie is.

De oppervlakte onder de kansdichtheidsfunctie is

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2000}\int_0^k e^{\frac{-1}{2000}x}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-e^{\frac{-1}{2000}x}\right]_0^k = \lim_{k\to+\infty}\left(-e^{\frac{-k}{2000}} + 1\right) = 1.$$

b Wat is de kans dat het onderdeel minder dan 2000 uren meegaat?

$P(X \leqslant 2000) =$

$$\frac{1}{2000}\int_0^{2000} e^{\frac{-1}{2000}x}\,dx = \left[-e^{\frac{-1}{2000}x}\right]_0^{2000} = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

c Bereken de kans dat het onderdeel meer dan 1000 uren werkt.

$P(X > 1000) = 1 - P(X \leqslant 1000)$

$$P(X \leqslant 1000) = \frac{1}{2000}\int_0^{1000} e^{\frac{-1}{2000}x}\,dx = \left[-e^{\frac{-1}{2000}x}\right]_0^{1000} = -e^{\frac{-1}{2}} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

De kans dat het onderdeel meer dan 1000 uren meegaat is $1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Opdracht 67 bladzijde 172

Exponentiële verdeling

Een exponentiële verdeling wordt gebruikt om de tijd tussen het optreden van twee opeenvolgende gebeurtenissen te modelleren, wanneer de gebeurtenissen continu en onafhankelijk van elkaar optreden met een constante gemiddelde tussentijd.

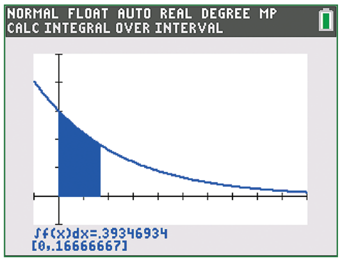
Stel X 'de tijd tussen twee opeenvolgende gebeurtenissen' en λ het gemiddeld aantal gebeurtenissen per tijdseenheid. Dan heeft X een verdeling die beschreven wordt door de dichtheidsfunctie $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. We noemen dit de **exponentiële verdeling**.

Met gemiddeld λ gebeurtenissen per tijdseenheid, is de gemiddelde tijd tussen twee gebeurtenissen $\frac{1}{\lambda}$ van een tijdseenheid: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Voorbeeld

Aan de bushalte staat een bord waarop je afleest dat er gemiddeld 3 bussen per uur langskomen. Je ziet de bus net wegrijden. Wat is de kans dat je minder dan 10 minuten op de volgende bus zal moeten wachten?

- De stochast X 'de tijd, uitgedrukt in uur, tussen de aankomst van twee opeenvolgende bussen' modelleren we met een exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 3$, dus $f(x) = 3e^{-3x}$.
- De kans dat de stochast een waarde in een interval aanneemt, vinden we door de oppervlakte tussen de exponentiële kromme en de x-as over dat interval uit te rekenen.
  Minder dan 10 minuten wachten, in uren uitgedrukt, betekent dat de tijd in het interval $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ ligt. We berekenen de oppervlakte via een integraal.
- Op een grafisch rekentoestel lezen we af dat er een kans van ongeveer 40 % is dat we minder dan 10 min op de bus moeten wachten.



Los nu de volgende opgaven op.

1 Bij het meten van een bepaalde radioactieve bron geeft een geigerteller gemiddeld 12 klikken per minuut. Stel X 'de tijdsduur tussen twee opeenvolgende klikken'. De stochast is exponentieel verdeeld.

Bereken de kans dat de tijdsduur tussen twee opeenvolgende klikken minder dan 10, maar meer dan 5 seconden bedraagt.

Er zijn 12 klikken per minuut of $\frac{1}{5}$ klik per seconde dus $\lambda = \frac{1}{5}$.

$$P(5 < X < 10) = \frac{1}{5}\int_5^{10} e^{\frac{-1}{5}x}\,dx = \left[-e^{\frac{-1}{5}x}\right]_5^{10} = \frac{-1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e^2}$$

2 In een grote garage staan 3 kapotte wagens met eenzelfde defect. Om dit te herstellen, komt een specialist langs die gemiddeld 2,5 u per herstelling nodig heeft.

