Hoofdstuk 3

Veeltermen met complexe coëfficiënten

Opdracht 1 bladzijde 67

Ga na dat i een wortel is van de veelterm $V(z) = z^3 + 3z^2 + 5z + 3 - 4i$ en bepaal de overige wortels van $V(z)$.

- $V(i) = i^3 + 3i^2 + 5i + 3 - 4i = 0$

  $\Rightarrow$ i is een wortel van $V(z) = z^3 + 3z^2 + 5z + 3 - 4i$.
- We bepalen het quotiënt Q(z) bij deling van V(z) door z – i met de regel van Horner:

	1	3	5	3 – 4i
i		i	–1 + 3i	–3 + 4i
	1	3 + i	4 + 3i	0

$Q(z) = z^2 + (3 + i)z + 4 + 3i$

$Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow\ z^2 + (3 + i)z + 4 + 3i = 0$

$D = (3 + i)^2 - 4(4 + 3i) = -8 - 6i$

$d = 1 - 3i$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-3 - i + 1 - 3i}{2}$ of $z = \dfrac{-3 - i - 1 + 3i}{2}$

$\Leftrightarrow\ z = -1 - 2i$ of $z = -2 + i$

De overige wortels zijn $-1 - 2i$ en $-2 + i$.

Opdracht 2 bladzijde 67

Bepaal de complexe getallen a en b zodanig dat de veelterm $V(z) = z^4 + az^3 - 3z^2 + bz + 2$ deelbaar is door $z + 1$ en door $z - i$.

$V(-1) = 1 - a - 3 - b + 2 = 0$

$\Leftrightarrow\ b = -a \qquad (1)$

$V(i) = 1 - ai + 3 + bi + 2 = 0$

$\Leftrightarrow\ 6 + (b - a)i = 0$

Gebruik makend van (1) wordt dit

$6 - 2ai = 0$

$\Leftrightarrow\ a = -3i$

We vinden: $a = -3i$ en $b = 3i$.

Opdracht 3 bladzijde 69

$2i$ is een wortel van de veelterm $V(z) = iz^3 + iz^2 + (7i-1)z + 6 + 6i$.

1 Bepaal de andere wortels.

We bepalen het quotiënt Q(z) bij deling van V(z) door $z - 2i$ met de regel van Horner:

	i	i	$-1+7i$	$6+6i$
$2i$		-2	$-2-4i$	$-6-6i$
	i	$-2+i$	$-3+3i$	0

$Q(z) = iz^2 + (-2+i)z - 3 + 3i$

$Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow\ iz^2 + (-2+i)z - 3 + 3i = 0$

$D = (-2+i)^2 - 4i(-3+3i) = 15 + 8i$

$d = 4 + i$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{2-i+4+i}{2i}$ of $z = \dfrac{2-i-4-i}{2i}$

$\Leftrightarrow\ z = -3i$ of $z = -1 + i$

De andere wortels zijn $-3i$ en $-1+i$.

2 Ontbind $V(z)$ in factoren van de eerste graad.

$V(z) = i(z-2i)(z+3i)(z+1-i)$

Opdracht 4 bladzijde 69

Toon aan dat de vergelijking $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3\left(3+i\sqrt{3}\right)z - 4 = 0$ een reële wortel heeft en bepaal daarna alle wortels in $\mathbb{C}$.

- Stel c is de reële wortel van $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3\left(3+i\sqrt{3}\right)z - 4 = 0$, dan is

  $4c^3 - 6i\sqrt{3}c^2 - 3\left(3+i\sqrt{3}\right)c - 4 = 0$

  $\Leftrightarrow\ 4c^3 - 6i\sqrt{3}c^2 - 9c - 3i\sqrt{3}c - 4 = 0$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 4c^3 - 9c - 4 = 0 & (1) \\ -6i\sqrt{3}c^2 - 3i\sqrt{3}c = 0 & (2) \end{cases}$$ gelijke complexe getallen

  Uit (2) volgt:

  $2c^2 + c = 0$

  $\Leftrightarrow\ c = 0$ of $c = -\dfrac{1}{2}$

  Rekening houdend met (1) vinden we dat $c = -\dfrac{1}{2}$ want

  $4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 - 9\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4 = 0.$

- We bepalen het quotiënt Q(z) bij deling van V(z) door $z+\frac{1}{2}$ met de regel van Horner:

	4	$-6i\sqrt{3}$	$-9-3i\sqrt{3}$	-4
$-\frac{1}{2}$		-2	$1+3i\sqrt{3}$	4
	4	$-2-6i\sqrt{3}$	-8	0

$Q(z)=4z^2-\left(2+6i\sqrt{3}\right)z-8$

$Q(z)=0$

$\Leftrightarrow\ 4z^2-\left(2+6i\sqrt{3}\right)z-8=0$

$D=\left(2+6i\sqrt{3}\right)^2+128=24+24\sqrt{3}$

$d=6+2i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2+6i\sqrt{3}+6+2i\sqrt{3}}{8}$ of $z=\dfrac{2+6i\sqrt{3}-6-2i\sqrt{3}}{8}$

$\Leftrightarrow z=1+i\sqrt{3}$ of $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

De wortels van de vergelijking zijn $-\frac{1}{2}$, $1+i\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Opdracht 5 bladzijde 70

De veelterm $V(z)=z^4-2z^3+11z^2-18z+18$ heeft $3i$ en $1+i$ als wortels.

Wat zijn de andere wortels van $V(z)$?

We delen $V(z)=z^4-2z^3+11z^2-18z+18$ door $(z-3i)(z-1-i)$:

	1	-2	11	-18	18
$3i$		$3i$	$-9-6i$	$18+6i$	-18
	1	$-2+3i$	$2-6i$	$6i$	0
$1+i$		$1+i$	$-5+3i$	$-6i$	
	1	$-1+4i$	$-3-3i$	0	

$Q(z)=z^2+(-1+4i)z-3-3i$

$Q(z)=0$

$\Leftrightarrow\ z^2+(-1+4i)z-3-3i=0$

$D=(-1+4i)^2+4(3+3i)=-3+4i$

$d=1+2i$

$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{1-4i+1+2i}{2}$ of $z=\dfrac{1-4i-1-2i}{2}$

$\Leftrightarrow\ z=1-i$ of $z=-3i$

De andere wortels van V(z) zijn $1-i$ en $-3i$.

Opdracht 6 bladzijde 71

1 Bepaal alle wortels van de veelterm $V(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$ als je weet dat $2i$ een wortel is.

2i is een wortel van $V(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$ zodat $-2i$ ook een wortel is van V(z).

