



Hoofdstuk 1

Afgeleiden

1.1 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

- 1.1.1 Goniometrische functies
- 1.1.2 Limieten van goniometrische functies
- 1.1.3 Afgeleiden van goniometrische basisfuncties
- 1.1.4 Afgeleiden van samengestelde functies
- 1.1.5 Afgeleiden van cyclometrische functies

1.2 Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

- 1.2.1 Exponentiële en logaritmische functies
- 1.2.2 Afgeleiden van exponentiële functies
- 1.2.3 Afgeleiden van logaritmische functies
- 1.2.4 Differentiaalvergelijkingen

V



Opdracht 1 bladzijde 8

De hoogte h (in m) van een gondel van een reuzenrad in functie van de tijd t (in minuten) wordt beschreven door het voorschrift

$$h(t) = 30 \sin\left[\frac{\pi}{2}(t - 1)\right] + 32$$

- 1** Hoe lang duurt een omwenteling van een gondel?

Uit het voorschrift vinden we dat $b = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Dus is } p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

Een omwenteling duurt 4 minuten.



- 2** Welke maximale en minimale hoogte bereikt de gondel?

De maximale hoogte wordt bereikt voor $\sin\left[\frac{\pi}{2}(t - 1)\right] = 1$. Dan is de hoogte 62 m.

De minimale hoogte wordt bereikt voor $\sin\left[\frac{\pi}{2}(t - 1)\right] = -1$. De hoogte is dan 2 m.

- 3** Wat is de betekenis van 32 in het voorschrift?

De gemiddelde hoogte van een gondel is 32 m.

Dit is ook de hoogte van de as van het rad.

- 4** Met welke hoeksnelheid (in radialen per minuut) draait de gondel?

4 minuten komt overeen met een hoek van 2π rad.

1 minuut komt dus overeen met een hoek van $\frac{\pi}{2}$ rad.

De gondel draait met een hoeksnelheid van $\frac{\pi}{2}$ rad/min.

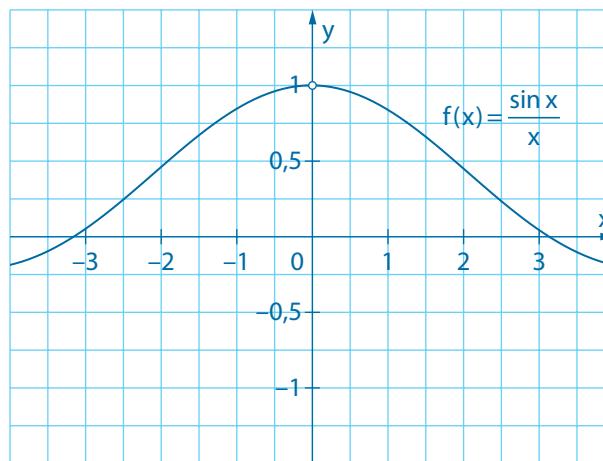
Opdracht 2 bladzijde 10

- 1** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1}$ geeft aanleiding tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$.

Bereken deze limiet.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 1)(x + 1)} = -2$$

- 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ geeft ook aanleiding tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$.
 Gebruik de grafiek van de functie $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ om deze limiet te bepalen.
Grafisch lezen we af dat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Opdracht 3 bladzijde 10

Gegeven de functies $f: x \mapsto x^2$ en $g: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{als } x \neq 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \end{cases}$.

- 1 Bepaal het voorschrift van de functies $h: x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$ en $i: x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 4x^2 & \text{als } x \neq 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

$$i(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2x^2 & \text{als } x \neq 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \end{cases}$$

- 2 Is $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right)$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 4$$

$$f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right) = f(2) = 4$$

Beide limieten zijn gelijk.

- 3 Is $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right)$?

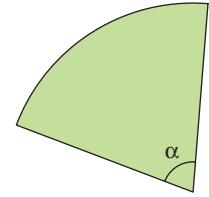
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} i(x) = 2$$

$$g\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\right) = g(1) = 0$$

Deze limieten zijn niet gelijk.

Opdracht 4 bladzijde 10

Bereken de oppervlakte van een cirkelsector met straal r bij een middelpuntshoek α gelijk aan



1 2π rad

Een hoek van 2π rad correspondeert met de oppervlakte van de cirkel, namelijk πr^2 .

2 α rad

Een hoek van α rad correspondeert dus met de oppervlakte van $\alpha \cdot \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$.

Opdracht 5 bladzijde 15

Bereken

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 1 = 4$

3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{\cos \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} \right)}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{\pi}{x} \right)$

Omdat $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{\pi}{x} \leq x^2$ en $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$, is $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{\pi}{x} \right) = 0$.

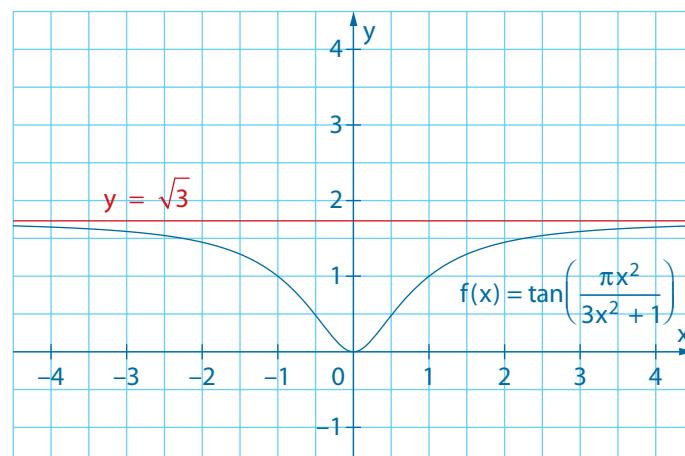
Opdracht 6 bladzijde 15

Bepaal de eventuele horizontale asymptoot van de grafiek van de functie

$$f: x \mapsto \tan \frac{\pi x^2}{3x^2 + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan \frac{\pi x^2}{3x^2 + 1} = \tan \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi x^2}{3x^2 + 1} \right) = \tan \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi x^2}{3x^2} \right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

De rechte met vergelijking $y = \sqrt{3}$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f .

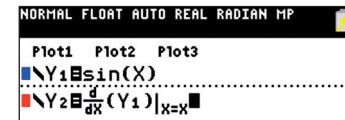


Opdracht 7 bladzijde 15

We gaan op zoek naar de afgeleide functie van $f: x \mapsto \sin x$ en van $g: x \mapsto \cos x$.

- 1 Plot de grafiek van $f: x \mapsto \sin x$ en de numerieke benadering van de afgeleide functie van f .

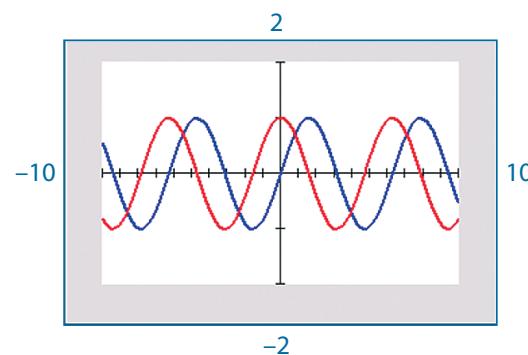
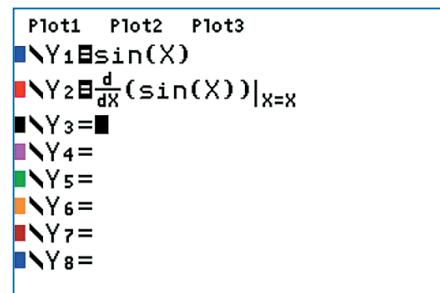
Wat vermoed je voor $\frac{d}{dx}(\sin x)$?



De grafiek van de sinusfunctie heeft een horizontale raaklijn voor

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Dit zijn de nulpunten van de cosinusfunctie.



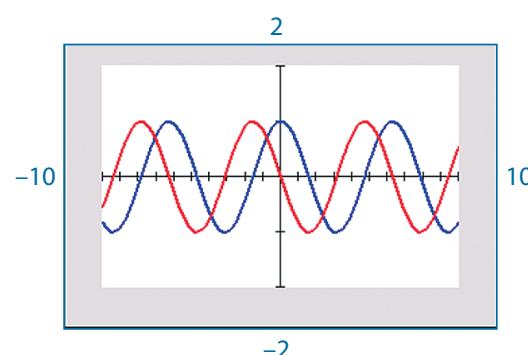
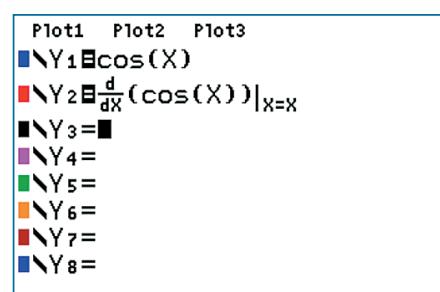
Het vermoeden is dat $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

- 2 Wat vermoed je voor $\frac{d}{dx}(\cos x)$?

Waarschijnlijk zullen de leerlingen vermoeden dat $\frac{d}{dx}(\cos x) = \sin x$.

- 3 Plot de numerieke benadering van de afgeleide functie van $g: x \mapsto \cos x$. Klopt je vermoeden uit 2?

Dat het vermoeden uit 2 niet juist is, zien we m.b.v. het grafisch rekentoestel.



We vermoeden nu dat $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

Opdracht 8 bladzijde 18

Bewijs

$$1 \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Te bewijzen: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

Bewijs

We bepalen de afgeleide functie van $f(x) = \cos x$ met de limietdefinitie van afgeleide.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} \\ &= -\lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\ &= -\sin a \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \\ &= -\sin a \cdot 1 \\ &= -\sin a \end{aligned}$$

We besluiten: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

$$2 \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Te bewijzen: $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Bewijs

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{\sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

onbepaaldheid $\frac{0}{0}$, teller ontbinden in factoren met een formule van Simpson

rekenregels limieten

$g(x) = \sin x$ is continu, dus $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

als $x \rightarrow a$, dan $\frac{x-a}{2} \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Opdracht 9 bladzijde 18

Bereken

$$1 \frac{d}{dx}(3 \sin x - 2 \tan x) = 3 \cos x - \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$2 \frac{d}{dx}(\cos^3 x) = 3 \cos^2 x \frac{d}{dx}(\cos x) = -3 \sin x \cos^2 x$$

$$3 \frac{d}{dx}(2x \cos x) = -2x \sin x + 2 \cos x$$

$$4 \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) = \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x) - (1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)(-\cos x) - (1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\cos x - \sin x \cos x - \cos x + \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-2 \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

Opdracht 10 bladzijde 23

Bereken

$$1 \frac{d}{dx}(\sin 5x) = \cos 5x \cdot \frac{d}{dx}(5x) = 5 \cos 5x$$

$$2 \frac{d}{dx}\left(\cos \frac{2}{x}\right) = -\sin \frac{2}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x^2} \sin \frac{2}{x}$$

$$3 \frac{d}{dx}(\cos(\tan 2x)) = -\sin(\tan 2x) \cdot \frac{d}{dx}(\tan 2x) = -\sin(\tan 2x) \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= \frac{-2 \sin(\tan 2x)}{\cos^2 2x}$$

$$4 \frac{d}{dx}(\cot^2 4x) = 2 \cot 4x \cdot \frac{d}{dx}(\cot 4x) = 2 \cot 4x \cdot \frac{-1}{\sin^2 4x} \cdot \frac{d}{dx}(4x) = \frac{-8 \cos 4x}{\sin^3 4x}$$

Opdracht 11 bladzijde 23

Bereken

$$1 \frac{d}{dx}\left(-2x \cos \frac{x}{4}\right) = -2 \cos \frac{x}{4} - 2x \left(-\sin \frac{x}{4}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right) = -2 \cos \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x \sin \frac{x}{4}$$

$$2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x + 4}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin^2 x \cdot 2 \sin x \cos x - (\sin^2 x + 4) \cdot 2 \sin x \cos x}{(\sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-8 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{-8 \cos x}{\sin^3 x}$$

Opdracht 12 bladzijde 23

Welke kromme met vergelijking $y = a \sin bx$ heeft als periode $\frac{\pi}{2}$ en heeft in de oorsprong een helling gelijk aan 2?

- De periode is $p = \frac{\pi}{2}$, dus moet $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$. Hieruit volgt dat $b = 4$.
- Uit $f(x) = a \sin 4x$ volgt dat $f'(x) = 4a \cos 4x$.
- De helling in de oorsprong is 2, dus geldt: $f'(0) = 4a = 2$. Hieruit volgt dat $a = \frac{1}{2}$.
- De kromme met vergelijking $y = \frac{1}{2} \sin 4x$ voldoet aan de voorwaarden.

Opdracht 13 bladzijde 23

Bereken met de gegevens in de tabel.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	1	6
8	4	-3

1 $g'(2)$ met $g(x) = [f(x)]^3$

$$g'(x) = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

$$g'(2) = 3[f(2)]^2 \cdot f'(2) = 3 \cdot 1^2 \cdot 6 = 18$$

2 $h'(2)$ met $h(x) = f(x^3)$

$$h'(x) = f'(x^3) \cdot 3x^2$$

$$h'(2) = f'(8) \cdot 12 = -3 \cdot 12 = -36$$

Opdracht 14 bladzijde 28

Bewijs: $\frac{d}{dx}(\text{Bgcos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Te bewijzen: $\frac{d}{dx}(\text{Bgcos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bewijs

$$y = \text{Bgcos } x \quad (1)$$

\Updownarrow

$$\cos y = x \quad (2) \quad \text{met } y \in [0, \pi]$$

\Downarrow

gelijke functies hebben gelijke afgeleiden

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

\Downarrow

opdat $\sin y \neq 0$ moet $y \neq 0$ en $y \neq \pi$ zodat $y \in]0, \pi[$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

\Downarrow

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y}$$

aangezien $y \in]0, \pi[, \text{ is } \sin y > 0 \text{ zodat } \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$\Downarrow \quad (2)$

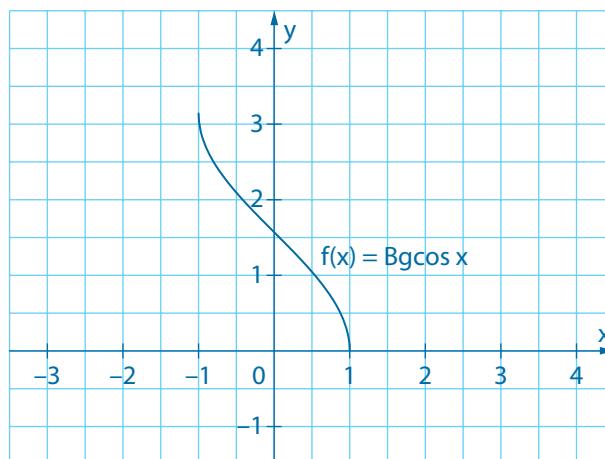
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\Downarrow \quad (1)$

$$\frac{d}{dx}(\text{Bgcos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Merk op dat de boogcosinusfunctie niet afleidbaar is in 1 en in -1 .

Op de grafiek zien we in deze randpunten een (linker/rechter-) verticale raaklijn.



