# Hoofdstuk 3

## Hoeken en afstanden



**Opdracht 1 bladzijde 120**

Gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(1,-2,3)$ en $B(0,5,2)$.

Bereken de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ gebruikmakend van de cosinusregel in de driehoek $OAB$.

De cosinusregel in de driehoek OAB geeft:

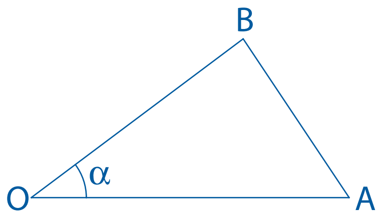
$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos\alpha.$$

We berekenen hieruit cos $\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |OA| \cdot |OB|}$$

$$= \frac{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 0^2 + 5^2 + 2^2 - (-1)^2 - 7^2 - (-1)^2}{2 \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 5^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{-8}{2 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}$$




Daaruit volgt: $\alpha = 101°27'1''$.

**Opdracht 2 bladzijde 122**

Bereken de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\vec{u}(2,4,-3)$ en $\vec{v}(-1,3,-2)$.

De hoek $\alpha$ tussen $\vec{u}(2,4,-3)$ en $\vec{v}(-1,3,-2)$ vinden we uit

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}}.$$

Daaruit volgt: $\alpha = 37°25'58''$.

**Opdracht 3 bladzijde 122**

Toon aan dat de vectoren $\vec{u}(1,-2,5)$ en $\vec{v}(3,4,1)$ loodrecht op elkaar staan.

De hoek $\alpha$ tussen $\vec{u}(1,-2,5)$ en $\vec{v}(3,4,1)$ vinden we uit

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = 0.$$

Daaruit volgt: $\alpha = 90°$, zodat $\vec{u}$ en $\vec{v}$ loodrecht op elkaar staan.

**Opdracht 4 bladzijde 124**

Bereken $k$ als de vectoren $\vec{u}(1,2,3)$ en $\vec{v}(4,k,6)$ loodrecht op elkaar staan.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 4 + 2 \cdot k + 3 \cdot 6 = 0 \Rightarrow k = -11$$

**Opdracht 5 bladzijde 124**

Gegeven de punten $A(-2,-2,0)$, $B(0,-2,4)$ en $C(3,1,3)$.

**1** Bereken $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}(2,0,4)$ en $\overrightarrow{AC}(5,3,3)$ zodat $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 22$

**2** Bereken de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

$$\cos\alpha = \frac{22}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{22}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{43}} \Rightarrow \alpha = 41°23'34''$$

**Opdracht 6 bladzijde 124**

Gegeven de vectoren $\vec{a}(-1,2,3)$, $\vec{b}(-3,2,2)$ en $\vec{c}(-2,1,0)$.

Bereken:

**1** $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3 + 4 + 6 = 13$

**2** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (3 + 4 + 6)\cdot\vec{c} = 13\vec{c}$

**3** $\left\|(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\right\| = \left\|13\vec{c}\right\| = \sqrt{(-26)^2 + 13^2 + 0^2} = 13\sqrt{5}$

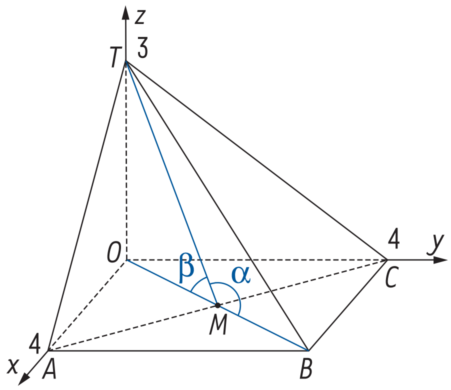
Merk op dat $\left\|r\cdot\vec{v}\right\| = |r|\cdot\left\|\vec{v}\right\|$ met r een reëel getal.

**4** $\sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, dit is de lengte van vector $\vec{a}$.

**Opdracht 7 bladzijde 125**

Gegeven de rechthoekige piramide $\left(\begin{smallmatrix} & T & & \\ O & A & B & C\end{smallmatrix}\right)$ met $T(0,0,3)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$ en $C(0,4,0)$.

$M$ is het snijpunt van $OB$ en $AC$.




**1** $\overrightarrow{MB}$ is een richtingsvector van $OB$ en $\overrightarrow{MT}$ is een richtingsvector van $MT$.

Welke hoek tussen $OB$ en $MT$ vind je met deze richtingsvectoren?

De hoek tussen $\overrightarrow{MB}(2,2,0)$ en $\overrightarrow{MT}(-2,-2,3)$ noemen we $\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+0\cdot 3}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{-8}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{17}}$$

$\Rightarrow \alpha = 133°18'50''$

**2** $\overrightarrow{MO}$ is ook een richtingsvector van $OB$.

Welke hoek tussen $OB$ en $MT$ vind je met de richtingsvectoren $\overrightarrow{MO}$ en $\overrightarrow{MT}$?

De hoek tussen $\overrightarrow{MO}(-2,-2,0)$ en $\overrightarrow{MT}(-2,-2,3)$ noemen we $\beta$.

$$\cos\beta = \frac{(-2)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)+0\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{17}}$$

$\Rightarrow \beta = 46°41'10''$

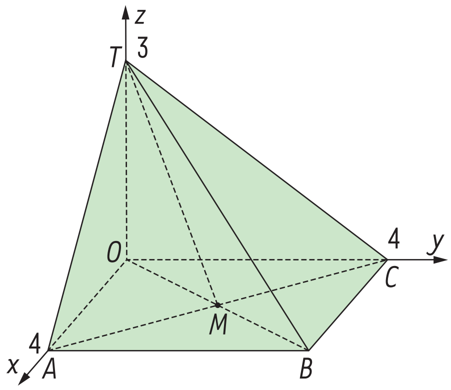
**3** Verklaar aan de hand van de figuur waarom je twee verschillende hoeken vindt in **1** en **2**.

$\alpha$ is de stompe hoek tussen OB en MT en $\beta$ is de scherpe hoek tussen OB en MT. Twee rechten sluiten steeds twee hoeken met elkaar in die elkaars supplement zijn.

**Opdracht 8 bladzijde 127**

Gegeven de rechthoekige piramide $\left(\begin{array}{c} T \\ O\;\;A\;\;B\;\;C \end{array}\right)$ met $T(0,0,3)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$ en $C(0,4,0)$.

**1** Bereken de hoek tussen $OB$ en $TB$.



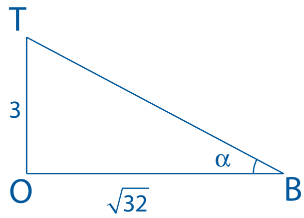

$\overrightarrow{OB}(4,4,0)$ en $\overrightarrow{TB}(4,4,-3)$ zijn richtingsvectoren van OB, respectievelijk TB. De hoek tussen deze vectoren noemen we $\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot4+4\cdot4+0\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+4^2+0^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{32}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{41}}$$

$\Rightarrow \alpha = 27°56'18"$

De hoek tussen OB en TB is bijgevolg 27°56'18", want $\alpha$ is een scherpe hoek.

Deze hoek kan ook via een synthetische methode gevonden worden.




In de rechthoekige driehoek TOB geeft $\alpha = O\hat{B}T$ de hoek tussen OB en TB. Er geldt:

$\tan\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{32}} \Rightarrow \alpha = 27°56'18"$.

**2** Bereken de hoek tussen $OB$ en $TC$.

Omdat OB en TC kruisende rechten zijn, is de analytische methode te verkiezen.

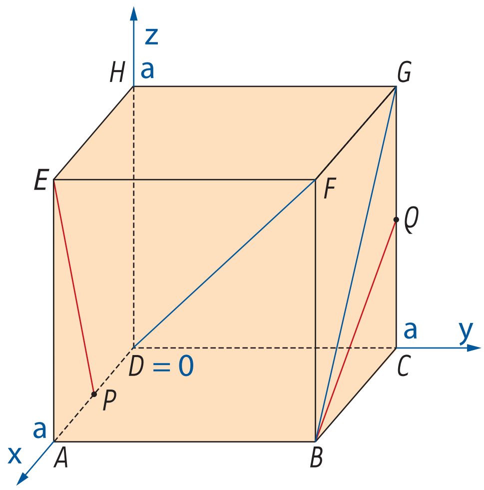
$\overrightarrow{OB}(4,4,0)$ en $\overrightarrow{TC}(0,4,-3)$, zodat de hoek $\beta$ tussen deze vectoren kan gevonden worden uit:

$\cos\beta = \dfrac{16}{\sqrt{32}\cdot5} \Rightarrow \beta = 55°33'$. Omdat $\beta$ een scherpe hoek is, is dit de hoek tussen OB en TC.

**Opdracht 9 bladzijde 127**

In de gegeven kubus met ribbe $a$ is $P$ het midden van $[AD]$ en $Q$ het midden van $[CG]$.

Toon aan dat




**1** $DF \perp BG$

Om de loodrechte stand van deze kruisende rechten aan te tonen is de analytische methode hier zonder twijfel de meest eenvoudige. We kiezen daartoe een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

In het gekozen assenstelsel is D(0,0,0) en F(a,a,a) zodat $\vec{d_1}(1,1,1)$ een richtingsvector van DF is.

We vinden ook B(a,a,0) en G(0,a,a) zodat $\overrightarrow{BG}(-a,0,a)$. We kiezen $\vec{d_2}(-1,0,1)$ als eenvoudige richtingsvector van BG.

$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = -1 + 0 + 1 = 0$ waaruit volgt dat DF $\perp$ BG.

**2** $EP \perp BQ$

Uit E(a,0,a) en $P\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ volgt $\overrightarrow{EP}\left(-\frac{a}{2},0,-a\right)$ en uit B(a,a,0) en $Q\left(0, a, \frac{a}{2}\right)$ volgt

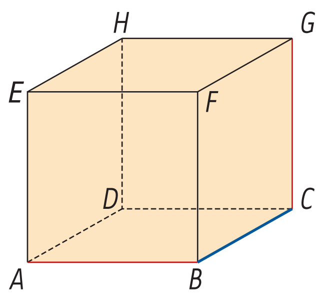
$\overrightarrow{BQ}\left(-a,0,\frac{a}{2}\right)$. We kiezen $\vec{d_1}(1,0,2)$ als richtingsvector van EP en $\vec{d_2}(-2,0,1)$ als richtingsvector van BQ.

$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = -2 + 0 + 2 = 0$. We besluiten: EP $\perp$ BQ.

**Opdracht 10 bladzijde 127**

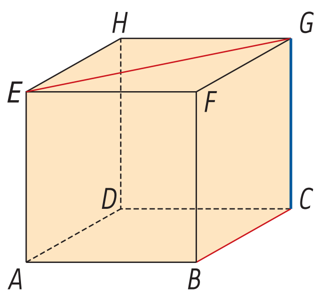
Teken telkens de gemeenschappelijke loodlijn van de gegeven paren kruisende rechten. Dat is de rechte die de beide kruisende rechten loodrecht snijdt.

**1** $AB$ en $CG$



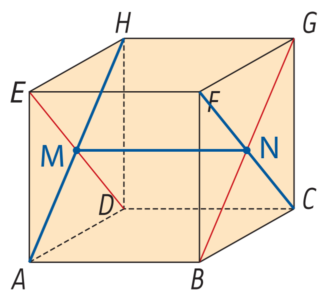

BC

**2** $BC$ en $EG$




CG

**3** $DE$ en $BG$




MN, met M het midden van [DE] en N het midden van [BG]

**Opdracht 11 bladzijde 130**

De kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ heeft ribbe 4.

**1** Bepaal de voetpunten *K* en *L* van de gemeenschappelijke loodlijn van *OE* en *HB*.

$$OE \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 0 \\ z = r \end{cases} \text{ en } HB \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 4 - s \end{cases}$$

Als K(r,0,r) en L(s,s,4 – s) de voetpunten zijn van de gemeenschappelijke loodlijn, dan moet $KL \perp OE$ en $KL \perp HB$.

Hiervoor moet $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$ en $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Omdat (s – r,s,4 – s – r), (1,0,1) en (1,1,–1) richtingsgetallen zijn van KL, respectievelijk OE en HB levert dit het volgende stelsel op in r en s:

$$\begin{cases} s - r + 4 - s - r = 0 \\ s - r + s - 4 + s + r = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} 2r = 4 \\ 3s = 4 \end{cases}.$$

Dit stelsel heeft als oplossing r = 2 en $s = \frac{4}{3}$.

We vinden als voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn: K(2,0,2) en $L\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

**2** Teken deze gemeenschappelijke loodlijn.

Om de gemeenschappelijke loodlijn nauwkeurig te tekenen, kunnen we als volgt te werk gaan.

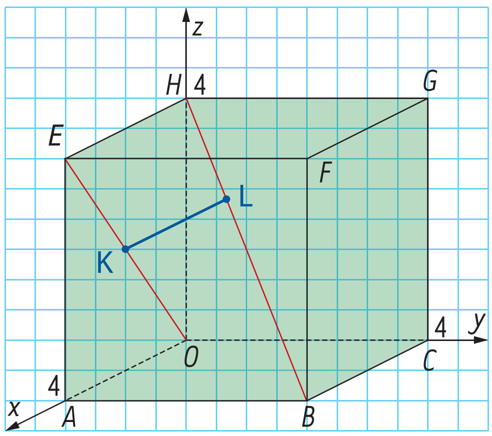
– De parametervoorstelling van OE is:

$$OE \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 0 \\ z = r \end{cases}.$$

Voor O(0, 0, 0) is r = 0, voor E(4, 0, 4) is r = 4.

Voor het punt K vinden we r = 2.

Bijgevolg is $|OK| = \frac{1}{2}|OE|$.




– De parametervoorstelling van HB is:

$$HB \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 4 - s \end{cases}.$$

Voor H(0, 0, 4) is s = 0, voor B(4, 4, 0) is s = 4.

Voor het punt L vinden we $s = \frac{4}{3}$.

Bijgevolg is $|HL| = \frac{1}{3}|HB|$.

**Opdracht 12 bladzijde 131**

Ga na of de volgende beweringen correct zijn. Antwoord met 'altijd', 'soms' of 'nooit'.

**1** Door elk punt bestaat een loodlijn op een gegeven vlak.

altijd (we hebben steeds één loodlijn uit een punt op een vlak - zie samenvatting blz. 163 voor parametervergelijkingen van deze loodlijn)

**2** Als een rechte loodrecht op een vlak staat, dan staat ze loodrecht op elke rechte van dat vlak door haar voetpunt.

altijd (zie definitie blz. 132)

**3** Een rechte die juist één rechte van een vlak loodrecht snijdt, staat loodrecht op dat vlak.

nooit (zie eigenschap blz. 132)

**4** Een rechte die twee verschillende rechten van een vlak loodrecht snijdt en niet in dat vlak ligt, staat loodrecht op dat vlak.

altijd (deze twee verschillende rechten moeten dan snijdende rechten zijn - zie eigenschap blz 132)

**5** Een rechte die twee verschillende rechten van een vlak loodrecht kruist, staat loodrecht op dat vlak.

soms (als de twee rechten evenwijdig zijn, zijn we nog niet zeker van de loodrechte stand)

**6** Twee loodlijnen op hetzelfde vlak zijn evenwijdig.

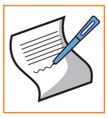
altijd (zie opmerkingen blz. 135)

**7** Door een punt van een rechte bestaan er meerdere loodlijnen op die rechte.

altijd (ze vormen een loodvlak uit dat punt op die rechte)

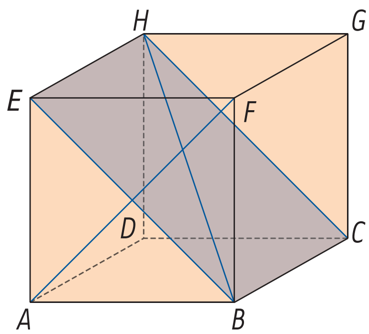
**8** Door een punt, niet op een bepaalde rechte gelegen, bestaan er meerdere loodlijnen op die rechte.

altijd (zie opmerking blz. 138)



**Opdracht 13 bladzijde 133**

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$.




Bewijs dat $AF \perp HB$ door eerst aan te tonen dat $AF$ loodrecht staat op een vlak dat $HB$ omvat.

AF ⊥ vl(B, C, H), want

- AF ⊥ BE — de diagonalen van het vierkant ABFE staan loodrecht op elkaar
- AF ⊥ BC — BC ⊥ vl(A, B, F) en AF ligt in vl(A, B, F)

AF staat bijgevolg loodrecht op twee snijdende rechten van vl(B, C, H), zodat AF ⊥ vl(B, C, H).

HB ligt in vl(B, C, H), zodat ook AF ⊥ HB.

**Opdracht 14 bladzijde 133**

Gegeven de vector $\overrightarrow{OA}(2,3,4)$.

**1** Aan welke voorwaarde voldoen de coördinaatgetallen van een vector $\overrightarrow{OP}(x, y, z)$ als $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$?

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA} \iff \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \iff 2x + 3y + 4z = 0$

**2** Wat stelt de verzameling van alle punten $P(x, y, z)$ waarbij $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OA}$ voor?

Het vlak met vergelijking $2x + 3y + 4z = 0$.

**Opdracht 15 bladzijde 136**

**1** Bepaal een stel richtingsgetallen van een loodlijn $l$ op het vlak $\alpha \leftrightarrow x + 3y - 2z - 5 = 0$.

$(1,3,-2)$

**2** Bepaal een parametervoorstelling en een stel cartesiaanse vergelijkingen van de loodlijn $l$ uit het punt $P(1,3,2)$ op het vlak $\alpha \leftrightarrow x + 3y - 2z - 5 = 0$.

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 3 + 3r \\ z = 2 - 2r \end{cases} (r \in \mathbb{R}) \text{ en } l \leftrightarrow x - 1 = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{-2}$$

**Opdracht 16 bladzijde 136**

Bepaal de coördinaat van de loodrechte projectie $P'$ van het punt $P(3,3,-4)$ op het vlak $\alpha \leftrightarrow 3x - y + z + 5 = 0$.

De loodlijn uit P(3,3,–4) op $\alpha \leftrightarrow 3x - y + z + 5 = 0$ is $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3r \\ y = 3 - r \\ z = -4 + r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

Het snijpunt van l met $\alpha$ vinden we uit

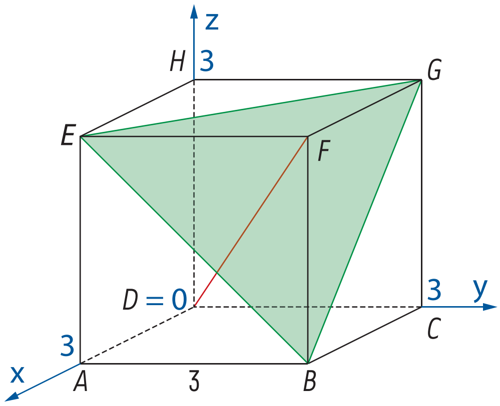
$$\begin{aligned} &3(3+3r) - (3-r) + (-4+r) + 5 = 0 \\ \iff &11r + 7 = 0 \\ \iff &r = -\frac{7}{11} \end{aligned}$$

De loodrechte projectie is $P'\left(3 - \frac{21}{11}, 3 + \frac{7}{11}, -4 - \frac{7}{11}\right)$ of $P'\left(\frac{12}{11}, \frac{40}{11}, -\frac{51}{11}\right)$.

**Opdracht 17 bladzijde 136**

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een kubus met ribbe 3.

Toon aan dat *DF* loodrecht staat op vl$(B, E, G)$.




We kiezen een orthonormaal assenstelsel met D als oorsprong en de assen langs de ribben van de kubus.

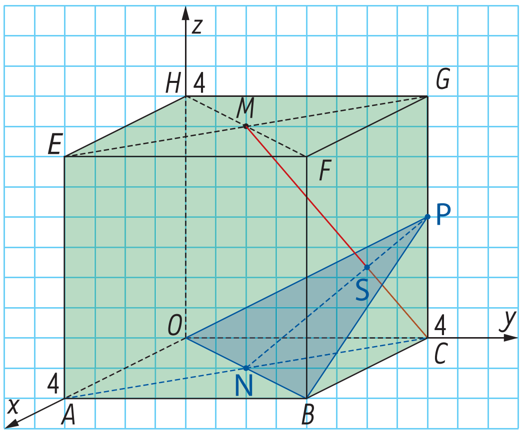
In dit assenstelsel geldt: vl(B,E,G) $\leftrightarrow x + y + z = 6$ en DF $\leftrightarrow x = y = z$, zodat de normaalvector $\vec{n}(1,1,1)$ van het vlak ook richtingsvector is van DF.

Hieruit volgt dat DF loodrecht staat op vl(B,E,G).

**Opdracht 18 bladzijde 136**

Gegeven de rechte *MC* met $M(2,2,4)$ en $C(0,4,0)$.

We zoeken een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\pi$ door $O(0,0,0)$ en loodrecht op *MC*.




**1** Een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\pi$ is van de vorm $ux + vy + wz + t = 0$. (1)

Bepaal een normaalvector $\vec{n}(u, v, w)$ van het vlak $\pi$ als je weet dat $\pi$ loodrecht staat op *MC*.

Met de normaalvector heb je $u$, $v$ en $w$ van de vergelijking (1) gevonden.

$\overrightarrow{MC}(-2,2,-4)$ zodat $\vec{n}(1,-1,2)$ een normaalvector is van het gezochte vlak $\pi$.

We hebben al: $\pi \leftrightarrow x - y + 2z + t = 0$.

**2** Bepaal $t$ als je weet dat $\pi$ door de oorsprong gaat.

$\pi$ gaat door de oorsprong, dus $t = 0$.

$\pi \leftrightarrow x - y + 2z = 0 \qquad (1)$

**3** Teken op de figuur de doorsnede van het vlak $\pi$ met de kubus.

De oorsprong behoort tot $\pi$.

De snijlijn met het grondvlak is de rechte met cartesiaanse vergelijkingen $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$,

dit is de rechte OB.

Het snijpunt met GC is het punt P(0, 4, k), waarbij we k vinden door de coördinaat van P in te vullen in (1): $0 - 4 + 2k = 0 \iff k = 2$.

Dit geeft het derde punt van de doorsnede van $\pi$ met de kubus: P(0, 4, 2), het midden van [CG].

Merk op: het snijpunt S van MC met het loodvlak $\pi$ kan geconstrueerd worden door gebruik te maken van het hulpvlak vl(A, E, G) dat MC omvat.

**Opdracht 19 bladzijde 140**

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het loodvlak $\pi$ uit het punt $P(2,1,-1)$ op de rechte

$l \leftrightarrow \begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$.

We zoeken eerst een stel richtingsgetallen van $l \leftrightarrow \begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ door een parametervoorstelling van l te bepalen.

Kies $z = r$, dan volgt uit de eerste vergelijking dat $x = 4 - 5r$.

De tweede vergelijking geeft dan $4 - 5r + 3r = 2y$ of $y = 2 - r$.

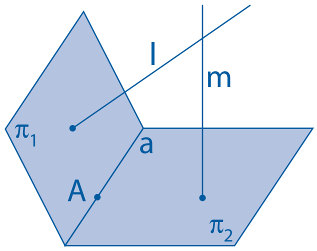
Een parametervoorstelling van l is $\begin{cases} x = 4 - 5r \\ y = 2 - r \\ z = r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

$(-5, -1, 1)$ is dan een stel richtingsgetallen van l, zodat $\vec{n}(5,1,-1)$ een normaalvector is van $\pi$.

$\pi \leftrightarrow 5(x - 2) + (y - 1) - (z + 1) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 5x + y - z - 12 = 0$.

**Opdracht 20 bladzijde 140**

Bepaal een parametervoorstelling van de rechte $a$ die het punt $A(1,1,-1)$ bevat en loodrecht staat op de rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -r \\ z = r \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$.




Alle rechten door A(1, 1, –1) die loodrecht staan op $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -r \\ z = r \end{cases}$

liggen in het loodvlak $\pi_1 \leftrightarrow 2(x - 1) - (y - 1) + z + 1 = 0$ door A op l.

Alle rechten door A(1, 1, –1) die loodrecht staan op $m \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$

liggen in het loodvlak $\pi_2 \leftrightarrow (x - 1) + 2(y - 1) + z + 1 = 0$ door A op m.

De gevraagde rechte a is dus de snijlijn van $\pi_1 \leftrightarrow 2x - y + z = 0$ en

$\pi_2 \leftrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$, zodat $a \leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

Een parametervoorstelling vinden we door de matrix $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$ te herleiden

tot een rijcanonieke matrix: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$.

