Hoofdstuk 1

Oneindige rijen

Opdracht 1 bladzijde 8

Hieronder zie je telkens de termen u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, … van een rij.

Geef het volgende getal in de rij, als we ervan uitgaan dat de regelmaat bewaard blijft.

1 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$

2 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$

3 1, 2, 6, 24, 120, 720

4 $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{13}{6}$

Opdracht 2 bladzijde 8

Bij de rij 1, 2, 4, 8, 16, 32, … hoort het voorschrift $u_n = 2^{n-1}$.

Geef voor de volgende rijen een voorschrift dat u_n uitdrukt in functie van het volgnummer n.

1 1, 4, 9, 16, …

$u_n = n^2$

2 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

$u_n = \frac{n}{n+1}$

3 2, 6, 10, 14, …

$u_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

4 $5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \ldots$

$u_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Opdracht 3 bladzijde 8

Noteer de eerste vijf termen van een rij waarbij $u_n = 3 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 4$.

4, 12, 36, 108, 324

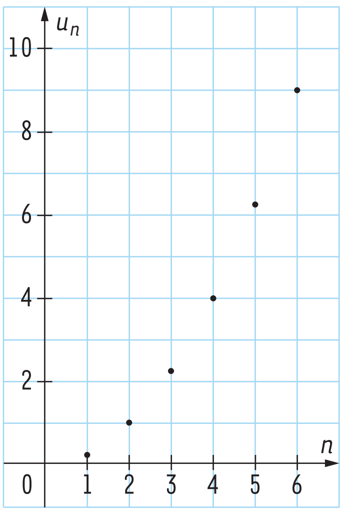
Opdracht 4 bladzijde 8

Geef het passende voorschrift bij de gegeven grafiek.

a $u_n = 2n - 3$

b $u_n = \frac{1}{4}n^2$

c $u_n = 2^{n-2}$



De koppels (2, 1), (4, 4) en (6, 9) voldoen enkel aan $u_n = \frac{1}{4}n^2$. Antwoord b is juist.

Opdracht 5 bladzijde 12

Welke van de volgende rijen zijn rekenkundig? Welke zijn meetkundig?
Bepaal ook telkens u_{10}.

1 $1, -1, 1, -1, \ldots$ is een meetkundige rij met $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1 \cdot (-1)^9 = -1$.

2 $2\pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ is een rekenkundige rij met $u_{10} = u_1 + 9v = 2\pi + 9 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$.

3 $\sqrt{18}, -6, \sqrt{72}, -12, \ldots$ is een meetkundige rij met $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = \sqrt{18} \cdot (-\sqrt{2})^9 = -96$.

4 $2, 2, 2, 2, \ldots$ is een constante rij, die zowel meetkundig als rekenkundig is en waarbij $u_{10} = 2$.

Opdracht 6 bladzijde 12

Geef een expliciet voorschrift.

1 $2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \ldots$ heeft als expliciet voorschrift $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$.

2 $64, 48, 36, 27, \frac{81}{4}, \ldots$ is een meetkundige rij met expliciet voorschrift

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{4^{n-4}}$.

3 $2 + a, 2 + 4a, 2 + 7a, 2 + 10a, \ldots$ is een rekenkundige rij met expliciet voorschrift

$u_n = u_1 + (n-1) \cdot v = 2 + a + (n-1) \cdot 3a = 2 + (3n-2) \cdot a$.

4 $64, -16, 4, -1, \frac{1}{4}, \ldots$ is een meetkundige rij met expliciet voorschrift

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 64 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -(-4)^{4-n}$.

Opdracht 7 bladzijde 13

Naderen de termen van de volgende rijen tot een bepaald getal bij onbeperkt toenemende volgnummers?

Als dit zo is, bepaal dan dit getal.

1 $u_n = \frac{4n+3}{n+1}$

De termen van $u_n = \frac{4n+3}{n+1}$ naderen tot 4 bij toenemende waarden van n.

2 $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

De termen van $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ worden steeds groter bij toenemende waarden van n.

Ze naderen niet tot een reëel getal, maar tot $+\infty$.

3 $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$

Dit is de rij −1, 1, −1, 1, −1, ... De termen naderen niet tot een bepaald getal voor toenemende waarden van n.

4 $u_n = \sin(n\pi)$

Dit is de rij 0, 0, 0, 0, 0, ... De termen naderen tot 0 bij toenemende waarden van n.

Opdracht 8 bladzijde 18

Bewijs met behulp van de gepaste definitie.

1 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Er geldt: $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n.$

Bij elke $\varepsilon > 0$ kiezen we daarom $N \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. (2)

Er geldt dan: $n > N \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon.$ (3)

Uit (2) en (3) volgt dat aan (1) voldaan is:

voor elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, namelijk $N \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,

zodat uit $n > N$ volgt dat $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$.

2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n - 1}{n + 2} = 2$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Er geldt:

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{n+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+2 \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 2 < n \Leftrightarrow \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} < n.$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ kiezen we daarom $N \geqslant \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$. (2)

Er geldt dan: $n > N \Rightarrow n > \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon.$ (3)

Uit (2) en (3) volgt dat aan (1) voldaan is:

voor elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, namelijk $N \geqslant \dfrac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$,

zodat uit $n > N$ volgt dat $\left|\dfrac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$.

3 $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - n^2) = -\infty$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, r > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \;\Rightarrow\; 1 - n^2 < -r \qquad (1)$$

Er geldt: $1 - n^2 < -r \;\Leftrightarrow\; 1 + r < n^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1+r} < n$.

Bij elke $r > 0$ kiezen we daarom $N \geqslant \sqrt{1+r}$. (2)

Er geldt dan: $n > N \;\Rightarrow\; n > \sqrt{1+r} \;\Rightarrow\; 1 - n^2 < -r$. (3)

Uit (2) en (3) volgt dat aan (1) voldaan is:

voor elke $r > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, namelijk $N \geqslant \sqrt{1+r}$,

zodat uit $n > N$ volgt dat $1 - n^2 < -r$.

