Hoofdstuk 2

Binomiaalgetallen

2.1 **Driehoek van Pascal**

2.2 **Binomium van Newton**

2.2.1 Binomium van Newton

U 2.2.2 Bewijs van het binomium van Newton

Opdracht 1 bladzijde 50

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\binom{20}{0} = 1$ want $\binom{n}{0} = 1$

2 $\binom{15}{1} = 15$ want $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$

3 $\binom{199}{199} = 1$ want $\binom{n}{n} = 1$

4 $\binom{3145}{3144} = \binom{3145}{1} = 3145$ want $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Opdracht 2 bladzijde 50

Bewijs.

1 $(n-p)\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p}$

$$\text{linkerlid} = (n-p)\binom{n}{p} = (n-p)\cdot\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$\text{rechterlid} = n\binom{n-1}{p} = n\cdot\frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$\Rightarrow (n-p)\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p}$$

2 $\binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q}$

$$\text{linkerlid} = \binom{n}{p}\binom{p}{q} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\cdot\frac{p!}{q!\,(p-q)!} = \frac{n!}{q!(n-p)!\,(p-q)!}$$

$$\text{rechterlid} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q} = \frac{n!}{q!(n-q)!}\cdot\frac{(n-q)!}{(p-q)!(n-p)!} = \frac{n!}{q!(n-p)!(p-q)!}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{p}\binom{p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q}$$

Opdracht 3 bladzijde 50

Bewijs: $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

We gebruiken de formule van Stifel-Pascal:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

$$= \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

$$= \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

Opdracht 4 bladzijde 51

In de driehoek van Pascal staan enkele getallen op een gekleurde achtergrond.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Als je in de driehoek van Pascal start vanaf een 1 op de linkse rand en je telt daar een willekeurig aantal getallen bij op die steeds rechts onder het vorige getal liggen, dan is die som gelijk aan het getal links onder het meest rechtse getal. In de figuur zie je een aantal voorbeelden van dit hockeystickpatroon:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

$1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$

$1 + 8 + 36 = 45$

1 Geef zelf een ander voorbeeld van dit patroon en noteer dit verband met combinatiegetallen.

Bijvoorbeeld: $1 + 5 + 15 + 35 = 56$ of $\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$

2 Veralgemeen het verband als de som van de getallen gelijk is aan $\binom{n}{p}$ en bewijs dit.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} + \ldots + \binom{n-p-1}{0}$$

Bewijs

We gebruiken de formule van Stifel-Pascal:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \\
&= \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} \\
&= \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3} \\
&= \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} + \ldots + \binom{n-p}{p-p} \\
&= \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} + \ldots + \binom{n-p}{0} \\
&= \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} + \ldots + \binom{n-p-1}{0}
\end{aligned}$$

Opdracht 5 bladzijde 52

Werk uit en vul de coëfficiënten aan.

1 $(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$

2 $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$

3 $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$

Opdracht 6 bladzijde 55

Werk de volgende machten van tweetermen uit.

1 $(3x+2y)^5$

$$= \binom{5}{0}(3x)^5 + \binom{5}{1}(3x)^4(2y) + \binom{5}{2}(3x)^3(2y)^2 + \binom{5}{3}(3x)^2(2y)^3 + \binom{5}{4}(3x)(2y)^4 + \binom{5}{5}(2y)^5$$

$$= 243x^5 + 5 \cdot 81x^4 \cdot 2y + 10 \cdot 27x^3 \cdot 4y^2 + 10 \cdot 9x^2 \cdot 8y^3 + 5 \cdot 3x \cdot 16y^4 + 32y^5$$

$$= 243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5$$

2 $\left(a^2+\dfrac{b}{a}\right)^6$

$$=\binom{6}{0}(a^2)^6+\binom{6}{1}(a^2)^5\left(\frac{b}{a}\right)+\binom{6}{2}(a^2)^4\left(\frac{b}{a}\right)^2+\binom{6}{3}(a^2)^3\left(\frac{b}{a}\right)^3+\binom{6}{4}(a^2)^2\left(\frac{b}{a}\right)^4$$

$$+\binom{6}{5}(a^2)\left(\frac{b}{a}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^6$$

$$=a^{12}+6a^{10}\cdot\frac{b}{a}+15a^8\cdot\frac{b^2}{a^2}+20a^6\cdot\frac{b^3}{a^3}+15a^4\cdot\frac{b^4}{a^4}+6a^2\cdot\frac{b^5}{a^5}+\frac{b^6}{a^6}$$

$$=a^{12}+6a^9b+15a^6b^2+20a^3b^3+15b^4+6\frac{b^5}{a^3}+\frac{b^6}{a^6}$$

3 $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^4$

$$=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^3\left(-\frac{1}{y}\right)+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(-\frac{1}{y}\right)^2+\binom{4}{3}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{y}\right)^3+\binom{4}{4}\left(-\frac{1}{y}\right)^4$$

$$=\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^3y}+\frac{6}{x^2y^2}-\frac{4}{xy^3}+\frac{1}{y^4}$$

4 $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}\right)^7$

$$=\binom{7}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^7+\binom{7}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^6\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{7}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^5\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{7}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^4\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{7}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^3\left(\frac{x}{2}\right)^4$$

$$+\binom{7}{5}\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right)^5+\binom{7}{6}\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^6+\binom{7}{7}\left(\frac{x}{2}\right)^7$$

$$=\frac{2^7}{x^7}+7\cdot\frac{2^6}{x^6}\cdot\frac{x}{2}+21\cdot\frac{2^5}{x^5}\cdot\frac{x^2}{2^2}+35\cdot\frac{2^4}{x^4}\cdot\frac{x^3}{2^3}+35\cdot\frac{2^3}{x^3}\cdot\frac{x^4}{2^4}+21\cdot\frac{2^2}{x^2}\cdot\frac{x^5}{2^5}+7\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{x^6}{2^6}+\frac{x^7}{2^7}$$

$$=\frac{128}{x^7}+\frac{224}{x^5}+\frac{168}{x^3}+\frac{70}{x}+\frac{35}{2}x+\frac{21}{8}x^3+\frac{7}{32}x^5+\frac{1}{128}x^7$$

Opdracht 7 bladzijde 55

Bepaal, zonder volledige uitwerking,

1 de coëfficiënt van u^3v^2 in $(u+5v)^5$;

De algemene term is $\binom{5}{i}u^{5-i}(5v)^i$.