We kunnen dus schrijven: $a \leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{3}{5}z = \dfrac{2}{5} \\ y + \dfrac{1}{5}z = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

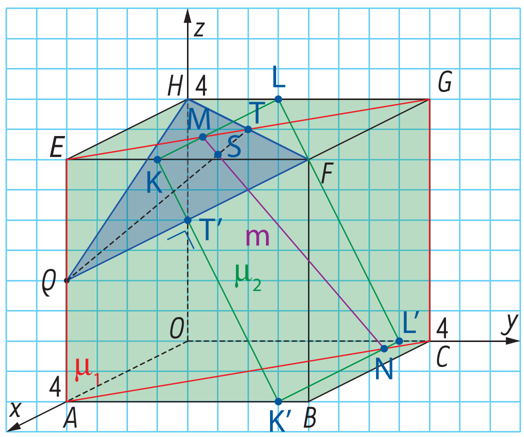
Hieruit vinden we een parametervoorstelling van a: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{5} - 3r \\ y = \dfrac{4}{5} - r \\ z = 5r \end{cases}$.

Gebruikmakend van het steunpunt A(1, 1, –1) vinden we:

$$a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases}.$$

**Opdracht 21 bladzijde 140**

Gegeven de driehoek *HFQ* met *H*(0,0,4), *F*(4,4,4) en *Q*(4,0,2).




**1** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak $\mu_1$ van [*HF*].

Teken op de figuur de doorsnede van dit vlak met de kubus.

Het midden van [HF] is T(2, 2, 4) en $\overrightarrow{HF}(4,4,0)$ zodat $\mu_1 \leftrightarrow 4(x-2) + 4(y-2) = 0$ of $\mu_1 \leftrightarrow x + y - 4 = 0$.

De doorsnede van dit vlak met de kubus is ACGE.

**2** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak $\mu_2$ van [*FQ*].

Teken op de figuur de doorsnede van dit vlak met de kubus.

Het midden van [QF] is T '(4, 2, 3) en $\overrightarrow{QF}(0,4,2)$ zodat $\mu_2 \leftrightarrow 4(y-2) + 2(z-3) = 0$ of $\mu_2 \leftrightarrow 2y + z - 7 = 0$.

De doorsnede van dit vlak met de kubus is KLL'K' met $K\left(4, \dfrac{3}{2}, 4\right)$, $K'\left(4, \dfrac{7}{2}, 0\right)$, $L\left(0, \dfrac{3}{2}, 4\right)$ en $L'\left(0, \dfrac{7}{2}, 0\right)$.

Merk op dat je het voorvlak waarin KK' ligt, in ware grootte ziet zodat je door het midden van [QF] de loodlijn KK' kunt tekenen. De andere zijden van de doorsnede kun je dan met evenwijdigen tekenen.

**3** De verzameling van punten die even ver liggen van $H$, $F$ en $Q$ is een rechte $m$ loodrecht op vl$(H, F, Q)$. Verklaar dit.

$\mu_1$ is de verzameling van alle punten die even ver van H als van F liggen,

$\mu_2$ is de verzameling van alle punten die even ver van F als van Q liggen.

Alle punten even ver van H, F en Q liggen dus op de snijlijn m van $\mu_1$ en $\mu_2$ (deze snijlijn bestaat, want moesten de middelloodvlakken evenwijdig zijn, dan zou HF // QF, wat niet zo is).

m ligt in $\mu_1$, dus $m \perp HF$ (1),
m ligt in $\mu_2$, dus $m \perp FQ$ (2).
Uit (1) en (2) volgt dus $m \perp$ vl(H, F, Q).

**4** Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van $m$ en teken deze rechte op de figuur.

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

Twee punten van de snijlijn m van $\mu_1$ en $\mu_2$ zijn M in het bovenvlak (snijpunt van KL en EG) en N in het grondvlak (snijpunt van K′L′ en AC).

**5** Bepaal het snijpunt $S$ van $m$ en vl$(H, F, Q)$. Construeer dit snijpunt op de figuur.

Welk bijzonder punt is $S$ voor de driehoek $HFQ$?

Een cartesiaanse vergelijking van vl(H, F, Q) is $x - y + 2z - 8 = 0$.

Het snijpunt S van m en vl(H, F, Q) is de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 7 \\ x - y + 2z = 8 \end{cases}$.

Dit is het punt $S\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

S ligt in vl(H, F, Q) en ligt even ver van H, F en Q, zodat S het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van de driehoek HFQ.

Om S te construeren maken we gebruik van het hulpvlak ACGE dat m omvat. De snijlijn van vl(H, F, Q) en vl(A, C, G) is QT, zodat S het snijpunt is van m en QT.

**Opdracht 22 bladzijde 144**

Onderzoek of de vlakken $\alpha$ en $\beta$ loodrecht op elkaar staan.

**1** $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 3z + 7 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x + 3y + z - 3 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x + 2y - 3z + 7 = 0$ staat niet loodrecht op $\beta \leftrightarrow 2x + 3y + z - 3 = 0$ want

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 5 \neq 0$.

**2** $\alpha \leftrightarrow x + y + z + 3 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - y - z + 1 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x + y + z + 3 = 0$ staat loodrecht op $\beta \leftrightarrow 2x - y - z + 1 = 0$ want

$1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$.

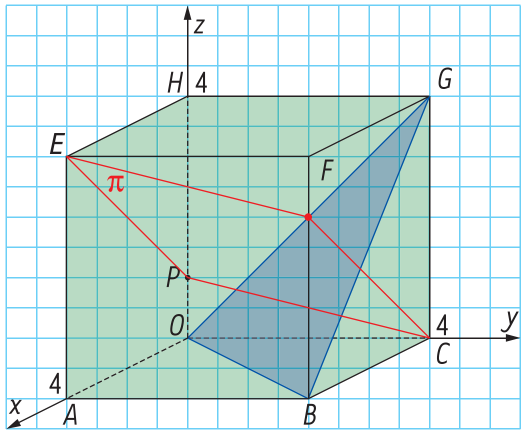
**3** $\alpha \leftrightarrow 7x - 3y + 5z - 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - 2y - 4z + 3 = 0$

$\alpha \leftrightarrow 7x - 3y + 5z - 1 = 0$ staat loodrecht op $\beta \leftrightarrow 2x - 2y - 4z + 3 = 0$ want

$7 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) = 0$.

**Opdracht 23 bladzijde 144**

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.




**1** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\pi$ dat de punten $P(0,0,1)$ en $E(4,0,4)$ bevat en loodrecht staat op vl$(O, B, G)$.

Een cartesiaanse vergelijking van vl(O, B, G) is $x - y + z = 0$.

Omdat $\pi$ loodrecht staat op vl(O, B, G) is de normaalvector $\vec{d_1}(1,-1,1)$ van vl(O, B, G) een richtingsvector van $\pi$. Ook $\overrightarrow{PE}\,(4,0,3)$ is een richtingsvector van $\pi$.

Met steunpunt P(0, 0, 1) vinden we $\pi \leftrightarrow \begin{cases} x = r + 4s \\ y = -r \\ z = 1 + r + 3s \end{cases}$.

Na eliminatie van de parameters vinden we $\pi \leftrightarrow -3x + y + 4z - 4 = 0$.

**2** Teken de doorsnede van dit vlak met de kubus.

De punten P en E behoren tot $\pi$, waardoor [PE] een zijde is van de doorsnede.

Het snijpunt van $\pi$ met GC is het punt S(0,4,k), waarbij we k vinden door de coördinaat van S in te vullen in de cartesiaanse vergelijking van $\pi$: $0 + 4 + 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 0$.
Dit snijpunt S(0,4,0) valt dus samen met C, waardoor [PC] ook een zijde is van de doorsnede.

De andere zijden van de doorsnede kun je dan met evenwijdigen tekenen.

**Opdracht 24 bladzijde 150**

$\begin{pmatrix} & & T & \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een regelmatige piramide, d.w.z. dat het grondvlak $ABCD$ een vierkant is en dat $TM$ loodrecht staat op het grondvlak. Het vierkant heeft zijde 4 en $|TM| = 6$.

**1** Bereken de hoek tussen vl$(T, A, B)$ en vl$(A, B, C)$.

Synthetische methode: we brengen de gevraagde hoek $\alpha$ in beeld.

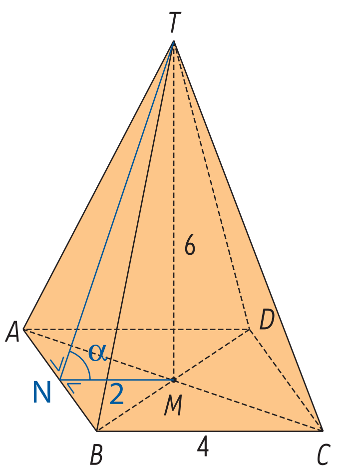
De snijlijn van vl(T, A, B) en vl(A, B, C) is AB.

Omdat de driehoek TAB gelijkbenig is, zal TN $\perp$ AB, met N het midden van [AB].

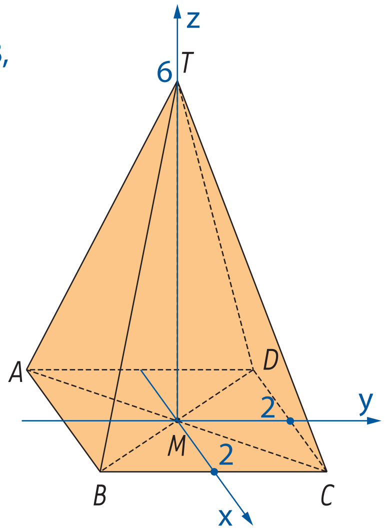
MN // BC dus MN staat loodrecht op AB.

$T\hat{N}M$ is een scherpe hoek en dus de gevraagde hoek $\alpha$:

$\tan \alpha = \dfrac{6}{2} \Rightarrow \alpha = 71°33'54''$.



Analytische methode: we werken met een orthonormaal assenstelsel met oorsprong in M, de x-as evenwijdig met AB, de y-as evenwijdig met BC en de z-as door T.




In het getekende assenstelsel geldt:

co(T) = (0,0,6), co(A) = (–2,–2,0) en co(B) = (2,–2,0).

Een cartesiaanse vergelijking van vl(T, A, B) is $3y - z + 6 = 0$.

vl(A, B, C) heeft als vergelijking $z = 0$.

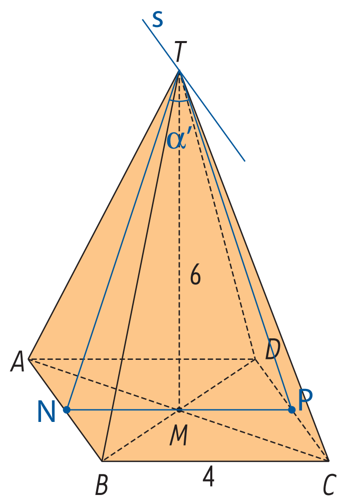
De hoek $\beta$ tussen de normaalvectoren $\vec{n}_1(0,3,-1)$ en $\vec{n}_2(0,0,1)$ vinden we als volgt:

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{10}\cdot 1} \Rightarrow \beta = 108°26'6''.$$

De gevraagde hoek $\alpha$ tussen vl(T, A, B) en vl(A, B, C) is dan $180° - 108°26'6'' = 71°33'54''$.

**2** Bereken de hoek tussen vl($T, A, B$) en vl($T, D, C$).

Synthetische methode:




De snijlijn van vl(T, A, B) en vl(T, D, C) is de rechte s // AB door T. Een vlak evenwijdig met het grondvlak door T snijdt vl(T,A,B) en vl(T,D,C) namelijk volgens snijlijnen die evenwijdig zijn met de snijlijnen AB en DC van deze vlakken met het grondvlak.

Noem N het midden van [AB] en P het midden van [CD]. NT staat loodrecht op AB, dus loodrecht op s en PT staat loodrecht op DC dus loodrecht op s.

Bijgevolg is $N\hat{T}P$ de gevraagde hoek $\alpha'$:

$\alpha' = 180° - 2\alpha$ (zie **1**) $= 36°52'12''$.

Analytische methode: gekozen assenstelsel, zie **1**

In het getekende assenstelsel geldt: co(T) = (0,0,6), co(C) = (2,2,0) en co(D) = (–2,2,0). Een cartesiaanse vergelijking van vl(T, C, D) is $3y + z - 6 = 0$.

vl(T, A, B) heeft als vergelijking $3y - z + 6 = 0$.

De hoek $\delta$ tussen de normaalvectoren $\vec{n}_3(0,3,1)$ en $\vec{n}_1(0,3,-1)$ vinden we als volgt:

$$\cos\delta = \frac{8}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow \delta = 36°52'12''.$$

Omdat $\delta$ een scherpe hoek is, is dit de gevraagde hoek $\alpha'$ tussen vl(T, A, B) en vl(T, D, C).

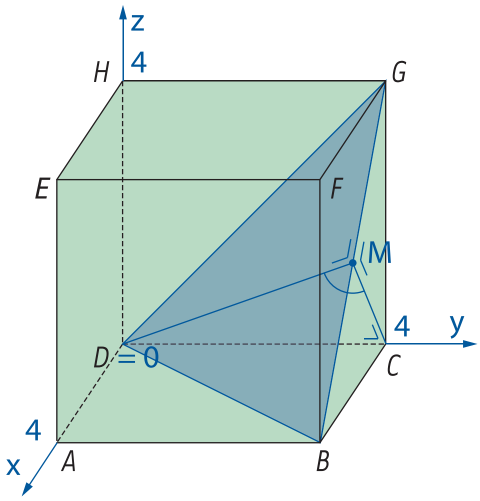
**Opdracht 25 bladzijde 150**

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een kubus met ribbe 4.

Bereken de hoek tussen vl$(B, G, D)$ en vl$(B, G, C)$.

Deze hoek kan opnieuw analytisch en synthetisch berekend worden. Het voordeel van de synthetische methode is dat de hoek in beeld wordt gebracht. Het vraagt echter wel meer meetkundig inzicht.

1e methode: analytisch




We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

vl(B, G, D) $\leftrightarrow x - y + z = 0$, vl(B, G, C) $\leftrightarrow y = 4$.

De hoek $\beta$ tussen de normaalvectoren $\vec{n}_1(1,-1,1)$ en $\vec{n}_2(0,1,0)$ vinden we als volgt:

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}\cdot 1} \Rightarrow \beta = 125°15'52''.$$

De gevraagde hoek $\alpha$ tussen vl(B, G, D) en vl(B, G, C) is dan $180° - 125°15'52'' = 54°44'8''$.

2e methode: synthetisch

De snijlijn van vl(B, G, D) en vl(B, G, C) is BG. Noem M het midden van [BG], dan is CM een loodlijn op BG in vl(B, G, C) want de diagonalen van het vierkant BCGF staan loodrecht op elkaar.

In de gelijkzijdige driehoek BGD staat de zwaartelijn DM loodrecht op BG.

De gevraagde hoek tussen vl(B,G,D) en vl(B,G,C) is dus de hoek $D\hat{M}C$.
Aangezien DC $\perp$ vl(B, G, C) is de driehoek DMC rechthoekig in C.

Daaruit volgt: $\tan D\hat{M}C = \dfrac{|DC|}{|CM|} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow D\hat{M}C = 54°\,44'8''.$

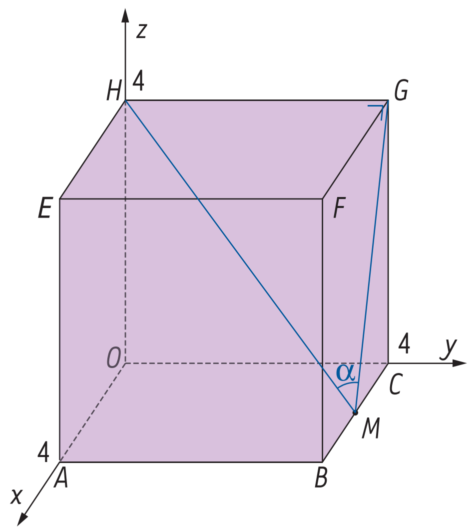
**Opdracht 26 bladzijde 153**

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & 0 \end{pmatrix}$ met ribbe 4. $M$ is het midden van $[BC]$.

Bereken de hoek tussen

**1** $HM$ en vl$(B, C, G)$

1e methode: synthetisch




De hoek tussen HM en vl(B, C, G) is de hoek $\alpha$ tussen HM en de loodrechte projectie GM van HM op vl(B, C, G).

$|GM| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ zodat in $\Delta$HMG geldt:

$$\tan\alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = 41°48'37''.$$

2e methode: analytisch

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

$y = 4$ is een vergelijking van vl(B, C, G), zodat $\vec{n_1}(0,1,0)$ een normaalvector is van dit vlak.

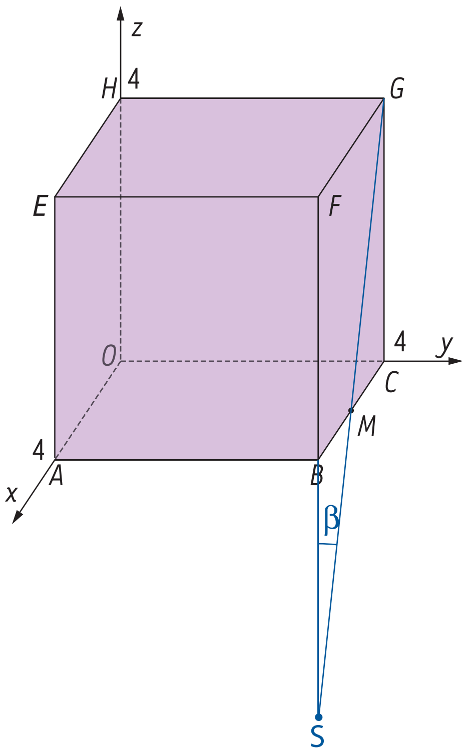
Aangezien H(0, 0, 4) en M(2, 4, 0) is $\overrightarrow{HM}(2,4,-4)$ of $\vec{d_1}(1,2,-2)$ een richtingsvector van HM.

De scherpe hoek $\alpha'$ tussen $\vec{n_1}(0,1,0)$ en $\vec{d_1}(1,2,-2)$ vinden we als volgt:

$\cos\alpha' = \dfrac{2}{1\cdot 3} \Rightarrow \alpha' = 48°11'23''$.

De gevraagde hoek $\alpha$ tussen HM en vl(B, C, G) is dan $90° - 48°11'23'' = 41°48'37''$.

**2** *GM* en vl(*A*, *B*, *F*)




1e methode: synthetisch

De hoek tussen GM en vl(A, B, F) is de hoek $\beta$ tussen GM en de loodrechte projectie FB van GM op vl(A, B, F).

Noem S het snijpunt van FB en GM, dan is

$\beta = B\hat{S}M$. Aangezien de driehoeken FSG en BSM

gelijkvormig zijn (hh), zal $\dfrac{|FS|}{|BS|} = \dfrac{|FG|}{|BM|}$ of

$\dfrac{4+|BS|}{|BS|} = \dfrac{4}{2} = 2$, zodat $4 + |BS| = 2|BS| \Rightarrow |BS| = 4$.

In $\Delta$BMS geldt:

$\tan\beta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 26°33'54''$.

2e methode: analytisch

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

$x = 4$ is een vergelijking van vl(A, B, F), zodat $\vec{n_2}(1,0,0)$ een normaalvector is van dit vlak.

Aangezien G(0, 4, 4) en M(2, 4, 0) is $\overrightarrow{GM}(2,0,-4)$ of $\vec{d_2}(1,0,-2)$ een richtingsvector van GM.

De scherpe hoek $\beta'$ tussen $\vec{n_2}(1,0,0)$ en $\vec{d_2}(1,0,-2)$ vinden we als volgt:

$\cos\beta' = \dfrac{1}{1\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \beta' = 63°26'6''$.

De gevraagde hoek $\beta$ tussen GM en vl(A, B, F) is dan $90° - 63°26'6'' = 26°33'54''$.

**3** *HM* en vl$(A, B, F)$

1e methode: synthetisch

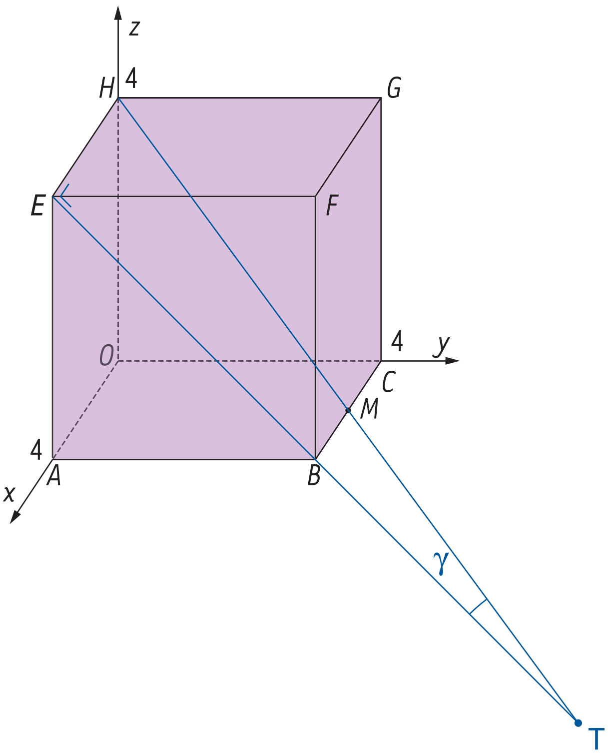
De hoek tussen HM en vl(A, B, F) is de hoek $\gamma$ tussen HM en de loodrechte projectie EB van HM op vl(A, B, F).

Noem T het snijpunt van EB en HM, dan is $\gamma = B\hat{T}M$. Aangezien de driehoeken ETH en BTM gelijkvormig zijn (hh), zal $\frac{|ET|}{|BT|} = \frac{|EH|}{|BM|}$ of $\frac{4\sqrt{2}+|BT|}{|BT|} = \frac{4}{2} = 2$, zodat

$4\sqrt{2} + |BT| = 2|BT| \Rightarrow |BT| = 4\sqrt{2}.$

In $\Delta BMT$ geldt:

$\tan\gamma = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 19°28'16''.$




2e methode: analytisch

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

$x = 4$ is een vergelijking van vl(A, B, F), zodat $\vec{n}_2(1,0,0)$ een normaalvector is van dit vlak.

Aangezien H(0, 0, 4) en M(2, 4, 0) is $\overrightarrow{HM}(2,4,-4)$ of $\vec{d}_1(1,2,-2)$ een richtingsvector van HM.

De scherpe hoek $\gamma'$ tussen $\vec{n}_2(1,0,0)$ en $\vec{d}_1(1,2,-2)$ vinden we als volgt:

$\cos\gamma' = \frac{1}{1\cdot 3} \Rightarrow \gamma' = 70°31'44''.$

De gevraagde hoek $\gamma$ tussen HM en vl(A, B, F) is dan $90° - 70°31'44'' = 19°28'16''$.

**Opdracht 27 bladzijde 153**

Bereken de hoek tussen de rechte $m \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$ en het vlak $\gamma \leftrightarrow x + y - z = 0$.

$\vec{d}(2,-3,4)$ is een richtingsvector van m. $\vec{n}(1,1,-1)$ is een normaalvecor van het vlak $\gamma$. De scherpe hoek $\alpha'$ tussen $\vec{n}$ en $\vec{d}$ vinden we via de formule:

$\cos\beta = \frac{2-3-4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-5}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}$. Omdat $\cos\beta < 0$, zal $\beta$ een stompe hoek zijn, waardoor:

$\alpha' = 180° - \beta = 180° - 122°24'56'' = 57°35'4''.$

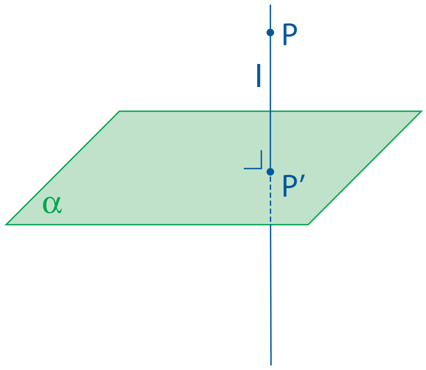
De gevraagde hoek $\alpha$ tussen de rechte m en het vlak $\gamma$ is dan: $\alpha = 90° - \alpha' = 32°24'56''$.

**Opdracht 28 bladzijde 154**

Gegeven het punt $P(3,1,-6)$ en het vlak $\alpha \leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0$.

**1** Bepaal een parametervoorstelling van de loodlijn $l$ uit $P$ op $\alpha$.

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = 1 - 2r \\ z = -6 + 2r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$




**2** Bepaal de coördinaat van het snijpunt $P'$ van $l$ en $\alpha$.

$$(3+r) - 2(1-2r) + 2(-6+2r) + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \; 9r = 9$$
$$\Leftrightarrow \; r = 1$$

$P'(4,-1,-4)$

**3** Bereken $|PP'|$.

$$|PP'| = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-1)^2 + (-4+6)^2} = 3$$

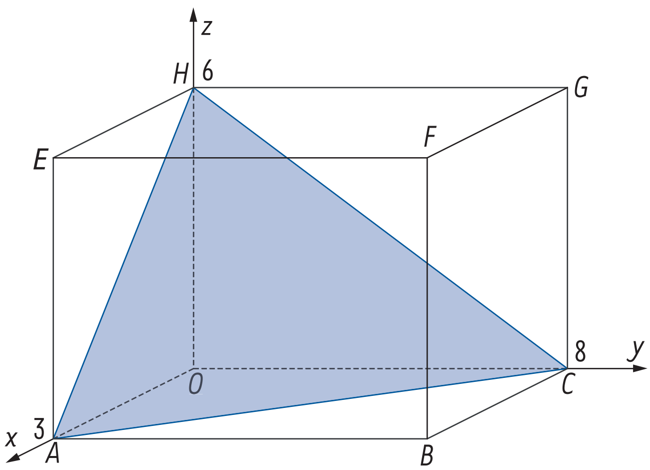
**Opdracht 29 bladzijde 156**

Gegeven de balk $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met $A(3,0,0)$, $C(0,8,0)$ en $H(0,0,6)$.

