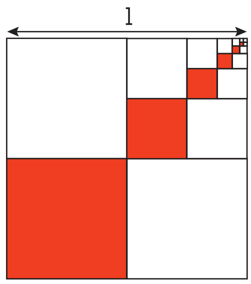
Hoofdstuk 2

Reeksen

Opdracht 1 bladzijde 40

In de figuur zie je een patroon van gekleurde vierkanten, dat oneindig verder gaat.



1 De oppervlaktes van de opeenvolgende gekleurde vierkanten vormen een oneindige rij $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$

Welke soort rij is dit?

$u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{16}, u_3 = \frac{1}{64}, u_4 = \frac{1}{256}, \dots$

De oppervlaktes van de opeenvolgende gekleurde vierkanten vormen een meetkundige rij met $q = \frac{1}{4}$ en $u_1 = \frac{1}{4}$.

2 Noem de som van de oppervlaktes van de eerste n vierkanten s_n. In symbolen: $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

Bereken s_n.

$$s_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

3 Bereken nu welk deel van het grote vierkant gekleurd is, met andere woorden bereken $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.

(Bron © gebaseerd op VWO 1e ronde, 2004)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$$

Opdracht 2 bladzijde 43

Ga na of de reeks convergeert of divergeert. Geef de som van de reeks indien ze convergeert.

1 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Beschouw de rij van de partieelsommen:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 - 1 = 0$

$s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

...

De rij 1, 0, 1, 0, … divergeert. We kunnen hieruit besluiten dat de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ divergeert.

2 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$

Beschouw de rij van de partieelsommen:

$$s_1 = \frac{1}{3}$$

$$s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$$

$$s_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$$

$$s_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$$

…

$s_n = \frac{n}{2n+1}$ (dit kan aangetoond worden met inductie)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{2}$$

De reeks convergeert met som $\frac{1}{2}$.

Opdracht 3 bladzijde 43

Gegeven is de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \frac{k}{k+1}$.

1 Geef de eerste, tweede, derde en vierde partieelsom.

$$s_1 = \ln \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} = \ln \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \quad = \ln \frac{1}{3}$$

$$s_3 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{1}{4}$$

$$s_4 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{1}{5}$$

2 Geef een uitdrukking voor s_n.

$$s_n = \ln \frac{1}{1+n}$$

3 Is de reeks convergent of divergent?

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \ln \frac{1}{1+n} = \ln\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n}\right) = -\infty$$

De reeks is divergent.

Opdracht 4 bladzijde 46

De termen van de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}(3k-1) = 2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ vormen een rekenkundige rij.

We noemen $\sum_{k=1}^{+\infty}(3k-1)$ een **rekenkundige reeks**.

1 Ga na of deze reeks convergeert of divergeert.

$\lim_{n\to+\infty}(3n-1) = +\infty$

Omdat $\lim_{n\to+\infty}(3n-1) \neq 0$, is niet voldaan aan de nodige voorwaarde voor convergentie.

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}(3k-1)$ is divergent.

2 Wat kun je besluiten over de convergentie of divergentie van een willekeurige rekenkundige reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}(u_1 + (k-1)\cdot v)$?

Een rekenkundige reeks is steeds divergent omdat $\lim_{n\to+\infty}\left(u_1 + (n-1)v\right) = \pm\infty$.

Opdracht 5 bladzijde 46

Onderzoek of de reeksen convergent of divergent zijn.

1 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3k}{4k+1}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4}$

Omdat $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{4n+1} \neq 0$, is niet voldaan aan de nodige voorwaarde voor convergentie.

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3k}{4k+1}$ is divergent.

2 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

We moeten verder onderzoeken of de reeks al dan niet convergeert.

De termen van de reeks zijn: $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots$

Uit de formule voor de som van de termen van een eindige meetkundige rij volgt:

$$s_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{\frac{1}{5} - 1} = -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{1}{4}.$$

Omdat de rij van de partieelsommen convergeert, is de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k$ convergent.

3 $\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

We moeten verder onderzoeken of de reeks al dan niet convergeert.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \ldots$$

$$s_1 = \log 2$$

$$s_2 = \log 2 + \log\frac{3}{2} = \log 2 \cdot \frac{3}{2} = \log 3$$

$$s_3 = \log 3 + \log\frac{4}{3} = \log 4$$

...

$$s_n = \log(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ is divergent.

Opdracht 6 bladzijde 46

Zijn de reeksen convergent of divergent? Bepaal de som van de reeksen die convergent zijn.

1 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

De n-de partieelsom is gelijk aan $s_n = 1 \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, is $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 2$.

De reeks is convergent en heeft als som 2.

2 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 4^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 4^{k-1} = 1 + 4 + 16 + 64 + ...$$

$$s_n = 1 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3} \cdot \left[4^n - 1\right]$$

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$, divergeert de rij van partieelsommen.

De reeks is divergent en heeft dus geen som.

3 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$$

$$s_n = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3} \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \frac{2}{3}$ want doordat $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, is ook $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

De reeks is convergent en heeft als som $\frac{2}{3}$.

4 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-4)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-4)^{k-1} = 1 - 4 + 16 - 64 + ...$$

$$s_n = 1 \cdot \frac{(-4)^n - 1}{-4 - 1} = \frac{1}{5} \cdot \left[1 - (-4)^n\right].$$

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} (-4)^n$ niet bestaat, is de reeks divergent en heeft ze dus geen som.

Opdracht 7 bladzijde 550

Een strook papier met lengte 1 meter wordt in drie gelijke stukken gesneden. Een derde wordt bijgehouden, een derde wordt weggegooid en een derde wordt opnieuw in drie stukken verdeeld. Hiervan wordt weer een derde bijgehouden, een derde weggegooid en een derde in drieën verdeeld. Deze werkwijze wordt steeds weer herhaald.

Bereken de totale lengte van het bijgehouden papier.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

De totale lengte van het bijgehouden papier is 0,5 m.

Opdracht 8 bladzijde 46

Kies het juiste antwoord en verklaar.

De reeks $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\ldots$ heeft als som

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{5}{9}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$ **E** $\frac{5}{8}$

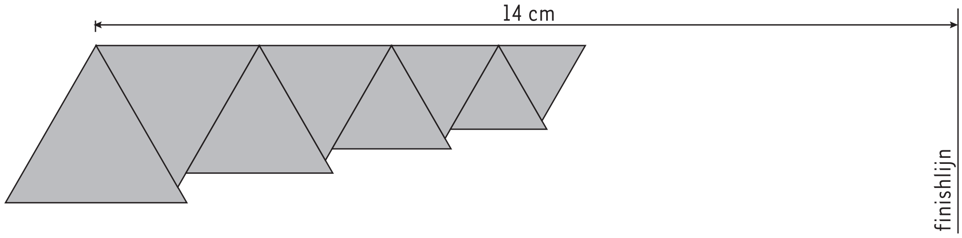
De reeks $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\ldots$ kunnen we schrijven als de som van de reeksen $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\ldots$ en $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\ldots$ Dit zijn beide meetkundige reeksen met respectievelijke som: $s_1=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ en $s_2=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8}$.

De reeks $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\ldots$ heeft als som $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Antwoord E is juist.

Opdracht 9 bladzijde 51

We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3 cm. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan, de ene keer met de top naar beneden, de andere keer met de top naar boven. De zijden van de nieuw te plakken driehoek zijn 0,9 keer zo groot als de zijden van de vorige driehoek die werd geplakt. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn. We plakken oneindig vaak.



Wordt de finishlijn op den duur overschreden? Verklaar met een berekening.

