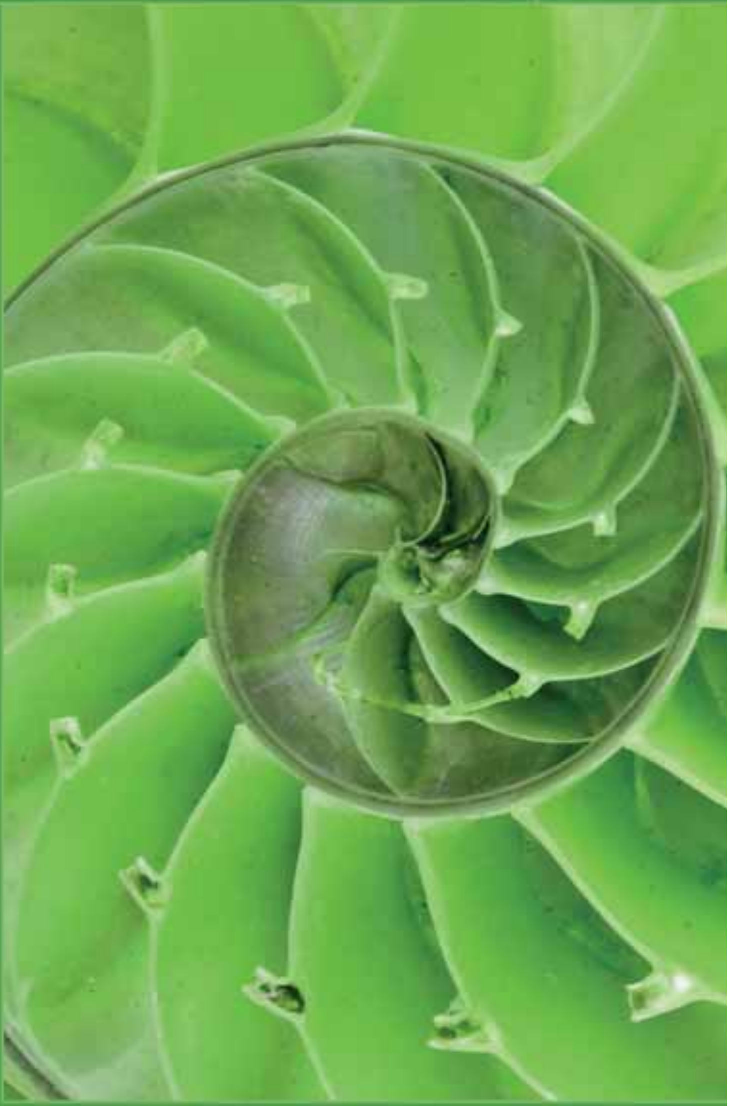
Hoofdstuk 1

Complexe getallen



Opdracht 1 bladzijde 11

Reken de haakjes uit zoals je in $\mathbb{R}$ zou doen. Hou er rekening mee dat $i^2 = -1$.
Schrijf het resultaat in de vorm $a + bi$.

1 $(4+3i)+(-1+2i)$ $= 3 + 5i$

2 $-(7-8i)$ $= -7 + 8i$

3 $(-2+5i)-(-1+3i)$ $= -1 + 2i$

4 $(3+i)\cdot(-2i)$ $= 2 - 6i$

5 $(2+i)\cdot(4+i)$ $= 8 + 6i - 1 = 7 + 6i$

Opdracht 2 bladzijde 12

Bereken

1 $(2-i)-(-7+3i)$ $= 9 - 4i$

2 $(3-2i)(2+3i)$ $= 6 + 9i - 4i - 6i^2 = 12 + 5i$

3 $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)$ $= \cancel{\sqrt{6}} - 2i - 3i - \cancel{\sqrt{6}} = -5i$

4 $(1-3i)^2$ $= (1-3i)(1-3i) = 1 - 3i - 3i - 9 = -8 - 6i$

Opdracht 3 bladzijde 13

Bereken de reële getallen x en y als

1 $(3+4i)(x+yi) = 7+26i$

$\Leftrightarrow 3x + 3yi + 4xi + 4yi^2 = 7 + 26i$

$\Leftrightarrow (3x - 4y) + (4x + 3y)i = 7 + 26i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x + 3y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 16y = 28 \\ -12x - 9y = -78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y = -50 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 3x = 7 + 4\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

2 $i(x+yi)+(x+yi) = (6-2i)(x+yi)$

$\Leftrightarrow xi - y + x + yi = 6x + 6yi - 2xi + 2y$

$\Leftrightarrow (x - y) + (x + y)i = (6x + 2y) + (-2x + 6y)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6x + 2y \\ x + y = -2x + 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Opdracht 4 bladzijde 13

Bereken

1 $(x+yi)(x-yi)$ $= x^2 \cancel{- xyi} + \cancel{xyi} + y^2 = x^2 + y^2$

2 $(x+yi)^2-(x-2yi)^2$ $= (x + yi)(x + yi) - (x - 2yi)(x - 2yi)$

$= x^2 + 2xyi - y^2 - x^2 + 4xyi + 4y^2 = 3y^2 + 6xyi$

Opdracht 5 bladzijde 13

Bereken

1 $i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8$

$i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$

2 $i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}$ en i^{4n+3} als $n \in \mathbb{N}_0$

$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

$i^{4n+1} = i^{4n}\, i = i$

$i^{4n+2} = i^{4n}\, i^2 = -1$

$i^{4n+3} = i^{4n}\, i^3 = -i$

3 i^n, met n jouw geboortejaar

bijv. $i^{1999} = i^{4 \cdot 499+3} = -i$

Opdracht 6 bladzijde 13

1 Bereken $(2 + 3i)(2 - 3i)$.

$(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 \cancel{-6i} + \cancel{6i} + 9 = 13$

2 Bepaal het complexe getal $z = a + bi$ waarvoor geldt dat $(2 + 3i) \cdot z = 1$.

Uit $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 13$ volgt: $(2 + 3i) \cdot (2 - 3i) \cdot \dfrac{1}{13} = 1$.

Daarom: $(2 + 3i) \cdot z = 1$ voor $z = \dfrac{1}{13} \cdot (2 - 3i) = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$.