Nu moet $5-i=3$ en $i=2$, dus geldt: $i=2$.

De coëfficiënt is $\binom{5}{2}5^2=10\cdot 25=250$.

2 de coëfficiënt van $\dfrac{1}{x^3}$ in $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$;

De algemene term is $\binom{6}{i}(2x)^{6-i}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^i=\binom{6}{i}2^{6-i}\cdot x^{6-i}\cdot\dfrac{1}{x^{2i}}=\binom{6}{i}2^{6-i}\cdot x^{6-3i}$.

Nu moet $6-3i=-3$, dus geldt: $i=3$.

De coëfficiënt is $\binom{6}{3}2^3=20\cdot 8=160$.

3 de constante term in $\left(y-\dfrac{1}{2y}\right)^{10}$.

De algemene term is $\binom{10}{i}(y)^{10-i}\left(-\dfrac{1}{2y}\right)^i=\binom{10}{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^i\cdot y^{10-2i}$.

Nu moet $10-2i=0$, dus geldt: $i=5$.

De constante term is $\binom{10}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=-\dfrac{252}{32}=-\dfrac{63}{8}$.

Opdracht 8 bladzijde 55

Bepaal de coëfficiënt van $a^3b^4c^3$ in de uitwerking van $(a+b+c)^{10}$.

De algemene term is $\binom{10}{i}a^{10-i}(b+c)^i$.

Nu moet $10-i=3$, zodat $i=7$.

De algemene term in $(b+c)^7$ is $\binom{7}{j}b^{7-j}c^j$. Omdat $7-j=4$ en $j=3$, zal $j=3$.

De constante term is dus $\binom{10}{7}\cdot\binom{7}{3}=120\cdot 35=4200$.

Opdracht 9 bladzijde 60

Bepaal welke van de twee getallen het grootste is.

1 $\binom{1093}{1030}$ en $\binom{1093}{1031}$

Omdat het 1030ste getal voorbij het midden ligt van de 1093ste rij in de driehoek van Pascal, zal $\binom{1093}{1030}$ groter zijn dan $\binom{1093}{1031}$.

2 $\binom{1093}{1030}$ en $\binom{1093}{63}$

Omdat $\binom{1093}{63} = \binom{1093}{1093-1030}$ zullen beide getallen gelijk zijn.

Opdracht 10 bladzijde 60

C_{n+p}^{p} is gelijk aan

A C_n^1 **B** C_n^p **C** C_{n+p}^{n} **D** C_{n+p}^{n-p} **E** C_{n+2p}^{n+p}

$$C_{n+p}^{p} = \binom{n+p}{p} = \binom{n+p}{(n+p)-p} = \binom{n+p}{n} = C_{n+p}^{n}$$

Antwoord C is juist.

Opdracht 11 bladzijde 60

Bereken, door gebruik te maken van de eigenschappen in de driehoek van Pascal.

1 $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} - \binom{6}{3}$

$= \binom{6}{3} - \binom{6}{3}$

$= 0$

2 $\binom{12}{11} - \binom{11}{10} + \binom{7}{0}$

$= \binom{11}{10} + \binom{11}{11} - \binom{11}{10} + \binom{7}{0}$

$= 1 + 1$

$= 2$

3 $\binom{9}{2} + \binom{7}{3} - \binom{9}{7} - \binom{7}{4}$

$= \binom{9}{2} + \binom{7}{3} - \binom{9}{2} - \binom{7}{3}$

$= 0$

4 $\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{7}{6}-\binom{8}{2}-\binom{8}{8}-\binom{8}{0}$

$=\binom{7}{5}+\binom{7}{6}-\binom{8}{2}-\binom{8}{8}-\binom{8}{0}$

$=\binom{8}{6}-\binom{8}{6}-\binom{8}{8}-\binom{8}{0}$

$=-1-1$

$=-2$

Opdracht 12 bladzijde 60

Bewijs

1 $n+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$

$n+\binom{n}{2}$

$=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$

$=\binom{n+1}{2}$

2 $\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

$\text{linkerlid}=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$\text{rechterlid}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}=\frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$\Rightarrow\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

3 $\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

$\text{linkerlid} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$\text{rechterlid} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1} = \frac{n-p+1}{p} \cdot \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$\Rightarrow \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

4 $\binom{n}{p+1} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n+1}{p+1}$

$$\binom{n}{p+1} + \underbrace{\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}_{\binom{n}{p}} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Opdracht 13 bladzijde 61

Bepaal n als

1 $\binom{n}{7} = \binom{n}{3}$

$\binom{n}{7} = \binom{n}{n-7} = \binom{n}{3}$

Hieruit volgt dat $n - 7 = 3$, dus $n = 10$.

2 $\binom{n}{7} - \binom{n-1}{6} = 1$

$\binom{n}{7} - \binom{n-1}{6} = \binom{n-1}{6} + \binom{n-1}{7} - \binom{n-1}{6} = \binom{n-1}{7}$

$\binom{n-1}{7} = 1$ als $n = 8$.

Opdracht 14 bladzijde 61

Bewijs: $\binom{n}{p} = \binom{n-3}{p} + 3\binom{n-3}{p-1} + 3\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

$$= \binom{n-2}{p} + \underbrace{\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-1}}_{2\binom{n-2}{p-1}} + \binom{n-2}{p-2}$$

$$= \binom{n-3}{p} + \binom{n-3}{p-1} + 2\left(\binom{n-3}{p-1} + \binom{n-3}{p-2}\right) + \binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}$$

$$= \binom{n-3}{p} + 3\binom{n-3}{p-1} + 3\binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3}$$

Opdracht 15 bladzijde 61

1 Toon aan dat $\binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = \binom{4}{2}$.

Controleer deze gelijkheid in de driehoek van Pascal.

$$\binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 + \binom{2}{2}^2 = 1 + 4 + 1 = 6 = \binom{4}{2}$$

2 Zelfde vraag voor: $\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = \binom{6}{3}$.

$$\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = 1 + 9 + 9 + 1 = 20 = \binom{6}{3}$$

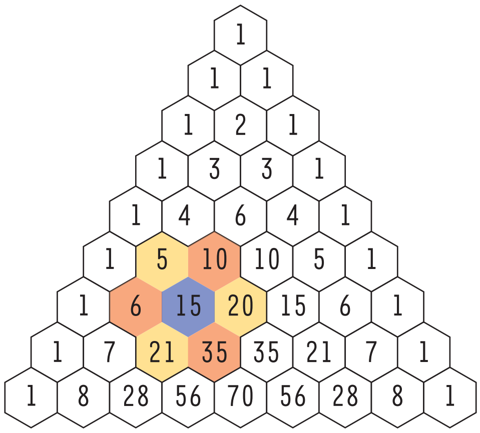
3 Veralgemeen de wetmatigheid uit vraag **1** en **2**.