Bereken de kans dat hij voor elk van de wagens niet meer dan 2,5 u nodig heeft om de reparatie uit te voeren.

Er geldt: $E(X) = \frac{5}{2} = \frac{1}{\lambda}$. Hieruit volgt dat $\lambda = \frac{2}{5}$.

$$P(X < 2{,}5) = \frac{2}{5}\int_0^{\frac{5}{2}} e^{\frac{-2}{5}x}\,dx = \left[-e^{\frac{-2}{5}x}\right]_0^{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

3 Op een vrijdagnamiddag tussen 14 u en 16 u worden er aan een loket gemiddeld 90 personen geholpen.

Hoe groot is de kans dat er meer dan 2 minuten maar minder dan 4 minuten verloopt tussen het helpen van twee opeenvolgende klanten?

Er worden 90 personen geholpen in 120 minuten, dus de gemiddelde wachttijd is

$$E(X) = \frac{120}{90} = \frac{4}{3} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$P(2 < X < 4) = \frac{3}{4}\int_2^4 e^{\frac{-3}{4}x}\,dx = \left[-e^{\frac{-3}{4}x}\right]_2^4 = \frac{-1}{e^3} + \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{e^3}-1}{e^3}$$

Opdracht 68 bladzijde 174

We gooien tienmaal met een eerlijk muntstuk.

Stel X 'het aantal keer munt', dan geldt: $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Bereken de kans dat we

1 juist zesmaal munt hebben;

$$P(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}2051\ (20{,}51\%)$$

2 twee-, drie- of viermaal munt hebben;

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \sum_{k=2}^{4}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \sum_{k=2}^{4}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}3662\ (36{,}62\ \%)$$

3 ten minste zevenmaal munt hebben.

$$P(X \geqslant 7) = \sum_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \sum_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}1719\ (17{,}19\ \%)$$

Opdracht 69 bladzijde 174

De loten van een tombola, genummerd van 1000 tot 9999, zijn allemaal verkocht.

1 Bereken de verwachtingswaarde van de stochast 'het getrokken nummer'.

De stochast is uniform verdeeld.

Het aantal loten is 9000.

$$P(X = x) = \frac{1}{9000}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{9000}(1000 + 1001 + ... + 9999) \\ &= \frac{1}{9000} \cdot \frac{(1000 + 9999) \cdot 9000}{2} \\ &= 5499{,}5 \end{aligned}$$

2 Stel dat er 100 prijzen zijn. Je koopt 20 loten.

Wat is de kans dat je 1 prijs wint?

Stel Y 'het aantal gewonnen prijzen', dan geldt: $Y \sim B\left(20, \frac{100}{9000}\right)$.

$$P(Y = 1) = \binom{20}{1} \cdot \frac{1}{90} \cdot \left(\frac{89}{90}\right)^{19} = 0{,}1797$$

Opdracht 70 bladzijde 174

Een winkel heeft twintig televisietoestellen in stock, waarvan er door een fout bij de levering drie stuk zijn. Een hotelmanager koopt willekeurig twee van deze twintig toestellen.

1 Stel de kansverdeling op van de stochast *X* 'het aantal defecte toestellen'.

Omdat deze aankoop een trekking zonder teruglegging voorstelt, is de stochast hypergeometrisch verdeeld: $X \sim H(20, 3, 2)$.

We kunnen de kansverdeling geven via de formule:

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{17}{2-k}}{\binom{20}{2}}$$

of via de tabel:

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

2 Bereken E(*X*).

$$E(X) = 2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$$

Opdracht 71 bladzijde 174

Rode zure beertjes zijn mijn favoriete snoepje. Als ik willekeurig een beertje neem uit een bokaal, is de kans om een rood beertje te trekken altijd 0,21. Ik grabbel een handvol van 13 beertjes uit de pot.

