Hoofdstuk 3

Rekenen met steekproefverdelingen

Opdracht 1 bladzijde 104

In het rapport 'Jongeren en Gezondheid 2014' concluderen de onderzoekers dat van de bevraagde jongeren tussen 11 en 18 jaar 26,8 % van de jongens en 25,1 % van de meisjes al seks heeft gehad. Voor het beantwoorden van de volgende vragen mag je even veronderstellen dat dit de werkelijke populatieproportie is.

Stel nu dat een groot aantal interviewers in Vlaanderen steekproeven neemt van telkens 400 jongens tussen 11 en 18 jaar. De vraag is of ze al seks hadden.

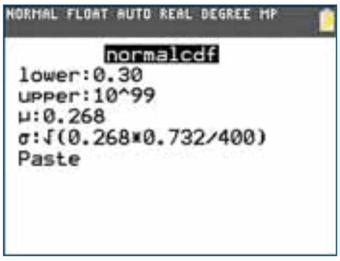
1 Controleer de voorwaarden om te mogen besluiten dat de steekproefverdeling een normale verdeling benadert. Geef de parameters van deze verdeling.

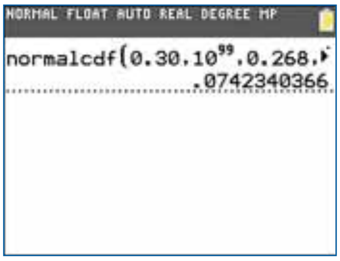
- De populatie is zeker 10 keer groter dan de steekproef.
- $n \cdot p = 400 \cdot 0{,}268 = 107{,}2 \geqslant 10$
- $n \cdot (1 - p) = 400 \cdot 0{,}732 = 292{,}8 \geqslant 10$

We mogen het model van de normale verdeling gebruiken.

De parameters zijn: $\mu = 0{,}268$ en $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}268 \cdot 0{,}732}{400}} \approx 0{,}022$.

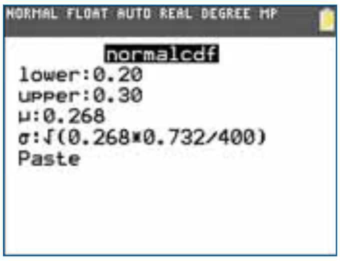
2 Hoeveel procent van de interviewers zal in zijn steekproef meer dan 30 % jongens vinden die seks hebben gehad?

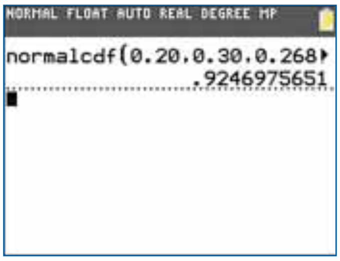




Ongeveer 7,4 %.

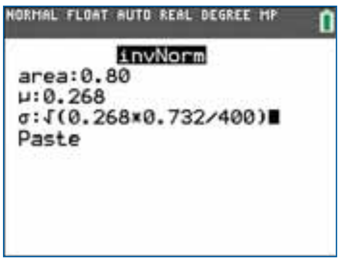
3 Hoeveel procent van de interviewers zal een steekproefresultaat tussen 20 % en 30 % vinden?

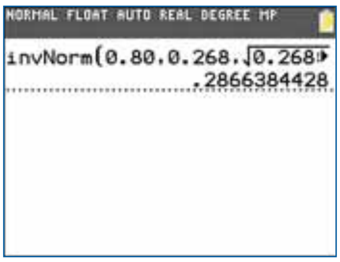




Ongeveer 92,5 %.

4 Vanaf welk steekproefresultaat behoor je tot de interviewers die de 20 % hoogste proporties vonden?





Vanaf het steekproefresultaat 0,287 behoor je tot de interviewers die de 20 % hoogste proporties vonden.

Opdracht 2 bladzijde 105

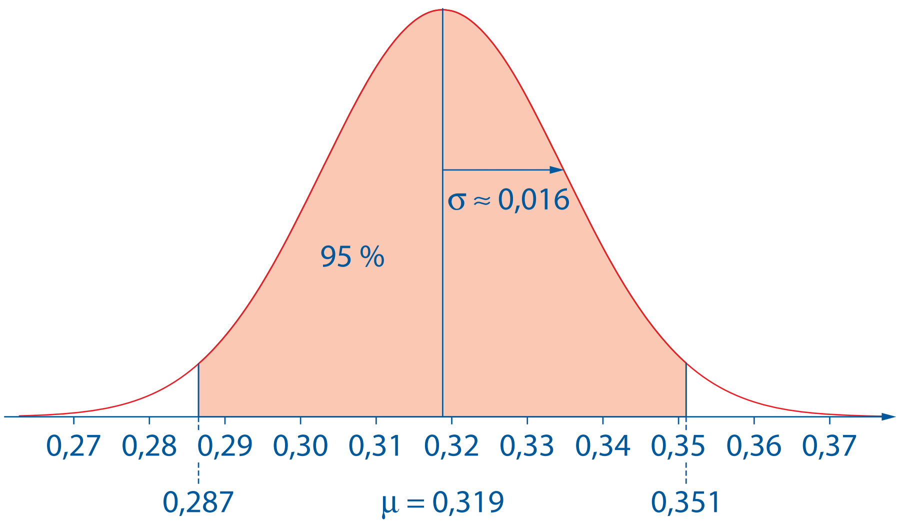
Op 25 mei 2014 werden er in Vlaanderen verkiezingen gehouden voor het Vlaams Parlement. De partij N-VA haalde toen 31,9 % van de stemmen. Dit percentage is de populatieproportie *p*.

1 Stel dat heel veel interviewers die dag op pad gingen en dat ze elk bij een EAS van 800 kiesgerechtigden onderzochten of ze op deze partij wilden stemmen. Ga na of aan de voorwaarden voldaan is om de steekproefverdeling te benaderen door een normale verdeling. Bepaal de parameters μ en σ. Maak een schets van deze verdeling en duid de parameters erop aan.

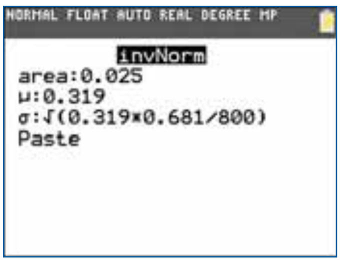
- De populatie is zeker 10 groter dan de steekproef.
- $n \cdot p = 800 \cdot 0{,}319 = 255{,}2 \geqslant 10$
- $n \cdot (1 - p) = 800 \cdot 0{,}681 = 544{,}8 \geqslant 10$

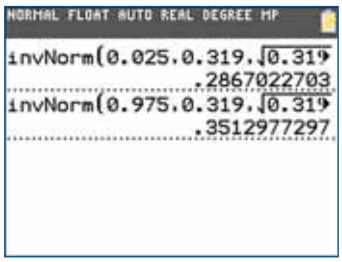
We mogen het model van de normale verdeling toepassen.

De parameters zijn: $\mu = 0{,}319$ en $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}319 \cdot 0{,}681}{800}} \approx 0{,}016$



2 Bereken tot op 0,1 % nauwkeurig tussen welke waarden de middelste 95 % van de steekproefresultaten ligt. Duid deze waarden aan op je schets.





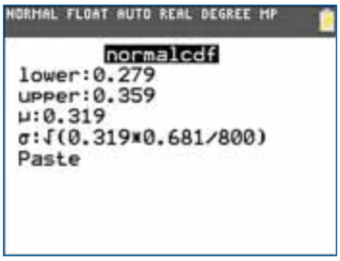
De middelste 95 % van de steekproefresultaten ligt tussen 28,7 % en 35,1 %.

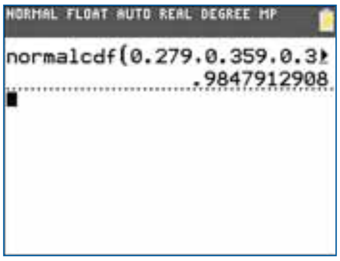
3 Hoeveel wijkt een steekproefresultaat maximaal af van de werkelijke populatieproportie voor de 95 % middelste resultaten?

Een steekproefresultaat wijkt maximaal 3,2 % af van de werkelijke populatieproportie voor de 95 % middelste resultaten ($0{,}319 - 0{,}287 = 0{,}032$ en $0{,}351 - 0{,}319 = 0{,}032$).

4 Elke interviewer beweert: 'De gezochte populatieproportie wijkt hooguit 4 % af van mijn resultaat.' Hoeveel procent van de interviewers vergist zich?

0,319 – 0,04 = 0,279 en 0,319 + 0,04 = 0,359



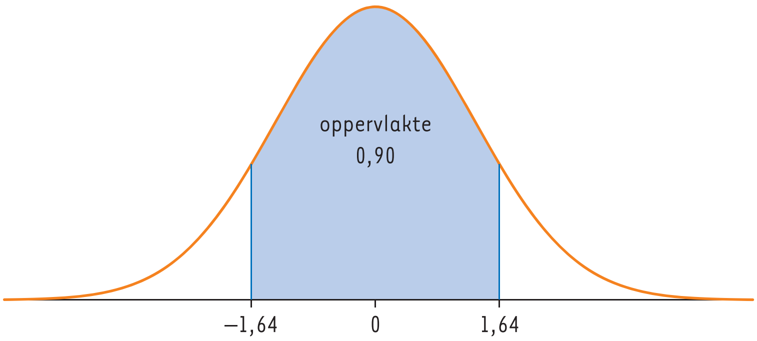


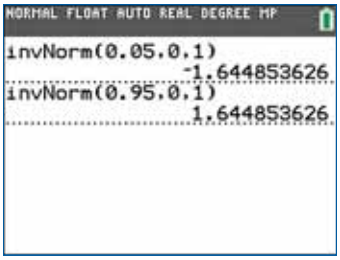
Ongeveer 1,5 % vergist zich (1 – 0,985).

Opdracht 3 bladzijde 105

Beschouw de standaardnormale verdeling Norm(0,1) en de normale verdeling Norm(μ,σ).

1 **a** Bij Norm(0,1) ligt de middelste 90 % gegevens in het interval [–1,64 ; 1,64]. Geef aan hoe je die grenzen kunt berekenen.

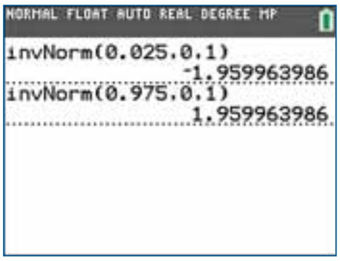




b In welk interval zal dan de middelste 90 % van de gegevens liggen bij Norm(μ,σ)?

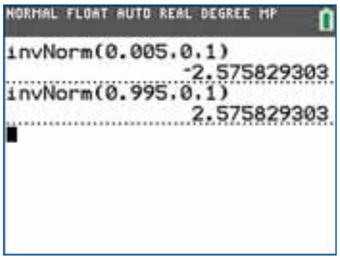
Uit $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ volgt dat $x = \mu + z \cdot \sigma$. Als $z = \pm 1{,}64$, dan is $x = \mu \pm 1{,}64\sigma$, zodat het gevraagde interval van de vorm $[\mu - 1{,}64\sigma; \mu + 1{,}64\sigma]$ is.

2 Beantwoord nu dezelfde vragen voor de middelste 95 % gegevens. Merk op dat je een nauwkeuriger interval vindt dan in de benaderende 68-95-99,7-regel.



Het gevraagde interval is van de vorm $[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$.

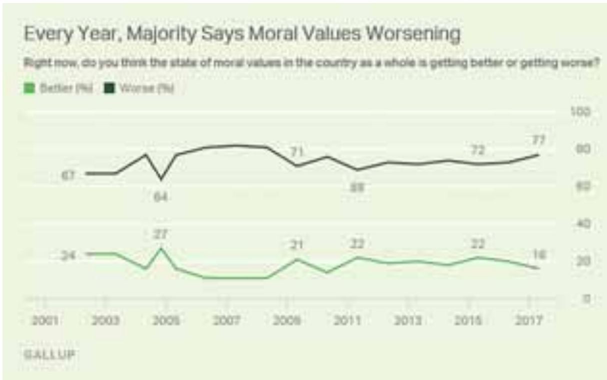
3 En ook voor 99 %.



Het gevraagde interval is van de vorm $[\mu - 2{,}58\sigma; \mu + 2{,}58\sigma]$.

Opdracht 4 bladzijde 110

"Alles gaat altijd maar achteruit …" Een verzuchting die volwassenen zich wellicht al duizenden jaren laten ontvallen.
Uit de *Values and Beliefs* peiling van Gallup van begin mei 2017 blijkt dat 77 % van de 1011 respondenten in die periode vond dat de morele toestand van hun land, de Verenigde Staten, achteruitging. Dat percentage is relatief stabiel en is sedert het starten van de jaarlijkse peilingen altijd al groter dan 50 % geweest.



1 Ga na of aan de vuistregels is voldaan om de normale verdeling als steekproefverdeling te mogen gebruiken.

- De populatie is zeker 10 groter dan de steekproef.
- $n \cdot p = 1011 \cdot 0{,}77 = 778{,}47 \geqslant 10$
- $n \cdot (1-p) = 1011 \cdot 0{,}23 = 232{,}53 \geqslant 10$

We mogen het model van de normale verdeling toepassen.

De parameters zijn: $\mu = 0{,}77$ en $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}77 \cdot 0{,}23}{1011}} \approx 0{,}013$.

2 Bereken een 95 %-betrouwbaarheidsinterval bij dit resultaat.

Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval $\approx 0{,}77 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}77 \cdot 0{,}23}{1011}} = 0{,}77 \pm 0{,}026$ en dus ongeveer gelijk aan [0,744; 0,796].

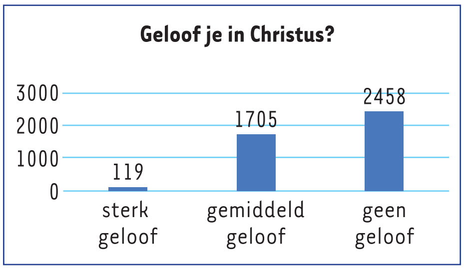
3 Leg uit wat dit interval betekent.

Dergelijk interval heeft een kans van 95 % om de gezochte populatieproportie te bevatten.

Of ook: het percentage Amerikanen dat (in 2017) vond dat de morele toestand in hun land achteruit ging, lag met een betrouwbaarheid van 95 % tussen 74,4 % en 79,6 %.

Opdracht 5 bladzijde 111

In de periode 2008 – 2015 werd een onderzoek naar de katholieke identiteit uitgevoerd bij 15 287 leerlingen in 57 katholieke scholen. Volgens het rapport gaat het over een representatieve steekproef. Op de vraag of je gelooft in Christus kun je de verdeling van de antwoorden van de bevraagde leerlingen van de derde graad aflezen op het staafdiagram.



1 Geef een 95 %-betrouwbaarheidsinterval bij het percentage leerlingen dat sterk gelooft in Christus.

95 %-betrouwbaarheidsinterval

$$\approx \frac{119}{4282} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\frac{119}{4282}\cdot\left(1-\frac{119}{4282}\right)}{4282}}$$

$\approx 0{,}0278 \pm 0{,}0049$

en dus ongeveer gelijk aan $[0{,}023; 0{,}033]$.

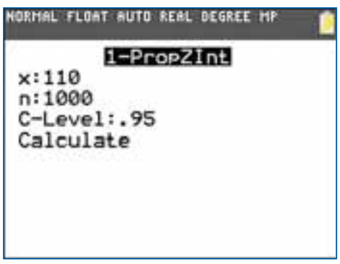
2 Bereken de foutenmarge bij een betrouwbaarheid van 80 %.

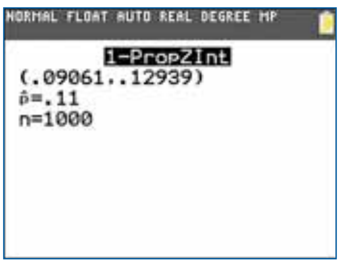
De foutenmarge bij een betrouwbaarheid van 80 % is $\approx 1{,}28\sqrt{\dfrac{\frac{2458}{4282}\cdot\left(1-\frac{2458}{4282}\right)}{4282}} \approx 0{,}0097$.

Opdracht 6 bladzijde 112

In 2016 werd wereldwijd een enquête gehouden bij personen geboren tussen 1981 en 2000, de zogenaamde 'millennials'. Er werd onder andere gevraagd naar hun politieke attitudes. In het rapport 'The Millennial Dialogue-België' lezen we dat slechts 11 % van de 1000 bevraagde Belgische millennials zeer geïnteresseerd is in politiek.