Opdracht 9 bladzijde 18

Toon aan dat bij een convergente rij de termen willekeurig dicht bij elkaar komen te liggen, met andere woorden:

als de rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$ convergeert, dan geldt:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \text{ en } m > N \Rightarrow \left|u_m - u_n\right| < \varepsilon$$

Er is gegeven dat de rij $u_1, u_2, u_3, \ldots$ convergeert.

Stel $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, dan geldt:

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}_0 : n > N_1 \;\Rightarrow\; |u_n - L| < \varepsilon_1 \qquad (1)$$

en dus ook:

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}_0 : m > N_1 \;\Rightarrow\; |u_m - L| < \varepsilon_1 \qquad (2)$$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \text{ en } m > N \;\Rightarrow\; |u_m - u_n| < \varepsilon \qquad (3)$$

Kies een willekeurig kleine $\varepsilon > 0$ en stel vervolgens $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. (4)

Uit (1) en (2) volgt dat er bij $\dfrac{\varepsilon}{2}$ een waarde N_1 bestaat zodat

$$n > N_1 \;\Rightarrow\; |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ en } m > N_1 \;\Rightarrow\; |u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

Stel $N = N_1$, dan kunnen we (5) herschrijven als:

$$n > N \;\Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m > N \;\Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < u_m < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

zodat: $m > N \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < u_m < L + \frac{\varepsilon}{2}$

$n > N \Rightarrow -L - \frac{\varepsilon}{2} < -u_n < -L + \frac{\varepsilon}{2}$

Tellen we beide ongelijkheden rechts lid aan lid op, dan vinden we:

$$n > N \text{ en } m > N \Rightarrow -\varepsilon < u_m - u_n < \varepsilon$$

Dit kunnen we opnieuw anders schrijven:

$$n > N \text{ en } m > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon \qquad (6)$$

Uit (4), (5) en (6) volgt dat aan (3) voldaan is: voor elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, zodat uit $n > N$ en $m > N$ volgt dat $|u_m - u_n| < \varepsilon$.

Opdracht 10 bladzijde 22

Zijn de rijen convergent of divergent? Bereken zo mogelijk de limiet.

1 $u_n = \dfrac{n^2}{3n^2 + 5n - 1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 5n - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2 + 5x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

De rij is convergent met limiet $\frac{1}{3}$.

2 $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Dit is de rij 0, −1, 0, 1, 0, −1, 0, 1, ... Deze rij is divergent; de limiet bestaat niet.

3 $u_n = \dfrac{n^2 + 6n + 9}{-n - 3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 6n + 9}{-n - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{-x - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

De rij is divergent met limiet $-\infty$.

4 $u_n = 2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

Omdat $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, is $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Hieruit volgt dat $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 2 + 0 = 2.$

De rij is convergent met limiet 2.

5 $u_n = \dfrac{n}{e^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

De rij is convergent met limiet 0.

6 $u_n = \ln(n+1) - \ln(n+3)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\big(\ln(n+1)-\ln(n+3)\big) &= \lim_{x\to+\infty}\big(\ln(x+1)-\ln(x+3)\big)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x+3}\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+3}\right)\\ &= \ln 1\\ &= 0\end{aligned}$$

De rij is convergent met limiet 0.

Opdracht 11 bladzijde 24

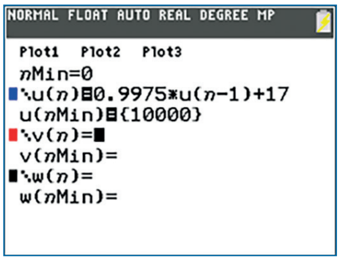
Dagelijks verdampt gemiddeld 0,25 % van de hoeveelheid water in een vijver.
Om het waterpeil niet te ver te laten zakken, laat men aan het eind van elke dag 17 m^3 water in de vijver stromen. Bij de start van de metingen is er 10 000 m^3 water in de vijver.

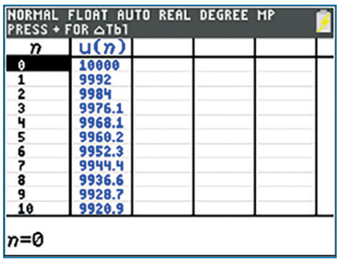
Noem u_n de hoeveelheid water in de vijver op het einde van dag n.

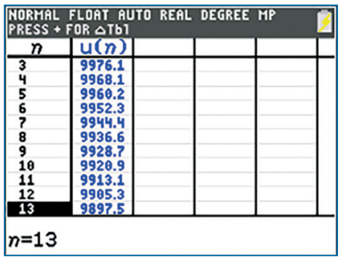
1 Geef een voorschrift voor u_n.

$u_n = 0{,}9975u_{n-1} + 17$ met $u_0 = 10\,000$

2 Na hoeveel dagen bevat de vijver voor het eerst minder dan 9900 m^3 water?







Na 13 dagen bevat de vijver voor het eerst minder dan 9900 m^3 water.

3 Zal de vijver op een gegeven moment leeg raken? Zo nee, hoeveel water blijft er dan in de vijver?

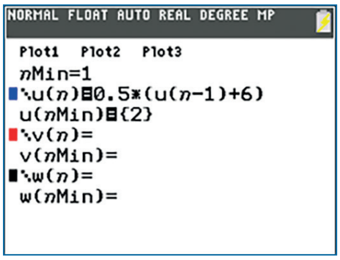
Als de limiet L bestaat, dan vinden we deze als volgt:

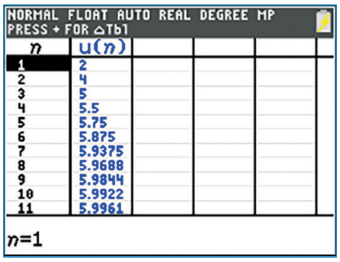
$L = 0{,}9975L + 17 \iff 0{,}0025L = 17 \iff L = 6800$

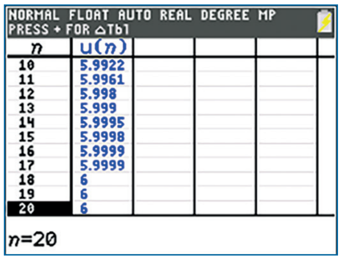
Er blijft steeds minstens 6800 m^3 water in de vijver.

