Hoofdstuk 9

Afgeleiden II

Opdracht 1 bladzijde 182

Stel een formule op voor de volgende afgeleiden m.b.v. de limietdefinitie.

1 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2 (x - a)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{-\cancel{(x - a)}(x + a)}{x^2 a^2 \cancel{(x - a)}}$$

$$= -\frac{2a}{a^4}$$

$$= -\frac{2}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

2 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{a}}}{\cancel{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

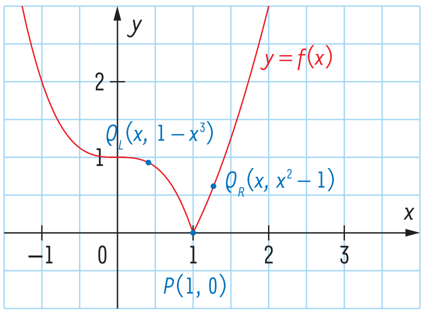
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Opdracht 2 bladzijde 183

De functie f wordt bepaald door een meervoudig voorschrift:

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1 - x^3 & \text{als } x < 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \\ x^2 - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$



Met de rekenregels voor afgeleiden kan f' snel bepaald worden voor $x < 1$ en $x > 1$:

$$f': x \mapsto \begin{cases} -3x^2 & \text{als } x < 1 \\ 2x & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

We onderzoeken nu waaraan $f'(1)$ gelijk is.

1 Bereken $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. We noemen dit de linkerafgeleide van f in 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1 - x^3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -(x^2 + x + 1) = -3$$

2 De linkerraaklijn t_L is de rechte door P met de linkerafgeleide als richtingscoëfficiënt. Het is de limietstand van de rechten $Q_L P$ met $Q_L \to P$ en Q_L links van P op de grafiek van f.

Geef een vergelijking van t_L.

$t_L \leftrightarrow y - f(1) = -3(x - 1)$

$\leftrightarrow y = -3x + 3$

3 Bereken de rechterafgeleide $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ en geef een vergelijking van de rechterraaklijn t_R aan de grafiek van f in P.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x + 1) = 2$$

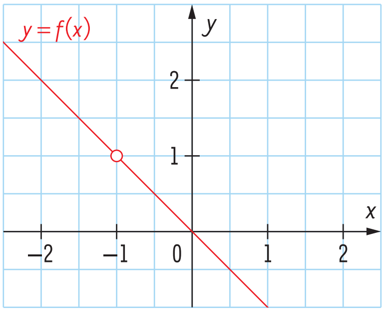
$t_R \leftrightarrow y = 2(x - 1)$

$\leftrightarrow y = 2x - 2$

Opdracht 3 bladzijde 188

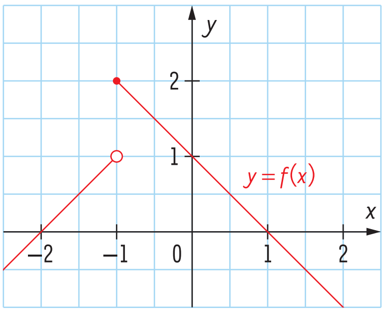
De functie f is gegeven door haar grafiek. Bepaal grafisch de (linker-, rechter-) afgeleide van f in -1, indien f daar afleidbaar is.

1



$-1 \notin$ dom f, f is dus noch links-, noch rechtsafleidbaar in -1 en dus ook niet afleidbaar in -1.

2

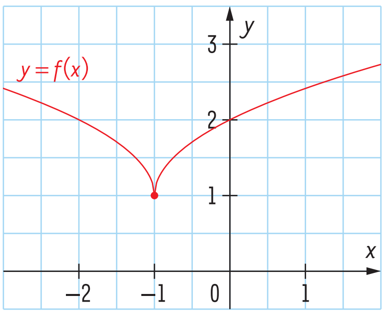


De functie f is niet continu in -1, wel rechtscontinu.

De functie f is niet afleidbaar in -1.

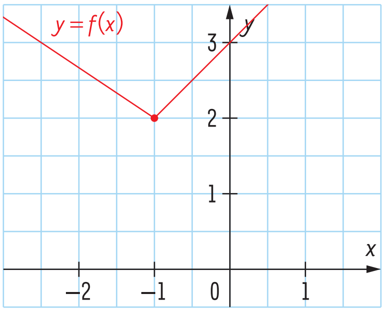
De linkerafgeleide bestaat niet en de rechterafgeleide is -1 (rico rechte).

3



De functie f is continu voor $x = -1$ en $t \leftrightarrow x = -1$ is de verticale raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(-1, 1)$. Dit betekent dat f niet afleidbaar is in -1. Zowel de linkerafgeleide als de rechterafgeleide bestaan niet.

4



De functie f is continu voor x = –1. Ze vertoont een 'knik' in (–1, 2). De functie is niet afleidbaar in dat punt. De rechterafgeleide is 1 en de linkerafgeleide is $-\frac{2}{3}$ (rico rechte)

Opdracht 4 bladzijde 188

Beschouw de functie $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{als } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{als } x \geqslant -3 \end{cases}$.

Teken de hellinggrafiek van f. Gebruik daartoe de limietdefinitie om te onderzoeken wat er gebeurt voor $x = -3$.

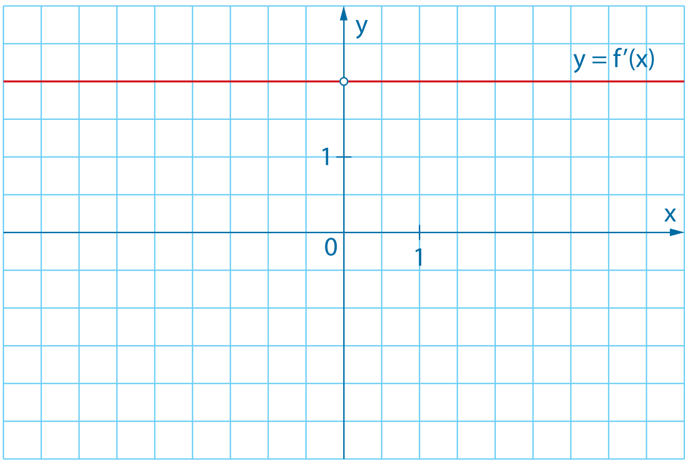
- $f'(x) = 2$ voor $x < -3$

  $f'(x) = 2$ voor $x > -3$
- Voor $x = -3$ geldt:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{2x + 7}{x + 3} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{2x - 1 + 7}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{2(x + 3)}{x + 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} 2 = 2$$

  f is niet afleidbaar in –3.
- Hellinggrafiek:



Opdracht 5 bladzijde 189

Onderzoek de afleidbaarheid van de volgende functies in de gegeven x-waarde.

1 $f: x \mapsto \begin{cases} 1-x^2 & \text{als } x \leqslant 1 \\ x^2-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$ in 1

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (-(x+1)) = -2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$
- Daar de linkerafgeleide van f in 1 verschillend is van de rechterafgeleide van f in 1, bestaat de afgeleide van f in 1 niet en is f dus niet afleidbaar in 1.

2 $f: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ in 1

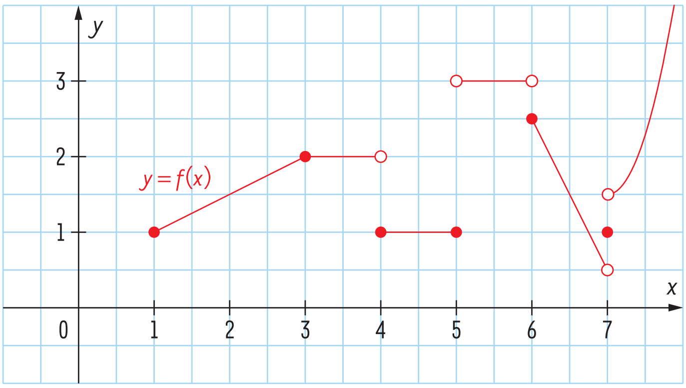
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}(x-1)(x+1)}{x-1}$

  $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\dfrac{1}{4}(x+1)\right] = \dfrac{1}{2}$
- De linkerafgeleide van f in 1 is gelijk aan de rechterafgeleide van f in 1, dus is f afleidbaar in 1 en $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Opdracht 6 bladzijde 191

De functie f is gegeven door haar grafiek.

Is f afleidbaar, links afleidbaar of rechts afleidbaar in 1, 2, 3, ..., 7?



x	afleidbaar	links afleidbaar	rechts afleidbaar
1	✔		✔
2	✔	✔	✔
3		✔	✔
4			✔
5		✔	
6			✔
7			

Opdracht 7 bladzijde 192

Beschouw twee functies f en g.