Opdracht 15 bladzijde 28

Bereken.

$$1 \frac{d}{dx} [Bg\cos(4x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4 = \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$2 \frac{d}{dx} [Bg\sin(2x^2 - 3)] = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-3)^2}} \cdot 4x = \frac{4x}{\sqrt{-4x^4+12x^2-8}} = \frac{2x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}$$

$$3 \frac{d}{dx} \left(Bg\tan\left(\frac{1}{1+x}\right) \right) = \frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2+1} = \frac{-1}{x^2+2x+2}$$

$$4 \frac{d}{dx} \left(x Bg\sin x + \sqrt{1-x^2} \right) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + Bg\sin x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = Bg\sin x$$

Opdracht 16 bladzijde 28

Begin 2014 bedroeg de wereldbevolking 7,2 miljard. De procentuele toename was toen 1,3 % per jaar.

- 1 Met welk getal wordt de wereldbevolking elk jaar vermenigvuldigd bij een groei van 1,3 % per jaar?

De wereldbevolking wordt elk jaar vermenigvuldigd met $1 + 0,013 = 1,013$.

- 2 Indien we veronderstellen dat de wereldbevolking blijft groeien met 1,3 % per jaar, wat is dan de wereldbevolking B (in miljard) in functie van de tijd t (in jaar), gerekend vanaf 2014?

$$B = 7,2 \cdot 1,013^t$$

- 3 Hoeveel zal, volgens dit model, de wereldbevolking bedragen in 2024?

$$B = 7,2 \cdot 1,013^{10} = 8,192698073$$

De wereldbevolking zal, volgens dit model, ongeveer 8,2 miljard zijn.

- 4 In welk jaar zal de wereldbevolking 20 miljard overschrijden?

$$7,2 \cdot 1,013^t > 20$$

$$\Leftrightarrow 1,013^t > \frac{20}{7,2}$$

$$\Leftrightarrow t \log 1,013 > \log \frac{20}{7,2}$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\log \frac{20}{7,2}}{\log 1,013} \approx 79,0983$$

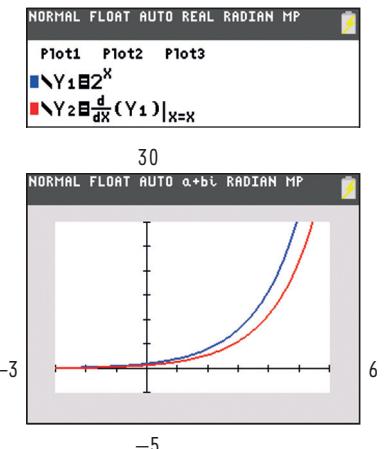
De wereldbevolking zal de 20 miljard overschrijden in 2093.

Opdracht 17 bladzijde 32

Gegeven de exponentiële functie $f: x \mapsto 2^x$.

- 1 Hiernaast zie je de grafiek van $f: x \mapsto 2^x$ en van de numerieke benadering van de afgeleide functie f' . Welk soort functie zal f' vermoedelijk zijn?

De grafiek van de afgeleide functie is van dezelfde vorm als $f(x) = 2^x$, dus f' is waarschijnlijk ook een exponentiële functie.



- 2 Ga na of je vermoeden uit 1 door de tabel bevestigd wordt.

f' is een exponentiële functie, want in de tabel zien we dat als de opeenvolgende x -waarden met 1 toenemen, de functiewaarden $f'(x)$ met 2 worden vermenigvuldigd.

De groeifactor van de afgeleide functie is dus ook 2.

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP		
X	Y ₁	Y ₂
-3	.125	.08664
-2	.25	.17329
-1	.5	.34657
0	1	.69315
1	2	1.3863
2	4	2.7726
3	8	5.5452
4	16	11.09
5	32	22.181
6	64	44.361
7	128	88.723

X = -3

- 3 Leid m.b.v. de tabel een mogelijk voorschrift af voor f' .

$f'(x) = b \cdot 2^x$. De beginwaarde $b = f'(0)$ die we in de tabel aflezen is 0,69315 zodat $f'(x) \approx 0,69315 \cdot 2^x$.

Opdracht 18 bladzijde 37

- 1 Bereken $\ln 1$, $\ln e$ en $\ln \frac{1}{e}$ zonder rekentoestel.

$$\ln 1 = e^{\ln 1} = 0 \text{ want } e^0 = 1$$

$$\ln e = e^{\ln e} = 1$$

$$\ln \frac{1}{e} = e^{\ln \frac{1}{e}} = e^{-1} = -1$$

- 2 Bereken e^4 , $\ln 10$ en ${}^3\log e$ met je rekentoestel.

$$e^4 \approx 54,5982; \ln 10 \approx 2,3026 \text{ en } {}^3\log e = \frac{\log e}{\log 3} \approx 0,9102$$

- 3 Hoe kun je ${}^2\log 5$ met de \ln -toets berekenen?

$${}^2\log 5 = \frac{e^{\ln 5}}{e^{\ln 2}} = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,322$$

Opdracht 19 bladzijde 38

Vereenvoudig zonder rekentoestel.

1 $e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$

2 $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

3 $e^{\ln 4 - 2 \ln 3} = e^{\ln \frac{4}{3^2}} = \frac{4}{9}$

4 $\ln e^{-2 \ln 3} = -2 \ln 3 = \ln 3^{-2} = \ln \frac{1}{9}$

Opdracht 20 bladzijde 38

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $e^{2x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 5$

2 $e^{-x+2} = 4 \Leftrightarrow -x + 2 = \ln 4 \Leftrightarrow x = 2 - \ln 4$

3 $\ln(1 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1-e}{2}$ (met $1 - 2x > 0$: BVW)

4 $\ln(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = e^0 \Leftrightarrow x = 2$ (met $3x - 5 > 0$: BVW)

Opdracht 21 bladzijde 38

Bereken

1 $\frac{d}{dx}(e^x \cdot \cos 3x) = e^x \frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x \frac{d}{dx}(e^x) = -3e^x \sin 3x + e^x \cos 3x = e^x(\cos 3x - 3\sin 3x)$

2 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x}\right) = \frac{e^x - x e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

3 $\frac{d}{dx}(3^{1-3x}) = 3^{1-3x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{d}{dx}(1-3x) = -3 \cdot 3^{1-3x} \cdot \ln 3 = -3^{2-3x} \cdot \ln 3$

4 $\frac{d}{dx}(x \cdot \sin(2^x)) = x \frac{d}{dx} \sin(2^x) + \sin(2^x) \frac{d}{dx}(x) = x \cos(2^x) \frac{d}{dx}(2^x) + \sin(2^x)$
 $= x \cos(2^x) \cdot 2^x \cdot \ln 2 + \sin(2^x)$

5 $\frac{d}{dx}(e^{\sin 2x}) = e^{\sin 2x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$

6 $\frac{d}{dx}(2 \operatorname{Bgsin}(e^{-x})) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \cdot \frac{d}{dx}(e^{-x}) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \cdot e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = \frac{-2e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

7 $\frac{d}{dx}(10^{\sqrt{x}}) = 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{10^{\sqrt{x}} \ln 10}{2\sqrt{x}}$

8 $\frac{d}{dx}\left(\frac{b^x}{\ln b} - \frac{\ln b}{b}\right) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{d}{dx}(b^x) = b^x$

Opdracht 22 bladzijde 42

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} [\ln(x^2)] = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2}{x}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} [\ln^2 x] = \frac{d}{dx} [(\ln x)^2] = 2 \ln x \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} \left(\log \frac{x^2 - 1}{x} \right) = \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x} \ln 10} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x} \ln 10} \cdot \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1) \ln 10}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Opdracht 23 bladzijde 42

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} [(1-x)^{-\pi}] = -\pi(1-x)^{-\pi-1} \frac{d}{dx}(1-x) = \pi(1-x)^{-\pi-1} = \frac{\pi}{(1-x)^{\pi+1}}$$

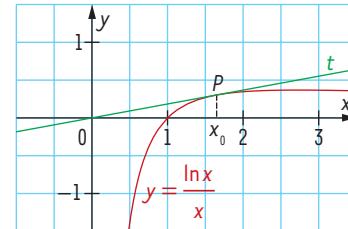
$$2 \quad \frac{d}{dx} (x^{\sin x}) = \frac{d}{dx} (e^{\ln x^{\sin x}}) = \frac{d}{dx} (e^{\sin x \cdot \ln x}) = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (\sin x \cdot \ln x) \\ = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right)$$

Opdracht 24 bladzijde 42Gegeven de functie $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.De rechte t gaat door de oorsprong en raakt de grafiek van f in het punt $P\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$.Bepaal x_0 .

$$(1) \quad \text{rico OP} = \frac{\frac{\ln x_0}{x_0} - 0}{x_0 - 0} = \frac{\ln x_0}{x_0^2}$$

$$(2) \quad \text{rico OP} = f'(x_0) \text{ met } f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ zodat } \text{rico OP} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt: } \frac{\ln x_0}{x_0^2} = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \stackrel{x_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x_0 = 1 - \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{e}.$$



Opdracht 25 bladzijde 42

De afkoelingswet van Newton geldt ook als een voorwerp koeler is dan de omgeving.

- 1 Zoë neemt een kip uit de koelkast die een temperatuur heeft van 6°C en wil die braden in een oven met een temperatuur van 200°C . Na 20 minuten is de temperatuur van de kip opgelopen tot 160°C .

Schrijf de temperatuur T (in $^\circ\text{C}$) van de kip in functie van de tijd t (in minuten).

$$T = T_0 + b \cdot e^{kt} \text{ met } T_0 = 200$$

– Op $t = 0$ is $T = 6$, dus $6 = 200 + b \Leftrightarrow b = -194$. We hebben al $T = 200 - 194 e^{kt}$.

$$– \text{Op } t = 20 \text{ is } T = 160 \text{ zodat } 160 = 200 - 194 e^{20k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{20} \ln \frac{40}{194} = \frac{1}{20} \ln \frac{20}{97}.$$

$$\text{Het voorschrift is } T = 200 - 194 e^{\left(\frac{1}{20} \ln \frac{20}{97}\right)t}.$$

- 2 Na 45 minuten is de kip klaar. Welke temperatuur heeft ze dan?

$$\text{Na 45 minuten is de temperatuur } T = 200 - 194 e^{\frac{45}{20} \ln \frac{20}{97}} \approx 194,4.$$

De temperatuur van de kip is dan ongeveer $194,4^\circ\text{C}$.

Opdracht 26 bladzijde 42

Er is een vrouw vermoord in een hotel. De gerechtsdokter is aanwezig en stelt om middernacht vast dat de lichaamstemperatuur van het slachtoffer nog $29,4^\circ\text{C}$ is. Twee uur later meet hij de temperatuur opnieuw, nu is de temperatuur nog $27,3^\circ\text{C}$.

De temperatuur van de kamer is constant 21°C . Veronderstel dat de vrouw geen koorts had en dus een lichaamstemperatuur van 37°C had op het ogenblik van het overlijden.

Bereken het vermoedelijke tijdstip van de moord.

- Volgens de afkoelingswet van Newton is $T = 21 + b \cdot e^{kt}$ (T in $^\circ\text{C}$ en t in minuten vanaf middernacht).
- Op $t = 0$ is $T = 29,4$ waaruit volgt dat $b = 8,4$.

We hebben al $T = 21 + 8,4 \cdot e^{kt}$.

$$– \text{Op } t = 2 \text{ is } T = 27,3 \text{ zodat } 27,3 = 21 + 8,4 \cdot e^{2k} \Leftrightarrow e^{2k} = 0,75 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln 0,75.$$

$$\text{Het voorschrift is } T = 21 + 8,4 \cdot e^{\frac{t}{2} \ln 0,75}.$$

- We zoeken nu het tijdstip waarop de temperatuur 37°C was:

$$21 + 8,4 \cdot e^{\frac{t}{2} \ln 0,75} = 37$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{2} \ln 0,75} = \frac{16}{8,4}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2 \ln \frac{16}{8,4}}{\ln 0,75} \approx -4,48 \Rightarrow t \approx -4 \text{ u } 29 \text{ min}$$

De vrouw is vermoedelijk vermoord om 19.31u.

Opdracht 27 bladzijde 51

Bereken

$$1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 8x} = \frac{6}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot 8x}{6x \cdot \sin 8x} = \frac{6}{8} \cdot \lim_{6x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{1}{\lim_{8x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x}} = \frac{3}{4}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 \sin 5x}{5x} \right)^2 = 25 \left(\lim_{5x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 = 25$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 = 1$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} + 4 \cdot \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 2 + 4 = 6$$

$$6 \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$$

Als $x > 0$, dan is $-x \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x$ en $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$, zodat $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

Als $x < 0$, dan is $x \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq -x$ en $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$, zodat $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

Bijgevolg is $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

Opdracht 28 bladzijde 51

Welke van de onderstaande mogelijkheden is de afgeleide van de functie met

voorschrift $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$?

A $\frac{1}{1 - \sin 2x}$

B $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

C 1

D $\frac{-\cos x}{\sin x + \cos x}$

E $\frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$

(bron © Modelvragen ijkingstoets burgerlijk ingenieur 2013)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \right) &= \frac{\cos x(\cos x - \sin x) - \sin x(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{(\cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin 2x} \end{aligned}$$

Antwoord A is juist.

Opdracht 29 bladzijde 51

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{x} \right) = \frac{x(-\sin x) - \cos x \cdot 1}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{\tan x} \right) = \frac{d}{dx} (\tan x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\tan x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x)^{\frac{2}{3}}}{3(\sin x)^{\frac{2}{3}} \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{3(\sin x)^{\frac{2}{3}} \cos^{\frac{4}{3}} x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}}$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} (\sin x \cdot \cos^2 x) = \sin x \cdot 2 \cos x (-\sin x) + \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x (-2 \sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{2 - \sin x} \right) = \frac{(2 - \sin x) \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{-2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(2 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{1 - 2 \sin x}{(2 - \sin x)^2}$$

$$5 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x - \sqrt{x} \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x}$$

$$6 \quad \frac{d}{dx} (x \cdot \sin x \cdot \cos x) = \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x$$

Opdracht 30 bladzijde 51

Voor welke x -waarden in het interval $[0, 2\pi]$ heeft de grafiek van $f: x \mapsto x + 2 \sin x$ een horizontale raaklijn?

$$f'(x) = 0$$

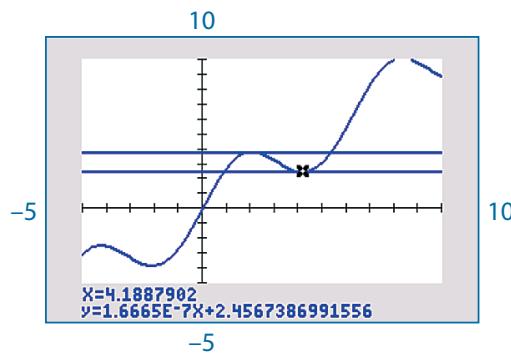
$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

De oplossingen in $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{2\pi}{3}$ en $x = \frac{4\pi}{3}$.

Controle met het grafisch rekentoestel (via Draw Tangent):

**Opdracht 31 bladzijde 52**

Welk verband bestaat er tussen a en b als de grafieken van de functies $f: x \mapsto \sin ax$ en $g: x \mapsto \sin bx$ elkaar loodrecht snijden in de oorsprong?

De grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \sin ax$ en $g(x) = \sin bx$ snijden elkaar loodrecht in de oorsprong als en slechts als $f'(0) \cdot g'(0) = -1$.