Opdracht 12 bladzijde 27

Bewijs dat de rij $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$ met $u_1 = 2$ convergent is door aan te tonen dat ze stijgend en naar boven begrensd is. Bepaal ook de limiet van deze rij.







We vermoeden dat de rij stijgend is en dat 6 een bovengrens is. Vermoedelijk is 6 ook de limiet van deze rij.

– We bewijzen eerst dat de rij stijgend is. We gebruiken hiervoor een bewijs door inductie.

- Inductiebasis

  $u_1 = 2 < u_2 = 4$ (1)

- Inductiestap

  Als $u_k < u_{k+1}$, dan geldt $u_k + 6 < u_{k+1} + 6$, zodat ook $\frac{1}{2}(u_k + 6) < \frac{1}{2}(u_{k+1} + 6)$ of $u_{k+1} < u_{k+2}$.

  De ongelijkheid geldt dus ook voor $n = k + 1$ als ze geldt voor $n = k$. (2)

- Besluit

  Uit (1) en (2) volgt dat $u_n < u_{n+1}$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

– We bewijzen nadien dat 6 een bovengrens is.

- Voor $n = 1$ geldt: $u_1 = 2 \leqslant 6$. (3)
- Als $u_k \leqslant 6$, dan geldt $u_k + 6 \leqslant 12$,

  zodat $\frac{1}{2}(u_k + 6) \leqslant 6$, waaruit volgt dat $u_{k+1} \leqslant 6$. (4)
- Uit (3) en (4) volgt dat $u_n \leqslant 6$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

– De gegeven rij is dus stijgend en naar boven begrensd, waaruit volgt dat ze een limiet heeft. Stel L die limiet, dan geldt:

$$L = \frac{1}{2}(L + 6) \Leftrightarrow \frac{1}{2}L = 3 \Leftrightarrow L = 6$$

De limiet is dus 6.

Opdracht 13 bladzijde 31

Geef een expliciet voorschrift.

1 $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \ldots$

$u_n = \frac{n+2}{6}$

3 $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$

$u_n = -\frac{n+1}{n+2}$

4 $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

$u_n = (-1)^n \cdot n$

5 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \ldots$

$u_n = \frac{n}{2^n}$

6 $4, -8, 12, -16, \ldots$

$u_n = (-1)^{n-1} \cdot 4n$

Opdracht 14 bladzijde 31

De getallen 3, −1, 7 zijn drie opeenvolgende getallen uit de rij $\frac{5+(-2)^n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

De opvolger van 7 is:

A −15 **B** −9 **C** 9 **D** 15

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2018)

$u_2 = 3,\ u_3 = -1,\ u_4 = 7$

$u_5 = \frac{5+(-2)^5}{3} = \frac{-27}{3} = -9$

Antwoord B is juist.

Opdracht 15 bladzijde 31

Gegeven de rij $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{6}{5},\ a_3 = \frac{24}{25},\ a_4 = \frac{24}{25},\ a_5 = \frac{144}{125}, \ldots$

Wat is het juiste voorschrift voor a_n?

A $a_n = \frac{n!}{5^n}$ **B** $a_n = \frac{(n-1)!}{5^{n-1}}$ **C** $a_n = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$

D $a_n = \frac{(n-1)!}{5^{n+1}}$ **E** geen van de voorgaande

(Bron © Alabama Statewide Math Contest, 2017)

$a_1 = 2 = \frac{2!}{5^0},\ a_2 = \frac{6}{5} = \frac{3!}{5^1},\ a_3 = \frac{24}{25} = \frac{4!}{5^2},\ a_4 = \frac{24}{25} = \frac{120}{125} = \frac{5!}{5^3},\ a_5 = \frac{144}{125} = \frac{720}{625} = \frac{6!}{5^4}, \ldots$

$a_n = \frac{(n+1)!}{5^{n-1}}$

Antwoord E is juist.

Opdracht 16 bladzijde 31

$F(1) = -1$ en $F(n) = F(n-1) + \frac{1}{2}$ voor alle gehele waarden $n > 1$.

Bereken $F(101)$.

A 49 B 50 C 51 D 52 E 53

(Bron © St. loud State University Math Contest, 2019)

We kunnen dit noteren als $u_1 = -1$ en $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2}$.

Dit is een rekenkundige rij met expliciet voorschrift: $u_n = -1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$.

Bijgevolg geldt: $u_{101} = -1 + 100 \cdot \frac{1}{2} = 49$.

Antwoord A is juist.

Opdracht 17 bladzijde 32

Bereken de 12e term van de rekenkundige rij waarvan de eerste drie termen de getallen $\frac{\sqrt{3}+1}{5}$, $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ en $\frac{3\sqrt{3}-1}{5}$ zijn.

A $\frac{12\sqrt{3}-10}{5}$ B $\frac{12\sqrt{3}-1}{5}$ C $\frac{13\sqrt{3}-11}{5}$

D $\frac{13\sqrt{3}+13}{5}$ E geen van de voorgaande

(Bron © Alabama Statewide Math Contest, 2018)

Dit is een rekenkundige rij met $u_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{5}$ en $v = \frac{\sqrt{3}-1}{5}$.

Bijgevolg geldt: $u_{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{5} + 11 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{5} = \frac{12\sqrt{3}-10}{5}$.