V(z) is bijgevolg deelbaar door

$(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$

We bepalen het quotiënt Q(z) bij deling van V(z) door $z^2 + 4$ door euclidische deling:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 & +2z^3 & +6z^2 & +8z & +8 & z^2+4 \\
\cline{6-6}
-z^4 & & \mp 4z^2 & & & z^2+2z+2 \\
\cline{1-5}
 & 2z^3 & +2z^2 & +8z & +8 & \\
 & -2z^3 & & \mp 8z & & \\
\cline{2-5}
 & & 2z^2 & & +8 & \\
 & & -2z^2 & & \mp 8 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$Q(z) = z^2 + 2z + 2 = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$d = 2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-2+2i}{2}$ of $z = \dfrac{-2-2i}{2}$

$\Leftrightarrow z = -1 + i$ of $z = -1 - i$

De wortels van V(z) zijn $2i$, $-2i$, $-1 + i$ en $-1 - i$.

2 Ontbind $V(z)$ in factoren in $\mathbb{R}[z]$.

$V(z) = (z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)$

Opdracht 7 bladzijde 72

Verklaar de volgende eigenschappen.

1 Als $V(z)$ een veelterm is met reële coëfficiënten die het complex getal c als wortel heeft met multipliciteit n, dan is het toegevoegd complex getal $\bar{c}$ ook een wortel van $V(z)$ met multipliciteit n.

Als $c \in \mathbb{R}$, is deze eigenschap triviaal.

Stel $c \notin \mathbb{R}$ is een tweevoudige wortel van de veelterm V(z) met reële coëfficiënten.

Dan is $\bar{c}$ zeker een wortel van V(z), zodat V(z) deelbaar is door $(z - c)(z - \bar{c})$.

Bijgevolg is

$V(z) = (z - c) \cdot (z - \bar{c}) \cdot Q(z)$

Aangezien $(z - c) \cdot (z - \bar{c})$ een veelterm is met reële coëfficiënten , is Q(z) dat ook.

Omdat c een tweevoudige wortel is van V(z), moet c ook een wortel zijn van Q(z),

zodat $\bar{c}$ dan ook een wortel is van Q(z), omdat dit een veelterm is met reële coëfficiënten.

Bijgevolg is $\bar{c}$ een tweevoudige wortel van V(z).

We kunnen deze redenering uitbreiden voor multipliciteit > 2.

2 Een veelterm met reële coëfficiënten heeft steeds een even aantal niet-reële wortels.

Elke niet-reële wortel c van een veelterm met reële coëfficiënten V(z) komt voor met een toegevoegde wortel $\bar{c}$ met dezelfde multipliciteit.

Aangezien $\bar{c}$ dan ook niet-reëel is, heeft V(z) steeds een even aantal niet-reële wortels.

Opdracht 8 bladzijde 72

1 Bepaal de wortels van de veelterm $V(z) = z^4 - 8z^3 + 42z^2 - 104z + 169$ als je weet dat $2 - 3i$ een dubbele wortel is.

V(z) is van de 4^e graad en heeft dus 4 wortels: $2 - 3i$ met multipliciteit 2 en $2 + 3i$ met multipliciteit 2.

2 Ontbind $V(z)$ in factoren in $\mathbb{R}[z]$.

$V(z) = (z - 2 + 3i)^2(z - 2 - 3i)^2$

In $\mathbb{R}[z]$: $V(z) = (z^2 - 4z + 13)^2$

Opdracht 9 bladzijde 74

Ontbind in factoren van de eerste graad.

1 $V(z) = 3z^3 + 6iz^2 + 3z + 6i$

$= 3z^2(z + 2i) + 3(z + 2i)$

$= (z + 2i)(3z^2 + 3)$

$= 3(z + 2i)(z^2 - i^2)$

$= 3(z + 2i)(z + i)(z - i)$

2 $V(z) = 2z^4 - 4z^3 + 2z^2 - 16z - 24$

- M.b.v. de tabel van een rekentoestel vinden we dat

  $V(-1) = 0 \Rightarrow z + 1 \mid V(z)$

  $V(3) = 0 \Rightarrow z - 3 \mid V(z)$

- We bepalen Q(z) met de regel van Horner:

	2	−4	2	−16	−24
−1		−2	6	−8	24
	2	−6	8	−24	0
3		6	0	24	
	2	0	8	0	

  $Q(z) = 2z^2 + 8$

- $V(z) = (z + 1)(z - 3)(2z^2 + 8)$

  $= 2(z + 1)(z - 3)(z^2 - 4i^2)$

  $= 2(z + 1)(z - 3)(z + 2i)(z - 2i)$

Opdracht 10 bladzijde 74

Ontbind de veelterm $V(z) = (1 - i)z^3 + (2 + 4i)z^2 + (-8 + 8i)z - 16 - 8i$ in factoren van de eerste graad als je weet dat $-2i$ een wortel is.

- We bepalen het quotiënt Q(z) bij deling van V(z) door z + 2i met de regel van Horner:

	$1 - i$	$2 + 4i$	$-8 + 8i$	$-16 - 8i$
$-2i$		$-2 - 2i$	4	$16 + 8i$
	$1 - i$	$2i$	$-4 + 8i$	0

$Q(z) = (1 - i)z^2 + 2iz - 4 + 8i$

$Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow\ (1 - i)z^2 + 2iz - 4 + 8i = 0$

$D = 4i^2 - 4(1 - i)(-4 + 8i) = -20 - 48i$

$d = 4 - 6i$

$\Leftrightarrow\ z = \dfrac{-2i + 4 - 6i}{2(1-i)}$ of $z = \dfrac{-2i - 4 + 6i}{2(1-i)}$

$\Leftrightarrow\ z = 3 - i$ of $z = -2$

- $V(z) = (1 - i)(z + 2i)(z - 3 + i)(z + 2)$

Opdracht 11 bladzijde 74

Bepaal een derdegraadsvergelijking die $2i$, $1 - i$ en $-3 + i$ als wortels heeft.

2i is een wortel van z – 2i,

1 – i is een wortel van z – 1 + i en

–3 + i is een wortel van z + 3 – i.

Een derdegraadsvergelijking met als wortels 2i, 1 – i en –3 + i is bijvoorbeeld

$(z - 2i)(z - 1 + i)(z + 3 - i) = 0.$

Opdracht 12 bladzijde 74

Bepaal de complexe getallen a en b als de veelterm $V(z) = 6z^3 + (7 - 6i)z^2 + az + b$ deelbaar is door $z - i$ en door $3z + 2$.

