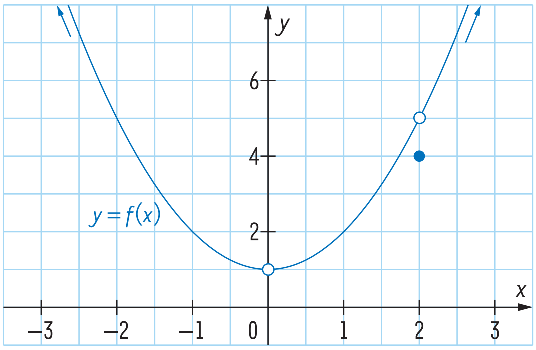
Hoofdstuk 8

Limieten en continuïteit

Opdracht 1 bladzijde 109

De functie f is gegeven door haar grafiek. De pijltjes suggereren het verdere verloop.



Bepaal de volgende limieten, indien ze bestaan.

1 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

2 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

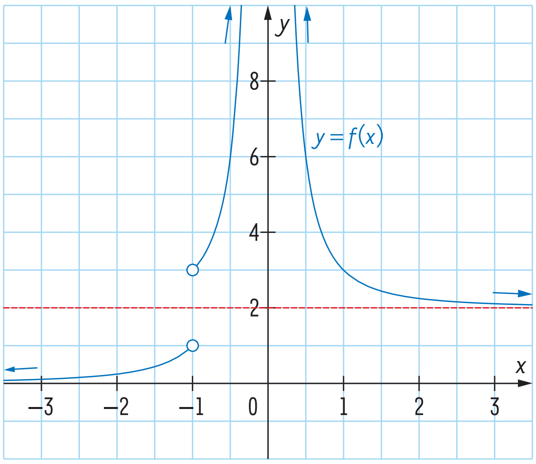
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Opdracht 2 bladzijde 109

De functie f is gegeven door haar grafiek.



Bepaal de volgende limieten, indien ze bestaan.

1 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1$

2 $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ bestaat niet

3 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

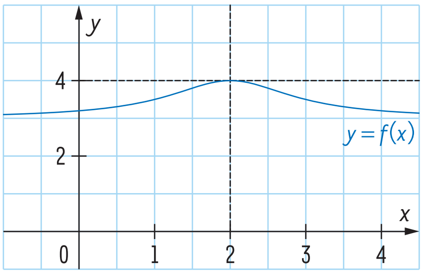
5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

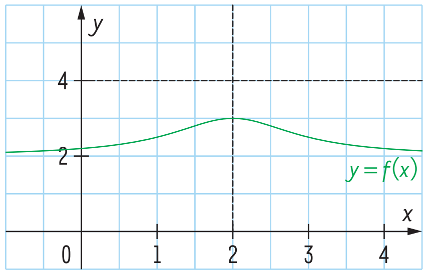
Opdracht 3 bladzijde 110

Geef voor elk van de uitspraken aan met welke van de grafieken ze in overeenstemming is.

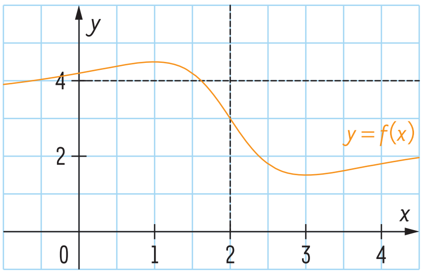
a



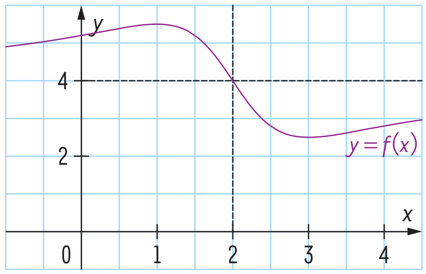
c



b



d



1 De beeldwaarden $f(x)$ liggen steeds dichter bij 4, naarmate de originelen x dichter liggen bij 2.

Bij grafiek a, c en d zien we dat de beeldwaarden f(x) steeds dichter bij 4 liggen, naarmate de originelen x dichter bij 2 liggen.

2 De beeldwaarden $f(x)$ kunnen willekeurig dicht bij 4 gebracht worden, indien de originelen x maar dicht genoeg bij 2 gekozen worden.

Bij grafiek a en d kunnen de beeldwaarden f(x) willekeurig dicht bij 4 gebracht worden als de originelen x dicht genoeg bij 2 gekozen worden. Bij grafiek c is dit niet het geval, daar kunnen de beeldwaarden willekeurig dicht bij 3 worden gebracht.

Opdracht 4 bladzijde 110

Er zijn verschillende manieren om een interval van x-waarden te noteren.

1 Welke notaties komen met dezelfde intervallen overeen?

a $4 < x < 10$

b $x \in \,]-2, 6[$

c $0 < |x - 2| < 1$

$\longrightarrow$ de afstand van x tot 2 ligt tussen 0 en 1 (0 en 1 niet inbegrepen).

d $|x - 2| < 4$

$\longrightarrow$ de afstand van x tot 2 is kleiner dan 4.

e $1 < x < 3$ met $x \neq 2$

f $|x - 7| < 3$

$\longrightarrow$ de afstand van x tot 7 is kleiner dan 3.

$\Longrightarrow$ a en f komen overeen, ook b en d, alsook c en e

2 Aan welke dubbele ongelijkheid moet x voldoen?

a $\underbrace{|x+3|}_{x-(-3)} < 5$

$\Rightarrow \; -8 < x < 2$

b $0 < |x-1| < 1$

$\Rightarrow \; 0 < x < 2$ met $x \neq 1$

3 Herschrijf $x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[$ als een enkele ongelijkheid, m.b.v. een absolute waarde.

$\rightarrow$ de afstand tussen x en a is kleiner dan δ

$\Rightarrow \; |x-a| < \delta$

Opdracht 5 bladzijde 114

Bewijs met behulp van de ε-δ-definitie:

1 $\lim\limits_{x \to 3} (5x-8) = 7$

TB: $\lim\limits_{x \to 3} (5x-8) = 7$

We moeten aantonen:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \;\Rightarrow\; |(5x-8)-7| < \varepsilon$

of:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \;\Rightarrow\; |5x-15| < \varepsilon$

Kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$
\begin{array}{c}
|5x-15| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
|5(x-3)| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
5|x-3| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{5} \\
\Uparrow \\
0 < |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{5} \\
\Uparrow \quad \text{kies } \delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5} \\
0 < |x-3| < \delta
\end{array}
$$

2 $\lim\limits_{x \to -5} (6x + 30) = 0$

TB: $\lim\limits_{x \to -5} (6x + 30) = 0$

We moeten aantonen:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x + 5| < \delta \;\Rightarrow\; |6x + 30| < \varepsilon$

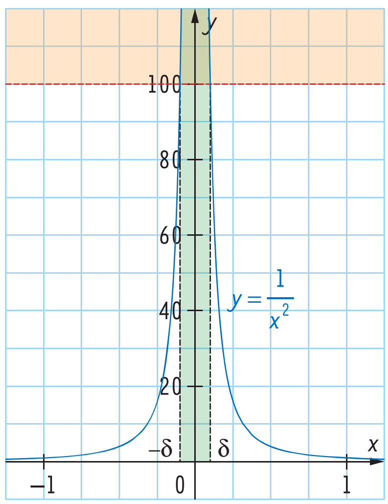
Kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$|6x + 30| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|6(x + 5)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$6|x + 5| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x + 5| < \frac{\varepsilon}{6}$$
$$\Uparrow$$
$$0 < |x + 5| < \frac{\varepsilon}{6}$$
$$\Uparrow \quad \text{kies } \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$$
$$0 < |x + 5| < \delta$$

Opdracht 6 bladzijde 114

Gegeven is de functie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

1 Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $-\delta < x < \delta$ (met $x \neq 0$) dan is $f(x) > 100$?



$$f(x) > 100$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{x^2} > 100 \qquad \text{met } x \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 < \frac{1}{100} \qquad \text{met } x \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10} \qquad \text{met } x \neq 0$$

$\Rightarrow\; 0 < \delta < \dfrac{1}{10}$

2 Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $0 < |x| < \delta$ dan is $f(x) > 100\ 000\ 000$?

$$f(x) > 100\ 000\ 000$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x^2} > 10^8 \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 < \frac{1}{10^8} \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{10^4} < x < \frac{1}{10^4} \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \delta < \frac{1}{10\ 000}$$

3 Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $0 < |x| < \delta$ dan is $f(x) > r$ (met $r > 0$)?

$$f(x) > r \qquad \text{met } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x^2} > r \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 < \frac{1}{r} \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r}} < x < \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Opdracht 7 bladzijde 116

Welke uitspraken uit B stemmen overeen met de notaties uit A?

A

a_1 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

a_2 $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$

a_3 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

a_4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

a_5 $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

a_6 $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

B

b_1 $\forall \varepsilon > 0, \exists s > 0: x < -s \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

b_2 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

b_3 $\forall r > 0, \exists \delta > 0: a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -r$

b_4 $\forall r > 0, \exists s > 0: x > s \Rightarrow f(x) < -r$

b_5 $\forall r > 0, \exists \delta > 0: a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > r$

b_6 $\forall r > 0, \exists s > 0: x > s \Rightarrow f(x) > r$

A a_1 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall r > 0, \exists s > 0 : x > s \ \Rightarrow \ f(x) < -r$

$\Rightarrow$ uitspraak b_4

a_2 $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ uitspraak b_2

a_3 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall r > 0, \exists s > 0 : x > s \ \Rightarrow \ f(x) > r$

$\Rightarrow$ uitspraak b_6

a_4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists s > 0 : x < -s \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ uitspraak b_1

a_5 $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall r > 0, \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -r$

$\Rightarrow$ uitspraak b_3

a_6 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

$\Updownarrow$

$\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : a - \delta < x < a \;\Rightarrow\; f(x) > r$

$\Rightarrow$ uitspraak b_5

Samenvatting

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
b_4	b_2	b_6	b_1	b_3	b_5

Opdracht 8 bladzijde 116

Bewijs met behulp van de gepaste definitie.

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

TB: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

m.a.w.

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0 : x > s \;\Rightarrow\; |f(x)| < \varepsilon$

Bewijs

kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Uparrow$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Uparrow \quad \text{kies } s \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$x > s$$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^{2}\log x = -\infty$

TB: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^{2}\log x = -\infty$

m.a.w.

$\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < x < \delta \;\Rightarrow\; {}^{2}\log x < -r$

Bewijs

kies $r > 0$, dan geldt:

$${}^{2}\log x < -r$$

$\Uparrow$ f: $x \mapsto {}^{2}\log x$ is een stijgende functie, dus ongelijkheid blijft bewaard

$$0 < x < 2^{-r} = \frac{1}{2^r}$$

$\Uparrow$ kies $0 < \delta \leqslant \dfrac{1}{2^r}$

$$0 < x < \delta$$

Opdracht 9 bladzijde 120

Gegeven zijn twee functies f en g.

Er geldt: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ en $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$.

De tabel toont enkele beeldwaarden voor $x \underset{<}{\to} 3$.

We beschouwen vervolgens de som- en product-functie $s(x)$ en $p(x)$.

1 Bereken $s(x)$ en $p(x)$ voor de gegeven waarden van x en leid hieruit $\lim\limits_{x \to 3} s(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(f(x) + g(x)\right)$ en $\lim\limits_{x \to 3} p(x) = \lim\limits_{x \to 3} \left(f(x) \cdot g(x)\right)$ af

2 Wat zal je vinden voor $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$?

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{7}{5}$$

x	$f(x)$	$g(x)$
2,9	6,7	4,5
2,99	6,95	4,9
2,999	6,995	4,99
↓	↓	↓
3	7	5

x	$s(x)$	$p(x)$
2,9	11,2	30,15
2,99	11,85	34,055
2,999	11,985	34,90505
↓	↓	↓
3	12	35

Opdracht 10 bladzijde 124

Bereken met de rekenregels van limieten als gegeven is dat $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ en $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -2$.

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

2 $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - x - 3\cdot f(x)\right)$

$$\lim_{x\to 2} (x^2 - x - 3\cdot f(x)) = 2^2 - 2 - 3\cdot \lim_{x\to 2} f(x) = 2 - 3\cdot 3 = -7$$

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 4}{g(x)}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 4}{g(x)} = \frac{2\cdot 2^2 - 4}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

4 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x^2 + x}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)\cdot g(x)}{x^2 + x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x)}{2^2 + 2} = \frac{3\cdot(-2)}{6} = -1$$

5 $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}}$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{f(x)+1}{f(x)-1}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x) + 1}{\lim\limits_{x\to 2} f(x) - 1}} = \sqrt{\frac{3+1}{3-1}} = \sqrt{2}$$

Opdracht 11 bladzijde 125

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f_1(x) = \dfrac{2x-7}{x-3}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$, $f_3(x) = \dfrac{3x-8}{x-3}$ en $f_4(x) = 2x+1$.

Er geldt: $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_1(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_2(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_3(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_4(x) = 7$.

De tabel toont enkele beeldwaarden voor $x \underset{<}{\to} 3$. Je kunt gemakkelijk nagaan dat de trends die je in de tabel waarneemt, zich verder doorzetten naarmate x dichter bij 3 komt, met $x < 3$.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
2,8	7	25	−2	6,6
2,9	12	100	−7	6,8
2,99	102	10000	−97	6,98
2,999	1002	1000000	−997	6,998
2,9999	10002	100000000	−9997	6,9998
↓	↓	↓	↓	↓
3	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	7

Maak gebruik van de waarden in de tabel om de gevraagde limieten te bepalen.