**1** Bepaal een vergelijking van het vlak $\alpha = \text{vl}(A, C, H)$.

$\alpha = \text{vl}(A, C, H)$ met $A(3, 0, 0)$, $C(0, 8, 0)$ en $H(0, 0, 6)$ heeft als cartesiaanse vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} + \frac{z}{6} = 1$

of $\alpha \leftrightarrow 8x + 3y + 4z - 24 = 0$.




**2** Bereken $d(F, \alpha)$.

Met $F(3, 8, 6)$ is

$$d(F,\alpha) = \frac{|8\cdot 3 + 3\cdot 8 + 4\cdot 6 - 24|}{\sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{48}{\sqrt{89}}.$$

**Opdracht 30 bladzijde 156**

Bereken de afstand tussen de evenwijdige vlakken $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 2z + 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$.

Neem een punt $A(-1, 0, 0)$ van $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 2z + 1 = 0$.

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|-1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

**Opdracht 31 bladzijde 156**

Bepaal de coördinaat van de punten op de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = r \\ z = -r \end{cases}$ die op een afstand 4 van het vlak $\alpha \leftrightarrow 2x - y - 2z - 5 = 0$ liggen.

P(1+2r, r, –r) is een lopend punt op m.

$d(P,\alpha) = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2\cdot(1+2r) - r - 2\cdot(-r) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 4$

$\Leftrightarrow |5r - 3| = 4\cdot 3 = 12$

$\Leftrightarrow 5r - 3 = 12 \text{ of } 5r - 3 = -12$

$\Leftrightarrow r = 3 \text{ of } r = -\dfrac{9}{5}$

De gevraagde punten zijn (7,3,–3) en $\left(-\dfrac{13}{5}, -\dfrac{9}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

**Opdracht 32 bladzijde 157**

**1** Bepaal en kleur op de onderstaande figuren telkens twee evenwijdige vlakken die elk één van de gegeven rechten omvatten. Bepaal ook de afstand tussen die evenwijdige vlakken.

**2** Teken op de figuren telkens de gemeenschappelijke loodlijn van de gegeven kruisende rechten.

Bereken ook de afstand tussen de voetpunten van die gemeenschappelijke loodlijn.

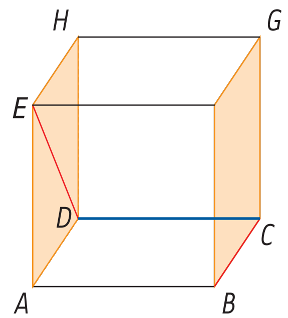
**a** *BC* en *DE*

De twee evenwijdige vlakken zijn het linker- en het rechterzijvlak van de kubus.

De afstand tussen die evenwijdige vlakken is de lengte van de ribbe van de kubus.

De gemeenschappelijke loodlijn is [DC].

De afstand tussen de voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn is de lengte van de ribbe van de kubus.



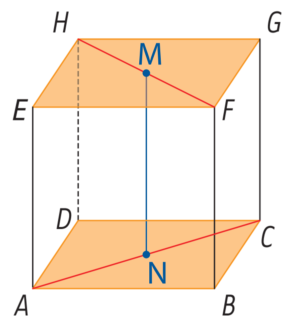

**b** *HF* en *AC*

De twee evenwijdige vlakken zijn het boven- en het grondvlak van de kubus.

De afstand tussen die evenwijdige vlakken is de lengte van de ribbe van de kubus.

De gemeenschappelijke loodlijn is [MN], met M en N de middens van het boven- en grondvlak.

De afstand tussen de voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn is de lengte van de ribbe van de kubus.



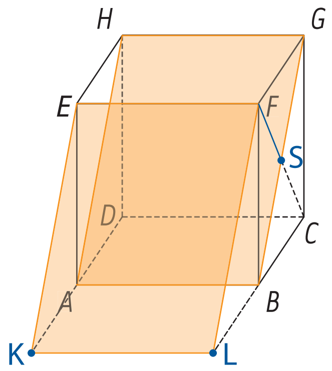
**c** *EF* en *BG*

De twee evenwijdige vlakken zijn vl(A, B, G) dat BG omvat en vl(E, F, K) dat EF omvat, waarbij K het snijpunt is van AD met de rechte evenwijdig met BG door E.

De rechte FS (S is het snijpunt van FC en BG) staat loodrecht op EF en op BG en snijdt deze rechten. FS is dus de gemeenschappelijke loodlijn van EF en BG.

De afstand tussen beide evenwijdige vlakken en tussen de voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn is

$|FS| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, met a de lengte van de ribbe van de kubus.



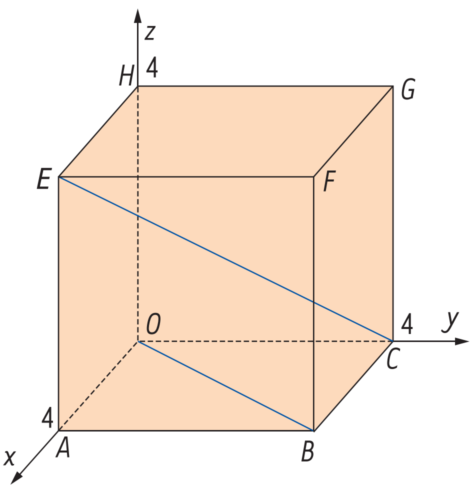

**Opdracht 33 bladzijde 159**

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.

Bereken de afstand tussen de kruisende rechten *OB* en *EC*.

We nemen het vlak β dat de rechte EC omvat en evenwijdig is met OB. Aangezien E(4, 0, 4) en C(0, 4, 0) is $\overrightarrow{EC}(-4,4,-4)$ of $\overrightarrow{d_1}(1,-1,1)$ een richtingsvector van EC en dus ook van β. Ook $\overrightarrow{OB}(4,4,0)$ of $\overrightarrow{d_2}(1,1,0)$ is een richtingsvector van β. Samen met het punt E(4, 0, 4) geeft dit een parametervoorstelling van β:

$$\beta \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + r + s \\ y = -r + s \qquad (r, s \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + r \end{cases}$$




Eliminatie van de parameters geeft:

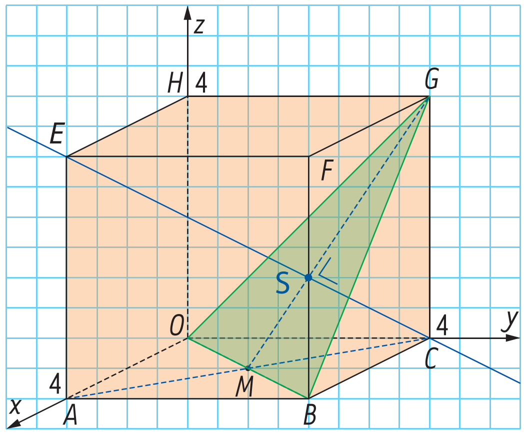
$\beta \leftrightarrow -x + y + 2z - 4 = 0.$

$$d(OB, EC) = d(O, \beta) = \frac{|-4|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

**Opdracht 34 bladzijde 161**

Gegeven het punt $M(2,2,0)$ en de rechte

$$EC \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 4 - r \\ z = r \end{cases}.$$




**1** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het loodvlak $\pi$ uit $M$ op $EC$.

$\pi \leftrightarrow 1 \cdot (x-2) - (y-2) + 1 \cdot z = 0$ of

$\pi \leftrightarrow x - y + z = 0.$

**2** Schets de doorsnede van $\pi$ met de getekende kubus.

Dit vlak gaat door de oorsprong, door B(4, 4, 0) en door G(0, 4, 4).

**3** Bereken de afstand van $M$ tot $EC$.

We bepalen het snijpunt S van EC en $\pi$: $r-(4-r)+r=0 \Leftrightarrow r=\frac{4}{3}$, zodat $S\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Aangezien $\pi$ de verzameling is van alle rechten door M die loodrecht staan op EC, zal $MS \perp EC$, zodat $|MS| = \sqrt{\left(2-\frac{4}{3}\right)^2+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ de kortste afstand is van M tot EC.

**Opdracht 35 bladzijde 161**

Bepaal de afstand tussen de evenwijdige rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2r \\ y = 2 + r \\ z = 4 + r \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -2 + s \\ z = -1 + s \end{cases}.$

Neem het punt P(3, 2, 4) op $l \leftrightarrow \begin{cases} x=3+2r \\ y=2+r \\ z=4+r \end{cases}$, dan zal d(l, m) = d(P, m).

P′(1 + 2s, −2 + s, −1 + s) is een lopend punt van m.

$\overrightarrow{PP'}(2s-2, s-4, s-5)$ is een richtingsvector van PP′.

Nu staat PP′ loodrecht op $m \leftrightarrow \begin{cases} x=1+2s \\ y=-2+s \\ z=-1+s \end{cases}$ als en slechts als

$$(2s-2)\cdot 2+(s-4)\cdot 1+(s-5)\cdot 1=0$$
$$\Leftrightarrow 6s=13$$
$$\Leftrightarrow s=\frac{13}{6}$$

Hieruit volgt dat $P'\left(\frac{16}{3},\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$, zodat

$$d(l,m)=d(P,m)=|PP'|=\sqrt{\left(\frac{16}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{6}-2\right)^2+\left(\frac{7}{6}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{121}{36}+\frac{289}{36}}=\sqrt{\frac{606}{36}}=\sqrt{\frac{101}{6}}.$$

**Opdracht 36 bladzijde 166**

Bereken de hoek tussen de vectoren

**1** $\vec{a}(2,-3,6)$ en $\vec{b}(8,2,-3)$

De hoek $\alpha$ tussen $\vec{a}(2,-3,6)$ en $\vec{b}(8,2,-3)$ vinden we uit

$$\cos\alpha = \frac{16-6-18}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{64+4+9}} = \frac{-8}{7\sqrt{77}},\ \text{zodat } \alpha = 97°29'1''.$$

**2** $\vec{c}(1,-2,0)$ en $\vec{d}(-5,1,4)$

De hoek $\alpha$ tussen $\vec{c}(1,-2,0)$ en $\vec{d}(-5,1,4)$ vinden we uit

$$\cos\alpha = \frac{-5-2+0}{\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{25+1+16}} = \frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{42}},\ \text{zodat } \alpha = 118°53'4''.$$

**Opdracht 37 bladzijde 166**

Gegeven de drie punten $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ en $R(-3,2,1)$ in de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel. De vector $\overrightarrow{PQ}$ is de vector van het punt $P$ naar het punt $Q$. De vector $\overrightarrow{PR}$ is de vector van het punt $P$ naar het punt $R$.

Noem $\alpha$ de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{PR}$. Welke uitspraak is dan geldig?

**A** $\cos\alpha \leqslant 0{,}2$

**B** $0{,}2 < \cos\alpha \leqslant 0{,}4$

**C** $0{,}4 < \cos\alpha \leqslant 0{,}6$

**D** $0{,}6 < \cos\alpha \leqslant 0{,}8$

**E** $0{,}8 < \cos\alpha$

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur 2014)

Aangezien P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0) en R(–3, 2, 1) is $\overrightarrow{PQ}(-1,2,0)$ en $\overrightarrow{PR}(-4,2,1)$. Voor de hoek $\alpha$ tussen $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{PR}$ geldt: $\cos\alpha = \dfrac{4+4+0}{\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{16+4+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{8}{\sqrt{105}}$,

zodat $0{,}6 < \cos\alpha \leqslant 0{,}8$.

Antwoord D is correct.

**Opdracht 38 bladzijde 166**

Bereken telkens de hoeken van de driehoek $ABC$.

**1** $A(1,2,3)$, $B(1,1,-2)$, $C(1,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}(0,-1,-5)$ en $\overrightarrow{AC}(0,-1,-4)$ waaruit $\cos\hat{A} = \dfrac{21}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}}$ zodat $\hat{A} = 2°43'35''$.

$\overrightarrow{BC}(0,0,1)$ en $\overrightarrow{BA}(0,1,5)$ waaruit $\cos\hat{B} = \dfrac{5}{1\cdot\sqrt{26}}$ zodat $\hat{B} = 11°18'36''$.

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 165°57'49''$

**2** $A(1,0,2)$, $B(-2,-1,2)$, $C(1,1,1)$

$\overrightarrow{AB}(-3,-1,0)$ en $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$ waaruit $\cos\hat{A} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}$ zodat $\hat{A} = 102°55'15''$.

$\overrightarrow{BC}(3,2,-1)$ en $\overrightarrow{BA}(3,1,0)$ waaruit $\cos\hat{B} = \dfrac{11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}}$ zodat $\hat{B} = 21°37'$.

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 55°27'45''$

**3** $A(1,-2,0)$, $B(-2,0,1)$, $C(3,-2,1)$

$\overrightarrow{AB}(-3,2,1)$ en $\overrightarrow{AC}(2,0,1)$ waaruit $\cos\hat{A} = \dfrac{-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}$ zodat $\hat{A} = 126°41'57''$.

$\overrightarrow{BC}(5,-2,0)$ en $\overrightarrow{BA}(3,-2,-1)$ waaruit $\cos\hat{B} = \dfrac{19}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}$ zodat $\hat{B} = 19°26'47''$.

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 33°51'16''$

**Opdracht 39 bladzijde 166**

Bereken de hoek tussen de rechten $l$ en $m$.

**1** $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 3r \\ z = -r \end{cases}$ $\quad m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3s \\ y = -1 - s \\ z = -3 + 2s \end{cases}$

$\vec{d_1}(2,3,-1)$ en $\vec{d_2}(-3,-1,2)$ zijn richtingvectoren van l, respectievelijk m.

De hoek $\alpha$ tussen deze vectoren vinden we als volgt:

$$\cos\alpha = \frac{-11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{11}{14} \Rightarrow \alpha = 141°47'12''.$$

De hoek tussen de rechten l en m is bijgevolg $180° - 141°47'12'' = 38°12'48''$.

**2** $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 6r \\ y = 6r \\ z = 4 - 7r \end{cases}$ $\quad m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2s \\ y = -1 - s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$

$\vec{d_1}(6,6,-7)$ en $\vec{d_2}(2,-1,2)$ zijn richtingvectoren van l, respectievelijk m.

De hoek $\alpha$ tussen deze vectoren vinden we als volgt:

$$\cos\alpha = \frac{-8}{11\cdot 3} = -\frac{8}{33} \Rightarrow \alpha = 104°1'47''.$$

De hoek tussen de rechten l en m is bijgevolg $180° - 104°1'47'' = 75°58'13''$.

**Opdracht 40 bladzijde 167**

Onderzoek of de rechten $a$ en $b$ loodrecht op elkaar staan.

**1** $a \leftrightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{-1}$ $\qquad b \leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$

$\vec{d}_1(2,4,-1)$ en $\vec{d}_2(3,-2,-2)$ zijn richtingvectoren van a, respectievelijk b.

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 6 - 8 + 2 = 0$, zodat $a \perp b$.

**2** $a \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 19 = 0 \\ 2x + 3z - 22 = 0 \end{cases}$ $\qquad b \leftrightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z}{-4}$

$a \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 19 = 0 \\ 2x + 3z - 22 = 0 \end{cases}$ heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 3r \\ y = -\dfrac{19}{3} + 5r \\ z = \dfrac{22}{3} - 2r \end{cases}$, zodat $\vec{d}_1(3,5,-2)$ een richtingsvector is van a. $\vec{d}_2(2,-3,-4)$ is een richtingsvector van b.

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 6 - 15 + 8 = -1 \neq 0$, zodat a niet loodrecht staat op b.

**3** $a \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{-3} \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad b \leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$

$\vec{d}_1(2,-3,0)$ en $\vec{d}_2(3,2,2)$ zijn richtingsvectoren van a, respectievelijk b.

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 6 - 6 + 0 = 0$, zodat $a \perp b$.

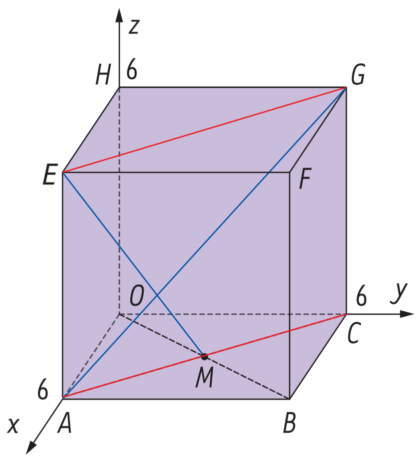
**4** $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad b \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{2} \\ z = -3 \end{cases}$

$\vec{d}_1(0,0,1)$ en $\vec{d}_2(5,2,0)$ zijn richtingsvectoren van a, respectievelijk b.

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0 + 0 + 0 = 0$, zodat $a \perp b$.

**Opdracht 41 bladzijde 167**

De kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ heeft ribbe 6.




$M$ is het snijpunt van $AC$ en $OB$.

**1** Toon aan dat $EM \perp AG$.

In het getekende assenstelsel is E(6, 0, 6), M(3, 0, 3), A(6, 0, 0) en G(0, 6, 6), zodat $\overrightarrow{EM}(-3,3,-6)$ en $\overrightarrow{AG}(-6,6,6)$.

$\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{AG} = 18 + 18 - 36 = 0 \Rightarrow EM \perp AG$.

**2** Zijn $EM$ en $AG$ loodrecht kruisend of loodrecht snijdend? Verklaar.

EM en AG zijn coplanair, want ze liggen beide in het diagonaalvlak ACGE. EM en AG zijn dus loodrecht snijdend.

**Opdracht 42 bladzijde 167**

Bepaal een parametervoorstelling van de gemeenschappelijke loodlijn van de kruisende rechten

$$p \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 2 + r \end{cases} \text{ en } q \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = -1 + s \end{cases}.$$

Als K(r, 1, 2 + r) en L(s, –s, –1 + s) de voetpunten zijn van de gemeenschappelijke loodlijn, dan moet KL ⊥ p en KL ⊥ q. Hiervoor moet $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{p} = 0$ en $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{q} = 0$.

Omdat (s – r, –s – 1, –3 + s –r), (1,0,1) en (1,–1,1) richtingsgetallen zijn van KL, respectievelijk p en q levert dit de volgende twee voorwaarden op in r en s:

$$\begin{cases} (s-r)\cdot 1 + (-s-1)\cdot 0 + (-3+s-r)\cdot 1 = 0 \\ (s-r)\cdot 1 + (-s-1)\cdot(-1) + (-3+s-r)\cdot 1 = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} -2r + 2s = 3 \\ -2r + 3s = 2 \end{cases}.$$

Dit stelsel heeft als oplossing $r = -\frac{5}{2}$ en $s = -1$.

We vinden als voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn: $K\left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ en L(–1,1,–2),

zodat $\overrightarrow{KL}\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$ of $\vec{d}(1,0,-1)$ een richtingsvector is van KL.

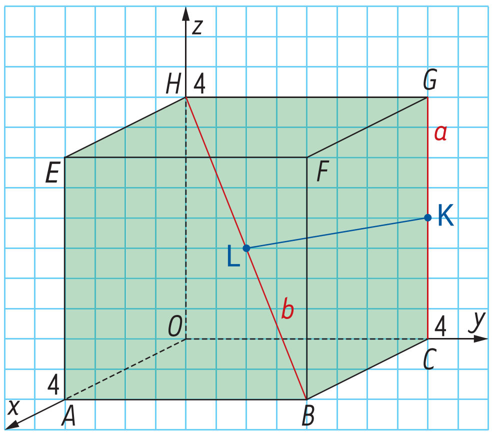
Bijgevolg: $KL \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

**Opdracht 43 bladzijde 168**

De rechten *a* en *b* gaan door de hoekpunten van de kubus met ribbe 4.

Bepaal telkens de voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn van *a* en *b* en teken ze.

**1** $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = r \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 4 - s \end{cases}$




Als K(0,4, r) en L(s, s, 4 – s) de voetpunten zijn van de gemeenschappelijke loodlijn, dan moet KL ⊥ a en KL ⊥ b.

Hiervoor moet $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{d_1} = 0$ en $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{d_2} = 0$, met $\vec{d_1}(0,0,1)$ en $\vec{d_2}(1,1,-1)$ richtingsvectoren van a, respectievelijk b.

Met $\overrightarrow{KL}$(s, s – 4, 4 – s – r) levert dit de volgende twee voorwaarden op in r en s:

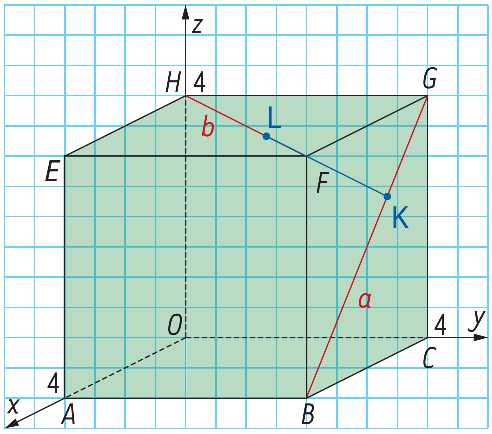
$$\begin{cases} 4 - s - r = 0 \\ s + s - 4 - 4 + s + r = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} r + s = 4 \\ r + 3s = 8 \end{cases}.$$

Dit stelsel heeft als oplossing r = s = 2.

We vinden als voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn: K(0,4,2) en L(2,2,2).

Om de gemeenschappelijke loodlijn nauwkeurig te tekenen, maken we gebruik van de vaststelling dat K het midden is van [GC] en L het midden is van [HB].

**2** $a \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 4 \\ z = 4 - r \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 4 \end{cases}$




Als K(r, 4, 4 – r) en L(s, s, 4) de voetpunten zijn van de gemeenschappelijke loodlijn, dan moet $KL \perp a$ en $KL \perp b$.

Hiervoor moet $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{d_1} = 0$ en $\overrightarrow{KL} \cdot \vec{d_2} = 0$, met $\vec{d_1}(1,0,-1)$ en $\vec{d_2}(1,1,0)$ richtingsvectoren van a, respectievelijk b.

Met $\overrightarrow{KL}(s - r, s - 4, r)$ levert dit de volgende twee voorwaarden op in r en s:

$$\begin{cases} s - r - r = 0 \\ s - r + s - 4 = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} -2r + s = 0 \\ -r + 2s = 4 \end{cases}.$$

Dit stelsel heeft als oplossing $r = \frac{4}{3}$ en $s = \frac{8}{3}$.

We vinden als voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn: $K\left(\frac{4}{3}, 4, \frac{8}{3}\right)$ en $L\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 4\right)$.

Om de gemeenschappelijke loodlijn nauwkeurig te tekenen, kunnen we als volgt te werk gaan.

– De parametervoorstelling van a = GB is:

$$a \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 4 \\ z = 4 - r \end{cases}.$$

Voor G(0, 4, 4) is r = 0, voor B(4, 4, 0) is r = 4. Voor het punt K vinden we $r = \frac{4}{3}$.

Bijgevolg is $|GK| = \frac{1}{3}|GB|$.

– De parametervoorstelling van b = HF is:

$$b \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 4 \end{cases}.$$

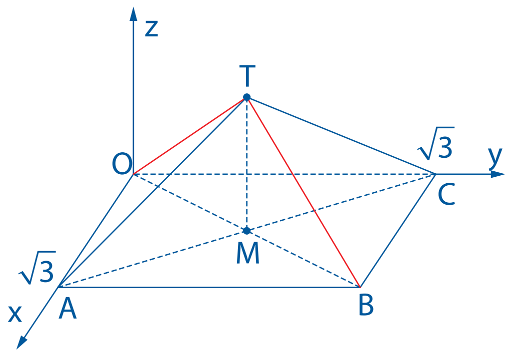
Voor H(0, 0, 4) is s = 0, voor F(4, 4, 4) is s = 4. Voor het punt L vinden we $s = \frac{8}{3}$.

Bijgevolg is $|HL| = \frac{2}{3}|HF|$.

**Opdracht 44 bladzijde 168**

Een piramide heeft als grondvlak een vierkant met zijde $\sqrt{3}$ en vier opstaande ribben met lengte $\sqrt{2}$.

Twee opstaande ribben die niet in eenzelfde zijvlak liggen vormen een stompe hoek. Bereken deze hoek.




We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur waarbij $|TA| = |TB| = |TC| = |TO| = \sqrt{2}$.
We berekenen de stompe hoek tussen de ribben TO en TB. Dit is de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\overrightarrow{TO}$ en $\overrightarrow{TB}$.