- $V(i) = 0 \ \Leftrightarrow\ 6i^3 + (7 - 6i)i^2 + ai + b = 0$

  $\Leftrightarrow\ -6i - 7 + 6i + ai + b = 0$

  $\Leftrightarrow\ b = 7 - ai \qquad (1)$

- $V\left(\dfrac{-2}{3}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ 6 \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 + (7 - 6i)\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 + a\left(\dfrac{-2}{3}\right) + b = 0$

  $\Leftrightarrow\ \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3}i - \dfrac{2}{3}a + b = 0$

  $\Leftrightarrow\ 4 - 8i - 2a + 3b = 0 \qquad (2)$

- (1) in (2) geeft

$$4 - 8i - 2a + 21 - 3ai = 0$$
$$\Leftrightarrow \; 25 - 8i = a(2 + 3i)$$
$$\Leftrightarrow \; \boxed{a = 2 - 7i}$$

- Uit (1) volgt dan: $\boxed{b = -2i}$

Opdracht 13 bladzijde 74

Bepaal een reële wortel van de veelterm $V(z) = 6z^3 + (25 - 6i)z^2 + (25 - 25i)z - 25i$ en ontbind $V(z)$ daarna in factoren van de eerste graad.

- Stel c is een reële wortel van V(z), dan is

$$6c^3 + (25 - 6i)c^2 + (25 - 25i)c - 25i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6c^3 + 25c^2 + 25c = 0 & (1) \\ 6c^2 - 25c - 25 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{gelijke complexe getallen}$$

De oplossingen van (1) zijn 0, $\frac{-5}{2}$ en $\frac{-5}{3}$, die van (2) zijn $\frac{-5}{2}$ en $\frac{-5}{3}$.

De twee reële wortels van V(z) zijn bijgevolg $\frac{-5}{2}$ en $\frac{-5}{3}$.

- V(z) is deelbaar door

$$6\left(z + \frac{5}{2}\right)\left(z + \frac{5}{3}\right) =$$
$$(2z + 5)\,(3z + 5) =$$
$$6z^2 + 25z + 25$$

Het quotiënt Q(z) kunnen we bepalen met een euclidische deling :

$$\begin{array}{rrrr|l}
6z^3 & +\,(25 - 6i)z^2 & +\,(25 - 25i)z & -\,25i & 6z^2 + 25z + 25 \\ \cline{5-5}
-6z^3 & \overset{-}{+}\,25z^2 & +\,25z & & z - i \\ \cline{1-4}
 & -6iz^2 & -\,25iz & -\,25i & \\
 & \overset{+}{-}\,6iz^2 & \overset{+}{-}\,25iz & \overset{+}{-}\,25i & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

- $V(z) = (2z + 5)\,(3z + 5)\,(z - i)$

Opdracht 14 bladzijde 74

Toon aan dat de vergelijking $(1+i)z^3-(5+i)z^2+(10-4i)z-4+8i=0$ een zuiver imaginaire wortel heeft en bepaal daarna alle wortels in $\mathbb{C}$.

- Stel bi is de zuiver imaginaire wortel van V(z) met $b \in \mathbb{R}$, dan is

$$(1+i)(bi)^3-(5+i)(bi)^2+(10-4i)(bi)-4+8i=0$$

$$\Leftrightarrow -b^3i+b^3+5b^2+b^2i+10bi+4b-4+8i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3+5b^2+4b-4=0 & (1) \\ -b^3+b^2+10b+8=0 & (2) \end{cases} \quad \text{gelijke complexe getallen}$$

b = −2 is een gemeenschappelijke oplossing van (1) en (2).

De zuiver imaginaire wortel is −2i.

- $V(z)=(1+i)z^3-(5+i)z^2+(10-4i)z-4+8i$ is deelbaar door $z+2i$.

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1+i & -5-i & 10-4i & -4+8i \\
-2i & & 2-2i & -6+6i & 4-8i \\
\hline
 & 1+i & -3-3i & 4+2i & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

$Q(z)=(1+i)z^2-(3+3i)z+4+2i=0$

$$D=(3+3i)^2-4(1+i)(4+2i)=-8-6i$$

$$d=1-3i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{3+3i-1+3i}{2(1+i)} \quad \text{of} \quad z=\frac{3+3i+1-3i}{2(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow z=2+i \qquad \text{of} \quad z=1-i$$

De wortels zijn −2i, 2 + i en 1 − i.

Opdracht 15 bladzijde 74

Bepaal het reëel getal m zodanig dat de vergelijking $2z^3-3iz^2+z+m+6i=0$ een reële wortel heeft.

Stel c is de reële wortel van

$$2z^3-3iz^2+z+m+6i=0,$$

dan is

$$2c^3-3ic^2+c+m+6i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^3+c+m=0 & (1) \\ -3c^2+6=0 & (2) \end{cases}$$

Uit (2) volgt dat $c=\sqrt{2}$ of $c=-\sqrt{2}$.

Invullen in (1) geeft

$$2\cdot 2\sqrt{2}+\sqrt{2}+m=0 \text{ of } 2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+m=0$$

$$\Leftrightarrow m=-5\sqrt{2} \qquad \text{of } m=5\sqrt{2}$$

Opdracht 16 bladzijde 74

Bepaal een veelterm $V(z)$ van de derde graad met $2i$ en $-2i$ als wortels en waarbij $V(i) = 1$ en $V(0) = 12i$.

- De veelterm V(z) heeft 2i en −2i als wortels.

  Aangezien V(z) van de derde graad is, kunnen we schrijven dat

  $$V(z) = (az + b)(z - 2i)(z + 2i) = (az + b)(z^2 + 4)$$

- Uit V(0) = 12i volgt

  $$4b = 12i$$
  $$\Leftrightarrow b = 3i$$

  Bijgevolg is $V(z) = (az + 3i)(z^2 + 4)$.

- Uit V(i) = 1 volgt

  $$(ai + 3i)(i^2 + 4) = 1$$
  $$\Leftrightarrow i \cdot (a + 3) \cdot 3 = 1$$
  $$\Leftrightarrow a = -3 - \frac{1}{3}i$$

Besluit: $V(z) = \left(\left(-3 - \frac{1}{3}i\right)z + 3i\right)(z^2 + 4)$

Opdracht 17 bladzijde 74

Bepaal het reëel getal m zodanig dat tenminste één wortel van de veelterm $V(z) = z^3 + (-7 + 3i)z^2 + (10 - 6mi)z - 40m$ zuiver imaginair is.