Opdracht 7 bladzijde 16

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\dfrac{1}{12 + 5i} = \dfrac{12-5i}{144+25} = \dfrac{12-5i}{169}$

2 $\dfrac{1 - i}{1 + i} = \dfrac{(1-i)^2}{1+1} = \dfrac{\cancel{1} - 2i \cancel{-1}}{2} = -i$

3 $\dfrac{3 - i}{5i} = \dfrac{(3-i)(-5i)}{25} = \dfrac{-15i + 5i^2}{25} = \dfrac{-1-3i}{5}$

4 $\dfrac{7 - i}{1 + i} - \dfrac{4}{i} = \dfrac{(7-i)(1-i)}{2} - \dfrac{-4i}{1} = \dfrac{7-7i-i-1}{2} + 4i = \dfrac{6-8i}{2} + 4i = 3$

5 $(3 + 2i)^{-2} = \dfrac{1}{(3+2i)^2} = \dfrac{1}{5+12i} = \dfrac{5-12i}{169}$

6 $(2 + 5i) \cdot \overline{(2 - 6i)} = (2 + 5i)(2 + 6i) = 4 + 12i + 10i - 30 = -26 + 22i$

Opdracht 8 bladzijde 16

Toon aan dat $\frac{a+bi}{c+di}$ en $\frac{a-bi}{c-di}$ toegevoegde complexe getallen zijn.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \qquad (*)$$

$$\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} \qquad \rightarrow \text{ complex toegevoegde van } (*)$$

Opdracht 9 bladzijde 16

Toon aan dat $\bar{z}^2=-i$ als $z^2=i$.

Gegeven: $z^2=i$

Te bewijzen: $\bar{z}^2=-i$

Bewijs:

Stel $z=a+bi$, dan geldt:

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=i$, dus $a^2-b^2=0$ en $2ab=1$ $\qquad (*)$

$\bar{z}^2=(a-bi)^2=(a^2-b^2)-2abi\underset{(*)}{=}-i$

Opdracht 10 bladzijde 18

Toon aan dat de volgende formules voor merkwaardige producten die gelden in $\mathbb{R}$ ook gelden in $\mathbb{C}$. Noteer bij elke overgang op welke van de eigenschappen voor de optelling en de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ je steunt.

1 $(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2 \qquad (z_1,\ z_2\in\mathbb{C})$

$(z_1+z_2)^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)$

$=z_1^2+z_1z_2+z_2z_1+z_2^2$ — de vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in $\mathbb{C}$

$=z_1^2+z_1z_2+z_1z_2+z_2^2$ — de vermenigvuldiging is commutatief in $\mathbb{C}$

$=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$

2 $(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_1^2-z_2^2 \qquad (z_1,\ z_2\in\mathbb{C})$

$(z_1+z_2)(z_1-z_2)=z_1^2-z_1z_2+z_2z_1-z_2^2$ — de vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in $\mathbb{C}$

$=z_1^2-z_1z_2+z_1z_2-z_2^2$ — de vermenigvuldiging is commutatief in $\mathbb{C}$

$=z_1^2-z_2^2$

Opdracht 11 bladzijde 21

Bepaal een getal $z = a + bi$ waarvoor geldt $z^2 = i$.

$$(a+bi)^2 = i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4b^2} - b^2 = 0 \\ a = \dfrac{1}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4b^4 = 0 \\ a = \dfrac{1}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 = \dfrac{1}{4} \\ a = \dfrac{1}{2b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ of } b = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ a = \dfrac{1}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ of } b = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ of } a = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ of } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Opdracht 12 bladzijde 22

Bepaal de vierkantswortels van

1 $16 + 30i$

$$(x+yi)^2 = 16 + 30i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{225}{x^2} = 16 \\ y = \dfrac{15}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 16x^2 - 225 = 0 \\ y = \dfrac{15}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{16+34}{2} = 25 \text{ of } x^2 = \dfrac{16-34}{2} = \overset{\text{geen reële oplossing}}{-9} \\ y = \dfrac{15}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ of } x = -5 \\ y = 3 \text{ of } y = -3 \end{cases}$$

De vierkantswortels van 16 + 30i zijn 5 + 3i en –5 – 3i.

2 -4

$$(x+yi)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 = -4 \text{ of } \overset{\text{geen reële oplossing}}{x^2 = -4} \\ x = 0 \text{ of } y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ of } y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

De vierkantswortels van –4 zijn 2i en –2i.

3 $-\frac{3}{4} - i$

$$(x+yi)^2 = -\frac{3}{4} - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{3}{4} \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4x^2} = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 + 3x^2 - 1 = 0 \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4} \text{ of } x^2 = \frac{-3-5}{8} = \underbrace{-1}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-1}{2} \\ y = -1 \text{ of } y = 1 \end{cases}$$

De vierkantswortels van $-\frac{3}{4} - i$ zijn $\frac{1}{2} - i$ en $-\frac{1}{2} + i$.

Opdracht 13 bladzijde 22

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $1 + 4z^2 = 0$ $\quad \Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}i^2 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}i \text{ of } z = -\frac{1}{2}i$

2 $z^2 = -8 + 6i$ $\quad \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -8 + 6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{9}{x^2} = -8 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \text{ of } x^2 = \frac{-8-10}{2} = \underbrace{-9}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ of } x = -1 \\ y = 3 \text{ of } y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + 3i \text{ of } z = -1 - 3i$$

3 $(-2+i)z^2 = 22+19i$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{22+19i}{-2+i} = \frac{(22+19i)(-2-i)}{5} = \frac{-44-22i-38i+19}{5} = \frac{-25-60i}{5} = -5-12i$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = -5-12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{36}{x^2}=-5 \\ y=\dfrac{-6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+5x^2-36=0 \\ y=\dfrac{-6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{-5+13}{2}=4 \text{ of } x^2=\dfrac{-5-13}{2}=\overset{\text{geen reële oplossing}}{-9} \\ y=\dfrac{-6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ of } x=-2 \\ y=-3 \text{ of } y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = 2-3i \text{ of } z=-2+3i$$

Opdracht 14 bladzijde 24

Los de vierkantsvergelijkingen op in $\mathbb{C}$.

1 $4z^2-4z+5=0$

$D = 16-80=-64$

$d = 8i$

$$\Leftrightarrow z=\frac{4+8i}{8}=\frac{1}{2}+i \text{ of } z=\frac{4-8i}{8}=\frac{1}{2}-i$$

2 $z^2-2iz+3=0$

$D=-4-12=-16$

$d=4i$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2i+4i}{2}=3i \text{ of } z=\frac{2i-4i}{2}=-i$$

3 $z^2+(1-2i)z-2i=0$

$D=(1-2i)^2-4\cdot(-2i)=1-4i-4+8i=1+4i-4=(1+2i)^2$

$d=1+2i$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\cancel{-1}+2i+\cancel{1}+2i}{2}=2i \text{ of } z=\frac{-1+\cancel{2i}-1-\cancel{2i}}{2}=-1$$

4 $iz^2 - 2z + 3 - i = 0$

$D = 4 - 4i(3 - i) = 4 - 12i - 4 = -12i$

$$(x + yi)^2 = -12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \\ y = \dfrac{-6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{-6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \text{ of } \underbrace{x^2 = -6}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{-6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \text{ of } x = -\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \text{ of } y = \sqrt{6} \end{cases}$$