Wat is de kans dat ik minstens 5 rode beertjes bemachtigd heb?

A 0,0797 **B** 0,1173 **C** 0,8827 **D** 0,9625

(Bron © ACTM State Exam Statistics, 2016)

De kans op het trekken van een rood beertje verandert niet. Het gaat hier dus om een binomiale verdeling: $X \sim B(13; 0{,}21)$, met X het aantal getrokken rode beertjes.

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{13}{k} \cdot 0{,}21^k \cdot 0{,}79^{13-k} = 0{,}1173$$

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 72 bladzijde 175

Een toeristische attractie in de buurt van Cancun is het duiken naar stierhaaien. Een trotse duiker beweerde dat hij een haai van 3 m lang gezien had. Mannelijke stierhaaien worden het grootst. Hun lengte heeft een normale verdeling met een gemiddelde van 2,25 m en een standaardafwijking van 0,42 m.

Bepaal de kans dat een willekeurig exemplaar een lengte heeft die

1 groter is dan 3 m;

$P(X > 3) = 0{,}0371$

2 gelegen is tussen 3 m en 3,25 m.

$P(3 < X < 3{,}25) = 0{,}0284$

Opdracht 73 bladzijde 175

Een spaarpot bevat drie stukken van € 1 en vijf stukken van € 2. Een tweede spaarpot bevat dertig stukken van € 1 en vijftig stukken van € 2. Je trekt uit beide spaarpotten willekeurig twee geldstukken zonder terugleggen. Stel X 'de getrokken som uit de eerste spaarpot' en Y 'de getrokken som uit de tweede spaarpot'.

Bereken de verwachtingswaarde van X en Y.

De twee getrokken geldstukken kunnen voor beide spaarpotten bestaan uit: twee stukken van 1 euro of één stuk van 1 euro en één stuk van 2 euro of twee stukken van 2 euro. De bijbehorende sommen, en dus mogelijke waarden van X en Y, zijn 2 euro, respectievelijk 3 euro en 4 euro.

Voor de berekening van de bijbehorende kansen bij stochast X voeren we een nieuwe stochast Z in die 'het aantal muntstukken van 1 euro' voorstelt in de eerste spaarpot. Omdat de geldstukken zonder teruglegging genomen worden, zal Z hypergeometrisch verdeeld zijn: $Z \sim H(8, 3, 2)$.

Er geldt:

$$P(X=2)=P(Z=2)=\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

$$P(X=3)=P(Z=1)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=4)=P(Z=0)=\frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$$

Bijgevolg zal $E(X)=2\cdot\frac{3}{28}+3\cdot\frac{15}{28}+4\cdot\frac{10}{28}=\frac{91}{28}=3{,}25.$

Op een analoge manier voeren we een nieuwe stochast V in die 'het aantal muntstukken van 1 euro' voorstelt in de tweede spaarpot: $V \sim H(80, 30, 2)$.

$$P(Y=2)=P(V=2)=\frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{80}{2}}=\frac{87}{632}$$

$$P(Y=3)=P(V=1)=\frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{80}{2}}=\frac{300}{632}$$

$$P(Y=4)=P(V=0)=\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{50}{2}}{\binom{80}{2}}=\frac{245}{632}$$

Nu geldt er: $E(Y)=2\cdot\frac{87}{632}+3\cdot\frac{300}{632}+4\cdot\frac{245}{632}=\frac{2045}{632}=3{,}25.$

Opdracht 74 bladzijde 175

Een concertzaal heeft 800 zitplaatsen. De ervaring leert dat 1,25 % van de personen die een kaart gekocht hebben door onvoorziene omstandigheden niet kan komen. Voor een voorstelling worden 810 kaarten verkocht.

Stel X 'het aantal personen dat niet komt', dan geldt: $X \sim B(810; 0{,}0125)$.