Laat je rekentoestel een 95 %-betrouwbaarheidsinterval berekenen.





Bij x typen we: 0,11 · 1000.

Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval is $[0{,}091; 0{,}129]$.

Opdracht 7 bladzijde 119

Een bestaand geneesmiddel tegen migraineaanvallen heeft bij 50 % van de gebruikers een gunstig effect. Men wil het vervangen door een nieuw geneesmiddel, waarvan men hoopt dat een groter percentage migrainepatiënten er baat bij zal hebben. Het nieuwe geneesmiddel wordt toegediend aan 60 proefpersonen. Na een half jaar blijkt dat 39 personen minder migraineaanvallen gehad hebben.

1 Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

nulhypothese: $H_0 : p = 0{,}50$

alternatieve hypothese: $H_a : p > 0{,}50$

2 Bereken de *P*-waarde van het gevonden steekproefresultaat.

Indien de nulhypothese waar is, dan zal de steekproefverdeling

$$\text{Norm}\left(0{,}5; \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{60}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}5; 0{,}0645) \text{ zijn.}$$

De P-waarde is: $P = P\left(\hat{p} \geqslant \frac{39}{60}\right) = 0{,}010.$

3 Is het resultaat statistisch significant op het 0,005-niveau?

De geobserveerde waarde is statistisch niet significant want 1 % is groter dan 0,5 %.
We verwerpen de nulhypothese niet op dit niveau.

Opdracht 8 bladzijde 119

Waarom is het niet toegestaan om de geziene procedures toe te passen in de onderstaande significantietesten?

1 Je wilt weten of een muntstuk eerlijk is $(H_0 : p = 0{,}5)$ en gooit daartoe 10 keer een muntstuk op.

$n \cdot p = 10 \cdot 0{,}5 = 5 < 10$

We kunnen niet zomaar aannemen dat de steekproefverdeling goed benaderd kan worden door de normale verdeling.

2 Je komt op een Franse camping aan en de uitbater zegt je dat 80 % van de 300 aanwezige kampeerders Nederlanders zijn. Je wilt de hypothese $H_0 : p = 0{,}80$ testen via een EAS van 60 personen.

De populatie is geen tien keer groter dan de steekproefgrootte. Opnieuw kan

$\text{Norm}\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$ niet als model voor de steekproefverdeling gebruikt worden.

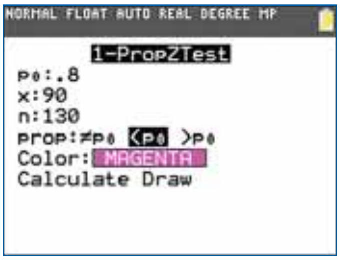
Opdracht 9 bladzijde 120

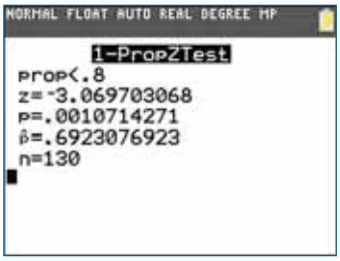
Matthew is een talentvolle basketbalspeler. Vorig seizoen lukte 80 % van zijn vrije worpen. Dit seizoen mist hij echter 40 van zijn 130 vrije worpen.

Bereken de *P*-waarde en becommentarieer het resultaat van Matthew.

Er zijn twee alternatieve hypothesen mogelijk. Beide moeten opgesteld worden vóór het bekijken van de nieuwe gegevens.

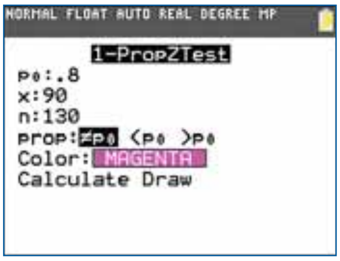
Ofwel vond je zijn vorige score bijzonder hoog en verwacht je spontaan dat het dit jaar iets minder zal zijn. Of misschien las je ergens dat hij door omstandigheden een minder goede voorbereiding heeft dit seizoen. In dat geval kies je H_a: $p < 0{,}8$.

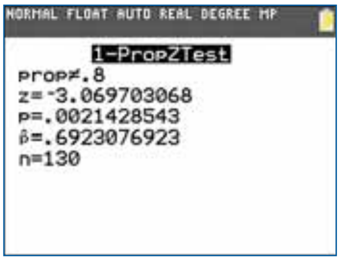




De P-waarde is vrij klein, namelijk ongeveer 0,1 %. Dit betekent dat dit resultaat moeilijk door het toeval verklaard kan worden. We kunnen niet langer aannemen dat hij op het hoge niveau van het vorige seizoen speelt.

Heb je a priori geen reden om aan te nemen dat er dit seizoen iets veranderd is ten opzichte van het vorige, dan kies je best H_a: $p \neq 0{,}8$.





Ook hier zien we dat de P-waarde vrij klein is en we dus hetzelfde kunnen besluiten als bij $p < 0{,}8$.

Opdracht 10 bladzijde 120

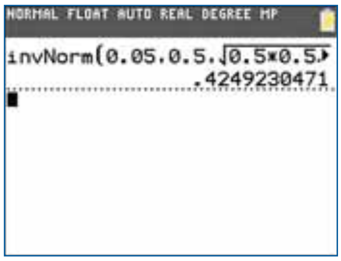
Charlotte beweert dat de kans dat een opgeworpen punaise na het vallen met de punt omhoog ligt 50 % is. Dat is de nulhypothese. Diederik beweert dat het 40 % is. Dat is een concrete alternatieve hypothese: H_a: $p = 0{,}40$. Ze zullen die hypothesen testen door de punaise 120 keer op te werpen.

1 Charlotte zegt: 'Ik ben bereid om mijn hypothese te verwerpen, indien de kans op de gevonden steekproefproportie, of nog lager, kleiner is dan 0,05, in de veronderstelling dat mijn hypothese de juiste is'.

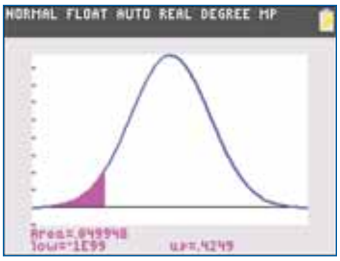
Vanaf welke waarde $\hat{p}_{obs}$ is $P(\hat{p} \leqslant \hat{p}_{obs}) < 0{,}05$?

Indien de nulhypothese waar is, dan is de steekproefverdeling $\text{Norm}\left(0{,}5; \sqrt{\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{120}}\right)$.

Als grenswaarde vinden we dan de waarde 0,4249.

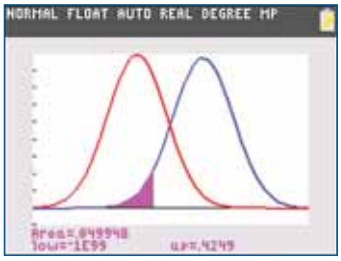


Controle:



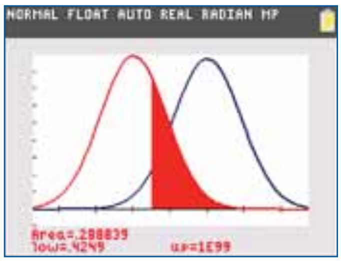
2 Maak op eenzelfde as een schets van de steekproefverdeling indien $p = 0{,}50$ en indien $p = 0{,}40$. Beantwoord op basis van die schets: indien de hypothese van Diederik de juiste is, zal $P(\hat{p} \geqslant \hat{p}_{obs})$ dan groter of kleiner zijn dan 0,05?

Uit de grafiek blijkt dat die kans groter is dan 0,05.



3 Bereken nu ook de kans uit de vorige vraag.

Deze kans is ongeveer 28,9 %.



Opdracht 11 bladzijde 125

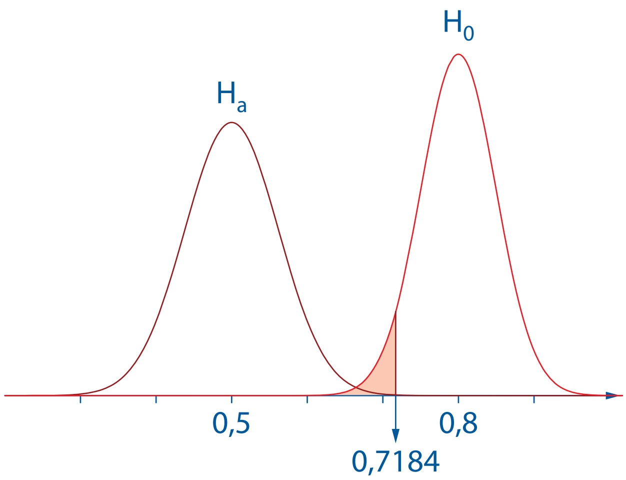
In onderwijskringen, en ver daarbuiten, hoor je weleens uitspraken als: 'we gebruiken maar tien procent van ons brein', 'er zijn kinderen bij wie de linkerhersenhelft dominant is, en die zijn dan sterker in talen' of 'leerlingen hebben elk een eigen leerstijl en leren daarom het best wanneer hun leerkracht rekening houdt met die leerstijl'. Deze uitspraken klinken geloofwaardig, maar ze blijken niet te kloppen. Ze worden *neuromythen* genoemd, verzonnen verhalen over de werking van het brein.

Uit een bevraging van 242 Nederlandse leerkrachten uit het lager en secundair onderwijs bleek dat ruim 80 % onder hen mythen over leerstijlen en het verschil tussen informatieverwerkingsstijlen die met linker- en rechterhemisfeer te maken hebben, voor waar aanzagen. Stel dat de directeur van een grote scholengemeenschap in Nederland beweert dat slechts 50 % van haar docenten nog in dergelijke mythen gelooft. Als dat zo is, dan hoeven er geen bijscholingen meer georganiseerd en betaald te worden. Maar is het percentage toch nog 80 %, dan is het aangewezen om verdere vorming te voorzien. Ze neemt een EAS van 65 van de 870 docenten in de scholengemeenschap en peilt naar het geloof in bepaalde neuromythen.

1 Maak een goede keuze voor H_0 en H_a en stel de bijbehorende steekproefverdelingen voor op eenzelfde horizontale as.

nulhypothese: H_0: $p = 0{,}80$

alternatieve hypothese: H_a: $p = 0{,}50$

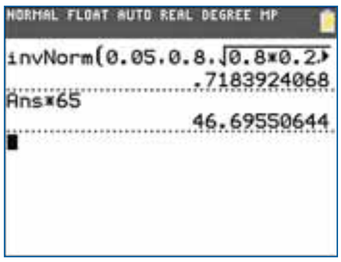


2 Bepaal een beslissingscriterium waarbij de kans op een type I-fout 5 % is. Hoeveel docenten mogen maximaal in die mythen geloven opdat ze de nulhypothese kan verwerpen?

Indien de nulhypothese waar is, is de steekproefverdeling $\text{Norm}\left(0{,}80; \sqrt{\dfrac{0{,}80 \cdot 0{,}20}{65}}\right)$.

Als grenswaarde vinden we: 0,7184.

Er mogen maximaal 46 docenten in de mythen geloven.



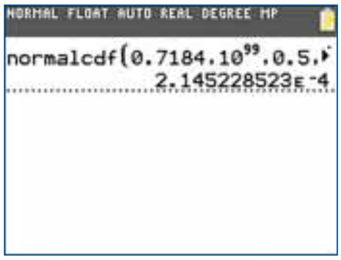
3 Bereken voor dat criterium de kans op een type II-fout.

De steekproefverdeling is nu Norm$\left(0{,}50; \sqrt{\dfrac{0{,}50 \cdot 0{,}50}{65}}\right)$.

De kans op een type II fout is $P_{0,5}(\hat{p} \geqslant 0{,}7184)$.

Deze kans is ongeveer 0,02%.

Ook op de figuur zien we dat deze kans heel erg klein is.



Opdracht 12 bladzijde 125

Bij een sollicitatieprocedure wordt op basis van een beperkt aantal tests beslist of een kandidaat wordt aangenomen of niet. De nulhypothese voor elke kandidaat is 'de kandidaat is niet geschikt' en de alternatieve hypothese is 'hij/zij is wel geschikt'. Als alternatieve hypothese wordt immers meestal die bewering gekozen waarvoor men 'bewijsmateriaal' hoopt te vinden, ten nadele van de nulhypothese.

1 In welke situaties treden een type I- en een type II-fout op?

Type I: het aanwerven van een persoon die eigenlijk niet geschikt is voor de job.

Type II: het niet aanwerven van een persoon die echter wel geschikt is voor de job.

2 In het Engels spreekt men van *false positives* (de kandidaat wordt aanvaard (*positive*) terwijl hij/zij eigenlijk niet geschikt is voor de job) en false negatives (omgekeerde situatie): met welk type fout komen beide overeen? Welk type fout lijkt je voor een bedrijf erger?

Type I is een false positive en type II een false negative. Een false positive kan het bedrijf meer schade berokkenen.

3 Stel beide soorten kandidaten (geschikt/ongeschikt) en beide beslissingen (aannemen/niet aannemen) voor in een tabel zoals in het tekstkader. Schrijf in die tabel ook de *false positives* en *false negatives* op de juiste plaatsen.

	kandidaat is ongeschikt	kandidaat is geschikt
kandidaat wordt aangenomen	type I-fout false positive	juiste beslissing
kandidaat wordt niet aangenomen	juiste beslissing	type II-fout false negative

Opdracht 13 bladzijde 131

In 2016 had 85 % van de Belgische huishoudens met minstens één persoon tussen 16 en 74 jaar een internetaansluiting. Laten we even aannemen dat dit ook de werkelijke populatieproportie *p* is. Je stelt een EAS samen van 320 huishoudens en vraagt ze of ze een internetaansluiting hebben.

1 Is aan de vuistregels voldaan om de steekproefverdeling van $\hat{p}$ door de normale verdeling te benaderen?

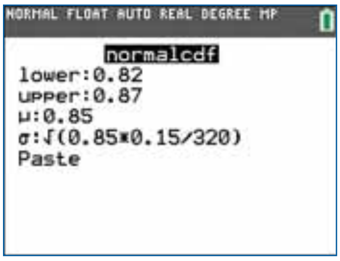
- De populatie is zeker 10 keer groter dan de steekproef.
- $n \cdot p = 320 \cdot 0{,}85 = 272 \geqslant 10$
- $n \cdot (1-p) = 320 \cdot 0{,}15 = 48 \geqslant 10$

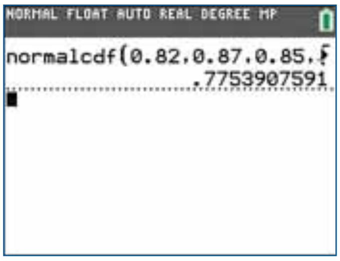
We mogen het model van de normale verdeling toepassen.

2 Wat is het gemiddelde en de standaardafwijking van de steekproefverdeling?

De parameters zijn: $\mu = 0{,}85$ en $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{320}} \approx 0{,}020$.

3 Wat is de kans dat $\hat{p}$ tussen 82 % en 87 % ligt voor $n = 320$?





Deze kans is ongeveer 77,5 %.

Opdracht 14 bladzijde 131

Op 1 januari 2016 waren 2 285 581 van de 11 267 910 Belgen jonger dan 20 jaar.

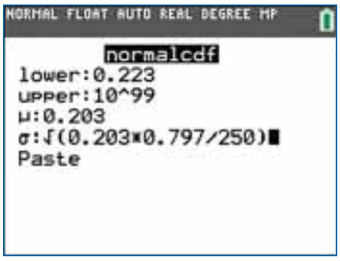
De populatieproportie van deze groep is dus $\dfrac{2\,285\,581}{11\,267\,910} \approx 0{,}203$.

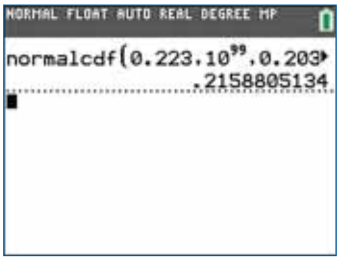
1 Er worden enkelvoudige aselecte steekproeven van 250 Belgen genomen. Hoeveel procent daarvan zal een steekproefproportie $\hat{p}$ opleveren die 2 % of meer boven de populatieproportie ligt?