Antwoord A is juist.

Opdracht 18 bladzijde 32

Geef een expliciet voorschrift.

1 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \ldots$

Dit is de rij $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = \frac{n}{n+4}$.

2 $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \ldots$

Dit is de rij $\frac{2}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{16}, \frac{32}{25}, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = \frac{2^n}{n^2}$.

3 $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

Dit is de rij $1 + 1, 4 + 1, 9 + 1, 16 + 1, 25 + 1, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = n^2 + 1$.

4 $0, 2, 0, 2, 0, \ldots$

Dit is de rij $1 - 1, 1 + 1, 1 - 1, 1 + 1, 1 - 1, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = 1 + (-1)^n$.

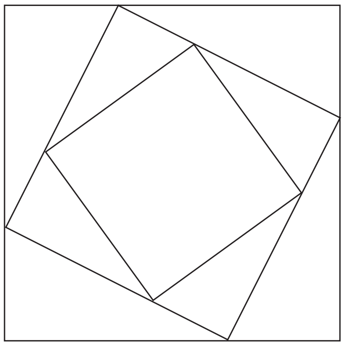
5 $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$

Dit is de rij $\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{12}{2}, \frac{20}{2}, \ldots$ of ook $\frac{1 \cdot 0}{2}, \frac{2 \cdot 1}{2}, \frac{3 \cdot 2}{2}, \frac{4 \cdot 3}{2}, \frac{5 \cdot 4}{2}, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

6 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$

Dit is de rij $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Opdracht 19 bladzijde 32



Construeer een rij van vierkanten als volgt:

- vertrek van een eerste vierkant (rangnummer $n = 1$) met zijde 9, dit is het grootste vierkant;
- de hoekpunten van elk volgend vierkant verdelen de vier zijden van het vorige vierkant telkens volgens de verhouding 1:2.

Een tekening voor de vierkanten met rangnummers $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$ vind je terug in de figuur.

Vanaf welk rangnummer n wordt de oppervlakte van het vierkant kleiner dan 10?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2018)

Als de oppervlakte van een vierkant z^2 is, dan is de oppervlakte van het volgende vierkant:

$z^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}z \cdot \frac{2}{3}z = \frac{5}{9}z^2.$

De rij van de oppervlaktes van de vierkanten is bijgevolg een meetkundige rij met

$u_1 = 9^2 = 81$ en $q = \frac{5}{9}$: 81, 45, 25, $\frac{125}{9}$, $\frac{625}{81}$, ...

De vijfde term in deze rij is $\frac{625}{81} < 10$.

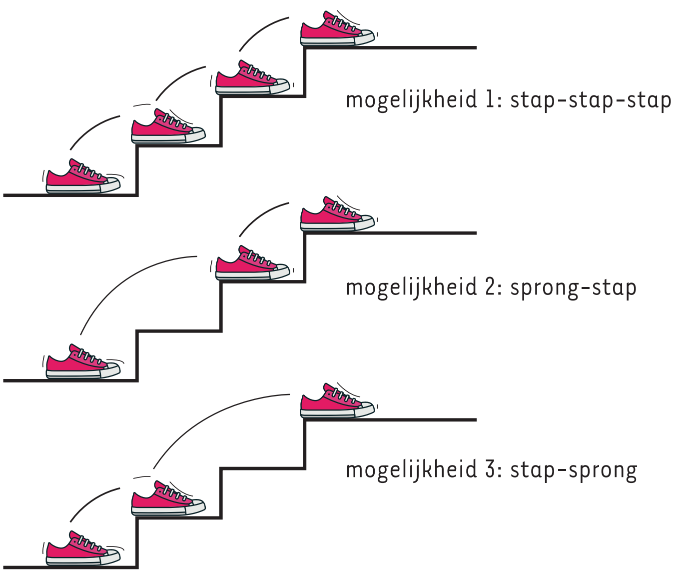
Antwoord B is juist.

Opdracht 20 bladzijde 33

Om een trap op te gaan, kun je trede per trede nemen of twee (of meer) treden tegelijkertijd, of een combinatie van beide.

Stel: 'stap = trede per trede' en 'sprong = twee treden tegelijkertijd'. We laten de mogelijkheid met meer dan twee treden buiten beschouwing.

Een trap die bestaat uit drie treden kun je op drie mogelijke manieren oplopen:



1 Hoeveel mogelijkheden heb je bij een trap met vier treden?

Een trap met vier treden kun je oplopen als:

- een trap met drie treden plus een stap $\rightarrow$ dit kan op 3 manieren
- een trap met twee treden plus een sprong $\rightarrow$ dit kan op 2 manieren

In totaal zijn er dus 5 mogelijkheden om een trap met vier treden op te lopen.

2 En bij een trap met vijf treden?

Een trap met vijf treden kun je oplopen als:

- een trap met vier treden plus een stap $\rightarrow$ dit kan op 5 manieren
- een trap met drie treden plus een sprong $\rightarrow$ dit kan op 3 manieren

In totaal zijn er dus 8 mogelijkheden om een trap met vijf treden op te lopen.

3 Zoek een (recursief) voorschrift dat het aantal mogelijkheden geeft om een trap met *n* treden op te lopen.

Herken je deze rij? Kun je dit verklaren?

Voor een trap met n treden hebben we het aantal mogelijkheden voor een trap met n – 1 treden (waaraan een stap wordt toegevoegd), aangevuld met het aantal mogelijkheden voor een trap met n – 2 treden (waaraan een sprong wordt toegevoegd).

We vinden dus $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 2$; dit is een rij van Fibonacci.

Opdracht 21 bladzijde 33

Michaela vond het volgende patroon bij het oplossen van een wiskundig probleem:

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$
$$\ldots$$

Wat is het laatste getal in de 100e rij?