Aangezien $f'(x) = a \cos ax$ is $f'(0) = a$,

$g'(x) = b \cos bx$ zodat $g'(0) = b$.

De voorwaarde wordt dus $ab = -1$.

Opdracht 32 bladzijde 52

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} [\sin(7x+2)] = \cos(7x+2) \cdot 7 = 7\cos(7x+2)$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} (5 \cos 2x) = 5 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -10 \sin 2x$$

$$3 \quad \frac{d}{dx} (\sqrt{\sin 4x}) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 4x}} \cdot \cos 4x \cdot 4 = \frac{2\cos 4x}{\sqrt{\sin 4x}}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} [\cos(\cos x)] = -\sin(\cos x) \cdot (-\sin x) = \sin x \cdot \sin(\cos x)$$

$$5 \quad \frac{d}{dx} [\cos(\sin x^2)] = -\sin(\sin x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = -2x \cos(x^2) \cdot \sin(\sin x^2)$$

$$6 \quad \frac{d}{dx} [\sin(\cot 5x)] = \cos(\cot 5x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 5x}\right) \cdot 5 = \frac{-5\cos(\cot 5x)}{\sin^2 5x}$$

$$7 \quad \frac{d}{dx} (\cos(\sqrt{1+\sqrt{x}})) = -\sin(\sqrt{1+\sqrt{x}}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sin(\sqrt{1+\sqrt{x}})}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$$

$$8 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos 2x}{x} \right) = \frac{(-\sin 2x) \cdot 2 \cdot x - \cos 2x}{x^2} = -\frac{2x \sin 2x + \cos 2x}{x^2}$$

$$9 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} \right) = \frac{d}{dx} (\cos^{-2} x - 2\cos^{-1} x) = -2\cos^{-3} x(-\sin x) + 2\cos^{-2} x(-\sin x) \\ = 2\sin x \left(\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} (1 - \cos x)$$

$$10 \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x^2) + 1}{\cos(x^2) - \sin(x^2)} \right) \\ = \frac{\cos(x^2) \cdot 2x \cdot (\cos(x^2) - \sin(x^2)) - (\sin(x^2) + 1)(-\sin(x^2) \cdot 2x - \cos(x^2) \cdot 2x)}{(\cos(x^2) - \sin(x^2))^2} \\ = \frac{2x(\cos^2(x^2) - \cos(x^2)\sin(x^2) + \sin^2(x^2) + \sin(x^2)\cos(x^2) + \sin(x^2) + \cos(x^2))}{(\cos(x^2) - \sin(x^2))^2} \\ = \frac{2x(1 + \sin(x^2) + \cos(x^2))}{(\cos(x^2) - \sin(x^2))^2}$$

Opdracht 33 bladzijde 52

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sqrt{25 - \sin^3 \theta} \right) = \frac{1}{2\sqrt{25 - \sin^3 \theta}} \cdot (-3\sin^2 \theta) \cdot \cos \theta = -\frac{3\sin^2 \theta \cos \theta}{2\sqrt{25 - \sin^3 \theta}}$$

$$2 \quad \frac{d}{dt} \left(\cos \frac{5\pi t}{3} + \sin \frac{5\pi t}{3} \right) = -\left(\sin \frac{5\pi t}{3} \right) \cdot \frac{5\pi}{3} + \left(\cos \frac{5\pi t}{3} \right) \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \left(\cos \frac{5\pi t}{3} - \sin \frac{5\pi t}{3} \right)$$

$$3 \quad \frac{d}{ds} (\tan^{-4}(3s+1)) = -4\tan^{-5}(3s+1) \cdot \frac{1}{\cos^2(3s+1)} \cdot 3 = -\frac{12\cos^3(3s+1)}{\sin^5(3s+1)}$$

$$4 \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left[\left(\cos \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)^{-1} \right] &= -\left(\cos \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)^{-2} \left(-\sin \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha \right) \\ &= \frac{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha + 1}{\sin \alpha} \right)^2} = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{(\cos \alpha \sin \alpha + 1)^2} \end{aligned}$$

Opdracht 34 bladzijde 52

Bereken

$$1 \quad \frac{d^2}{dx^2} [\sin(3x^2)]$$

$$y = \sin(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(3x^2) \cdot 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\cos(3x^2) - 36x^2 \sin(3x^2) = 6(\cos(3x^2) - 6x^2 \sin(3x^2))$$

$$2 \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\cos x} \right)$$

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

Opdracht 35 bladzijde 52

Als $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$ en $g'(0) = 3$, bereken dan $(f \circ g)'(0)$.

Als $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$ en $g'(0) = 3$,

dan is $(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Opdracht 36 bladzijde 52

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(B \tan \frac{5}{x} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{x} \right)^2} \cdot \left(-\frac{5}{x^2} \right) = \frac{-5}{x^2 + 25}$$

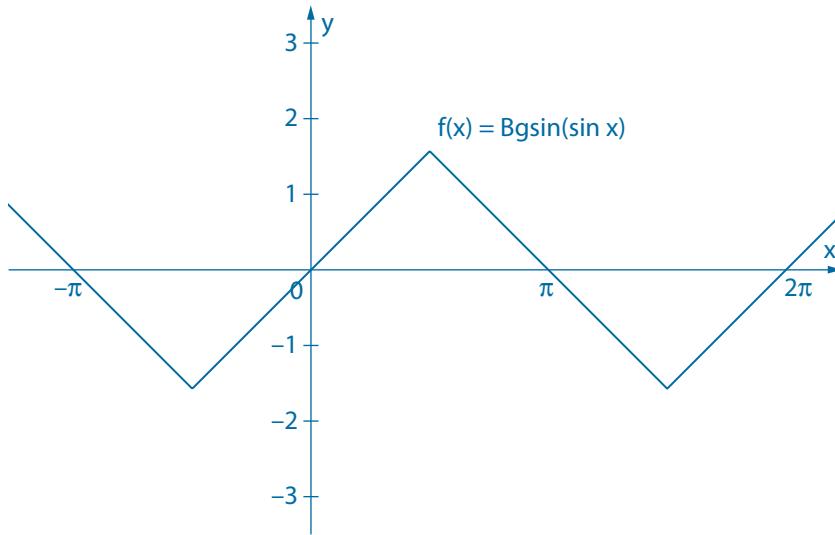
$$2 \quad \frac{d}{dx} \left(B \cos(2-x) \right) = -\frac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}} \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

$$3 \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\tan 4x \cdot (\tan 4x)^2 \right) &= \frac{8B \tan 4x}{1+16x^2} \cdot \tan 4x + (\tan 4x)^2 \cdot \frac{4}{\cos^2 4x} \\ &= 4B \tan 4x \left(\frac{2 \tan 4x}{1+16x^2} + \frac{\tan 4x}{\cos^2 4x} \right) \end{aligned}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx} \left(B \sin(\sin x) \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

Interessant is hier te wijzen op de grafische betekenis.

De afgeleide is steeds gelijk aan 1 of -1, behalve voor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), waar de linker- en rechterafgeleide verschillen.



$$5 \quad \frac{d}{dx} \left(B \sin x^3 \right) = \frac{3(B \sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$6 \quad \frac{d}{dx} \left(B \tan \sqrt{x^2-1} \right) = \frac{1}{1+x^2-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Opdracht 37 bladzijde 52

Bepaal het reëel getal a als $\frac{d}{dx} \left(B \operatorname{gtan} \frac{x-1}{x+1} + a B \operatorname{gtan} x \right) = 0$ voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(B \operatorname{gtan} \frac{x-1}{x+1} + a B \operatorname{gtan} x \right) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} + \frac{a}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} + \frac{a}{1+x^2} = \frac{2}{2x^2+2} + \frac{a}{1+x^2} = \frac{1+a}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left(B \operatorname{gtan} \frac{x-1}{x+1} + a B \operatorname{gtan} x \right) = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Opdracht 38 bladzijde 53

Bereken.

$$1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\cos 7x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 5x}{5x}}{\frac{\cos 7x - 1}{7x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{2}}{\frac{-\sin^2 \frac{7x}{2}}{2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} & \frac{5x}{2} \\ \frac{2}{\frac{7x}{2}} & \frac{7x}{2} \\ \frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} & \frac{7x}{2} \\ \frac{2}{\frac{7x}{2}} & \frac{7x}{2} \end{pmatrix}^2 = - \frac{25}{4} \begin{pmatrix} \lim_{\frac{5x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} & \frac{5x}{2} \\ \lim_{\frac{7x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} & \frac{7x}{2} \end{pmatrix}^2 = - \frac{25}{49}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} &\stackrel{\text{Simpson}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{3x}{2}}{3x} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}} \\ &= -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim_{\frac{3x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{4x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{4} \cdot \cos \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{4} \cdot \cos 0 = \frac{1}{4}$$

Opdracht 39 bladzijde 53

Bereken $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} \right)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} \right) &= \frac{(\cos x + x \sin x)(\cos x - \cos x + x \sin x) - (\sin x - x \cos x)(-\sin x + \sin x + x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{(\cos x + x \sin x)x \sin x - (\sin x - x \cos x)x \cos x}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x(\cos x \sin x + x \sin^2 x - \sin x \cos x + x \cos^2 x)}{(\cos x + x \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}\end{aligned}$$

Opdracht 40 bladzijde 53

Bereken de afgeleiden met de gegevens uit de tabel.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	3	-2	5	3
5	2	6	-4	1

1 $F'(5)$ met $F(x) = f(f(x))$

$$F(x) = f(f(x))$$

$$F'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$F'(5) = f'(f(5)) \cdot f'(5) = f'(2) \cdot 6 = -2 \cdot 6 = -12$$

2 $G'(2)$ met $G(x) = f(g(x))$

$$G(x) = f(g(x))$$

$$G'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$G'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(5) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

3 $H'(2)$ met $H(x) = f(x^2 + 1)$

$$H(x) = f(x^2 + 1)$$

$$H'(x) = f'(x^2 + 1) \cdot 2x$$

$$H'(2) = f'(5) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

Opdracht 41 bladzijde 53

Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking die één of meerdere afgeleiden van een onbekende functie bevat.

Zo is $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ een voorbeeld van een differentiaalvergelijking, die we ook

noteren als $y'' + y = 0$.

- 1** Toon aan dat $y = \cos x$ en $y = \sin x$ oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$.

Als $y = \cos x$, dan is $y' = -\sin x$ en $y'' = -\cos x$ zodat $y'' + y = 0$,

als $y = \sin x$, dan is $y' = \cos x$ en $y'' = -\sin x$ zodat $y'' + y = 0$.

- 2** Toon aan dat ook $y = A \sin x + B \cos x$, waarbij A en B willekeurige constanten zijn, een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$.

Als $y = A \sin x + B \cos x$, dan is $y' = A \cos x - B \sin x$ en $y'' = -A \sin x - B \cos x$ zodat $y'' + y = 0$.

- 3** Bepaal de constanten A en B zodanig dat de functie $y = A \sin x + B \cos x$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + y' - 3y = \cos x$.

$$y = A \sin x + B \cos x, y' = A \cos x - B \sin x \text{ en } y'' = -A \sin x - B \cos x$$

$$y'' + y' - 3y = \cos x$$

$$\Leftrightarrow -A \sin x - B \cos x + A \cos x - B \sin x - 3A \sin x - 3B \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow (-4A - B)\sin x + (A - 4B)\cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4A - B = 0 \\ A - 4B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{17} \\ B = -\frac{4}{17} \end{cases}$$

Opdracht 42 bladzijde 53

Voor welke waarde van a en b is $y = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + 4y = \sin x \cos x$?

$$y = x(a \cos 2x + b \sin 2x)$$

$$y' = a \cos 2x + b \sin 2x + x(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x)$$

$$y'' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x - 2a \sin 2x + 2b \cos 2x + x(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x)$$

$$= -4a \sin 2x + 4b \cos 2x - 4x(a \cos 2x + b \sin 2x)$$

Invullen in $y'' + 4y = \sin x \cos x$ geeft

$$-4a \sin 2x + 4b \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Dit geldt voor elke waarde van x , in het bijzonder voor

$$(1) x = 0 \text{ zodat } 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$(2) x = \frac{\pi}{4} \text{ zodat } -4a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Opdracht 43 bladzijde 54

Is $y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 3y^5$?

Toon aan met een berekening.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}} = (\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(\cos 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x \cdot (\cos 2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2\cos 2x \cdot (\cos 2x)^{-\frac{3}{2}} + \sin 2x \cdot \frac{-3}{2}(\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 \\ &= 2(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} + 3\sin^2 2x \cdot (\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$= 2(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} + 3(1 - \cos^2 2x) \cdot (\cos 2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 2(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} + 3(\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} - 3(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3(\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} - (\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Nu is } y'' + y = 3(\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} - (\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} + (\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = 3(\cos 2x)^{-\frac{5}{2}} = 3y^5.$$

Dus ja, $y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 3y^5$.

Opdracht 44 bladzijde 54

Bereken $(f \circ g)'(a)$.

$$1 \quad f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = -1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(f \circ g)'(-1) = f'(g(-1)) \cdot g'(-1) = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Een andere methode is eerst $f \circ g$ te bepalen en van deze functie de afgeleide te berekenen.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - (1-x) = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1 \text{ voor elke waarde van } x$$

2 $f(x) = \cot \frac{\pi x}{10}$, $g(x) = 5\sqrt{x}$, $a = 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{10}} \cdot \frac{\pi}{10}, \quad g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(5) \cdot \frac{5}{2} = -\frac{\pi}{10} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

3 $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $g(x) = \pi x$, $a = \frac{1}{4}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \quad g'(x) = \pi$$

$$(f \circ g)' \left(\frac{1}{4} \right) = f' \left(g \left(\frac{1}{4} \right) \right) \cdot g' \left(\frac{1}{4} \right) = f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \right) \cdot \pi = 5\pi$$

4 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $g(x) = 10x^2 + x + 1$, $a = 0$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad g'(x) = 20x + 1$$

$$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot 1 = 0$$

Opdracht 45 bladzijde 54

Bereken $\frac{d}{dx} \left(a^2 \operatorname{Bgsin} \frac{x-a}{a} + (x-a)\sqrt{2ax-x^2} \right)$ met $a > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(a^2 \operatorname{Bgsin} \frac{x-a}{a} + (x-a)\sqrt{2ax-x^2} \right) &= a^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} + (x-a) \cdot \frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}} + \sqrt{2ax-x^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2-x^2+2ax-a^2}{a^2}}} + \frac{(x-a)(a-x)+2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}} + \frac{-x^2+2ax-a^2+2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad (a>0) \\ &= \frac{2(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2\sqrt{2ax-x^2} \end{aligned}$$

Opdracht 46 bladzijde 54**Implicit afleiden**

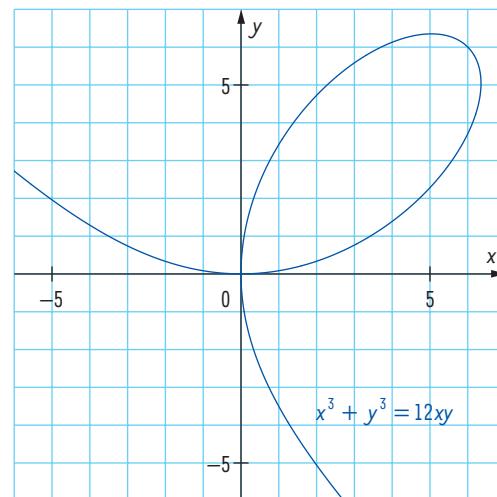
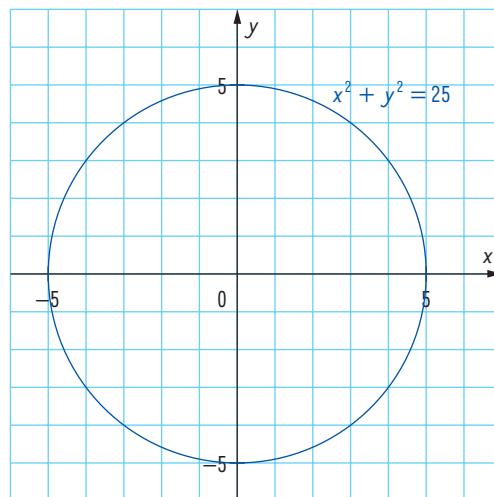
De meeste grafieken die we tot nog toe hebben ontmoet, worden beschreven met een voorschrift waarbij één variabele expliciet wordt uitgedrukt als functie van een andere variabele zoals $y = x$, $\cos x$, $y = x^2 - 4x + 3$ of in het algemeen $y = f(x)$.