$d = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 + \sqrt{6} - i\sqrt{6}}{2i} \text{ of } z = \frac{2 - \sqrt{6} + i\sqrt{6}}{2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2i + i\sqrt{6} + \sqrt{6}}{-2} \text{ of } z = \frac{2i - i\sqrt{6} - \sqrt{6}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)i \text{ of } z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)i$$

5 $(1 + i)z^2 + (2 - 4i)z - 7 - 9i = 0$

$D = (2 - 4i)^2 - 4(1 + i)(-7 - 9i) = 4 - 16i - 16 + 28 + 36i + 28i - 36$

$= -20 + 48i$

$d = 4 + 6i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 + 4i + 4 + 6i}{2 + 2i} = \frac{2 + 10i}{2 + 2i} = \frac{(1 + 5i)(1 - i)}{2} = \frac{1 - i + 5i + 5}{2} = 3 + 2i$$

$$\text{of } z = \frac{-2 + 4i - 4 - 6i}{2 + 2i} = \frac{-6 - 2i}{2 + 2i} = \frac{(-3 - i)(1 - i)}{2} = \frac{-3 + 3i - i - 1}{2} = -2 + i$$

Opdracht 15 bladzijde 27

Bereken zonder rekentoestel.

1 $(1 + 2i)^{-1}$ $= \dfrac{1}{1 + 2i} = \dfrac{1 - 2i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

2 $\dfrac{3}{2 - i}$ $= \dfrac{3(2 + i)}{5} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{5}i$

3 i^{-1} $= \dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

4 $\dfrac{-i^3}{i^5}$ $= \dfrac{-1}{i^2} = 1$

5 $(1 + i)^2$ $= 1 + 2i - 1 = 2i$

6 $(1+i)^3 \quad = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

7 $\dfrac{6+2i}{1+2i} \quad = \dfrac{(6+2i)(1-2i)}{5} = \dfrac{6-12i+2i+4}{5} = 2-2i$

8 $\dfrac{1+18i}{3+4i} + \dfrac{7-26i}{3-4i} \quad = \dfrac{(1+18i)(3-4i)+(7-26i)(3+4i)}{25} = \dfrac{3-4i+54i+72+21+28i-78i+104}{25}$

$= \dfrac{200+0i}{25} = 8$

9 $\dfrac{1}{(1-i)^2} - \dfrac{1}{(1+i)^2} \quad = \dfrac{1}{\cancel{1}-2i\cancel{-1}} - \dfrac{1}{\cancel{1}+2i\cancel{-1}} = -\dfrac{1}{2i} - \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-1}{i} = \dfrac{-(-i)}{1} = i$

10 $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{1-i} \quad = \dfrac{(1+9)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{10(1+i)}{2} = 5+5i$

11 $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{1+i\sqrt{3}} \quad = \dfrac{(1-2i\sqrt{3}-3)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \dfrac{(-2-2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = \dfrac{-2+\cancel{2i\sqrt{3}}\cancel{-2i\sqrt{3}}-2\cdot 3}{4}$

$= \dfrac{-8}{4} = -2$

12 $\dfrac{3-5i\sqrt{3}}{9-i\sqrt{3}} \quad = \dfrac{(3-5i\sqrt{3})(9+i\sqrt{3})}{81+3} = \dfrac{27+3i\sqrt{3}-45i\sqrt{3}+15}{84} = \dfrac{42-42i\sqrt{3}}{84} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Opdracht 16 bladzijde 27

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $iz + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow z = \dfrac{-2}{i} = 2i$

2 $(2+i)z - 3 - 2i = 0 \quad \Leftrightarrow z = \dfrac{3+2i}{2+i} = \dfrac{(3+2i)(2-i)}{5} = \dfrac{6-3i+4i+2}{5} = \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{5}i$

3 $2(z-4) = i(z-5) \quad \Leftrightarrow 2z - 8 = iz - 5i \Leftrightarrow (2-i)z = 8-5i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{8-5i}{2-i} = \dfrac{(8-5i)(2+i)}{5} = \dfrac{16+8i-10i+5}{5} = \dfrac{21}{5} - \dfrac{2}{5}i$

4 $3 - 2i + 2iz = 3i(z-2) \quad \Leftrightarrow 3 - 2i + 2iz = 3iz - 6i \Leftrightarrow -iz = -3 - 4i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3+4i}{i} = \dfrac{-3i+4}{1} = 4 - 3i$

Opdracht 17 bladzijde 27

Bereken

1 $1+\dfrac{x-yi}{x+yi}+\dfrac{x+yi}{x-yi}$ $=1+\dfrac{(x-yi)^2}{x^2+y^2}+\dfrac{(x+yi)^2}{x^2+y^2}$

$$=\frac{x^2+\cancel{y^2}+x^2\cancel{-2xyi}-y^2+x^2\cancel{+2xyi}\cancel{-y^2}}{x^2+y^2}=\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

2 $\dfrac{(x+yi)^2+(x-yi)^2}{(x+yi)^2-(x-yi)^2}$ $=\dfrac{x^2\cancel{+2xyi}-y^2+x^2\cancel{-2xyi}-y^2}{\cancel{x^2}+2xyi\cancel{-y^2}\cancel{-x^2}+2xyi\cancel{+y^2}}$

$$=\frac{2x^2-2y^2}{4xyi}=\frac{(x^2-y^2)(-i)}{2xyi(-i)}=\frac{(y^2-x^2)i}{2xy}$$

Opdracht 18 bladzijde 27

Bereken $(i-i^{-1})^{-1}$ zonder rekentoestel.

$$\left(i-i^{-1}\right)^{-1}=\left(i-\frac{1}{i}\right)^{-1}=(i+i)^{-1}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2}$$

Opdracht 19 bladzijde 28

Bereken zonder rekentoestel.

1 i^{-735} $=\dfrac{1}{i^{4\cdot183+3}}=\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{1}{-i}=i$

2 i^{486} $=i^{4\cdot121+2}=i^2=-1$

3 i^{3^3} $=i^{27}=i^{4\cdot6+3}=i^3=-i$

Opdracht 20 bladzijde 28

Bewijs.

1 $\forall z\in\mathbb{C}: \overline{\overline{z}}=z$

Stel $z=a+bi$, dan is $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$.

2 $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}: \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

Stel $z_1=a_1+b_1i$ en $z_2=a_2+b_2i$, dan geldt:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{a_1+b_1i+a_2+b_2i}=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$$
$$=a_1-b_1i+a_2-b_2i=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Stel $z_1 = a_1 + b_1 i$ en $z_2 = a_2 + b_2 i$, dan geldt:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2}\\ &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\\ &= a_1 (a_2 - b_2 i) - b_1 (b_2 + a_2 i) = a_1 (a_2 - b_2 i) - b_1 i (a_2 - b_2 i)\\ &= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\end{aligned}$$

4 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Stel $z_1 = a_1 + b_1 i$ en $z_2 = a_2 + b_2 i$, dan geldt:

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)}\\ &= \overline{\left(\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}\right)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}\\ &= \frac{a_1 (a_2 + b_2 i) + b_1 (b_2 - a_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 (a_2 + b_2 i) - b_1 i (a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}\\ &= \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 - b_1 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$

Opdracht 21 bladzijde 28

Stel dat $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ en $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$.