A 10 000 **B** 10 020 **C** 10 120 **D** 10 200 **E** 10 210

(Bron © St. Cloud State University Math Contest, 2015)

De laatste getallen in elke rij vormen zelf de rij 3, 8, 15, 24, 35, ... of ook $1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 6, 5 \cdot 7, \ldots$ met expliciet voorschrift $u_n = n \cdot (n + 2)$.

Bijgevolg geldt: $u_{100} = 100 \cdot 102 = 10\,200$.

Antwoord D is juist.

Opdracht 22 bladzijde 34

Zijn de volgende rijen convergent of divergent? Bereken zo mogelijk de limiet.

1 $u_n = \dfrac{1+2n}{1-2n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2n}{1-2n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2x} = -1$$

De rij is convergent met limiet –1.

2 $u_n = \dfrac{n^2-4n+4}{n-2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-4n+4}{n-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

De rij is divergent met limiet +∞.

3 $u_n = \dfrac{e^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

De rij is divergent met limiet +∞.

Opdracht 23 bladzijde 34

Bereken a als $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{an^2}{(2n+1)(n-2)} = 5$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{an^2}{(2n+1)(n-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{(2x+1)(x-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{2x^2} = 5 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow a = 10$$

Opdracht 24 bladzijde 34

Een kippenboer start met 8000 kippen. In het begin van de maand verhandelt hij 25 % van zijn voorraad, maar op het einde van de maand komen er telkens 500 kippen bij.

1 Schrijf een recursief voorschrift bij dit dynamisch proces.

$u_n = 0{,}75u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 8000$

2 Bepaal de eventuele limietwaarde voor het aantal kippen.

Als de limiet L bestaat, dan vinden we deze als volgt:

$$L = 0{,}75L + 500 \Leftrightarrow 0{,}25L = 500 \Leftrightarrow L = 2000$$

Het aantal kippen zal naderen tot de limietwaarde 2000.

Opdracht 25 bladzijde 34

Stel dat je ziek bent en dat je gedurende een lange periode elke morgen een bepaald medicijn moet innemen. In de loop van de dag zal de hoeveelheid actieve bestanddelen van dit medicijn in je lichaam afnemen.

Onderzoek heeft uitgewezen dat gemiddeld na 24 uur nog 50 % van de actieve bestanddelen van dit medicijn in je lichaam overblijft. De hoeveelheid medicijn die jij elke morgen moet innemen, bevat 5 mg actieve bestanddelen.

We onderzoeken voor de eerste 20 dagen de hoeveelheid actieve bestanddelen in je lichaam 's morgens onmiddellijk na de inname.

1 Geef een recursief voorschrift bij dit proces.

$u_n = 0{,}50u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 0$

2 De hoeveelheid actieve bestanddelen in je lichaam evolueert naar een bepaalde waarde.

Bereken deze limietwaarde.

Als de limiet L bestaat, dan vinden we deze als volgt:

$$L = 0{,}50L + 5 \iff 0{,}50L = 5 \iff L = 10$$

De hoeveelheid actieve bestanddelen in je lichaam zal naderen tot de limietwaarde 10.

Opdracht 26 bladzijde 34

Veronderstel dat $m \neq 0$ een vast natuurlijk getal is.

Waaraan is $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nm}{m-n}$ gelijk?

A $\dfrac{m}{m-1}$ **B** m **C** 1 **D** -1 **E** $-m$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2014)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{nm}{m-n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xm}{m-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{mx}{-x} = -m$$

Antwoord E is juist.

Opdracht 27 bladzijde 35

Zijn de volgende rijen convergent of divergent? Bereken zo mogelijk de limiet.

1 $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

$\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$

Omdat $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, volgt uit de insluitingsstelling voor limieten dat

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0.$

De rij is convergent met limiet 0.

2 $u_n = \sin\dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$$

De rij is convergent met limiet 0.

3 $u_n = \ln(2n+1) - \ln(n+2)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\big(\ln(2n+1)-\ln(n+2)\big) &= \lim_{x\to+\infty}\big(\ln(2x+1)-\ln(x+2)\big)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2x+1}{x+2}\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}\right)\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

De rij is convergent met limiet ln 2.

4 $u_n = \sqrt{n}\cdot\cos(n\pi)$

Omdat $\sqrt{2n}\cdot\cos(2n\pi) = \sqrt{2n}\cdot 1 = \sqrt{2n}$, heeft de deelrij u_{2n} als limiet $+\infty$.

Omdat $\sqrt{2n-1}\cdot\cos\big((2n-1)\pi\big) = \sqrt{2n-1}\cdot(-1) = -\sqrt{2n-1}$, heeft de deelrij u_{2n-1} als limiet $-\infty$.

De gegeven rij divergeert bijgevolg en heeft geen limiet.

Opdracht 28 bladzijde 35

Gegeven de rij $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$.

1 Bereken de eerste vier termen van deze rij.

$$u_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} = \frac{6}{9}$$

$$u_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^2} = \frac{10}{16}$$

2 Bereken de limiet van deze rij.

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

In de teller passen we de somformule voor een eindige rekenkundige rij toe:

$$u_n = \frac{n \cdot \dfrac{1+n}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Opdracht 29 bladzijde 35

Bewijs met behulp van de gepaste definitie.

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-2}{n^2} = 1$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \;\Rightarrow\; \left|\frac{n^2-2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Er geldt: $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\dfrac{-2}{n^2}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2}{n^2} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2}{\varepsilon} < n^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} < n.$

Bij elke $\varepsilon > 0$ kiezen we daarom $N \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. (2)

Er geldt dan: $n > N \;\Rightarrow\; n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{n^2-2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon.$ (3)

Uit (2) en (3) volgt dat aan (1) voldaan is:

voor elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, namelijk $N \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$,

zodat uit $n > N$ volgt dat $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon.$

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} {}^2\log n = +\infty$

We moeten aantonen dat:

$$\forall\, r > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \;\Rightarrow\; {}^2\log n > r \qquad (1)$$

Er geldt: ${}^2\log n > r \;\Leftrightarrow\; n > 2^r.$

Bij elke $r > 0$ kiezen we daarom $N \geqslant 2^r$. (2)

Er geldt dan: $n > N \;\Rightarrow\; n > 2^r \;\Rightarrow\; {}^2\log n > r$. (3)

Uit (2) en (3) volgt dat aan (1) voldaan is:

voor elke $r > 0$ kunnen we een $N \in \mathbb{N}_0$ vinden, namelijk $N \geqslant 2^r$,

zodat uit $n > N$ volgt dat ${}^2\log n > r$.