In dit assenstelsel geldt: co(O) = (0, 0, 0),

$\text{co}(B) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\right)$, $\text{co}(M) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,

zodat $\text{co}(T) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, k\right)$.

We vinden k als volgt:

$$|TO| = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow |TO|^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + k^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow k^2 = 2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ of } k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

In het gegeven assenstelsel geldt dat $\text{co}(T) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, zodat $\overrightarrow{TO}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

en $\overrightarrow{TB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De hoek $\alpha$ tussen deze vectoren vinden we als volgt:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{4}}{\sqrt{\frac{8}{4}} \cdot \sqrt{\frac{8}{4}}} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 120°.$$

De gevraagde stompe hoek tussen twee opstaande ribben die niet in eenzelfde zijvlak liggen, is dus 120°.

**Opdracht 45 bladzijde 168**

Gegeven de punten $A(2,1,0)$ en $B(-7,1,-11)$ en de rechte $a \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

Bepaal de punten $P$ van $a$ waarvoor de driehoek $PAB$ rechthoekig is in $P$.

Een punt P van $a \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ heeft als coördinaat $(2r, 1 + 3r, r)$.

Met A(2,1,0) en B(–7,1,–11) is $\overrightarrow{PA}(2 - 2r, -3r, -r)$ en $\overrightarrow{PB}(-7 - 2r, -3r, -11 - r)$.

$$PA \perp PB$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-2r)\cdot(-7-2r) + (3r)^2 - r\cdot(-11-r) = 0$$
$$\Leftrightarrow 14r^2 + 21r - 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow r = -2 \text{ of } r = \frac{1}{2}$$

Er zijn twee oplossingen: $P_1(-4,-5,-2)$ en $P_2\left(1,\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

**Opdracht 46 bladzijde 169**

Gegeven de twee punten $P(0,0,4)$ en $R(-1,2,1)$ en de rechte $l \leftrightarrow \{x = y + 1,\ x + y + z = 3\}$ in de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel.

Zoek een punt $S$ op de rechte $l$ zodanig dat de rechte $SP$ loodrecht staat op de rechte $SR$. Noem $x_S$ de $x$-coördinaat van het punt $S$.

Welke van volgende uitspraken is geldig?

**A** Er bestaat geen dergelijk punt.

**B** $x_S \leqslant -\frac{1}{2}$

**C** $-\frac{1}{2} < x_S < 0$

**D** $0 \leqslant x_S < \frac{1}{2}$

**E** $\frac{1}{2} \leqslant x_S$

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur 2014)

$\text{co}(S) = \left(x_S, x_S - 1, 3 - x_S - (x_S - 1)\right) = \left(x_S, x_S - 1, 4 - 2x_S\right)$, zodat $\text{co}(\overrightarrow{SP}) = \left(-x_S, -x_S + 1, 2x_S\right)$ en $\text{co}(\overrightarrow{SR}) = \left(-1 - x_S, 3 - x_S, -3 + 2x_S\right)$.

Er geldt:

$$SP \perp SR$$
$$\Leftrightarrow -x_S\cdot\left(-1 - x_S\right) + \left(-x_S + 1\right)\cdot\left(3 - x_S\right) + 2x_S\cdot\left(-3 + 2x_S\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6{x_S}^2 - 9x_S + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_S = \frac{1}{2} \text{ of } x_S = 1$$

Uitspraak E is correct.

**Opdracht 47 bladzijde 169**

De punten $A(16,20,24)$, $B(14,4,8)$, $C(-8,0,4)$ en $D(-6,16,20)$ vormen de hoekpunten van een vierhoek.

Welke soort vierhoek is $ABCD$?

We berekenen eerst de zijden van de vierhoek ABCD: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = \sqrt{516}$.

$\overrightarrow{AB}(-2,-16,-16)$ en $\overrightarrow{BC}(-22,-4,-4)$ staan niet loodrecht op elkaar, want $44 + 64 + 64 \neq 0$, zodat ABCD geen vierkant is.

Besluit: ABCD is een ruit.

**Opdracht 48 bladzijde 169**

Een viervlak $ABCD$ heeft de eigenschap dat $AD \perp BC$.

Bewijs dat $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

methode 1:

Aangezien $AD \perp BC$, is $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (1)

Nu is

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= -\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}_{=0\ (1)} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\
&= -\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}
\end{aligned}
$$

methode 2:

Stel co(A) $=(x_1,y_1,z_1)$, co(B) $=(x_2,y_2,z_2)$, co(C) $=(x_3,y_3,z_3)$ en co(D) $=(x_4,y_4,z_4)$, dan is

$\text{co}(\overrightarrow{AB})=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\text{co}(\overrightarrow{CD})=(x_4-x_3,y_4-y_3,z_4-z_3)$,

$\text{co}(\overrightarrow{AC})=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$ en $\text{co}(\overrightarrow{BD})=(x_4-x_2,y_4-y_2,z_4-z_2)$.

$AD \perp BC$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Rightarrow (x_4-x_1)\cdot(x_3-x_2)+(y_4-y_1)\cdot(y_3-y_2)+(z_4-z_1)\cdot(z_3-z_2)=0$

$\Rightarrow x_3\cdot x_4-x_2\cdot x_4-x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_2+y_3\cdot y_4-y_2\cdot y_4-y_1\cdot y_3+y_1\cdot y_2+z_3\cdot z_4-z_2\cdot z_4-z_1\cdot z_3+z_1\cdot z_2=0$

$\Rightarrow x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4+y_1\cdot y_2+y_3\cdot y_4+z_1\cdot z_2+z_3\cdot z_4= x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_4+y_1\cdot y_3+y_2\cdot y_4+z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_4$

$\Rightarrow x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4-x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4+y_1\cdot y_2+y_3\cdot y_4-y_2\cdot y_3-y_1\cdot y_4+z_1\cdot z_2+z_3\cdot z_4-z_2\cdot z_3-z_1\cdot z_4$

$\quad = x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_4-x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4+y_1\cdot y_3+y_2\cdot y_4-y_2\cdot y_3-y_1\cdot y_4+z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_4-z_2\cdot z_3-z_1\cdot z_4$

$\Rightarrow (x_3-x_1)\cdot(x_4-x_2)+(y_3-y_1)\cdot(y_4-y_2)+(z_3-z_1)\cdot(z_4-z_2)$

$\quad =(x_2-x_1)\cdot(x_4-x_3)+(y_2-y_1)\cdot(y_4-y_3)+(z_2-z_1)\cdot(z_4-z_3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

**Opdracht 49 bladzijde 169**

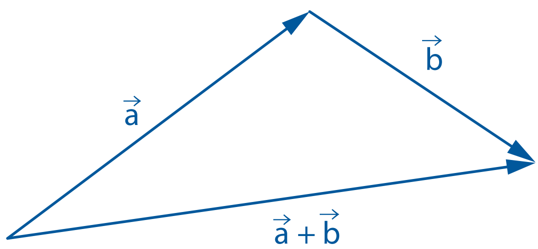
Bewijs als $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$ en $r, s \in \mathbb{R}_0$:

**1** $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=\|\vec{a}\|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$

Hieruit volgt: $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$.

$\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ en $\|\vec{a}+\vec{b}\|$ zijn te beschouwen als de zijden van een driehoek gevormd door $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a}+\vec{b}$. Bij loodrechte stand van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt de stelling van Pythagoras, hier uitgedrukt met vectoren.




**2** $\vec{a}\perp\vec{b}$ en $\vec{a}\perp\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\perp(r\vec{b}+s\vec{c})$

Met de eigenschappen van het scalair product kunnen we schrijven:

$\vec{a}\perp\vec{b}$ en $\vec{a}\perp\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ en $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow r\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$ en $s\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot r\vec{b}+\vec{a}\cdot s\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot(r\vec{b}+s\vec{c})=0$

$\Rightarrow \vec{a}\perp(r\vec{b}+s\vec{c})$

We zeggen: als een vector loodrecht staat op twee vectoren, dan staat hij loodrecht op elke lineaire combinatie van die vectoren.

**Opdracht 50 bladzijde 170**

Onderzoek telkens of de rechte $a$ loodrecht staat op het vlak $\alpha$.

**1** $a \leftrightarrow \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ $\qquad \alpha \leftrightarrow 3x + 2y - z + 3 = 0$

a staat loodrecht op $\alpha$ want de richtingsvector $\vec{d}(3,2,-1)$ is normaalvector van $\alpha$.

**2** $a \leftrightarrow \begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ $\qquad \alpha \leftrightarrow 5x + y + z - 2 = 0$

$\vec{n}(5,1,1)$ is normaalvector van $\alpha \leftrightarrow 5x + y + z - 2 = 0$.

Om een richtingsvector van $a \leftrightarrow \begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ te bepalen, zoeken we een parametervoorstelling van deze rechte:

$a \leftrightarrow \begin{cases} x = -5z + 4 \\ 2y = x + 3z \end{cases}$ of $a \leftrightarrow \begin{cases} x = -5z + 4 \\ 2y = -5z + 4 + 3z = 4 - 2z \end{cases}$ zodat $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 5r \\ y = 2 - r \\ z = r \end{cases}$.

$\vec{d}(-5,-1,1)$ is richtingsvector van a. Dit is geen veelvoud van $\vec{n}(5,1,1)$, zodat a niet loodrecht staat op $\alpha$.

**3** $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = 2 + r \\ z = -1 - 3r \end{cases}$ $\qquad \alpha \leftrightarrow 4x + 2y - 6z + 1 = 0$

$\vec{d}(2,1,-3)$ is richtingsvector van a en $\vec{n}(4,2,-6)$ is normaalvector van $\alpha$.

Aangezien $\vec{n} = 2 \cdot \vec{d}$ staat a loodrecht op $\alpha$.

**Opdracht 51 bladzijde 170**

Bepaal telkens een parametervoorstelling van de loodlijn $l$ uit het punt $P$ op het vlak $\alpha$.

**1** $P(1,-2,3)$ $\qquad \alpha \leftrightarrow x - 2y + z - 5 = 0$

De loodlijn l uit $P(1,-2,3)$ op $\alpha \leftrightarrow x - 2y + z - 5 = 0$ heeft als richtingsvector de normaalvector $\vec{n}(1,-2,1)$ van $\alpha$.

We vinden $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

**2** $P(2,1,-1)$ $\qquad \alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 5z - 7 = 0$

De loodlijn l uit $P(2,1,-1)$ op $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 5z - 7 = 0$ heeft als parametervoorstelling

$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

**3** $P(1,0,5)$ $\qquad \alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = r + 5s \\ y = 2r \\ z = 3r + s \end{cases}$

$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = r + 5s \\ y = 2r \\ z = 3r + s \end{cases}$ heeft als cartesiaanse vergelijking $\alpha \leftrightarrow x + 7y - 5z = 0$.

De loodlijn l uit P(1,0,5) op $\alpha$ heeft als parametervoorstelling

$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 7t \\ z = 5 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

**Opdracht 52 bladzijde 170**

Bepaal de coördinaat van de loodrechte projectie $P'$ van $P(1,-5,1)$ op het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + 2z - 2 = 0$.

De loodrechte projectie P' van P(1,–5,1) op $\alpha \leftrightarrow x - y + 2z - 2 = 0$ is het snijpunt van $\alpha$ met de loodlijn $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = -5 - r \\ z = 1 + 2r \end{cases}$ uit P op $\alpha$.

Dit snijpunt vinden we uit:

$(1 + r) - (-5 - r) + 2 \cdot (1 + 2r) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 6r = -6$

$\Leftrightarrow r = -1$

Het gezochte punt is P'(0,–4,–1).

**Opdracht 53 bladzijde 170**

Bepaal telkens een cartesiaanse vergelijking van het loodvlak $\pi$ uit $P$ op de rechte $a$.

**1** $P(1,0,5)$ $\qquad a \leftrightarrow \begin{cases} x = 3r \\ y = 0 \\ z = 4r \end{cases}$

Het loodvlak $\pi$ uit P op a heeft als vergelijking $3(x - 1) + 4(z - 5) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 3x + 4z - 23 = 0$.

**2** $P(1,2,-1)$ $\qquad a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -1 + r \\ z = 1 + r \end{cases}$

$\pi \leftrightarrow 2(x - 1) + (y - 2) + (z + 1) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0$

**3** $P(1,3,-2)$ $\qquad a \leftrightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{4}$

$\pi \leftrightarrow 2(x - 1) - 3(y - 3) + 4(z + 2) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 2x - 3y + 4z + 15 = 0$

**Opdracht 54 bladzijde 170**

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak $\mu$ van $[AB]$ als $A(2,1,4)$ en $B(0,1,2)$.

Het middelloodvlak $\mu$ van [AB] gaat door het midden M(1,1,3) van [AB] en heeft als normaalvector $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ zodat ook $\vec{n}(1,0,1)$ een normaalvector van $\mu$ is.

$\mu \leftrightarrow 1(x-1)+1(z-3)=0$ of $\mu \leftrightarrow x+z-4=0$ .

**Opdracht 55 bladzijde 171**

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\pi$ dat de punten $A$ en $B$ bevat en loodrecht staat op $\alpha$.

**1** $A(1,2,4)$ $\quad B(2,1,3)$ $\quad \alpha \leftrightarrow 2x-y+7=0$

Het vlak $\pi$ heeft als richtingsvectoren $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ en $\vec{d}(2,-1,0)$ (= normaalvector van $\alpha$).

Met steunpunt A(1,2,4) vinden we de parametervoorstelling $\begin{cases} x=1+r+2s \\ y=2-r-s \\ z=4-r \end{cases}$ .

Uit de derde vergelijking vinden we: $r=4-z$, uit de tweede: $s=2-r-y=-2+z-y$.

Invullen in de eerste vergelijking: $x=1+4-z-4+2z-2y$ of $\pi \leftrightarrow x+2y-z-1=0$.

**2** $A(2,2,1)$ $\quad B(1,1,-1)$ $\quad \alpha \leftrightarrow x+2y-z-2=0$

$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-2)$ en $\vec{d}(1,2,-1)$ zijn richtingsvectoren van $\pi$.

Een parametervoorstelling is $\begin{cases} x=2-r+s \\ y=2-r+2s. \\ z=1-2r-s \end{cases}$

Na eliminatie van r en s vinden we: $\pi \leftrightarrow -5x+3y+z+3=0$.

**Opdracht 56 bladzijde 171**

Bepaal de coördinaat van het punt $A$ dat op de rechte $a \leftrightarrow \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{3}$ ligt en even ver van de punten $P(-3,3,-4)$ en $Q(3,1,-2)$ verwijderd is.

Alle punten even ver van P(–3,3,–4) en Q(3,1,–2) liggen in het middelloodvlak $\mu$ van [PQ].

Aangezien $\overrightarrow{PQ}(6,-2,2)$ en M(0,2,–3) het midden is van [PQ], is

$\mu \leftrightarrow 3x-(y-2)+(z+3)=0$ of $\mu \leftrightarrow 3x-y+z+5=0$.

Het gevraagde punt is het snijpunt van $\mu$ en $a \leftrightarrow \begin{cases} x=-3+2r \\ y=2-r \\ z=-4+3r \end{cases}$ .

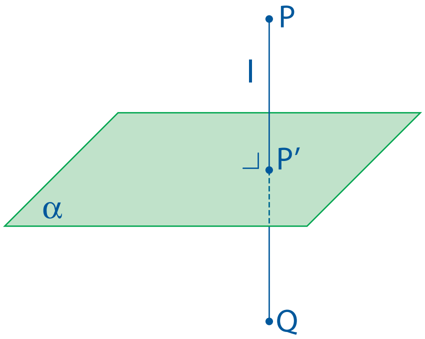
Uit $3(-3+2r)-(2-r)+(-4+3r)+5=0 \Leftrightarrow 10r=10 \Leftrightarrow r=1$ volgt dat A(–1,1,–1) het gevraagde punt is.

**Opdracht 57 bladzijde 171**

**1** Bepaal de coördinaat van de loodrechte projectie $P'$ van $P(4,0,5)$ op $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 4z - 57 = 0$.

De loodrechte projectie P' van P(4,0,5) op $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 4z - 57 = 0$ is het snijpunt van $\alpha$

met de loodlijn $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2r \\ y = -3r \\ z = 5 + 4r \end{cases}$ uit P op $\alpha$.




Dit snijpunt vinden we uit:

$2(4 + 2r) - 3(-3r) + 4(5 + 4r) - 57 = 0$

$\Leftrightarrow 29r = 29$

$\Leftrightarrow r = 1$

Het gezochte punt is P'(6,–3,9).

**2** Bepaal het spiegelbeeld $Q$ van $P$ om $\alpha$.

Stel de coördinaat van Q voor als $(x_1, y_1, z_1)$.

Aangezien P' het midden is van [PQ] geldt:

$$\begin{cases} 6 = \dfrac{4 + x_1}{2} \\ -3 = \dfrac{0 + y_1}{2} \\ 9 = \dfrac{5 + z_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = -6 \\ z_1 = 13 \end{cases}$$

Het gezochte punt is Q(8,–6,13).

**Opdracht 58 bladzijde 171**

Het vlak $\mu \leftrightarrow x - y - 3z + 20 = 0$ is het middelloodvlak van $[PQ]$ met $P(1,4,2)$.

Bepaal de coördinaat van $Q$.

<u>1e methode:</u>

Als $co(Q) = (x_1, y_1, z_1)$, dan zal $\overrightarrow{PQ}(x_1 - 1, y_1 - 4, z_1 - 2)$.

$\vec{n}(1,-1,-3)$ is normaalvector van $\mu$.

Er geldt:

$$\overrightarrow{PQ} = k \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = k \cdot 1 \\ y_1 - 4 = k \cdot (-1) \\ z_1 - 2 = k \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + k \\ y_1 = 4 - k \\ z_1 = 2 - 3k \end{cases}$$ , zodat $co(Q) = (1 + k, 4 - k, 2 - 3k)$

Voor het midden M van [PQ] geldt: $co(M) = \left(\dfrac{1+1+k}{2}, \dfrac{4+4-k}{2}, \dfrac{2+2-3k}{2}\right) = \left(1 + \dfrac{k}{2}, 4 - \dfrac{k}{2}, 2 - \dfrac{3k}{2}\right)$

$$M \in \mu \Leftrightarrow \left(1 + \frac{k}{2}\right) - \left(4 - \frac{k}{2}\right) - 3\left(2 - \frac{3k}{2}\right) + 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{11k}{2} = -11 \Leftrightarrow k = -2$$

Bijgevolg: $co(Q) = (1 - 2, 4 + 2, 2 + 3 \cdot 2) = (-1,6,8)$.

2e methode:

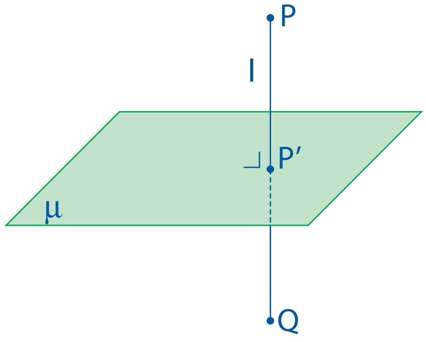
De loodlijn l uit P op μ heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 1 + r \\ y = 4 - r \\ z = 2 - 3r \end{cases}$.

Het snijpunt P′ van l met μ vinden we uit

$1 + r - 4 + r - 6 + 9r + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 11r = -11$

$\Leftrightarrow r = -1$




Bijgevolg is P′(0,5,5).

Aangezien $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'Q}$ en Q op l ligt, zal r = –2 horen bij het punt Q aangezien r = 0 hoort bij P en r = –1 bij P′.

Bijgevolg is Q(–1,6,8)

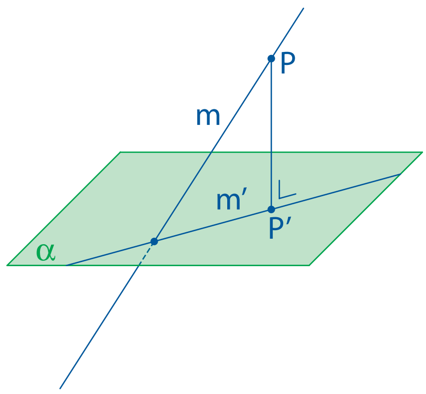
**Opdracht 59 bladzijde 171**

Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de loodrechte projectie *m'* van de rechte

$m \leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{5}$ op het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + z + 4 = 0$.

De loodrechte projectie m′ van m op α is de snijlijn van α met het vlak gevormd door de snijdende rechten m en PP′ waarbij P′ de loodrechte projectie is van een punt P van m op α.

Dit laatste vlak gaat door P(1,–1,0) en heeft als richtingsvectoren $\overrightarrow{d_1}(2,3,5)$ (van m) en $\overrightarrow{d_2}(1,-1,1)$ (normaalvector van α).




Een parametervoorstelling van dit vlak is $\begin{cases} x = 1 + 2r + s \\ y = -1 + 3r - s \\ z = 5r + s \end{cases}$.

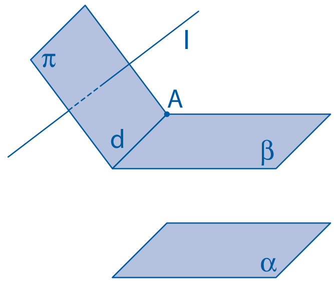
Na eliminatie van de parameters vinden we als cartesiaanse vergelijking 8x + 3y –5z –5 = 0.

Besluit: $m' \leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ 8x + 3y - 5z - 5 = 0 \end{cases}$.

**Opdracht 60 bladzijde 171**

Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte $d$ die door het punt $A(1,2,0)$ gaat, evenwijdig is met het vlak $\alpha \leftrightarrow y + 3z + 2 = 0$ en loodrecht staat op de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

De rechte d is de snijlijn van het vlak $\beta$ // $\alpha$ door A en het loodvlak $\pi$ uit A op $l \leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$.




- Aangezien $\beta$ // $\alpha$ zal $\beta \leftrightarrow y + 3z + k = 0$.

  Omdat $A(1, 2, 0) \in \beta$, vinden we: $2 + 3 \,.\, 0 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -2$.

  Bijgevolg: $\beta \leftrightarrow y + 3z - 2 = 0$.

- Een stel richtingsgetallen van $l \leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$ is af te lezen in de parameter-voorstelling: $\begin{cases} x = -1 + 4r \\ y = r \\ z = 2 + r \end{cases}$.

  Hieruit volgt dat $\vec{n}(4,1,1)$ een normaalvector is van $\pi$, zodat

  $\pi \leftrightarrow 4(x - 1) + 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 4x + y + z - 6 = 0$

- Besluit: $d \leftrightarrow \begin{cases} y + 3z - 2 = 0 \\ 4x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$.

**Opdracht 61 bladzijde 171**

**1** Bepaal een parametervoorstelling van het vlak $\pi$ dat de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = r \\ z = 2 + 3r \end{cases}$ omvat en loodrecht staat op het vlak $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s + t \\ z = 1 + 2s - 2t \end{cases}$.

- Eerst bepalen we een cartesiaanse vergelijking van $\alpha$.

  Uit de eerste vergelijking volgt: $s = x - 1$, uit de tweede vergelijking volgt: $t = x + y - 1$.

  Invullen in de derde vergelijking geeft: $z = 1 + 2x - 2 - 2x - 2y + 2$ zodat $\alpha \leftrightarrow 2y + z - 1 = 0$.

- Het vlak $\pi$ dat de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = r \\ z = 2 + 3r \end{cases}$ omvat, gaat door $P(1,0,2)$ en heeft als richtingsvector $\vec{d_1}(0,1,3)$. Bovendien staat $\pi$ loodrecht op $\alpha$ zodat $\vec{d_2}(0,2,1)$ een tweede richtingsvector van $\pi$ is.

- Besluit: $\pi \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t + 2u \\ z = 2 + 3t + u \end{cases}$ $(t, u \in \mathbb{R})$.

**2** Bepaal ook cartesiaanse vergelijkingen van $\pi$ en $\alpha$ en controleer de voorwaarde voor loodrechte stand.

$\pi \leftrightarrow x - 1 = 0$ en $\alpha \leftrightarrow 2y + z - 1 = 0$ .

$\pi \perp \alpha$ want $1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$.

**Opdracht 62 bladzijde 171**

Bepaal een vergelijking van het vlak $\pi$ dat de rechte $a \leftrightarrow \dfrac{x-1}{2} = y - 3 = \dfrac{z+2}{5}$ omvat en loodrecht staat op het vlak $\alpha \leftrightarrow 7x - 3y + 5z + 2 = 0$.

methode 1:

We stellen eerst een parametervoorstelling van $\pi$ op met als richtingsvectoren een normaalvector van $\alpha$ en een richtingsvector van a, als steunpunt nemen we het punt A(1,3,–2) op a.

We vinden: $\pi \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 7r + 2s \\ y = 3 - 3r + s \\ z = -2 + 5r + 5s \end{cases}$.