1 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_2(x)\right)$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)-f_2(x)\right)$

3 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_2(x)-f_1(x)\right)$

4 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_3(x)\right)$

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_2(x)+f_3(x)\right)$

6 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_4(x)\right)$

7 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)\cdot f_3(x)\right)$

8 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_3(x)\cdot f_4(x)\right)$

9 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

10 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_3(x)}$

11 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_4(x)}$

12 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	−1	$+\infty$	$+\infty$

Opdracht 12 bladzijde 128

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^6 + x)$

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^6 + x) = -3(-\infty)^6 + (-\infty)$$
$$= -\infty + (-\infty)$$
$$= -\infty$$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[-5x^3 \cdot (500 - x^2)\right]$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-5x^3 \cdot (500 - x^2)\right) = -5(+\infty)^3 \cdot \left(500 - (+\infty)^2\right)$$
$$= -\infty \cdot (500 - \infty)$$
$$= -\infty \cdot (-\infty)$$
$$= +\infty$$

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3 - x^2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^3 - x^2} = \frac{5}{(-\infty)^3 - (-\infty)^2}$$
$$= \frac{5}{-\infty - \infty}$$
$$= \frac{5}{-\infty}$$
$$= 0$$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 10}{3}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x - 10}{3}} = \sqrt{\frac{(+\infty)^2 + (+\infty) - 10}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{+\infty + (+\infty) - 10}{3}}$$
$$= \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty$$

Opdracht 13 bladzijde 132

Enkele limietsituaties zijn symbolisch gegeven. Bepaal waaraan ze gelijk zijn, indien ze gedefinieerd zijn.

1 $+\infty - 100000 = +\infty$

2 $-\infty - (+\infty) = -\infty$

3 $3 - (-\infty) = 3 + (+\infty) = +\infty$

4 $-\infty + (+\infty)$: onbepaalheid

5 $(-\infty) \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = +\infty$

6 $0 \cdot (+\infty)$: onbepaalheid

7 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

8 $\dfrac{-\infty}{-3} = +\infty$

9 $\dfrac{-3}{-\infty} = 0$

10 $\dfrac{0}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

Opdracht 14 bladzijde 132

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 2x^2 + 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(-x^3 + 2x - 1)(2x^2 - x - 3)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3)(2x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^5) = -\infty$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1 - 3x + 3x^2 - x^3)^5\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^{15}) = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x-2)^3(x^3+1)(5-3x)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^3 \cdot x^3(-3x)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^7) = +\infty$

Opdracht 15 bladzijde 132

Illustreer aan de hand van twee concrete functies f en g dat $0 \cdot (\pm\infty)$ een onbepaaldheid is.

Voorbeeld:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x$	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2$	$f(x) \cdot g(x)$
10	0,1	10	1	0,1	100	10
100	0,01	100	1	0,01	10 000	100
10 000	0,0001	10 000	1	0,0001	10^8	10 000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$+\infty$	0	$+\infty$	$\boxed{1}$	0	$+\infty$	$\boxed{+\infty}$

Opdracht 16 bladzijde 134

Bereken de volgende limieten of geef de linker- en rechterlimiet indien ze niet bestaan.

1 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{{}^2\log x}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{{}^2\log x} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{{}^2\log x} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{{}^2\log x} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{{}^2\log x} \text{ bestaat niet}$$

2 $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}}{-x^2+10x-25}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}}{-x^2+10x-25} \overset{\frac{\sqrt{7}}{0}}{=} \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}}{-(x-5)^2} \overset{\frac{\sqrt{7}}{0^-}}{=} -\infty$$

Opdracht 17 bladzijde 136

Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten. Indien de limiet niet bestaat, verklaar waarom.

1 $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x-4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{x-4} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{x-4} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} \text{ bestaat niet}$$

2 $\lim\limits_{x \to -2} \frac{-x^2+4x}{2x^3-5x^2}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{-x^2+4x}{2x^3-5x^2} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

3 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} \text{ bestaat niet}$$

5 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{-x^2+6x-9}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{-x^2+6x-9} \overset{\frac{1}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{1}{-(x-3)^2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

6 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{5}{2}$$

7 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = 3$$

Opdracht 18 bladzijde 138

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{3x^3-8x^2+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3x^2} = 0$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8-x^3}{x^3-8x+8} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} (-1) = -1$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+1)(1-x^2)}{(2x+1)(5x^2-6x+1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^5}{10x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{10}x^2\right) = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-1)^5}{(-3x+4)^4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{32x^5}{81x^4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{32}{81}x = -\infty$

Opdracht 19 bladzijde 138

Beschouw de functies met voorschrift $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ en $g(x)=x\sqrt{x^2-1}$.

Zijn ze gelijk? Verklaar.

dom f = $]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty[$

$$x^4-x^2 \geqslant 0$$
$$x^2(x^2-1) \geqslant 0$$

x		-1		0		1	
$x^2(x^2-1)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

dom g = $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

$$x^2-1 \geqslant 0$$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

De functies zijn niet gelijk want dom f $\neq$ dom g.

Opdracht 20 bladzijde 141

Bereken.

1 $$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-2}} = 4$$

2 $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{x\,\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\underbrace{x-2-1}_{\cancel{x-3}}} = 6$$

3 $$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{4x+3}{x-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \sqrt{\lim_{x\to +\infty}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{4} = 2$$

4 $$\lim_{x\to +\infty}\frac{-6x+3}{\sqrt{4x^2-x+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{-6\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{3}{6x}}^{\to 0}\right)}{2\cancel{x}\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{4x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{4x^2}}_{\to 0}}} = -3$$

5 $$\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

6 $$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+1}+4x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{16x^2}+x+1-\cancel{16x^2}}{\sqrt{16x^2+x+1}-4x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{-4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{16x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{16x^2}}_{\to 0}}+1\right)} = -\frac{1}{8}$$

Opdracht 21 bladzijde 141

Bepaal a en b als je weet dat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\frac{\sqrt{b}-3}{0}$$

Deze limiet moet eindig zijn, dus moet $\sqrt{b}-3=0$, m.a.w. $b=9$.

Hieruit volgt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ax+9-9}{x\left(\sqrt{ax+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+9}+3}=\frac{a}{6}$$

Nu moet $\dfrac{a}{6}=-1$, dus $a=-6$.

$\Rightarrow\ a=-6$ en $b=9$

Opdracht 22 bladzijde 143

Welke van de volgende functies hebben een grafiek met de rechte $r \leftrightarrow x=2$ als verticale asymptoot?

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+x+3}{2x^2-8}$$

$$\lim_{x\to 2} f_1(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+3}{2x^2-8}\overset{\frac{9}{0}}{=}\pm\infty$$

$\Rightarrow$ V.A.: $x=2$

$$f_2 : x \mapsto \frac{x^2-4x+4}{8-2x^2}$$

$$\lim_{x\to 2} f_2(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{8-2x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{2(2-x)(2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{-2\cancel{(x-2)}(2+x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{-2(2+x)}=0$$

$\Rightarrow$ r is geen V.A.

$$f_3 : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x+2}{3x^3-7x^2+2x}}$$

$$\lim_{x\to 2} f_3(x)=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x+2}{3x^3-7x^2+2x}}=\sqrt[3]{\frac{4}{0}}=\pm\infty$$

$\Rightarrow$ V.A.: $x=2$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-3}{2-x}}$

$$\lim_{x\to 2} f_4(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \sqrt{\frac{x-3}{2-x}} = \sqrt{\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x-3}{2-x}} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$\downarrow$

dom $f_4 =]2, 3]$

$\Rightarrow$ V.A.: $x = 2$

De functies f_1, f_3 en f_4 hebben een grafiek met de rechte $r \leftrightarrow x = 2$ als verticale asymptoot.

Opdracht 23 bladzijde 147

Bepaal alle asymptoten van de grafieken van de gegeven functies.

1 $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x-1}$$

V.A.: $x = 1$
H.A.: /
S.A. $y = x + 4$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{\frac{6}{0}}{=} \pm\infty \Rightarrow \text{V.A.: } x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{geen H.A.}$$

Opmerking: f is een rationale functie waarvan de graad van de teller één meer is dan de graad van de noemer. Deze functie heeft dus geen H.A. maar wel een S.A.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+3x+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+3x+2}{x-1} - x\right]$$

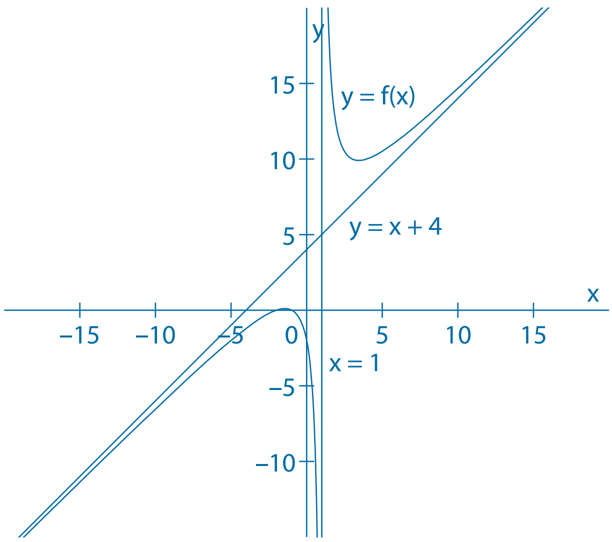
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2+x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x}$$

$$= 4$$

$\Rightarrow$ $y = x + 4$



Opmerking: dit kan ook via de euclidische deling

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+4 \\ \hline 4x+2 & \Downarrow \\ -4x+4 & y=x+4 \\ \hline 6 & \end{array}$$

2 $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}$

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{4x^2-1} = \frac{(x+1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

V.A.: $x = \frac{1}{2}$

H.A.: $y = \frac{1}{2}$

S.A. /

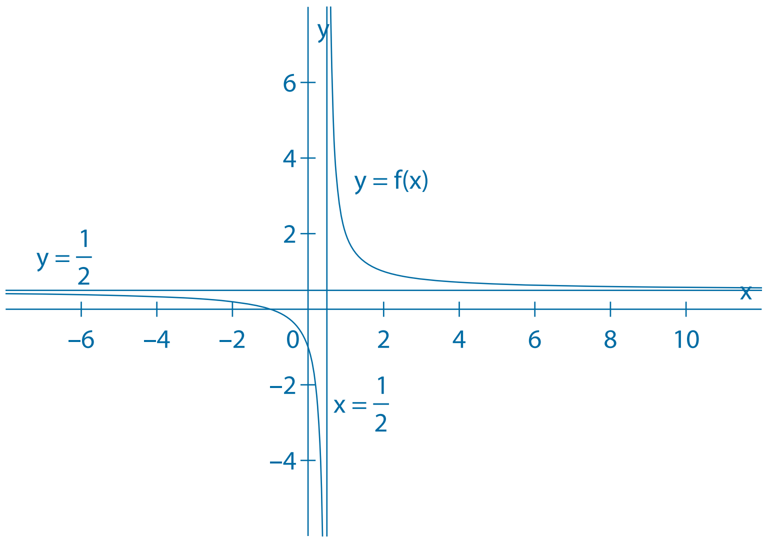
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \overset{\frac{3}{0}}{=} \pm\infty \quad \Rightarrow \text{V.A.: } x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x-1} = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \text{geen V.A.}$$

$$\left(\text{opening in } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{H.A.: } y = \frac{1}{2}$$

Deze rationale functie kan geen schuine asymptoot hebben.



3 $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4}$

Grafisch vermoeden we 2 schuine asymptoten.

- dom f = ℝ: er zijn geen verticale asymptoten.

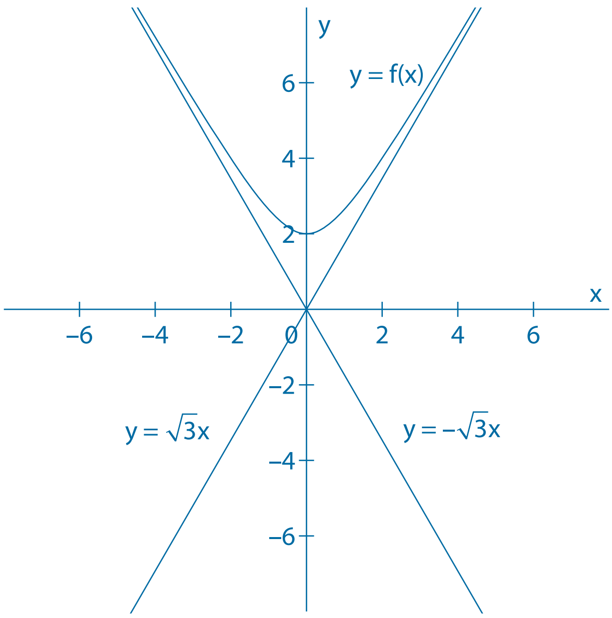
- $$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overset{0}{\frac{4}{3x^2}}}}{\cancel{x}} = \sqrt{3}$$

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{3}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overset{0}{\frac{4}{3x^2}}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{3}$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{3}x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{3x^2} + 4 - \cancel{3x^2}}{\sqrt{3x^2+4} + \sqrt{3}x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2+4} + \sqrt{3}x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{3x^2} + 4 - \cancel{3x^2}}{\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{3}x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ SA: $y = \sqrt{3}x$ en $y = -\sqrt{3}x$



4 $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 9}$

Grafisch vermoeden we een horizontale en een schuine asymptoot.

- dom f =]−∞, −3] ∪ [3, +∞[, dus berekenen van schuine en horizontale asymptoten is zinvol.

  De functie heeft geen verticale asymptoot want er zijn geen nulpunten in de noemer.

- We vermoeden een horizontale asymptoot voor x → +∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-9)}{x+\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x+\sqrt{x^2-9}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{H.A.:}\quad y = 0}$$

- We vermoeden een schuine asymptoot voor x → −∞.