1 Maak gebruik van de limietdefinitie $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$

om formeel aan te tonen dat $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ voor alle inwendige punten x van het domein van f en g waarvoor f en g afleidbaar zijn (somregel voor afgeleiden).

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} \qquad \text{definitie afgeleide}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \qquad \text{definitie somfunctie}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad \text{rekenregels limieten}$$

$$= f'(a) + g'(a) \qquad \text{f en g afleidbaar in a}$$

$$\Rightarrow \ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2 Toon op dezelfde manier aan dat voor een willekeurige $r \in \mathbb{R}$ geldt: $(r \cdot f)' = r \cdot f'$ (veelvoudregel voor afgeleiden).

$$(r \cdot f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(r \cdot f)(x)-(r \cdot f)(a)}{x-a} \qquad \text{definitie afgeleide}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{r \cdot f(x) - r \cdot f(a)}{x-a} \qquad \text{definitie veelvoudfunctie}$$

$$= \lim_{x \to a} r \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= r \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{rekenregels limieten}$$

$$= r \cdot f'(a) \qquad \text{f is afleidbaar in a}$$

$$\Rightarrow \ (r \cdot f)'(x) = r \cdot f'(x)$$

Dit bevestigt de rekenregels die we in hoofdstuk 6 al aantoonden via een meer intuïtieve interpretatie van 'naderen tot'.

Opdracht 8 bladzijde 194

Stel f, g, h en i functies die afleidbaar zijn in een bepaald open interval.
Toon aan dat in dat interval geldt:

1 $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' && \text{productregel} \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') && \text{productregel} \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

2 $(f \cdot g \cdot h \cdot i)' = f' \cdot g \cdot h \cdot i + f \cdot g' \cdot h \cdot i + f \cdot g \cdot h' \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i'$

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h \cdot i)' &= (f \cdot g \cdot h) \cdot i)' \\ &= (f \cdot g \cdot h)' \cdot i + (f \cdot g \cdot h) \cdot i' && \text{productregel} \\ &= (f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h') \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i' && \text{oef 1} \\ &= f' \cdot g \cdot h \cdot i + f \cdot g' \cdot h \cdot i + f \cdot g \cdot h' \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i'\end{aligned}$$

Opdracht 9 bladzijde 194

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}\left((2x^2+3)\cdot(3x+5)\right)$

$= 4x(3x + 5) + (2x^2 + 3) \cdot 3$

$= 12x^2 + 20x + 6x^2 + 9$

$= 18x^2 + 20x + 9$

2 $\dfrac{d}{dx}\left((x-2)\cdot(x^2+2x+4)\right)$

$= x^2 + 2x + 4 + (x - 2)(2x + 2)$

$= x^2 + 2x + 4 + 2x^2 - 2x - 4$

$= 3x^2$

of

$\dfrac{d}{dx}\left((x-2)(x^2+2x+4)\right)$

$= \dfrac{d}{dx}(x^3 - 8)$

$= 3x^2$

3 $\dfrac{d}{dx}\left(x\cdot(2x^3+3x+1)\cdot(x-3)\right)$

$= (2x^3 + 3x + 1)(x - 3) + \underbrace{x(6x^2 + 3)(x - 3)}_{x^2 - 3x} + x(2x^3 + 3x + 1)$

$= 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + x - 3 + 6x^4 - 18x^3 + 3x^2 - 9x + 2x^4 + 3x^2 + x$

$= 10x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 16x - 3$

4 $\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\cdot(2-3x)\cdot(4+2x)\right)$

$= (2 - 3x)(4 + 2x) - 3(1 + x)(4 + 2x) + 2(1 + x)(2 - 3x)$

$= 8 + 4x - 12x - 6x^2 - 12 - 6x - 12x - 6x^2 + 4 - 6x + 4x - 6x^2$

$= -18x^2 - 28x$

Opdracht 10 bladzijde 194

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}\left((-4x+1)^2\right)$

$= 2(-4x + 1) \cdot (-4)$

$= -8(-4x + 1)$

$= 8(4x - 1)$

2 $\dfrac{d}{dx}\left((2x^3+3x-1)^4\right)$

$= 4(2x^3 + 3x - 1)^3(6x^2 + 3)$

$= 12(2x^2 + 1)(2x^3 + 3x - 1)^3$

3 $\dfrac{d}{dx}\left((2x+3)\cdot(2-3x)^2\right)$

$= \underline{2}\underline{(2 - 3x)}^2 + (2x + 3) \cdot \underline{2}\underline{(2 - 3x)}(-3)$

$= 2(2 - 3x)(2 - 3x - 6x - 9)$

$= 2(2 - 3x)(-9x - 7)$

$= -2(2 - 3x)\,(9x + 7)$

$= 2(3x - 2)(9x + 7)$

4 $\dfrac{d}{dx}\left[\left((-2x-1)\cdot(x^3+4)\right)^3\right]$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-2(x^3 + 4) + (-2x - 1) \cdot 3x^2)$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-2x^3 - 8 - 6x^3 - 3x^2)$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-8x^3 - 3x^2 - 8)$

$= -3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(8x^3 + 3x^2 + 8)$

5 $\dfrac{d}{dx}\left(2x+3\cdot(x^2-1)^5\right)$

$= 2 + 3 \cdot 5(x^2 - 1)^4 \cdot 2x$

$= 2 + 30x(x^2 - 1)^4$

6 $\dfrac{d}{dx}\left((x^2-2)^5(x^2+2)^5\right)$

$= \dfrac{d}{dx}(x^4 - 4)^5$

$= 5(x^4 - 4)^4 \cdot 4x^3$

$= 20x^3(x^4 - 4)^4$

Opdracht 11 bladzijde 197

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x-2}{2-x}\right)$

$= \dfrac{3(2 - x) + (3x - 2)}{(2 - x)^2}$

$= \dfrac{6 - 3x + 3x - 2}{(2 - x)^2}$

$= \dfrac{4}{(2 - x)^2}$

2 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{x^7}\right)$

$= 4\dfrac{d}{dx}(x^{-7})$

$= -28x^{-8}$

$= -\dfrac{28}{x^8}$

3 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$

$$= \frac{3x^2(x^3+1)-(x^3-1)3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

4 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$

$$= \frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$$

5 $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-2}{5}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{8}{5}x$$

6 $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-2}{5x+1}\right)$

$$= \frac{8x(5x+1)-(4x^2-2)5}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{40x^2+8x-20x^2+10}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{20x^2+8x+10}{(5x+1)^2}$$

Opdracht 12 bladzijde 198

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{(2x-1)^2}{x^3}\right)^2\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{(2x-1)^4}{x^6}\right)$$

$$= \frac{4(2x-1)^3 \cdot 2 \cdot x^6 - (2x-1)^4 \cdot 6x^5}{x^{12}}$$

$$= \frac{2(2x-1)^3 x^5 \cdot (4x - 3(2x-1))}{x^{12}}$$

$$= \frac{2(2x-1)^3(-2x+3)}{x^7}$$

2 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x-2}{(-2x+5)^3}\right)$

$$= \frac{3(-2x+5)^3 - (3x-2) \cdot 3(-2x+5)^2(-2)}{(-2x+5)^6}$$

$$= \frac{3(-2x+5)^2(-2x+5+2(3x-2))}{(-2x+5)^6}$$

$$= \frac{3(4x+1)}{(-2x+5)^4}$$

3 $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{3-7x^2}{2}\right)^5\right)$

$$= 5\left(\frac{3-7x^2}{2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{2} \cdot 2x\right)$$

$$= \frac{5}{16}(3-7x^2)^4 \cdot (-7x)$$

$$= -\frac{35}{16}x(3-7x^2)^4$$

4 $\dfrac{d}{dx}\left((x^2-1)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$$= 2x\left(x + \frac{1}{x}\right) + (x^2-1)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x^2 + 2 + x^2 - 1 - 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{3x^4+1}{x^2}$$

Opdracht 13 bladzijde 198

Gegeven de functie f: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1 Stel een vergelijking op van de raaklijn t aan de grafiek van f in het punt $P(a, f(a))$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$t \leftrightarrow y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$t \leftrightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

2 Bepaal de snijpunten S en T van t met de x-as en met de y-as.

Snijpunt met de x-as:

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a$ $\qquad S(2a, 0)$

Snijpunt met de y-as:

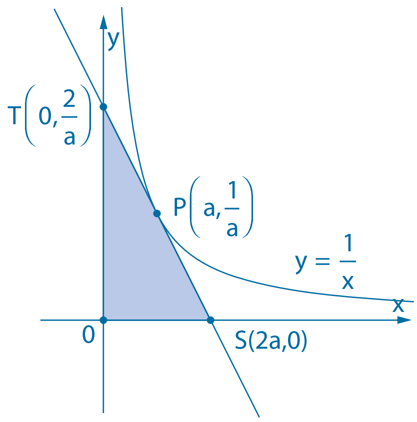
$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{a}$ $\qquad T\left(0, \frac{2}{a}\right)$

3 Toon aan dat P het midden is van $[TS]$.

$$\text{Midden } [TS]: \quad M\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right)$$

$$= M\left(a, \frac{1}{a}\right)$$

$$= P(a, f(a))$$



4 Toon aan dat de oppervlakte van de driehoek OST onafhankelijk is van a.

$$\text{Oppervlakte } \Delta\, OST = \frac{|OS| \cdot |OT|}{2}$$

$$= \frac{2|a| \cdot \frac{2}{|a|}}{2}$$

$$= 2$$

$\Rightarrow$ de oppervlakte is onafhankelijk van a.