Na eliminatie van r en s vinden we: $\pi \leftrightarrow 20x + 25y - 13z - 121 = 0$.

methode 2:

$a \leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 5y - z - 17 = 0 \end{cases}$

Een vlakkenwaaier door a heeft als vergelijking $r \cdot (x - 2y + 5) + s \cdot (5y - z - 17) = 0$

of $rx + (5s - 2r)y - sz + 5r - 17s = 0$.

De voorwaarde voor loodrechte stand met $\alpha \leftrightarrow 7x - 3y + 5z + 2 = 0$ wordt dan

$7r - 3(5s - 2r) + 5(-s) = 0$

$\Leftrightarrow 13r = 20s$

Kiezen we bv. $r = 20$, dan is $s = 13$.

$\pi \leftrightarrow 20 \cdot (x - 2y + 5) + 13 \cdot (5y - z - 17) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 20x + 25y - 13z - 121 = 0$.

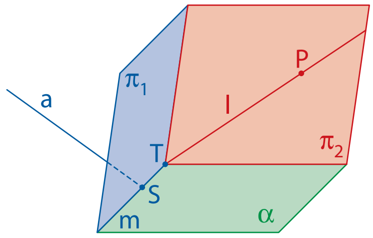
**Opdracht 63 bladzijde 172**

Gegeven de rechte $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - r \\ y = 1 \\ z = r \end{cases}$, het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y - z = 5$ en het punt $P(1,0,0)$.

De rechte $l$ gaat door $P$ en de rechte $m$, die $l$ en $a$ loodrecht snijdt, ligt in $\alpha$.

Bepaal parametervergelijkingen van de rechten $l$ en $m$.

– De rechte m is de snijlijn van het vlak $\alpha$ met het loodvlak $\pi_1$ op a door het snijpunt S van a en $\alpha$.




Het snijpunt S van a en $\alpha$ vinden we als volgt:

$(2 - r) - 1 - r = 5 \Leftrightarrow -2r = 4 \Leftrightarrow r = -2$

zodat S(4,1,–2).

Bijgevolg: $\pi_1 \leftrightarrow -(x - 4) + (z + 2) = 0$ of $\pi_1 \leftrightarrow -x + z + 6 = 0$.

Hieruit volgt een stel cartesiaanse vergelijkingen van m:

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 5 \\ -x + z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Een parametervoorstelling van m is dan:

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

– l = PT met T het snijpunt van m met het loodvlak $\pi_2$ op m door P.

$\pi_2 \leftrightarrow (x - 1) + (z - 0) = 0$ of $\pi_2 \leftrightarrow x + z = 1$

Het snijpunt T van m en $\pi_2$ vinden we als volgt:

$$(6 + s) + s = 1 \Leftrightarrow 2s = -5 \Leftrightarrow s = -\frac{5}{2}$$

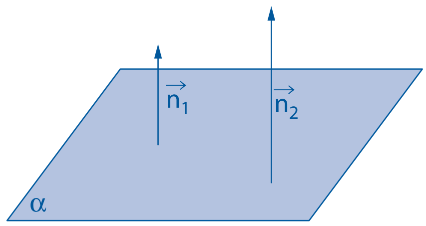
zodat $T\left(\frac{7}{2},1,-\frac{5}{2}\right)$.

$\overrightarrow{PT}\left(\frac{5}{2},1,-\frac{5}{2}\right)$ of (5,2,–5) is een stel richtingsgetallen van l, zodat

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2t \\ z = -5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

### Opdracht 64 bladzijde 172

Bewijs dat twee normaalvectoren van hetzelfde vlak evenwijdig zijn.




Gegeven: twee normaalvectoren $\vec{n}_1$ en $\vec{n}_2$ van een vlak $\alpha$

Te bewijzen: $\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2$

Bewijs:

Uit $\vec{n}_1 \perp \alpha$ en $\vec{n}_2 \perp \alpha$ volgt: $\vec{n}_1 \cdot \vec{v} = 0$ en $\vec{n}_2 \cdot \vec{v} = 0$ voor elke richtingsvector $\vec{v}$ van $\alpha$.

Daaruit volgt: $r(\vec{n}_1 \cdot \vec{v}) + s(\vec{n}_2 \cdot \vec{v}) = 0$ of $(r\vec{n}_1 + s\vec{n}_2) \cdot \vec{v} = 0$, zodat $(r\vec{n}_1 + s\vec{n}_2) \perp \vec{v}$ voor elke richtingsvector $\vec{v}$ van $\alpha$.

Veronderstel nu dat $\vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$ (*). De vectoren $r\vec{n}_1 + s\vec{n}_2$, met r en s reële getallen, bepalen dan een vlak $\beta$ dat een evenwijdige met $\vec{n}_1$ (of met $\vec{n}_2$) omvat. Vermits $\vec{n}_1$ een normaalvector is van $\alpha$, is $\vec{n}_1$ niet evenwijdig met $\alpha$, zodat $\beta$ en $\alpha$ snijdend zijn. Bovendien staat elke richtingsvector van $\alpha$ loodrecht op elke richtingsvector van $\beta$. Dus een richtingsvector van de snijlijn van $\alpha$ en $\beta$ staat loodrecht op zichzelf, wat onmogelijk is.

De veronderstelling (*) was dus fout zodat $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ waaruit volgt $\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2$.

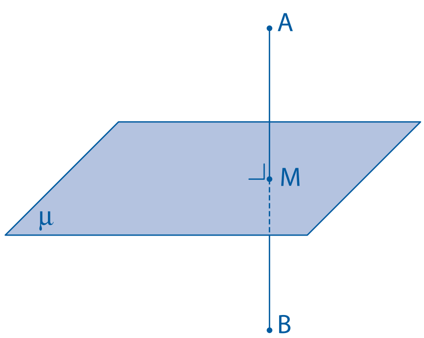
### Opdracht 65 bladzijde 172

**1** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak $\mu$ van $[AB]$ met $A(x_1, y_1, z_1)$ en $B(x_2, y_2, z_2)$.

Het middelloodvlak $\mu$ van [AB] met $A(x_1, y_1, z_1)$ en $B(x_2, y_2, z_2)$ gaat door $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ en heeft als normaalvector $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, zodat

$$\mu \leftrightarrow (x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1+y_2}{2}\right) + (z_2 - z_1)\left(z - \frac{z_1+z_2}{2}\right) = 0$$

of $\mu \leftrightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0.$



**2** Toon aan dat $\mu$ de meetkundige plaats is van de punten even ver van *A* als van *B*.

P(x, y, z) ligt even ver van A als van B

$\Leftrightarrow |PA| = |PB|$

$\Leftrightarrow |PA|^2 = |PB|^2$

$\Leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 + z^2 - 2z_1z + z_1^2$

$= x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 + z^2 - 2z_2z + z_2^2$

$\Leftrightarrow -2x_1x + x_1^2 - 2y_1y + y_1^2 - 2z_1z + z_1^2 = -2x_2x + x_2^2 - 2y_2y + y_2^2 - 2z_2z + z_2^2$

$\Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0$

$\Leftrightarrow P(x, y, z) \in \mu$

**Opdracht 66 bladzijde 173**

Bereken de hoek tussen de vlakken $\alpha$ en $\beta$.

**1** $\alpha \leftrightarrow x - y - 3 = 0$ $\qquad$ $\beta \leftrightarrow x - z + 1 = 0$

De hoek tussen de vlakken $\alpha$ en $\beta$ vinden we uit de hoek $\gamma$ tussen de normaalvectoren $\vec{n_1}(1,-1,0)$ en $\vec{n_2}(1,0,-1)$ van $\alpha$ en $\beta$:

$$\cos\gamma = \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60°.$$

De gevraagde hoek tussen $\alpha$ en $\beta$ is dus 60°.

**2** $\alpha \leftrightarrow 2x - 4y - 7z + 1 = 0$ $\qquad$ $\beta \leftrightarrow x - 3y + z + 4 = 0$

De hoek tussen de vlakken $\alpha$ en $\beta$ vinden we uit de hoek $\gamma$ tussen de normaalvectoren $\vec{n_1}(2,-4,-7)$ en $\vec{n_2}(1,-3,1)$ van $\alpha$ en $\beta$:

$$\cos\gamma = \frac{2\cdot 1 - 4\cdot(-3) - 7\cdot 1}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{11}} \Rightarrow \gamma = 75°16'50''.$$

De gevraagde hoek tussen $\alpha$ en $\beta$ is dus 75°16′50″.

**3** $\alpha \leftrightarrow x + 5z - 4 = 0$ $\qquad$ $\beta \leftrightarrow x - 2y + 3z = 0$

De hoek tussen de vlakken $\alpha$ en $\beta$ vinden we uit de hoek $\gamma$ tussen de normaalvectoren $\vec{n_1}(1,0,5)$ en $\vec{n_2}(1,-2,3)$ van $\alpha$ en $\beta$:

$$\cos\gamma = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 5\cdot 3}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{14}} \Rightarrow \gamma = 33°16''.$$

De gevraagde hoek tussen $\alpha$ en $\beta$ is dus 33°16″.

**Opdracht 67 bladzijde 173**

Bereken de hoek tussen de rechte $m$ en het vlak $\alpha$.

**1** $m \leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ $\alpha \leftrightarrow z = 0$

De scherpe hoek $\gamma'$ tussen de normaalvector $\vec{n}(0,0,1)$ van $\alpha$ en de richtingsvector

$\vec{d}(2,-1,-1)$ van $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = \dfrac{3}{2} - r \\ z = -r \end{cases}$ vinden we via de formule:

$\cos\beta = \dfrac{0+0-1}{1 \cdot \sqrt{6}} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Omdat $\cos\beta < 0$, zal $\beta$ een stompe hoek zijn, waardoor:
$\gamma' = 180° - \beta = 180° - 114°5'41'' = 65°54'19''$.

De gevraagde hoek $\gamma$ tussen de rechte m en het vlak $\alpha$ is dan: $\gamma = 90° - \gamma' = 24°5'41''$.

**2** $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 2 + 5r \\ z = -1 - 3r \end{cases}$ $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + z - 2 = 0$

De scherpe hoek $\gamma'$ tussen de normaalvector $\vec{n}(2,-3,1)$ van $\alpha$ en de richtingsvector
$\vec{d}(2,5,-3)$ van m vinden we via de formule: $\cos\beta = \dfrac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = \dfrac{-14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}}$.

Omdat $\cos\beta < 0$, zal $\beta$ een stompe hoek zijn, waardoor:
$\gamma' = 180° - \beta = 180° - 127°22'16'' = 52°37'44''$.

De gevraagde hoek $\gamma$ tussen de rechte m en het vlak $\alpha$ is dan: $\gamma = 90° - \gamma' = 37°22'16''$.

**3** $m \leftrightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ $\alpha \leftrightarrow x - 2y + z - 1 = 0$

De scherpe hoek $\gamma'$ tussen de normaalvector $\vec{n}(1,-2,1)$ van $\alpha$ en de richtingsvector
$\vec{d}(4,3,2)$ van m vinden we als volgt: $\cos\gamma' = \dfrac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{29}} = 0 \;\Rightarrow\; \gamma' = 90°$.

De gevraagde hoek $\gamma$ tussen de rechte m en het vlak $\alpha$ is dan: $\gamma = 90° - \gamma' = 0°$.

De rechte m is dus evenwijdig met het vlak $\alpha$.

Je kan dit ook nagaan door de mogelijke snijpunten van m en $\alpha$ te bepalen, waarbij

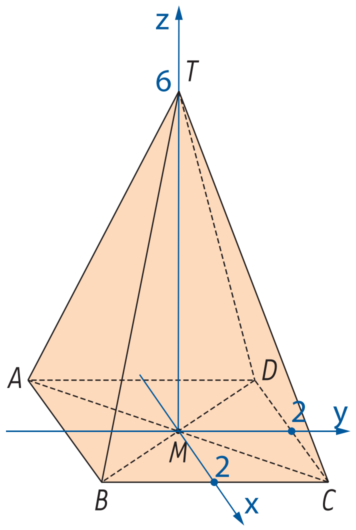
$m \leftrightarrow \begin{cases} x = 4r \\ y = 3r \\ z = 1 + 2r \end{cases}$ en $\alpha \leftrightarrow x - 2y + z - 1 = 0 : 4r - 6r + 1 + 2r - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \cdot r = 0$.

Alle punten van m voldoen hieraan, zodat m in dit geval in $\alpha$ ligt.

## Opdracht 68 bladzijde 173

$\begin{pmatrix} & & T & \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is een regelmatige piramide, d.w.z. dat *ABCD* een vierkant is en dat *TM* loodrecht staat op het grondvlak *ABCD*.

Het vierkant heeft zijde 4 en $|TM| = 6$.




**1** Bereken de hoek tussen *TD* en *AC*.

De hoek tussen TD en AC is analytisch te berekenen.

Kies een orthonormaal assenstelsel met oorsprong in M zoals op de figuur.

In het getekende assenstelsel geldt:

co(T) = (0,0,6), co(D) = (–2,2,0), co(A) = (–2,–2,0) en co(C) = (2,2,0).

$\vec{d_1}(1,-1,3)$ is dan een richtingsvector van TD en $\vec{d_2}(1,1,0)$ is een richtingsvector van AC.

De hoek $\alpha$ tussen $\vec{d_1}$ en $\vec{d_2}$ vinden we als volgt:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3\cdot 0}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}} = 0 \text{ zodat } \alpha = 90°.$$

De hoek tussen TD en AC is dus 90°.

We kunnen ook synthetisch aantonen dat AC $\perp$ TD door aan te tonen dat AC $\perp$ vl(T, B, D) dat TD omvat:

– AC $\perp$ BD (1) (de diagonalen van een vierkant staan loodrecht op elkaar)

– TM $\perp$ vl(A, B, C) $\Rightarrow$ TM $\perp$ AC (2)

Uit (1) en (2) volgt: AC $\perp$ vl(T, B, D), zodat AC $\perp$ TD.

**2** Bereken de hoek tussen *AT* en vl$(A, B, C)$.

Ook hier kunnen we analytisch te werk gaan. In het gekozen assenstelsel (zie **1**) is vl(A, B, C) het vlak met vergelijking z = 0, dus met $\vec{n}(0,0,1)$ als normaalvector.

De rechte AT heeft als richtingsvector $\vec{d}(1,1,3)$.

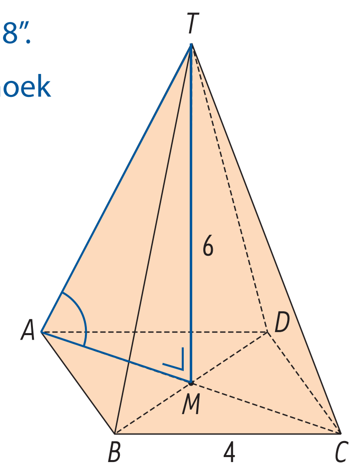
De scherpe hoek $\alpha'$ tussen $\vec{n}$ en $\vec{d}$ vinden we uit:

$$\cos\alpha' = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3}{1\cdot\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha' = 25°14'22''.$$

De hoek $\alpha$ tussen AT en vl(A, B, C) is dan: $\alpha = 90° - \alpha' = 64°45'38''$.

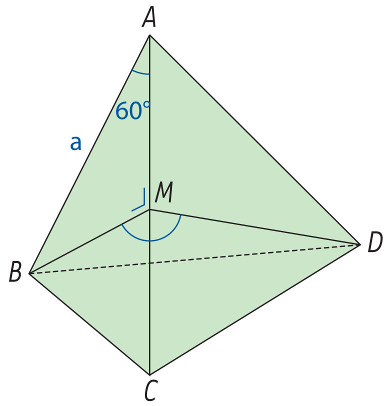
Zonder coördinaten (synthetische aanpak) berekenen we de hoek tussen AT en AM, de loodrechte projectie van AT op vl(A, B, C).

In $\Delta$ATM is $\tan \widehat{TAM} = \frac{|TM|}{|AM|} = \frac{6}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{TAM} = 64°45'38''$.



**Opdracht 69 bladzijde 173**

*ABCD* is een regelmatig viervlak met *a* als lengte van de ribben.




**1** Als *M* het midden is van [*AC*], dan is $B\hat{M}D$ de hoek tussen vl(*A*, *B*, *C*) en vl(*A*, *C*, *D*). Verklaar.

De snijlijn van vl(A,B,C) en vl(A,C,D) is AC.

Aangezien $\Delta$ ABC en $\Delta$ ACD gelijkzijdig zijn, zijn de zwaartelijnen BM en DM van deze driehoeken ook hoogtelijnen, zodat BM $\perp$ AC en DM $\perp$ AC.

De hoek $B\hat{M}D$ is dus de hoek tussen vl(A, B, C) en vl(A, C, D).

**2** Bereken die hoek.

In $\Delta$ ABM is $|BM| = a \cdot \sin 60° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

In $\Delta$ ADM is ook $|DM| = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Aangezien $|BD| = a$ kan de gevraagde hoek in $\Delta$ BDM gevonden worden via de cosinusregel:

$$a^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos B\hat{M}D$$

$$\Rightarrow \cos B\hat{M}D = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{1}{3}$$

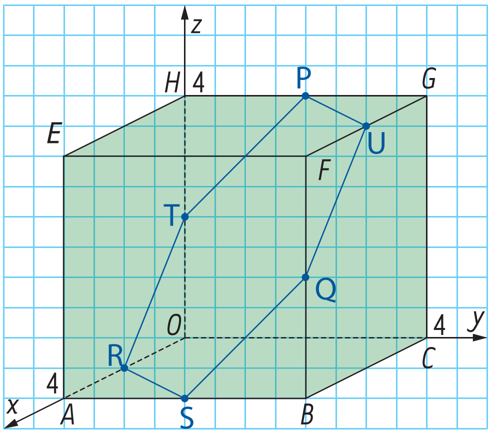
$$\Rightarrow B\hat{M}D = 70°31'44''$$

**Opdracht 70 bladzijde 174**

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ is een kubus met ribbe 4.

$P$ is het midden van $[HG]$, $Q$ is het midden van $[BF]$ en $R$ is het midden van $[AO]$.

**1** Bereken de hoek tussen vl$(P, Q, R)$ en vl$(E, F, G)$.




In het gegeven orthonormaal assenstelsel geldt:

co(P) = (0,2,4), co(Q) = (4,4,2) en co(R) = (2,0,0).

Een cartesiaanse vergelijking van vl(P, Q, R) is $x - y + z - 2 = 0$. $\vec{n}_1(1,-1,1)$ is dus een normaalvector van dit vlak.

$\vec{n}_2(0,0,1)$ is een normaalvector van vl(E, F, G).

De hoek $\beta$ tussen deze normaalvectoren vinden we als volgt:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 1} \Leftrightarrow \beta = 54°44'8''.$$

De gevraagde hoek tussen vl(P,Q,R) en vl(E,F,G) is dus 54°44′8″.

De doorsnede van vl(P, Q, R) met de kubus is de veelhoek PTRSQU.

De synthetische methode is niet aangewezen hier, want die is te ingewikkeld.

**2** Bereken de hoek tussen $HB$ en vl$(P, Q, R)$.

Indien we analytisch te werk gaan, kunnen we $\vec{d}(1,1,-1)$ als richtingsvector van HB nemen.

De scherpe hoek $\alpha'$ tussen $\vec{d}$ en $\vec{n}_1(1,-1,1)$, een normaalvector van vl(P, Q, R), vinden we uit: $\cos\beta = \dfrac{1\cdot 1 + 1\cdot(-1) - 1\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{3}$. Omdat $\cos\beta < 0$, zal $\beta$ een stompe hoek zijn, waardoor: $\alpha' = 180° - 109°28'16'' = 70°31'44''$.

De hoek $\alpha$ tussen HB en vl(P, Q, R) is dan: $\alpha = 90° - \alpha' = 19°28'16''$.

**Opdracht 71 bladzijde 174**

Een recht prisma heeft als hoekpunten $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$, $O(0,0,0)$, $E(4,0,6)$, $F(4,6,6)$, $G(0,6,6)$ en $H(0,0,6)$.

Bereken de hoek tussen

**1** $OF$ en vl$(A, B, C)$

1e methode: analytisch

In het gegeven orthonormaal assenstelsel geldt:

$\overrightarrow{OF}(4,6,6)$, zodat $\vec{d}(2,3,3)$ een richtingsvector is van OF.

vl(A, B, C) $\leftrightarrow z = 0$, zodat $\vec{n}(0,0,1)$ een normaalvector is van vl(A, B, C).

De scherpe hoek $\alpha'$ tussen $\vec{d}$ en $\vec{n}$ vinden we uit:

$$\cos\alpha' = \frac{2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 3\cdot 1}{\sqrt{22}\cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}} \Rightarrow \alpha' = 50°14'16''.$$

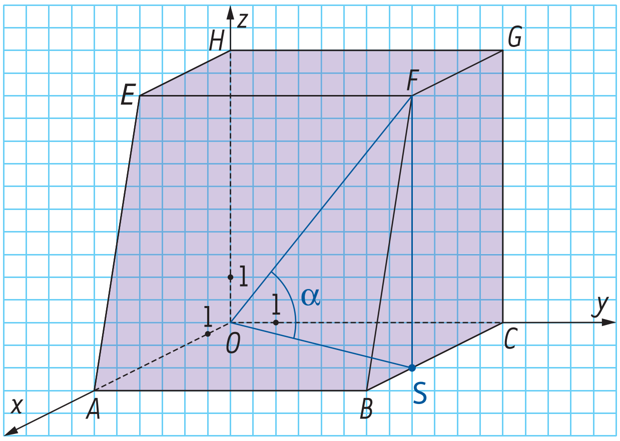
De hoek $\alpha$ tussen OF en vl(A, B, C) is dan: $\alpha = 90° - \alpha' = 39°45'44''$.

2e methode: synthetisch

De loodrechte projectie van OF op vl(A, B, C) is de rechte OS, met S(4, 6, 0). De hoek $\alpha$ tussen OF en vl(A, B, C) is dus de hoek tussen de rechten OF en OS.

In $\Delta$OFS geldt: $\tan\alpha = \dfrac{|FS|}{|OS|} = \dfrac{6}{2\sqrt{13}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$,

zodat $\alpha = 39°45'44''$.




**2** vl$(A, B, F)$ en vl$(O, F, C)$

1e methode: analytisch

In het gegeven orthonormaal assenstelsel geldt:

vl(A,B,F ) $\leftrightarrow 3x + z - 18 = 0$ en vl(O,F,C ) $\leftrightarrow 3x - 2z = 0$, zodat $\vec{n_1}(3,0,1)$ en $\vec{n_2}(3,0,-2)$ de bijbehorende normaalvectoren zijn.

De hoek $\beta$ tussen $\vec{n_1}$ en $\vec{n_2}$ vinden we als volgt:

$$\cos\beta = \frac{9-2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = 52°7'30''.$$

De gevraagde hoek $\alpha$ tussen vl(A, B, F) en vl(O, F, C) is dus $52°7'30''$.

2e methode: synthetisch

De snijlijn van vl(A, B, F) en vl(O, F, C) is de rechte EF.

EF staat loodrecht op vl(A, E, O), zodat EF loodrecht staat op EA in vl(A, B, F) en op EO in vl(O, F, C).

De hoek tussen vl(A, B, F) en vl(O, F, C) is dus de hoek $\alpha$ tussen EA en EO.

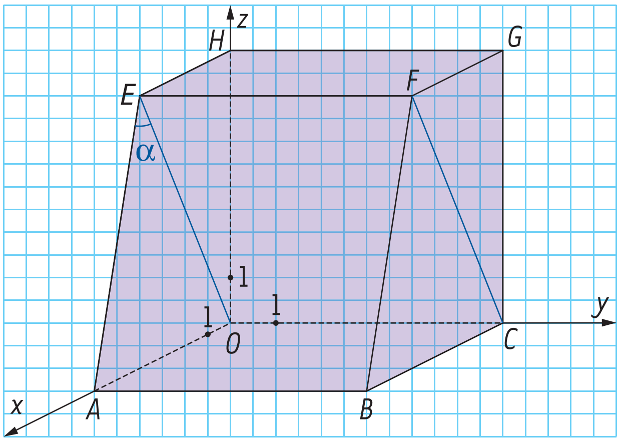
Met $|OA| = 6, |OE| = \sqrt{52}$ en $|AE| = \sqrt{40}$

vinden we $\alpha$ via de cosinusregel:

$$|OA|^2 = |OE|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |OE| \cdot |AE| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{52 + 40 - 36}{2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{40}} = \frac{28}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{40}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 52°7'30''$$




**3** vl$(A, B, F)$ en vl$(B, C, G)$

1e methode: analytisch

In het gegeven orthonormaal assenstelsel geldt:

vl(A, B, F) $\leftrightarrow 3x + z - 18 = 0$ en vl(B, C, G) $\leftrightarrow y - 6 = 0$, zodat $\vec{n}_1(3,0,1)$ en $\vec{n}_3(0,1,0)$ de bijbehorende normaalvectoren zijn.