Soms worden krommen echter impliciet gedefinieerd met een verband tussen x en y .

Zo zijn $x^2 + y^2 = 25$ (1)

en $x^3 + y^3 = 12xy$ (2)

voorbeelden van **impliciete voorschriften**.



Soms is het mogelijk om y in functie van x uit te drukken. Zo volgt uit (1) dat $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.

Bij (2) is het niet meer zo eenvoudig om y in functie van x uit te drukken. Gelukkig is het niet nodig om y te expliciteren als functie van x om de afgeleide van y naar x te kunnen berekenen, zoals in de onderstaande voorbeelden geïllustreerd wordt.

Voorbeeld 1

Om $\frac{dy}{dx}$ te bepalen als $x^2 + y^2 = 25$, kunnen we beide leden afleiden zonder y in

functie van x te schrijven:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad y \text{ is impliciet een functie van } x \text{ dus passen we de kettingregel toe}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Deze manier om afgeleiden te berekenen noemen we de methode van het **implicit afleiden**.

Implicit afleiden is bijzonder handig als het moeilijk of onmogelijk is om y expliciet uit te drukken in functie van x .

Voorbeeld 2

Gegeven de kromme $k \leftrightarrow x^3 + y^3 = 12xy$ (2). Bereken $\frac{dy}{dx}$ en bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan k in het punt $P(6, 6)$.

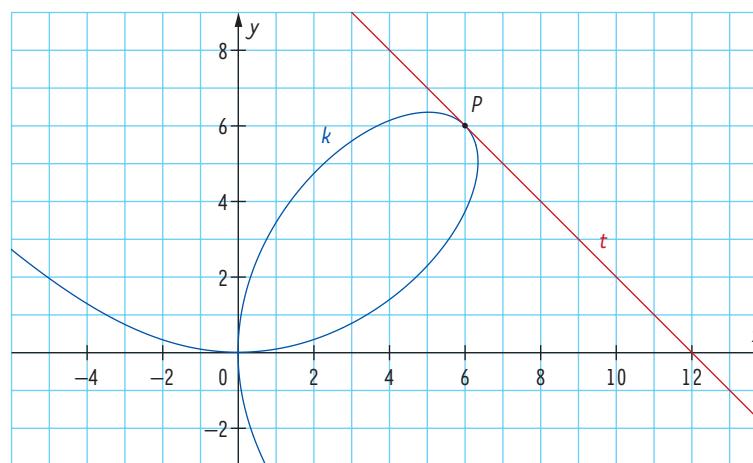
Oplossing

Beide leden van (2) afleiden geeft

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \frac{d}{dx}(12xy) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 12x \frac{d}{dx}(y) + 12y \frac{d}{dx}(x) \\ \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 12x \frac{dy}{dx} + 12y \\ \Rightarrow (3y^2 - 12x) \frac{dy}{dx} &= 12y - 3x^2 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{4y - x^2}{y^2 - 4x} \\ \Rightarrow \text{rico } t &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(6, 6)} = \frac{4 \cdot 6 - 6^2}{6^2 - 4 \cdot 6} = -1 \end{aligned}$$

Een vergelijking van de raaklijn t aan k in het punt P is
 $y - 6 = -(x - 6)$ of $y = -x + 12$.

De kromme $k \leftrightarrow x^3 + y^3 = 12xy$ wordt een **folium van Descartes** genoemd.



1 Bereken $\frac{dy}{dx}$ door impliciet afleiden.

a $3x^2 - y^2 = 6$

$$\Rightarrow 6x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y}$$

b $x = \cos 2y$

$$\Rightarrow 1 = -\sin 2y \cdot 2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sin 2y}$$

c $2xy + y^2 = x + y$

$$\Rightarrow 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (2x + 2y - 1) \frac{dy}{dx} = 1 - 2y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$$

d $(x - 2)y^3 = x + 2$

$$\Rightarrow (x - 2) \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} + y^3 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^3}{3(x - 2)y^2}$$

e $xy = \tan(2xy)$

$$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{\cos^2(2xy)} \cdot 2 \left(x \frac{dy}{dx} + y \right)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{2x}{\cos^2(2xy)} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{\cos^2(2xy)} - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(2 - \cos^2(2xy))}{x(\cos^2(2xy) - 2)} = -\frac{y}{x}$$

f $\operatorname{Bgtan}(x + y) = x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + (x + y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + (x + y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x + y)^2$$

- 2 Bereken de helling van de hyperbool $h \leftrightarrow x^2 - xy - y^2 = 2$ in de snijpunten van h met de x -as.

- We bepalen de snijpunten van h met de x -as:

$$y=0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

De snijpunten zijn $P_1(\sqrt{2}, 0)$ en $P_2(-\sqrt{2}, 0)$.

- We berekenen $\frac{dy}{dx}$ door impliciet afleiden:

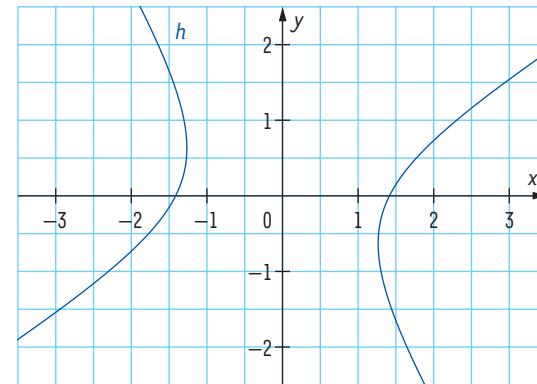
$$2x - x \frac{dy}{dx} - y - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y = (x + 2y) \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2y}$$

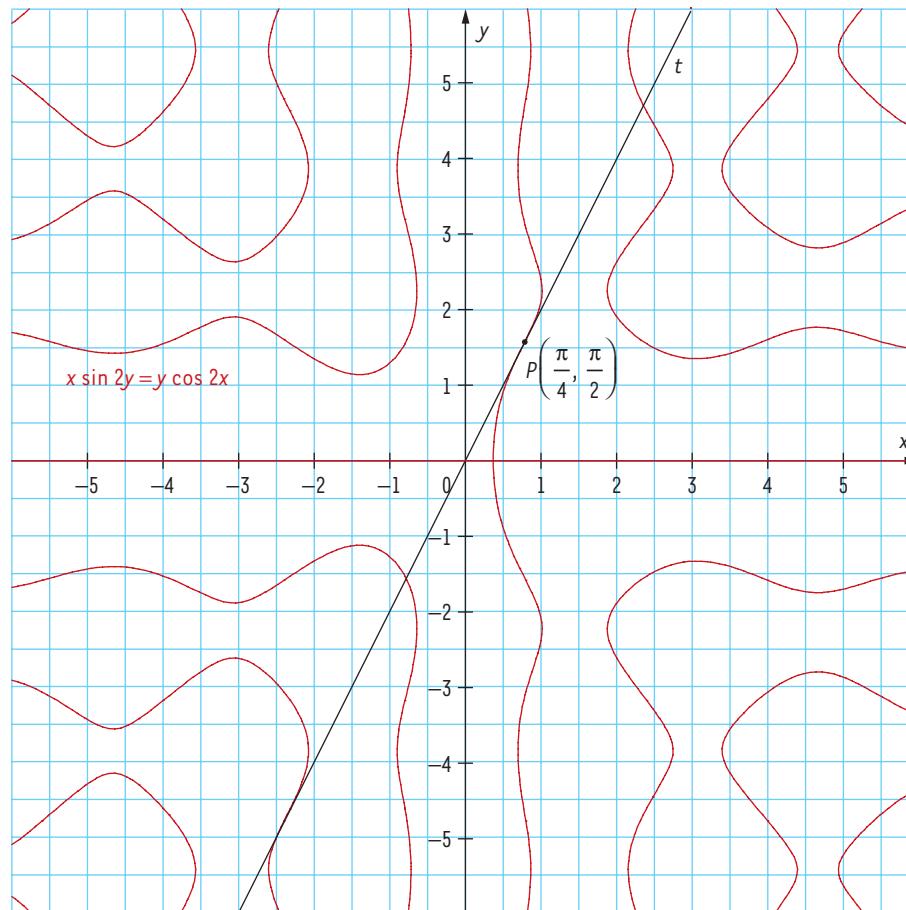
- De helling in $P_1(\sqrt{2}, 0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{(\sqrt{2}, 0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

- De helling in $P_2(-\sqrt{2}, 0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{(-\sqrt{2}, 0)} = \frac{-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2$.



- 3 In de figuur is de grafiek getekend van de kromme met vergelijking $x \sin 2y = y \cos 2x$ met de raaklijn t in het punt $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Bepaal een vergelijking van t .



Impliciet afleiden van $x \sin 2y = y \cos 2x$ geeft

$$\sin 2y + 2x \cos 2y \frac{dy}{dx} = \cos 2x \frac{dy}{dx} - 2y \sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y \sin 2x - \sin 2y}{2x \cos 2y - \cos 2x}$$

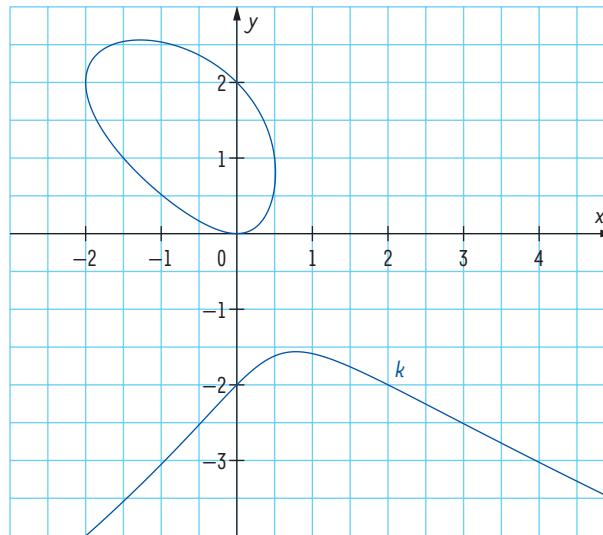
Voor $x = \frac{\pi}{4}$ en $y = \frac{\pi}{2}$ vinden we

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\pi \sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi}{\frac{\pi}{2} \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{-\frac{\pi}{2}} = 2$$

De raaklijn t heeft als vergelijking $y - \frac{\pi}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ of $y = 2x$.

De raaklijn gaat dus door de oorsprong.

- 4 Bepaal exacte vergelijkingen van de horizontale raaklijnen aan de kromme k met vergelijking $y^3 = 4(y - x^2 - xy)$.



- We berekenen $\frac{dy}{dx}$ door impliciet afleiden:

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 4 \left(\frac{dy}{dx} - 2x - x \frac{dy}{dx} - y \right)$$

$$(3y^2 - 4 + 4x) \frac{dy}{dx} = -4(2x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4(2x + y)}{3y^2 - 4 + 4x}$$

De raaklijn is horizontaal in een punt $P(x, y)$ waarvoor geldt dat $-4(2x + y) = 0$ en $3y^2 - 4 + 4x \neq 0$.

Uit $-4(2x + y) = 0$ volgt dat $y = -2x$.

Invullen in $y^3 = 4(y - x^2 - xy)$: $-8x^3 = 4(-2x - x^2 + 2x^2)$ en dus

$$-2x^3 = -2x + x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

- Vergelijking van de horizontale raaklijn in $P_1(0, 0)$: $y = 0$

- Vergelijking van de horizontale raaklijn in $P_2\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$: $y = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$

- Vergelijking van de horizontale raaklijn in $P_3\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$: $y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

Opdracht 47 bladzijde 58

Vereenvoudig.

$$1 \quad \ln e^{-\ln e^8} = -\ln e^8 = -8$$

$$2 \quad e^{-2 \ln 5} = e^{\ln 5^{-2}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$3 \quad e^{4 \ln \sqrt{2}} = e^{\ln(\sqrt{2})^4} = 4$$

$$4 \quad \ln \sqrt[3]{e^4} = \ln e^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$5 \quad e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)} = ab$$

$$6 \quad e^{c \ln a - d \ln b} = e^{\ln \frac{a^c}{b^d}} = \frac{a^c}{b^d}$$

Opdracht 48 bladzijde 58

Een bacteriecultuur groeit exponentieel volgens de formule $y = 4 e^t$ waarbij de tijd t wordt gemeten in uren en y de hoeveelheid bacteriën voorstelt.

$$1 \quad \text{Toon aan dat } \frac{dy}{dt} = y.$$

Wat betekent dit voor de groei van de bacteriecultuur?

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4e^t) = 4e^t = y$$

De snelheid waarmee de bacteriecultuur groeit op een bepaald tijdstip is even groot als het aantal bacteriën op dat moment.

$$2 \quad \text{Hoe snel groeit de cultuur op het moment dat ze 1000 bacteriën telt?}$$

Ze groeit op dat moment met een snelheid van 1000 bacteriën per uur.

Opdracht 49 bladzijde 58

Bereken

$$1 \frac{d}{dx}(\sin x \cdot e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$2 \frac{d}{dx}(5e^{5x-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = 25e^{5x-1}$$

$$3 \frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} \cdot (-1) = e^x + e^{-x}$$

$$4 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x \cdot 2e^{2x} - (e^{2x}-1)2e^x}{4e^{2x}} = \frac{2e^{2x} - e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

$$5 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$6 \frac{d}{dx}\left(a \cdot 2^{\frac{x}{b}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot 2^{\frac{x}{b}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{a \ln 2}{b} \cdot 2^{\frac{x}{b}}$$

$$7 \frac{d}{dx}(3^{\cos x})$$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot 3^{\cos x} \cdot \ln 3$$

$$8 \frac{d}{dx}(\sin(e^{-x}))$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(e^{-x}) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} \cos(e^{-x})$$

Opdracht 50 bladzijde 58

- 1 In welk punt van de grafiek van $f: x \mapsto 1 + 2e^x - 3x$ is de raaklijn t evenwijdig met de rechte $r \leftrightarrow 3x - y = 5$?

$$3x - y = 5 \Leftrightarrow y = 3x - 5$$

$$f(x) = 1 + 2e^x - 3x \Rightarrow f'(x) = 2e^x - 3$$

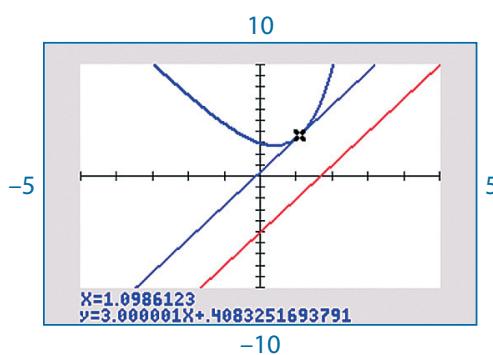
We zoeken nu x waarvoor $f'(x) = 3$ of $2e^x - 3 = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

In het punt $P(\ln 3, 7 - 3 \ln 3)$ is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de rechte $3x - y = 5$.