Bewijs dat $z_2 = \overline{z_1}$.

Stel $z_1 = a_1 + b_1 i$ en $z_2 = a_2 + b_2 i$ met $b_1 \neq 0$ en $b_2 \neq 0$ want $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow b_1 + b_2 = 0\\ &\Leftrightarrow b_1 = -b_2 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0\\ &\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_2 = 0 \qquad (\text{zie } (1))\\ &\Leftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \qquad (b_2 \neq 0)\\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt: $z_2 = a_2 + b_2 i = a_1 - b_1 i = \overline{z_1}$.

Opdracht 22 bladzijde 28

Bereken $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^3} - \dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^3}$ zonder rekentoestel.

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3} - \frac{(1-i)^3}{(1+i)^3} &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3\\ &= \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^3 - \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^3\\ &= \left(\frac{2i}{2}\right)^3 - \left(\frac{-2i}{2}\right)^3\\ &= i^3 - (-i)^3\\ &= -i - i\\ &= -2i\end{aligned}$$

Opdracht 23 bladzijde 28

Bereken $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{30}$ zonder rekentoestel.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30} &= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{30} + \left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^{30}\\ &= \left(\frac{2i}{2}\right)^{30} + \left(\frac{-2i}{2}\right)^{30}\\ &= i^{4\cdot 7+2} + (-1)^{30}\cdot i^{4\cdot 7+2}\\ &= -1 + (-1)\\ &= -2\end{aligned}$$

Opdracht 24 bladzijde 28

Op de planeet Quaternion rekent men met onze reële getallen en de gewone vermenigvuldiging, maar ook nog met drie symbolen i, j en k die op de volgende manier worden vermenigvuldigd:

$i \cdot i = -1 \qquad j \cdot j = -1 \qquad k \cdot k = -1 \qquad i \cdot j = k \qquad j \cdot k = i \qquad k \cdot i = j$

Als je bovendien weet dat de vermenigvuldiging op Quaternion associatief maar niet commutatief is, wat is dan $k \cdot j \cdot i$?

A 1 **B** -1 **C** i **D** j **E** k

(Bron © VWO 2003, tweede ronde)

$k \cdot j \cdot i = k \cdot (k \cdot i) \cdot i = (k \cdot k) \cdot (i \cdot i) = (-1) \cdot (-1) = 1$

Antwoord A

Opdracht 25 bladzijde 28

Voor hoeveel reële getallen x is $x^2 i + xi^2 + (xi)^2 + 1$ een zuiver imaginair getal?

$x^2i + xi^2 + (xi)^2 + 1$ is zuiver imaginair

$\Leftrightarrow\ x^2i - x - x^2 + 1$ is zuiver imaginair

$\Leftrightarrow\ -x^2 - x + 1 = 0 \qquad (D = 5)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2}$ of $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2}$

Er zijn twee reële getallen waarvoor $x^2i + xi^2 + (xi)^2 + 1$ een zuiver imaginair getal is.

Opdracht 26 bladzijde 28

Stel $z = a + bi$ met a en b reële getallen.

Bepaal a en b als $z^2 - 6z + 12$ reëel en strikt negatief is.

$z^2 - 6z + 12 \in \mathbb{R}$ (1) en $z^2 - 6z + 12 < 0$ (2)

$(a + bi)^2 - 6(a + bi) + 12 = a^2 - b^2 + 2abi - 6a - 6bi + 12$

$= (a^2 - b^2 - 6a + 12) + (2ab - 6b)i$

(1) vereist: $2ab - 6b = 0 \Leftrightarrow 2b(a - 3) = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$ of $a = 3$

(2) vereist: $a^2 - b^2 - 6a + 12 < 0$

- Stel $b = 0$, dan moet gelden: $a^2 - 6a + 12 < 0 \qquad D = -12$

a	
$a^2 - 6a + 12$	+

$\rightarrow$ Voor $b = 0$ zal $z^2 - 6z + 12$ wel reëel maar nooit strikt negatief zijn.

- Stel $a = 3$, dan moet gelden:

$9 - b^2 - 18 + 12 < 0$

$\Leftrightarrow -b^2 + 3 < 0$

$\Leftrightarrow b < -\sqrt{3}$ of $b > \sqrt{3}$

b		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$-b^2 + 3$	−	0	+	0	−

Besluit: $a = 3$ en $b \in\ ]-\infty, -\sqrt{3}[\ \cup\ ]\sqrt{3}, +\infty[$

Opdracht 27 bladzijde 29

Als $z^2 + 2z = -5$, waarom is dan ook $\bar{z}^2 + 2\bar{z} = -5$?

In opdracht 20 bewezen we:

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ ,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ en $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

Bijgevolg:

$z^2 + 2z = -5 \Leftrightarrow \overline{z^2 + 2z} = \overline{-5}$

$\Leftrightarrow \overline{z^2} + \overline{2z} = -5$

$\Leftrightarrow \overline{z^2} + \overline{2} \cdot \overline{z} = -5$

$\Leftrightarrow \bar{z}^2 + 2 \cdot \bar{z} = -5$

Opdracht 28 bladzijde 29

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $5z + 4\bar{z} + 5z^{-1} = 10$

$\Leftrightarrow\ 5(a + bi) + 4(a - bi) + \dfrac{5}{a+bi} = 10$ stel $z = a + bi \neq 0$

$\Leftrightarrow\ 5a + 5bi + 4a - 4bi + \dfrac{5a - 5bi}{a^2 + b^2} = 10$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + \dfrac{5a}{a^2+b^2} = 10 \\ b - \dfrac{5b}{a^2+b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a(a^2+b^2) + 5a = 10(a^2+b^2) & (1) \\ b(a^2+b^2) - 5b = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $b(a^2 + b^2) - 5b = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5$ of $b = 0$

- Als $a^2 + b^2 = 5$ dan wordt (1):

  $45a + 5a = 10 \cdot 5 \Leftrightarrow 50a = 50 \Leftrightarrow a = 1$

  en dus: $b^2 = 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ of $b = -2$

  Dan is $z = 1 + 2i$ of $z = 1 - 2i$.

- Als $b = 0$ dan wordt (1):

  $9a^3 + 5a = 10a^2 \Leftrightarrow a(9a^2 - 10a + 5) = 0$

  $\Leftrightarrow a = 0$ of $9a^2 - 10a + 5 = 0 \rightarrow$ geen reële oplossing

  Dan is $z = 0$, dit is onmogelijk.