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Opdracht 16 bladzijde 61

Pascal-bloempjes

In de driehoek van Pascal zie je een 'Pascal-bloempje': in het midden de cel met waarde 15 en daarrond de gele blaadjes met waarden 5, 20 en 21 en de oranje blaadjes met waarden 6, 10 en 35.



1 Wat is het verband tussen het product van de getallen op de gele en de getallen op de oranje achtergrond? Controleer of dit verband ook geldt bij een ander Pascal-bloempje.

Er geldt: $5 \cdot 20 \cdot 21 = 2100 = 6 \cdot 10 \cdot 35$.

2 Indien het verband ook elders geldt: veralgemeen deze wetmatigheid en bewijs ze.

Stellen we het middelste getal gelijk aan $\binom{n}{p}$, dan geldt:

$$\binom{n-1}{p-1} \cdot \binom{n}{p+1} \cdot \binom{n+1}{p} = \binom{n-1}{p} \cdot \binom{n}{p-1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$$

Bewijs

$$\text{linkerlid} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \cdot \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(p-1)! \cdot p! \cdot (p+1)! \cdot (n-p-1)! \cdot (n-p)! \cdot (n-p+1)!}$$

$$\text{rechterlid} = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} \cdot \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(p-1)! \cdot p! \cdot (p+1)! \cdot (n-p-1)! \cdot (n-p)! \cdot (n-p+1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{n-1}{p-1} \cdot \binom{n}{p+1} \cdot \binom{n+1}{p} = \binom{n-1}{p} \cdot \binom{n}{p-1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$$

Opdracht 17 bladzijde 62

Bereken $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \dfrac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i-1}}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{\dfrac{\cancel{n!}}{i!\,(n-i)!}}{\dfrac{\cancel{n!}}{(i-1)!\,(n-i+1)!}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{(i-1)!\,(n-i+1)!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \frac{n-i+1}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)$$

$$= n(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

Opdracht 18 bladzijde 62

Bereken m als $\binom{4m}{1}+\binom{4m}{2}+\binom{4m}{3}=2734m$.

$$\binom{4m}{1}+\binom{4m}{2}+\binom{4m}{3}=2734m$$

$$\Leftrightarrow 4m+\binom{4m+1}{3}=2734m$$

$$\Leftrightarrow \binom{4m+1}{3}=2730m$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4m+1)!}{3!\,(4m-2)!}=2730m$$

$$\Leftrightarrow (4m-1)4m(4m+1)=6\cdot 2730m$$

$$\underset{m\neq 0}{\Rightarrow} 16m^2-1=4095$$

$$\underset{m>0}{\Rightarrow} m=16$$

Opdracht 19 bladzijde 62

Bewijzen van identiteiten door ze te vertalen naar telproblemen

Voorbeeld

Door de binomiaalcoëfficiënten uit te werken, kun je bewijzen dat

$p\cdot\binom{n}{p}=n\cdot\binom{n-1}{p-1}$.

Je kunt deze uitdrukking ook bewijzen door ze te vertalen naar een telprobleem: het aantal manieren om uit een groep van n leerlingen een leerlingenraad van p personen samenstellen, waaronder 1 voorzitter.

- Je kunt eerst willekeurig p leerlingen kiezen uit een groep van n: dit kan op $\binom{n}{p}$ manieren. Daarna moet je uit die p leerlingen een voorzitter kiezen: daarvoor zijn er p mogelijkheden. In totaal zijn er dus $p\cdot\binom{n}{p}$ mogelijkheden. Dit komt overeen met het linkerlid van de te bewijzen formule.
- Je kunt ook als volgt redeneren. Kies eerst een voorzitter: daarvoor zijn er n mogelijkheden. Uit de overige $n-1$ leerlingen kies je vervolgens nog $p-1$ leden: $\binom{n-1}{p-1}$ mogelijkheden. In totaal zijn er $n\cdot\binom{n-1}{p-1}$ mogelijke keuzes. Dit is het rechterlid van de te bewijzen formule.
- Aangezien beide redeneringen een juist antwoord op hetzelfde telprobleem geven, volgt hieruit: $p\cdot\binom{n}{p}=n\cdot\binom{n-1}{p-1}$.

Toon nu de volgende formules aan via een vertaling naar een telprobleem.

1 $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\cdot\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\cdot\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\cdot\binom{n}{0}$

Stel dat er in een klas m jongens en n meisjes zitten. Er moet een afvaardiging van k personen gekozen worden.

Je kunt willekeurig k leerlingen kiezen uit de klas van m + n studenten: dit kan op $\binom{m+n}{k}$ manieren.

Je kunt ook 0 jongens en k meisjes kiezen of 1 jongen en k – 1 meisjes of … of k jongens en 0 meisjes. Dit aantal mogelijkheden is $\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\cdot\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\cdot\binom{n}{0}$.

2 $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\cdot\binom{n-m}{k-m}$ met $0 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$

Stel dat je uit een groep van n personen een vertegenwoordiging van k personen moet kiezen. Onder deze k personen moet je dan nog een kerngroep van m personen kiezen.

Je kunt eerst willekeurig k personen kiezen uit de groep van n: $\binom{n}{k}$ mogelijkheden en dan uit de groep van k personen er nog m kiezen voor het kernbestuur: $\binom{k}{m}$ manieren.

In totaal zijn er dus $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m}$ mogelijkheden.

Of je kunt als volgt redeneren:

kies eerst een kerngroep van m personen uit de groep van n: $\binom{n}{m}$ mogelijkheden. Uit de overgebleven groep van n – m personen moet je er dan nog k – m kiezen voor de vertegenwoordiging: $\binom{n-m}{k-m}$ manieren.

De volledige keuze kan dus op $\binom{n}{m}\cdot\binom{n-m}{k-m}$ manieren gebeuren.