- 2 Bepaal een vergelijking van t .

Een vergelijking van de raaklijn is dan $y - 7 + 3 \ln 3 = 3(x - \ln 3)$ of $y = 3x + 7 - 6 \ln 3$.

Controle met het grafisch rekentoestel:

**Opdracht 51 bladzijde 58**

Een besmettelijke ziekte breekt uit in een geïsoleerd stadje met 2000 inwoners.

Wetenschappers hebben de volgende formule opgesteld die het aantal personen

$$\text{geeft dat } t \text{ dagen na het uitbreken van de ziekte besmet is: } N(t) = \frac{2000}{1 + 1999e^{-0,2t}}.$$

Bereken na hoeveel dagen de helft van de bevolking besmet is.

$$N(t) = 1000$$

$$\Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 1999e^{-0,2t}} = 1000$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + 1999e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1999} = e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,2} \ln \frac{1}{1999} \approx 38$$

Na ongeveer 38 dagen is de helft van de bevolking besmet.

Opdracht 52 bladzijde 59

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx}(\ln(3x + 7))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x+7} \cdot 3 = \frac{3}{3x+7}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx}(\ln(\cos x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$$

$$3 \quad \frac{d}{dx}(\ln^4 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4 \ln^3 x}{x}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 2x}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 - \ln 2x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln 2x}{x^2}$$

$$5 \quad \frac{d}{dx}(x^2 \ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$6 \quad \frac{d}{dx}(\ln(\ln x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$7 \quad \frac{d}{dx}(^2\log(7 - x^3))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2}{(7 - x^3)\ln 2}$$

$$8 \quad \frac{d}{dx}\left(\log x - ^3\log \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10} - \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \ln 3} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x \ln 10} + \frac{1}{x \ln 3}$$

Opdracht 53 bladzijde 59

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx}(x^{1+\sqrt{2}})$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+\sqrt{2})x^{\sqrt{2}}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx}[(\sin x)^{\ln 3}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln 3 (\sin x)^{\ln 3 - 1} \cos x$$

$$3 \quad \frac{d}{dx}(x^{\ln x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\ln(x^{\ln x})}) = \frac{d}{dx}(e^{\ln^2 x}) = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2x^{\ln x} \ln x}{x}$$

$$4 \quad \frac{d}{dx}(x^{2x+1})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\ln x^{2x+1}}) = \frac{d}{dx}(e^{(2x+1)\ln x}) = e^{(2x+1)\ln x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x} + 2 \ln x \right) = x^{2x+1} \left(2 \ln x + 2 + \frac{1}{x} \right)$$

Opdracht 54 bladzijde 59

Voor welke waarden van m is $y = e^{mx}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + 5y' - 6y = 0$?

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

Als $y = e^{mx}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + 5y' - 6y = 0$, dan moet $m^2 e^{mx} + 5me^{mx} - 6e^{mx} = 0$.

Aangezien $e^{mx} \neq 0$ moet dus $m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ of $m = 1$.

Opdracht 55 bladzijde 59

Toon aan dat $y = \sin(\ln \sqrt{x})$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + xy' + \frac{1}{4}y = 0.$$

$$y = \sin(\ln \sqrt{x})$$

$$y' = \cos(\ln \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\ln \sqrt{x})}{2x}$$

$$y'' = \frac{-2x \sin(\ln \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2x} - 2 \cos(\ln \sqrt{x})}{4x^2} = \frac{-\sin(\ln \sqrt{x}) - 2 \cos(\ln \sqrt{x})}{4x^2}$$

$$\text{Nu is } x^2 y'' + xy' + \frac{1}{4}y = \underbrace{\frac{-\sin(\ln \sqrt{x})}{4}}_{x^2 y''} + \underbrace{\frac{-\cos(\ln \sqrt{x})}{2}}_{xy'} + \underbrace{\frac{\cos(\ln \sqrt{x})}{2}}_{\frac{1}{4}y} + \underbrace{\frac{\sin(\ln \sqrt{x})}{4}}_{\frac{1}{4}y} = 0, \text{ waarmee het}$$

gestelde bewezen is.

Opdracht 56 bladzijde 59

Het verval van het radioactief element Polonium 218 verloopt volgens de

$$\text{differentiaalvergelijking } \frac{dm}{dt} = -0,227 \cdot m.$$

Daarbij wordt de tijd t in minuten en de massa m in mg gemeten.

Stel dat voor $t = 0$ de massa m_0 bedraagt.

- 1** Geef het voorschrift voor m in functie van t .

$$\frac{dm}{dt} = -0,227 \cdot m \Leftrightarrow m = m_0 \cdot e^{-0,227t}$$

- 2** Bereken de halveringstijd.

$$\text{Zoek } t \text{ waarvoor } m = m_0 \cdot e^{-0,227t} = \frac{m_0}{2} \Leftrightarrow e^{-0,227t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,227} \ln \frac{1}{2} \approx 3,05.$$

De halveringstijd is ongeveer 3 minuten en 3 seconden.

- 3** Op welk tijdstip is nog 10 % van de beginmassa aanwezig?

$$e^{-0,227t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,227} \ln \frac{1}{10} \approx 10,14$$

Na ongeveer 10 minuten en 9 seconden is er nog 10 % van de beginmassa aanwezig.

Opdracht 57 bladzijde 59

Een radioactief isotoop heeft een halveringstijd van 16 dagen. Je wenst na 30 dagen 30 g van het isotoop over te houden.

Welke hoeveelheid moet je dan aanvankelijk hebben?

$$m = b \cdot e^{at}$$

- De halveringstijd is 16 dagen, dus $e^{16a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{16} \ln \frac{1}{2} \approx -0,0433$.

Daaruit volgt dat $m = b \cdot e^{\frac{t}{16} \ln \frac{1}{2}}$.

- Na 30 dagen is er nog 30 g over, zodat $b \cdot e^{\frac{30}{16} \ln \frac{1}{2}} = 30 \Leftrightarrow b = \frac{30}{e^{\frac{15}{8} \ln \frac{1}{2}}} \approx 110,04$.

Aanvankelijk moet er ongeveer 110 g van het isotoop aanwezig zijn.

Opdracht 58 bladzijde 60

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

$$\begin{aligned} &\text{stel } e^x = y \\ &\Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 4 \text{ of } y = 2 \\ &\Leftrightarrow e^x = 4 \text{ of } e^x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 4 \text{ of } x = \ln 2 \end{aligned}$$

2 $e^{2x} - 3e^x = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow e^x(e^x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cancel{e^x = 0} \text{ of } e^x = 3 \quad e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \end{aligned}$$

3 $2e^x - 3e^{-x} - 5 = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0 \quad \text{linker- en rechterlid} \cdot e^x > 0 \\ &\text{stel } e^x = y \\ &\Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 3 \text{ of } y = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x = 3 \text{ of } e^x = -\frac{1}{2} \quad e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \end{aligned}$$

$$4 \quad e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 \quad \text{linker- en rechterlid} \cdot e^{2x} > 0$$

$$\text{stel } e^x = y$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ of } y = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ of } e^x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$$

$$5 \quad \ln^2 x - 4 \ln x - 5 = 0$$

BVW: $x > 0$

$$\text{stel } \ln x = y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ of } y = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ of } \ln x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ of } x = e^5$$

$$6 \quad 2 \ln 2x - 5 = \frac{3}{\ln 2x}$$

BVW: $2x > 0$

$$\Leftrightarrow 2\ln^2 2x - 5 \ln 2x - 3 = 0 \quad \text{linker- en rechterlid} \cdot \ln 2x, \ln 2x \neq 0$$

$$\text{stel } \ln 2x = y$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \text{ of } y = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2x = 3 \text{ of } \ln 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^3}{2} \text{ of } x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

Opdracht 59 bladzijde 60

Los de volgende stelsels op.

$$1 \quad \begin{cases} 3 \ln x - \ln y = \ln 1024 \\ 2 \ln x - \ln y^3 = 2 \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x^3}{y} = \ln 2^{10} \\ \ln \frac{x^2}{y^3} = \ln 2^2 \end{cases} \quad (\text{BVW: } x > 0 \text{ en } y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{y} = 2^{10} \\ \frac{x^2}{y^3} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{2^{10}} = y \\ \frac{x^2}{\left(\frac{x^3}{2^{10}}\right)^3} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{2^{10}} = y \\ \frac{2^{30}x^2}{x^9} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{2^{10}} = y \\ 2^{28} = x^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^4)^3 = y \\ x = 2^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} e^x \cdot \ln y = 3 \\ 7e^x - 4 \ln y = 17 \end{cases} \quad (\text{BVW: } y > 0)$$

stel $e^x = X$ en $\ln y = Y$, dan wordt het stelsel

$$\begin{cases} X \cdot Y = 3 \\ 7X - 4Y = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{3}{X} \\ 7X - \frac{12}{X} = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{3}{X} \\ 7X^2 - 17X - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} X = \frac{-4}{7} \\ Y = \frac{-21}{4} \end{cases}$$

Aangezien $e^x = X > 0$, is de tweede oplossing een ingevoerde oplossing zodat

$$\begin{cases} e^x = 3 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ y = e \end{cases}$$

Opdracht 60 bladzijde 60

Bereken het reëel getal k als $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + ky' + 2ky = 0$.

$$y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$y' = e^{-2x}(2\cos 2x - 2\sin 2x) - 2e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) = e^{-2x}(-4\sin 2x) = -4e^{-2x}\sin 2x$$

$$y'' = -8e^{-2x}\cos 2x + 8e^{-2x}\sin 2x = 8e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)$$

$$\begin{aligned} y'' + ky' + 2ky &= e^{-2x}(8\sin 2x - 8\cos 2x - 4k\sin 2x + 2k\sin 2x + 2k\cos 2x) \\ &= e^{-2x}((8 - 2k)\sin 2x - (8 - 2k)\cos 2x) \end{aligned}$$

Nu is $y'' + ky' + 2ky = 0$ als $8 - 2k = 0$, dus als $k = 4$.

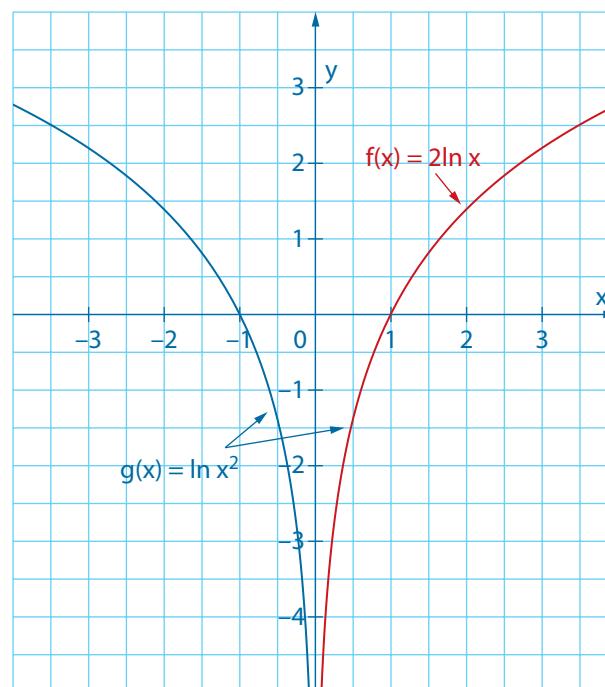
Opdracht 61 bladzijde 60

- 1 Voor welke waarden van x geldt de formule $\ln x^2 = 2 \ln x$?

Dit geldt enkel als $x > 0$, want enkel dan zijn zowel het linker- als het rechterlid gedefinieerd.

- 2 Pas het rechterlid van de formule aan zodat ze geldt voor alle $x \neq 0$.

$\ln x^2 = 2 \ln |x|$ geldt voor elke $x \neq 0$.



Opdracht 62 bladzijde 60

Bepaal a zodanig dat de rechte $l \leftrightarrow y = 4x + a$ raakt aan de grafiek van de functie $f: x \mapsto e^{2x}$.

- Noem het raakpunt $P(x_0, f(x_0))$.
- $f'(x) = 2e^{2x}$, dus is $f'(x_0) = 2e^{2x_0}$.
- Er moet gelden dat $f'(x_0) = 4$, dus: $2e^{2x_0} = 4 \Leftrightarrow e^{2x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\ln 2}{2}$.
Het raakpunt is $P\left(\frac{\ln 2}{2}, 2\right)$.

- Een vergelijking van de raaklijn t in $P\left(\frac{\ln 2}{2}, 2\right)$ aan de grafiek van f is

$$y - 2 = 4\left(x - \frac{\ln 2}{2}\right)$$

$$y = 4x - 2\ln 2 + 2$$

Hieruit volgt dat $a = 2 - 2\ln 2$.

Opdracht 63 bladzijde 60

Voor welke waarde(n) van de reële parameter m is de functie $f: x \mapsto \sqrt{\ln(m \cdot \sin x + 3)}$ gedefinieerd voor alle waarden van x ?

$f(x) = \sqrt{\ln(m \cdot \sin x + 3)}$ is gedefinieerd voor alle waarden van x als

$$\ln(m \cdot \sin x + 3) \geq 0 \text{ en } m \cdot \sin x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \sin x + 3 \geq 1 \text{ en } m \cdot \sin x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \sin x + 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \sin x \geq -2 \text{ voor alle waarden van } x$$

De functie met voorschrift $y = m \sin x$ is een algemene sinusfunctie met amplitude $|m|$ en de rechte met vergelijking $y = 0$ als evenwichtslijn.

De maximale uitwijking t.o.v. de x -as mag dus niet groter zijn dan 2,

$$\text{m.a.w. } |m| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Opdracht 64 bladzijde 60

Bepaal k als $y = \cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = k \cdot \tan x \text{ als } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$y = \cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$y' = -\sin x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) + \cos x \cdot \frac{1}{\tan x + \frac{1}{\cos x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$$

$$= -\sin x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) + \frac{\cos^2 x}{\sin x + 1} \cdot \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= -\sin x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) + 1$$

$$y'' = -\cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) - \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x + 1} \cdot \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= -\cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) - \tan x$$

$$\text{Nu is } y'' + y = -\cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) - \tan x + \cos x \cdot \ln\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) = -\tan x,$$

zodat $k = -1$.