Opdracht 14 bladzijde 200

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{4x-1}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$$

2 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{7x^2-13x+2}\right)$

$$= \frac{14x-13}{2\sqrt{7x^2-13x+2}}$$

3 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{(2x-3)^3}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left((2x-3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 3\sqrt{2x-3}$$

4 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

5 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left((x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$$

6 $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{\dfrac{4x}{2x-1}}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{4x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4x}{2x-1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{4(2x-1)-4x\cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2x-1}{4x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{-4}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{2x-1}{4x}\right)^3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{2^6x^3(2x-1)^5}} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{4x^3(2x-1)^5}}$$

Opdracht 15 bladzijde 200

De rechte $t \leftrightarrow y = mx + 1$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Bepaal m.

- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
- $t \leftrightarrow y - \sqrt[3]{x_0} = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x - x_0)$ met raakpunt $P\left(x_0, \sqrt[3]{x_0}\right)$

$$y = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}x - \frac{1}{3}x_0^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}x + \frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}}$$

- Nu is $y = mx + 1$, dus moet

$$m = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} \quad \text{en} \quad \frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow x_0^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{3}\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

Opdracht 16 bladzijde 203

Is de functie f afleidbaar, links afleidbaar en/of rechts afleidbaar in a?

1 $f\colon x \mapsto \sqrt{(x^2-1)^2}$ $\qquad a = -1$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2} - 0}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2-1}{x+1}$$

$\sqrt{(x^2-1)^2} = x^2 - 1$ voor $x < -1$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x-1) = -2$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x^2-1)}{x+1}$$

$\sqrt{(x^2-1)^2} = -(x^2-1)$ voor $-1 < x < 1$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} -(x-1) = 2$$

f is niet afleidbaar in -1, wel links afleidbaar (linkerafgeleide is -2) en rechts afleidbaar (rechterafgeleide is 2).

2 $f: x \mapsto |x^3|$ $\qquad a = 0$

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{als } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$$

f is afleidbaar in 0, want de linkerafgeleide in 0 is gelijk aan de rechterafgeleide in 0.

$f'(0) = 0$

3 $f: x \mapsto \sqrt[3]{x-5}$ $\qquad a = 5$

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

f is niet afleidbaar in 5, ook niet links afleidbaar en rechts afleidbaar.

Er is een verticale raaklijn aan de grafiek van f in (5, 0).

4 $f: x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{als } x \leqslant 2 \\ 3 & \text{als } x > 2 \end{cases}$ $\qquad a = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{2-2}{x-2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3-2}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

f is niet afleidbaar in 2, enkel links afleidbaar in 2.

5 $f: x \mapsto \begin{cases} 1-2x & \text{als } x < -2 \\ -2x & \text{als } x \geqslant -2 \end{cases}$ $\qquad a = -2$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1-2x-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-2x-3}{x+2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-2x-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-2(x+2)}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (-2) = -2$$

f is niet afleidbaar in – 2, enkel rechts afleidbaar in –2.

6 $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4 & \text{als } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 12x - 22 & \text{als } x > 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2 - 4 - 5}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} (x + 3) = 6$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-x^2 + 12x - 22 - 5}{x^2 - 9} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-x^2 + 12x - 27}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-(x-9)(x-3)}{x - 3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \big(-(x - 9)\big) = 6$$

f is afleidbaar in 3, de linkerafgeleide en de rechterafgeleide zijn gelijk aan 6.

$f'(3) = 6$

Opdracht 17 bladzijde 203

Gegeven de functie $f: x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x < 0 \\ x^2 & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Toon aan dat $f'(0)$ bestaat maar $f''(0)$ niet.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} x^2 = 0$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$

  $\Rightarrow f'(0) = 0$

- $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 2x & \text{als } x > 0 \end{cases}$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{3x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (3x) = 0$

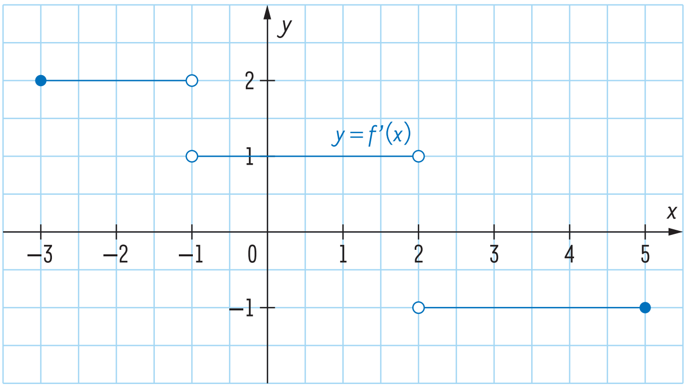
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2 = 2$

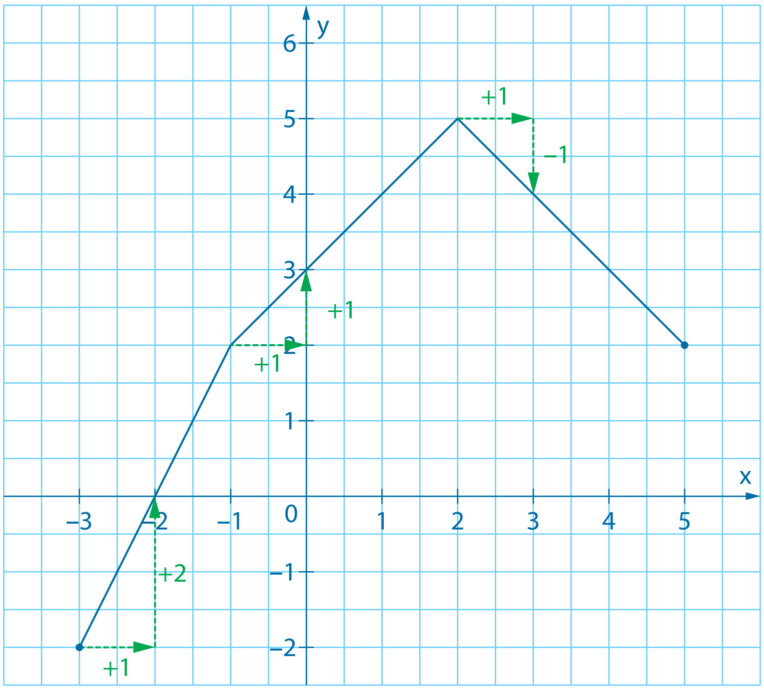
  $\Rightarrow f''(0)$ bestaat niet want de linkerafgeleide is verschillend van de rechterafgeleide.

Opdracht 18 bladzijde 203

De hellinggrafiek van de functie f is getekend. f is continu in haar domein $[-3, 5]$ en $f(-3) = -2$.

Teken de grafiek van f.





Opdracht 19 bladzijde 204

Geef telkens het voorschrift van een functie f waarvoor geldt:

1 f is afleidbaar in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Voorbeeld: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

2 f is continu in $\mathbb{R}$ en de linker- en rechterafgeleide van f in 2 zijn verschillend

Voorbeeld: $f(x) = |x-2|$

3 f is continu in $\mathbb{R}$, niet afleidbaar in -1 en er is een verticale raaklijn aan de grafiek van f voor $x = -1$

Voorbeeld: $f(x) = \sqrt{|x+1|}$

4 f is afleidbaar in $\mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, links afleidbaar in -4 en rechts afleidbaar in 2

Voorbeeld: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant -4 \\ 1 & \text{als } -4 < x < 2 \\ 2 & \text{als } x \geqslant 2 \end{cases}$

Opdracht 20 bladzijde 204

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \begin{cases} ax+2 & \text{als } x<-2 \\ x^2 & \text{als } x \geqslant -2 \end{cases}$.