(Bron © Eindexamen Nederland wiskunde VWO, 2007)

De som van de lengtes van de zijden van de driehoek is aan de rand
$3 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}9^3 + 3 \cdot 0{,}9^5 + \ldots$.

Dit is een convergerende meetkundige reeks met som $\dfrac{3 \cdot 0{,}9}{1 - 0{,}9^2} = \dfrac{270}{19} \approx 14{,}21$.

De finishlijn wordt dus overschreden.

Opdracht 10 bladzijde 54

Onderzoek of de reeksen convergent of divergent zijn.

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{20^k}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{20^k} = 1 + \frac{1}{20} + \frac{2!}{20^2} + \frac{3!}{20^3} + \frac{4!}{20^4} + \ldots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{20^{n+1}}}{\frac{n!}{20^n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{20} = +\infty$$

De reeks divergeert.

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - \frac{9}{8} + \frac{16}{16} - \ldots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^2}{2^n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

De reeks is convergent.

3 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$$

Dit is een alternerende reeks, waarbij $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Er is niet voldaan aan de voorwaarden van de convergentietest voor alternerende reeksen.

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ niet bestaat, is niet voldaan aan de nodige voorwaarde voor convergentie.

De reeks is dus divergent.

Opdracht 11 bladzijde 58

Ga na of de reeks convergent of divergent is. Bereken de som indien ze convergent is.

1 $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - 2k)$

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1 - 2k)$ divergeert.

Er is niet aan de nodige voorwaarde voor convergentie voldaan, want $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 2n) = -\infty \neq 0$.

2 $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k+1}{k-1}$

$\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{k+1}{k-1}$ divergeert want $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1 \neq 0$.

3 $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$

Beschouw de rij van de partieelsommen van de reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right)$:

$$s_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$s_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$s_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

...

$$s_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}$, is de reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$ convergent met som $\frac{1}{3}$.

4 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\frac{1}{k}$

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\frac{1}{k}$ is divergent want $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\frac{1}{n} = -\infty \neq 0$.

Opdracht 12 bladzijde 58

Gegeven de reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

1 Bereken de constanten a en b zodanig dat $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$.

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$$
$$= \frac{a(k+2) + bk}{k(k+2)}$$
$$= \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+2)}$$

Uit de gelijkheid van veeltermen volgt:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2 Bepaal een uitdrukking voor s_n.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$$

$$s_4 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

...

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \quad (n > 1)$$

3 Toon aan dat de reeks convergent is en bepaal de som.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{3}{4}$$

De reeks is convergent en heeft als som $\frac{3}{4}$.

Opdracht 13 bladzijde 58

Is de reeks convergent of divergent? Bereken de som indien ze convergent is.

1 $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{k^2} - \cos\frac{1}{(k+1)^2} \right)$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{k^2} - \cos\frac{1}{(k+1)^2} \right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{9} + \ldots$$

$$s_1 = \cos 1 - \cos\frac{1}{4}$$

$$s_2 = \left(\cos 1 - \cos\frac{1}{4} \right) + \left(\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{9} \right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{9}$$

$$s_3 = \left(\cos 1 - \cos\frac{1}{4} \right) + \left(\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{9} \right) + \left(\cos\frac{1}{9} - \cos\frac{1}{16} \right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{16}$$

$$s_4 = \left(\cos 1 - \cos\frac{1}{4} \right) + \left(\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{9} \right) + \left(\cos\frac{1}{9} - \cos\frac{1}{16} \right) + \left(\cos\frac{1}{16} - \cos\frac{1}{25} \right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{25}$$

...

$$s_n = \cos 1 - \cos\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \cos 1 - 1$$

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{k^2} - \cos\frac{1}{(k+1)^2} \right)$ is convergent en heeft als som $\cos 1 - 1$.

2 $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{2k} \cdot 3^{1-k}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{2k} \cdot 3^{1-k} = 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \ldots$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{2n} \cdot 3^{1-n} = \lim_{n \to +\infty} 4^n \cdot 3 \cdot 3^{-n} \lim_{n \to +\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^n = +\infty$$

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{2k} \cdot 3^{1-k}$ is divergent.

3 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{40} + \frac{1}{88} + \frac{1}{154} + \ldots$$

– Splitsen in partieelbreuken:

$9k^2 + 3k - 2 = 0$ heeft als wortels $\frac{1}{3}$ en $-\frac{2}{3}$ zodat

$$9k^2 + 3k - 2 = 9\left(k - \frac{1}{3}\right)\left(k + \frac{2}{3}\right) = (3k-1)(3k+2)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} &= \frac{a}{3k-1} + \frac{b}{3k+2} \\ &= \frac{a(3k+2) + b(3k-1)}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{(3a+3b)k + 2a - b}{9k^2 + 3k - 2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3a + 3b = 0 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

– $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$

$$s_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)$$

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right)\end{aligned}$$

– $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{6}$

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2}$ is convergent en heeft als som $\frac{1}{6}$.

Opdracht 14 bladzijde 59

1 Bepaal $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + ... + (\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$= \sqrt{100}-\sqrt{1}$$

$$= 9$$

2 Convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$? Bepaal indien mogelijk de som.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1}-1) = +\infty$$

De reeks divergeert.

Opdracht 15 bladzijde 59

Bewijs, via inductie, dat voor de reeks $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$ geldt:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

– Inductiebasis

We tonen aan dat de formule waar is voor de kleinste waarde van n, in dit geval voor n = 1.

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

– Inductiestap

Stel dat de formule waar is voor een willekeurige waarde van n, bijvoorbeeld voor n = k.
Te bewijzen is dat ze dan ook geldt voor n = k + 1.

Bewijs

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

De formule is dus ook waar voor n = k + 1, als je veronderstelt dat ze waar is voor n = k.

- Besluit

Uit het vorige volgt dat de formule waar is voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 16 bladzijde 60

Bereken de som van de reeksen die convergent zijn.

Alle onderstaande reeksen behalve de derde zijn meetkundige reeksen met $|q| < 1$ en zijn dus convergent.

1 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\dots$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\dots=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

2 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

3 $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\dots$

$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\dots$ is een meetkundige reeks met $q=\frac{3}{2}>1$. Ze is divergent.

4 $\sum_{k=1}^{+\infty} 0{,}7^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 0{,}7^{k-1}=1+0{,}7+0{,}49+0{,}343+\dots=\frac{1}{1-0{,}7}=\frac{10}{3}$$

5 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-0{,}4)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-0{,}4)^{k-1}=1-0{,}4+0{,}16-0{,}064+\dots=\frac{1}{1-(-0{,}4)}=\frac{5}{7}$$

6 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{3^{10}}+\dots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{27}\right)}=\frac{9}{28}$$

Opdracht 17 bladzijde 60

Repeterende decimale getallen

Een repeterend decimaal getal kunnen we opvatten als de som van een meetkundige reeks.

Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
0{,}111\ldots &= 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k}
\end{aligned}
$$

Omdat $-1 < \frac{1}{10} < 1$, heeft deze meetkundige reeks als som: $s = \dfrac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{1}{9}$.

Besluit: $0{,}111111\ldots = \frac{1}{9}$.

Zet de repeterende decimale getallen om in breukvorm.