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}-2x\right)$$

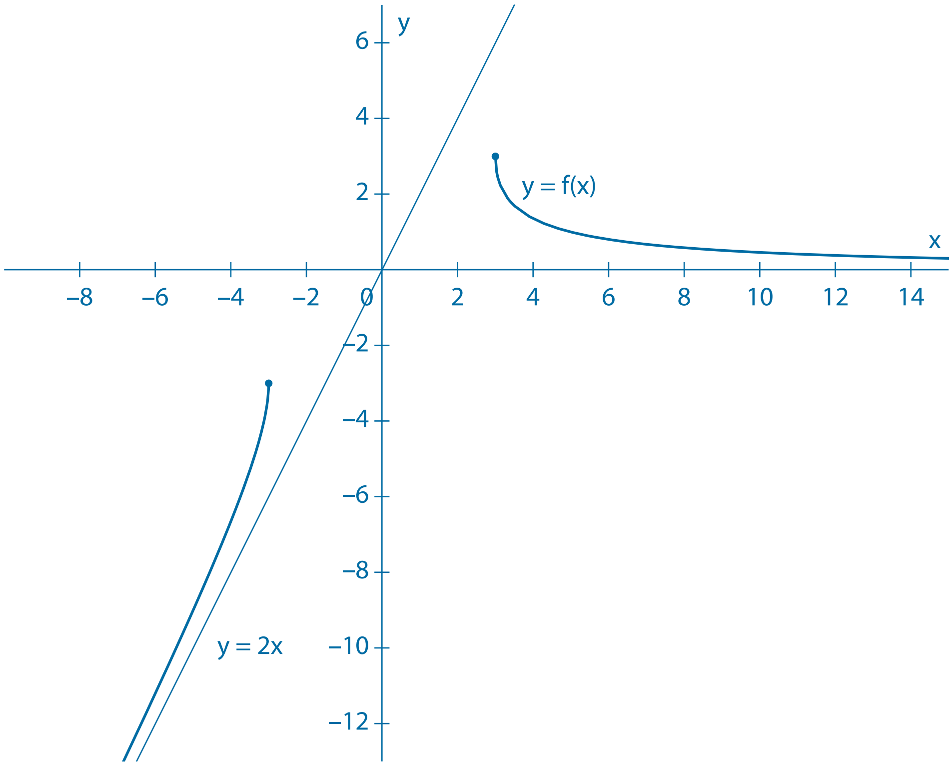
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-9}-x\right)$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}$$

$$\overset{\frac{-9}{+\infty}}{=} 0$$

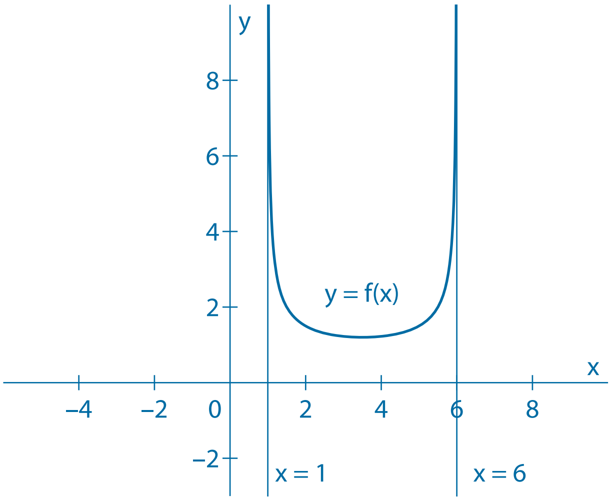
$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.:}\quad y = 2x}$$



5 $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{(x-1)(6-x)}}$

Grafisch vermoeden we twee verticale asymptoten.

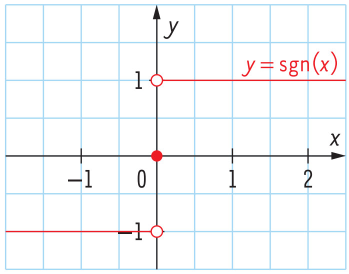
- dom f =]1, 6[: het berekenen van horizontale en schuine asymptoten is zinloos.
- 1 en 6 zijn nulpunten van de noemer en niet van de teller, dus heeft de grafiek van f als verticale asymptoten de rechten met vergelijking x = 1 en x = 6.



Opdracht 24 bladzijde 149

Beschouw de functie sgn : $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x = 0. \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

We noemen ze de *signum*-functie, omdat ze elke x afbeeldt op het 'teken' van x.



1 Bereken, indien mogelijk, $\lim\limits_{x \to 0} \big(\operatorname{sgn}(x)\big)$ en vergelijk met sgn(0).

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \big(\operatorname{sgn}(x)\big) = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \big(\operatorname{sgn}(x)\big) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \big(\operatorname{sgn}(x)\big) \text{ bestaat niet.}$$

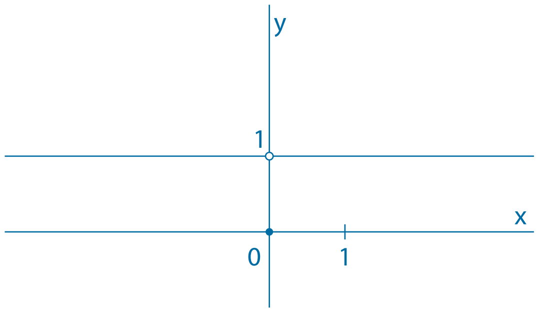
Zowel de linker- als de rechterlimiet zijn verschillend van sgn(0) = 0.

2 Beschouw de functie $f : x \mapsto |\operatorname{sgn}(x)|$.

Maak een schets van f en bereken,

indien mogelijk, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Vergelijk met $f(0)$.

$$|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1 \neq |\operatorname{sgn}(0)| \; (= 0)$$

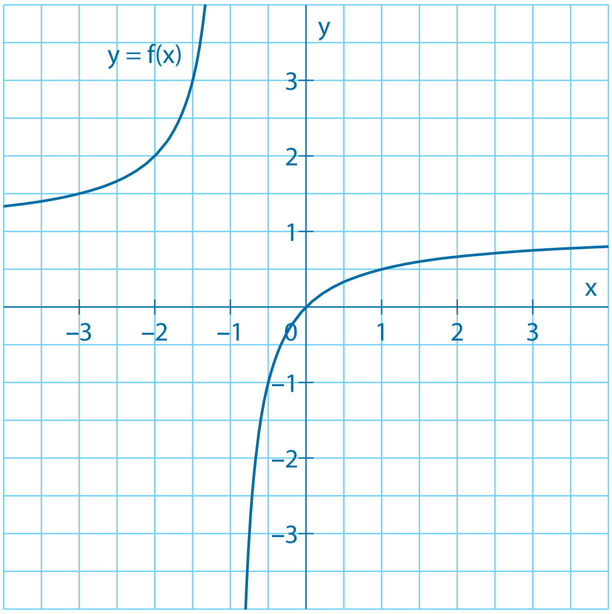
Opdracht 25 bladzijde 152

In welke intervallen zijn de volgende functies continu?

1 $f: x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ bestaat niet

f is continu in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$



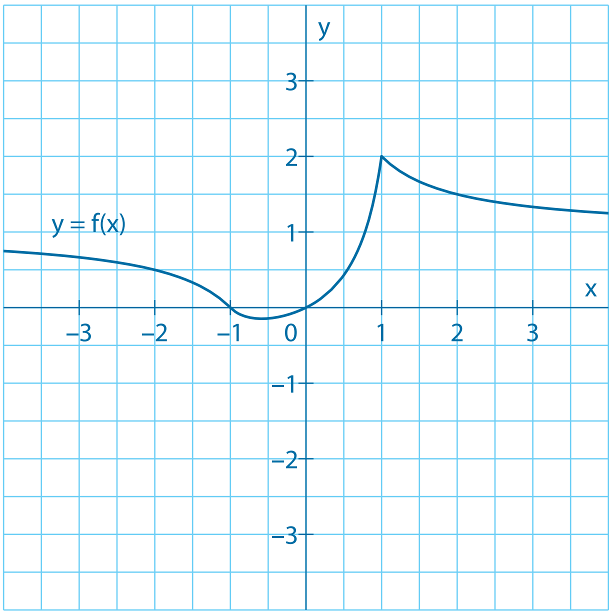
2 $f: x \mapsto \dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}$

$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{x^2+x}{x^2-1+1} = \dfrac{x^2+x}{x^2} & \text{als } x \leqslant -1 \text{ of } x \geqslant 1 \\ = \dfrac{x^2+x}{2-x^2} & \text{als } -1 < x < 1 \end{cases}$$

x		–1		1	
$x^2 - 1$	+	0	–	0	+

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 2$ $\quad\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$ $\quad\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 0$

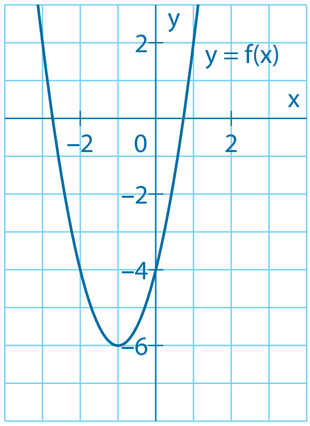


f is continu in $\mathbb{R}$.

3 $f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^3+6x^2-4}{x+1} & \text{als } x \neq -1 \\ -6 & \text{als } x = -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -1} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x^2+4x-4)}{x+1} = -6$$

f is continu in $\mathbb{R}$.

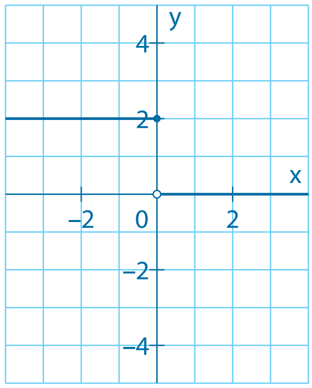


4 $f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 2 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x > 0 \\ 2 & \text{als } x < 0 \\ 2 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

f is continu in $\mathbb{R}_0$.



Opdracht 26 bladzijde 152

De functie $f: x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{als } x \leqslant a \\ -x^2+x+4 & \text{als } x > a \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal a.

De functie is continu in $\mathbb{R}$, dus moet ze ook continu zijn in a.

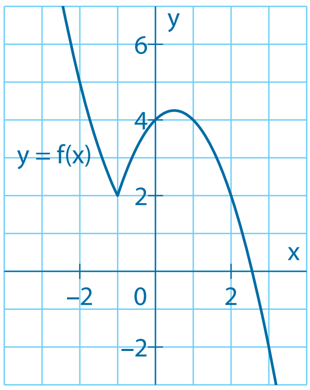
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = a^2 + 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -a^2 + a + 4$

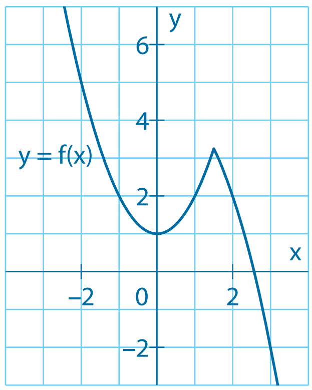
Dus moet $a^2 + 1 = -a^2 + a + 4$

$\Leftrightarrow \; 2a^2 - a - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \; a = -1 \quad \text{of} \quad a = \dfrac{3}{2}$



$a = -1$



$a = \dfrac{3}{2}$

Opdracht 27 bladzijde 153

Bewijs dat als f en g continu zijn in a, dan ook de productfunctie $f \cdot g$ continu is in a.

Aangezien f en g continu zijn in a, geldt:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ en $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

Hieruit volgt:

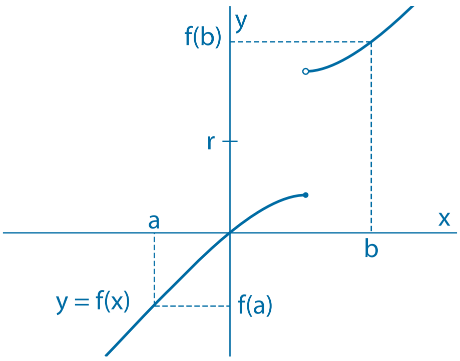
$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) && \text{definitie productfunctie} \\ &= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) && \text{rekenregel limieten} \\ &= f(a) \cdot g(a) && \text{f en g continu in a} \\ &= (f \cdot g)(a) && \text{definitie productfunctie} \end{aligned}$$

Hieruit besluiten we dat $f \cdot g$ continu is in a.

Opdracht 28 bladzijde 159

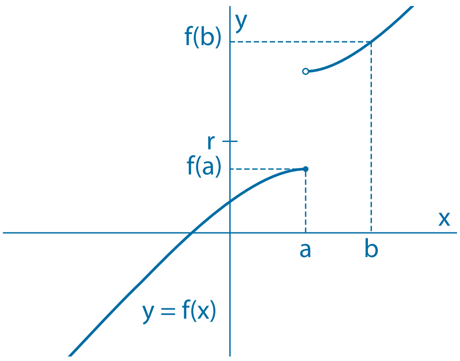
De tussenwaardestelling geldt enkel wanneer de functie continu is in een gesloten interval. Toon aan de hand van enkele voorbeelden aan waarom de continuïteit vereist is en waarom het interval gesloten moet zijn.

Voorbeelden



f is niet continu in [a, b]:

er bestaat geen $c \in]a, b[$ waarvoor $f(c) = r$



f is continu in]a, b[, maar niet in [a, b]:

er bestaat geen $c \in]a, b[$ waarvoor $f(c) = r$

Opdracht 29 bladzijde 159

Een bergwandelaar wandelt op een dag van zijn verblijfplaats in de vallei naar een berghut boven op een berg. Hij vertrekt om 8u ’s morgens en komt om 8u ’s avonds aan.

De dag erop vertrekt hij om 8u ’s morgens van de berghut en wandelt via dezelfde weg terug naar zijn logies in de vallei, waar hij om 8u ’s avonds aankomt.

Bewijs dat er een tijdstip is overdag waarop de wandelaar precies op dezelfde plaats was bij het naar boven wandelen en het naar beneden wandelen.

- Stel f(t) = de afstand van de verblijfplaats in de vallei, richting de berghut en g(t) = de afstand naar de verblijfplaats in de vallei (vanaf de berghut), met t de tijd in uren.

  f en g zijn te beschouwen als continue functies.
- Stel d = afstand van de verblijfplaats naar de berghut.

  Er geldt: $\begin{cases} f(0) = g(12) = 0 \\ f(12) = g(0) = d \end{cases}$
- Stel h(t) = g(t) – f(t), dan geldt:

  $\begin{cases} h(0) = g(0) - f(0) = d \\ h(12) = g(12) - f(12) = -d \end{cases}$

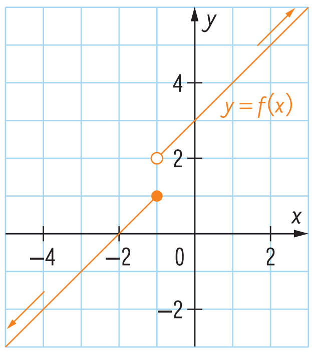
  Uit de stelling van Bolzano volgt dat er een tijdstip t^* bestaat tussen 0 en 12 uur waarvoor $h(t^*) = 0$, m.a.w. $g(t^*) - f(t^*) = 0$ en dus:

  $g(t^*) = f(t^*)$

Opdracht 30 bladzijde 166

De functie f is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.