Noem bi, met b een reëel getal, de zuiver imaginaire wortel van V(z), dan is

$$(bi)^3 + (-7 + 3i)(bi)^2 + (10 - 6mi)bi - 40m = 0$$
$$\Leftrightarrow -b^3 i + 7b^2 - 3b^2 i + 10bi + 6bm - 40m = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7b^2 + 6bm - 40m = 0 & (1) \\ -b^3 - 3b^2 + 10b = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{gelijke complexe getallen}$$

De oplossingen van (2) zijn b = 0, b = 2 en b = −5.

- b = 0 geeft geen zuiver imaginaire wortel want $0 \cdot i = 0$
- Voor b = 2 volgt uit (1) dat

  $$28 + 12m - 40m = 0$$
  $$\Leftrightarrow -28m = -28$$
  $$\Leftrightarrow m = 1$$

  De zuiver imaginaire wortel is dan 2i.

- Voor b = −5 volgt uit (1) dat

  $$175 - 30m - 40m = 0$$
  $$\Leftrightarrow -70m = -175$$
  $$\Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

  De zuiver imaginaire wortel is −5i.

Opdracht 18 bladzijde 75

Bepaal de wortels van de veeltermen in $\mathbb{C}$.

1 $V(z) = z^3 + 9z - 26$

Tabel: $V(2) = 0 \;\Rightarrow\; z - 2 \mid V(z)$

We bepalen het quotiënt Q(z) met de regel van Horner:

	1	0	9	–26
2		2	4	26
	1	2	13	0

$Q(z) = z^2 + 2z + 13$

$V(z) = 0$

$\Leftrightarrow\; (z - 2)(z^2 + 2z + 13) = 0$

$\Leftrightarrow\; z - 2 = 0 \quad \text{of} \quad z^2 + 2z + 13 = 0$

$D = -48 = 48i^2$

$d = 4i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\; z = 2 \quad \text{of} \quad z = \dfrac{-2 \pm 4i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\; z = 2 \quad \text{of} \quad z = -1 + 2i\sqrt{3} \quad \text{of} \quad z = -1 - 2i\sqrt{3}$

De wortels zijn 2, $-1 + 2i\sqrt{3}$ en $-1 - 2i\sqrt{3}$.

2 $V(z) = z^4 - 30z^2 + 289$

$V(z) = 0$

$\Leftrightarrow\; z^4 - 30z^2 + 289 = 0$

$\overset{t = z^2}{\Leftrightarrow}\; t^2 - 30t + 289 = 0$

$D = -256 = 256i^2$

$d = 16i$

$\Leftrightarrow\; t = \dfrac{30 \pm 16i}{2}$

$\overset{t = z^2}{\Leftrightarrow}\; z^2 = 15 + 8i \quad \text{of} \quad z^2 = 15 - 8i$

$\Leftrightarrow\; z = 4 + i \quad \text{of} \quad z = -4 - i \quad \text{of} \quad z = 4 - i \quad \text{of} \quad z = -4 + i$

De wortels zijn $4 + i$, $-4 - i$, $4 - i$ en $-4 + i$.

3 $V(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 2z - 5$

Tabel: $V(1) = 0 \Rightarrow z - 1 \mid V(z)$

$V(-1) = 0 \Rightarrow z + 1 \mid V(z)$

We bepalen Q(z) met de regel van Horner:

	1	−2	4	2	−5
1		1	−1	3	5
	1	−1	3	5	0
−1		−1	2	−5	
	1	−2	5	0	

$Q(z) = z^2 - 2z + 5$

$V(z) = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z^2 - 2z + 5) = 0$

$\Leftrightarrow z - 1 = 0 \quad \text{of} \quad z + 1 = 0 \quad \text{of} \quad z^2 - 2z + 5 = 0$

$D = -16 = 16i^2$

$d = 4i$

$\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{of} \quad z = -1 \quad \text{of} \quad z = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$

$\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{of} \quad z = -1 \quad \text{of} \quad z = 1 + 2i \quad \text{of} \quad z = 1 - 2i$

De wortels zijn 1, −1, 1 + 2i en 1 − 2i.

Opdracht 19 bladzijde 75

Bepaal een veelterm $V(z)$ met reële coëfficiënten van een zo laag mogelijke graad die 3, i en $2 + i$ als wortels heeft.

V(2) heeft reële coëfficiënten, bijgevolg zijn −i en 2 − i ook wortels als i en 2 + i wortels zijn.

V(z) heeft bijgevolg minimum 5 wortels en is minstens van de 5^de graad.

$V(z) = (z-3)\,(z-i)(z+i)\,(z-2-i)(z-2+i)$

of $V(z) = (z-3)(z^2+1)(z^2-4z+5)$.

Opdracht 20 bladzijde 75

Bepaal een veelterm $V(z)$ met reële coëfficiënten van een zo laag mogelijke graad die $1 + i$ en $-3i$ als wortels heeft en waarbij $V(i) = 1 - 2i$.

V(z) heeft reële coëfficiënten, bijgevolg zijn $1 - i$ en $3i$ ook wortels als $1 + i$ en $-3i$ wortels zijn.

V(z) heeft bijgevolg minstens 4 wortels en is minstens van de 4$^{\text{de}}$ graad.

$$\begin{aligned} V(z) &= a(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 3i)(z - 3i) \\ &= a(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9) \end{aligned}$$

Bovendien moet $V(i) = 1 - 2i$ zodat

$$\begin{aligned} & a(i^2 - 2i + 2)(i^2 + 9) = 1 - 2i \\ \Leftrightarrow\ & a \cdot (1 - 2i) \cdot 8 = 1 - 2i \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Besluit: $V(z) = \frac{1}{8}(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 9)$.

Opdracht 21 bladzijde 75

Ontbind de veelterm $V(z) = z^4 + 2z^3 + 2z - 1$ in factoren in $\mathbb{R}[z]$ als je weet dat i er een wortel van is.

V(z) heeft reële coëfficiënten zodat $-i$ ook een wortel is als i een wortel is.

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} V(z) &= (z - i)(z + i) \cdot Q(z) \\ &= (z^2 + 1) \cdot Q(z) \end{aligned}$$

We vinden Q(z) bv. met een euclidische deling:

$$\begin{array}{rrrrr|l} z^4 & +\,2z^3 & +\,0z^2 & +\,2z & -\,1 & z^2 + 1 \\ \cline{6-6} -z^4 & & \mp\, z^2 & & & z^2 + 2z - 1 \\ \cline{1-5} & 2z^3 & -\ z^2 & +\,2z & -\,1 & \\ & -2z^3 & & \mp\,2z & & \\ \cline{2-5} & & -z^2 & & -\,1 & \\ & & \pm\, z^2 & & \pm\,1 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow\ V(z) = (z^2 + 1)\underbrace{(z^2 + 2z - 1)}$$

is nog te ontbinden in $\mathbb{R}[z]$ aangezien $D = 8 > 0$.