1 $0{,}7777\ldots = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots = \dfrac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{7}{9}$

2 $0{,}34444\ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{4}{1000} + \dfrac{4}{10\,000} \ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{90} = \dfrac{31}{90}$

3 $0{,}300300300\ldots = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^4} + \dfrac{3}{10^7} + \ldots = \dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{1000}} = \dfrac{300}{999} = \dfrac{100}{333}$

4 $1{,}020202\ldots = 1 + \dfrac{2}{100} + \dfrac{2}{10\,000} + \dfrac{2}{1\,000\,000} \ldots = 1 + \dfrac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \dfrac{2}{99} = \dfrac{101}{99}$

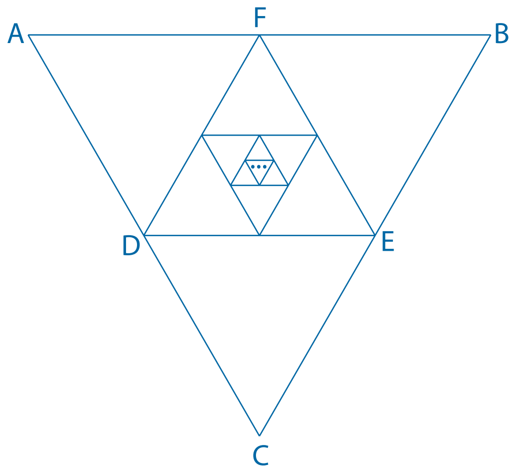
5 $1{,}416666\ldots = \dfrac{141}{100} + \dfrac{6}{1000} + \dfrac{6}{10\,000} + \dfrac{6}{100\,000} \ldots = \dfrac{141}{100} + \dfrac{\frac{6}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{141}{100} + \dfrac{6}{900} = \dfrac{17}{12}$

6 4,9999… $= 4 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 4 + \dfrac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 4 + 1 = 5$

Opdracht 18 bladzijde 61

Een gelijkzijdige driehoek heeft als zijde 12 cm. Als je de middens van de zijden met elkaar verbindt, krijg je een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In deze driehoek verbind je weer de middens van de zijden met elkaar. Dit geeft een volgende ingeschreven gelijkzijdige driehoek. En zo doe je maar verder zonder ophouden.

1 Bereken de som van de omtrekken van alle driehoeken.



– Noem de driehoek waarmee je start ΔABC, en de tweede driehoek ΔDEF (zie figuur).

Aangezien D het midden is van [AC] en E het midden is van [BC], is [DE] middenparallel van ΔABC.

Hieruit volgt dat DE // AB en $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$.

– Op dezelfde manier geldt: $|DF| = \frac{1}{2}|BC|$ en $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$.

We kunnen zo aantonen dat bij opeenvolgende driehoeken de zijden telkens gehalveerd worden.

– De rij van de zijden is dan 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, …

– De rij van de omtrekken is 36, 18, 9, $\frac{9}{2}$, $\frac{9}{4}$, …

– De som van de bijbehorende reeks is $\dfrac{36}{1 - \frac{1}{2}} = 72$.

De som van de omtrekken van alle driehoeken is 72 cm.

2 Bereken de som van de oppervlaktes van alle driehoeken.

De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a is $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

De rij $36\sqrt{3}, 9\sqrt{3}, \frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{9\sqrt{3}}{16}, \ldots$ van de opeenvolgende oppervlaktes is een meetkundige rij met quotiënt $\frac{1}{4}$.

De bijbehorende reeks heeft als som $\dfrac{36\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = 48\sqrt{3}$.

De som van de oppervlaktes van alle driehoeken is $48\sqrt{3}$ cm².

Opdracht 19 bladzijde 61

In een vierkant met middelpunt M en waarvan de diagonaal gelijk is aan 2, construeren we een 'oneindige spiraal' $A_0A_1A_2A_3\dots$ zoals aangegeven op de figuur.

De afstand $|A_{n+1}M|$ is de helft van de afstand $|A_nM|$.

De totale lengte van de spiraal is gelijk aan

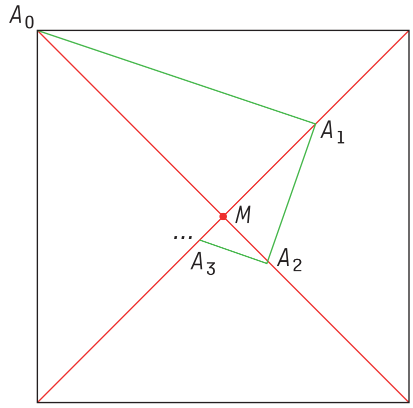
A 2

B $\sqrt{5}$

C 4

D 8

E oneindig



(Bron © VWO 1e ronde, 1998)

$|A_0M| = 1$ en $|A_1M| = \frac{1}{2}$ zodat $|A_0A_1| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Omdat $|A_{n+1}M| = \frac{1}{2} \cdot |A_nM|$, zal $|A_{n+1}A_{n+2}| = \frac{1}{2} \cdot |A_nA_{n+1}|$ (opeenvolgende gelijkvormige driehoeken met gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{2}$).

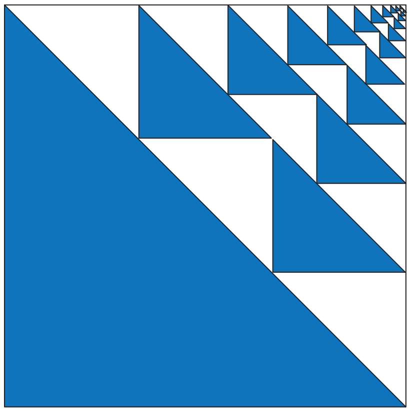
De lengtes van de opeenvolgende lijnstukken waaruit de spiraal is opgebouwd, vormen dus een oneindige meetkundige rij met quotiënt $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{\sqrt{5}}{16} + \dots = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

B is het juiste antwoord.

Opdracht 20 bladzijde 61

Welk deel van het vierkant is gekleurd?



A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{3}{5}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{5}{6}$ **E** $\frac{7}{10}$

(Bron © VWO 2e ronde, 2016)

Stel de zijde van het grote vierkant gelijk aan 1.

De oppervlakte van het gekleurde deel is dan

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{27}\right)^2+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2^2}{3^4}+\frac{2^4}{3^6}+\ldots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{2^2}{3^4}+\frac{2^4}{3^6}+\ldots\right).$$

De reeks $\frac{1}{3^2}+\frac{2^2}{3^4}+\frac{2^4}{3^6}+\ldots$ is een meetkundige reeks met som $\dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{1}{5}$.

De oppervlakte van het gekleurde deel is $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$.

Antwoord E is juist.

Alternatieve oplossing:

Bekijken we een strook tussen twee dalende lijnen, dan is van die strook $\frac{2}{5}$ gekleurd. Dit is zo voor elke strook. Er is dus $\frac{2}{5}$ van de bovenste driehoek gekleurd.

De oppervlakte van het gekleurde deel is $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$.

Opdracht 21 bladzijde 61

In de economische wetenschappen spreekt men van het **multiplier effect** (vermenigvuldigingseffect) van een injectie van kapitaal in een economie, wanneer het aanleiding geeft tot een veel grotere economische investering dan oorspronkelijk geïnjecteerd.

1 Stel dat een overheid 10 miljoen euro subsidieert en dat burgers gemiddeld zo'n 90 % van hun extra inkomsten opnieuw uitgeven.

Hoeveel euro wordt dan door die burgers uitgegeven?

90 % van 10 miljoen euro is 9 miljoen euro. Die burgers geven dus 9 miljoen euro uit.

2 Het geld van die burgers komt uiteindelijk in het loonzakje van weer andere burgers (handelaars, werknemers ...) terecht die op hun beurt 90 % van die nieuwe inkomsten uitgeven.

Hoeveel geven deze 'tweede orde burgers' uit?