1 $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -1$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1$

3 $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 2$

4 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 4$

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 4$

6 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

7 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

8 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Opdracht 31 bladzijde 166

De functie f is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.

1 $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 3$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 0$

3 $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 0$

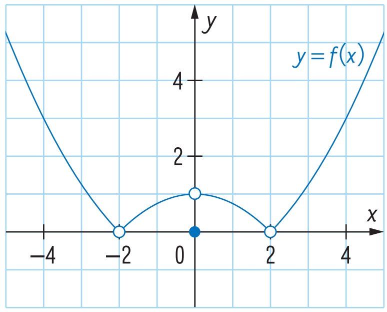
4 $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$

6 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$

7 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

8 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$



Opdracht 32 bladzijde 166

De functie f is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.

1 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet

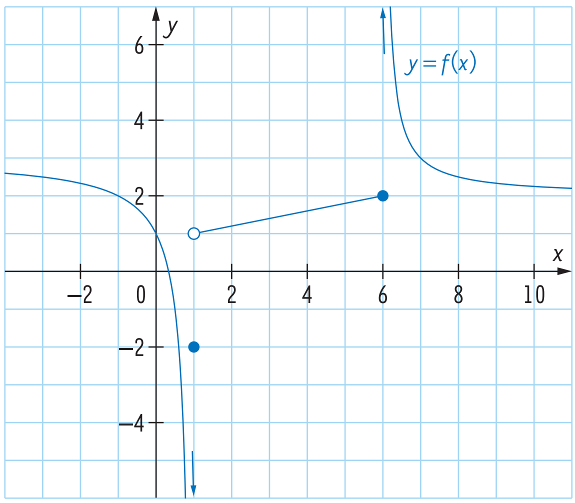
2 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

3 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 1$

4 $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$ bestaat niet

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ <}} f(x) = 2$

6 $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ >}} f(x) = +\infty$



Opdracht 33 bladzijde 166

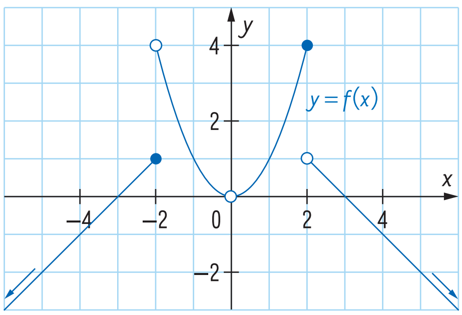
De functie f is gegeven door haar grafiek.

Voor welke $a \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ niet?

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat niet als $a = -2$ of $a = 2$.

Immers: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 1$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = 4$

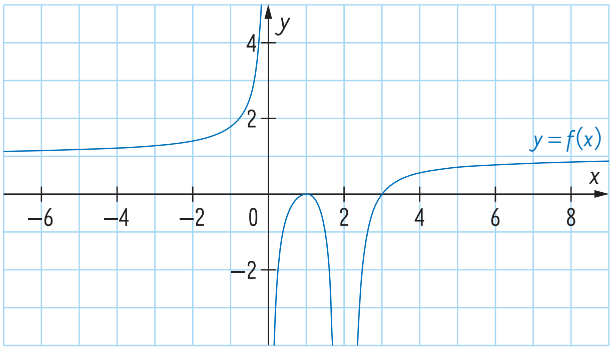
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 4$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$



Opdracht 34 bladzijde 166

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x(x-2)^2}$ is getekend.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.



1 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

3 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

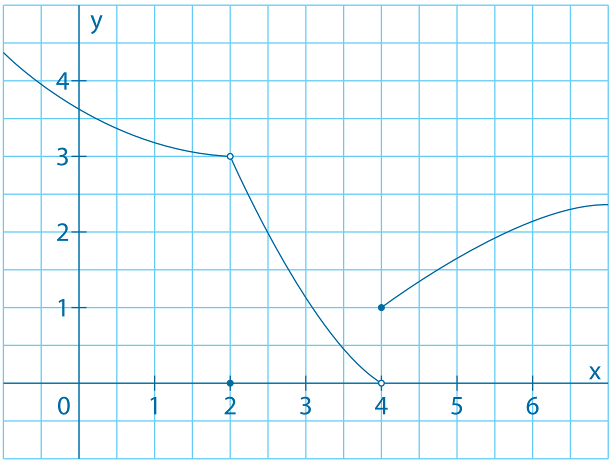
6 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Opdracht 35 bladzijde 166

Teken de grafiek van een functie f die voldoet aan de volgende voorwaarden.

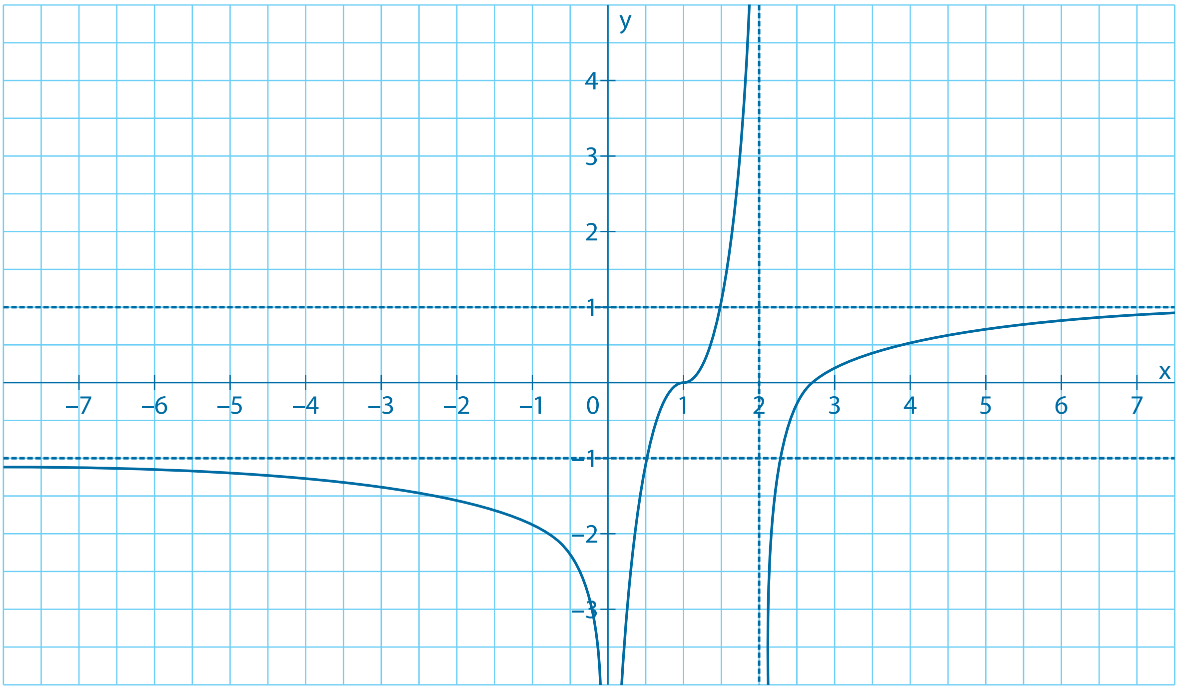
1 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = 1$, $f(2) = 0$ en $f(4) = 1$

Voorbeeld



2 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ en $f(1) = 0$

Voorbeeld



Opdracht 36 bladzijde 167

Geef de (linker- of rechter-) limiet die hoort bij de volgende definities.

1 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: 5 - \delta < x < 5 + \delta \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -2$

2 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3$

3 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0: x > s \Rightarrow |f(x) + 5| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$

4 $\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > r$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

5 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: -2 - \delta < x < -2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 0$

6 $\forall\, r > 0, \exists\, s < 0: x < s \Rightarrow f(x) > r$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Opdracht 37 bladzijde 167

Geef een formele definitie die hoort bij de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -6$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -2 - \delta < x < -2 \implies |f(x) + 6| < \varepsilon$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall r > 0, \exists s > 0 : x > s \implies f(x) < -r$

3 $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$

$\forall r > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x + 2| < \delta \implies f(x) < -r$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists s > 0 : x < -s \implies |f(x)| < \varepsilon$

Opdracht 38 bladzijde 167

Er is gegeven dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Voor welke waarden van δ geldt dat $|f(x) - b| < \varepsilon$ als $0 < |x - a| < \delta$?

1 $\lim\limits_{x \to -1} (2 - 7x) = 9$

$$|2 - 7x - 9| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|-7x - 7| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|-7||x + 1| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x + 1| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Voor $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{7}$ geldt dat $|f(x) - 9| < \varepsilon$ als $0 < |x + 1| < \delta$.

2 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4-x^2}{2+x} = 4$

$$\left|\frac{4-x^2}{2+x} - 4\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{4-x^2-8-4x}{2+x}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{-x^2-4x-4}{x+2}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{(x+2)^2}{x+2}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x+2| < \varepsilon$$

Voor $\delta \leqslant \varepsilon$ geldt dat $|f(x) - 4| < \varepsilon$ als $0 < |x+2| < \delta$.

Opdracht 39 bladzijde 167

Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 1} (3x-6) = -3$ met de ε-δ-definitie.

We moeten aantonen dat:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |3x-6+3| < \varepsilon$

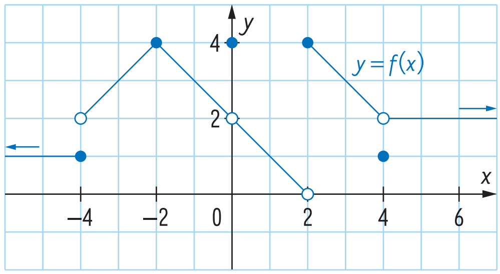
Kies $\varepsilon > 0$:

$$|3x-3| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|3(x-1)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\Uparrow$$
$$0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Kies $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$, dan volgt uit $0 < |x-1| < \delta$ dat $|f(x)+3| < \varepsilon$.

Opdracht 40 bladzijde 167

De functie f is gegeven door haar grafiek.



1 Voor welke $a \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ niet?

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat niet als $a = -4$ of $a = 2$

2 Voor welke waarde(n) van a is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$ als $a = 0$ of $a \geqslant 4$

3 Voor welke waarde(n) van a is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ als $a = -2$

4 Voor welke waarde(n) van a is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = |a|$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = |a|$ als $a = -3$ of $a = 1$ of $a = 3$

Opdracht 41 bladzijde 168

Enkele limietsituaties zijn symbolisch weergegeven.

Bereken, indien mogelijk.

1 $\dfrac{1000}{(-\infty)^2} = 0$

2 $\dfrac{1}{5} \cdot (+\infty) \cdot (-\infty) - 4 \cdot (+\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty$

3 $3 \cdot (+\infty)^3 + 5 \cdot (-\infty) = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

4 $3 \cdot (+\infty)^2 - (+\infty) + 4 = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

5 $3 \cdot (-\infty)^2 - (-\infty) + 4 = +\infty + (+\infty) = +\infty$

6 $\sqrt{10^{99} - (-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

7 $5 \cdot (+\infty)^3 - 7 \cdot (+\infty) = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

8 $-5 \cdot (-\infty)^3 - 7 \cdot (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

9 $\dfrac{(+\infty)^5}{(+\infty)^4} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$: onbepaaldheid

10 $\sqrt{(-\infty)^4 + \dfrac{3}{(-\infty)^3} - \dfrac{2}{(-\infty)^2}} = \sqrt{+\infty + 0 + 0} = +\infty$

Opdracht 42 bladzijde 168

Als $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x^2} = 2$, bereken dan

1 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{f(x)}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

2 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 18$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 3} f(x)}{\lim\limits_{x \to 3} x^2} = 2$$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 3} f(x)}{9} = 2$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 18$$

3 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} f(x)}{\lim\limits_{x \to 3} x} = \frac{18}{3} = 6$$

4 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 1}{f(x)}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to 3} f(x)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Opdracht 43 bladzijde 168

Bereken indien mogelijk.

1 $\lim\limits_{x \to 5} (5x - 2) = 23$

2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 3}{x + 6} = \dfrac{5}{8}$

3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2\cancel{(x + 2)}}{x^2\cancel{(x + 2)}} = -\dfrac{1}{2}$

4 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 + t}{t^5 + t^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cancel{t}(t+1)}{t^{\cancel{3}\,2}(t^2+1)} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$

5 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{x^2 - 4x + 4} \overset{\frac{-1}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{(x-2)^2} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty$

6 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{x^2 - 9} \overset{\frac{3}{0}}{\Rightarrow}$ bestaat niet

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{x}{x^2 - 9} \overset{\frac{3}{0^-}}{=} -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{x}{x^2 - 9} \overset{\frac{3}{0^+}}{=} +\infty$

7 $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{(\cancel{x+5})(x-2)}{\cancel{x+5}} = -7$

8 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(\cancel{x+3})(x-1)}{\cancel{x+3}} = -4$

9 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(\cancel{x+1})(x^2 - x + 1)}{\cancel{x+1}} = 3$

10 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-x^3 + 4x^2 + x - 4}{x^2 + x - 20} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\cancel{x-4})(1 - x^2)}{(\cancel{x-4})(x+5)} = -\dfrac{5}{3}$

Opdracht 44 bladzijde 169

Bereken a en daarna de limiet als je weet dat deze eindig is.

1 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{ax + 4}{2x^2 + x - 1} = \dfrac{-a + 4}{0}$

De limiet moet eindig zijn, dus moet $-a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x + 4}{2x^2 + x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(2x-1)} = -\dfrac{4}{3}$

2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + ax + 2a}{4 - x^2} = \dfrac{4 + 4a}{0}$

De limiet moet eindig zijn, dus moet $4 + 4a = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{4 - x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\cancel{x-2})(x+1)}{-(\cancel{x-2})(x+2)} = -\dfrac{3}{4}$

Opdracht 45 bladzijde 169

Gegeven de functie $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+6x+7}{x+1} & \text{als } x \neq -1 \\ k & \text{als } x = -1 \end{cases}$.