Opdracht 20 bladzijde 63

Werk uit.

1 $(2a+b)^5$

$$=\binom{5}{0}(2a)^5+\binom{5}{1}(2a)^4b+\binom{5}{2}(2a)^3b^2+\binom{5}{3}(2a)^2b^3+\binom{5}{4}(2a)b^4+\binom{5}{5}b^5$$

$$=32a^5+5\cdot16a^4b+10\cdot8a^3b^2+10\cdot4a^2b^3+5\cdot2ab^4+b^5$$

$$=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$$

2 $\left(3z-\frac{1}{2}y\right)^4$

$$=\binom{4}{0}(3z)^4+\binom{4}{1}(3z)^3\left(-\frac{1}{2}y\right)+\binom{4}{2}(3z)^2\left(-\frac{1}{2}y\right)^2+\binom{4}{3}(3z)\left(-\frac{1}{2}y\right)^3+\binom{4}{4}\left(-\frac{1}{2}y\right)^4$$

$$=81z^4-4\cdot27\cdot\frac{1}{2}z^3y+6\cdot9\cdot\frac{1}{4}z^2y^2-4\cdot3\cdot\frac{1}{8}zy^3+\frac{1}{16}y^4$$

$$=81z^4-54z^3y+\frac{27}{2}z^2y^2-\frac{3}{2}zy^3+\frac{1}{16}y^4$$

3 $\left(\frac{1}{3}x-y^2\right)^6$

$$=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}x\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}x\right)^5(-y^2)+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}x\right)^4(-y^2)^2+\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)^3(-y^2)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{3}x\right)^2(-y^2)^4$$

$$+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}x\right)(-y^2)^5+\binom{6}{6}(-y^2)^6$$

$$=\frac{1}{729}x^6-6\cdot\frac{1}{243}x^5y^2+15\cdot\frac{1}{81}x^4y^4-20\cdot\frac{1}{27}x^3y^6+15\cdot\frac{1}{9}x^2y^8-6\cdot\frac{1}{3}xy^{10}+y^{12}$$

$$=\frac{1}{729}x^6-\frac{2}{81}x^5y^2+\frac{5}{27}x^4y^4-\frac{20}{27}x^3y^6+\frac{5}{3}x^2y^8-2xy^{10}+y^{12}$$

4 $\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{3}\right)^7$

$$=\binom{7}{0}\left(\frac{3}{x}\right)^7+\binom{7}{1}\left(\frac{3}{x}\right)^6\left(\frac{x}{3}\right)+\binom{7}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^5\left(\frac{x}{3}\right)^2+\binom{7}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^4\left(\frac{x}{3}\right)^3+\binom{7}{4}\left(\frac{3}{x}\right)^3\left(\frac{x}{3}\right)^4$$

$$+\binom{7}{5}\left(\frac{3}{x}\right)^2\left(\frac{x}{3}\right)^5+\binom{7}{6}\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{x}{3}\right)^6+\binom{7}{7}\left(\frac{x}{3}\right)^7$$

$$=\frac{2187}{x^7}+7\cdot\frac{3^5}{x^5}+21\cdot\frac{3^3}{x^3}+35\cdot\frac{3}{x}+35\cdot\frac{x}{3}+21\cdot\frac{x^3}{3^3}+7\cdot\frac{x^5}{3^5}+\frac{x^7}{2187}$$

$$=\frac{2187}{x^7}+\frac{1701}{x^5}+\frac{567}{x^3}+\frac{105}{x}+\frac{35}{3}x+\frac{7}{9}x^3+\frac{7}{243}x^5+\frac{1}{2187}x^7$$

5 $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^9$

$$=\binom{9}{0}\left(\frac{a}{b}\right)^9+\binom{9}{1}\left(\frac{a}{b}\right)^8\left(-\frac{b}{a}\right)+\binom{9}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^7\left(-\frac{b}{a}\right)^2+\binom{9}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^6\left(-\frac{b}{a}\right)^3+\binom{9}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^5\left(-\frac{b}{a}\right)^4$$

$$+\binom{9}{5}\left(\frac{a}{b}\right)^4\left(-\frac{b}{a}\right)^5+\binom{9}{6}\left(\frac{a}{b}\right)^3\left(-\frac{b}{a}\right)^6+\binom{9}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(-\frac{b}{a}\right)^7+\binom{9}{8}\left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^8+\binom{9}{9}\left(-\frac{b}{a}\right)^9$$

$$=\frac{a^9}{b^9}-9\frac{a^7}{b^7}+36\frac{a^5}{b^5}-84\frac{a^3}{b^3}+126\frac{a}{b}-126\frac{b}{a}+84\frac{b^3}{a^3}-36\frac{b^5}{a^5}+9\frac{b^7}{a^7}-\frac{b^9}{a^9}$$

6 $(1+x)^n$

$$=\binom{n}{0}\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot x+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot x^2+\ldots+\binom{n}{i}\cdot 1^{n-i}\cdot x^i+..+\binom{n}{n-1}\cdot 1^1\cdot x^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot x^n$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{i}x^i+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n$$

Opdracht 21 bladzijde 63

Bereken, zonder volledige uitwerking,

1 de coëfficiënt van x^4 in $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$;

De algemene term in de uitwerking van $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ is $\binom{8}{i}x^{8-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i=\binom{8}{i}x^{8-2i}$.

Nu moet $8-2i=4$, zodat $i=2$.

De coëfficiënt van x^4 is $\binom{8}{2}=28$.

2 de coëfficiënt van $a^{12}b^6$ in $(a^3-3b)^{10}$;

De algemene term in de uitwerking van $(a^3-3b)^{10}$ is $\binom{10}{i}(a^3)^{10-i}(-3b)^i=(-3)^i\binom{10}{i}a^{30-3i}b^i$.

Als $i=6$, is $30-3i=30-18=12$.

De coëfficiënt van $a^{12}b^6$ is $(-3)^6\binom{10}{6}=729\cdot 210=153\ 090$.

3 de coëfficiënt van x^3 in $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right)^9$;

De algemene term in de uitwerking van $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right)^9$ is

$\binom{9}{i}(3x)^{9-i}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^i = 3^{9-i} \cdot (-1)^i \binom{9}{i} x^{9-3i}$.

Nu moet $9 - 3i = 3$, zodat $i = 2$.