De 'tweede orde burgers' geven 90 % van 9 miljoen euro uit, dit is 8,1 miljoen euro.

3 Tot welke waarde nadert de totale uitgave door de burgers?

Met hoeveel is de oorspronkelijke injectie van de overheid dus vermenigvuldigd?

De totale uitgave van de burgers is

$9 + 9 \cdot 0{,}9 + 9 \cdot 0{,}9^2 + 9 \cdot 0{,}9^3 + \ldots$ miljoen euro.

Dit is een meetkundige reeks met som $\dfrac{9}{1-0{,}9} = 90$.

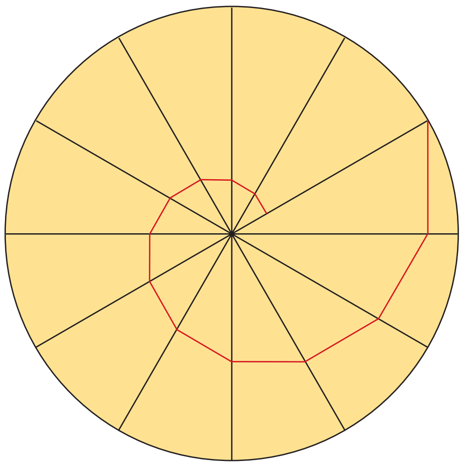
De totale uitgave nadert tot 90 miljoen euro.

De oorspronkelijke subsidie van de overheid is vermenigvuldigd met factor 9.

Opdracht 22 bladzijde 62

Men verdeelt een cirkel met straal *R* in 12 gelijke delen en men verbindt de deelpunten met het middelpunt. Uit één van de deelpunten laat men de loodlijn neer op de volgende straal. Vanuit het voetpunt van die loodlijn laat men opnieuw de loodlijn neer op de daaropvolgende straal en men blijft dit proces oneindig verder zetten.

Bereken de limiet van de som van de lengtes van deze loodlijnen in functie van *R*.



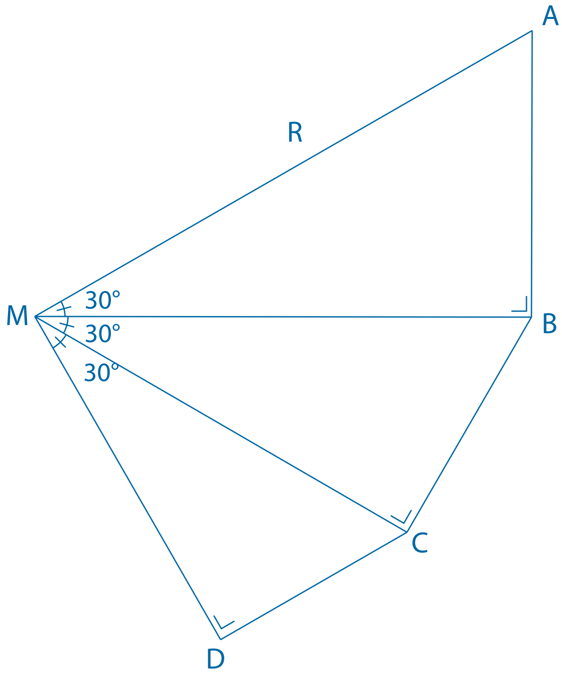
(Bron © VWO finale, 1986)

– De lengte van de eerste loodlijn is

$|AB| = R \cdot \sin 30° = \dfrac{R}{2}$

– De lengte van de tweede loodlijn is

$$\begin{aligned}|BC| &= |MB| \cdot \sin 30° \\ &= \frac{|AB|}{\tan 30°} \cdot \sin 30° \\ &= |AB| \cdot \cos 30° \\ &= \frac{R\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$



- De lengte van de derde loodlijn is

$$\begin{aligned}|CD| &= |MC| \cdot \sin 30° \\ &= \frac{|BC|}{\tan 30°} \cdot \sin 30° \\ &= |BC| \cdot \cos 30° \\ &= \frac{3R}{8}\end{aligned}$$

- De opeenvolgende lengtes van de loodlijnen vormen dus een meetkundige rij met $q = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- De som van de lengtes van deze loodlijnen is dan $\dfrac{\frac{R}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{R}{2 - \sqrt{3}}$.

Opdracht 23 bladzijde 62

Bewijs.

1 $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ als $-1 < x < 1$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = -x$.

Ze is convergent als $|-x| < 1$, dit is als $-1 < x < 1$ en heeft dan als som $\frac{1}{1-(-x)}$.

Besluit: $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ als $-1 < x < 1$.

2 $\sum_{k=0}^{+\infty} (x-4)^k = \frac{1}{5-x}$ als $3 < x < 5$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (x-4)^k = 1 + (x-4) + (x-4)^2 + (x-4)^3 + \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = x - 4$.

Ze is convergent als $|x-4| < 1$, dit is als $-1 < x - 4 < 1 \iff 3 < x < 5$.

De reeks heeft dan als som $\frac{1}{1-(x-4)} = \frac{1}{5-x}$.

Besluit: $\sum_{k=0}^{+\infty} (x-4)^k = \frac{1}{5-x}$ als $3 < x < 5$.

Opdracht 24 bladzijde 63

Bepaal alle waarden van *x* waarvoor de reeks convergeert. Bepaal ook de som van de reeks voor de gevonden waarden van *x*.

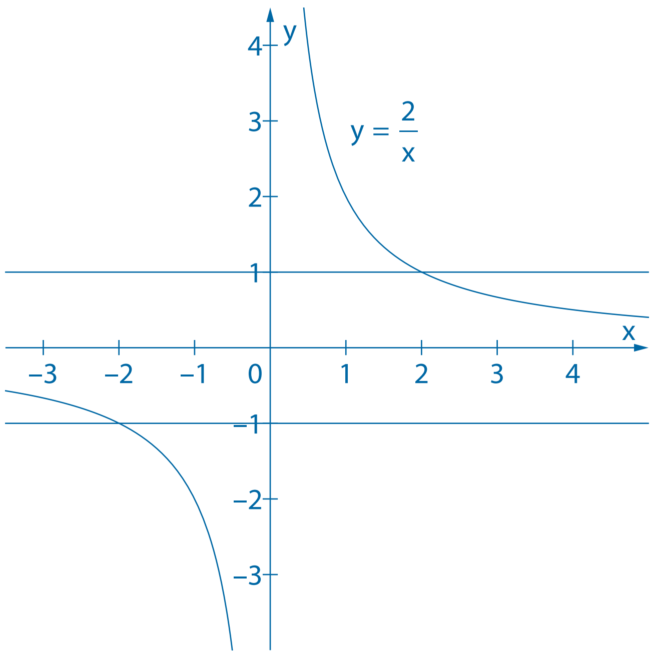
1 $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = -x^2$.

Ze convergeert als $\left|-x^2\right| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

De som is dan $\dfrac{x}{1-(-x^2)} = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Besluit: $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \ldots = \dfrac{x}{x^2+1}$ als $-1 < x < 1$.

2 $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} + \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = \dfrac{2}{x}$.



Ze convergeert als

$\left|\dfrac{2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{2}{x} < 1$.

Deze ongelijkheid kan gemakkelijk grafisch opgelost worden:

$-1 < \dfrac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow x < -2$ of $x > 2$.

Bij convergentie is de som

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2-2x}.$$

Besluit: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} + \ldots = \dfrac{1}{x^2-2x}$ als $x < -2$ of $x > 2$.

3 $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = e^{-x}$.