1 Wat is de kans dat er meer dan 800 mensen komen opdagen?

Als er meer dan 800 personen komen opdagen, zijn er 9 personen of minder die niet komen opdagen. De kans hierop is $P(X \leqslant 9) = \sum_{k=0}^{9} \binom{810}{k} \cdot 0{,}0125^k \cdot 0{,}9875^{810-k} = 0{,}442$.

2 Wat is de kans dat er precies 800 mensen komen?

Als er precies 800 mensen komen, zijn er precies 10 die niet komen.
$P(X = 10) = 0{,}126$

3 Wat is de kans dat er lege plaatsen zijn?

Er zijn lege plaatsen als er meer dan 10 personen niet komen.
$P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 0{,}433$

Opdracht 75 bladzijde 175

Vooraf: voor een normaal verdeelde toevalsvariabele X geldt de 68-95-99,7 vuistregel:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}68$; $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$; $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$. Met deze gegevens kan de opgave opgelost worden zonder rekentoestel.

Het IQ van een bepaalde bevolkingsgroep is normaal verdeeld. Van deze groep heeft 16 % een IQ van minder dan 95 en 2,5 % haalt een IQ hoger dan 125. Twee mensen worden lukraak uit deze bevolkingsgroep gekozen.

Bereken de kans dat minstens één van beiden een IQ heeft dat hoger is dan 115.

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2017)

Stel X 'het IQ van een persoon uit een gegeven bevolkingsgroep'. Er is gegeven dat $X \sim Norm(\mu, \sigma)$.

Omdat $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$ zal $P(X < \mu - \sigma) = P(X > \mu + \sigma) = 0{,}16$. Er is gegeven dat 16 % een IQ heeft van minder dan 95. Samen geeft dit: $\mu - \sigma = 95$ (1).

Analoog: $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$; zodat $P(X > \mu + 2\sigma) = 0{,}025$. Er is gegeven dat 2,5 % een IQ heeft hoger dan 125. Samen geeft dit: $\mu + 2\sigma = 125$ (2).

Uit (1) en (2) volgt dat $\mu = 105$ en $\sigma = 10$, zodat $P(X > 115) = P(X > \mu + \sigma) = 0{,}16$. Bijgevolg zal $P(X < 115) = 0{,}84$.

We kiezen twee mensen lukraak uit deze bevolkingsgroep. Er geldt:

P(minstens één van beiden heeft een IQ > 115)

$= 1 - P(\text{beiden hebben een IQ} < 115)$

$= 1 - 0{,}84 \cdot 0{,}84$

$= 0{,}2944$

Opdracht 76 bladzijde 175

In een vaas zitten vier groene en drie gele knikkers. Uit de vaas neem je zonder terugleggen knikkers tot je er drie groene hebt. De stochast *X* is het aantal knikkers dat je hiervoor uit de vaas moet halen.

1 Wat is de waardenverzameling *W* van *X*?

Je kan onmiddellijk 3 groene knikkers nemen, zodat 3 de minimale waarde in W is. Het is mogelijk dat je 1, 2 of 3 gele knikkers trekt voordat je in totaal 3 groene knikkers nam. De waarden 4, 5 en 6 zijn dus ook mogelijk.

Samen geeft dit: $W = \{3, 4, 5, 6\}$.

2 Geef in een tabel de kansverdeling van *X*.

Omdat je knikkers neemt uit een vaas zonder teruglegging, zal de kans bij elke trekking wijzigen. Omdat de laatste knikker altijd groen moet zijn, kan X echter niet hypergeometrisch verdeeld zijn.

De kans om dadelijk 3 groene knikkers te trekken, is: $P(X=3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{35}$.

De kans om 1 gele knikker te trekken, voordat je in totaal 3 groene knikkers nam, is:
$P(X=4)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 3=\frac{9}{35}$. Merk op dat de gele knikker niet als laatste kan getrokken worden, zodat de term $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$ maar 3 keer voorkomt in de berekening (en niet 4 keer).