De coëfficiënt van x^3 is $3^7 \cdot (-1)^2 \binom{9}{2} = 2187 \cdot 36 = 78\,732$.

4 de coëfficiënt van x^8 in $\left(x^4 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$;

De algemene term in de uitwerking van $\left(x^4 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$ is

$\binom{12}{i}(x^4)^{12-i}\left(\frac{1}{2x}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \binom{12}{i} x^{48-5i}$.

Nu moet $48 - 5i = 8$, zodat $i = 8$.

De coëfficiënt van x^8 is $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \binom{12}{8} = \frac{495}{256}$.

5 de middelste term in de ontwikkeling van $(x^2 - 3)^{10}$;

De middelste term in de ontwikkeling van $(x^2 - 3)^{10}$ is de zesde term:

$\binom{10}{5}(x^2)^5 \cdot (-3)^5 = -243 \cdot 252x^{10} = -61236x^{10}$.

6 de constante term in de ontwikkeling van $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$.

De algemene term in de uitwerking van $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$ is

$\binom{18}{i}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{18-i}\left(\frac{1}{x}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{18-i}\binom{18}{i} x^{36-3i}$.

Nu moet $36 - 3i = 0$, zodat $i = 12$.

De constante term is $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \binom{18}{12} = \frac{18564}{64} = \frac{4641}{16}$.

Opdracht 22 bladzijde 63

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}$ is gelijk aan

A $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k-1}$

B $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}x^{k}$

C $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k+1}x^{k}$

D geen van de vorige

Stel $k-1=i$, dan is $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}x^{i}$.

B is het juiste antwoord.

Opdracht 23 bladzijde 63

Werk $\left(1+\sqrt{3}\right)^4+\left(1-\sqrt{3}\right)^4$ uit met behulp van het binomium van Newton.

$\left(1+\sqrt{3}\right)^4+\left(1-\sqrt{3}\right)^4$

$=\binom{4}{0}+\cancel{\binom{4}{1}\sqrt{3}}+\binom{4}{2}3+\cancel{\binom{4}{3}3\sqrt{3}}+\binom{4}{4}9+\binom{4}{0}-\cancel{\binom{4}{1}\sqrt{3}}+\binom{4}{2}3-\cancel{\binom{4}{3}3\sqrt{3}}+\binom{4}{4}9$

$=2\cdot 1+2\cdot 6\cdot 3+2\cdot 1\cdot 9$

$=2+36+18$

$=56$

Opdracht 24 bladzijde 64

De toverformule 'ABRACADABRA' kun je in het onderstaande schema op veel manieren lezen. Als je begint met de bovenste letter A en dan naar beneden leest door telkens een letter links- en/of rechtsonder te kiezen, op hoeveel verschillende manieren kun je dan het woord 'ABRACADABRA' lezen?

1

A
B B
R R R
A A A A
C C C C C
A A A A A A
D D D D D D D
A A A A A A A A
B B B B B B B B B
R R R R R R R R R R
A A A A A A A A A A A

We herkennen in deze structuur de driehoek van Pascal. De laatste rij is de tiende rij (A: nulde rij, B: eerste rij …). De som van de binomiaalcoëfficiënten op deze tiende rij is

$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}=1024.$

Andere redenering: om van een gekozen letter naar een volgende letter te gaan, zijn er steeds twee mogelijkheden, namelijk links of rechts kiezen.

Schematisch:

$$\underset{2}{\underset{\downarrow}{\underline{B}}}\quad \underset{2}{\underset{\downarrow}{\underline{R}}}\quad \ldots \quad \underset{2}{\underset{\downarrow}{\underline{A}}}$$

Er geldt: $\overline{V}_2^{10} = 2^{10} = 1024.$

Er zijn dus 1024 verschillende mogelijkheden om het woord 'ABRACADABRA' te lezen.

2

```
          A
        B   B
      R   R   R
    A   A   A   A
  C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
  D   D   D   D   D
    A   A   A   A
      B   B   B
        R   R
          A
```

De laatste A bevindt zich op de tiende rij en vijf plaatsen naar rechts. Er zijn $C_{10}^{5} = \binom{10}{5} = 252$ verschillende mogelijkheden om het woord 'ABRACADABRA' te lezen.

Opdracht 25 bladzijde 64

Bepaal de coëfficiënt van

1 x^3y in $(1 + x + y)^6$

De algemene term in de uitwerking van $(1+x+y)^6 = \left((1+x)+y\right)^6$ is $\binom{6}{i}(1+x)^{6-i}y^i$.

Nu moet i = 1, zodat $\binom{6}{i}(1+x)^{6-i}y^i = \binom{6}{1}(1+x)^5y$.

De algemene term in de uitwerking van $\binom{6}{1}(1+x)^5y$ is $\binom{6}{1}\left(\binom{5}{i}1^{5-i}x^i\right)y$.

Met i = 3 wordt dit: $\binom{6}{1}\left(\binom{5}{3}1^2x^3\right)y$.

De coëfficiënt van x^3y is $\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3} = 6\cdot 10 = 60$.

2 $a^3b^2c^2$ in $(2a+b+3c)^7$

De algemene term in de uitwerking van $(2a+b+3c)^7=\left((2a+b)+(3c)\right)^7$ is $\binom{7}{i}(2a+b)^{7-i}(3c)^i$.

Nu moet $i=2$, zodat $\binom{7}{i}(2a+b)^{7-i}(3c)^i=\binom{7}{2}(2a+b)^5(3c)^2$.

De algemene term in de uitwerking van $\binom{7}{2}(2a+b)^5(3c)^2$ is $\binom{7}{2}\left(\binom{5}{i}(2a)^{5-i}b^i\right)(3c)^2$.

Met $i=2$ wordt dit $\binom{7}{2}\left(\binom{5}{2}(2a)^3b^2\right)(3c)^2$.

De coëfficiënt van $a^3b^2c^2$ is $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 2^3\cdot 3^2=21\cdot 10\cdot 8\cdot 9=15\,120$.

Opdracht 26 bladzijde 64

Toon aan, zonder de binomiaalgetallen uit te rekenen.