De hoek $\beta$ tussen $\vec{n}_1$ en $\vec{n}_3$ vinden we als volgt:

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{10} \cdot 1} = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 90°.$$

De gevraagde hoek $\alpha$ tussen vl(A, B, F) en vl(B, C, G) is dus 90°. Beide vlakken staan loodrecht op elkaar.

2e methode: synthetisch

Omdat vl(A, B, F) de rechte AB omvat die loodrecht staat op vl(B, C, G), staat vl(A, B, F) loodrecht op vl(B, C, G). De gevraagde hoek is dus 90°.

**Opdracht 72 bladzijde 174**

Gegeven de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2r \\ y = r \\ z = 2 - r \end{cases}$ en het vlak $\alpha \leftrightarrow x + z - 5 = 0$.

Bepaal cartesiaanse vergelijkingen van alle vlakken die de rechte $m$ omvatten en met $\alpha$ een hoek van 60° insluiten.

We noemen de gezochte vlakken $\beta$ en stellen $\beta \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$.

– De hoek tussen $\alpha$ en $\beta$ zal 60° zijn, als de hoek $\gamma$ tussen de normaalvectoren van deze vlakken 60° is.

  $\vec{n_1}(1,0,1)$ is een normaalvector van $\alpha$, $\vec{n_2}(u, v, w)$ is een normaalvector van $\beta$, zodat:

  $\gamma = 60°$

  $\Leftrightarrow \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow \dfrac{u+w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow 4(u+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2)$

  $\Leftrightarrow u^2 - v^2 + w^2 + 4uw = 0 \quad (1)$

– $\beta$ moet de rechte m omvatten. We substitueren hiervoor de parametervergelijkingen van m in de cartesiaanse vergelijking van $\beta$:

  $u \cdot (-3 + 2r) + v \cdot r + w \cdot (2 - r) + t = 0 \;\Leftrightarrow\; (2u + v - w) \cdot r = 3u - 2w - t.$

  Deze vergelijking moet voldoen voor elke reële waarde van r. Dit resulteert in de volgende twee voorwaarden:

  $\begin{cases} 2u + v - w = 0 & (2) \\ 3u - 2w - t = 0 & (3) \end{cases}$

– Uit (2) volgt dat $v = w - 2u$. Substitutie in (1) geeft:

  $u^2 - (w-2u)^2 + w^2 + 4uw = 0$

  $\Leftrightarrow u^2 - w^2 + 4uw - 4u^2 + w^2 + 4uw = 0$

  $\Leftrightarrow -3u^2 + 8uw = 0$

  $\Leftrightarrow u\cdot(-3u + 8w) = 0$

  $\Leftrightarrow u = 0 \text{ of } 3u = 8w$

– Als $u = 0$, dan volgt uit (2) en (3) dat $v = w$ en $t = -2w$.

  Nemen we $w = 1$, dan zal: $u = 0$, $v = 1$ en $t = -2$.

– Als $3u = 8w$, dan nemen we $u = 8$, waardoor $w = 3$. Uit (2) en (3) volgt dan: $v = -13$ en $t = 18$.

– Besluit: De gevraagde vlakken zijn $\beta_1 \leftrightarrow y + z - 2 = 0$ en $\beta_2 \leftrightarrow 8x - 13y + 3z + 18 = 0$.

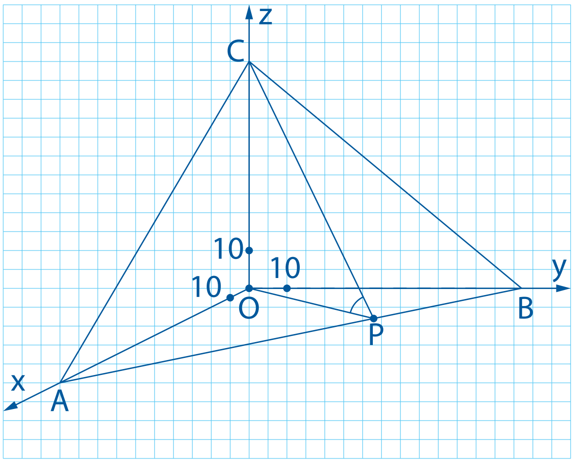
**Opdracht 73 bladzijde 174**

Het vlak $\alpha \leftrightarrow \frac{x}{100}+\frac{y}{72}+\frac{z}{60}=1$ snijdt de $x$-as, de $y$-as en de $z$-as respectievelijk in de punten $A$, $B$ en $C$.

Het punt $P$ is een lopend punt op de rechte $AB$.

De hoek die de rechte $PC$ insluit met het $xy$-vlak varieert met de stand van $P$.

Bereken de coördinaat van $P$ waarvoor die hoek maximaal is.




We weten onmiddellijk dat A(100,0,0), B(0,75,0) en C(0,0, 60).

Hieruit volgt dat $\vec{d}(4,-3,0)$ een richtingsvector is van AB, zodat $AB \leftrightarrow \begin{cases} x=100+4r \\ y=-3r \\ z=0 \end{cases}$.

De coördinaat van P is dus van de vorm $(100+4r, -3r, 0)$.

De hoek die CP met het xy-vlak maakt, is de hoek $C\hat{P}O$, de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{PC}(-100-4r, 3r, 60)$ en $\overrightarrow{PO}(-100-4r, 3r, 0)$.

Deze hoek vinden we uit

$$\cos C\hat{P}O=\frac{(100+4r)^2+(3r)^2}{\sqrt{(100+4r)^2+(3r)^2+60^2}\cdot\sqrt{(100+4r)^2+(3r)^2}}$$

$$=\frac{25r^2+800r+10\,000}{\sqrt{25r^2+800r+13\,600}\cdot\sqrt{25r^2+800r+10\,000}}$$

$$=\sqrt{\frac{25r^2+800r+10\,000}{25r^2+800r+13\,600}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{3600}{25r^2+800r+13\,600}}$$

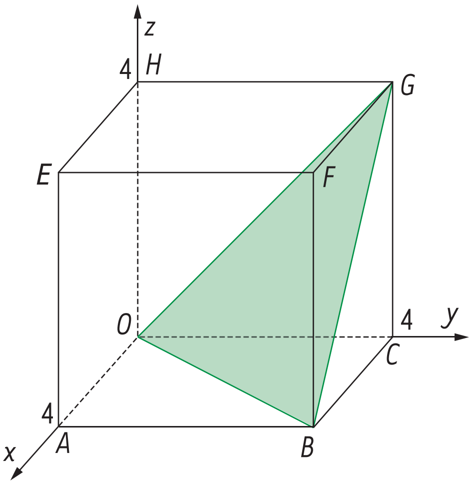
Nu ligt de waarde van deze hoek tussen 0° en 90°, dus geldt hoe groter de hoek, hoe kleiner de cosinus van de hoek is. Dit betekent dat $\sqrt{1-\frac{3600}{25r^2+800r+13\,600}}$ zo klein mogelijk moet zijn.

Daartoe moet $\frac{3600}{25r^2+800r+13\,600}$ maximaal zijn of $25r^2+800r+13\,600$ moet een minimale waarde bereiken. Dit gebeurt voor $r=\frac{-800}{2\cdot 25}=-16$.

Het gevraagde punt P heeft als coördinaat $(100-4\cdot 16,(-3)\cdot(-16),0)$ of P(36,48,0).

**Opdracht 74 bladzijde 175**

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ is een kubus met ribbe 4.




**1** Bereken de afstand van $E$ tot vl$(O, B, G)$.

Stel $\alpha = \text{vl}(0, B, G)$ met $O(0,0,0)$, $B(4,4,0)$ en $G(0,4,4)$, dan geldt: $\alpha \leftrightarrow x - y + z = 0$.

Omdat $E(4,0,4)$ zal $d(E, \alpha) = \dfrac{|4 - 0 + 4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

**2** Bereken de afstand van $F$ tot vl$(O, B, G)$.

Omdat $F(4,4,4)$ al $d(F,\alpha) = \dfrac{|4 - 4 + 4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

**Opdracht 75 bladzijde 175**

Bereken de afstand van het punt $P$ tot de rechte $l$.

**1** $P(2,-3,-5)$ $\qquad l \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = 1 + 2r \\ z = 2 + 3r \end{cases}$

$d(P, l)$ kan op twee manieren berekend worden.

1e methode:

Het loodvlak $\pi$ uit P op l is: $\pi \leftrightarrow 1(x - 2) + 2(y + 3) + 3(z + 5) = 0$ of $\pi \leftrightarrow x + 2y + 3z + 19 = 0$.

Het snijpunt S van $\pi$ en l vinden we uit $(3 + r) + 2(1 + 2r) + 3(2 + 3r) + 19 = 0 \Leftrightarrow r = -\dfrac{15}{7}$.

Met $S\left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{23}{7}, -\dfrac{31}{7}\right)$ is

$$d(P,l) = |PS| = \sqrt{\left(2 - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(-3 + \frac{23}{7}\right)^2 + \left(-5 + \frac{31}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{64 + 4 + 16}{49}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

2e methode:

Om het punt S te vinden kunnen we ook als volgt te werk gaan:

aangezien S op l ligt is $S(3 + r, 1 + 2r, 2 + 3r)$.

Nu moet PS loodrecht staan op l of $\overrightarrow{PS} \cdot \vec{d} = 0$, met $\vec{d}$ een richtingsvector van l.

Met $\overrightarrow{PS}(1 + r, 4 + 2r, 7 + 3r)$ en $\vec{d}(1,2,3)$ vinden we

$1 + r + 2(4 + 2r) + 3(7 + 3r) = 0 \Leftrightarrow r = -\dfrac{15}{7}$.

Verder volgen we de eerste methode.

**2** $P(1,2,3)$ $\qquad l \leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Volgens één van de twee methodes in **1** beschreven, vinden we $S\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$, het voetpunt van de loodlijn uit P(1,2,3) op $l \leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$.

$$d(P,l)=|PS|=\sqrt{\left(1-\frac{8}{3}\right)^2+\left(2-\frac{8}{3}\right)^2+\left(3-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25+4+49}{9}}=\frac{\sqrt{78}}{3}.$$

**3** $P(4,0,0)$ $\qquad l \leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$

Volgens één van de twee methodes in **1** beschreven, vinden we S(2,–3,0), het voetpunt van de loodlijn uit P(4,0,0) op $l \leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$.

$d(P,l)=|PS|=\sqrt{13}$.

**Opdracht 76 bladzijde 175**

Gegeven de punten $A(1,5,7)$, $B(2,-4,10)$, $C(2,-9,-5)$ en $D(1,2,5)$.

**1** Bereken de afstand van $D$ tot vl$(A,B,C)$.

Stel $\alpha = \text{vl}(A, B, C)$, dan geldt: $\alpha \leftrightarrow 30x + 3y - z - 38 = 0$.

Omdat D(1, 2, 5) zal $d(D,\alpha)=\dfrac{|30+6-5-38|}{\sqrt{30^2+3^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{910}}$.

**2** Bereken de inhoud van het viervlak $ABCD$.

- Nemen we als grondvlak vl(A, B, C) = $\alpha$, dan is de hoogte $h=d(D,\alpha)=\dfrac{7}{\sqrt{910}}$ (zie **1**).
- De oppervlakte G van het grondvlak is de oppervlakte van $\Delta ABC$:

  opp. $\Delta ABC=\dfrac{|BC|\cdot d(A,BC)}{2}$.

  Met $BC \leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4+r \\ z=10+3r \end{cases}$ is het loodvlak $\pi$ uit A op BC :

  $\pi \leftrightarrow (y-5)+3(z-7)=0$ of $\pi \leftrightarrow y+3z-26=0$.

  Het snijpunt van BC met $\pi$ is P(2,–4,10) zodat $d(A,BC)=|PA|=\sqrt{91}$.

  $|BC|=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$ zodat $G=\text{opp. }\Delta ABC=\dfrac{5\sqrt{10}\cdot\sqrt{91}}{2}=\dfrac{5\sqrt{910}}{2}$.

- Inhoud viervlak ABCD $=\dfrac{1}{3}\cdot G\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{910}}{2}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{910}}=\dfrac{35}{6}$.

**Opdracht 77 bladzijde 175**

Bepaal de afstand tussen de evenwijdige vlakken $\alpha$ en $\beta$.

**1** $\alpha \leftrightarrow 2x - \sqrt{3}y + 3z + 4 = 0$ $\quad$ $\beta \leftrightarrow 2x - \sqrt{3}y + 3z - 5 = 0$

Neem een punt A(−2,0,0) van $\alpha$.

$$d(\alpha,\beta) = d(A,\beta) = \frac{|-4-5|}{\sqrt{4+3+9}} = \frac{9}{4}$$

**2** $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 7z + 2 = 0$ $\quad$ $\beta \leftrightarrow x + 2y - 7z + 9 = 0$

Neem een punt A(−2,0,0) van $\alpha$.

$$d(\alpha,\beta) = d(A,\beta) = \frac{|-2+9|}{\sqrt{1+4+49}} = \frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18}$$

**Opdracht 78 bladzijde 175**

Bereken de afstand tussen de kruisende rechten *AB* en *CD* met

**1** $A(2,-2,0)$, $B(0,-2,1)$, $C(1,-1,1)$ en $D(2,1,-1)$.

We bepalen eerst een vergelijking van één van de twee evenwijdige vlakken waarin we de kruisende rechten kunnen verpakken, bv. het vlak $\alpha$ evenwijdig met AB dat CD omvat. Dan berekenen we d(A,$\alpha$) = d(AB,CD).

Het vlak $\alpha$ evenwijdig met AB dat CD omvat, heeft als richtingsvectoren $\overrightarrow{AB}(-2,0,1)$ en $\overrightarrow{CD}(1,2,-2)$ en gaat door C(1, −1, 1):

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2r + s \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + r - 2s \end{cases}.$$

Uit de tweede vergelijking halen we $s = \frac{y+1}{2}$, uit de derde vergelijking

$r = z - 1 + 2s = z + y$.

Invullen in de eerste vergelijking geeft $\alpha \leftrightarrow x = 1 - 2z - 2y + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$ of

$\alpha \leftrightarrow 2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

$$d(AB,CD) = d(A,\alpha) = \frac{|4-6-3|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

**2** $A(-1,6,4)$, $B(1,8,3)$, $C(-1,3,3)$ en $D(1,4,1)$.

$\overrightarrow{AB}(2,2,-1)$ en $\overrightarrow{CD}(2,1,-2)$ zijn richtingsvectoren van $\alpha$ en C(−1,3,3) is steunpunt.

We vinden $\alpha \leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 3 = 0$.

$$d(AB,CD) = d(A,\alpha) = \frac{|-3-12+8+3|}{\sqrt{9+4+4}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

**Opdracht 79 bladzijde 176**

Bereken de afstand tussen de evenwijdige rechten $p \leftrightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-2}$ en $q \leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

We berekenen de afstand van het punt P(4, 3, 0) van p tot de rechte q.

Het loodvlak $\pi$ uit P op q heeft als vergelijking $\pi \leftrightarrow 2(x-4)+3(y-3)-2z=0$ of $\pi \leftrightarrow 2x+3y-2z-17=0$.

Het snijpunt van $\pi$ en q is S(3,1,–4).

$d(p, q) = d(P, q) = |PS| = \sqrt{(4-3)^2+(3-1)^2+(0+4)^2} = \sqrt{21}$

**Opdracht 80 bladzijde 176**

Gegeven de punten $A(2,1,3)$, $B(1,1,-2)$ en $C(2,-1,1)$.

**1** Bereken de afstand van $A$ tot de rechte $BC$.

$BC \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 1 - 2r \\ z = -2 + 3r \end{cases}$. Een punt P van BC heeft dus als coördinaat $(1 + r, 1 - 2r, -2 + 3r)$.

Nu is $AP \perp BC$ als $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Met $\overrightarrow{AP}(r-1, -2r, 3r-5)$ en $\overrightarrow{BC}(1,-2,3)$ wordt dit $r - 1 + 4r + 9r - 15 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{8}{7}$.

Het voetpunt van de loodlijn uit A op BC is dus $P\left(\frac{15}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

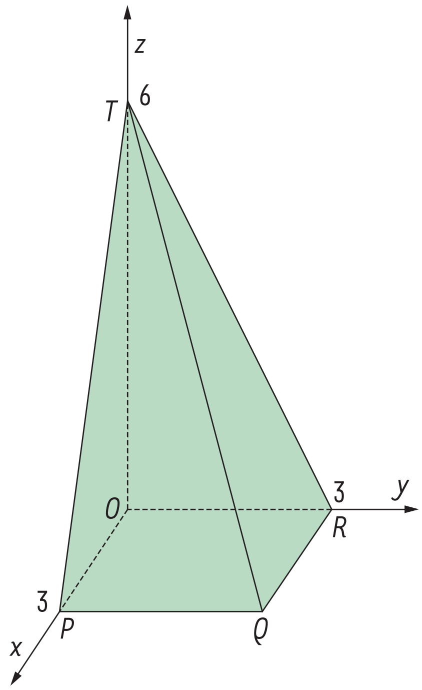
$d(A,BC) = |AP| = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{16}{7}\right)^2 + \left(\frac{11}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{378}}{7} = \frac{3\sqrt{42}}{7}$.

**2** Bereken de oppervlakte van de driehoek $ABC$.

$\text{opp.}\,\Delta ABC = \frac{|BC| \cdot |AP|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{3\sqrt{42}}{7} = 3\sqrt{3}$

**Opdracht 81 bladzijde 176**

Van een vierzijdige piramide zijn de hoekpunten $T(0,0,6)$, $O(0,0,0)$, $P(3,0,0)$, $Q(3,3,0)$ en $R(0,3,0)$.




**1** Bereken de afstand van $O$ tot het zijvlak $TQR$.

$\alpha = \text{vl}(T, Q, R)$ heeft als vergelijking $2y + z - 6 = 0$.

$$d(O,\alpha) = \frac{|2\cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

**2** Bereken de afstand van $O$ tot het zijvlak $TPQ$.

$\beta = \text{vl}(T, P, Q)$ heeft als vergelijking $2x + z - 6 = 0$.

$$d(O,\beta) = \frac{|2\cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

**3** Bereken de afstand van $O$ tot de rechte $TQ$.

$$TQ \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 6 - 2r \end{cases}.$$

Het loodvlak $\pi$ uit O op TQ heeft als vergelijking $\pi \leftrightarrow (x - 0) + (y - 0) - 2(z - 0) = 0$ of $\pi \leftrightarrow x + y - 2z = 0$.

Het snijpunt S van $\pi$ en TQ is te vinden uit $r + r - 12 + 4r = 0 \iff r = 2$ zodat $S(2, 2, 2)$.

$d(O,TQ) = |OS| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

**Opdracht 82 bladzijde 176**

De punten $A(-1,-1,-1)$, $B(-1,0,0)$, $C(1,-2,0)$ en $D(1,2,2)$ zijn gegeven.

Stel cartesiaanse vergelijkingen op van de vlakken die evenwijdig zijn met vl$(A,B,C)$ en die op een afstand 2 van het punt $D$ gelegen zijn.

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ en $\overrightarrow{BC}(2,-2,0)$.

Het vlak door de oorsprong evenwijdig met vl(A, B, C) heeft als parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = s \\ y = -s + r \\ z = r \end{cases}$$ en dus als cartesiaanse vergelijking $x + y - z = 0$.

Een vlak evenwijdig met vl(A, B, C) heeft dus als vergelijking $x + y - z + k = 0$.

Het gevraagde vlak ligt op een afstand 2 van D(1,2,2) zodat

$$\frac{|1+2-2+k|}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |k+1| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{3} - 1 \text{ of } k = -2\sqrt{3} - 1$$

De gevraagde vlakken hebben als vergelijkingen $x + y - z + 2\sqrt{3} - 1 = 0$ en $x + y - z - 2\sqrt{3} - 1 = 0$.

### Opdracht 83 bladzijde 176

Bepaal een vergelijking van een vlak $\pi$ dat loodrecht staat op de vlakken
$\alpha \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$ en $\beta \leftrightarrow y + z = 0$ en op een afstand 4 van het punt $P(1,1,1)$ gelegen is.

Een vlak $\pi$ dat loodrecht staat op de vlakken $\alpha$ en $\beta$, staat loodrecht op de snijlijn

$m \leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ van deze vlakken.

Deze snijlijn heeft als parametervoorstelling $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 2r \\ z = -2r \end{cases}$.

De richtingsvector $\vec{d}(1,2,-2)$ is normaalvector van $\pi$ zodat $\pi \leftrightarrow x + 2y - 2z + k = 0$.

k vinden we door uit te drukken dat $d(P,\pi) = 4$ met $P(1,1,1)$:

$$d(P,\pi) = \frac{|1 + 2 - 2 + k|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 4$$

$\Leftrightarrow |1 + k| = 12$

$\Leftrightarrow 1 + k = 12$ of $1 + k = -12$

$\Leftrightarrow k = 11$ of $k = -13$

Er zijn twee vlakken die aan de voorwaarden voldoen:

$\pi_1 \leftrightarrow x + 2y - 2z + 11 = 0$ en $\pi_2 \leftrightarrow x + 2y - 2z - 13 = 0$.

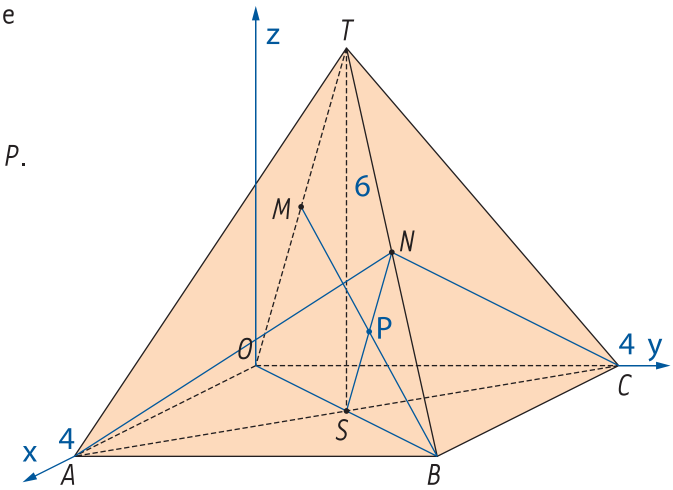
### Opdracht 84 bladzijde 177

Gegeven een regelmatige vierzijdige piramide met $|AB| = 4$ en $|TS| = 6$.

$M$ en $N$ zijn de middens van $[OT]$ en $[BT]$.

De rechte $BM$ snijdt het vlak $ACN$ in het punt $P$.

Bereken $|PB|$.




Kies een orthonormaal assenstelsel met oorsprong in O zoals op de figuur.

In het getekende assenstelsel geldt:

co(O) = (0,0,0), co(A) = (4,0,0),
co(B) = (4,4,0), co(C) = (0,4,0),
co(S) = (2,2,0), co(T) = (2,2,6),
co(M) = (1,1,3) en co(N) = (3,3,3).

Bijgevolg zal $\overrightarrow{BM}(-3,-3,3)$, zodat $\vec{d}(1,1,-1)$ een richtingsvector is van BM. Een parametervoorstelling van BM is:

$$BM \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + r \\ y = 4 + r. \\ z = -r \end{cases}$$

Er geldt: vl(A,C,N) $\leftrightarrow 3x + 3y - 2z - 12 = 0$

Het snijpunt P van BM met vl(A, C, N) vinden we als volgt:

$3\cdot(4+r)+3\cdot(4+r)-2\cdot(-r)-12=0 \iff 8r=-12 \iff r=-\frac{3}{2}$, zodat $P\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

$$|PB| = \sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Andere oplossingsmethode:

Op de figuur zien we dat SN de snijlijn is van vl(A,C,N) en het hulpvlak OBT door BM. Bijgevolg is P het snijpunt van BM en SN.

**Opdracht 85 bladzijde 177**

Gegeven de piramide $\left(\begin{smallmatrix} & T & \\ A\ B & & C\ D\end{smallmatrix}\right)$ met $A(3,-3,0)$, $B(3,3,0)$, $C(-3,3,0)$, $D(-3,-3,0)$ en $T(0,0,6)$.

Het loodvlak $\pi$ op $TC$ door $A$ verdeelt de piramide in twee lichamen.

Bereken de verhouding van hun inhouden.

- $\overrightarrow{TC}(-3,3,-6)$, dus het loodvlak $\pi$ op TC door A(3,–3,0) heeft als normaalvector $\vec{n}(1,-1,2)$

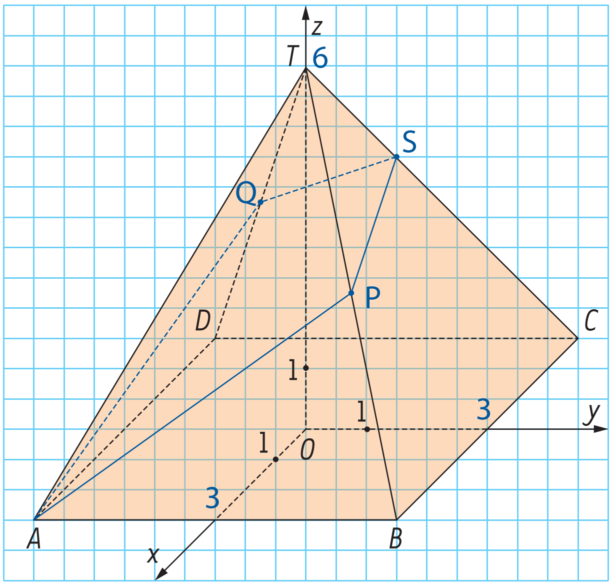
  $\pi \leftrightarrow (x-3)-(y+3)+2z=0$ of $\pi \leftrightarrow x-y+2z-6=0$.