De wortels van $z^2 + 2z - 1$ zijn

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Besluit: $V(z) = (z^2 + 1)(z + 1 - \sqrt{2})\,(z + 1 + \sqrt{2})$

Opdracht 22 bladzijde 75

Ontbind de veelterm $V(z) = z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z + 10$ in factoren in $\mathbb{C}[z]$ als je weet dat $3 - i$ er een wortel van is.

V(z) heeft reële coëfficiënten zodat 3 – i én 3 + i wortels zijn.

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} V(z) &= (z - 3 + i)\,(z - 3 - i) \cdot Q(z) \\ &= (z^2 - 6z + 10) \cdot Q(z) \end{aligned}$$

We vinden Q(z) bv. met een euclidische deling:

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z + 10 & z^2 - 6z + 10 \\ \cline{2-2} -z^4 \pm 6z^3 \mp 10z^2 \phantom{{}- 6z + 10} & z^2 + 1 \\ \cline{1-1} z^2 - 6z + 10 & \\ -z^2 \pm 6z \mp 10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow\ V(z) = (z^2 - 6z + 10)(z^2 + 1)$

De ontbinding in $\mathbb{C}[z]$ is dan

$$V(z) = (z - 3 + i)(z - 3 - i)(z + i)(z - i)$$

Opdracht 23 bladzijde 75

Eén van de wortels van de veelterm $V(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 20z + 24$ is $2i$.

De som van alle reële wortels van $V(z)$ is

A –5 **B** –4 **C** 0 **D** 4 **E** 5

(Bron © Alabama Statewide High School Math Contest, 2014)

2i, en dus ook –2i, zijn wortels van V(z) zodat deze veelterm deelbaar is door $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$.

We bepalen het quotiënt Q(z) met een euclidische deling:

$$\begin{array}{r|l} z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 20z + 24 & z^2 + 4 \\ \cline{2-2} -z^4 \phantom{{}+ 5z^3} \mp 4z^2 \phantom{{}+ 20z + 24} & z^2 + 5z + 6 \\ \cline{1-1} 5z^3 + 6z^2 + 20z + 24 & \\ -5z^3 \phantom{{}+ 6z^2} \mp 20z \phantom{{}+ 24} & \\ \cline{1-1} 6z^2 \phantom{{}+ 20z} + 24 & \\ -6z^2 \phantom{{}+ 20z} \mp 24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow\ V(z) = (z^2 + 4)(z^2 + 5z + 6)$

De wortels van V(z) zijn 2i, –2i, –2 en –3.

De som van de wortels is –5.

Antwoord A is het juiste.

Opdracht 24 bladzijde 75

Ontbind in factoren in $\mathbb{R}[z]$ en in $\mathbb{C}[z]$.

1 $V(z) = z^4 + 1$

- Ontbinden in $\mathbb{R}[z]$:

  $$\begin{aligned} V(z) &= z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 \\ &= (z^2+1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

  Beide factoren hebben een negatieve discriminant en zijn dus niet verder te ontbinden in $\mathbb{R}[z]$.

- Ontbinden in $\mathbb{C}[z]$:

  We bepalen eerst de wortels van

  1) $z^2 + \sqrt{2}z + 1$

  $D = 2 - 4 = -2 = 2i^2$

  $d = \sqrt{2}\,i$

  De wortels zijn $\dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$.

  2) $z^2 - \sqrt{2}z + 1$

  $D = 2 - 4 = 2i^2$

  $d = \sqrt{2}\,i$

  De wortels zijn $\dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}$.

  Bijgevolg is

  $$V(z) = \left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

2 $V(z) = z^4 - 6z^2 + 25$

- Ontbinden in $\mathbb{R}[z]$:

  $V(z) = z^4 + 10z^2 + 25 - 16z^2$

  $= (z^2 + 5)^2 - (4z)^2$

  $= (z^2 + 4z + 5)(z^2 - 4z + 5)$

  Beide factoren hebben een negatieve discriminant en zijn dus niet verder te ontbinden in $\mathbb{R}[z]$.

- Ontbinden in $\mathbb{C}[z]$:

  We bepalen eerst de wortels van

  1) $z^2 + 4z + 5$

  $D = -4 = 4i^2$

  $d = 2i$

  De wortels zijn $\dfrac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$.

  2) $z^2 - 4z + 5$

  $D = 4i^2$

  $d = 2i$

  De wortels zijn $\dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

  Bijgevolg is

  $V(z) = (z + 2 - i)(z + 2 + i)(z - 2 + i)(z - 2 - i)$

Opdracht 25 bladzijde 75

Bepaal p en q in de veelterm met reële coëfficiënten $V(z) = z^3 + pz^2 + qz + 5$ als je weet dat $2 - i$ er een wortel van is.

- De veelterm V(z) heeft reële coëfficiënten zodat $2 - i$ én $2 + i$ wortels zijn.

  Aangezien V(z) van de derde graad is, kunnen we schrijven dat

  $V(z) = (az + b)(z - 2 + i)(z - 2 - i) = (az + b)(z^2 - 4z + 5)$

- De coëfficiënt van de derdegraadsterm in $V(z) = z^3 + pz^2 + qz + 5$ is 1, zodat $a = 1$.

  Bijgevolg is

  $(z + b)(z^2 - 4z + 5) = z^3 + pz^2 + qz + 5$

  $\Leftrightarrow z^3 - 4z^2 + 5z + bz^2 - 4bz + 5b = z^3 + pz^2 + qz + 5$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} -4 + b = p \\ 5 - 4b = q \\ 5b = 5 \end{cases}$ gelijke veeltermen

  $\Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Opdracht 26 bladzijde 76

Bepaal p en q zodanig dat de veelterm met gehele coëfficiënten $V(z) = z^3 + pz^2 + qz + 5$ een zuiver imaginaire wortel heeft.

Als de veelterm $V(z) = z^3 + pz^2 + qz + 5$ gehele coëfficiënten heeft en bi is een wortel (met $b \in \mathbb{R}$), dan is –bi ook een wortel.

De derde wortel zal dan een reëel getal c zijn.