Ze is convergent als $\left|e^{-x}\right| < 1 \overset{e^{-x} > 0}{\Leftrightarrow} e^{-x} < 1$.

Aangezien $y = e^{-x}$ overal dalend is en $e^0 = 1$ is $e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Er geldt: $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \ldots = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x - 1}$ als $x > 0$.

4 $\sin x + \dfrac{1}{2}\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^3 x + \dfrac{1}{8}\sin^4 x + \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = \dfrac{1}{2}\sin x$.

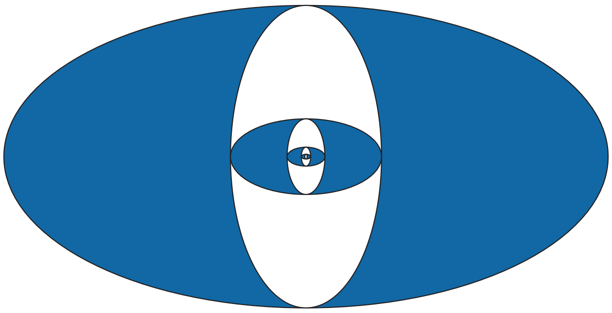
Ze convergeert als $-1 < \dfrac{1}{2}\sin x < 1 \Leftrightarrow -2 < \sin x < 2$, dus voor alle $x \in \mathbb{R}$.

De som van de reeks is $\dfrac{\sin x}{1 - \frac{1}{2}\sin x} = \dfrac{2\sin x}{2 - \sin x}$.

Opdracht 25 bladzijde 63

De figuur is opgebouwd uit een oneindige rij van rakende ellipsen waarvan de ene as dubbel zo lang is als de andere. De assen van de buitenste ellips zijn symmetrieassen van de figuur.

Hoeveel procent van de figuur is ingekleurd?



A 70 % **B** 75 % **C** 80 % **D** 82,5 % **E** 87,5 %

(Bron © VWO 2e ronde, 2018)

Stel de lengte van de grote as van de grootste ellips gelijk aan 1, dan is de lengte van de kleine as gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Alle opeenvolgende ellipsen zijn gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{2}$. De gelijkvormigheidsfactor van de oppervlaktes is dus $\frac{1}{4}$.

Stellen we de oppervlakte van de grootste ellips gelijk aan 1, dan is de gekleurde oppervlakte gelijk aan

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}-\ldots$$
$$=\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\ldots\right)$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{16}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{16}{15}-\frac{4}{15}$$
$$=\frac{12}{15}$$
$$=\frac{4}{5}$$

Er is dus $\frac{4}{5}$ of 80 % van de figuur ingekleurd.

Antwoord C is juist.

Opdracht 26 bladzijde 63

Als een pingpongbal op een plaat stuit, dan zal de hoogte die hij bereikt na elke bots afnemen met een bepaald percentage. Stel dat de pingpongbal na een val 75 % van de hoogte bereikt waarop hij wordt losgelaten.

Voor de valbeweging geldt: $h = \frac{1}{2} g t^2$ met $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Bovendien is de tijd om te stijgen tot een zekere hoogte dezelfde als die om te vallen vanop die hoogte.

1 Bereken de afstand die het balletje heeft afgelegd als het tot rust is gekomen nadat het op een hoogte van 1 m is losgelaten.

De totale afstand is

$$1 + 0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}75^2 + 0{,}75^2 + 0{,}75^3 + 0{,}75^3 + \ldots$$

$$= 1 + 2 \cdot (0{,}75 + 0{,}75^2 + 0{,}75^3 + \ldots)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75} = 7$$

De totale afstand die het pingpongballetje heeft afgelegd is 7 m.

2 Hoe lang duurt het voor het balletje tot stilstand komt?

Aangezien $h = \frac{1}{2} g t^2$, is $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

t is de tijd nodig om te stijgen tot een zekere hoogte h of om te vallen vanaf h.

De totale tijdsduur is

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{g}} + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}75}{g}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}75^2}{g}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}75^3}{g}} + \ldots \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} + 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}75}{g}}}{1 - \sqrt{0{,}75}} \approx 6{,}29$$

Het balletje komt tot stilstand na ongeveer 6,29 seconden.

Opdracht 27 bladzijde 64

Schrijf de uitdrukking ${}^4\log \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2 \ldots\ldots\ldots}}}}$ als een reeks en ga na of ze convergeert.

$$s_1 = {}^4\log 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot {}^4\log 2$$

$$s_2 = {}^4\log\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}}\right) = \frac{1}{3} \cdot {}^4\log 2 + \frac{1}{9} \cdot {}^4\log 2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot {}^4\log 2$$

$$s_3 = {}^4\log\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{27}}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) \cdot {}^4\log 2$$

...

$$s_n = {}^4\log\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots \cdot 2^{\frac{1}{3^n}}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) \cdot {}^4\log 2$$

We kunnen de uitdrukking ${}^4\log \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\ldots}}}}$ noteren als de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \cdot {}^4\log 2$.

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)\cdot {}^4\log 2 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

De reeks ${}^4\log \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\ldots}}}}$ is convergent en heeft als som $\frac{1}{4}$.

Opdracht 28 bladzijde 64

Bereken op welk tijdstip tussen 3 en 4 uur de grote en de kleine wijzer van een klok elkaar bedekken.

De grote wijzer draait per uur over 360°, dus 6° per minuut.
De kleine wijzer draait per 12 uur over 360°, dus per uur 30° en per minuut 0,5°.
De grote wijzer draait 12 keer zo snel als de kleine wijzer.

We gaan te werk zoals bij de paradox van Zeno.

- We starten om 3 uur, de kleine wijzer heeft dan 15 minuten 'voorsprong' op de grote wijzer. Noem dit het tijdstip t_0.
- Het tijdstip t_1 is dan 3u15, dit is het moment dat de grote wijzer de positie bereikt waar de kleine wijzer zich op het tijdstip t_0 bevond. Ondertussen is de kleine wijzer over 7,5° (15 · 0,5) gedraaid.
- Op het tijdstip t_2 bereikt de grote wijzer de positie die de kleine wijzer had op tijdstip t_1.

  Om 7,5° te draaien, heeft de grote wijzer $\frac{7{,}5}{6} = 1{,}25$ minuten (want 6° per minuut) nodig

  zodat $t_2 = t_1 + 1{,}25 = t_1 + \frac{5}{4}$ (in minuten).

  Tijdens die 1,25 minuten draait de kleine wijzer over 0,625° (1,25 · 0,5).
- Na nog eens draaien over 0,625°, vinden we het tijdstip t_3. Er geldt:

  $t_3 = t_2 + \frac{0{,}625}{6} = t_2 + \frac{5}{48}$ (in minuten).
- Uiteindelijk zal de grote wijzer de kleine wijzer bedekken in $15 + \frac{5}{4} + \frac{5}{48} + \frac{5}{576} + \ldots$

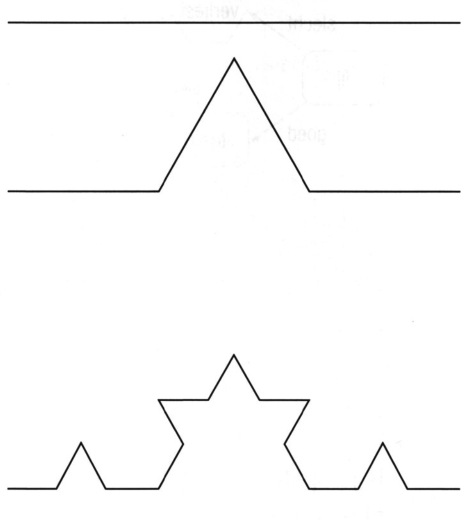
  minuten na 3 uur.