Besluit: $z = 1 + 2i$ of $z = 1 - 2i$.

2 $z^2 + 3\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ (a + bi)^2 + 3(a - bi)^2 + (a + bi) - (a - bi) + 3 = 0$ stel $z = a + bi$

$\Leftrightarrow\ a^2 - b^2 + 2abi + 3a^2 - 3b^2 - 6abi \cancel{+a} + bi \cancel{-a} + bi + 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ 4a^2 - 4b^2 - 4abi + 2bi + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4b^2 + 3 = 0 & (1) \\ -4ab + 2b = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $-4ab + 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ of $a = \dfrac{1}{2}$

- Als $b = 0$ dan wordt (1):

  $4a^2 + 3 = 0 \rightarrow$ geen reële oplossing

- Als $a = \dfrac{1}{2}$ dan wordt (1):

  $1 - 4b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1$ of $b = -1$

  Dan is $z = \dfrac{1}{2} + i$ of $z = \dfrac{1}{2} - i$.

Besluit: $z = \dfrac{1}{2} + i$ of $z = \dfrac{1}{2} - i$.

Opdracht 29 bladzijde 29

Is $z = x + yi \neq -1$ en $x^2 + y^2 = 1$, dan is $\dfrac{z-1}{z+1}$ een zuiver imaginair getal of nul.

Bewijs.

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+1} = \frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi} = \frac{((x-1)+yi)((x+1)-yi)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{(x-(1-yi))(x+(1-yi))}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{x^2-(1-yi)^2}{2+2x}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}\cancel{-1}+2yi+\cancel{y^2}}{2(x+1)} = \frac{\cancel{2}yi}{\cancel{2}(x+1)} = \frac{yi}{x+1}$$

- Als $y = 0$ dan is $\dfrac{yi}{x+1} = 0$ want uit $x + yi \neq -1$ volgt dat dan $x \neq -1$ dus de noemer is verschillend van 0.
- Als $y \neq 0$, dan is $\dfrac{yi}{x+1}$ een zuiver imaginair getal.

Opdracht 30 bladzijde 29

Stel $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ en $z_3 = e + fi$.

1 Bereken $z_1 + (z_2 + z_3)$ en $(z_1 + z_2) + z_3$ en toon op die manier aan dat de optelling in $\mathbb{C}$ associatief is.

$z_1 + (z_2 + z_3)$

$= (a + bi) + ((c + di) + (e + fi))$

$= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i)$ definitie optelling in $\mathbb{C}$

$= (a + c + e) + (b + d + f)i$ (1) definitie optelling in $\mathbb{C}$

$(z_1 + z_2) + z_3$

$= ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi)$

$= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi)$ definitie optelling in $\mathbb{C}$

$= (a + c + e) + (b + d + f)i$ (2) definitie optelling in $\mathbb{C}$

$(1) = (2) \Rightarrow z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

2 Toon op analoge manier aan dat de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ associatief is.

Te bewijzen: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

Bewijs

$z_1(z_2z_3)$

$= (a + bi)((c + di)(e + fi))$

$= (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i)$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$

$= (a(ce - df) - b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce - df))i$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$

$= (ace - adf - bcf - bde) + (acf + ade + bce - bdf)i$ (1) distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$ in $\mathbb{R}$ en associativiteit van $+$ en $\cdot$ in $\mathbb{R}$

$(z_1z_2)z_3$
$= ((a + bi)(c + di))(e + fi)$
$= ((ac - bd) + (ad + bc)i)(e + fi)$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$
$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$
$= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i$ (2) distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$ in $\mathbb{R}$ en associativiteit van $+$ en $\cdot$ in $\mathbb{R}$

$(1) = (2) \Rightarrow z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

3 Bewijs de commutativiteit van de optelling en de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$.

- Commutativiteit van de optelling

  Te bewijzen: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

  Bewijs

  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ (1) definitie optelling in $\mathbb{C}$
  $z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i$ definitie optelling in $\mathbb{C}$
  $= (a + c) + (b + d)i$ (2) optelling is commutatief in $\mathbb{R}$

  $(1) = (2) \Rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

- Commutativiteit van de vermenigvuldiging

  Te bewijzen: $z_1z_2 = z_2z_1$

  Bewijs

  $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$
  $= (ac - bd) + (ad + bc)i$ (1) definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$
  $z_2 \cdot z_1 = (c + di) \cdot (a + bi)$
  $= (ca - db) + (da + cb)i$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$
  $= (ac - bd) + (ad + bc)i$ (2) vermenigvuldiging is commutatief in $\mathbb{R}$

  $(1) = (2) \Rightarrow z_1z_2 = z_2z_1$

4 Bewijs de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling in $\mathbb{C}$.

Te bewijzen: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

Bewijs

$z_1(z_2 + z_3) = (a + bi)((c + di) + (e + fi))$
$= (a + bi)((c + e) + (d + f)i)$ definitie optelling in $\mathbb{C}$
$= (a(c + e) - b(d + f)) + (b(c + e) + a(d + f))i$ definitie vermenivuldiging in $\mathbb{C}$
$= ((ac - bd) + (ae - bf)) + ((bc + ad) + (be + af))i$ distr., comm. & assoc. in $\mathbb{R}$
$= ((ac - bd) + (bc + ad)i) + ((ae - bf) + (be + af)i)$ definitie optelling in $\mathbb{C}$
$= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi)$ definitie vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$
$= z_1z_2 + z_1z_3$

Opdracht 31 bladzijde 30

Bereken de vierkantswortels van de volgende complexe getallen.

1 $5 + 12i$

$(x + yi)^2 = 5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = 5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{5+13}{2} = 9 \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{5-13}{2} = \underbrace{-4}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3 \\ y = 2 \quad \text{of} \quad y = -2 \end{cases}$$

De vierkantswortels van 5 + 12i zijn 3 + 2i en –3 –2i.

2 -1

$-1 = i^2$

De vierkantswortels van –1 zijn i en –i.

3 -3

$-3 = 3i^2$

De vierkantswortels van –3 zijn $i\sqrt{3}$ en $-i\sqrt{3}$.

4 $1 + 2i\sqrt{6}$

$(x + yi)^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{6}{x^2} = 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 6 = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1+5}{2} = 3 \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{1-5}{2} = \underbrace{-2}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} \quad \text{of} \quad y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

De vierkantswortels van $1 + 2i\sqrt{6}$ zijn $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$ en $-\sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

5 $4i$

$(x + yi)^2 = 4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \quad \text{of} \quad x^2 = \underbrace{-2}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \quad \text{of} \quad y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

De vierkantswortels van 4i zijn $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

6 $-7 + 24i$

$(x + yi)^2 = -7 + 24i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{144}{x^2} = -7 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 7x^2 - 144 = 0 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{-7 + 25}{2} = 9 \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{-7 - 25}{2} = \underbrace{-16}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3 \\ y = 4 \quad \text{of} \quad y = -4 \end{cases}$$

De vierkantswortels van $-7 + 24i$ zijn $3 + 4i$ en $-3 - 4i$.