- $\pi$ snijdt TC $\leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=-r \\ z=6+2r \end{cases}$ in S.

  De coördinaat van S vinden we uit
  $r+r+12+4r-6=0 \iff r=-1$ zodat S(–1,1,4).

  Omdat $|SC| = \sqrt{(-3+1)^2+(3-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

  en $|TS| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(6-4)^2} = \sqrt{6}$, is $|SC| = 2\cdot|TS|$.




- Het snijpunt Q van $\pi$ met TD $\leftrightarrow \begin{cases} x=s \\ y=s \\ z=6+2s \end{cases}$ bepalen

  we als volgt: $s-s+12+4s-6=0 \iff s=-\frac{3}{2}$ zodat

  $Q\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3\right)$. Q is het midden van [TD].

- Het snijpunt P van $\pi$ met TB $\leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=6-2t \end{cases}$ tenslotte:

  $t-t+12-4t-6=0 \iff t=\frac{3}{2}$ zodat $P\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)$. P is het midden van [TB].

– De doorsnede van de piramide met $\pi$ is de APSQ. Deze verdeelt de piramide in twee lichamen.

  Het bovenste lichaam is een piramide met grondvlak APSQ en hoogte $|TS|$, want $TS = TC \perp \pi$.

  Omdat $\overrightarrow{AS}(-4,4,4)$ en $\overrightarrow{PQ}(-3,-3,0)$, zal $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, zodat de diagonalen van de vierhoek APSQ loodrecht op elkaar staan.

  Bovendien is $|AQ| = |AP|$ en $|QS| = |PS|$. De vierhoek APSQ is een vlieger.

  Bijgevolg is opp. APSQ $= \dfrac{|AS| \cdot |QP|}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{6}$.

  Het bovenste lichaam heeft een inhoud $I_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \text{opp APSQ} \cdot |TS| = \dfrac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 12$.

– De inhoud van de volledige piramide is $I = \dfrac{1}{3} \cdot \text{opp ABCD} \cdot |TO| = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$.

  De inhoud van het onderste lichaam is $I_2 = I - I_1 = 72 - 12 = 60$.

– De verhouding van beide inhouden is dan $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$.

**Opdracht 86 bladzijde 177**

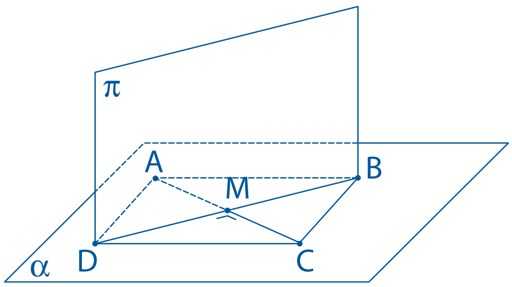
De punten $A(1,-1,1)$ en $C\left(\dfrac{8}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$ liggen in het vlak $\alpha \leftrightarrow 2x + 2y - z + 1 = 0$. Het lijnstuk $[AC]$ is de diagonaal van een vierkant $ABCD$ gelegen in $\alpha$.

Bepaal de coördinaat van $B$ en van $D$.

Bepaal eerst het loodvlak $\pi$ op AC door M, het midden van [AC].

Aangezien de diagonalen van een vierkant loodrecht op elkaar staan, ligt BD in $\pi$.

Bovendien ligt BD in $\alpha$, zodat BD de snijlijn is van $\pi$ en $\alpha$.




$\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ zodat $\overrightarrow{n_1}(5,-1,8)$ een normaalvector is van $\pi$.

$M\left(\dfrac{11}{6}, -\dfrac{7}{6}, \dfrac{7}{3}\right)$ is het midden van [AC].

$\pi \leftrightarrow 5\left(x - \dfrac{11}{6}\right) - \left(y + \dfrac{7}{6}\right) + 8\left(z - \dfrac{7}{3}\right) = 0$ of $\pi \leftrightarrow 5x - y + 8z - 29 = 0$.

We hebben nu een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van BD: $\begin{cases} 2x + 2y - z + 1 = 0 \\ 5x - y + 8z - 29 = 0 \end{cases}$.

Een parametervoorstelling van BD is: $\begin{cases} x = \dfrac{19}{4} - 5r \\ y = -\dfrac{21}{4} + 7r \\ z = 4r \end{cases}$ of $\begin{cases} x = \dfrac{11}{6} - 5s \\ y = -\dfrac{7}{6} + 7s \\ z = \dfrac{7}{3} + 4s \end{cases}$ (1) aangezien BD door M gaat.

Tenslotte bepalen we de hoekpunten B en D als volgt:

$P\left(\dfrac{11}{6} - 5s, -\dfrac{7}{6} + 7s, \dfrac{7}{3} + 4s\right)$ is een lopend punt op BD.

Nu zoeken we de punten P van BD waarvoor $|AM| = |PM|$ of $|AM|^2 = |PM|^2$.

Aangezien $|AM| = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ vinden we

$\left(\dfrac{11}{6} - 5s - \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{6} + 7s + \dfrac{7}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{3} + 4s - \dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{2}.$

Hier is meteen duidelijk dat M als steunpunt kiezen in (1) veel eenvoudiger rekenwerk geeft.

We vinden: $25s^2 + 49s^2 + 16s^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 90s^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow s^2 = \dfrac{5}{180} = \dfrac{1}{36}.$

$s = \dfrac{1}{6}$ of $s = -\dfrac{1}{6}$, twee oplossingen voor P die overeenkomen met de punten B en D.

Invullen van deze waarden voor s in (1) geeft B(1,0,3) en $D\left(\dfrac{8}{3}, -\dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ (of omgekeerd).

**Opdracht 87 bladzijde 178**

Gegeven de regelmatige piramide $\left(\begin{array}{cccc} & & T & \\ A & B & C & D \end{array}\right)$.

De coördinaten van de hoekpunten zijn $T(0,0,h)$, $A(k,0,0)$, $B(0,k,0)$, $C(-k,0,0)$ en $D(0,-k,0)$.

**1** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\alpha$ dat de rechte $TD$ omvat en evenwijdig is met $AB$.

Het vlak $\alpha$ dat T(0, 0, h) en D(0, −k, 0) bevat, heeft als richtingsvector $\overrightarrow{DT}(0, k, h)$ en aangezien $\alpha$ evenwijdig is met AB is $\overrightarrow{AB}(-k, k, 0)$ of $\vec{d_1}(1,-1,0)$ een tweede richtingsvector.

Met T(0, 0, h) als steunpunt vinden we $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = s & (1) \\ y = kr - s & (2). \\ z = h + hr & (3) \end{cases}$

Uit (1) en (3) halen we de parameters $s = x$ en $r = \dfrac{z}{h} - 1$.

Invullen in (2) geeft: $y = k\left(\dfrac{z}{h} - 1\right) - x$ of $hy = kz - hk - hx$ zodat $\alpha \leftrightarrow hx + hy - kz + hk = 0$.

**2** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\beta$ dat de rechte *AB* omvat en loodrecht staat op $\alpha$.

Het vlak $\beta$ omvat de rechte AB zodat $\vec{d_1}(1,-1,0)$ ook een richtingsvector van $\beta$ is.

Aangezien $\alpha \perp \beta$ is $\vec{d_2}(h, h, -k)$ een tweede richtingsvector van $\beta$.

Nemen we A(k, 0 , 0) als steunpunt, dan bekomen we $\beta \leftrightarrow \begin{cases} x = k + r + hs & (1) \\ y = -r + hs & (2). \\ z = -ks & (3) \end{cases}$

Uit (3) volgt: $s = -\dfrac{z}{k}$. Invullen in (2) geeft $r = -y - \dfrac{hz}{k}$.

Na invullen van beide parameters in (1) bekomen we: $x = k - y - \dfrac{hz}{k} - \dfrac{hz}{k}$ of

$kx = k^2 - ky - 2hz$

zodat $\beta \leftrightarrow kx + ky + 2hz - k^2 = 0$.

**3** Noem *s* de snijlijn van de vlakken $\alpha$ en $\beta$.

Bepaal de coördinaat van het snijpunt *Q* van *s* en *TD*.

Het snijpunt Q ligt op TD $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = kt \\ z = h + ht \end{cases}$ (*), dus ligt zeker in $\alpha$.

We zoeken dus het snijpunt van TD met $\beta$.

We vullen (*) in de gevonden cartesiaanse vergelijking van $\beta$ in:

$$0 + k^2t + 2h^2 + 2h^2t - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2 + 2h^2)t = k^2 - 2h^2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k^2 - 2h^2}{k^2 + 2h^2}$$

Invullen in (*) geeft de coördinaat van Q: $\left(0, \dfrac{k^3 - 2h^2k}{k^2 + 2h^2}, \dfrac{2hk^2}{k^2 + 2h^2}\right)$.

**4** Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak $\gamma$ dat door *Q* gaat en loodrecht staat op *AB*.

$\gamma \perp$ AB dus $\vec{d_1}(1,-1,0)$ is normaalvector van $\gamma$.

$\gamma \leftrightarrow x - y + \dfrac{k^3 - 2h^2k}{k^2 + 2h^2} = 0$ of $\gamma \leftrightarrow (k^2 + 2h^2)x - (k^2 + 2h^2)y + k^3 - 2h^2k = 0$. (**)

**5** Bepaal de coördinaat van het snijpunt *P* van $\gamma$ en *AB*.

AB $\leftrightarrow \begin{cases} x = k + u \\ y = -u \\ z = 0 \end{cases}$ met u als parameter.

Invullen in (**) geeft

$$(k^2 + 2h^2)(k + u) + (k^2 + 2h^2)u + k^3 - 2h^2k = 0$$

$$\Leftrightarrow (2k^2 + 4h^2)u = -k^3 - 2h^2k - k^3 + 2h^2k$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-2k^3}{2k^2 + 4h^2} = \frac{-k^3}{k^2 + 2h^2}$$

We vinden dan $P\left(\dfrac{2h^2k}{k^2 + 2h^2}, \dfrac{k^3}{k^2 + 2h^2}, 0\right)$.

**6** Wat is de rechte *PQ* voor de rechten *AB* en *TD*?

$\overrightarrow{PQ}\left(\dfrac{-2h^2k}{k^2+2h^2}, \dfrac{-2h^2k}{k^2+2h^2}, \dfrac{2hk^2}{k^2+2h^2}\right)$ m.a.w. $\overrightarrow{d_2}(h, h, -k)$ is een richtingsvector van PQ.

Aangezien $\overrightarrow{d_1}(1,-1,0)$ een richtingsvector is van AB en $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$ zal $PQ \perp AB$.

Nu is $\overrightarrow{DT}(0, k, h)$ zodat ook $\overrightarrow{DT} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$ en $PQ \perp DT$.

Aangezien Q op TD ligt en P op AB ligt, is PQ de gemeenschappelijke loodlijn van AB en TD .

**Opdracht 88 bladzijde 179**

**Meetkundige plaats van de punten even ver van twee vlakken**

*Voorbeeld*

We bepalen de verzameling *V* van de punten even ver van de snijdende vlakken $\gamma_1 \leftrightarrow 3x + 4y - 6 = 0$ en $\gamma_2 \leftrightarrow 6x - 6y + 7z + 16 = 0$.

– $P(x, y, z) \in V$

$\Leftrightarrow \ d(P, \gamma_1) = d(P, \gamma_2)$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{|3x + 4y - 6|}{5} = \dfrac{|6x - 6y + 7z + 16|}{11}$

$\Leftrightarrow \ 11(3x + 4y - 6) = \pm 5(6x - 6y + 7z + 16) \quad (1)$

$\Leftrightarrow$ $P(x, y, z)$ behoort tot één van de vlakken
$\delta_1 \leftrightarrow 33x + 44y - 66 = 30x - 30y + 35z + 80$ of
$\delta_2 \leftrightarrow 33x + 44y - 66 = -30x + 30y - 35z - 80$.

Bijgevolg: $V = \delta_1 \cup \delta_2$ met $\delta_1 \leftrightarrow 3x + 74y - 35z - 146 = 0$ en
$\delta_2 \leftrightarrow 9x + 2y + 5z + 2 = 0 \quad (2)$.

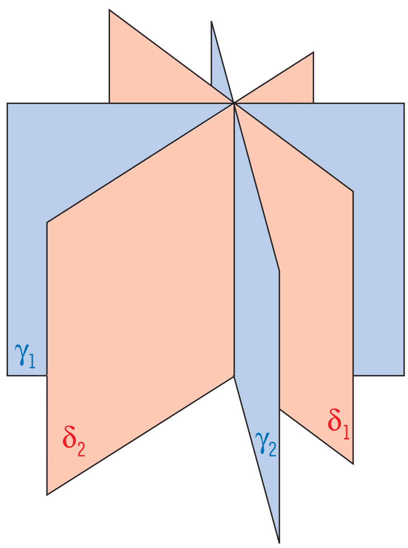
– Uit (1) volgt dat $\delta_1$ en $\delta_2$ tot de vlakkenwaaier behoren die door $\gamma_1$ en $\gamma_2$ wordt bepaald.

Dus $\delta_1$ en $\delta_2$ omvatten de snijlijn van $\gamma_1$ en $\gamma_2$.

Uit (2) volgt: $\delta_1 \perp \delta_2$ want $3 \cdot 9 + 74 \cdot 2 - 35 \cdot 5 = 0$.

Naar analogie met de deellijnen of bissectrices van een rechtenpaar in de vlakke meetkunde, noemen we $\delta_1$ en $\delta_2$ de **deelvlakken** of **bissectorvlakken** van de vlakken $\gamma_1$ en $\gamma_2$.

Algemeen kan men aantonen dat de verzameling van de punten die zich op gelijke afstand van twee snijdende vlakken bevinden, de unie is van twee vlakken die loodrecht op elkaar staan en de snijlijn van de gegeven vlakken omvatten.




*Opmerking*

Zijn de twee gegeven vlakken evenwijdig, dan vormen alle punten even ver van die vlakken een evenwijdig vlak op halve afstand tussen die twee vlakken.

**1** Bepaal de bissectorvlakken van $\gamma \leftrightarrow x - 3y + 4z + 3 = 0$ en $\delta \leftrightarrow 3x - 4y - z + 1 = 0$.

Noem V de verzameling van de punten even ver van de vlakken $\gamma$ en $\delta$.

$P(x, y, z) \in V$

$\Leftrightarrow d(P,\gamma) = d(P,\delta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x - 3y + 4z + 3|}{\sqrt{26}} = \dfrac{|3x - 4y - z + 1|}{\sqrt{26}}$

$\Leftrightarrow x - 3y + 4z + 3 = 3x - 4y - z + 1$ of $x - 3y + 4z + 3 = -3x + 4y + z - 1$

$\Leftrightarrow -2x + y + 5z + 2 = 0$ of $4x - 7y + 3z + 4 = 0$

De bissectorvlakken van $\gamma$ en $\delta$ zijn $\alpha \leftrightarrow -2x + y + 5z + 2 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 4x - 7y + 3z + 4 = 0$.

**2** Bepaal de verzameling van de punten die even ver liggen van de vlakken $\gamma$ en $\delta$.

**a** $\gamma \leftrightarrow x + 2y + 2z - 1 = 0$ en $\delta \leftrightarrow 2x - 6y + 3z - 3 = 0$

We zoeken alle punten P(x, y, z) even ver van $\gamma$ en $\delta$:

$d(P, \gamma) = d(P, \delta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x + 2y + 2z - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{|2x - 6y + 3z - 3|}{\sqrt{4 + 36 + 9}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x + 2y + 2z - 1|}{3} = \dfrac{|2x - 6y + 3z - 3|}{7}$

$\Leftrightarrow 7(x + 2y + 2z - 1) = \pm 3(2x - 6y + 3z - 3)$

$\Leftrightarrow 7x + 14y + 14z - 7 - 6x + 18y - 9z + 9 = 0$ of $7x + 14y + 14z - 7 + 6x - 18y + 9z - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x + 32y + 5z + 2 = 0$ of $13x - 4y + 23z - 16 = 0$

De bissectorvlakken van $\gamma$ en $\delta$ zijn $\alpha \leftrightarrow x + 32y + 5z + 2 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 13x - 4y + 23z - 16 = 0$.

**b** $\gamma \leftrightarrow x - y + z + 6 = 0$ en $\delta \leftrightarrow -2x + 2y - 2z + 9 = 0$

We zoeken alle punten P(x, y, z) even ver van $\gamma$ en $\delta$:

$d(P, \gamma) = d(P, \delta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x - y + z + 6|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|-2x + 2y - 2z + 9|}{2\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot |x - y + z + 6| = |-2x + 2y - 2z + 9|$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2z + 12 = -2x + 2y - 2z + 9$ of $\cancel{2x - 2y + 2z + 12 = 2x - 2y + 2z - 9}$

$\Leftrightarrow 4x - 4y + 4z + 3 = 0$

De punten even ver van de evenwijdige vlakken $\gamma$ en $\delta$ liggen in het vlak $\alpha \leftrightarrow 4x - 4y + 4z + 3 = 0$.

**Opdracht 89 bladzijde 180**
**Meetkundige plaats van de punten even ver van twee kruisende rechten**

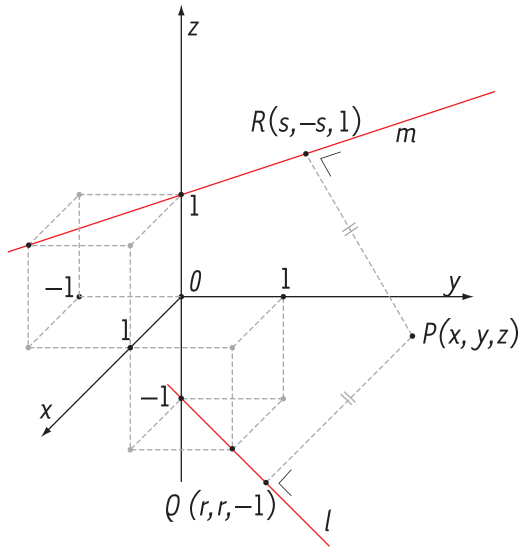
*Voorbeeld*

We bepalen de verzameling van alle punten die op gelijke afstand gelegen zijn van twee kruisende rechten

$l \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = -1 \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = 1 \end{cases}$.

De rechte $l$ is de rechte met vergelijking $y = x$ in het $xy$-vlak, verschoven over een afstand 1 naar onder. De rechte $m$ is de rechte met vergelijking $y = -x$ in het $xy$-vlak, verschoven over een afstand 1 naar boven.

– Stel $P(x, y, z)$ is een punt dat even ver van $l$ als van $m$ ligt, dan is $\mathrm{d}(P, l) = \mathrm{d}(P, m)$ . We zoeken dus de punten $Q$ op $l$ en $R$ op $m$ zodanig dat $|PQ| = |PR|$.




– Aangezien we de kortste verbindingen van $P$ naar $l$ en naar $m$ vastleggen, moet $PQ \perp l$ en $PR \perp m$.

$Q(r, r, -1)$ is een lopend punt op $l$ en $R\,(s, -s, 1)$ is een lopend punt op $m$. $\overrightarrow{d_1}(1,1,0)$ is een richtingsvector van $l$ en $\overrightarrow{d_2}(1,-1,0)$ is een richtingsvector van $m$.

De voorwaarden $PQ \perp l$ en $PR \perp m$ kunnen we dan ook schrijven als

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{d_1} = 0$ en $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$,

zodat $(r - x) \cdot 1 + (r - y) \cdot 1 + (-1 - z) \cdot 0 = 0 \quad (1)$

en $(s - x) \cdot 1 + (s + y) \cdot 1 + (1 - z) \cdot 0 = 0 \quad (2)$.

Uit (1) en (2) volgt dat $r = \dfrac{x + y}{2}$ en $s = \dfrac{x - y}{2}$.

– Met deze waarden voor $r$ en $s$ drukken we uit dat $|PQ| = |PR|$ of $|PQ|^2 = |PR|^2$:

$|PQ|^2 = |PR|^2$

$\Leftrightarrow (x - r)^2 + (y - r)^2 + (z + 1)^2 = (x - s)^2 + (y + s)^2 + (z - 1)^2$

Met $r = \dfrac{x + y}{2}$ en $s = \dfrac{x - y}{2}$ vinden we na enig rekenwerk: $2z - xy = 0$.

De gevraagde puntenverzameling bevat dus punten $P(x, y, z)$ die voldoen aan $z = \dfrac{xy}{2}$.

Dit is geen vergelijking van een vlak, maar van **een oppervlak in de ruimte**.

Om te weten hoe dit oppervlak eruitziet, kunnen we gebruik maken van een pakket dat driedimensionale voorstellingen kan maken.

Uit de doorsneden van het oppervlak met de zijvlakken van de omhullende kubus op de figuur, vermoeden we dat dit oppervlak bestaat uit rechten en hyperbolen.

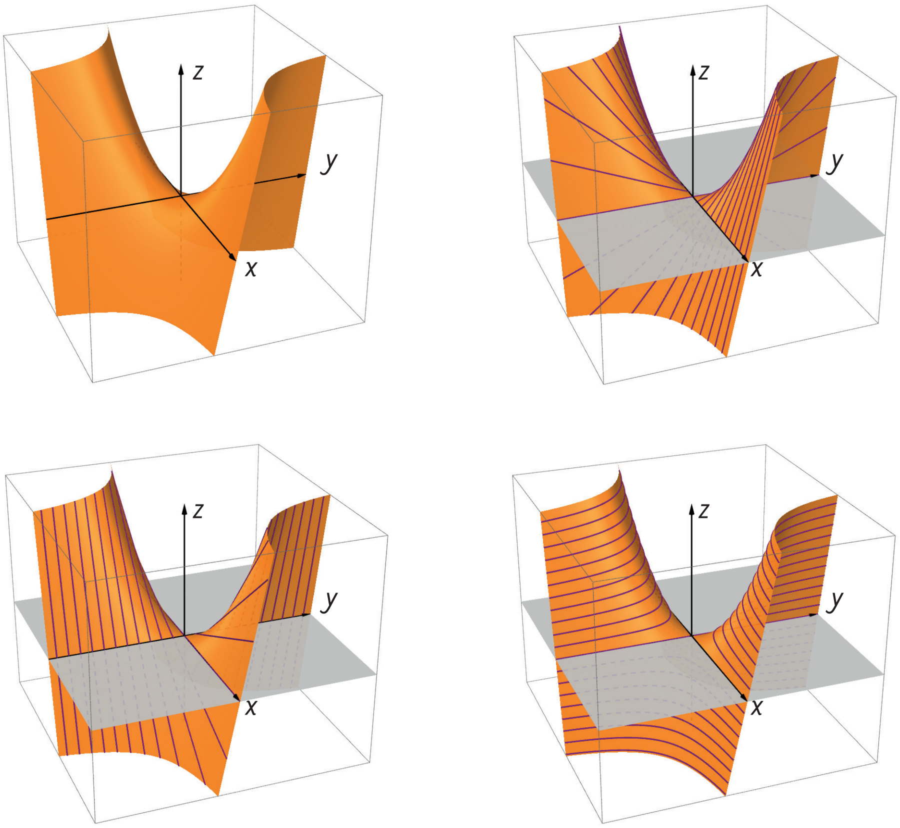
We kunnen dit analytisch aantonen door een aantal doorsneden te berekenen met vlakken evenwijdig met de coördinaatvlakken:

$$\begin{cases} z = \dfrac{xy}{2} \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{k}{2}y \\ x = k \end{cases}$$ : dit is een rechte met richtingscoëfficiënt $\dfrac{k}{2}$, evenwijdig met het $yz$-vlak.

$$\begin{cases} z = \dfrac{xy}{2} \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{k}{2}x \\ y = k \end{cases}$$ : dit is een rechte met richtingscoëfficiënt $\dfrac{k}{2}$, evenwijdig met het $xz$-vlak.

$$\begin{cases} z = \dfrac{xy}{2} \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2k \\ z = k \end{cases}$$ : dit is een orthogonale hyperbool, evenwijdig met het $xy$-vlak.

Als we nu $k$ laten variëren, verkrijgen we twee rechtenbundels en een bundel van hyperbolen als doorsneden.




Op de figuur zie je twee rechtenbundels met continu veranderende helling. Twee bijzondere rechten van het oppervlak zijn de $x$-as en de $y$-as. De doorsneden met de vlakken met vergelijking $z = -5$ en $z = 5$ zijn de getekende hyperbolen.

Een oppervlak met dergelijke vorm noemen we een **zadeloppervlak**.