De steekproefproporties zijn normaal verdeeld want

- de populatie (de 0 tot 19-jarige Belgen) is 10 keer groter dan de steekproef (250)
- $n \cdot p = 250 \cdot 0{,}203 = 50{,}75 \geqslant 10$
- $n \cdot (1 - p) = 250 \cdot 0{,}797 = 199{,}25 \geqslant 10$

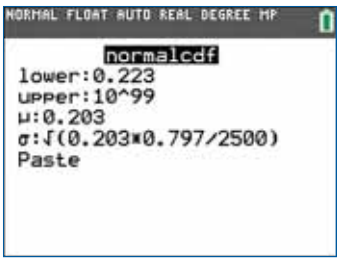
Een steekproefproportie van 2 % of meer boven de populatieproportie betekent een steekproefproportie van 0,223 of meer. De kans hierop is 21,6 %.

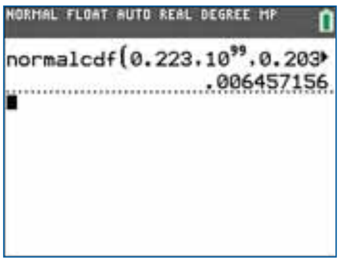




2 Wat is die kans bij steekproeven van 2500 Belgen?

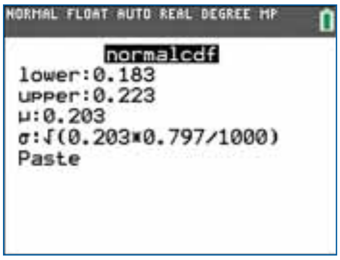
Wanneer de steekproefgrootte 2500 is, heeft de steekproefverdeling een standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}203 \cdot 0{,}797}{2500}} \approx 0{,}008$. De kans op een afwijking van minstens 2 % boven de populatieproportie is dan 0,6 %.

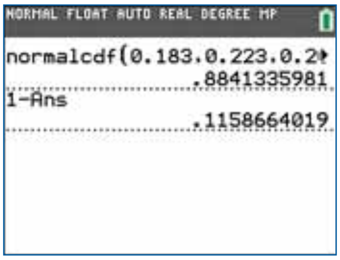




3 Wat is de kans op een afwijking van meer dan 2 % ten opzichte van de populatieproportie bij enkelvoudige aselecte steekproeven van 1000 Belgen?

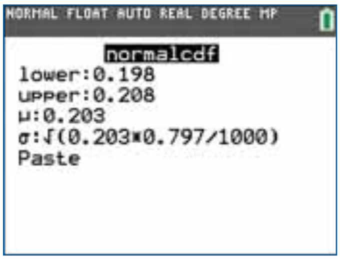
Wanneer de steekproefgrootte 1000 is, heeft de steekproefverdeling een standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}203 \cdot 0{,}797}{1000}} \approx 0{,}0127$. De kans op een afwijking van minstens 2 % boven of onder de populatieproportie is gelijk aan 100 % verminderd met de kans dat de steekproefproportie ligt tussen 0,203 – 0,02 = 0,183 en 0,203 + 0,02 = 0,223. Deze kans is 11,6 %.

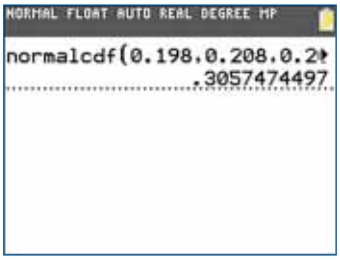




4 Wat is de kans dat het verschil tussen $\hat{p}$ en p minder dan 0,005 is voor $n = 1000$?

De kans op een verschil van minder dan 0,005 is gelijk aan de kans dat de steekproefproportie ligt tussen 0,203 – 0,005 = 0,198 en 0,203 + 0,005 = 0,208. Deze kans is 30,6 %.





5 Tussen welke grenzen zal 95 % van de steekproefresultaten liggen voor $n = 1000$?

Redenerend met de vuistregel voor de normale verdeling: tussen ongeveer twee standaardafwijkingen onder en boven het gemiddelde, dus tussen 0,203 ± 2 · 0,0127, of tussen 0,178 en 0,228. Rekenen we met 1,96 standaardafwijkingen, dan vinden we dezelfde grenswaarden, afgerond op drie cijfers na de komma.

Opdracht 15 bladzijde 132

Een onderzoek naar de bloedgroep bij 25 000 Belgen leverde het volgende resultaat.

bloedgroep	aantal
O	11 275
A	10 702
B	2 258
AB	765

1 Bepaal een 95 %-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie Belgen met bloedgroep O.

Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval is

$$\frac{11275}{25\,000} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\dfrac{11275}{25\,000} \cdot \dfrac{13\,725}{25\,000}}{25\,000}} = 0{,}451 \pm 0{,}006 \text{ of } [0{,}445; 0{,}457].$$

2 Bepaal de omvang van een EAS zodat je de proportie *p* van de Belgen met bloedgroep 0 tot op 0,01 nauwkeurig kunt voorspellen met een betrouwbaarheid van 95 %.

We zoeken n zó dat de foutenmarge hoogstens 0,01 is, bij 95 % betrouwbaarheid.

Omdat de foutenmarge ook afhankelijk is van p, kiezen we p zodat de foutenmarge maximaal is. Voor de werkelijke populatieproportie zal de foutenmarge dan zeker kleiner zijn dan 0,01. Stel dus p = 0,5.

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5^2}{n}} \leqslant 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 0{,}25 \cdot \left(\frac{1{,}96}{0{,}01}\right)^2 = 9604$$

Een steekproef van minstens 9604 personen zal een foutenmarge van hooguit 1 % opleveren.

Opdracht 16 bladzijde 132

In 1931 was Arthur L. Fox, tijdens zijn onderzoek naar kunstmatige zoetstoffen, een nieuwe stof aan het synthetiseren, fenylthiocarbamide ($C_7H_8N_2S$, afgekort als PTC). Toen een zekere hoeveelheid PTC in poedervorm in de lucht terechtkwam, klaagde een collega die vlakbij stond over de bittere smaak ervan. Arthur Fox proefde echter helemaal niets. Hij testte de stof uit op enkele andere collega's en stelde vast dat sommige ze als zeer bitter ervaarden, terwijl andere ze volkomen smakeloos vonden. Verder onderzoek wees uit dat het gevoelig zijn voor PTC genetisch bepaald is en dominant overgeërfd wordt.

Aangezien PTC ook aanwezig is in onder andere kool, broccoli en spruitjes, kan die gevoeligheid verklaren waarom een aantal mensen deze groenten niet lusten. Dit is jammer, want sommige van die groenten bevatten stoffen die preventief werken tegen bepaalde kankers. Dit kan verklaren waarom al heel wat onderzoek verricht is naar de gevoeligheid voor PTC en aanverwante stoffen.

Uit onderzoek blijkt dat 75 % van de Amerikanen PTC kan proeven. Laten we deze waarde in de onderstaande oefening even gelijkstellen aan de werkelijke populatieproportie *p*.

1 Indien er heel veel enkelvoudige aselecte steekproeven van 150 personen genomen zouden worden, waarop de smaakgevoeligheid voor PTC getest wordt, hoe zou de steekproefverdeling er dan uitzien?

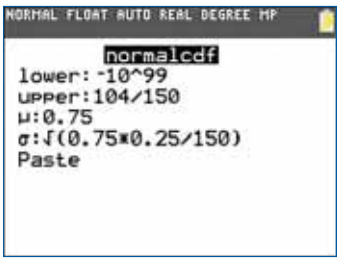
De steekproefverdeling is $\text{Norm}\left(0{,}75; \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{150}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}75; 0{,}035)$.

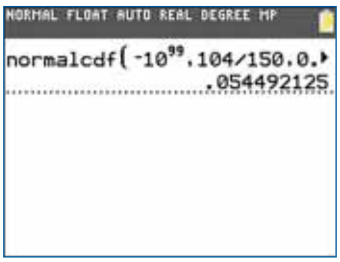
2 Tussen welke twee waarden zal ongeveer 95 % van de steekproefproporties liggen?

95 % van de steekproefproporties zal liggen tussen de waarden $0{,}75 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{150}}$,

dus ongeveer tussen 0,681 en 0,819.

3 Bij een onderzoeker waren er 104 personen die PTC proefden. Hoe groot is de kans op een proportie kleiner dan of gelijk aan $\frac{104}{150}$?





Deze kans is ongeveer 5,4 %.

Opdracht 17 bladzijde 132

Het leerlingenbestand in een vroegere jongensschool van 2000 leerlingen (= populatie) bestaat ondertussen uit 35 % meisjes. De leerlingenraad bestaat uit 20 personen (= steekproef), waarvan 4 meisjes. Je wil de kans berekenen op hoogstens 20 % meisjes, mocht de leerlingenraad lukraak gekozen worden uit de volledige schoolpopulatie.

Leg uit waarom je bij deze opdracht de normale verdeling $\text{Norm}\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$ niet mag gebruiken om de steekproefverdeling te beschrijven.

Omdat $20 \cdot 0{,}35 = 7 < 10$ kan het model van de normale verdeling niet gebruikt worden.

Opdracht 18 bladzijde 132

Volgens een rapport van UBS zal het tegen 2025 technisch mogelijk zijn om vracht- en passagiersvliegtuigen zonder piloten te laten vliegen. Dat zou de luchtvaartindustrie enorme besparingen kunnen opleveren.

Een niet onbelangrijke vraag is of veel passagiers bereid zouden zijn om op zo'n pilootloos vliegtuig te stappen. Deze, maar ook heel wat andere kwesties werden door UBS onderzocht aan de hand van een steekproef van 7940 personen in mei 2017.

1 In het rapport van UBS staat dat voor alle proporties voor die steekproef met een foutenmarge van 1,1 % gerekend mag worden. Ze vermelden daarbij geen betrouwbaarheidsniveau. Hoe zijn ze vermoedelijk tot dat getal gekomen?

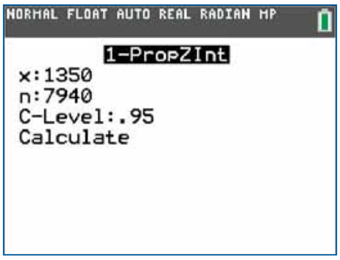
Indien met een foutenmarge van 1,1 % gerekend wordt, heeft men als steekproefproportie vermoedelijk p = 0,50 genomen en als betrouwbaarheidsniveau 95 %.

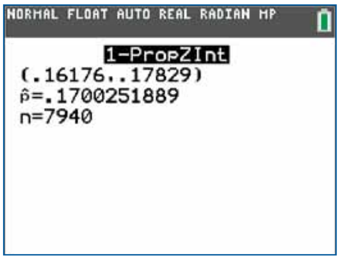
Immers: $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}50 \cdot 0{,}50}{7940}} \approx 0{,}011$.

2 Er bleek dat slechts 17 % van de deelnemers aangaf bereid te zijn een vlucht te nemen zonder piloot aan boord.

Bereken een 95 %-betrouwbaarheidsinterval bij dit steekproefresultaat.

Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval is [0,162; 0,178].

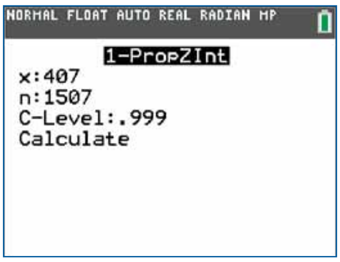


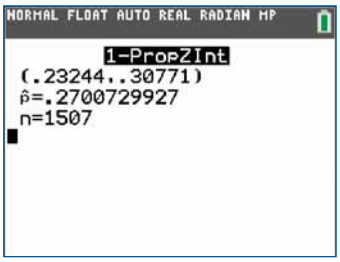


3 De steekproef bestond uit 1507 Amerikanen. Zij hadden duidelijk meer vertrouwen in deze evolutie dan de respondenten uit de andere vier landen: van de Amerikanen zag namelijk 27 % het zitten om een pilootloze vlucht te nemen.

Bereken een 99,9 %-betrouwbaarheidsinterval bij dit resultaat.

Een 99,9 % betrouwbaarheidsinterval is [0,232; 0,308].





Opdracht 19 bladzijde 133

Je hebt een spaarpot met allemaal Belgische muntstukken van 1 euro. Je weet dat het er meer dan 1000 zijn en je wil het aantal schatten, zonder effectief het geld te tellen.

Je haalt 250 muntstukken uit je spaarpot en vervangt die door 250 Spaanse muntstukken van 1 euro. Je schudt de spaarpot zeer goed, zodat de Spaanse muntstukken goed gemengd zijn onder de Belgische.
Je haalt nu aselect 100 muntstukken uit de spaarpot. Er zitten er 17 Spaanse tussen.

Hoeveel geld zal er, met een betrouwbaarheid van 95 %, in je spaarpot zitten?

We kunnen de normale verdeling gebruiken, want:

– de populatie (meer dan 1000 muntstukken) is 10 keer groter dan de steekproef (100 muntstukken)

– $n \cdot p = 100 \cdot \frac{17}{100} = 17 \geqslant 10$

– $n \cdot (1-p) = 100 \cdot \frac{83}{100} = 83 \geqslant 10$

De parameters van de normale verdeling zijn:

$$\mu = \frac{17}{100}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{17}{100} \cdot \frac{83}{100}}{100}}$$

Het interval [μ – 1,96σ; μ + 1,96] heeft een kans van 95 % om $p = \frac{250}{N}$ te bevatten.

Uit $\mu - 1{,}96\sigma \leqslant \frac{250}{N} \leqslant \mu + 1{,}96\sigma$ volgt $\frac{1}{\mu - 1{,}96} \geqslant \frac{N}{250} \geqslant \frac{1}{\mu + 1{,}96}$,

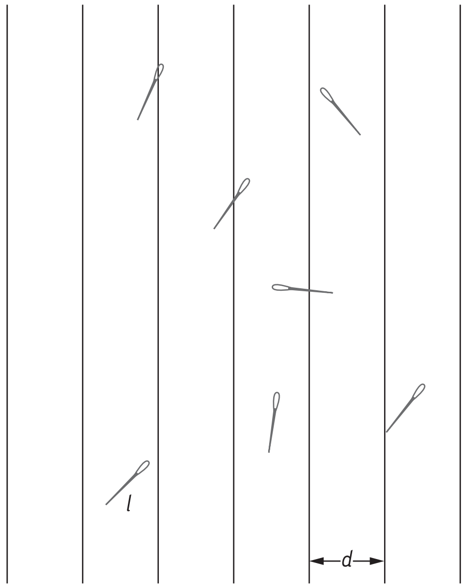
zodat $\frac{250}{\mu + 1{,}96\sigma} \leqslant N \leqslant \frac{250}{\mu - 1{,}96\sigma}$ of afgerond, $1026 \leqslant N \leqslant 2594$.

Er zal, met een betrouwbaarheid van 95 %, tussen 1026 en 2594 euro in de spaarpot zitten.

Opdracht 20 bladzijde 134

In 1777 formuleerde de edelman Comte de Buffon zijn befaamde naaldenvraagstuk: 'Een groot oppervlak is verdeeld door evenwijdige rechten op gelijke afstanden d van elkaar. Een dunne naald van lengte $l < d$ wordt willekeurig op het vlak geworpen. Wat is de kans dat de naald één van de evenwijdigen zal snijden?'. Laplace bewijst in zijn werk '*Théorie Analytique des Probabilités*' (1812) dat de kans p gelijk is aan $\frac{2l}{\pi d}$ en wijst erop dat men met deze formule een benadering van π kan verkrijgen, door zo'n naald vele malen te gooien.

Rond 1850 voerde Johan Wolf, professor sterrenkunde te Bern, het experiment uit met een naald van 36 mm lang, waarbij de afstand d 45 mm bedroeg. Op 5000 worpen sneed de naald 2532 maal een evenwijdige.



1 Geef een schatting van π op basis van $\hat{p}$.

$$\hat{p} \approx \frac{2l}{\pi d} \Leftrightarrow \pi \approx \frac{2l}{d \cdot \hat{p}} = \frac{2 \cdot 36}{45 \cdot \frac{2532}{5000}} = 3{,}159557...$$

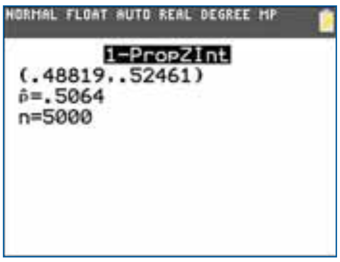
π is ongeveer 3,160.

2 Geef, op basis van de gegevens van Wolf, een 99 %-betrouwbaarheidsinterval voor de kans p om een evenwijdige te snijden, op basis van dit experiment.

Een betrouwbaarheidsinterval voor p is $\frac{2532}{5000} \pm 2{,}58\sqrt{\frac{\frac{2532}{5000} \cdot \frac{2468}{5000}}{5000}} \approx 0{,}5064 \pm 0{,}0182.$

Dit kunnen we ook noteren als [0,4882; 0,5246].