  Dit is $\frac{15}{1-\frac{1}{12}} = \frac{180}{11} = 16{,}3636\ldots$ minuten na 3 uur.

  De kleine en de grote wijzer van een klok bedekken elkaar om 15 h 16 min 22 s.

Opdracht 29 bladzijde 64

De koch-kromme



- Beschouw een lijnstuk met lengte 1.
- Verdeel in stap 1 het lijnstuk in drie gelijke delen, construeer op het middelste stuk een gelijkzijdige driehoek en laat daarna het middelste lijnstuk weg. Zo ontstaat het zogenaamde ‘model’: een gebroken lijn van vier gelijke lijnstukjes.
- Op elk van deze vier lijnstukjes herhalen we de constructies uit de eerst stap:
  - verdeel in drie gelijke delen;
  - teken een gelijkzijdige driehoek op het middelste stuk;
  - laat de basis van deze gelijkzijdige driehoek weg.
- Dit proces wordt voortdurend herhaald. Zo ontstaat een **koch-kromme**.

1 Het aantal lijnstukjes na stap n vormt een rij $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
Bepaal een voorschrift van deze rij.

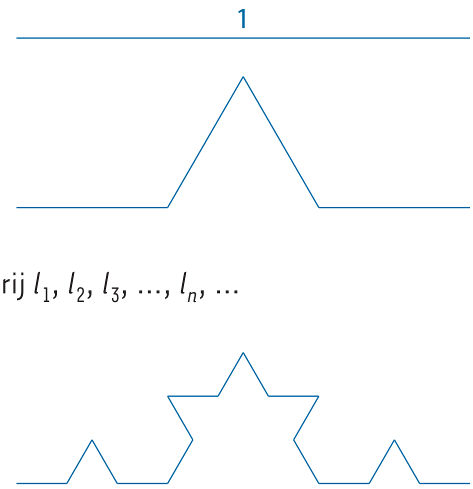
$a_1 = 4$

$a_2 = 4 \cdot 4 = 16$

$a_3 = 16 \cdot 4 = 64$

...

$a_n = 4^n$



2 De totale lengte van deze lijnstukjes na stap n vormt een rij $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots$
Bepaal een voorschrift van deze tweede rij.

$l_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$l_2 = 4^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9}$

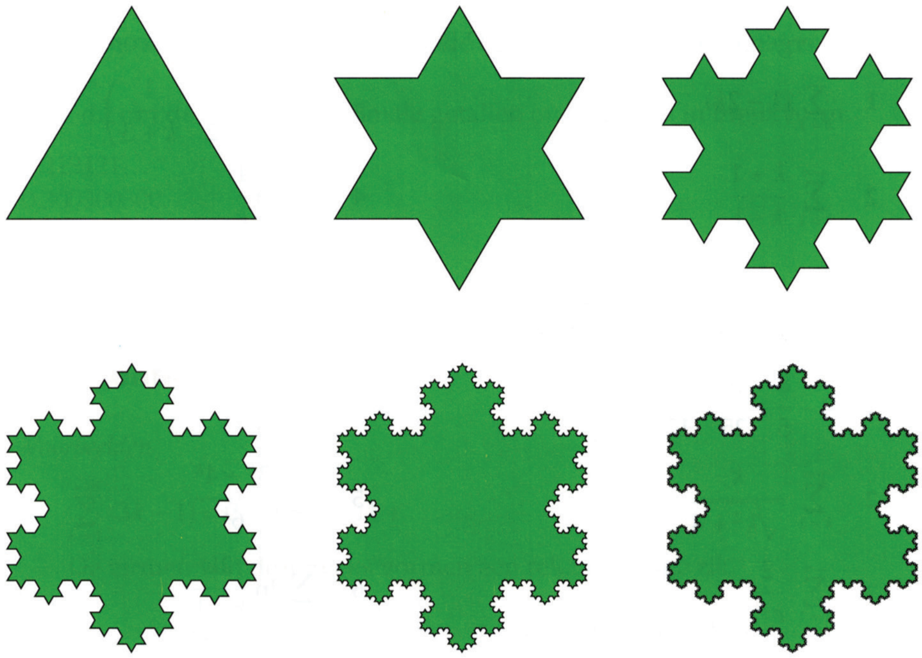
$l_3 = 4^3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{64}{27}$

...

$l_n = 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

3 Als we een koch-kromme construeren op elke zijde van een gelijkzijdige driehoek, dan ontstaat een zogenaamde **koch-sneeuwvlok**.

Toon aan dat de omtrek van een koch-sneeuwvlok oneindig groot wordt bij een toenemend aantal stappen terwijl de oppervlakte nadert tot 160 % van de oppervlakte van de oorspronkelijke gelijkzijdige driehoek.

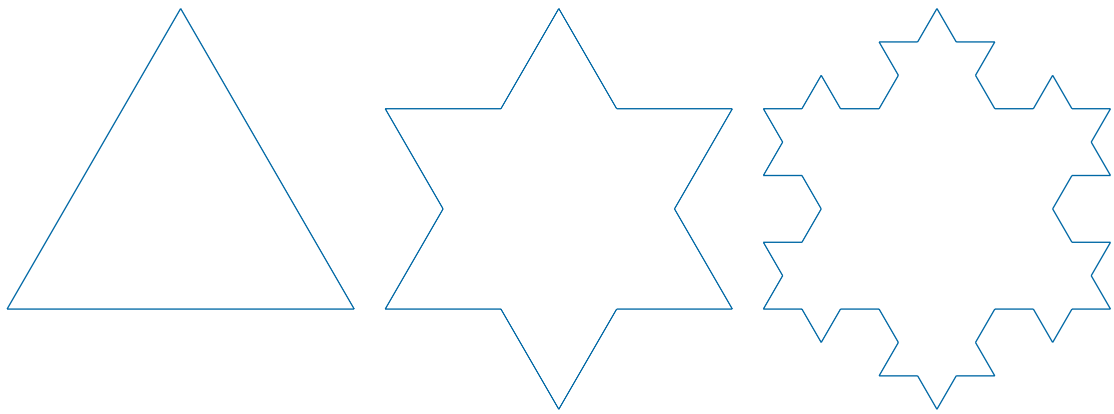


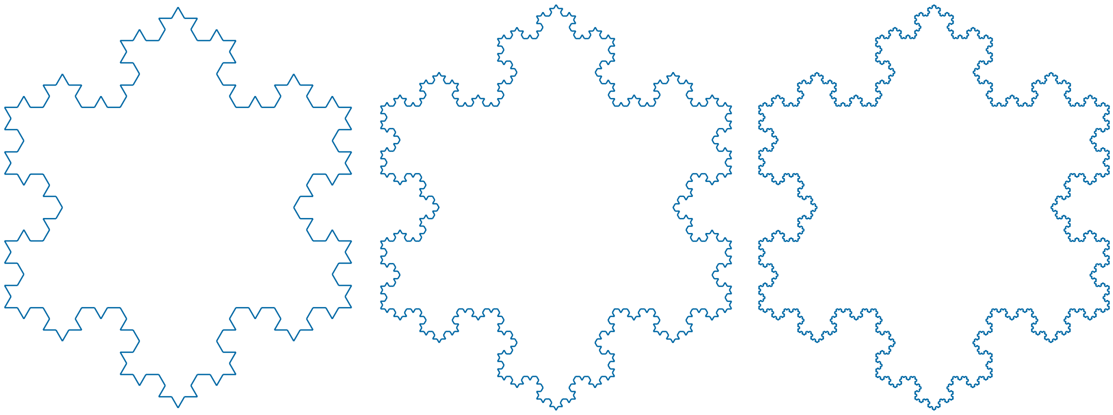
We nemen 1 als zijde van de gelijkzijdige driehoek waarop de Koch-kromme wordt geconstrueerd.