Opdracht 65 bladzijde 60

Bereken

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left((\ln 2x)^{\sin x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(e^{\ln(\ln 2x)^{\sin x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{\sin x \ln(\ln 2x)} \right) = e^{\sin x \ln(\ln 2x)} \cdot \left[\sin x \cdot \frac{1}{\ln 2x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 + \cos x \ln(\ln 2x) \right] \\ &= (\ln 2x)^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x \ln 2x} + \cos x \ln(\ln 2x) \right) \end{aligned}$$

$$2 \quad \frac{d}{dx} \left((\sin 3x)^{2-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(e^{\ln(\sin 3x)^{2-x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{(2-x) \ln(\sin 3x)} \right) = e^{(2-x) \ln(\sin 3x)} \cdot \left[(2-x) \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x} - \ln(\sin 3x) \right] \\ &= (\sin 3x)^{2-x} \cdot \left[3 \cdot (2-x) \cdot \cot 3x - \ln(\sin 3x) \right] \end{aligned}$$

3 $\frac{d}{dx} \left(\ln(x^{\sqrt{x}}) \right)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+(x^{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{d}{dx} (e^{\ln(x^{\sqrt{x}})}) = \frac{\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x} \cdot \ln x})}{1+x^{2\sqrt{x}}} = \frac{e^{\sqrt{x} \cdot \ln x} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)}{1+x^{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{x^{\sqrt{x}} \left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} \right)}{1+x^{2\sqrt{x}}} = \frac{x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\ln x + 2)}{2(1+x^{2\sqrt{x}})}\end{aligned}$$

Opdracht 66 bladzijde 60

Bereken het rationaal getal q als $y = \sqrt[4]{x} e^{-2\sqrt{x}}$ een oplossing is van de

differentiaalvergelijking $x^2 y'' + \frac{3}{16} y = x^q e^{-2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned}y &= \sqrt[4]{x} e^{-2\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ y' &= \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} - x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ y'' &= \frac{-3}{16} x^{-\frac{7}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{-3}{16} x^{-\frac{7}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-3}{16} x^{-\frac{7}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-3}{16} x^{-\frac{7}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned}x^2 y'' + \frac{3}{16} y &= \frac{-3}{16} x^{-\frac{7}{4}+2} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{-\frac{3}{4}+2} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + \frac{3}{16} x^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-3}{16} x^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + x^{\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} + \frac{3}{16} x^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} \\ &= x^{\frac{5}{4}} \cdot e^{-2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Hieruit volgt: $q = \frac{5}{4}$.

Opdracht 67 bladzijde 61

De stralingsintensiteit van radioactief materiaal kan verlaagd worden met behulp van absorberend materiaal. Hiervoor geldt de absorptieformule $I = I_0 e^{-kx}$, waarin I_0 de stralingsintensiteit is vóór het binnendringen, I de stralingsintensiteit bij het verlaten van het absorberend materiaal, x de dikte van het materiaal in mm en k de absorptiecoëfficiënt.

- 1** Bereken de halveringsdikte d , dit is de dikte die nodig is om de stralingsintensiteit te halveren, in functie van k .

$$I = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow I_0 e^{-kx} = \frac{1}{2} I_0 \Leftrightarrow e^{-kx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{k} \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{k}$$

De halveringsdikte is $d = \frac{\ln 2}{k}$. (1)

- 2** Toon aan dat de formule $I = I_0 e^{-kx}$ kan geschreven worden als $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{d}}$.

Uit (1) volgt dat $k = \frac{\ln 2}{d}$ en dus

$$I = I_0 e^{-kx} = I_0 e^{-\frac{\ln 2}{d}x} = I_0 e^{\frac{x}{d} \ln \frac{1}{2}} = I_0 \left(e^{\ln \frac{1}{2}}\right)^{\frac{x}{d}} = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{d}}.$$

- 3** Lood heeft een halveringsdikte van 10 mm. Hoe dik moet een loden wand zijn om de straling tot 1 % van de oorspronkelijke waarde terug te dringen?

$d = 10$, we zoeken x waarbij $I = 0,01 I_0$:

$$I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{10}} = 0,01 I_0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{10}} = 0,01 \Leftrightarrow \frac{x}{10} \ln \frac{1}{2} = \ln 0,01 \Leftrightarrow x = \frac{10 \ln 100}{\ln 2} \approx 66,4$$

De dikte moet ongeveer 66,4 mm zijn.

- 4** Zelfde vraag als **3** voor beton met een halveringsdikte van 35 cm.

$d = 350$, we zoeken x waarbij $I = 0,01 I_0$:

$$I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{350}} = 0,01 I_0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{350}} = 0,01 \Leftrightarrow \frac{x}{350} \ln \frac{1}{2} = \ln 0,01 \Leftrightarrow x = \frac{350 \ln 100}{\ln 2} \approx 2325,3$$

De dikte moet ongeveer 2,325 m zijn.

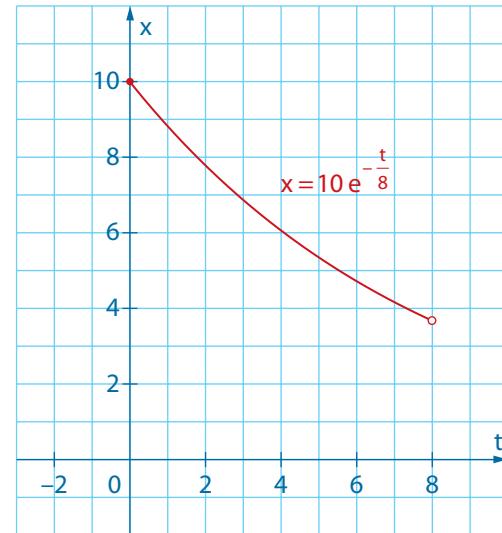
Opdracht 68 bladzijde 61

Als een geneesmiddel zoals penicilline voorgeschreven wordt, dan moet men dit geneesmiddel 3 tot 4 keer per dag innemen. Een model waarmee we de concentratie in functie van de tijd kunnen beschrijven, staat bekend onder de naam 'Rustogi'-model. In dit model geldt dat de hoeveelheid (in mg) van een geneesmiddel in de bloedsomloop t uren na toediening van een dosis van A mg gegeven wordt door de formule $x = A e^{-\frac{t}{8}}$.

Veronderstel dat elke 8 uur een dosis van 10 mg wordt toegediend.

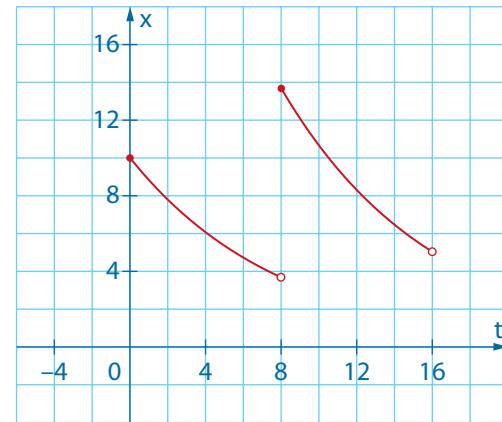
- Schets de grafiek van x in functie van t gedurende de eerste 8 uur.

Voor $0 \leq t < 8$ is $x = 10 e^{-\frac{t}{8}}$.



- Een nieuwe dosis van 10 mg wordt toegediend op tijdstip $t = 8$, daardoor krijgen we een nieuwe waarde voor A die we de effectieve dosis noemen op dit tijdstip. Vervolledig de grafiek nu voor $8 < t < 16$.

Voor $8 \leq t < 16$ is $x = 10 e^{-\frac{t}{8}} + 10 e^{-\frac{t-8}{8}}$.



- 3 Herneem stap 2 en ga na hoe de hoeveelheid van het geneesmiddel varieert gedurende de eerste 32 uur.

De voorschriften veranderen elke 8 seconden:

$$\text{voor } 16 \leq t < 24 \text{ is } x = 10e^{-\frac{t}{8}} + 10e^{-\frac{t-8}{8}} + 10e^{-\frac{t-16}{8}};$$

$$\text{voor } 24 \leq t < 32 \text{ is } x = 10e^{-\frac{t}{8}} + 10e^{-\frac{t-8}{8}} + 10e^{-\frac{t-16}{8}} + 10e^{-\frac{t-24}{8}}; \text{ enzoverder ...}$$

We krijgen een grafiek waarvan de maxima steeds hoger lijken te liggen.

Deze maxima zijn achtereenvolgens $10, 10 + 10e^{-1}, 10 + 10e^{-1} + 10e^{-2}, \dots$



- 4 Toon aan dat de maximale hoeveelheid van het geneesmiddel nadert tot $\frac{10e}{e-1} \text{ mg} \approx 16 \text{ mg}$.

Na n tijdsintervallen van 8 uur, is het maximum $10 + 10e^{-1} + 10e^{-2} + \dots + 10e^{-n}$.

Dit is de som van een meetkundige rij met quotiënt e^{-1} , zodat $s_n = 10 \cdot \frac{(e^{-1})^n - 1}{e^{-1} - 1}$.

Aangezien $0 < e^{-1} < 1$, is $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^n = 0$ zodat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{10}{1 - e^{-1}} = \frac{10e}{e - 1} \approx 16$$

De maximale hoeveelheid van het geneesmiddel zal dus asymptotisch naderen tot ongeveer 16 mg.

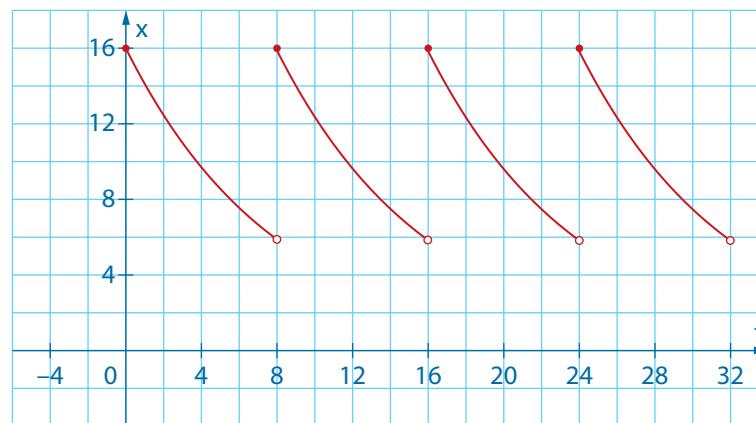
- 5 In ziekenhuizen, waar het van belang is dat de patiënt snel reageert op de behandeling, zal een dokter vaak een eerste verhoogde dosis geven van 16 mg. Ga na wat er gebeurt gedurende de eerste 32 uur indien de eerste dosis 16 mg is en vervolgens om de 8 uur een bijkomende dosis van 10 mg wordt toegediend.

(Deze methode wordt niet gebruikt voor geneesmiddelen die worden voorgeschreven door de huisarts. Als na 8 uur nogmaals een dosis van 16 mg zou genomen worden, dan zou de hoeveelheid $16 \cdot 1,6 \text{ mg} = 25,6 \text{ mg}$ worden, met mogelijke gezondheidsrisico's.)

Uit de grafiek blijkt dat de limietwaarde dan onmiddellijk bereikt wordt.

Het eerste maximum is 16 mg, het tweede is $10 + 16e^{-1} \approx 15,886 \text{ mg}$,
het derde $10 + 10e^{-1} + 16e^{-2} \approx 15,886 \text{ mg}$.

We hebben onmiddellijk het maximale effect.



Opdracht 69 bladzijde 62

De raketvergelijking

De snelheid van een raket bij verticale lancering kan bij benadering beschreven worden door de volgende differentiaalvergelijking:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} + u_{uit} \cdot \frac{dM}{dt} = -M \cdot g \quad (1)$$

Hierbij is M de totale massa (in kg) in functie van de tijd, v de snelheid (in m/s) in functie van de tijd t , u_{uit} de snelheid van de uitlaatgassen (in m/s)

t.o.v. de raket, g de valversnelling ($9,81 \text{ m/s}^2$) en t de tijd (in s).



In dit model wordt geen rekening gehouden met bv. de luchtweerstand of de verandering van de valversnelling met toenemende hoogte. Deze blijken bij lancering echter nauwelijks een invloed te hebben.

1 Ga na dat $v(t) = u_{uit} \cdot \ln\left(\frac{M(0)}{M(t)}\right) - g \cdot t$ een oplossing is van (1).

$$v(t) = u_{uit} \cdot \ln\left(\frac{M(0)}{M(t)}\right) - g \cdot t$$

$$\frac{dv}{dt} = u_{uit} \cdot \frac{M(t)}{M(0)} \cdot \frac{-M(0)}{\left[M(t)\right]^2} \cdot \frac{dM(t)}{dt} - g = -\frac{u_{uit}}{M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt} - g$$

$$\text{Nu is } M(t) \cdot \frac{dv}{dt} + u_{uit} \cdot \frac{dM(t)}{dt} = -u_{uit} \cdot \frac{dM(t)}{dt} - M(t) \cdot g + u_{uit} \cdot \frac{dM(t)}{dt} = -M(t) \cdot g$$

waarmee het gestelde bewezen is.

2 Van de lancering van de Saturnus V raket zijn de volgende gegevens bekend:

- beginmassa: $M(0) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ kg}$
- snelheid van de uitlaatgassen: $u_{uit} = 3000 \text{ m/s}$
- verbrandingssnelheid (van de brandstof): $1,6 \cdot 10^4 \text{ kg/s}$
- lanceringsduur: 120 s

a Reken na dat de raket aan het eind van de lancering nog maar $0,58 \cdot 10^6 \text{ kg}$ weegt. Dit is $M(120)$.

$$M(120) = M(0) - 1,6 \cdot 10^4 \text{ kg/s} \cdot 120 \text{ s} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ kg} - 1,6 \cdot 10^4 \cdot 120 \text{ kg} = 580\,000 \text{ kg}.$$

b Bereken de snelheid van de raket na 120 seconden.

$$v(120) = u_{uit} \cdot \ln\left(\frac{M(0)}{M(120)}\right) - g \cdot 120 = 3000 \text{ m/s} \cdot \ln \frac{2,5}{0,58} - 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 120 \text{ s} \approx 3206 \text{ m/s}.$$

Opdracht 70 bladzijde 62

Bepaal a zodanig dat de grafieken van de functies $f: x \mapsto \ln|x|$ en $g: x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + a$ elkaar raken.

Bepaal ook de coördinaten van de raakpunten.

- $f(x) = \ln|x|$, dus $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2 + a \text{ zodat } g'(x) = \frac{1}{4}x.$$

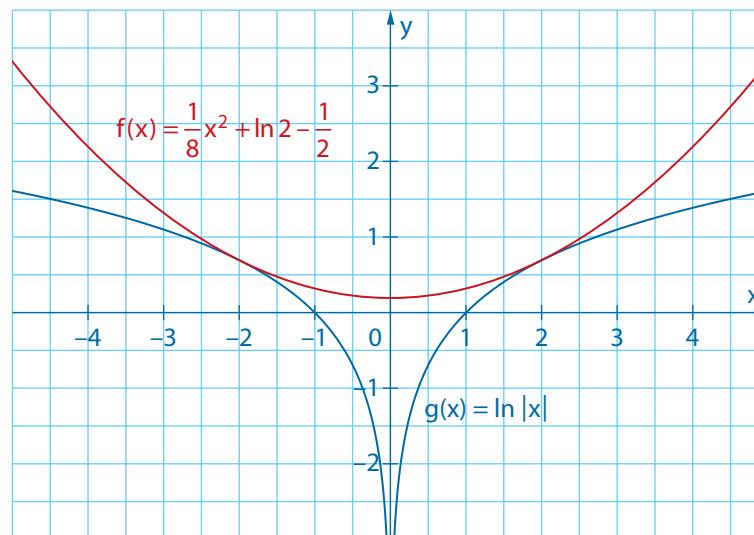
De grafieken van f en g raken elkaar als $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = \pm 2$.