Of met behulp van de TI-84:



3 Gebruik de uiterste waarden van het 99 %-betrouwbaarheidsinterval voor p, om een interval te geven dat met een waarschijnlijkheid van 99 % het getal π zal bevatten.

Met de formule $\pi \approx \frac{2l}{d \cdot p}$ kunnen we de grenzen van het p-interval omzetten in grenzen voor een π-interval: $\left[\frac{2 \cdot 36}{45 \cdot 0{,}52461}; \frac{2 \cdot 36}{45 \cdot 0{,}48819}\right] \approx [3{,}050; 3{,}278].$

4 Hoe vaak moet je de naald gooien om een schatting $\hat{p}$ van p te verkrijgen, die met een betrouwbaarheid van 99 % maximaal 0,01 van p afwijkt, voor $l = 36$ mm en $d = 45$ mm?

De theoretische kans is $p = \dfrac{2 \cdot 36}{\pi \cdot 45} \approx 0{,}5093$. Met deze waarde van p moeten we n zoeken zodat de foutenmarge $2{,}58\sqrt{\dfrac{p \cdot (1-p)}{n}} \leqslant 0{,}01$, dus:

$$2{,}58\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leqslant 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \cdot (1-p)}{n} \leqslant \left(\frac{0{,}01}{2{,}58}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{2{,}58}{0{,}01}\right)^2 \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{2{,}58}{0{,}01}\right)^2 \cdot \frac{2 \cdot 36}{\pi \cdot 45} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 36}{\pi \cdot 45}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant 16\,635{,}24...$$

Je moet de naald zeker 16 636 keer gooien.

Opdracht 21 bladzijde 135

Betrouwbaarheid voor kleinere populaties

Eén van de voorwaarden om de steekproefverdeling te mogen modelleren als $\text{Norm}\left(p, \sqrt{\dfrac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$ is dat de populatie minstens 10 keer groter is dan de steekproef.

Is aan die voorwaarde niet voldaan, dan kan men op basis van meer gevorderde kansrekening toch nog formules voor betrouwbaarheidsintervallen opstellen.

Stel dat de totale populatie uit N elementen bestaat en de steekproef uit n. Als z^* de kritieke z-waarde is bij een betrouwbaarheid van B %, dan kun je een B %-betrouwbaarheidsinterval berekenen als:

$$\hat{p} \pm z^* \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}_{\substack{\text{correctiefactor} \\ \text{voor eindige} \\ \text{populaties}}}}_{\text{veralgemeende standaardafwijking}}$$

De extra factor wordt de **correctiefactor voor eindige populaties** genoemd, wat suggereert dat de eerste factor van de veralgemeende standaardafwijking in theorie slechts juist is voor oneindige populaties.

1 Bereken $\lim\limits_{N \to \infty} \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$. Hoe interpreteer je dit resultaat?

$$\lim_{N \to +\infty} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\lim_{N \to +\infty} \frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{1} = 1$$

Dit betekent dat de correctiefactor voor voldoende grote N ongeveer gelijk is aan 1 en dus weggelaten mag worden.

2 Bereken de waarde van die correctiefactor voor de aangegeven situaties.

n	$\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ met $N = 10 \cdot n$	$\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ met $N = 50 \cdot n$
10	0,95346	0,99094
20	0,95106	0,99044
50	0,94963	0,99015
100	0,94916	0,99005
1000	0,94873	0,98996
$\rightarrow +\infty$	$\sqrt{\dfrac{9}{10}} \approx 0{,}94868$	$\sqrt{\dfrac{49}{50}} \approx 0{,}98995$

3 In een school zitten 790 leerlingen. Daaruit worden er 120 lukraak gekozen. 89 onder hen zijn 'tevreden' of 'zeer tevreden' over hun relatie met hun ouders.

Stel een 95 %-betrouwbaarheidsinterval op met en zonder de correctie voor kleine populaties.

Zonder correctie: $\dfrac{89}{120} \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{\dfrac{89}{120} \cdot \dfrac{31}{120}}{120}} \approx 0{,}742 \pm 0{,}078$, of $[0{,}664; 0{,}820]$.

Met correctie: $\dfrac{89}{120} \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{\dfrac{89}{120} \cdot \dfrac{31}{120}}{120}} \cdot \sqrt{\dfrac{790-120}{790-1}} \approx 0{,}742 \pm 0{,}072$ of $[0{,}670; 0{,}814]$.

De correctiefactor is $\sqrt{\dfrac{790-120}{790-1}} \approx 0{,}922$.

Opdracht 22 bladzijde 136

Büsra wil een spelletje met je spelen en beweert dat het eerlijk is. Jullie hebben dus allebei een kans van 50 % om te winnen. Ze geeft je een lange en gecompliceerde uitleg die je moet overtuigen van de eerlijkheid van het spel. Je hebt er echter niet veel van begrepen, durft dat niet toe te geven en dus stem je maar in. Maar je bent argwanend.

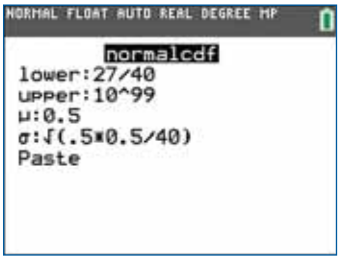
1 Stel een nulhypothese en een alternatieve hypothese op voor de kans dat Büsra een spelletje wint.

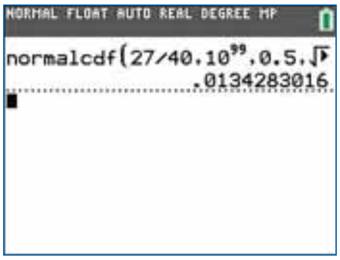
$H_0: p = \dfrac{1}{2}$ en $H_a: p > \dfrac{1}{2}$

We werken met een éénzijdige hypothese omdat uit de opgave blijkt dat je argwanend bent en dus vermoedt dat je zelf minder kans hebt om te winnen dan Büsra.

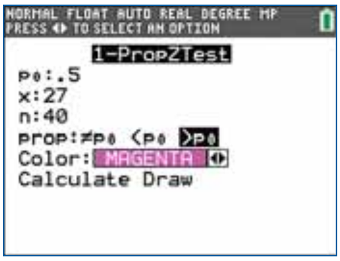
2 Na 40 spelletjes blijkt ze 27 keer gewonnen te hebben. Wat is de P-waarde van dit resultaat?

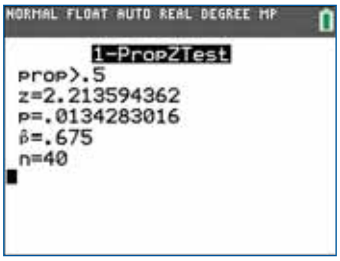
$$P = P\left(\hat{p} \geqslant \frac{27}{40}\right) \approx 0{,}013$$





of





3 Wat vind je van de bewering van Büsra? Denk je dat haar spelletje echt eerlijk is?

De nulhypothese kan verworpen worden op het 5 %-niveau. We hebben een reden om te twijfelen aan de eerlijkheid van het spel.

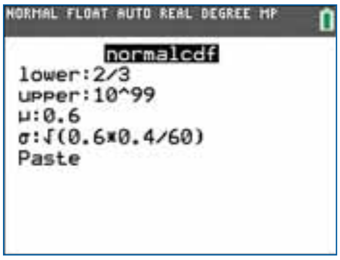
Opdracht 23 bladzijde 136

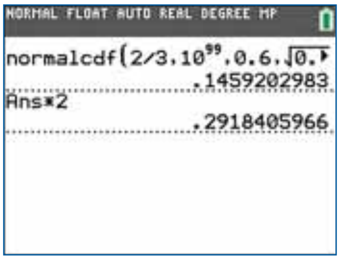
We vermoeden dat 60 % van een populatie een bepaald kenmerk heeft, met andere woorden: $H_0 : p = 0{,}60$. De alternatieve hypothese is $H_a : p \neq 0{,}60$.

1 In een EAS van 60 eenheden hebben 40 eenheden het beschouwde kenmerk.

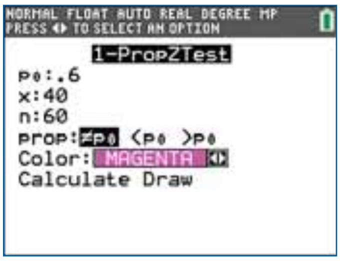
Bereken de P-waarde van de steekproefproportie $\hat{p} = \frac{2}{3}$ en ga de significantie na op het 5 %-niveau.

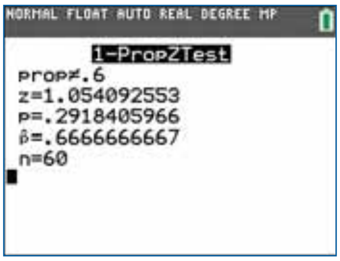
$$P = 2 \cdot P\left(\hat{p} \geqslant \frac{2}{3}\right) \approx 0{,}292$$





of



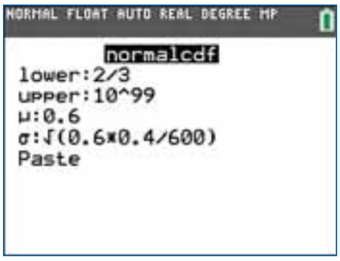


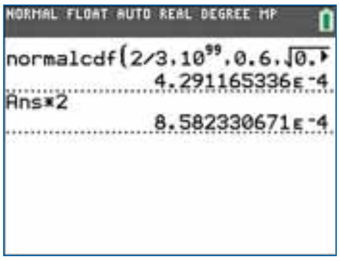
De P-waarde is groter dan 5 % en de steekproefproportie is dus niet statistisch significant op dat niveau.

2 In een EAS van 600 eenheden hebben 400 eenheden het kenmerk.
De steekproefproportie is opnieuw $\hat{p} = \frac{2}{3}$.
Beantwoord zonder berekeningen te maken: zal de P-waarde nu groter, kleiner of gelijk zijn?
Controleer door middel van een berekening.

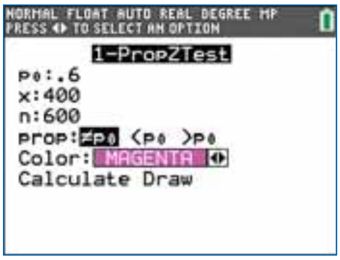
De P-waarde zal kleiner zijn. Voor n = 600 zal de standaardafwijking kleiner zijn dan voor n = 60: $\sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{60}} \approx 0{,}063$ en $\sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{600}} = 0{,}02$. Een afwijking van meer dan 6 % $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$ is voor n = 60 mogelijk, maar voor n = 600 minder waarschijnlijk.

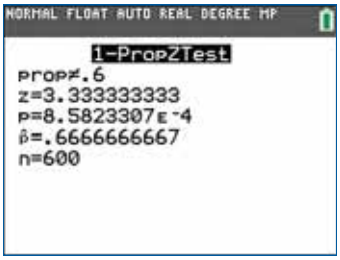
Controle:





of





Opdracht 24 bladzijde 136

Je moet uitleggen wat 'statistische significantie op het 0,05-niveau' betekent. Je antwoordt: 'Dit wil zeggen dat de kans dat de nulhypothese waar is, kleiner is dan 0,05.'

Is je antwoord correct of niet? Leg uit waarom wel of niet.

Je antwoord is niet correct. De significantie is een uitspraak over de gegevens, in het licht van een bepaalde hypothese, niet over de hypothese zélf. Er is sprake van statistische significantie op het 0,05-niveau, wanneer het steekproefresultaat een kans kleiner dan 0,05 heeft om louter en alleen op basis van het toeval op te treden, mocht de nulhypothese waar zijn.

Op basis van de gegevens zal de hypothese nadien verworpen worden of niet (en terecht of niet).

Indien afgesproken is om de nulhypothese te verwerpen van zodra P < 0,05, dan is de (a priori) kans dat de nulhypothese ten onrechte verworpen zal worden inderdaad 0,05. Dus enkel indien de nulhypothese waar is, m.a.w. als $p = p_0$, is de kans precies 5 % dat een steekproefresultaat een P-waarde kleiner dan 0,05 zal hebben. Voor andere waarden van p zal die kans groter of kleiner zijn.

Opdracht 25 bladzijde 137

Alhoewel van een teerling wordt beweerd dat hij eerlijk is, denk jij dat de kans op een 6 gelijk is aan 23 %. Je denkt dat met een experiment te kunnen aantonen.
Je werpt hem daarom 250 keer op.

1 Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese. Wat is de steekproefverdeling in beide gevallen?

$H_0: p = \frac{1}{6}$ en $H_a: p = 0{,}23$

De steekproefverdelingen zijn $\text{Norm}\left(\frac{1}{6}, \sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{250}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}167; 0{,}0236)$,

respectievelijk $\text{Norm}\left(0{,}23; \sqrt{\frac{0{,}23\cdot 0{,}77}{250}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}23; 0{,}0266)$.

2 Wat houden een type I- en een type II-fout in deze situatie in?

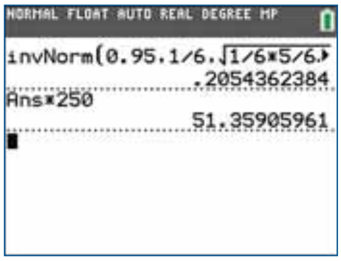
Type I-fout: je beweert dat de teerling vervalst is, niettegenstaande hij niet vervalst is.

Type II-fout: je beweert dat de teerling niet vervalst is, niettegenstaande hij wel vervalst is.

3 Je neemt je voor te beslissen op het 5 %-niveau: vanaf welke steekproefproportie verwerp je dan de nulhypothese?

Vanaf een steekproefproportie $\hat{p} \geqslant 0{,}2054$ wordt de nulhypothese verworpen.

(Dan moet je minstens 52 keer een 6 hebben gegooid op de 250 worpen.)



4 Stel dat je 50 keer 6 ogen gooit, met andere woorden $\hat{p} = 0{,}2$. Bestempel je de teerling als vervalst of niet?

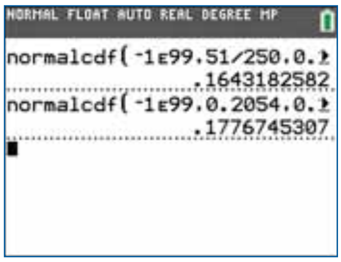
Aangezien $\hat{p} < 0{,}2054$ verwerpen we de nulhypothese niet en beschouwen we de teerling dus niet als vervalst.

5 Bereken de kans op een type II-fout.

De kans op hoogstens 51 keer 6, in de veronderstelling dat de alternatieve hypothese waar is, is

$P_{0,23}\left(\hat{p} \leqslant \frac{51}{250}\right) \approx 0{,}1643.$

Gebruiken we de grenswaarde 0,2054 uit deelvraag 3, dan vinden we: $P_{0,23}(\hat{p} \leqslant 0{,}2054) \approx 0{,}1777$.



Opdracht 26 bladzijde 137

Je kunt examens zien als een middel om uit te maken of een leerling in staat zal zijn om het volgende studiejaar van zijn/haar studierichting te volbrengen. Op basis van de resultaten moet door de klassenraad een beslissing genomen worden.

Aangezien de alternatieve hypothese nogal vaak wordt gebruikt voor dat vermoeden waarvoor men bewijsmateriaal zoekt, nemen we voor H_a: 'de leerling is in staat om het volgende jaar met succes af te leggen'.

1 Wat betekenen een type I- en een type II-fout in deze context?

Type I-fout: de leerling wordt ten onrechte toegelaten tot het volgend studiejaar of krijgt ten onrechte zijn/haar diploma.

Type II-fout: de leerling moet ten onrechte een jaar overdoen.

2 Van welk van beide types kan de kans verkleind worden door middel van herexamens?

Door de leerling een tweede kans te geven, kan de kans op een type II-fout verkleind worden.

Opdracht 27 bladzijde 138

In de tabel kun je het aantal verkeersongevallen in België in 2015, per gewest en per provincie aflezen. Voor heel België is de proportie doden (binnen de 30 dagen) per ongeval gelijk aan $\frac{687}{40\,303} \approx 0{,}017$.

administratieve eenheden	**aantal ongevallen**	**aantal doden binnen 30 dagen**
België	40 303	687
Brussels Hoofdstedelijk Gewest	3761	28
Vlaams Gewest	25 080	357
Antwerpen	6704	76
Limburg	3155	62
Oost-Vlaanderen	6708	89
Vlaams-Brabant	3408	54
West-Vlaanderen	5105	76
Waals Gewest	11 462	302
Waals-Brabant	1137	20
Henegouwen	4036	111
Luik	3618	75
Luxemburg	1037	52
Namen	1634	44

We gaan er voor de onderstaande vragen van uit dat de kans op een dodelijk ongeval in alle provincies gelijk is, dus $H_0 : p = 0{,}017$.