Voor welke waarde(n) van a is f afleidbaar in -2? Verklaar.

- f moet continu zijn in –2 om er afleidbaar te zijn.

  $\Rightarrow\ a \cdot (-2) + 2 = (-2)^2$

  $\Rightarrow\ a = -1$

- Voor a = –1 is

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-x+2-4}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

en $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x^2-4}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = -4$$

$\Rightarrow$ Linker- en rechterafgeleide zijn verschillend.

Voor geen enkele waarde van a is f afleidbaar in –2.

Opdracht 21 bladzijde 204

Voor welke waarde(n) van a en b is de functie f: $x \mapsto \begin{cases} x^2 + ax & \text{als } x < 1 \\ -x^3 + ax^2 + b & \text{als } x \geqslant 1 \end{cases}$ afleidbaar voor alle waarden van x?

- f moet continu zijn in 1 dus
  $1^2 + a \cdot 1 = -1^3 + a + b$
  $\Rightarrow\ b = 2$
- Voor b = 2 is

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)} + a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} 2 + a$$

$$\text{en } \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-x^3 + ax^2 + 2 - 1 - a}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\cancel{(x-1)}(-x^2 + (a-1)x + a - 1)}{\cancel{x-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} -1 + a - 1 + a - 1 = 2a - 3$$

	-1	a	0	$1-a$
1		-1	$a-1$	$a-1$
	-1	$a-1$	$a-1$	0

Linker- en rechterafgeleide zijn gelijk als $2 + a = 2a - 3 \ \Leftrightarrow\ a = 5$.
Voor $a = 5$ en $b = 2$ is f afleidbaar voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opdracht 22 bladzijde 204

Is de functie f afleidbaar, links afleidbaar en/of rechts afleidbaar in 0?

1 f: $x \mapsto 4x - x \cdot |x|$

$$f(x) = 4x - x \cdot |x| = \begin{cases} 4x + x^2 & \text{als } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{4x + x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x(4+x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (4 + x) = 4$
- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{4x - x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x(4-x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (4 - x) = 4$

De functie is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

2 $f: x \mapsto (1-|x|)^2 + (1+|x|)^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-|x|)^2 + (1+|x|)^2 \\ &= 1 - 2|x| + |x|^2 + 1 + 2|x| + |x|^2 \\ &= 2 + 2|x|^2 \\ &= 2 + 2x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De functie is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

3 $f: x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{als } x \geqslant 0 \\ \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{-x}{x^2+1}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-1}{x^2+1} = -1$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2+1} = 1$$

f is links afleidbaar in 0, de linkerafgeleide is –1.

f is rechts afleidbaar in 0, de rechterafgeleide is 1.

f is niet afleidbaar in 0.

4 $f: x \mapsto ||x-2| + |x+2||$

Voor $x \to 0$ is $|x-2| = -x+2$ en $|x+2| = x+2$,

zodat $f(x) = |-x+2+x+2| = 4$.

f is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

5 $f: x \mapsto x + \sqrt{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{-x} & \text{als } x < 0 \\ x + \sqrt{x} & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x+\sqrt{-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+\sqrt{x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

f is niet afleidbaar in 0, ook niet links afleidbaar in 0 en niet rechts afleidbaar in 0.

Opdracht 23 bladzijde 205

Als $f(1) = 4$, $g(1) = -2$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ en $g'(1) = -1$, bepaal dan $h'(1)$ als

1 $h(x) = (f \cdot g)(x)$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \cdot (-1)$$

$$= -5$$

2 $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{\left(g(1)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (-2) - 4 \cdot (-1)}{(-2)^2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

3 $h(x) = \left(\frac{g}{f-g}\right)(x)$

$$h'(x) = \frac{g'(x)\left(f(x) - g(x)\right) - g(x)\left(f'(x) - g'(x)\right)}{\left(f(x) - g(x)\right)^2}$$

$$h'(1) = \frac{g'(1)\left(f(1) - g(1)\right) - g(1)\left(f'(1) - g'(1)\right)}{\left(f(1) - g(1)\right)^2}$$

$$= \frac{-1(4 + 2) + 2\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{(4+2)^2}$$

$$= \frac{-6 + 3}{36}$$

$$= \frac{-3}{36}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

4 $h(x) = \left[g(x)\right]^3$

$$h'(x) = 3\left(g(x)\right)^2 \cdot g'(x)$$

$$h'(1) = 3\left(g(1)\right)^2 \cdot g'(1)$$

$$= 3 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)$$

$$= -12$$

5 $h(x)=\sqrt{f(x)}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} \cdot f'(1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

6 $h(x)=\dfrac{2x}{f(x)}$

$$h'(x) = \frac{2 \cdot f(x) - 2x \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$h'(1) = \frac{2 \cdot f(1) - 2\, f'(1)}{(f(1))^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{4^2}$$

$$= \frac{7}{16}$$

Opdracht 24 bladzijde 205

Druk $h'(x)$ uit in functie van $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ en $g'(x)$ als

1 $h(x)=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}$

$$h'(x) = \frac{\big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) - f(x) \cdot g(x)\big(f'(x) + g'(x)\big)}{\big(f(x) + g(x)\big)^2}$$

$$= \frac{\cancel{f'(x) \cdot g(x) \cdot f(x)} + f'(x) \cdot \big(g(x)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2 \cdot g'(x) \cancel{+ f(x) \cdot g'(x) \cdot g(x)} \cancel{- f(x) \cdot g(x) \cdot f'(x)} \cancel{- f(x) \cdot g(x) \cdot g'(x)}}{\big(f(x) + g(x)\big)^2}$$

$$= \frac{f'(x) \cdot \big(g(x)\big)^2 + g'(x) \cdot \big(f(x)\big)^2}{\big(f(x) + g(x)\big)^2}$$

2 $h(x)=\dfrac{g(x)}{[f(x)]^2}$

$$h'(x) = \frac{g'(x) \cdot \big(f(x)\big)^2 - g(x) \cdot 2f(x) \cdot f'(x)}{\big(f(x)\big)^4}$$

$$= \frac{g'(x) \cdot f(x) - 2g(x) \cdot f'(x)}{\big(f(x)\big)^3}$$

Opdracht 25 bladzijde 205

Bereken

1 $\frac{d}{dx}\left((1-3x)\cdot(2x-5)\right) = -3(2x-5) + (1-3x)\cdot 2$

$= -6x + 15 + 2 - 6x$

$= -12x + 17$

2 $\frac{d}{dx}\left((x^2-4)\cdot(x^2+x)\right) = 2x(x^2+x) + (x^2-4)(2x+1)$

$= 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + x^2 - 8x - 4$

$= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4$

3 $\frac{d}{dx}\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\right) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+x+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 + x + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3} + x - \cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3}$

$= 1 + 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

4 $\frac{d}{dx}\left(\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(1-x)\right) = \left(1+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(1-x) + \left(x+x^{\frac{1}{3}}\right)(-1)$

$= 1 - x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} - x - x^{\frac{1}{3}}$

$= 1 - 2x - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5 $\frac{d}{dx}\left((x^{-2}-x^{-1})\cdot(x^3+9)\right) = (-2x^{-3}+x^{-2})(x^3+9) + (x^{-2}-x^{-1})3x^2$

$= -2 - 18x^{-3} + x + 9x^{-2} + 3 - 3x$

$= 1 - 2x + \frac{9}{x^2} - \frac{18}{x^3}$

Opdracht 26 bladzijde 205

Bereken

1 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2-5x}\right) = -\frac{-5}{(2-5x)^2} = \frac{5}{(2-5x)^2}$

2 $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{1-\sqrt{x}}\right) = -\frac{4}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

3 $\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{1-6x}\right) = \frac{-2(1-6x)+2x\cdot(-6)}{(1-6x)^2} = \frac{-2+12x-12x}{(1-6x)^2} = \frac{-2}{(1-6x)^2}$

4 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2}{x^4-2}\right) = \frac{2x(x^4-2)-(x^2+2)\cdot 4x^3}{(x^4-2)^2} = \frac{2x^5-4x-4x^5-8x^3}{(x^4-2)^2}$

$= \frac{-2x^5-8x^3-4x}{(x^4-2)^2} = \frac{-2x(x^4+4x^2+2)}{(x^4-2)^2}$

5 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+1}\right) = \frac{(2x-3)(-x^2+x+1)-(x^2-3x+2)(-2x+1)}{(-x^2+x+1)^2}$