Opdracht 30 bladzijde 35

De rij met expliciet voorschrift $u_n = \dfrac{3n}{6n-3}$ heeft als limiet $\dfrac{1}{2}$.

Vanaf welk volgnummer n liggen alle termen van de rij op een afstand kleiner dan ε van deze limiet?

A $n > \dfrac{2\varepsilon + 1}{4\varepsilon}$ **B** $n > \dfrac{\varepsilon + 6}{4\varepsilon}$ **C** $n > \dfrac{2\varepsilon + 1}{6\varepsilon - 3}$

D $n > \dfrac{2\varepsilon - 1}{4\varepsilon}$ **E** $n > \dfrac{2\varepsilon + 3}{4\varepsilon}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{6n-3} = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : n > N \Rightarrow \left| \frac{3n}{6n-3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Er geldt:

$$\left| \frac{3n}{6n-3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{6n-(6n-3)}{2(6n-3)} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3}{2(6n-3)} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n-2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 4n-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} + 2 < 4n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\varepsilon + 1}{4\varepsilon} < n$$

Antwoord A is juist.

Opdracht 31 bladzijde 35

Gegeven is de rij $\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \end{cases}$.

1 Bereken u_1, u_2, u_3, u_4 en $u_{999\,999}$ bij startwaarde $a = 2$.

$$u_n = \frac{1+u_{n-1}}{1-u_{n-1}} \text{ met } u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$u_2 = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$u_4 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{2} = 2 = u_0$$

Hieruit volgt dat $u_5 = u_1$, $u_6 = u_2$, $u_7 = u_3$, $u_8 = u_0$, ... zodat $u_{999999} = u_{4 \cdot 249999 + 3} = \frac{1}{3}$.

2 We kunnen ook andere startwaarden nemen. Als we $a = 0$ kiezen, heeft de rij maar twee termen: u_0 en u_1. De term u_2 is namelijk niet gedefinieerd.
Behalve $a = 0$ zijn er nog twee startwaarden waarbij er termen niet gedefinieerd zijn.

Welke twee startwaarden zijn dat? Licht je antwoord toe.

Als $a = u_0 = 1$, dan bestaat $u_1 = \dfrac{1+u_0}{1-u_0}$ niet.

Als $a = u_0 = -1$, dan is $u_1 = \dfrac{1+u_0}{1-u_0} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$, $u_2 = \dfrac{1+u_1}{1-u_1} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$ en $u_3 = \dfrac{1+u_2}{1-u_2}$ bestaat niet.

3 We werken nu verder met startwaarden waarbij u_1, u_2 en u_3 wél gedefinieerd zijn.
Toon algebraïsch aan dat de uitdrukking die je voor u_2 krijgt vereenvoudigd kan worden tot $-\dfrac{1}{a}$.

$$u_0 = a$$

$$u_1 = \frac{1+a}{1-a}$$

$$u_2 = \frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = \frac{1-a+1+a}{1-a-1-a} = \frac{2}{-2a} = -\frac{1}{a}$$

4 Nu je u_2 gevonden hebt, kun je ook u_4 bepalen. Toon aan dat $u_4 = a$.

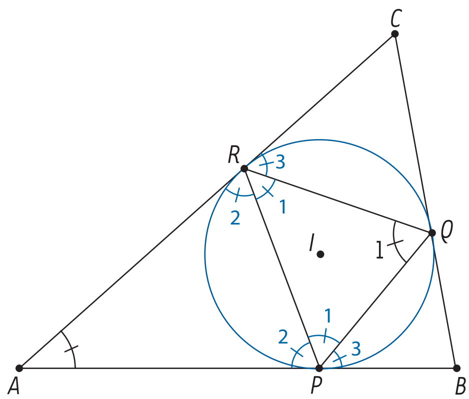
(Bron © Eindexamenvraag Nederland, 2003)

$$u_3 = \frac{1+u_2}{1-u_2} = \frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$u_4 = \frac{1+u_3}{1-u_3} = \frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = \frac{a+1+a-1}{a+1-a+1} = \frac{2a}{2} = a$$

Opdracht 32 bladzijde 36

In de driehoek *ABC* wordt de ingeschreven cirkel getekend. De raakpunten aan de zijden vormen een nieuwe driehoek *PQR*.



1 Bewijs dat $\hat{Q}_1 = 90° - \frac{1}{2}\hat{A}$.

– In ΔAPR is $\hat{A} + \hat{P}_2 + \hat{R}_2 = 180°$.

Omdat de raaklijnen uit een punt aan een cirkel even lang zijn, is $|AP| = |AR|$, zodat $\hat{P}_2 = \hat{R}_2$.

Samen geeft dit: $\hat{A} + 2\hat{P}_2 = 180°$. (1)

– Analoog geldt in ΔBPQ dat $|BP| = |BQ|$, zodat $\hat{B} + 2\hat{P}_3 = 180°$. (2)

– Uit (1) en (2) volgt: $\hat{A} + \hat{B} + 2(\hat{P}_2 + \hat{P}_3) = 360°$, of nog: $\hat{A} + \hat{B} + 2(180° - \hat{P}_1) = 360°$.