1 Heb je a priori enige reden om aan te nemen dat de provincie Limburg een hogere of een lagere kans heeft op een dodelijk ongeval? Bepaal op basis van je antwoord de alternatieve hypothese.

Een verdedigbare alternatieve hypothese is H_a: $p \neq 0{,}017$. Sommige provincies zullen boven deze waarde zitten en andere eronder, zoals steeds bij een gemiddelde. (Concentreert men zich op één provincie, bijvoorbeeld Limburg, dan zou men, op basis van demografische kenmerken of het wegennetwerk bijvoorbeeld, een andere alternatieve hypothese naar voor kunnen schuiven.)

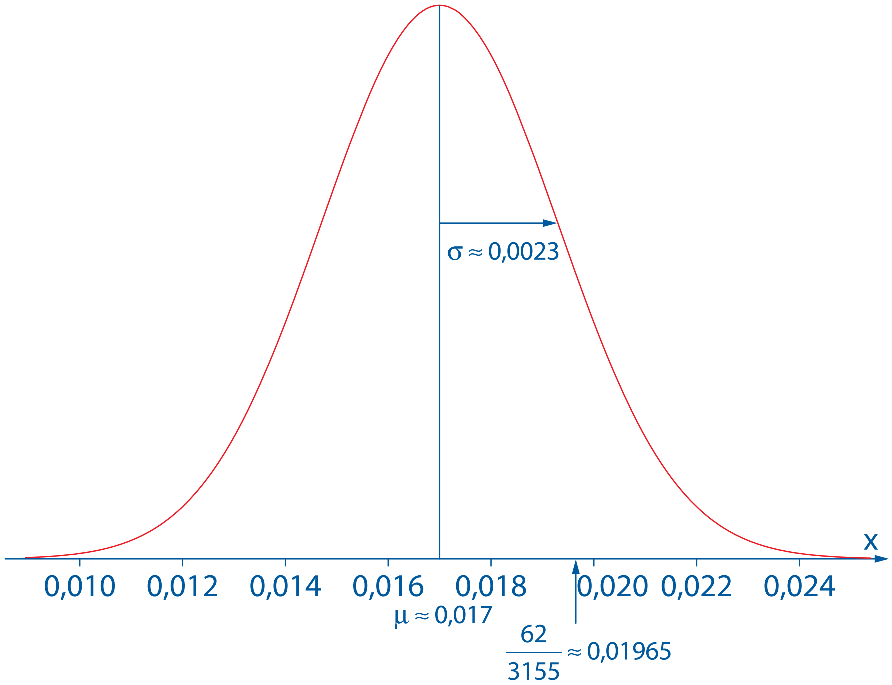
2 Het aantal ongevallen in de provincie Limburg in 2015 beschouwen we als een EAS met grootte $n = 3155$ uit de populatie ongevallen in België.

Wat is dan in de veronderstelling dat de nulhypothese waar is, de steekproefverdeling?

Indien de nulhypothese waar is, dan zal de steekproefverdeling

$$\text{Norm}\left(0{,}017\,;\sqrt{\frac{0{,}017\cdot 0{,}983}{3155}}\right)\approx \text{Norm}\left(0{,}017\,;0{,}0023\right) \text{ zijn.}$$

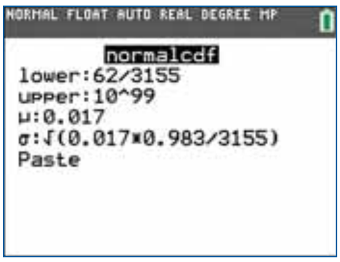
3 Breng op een nauwkeurige schets van de steekproefverdeling uit de vorige vraag de steekproefproportie van de dodelijke ongevallen in Limburg aan. Lijkt de waarde je significant?

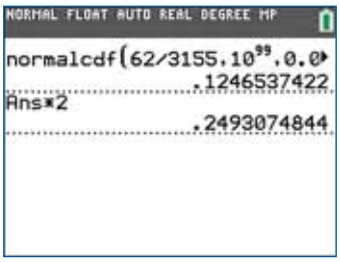


De waarde lijkt zeker niet significant, want de steekproefproportie is amper meer dan een standaardafwijking verwijderd van het gemiddelde.

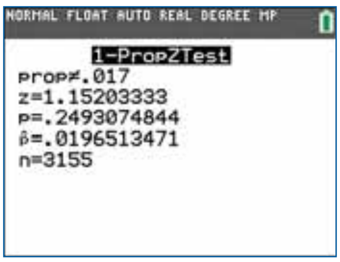
4 Bereken de P-waarde van deze proportie voor de gekozen H_a. Is er een reden om aan te nemen dat er in Limburg procentueel minder of meer dodelijke slachtoffers zijn dan in de rest van België?

De P-waarde is: $P = 2\cdot P\left(\hat{p}\geqslant \dfrac{62}{3155}\right)\approx 0{,}249$. Er is dus geen reden om aan te nemen dat er in Limburg procentueel minder of meer dodelijke slachtoffers zijn dan in de rest van België.





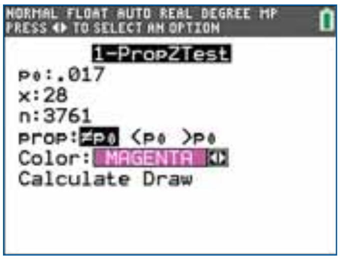
of

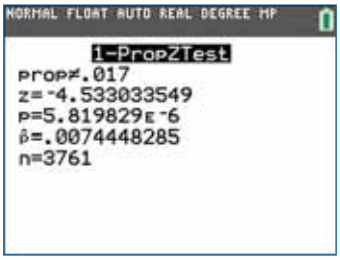


5 Is de proportie dodelijke ongevallen voor het Brussels Hoofdstedelijk Gewest significant op het 5 %-niveau?

Voor Brussel geldt: $\hat{p} = \dfrac{28}{3761} \approx 0{,}007$. De P-waarde is: $P = 2 \cdot P\left(\hat{p} \leqslant \dfrac{28}{3761}\right) \approx 0{,}000006$.

De proportie dodelijke slachtoffers voor het Brussels Hoofdstedelijk Gewest is dus significant op het 5 %-niveau. We hebben redenen om aan te nemen dat de kans op een dodelijk ongeval in het Brussels Hoofdstedelijk Gewest kleiner is dan de beweerde 0,017, die we als proportie voor het BHG verwerpen.





Opdracht 28 bladzijde 139

Je voert een significantietest uit op het resultaat van een EAS en dit blijkt *niet significant* te zijn. Welk besluit kun je trekken? Slechts één van de antwoorden is juist.

A We slaagden er niet in H_0 te verwerpen.

B H_a zou verworpen moeten worden.

C H_0 zou verworpen moeten worden.

D H_0 is waar.

E H_a is waar.

F We slaagden er niet in H_a te verwerpen.

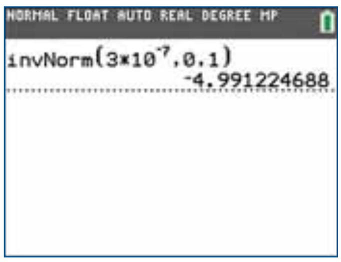
Het juiste antwoord is A. Significantie draait rond H_0 en het verwerpen ervan. Maar dat een resultaat significant is, bewijst helemaal niets.

Opdracht 29 bladzijde 139

Om in de deeltjesfysica de nulhypothese te mogen verwerpen, en van een nieuwe ontdekking te kunnen spreken, is het niet voldoende dat de onderzoeksresultaten significant zijn op het 0,05-niveau of zelfs het 0,005-niveau. In dat domein heb je pas een significant resultaat wanneer $P < 3 \cdot 10^{-7}$.

Hoeveel standaardafwijkingen moet je resultaat dan boven of onder de waarde uit de nulhypothese liggen, bij een éénzijdige alternatieve hypothese?

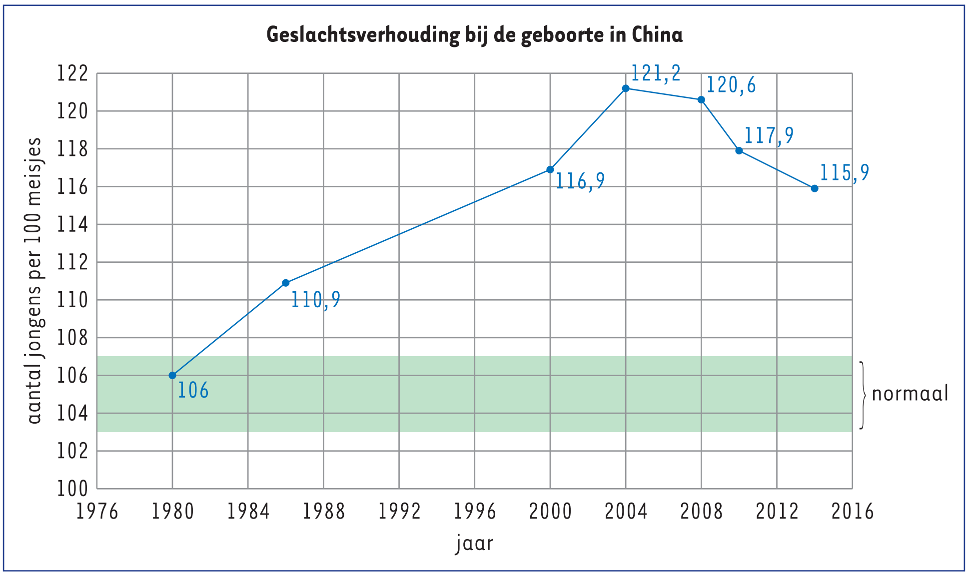
De z-score van $3 \cdot 10^{-7}$ is –4,991, dus moet je resultaat 5 standaardafwijkingen boven of onder de nulhypothese liggen, wat dus extreem uitzonderlijk is.



Opdracht 30 bladzijde 139

De proportie jongens en meisjes bij de geboorte is wereldwijd ongeveer constant. Demografische rapporten geven vaak de verhouding 'aantal jongens per meisje'. Zo vinden we bij de geboorte, overal ter wereld, een vrij stabiele verhouding. Die schommelt tussen 103 en 107 jongens per 100 meisjes, met andere woorden: de geslachtsverhouding schommelt tussen 1,03 en 1,07.

In China echter ligt deze verhouding sinds 1982 hoger dan het normale cijfer, met een piek van 1,21 in 2004. Sommige Chinese provincies kenden zelfs een geslachtsverhouding van 1,30. Voor deze toename worden verschillende oorzaken geciteerd, zoals de selectieve abortus van vrouwelijke foetussen en het niet aangeven van de geboorte van een meisje. Redenen hiervoor zijn het culturele belang dat in China wordt gehecht aan het hebben van een zoon om een familielijn verder te zetten en ook de eenkindpolitiek, die in 1979 is ingevoerd om de exponentiële bevolkingsgroei af te remmen. Sinds 1 januari 2016 mogen de Chinezen wettelijk weer twee kinderen krijgen in plaats van één.



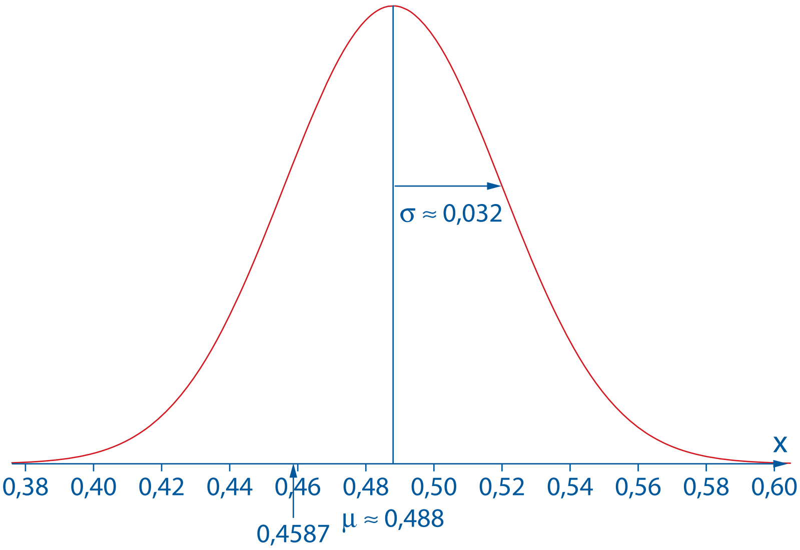
Bron: Jianghu. (2016, 4 februari). China's gezinsplanning en genderbalans anno 2016. Geraadpleegd van http://www.jianghu.nl/china-gezinsplanning-genderbalans/

1 In Europese landen is de geslachtsverhouding bij de geboorte ongeveer 1,05. Je kunt narekenen dat dit overeenkomt met een populatieproportie meisjes gelijk aan 0,488. Stel dat je een EAS van 250 pasgeborenen neemt.

Schets de steekproefverdeling voor deze situatie.

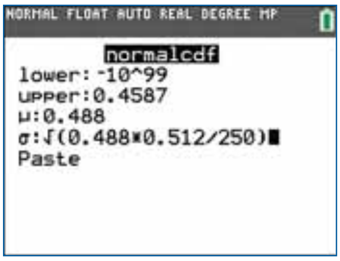
Een geslachtsverhouding van 1,05 komt overeen met een proportie meisjes van $\frac{100}{205} \approx 0{,}488$.

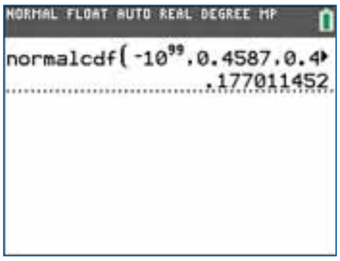
De steekproefverdeling is $\text{Norm}\left(0{,}488\,;\sqrt{\frac{0{,}488 \cdot 0{,}512}{250}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}488\,;0{,}032)$.



2 Wat is de kans dat je een geslachtsverhouding van 1,18 of meer aantreft in je steekproef? Wijst dit op een abnormaal hoge geslachtsverhouding?

Een geslachtsverhouding van 1,18 komt overeen met een proportie meisjes van $\frac{100}{218} \approx 0{,}4587$. De kans dat de geslachtsverhouding 1,18 of meer is komt dus overeen met een proportie meisjes van 0,4587 of minder.

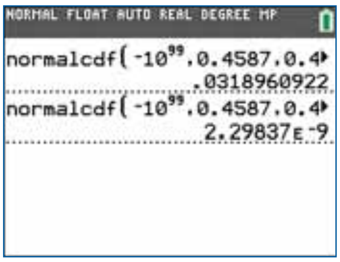




De kans is ongeveer 17,7 % en wijst dus niet op een abnormale geslachtsverhouding.

3 Herhaal vraag **2** voor $n = 1000$ en voor $n = 10\,000$.

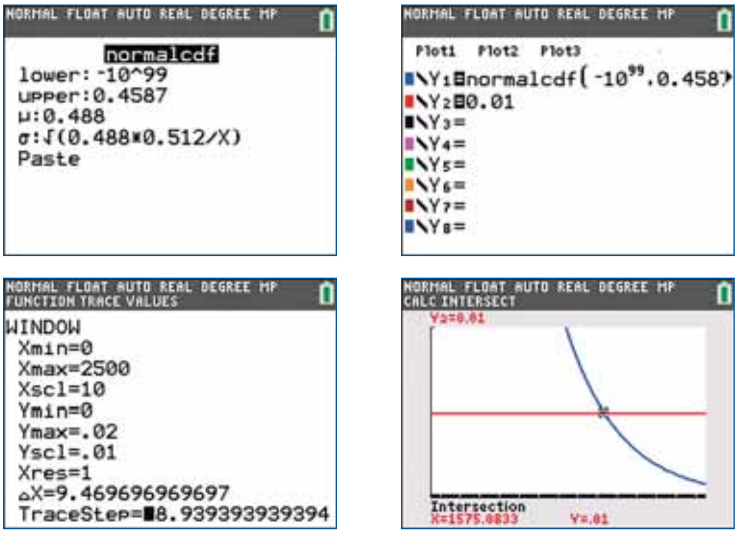
Vervangen we bij vraag 2 de steekproefgrootte 250 door 1000, respectievelijk 10 000, dan vinden we als kans ongeveer 3,2 %, respectievelijk $2{,}3 \cdot 10^{-7}$ %.



De significantie van een resultaat is dus niet enkel afhankelijk van het resultaat zelf, maar van het resultaat ten opzichte van de steekproefverdeling.