$= \frac{-2x^3+2x^2+2x+3x^2-3x-3+2x^3-x^2-6x^2+3x+4x-2}{(-x^2+x+1)^2}$

$= \frac{-2x^2+6x-5}{(-x^2+x+1)^2}$

Opdracht 27 bladzijde 206

Bereken

1 $\frac{d}{dx}\left((-4x^3+x)^6\right) = 6(-4x^3+x)^5(-12x^2+1)$

2 $\frac{d}{dx}\left((x^3+1)^2\cdot(x^2-4)^3\right) = 2(x^3+1)\cdot 3x^2(x^2-4)^3+(x^3+1)^2\cdot 3(x^2-4)^2\cdot 2x$

$= 6x(x^3+1)(x^2-4)^2\left(x(x^2-4)+x^3+1\right)$

$= 6x(x^3+1)(x^2-4)^2(2x^3-4x+1)$

3 $\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2+x}{4}\right)^{-3}\right) = -3\left(\frac{x^2+x}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{4}(2x+1)\right)$

$= \frac{-3(2x+1)\cdot 4^4}{4(x^2+x)^4}$

$= \frac{-192(2x+1)}{(x^2+x)^4}$

4 $\frac{d}{dx}\left[\left((-2x+3)\cdot(x^3+4)\right)^3\right]$

$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2\cdot\left(-2(x^3+4)+(-2x+3)\cdot 3x^2\right)$

$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2(-2x^3-8-6x^3+9x^2)$

$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2(-8x^3+9x^2-8)$

5 $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^3\right] = 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{3(1-x)^2(-1)(2x-1)^2-(1-x)^3\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}$

$= 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{-(1-x)^2(2x-1)\left(3(2x-1)+4(1-x)\right)}{(2x-1)^4}$

$= 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{-(1-x)^2(2x+1)}{(2x-1)^3}$

$= \frac{-3(1-x)^8(2x+1)}{(2x-1)^7}$

Opdracht 28 bladzijde 206

Bereken

1 $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-6x-x^2}\right) = \frac{-6-2x}{2\sqrt{1-6x-x^2}} = \frac{-3-x}{\sqrt{1-6x-x^2}}$$

2 $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{3x^2-4x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left((3x^2-4x^3)^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(3x^2-4x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (6x-12x^2)$$
$$= \frac{2x-4x^2}{\sqrt[3]{(3x^2-4x^3)^2}}$$

3 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{-4}{\sqrt{7x-1}}\right) = -4\frac{d}{dx}\left((7x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(7x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 7$$
$$= \frac{14}{\sqrt{(7x-1)^3}}$$

4 $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2-5x^2}{2+5x^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2-5x^2}{2+5x^2}}} \cdot \frac{-10x(2+5x^2)-(2-5x^2)\cdot 10x}{(2+5x^2)^2}$$
$$= \frac{-10x(2+5x^2+2-5x^2)}{2\sqrt{(2-5x^2)(2+5x^2)^3}}$$
$$= \frac{-20x}{\sqrt{(2-5x^2)(2+5x^2)^3}}$$

5 $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{\frac{2-5x}{2x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-5\cdot x-(2-5x)}{x^2}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{5x^2}\sqrt[5]{\left(\frac{2x}{2-5x}\right)^4} = -\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{16}{x^6(2-5x)^4}}$$

Opdracht 29 bladzijde 206

Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in het punt *P*.

1 $f: x \mapsto \dfrac{6}{x-1}$ in $P(3, f(3))$

$f(x) = \dfrac{6}{x-1}$ $\qquad f(3) = 3$

$f'(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

$t \leftrightarrow y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 3)$

$t \leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$

2 $f: x \mapsto \dfrac{4x+5}{x^2}$ in $P(-1, f(-1))$

$f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2}$ $\qquad f(-1) = 1$

$f'(x) = \dfrac{4x^2 - (4x+5)2x}{x^4} = \dfrac{2x(2x - 4x - 5)}{x^4} = \dfrac{2(-2x-5)}{x^3}$

$f'(-1) = 6$

$t \leftrightarrow y - 1 = 6(x + 1)$

$t \leftrightarrow y = 6x + 7$

3 $f: x \mapsto \sqrt{-x^2 + 4x}$ in $P(2, f(2))$

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ $\qquad f(2) = 2$

$f'(x) = \dfrac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}}$

$= \dfrac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$

$f'(2) = 0$

$t \leftrightarrow y - 2 = 0$

$t \leftrightarrow y = 2$

Opdracht 30 bladzijde 206

Beschouw de kromme met vergelijking $x^2y + 3y - 4 = 0$.

De waarde van de afgeleide y' in het punt van de kromme met $x = 3$ is

A $\frac{-1}{6}$ **B** 0 **C** $\frac{1}{6}$ **D** 1

(bron © toelatingsproef arts-tandarts)

$$\begin{aligned} & x^2y + 3y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y(x^2 + 3) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & y = 4(x^2 + 3)^{-1} \\ \Rightarrow\ & y' = -4(x^2 + 3)^{-2} \cdot 2x \\ & \quad = \frac{-8x}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Als $x = 3$, dan is $y' = \frac{-24}{144} = -\frac{1}{6}$.

Antwoord A is juist.

Opdracht 31 bladzijde 206

De raaklijn t aan de grafiek van de functie $f: x \mapsto \frac{\sqrt{3} \cdot x}{4 - x}$ snijdt de positieve x-as onder een hoek van 30°.

Bepaal de coördinaat van het raakpunt T. Geef alle oplossingen.

- Stel T(a,f(a))
- rico t = tan 30°

  $f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $f'(x) = \frac{\sqrt{3}(4 - x) - \sqrt{3}x(-1)}{(4 - x)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{(4 - x)^2}$
- $\frac{4\sqrt{3}}{(4 - a)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  $$\begin{aligned} & \overset{a \neq 4}{\Leftrightarrow}\ 12 = (4 - a)^2 \\ & \Leftrightarrow\ 4 - a = \pm 2\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow\ a = 4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_1\left(4 + 2\sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow T_2\left(4 - 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\right)$

$$f\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)}{4 - 4 - 2\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

$$f\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\left(4 - 2\sqrt{3}\right)}{4 - 4 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

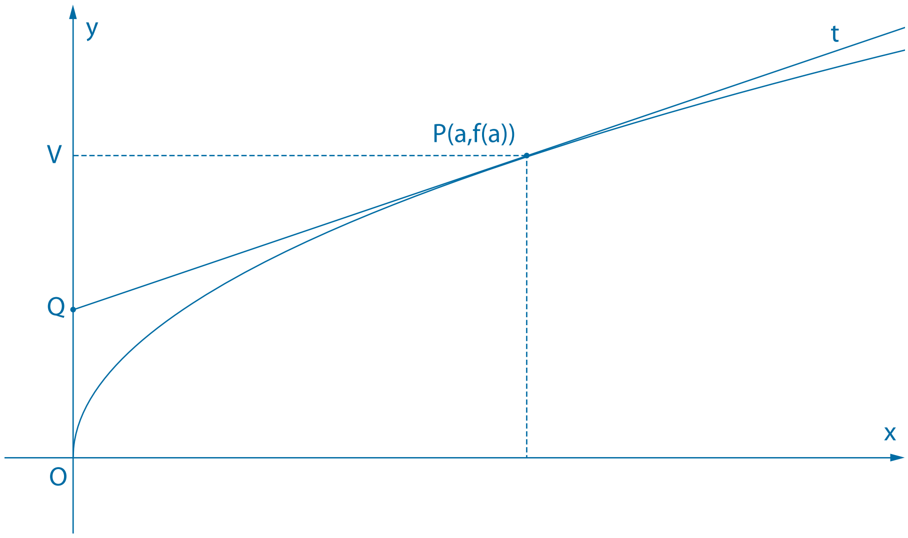
Opdracht 32 bladzijde 207

Het punt $P(a, f(a))$ ligt op de grafiek van de functie $f: x \mapsto k \cdot \sqrt{x}$ met $k \neq 0$.

V is het voetpunt van de loodlijn uit P op de y-as.

De raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de y-as in het punt Q.

Bepaal de verhouding $\dfrac{|OQ|}{|OV|}$.