**1** Het punt $P(1,2,1)$ behoort tot het zadeloppervlak met vergelijking $z=\dfrac{xy}{2}$.

Ga na dat het punt $P(1,2,1)$ even ver van de kruisende rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=r \\ z=-1 \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x=s \\ y=-s \\ z=1 \end{cases}$ ligt.

We berekenen d(P, l) en d(P, m).

- Beschouw het loodvlak $\pi_1$ uit P op l:

  $\pi_1 \leftrightarrow x-1+y-2=0$ of $\pi_1 \leftrightarrow x+y-3=0$.

  Het snijpunt van $\pi_1$ en l is $Q\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},-1\right)$.

  $d(P,l)=d(P,Q)=\sqrt{\dfrac{9}{2}}$.
- Het loodvlak $\pi_2$ uit P op m heeft als vergelijking $x-y+1=0$.

  Het snijpunt van $\pi_2$ en m is $R\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

  $d(P,m)=d(P,R)=\sqrt{\dfrac{9}{2}}$.
- We besluiten: d(P, l) = d(P, m), zodat P even ver ligt van de kruisende rechten l en m.

**2** De rechte $a \leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2 \end{cases}$ behoort tot het zadeloppervlak met vergelijking $z=\dfrac{xy}{2}$.

Ga na dat alle punten van $a$ even ver van $l$ als van $m$ gelegen zijn.

- A(t, 2, t) is een lopend punt van a.
- Om d(A, l) te berekenen, gebruiken we het loodvlak $\pi_3$ uit A op l:

  $\pi_3 \leftrightarrow x+y-t-2=0$.

  Het snijpunt van $\pi_3$ en l is $S\left(1+\dfrac{t}{2},1+\dfrac{t}{2},-1\right)$.

  $d(A,l)=d(A,S)=\sqrt{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2+\left(-1+\dfrac{t}{2}\right)^2+(-1-t)^2}=\sqrt{3+\dfrac{3}{2}t^2}$.
- Het loodvlak $\pi_4$ uit A op m heeft als vergelijking $x-y-t+2=0$.

  Het snijpunt van $\pi_4$ en m is $T\left(-1+\dfrac{t}{2},1-\dfrac{t}{2},1\right)$.

  $d(A,m)=d(A,T)=\sqrt{\left(-1-\dfrac{t}{2}\right)^2+\left(-1-\dfrac{t}{2}\right)^2+(1-t)^2}=\sqrt{3+\dfrac{3}{2}t^2}$.
- d(A, l) = d(A, m), zodat elk punt A van a even ver van l ligt als van m.

**3** Bepaal de verzameling van punten even ver van de kruisende rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = r \\ z = -r \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = s \\ z = s \end{cases}$.

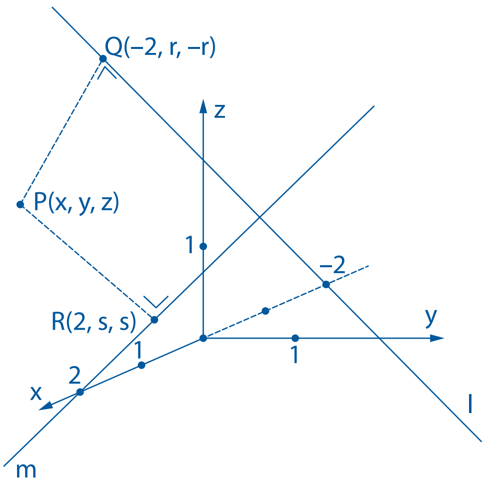
Q(–2, r, –r) is een lopend punt op l en R(2, s, s) is een lopend punt op m.

Noem P(x, y, z) een punt van de gevraagde meetkundige plaats.

$\vec{d}_1(0,1,-1)$ is een richtingsvector van l en

$\vec{d}_2(0,1,1)$ is een richtingsvector van m.

De voorwaarden $PQ \perp l$ en $PR \perp m$ kunnen dan geschreven worden als $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_1 = 0$ en $\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d}_2 = 0$.




Dit geeft:

$$(-2-x)\cdot 0+(r-y)\cdot 1+(-r-z)\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow r=\frac{y-z}{2} \quad (1)$$

en $(2-x)\cdot 0+(s-y)\cdot 1+(s-z)\cdot 1=0 \Leftrightarrow s=\dfrac{y+z}{2} \quad (2)$

Met deze waarden voor r en s drukken we uit dat $|PQ|=|PR|$ of $|PQ|^2=|PR|^2$:

$$(x+2)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=(x-2)^2+(y-s)^2+(z-s)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x+4-2ry+r^2+2rz+r^2=-4x+4-2sy+s^2-2sz+s^2$$

$$\Leftrightarrow 8x+2(s-r)y+2(r+s)z+2r^2-2s^2=0$$

Substitutie van (1) en (2) in deze uitdrukking geeft:

$$8x+2zy+2yz+2\cdot\frac{y^2-2yz+z^2}{4}-2\cdot\frac{y^2+2yz+z^2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x+2yz=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{yz}{4}$$

De gevraagde puntenverzameling bevat de punten P(x, y, z) die voldoen aan de vergelijking: $x=-\dfrac{yz}{4}$.

**Opdracht 90 bladzijde 183**

Gegeven de rechte *MF* met $M(3,0,3)$ en $F(6,6,6)$.

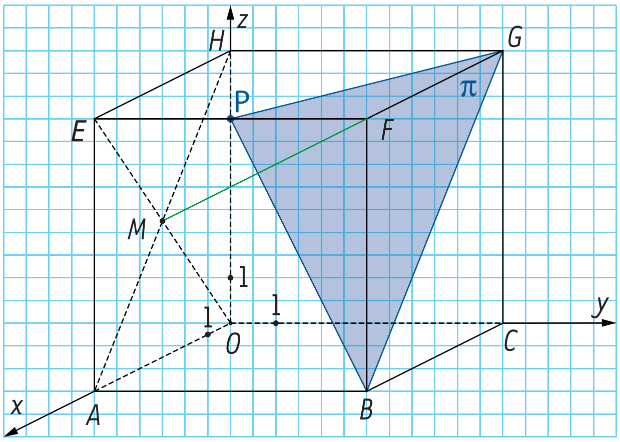
**1** Bepaal een vergelijking van het loodvlak $\pi$ door $B(6,6,0)$ op *MF*.

$\overrightarrow{MF}(3,6,3)$ zodat $\overrightarrow{n_1}(1,2,1)$ een normaalvector is van $\pi$.

$\pi \leftrightarrow 1 \cdot (x-6) + 2 \cdot (y-6) + 1 \cdot (z-0) = 0$
of $\pi \leftrightarrow x + 2y + z - 18 = 0$ .

**2** Teken de doorsnede van $\pi$ met de kubus.

$\pi$ gaat door B(6, 6, 0), P(6, 3, 6) en G(0, 6, 6).




**3** Bereken de hoek tussen $\pi$ en vl$(A, B, G)$.

A(6, 0, 0), B(6, 6, 0) en G(0, 6, 6) zodat $x + z = 6$ een vergelijking is van vl(A, B, G).

Dit vlak heeft $\overrightarrow{n_2}(1,0,1)$ als normaalvector en $\pi$ heeft $\overrightarrow{n_1}(1,2,1)$ als normaalvector.

De hoek $\alpha$ tussen $\pi$ en vl(A, B, G) vinden we uit

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\cdot\|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} \text{ zodat } \alpha = 54°44'8''.$$

**Opdracht 91 bladzijde 183**

De kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ heeft ribbe 6.

**1** Bepaal de coördinaten van de voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn van de kruisende rechten *EG* en *MC* en teken ze.

– E(6,0,6) en G(0,6,6) zodat $\overrightarrow{d_1}(1,-1,0)$ // EG en $EG \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + r \\ y = -r \\ z = 6 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

C(0,6,0) en M(3,0,3) zodat $\overrightarrow{d_2}(1,-2,1)$ // MC en $MC \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 6 - 2s \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$.

K(6 + r, –r, 6) is een lopend punt van EG en L(s, 6 –2s, s) is een lopend punt van MC zodat $\overrightarrow{KL}(s-6-r, 6-2s+r, s-6)$.

– $KL \perp EG \iff \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{d_1} = 0 \iff s - 6 - r - 6 + 2s - r = 0 \iff -2r + 3s = 12 \quad (1)$

– $KL \perp MC \iff \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{d_2} = 0 \iff s - 6 - r - 12 + 4s - 2r + s - 6 = 0 \iff -3r + 6s = 24 \quad (2)$

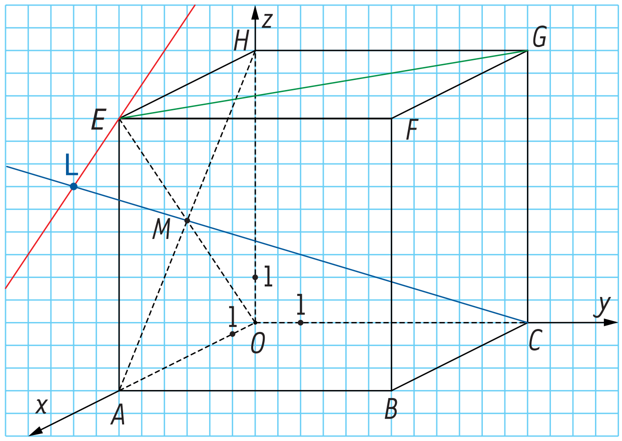
– Uit (1) en (2) volgt $r = 0$ en $s = 4$.

De voetpunten van de gemeenschappelijke loodlijn zijn K(6,0,6) = E(6,0,6) en L(4,–2,4).

– Om L op CM te tekenen, vergelijken we de waarden van de parameter s in de parametervoorstelling van MC:

voor C(0,6,0) is s = 0,
voor M(3,0,3) is s = 3 en
voor L(4,–2, 4) is s = 4.

Hieruit volgt dat $|CL| = \frac{4}{3}|CM|$.




**2** Bereken de afstand van *F* tot *MC*.

F(6, 6, 6) en P(s, 6 –2s, s) is een lopend punt op MC zodat $\overrightarrow{FP}(s-6, -2s, s-6)$.

$FP \perp MC$

$\Leftrightarrow\ s - 6 + 4s + s - 6 = 0$

$\Leftrightarrow\ 6s = 12$

$\Leftrightarrow\ s = 2$

P(2,2,2) zodat $d(F, MC) = |PF| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$

## Opdracht 92 bladzijde 184

$\left(\begin{smallmatrix} & & T & \\ A & B & C & O \end{smallmatrix}\right)$ is een piramide met $|TO| = 3$ als hoogte, dus *TO* staat loodrecht op het grondvlak *OABC*. Het grondvlak is een vierkant met zijde 4.

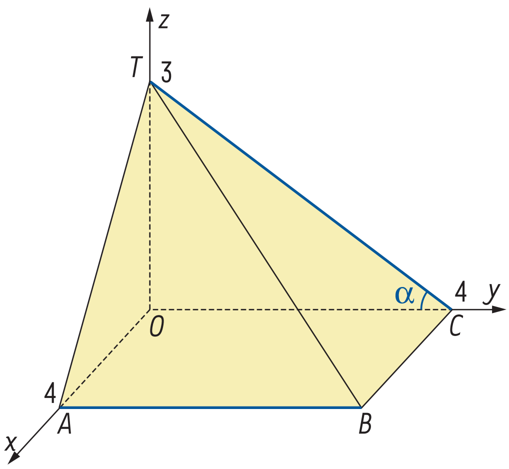
Bereken de hoek tussen

**1** *AB* en *TC*

De hoek tussen AB en TC is de hoek α tussen OC en TC.

In de driehoek TOC vinden we

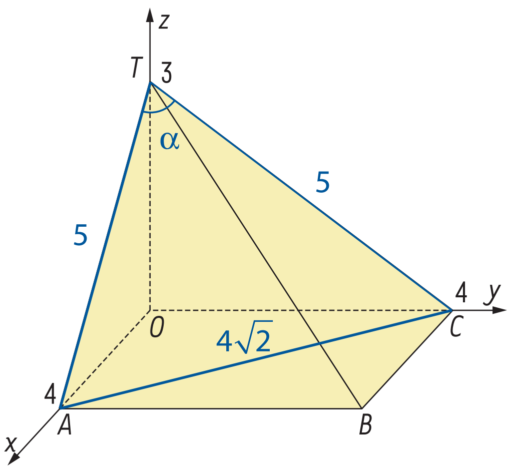
$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36°52'12''$.




**2** *TC* en *TA*

In de gelijkbenige driehoek TAC vinden we

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \alpha = 68°53'59''$.

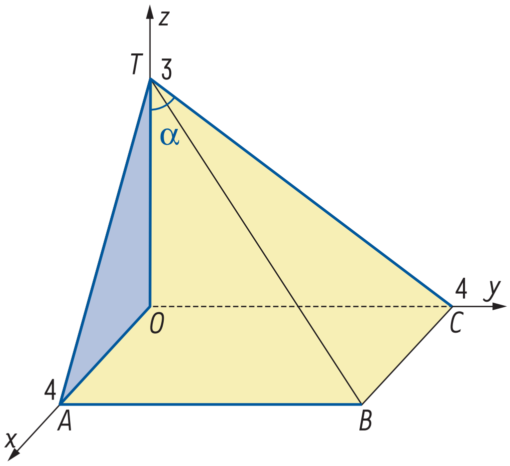


**3** $TC$ en vl$(T, O, A)$

Dit is de hoek tussen TC en TO, de loodrechte projectie van TC op vl(T, O, A).

In de driehoek TOC vinden we

$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53°7'48''$.



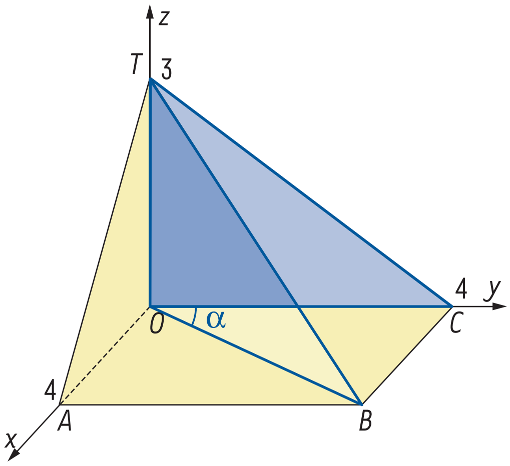

**4** vl$(T, O, C)$ en vl$(T, O, B)$

De snijlijn van deze vlakken is TO.

OC en OB zijn loodlijnen op TO in deze vlakken.

De gevraagde hoek α is die tussen OC en OB.

In de driehoek TOC vinden we $\alpha = 45°$.




**5** vl$(T, A, C)$ en vl$(A, B, C)$

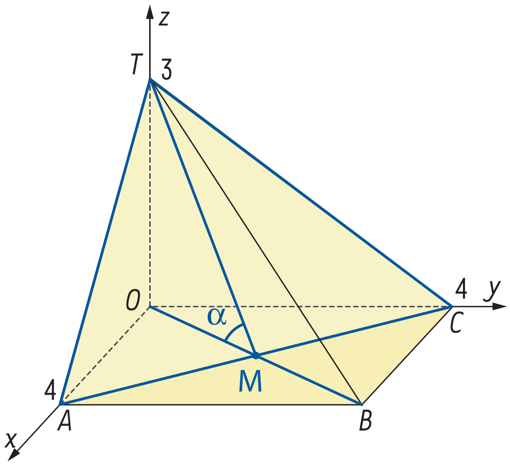
De snijlijn van deze vlakken is AC.

TM en OB zijn loodlijnen op AC in deze vlakken.

De gevraagde hoek α is die tussen TM en OB.

In de driehoek TOM vinden we

$\tan\alpha = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 46°41'10''$.



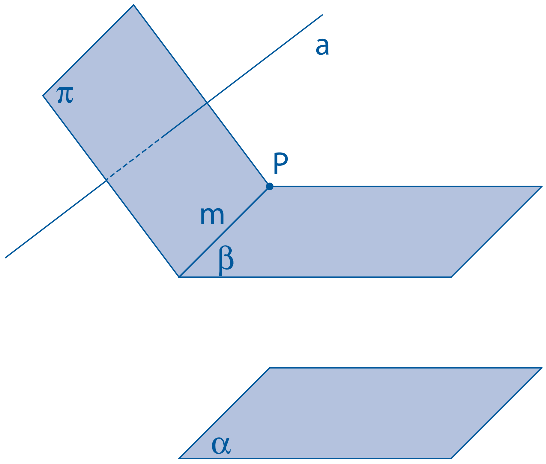
**Opdracht 93 bladzijde 184**

Gegeven de rechte $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - r \\ y = 1 + 4r \\ z = r \end{cases}$, het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y - z = 5$ en het punt $P(1,0,0)$.

Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte $m$ die door $P$ gaat, evenwijdig is met $\alpha$ en loodrecht staat op $a$.

De rechte m is de snijlijn van de vlakken $\pi$ en $\beta$.

Hierbij is $\pi$ het loodvlak op a door P en $\beta$ het vlak door P dat evenwijdig is met $\alpha$.




$(-1,4,1)$ is een stel richtingsgetallen van a, zodat

$\pi \leftrightarrow -1 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-0) = 0$ of

$\pi \leftrightarrow -x + 4y + z + 1 = 0$ .

$\beta \leftrightarrow x - y - z + t = 0$ is evenwijdig met $\alpha$.

Invullen van $(1, 0, 0)$ geeft $t = -1$ en dus
$\beta \leftrightarrow x - y - z - 1 = 0$.

Besluit: $m \leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

**Opdracht 94 bladzijde 184**

Bepaal cartesiaanse vergelijkingen van de vlakken die evenwijdig zijn met $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 6z + 3 = 0$ en op een afstand 1 van de oorsprong gelegen zijn.

$\beta \leftrightarrow 2x - 3y + 6z + t = 0$ is een vlak evenwijdig met $\alpha$.

$d(O,\beta) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + t|}{\sqrt{4+9+36}} = 1$

$\Leftrightarrow |t| = 7$

$\Leftrightarrow t = 7$ of $t = -7$

Er zijn twee vlakken: $\beta_1 \leftrightarrow 2x - 3y + 6z + 7 = 0$ en $\beta_2 \leftrightarrow 2x - 3y + 6z - 7 = 0$.

**Opdracht 95 bladzijde 184**

Bepaal vergelijkingen van de vlakken die loodrecht staan op $\alpha \leftrightarrow x + y = 2$ en $\beta \leftrightarrow x + 2z = 0$ en die op een afstand 5 van de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 2y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$ gelegen zijn.

- Een vlak $\pi$ dat loodrecht staat op $\alpha$ en $\beta$ heeft als richtingsvectoren $\overrightarrow{n_\alpha}(1,1,0)$ en $\overrightarrow{n_\beta}(1,0,2)$.
- Het vlak $\pi_0$ dat evenwijdig is met $\pi$ en door de oorsprong gaat, heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = r + s \\ y = r \\ z = 2s \end{cases}$ $(r, s \in \mathbb{R})$.

  Elimineren van de parameters r en s geeft $\pi_0 \leftrightarrow x = y + \frac{z}{2}$ of $\pi_0 \leftrightarrow 2x - 2y - z = 0$.
- Het vlak $\pi$ heeft dan een vergelijking van de vorm $2x - 2y - z + t = 0$.
- Een parametervoorstelling van m is:

  $$m \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 4r \\ y = 3r \\ z = -\frac{7}{3} + 2r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

  $\vec{d}(4,3,2)$ is een richtingsvector van m.
- $\vec{n}(2,-2,-1)$ is een normaalvector van $\pi$.

  Omdat $\vec{d} \cdot \vec{n} = 8 - 6 - 2 = 0$ zal $\vec{d} \perp \vec{n}$ zodat $m \,//\, \pi$.

  Bijgevolg zal $d(m, \pi) = d(P, \pi)$ met P een punt op m, bv. $P(3, 2, -1)$.
- $d(m, \pi) = 5$

  $\Leftrightarrow d(P, \pi) = 5$

  $\Leftrightarrow \dfrac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1 + t|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 5$

  $\Leftrightarrow |3 + t| = 15$

  $\Leftrightarrow 3 + t = 15$ of $3 + t = -15$

  $\Leftrightarrow t = 12$ of $t = -18$
- Er zijn twee vlakken: $\pi_1 \leftrightarrow 2x - 2y - z + 12 = 0$ en $\pi_2 \leftrightarrow 2x - 2y - z - 18 = 0$.

**Opdracht 96 bladzijde 184**

Gegeven de punten $A(-1,4,0)$, $B(6,4,0)$, $C(0,0,2)$ en $D(1,3,3)$ en de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ y = z \end{cases}$.

**1** Op de rechte $m$ ligt een punt $P$ zodanig dat $AC \perp BP$.

Bereken de coördinaat van $P$.

P(1 + r, r, r) is een lopend punt op m.

We drukken uit dat $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.

Met $\overrightarrow{AC}(1,-4,2)$ en $\overrightarrow{BP}(-5+r, -4+r, r)$ bekomen we $-5 + r + 16 - 4r + 2r = 0 \Leftrightarrow r = 11$.

Het gezochte punt is P(12, 11, 11).

**2** Op de rechte $m$ ligt een punt $Q$ zodanig dat de inhoud van het viervlak $ABCQ$ tweemaal zo groot is als de inhoud van het viervlak $ABCD$.

Bereken de coördinaat van $Q$.

Aangezien de inhoud van twee viervlakken met zelfde grondvlak enkel wijzigt met de hoogte moet Q twee keer zo ver van vl(A, B, C) liggen als D.

vl(A, B, C) $\leftrightarrow y + 2z - 4 = 0$ en met Q(1 + t, t, t) op m vinden we:

$$2 \cdot \frac{|3+6-4|}{\sqrt{5}} = \frac{|t+2t-4|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 10 = |3t-4|$$

$$\Leftrightarrow 10 = 3t - 4 \text{ of } -10 = 3t - 4$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{14}{3} \text{ of } t = -2$$

Besluit: $Q\left(\frac{17}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ of $Q(-1,-2,-2)$.

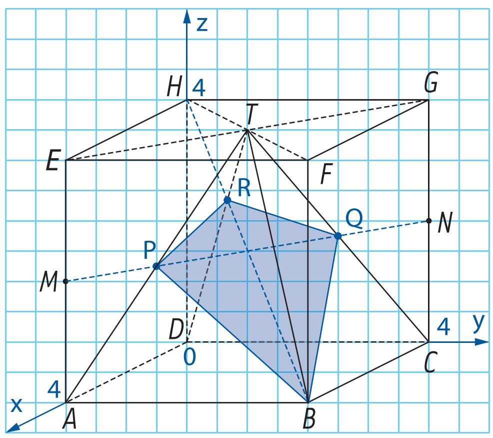
**Opdracht 97 bladzijde 185**

In een kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 4 staat een piramide met grondvlak $ABCD$ en top $T$, waarbij $T$ het snijpunt is van $EG$ en $HF$. $M$ is het midden van $[AE]$ en $N$ is het midden van $[GC]$. De piramide wordt door vl$(M, N, H)$ in twee delen verdeeld.

Bereken de inhoud van het onderste van die twee delen.

– Kies een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.

De inhoud van de piramide is dan $\frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3}$.




– We construeren eerst de doorsnede van de piramide met vl(M, N, H).

Omdat de snijlijn HN van dit vlak met het achtervlak van de kubus evenwijdig is met de snijlijn door M van het voorvlak, behoort B tot vl(M, N, H). Dit is meteen het eerste punt van de doorsnede.

MN ligt in het diagonaalvlak ACGE, waarin ook TA en TC liggen. Het snijpunt van TA en MN is het punt P en het snijpunt van TC en MN is Q.

HB ligt net zoals TD in het diagonaalvlak DBFH, zodat het snijpunt R van HB en TD ook tot de doorsnede behoort.

De doorsnede van de piramide met vl(M, N, H) is de vierhoek BQRP.

– Met M(4,0,2), N(0,4,2) en H(0,0,4) vinden we $x + y + 2z - 8 = 0$ als vergelijking van vl(M, N, H).

Het snijpunt van dit vlak met TA $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + r \\ y = -r \\ z = -2r \end{cases}$ is P(3,1,2), het snijpunt met

TC $\leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 4 - s \\ z = 2s \end{cases}$ is Q(1,3,2) en het snijpunt met HB $\leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases}$ is $R\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

– We berekenen de inhoud van het bovenste deel van de piramide; dit is een piramide met top T en grondvlak BQRP.

De hoogte is de afstand van T(2, 2, 4) tot vl(M, N, H), dit is $\frac{|2+2+8-8|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$.

Het grondvlak is een vlieger want $\overrightarrow{MN}(-4,4,0)$ staat loodrecht op $\overrightarrow{HB}(4,4,-4)$,

$|PR| = |RQ| = \sqrt{\frac{10}{3}}$ en $|PB| = |BQ| = \sqrt{14}$.

De oppervlakte van BQRP is $\frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |RB| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ .

Het bovenste deel heeft als inhoud $\frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{32}{9}$.

– Het onderste deel heeft als inhoud $\frac{64}{3} - \frac{32}{9} = \frac{160}{9}$.