4 Vanaf welke steekproefgrootte n kan de nulhypothese $H_0 : p = 0{,}488$ verworpen worden ten voordele van de alternatieve hypothese $H_a : p < 0{,}488$ bij een significantie van 1 %, indien de verhouding jongens/meisjes in de steekproef 1,18 is?

Deze oefening kan bijvoorbeeld grafisch opgelost worden. We zoeken n zodat $P(\hat{p} \leqslant 0{,}4587) \leqslant 0{,}01$.



Vanaf steekproefgrootte 1576 kun je de nulhypothese verwerpen.

Opdracht 31 bladzijde 140

Wat is het gevolg van de beslissing die men neemt op basis van een steekproefproportie met P-waarde kleiner dan het significantieniveau α, wanneer de nulhypothese eigenlijk fout is?

A Een correcte beslissing werd genomen;

B er werd een type I-fout gemaakt;

C er werd een type II-fout gemaakt;

D er zijn te weinig gegevens om die beslissing te kunnen evalueren;

E geen van de bovenstaande uitspraken zijn juist.

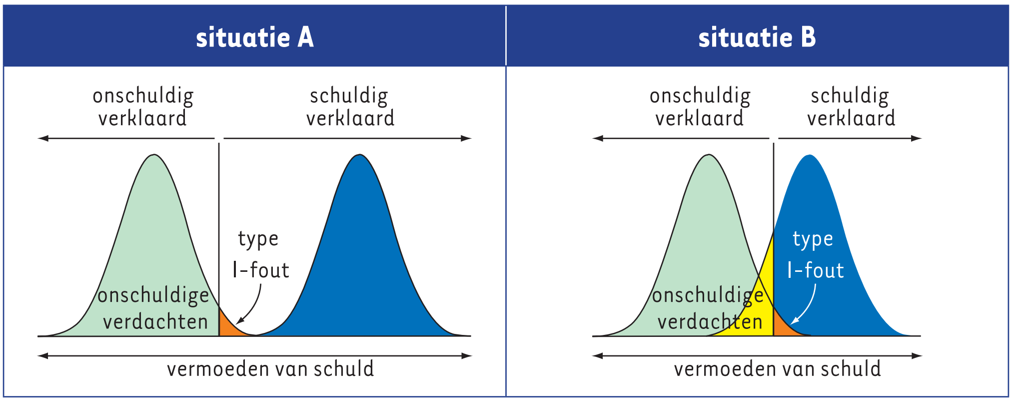
Het juiste antwoord is A: indien de P-waarde kleiner is dan α, wordt de nulhypothese verworpen, wat in deze situatie een correcte beslissing is.

Opdracht 32 bladzijde 141

Wanneer bijvoorbeeld een moord is gepleegd, is elk familielid, elke vriend, collega, buur, kennis … van het slachtoffer in principe 'verdacht'. Eens zo'n verdacht persoon ondervraagd is, kun je hem of haar een zeker 'vermoeden van schuld' toekennen.

In de groene verdeling (links) vind je helemaal links die mensen die overduidelijk niets met de moord te maken hebben en dus een heel laag 'vermoeden van schuld' hebben. Meer rechts in die groene verdeling vind je de onschuldigen die door vreemd gedrag of een crimineel verleden moeilijk de politie van hun onschuld kunnen overtuigen.

In het proces dat dan volgt, zal vanaf een bepaald vermoeden van schuld de persoon veroordeeld worden, of hij nu onschuldig is of niet. Vanaf wanneer iemand schuldig wordt bevonden, hangt van de rechter of van de volksjury af. Wanneer een onschuldige toch schuldig verklaard wordt, treedt een type I-fout op.



De blauwe verdeling (rechts) symboliseert iemand die wél schuldig is.

1 Eén van beide blauwe verdelingen staat voor een derderangscrimineel, betrapt op heterdaad, met een onbekwame advocaat. De andere staat voor een briljante boef met een gereputeerde advocaat, die niet aarzelt om het rechtssysteem te misbruiken en procedurefouten in te roepen. Welke verdeling hoort bij welke situatie?

De linkse situatie hoort bij de derderangs crimineel: hij wordt zeker schuldig verklaard. De briljante boef met een al even briljante advocaat heeft een veel grotere kans om toch onschuldig bevonden te worden, wat met de rechtse situatie overeenkomt.

2 Welke situatie is de meest wenselijke voor onze rechtspraak en onze maatschappij: situatie **A** of **B**?

Situatie A: schuldigen worden ook schuldig bevonden.

3 Stel dat men het aantal veroordeelde onschuldigen wil verminderen, schuift de verticale rechte tussen 'schuldig verklaard' en 'onschuldig verklaard' dan op naar links of naar rechts? Wat is het gevolg van dergelijke opschuiving?

De rechte schuift op naar rechts. De kans op een type I-fout neemt dan af. Dat betekent dan helaas ook dat het aantal criminelen dat ten onrechte onschuldig wordt verklaard, toeneemt.

Opdracht 33 bladzijde 142

Het significantieniveau van een test is (slechts 1 juist antwoord):

A de kans om H_0 te verwerpen;

B de kans om een fout te maken in verband met het testresultaat;

C de kans dat H_0 waar is en verworpen zal worden;

D de voorwaardelijke kans dat H_0 waar is, als gegeven is dat H_0 verworpen werd;

E de voorwaardelijke kans dat H_0 verworpen zal worden, als gegeven is dat H_0 waar is.

Het juiste antwoord is E.

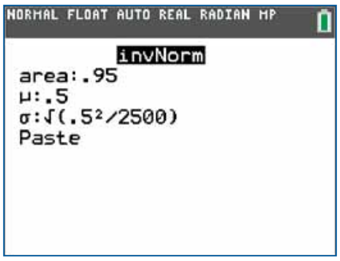
(Deze oefening kan aangegrepen worden om siginificantietesten te beschouwen in termen van voorwaardelijke kansen, indien de kansrekening van de derde graad al behandeld werd.)

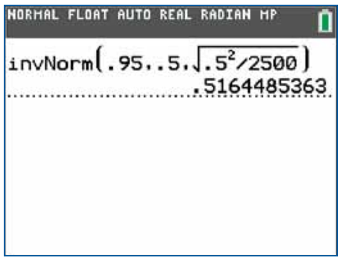
Opdracht 34 bladzijde 142

Je beschikt over 10 niet-onderscheidbare munten, waarvan er 9 eerlijk zijn en 1 een kans op kop van 55 % heeft. Je neemt willekeurig een munt en gooit ze 2500 keer op. De hypothesen zijn H_0: $p = 0{,}5$ en H_a: $p = 0{,}55$.

1 Vanaf welke grenswaarde p^* zal $P < 0{,}05$? Met notaties uit de kansrekening: bepaal p^* zodat $P(\hat{p} \geqslant p^* \mid H_0 \text{ is waar}) < 0{,}05$.

De grenswaarde is ongeveer 0,516.

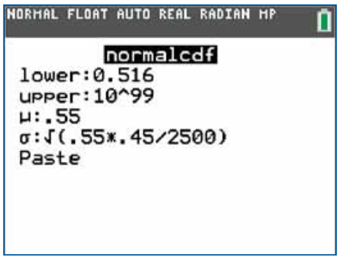


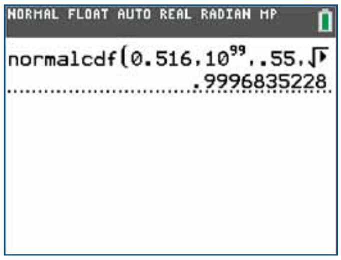


2 Stel dat je de nulhypothese hebt verworpen op het 5 %-niveau. Wat is de kans dat de nulhypothese toch waar is? Met notaties uit de kansrekening: bereken $P(H_0 \text{ is waar} \mid \hat{p} \geqslant p^*)$. Je kunt die kans ook noteren als $P(H_0 \text{ is waar} \mid H_0 \text{ werd verworpen})$.

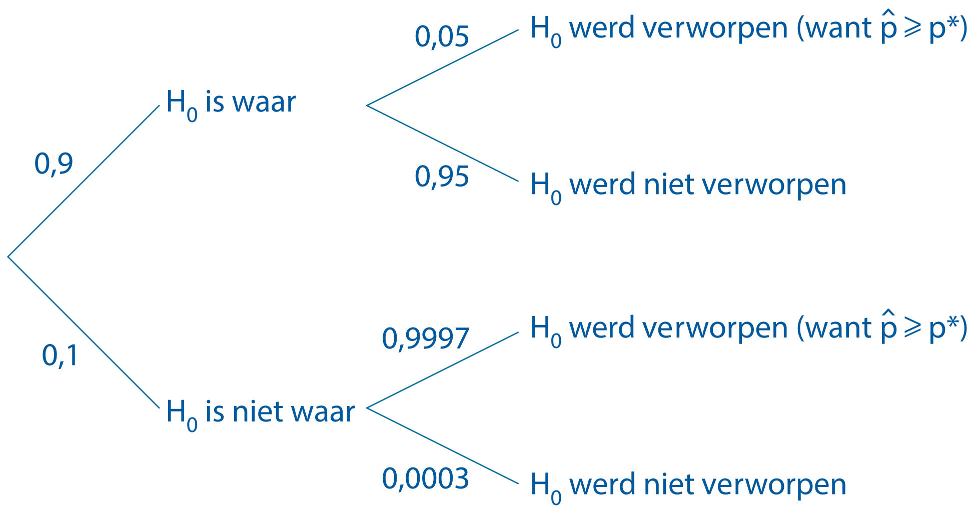
Je hebt de nulhypothese verworpen, dus is $\hat{p} \geqslant p^*$.

De kans dat $\hat{p} \geqslant p^*$ is 0,05 als H_0 waar is en 0,9997 als H_a waar is.





We kunnen dit voorstellen in een kansboom:



Met de regel van Bayes vinden we de gevraagde kans:

$$\begin{aligned} P(H_0 \text{ is waar} \mid H_0 \text{ werd verworpen}) &= \frac{P(H_0 \text{ is waar en } H_0 \text{ werd verworpen})}{P(H_0 \text{ werd verworpen})} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}9997} \\ &= 0{,}3104 \end{aligned}$$

Zelfs al hebben we de nulhypothese verworpen op het 0,05-niveau, de kans dat ze eigenlijk toch waar is, is in deze opdracht 0,3104, of anders gezegd: de kans dat we ze terecht hebben verworpen is maar 0,6896. Deze verrassende vaststelling sluit aan bij de opmerking onderaan p. 118 van het leerboek.

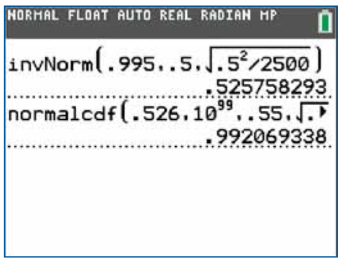
3 In de vorige vraag heb je vastgesteld dat de kans dat H_0 waar is (de munt is eerlijk), hoewel die hypothese verworpen werd op het 0,05-niveau, toch nog vrij hoog is.

Welke waarde voor $P(H_0$ is waar $\mid H_0$ werd verworpen) zou je vinden mocht je werken met $\alpha = 0{,}005$?

Je hebt de nulhypothese verworpen, dus is $\hat{p} \geqslant p^*$.

Met $\alpha = 0{,}005$ vinden we als grenswaarde 0,526.

De kans dat $\hat{p} \geqslant p^*$ is 0,005 als H_0 waar is en 0,99207 als H_a waar is.



Op dezelfde manier vinden dan voor de gevraagde kans:

$$\begin{aligned} P(H_0 \text{ is waar} \mid H_0 \text{ werd verworpen}) &= \frac{P(H_0 \text{ is waar en } H_0 \text{ werd verworpen})}{P(H_0 \text{ werd verworpen})} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}005}{0{,}9 \cdot 0{,}005 + 0{,}1 \cdot 0{,}99207} \\ &= 0{,}0434 \end{aligned}$$

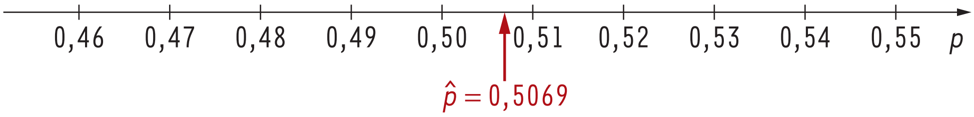
Nu is de kans dat de nulhypothese toch waar is, hoewel ze verworpen werd, veel kleiner; de kans dat ze terecht verworpen werd, is nu groter dan 95 %.

Opdracht 35 bladzijde 142

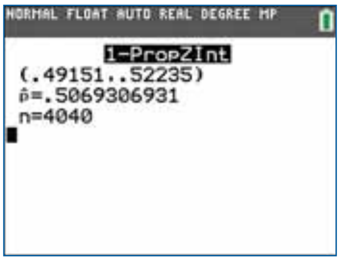
Een verband tussen betrouwbaarheidsintervallen en significantietests

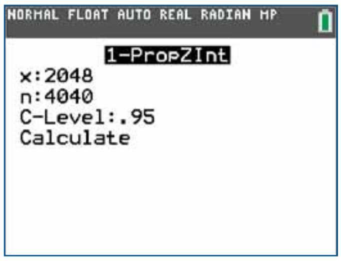
Comte de Buffon gooide een munstuk 4040 keer op, wat resulteerde in 2048 keer kop.

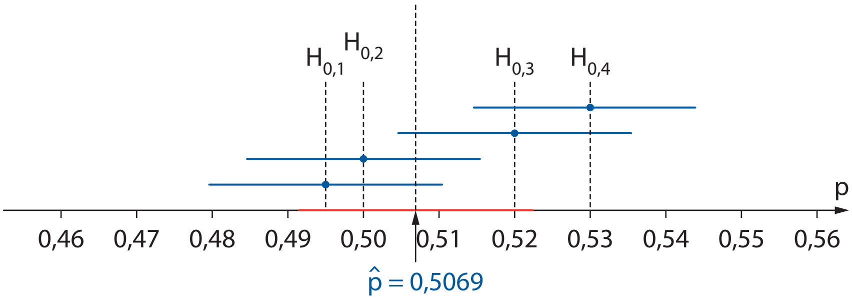
1 Stel bij zijn steekproefresultaat een 95 %-betrouwbaarheidsinterval op voor de kans op kop. Markeer dit als een dikke lijn op een p-as zoals hieronder:



Een 95 %-betrouwbaarheids-interval is [0,4915; 0,5224]. Dit interval is in het rood weergegeven op de as hieronder.

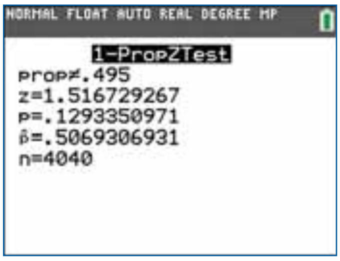


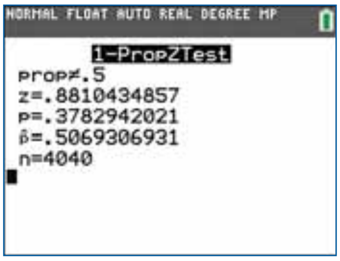


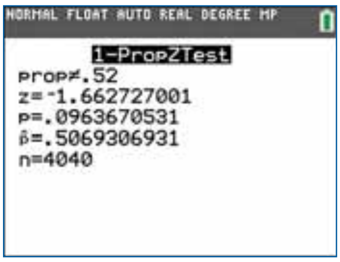


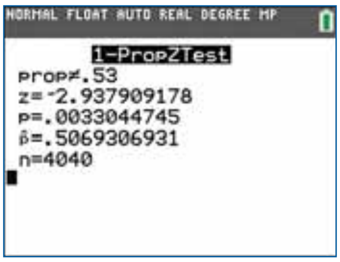
2 Beschouw de nulhypothesen $H_{0,1}$: $p = 0{,}495$, $H_{0,2}$: $p = 0{,}5$, $H_{0,3}$: $p = 0{,}52$ en $H_{0,4}$: $p = 0{,}53$. Welke hypothesen zou je op het 5 %-significantieniveau moeten verwerpen op basis van de steekproef van edelman de Buffon?

De P-waarde van Buffon's resultaat bepalen we met behulp van het rekentoestel (x = 2048, n = 4040, tweezijdige hypothese).