– De omtrek van de sneeuwvlokkromme van Koch na stap n is $3 \cdot l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Nu is $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 \cdot l_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n\right] = +\infty$.

De omtrek wordt dus oneindig groot.





- De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a is $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

  De opeenvolgende oppervlaktes van de Koch-kromme vormen een rij $A_1, A_2, A_3, \ldots$

  $$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

  $$A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

  $$A_3 = A_2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right)$$

  $$A_4 = A_3 + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2$$

  $$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243}\right)$$

  ...

  $$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \ldots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

  $$\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = 1{,}60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

  De oppervlakte nadert tot 160 % van de oppervlakte van de oorspronkelijk gelijkzijdige driehoek.

Opdracht 30 bladzijde 66

Onderzoek met de geziene convergentietesten of de reeksen convergeren of divergeren.

1 $\frac{1!}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\frac{4!}{5^4}+\dots$

$$\frac{1}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\frac{4!}{5^4}+\dots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k!}{5^k}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{5}=+\infty$$

De reeks divergeert.

2 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

De convergentie van de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ is niet te bepalen met het criterium van d'Alembert.

Om aan te tonen dat deze reeks convergent is, kan je bijvoorbeeld gebruik maken van de integraaltest (zie opdracht 31).

3 $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{k^3}{3^k}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{k^3}{3^k}=-\frac{1}{3}+\frac{8}{9}-1+\frac{64}{81}-\dots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n^3}{3^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3}=\frac{1}{3}<1$$

De reeks is convergent.

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!} = 1 + \frac{4}{2} + \frac{27}{6} + \frac{256}{24} + \ldots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Dit is de onbepaalde vorm 1^∞, te bepalen met de regel van de l'Hôpital (zie delta Nova Analyse 6 deel 1 6/8 lesuren).

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \overset{H}{=} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{-1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}} = e^1 = e > 1$$

De reeks divergeert.

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{k^2-1}{k^2+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \neq 0$ (*), er is dus niet voldaan aan de derde voorwaarde van de convergentietest voor alternerende reeksen.

Uit (*) volgt dat $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2-1}{n^2+1}$ niet bestaat en er dus niet voldaan is aan de nodige voorwaarde voor convergentie. De reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{k^2-1}{k^2+1}$ is divergent.

6 $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k\frac{1}{\ln k}$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k\frac{1}{\ln k} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \ldots$$

$\dfrac{1}{\ln n} > 0$ als $n \geqslant 2$

1 $y = \ln x$ is overal stijgend, zodat $\ln n < \ln(n+1) \overset{n\geqslant 2}{\Rightarrow} \dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$

2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln n} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Er is voldaan aan alle voorwaarden van de convergentietest voor alternerende reeksen.

De reeks $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{1}{\ln k}$ is dus convergent.

Opdracht 31 bladzijde 66

Om de convergentie van reeksen te onderzoeken, kunnen we ook gebruik maken van de **integraaltest**.

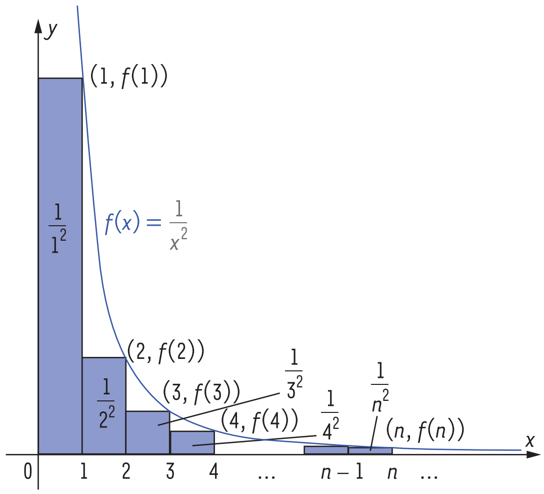
Voorbeeld

Om de convergentie van de reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots$ te onderzoeken, kunnen we ze vergelijken met de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Dit doen we door de termen van de reeks te beschouwen als beeldwaarden van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en deze waarden te interpreteren als oppervlaktes van de rechthoeken onder de grafiek van de kromme met vergelijking $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Zoals in de nevenstaande figuur geïllustreerd is, geldt:

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \\
&< 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&< 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$



De rij van partieelsommen is dus begrensd en stijgend, zodat de reeks convergeert.

De exacte waarde van de som van de reeks werd door Leonhard Euler gevonden en is gelijk aan $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Het bewijs van dit resultaat valt buiten het bestek van dit handboek.

Algemeen

Veronderstel dat f een continue, positieve en dalende functie is voor alle $x \geqslant 1$ en dat $u_n = f(n)$ voor $n \geqslant 1$, dan convergeert de reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ als en slechts als de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergeert.

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ divergeert als en slechts als $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergeert.

We noemen dit convergentiecriterium de **integraaltest**.

1 Onderzoek of de reeks convergeert.

a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ is continu, positief en dalend over $[1, +\infty[$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to +\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{b \to +\infty} (\ln b) = +\infty.$$

De oneigenlijke integraal divergeert, dus de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ divergeert.

De integraaltest geeft dus een alternatief om aan te tonen dat de harmonische reeks divergeert.

b $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$ is continu, positief en dalend over $[1, +\infty[$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to +\infty}\left(\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx\right) = \lim_{b \to +\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}}\right) = 2.$$

De oneigenlijke integraal convergeert, dus de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ convergeert.

2 Voor welke waarden van $p > 0$ is de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ convergent?

$f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$ met $p > 0$ is continu, positief en dalend over $[1, +\infty[$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b \to +\infty}\left(\int_1^b x^{-p}\,dx\right) \overset{p \neq 1}{=} \lim_{b \to +\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{b \to +\infty} (b^{1-p}) - \frac{1}{1-p}.$$

Als $1 - p > 0 \Leftrightarrow p < 1$, divergeert de oneigenlijke integraal.

Als $1 - p < 0 \Leftrightarrow p > 1$, convergeert de oneigenlijke integraal.

Als $p = 1$, divergeert de integraal (zie 1a).

Besluit: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ convergeert als $p > 1$.

Opdracht 32 bladzijde 68

Zijn de reeksen convergent of divergent? Bepaal de eventuele som.

1 $6 + 4 + 2 + 0 - 2 - 4\dots$ is een rekenkundige reeks en dus divergent.

2 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2 + 4k + 3}$

$$\frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$$
$$= \frac{(a+b)k + 3a + b}{(k+1)(k+3)}$$

Uit de gelijkheid van veeltermen volgt:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$.

Voor de partieelsommen geldt:

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$s_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$s_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$
$$s_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$
$$s_5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

...

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

De reeks is convergent met som $\frac{5}{6}$.

3 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{e^{3k}}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{e^{3k}} = \frac{2}{e^3} + \frac{2}{e^6} + \frac{2}{e^9} + \dots$ is een meetkundige reeks met $q = \frac{1}{e^3} \approx 0{,}0498$.

Ze is convergent en heeft als som $\frac{\frac{2}{e^3}}{1 - \frac{1}{e^3}} = \frac{2}{e^3 - 1}$.