- $V(0, f(a)) = V\left(0, k\sqrt{a}\right)$
- $f'(x) = \dfrac{k}{2\sqrt{x}}$

$$t \leftrightarrow y - k\sqrt{a} = \frac{k}{2\sqrt{a}}(x - a)$$

$$t \leftrightarrow y = \frac{k}{2\sqrt{a}}x - \frac{1}{2}k\sqrt{a} + k\sqrt{a}$$

$$t \leftrightarrow y = \frac{k}{2\sqrt{a}}x + \frac{1}{2}k\sqrt{a}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}k\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow Q\left(0, \frac{1}{2}k\sqrt{a}\right)$$

- $\dfrac{|OQ|}{|OV|} = \dfrac{\left|\frac{1}{2}k\sqrt{a}\right|}{\left|k\sqrt{a}\right|} = \dfrac{1}{2}$

Opdracht 33 bladzijde 207

Gegeven is de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 2}$.

Bepaal a en b als de raaklijn in het punt $P(0, -1)$ van de grafiek van f horizontaal is.

- De raaklijn in P(0,–1) is horizontaal $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$.
- $f'(x) = \dfrac{(2x + a)(x - 2) - (x^2 + ax + b)}{(x - 2)^2}$

  $f'(0) = \dfrac{-2a - b}{4} = 0 \iff 2a + b = 0 \qquad (1)$
- $f(0) = -1 \iff \dfrac{b}{-2} = -1 \iff b = 2 \qquad (2)$

  (2) in (1): $a = -\dfrac{b}{2} = -1$

$\Rightarrow$ $a = -1$ en $b = 2$

Opdracht 34 bladzijde 207

Toon aan dat de grafieken van de functies $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{x - 1}$ en $g\colon x \mapsto ax^2$ met $a \neq 0$ elkaar raken in de oorsprong.

- $f(0) = g(0) = 0$ $\Rightarrow$ de grafieken snijden elkaar in de oorsprong.
- $f'(x) = \dfrac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

  $g'(x) = 2ax \Rightarrow g'(0) = 0$

$\Rightarrow$ de grafieken raken elkaar in de oorsprong

Opdracht 35 bladzijde 207

De grafieken van de functies $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $g: x \mapsto \dfrac{4}{x-2}$ raken elkaar in de punten $P(0, -2)$ en $Q(4, 2)$.

Bepaal a, b, c en d.

- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

  $g'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

- Er geldt:

  1) $f(0) = g(0) \Rightarrow d = -2 \qquad (1)$

  2) $f'(0) = g'(0) \Rightarrow c = -1 \qquad (2)$

  3) $f(4) = g(4) \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 2$

     $\overset{(1)\text{ en }(2)}{\Rightarrow} 64a + 16b = 8 \qquad (3)$

  4) $f'(4) = g'(4) \Rightarrow 48a + 8b + c = -1$

     $\overset{(2)}{\Rightarrow} 48a + 8b = 0 \qquad (4)$

  Uit (3) en (4) volgt: $a = -\dfrac{1}{4}$ en $b = \dfrac{3}{2}$

  Besluit: $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = -1$ en $d = -2$

Opdracht 36 bladzijde 207

Van de functies f en g zijn de functiewaarden en de afgeleiden in -2 en in 2 gegeven.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-2	1	2	7	2
2	3	4	-1	-3

1 Bereken $F'(2)$ als $F(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$.

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x+1) - f(x)}{(x+1)^2}$$

$$F'(2) = \frac{-1 \cdot 3 - 3}{9} = -\frac{2}{3}$$

2 Bereken $G'(-2)$ als $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$.

$$G'(x) = -\frac{1}{2}(g(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{2(g(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$G'(-2) = -\frac{2}{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3 Bereken $H'(2)$ als $H(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x \cdot g(x)}\right)^3$.

$$H'(x) = 3\left(\frac{f(x)}{x \cdot g(x)}\right)^2 \cdot \frac{f'(x) \cdot x \cdot g(x) - f(x)\big(g(x) + x \cdot g'(x)\big)}{\big(x \cdot g(x)\big)^2}$$

$$H'(2) = 3\left(\frac{3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{-1 \cdot 2 \cdot 4 - 3(4 + 2 \cdot (-3))}{(2 \cdot 4)^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{-8+6}{64}$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{-1}{32}$$

$$= -\frac{27}{2048}$$

Opdracht 37 bladzijde 207

Van de afleidbare functies f en g weet je dat $g(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot f(x)$, $f(0) = 5$ en $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 5}{x} = 4$.

Bepaal $g'(0)$.

$$g'(x) = (2x + 2)f(x) + (x^2 + 2x + 3)f'(x)$$

$$g'(0) = 2 \cdot f(0) + 3 \cdot f'(0)$$

$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \qquad\qquad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$$

$$= 22$$

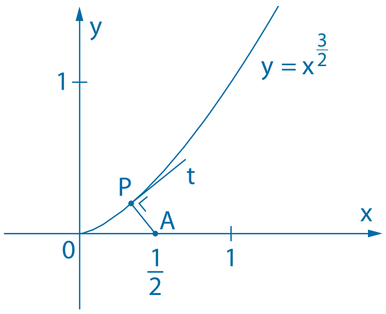
Opdracht 38 bladzijde 207

Beschouw de kromme K bepaald door de vergelijking $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Welk punt van deze kromme ligt het dichtst bij het punt met coördinaat $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$?

A $(0,0)$ **B** $\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **C** $\left(\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **D** $\left(\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **E** $(1,1)$

(bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur)



Noem het punt op de kromme P(a, f(a)).

Voor dit punt moet gelden dat $t \perp PA$ en dus rico t · rico PA = –1.

- $y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

  $\Rightarrow \text{rico } t = \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

- $\text{rico } PA = \dfrac{-a^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - a}$ met $P\left(a, a^{\frac{3}{2}}\right)$ en $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

- rico t · rico PA = –1

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-a^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - a} = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \cdot \frac{-a^2}{\frac{1}{2} - a} = -1$$

$$\underset{a \neq \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 3a^2 = 1 - 2a$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ of } \cancel{a = -1} \qquad a > 0$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$\Rightarrow$ antwoord C is juist

Opdracht 39 bladzijde 207

Stel $V(x)$ is het voorschrift van een veeltermfunctie met graad groter of gelijk aan 2.

1 Toon aan: als $V(x)$ deelbaar is door $(x-a)^2$, dan is $V(a) = V'(a) = 0$.

Als V(x) deelbaar is door $(x-a)^2$, dan is

$V(x) = (x-a)^2 Q(x)$ met Q(x) een veelterm met graad $\geqslant 0$.

$V'(x) = 2(x-a)\,Q(x) + (x-a)^2\,Q'(x)$.

$\Rightarrow\ V(a) = V'(a) = 0$

2 De veelterm $V(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + ax + b$ is deelbaar door $(x+2)^2$.

Bepaal a en b.

Er geldt dat $V(-2) = V'(-2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - 16 + 16 - 2a + b = 0 \\ -32 + 24 - 16 + a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 2a - 16 = 32 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ a = 24$ en $b = 32$

Opdracht 40 bladzijde 207

Welk punt van de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{16}{x^4}$, getekend in een orthonormaal assenstelsel, ligt het dichtst bij de oorsprong in het eerste kwadrant?

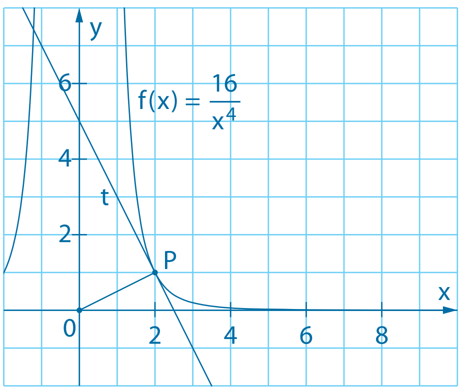
- We noemen het gevraagde punt P: $P\left(x_0, \dfrac{16}{x_0^4}\right)$ en de raaklijn in P aan de grafiek van f noemen we t.
- $f'(x) = -\dfrac{64}{x^5} \Rightarrow \text{rico } t = f'(x_0) = -\dfrac{64}{x_0^5}$
- Nu geldt: $\text{rico OP} = \dfrac{\dfrac{16}{x_0^4}}{x_0} = \dfrac{16}{x_0^5}$
- $OP \perp t \Leftrightarrow \text{rico OP} \cdot \text{rico } t = -1$

  $\Rightarrow \dfrac{16}{x_0^5} \cdot \left(\dfrac{-64}{x_0^5}\right) = -1$

  $\Leftrightarrow x_0^{10} = 16 \cdot 64 = 1024 = 2^{10}$

  $\Leftrightarrow x_0 = 2$ of $x_0 = -2$
- P ligt in het eerste kwadraat, dus $x_0 = 2$

  $\Rightarrow P(2,1)$



Opdracht 41 bladzijde 207

Een kogel met een straal van 5 cm valt in een paraboolvormige schotel met vergelijking $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ met x en $f(x)$ in cm.