De raakpunten zijn $P_1(2, \ln 2)$ en $P_2(-2, \ln 2)$.

- Aangezien deze punten op de grafiek van g liggen, zal

$$\ln 2 = \frac{1}{8} \cdot 4 + a \Leftrightarrow a = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- Grafische controle:



Opdracht 71 bladzijde 62

Een kom met warm water van 46°C wordt in de koelkast gezet. Na 10 minuten is de temperatuur van het water nog 39°C . Nogmaals 10 minuten later is de temperatuur 33°C .

Bereken de temperatuur in de koelkast in de veronderstelling dat die constant blijft.

We zoeken T_0 in $T = T_0 + b \cdot e^{kt}$.

- Op $t = 0$ is $T = 46$, dus $46 = T_0 + b \Leftrightarrow b = 46 - T_0$.

Eliminatie van b in de formule geeft $T = T_0 + (46 - T_0) \cdot e^{kt}$.

- Op $t = 10$ is $T = 39$ zodat $39 = T_0 + (46 - T_0) \cdot e^{10k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{10} \ln \frac{39 - T_0}{46 - T_0}$.

Ook k vullen we in de formule in: $T = T_0 + (46 - T_0) \cdot e^{\frac{t}{10} \ln \frac{39 - T_0}{46 - T_0}}$.

- Op $t = 20$ is $T = 33$ zodat $33 = T_0 + (46 - T_0) \cdot e^{\frac{20}{10} \ln \frac{39 - T_0}{46 - T_0}}$.

Uit deze vergelijking moeten we uiteindelijk T_0 bepalen.

$$\begin{aligned} 33 - T_0 &= (46 - T_0) \cdot e^{2 \ln \frac{39 - T_0}{46 - T_0}} \\ \Leftrightarrow \ln \frac{33 - T_0}{46 - T_0} &= \ln \left(\frac{39 - T_0}{46 - T_0} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{33 - T_0}{46 - T_0} &= \left(\frac{39 - T_0}{46 - T_0} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 33 - T_0 &= \frac{(39 - T_0)^2}{46 - T_0} \quad T_0 \neq 46 \\ \Leftrightarrow 1518 - 79T_0 + T_0^2 &= 1521 - 78T_0 + T_0^2 \\ \Leftrightarrow T_0 &= -3 \end{aligned}$$

De temperatuur van de koelkast is -3°C .

Opdracht 72 bladzijde 63

Bepaal telkens een uitdrukking voor $\frac{d^n y}{dx^n}$.

1 $y = e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \quad (1); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -e^{-x}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = e^{-x}; \dots$$

We vermoeden dat $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n e^{-x}$.

Bewijs door volledige inductie

- Deze formule geldt voor $n = 1$, dit volgt uit (1).
- Als deze formule geldt voor n , geldt ze voor $n + 1$

nl. als $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n e^{-x} \quad (2)$

$$\text{dan is } \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left[(-1)^n \cdot e^{-x} \right] = (-1)^n \cdot (-e^{-x}) = (-1)^{n+1} \cdot e^{-x},$$

dus de formule geldt voor $n + 1$.

- Wegens het inductieprincipe geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2 $y = e^{-kx}$

$$\frac{dy}{dx} = (-k)e^{-kx} \quad (1); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = k^2 e^{-kx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -k^3 e^{-kx}; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = k^4 e^{-kx}; \dots$$

We vermoeden dat $\frac{d^n y}{dx^n} = (-k)^n e^{-kx}$.

Bewijs door volledige inductie

- Deze formule geldt voor $n = 1$, dit volgt uit (1).
- Als deze formule geldt voor n , geldt ze voor $n + 1$

nl. als $\frac{d^n y}{dx^n} = (-k)^n e^{-kx} \quad (2)$

$$\text{dan is } \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} \left[(-k)^n \cdot e^{-kx} \right] = (-k)^n \cdot e^{-kx} \cdot (-k) = (-k)^{n+1} \cdot e^{-kx},$$

dus de formule geldt voor $n + 1$.

- Wegens het inductieprincipe geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3 $y = x e^x$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x+1) \quad (1); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2); \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^x + e^x(x+2) = e^x(x+3); \dots$$

We vermoeden dat $\frac{d^n y}{dx^n} = e^x(x+n)$.

Bewijs door volledige inductie

- Deze formule geldt voor $n = 1$, dit volgt uit (1).
- Als deze formule geldt voor n , geldt ze voor $n + 1$

nl. als $\frac{d^n y}{dx^n} = e^x(x+n)$ (2)

dan is $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx} [e^x(x+n)] = e^x + e^x(x+n) = e^x(x+(n+1)),$

dus de formule geldt voor $n + 1$.

- Wegens het inductieprincipe geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

4 $y = 2^{kx} + x^n$

We vermoeden: als $y = 2^{kx} + x^n$, dan is $\frac{d^n y}{dx^n} = 2^{kx} \cdot (k \ln 2)^n + n!$.

Bewijs door volledige inductie

- De formule geldt voor $n = 1$ want $\frac{d}{dx}(2^{kx} + x) = 2^{kx} \cdot k \ln 2 + 1 = 2^{kx} \cdot (k \ln 2)^1 + 1!$.
- Als de formule geldt voor n , m.a.w. als $\frac{d^n}{dx^n}(2^{kx} + x^n) = \frac{d^n}{dx^n}(2^{kx}) + \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = 2^{kx} \cdot (k \ln 2)^n + n!$, (*) dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(2^{kx} + x^{n+1}) &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(2^{kx}) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n}{dx^n} 2^{kx} \right) + \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d}{dx} x^{n+1} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{d}{dx} \left(2^{kx} \cdot (k \ln 2)^n \right) + \frac{d^n}{dx^n} ((n+1)x^n) \\ &= (k \ln 2)^n \cdot 2^{kx} \cdot k \ln 2 + (n+1) \frac{d^n}{dx^n}(x^n) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2^{kx} \cdot (k \ln 2)^{n+1} + (n+1) \cdot n! \\ &= 2^{kx} \cdot (k \ln 2)^{n+1} + (n+1)! \end{aligned}$$

dus de formule geldt dan voor $n + 1$.

- Wegens het inductieprincipe geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 73 bladzijde 63**Logistische groei**

Veronderstel dat P het aantal individuen in een populatie voorstelt, bv. de wereldbevolking, het aantal uilen in België ...

De verandering van de populatie $\frac{dP}{dt}$ veronderstellen we vaak recht evenredig met

de populatie op het tijdstip t , zodat we dan kunnen schrijven dat $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$ (1)

waarbij $k > 0$ indien de populatie toeneemt.

Dit model leidt echter tot exponentiële groei, wat op lange termijn niet houdbaar is.

Vaak is er voor een populatie een verzadigingsniveau door schaarste aan voedsel, vervuiling, uitputting van de natuurlijke rijkdommen ... Als de populatie tot deze maximale capaciteit M nadert, dan zal de groeisnelheid afnemen. Een model dat hiermee rekening houdt, werd in 1840 door de Belgische wiskundige Pierre François Verhulst voorgesteld: het ondertussen wereldwijd gebruikte **logistiek model**. In dat model wordt de constante k uit (1) vervangen door een variabele

factor die afneemt naarmate P dichter tot M nadert: $k = c \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right)$ waarbij $c > 0$.

Het logistisch groeimodel wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dP}{dt} = c \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right) \cdot P \quad (2)$$

- 1** Ga na dat $P = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (2) (a is een constante).

$P = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dP}{dt} = c \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right) \cdot P$ want

$$\frac{dP}{dt} = \frac{M a e^{-ct}}{(1 + a e^{-ct})^2} = c \cdot P \cdot \frac{a e^{-ct}}{1 + a e^{-ct}} = c \cdot P \cdot \frac{1 + a e^{-ct} - 1}{1 + a e^{-ct}} = c \cdot P \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + a e^{-ct}}\right) = c \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right).$$

- 2** In een wildreservaat is er voldoende nestruimte voor maximaal 330 arenden. We veronderstellen dat de groei van de arendenkolonie logistisch verloopt en dat de populatie gegeven

wordt door de formule $P = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-ct}}$.

Aanvankelijk waren er 30 arenden en na 5 jaar worden er 90 geteld.

- a** Bepaal de constanten a , c en M .

$M = 330$, het maximaal aantal arenden.

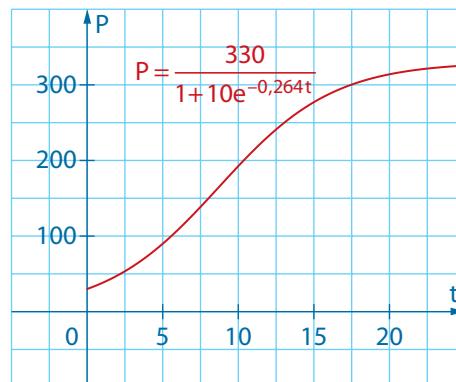
Op $t = 0$ is het aantal arenden 30, dus $\frac{330}{1+a} = 30 \Rightarrow a = 10$.

Op $t = 5$ zijn er 90 arenden zodat

$$\frac{330}{1+10e^{-5c}} = 90 \Rightarrow 1+10e^{-5c} = \frac{33}{9} \Rightarrow e^{-5c} = \frac{24}{90} \Rightarrow c = \frac{-1}{5} \ln \frac{24}{90} \approx 0,264.$$



- b Plot de grafiek van de populatie P in functie van de tijd t zodanig dat de typische S-vorm die hoort bij logistische groei in beeld komt.



- c Na hoeveel jaar zullen er volgens dit model meer dan 300 arenden zijn?

Aangezien de functie stijgend is, zoeken we het tijdstip t waarop

$$\frac{330}{1+10e^{-0.264t}} = 300 \Rightarrow \frac{330}{300} = 1+10e^{-0.264t} \Rightarrow \frac{1}{100} = e^{-0.264t} \Rightarrow t = \frac{-1}{0.264} \ln \frac{1}{100} \approx 17,44.$$

Na ongeveer 17 en een half jaar zijn er meer dan 300 arenden.

Opdracht 74 bladzijde 64

België heeft regelmatig te maken met griepepidemieën. In het begin neemt het aantal griepgevallen dan sterk toe en na verloop van tijd bereikt de epidemie haar maximum.

Onderzoekers nemen aan dat het verloop van zo'n epidemie te beschrijven is met logistische groei (waarbij men het aantal besmette personen cumuleert d.w.z. dat men het totaal aantal personen die de griep hadden sinds het uitbreken van de epidemie telt, ongeacht of ze al genezen zijn of niet).

Veronderstel dat op het moment dat de griep werd ontdekt al 100 personen besmet waren en dat na 20 dagen dit (gecumuleerd) aantal al was opgelopen tot 1100.

Een onderzoeker beschrijft de groei van het aantal griepgevallen G op tijdstip t

(in dagen) met de differentiaalvergelijking $\frac{dG}{dt} = 0,12 \cdot \left(1 - \frac{G}{M}\right) \cdot G$.

- 1 In het begin was de groei nog enigszins exponentieel.

Ga na dat de factor 0,12 door de onderzoeker goed gekozen is.

In het begin is $\frac{G}{M}$ nog heel klein en kunnen we dus bij benadering stellen dat

$\frac{dG}{dt} = 0,12 \cdot G$, zodat $G = 100 \cdot e^{0,12t}$ (aanvankelijk zijn er 100 mensen besmet).

Na 20 dagen vinden we $G = 100 \cdot e^{0,12 \cdot 20} \approx 1102$ wat heel dicht bij het werkelijk aantal 1100 ligt, zodat die 0,12 inderdaad goed gekozen is.

- 2 De formule die het aantal griepgevallen weergeeft, is $G = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-0,12t}}$. Bereken de waarden van a en M .

$$G = \frac{M}{1 + a \cdot e^{-0,12t}}$$

$$- t = 0: \frac{M}{1 + a} = 100 \Leftrightarrow M = 100 + 100a \quad (1)$$

$$- t = 20: \frac{M}{1 + ae^{-2,4}} = 1100 \Leftrightarrow M = 1100 + 1100e^{-2,4}a \quad (2)$$

Gelijkstellen van (1) en (2) geeft

$$100 + 100a = 1100 + 1100e^{-2,4}a \Leftrightarrow (100 - 1100e^{-2,4})a = 1000 \Leftrightarrow a \approx 4756,2.$$

Dan is $M = 100 + 100a \approx 475\,721$.

- 3 Bij welk aantal patiënten is volgens het model de stijging van het aantal zieken het grootst?

Op welk tijdstip is dit?

De stijging is het grootst als $\frac{dG}{dt}$ maximaal is.

$$\frac{dG}{dt} = \frac{0,12Ma e^{-0,12t}}{(1 + ae^{-0,12t})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{dt^2} &= 0,12Ma \cdot \frac{(1 + ae^{-0,12t})^2 e^{-0,12t}(-0,12) - e^{-0,12t} 2(1 + ae^{-0,12t})(-0,12ae^{-0,12t})}{(1 + ae^{-0,12t})^4} \\ &= 0,12^2 Ma e^{-0,12t} \cdot \frac{-1 - ae^{-0,12t} + 2ae^{-0,12t}}{(1 + ae^{-0,12t})^3} \\ &= 0,12^2 Ma e^{-0,12t} \cdot \frac{ae^{-0,12t} - 1}{(1 + ae^{-0,12t})^3} \end{aligned}$$

De tweede afgeleide gaat over van positief naar negatief als $ae^{-0,12t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{1}{a}$.

De eerste afgeleide, dus de stijging van het aantal zieken, bereikt dan een maximum.

Het (gecumuleerd) aantal patiënten is dan $\frac{M}{1 + a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{M}{2}$.

In dit voorbeeld is dat als $e^{-0,12t} \approx \frac{1}{4756,2} \Leftrightarrow t \approx \frac{-1}{0,12} \ln \frac{1}{4756,2} \approx 70,6$.

Na ongeveer 71 dagen is de stijging van het aantal patiënten het grootst.