Bepaal k als $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

Uit $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ volgt dat

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1) = k$$

Nu is $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x^3+6x+7}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{(\cancel{x+1})(x^2-x+7)}{\cancel{x+1}} = 9$

Uit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = k$, volgt dus dat $k = 9$.

Opdracht 46 bladzijde 169

Gegeven de functie $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{als } x < 0 \\ 2x+8 & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{als } x > 2 \end{cases}$.

Bepaal, indien mogelijk.

1 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sqrt{4-x} = 2$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2x+8) = 8$

3 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$: bestaat niet (linkerlimiet $\neq$ rechterlimiet)

4 $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (2x+8) = 12$

5 $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{x^3-8}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{(\cancel{x-2})(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = 12$

6 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 12$ (linkerlimiet = rechterlimiet)

Opdracht 47 bladzijde 169

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^3 - 7x^2 - 8x - 9) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^3) = -5(+\infty)^3 = -\infty$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 5x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^4 + 6x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^4) = -4(-\infty)^4 = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5x^4 + x^2 + 4} = \sqrt{5(-\infty)^4} = +\infty$

5 $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1+t}{1-t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\cancel{t}}{-\cancel{t}} = -1$

6 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 5x^2 - x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

7 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{-x^2 + 4x - 10}{-4x^2 + x - 1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{-4x^2}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

8 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

9 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^3 + 5x^2 + 6x + 1}{-x - 3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^3}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2) = +\infty$

10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 2x - 1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 9$

Opdracht 48 bladzijde 170

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Bereken

1 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{x-1})(3x^2 - 7x + 2)}{(\cancel{x-1})(x^2 + x - 6)} = \frac{1}{2}$$

2 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(\cancel{x-1})(\cancel{x-2})(3x - 1)}{(\cancel{x-1})(\cancel{x-2})(x + 3)} = 1$$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 3$$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 3$$

Opdracht 49 bladzijde 170

Kies telkens het juiste antwoord.

1 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-9} =$

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** $+\infty$ **E** $-\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{-(3-x)(3+x)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{-\sqrt{3-x}\,(3+x)} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$\Rightarrow$ antwoord E

2 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} =$

A 0 **B** 2 **C** 4 **D** $+\infty$ **E** $-\infty$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\underbrace{x^2+3-4}_{x^2-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = 2$$

$\Rightarrow$ antwoord B

Opdracht 50 bladzijde 170

Bereken.

1 $$\lim_{x \underset{>}{\to} 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{4x-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \underset{>}{\to} 4} \frac{\overbrace{x^2-7-9}^{x^2-16}}{x(4-x)\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \underset{>}{\to} 4} \frac{(\cancel{x-4})(x+4)}{-x(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)} = -\frac{1}{3}$$

2 $$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$$

3 $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-3}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{4x^2-(4x^2-3)}^{3}}{2x+\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

4 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-\sqrt{9x^2-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty-\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-3\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{\to 0}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

5 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x-2}{2x-\sqrt{9x^2-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{2}{4x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(2+3\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{\to 0}}\right)} = \frac{4}{5}$$

6 $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0}}{\Rightarrow} \text{bestaat niet}$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$$

7 $$\lim_{x \underset{<}{\to} -5} \frac{2x+3}{1-\sqrt{x+6}} \overset{\frac{-7}{0^+}}{=} -\infty$$

8 $$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{\sqrt{4x+1}-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{-(\cancel{x-2})(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\underbrace{4x+1-9}_{4(\cancel{x-2})}} = -6$$

9 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+5}{\sqrt{4x^4+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{5}{x^2}}^{\to 0}\right)}{2\cancel{x^2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{4x^4}}_{\to 0}}} = \frac{1}{2}$$

10 $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x+5}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 4} \frac{\overset{-1}{(\cancel{x-4})}\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)(\underbrace{9-x-5}_{\cancel{4-x}})} = -\frac{3}{2}$$

Opdracht 51 bladzijde 171

Bereken

1 $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \left(\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{15+x}{x^2-16} \right)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \dfrac{x+4-15-x}{x^2-16} = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \dfrac{-11}{x^2-16} \overset{\frac{-11}{0^+}}{=} -\infty$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \left(\dfrac{9}{x^2-9} - \dfrac{1}{x+3} \right)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{9-(x-3)}{x^2-9} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{12-x}{x^2-9} \overset{\frac{15}{0^+}}{=} +\infty$

3 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3\sqrt{x+1}-2x}{x-3}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9(x+1)-4x^2}{(x-3)\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-4x^2+9x+9}{(x-3)\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\cancel{x-3})(-4x-3)}{(\cancel{x-3})\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)} = -\dfrac{5}{4}$

4 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{1-\sqrt{x-3}}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x+5-9)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)(1-(x-3))} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\overset{-1}{(\cancel{x-4})}\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)(\cancel{4-x})} = -\dfrac{1}{3}$

Opdracht 52 bladzijde 171

Gegeven de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^3-bx^2+4x+c}{x^3+x^2-x-1}$.

1 Bereken a, b en c als je weet dat $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ en $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ eindig is.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^3}{x^3} = a = 1 \;\Rightarrow\; a = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{c}{-1} = -c = 2 \;\Rightarrow\; c = -2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{a-b+4+c}{0}$, deze limiet moet eindig zijn,

dus moet $a-b+4+c=0 \underset{a=1,\,c=-2}{\Leftrightarrow} 1-b+4-2=0 \Leftrightarrow b=3$

Besluit: $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$

2 Bereken $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ voor de gevonden waarden van a, b en c.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{x-1})(x^2 - 2x + 2)}{(\cancel{x-1})(x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{4}$$

Opdracht 53 bladzijde 171

Bepaal de strikt positieve getallen a en b als $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + ax - b}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} = 1$.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 + ax - b}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} = \frac{2a^2 - b}{0} \qquad (a > 0)$$

Deze limiet is eindig, dus moet $b = 2a^2$.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 + ax - 2a^2}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{(\cancel{x-a})(x + 2a)\left(\sqrt{2x^2 - ax} + a\right)}{\underbrace{2x^2 - ax - a^2}_{(\cancel{x-a})(2x+a)}} = 2a$$

Nu moet $2a = 1$, dus $a = \frac{1}{2}$.

$b = 2a^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Besluit: $a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{2}$

Opdracht 54 bladzijde 171

Beschouw de functie f met een voorschrift van de vorm
$f(x) = c \cdot |x + 1| + d \cdot |x - 1|$.

Bepaal c en d zodanig dat $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

(bron © toelatingsproef Burg. Ir. KU Leuven 2001)

$f(x) = c \cdot |x + 1| + d \cdot |x - 1|$

Omdat $x \to +\infty$, zal $|x + 1| = x + 1$ en $|x - 1| = x - 1$

zodat voor $x \to +\infty$, $f(x) = c(x + 1) + d(x - 1)$

$= cx + c + dx - d$

$= (c + d)x + c - d$

Nu moet $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, dus moet $c + d = 0$ en $c - d = 4$, zodat $c = 2$ en $d = -2$.

Opdracht 55 bladzijde 171

Als $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$, geef dan een mogelijk voorschrift van f als je weet dat f een tweedegraadsfunctie is.

Uit $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}\overset{\frac{f(2)-5}{0}}{=}3$, volgt dat $f(2)=5$.

$f(x)-5$ is dan te schrijven als $(x-2)(ax+b)$ met $a\neq 0$ want f is een tweedegraadsfunctie.

Omdat $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(ax+b)=2a+b$ gelijk moet zijn aan 3, is $2a+b=3$ of $b=3-2a$.

Hieruit volgt dat $f(x)-5=(x-2)(ax+3-2a)=ax^2+(3-4a)x+4a-6$,
zodat $f(x)=ax^2+(3-4a)x+4a-1$ met $a\neq 0$.

Opdracht 56 bladzijde 171

Is $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ en is $f(x)<0$ in een basisomgeving van a, dan is $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
Bewijs deze eigenschap voor $a\in\mathbb{R}$.

Gegeven: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

$\exists\,\delta'>0:0<|x-a|<\delta' \Rightarrow f(x)<0$

Te bewijzen: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

Bewijs:

Uit het gegeven volgt: $\forall\,\varepsilon_1>0,\exists\,\delta_1>0:0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon_1$. (1)

Te bewijzen is: $\forall\,r>0,\exists\,\delta>0:0<|x-a|<\delta \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}<-r$ (2)

Kies een r en stel dan $\varepsilon_1=\dfrac{1}{r}$. (3)

Wegens (1) bestaat er dan een δ_1 waarvoor geldt: $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)|<\dfrac{1}{r}$. (4)

Kies nu $\delta=\min\{\delta_1,\delta'\}$. (5)

In de basisomgeving $B(a,\delta)$ is $f(x)<0$, zodat $|f(x)|=-f(x)$.

Dan volgt uit (4): $0<|x-a|<\delta \Rightarrow -f(x)<\dfrac{1}{r}$. (6)

Er geldt: $-f(x)<\dfrac{1}{r} \Leftrightarrow f(x)>-\dfrac{1}{r} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}<-r$. (7)

Combineren we nu (3), (5), (6) en (7), dan hebben we (2) aangetoond.

Opdracht 57 bladzijde 171

Maak gebruik van geziene stellingen en rekenregels om de volgende eigenschap te bewijzen.

Indien in een open interval I dat a bevat geldt: $\forall\, x \in I \setminus \{a\} : f(x) < g(x)$ en indien bovendien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, dan geldt $b \leqslant c$.

Gegeven: I is een open interval dat a bevat

$\forall\, x \in I \setminus \{a\} : f(x) < g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$

Te bewijzen: $b \leqslant c$

Bewijs:

- Uit $f(x) < g(x)$ volgt dat $f(x) - g(x) < 0$.
- Eigenschap: Stel I een open interval dat a bevat.

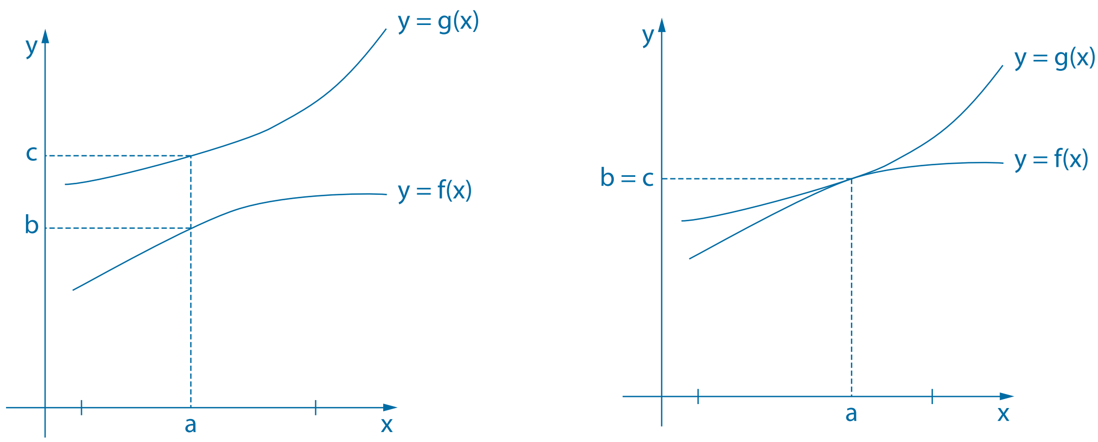
  Indien $\forall\, x \in I \setminus \{a\}$ geldt dat $h(x) < 0$ en

  indien $\lim\limits_{x \to a} h(x) = d$, dan geldt: $d \leqslant 0$.

  Nu is $f(x) - g(x) < 0$ en $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) \underset{\substack{\text{rekenregel} \\ \text{limieten}}}{=} \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = b - c$.

  Dus moet $b - c \leqslant 0$, m.a.w. $b \leqslant c$.

Grafische illustratie



Opdracht 58 bladzijde 172

Kies telkens het juiste antwoord en verklaar.

1 De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{x^3-x^2-3x+3}$ heeft

A geen horizontale en geen verticale asymptoten

B 1 horizontale en 1 verticale asymptoot

C 1 horizontale en 2 verticale asymptoten

D 1 horizontale en 3 verticale asymptoten

$$f(x) = \frac{-x^3+2x^2+x-2}{x^3-x^2-3x+3} = \frac{(x-2)(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2-3)}$$

nulpunten teller: $-1, 1, 2$

nulpunten noemer: $1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ de grafiek van de functie f heeft 2 verticale asymptoten

Omdat de graad van de teller gelijk is aan de graad van de noemer, heeft de grafiek van f een horizontale asymptoot.

Antwoord C is juist.

2 De grafiek van de functie $f : x \mapsto 2x+\sqrt{4x^2-1}$ heeft

A geen horizontale en geen schuine asymptoten

B 1 horizontale en geen schuine asymptoot

C 1 horizontale en 1 schuine asymptoot

D 2 schuine asymptoten

- dom f $= \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

  Het is dus zinvol om horizontale en schuine asymptoten te bepalen.

- De grafiek van de functie f heeft geen verticale asymptoten, de noemer = 1.

- $$a_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-1}}{x} = 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}{\cancel{x}} = 4$$

  $$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-1}-4x\right)$$

  $$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}-1\cancel{-4x^2}}{\sqrt{4x^2-1}+2x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

  $\Rightarrow$ SA: $y = 4x$

- $$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-1}}{x} = 2 + \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}{\cancel{x}} = 0$$

  $$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{4x^2-(4x^2-1)}^{1}}{2x-\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

  $\Rightarrow$ HA: $y = 0$

De grafiek van de functie heeft een schuine en een horizontale asymptoot.
Antwoord C is juist.

Opdracht 59 bladzijde 172

Gegeven de irrationale functie $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

1 Bepaal het domein van f.

dom f =]−∞, −1] ∪ [4, +∞[

$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$:

x		−1		4	
$x^2 - 3x - 4$	+	0	−	0	+

2 Waarom heeft het zin om schuine en horizontale asymptoten te zoeken?

Het is zinvol om horizontale en schuine asymptoten te bepalen omdat het domein van f gelijk is aan]−∞, −1] ∪ [4, +∞[en het dus zinvol is om x te laten naderen tot ±∞.