Is er onder de kogel nog plaats voor een vlieg?

- Daar de y-as een symmetrias is van de paraboolvormige schotel, ligt het middelpunt van de bol (kogel met straal 5 cm) op de y-as.

  Een dwarsdoorsnede met een vlak door de y-as zal de bol snijden volgens een cirkel c en de schotel volgens de parabool p $\leftrightarrow$ $y = \frac{1}{8}x^2$. Het middelpunt van de cirkel ligt dan op de y-as.

- Stel M(0,h) het middelpunt van de cirkel en T het gemeenschappelijk raakpunt in het kwadrant van de cirkel en de parabool.

- $T \in p : T\left(x_0, \frac{1}{8}x_0^2\right)$

  $T \in c \Leftrightarrow |TM| = 5$

  $\Leftrightarrow (x_0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{8}x_0^2 - h\right)^2 = 25 \qquad (1)$

- Noem t de raaklijn aan p in T:

  $\text{rico } t = f'(x_0) = \frac{1}{4}x_0$

- $\text{rico } MT = \dfrac{\frac{1}{8}x_0^2 - h}{x_0}$

  $t \perp MT \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{8}x_0^2 - h}{x_0} = \dfrac{-4}{x_0}$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{8}x_0^2 - h = -4 \qquad (2)$

- Uit (1) en (2) berekenen we h.

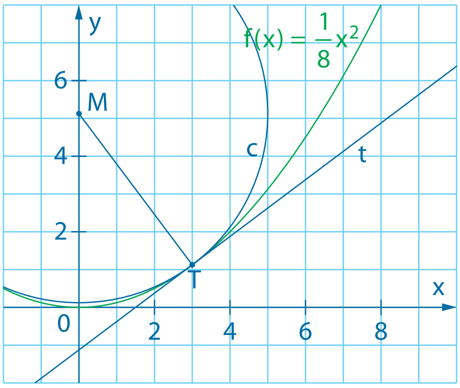
  Uit (2): $x_0^2 = 8h - 32$

  In (1): $8h - 32 + (h - 4 - h)^2 = 25$

  $\Leftrightarrow h = \frac{41}{8}$

- Onder de kogel blijft dus nog een ruimte over waarvan de maximale hoogte $\left(\frac{41}{8} - 5\right)$ cm $= \frac{1}{8}$ cm $= 0{,}125$ cm $= 1{,}25$ mm is.

⇒ Nee, de maximale hoogte tussen de kogel en de schotel is maar 1,25 mm.



Opdracht 42 bladzijde 208

Stel $V(x)$ is het voorschrift van een veeltermfunctie met graad groter dan of gelijk aan 2.

Toon aan: als $V(a) = V'(a) = 0$, dan is $V(x)$ deelbaar door $(x - a)^2$.

- Uit $V(a) = 0$ volgt dat $V(x) = (x - a)q(x)$ met $gr(q(x)) \geqslant 1$.
- $V'(x) = q(x) + (x - a) \cdot q'(x)$ met $gr(q'(x)) \geqslant 0$.
- Nu is $V'(a) = 0$, dus $q(a) = 0$.

  Hieruit volgt dat $q(x) = (x - a) \cdot q^*(x)$ met $gr(q^*(x)) \geqslant 0$.
- Er geldt dus dat $V(x) = (x - a) \cdot (x - a) \cdot q^*(x)$

  $= (x - a)^2 \,.\, q^*(x)$

  ⇒ $V(x)$ is deelbaar door $(x - a)^2$.

Opdracht 43 bladzijde 208

Bewijs de quotiëntregel voor afgeleiden met behulp van de limietdefinitie van de afgeleide, in plaats van door terug te vallen op de productregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a}$$

Stel dat f en g afleidbaar zijn in a en $g(a) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a}$$ definitie afgeleide

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a}$$ definitie quotiëntfunctie

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(a) - g(x) \cdot f(a) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a)}{g(x)g(a)}$$ eigenschap breuken

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to a} g(a) - \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to a} f(a)}{\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(a)}$$ rekenregels limieten

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$ f en g afleidbaar in a, $g(a) \neq 0$, g afleidbaar in a en dus continu in a, dus is $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Hieruit volgt de rekenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Opdracht 44 bladzijde 209

Voor welke x-waarden van het domein zijn de volgende functies niet afleidbaar?

1 $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 4}$

dom f = $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{3(x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

f is niet afleidbaar in –2 en in 2. In die punten is er een verticale raaklijn.

2 $f: x \mapsto |9 - 4x^2|$

dom f = $\mathbb{R}$

$$f(x) = |9 - 4x^2| = \begin{cases} 9 - 4x^2 & \text{als } -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 - 9 & \text{als } x < -\dfrac{3}{2} \text{ of } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

- $$\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{4x^2 - 9}{x + \frac{3}{2}} = \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{\frac{2x + 3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} 2(2x - 3) = -12$$

- $$\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{9 - 4x^2}{x + \frac{3}{2}} = \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{(3 - 2x)(3 + 2x)}{\frac{2x + 3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} 2(3 - 2x) = 12$$

- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{9-4x^2}{x-\frac{3}{2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{(3-2x)(3+2x)}{\frac{2x-3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} -2(3+2x) = -12$

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{4x^2-9}{x-\frac{3}{2}} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{\frac{2x-3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} 2(2x+3) = 12$

f is niet afleidbaar in $-\frac{3}{2}$ en $\frac{3}{2}$ (linkerafgeleide ≠ rechterafgeleide).

3 $f: x \mapsto \sqrt{2x^4 - 7x^2 + 5}$

- dom f $= \left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right] \cup [-1,1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

- $f'(x) = \dfrac{8x^3 - 14x}{2\sqrt{2x^4 - 7x^2 + 5}} = \dfrac{4x^3 - 7x}{\sqrt{2x^4 - 7x^2 + 5}}$

  $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ of $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

  $-1, 1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ zijn geen nulpunten teller.

$\Rightarrow$ f is niet afleidbaar in $-1, 1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ (verticale raaklijn)

4 $f: x \mapsto \sqrt[4]{(x^3-8)^2}$

- dom f $= \mathbb{R}$

- $f(x) = \sqrt{|x^3 - 8|} = \begin{cases} \sqrt{x^3 - 8} & \text{als } x \geqslant 2 \\ \sqrt{8 - x^3} & \text{als } x < 2 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{8-x^3} - 0}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{2-x} \cdot \sqrt{4+2x+x^2}}{-\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}}{-\sqrt{2-x}} \overset{\frac{\sqrt{12}}{0^-}}{=} -\infty$

  $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{x^3-8} - 0}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4+2x+x^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}}{\sqrt{x-2}} \overset{\frac{\sqrt{12}}{0^+}}{=} +\infty$

f is niet afleidbaar in 2 (verticale raaklijn).

Opdracht 45 bladzijde 209

Bereken

1 $\dfrac{d}{dx}\big((x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+6)\big)$

$= (x+4)(x+6) + (x+2)(x+6) + (x+2)(x+4)$

$= x^2 + 10x + 24 + x^2 + 8x + 12 + x^2 + 6x + 8$

$= 3x^2 + 24x + 44$

2 $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(3x^2-x+2)^3}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left[(3x^2-x+2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}(3x^2-x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x-1)$$

$$= \frac{3}{2}(6x-1)\sqrt{3x^2-x+2}$$

3 $\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2+3}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^6-x^2+3x^4-3}{x^4}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2-x^{-2}+3-3x^{-4})$$

$$= 2x+2x^{-3}+12x^{-5}$$

$$= 2x+\frac{2}{x^3}+\frac{12}{x^5}$$

$$\left(= \frac{2x^6+2x^2+12}{x^5}\right)$$

4 $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x^2+x-1)^3}{3x^4}\right)$

$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x^2+x-1)^3}{x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3(2x^2+x-1)^2\cdot(4x+1)x^4-(2x^2+x-1)^3\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3(2x^2+x-1)^2\big(3x(4x+1)-4(2x^2+x-1)\big)}{x^8}$$

$$= \frac{(2x^2+x-1)^2(4x^2-x+4)}{3x^5}$$

Opdracht 46 bladzijde 209

De grafieken van de functies $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + b$ en $g: x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ raken elkaar in het punt $P(3,4)$.

Bepaal a en b.