Omdat de hoogstegraadsterm 1 als coëfficiënt heeft, kunnen we schrijven dat

$$V(z) = (z - c)(z^2 + b^2)$$

Uit de gelijkheid van veeltermen bepalen we dan p en q in functie van b en c:

$$z^3 + pz^2 + qz + 5 = (z - c)(z^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + pz^2 + qz + 5 = z^3 - cz^2 + b^2z - b^2c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -c \\ q = b^2 \\ 5 = -b^2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{5}{b^2} \\ q = b^2 \\ 5 = -b^2c \end{cases}$$

Hieruit volgt dat pq = 5. Bovendien zijn p en q gehele getallen en volgt uit $q = b^2$ dat p en q natuurlijke getallen zijn.

De enige mogelijkheden zijn $\begin{cases} p = 1 \\ q = 5 \end{cases}$ of $\begin{cases} p = 5 \\ q = 1 \end{cases}$.

Opdracht 27 bladzijde 76

Als p, q en r de wortels zijn van de veelterm $V(z) = z^3 - z + 1$, dan is $p^4 + q^4 + r^4$ gelijk aan

A -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1 **E** 2

(Bron © South Carolina ARML Mathematics Team Competition, 1996)

Omdat p, q en r de wortels zijn van de veelterm $V(z) = z^3 - z + 1$, is

$$V(z) = (z - p)(z - q)(z - r)$$

zodat

$$\begin{aligned} & z^3 - z + 1 = (z - p)(z - q)(z - r) \\ \Leftrightarrow\ & z^3 - z + 1 = z^3 - (p + q + r)z^2 + (pq + qr + pr)z - pqr \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} p + q + r = 0 & (1) \\ pq + qr + pr = -1 & (2) \\ pqr = -1 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Omdat p, q en r de wortels zijn van de veelterm $V(z) = z^3 - z + 1$, is

$p^3 = p - 1$, $q^3 = q - 1$ en $r^3 = r - 1$.

Bijgevolg is

$$p^4 + q^4 + r^4 = p(p - 1) + q(q - 1) + r(r - 1) = p^2 + q^2 + r^2 - (p + q + r)$$

Met (1) wordt dit

$$p^4 + q^4 + r^4 = p^2 + q^2 + r^2$$

Nu is

$$(p + q + r)^2 = (p + q)^2 + 2(p + q)r + r^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + pr)$$

zodat

$$p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + qr + pr)$$

met (1) en (2) vinden we

$$p^2 + q^2 + r^2 = 0^2 - 2 \cdot (-1) = 2$$

Besluit: $p^4 + q^4 + r^4 = 2$, antwoord E is het juiste.

Opdracht 28 bladzijde 77

Ontbind de veelterm $V(z) = z^3 - (3+4i)z^2 + (12i-4)z + 12$ in factoren van de eerste graad als je weet dat $2i$ een wortel is.

$V(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 + (12i - 4)z + 12$ heeft 2i als wortel.

Bijgevolg is $z - 2i$ een deler van $V(z)$.

We bepalen het quotiënt $Q(z)$ met de regel van Horner:

	1	$-3-4i$	$-4+12i$	12
2i		2i	$4-6i$	-12
	1	$-3-2i$	6i	0

$Q(z) = z^2 - (3 + 2i)z + 6i$

$\Rightarrow\ V(z) = (z - 2i)(z^2 - (3 + 2i)z + 6i)$

$D = (3 + 2i)^2 - 24i$

$\quad = 5 - 12i$

$d = 3 - 2i$

wortels: $z = \dfrac{(3+2i)+(3-2i)}{2} = 3$ en $z = \dfrac{(3+2i)-(3-2i)}{2} = 2i$

$V(z) = (z - 2i)(z - 3)(z - 2i)$

$\quad = (z - 3)(z - 2i)^2$

Opdracht 29 bladzijde 77

Ontbind de veelterm $V(z) = z^4 - 13z^3 + 58z^2 - 98z + 52$ in factoren

1 in $\mathbb{R}[z]$

2 in $\mathbb{C}[z]$

$V(z) = z^4 - 13z^3 + 58z^2 - 98z + 52$

Tabel: $V(1) = 0 \;\Rightarrow\; z - 1 \mid V(z)$

$V(2) = 0 \;\Rightarrow\; z - 2 \mid V(z)$

Q(z) bepalen we met de regel van Horner:

	1	–13	58	–98	52
1		1	–12	46	–52
	1	–12	46	–52	0
2		2	–20	52	
	1	–10	26	0	

$Q(z) = z^2 - 10z + 26$

$D = -4 = 4i^2$

$d = 2i$

$$z = \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i$$

1. Ontbinding in $\mathbb{R}[z]$:

   $V(z) = (z - 1)(z - 2)(z^2 - 10z + 26)$

2. Ontbinding in $\mathbb{C}[z]$:

   $V(z) = (z - 1)(z - 2)(z - 5 + i)(z - 5 - i)$

Opdracht 30 bladzijde 77

Bepaal een veelterm $V(z)$ met reële coëfficiënten van een zo laag mogelijke graad die -1 en $2 - 2i$ als wortels heeft en waarbij $V(2 + i) = 3 + i$.

V(z) is een veelterm met reële coëfficiënten.

Als $2 - 2i$ een wortel is, zal $2 + 2i$ dat ook zijn zodat V(z) minstens 3 wortels heeft en minstens van de derde graad is:

$V(z) = a\,(z + 1)(z - 2 + 2i)(z - 2 - 2i)$

$\quad\;\; = a\,(z + 1)(z^2 - 4z + 8)$

Bovendien is $V(2 + i) = 3 + i$ zodat

$a\,(2 + i + 1)\,((2 + i)^2 - 4\,(2 + i) + 8) = 3 + i$

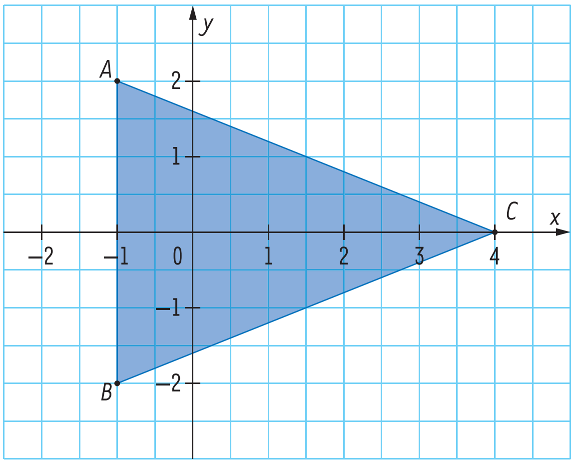
$\Leftrightarrow\; a \cdot (3 + i) \cdot 3 = 3 + i$

$\Leftrightarrow\; a = \dfrac{1}{3}$

$V(z) = \dfrac{1}{3}(z + 1)(z^2 - 4z + 8)$

Opdracht 31 bladzijde 77

Een veelterm $V(z)$ van de vijfde graad heeft reële coëfficiënten en de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm is 1.
De beeldpunten van de wortels in het complexe vlak zijn $A(-1,2)$, $B(-1,-2)$ en $C(4,0)$.