3 Bepaal alle schuine en horizontale asymptoten van de grafiek van f.

Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor x → −∞ en een schuine asymptoot voor x → +∞.

- $$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 3x - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x}\left(1 + \overset{\to 0}{\frac{4}{3x}}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - \underset{\to 0}{\frac{3}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{H.A.:} \quad y = \frac{3}{2}}$$

- $$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}}}{\cancel{x}}$$

$$= 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x\right)$$

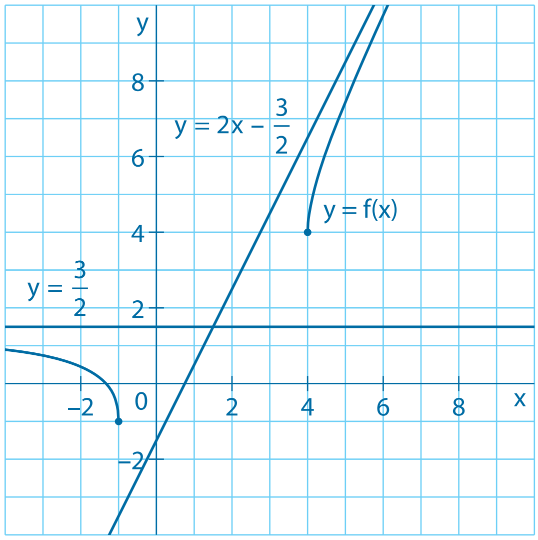
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - 3x - 4} - x\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - 3x - 4 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4} + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cancel{x}\left(1 + \overbrace{\frac{4}{3x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.:} \quad y = 2x - \frac{3}{2}}$$



Opdracht 60 bladzijde 172

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

1 $f: x \mapsto \dfrac{2}{27x^3 + 8}$

$$f(x) = \frac{2}{27x^3 + 8}$$

rationale functie:

nulpunt noemer: $-\dfrac{2}{3}$

graad teller < graad noemer

V.A.: $x = -\dfrac{2}{3}$
H.A.: $y = 0$
S.A.: /

2 $f: x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

rationale functie:

nulpunten teller: $-1, 1$

nulpunten noemer: $1, -2$

graad teller < graad noemer

V.A.: $x = -2$
H.A.: $y = 0$
S.A.: /

3 $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2}{-2x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{-2x^2 + 1}$$

rationale functie:

nulpunten teller: $0, -3$

nulpunten noemer: $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

graad teller = graad noemer + 1

$$\begin{array}{ll|l}
x^3 + 3x^2 & & -2x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
-x^3 & + \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ \cline{1-2}
3x^2 + \frac{1}{2}x & & \\
-3x^2 & + \frac{3}{2} & \\ \cline{1-2}
\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & &
\end{array}$$

V.A.: $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

H.A.: /

S.A.: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

4 $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x - 7}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 7}$$

- geen V.A. want geen nulpunten noemer
- grafisch vermoeden we 2 schuine asymptoten
- $a_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 7}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1 + \overset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{7}{x^2}}}}{\cancel{x}} = 1$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 7} - x\right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 4x - 7 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 4x - 7} + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x}\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{7}{4x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 + \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{7}{x^2}}} + 1\right)} = 2$$

$$\Rightarrow \ y = x + 2$$

V.A.: /

H.A.: /

S.A.: $y = x + 2$

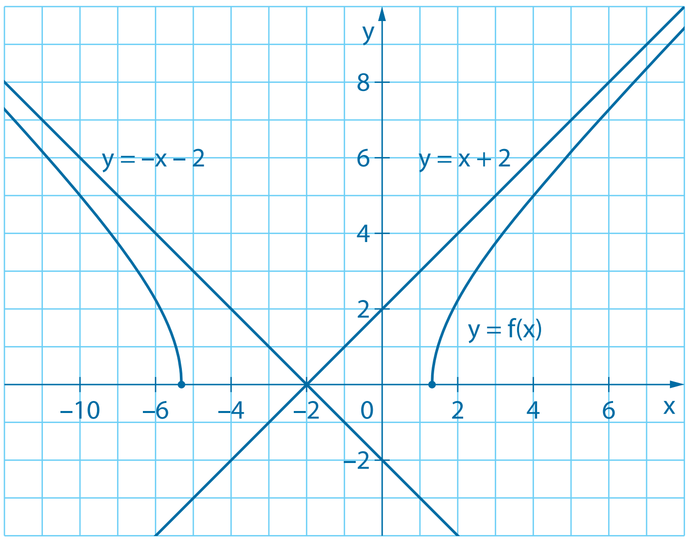
$y = -x - 2$

- $a_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x-7}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1+\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{7}{x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}} = -1$

  $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-7}+x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+4x-7\cancel{-x^2}}{\sqrt{x^2+4x-7}-x}$

  $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{7}{4x}}^{\to 0}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{7}{x^2}}_{\to 0}}+1\right)} = -2$

  $\Rightarrow\ y = -x-2$



5 $f : x \mapsto \sqrt{x^2-6x+3}+x-1$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+3}+x-1$

V.A.: /
H.A.: $y = 2$
S.A.: $y = 2x-4$

- geen V.A. want geen nulpunt noemer
- grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+3}+x-1\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-6x+3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-6x+3}-(x-1)}$

  $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-6x+3}-x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{2}{4x}}^{\to 0}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\underbrace{\frac{6}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}}+1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = 2$

  $\Rightarrow\ y = 2$

- $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 3} + x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}{x} + 1 - 0$

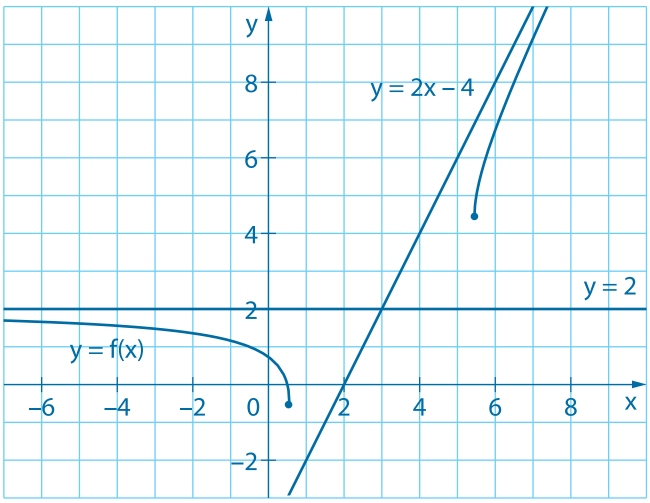
$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}} + 1 = 2$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 3} + x - 1 - 2x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 3} - (x + 1)\right)$

$\overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 3 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 - 6x + 3} + x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8x + 2}{\sqrt{x^2 - 6x + 3} + x + 1}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8\cancel{x}\left(1 - \frac{2}{8x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} = -4$

$\Rightarrow\ y = 2x - 4$



6 $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$

V.A.: $x = -1, x = 1$
H.A.: $y = 1$
S.A.: /

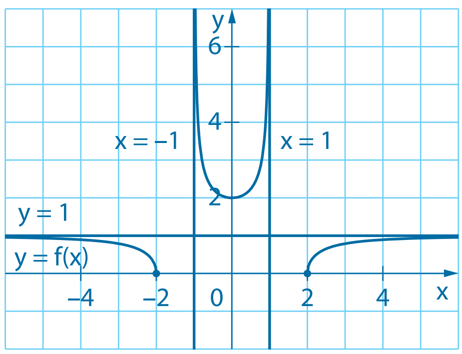
- dom $f =]-\infty, -2] \cup]-1, 1[\cup [2, +\infty[$

x		-2		-1		1		2	
$\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$	$+$	0	$-$	|	$+$	|	$-$	0	$+$

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \overset{\frac{-3}{0^-}}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \overset{\frac{-3}{0^-}}{=} +\infty$ V.A.: $x = -1, x = 1$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}}} = 1$ H.A.: $y = 1$



Opdracht 61 bladzijde 173

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+1}{cx^2+2x}$ heeft de rechte met vergelijking $y = 3x - 2$ als schuine asymptoot.

Bepaal a, b en c.

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{cx^2+2x}$$

De grafiek van de functie heeft een schuine asymptoot, dus moet bij deze rationale functie de graad van de teller 1 meer zijn dan de graad van de noemer: $a \neq 0$ en $\boxed{c = 0}$.

We voeren de euclidische deling uit:

$$\begin{array}{r|l} ax^2 + bx + 1 & 2x \\ \hline -ax^2 & \dfrac{a}{2}x + \dfrac{b}{2} \\ \hline bx + 1 & \\ -bx & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Nu moet $\dfrac{a}{2}x + \dfrac{b}{2} = 3x - 2$, zodat $\dfrac{a}{2} = 3$ en $\dfrac{b}{2} = -2$, dus $\boxed{a = 6}$ en $\boxed{b = -4}$.

Besluit: $a = 6$, $b = -4$, $c = 0$.

Opdracht 62 bladzijde 173

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \sqrt{cx^2+dx}$ heeft als schuine asymptoten de rechten met vergelijking $y = 4x + \dfrac{1}{2}$ en $y = -4x - \dfrac{1}{2}$.

Bepaal c en d.

$$f(x) = \sqrt{cx^2+dx}$$

Schuine asymptoten:

- $$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{cx^2+dx}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{c}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overset{\to 0}{\dfrac{d}{cx}}}}{\cancel{x}}$$

  $$= \sqrt{c}$$

  Er geldt: $\sqrt{c} = 4$, dus $\boxed{c = 16}$.

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+dx}-\sqrt{16x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{16x^2}+dx-\cancel{16x^2}}{\sqrt{16x^2+dx}+4x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{d\cancel{x}}{4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{d}{16x}}_{\to 0}}+1\right)} = \frac{d}{8}$$

Er geldt: $\frac{d}{8}=\frac{1}{2}$, dus $\boxed{d=4}$.

- $$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{cx^2+dx}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{c}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overbrace{\frac{d}{cx}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$$

$$= -\sqrt{c}$$

Er geldt: $-\sqrt{c}=-4$, dus $\boxed{c=16}$.

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+dx}+\sqrt{16x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{16x^2}+dx-\cancel{16x^2}}{\sqrt{16x^2+dx}-4x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{d\cancel{x}}{-4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{d}{16x}}+1\right)} = -\frac{d}{8}$$

Er geldt: $-\frac{d}{8}=-\frac{1}{2}$, dus $\boxed{d=4}$.

Besluit: $c=16$, $d=4$.

Opdracht 63 bladzijde 173

De functie $f: x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+(d+1)x+d}$ heeft als enige nulpunt 1, als enige verticale asymptoot de rechte met vergelijking $x=-2$ en als horizontale asymptoot de rechte met vergelijking $y=2$.

Bepaal a, b, c en d.

(bron © toelatingsproef Burg. Ir. KU Leuven 2001)

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+(d+1)x+d}$$

- H.A.: $y=2$, dus moet $\boxed{a=2}$.
- $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x-c)}{(x+2)\left(x+\frac{d}{2}\right)}$ want 1 is een nulpunt en V.A.: $x=-2$.

  Maar enkel 1 mag nulpunt zijn, dus moet $\frac{c}{2}=-\frac{d}{2}$, m.a.w. $c=-d$.

  Bovendien moet $-c-2=b$ (coëfficiënt van x in de teller) en $\frac{d}{2}+2=d+1$ (coëfficiënt van x in de noemer), zodat $\boxed{d=2}$, $\boxed{c=-2}$ en $\boxed{b=0}$.
- Besluit: $a=2$, $b=0$, $c=-2$, $d=2$.

Opdracht 64 bladzijde 173

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

1 $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

- $\text{dom } f = \,]-\infty, 1[\, \cup \,]2, +\infty[$

x		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	−	0	+

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{V.A.: } x = 1, x = 2}$$

- Grafisch vermoeden we twee schuine asymptoten.

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}\sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} - x \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^3}\left(1 - \overbrace{\frac{2}{3x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}} \cdot \cancel{x^2}\left(1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = x + \frac{3}{2}}$$

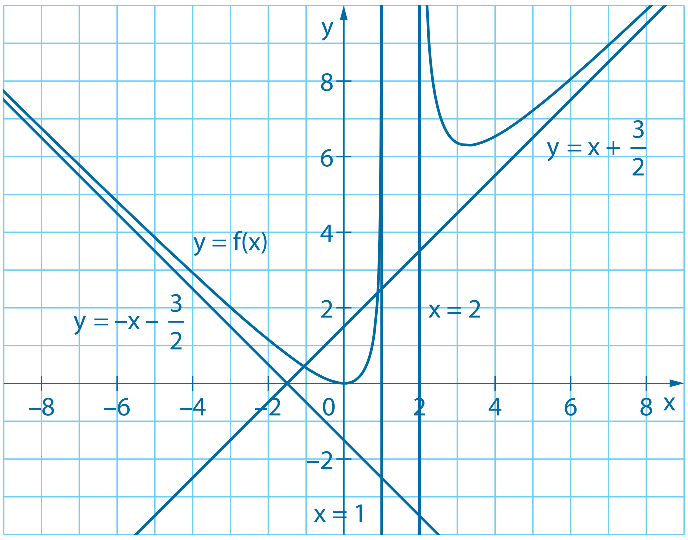
$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{-\cancel{x^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}}+x\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3\cancel{x^3}\left(1-\overbrace{\frac{2}{3x}}^{\to 0}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\cdot\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = -x-\frac{3}{2}}$$



2 $f: x \longmapsto x+1+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

- dom $f = \mathbb{R}$
- Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$.
- $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)\sqrt{x^2+9}+x^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)(-x)\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+x^2}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{\cancel{2}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\overbrace{\frac{9}{x^2}}^{\to 0}}-1\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\cancel{1}+\frac{1}{x}\cancel{-1}\right)}{-\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-1}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{H.A.: } y = 1}$$