De kans om 2 gele knikkers te trekken, voordat je in totaal 3 groene knikkers nam, is:
$P(X=5)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\binom{4}{2}=\frac{12}{35}$. Omdat de laatst getrokken knikker groen moet zijn, kunnen de 2 gele knikkers maar op $\binom{4}{2}$ mogelijke plaatsen staan in de trekking .

De kans om 3 gele knikkers te trekken, voordat je in totaal 3 groene knikkers nam, is:
$P(X=6)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\binom{5}{3}=\frac{10}{35}$. Omdat de laatst getrokken knikker groen moet zijn, kunnen de 3 gele knikkers maar op $\binom{5}{3}$ mogelijke plaatsen staan in de trekking .

Zo vinden we de volgende kansverdeling:

x	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{10}{35}$

3 Bereken $E(X)$.

$$E(X)=3\cdot\frac{4}{35}+4\cdot\frac{9}{35}+5\cdot\frac{12}{35}+6\cdot\frac{10}{35}=\frac{168}{35}=4{,}8$$

Opdracht 77 bladzijde 176

Een fruitteler verkoopt op een fruitveiling appels onderverdeeld in drie klassen. Appels van maat 75/80 wegen per stuk tussen 175 g en 200 g, die van maat 80/85 wegen tussen 200 en 225 g en die van maat 85/90 tussen 225 en 250 g. Hij krijgt per appel gemiddeld € 0,06 voor de eerste soort, € 0,09 voor de tweede soort en € 0,13 voor de laatste soort. Appels die niet behoren tot deze drie klassen, worden niet verkocht. De fruitteler weet dat de massa van de appels in zijn boomgaard normaal verdeeld is met een gemiddelde van 215 g per appel en een standaardafwijking van 23 g.

Welke inkomsten mag de fruitteler verwachten als hij 25 000 appels plukt?

Stel X 'de massa van een appel uit de boomgaard', dan geldt: X ~ Norm(215, 23).

We berekenen eerst het percentage appelen van elke klasse:

$P(175 < X < 200) = 0{,}2161$

$P(200 < X < 225) = 0{,}4110$

$P(225 < X < 250) = 0{,}2678$

Op een totaal van 25 000 appels zijn er dus 21,61 % of 5403 van de eerste klasse; 41,10 % of 10 275 van de tweede klasse en 26,78 % of 6696 van de derde klasse.

Dit levert als inkomsten: $5403 \cdot 0{,}06 + 10\,275 \cdot 0{,}09 + 6696 \cdot 0{,}13 = 2119{,}41$.

De fruitteler mag dus € 2119,41 aan inkomsten verwachten als hij 25 000 appels plukt.

Opdracht 78 bladzijde 176

Rik gooit 100 keer met een eerlijke dobbelsteen. *X* is 'het aantal zessen dat Rik gooit'.

1 Vul aan: $P(X \leqslant 10) = \sum_{k=0}^{\dots} \binom{\dots}{\dots} \dots$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}$$

2 Welke kans bereken je met $\sum_{k=0}^{49} \binom{100}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99-2k}$?

Dit is de kans op het gooien van een oneven aantal zessen:

$$\binom{100}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{99} + \binom{100}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{97} + \dots + \binom{100}{99} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{99} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$$

Opdracht 79 bladzijde 176

Ter gelegenheid van een jubileum organiseert een grote universiteit een loterij.

Elke student krijgt één lot. Er vinden twee trekkingen plaats. Bij de eerste trekking wordt bepaald welke nummers een hoofdprijs van 500 euro winnen. Deze nummers worden teruggelegd en uit het totaal worden vervolgens de nummers getrokken die een troostprijs van 100 euro winnen.

Op 5 % van de loten valt een prijs van 500 euro en op 20 % van de loten een prijs van 100 euro.