7 $8 + 6i$

$(x + yi)^2 = 8 + 6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{8 + 10}{2} = 9 \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{8 - 10}{2} = \underbrace{-1}_{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3 \\ y = 1 \quad \text{of} \quad y = -1 \end{cases}$$

De vierkantswortels van $8 + 6i$ zijn $3 + i$ en $-3 - i$.

8 $(1 + 2i)^4$

De vierkantswortels van $(1 + 2i)^4$ zijn $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ en $-(1 + 2i)^2 = -(-3 + 4i) = 3 - 4i$.

Opdracht 32 bladzijde 30

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $25z^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{-1}{25} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{5}i \quad \text{of} \quad z = \frac{-1}{5}i$

2 $z^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4i \quad \text{of} \quad z = -4i$

3 $z^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \text{of} \quad z^2 = -1$

$\Leftrightarrow \quad z = 1 \quad \text{of} \quad z = -1 \quad \text{of} \quad z = i \quad \text{of} \quad z = -i$

4 $z^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = i \quad \text{of} \quad z^2 = -i$

- $$(x + yi)^2 = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad x^2 = \overbrace{\frac{-1}{2}}^{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \frac{1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{of} \quad x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{of} \quad y = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Hieruit volgt: $z^2 = i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{of} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

- $$(x + yi)^2 = -i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 1 = 0 \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad x^2 = \overbrace{\frac{-1}{2}}^{\text{geen reële oplossing}} \\ y = \frac{-1}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{of} \quad x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{of} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Hieruit volgt: $z^2 = -i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{of} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

De oplossingen van $z^4 + 1 = 0$ zijn dus:

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ en $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5 $(3z+i)(2z-i)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{-i}{3} \quad \text{of} \quad z=\frac{i}{2}$

6 $(iz-5)(6+2iz)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{5}{i}=-5i \quad \text{of} \quad z=\frac{-6}{2i}=3i$

Opdracht 33 bladzijde 30

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $z^2-30z+289=0$

$D=900-4\cdot 289=-256$

$d=16i$

$\Leftrightarrow \quad z=\frac{30+16i}{2}=15+8i \quad \text{of} \quad z=\frac{30-16i}{2}=15-8i$

2 $z^2+2(1+i)z+2i=0$

$D=4(1+i)^2-4\cdot 2i=4\cdot 2i-8i=0$

$\Leftrightarrow \quad z=\frac{-2(1+i)}{2}=-1-i$

3 $z^2+(1-2i)z-2i=0$

$D=(1-2i)^2-4\cdot(-2i)=1-4i-4+8i=1+4i-4=(1+2i)^2$

$d=1+2i$

$\Leftrightarrow \quad z=\frac{-1+2i+1+2i}{2}=2i \quad \text{of} \quad z=\frac{-1+2i-1-2i}{2}=-1$

4 $z^4+6z^2+8=0$

$D=36-4\cdot 8=4$

$d=2$

$\Leftrightarrow \quad z^2=\frac{-6+2}{2}=-2 \quad \text{of} \quad z^2=\frac{-6-2}{2}=-4$

$\Leftrightarrow \quad z=i\sqrt{2} \quad \text{of} \quad z=-i\sqrt{2} \quad \text{of} \quad z=2i \quad \text{of} \quad z=-2i$

5 $2z^2-(1+i)z+1+i=0$

$D=(1+i)^2-4\cdot 2\cdot(1+i)=2i-8-8i=-8-6i$

$d=1-3i$

$\Leftrightarrow \quad z=\frac{1+i+1-3i}{4}=\frac{2-2i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \quad \text{of} \quad z=\frac{1+i-1+3i}{4}=\frac{4i}{4}=i$

6 $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$

$$D = (5 - 2i)^2 - 4 \cdot (5 - 5i) = 25 - 20i - 4 - 20 + 20i = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-5 + 2i + 1}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \quad \text{of} \quad z = \frac{-5 + 2i - 1}{2} = \frac{-6 + 2i}{2} = -3 + i$$

7 $iz^3 + (1 - 5i)z^2 + (6i - 2)z = 0$

$$\Leftrightarrow \quad z(iz^2 + (1 - 5i)z + (6i - 2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \text{of} \quad iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$$

$$D = (1 - 5i)^2 - 4i(6i - 2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = 1 - 2i - 1 = (1 - i)^2$$

$$d = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \text{of} \quad z = \frac{-1 + 5i + 1 - i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2 \quad \text{of} \quad z = \frac{-1 + 5i - 1 + i}{2i} = \frac{-2 + 6i}{2i} = 3 + i$$

8 $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 = -7$$

$$d = i\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \quad \text{of} \quad z^2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$$

- $(x + yi)^2 = \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2} \\ 2xy = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{7}{16x^2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^4 - 24x^2 - 7 = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{4x} \end{cases}$$

geen reële oplossing

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{24 + 32}{32} = \dfrac{7}{4} \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{24 - 32}{32} = \dfrac{-1}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{4x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{-\sqrt{7}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{4\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{1}{2} \quad \text{of} \quad y = \dfrac{\sqrt{7}}{4\dfrac{-\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

- $(x+yi)^2 = \dfrac{3-i\sqrt{7}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2} \\ 2xy = \dfrac{-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{7}{16x^2} = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{-\sqrt{7}}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^4 - 24x^2 - 7 = 0 \\ y = \dfrac{-\sqrt{7}}{4x} \end{cases}$$

geen reële oplossing

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{24+32}{32} = \dfrac{7}{4} \quad \text{of} \quad x^2 = \dfrac{24-32}{32} = \dfrac{-1}{4} \\ y = \dfrac{-\sqrt{7}}{4x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{-\sqrt{7}}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2} \quad \text{of} \quad y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

De oplossingen van $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$ zijn $z = \dfrac{\sqrt{7}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z = \dfrac{-\sqrt{7}}{2} - \dfrac{1}{2}i$, $z = \dfrac{\sqrt{7}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ en $z = \dfrac{-\sqrt{7}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Opdracht 34 bladzijde 30

Los de vergelijking $\dfrac{z}{z-2i} - \dfrac{3iz}{(z+i)(z-2i)} = 2$ op in $\mathbb{C}$.