- $$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)$$

$$= 1 + 0 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}} = 1 + 1 = 2$$

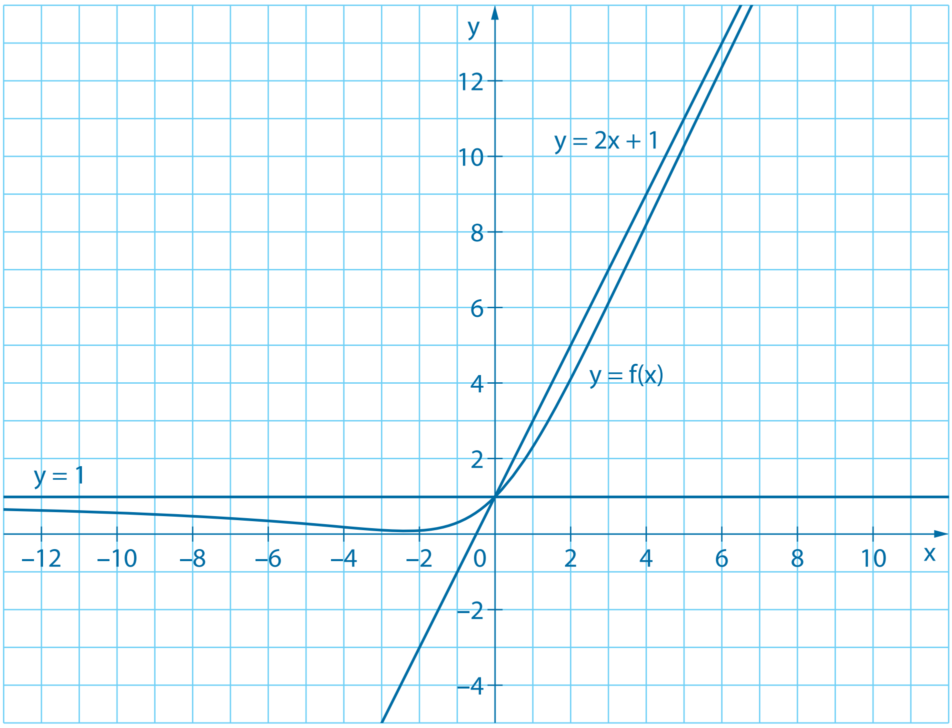
$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}-x\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2+9}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+x\sqrt{x^2+9}\right)}$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^2(x^2+9)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+x\sqrt{x^2+9}\right)} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{-9\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}\cdot\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = 2x+1}$$



3 $f : x \mapsto \dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x-1}$$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{V.A.: } x = 1}$

- Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$.

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

  $$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{-1}{-\infty}}{=} 0$$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{H.A.: } y = 0}$

- $$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cancel{x}\,(x-1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = 2$$

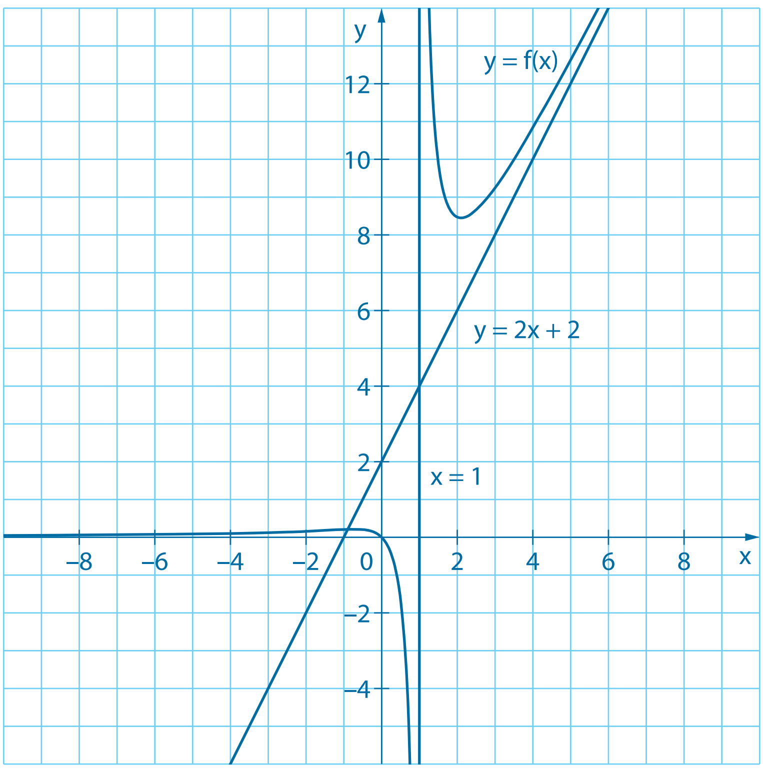
$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{(x-1)} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x\sqrt{x^2+1}-2x^2+2x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x-x^2}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+1}+2-x\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-(2-x)^2}{\sqrt{x^2+1}-2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}-2+x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(4-\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}+1\right)} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = 2x+2}$$



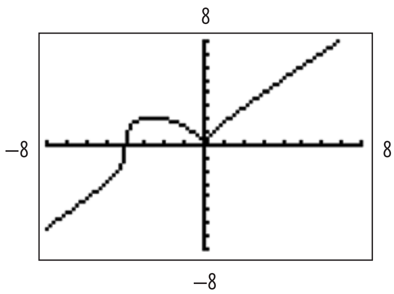
Opdracht 65 bladzijde 174

Schuine asymptoten bij derdemachtswortelfuncties

Voorbeeld

Bereken de asymptoten van de grafiek van de functie $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^3+4x^2}$.

- Het domein van f is $\mathbb{R}$.
  De grafiek heeft dus geen verticale asymptoten.
- Na het plotten van de grafiek, vermoeden we een schuine asymptoot met vergelijking $y = ax + b$ met



$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}}{x} \qquad \sqrt[3]{x^3}=x$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+4x^2} - x\right]$$

Dit is een limiet van de vorm '$\infty - \infty$'.

We vermenigvuldigen teller en noemer met het toegevoegde van de wortelvorm om het merkwaardig product $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ te kunnen gebruiken.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+4x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+4x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6+8x^5+16x^4} + x\sqrt[3]{x^3+4x^2}+x^2}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}+1} = \frac{4}{3}$$

De schuine asymptoot van de grafiek van f heeft als vergelijking $y = x + \frac{4}{3}$.

Bereken op dezelfde manier de asymptoten van de grafiek van de functie

1 $f : x \mapsto \sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}$

$f(x) = \sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}$

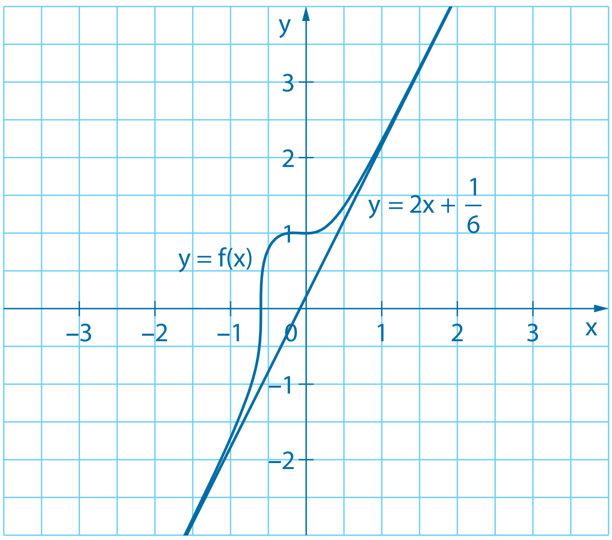
Grafisch vermoeden we een schuine asymptoot.

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\cancel{x}\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}}}{\cancel{x}} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}-2x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}+4x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)^2+2x\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}+4x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{8x^3}+\overbrace{2x^2+1}^{2\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right),\ \frac{1}{2x^2}\to 0}\cancel{-8x^3}}{4\cancel{x^2}\left(\left(\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}}+1\right)} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 2x + \frac{1}{6}}$



2 $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}$

$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}$

Grafisch vermoeden we een schuine asymptoot.

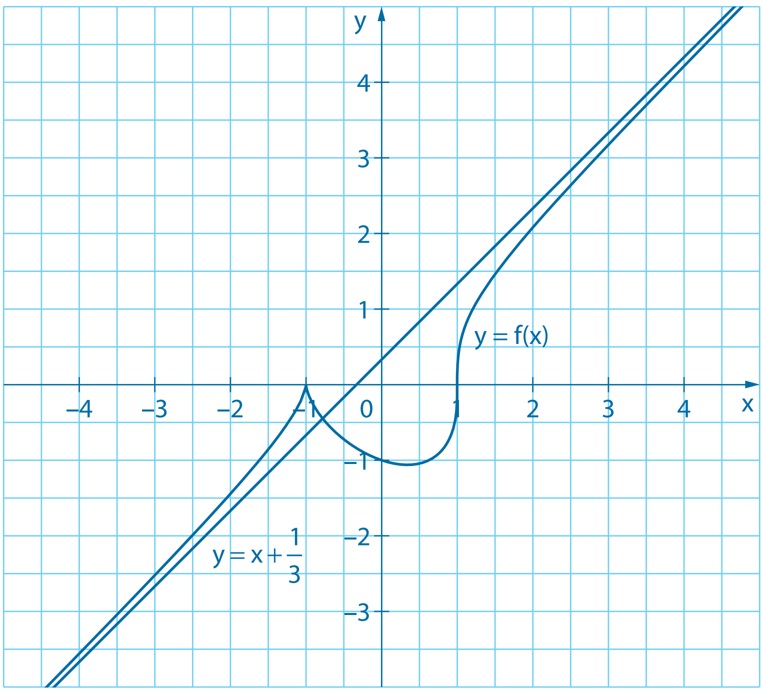
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{\Big(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)\Big(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)^2}}{\cancel{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{(x-1)(x+1)^2 - x^3}^{x^2-x-1}}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2}+1\right)}$$

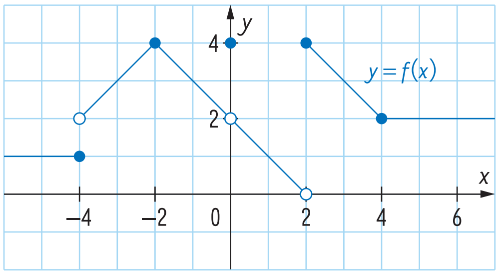
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\Big(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}\Big)}{\cancel{x^2}\left(\left(\sqrt[3]{\Big(1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)\Big(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\Big(1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)\Big(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\Big)^2}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = x + \frac{1}{3}}$$



Opdracht 66 bladzijde 175

De functie f is gegeven door haar grafiek.



Is f continu in

1 0?

f is niet continu in 0.

2 4?

f is continu in 4.

3 $[-4, 0]$?

f is niet continu in $[-4, 0]$.

4 $[-2, 1]$?

f is niet continu in $[-2, 1]$.

5 $[2, 4]$?

f is continu in $[2,4]$.

Opdracht 67 bladzijde 175

Voor welke x-waarden zijn de volgende functies continu?

1 $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R}_0$.

2 $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x + 4)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < -4 \\ 0 & \text{als } x = -4 \\ 1 & \text{als } x > -4 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

3 $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{als } x \neq 3 \\ 6 & \text{als } x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 & \text{als } x \neq 3 \\ 6 & \text{als } x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 = f(3)$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R}$.

4 $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

x		−2		2	
$x^2 - 4$	+	0	−	0	+

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{als } x = -2 \text{ of } x = 2 \\ 1 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Opdracht 68 bladzijde 175

De functie $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{als } x \geqslant -2 \\ ax + 2 & \text{als } x < -2 \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal a.

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -2a + 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 4$

Nu moet f continu zijn in $\mathbb{R}$, dus ook in −2, zodat

$-2a + 2 = 4$

$\boxed{a = -1}$

Opdracht 69 bladzijde 175

De functie f is continu in 3 en $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ als $x \neq 3$.

Bepaal $f(3)$.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} \quad \text{als } x \neq 3$$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{9}{2} = f(3)$, want f is continu in 3.

$\Rightarrow \boxed{f(3) = \dfrac{9}{2}}$

Opdracht 70 bladzijde 176

De functie $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9x + 13} & \text{als } x \geqslant a \\ 3x - 2 & \text{als } x < a \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal a.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = 3a - 2$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \sqrt{a^2 + 9a + 13}$$

f is continu in $\mathbb{R}$, dus ook in a.

We houden rekening met de bestaansvoorwaarde dat

$a^2 + 9a + 13 \geqslant 0$

$D = 29$

a		a_1		a_2	
$a^2 + 9a + 13$	+	0	−	0	+

$a_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{29}}{2} \approx -7{,}19$

$a_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{29}}{2} \approx -1{,}81$

$\sqrt{a^2 + 9a + 13} = 3a - 2$

KV: $3a - 2 \geqslant 0$

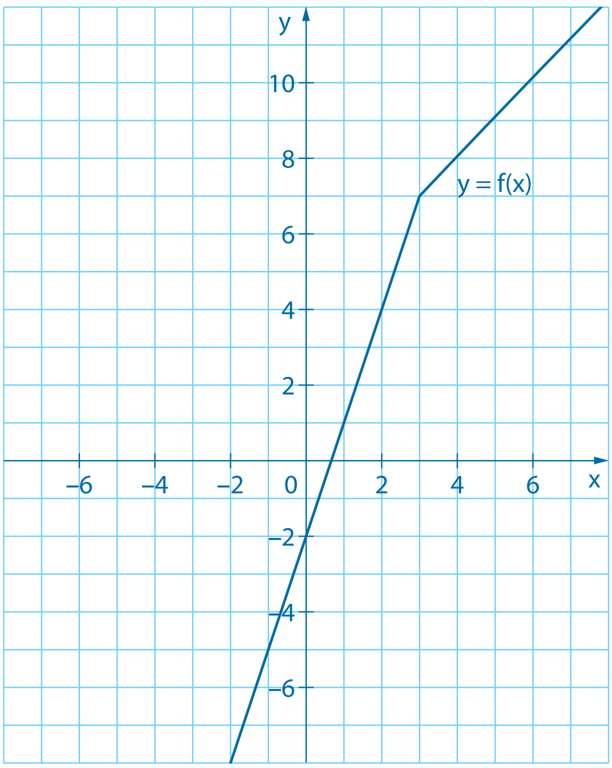
$a \geqslant \dfrac{2}{3}$

$a^2 + 9a + 13 = 9a^2 - 12a + 4$

$8a^2 - 21a - 9 = 0$

$a = 3$ of $\cancel{a = -\dfrac{3}{8}}$ (KV)

$\Rightarrow a = 3$



Opdracht 71 bladzijde 176

Onderzoek de continuïteit van de functie $f : x \mapsto \begin{cases} |x-1| & \text{als } x < 2 \\ 1-x+\frac{1}{2}x^2 & \text{als } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{26}{5x-15} & \text{als } x > 4 \end{cases}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{als } x < 1 \\ x-1 & \text{als } 1 \leqslant x < 2 \\ 1-x+\frac{1}{2}x^2 & \text{als } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{26}{5x-15} & \text{als } x > 4 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \frac{26}{5} \neq 5$

$\Rightarrow$ f is continu in $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Opdracht 72 bladzijde 176

De functie $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ beeldt elk reëel getal x af op het grootste geheel getal dat kleiner of gelijk is aan x.