Dit geeft het verband: $\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{P}_1$. (3)

– Op dezelfde manier vinden we in ΔCQR dat $\hat{C} + 2\hat{R}_3 = 180°$ (4)

en in ΔAPR dat $\hat{A} + 2\hat{R}_2 = 180°$. (5)

Uit (4) en (5) volgt: $\hat{A} + \hat{C} + 2(\hat{R}_2 + \hat{R}_3) = 360°$, wat leidt tot : $\hat{A} + \hat{C} = 2\hat{R}_1$. (6)

– Tellen we (3) en (6) lid aan lid op, dan vinden we: $\hat{A} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2(\hat{P}_1 + \hat{R}_1)$.

Hieruit volgt dat: $\hat{A} + 180° = 2(180° - \hat{Q}_1)$ of $2\hat{Q}_1 = 180° - \hat{A}$,

zodat $\hat{Q}_1 = 90° - \frac{1}{2}\hat{A}$.

Alternatieve methode:

- Teken [RI] en [PI].
- In de vierhoek ARIP zijn de hoeken $A\hat{R}I$ en $A\hat{P}I$ telkens 90° (straal op een raaklijn).
- Aangezien de som van de hoeken in een vierhoek 360° is, is hoek $R\hat{I}P$ gelijk aan $360° - 90° - 90° - \hat{A}$ of dus $180 - \hat{A}$.
- De hoek $R\hat{I}P$ is een middelpuntshoek op dezelfde boog als de omtrekshoek $R\hat{Q}P$, zodat $R\hat{Q}P$ de helft is, dus $90° - \frac{\hat{A}}{2}$.

2 Herhaal dit proces in de driehoek *PQR*. Zo ontstaat een rij hoeken α_n die wordt beschreven door het recursief voorschrift $\alpha_n = 90° - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$.

Als $\alpha_1 = 90°$, bereken dan de grootte van de volgende vier hoeken.

$\alpha_n = 90° - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ met $\alpha_1 = 90°$

$\alpha_2 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 90° - 45° = 45°$

$\alpha_3 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 45° = 90° - 22°30' = 67°30'$

$\alpha_4 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 67°30' = 90° - 33°45' = 56°15'$

$\alpha_5 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 56°15' = 90° - 28°7'30'' = 61°52'30''$

3 Herhaal vraag **2** als $\alpha_1 = 120°$.

$\alpha_n = 90° - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ met $\alpha_1 = 120°$

$\alpha_2 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 120° = 90° - 60° = 30°$

$\alpha_3 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 30° = 90° - 15° = 75°$

$\alpha_4 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 75° = 90° - 37°30' = 52°30'$

$\alpha_5 = 90° - \frac{1}{2} \cdot 52°30' = 90° - 26°15' = 63°45'$

4 Toon aan dat deze rij hoeken een limiet heeft die onafhankelijk is van de beginhoek en bepaal deze limiet.

Als we veronderstellen dat de limiet L bestaat, dan kunnen we die vinden uit het recursief voorschrift: $L = 90° - \frac{1}{2}L \Leftrightarrow \frac{3}{2}L = 90° \Leftrightarrow L = 60°$.

Om aan te tonen dat de rij een limiet heeft, stellen we een expliciet voorschrift op voor de rij.

– We zoeken eerst een mogelijk expliciet voorschrift:

α_1

$\alpha_2 = 90° - \frac{1}{2}\alpha_1 = 60° + \frac{1}{2}60° - \frac{1}{2}\alpha_1$

$\alpha_3 = 90° - \frac{1}{2}\alpha_2 = 60° + \frac{1}{2}60° - \frac{1}{2}\left(60° + \frac{1}{2}60° - \frac{1}{2}\alpha_1\right) = 60° - \frac{1}{2^2}60° + \frac{1}{2^2}\alpha_1$

$\alpha_4 = 90° - \frac{1}{2}\alpha_3 = 60° + \frac{1}{2}60° - \frac{1}{2}\left(60° - \frac{1}{2^2}60° + \frac{1}{2^2}\alpha_1\right) = 60° + \frac{1}{2^3}60° - \frac{1}{2^3}\alpha_1$

...

We vermoeden dat $\alpha_n = 60° + (-1)^n \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^{n-1}}$.

– We tonen via inductie aan dat deze formule overeenstemt met het gegeven recursief voorschrift voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

- Voor $n = 1$ vinden we $60° + (-1)^1 \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^0} = 60° - (60° - \alpha_1) = \alpha_1$. (1)
- Stel dat de formule geldt voor een willekeurige waarde van n, bijvoorbeeld voor $n = k$. We tonen aan dat ze dan ook geldt voor $n = k + 1$.

  $\alpha_{k+1} = 90° - \frac{1}{2}\alpha_k = 90° - \frac{1}{2}\left(60° + (-1)^k \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^{k-1}}\right) = 60° + (-1)^{k+1} \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^k}$ (2)
- Uit (1) en (2) volgt dat $\alpha_n = 60° + (-1)^n \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^{n-1}}$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

– Met het expliciet voorschrift kunnen we nu aantonen dat de limiet bestaat en vinden we opnieuw de waarde ervan:

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left(60° + (-1)^n \cdot \frac{60° - \alpha_1}{2^{n-1}}\right) = 60°$$

Opdracht 33 bladzijde 36

Gegeven de rij met recursief voorschrift $u_n = 3 - \dfrac{1}{u_{n-1}}$ met $u_1 = 2$.

1 Bewijs dat deze rij als ondergrens 2 en als bovengrens 3 heeft.

– We bewijzen dat 2 een ondergrens is.

- Voor $n = 1$ geldt: $u_1 = 2 \geqslant 2$. (1)
- Als $u_k \geqslant 2$, dan zal ook $u_{k+1} \geqslant 2$, want: (2)

$$\begin{aligned} u_k \geqslant 2 &\Rightarrow \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_k} \geqslant -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 3 - \frac{1}{u_k} \geqslant 3 - \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow u_{k+1} \geqslant \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow u_{k+1} \geqslant 2 \end{aligned}$$

- Uit (1) en (2) volgt dat $u_n \geqslant 2$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

– We bewijzen dat 3 een bovengrens is.