1 $\binom{4}{0}+2\binom{4}{1}+4\binom{4}{2}+8\binom{4}{3}+16\binom{4}{4}=3^4$

$3^4=(1+2)^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}\cdot 2+\binom{4}{2}\cdot 2^2+\binom{4}{3}\cdot 2^3+\binom{4}{4}\cdot 2^4$

$=\binom{4}{0}+2\cdot\binom{4}{1}+4\cdot\binom{4}{2}+8\cdot\binom{4}{3}+16\cdot\binom{4}{4}$

2 $11^5-11^4\binom{5}{1}+11^3\binom{5}{2}-11^2\binom{5}{3}+11\binom{5}{4}-1=100\,000$

$100\,000=10^5=(11-1)^5$

$=\binom{5}{0}\cdot 11^5-\binom{5}{1}\cdot 11^4+\binom{5}{2}\cdot 11^3-\binom{5}{3}\cdot 11^2+\binom{5}{4}\cdot 11-\binom{5}{5}$

$=11^5-11^4\cdot\binom{5}{1}+11^3\cdot\binom{5}{2}-11^2\cdot\binom{5}{3}+11\cdot\binom{5}{4}-1$

3 $\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}=32$

Er geldt: $(1-1)^6=0=\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$.

Hieruit volgt: $\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}$.

Nu is $32=2^5=(1+1)^5=\underbrace{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}}_{\binom{6}{1}}+\underbrace{\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}_{\binom{6}{3}}+\underbrace{\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}_{\binom{6}{5}}$, zodat

$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}=32$.

4 $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}\cdot(-1)^k+\ldots+\binom{n}{n}\cdot(-1)^n$

Opdracht 27 bladzijde 65

Bereken.

1 $\sum_{j=0}^{23}\binom{23}{j}\cdot 0{,}59^j\cdot 0{,}41^{23-j}=(0{,}41+0{,}59)^{23}=1^{23}=1$

2 $\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}=\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\cdot 1^{20-i}\cdot 1^i=(1+1)^{20}=2^{20}=1\,048\,576$

3 $\sum_{i=1}^{9}\binom{9}{i}5^i=\sum_{i=1}^{9}\binom{9}{i}5^i\cdot 1^{9-i}=(1+5)^9-\binom{9}{0}=6^9-1=10\,077\,695$

4 $\sum_{k=1}^{12}\binom{12}{k}4^{12-k}=\sum_{k=1}^{12}\binom{12}{k}4^{12-k}\cdot 1^k=(4+1)^{12}-\binom{12}{0}4^{12}=5^{12}-4^{12}=227\,363\,409$

5 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k+2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 9=9\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 1^{n-k}=9\cdot\left((1+3)^n-\binom{n}{0}\right)=9\cdot(4^n-1)$

Opdracht 28 bladzijde 65

$\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}$ is gelijk aan

A $2^{n+1}-1$

B $2^{n+1}-n-2$

C $2^{n+1}-n-3$

D 2^n-n-1

E 2^n-n

F 2^n-n+1

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{n+1}$$
$$=2^{n+1}-1-(n+1)-1$$
$$=2^{n+1}-n-3$$

Antwoord C is juist.

Opdracht 29 bladzijde 65

Indien $(a+b+c)^{11}$ wordt uitgewerkt in termen met lettergedeelte $a^n b^m c^p$ met $n, m, p \in \mathbb{N}$, hoeveel termen bevat deze uitwerking dan?

$$(a+b+c)^{11} = \left((a+b)+c\right)^{11}$$

$$= \binom{11}{0}\underbrace{(a+b)^{11}}_{12\text{ termen}} + \binom{11}{1}\underbrace{(a+b)^{10}c}_{11\text{ termen}} + \binom{11}{2}\underbrace{(a+b)^{9}c^2}_{10\text{ termen}} + \ldots + \binom{11}{11}\underbrace{c^{11}}_{1\text{ term}}$$

Deze uitdrukking bevat dus $12 + 11 + 10 + \ldots + 1 = \dfrac{12 \cdot (12+1)}{2} = 78$ termen.

Opdracht 30 bladzijde 65

$$\sum_{j=0}^{11}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} =$$

A 511 **B** 1023 **C** 2047 **D** 4095 **E** 8191

$$\sum_{j=0}^{11}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{11} 2^j = 2^0 + \ldots + 2^{11} = 2^0 \cdot \frac{2^{12}-1}{2-1} = 2^{12} - 1 = 4095 \text{ (meetkundige rij: } s_n = u_1\frac{q^n-1}{q-1}\text{)}$$

Antwoord D is juist.

Opdracht 31 bladzijde 65

Toon aan dat $\sum_{k=1}^{n}(1+3+3^2+\ldots+3^{k-2}+3^{k-1})\binom{n}{k} = 2^{n-1}(2^n-1)$ met $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\sum_{k=1}^{n}(1+3+3^2+\ldots+3^{k-2}+3^{k-1})\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1\cdot\frac{3^k-1}{2} \qquad \text{meetkundige rij: } s_n = u_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^k - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}}_{2^n-1} \qquad 2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 3^k - \frac{2^n-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+3)^n - 1\right] - \frac{2^n-1}{2}$$

$$= \frac{4^n - 1 - 2^n + 1}{2}$$

$$= \frac{2^n(2^n-1)}{2}$$

$$= 2^{n-1}(2^n-1)$$

Opdracht 32 bladzijde 65

Beschouw twee functies f en g die n keer afleidbaar zijn.

1 Bepaal $(f \cdot g)'$, $(f \cdot g)''$, $(f \cdot g)^{(3)}$... en zoek een patroon.

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(f \cdot g)'' = f'' \cdot g + f' \cdot g' + f' \cdot g' + f \cdot g'' = f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f \cdot g''$

$(f \cdot g)^{(3)} = f^{(3)} \cdot g + f'' \cdot g' + 2f'' \cdot g' + 2f' \cdot g'' + f' \cdot g'' + f \cdot g^{(3)} = f^{(3)} \cdot g + 3f'' \cdot g' + 3f' \cdot g'' + f \cdot g^{(3)}$

We vermoeden:

$(f \cdot g)^{(4)} = f^{(4)} \cdot g + 4f^{(3)} \cdot g' + 6f'' \cdot g'' + 4f' \cdot g^{(3)} + f \cdot g^{(4)}$, enzoverder.

2 Formuleer een hypothese voor $(f \cdot g)^{(n)}$ en bewijs ze door middel van inductie. Bij afspraak stellen we $f^{(0)} = f$.