1 Bepaal een mogelijk voorschrift van $V(z)$.

De wortels zijn 4, $-1 + 2i$ en $-1 - 2i$.

Omdat V(z) van de vijfde graad is, is een mogelijkheid

$V(z) = (z - 4)^3(z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i) = (z - 4)^3(z^2 + 2z + 5)$

2 Hoeveel verschillende oplossingen zijn er?

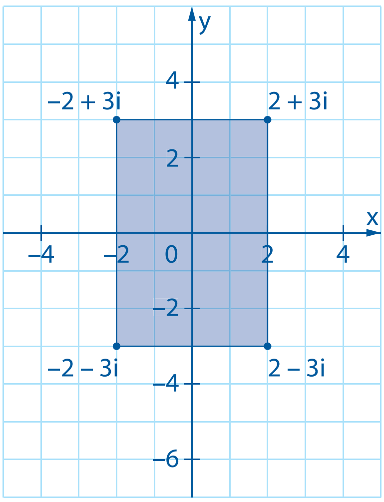
Er zijn 2 mogelijkheden, de bovenstaande en $V(z) = (z - 4)(z + 1 - 2i)^2(z + 1 + 2i)^2$

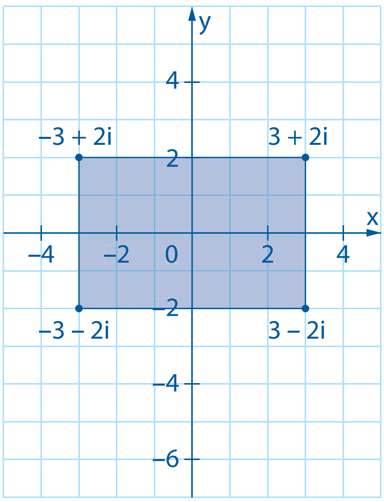
$= (z - 4)(z^2 + 2z + 5)^2$

Opdracht 32 bladzijde 77

Bepaal een veelterm $V(z)$ met reële coëfficiënten waarvan de wortels in het complexe vlak de hoekpunten van een rechthoek zijn met de oorsprong als middelpunt en met als zijden 4 en 6.

Er zijn 2 mogelijke liggingen van de rechthoek.





De bijbehorende veeltermen zijn bv.

$V(z) = (z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i)(z + 2 + 3i)(z + 2 - 3i) = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 13)$ of

$V(z) = (z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)(z + 3 + 2i)(z + 3 - 2i) = (z^2 - 6z + 13)(z^2 + 6z + 13)$.

Opdracht 33 bladzijde 78

1 Toon aan dat de vergelijking $2z^4 + (-4 + i)z^3 + (4 - 2i)z^2 + (-80 + 2i)z - 40i = 0$ een reële en een zuiver imaginaire wortel heeft.

- Noem de reële wortel c, dan moet

  $2c^4 + (-4 + i)c^3 + (4 - 2i)c^2 + (-80 + 2i)c - 40i = 0$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^4 - 4c^3 + 4c^2 - 80c = 0 & (1) \\ c^3 - 2c^2 + 2c - 40 = 0 & (2) \end{cases}$$

  4 is de enige gemeenschappelijke reële oplossing van (1) en (2).

- We bepalen eerst het quotiënt Q(z) van de deling van V(z) door z – 4.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & -4+i & 4-2i & -80+2i & -40i \\ 4 & & 8 & 16+4i & 80+8i & 40i \\ \hline & 2 & 4+i & 20+2i & 10i & 0 \end{array}$$

  $Q(z) = 2z^3 + (4 + i)z^2 + (20 + 2i)z + 10i$

- Q(z) heeft een zuiver imaginaire wortel bi, met $b \in \mathbb{R}$, als

  $$2(bi)^3 + (4 + i)(bi)^2 + (20 + 2i)(bi) + 10i = 0$$

  $$\Leftrightarrow -2b^3i - 4b^2 - b^2i + 20bi - 2b + 10i = 0$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} -4b^2 - 2b = 0 & (3) \\ -2b^3 - b^2 + 20b + 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

  $-\frac{1}{2}$ is de enige gemeenschappelijke oplossing van (3) en (4).

Besluit: de vergelijking heeft 4 als reële wortel en $-\frac{1}{2}i$ als zuiver imaginaire wortel.

2 Bepaal alle wortels van deze vergelijking in $\mathbb{C}$.

We delen Q(z) door $z + \frac{1}{2}i$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 4+i & 20+2i & 10i \\ -\frac{1}{2}i & & -i & -2i & -10i \\ \hline & 2 & 4 & 20 & 0 \end{array}$$

$Q^*(z) = 2z^2 + 4z + 20$

$Q^*(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 10 = 0$

$D = -36 = 36i^2$

$d = 6i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$

De wortels van de vergelijking zijn 4, $-\frac{1}{2}i$, $-1 + 3i$ en $-1 - 3i$.

Opdracht 34 bladzijde 78

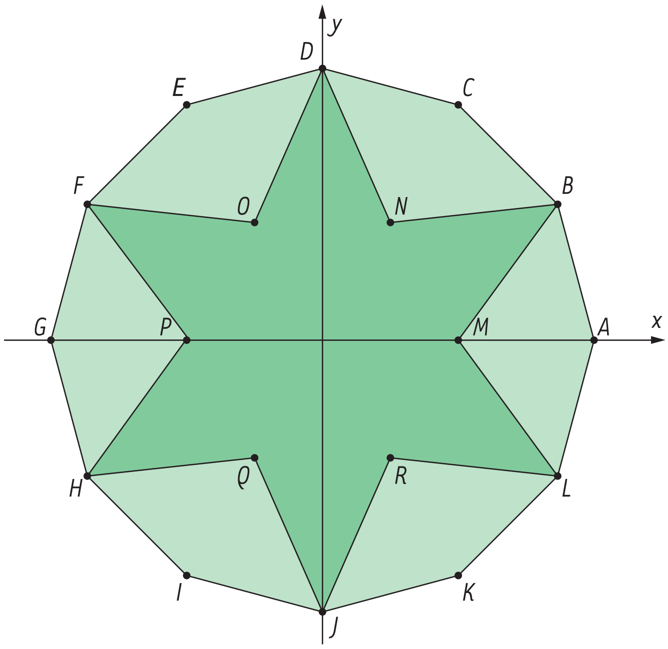
De beeldpunten van de wortels van de volgende vergelijkingen zijn aangeduid in het complexe vlak.