$\dfrac{z}{z-2i} - \dfrac{3iz}{(z+i)(z-2i)} = 2$ Voorwaarde: $z \neq 2i$, $z \neq -i$ (*)

$\Leftrightarrow z(z+i) - 3iz = 2(z+i)(z-2i)$

$\Leftrightarrow z^2 \cancel{+iz} \cancel{-3iz} = 2z^2 \cancel{+2iz} \cancel{-4iz} + 4$

$\Leftrightarrow z^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 = -4$

$\Leftrightarrow \cancel{z = 2i}$ of $z = -2i$ (oplossing geschrapt wegens (*))

De oplossing van de vergelijking is $z = -2i$.

Opdracht 35 bladzijde 30

Bepaal $m \in \mathbb{R}$ zodat de vergelijking $z^2 - (3+i)z + m + 2i = 0$ een reële oplossing heeft. Bepaal daarna de tweede oplossing.

Stel $x \in \mathbb{R}$ is een oplossing van de vergelijking, dan geldt:

$x^2 - (3+i)x + m + 2i = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + m) + (-x + 2)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ -x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 6 + m = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Er is een reële oplossing als $m = 2$.

Uit de formules voor de oplossingen $\frac{-b+d}{2a}$ en $\frac{-b-d}{2a}$ van een complexe vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$, blijkt dat hun som s gelijk is aan $\frac{-b}{a}$, zoals ook in $\mathbb{R}$ het geval is. We gebruiken dit hier om de tweede oplossing z_2 te bepalen.

$$z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$$

$$s = \frac{3+i}{1} = 2 + z_2 \Leftrightarrow z_2 = 1 + i$$

De tweede oplossing is $1 + i$.

Opdracht 36 bladzijde 30

Bepaal een vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten waarvan $3 + 2i$ een wortel is.

We kunnen de vergelijking noteren als $z^2 + az + b = 0$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

$3 + 2i$ is een wortel van de vergelijking, dus:

$$(3 + 2i)^2 + a(3 + 2i) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 12i - 4 + 3a + 2ai + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 3a + b = 0 \\ 12 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 3(-6) = 13 \\ a = -6 \end{cases}$$

Een mogelijke vierkantsvergelijking is $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Opdracht 37 bladzijde 30

Stel een formule op om de vierkantswortels van $z = a + bi$ te bepalen.

$x + yi$ is een vierkantswortel van $a + bi$

- Stel $b \neq 0$

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \\ y = \frac{b}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 & (1) \\ y = \frac{b}{2x} & (2) \end{cases}$$

We lossen (1) op:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

$$D = 16a^2 - 4 \cdot 4(-b^2) = 16a^2 + 16b^2 > 0 \qquad (b \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4a + 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} \quad \text{of} \quad x^2 = \frac{4a - 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \ (3) \quad \text{of} \quad x^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \ (4)$$

Nu is $\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} > 0$ en $\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0$ want:

$$b \neq 0 \;\Rightarrow\; b^2 > 0 \;\Rightarrow\; a^2+b^2 > a^2 \;\Rightarrow\; -\sqrt{a^2+b^2} < -a < \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow\; a-\sqrt{a^2+b^2} < 0 < a+\sqrt{a^2+b^2} \;\Rightarrow\; \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0 < \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Daarom heeft (4) geen oplossingen ($x \in \mathbb{R}$).

Uit (3) vinden we:

$$x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

De positieve waarde voor x invullen in (2) geeft

$$y = \frac{b}{2\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} = \frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}$$

$$= \frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\sqrt{\cancel{a^2}+b^2-\cancel{a^2}}} = \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

De negatieve waarde voor x invullen geeft analoog ook de tegengestelde y-waarde.

We vinden dus:

$$x+yi = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,i\right)$$

Merk hierbij op dat $\dfrac{b}{|b|} = \begin{cases} 1 & \text{als } b > 0 \\ -1 & \text{als } b < 0 \end{cases}$.

- Stel $b = 0$

  De (complexe) vierkantswortels uit $a \geqslant 0$ zijn $\sqrt{a}$ en $-\sqrt{a}$.

  De (complexe) vierkantswortels uit $a < 0$ zijn $i\sqrt{|a|}$ en $-i\sqrt{|a|}$.

Opdracht 38 bladzijde 31

Bereken zonder rekentoestel.

1 $(5-12i)^{-1} \quad = \dfrac{5+12i}{169} = \dfrac{5}{169} + \dfrac{12}{169}i$

2 $\dfrac{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}{i} \quad = \dfrac{2+1}{i} = -3i$

3 $\dfrac{5i(2+i)^2}{2-i} \quad = \dfrac{5i(4+4i-1)(2+i)}{5} = i(3+4i)(2+i) = i(6+3i+8i-4) = i(2+11i) = -11+2i$

Opdracht 39 bladzijde 31

Bereken de reële getallen x en y als

1 $(x + yi) + (1 + 5i) = (x + yi)(1 + 5i)$

$\Leftrightarrow x + 1 + (y + 5)i = x - 5y + (5x + y)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x} + 1 = \cancel{x} - 5y \\ \cancel{y} + 5 = 5x + \cancel{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

2 $(-2 + 4i)(x + yi) + 3(x + yi) = 4(2 + i)$

$\Leftrightarrow -2x - 2yi + 4xi - 4y + 3x + 3yi = 8 + 4i$

$\Leftrightarrow x - 4y + (4x + y)i = 8 + 4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 8 \\ 4x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 4y \\ y + 4(8 + 4y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 4y \\ y + 32 + 16y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 4y \\ 17y = -28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 4\left(\dfrac{-28}{17}\right) = \dfrac{24}{17} \\ y = \dfrac{-28}{17} \end{cases}$$

Opdracht 40 bladzijde 31

Voor welke waarde van b is $\dfrac{2 + i}{bi - 1}$ een reëel getal?

A $-\dfrac{3}{2}$ **B** $-\dfrac{1}{2}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** 2 **E** $\dfrac{3}{2}$

(Bron © Alabama Statewide Mathematics Contest, 2010)

$$\frac{2+i}{bi-1} = \frac{(2+i)(-1-bi)}{(bi-1)(-1-bi)} = \frac{-2-2bi-i+b}{b^2+1} = \frac{(b-2)-(2b+1)i}{b^2+1}$$

Dit getal moet reëel zijn dus $2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{-1}{2}$.

Dit is antwoord B.

Opdracht 41 bladzijde 31

Bereken $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2013}$ zonder rekentoestel.

A 1 **B** $-i$ **C** i **D** -1 **E** $-2i$

(Bron © Alabama Statewide Mathematics Contest, 2013)

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2013} = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^{2013} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{2013} = i^{4 \cdot 503 + 1} = i$$

Antwoord C.

Opdracht 42 bladzijde 31

Los op in $\mathbb{C}$.