Op één lot kunnen dus zowel een hoofd- als een troostprijs vallen.

1 Thomas is een student die zo'n lot gekregen heeft.

Toon aan dat de kans dat Thomas minstens een prijs wint, gelijk is aan 0,24.

P(prijs) = 1 – P(geen prijs) = 1 – 0,95 · 0,80 = 0,24

2 Een studentenvereniging bestaande uit 20 studenten spreekt af dat ieder lid het gewonnen prijzengeld in de clubkas stort. Op het einde van het studiejaar zal er dan een activiteit georganiseerd worden die betaald wordt met het prijzengeld.

Wat is de kans dat minstens 8 leden van de studentenvereniging in de prijzen vallen?

Stel X 'het aantal leden dat een prijs wint', dan is $X \sim B(20; 0{,}24)$.

$$P(X \geqslant 8) = 1 - P(X \leqslant 7) = 1 - \sum_{k=0}^{7} \binom{20}{k} \cdot 0{,}24^k \cdot 0{,}76^{20-k} = 0{,}0835$$

3 Bereken hoeveel prijzengeld per student de studentenvereniging bij de twee trekkingen naar verwachting zal winnen.

Met een kansboom kunnen de kansen op de verschillende te winnen bedragen snel berekend worden. Hiermee berekenen we dan de verwachtingswaarde:

E(X) = 0,76 · € 0 + 0,19 · € 100 + 0,04 · € 500 + 0,01 · € 600 = € 45

(Bron © eindexamen Nederland wiskunde VWO, 2003)

Opdracht 80 bladzijde 177

Als de snelheidsmeter van je auto 50 km/h aangeeft, is de waarde van de werkelijke snelheid normaal verdeeld met gemiddelde 48 km/h en standaardafwijking 0,75 km/h. Bij het binnenrijden van een bebouwde kom staat een bord met een lachende smiley die oplicht als je minder dan 50,0 km/h rijdt. Stel dat er 200 wagens voorbij het bord rijden met een snelheid van precies 50 km/h op de teller.

Wat is de kans dat er twee keer een droevige smiley oplicht?

De werkelijke snelheid volgt een normale verdeling: Norm(48; 0,75). De kans om in werkelijkheid sneller dan 50 km/h te rijden als de teller 50 km/h aangeeft, is bijgevolg 0,00383 (TI84: normalcdf(50,10^{99},48,.75)).

Stel X 'het aantal auto's dat meer dan 50 km/h rijdt', dan is $X \sim B(200; 0{,}00383)$.

$$P(X = 2) = \binom{200}{2} \cdot 0{,}00383^2 \cdot 0{,}99617^{198} = 0{,}1365$$

Opdracht 81 bladzijde 177

Na het testen van de geproduceerde batterijen worden de goede verpakt en de defecte gerecycleerd. Men kan aantonen dat 15 % van de geproduceerde batterijen moet worden gerecycleerd.

Hoeveel batterijen moet je minimum nemen opdat de kans op minstens drie goede batterijen groter is dan 98 %?

Stel X 'het aantal goede batterijen' wanneer je er n neemt, dan is $X \sim B(n; 0{,}85)$.

$P(X \geqslant 3) > 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - P(X \leqslant 2) > 0{,}98 \Leftrightarrow P(X \leqslant 2) < 0{,}02$

$$P(X \leqslant 2) = \binom{n}{0} 0{,}15^n + \binom{n}{1} 0{,}85 \cdot 0{,}15^{n-1} + \binom{n}{2} 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{n-2}$$

$$= 0{,}15^n + n0{,}85 \cdot 0{,}15^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{n-2}$$

Met een grafisch rekentoestel stellen we van deze functie een tabel op.

Voor $n = 5$ vinden we $P(X \leqslant 2) = 0{,}0266 > 0{,}02$ en voor $n = 6$ vinden we $P(X \leqslant 2) = 0{,}0059 < 0{,}02$.

Je moet dus minimum 6 batterijen nemen.