- $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax$

  $g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

- Er geldt:

  1) $f(3) = g(3) \Rightarrow \frac{27}{4} + 9a + b = 4 \Leftrightarrow 9a + b = -\frac{11}{4}$ (1)

  2) $f'(3) = g'(3) \Rightarrow \frac{27}{4} + 6a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$ (2)

  (2) in (1) geeft $b = -\frac{11}{4} + 9 \cdot \frac{5}{4} = \frac{17}{2}$

  Besluit: $a = -\frac{5}{4}$ en $b = \frac{17}{2}$

Opdracht 47 bladzijde 209

Gegeven de functie $f: x \mapsto 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en de punten $P(-6, f(-6))$ en $Q(3, f(3))$.

1 Is f afleidbaar in 2?

$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

f is niet afleidbaar in 2 want 2 is een nulpunt van de noemer van de eerste afgeleide (verticale raaklijn).

2 Is PQ een raaklijn aan de grafiek van f? Toon aan.

$\left.\begin{array}{l} P(-6,0) \\ Q(3,9) \end{array}\right\}$ rico PQ $= \frac{9}{9} = 1$

rico t $= 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} = -1$

$\overset{x \neq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{x-2} = -2$

$\Leftrightarrow x - 2 = -8$

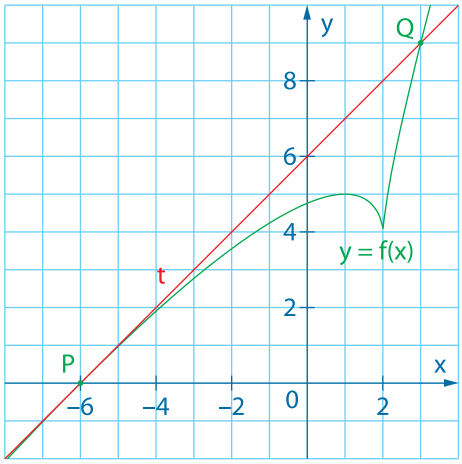
$\Leftrightarrow x = -6$

$\Rightarrow$ Het raakpunt is P(–6,0).

De raaklijn is bijgevolg $t \leftrightarrow y = x + 6$.

$Q(3,9) \in t$ want $9 = 3 + 6$

$\Rightarrow$ PQ is een raaklijn aan de grafiek van f.



Opdracht 48 bladzijde 209

Bepaal a en b zodat de functie $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & \text{als } x \leqslant 2 \\ ax + b & \text{als } x > 2 \end{cases}$ afleidbaar is in 2.

- f is afleidbaar, dus continu in 2

  $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 2a + b \Leftrightarrow b = 4 - 2a \qquad (1)$

- Voor $b = 4 - 2a$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\frac{1}{2}x^3 - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\frac{1}{2}\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x - 2}} = 6$$

$$\text{en } \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{ax + 4 - 2a - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{a\cancel{(x-2)}}{\cancel{x - 2}} = a$$

f is afleidbaar in 2 $\Leftrightarrow a = 6$

Uit (1) volgt dan: $b = -8$

Besluit: $a = 6$ en $b = -8$

Opdracht 49 bladzijde 210

Van de functies f en g zijn de functiewaarden en de afgeleiden in 2 en 3 gegeven.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	4	3	8	−4
3	2	−5	6	1

1 Bereken $F'(2)$ als $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$F'(2) = 8 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = 8$

2 Bereken $G'(3)$ als $G(x) = \dfrac{2x+1}{f(x)}$.

$$G'(x) = \frac{2f(x) - (2x+1)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$G'(3) = \frac{2 \cdot 2 - 7 \cdot 6}{2^2} = \frac{-38}{4} = -\frac{19}{2}$$

3 Bereken $H'(2)$ als $H(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$.

$$H'(x) = \frac{2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)}{2\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}}$$

$$= \frac{f(x) \cdot f'(x) + g(x) \cdot g'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}}$$

$$H'(2) = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{16+9}} = 4$$

Opdracht 50 bladzijde 210

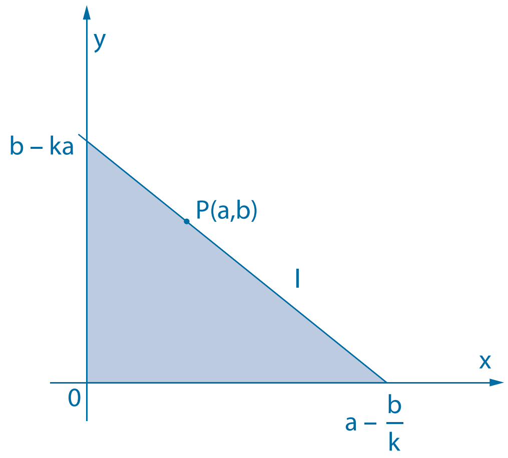
Beschouw het cartesiaans vlak met het punt met coördinaat (a, b) waarbij $a > 0$ en $b > 0$.

Beschouw verder een variabele rechte met richtingscoëfficiënt k door dit punt.

De oppervlakte van het gebied ingesloten door deze rechte, de positieve x-as en de positieve y-as, bereikt een minimale waarde

A als $k = \dfrac{b}{a}$ **B** als $k = -\dfrac{b}{a}$ **C** als $k = \dfrac{a}{b}$ **D** als $k = -\dfrac{a}{b}$ **E** nooit

(bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur)



- De rechte l heeft een vergelijking $y = kx + q$ met $k < 0$.

  P(a,b) ligt op de rechte, dus:

  $$b = ka + q \;\Rightarrow\; q = b - ka$$

  Dus geldt: $l \leftrightarrow y = kx + b - ka$

  Snijpunt l met de y-as: $(0, b - ka)$

  Snijpunt l met de x-as:

  $0 = kx + b - ka$

  $kx = ka - b$

  $x = a - \dfrac{b}{k} \Rightarrow \left(a - \dfrac{b}{k}, 0\right)$

- Oppervlakte $A(k) = \dfrac{\left(a - \dfrac{b}{k}\right)(b - ka)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(ab - ka^2 - \frac{b^2}{k} + ab\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2ab - ka^2 - \frac{b^2}{k}\right)$$

$$A'(k) = \frac{1}{2}\left(-a^2 + \frac{b^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2k^2}{2k^2}$$

k		$-\frac{b}{a}$		0		$\frac{b}{a}$	
$A'(k)$	–	0	+	|	+	0	–
$A(k)$	↘	min	↗		↗		↘

$k < 0$

De oppervlakte bereikt een minimum voor $k = -\dfrac{b}{a}$.

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 51 bladzijde 210

Bepaal $m > 0$ zodat de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \frac{8}{x}\left(\sqrt{x} - m\right)$ raakt aan de rechte $t \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x$.

- $$f'(x) = -\frac{8}{x^2}\left(\sqrt{x} - m\right) + \frac{8}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= -\frac{8}{x^2}\sqrt{x} + \frac{8m}{x^2} + \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$$
$$= \frac{8m - 4\sqrt{x}}{x^2}$$

- Voor het raakpunt $P\left(x_0, f(x_0)\right)$ geldt:
$$f'(x_0) = \frac{8m - 4\sqrt{x_0}}{x_0^2} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$
$$t \leftrightarrow y - \frac{8}{x_0}\left(\sqrt{x_0} - m\right) = \frac{1}{4}(x - x_0)$$

- t gaat door de oorsprong
$$\Rightarrow -\frac{8}{x_0}\left(\sqrt{x_0} - m\right) = -\frac{1}{4}x_0$$
$$\Leftrightarrow 32\left(\sqrt{x_0} - m\right) = x_0^2 \qquad (2)$$

- (1) en (2): $$\begin{cases} 32m - 16\sqrt{x_0} = x_0^2 & (3) \\ 32\sqrt{x_0} - 32m = x_0^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 32m - 16\sqrt{x_0} = 32\sqrt{x_0} - 32m$$
$$\Leftrightarrow 48\sqrt{x_0} = 64m$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0} = \frac{4}{3}m$$

In (3): $$32m - 16 \cdot \frac{4}{3}m = \left(\frac{4}{3}m\right)^4$$
$$32m - \frac{64}{3}m = \frac{256}{81}m^4$$
$$m - \frac{2}{3}m = \frac{8}{81}m^4$$
$$\frac{1}{3}m = \frac{8}{21}m^4$$
$$\frac{1}{3}m\left(1 - \frac{8}{27}m^3\right) = 0$$
$$\overset{m > 0}{\Rightarrow} m^3 = \frac{27}{8}$$
$$m = \frac{3}{2}$$