1 $z^2 - 7z + 13 - i = 0$

$D = 49 - 4(13 - i) = -3 + 4i$

$d = 1 + 2i$

$\Leftrightarrow \; z = \dfrac{7+1+2i}{2} = 4 + i \quad \text{of} \quad z = \dfrac{7-1-2i}{2} = 3 - i$

2 $(2 - 3i)z^2 + 4z + 2 + i = 0$

$D = 16 - 4(2 - 3i)(2 + i)$

$= 16 - 4(4 + 2i - 6i + 3)$

$= 16 - 28 + 16i = -12 + 16i$

$d = 2 + 4i$

$\Leftrightarrow \; z = \dfrac{-4+2+4i}{2(2-3i)} = \dfrac{-1+2i}{2-3i} = \dfrac{(-1+2i)(2+3i)}{13} = \dfrac{-8}{13} + \dfrac{1}{13}i$

$\text{of} \quad z = \dfrac{-4-2-4i}{2(2-3i)} = \dfrac{-3-2i}{2-3i} = \dfrac{(-3-2i)(2+3i)}{13} = \dfrac{-13i}{13} = -i$

3 $z^4 - z^2 - 2 = 0$

$D = 1 - 4(-2) = 9$

$d = 3$

$\Leftrightarrow \; z^2 = \dfrac{1+3}{2} = 2 \quad \text{of} \quad z^2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

$\Leftrightarrow \; z = \sqrt{2} \quad \text{of} \quad z = -\sqrt{2} \quad \text{of} \quad z = i \quad \text{of} \quad z = -i$

4 $16z^4 - 24z^2 + 25 = 0$

$D = 576 - 4 \cdot 16 \cdot 25 = -1024$

$d = 32i$

$\Leftrightarrow \; z^2 = \dfrac{24+32i}{32} = \dfrac{3}{4} + i \quad \text{of} \quad z^2 = \dfrac{24-32i}{32} = \dfrac{3}{4} - i$

$\Leftrightarrow \; z = 1 + \dfrac{1}{2}i \quad \text{of} \quad z = -1 - \dfrac{1}{2}i \quad \text{of} \quad z = 1 - \dfrac{1}{2}i \quad \text{of} \quad z = -1 + \dfrac{1}{2}i$

5 $\dfrac{z+i}{z-i}+\dfrac{2}{z(z-i)}+1=0$ voorwaarden: $z \neq i, z \neq 0$ (*)

$\Leftrightarrow (z+i)z+2+z(z-i)=0$

$\Leftrightarrow z^2+iz+2+z^2-iz=0$

$\Leftrightarrow 2z^2+2=0$

$\Leftrightarrow z^2=-1$

$\Leftrightarrow \underset{(*)}{\cancel{z=i}}$ of $z=-i$

De oplossing is $z=-i$.

Opdracht 43 bladzijde 32

Bereken $(x+yi)^3-(x-yi)^3$.

$(x+yi)^3-(x-yi)^3$

$=(x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3)-(x^3-3x^2yi+3x(yi)^2-(yi)^3)$

$=(x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i)-(x^3-3x^2yi-3xy^2+y^3i)$

$=6x^2yi-2y^3i$

$=2yi(3x^2-y^2)$

Opdracht 44 bladzijde 32

Bepaal het toegevoegd complex getal van $\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)^2-\left(\dfrac{a-bi}{a+bi}\right)^2$.

We werken deze uitdrukking eerst uit:

$$\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2-\left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2$$

$$=\left(\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}\right)^2-\left(\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$=\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{4abi}{a^2+b^2}=\frac{8(a^2-b^2)abi}{(a^2+b^2)^2}$$

Het complex toegevoegde getal is dus $-\dfrac{8(a^2-b^2)abi}{(a^2+b^2)^2}$.

Opdracht 45 bladzijde 32

Stel a en b zijn natuurlijke getallen en c is een reëel getal.

Bepaal a en b als $(a+bi)^3 = -74 + ci$.

$(a + bi)^3 = -74 + ci \qquad a,b \in \mathbb{N}$ en $c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \; a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = -74 + ci$

$\Leftrightarrow \; a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = -74 + ci$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -74 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = c & (2) \end{cases}$$

Uit (1) volgt dat $a \cdot (a^2 - 3b^2) = -74$, zodat a en $a^2 - 3b^2$ gehele delers van -74 moeten zijn, met a positief. We overlopen de verschillende mogelijkheden.

- $a = 1$ en $a^2 - 3b^2 = -74$

  $1 - 3b^2 = -74 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow b = 5$ of $b = -5$

  We vinden als eerste oplossing $a = 1$ en $b = 5$.

- $a = 2$ en $a^2 - 3b^2 = -37$

  $4 - 3b^2 = -37 \Leftrightarrow b = \sqrt{\dfrac{41}{3}}$ of $b = -\sqrt{\dfrac{41}{3}}$

  Er is in dit geval geen oplossing in $\mathbb{N}$.

- Op analoge wijze kun je nagaan dat er ook voor $a = 37$ en $a = 74$ geen natuurlijke waarde voor b te vinden is.

De enige oplossing is bijgevolg $a = 1$ en $b = 5$.

Opdracht 46 bladzijde 32

Bepaal alle complexe getallen waarvan de vierde macht reëel en kleiner dan –64 is.

Stel $z = a + bi$, dan moet gelden: $\begin{cases} (a+bi)^4 \in \mathbb{R} & (1) \\ (a+bi)^4 < -64 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} (a+bi)^4 &= (a+bi)^2(a+bi)^2 \\ &= (a^2 + 2abi - b^2)(a^2 + 2abi - b^2) \\ &= a^4 + 2a^3bi - a^2b^2 + 2a^3bi + 4a^2b^2i^2 - 2ab^3i - a^2b^2 - 2ab^3i + b^4 \\ &= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)i \qquad (3) \end{aligned}$$

(1) vereist: $4a^3b - 4ab^3 = 0$

$\Leftrightarrow\ 4ab(a^2 - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow\ a = 0 \quad \text{of} \quad b = 0 \quad \text{of} \quad a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ a = 0 \quad \text{of} \quad b = 0 \quad \text{of} \quad a = b \quad \text{of} \quad a = -b$

Als $a = 0$, dan is $z^4 = b^4i^4 = b^4 > 0$. Dit is in strijd is met (2).

Als $b = 0$, dan is $z^4 = a^4 > 0$, wat ook in strijd is met (2).

Dus $a = b$ of $a = -b$.

Invullen in (3) geeft: $(a+bi)^4 = (a + (\pm a)i)^4$

$$= a^4 - 6a^2(\pm a)^2 + (\pm a)^4$$

$$= -4a^4$$

Voorwaarde (2) wordt dan: $-4a^4 < -64$

$\Leftrightarrow\ a^4 > 16$

$\Leftrightarrow\ a < -2 \quad \text{of} \quad a > 2$

De complexe getallen die aan beide voorwaarden voldoen zijn $a \pm ai$ met $a < -2$ of $a > 2$.