I $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$

II $z^6 - 64 = 0$

III $z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$

IV $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$



1 Schrijf bij elke vergelijking de beeldpunten van de bijbehorende wortels.

I. $\underbrace{z^3 + z^2 - z + 2}_{V_1(z)} = 0$

M.b.v. de tabel van een rekentoestel vinden we: $V_1(-2) = 0 \Rightarrow z + 2 \mid V_1(z)$.

We bepalen $Q_1(z)$ met de regel van Horner:

	1	1	−1	2
−2		−2	2	−2
	1	−1	1	0

$Q_1(z) = z^2 - z + 1$

$\Rightarrow V_1(z) = 0$

$\Leftrightarrow (z + 2)(z^2 - z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z = -2 \quad \text{of} \quad z^2 - z + 1 = 0$

$D = -3$

$d = \sqrt{3}\,i$

$\Leftrightarrow z = -2 \quad \text{of} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{of} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

De wortels zijn

-2 : beeldpunt G

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 60° + i \sin 60°$: beeldpunt N

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(-60°) + i \sin(-60°)$: beeldpunt R

II. $z^6 - 64 = 0 \iff z^6 = 64$

De zesdemachtswortels van 64 zijn

2,

-2,

$2(\cos 60° + i \sin 60°)$,

$2(\cos 120° + i \sin 120°)$,

$2(\cos 240° + i \sin 240°)$ en

$2(\cos 300° + i \sin 300°)$.

De bijbehorende beeldpunten zijn A, C, E, G, I en K.

III. $z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$

$\iff z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$

$\iff z^4 = 16(\cos 240° + i \sin 240°)$

De vierdemachtswortels van $-8 - 8i\sqrt{3}$ zijn

$2(\cos 60° + i \sin 60°)$,

$2(\cos 150° + i \sin 150°)$,

$2(\cos 240° + i \sin 240°)$ en

$2(\cos 330° + i \sin 330°)$.

De beeldpunten van deze wortels zijn C, F, I en L.

IV. $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

$\iff z^2(z - 1) + 4(z - 1) = 0$

$\iff (z - 1)(z^2 + 4) = 0$

$\iff z = 1 \quad \text{of} \quad z = 2i \quad \text{of} \quad z = -2i$

De beeldpunten van deze wortels zijn M, D en J.

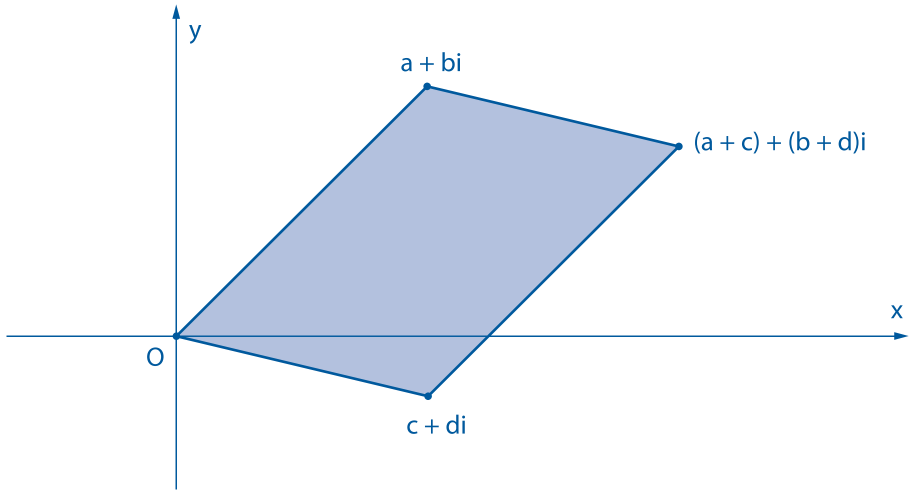
2 Welke punten horen bij geen enkele vergelijking?

B, H, O, P en Q horen bij geen enkele vergelijking.

Opdracht 35 bladzijde 78

Bepaal m als je weet dat de wortels van de vergelijking $z^3 - (6 + 6i)z^2 - 7iz + m = 0$ in het complexe vlak voorgesteld worden door drie punten die samen met de oorsprong O de hoekpunten van een parallellogram vormen.

De punten (0, 0), (a, b), (c, d) en (a + c, b + d) vormen een parallellogram.



We kunnen de wortels van de vergelijking bijgevolg voorstellen door p, q en p + q.

Bijgevolg is

$z^3 - (6 + 6i)z^2 - 7iz + m = (z - p)(z - q)(z - p - q)$

$\Leftrightarrow\ z^3 - 6z^2 - 6iz^2 - 7iz + m = z^3 - 2(p + q)z^2 + ((p + q)^2 + pq)z - pq(p + q)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 6i = 2(p + q) \\ -7i = (p + q)^2 + pq \\ m = -pq(p + q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 3 + 3i \\ pq = -7i - (3 + 3i)^2 = -25i \\ m = -pq(p + q) \end{cases}$$

zodat $m = 25i\,(3 + 3i) = -75 + 75i$.

Opdracht 36 bladzijde 78

Als r, s en t de wortels zijn van de vergelijking $z^3 + 2z^2 + 5z + 7 = 0$, dan is $r^2 + s^2 + t^2$ gelijk aan

A -8 **B** -6 **C** 2 **D** 4 **E** 8

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 1990)

Omdat r, s en t de wortels zijn van de veelterm $V(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 7$, is

$$V(z) = (z - r)(z - s)(z - t)$$

zodat

$$z^3 + 2z^2 + 5z + 7 = (z - r)(z - s)(z - t)$$

$$\Leftrightarrow\ z^3 + 2z^2 + 5z + 7 = z^3 - (r + s + t)z^2 + (rs + st + rt)z - rst$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r + s + t = -2 & (1) \\ rs + st + rt = 5 & (2) \\ rst = -7 & (3) \end{cases}$$

Nu is

$$(r + s + t)^2 = (r + s)^2 + 2\,(r + s)t + t^2 = r^2 + s^2 + t^2 + 2(rs + st + rt)$$

zodat

$$r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2\,(rs + st + rt)$$

Met (1) en (2) vinden we

$$r^2 + s^2 + t^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 5 = -6$$

Antwoord B is het juiste.