Omdat bij afspraak $f^{(0)} = f$ en $g^{(0)} = g$, vermoeden we:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \binom{n}{0} f^{(n)} \cdot g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \binom{n}{2} f^{(n-2)} \cdot g^{(2)} + \ldots + \binom{n}{i} f^{(n-i)} \cdot g^{(i)} + \ldots + \binom{n}{n-1} f^{(1)} \cdot g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f^{(0)} \cdot g^{(n)}$$

Bewijs door inductie

1 Inductiebasis

We tonen aan dat de formule waar is voor de kleinste waarde van n, in dit geval voor $n = 1$.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' = \binom{1}{0} f^{(1)} \cdot g^{(0)} + \binom{1}{1} f^{(0)} \cdot g^{(1)}$$

2 Inductiestap

Stel dat de formule waar is voor een willekeurige waarde van n, bijvoorbeeld voor $n = k$. Te bewijzen is dat ze dan ook geldt voor $n = k + 1$.

Bewijs

$$(f \cdot g)^{(k+1)} = \left((f \cdot g)^{(k)}\right)^{(1)}$$

$$= \left(\binom{k}{0} f^{(k)} \cdot g^{(0)} + \binom{k}{1} f^{(k-1)} \cdot g^{(1)} + \binom{k}{2} f^{(k-2)} \cdot g^{(2)} + \ldots + \binom{k}{i} f^{(k-i)} \cdot g^{(i)} + \ldots + \binom{k}{k-1} f^{(1)} \cdot g^{(k-1)} + \binom{k}{k} f^{(0)} \cdot g^{(k)}\right)^{(1)}$$

$$= \left(\binom{k}{0} f^{(k+1)} \cdot g^{(0)} + \binom{k}{0} f^{(k)} \cdot g^{(1)}\right) + \left(\binom{k}{1} f^{(k)} \cdot g^{(1)} + \binom{k}{1} f^{(k-1)} \cdot g^{(2)}\right)$$

$$+ \left(\binom{k}{2} f^{(k-1)} \cdot g^{(2)} + \binom{k}{2} f^{(k-2)} \cdot g^{(3)}\right) + \ldots + \left(\binom{k}{k-1} f^{(2)} \cdot g^{(k-1)} + \binom{k}{k-1} f^{(1)} \cdot g^{(k)}\right)$$

$$+ \left(\binom{k}{k} f^{(1)} \cdot g^{(k)} + \binom{k}{k} f^{(0)} \cdot g^{(k+1)}\right)$$

$$= \binom{k}{0} f^{(k+1)} \cdot g^{(0)} + \left(\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right) f^{(k)} \cdot g^{(1)} + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right) f^{(k-1)} \cdot g^{(2)} + \ldots$$

$$+ \left(\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) f^{(1)} \cdot g^{(k)} + \binom{k}{k} f^{(0)} \cdot g^{(k+1)}$$

Omdat $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$, $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$ en $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$, kunnen we ook schrijven dat:

$$(f \cdot g)^{(k+1)} = \binom{k+1}{0} f^{(k+1)} \cdot g^{(0)} + \binom{k+1}{1} f^{(k)} \cdot g^{(1)} + \binom{k+1}{2} f^{(k-1)} \cdot g^{(2)} + \ldots$$

$$+ \binom{k+1}{k} f^{(1)} \cdot g^{(k)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(0)} \cdot g^{(k+1)}$$

De formule is dus ook waar voor $n = k + 1$ als je veronderstelt dat ze waar is voor $n = k$.

3 Besluit

Uit 1 en 2 volgt dat de formule waar is voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 33 bladzijde 66

Werk uit.

1 $(3x - 2y)^6$

$$= \binom{6}{0}(3x)^6 + \binom{6}{1}(3x)^5(-2y) + \binom{6}{2}(3x)^4(-2y)^2 + \binom{6}{3}(3x)^3(-2y)^3 + \binom{6}{4}(3x)^2(-2y)^4$$

$$+ \binom{6}{5}(3x)(-2y)^5 + \binom{6}{6}(-2y)^6$$

$$= 729x^6 + 6 \cdot 243x^5(-2y) + 15 \cdot 81x^4 \cdot 4y^2 + 20 \cdot 27x^3 \cdot (-8y^3) + 15 \cdot 9x^2 \cdot 16y^4 + 6 \cdot 3x(-32y^5) + 64y^6$$

$$= 729x^6 - 2916x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64y^6$$

2 $\left(ax + \frac{b}{a}\right)^7$

$$= \binom{7}{0}(ax)^7 + \binom{7}{1}(ax)^6\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{7}{2}(ax)^5\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{7}{3}(ax)^4\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \binom{7}{4}(ax)^3\left(\frac{b}{a}\right)^4$$

$$+ \binom{7}{5}(ax)^2\left(\frac{b}{a}\right)^5 + \binom{7}{6}(ax)\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \binom{7}{7}\left(\frac{b}{a}\right)^7$$

$$= a^7x^7 + 7a^6x^6 \cdot \frac{b}{a} + 21a^5x^5 \cdot \frac{b^2}{a^2} + 35a^4x^4 \cdot \frac{b^3}{a^3} + 35a^3x^3 \cdot \frac{b^4}{a^4} + 21a^2x^2 \cdot \frac{b^5}{a^5} + 7ax \cdot \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^7}{a^7}$$

$$= a^7x^7 + 7a^5bx^6 + 21a^3b^2x^5 + 35ab^3x^4 + 35\frac{b^4x^3}{a} + 21\frac{b^5x^2}{a^3} + 7\frac{b^6x}{a^5} + \frac{b^7}{a^7}$$

Opdracht 34 bladzijde 66

Bereken, zonder volledige uitwerking,

1 de coëfficiënt van $a^{12}b^{13}$ in $(a+b)^{25}$;

De algemene term in de uitwerking van $(a + b)^{25}$ is $\binom{25}{i}a^{25-i}b^{i}$.

Als $i = 13$, is $25 - i = 12$.

De coëfficiënt van $a^{12}b^{13}$ is $\binom{25}{13} = 5\,200\,300$.

2 de coëfficiënt van a^6 in $(a^2-4)^7$;

De algemene term in de uitwerking van $\left(a^2-4\right)^7$ is $\binom{7}{i}(a^2)^{7-i}(-4)^i = \binom{7}{i}(-4)^i a^{14-2i}$.

Nu moet $14 - 2i = 6$, zodat $i = 4$.