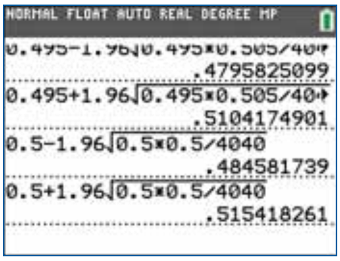


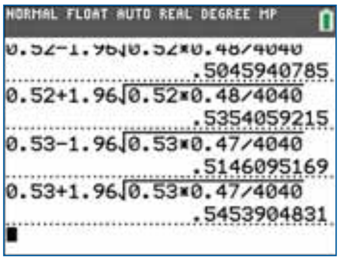




De respectievelijke P-waarden zijn: $P_1 = 0{,}1293$; $P_2 = 0{,}3783$; $P_3 = 0{,}0964$ en $P_4 = 0{,}0033$. De vierde hypothese ($H_{0,4}$) moet verworpen worden.

3 Bepaal voor elke nulhypothese het interval dat overeenkomt met 95 % van de oppervlakte onder de bijbehorende steekproefverdeling en markeer die boven elkaar (lichtjes verticaal verschoven) op de bovenstaande as.





De betrouwbaarheidsintervallen bij de verschillende hypothesen zijn:
$I_1 = [0{,}4796,\ 0{,}5104]$, $I_2 = [0{,}4846,\ 0{,}5154]$, $I_3 = [0{,}5046,\ 0{,}5354]$ en $I_4 = [0{,}5146,\ 0{,}5454]$.
Deze betrouwbaarheidsintervallen zijn ook op de figuur bij vraag 1 aangeduid.

4 Verklaar je bevinding in **2** op basis van **3**.

Doordat $p_{0,4} = 0{,}53$ niet tot het betrouwbaarheidsinterval van $\hat{p}$ behoort, ligt het op een afstand van meer dan 1,96 standaardafwijkingen $\left(\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}5069 \cdot 0{,}4931}{4040}} = 0{,}0079\right)$ van $\hat{p}$.

Omgekeerd ligt $\hat{p}$ daardoor buiten het 95 %-oppervlaktegebied van de steekproefverdeling onder $H_{0,4}$, dit is $\text{Norm}\left(0{,}53;\ \sqrt{\dfrac{0{,}53 \cdot 0{,}47}{4040}}\right) \approx \text{Norm}(0{,}53\ 0{,}0079)$, waardoor deze hypothese moet verworpen worden op het 5 %-niveau. Bemerk dat deze redenering maar klopt doordat de foutenmarge op basis van $\hat{p}$ tot vier cijfers na de komma dezelfde is als deze onder $H_{0,4}$.

5 Veralgemeen wat je hierboven ontdekte betreffende het verband tussen betrouwbaarheidsintervallen en nulhypothesen. Een mogelijk begin is:
"Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval is een verzameling waarden p_0 waarvoor geldt: …".

Een 95 %-betrouwbaarheidsinterval bij een steekproefresultaat $\hat{p}$ is een verzameling waarden p_0 waarvoor de nulhypothese H_0: $p = p_0$ niet verworpen zou worden op het 5 %-significantieniveau op basis van deze $\hat{p}$.

Een bruikbaar beeld daarbij is dat van een verschuivende normale verdeling, die overeenkomt met een verschuivende nulhypothese H_0: $p = p_0$. Zolang het centrale 95 %-gebied begrensd door $p_0 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ en $p_0 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ de steekproefproportie $\hat{p}$ bevat, geldt omgekeerd dat p_0 tot het 95 %- betrouwbaarheidsinterval $\left[\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$ behoort. In dat geval wordt de nulhypothese dus niet verworpen.

Kleine afwijkingen kunnen ontstaan omdat $\sqrt{\dfrac{p_0 \cdot (1-p_0)}{n}}$ en $\sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$ lichtjes van elkaar kunnen verschillen. Het verband tussen beide begrippen is dus maar benaderend.

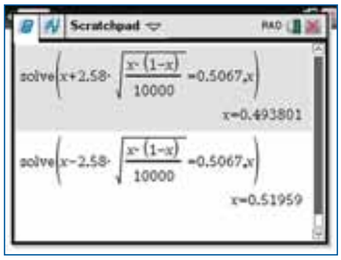
Merk op dat dit verband slechts opgaat voor significantietesten met een tweezijdige hypothese.

6 Beschouw opnieuw het experiment van Kerrich uit de theorie (p. 115):
op 10 000 worpen gooide hij 5067 keer kop. Voor welke waarden p_0 zou de nulhypothese H_0: $p = p_0$ niet verworpen worden bij een significantie $\alpha = 0{,}01$?
Met andere woorden, welke waarden voor p zijn verenigbaar met het steekproefresultaat (indien we de kans op vergissing kleiner dan 0,01 willen houden)?

We zoeken de waarde p_0 zodanig dat

$$p_0 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{10000}} = 0{,}5067 \text{ of}$$

$$p_0 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p_0 \cdot (1-p_0)}{10000}} = 0{,}5067$$



Manueel of via software kan nagerekend worden dat deze grenswaarden 0,4938 resp. 0,5196 zijn.

De nulhypothese H_0: $p = p_0$ zou niet verworpen woorden voor $p_0 \in [0{,}4938; 0{,}5196]$.

Opdracht 36 bladzijde 143

Je voert een significantietest uit voor een steekproefproportie $\hat{p}$. Welke van de onderstaande uitspraken over de kans op een type II-fout is correct?

A Ze hangt enkel af van de steekproefverdeling van $\hat{p}$ onder H_0.

B Ze hangt enkel af van de steekproefverdeling van $\hat{p}$ onder H_a.

C Ze is onafhankelijk van de mate van overlapping van de steekproefverdelingen van $\hat{p}$ onder H_0 en onder H_a.

D Ze houdt rechtstreeks verband met de mate van overlapping van de steekproefverdelingen van $\hat{p}$ onder H_0 en onder H_a.

E Er is een omgekeerd verband met de mate van overlapping van de steekproefverdelingen van $\hat{p}$ onder H_0 en onder H_a.

Het juiste antwoord is D.

Naarmate beide verdelingen meer overlappen, zal een groter deel van de oppervlakte onder de verdeling bij H_a aan die kant van het beslissingscriterium liggen dat overeenkomt met 'verwerp de nulhypothese niet'.

Opdracht 37 bladzijde 143

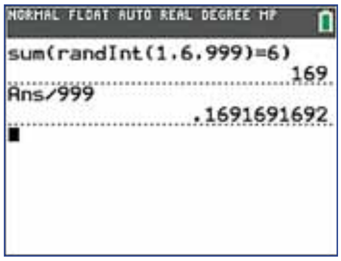
***P-hacking* – statistisch bewezen: ook in jouw klas een slecht rekentoestel**

Onder *P-hacking* verstaan statistici allerlei bewuste en onbewuste keuzes die onderzoekers maken om toch maar een significant ($P < 0{,}05$) onderzoeksresultaat te verkrijgen. Resultaten met $P > 0{,}05$ maken immers bijna geen kans om gepubliceerd te worden.

Het volgende experiment veronderstelt dat je klas minstens 20 leerlingen telt, of juister: 20 grafische rekentoestellen. Indien nodig kun je enkele toestellen lenen uit een andere klas.

Het simuleren van één worp met een dobbelsteen kan met het commando **randInt(1,6)**. De kans op 1, 2, ..., 6 ogen zou telkens $\frac{1}{6}$ moeten zijn. We beperken ons in wat volgt op het gooien van 6 ogen.
Noem p de kans dat het rekentoestel 6 ogen gooit, dan is de nulhypothese H_0: $p = \frac{1}{6}$. Via *P-hacking* zullen we in de eerste twee vragen hieronder proberen die hypothese te verwerpen, op een significantieniveau van 5 %, hoewel H_0 wel degelijk correct is.

Het onderzoek bestaat erin het toestel een groot aantal gehele toevalsgetallen van 1 tot en met 6 te laten genereren en de proportie zessen te bepalen. Je kunt het maximum van 999 worpen simuleren, en het aantal zessen tellen, door middel van het commando **sum(randInt(1,6,999) = 6)**. Deel je de uitkomst vervolgens door 999, dan krijg je een steekproefproportie $\hat{p}$, die een schatting is van p.

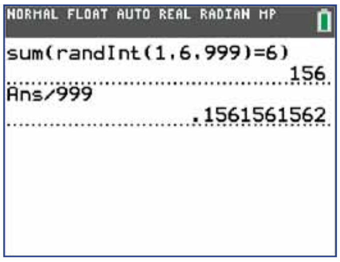


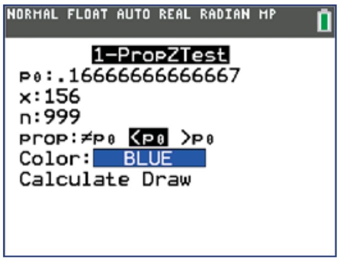
1 Bij goed onderzoek mag het niet, maar *P-hacking* doet zich bijvoorbeeld voor wanneer je de hypothesen bijstuurt op basis van de gegevens. Dat gaan we hier ook schaamteloos doen. Kies H_a: $p < \frac{1}{6}$ indien je een steekproefresultaat kleiner dan $\frac{1}{6}$ vond en H_a: $p > \frac{1}{6}$ als $\hat{p} > \frac{1}{6}$.

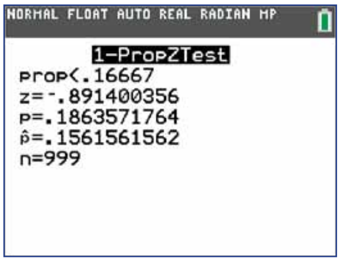
(Vond je $\hat{p} = \frac{1}{6}$, voer de simulatie dan stiekem opnieuw uit.)

Bereken de P-waarde van je steekproefresultaat.

Een mogelijke simulatie en berekening ziet er als volgt uit. Omwille van het simulatieresultaat kiezen we voor H_a: $p < \frac{1}{6}$. De P-waarde blijkt 0,1864 te zijn: 156 keer kop op 999 worpen vormt geen significante afwijking van de kans van 1 op 6.







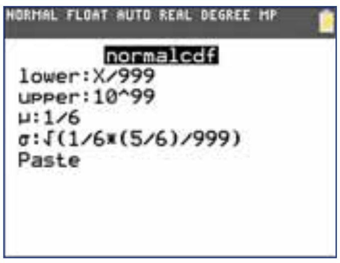
2 *P-hacking* treedt ook op wanneer onderzoekers bewust op zoek gaan naar significante resultaten en de niet-significante links laten liggen.

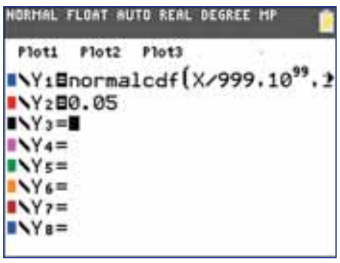
Ga na wat de hoogste steekproefproportie is in je klas en wat de bijbehorende P-waarde is. Kun je de nulhypothese verwerpen op het 5 %-niveau? Indien niet, dan lukt het misschien door de laagste $\hat{p}$ te beschouwen. (In beide gevallen zou je een artikel kunnen schrijven met de titel: 'Statistisch onderzoek toont aan: rekentoestel kan dobbelsteen niet simuleren ($P < 0{,}05$)'.)

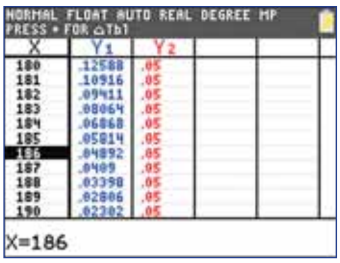
Indien nodig kan de simulatie klassikaal nog een paar keer herhaald worden, tot toevallig een uitzonderlijk resultaat zich voordoet.

3 Hoeveel zessen moet je op 999 worpen minstens gooien opdat de P-waarde van je steekproefresultaat kleiner zou zijn dan 0,05, als H_a: $p > \frac{1}{6}$?

We lossen dit op met behulp van het grafisch rekentoestel: je moet minstens 186 keer een zes gooien.







4 Stel dat je met n rekentoestellen de simulatie uitvoert en werkt met de alternatieve hypothese $p > \frac{1}{6}$. Een ruwe schatting van de kans dat minstens één iemand een significant resultaat vindt, in de veronderstelling dat H_0 waar is, is $1 - 0{,}95^n$. Verklaar deze formule.

De gebeurtenis 'minstens één iemand vindt een significant resultaat' is het complement van 'niemand vindt een significant resultaat'. De kans dat een resultaat niet significant is, is ongeveer 0,95, zodat de kans dat niemand een significant resultaat vindt, gelijk is aan ongeveer $0{,}95^n$.

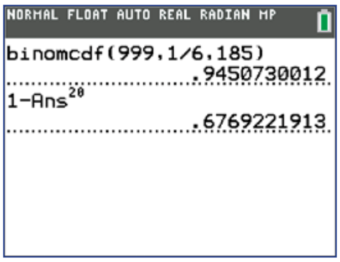
5 Indien je in de cursus kansrekening al kennismaakte met de binomiale kansverdeling, dan kun je de kans uit de vorige vraag nauwkeuriger berekenen. Stel een algemene formule op en bereken ze voor het aantal rekentoestellen in jouw klas. (Ter controle kun je narekenen dat de kans voor $n = 20$, tot op vier cijfers na de komma, gelijk is aan 0,6769.)

Er is significantie als er minstens 186 zessen zijn.

Het aantal zessen is een toevalsvariabele die binomiaal verdeeld is (999 keer hetzelfde Bernoulli-experiment met kans op succes $\frac{1}{6}$). De kans op k zessen is gelijk aan

$\binom{999}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{999-k}$. De gevraagde kans is dan $1-\left(\sum_{k=0}^{185}\binom{999}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{999-k}\right)^n$.

Controle voor $n = 20$:



Opdracht 38 bladzijde 145

In een fabriek worden per dag 9000 machineonderdelen gemaakt. Gedurende een maand worden dagelijks aselect 500 onderdelen gecontroleerd op een bepaald sluitingsdeel. Gemiddeld zijn er dagelijks 21 onderdelen met een foutieve sluiting.

Je mag ervan uitgaan dat de populatieproportie $\frac{21}{500}$ is.

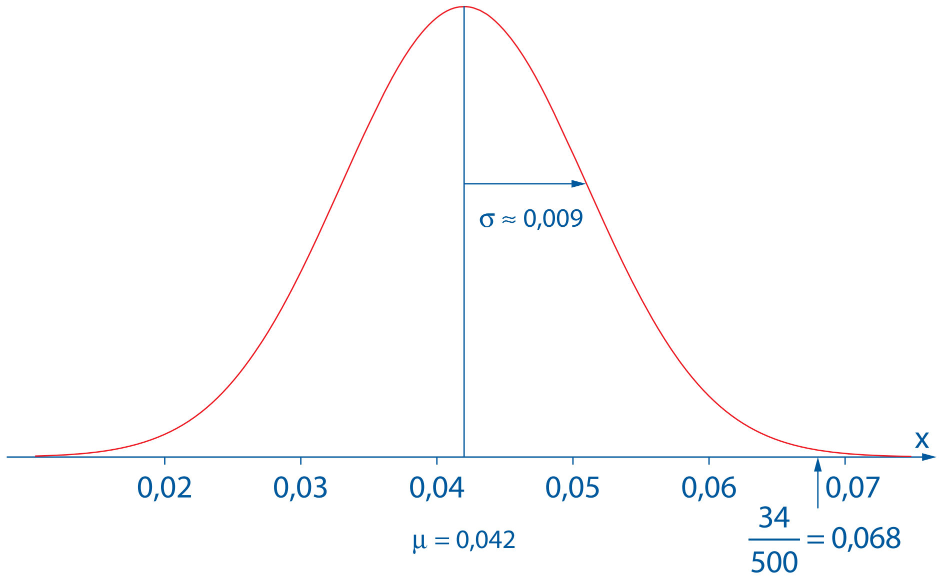
1 Ga na of aan de voorwaarden voldaan is om de steekproefverdeling te beschrijven door de normale verdeling.

- De populatie (9000) is zeker 10 keer groter dan de steekproef (500).
- $n \cdot p = 500 \cdot \frac{21}{500} = 21 \geqslant 10$
- $n \cdot (1-p) = 500 \cdot \frac{479}{500} = 479 \geqslant 10$

We mogen het model van de normale verdeling toepassen.

2 Bepaal het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ van deze normale verdeling. Maak een schets waarop je deze parameters aanduidt.

De parameters zijn: $\mu = \frac{21}{500} = 0{,}042$ en $\sigma = \sqrt{\frac{\frac{21}{500} \cdot \frac{479}{500}}{500}} \approx 0{,}009.$



3 Stel: je neemt zelf een EAS van 500 onderdelen in die fabriek en je vindt 34 onderdelen met een fout. Vind je dit resultaat ongewoon? Leg uit waarom wel of niet.