Opdracht 75 bladzijde 65

Bereken

$$1 \frac{d}{dx}(3 \cot(10x - 5)) = 3 \left(\frac{-1}{\sin^2(10x - 5)} \right) \cdot 10 = -\frac{30}{\sin^2(10x - 5)}$$

$$2 \frac{d}{dx}(\sin 2x \cdot \cos 3x) = -3 \sin 2x \sin 3x + 2 \cos 2x \cos 3x$$

$$3 \frac{d}{dx} \left(\tan^5 \left(\frac{3x-1}{4x} \right) \right) = 5 \tan^4 \left(\frac{3x-1}{4x} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{3x-1}{4x} \right)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3x-3x+1}{x^2} = \frac{5 \sin^4 \left(\frac{3x-1}{4x} \right)}{4x^2 \cos^6 \left(\frac{3x-1}{4x} \right)}$$

$$4 \frac{d}{dx} [\sin(\cos(3x-1))] = \cos(\cos(3x-1))(-\sin(3x-1)) \cdot 3 = -3 \sin(3x-1) \cos(\cos(3x-1))$$

$$5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Bgtan} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} \right)^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + 3x^2}$$

$$= \frac{1+x^2}{x^4+x^2+1}$$

$$6 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{Bgcosec} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right) \right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= -\frac{2x+2-x}{\sqrt{\frac{x+1-x^2}{x+1}} \cdot 2(x+1)\sqrt{x+1}} = -\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1-x^2}}$$

$$7 \frac{d}{dx} (\ln^4(\sin x)) = 4 \ln^3(\sin x) \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 4 \ln^3(\sin x) \cot x$$

$$8 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x(1-\ln x)} \right) = -\frac{1}{x^2(1-\ln x)^2} \cdot \left(x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) + 1 - \ln x \right) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$9 \frac{d}{dx} \left(\log \sqrt{\frac{1+6x}{1-6x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+6x}{1-6x}}} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{6(1-6x)+6(1+6x)}{(1-6x)^2}$$

$$= \frac{6}{\frac{1+6x}{1-6x} (\ln 10)(1-6x)^2} = \frac{6}{(1-36x^2)\ln 10}$$

$$10 \frac{d}{dx} \left(\frac{(1+x) \cdot e^{\operatorname{Bgtan} x}}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\left((1+x)e^{\operatorname{Bgtan} x} \frac{1}{1+x^2} + e^{\operatorname{Bgtan} x} \right) \sqrt{1+x^2} - (1+x)e^{\operatorname{Bgtan} x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{e^{\operatorname{Bgtan} x} \left(\frac{1+x+1+x^2}{1+x^2} (1+x^2) - (1+x)x \right)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{2e^{\operatorname{Bgtan} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Opdracht 76 bladzijde 65

Veronderstel dat x en y reële getallen zijn die voldoen aan $e^x = 3e^y$.

Wat mag je besluiten over x en y ?

A $x = 3y$

B $x = y \ln 3$

C $x = 3 + y$

D $x = y + \ln 3$

E $x = y^3$

(bron © Modelvragen ijkingstoets burgerlijk ingenieur 2013)

Uit $e^x = 3e^y$ volgt dat $x = \ln(3e^y) = \ln 3 + \ln e^y = \ln 3 + y = y + \ln 3$.

Antwoord D is juist.

Opdracht 77 bladzijde 65

Tijdens het ademhalen verandert de luchtdruk in de longen. Voor een persoon in rust geldt bij benadering $p(t) = 20 \sin(0,4\pi t)$, waarbij t de tijd is in seconden en p de druk in mm Hg.

- 1 Bepaal de periode van deze functie. Hoeveel maal ademt deze persoon in en uit per minuut?

$$p = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5 \text{ s, de persoon ademt dus 12 keer in en uit per minuut.}$$

- 2 Bereken $p'(2)$. Ademt de persoon op dat moment in of uit?

$$p'(t) = 8\pi \cos 0,4\pi t$$

$p'(2) = 8\pi \cos 0,8\pi \approx -20,33$; de druk neemt dus af wat betekent dat de persoon uitademt.

Opdracht 78 bladzijde 66

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Dan geldt: $S(t) = 200 - 180e^{-0,29t}$.

Hierin is S de temperatuur in de sauna in graden Celsius en t de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100°C . Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden.

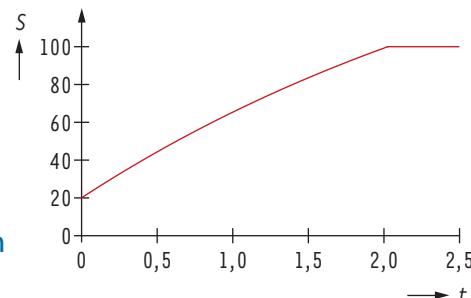
In de figuur is de grafiek van S getekend.

- 1 Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt.

Geef het tijdstip tot op 1 minuut nauwkeurig.

$$200 - 180e^{-0,29t} = 100$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,29t} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln \frac{5}{9}}{0,29} \Rightarrow t \approx 2 \text{ uren en 2 minuten}$$



Om 17.02u wordt het opwarmen gestopt.

- 2 Bereken met behulp van afgeleiden de snelheid waarmee de temperatuur in de sauna toeneemt om 16.00 uur.

Geef je antwoord tot op een tiende van een graad Celsius nauwkeurig.

$$\frac{dS}{dt} = 52,2e^{-0,29t} \Rightarrow \left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=1} = 52,2e^{-0,29} \approx 39,1^\circ$$

De snelheid waarmee de temperatuur toeneemt om 16.00u is $39,1^\circ\text{C}$ per uur.

- 3 Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S . Druk t uit in functie van S .

(bron © examen 2006 VWO wiskunde B Nederland)

$$S(t) = 200 - 180e^{-0,29t} \Leftrightarrow e^{-0,29t} = \frac{200 - S(t)}{180} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0,29} \ln \frac{200 - S(t)}{180}$$

Opdracht 79 bladzijde 66

Bereken met de gegevens uit de tabel als $g(x) = f(x \cdot f(x))$ en $h(x) = f\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1,7	1,8	2	2,5	3,1	4,4
$f'(x)$	-0,2	0	0,4	1	1,5	2,7

1 $g'(1)$

$$g'(x) = f'(x \cdot f(x)) \cdot (x \cdot f'(x) + f(x))$$

$$g'(1) = f'(f(1)) \cdot (f'(1) + f(1)) = f'(2) \cdot (0,4 + 2) = 1,5 \cdot 2,4 = 3,6$$

2 $h'(8)$

$$h'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$h'(8) = f'\left(2\right) \cdot \frac{1}{8} = 1,5 \cdot \frac{1}{8} = 0,1875$$

Opdracht 80 bladzijde 67

Bewijs dat alle grafieken van de

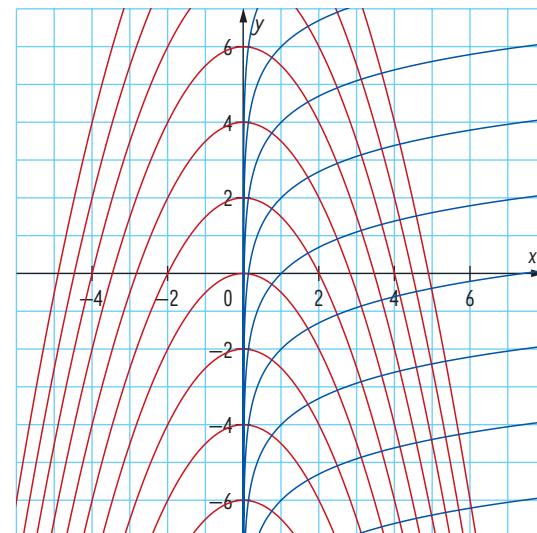
functies $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + k$ de grafieken van

$g: x \mapsto \ln x + m$ loodrecht snijden, d.w.z. dat de raaklijnen in elk snijpunt van beide families functies loodrecht op elkaar staan.

Uit $f'(x) = -x$ en $g'(x) = \frac{1}{x}$ volgt dat

$f'(x) \cdot g'(x) = -1$ voor elke positieve x -waarde.

Dit houdt in dat de raaklijnen in elk snijpunt loodrecht op elkaar staan.



Opdracht 81 bladzijde 67

Bepaal alle oplossingen van het stelsel $\begin{cases} \ln^2 x + \ln(xy) = 4 \\ \ln x + \ln(y^2) = 5 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln^2 x + \ln(xy) = 4 \\ \ln x + \ln(y^2) = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + \ln x + \ln y = 4 \\ \ln x + 2 \ln y = 5 \end{cases} \quad (\text{BVW: } x > 0 \text{ en } y > 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + \ln x + \ln y = 4 \\ \ln y = \frac{5 - \ln x}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + \ln x - \frac{\ln x}{2} = 4 - \frac{5}{2} \\ \ln y = \frac{5 - \ln x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln^2 x + \ln x - 3 = 0 \\ \ln y = \frac{5 - \ln x}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \text{ of } \ln x = -\frac{3}{2} \\ \ln y = \frac{5 - \ln x}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 & \text{of} \\ \ln y = 2 & \end{cases} \begin{cases} \ln x = -\frac{3}{2} \\ \ln y = \frac{13}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = e & \text{of} \\ y = e^2 & \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-\frac{3}{2}} \\ y = e^{\frac{13}{4}} \end{cases} \end{aligned}$$

Opdracht 82 bladzijde 67

Een kop koffie heeft bij het inschenken een temperatuur van 75°C .

De kamertemperatuur is 20°C .

Na 1 minuut is de temperatuur van de koffie gedaald tot 67°C .

- 1** Schrijf de temperatuur T (in $^\circ\text{C}$) van de koffie in functie van de tijd t (in minuten).

$$T = T_0 + b \cdot e^{kt} \text{ met } T_0 = 20$$

- Op $t = 0$ is $T = 75$, dus $75 = 20 + b \Leftrightarrow b = 55$. We hebben al $T = 20 + 55e^{kt}$.
- Op $t = 1$ is $T = 67$, zodat $67 = 20 + 55e^k \Leftrightarrow k = \ln \frac{47}{55}$.

Het voorschrift is $T = 20 + 55e^{t \ln \frac{47}{55}}$. Aangezien $\ln \frac{47}{55} < 0$, is dit een dalende functie.

- 2** De koffie is pas drinkbaar als de temperatuur lager is dan 60°C .

Hoe lang moet je na het inschenken wachten om de koffie te kunnen drinken?

We zoeken t waarvoor

$$20 + 55e^{t \ln \frac{47}{55}} = 60$$

$$\Leftrightarrow e^{t \ln \frac{47}{55}} = \frac{40}{55} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{40}{55}}{\ln \frac{47}{55}} \approx 2,026$$

De koffie is drinkbaar na ongeveer 2 minuten en 2 seconden.

Opdracht 83 bladzijde 67

Is $y = \ln(x^2 + k^2) + \frac{2a}{k} \operatorname{Bgtan}\left(\frac{x}{k}\right)$, met k en a constanten verschillend van 0, een oplossing van de differentiaalvergelijking $(x+a)y'' + x(y')^2 = \frac{2(x+a)}{x^2 + k^2}$?

Verklaar met een berekening.

$$\begin{aligned} y &= \ln(x^2 + k^2) + \frac{2a}{k} \operatorname{Bgtan}\left(\frac{x}{k}\right) \\ y' &= \frac{2x}{x^2 + k^2} + \frac{2a}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2x}{x^2 + k^2} + \frac{2a}{k^2 + x^2} = \frac{2x + 2a}{x^2 + k^2} \\ y'' &= \frac{2(x^2 + k^2) - (2x + 2a)2x}{(x^2 + k^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2k^2 - 4ax}{(x^2 + k^2)^2} \\ \Rightarrow (x+a)y'' + x(y')^2 &= \frac{(x+a)(-2x^2 + 2k^2 - 4ax)}{(x^2 + k^2)^2} + x\left(\frac{2x + 2a}{x^2 + k^2}\right)^2 \\ &= \frac{(x+a)(-2x^2 + 2k^2 - 4ax + 4x(x+a))}{(x^2 + k^2)^2} = \frac{(x+a)(2x^2 + 2k^2)}{(x^2 + k^2)^2} \\ &= \frac{2(x+a)}{(x^2 + k^2)} \end{aligned}$$

$y = \ln(x^2 + k^2) + \frac{2a}{k} \operatorname{Bgtan}\left(\frac{x}{k}\right)$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x+a)y'' + x'y'^2 = \frac{2(x+a)}{(x^2 + k^2)}.$$

Hersenbrekers bladzijde 68

- 1 In het getallenvierkant hiernaast staan positieve getallen. Het product van de getallen in iedere rij, iedere kolom en elk van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.

Welk getal staat op de plaats van H ?

Het product van de acht getallen in de tweede en vierde rij is gelijk aan het product van de acht getallen in de eerste en tweede kolom, zodat

$$C \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot F \cdot G \cdot H \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 4 \cdot F \cdot 32 \cdot 2 \cdot 1 \cdot G$$

Omdat C , F en G niet nul zijn, volgt hieruit dat

$$512 \cdot H = 128 \text{ en dus } H = \frac{1}{4}$$

Hiernaast staat een mogelijke oplossing met $H = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2}$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

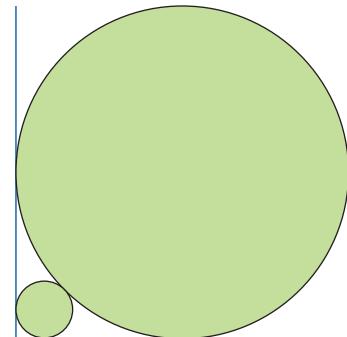
(bron © NWO tweede ronde 2013)

$\frac{1}{2}$	32	8	1
4	2	8	2
4	1	8	4
16	2	$\frac{1}{4}$	16

- 2 Twee cirkels raken elkaar en hun gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen staan loodrecht op elkaar zoals in de figuur.

De verhouding van de straal van de grote cirkel tot die van de kleine cirkel is gelijk aan

- A $2+3\sqrt{2}$ B 5 C $2+2\sqrt{3}$
 D $3+2\sqrt{2}$ E 6



(bron VWO © eerste ronde 2013)

In de rechthoekige driehoek $OM'A$ is

$$|OM'| = \sqrt{2}r. Bijgevolg is$$

$$|OM| = \sqrt{2}r + r + R \quad (1)$$

In de rechthoekige driehoek OMB is

$$|OM| = \sqrt{2}R \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

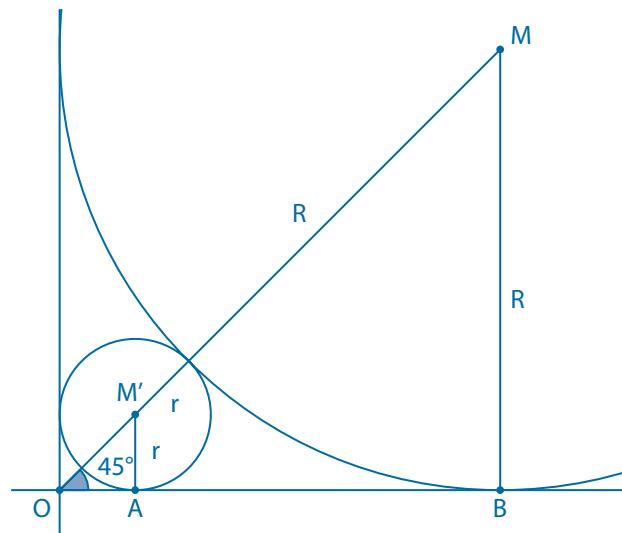
$$\sqrt{2}r + r + R = \sqrt{2}R$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)r = (\sqrt{2}-1)R$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{r} = 3+2\sqrt{2}$$



Antwoord D is het juiste.

- 3 Wat is het getal a als ${}^a\log 10 + {}^a\log(10^2) + \dots + {}^a\log(10^{10}) = 110$?

- A $\sqrt{10}$ B $e+1$ C 10 D 20 E $10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{10}}$

(bron © University of South Carolina High School Math Contest 2014)

$${}^a\log 10 + {}^a\log(10^2) + \dots + {}^a\log(10^{10}) = 110$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log(10 \cdot 10^2 \cdot \dots \cdot 10^{10}) = 110$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log 10^{1+2+3+\dots+10} = 110$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log 10^{\frac{1+10}{2}} = 110$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log 10^{55} = 110$$

$$\Leftrightarrow a^{110} = 10^{55}$$

$$\begin{aligned} a > 0 \\ \Leftrightarrow a &= (10^{55})^{\frac{1}{110}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

Antwoord A is het juiste.