4 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \text{Bgtan } k$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\text{Bgtan } n) = \frac{\pi}{2} \neq 0$. De reeks is divergent.

5 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k + 4^k}{6^k}$

De reeks is convergent want

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k + 4^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1 + 2 = 3.$$

6 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{4^{k-1}}{5^{k+1}}$

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{4^{k-1}}{5^{k+1}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{4}{125} + \frac{16}{625} + \ldots$ is een meetkundige reeks met $q = \frac{4}{5}$.

Ze convergeert met som $\frac{\frac{1}{20}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{4}$.

7 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$$s_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$s_3 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

...

$$s_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$$

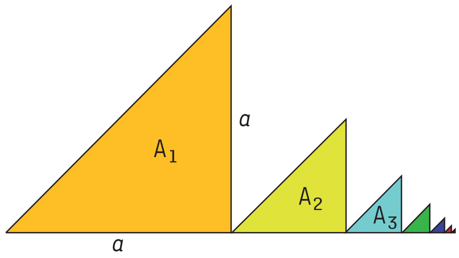
De reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ is convergent en heeft als som 1.

8 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+4}}$

De reeks $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+4}}$ is divergent want $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} = 1 \neq 0$.

Opdracht 33 bladzijde 68

Je begint met een driehoek A_1. Deze is rechthoekig en gelijkbenig; de gelijke benen hebben lengte a. Tegen A_1 komt driehoek A_2: deze heeft dezelfde vorm als A_1, maar zijn afmetingen zijn maar de helft. Op dezelfde manier heeft A_3 zijden die maar half zo lang zijn als die van A_2, enzoverder. Dit wordt doorgetrokken tot in het oneindige. Er ontstaat een soort zaagtandfiguur.



De totale oppervlakte van die figuur is:

A a^2 **B** $\frac{3a^2}{4}$ **C** $\frac{2a^2}{3}$ **D** $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ **E** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

(Bron © VWO 1e ronde, 1997)

Noem u_n de oppervlakte van driehoek A_n.

$$u_1 = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$u_2 = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$u_3 = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{32}$$

...

De opeenvolgende oppervlaktes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ vormen een meetkundige rij met $q = \frac{1}{4}$.

De som van alle oppervlaktes is dan

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{32} + \frac{a^2}{128} + \ldots = \frac{\frac{a^2}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2a^2}{3}.$$

Antwoord C is juist.

Opdracht 34 bladzijde 68

Bereken de waarde van m waarvoor $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{km} = 5$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{km} = 1 + e^m + e^{2m} + e^{3m} + \ldots = 5$$

$$\overset{e^m < 1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^m} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 = 5 - 5e^m$$

$$\Leftrightarrow e^m = \frac{4}{5} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow m = \ln \frac{4}{5}$$

Uit (*) volgt dat $e^m < 1$, zodat de reeks wel degelijk convergeert.

Opdracht 35 bladzijde 69

In een oneindige rij van vierkanten heeft het eerste vierkant als omtrek 1 en de volgende vierkanten ontstaan door de middens van het vorige te verbinden.

De som van de omtrekken van alle vierkanten is

A $2\sqrt{2}-1$ **B** $2\sqrt{2}+1$ **C** $\sqrt{2}+1$ **D** $\sqrt{2}+2$ **E** $2\sqrt{2}+2$

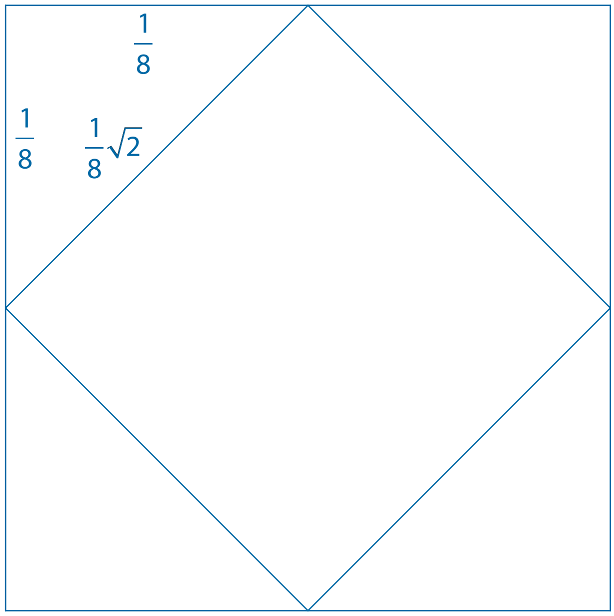
Eerste vierkant: zijde $\frac{1}{4}$, omtrek 1.

Tweede vierkant: zijde $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, omtrek $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

zijde: $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}\sqrt{2}$

Derde vierkant: zijde $\frac{1}{8}$, omtrek $\frac{1}{2}$.

zijde: $\sqrt{\left(\frac{1}{16}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{8}$



De omtrekken 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, ... zijn de termen

van een meetkundige reeks met $q=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De som van de omtrekken van alle vierkanten is $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2}$.

Antwoord D is juist.

Opdracht 36 bladzijde 69

Ga na of de reeksen convergeren of divergeren. Bereken indien mogelijk de som.

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{16k^2-8k-3}$

$$\frac{1}{16k^2-8k-3}=\frac{a}{4k-3}+\frac{b}{4k+1}$$
$$=\frac{(4a+4b)k+a-3b}{(4k-3)(4k+1)}$$

Uit de gelijkheid van veeltermen volgt:

$$\begin{cases}4a+4b=0\\ a-3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

Hieruit volgt dat: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{16k^2-8k-3}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$.

Voor de partieelsommen geldt:

$$s_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{4}\left(\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{4}\left(\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{13}\right)$$

...

$$s_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{4}$$

De reeks is convergent met som $\frac{1}{4}$.

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k+2}{k^2(k+1)^2}$

We splitsen de algemene term in partieelbreuken (zie Delta Nova 6 Analyse deel 2 blz. 120).

$$\frac{4k+2}{k^2(k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k+1} + \frac{d}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{ak(k+1)^2 + b(k+1)^2 + ck^2(k+1) + dk^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{ak^3 + 2ak^2 + ak + bk^2 + 2bk + b + ck^3 + ck^2 + dk^2}{k^2(k+1)^2}$$

Uit de gelijkheid van veeltermen volgt:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b + c + d = 0 \\ a + 2b = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k+2}{k^2(k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$.

Voor de partieelsommen geldt:

$$s_1 = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$s_2 = 2\left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$s_3 = 2\left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{16}\right)$$

$$s_4 = 2\left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{25}\right)$$

...

$$s_n = 2\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 2$$

De reeks is convergent met som 2.

3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k+1)!}{e^k}$

We passen het criterium van d'Alembert toe.

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \dfrac{(n+2)!}{e^{n+1}}}{(-1)^n \dfrac{(n+1)!}{e^n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{e} = +\infty$$

De reeks is divergent.

Opdracht 37 bladzijde 69

Bereken de som van de reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \ldots,$

waarvan de termen het omgekeerde zijn van alle natuurlijke getallen die enkel bestaan uit priemfactoren 2 en 3, met andere woorden die het omgekeerde zijn van de natuurlijke getallen van de vorm $2^m 3^n$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \ldots =$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right)}_{\text{termen } \frac{1}{2^k 3^0}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \ldots\right)}_{\text{termen } \frac{1}{2^k 3^1}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \ldots\right)}_{\text{termen } \frac{1}{2^k 3^2}} + \ldots =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{2}} + \ldots$$

$$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

Alternatief:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$