Zo is $\lfloor 3{,}75 \rfloor = 3$, $\lfloor -3{,}2 \rfloor = -4$ en $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Zijn de volgende functies continu, linkscontinu of rechtscontinu in 0?

1 $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \lfloor x \rfloor = -1 \neq f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \lfloor x \rfloor = 0 = f(0)$

f is niet linkscontinu in 0.

f is rechtscontinu in 0.

f is niet continu in 0.

2 $f : x \mapsto \lfloor \cos x \rfloor$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ < \\ >}} \lfloor \cos x \rfloor = 0 \neq f(0) = 1$

positief getal dicht bij 1 maar kleiner dan 1

f is niet linkscontinu, niet rechtscontinu, niet continu in 0.

3 $f : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

$f(0) = 0$

f is linkscontinu, rechtscontinu en continu in 0.

4 $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor \cdot \text{sgn}(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \underset{-1}{\underset{\downarrow}{\lfloor x \rfloor}} \cdot \underbrace{\text{sgn}(x)}_{-1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \underset{0}{\underset{\downarrow}{\lfloor x \rfloor}} \cdot \underbrace{\text{sgn}(x)}_{+1} = 0 = f(0)$$

f is niet linkcontinu, wel rechtscontinu en dus niet continu in 0.

Opdracht 73 bladzijde 176

De functie f is continu in $\mathbb{R}$ en $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$ als $x \neq -3$ en $x \neq 3$.

Bepaal $f(-3)$ en $f(3)$.

$$\lim_{x \to -3} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{-x - 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{-\cancel{(x+3)}} = 6$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$$

f is continu in $\mathbb{R}$, dus geldt dat $f(-3) = f(3) = 6$.

Opdracht 74 bladzijde 176

De functie f heeft als voorschrift $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7}$ als $x \neq 1$.

Bepaal $f(1)$ als je weet dat de functie met voorschrift $g(x) = x + f(x)$ continu is in 1.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(2x^2 + 2x + 7)} \underset{x \neq 1}{=} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x + 7}$$

Als g continu is in 1 moet ook f continu zijn in 1, dus moet $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$,

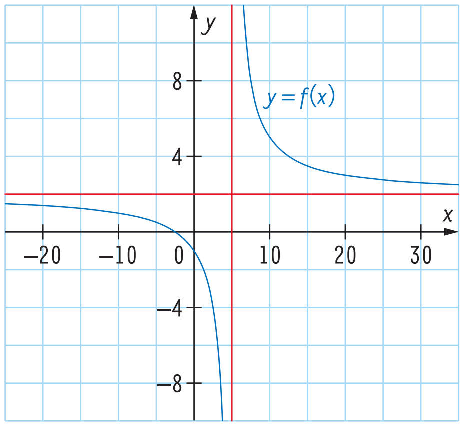
m.a.w. $f(1) = \dfrac{0}{11} = 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$

Opdracht 75 bladzijde 177

De grafiek van de functie f en de asymptoten ervan zijn getekend.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.



1 $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty$

3 $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ bestaat niet

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Opdracht 76 bladzijde 177

Bepaal $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ als $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{als } x \neq 3 \\ 2 & \text{als } x = 3 \end{cases}$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{(\cancel{x - 3})(x - 4)}{\cancel{x - 3}} = -1$$

Opdracht 77 bladzijde 177

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^3+3x^2-6x+2}{2x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^{\cancel{3}\,2}}{2\cancel{x}}=-\infty$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2-(9x^2-5x+1)}{3x-\sqrt{9x^2-5x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\cancel{x}\left(1-\overset{\to 0}{\dfrac{1}{5x}}\right)}{3\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\underset{\to 0}{\dfrac{5}{9x}}+\underset{\to 0}{\dfrac{1}{9x^2}}}\right)}$

$=\dfrac{5}{6}$

3 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{4-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\cancel{x-4})(x+3)}{-(\cancel{x-4})}=-7$

4 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(\cancel{x+2})(x-1)}{(x+2)^{\cancel{2}}}\overset{\frac{-3}{0}}{\Rightarrow}$ bestaat niet

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}\dfrac{x-1}{x+2}\overset{\frac{-3}{0^-}}{=}+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\dfrac{x-1}{x+2}\overset{\frac{-3}{0^+}}{=}-\infty$

5 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty$

6 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{x^3+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{9-(x^2+8)}{(x+1)(x^2-x+1)\left(3+\sqrt{x^2+8}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-(x-1)(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)\left(3+\sqrt{x^2+8}\right)}$

$=\dfrac{1}{9}$

Opdracht 78 bladzijde 178

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

1 $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)}$$

De grafiek van deze functie heeft één verticale asymptoot met vergelijking $x = -2$.

Omdat de graad van de teller 1 meer is dan de graad van de noemer, is er ook een schuine asymptoot.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -8 & x^2 - 4 \\ \cline{3-3} -x^3 + 4x & & x \\ \hline & 4x - 8 & \end{array}$$

De vergelijking van de schuine asymptoot is $y = x$.

Besluit: V.A.: $x = -2$

H.A.: /

S.A.: $y = x$

2 $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x - 7}$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x - 7}$$

$$= \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-7)}$$

De grafiek van f heeft dus één verticale asymptoot met vergelijking $x = 7$.

Omdat de graad van de teller gelijk is aan de graad van de noemer is er een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 3$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3$.

Besluit: V.A.: $x = 7$

H.A.: $y = 3$

S.A.: /

3 $f : x \mapsto 5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$f(x) = 5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

- dom $f = \left]-\infty, 1\right] \cup \left[3, +\infty\right[$
- De grafiek van f heeft geen verticale asymptoot, want er is geen noemer.
- Grafisch vermoeden we twee schuine astymptoten.

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 5 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$$

$$= 5 + 1 = 6$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 6x\right)$$

$$= 2 + \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x\right)$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x + 3 \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{-4\cancel{x}\left(1 - \overbrace{\frac{3}{4x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)}$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 6x}$

$$a_2 = 5 + \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1 - \overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}} = 5 - 1 = 4$$

$$b_2 = 2 + \lim_{x \to -\infty} \left(5x + \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 4x\right)$$

$$= 2 + \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x\right)$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x + 3 \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{-}4\cancel{x}\left(1 - \overbrace{\frac{3}{4x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{-x}\left(\sqrt{1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)}$$

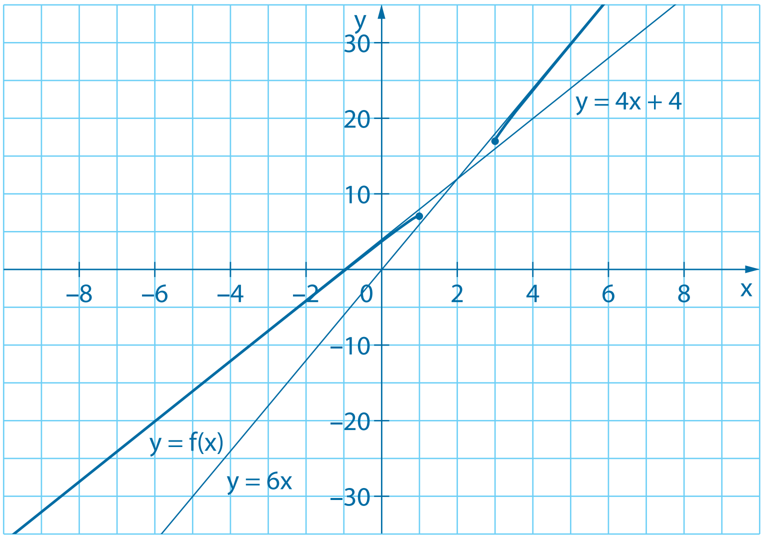
$$= 2 + 2 = 4$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 4x + 4}$

Besluit: V.A.: /

H.A.: /

S.A.: $y = 6x$ en $y = 4x + 4$



4 $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}}$

- dom f = $]-\infty, -2] \cup]-1, 1[\cup [3, +\infty[$

x		-2		-1		1		3	
$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$	+	0	–	|	+	|	–	0	+

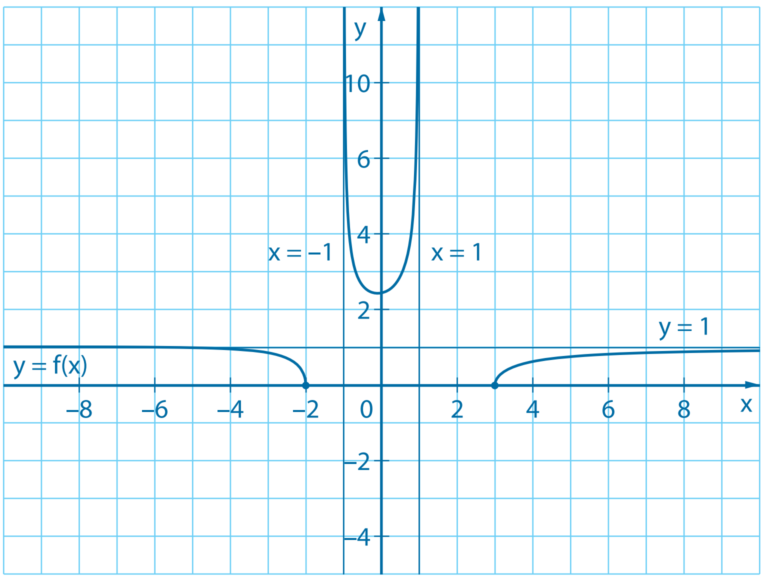
- De grafiek heeft twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -1$ en $x = 1$.
- De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 1$,

want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}}} = 1.$

Besluit: V.A.: $x = -1$, $x = 1$

H.A.: $y = 1$

S.A.: /



Opdracht 79 bladzijde 178

Stel een mogelijk voorschrift op van een functie f die slechts één nulpunt heeft en waarbij $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 3} f(x)=0$, $\lim_{\substack{x\to 4\\<}} f(x)=-\infty$, $\lim_{\substack{x\to 4\\>}} f(x)=+\infty$ en $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Voorbeeld: $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2(x-4)}$

Opdracht 80 bladzijde 178

Gegeven de functie $f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x+2|} & \text{als } x \neq -2 \\ 4 & \text{als } x = -2 \end{cases}$.

1 Bereken $\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)$ en $\lim_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{x^2-4}{-(x+2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to-2\\<}} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}} = 4$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\>}} \frac{x^2-4}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to-2\\>}} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = -4$$

2 Is f continu, linkscontinu en/of rechtscontinu in -2? Verklaar.

f is enkel linkscontinu in -2, want $\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = 4 = f(-2)$.

Opdracht 81 bladzijde 178

1 Bepaal k als $\lim_{x\to-1} \dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+kx^2+3x+9}$ een reëel getal verschillend van 0 is.

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+kx^2+3x+9} = \frac{0}{k+5}$$

Deze limiet moet een reëel getal verschillend van 0 zijn, dus moet $k=-5$.

2 Bereken de limiet voor de gevonden waarde van k.

$$\lim_{x\to-1} \frac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x^2-7x+3)}{\cancel{(x+1)}(x-3)^2} = \frac{3}{4}$$

Opdracht 82 bladzijde 178

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^3 + bx^2 - 4}{cx^2 + dx + 4}$ heeft als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = -\dfrac{1}{2}$ en $x = 4$ en als schuine asymptoot de rechte met vergelijking $y = -3x$.

Bepaal a, b, c en d.

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 4}{cx^2 + dx + 4}$$

De grafiek heeft als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = -\dfrac{1}{2}$ en $x = 4$, dus moet $cx^2 + dx + 4 = c\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 4)$.

De grafiek heeft als schuine asymptoot de rechte met vergelijking $y = -3x$, dus is $\dfrac{a}{c} = -3$.

$cx^2 + dx + 4 = c\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 4) = cx^2 - \dfrac{7}{2}cx - 2c$, hieruit volgt dat $-2c = 4$, dus $c = -2$.

Uit $\dfrac{a}{c} = -3$ volgt dan dat $a = 6$.

Uit $d = -\dfrac{7}{2}c$ en $c = -2$ volgt dan dat $d = 7$.

Om b te bepalen voeren we de euclidische deling uit van $6x^3 + bx^2 - 4$ door $-2x^2 + 7x + 4$.

$$\begin{array}{llll|l}
6x^3 & +\ bx^2 & & -4 & -2x^2 + 7x + 4 \\
\cline{5-5}
-6x^3 & +\ 21x^2 & +\ 12x & & -3x + \dfrac{b+21}{-2} \\
\cline{1-4}
 & (b+21)x^2 & +\ 12x & -\ 4 & \\
 & -(b+21)x^2 & -\ \dfrac{7(b+21)}{-2}x & -\ \dfrac{4(b+21)}{-2} & \\
\cline{1-4}
 & & \dfrac{7b+171}{2}x & +\ 2b + 38 &
\end{array}$$

Omdat de schuine asymptoot als vergelijking $y = -3x$ heeft, moet $\dfrac{b+21}{-2} = 0$, dus $b = -21$.

Besluit: $a = 6$, $b = -21$, $c = -2$, $d = 7$.