De coëfficiënt van a^6 is $\binom{7}{4}(-4)^4 = 35 \cdot 256 = 8960$.

3 de derde term in de ontwikkeling van $(2a^3b^4 - 3c^2)^6$;

De derde term in de ontwikkeling van $\left(2a^3b^4 - 3c^2\right)^6$ is

$$\binom{6}{2}\left(2a^3b^4\right)^4 \cdot \left(-3c^2\right)^2 = 15 \cdot 16 \cdot 9a^{12}b^{16}c^4 = 2160a^{12}b^{16}c^4.$$

4 de middelste term in de ontwikkeling van $\left(\dfrac{2}{x^3} - 3x\right)^6$.

De middelste term in de ontwikkeling van $\left(\dfrac{2}{x^3} - 3x\right)^6$ is de vierde term:

$$\binom{6}{3}\left(\frac{2}{x^3}\right)^3 \cdot (-3x)^3 = 20 \cdot \frac{8}{x^9} \cdot (-27)x^3 = -\frac{4320}{x^6}.$$

Opdracht 35 bladzijde 66

Bewijs.

1 $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!}$$

$$n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!}$$

Hieruit volgt dat beide leden gelijk zijn.

2 $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p}$

$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ formule van Stifel-Pascal

$$= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p+1}$$

$$= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p+1}$$

$$= \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} &= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p+1}{p+1} \\ &= \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p} \end{aligned}\right\} (*)$$

(*) Voor de laatste term zal $n - k = p + 1$, want $\binom{n}{p}$ bestaat niet als $n < p$, zodat de laatste term gelijk is aan $\binom{n-k}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} = \binom{p}{p}$ want $\binom{n}{n} = 1$.

3 $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$

$$3^n = (1+2)^n$$

$$= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 2 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 2^2 + \binom{n}{3}1^{n-3} \cdot 2^3 + \ldots + \binom{n}{n}2^n$$

$$= \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$$

Opdracht 36 bladzijde 66

Bereken, zonder volledige uitwerking, de coëfficiënt van $x^2y^2z^3$ in de ontwikkeling van $\left(x+\sqrt{y}-z\right)^9$.

De algemene term in de uitwerking van $\left(x+\sqrt{y}-z\right)^9$ is

$$\binom{9}{i}(x-z)^{9-i}\left(\sqrt{y}\right)^i=\binom{9}{i}(x-z)^{9-i}y^{\frac{i}{2}}.$$

Nu moet $\frac{i}{2}=2$, zodat $i=4$.

We krijgen: $\binom{9}{4}(x-z)^5y^2$.

In de uitwerking van $(x-z)^5$ is de algemene term $\binom{5}{i}x^{5-i}(-z)^i$. Hier moet $i=3$.

De coëfficiënt van $x^2y^2z^3$ is $\binom{9}{4}\binom{5}{3}(-1)^3=-126\cdot 10=-1260$.

Opdracht 37 bladzijde 67

Bereken.

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^k=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^k\cdot 1^{5-k}=(1+3)^5=4^5=1024$

2 $\displaystyle\sum_{i=2}^{15}\binom{15}{i}=2^{15}-\binom{15}{0}-\binom{15}{1}=2^{15}-1-15=32\,752$

3 $\displaystyle\sum_{j=0}^{19}\binom{19}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(-\frac{3}{2}\right)^{19-j}=\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)^{19}=(-1)^{19}=-1$

Opdracht 38 bladzijde 67

Beschouw in de driehoek van Pascal de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{1}$.

Er geldt: $\binom{3}{1}^2 = 10 - 1$ en $\binom{6}{1}^2 = 56 - 20$.

$$\begin{gathered}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{3} \quad 3 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad \boxed{10} \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{6} \quad 15 \quad \boxed{20} \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad \boxed{56} \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{gathered}$$

1 Kies een andere waarde $\binom{n}{1}$. Toon aan dat je hetzelfde verband vindt met de twee overeenkomstige waarden.

Als bijvoorbeeld n = 5, dan geldt $\binom{5}{1}^2 = 25 = 35 - 10$.

2 Veralgemeen het verband en bewijs dit.

Het algemene verband is: $\binom{n}{1}^2 = \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3}$.

Bewijs

$$\binom{n}{1}^2 = n^2$$

$$\begin{aligned}
\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} &= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} \\
&= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \binom{n}{3} \\
&= \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} \\
&= n + 2 \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \\
&= n + (n-1)n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\binom{n}{1}^2 = \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3}$.

Opdracht 39 bladzijde 67

Bepaal n zodat de term in x en de term in x^2 gelijke coëfficiënten hebben in de ontwikkeling van $\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)^n$.

De algemene term in $\left(\sqrt{2x}+\sqrt{5}\right)^n$ is $\binom{n}{i}\sqrt{2x}^{\,i}\sqrt{5}^{\,n-i}$.

Voor de term in x geldt dat i = 2, zodat de coëfficiënt gelijk is aan $\binom{n}{2}\sqrt{2}^{\,2}\cdot\sqrt{5}^{\,n-2}$.

Voor de term in x^2 geldt dat i = 4, zodat de coëfficiënt gelijk is aan $\binom{n}{4}\sqrt{2}^{\,4}\cdot\sqrt{5}^{\,n-4}$.

Beide coëfficiënten moeten gelijk zijn, dus geldt er:

$$\binom{n}{2}\sqrt{2}^{\,2}\cdot\sqrt{5}^{\,n-2}=\binom{n}{4}\sqrt{2}^{\,4}\cdot\sqrt{5}^{\,n-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5}^{\,2}=\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}=\frac{n!}{4!\,(n-4)!}\cdot\frac{2!\,(n-2)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}=\frac{(n-3)(n-2)}{12}$$

$$\Leftrightarrow 30=n^2-5n+6$$

$$\Leftrightarrow n^2-5n-24=0$$

$$\underset{n>0}{\Rightarrow} n=8$$

Opdracht 40 bladzijde 67

Bewijs: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \cdot \binom{n}{k}$.

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{(n-i)!}{(k-i)!\,(n-k)!}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{n!}{i!\,(k-i)!\,(n-k)!}\cdot\frac{k!}{k!}\right)$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}$$

$$= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}$$

$$= \binom{n}{k}\cdot 2^k$$

$$= 2^k\binom{n}{k}$$