$\hat{p} = \frac{34}{500} = 0{,}068 \approx 0{,}042 + 2{,}9 \cdot 0{,}009$

Het steekproefresultaat ligt bijna 3 keer de standaardafwijking boven het gemiddelde. Dit resultaat mag je dus wel ongewoon noemen.

Opdracht 39 bladzijde 145

In een stad zijn twee ziekenhuizen. In het grotere ziekenhuis worden elke dag zo'n 45 baby's geboren en in het kleinere zo'n 15.

Ongeveer 50 % van de pasgeborenen zijn jongens. Maar het percentage mannelijke baby's in de twee ziekenhuizen varieert van dag tot dag: soms is het meer dan 50 %, soms is het minder.

Beide ziekenhuizen houden een jaar lang de dagen bij waarop meer dan 60 % van de baby's jongetjes waren. In welk ziekenhuis denk je dat er meer dergelijke dagen zullen voorkomen?

A het kleine ziekenhuis
B beide ziekenhuizen ongeveer even veel
C het grote ziekenhuis
D dit kun je niet weten

Het juiste antwoord is A, want de variabiliteit van de proportie mannelijke baby's zal in het kleine ziekenhuis groter zijn. Er geldt immers dat hoe kleiner n is, hoe groter de standaardafwijking van de steekproefverdeling.

Opdracht 40 bladzijde 145

Wanneer bedrijven iemand aannemen voor een hooggeplaatste functie, laten ze soms natrekken of de sollicitant wel de diploma's heeft die hij beweert te bezitten. Een firma die dergelijke beweringen natrekt, stelde in een periode van zes maanden vast dat van de 84 gecontroleerde sollicitanten er 15 logen over hun diploma's. Neem aan dat de onderzochte sollicitanten te beschouwen zijn als een EAS uit de totale populatie sollicitanten.

1 Is aan alle andere voorwaarden voldaan om de formules en het model uit de theorie te mogen gebruiken voor de steekproefverdeling?

Vermoedelijk wel: met $\hat{p} = \frac{15}{84} = 0{,}18 \approx p$ is $n \cdot \hat{p} > 10$ en $n \cdot (1 - \hat{p}) > 10$; de populatie sollicitanten in 6 maanden telt bovendien vast meer dan 840 individuen.

2 Stel in dat geval een 90 %-betrouwbaarheidsinterval op voor de proportie sollicitanten die liegen over hun diploma.

$\frac{15}{84} \pm 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{\frac{15}{84} \cdot \frac{69}{84}}{84}} \Rightarrow$ een 90 %-betrouwbaarheidsinterval is $[0{,}110\,;0{,}247]$.

K **Opdracht 41 bladzijde 146**

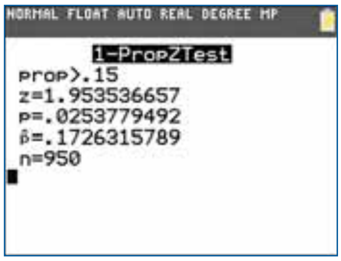
Een radiozender heeft een marktaandeel van 15 % en probeert dat door middel van een intensieve reclamecampagne te verhogen. Op het einde van die campagne wordt een peiling uitgevoerd: in een EAS van 950 personen blijken er 164 vaste luisteraars te zijn.

Toets of de campagne succes heeft gehad, met $\alpha = 0{,}01$.

Er geldt: H_0: $p = 0{,}15$ en H_a: $p > 0{,}15$.

De P-waarde is $0{,}0254 > 0{,}01$.

De nulhypothese wordt niet verworpen, we heben op basis van deze steekproef onvoldoende argumenten om aan te nemen dat het marktaandeel toegenomen is.



K **Opdracht 42 bladzijde 146**

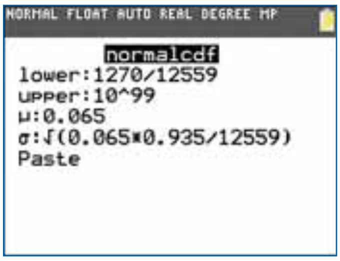
1 Op 1 augustus 2015 telde België 465 786 motorfietsen op 7 175 062 voertuigen, met andere woorden ongeveer 6,5 % van het totaal. In dat jaar waren er in België 12 559 auto- en motordiefstallen. Stel dat de gestolen motors ook 6,5 % van de gestolen voertuigen uitmaken.

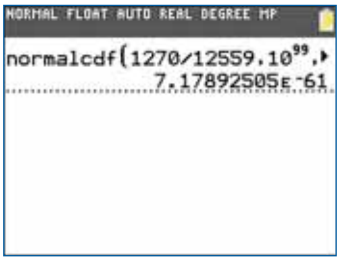
Wat zou dan de steekproefverdeling zijn van de proportie gestolen motors in een steekproef met grootte 12 559?

De steekproefverdeling zal $\mathrm{Norm}\left(0{,}065\,; \sqrt{\frac{0{,}065 \cdot 0{,}935}{12\,559}}\right) \approx \mathrm{Norm}(0{,}065\,;0{,}002)$ zijn.

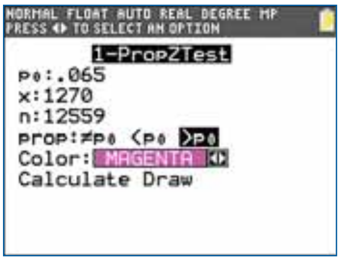
2 In 2015 bleken er 1270 gestolen motors te zijn. Is de proportie gestolen motors $\hat{p} = \dfrac{1270}{12\,559}$ significant hoger dan je op basis van de nulhypothese $H_0 : p = 0{,}065$ zou verwachten?

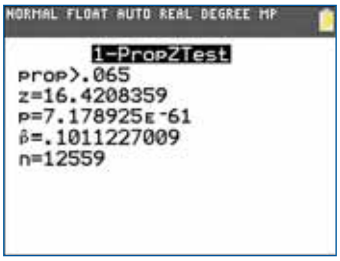
De P-waarde is: $P = P\left(\hat{p} \geqslant \dfrac{1270}{12\,559}\right) \approx 7{,}18 \cdot 10^{-61}$, dus het resultaat is statistisch significant.





of



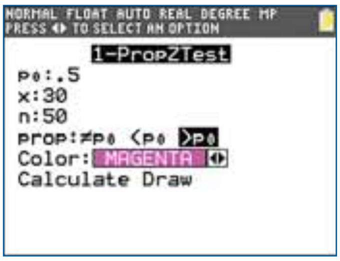


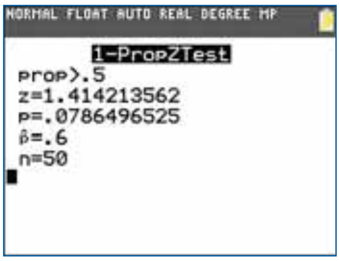
K **Opdracht 43 bladzijde 146**

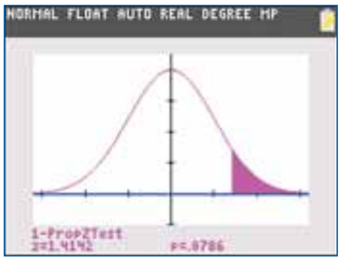
50 personen proeven blind van twee soorten cola en noteren welke van beide ze het lekkerst vinden. De ene soort is Coca-Cola en de andere Pepsi-Cola. Er zijn 30 proefpersonen die Coca-Cola lekkerder vinden. Noem p de proportie van de populatie die, in een dergelijke blindtest, liever Coca-Cola drinkt.

1 Test de hypothese dat de meerderheid van de populatie liever Coca-Cola drinkt. Is het resultaat van de test statistisch significant op het 5 %-niveau?

Als nulhypothese wordt H_0: $p = \dfrac{1}{2}$ gesuggereerd en als alternatieve : H_a: $p > \dfrac{1}{2}$. De P-waarde is 0,0786, de gegevens zijn dus niet significant.







2 Geef een 90 %-betrouwbaarheidsinterval voor p.

$\dfrac{3}{5} \pm 1{,}64 \cdot \sqrt{\dfrac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{50}} \Rightarrow$ een 90 %-betrouwbaarheidsinterval is $[0{,}486\,;0{,}714]$.

Opdracht 44 bladzijde 147

Je wil de eerlijkheid van een munt controleren. Hoe vaak moet je ze opgooien om de kans op kop tot op een halve procent correct te schatten, bij een betrouwbaarheid van 99 %?

Bij een betrouwbaarheid van 99 % is de kritieke z-waarde 2,58.

Er moet dus gelden:

$$2{,}58\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} \leqslant 0{,}005$$

$$\Leftrightarrow \frac{(0{,}5)^2}{n} \leqslant \left(\frac{0{,}005}{2{,}58}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant (0{,}5)^2 \cdot \left(\frac{2{,}58}{0{,}005}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant 66\,564$$

Je moet het muntstuk minstens 66 564 keer opgooien.

K Opdracht 45 bladzijde 147

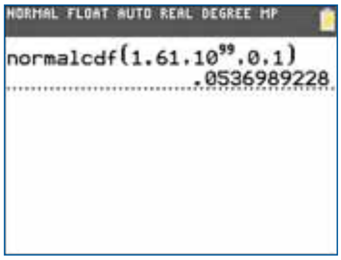
1 Je test een hypothese met als alternatieve hypothese: $p > p_0$. Je berekent de z-score van het steekproefresultaat en vindt $z_{obs} = 2{,}01$. Beantwoord aan de hand van de 68-95-99,7-regel: zijn de gegevens significant op het 0,05-niveau? Waarom (niet)?

Volgens de vuistregel ligt ongeveer 95 % van de oppervlakte tussen de z-waarden –2 en 2. Dus is de oppervlakte onder de normale kromme rechts van 2 ongeveer 2,5 %.

Indien $z_{obs} = 2{,}01$, dan is $P(z \geqslant 2{,}01)$ ongeveer 2,5 % en dus zijn de gegevens significant op het 5 % niveau.

2 Stel dat bij dezelfde alternatieve hypothese geldt: $z_{obs} = 1{,}61$. Gebruik kritieke z-waarden of je rekentoestel om na te gaan of dit gegeven significant is op het 0,05-niveau.

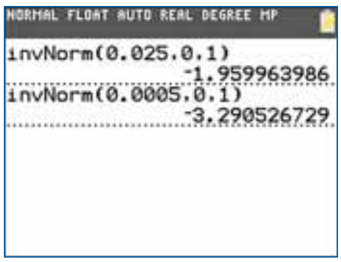
De z-score is net niet significant op het 0,05 niveau.



3 Welke is de kritieke z-waarde indien je bij een *tweezijdige* hypothese een significantie op het 0,05-niveau wil? En wat als je op het 0,001-niveau werkt?

Bij een tweezijdige alternatieve hypothese is er significantie op het 0,05 niveau van zodra $|z| \geqslant 1{,}96$.

Op het 0,001 niveau is de kritieke z-waarde 3,29.



K

Opdracht 46 bladzijde 147

Er bestaat een mooie analogie tussen een beslissingsprocedure gebaseerd op hypothesetesten en een assisenzaak. Verbind in de onderstaande lijst de overeenkomstige begrippen uit beide werelden.

Hypothesetest	Rechtszaak
a nulhypothese	**1** verzamelen van bewijsmateriaal
b alternatieve hypothese	**2** verdict
c verzamelen van gegevens	**3** beschuldigde is onschuldig
d berekenen van de *P*-waarde	**4** samenvatten van het bewijsmateriaal
e toepassen van het beslissingscriterium	**5** verdict: persoon is schuldig
f beslissing nemen	**6** beschuldigde is schuldig
g nulhypothese wordt verworpen	**7** veroordelen van een onschuldig iemand
h nulhypothese kan niet verworpen worden	**8** geen gerede twijfel bij het schuldig verklaren
i …in de veronderstelling dat H_0 waar is…	**9** vrijspreken van een schuldig iemand
j type I-fout	**10** verdict: persoon is onschuldig
k type II-fout	**11** vermoeden van onschuld
l kans op een type I-fout is kleiner dan vooropgezette kleine waarde α	**12** jury delibereert om tot een beslissing te komen

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
3	6	1	4	12	2	5	10	11	7	9	8

Opdracht 47 bladzijde 148

De vragen hieronder kunnen je helpen om na te gaan of je alle begrippen goed verwerkt hebt.

1 Iemand beweert: ‘Een breder betrouwbaarheidsinterval wijst erop dat de betrouwbaarheid van die inferentie lager is.’

Indien je vindt dat die bewering klopt, illustreer ze dan met een voorbeeld. Denk je dat ze niet klopt, leg dan uit waarom en illustreer met een tegenvoorbeeld.

Bij een betrouwbaarheid van 95 % is de breedte van het betrouwbaarheidsinterval het dubbel van $1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$, bij een betrouwbaarheid van 99 % is dat het dubbel van $2{,}58\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$. De breedte is dus afhankelijk van het betrouwbaarheidsniveau (95 %, 99 %...), maar ook van p en n. Een breder betrouwbaarheidsinterval kan dus wijzen op een grotere betrouwbaarheid, omdat dan het getal vóór de vierkantswortel groter is. Het kan echter ook zijn dat met een relatief lage betrouwbaarheid van bijvoorbeeld 90 % wordt gewerkt, maar dat de foutenmarge toch tamelijk groot is omdat n klein is.

2 Zegt een *P*-waarde iets over een steekproefproportie of over een populatieproportie?

Een P-waarde zegt iets over de steekproefproportie: ze geeft de kans dat deze proportie, of een nog meer extreme waarde in de richting van het alternatief, zal optreden indien de nulhypothese waar is.

3 Is het mogelijk dat een *P*-waarde groot is terwijl de nulhypothese toch niet klopt? Geef een concreet (tegen)voorbeeld.

Dit is mogelijk: stel dat je bijvoorbeeld de eerlijkheid van een muntstuk test. Hier geldt dat H_0: $p = \frac{1}{2}$, met p de kans op kop, en H_a: $p \neq \frac{1}{2}$. Bij het 200 keer opgooien van het muntstuk vind ik $\hat{p} = 0{,}53$, de P-waarde is 0,3961. Ik verwerp de nulhypothese niet. Maar het zou wel eens kunnen dat $p = 0{,}55$!

4 Corrigeer de onderstaande foutieve uitspraken.

a De *P*-waarde geeft de kans dat de nulhypothese waar is.

De P-waarde geeft de kans op een bepaald resultaat (of nog extremer), in de veronderstelling dat de nulhypothese waar is.

b Wanneer een *P*-waarde zeer klein is, is de nulhypothese fout.

Wanneer de P-waarde zeer klein is, is er reden om aan de nulhypothese te twijfelen (indien de steekproef een EAS is), maar helemaal zeker kun je nooit zijn. Je kunt dus ook niet met stelligheid beweren dat de nulhypothese fout is.

c Uit een onderzoek naar een bepaald kenmerk is het 95 %-betrouwbaarheidsinterval gelijk aan [0,17 ; 0,20]. Dit betekent dat, indien je het onderzoek heel vaak zou herhalen, 95 % van alle steekproeven een steekproefproportie $\hat{p}$ binnen dat interval zou opleveren.

Indien men het onderzoek heel vaak herhaalt, zal 95 % van de steekproefproporties niet meer dan 0,015 van de ongekende populatieproportie p afwijken. Het is dus niet zo dat 95 % van alle proporties hooguit 0,015 van 0,185 (die ene steekproefproportie uit de opgave) zal afwijken.

Wat de onderzoeker wel kan beweren, is dat hij een methode heeft gebruikt die in 95 % van de gevallen een interval oplevert dat de werkelijke proportie bevat. Maar de onderzoeker weet niet of dat voor zijn/haar interval het geval is.

5 Waar of niet waar: wanneer je een significantietest uitvoert op het 5 %-niveau, wil dat zeggen dat je een kans van 5 % hebt om de nulhypothese te verwerpen.

Verklaar je antwoord, bijvoorbeeld door op een steekproefverdeling te redeneren.

Niet waar. Je hebt een kans van 5 % om de nulhypothese ten onrechte te verwerpen. Enkel indien de nulhypothese waar is, komen de steekproefwaarden waarvoor de nulhypothese verworpen wordt overeen met een oppervlakte van 5 %.

Stel H_0: $p = 0{,}3$ en H_a: $p > 0{,}3$. Test je de hypothese met een EAS van grootte 500, dan is je resultaat significant voor $\hat{p} \geqslant 0{,}3 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{500}} \approx 0{,}334$.

Is p daadwerkelijk 0,3, dan is de kans op $\hat{p} \geqslant 0{,}334$ precies 5 %. Maar is $p = 0{,}32$, dan kun je narekenen dat de kans op $\hat{p} \geqslant 0{,}334$ ongeveer 25 % is (zie afbeelding).