- Voor $n = 1$ geldt: $u_1 = 2 \leqslant 3$. (3)
- Als $u_k \leqslant 3$, dan zal ook $u_{k+1} \leqslant 3$, want: (4)

$$\begin{aligned} u_k \leqslant 3 &\Rightarrow \frac{1}{u_k} \geqslant \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_k} \leqslant -\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow 3 - \frac{1}{u_k} \leqslant 3 - \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leqslant \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leqslant 3 \end{aligned}$$

- Uit (3) en (4) volgt dat $u_n \leqslant 3$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2 Bewijs dat deze rij stijgend is.

- $u_1 = 2$ en $u_2 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, dus $u_1 < u_2$ (1)
- Als $u_k < u_{k+1}$, dan zal ook $u_{k+1} < u_{k+2}$, want: (2)

$$\begin{aligned} u_k < u_{k+1} &\Rightarrow \frac{1}{u_k} > \frac{1}{u_{k+1}} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_k} < -\frac{1}{u_{k+1}} \\ &\Rightarrow 3 - \frac{1}{u_k} < 3 - \frac{1}{u_{k+1}} \\ &\Rightarrow u_{k+1} < u_{k+2} \end{aligned}$$

- Uit (1) en (2) volgt dat $u_n < u_{n+1}$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3 Bepaal de limiet van deze rij.

De gegeven rij is dus stijgend en naar boven begrensd, waaruit volgt dat ze een limiet heeft. Stel deze limiet gelijk aan L, dan geldt:

$$L = 3 - \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 3L - 1 \Leftrightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Omdat $2 \leqslant L \leqslant 3$, zal de limiet gelijk zijn aan $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618$.

Opdracht 34 bladzijde 37

Stel $f(1) = 3$ en voor alle gehele waarden $n > 0$ geldt: $f(n) = f(n-1) + 1$ als n even is en $f(n) = 2f(n-1)$ als n oneven is.

Bereken $f(5)$.

A 10 **B** 18 **C** 6 **D** 14 **E** geen van de voorgaande

(Bron © Alabama Statewide Math Contest, 2015)

We kunnen dit noteren als $u_n = u_{n-1} + 1$ voor n even en $u_n = 2u_{n-1}$ voor n oneven, met $u_1 = 3$.

Bijgevolg is $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 9$ en $u_5 = 18$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 35 bladzijde 37

Bereken de 2019e term van de meetkundige rij waarvan de eerste, tweede en derde term de getallen $\sqrt[3]{9}$, $3\sqrt[3]{3}$ en 9 zijn.

A 3^{673} **B** 3^{1346} **C** 3^{2019} **D** 3^{2692} **E** geen van de voorgaande

(Bron © Alabama Statewide Math Contest, 2019)

De eerste drie termen kunnen ook geschreven worden als $3^{\frac{2}{3}}, 3^{\frac{4}{3}}, 3^{\frac{6}{3}}$.

Voor de gegeven meetkundige rij geldt dan: $u_1 = 3^{\frac{2}{3}}$ en $q = 3^{\frac{2}{3}}$.

Bijgevolg: $u_{2019} = u_1 \cdot q^{2018} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{2018} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{4036}{3}} = 3^{\frac{4038}{3}} = 3^{1346}$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 36 bladzijde 37

Zijn de volgende rijen convergent of divergent? Bereken zo mogelijk de limiet.

1 $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

De rij is convergent met limiet 0.

2 $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

De rij is convergent met limiet 1.

3 $u_n = 3^{n+1} - 3^n$

$$\lim_{n \to +\infty} (3^{n+1} - 3^n) = \lim_{x \to +\infty} (3^{x+1} - 3^x) = \lim_{x \to +\infty} \left(3^x(3-1)\right) = \lim_{x \to +\infty} (2 \cdot 3^x) = +\infty$$

De rij is divergent met limiet $+\infty$.

Opdracht 37 bladzijde 37

Veronderstel dat $m \neq 0$ een vast natuurlijk getal is.

Waaraan is $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{-2m - n}$ gelijk?

A $-\dfrac{1}{2}$ **B** $-\dfrac{1}{2m}$ **C** $-\dfrac{1}{2m+1}$ **D** -1

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur en bio-ingenieur, 2016)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{-2m - n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-2m - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

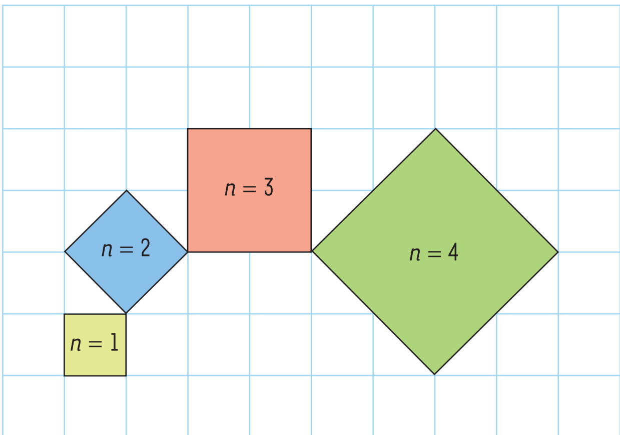
Antwoord D is juist.

Opdracht 38 bladzijde 38

Construeer een rij van vierkanten als volgt:

– vertrek van een eerste vierkant (rangnummer $n = 1$) met zijde $z(1) = 1$
– neem voor de zijde van het volgende vierkant de lengte van de diagonaal van het huidige vierkant

Een tekening voor de eerste vier vierkanten vind je terug in de figuur.



Welk rangnummer n heeft het vierkant met een oppervlakte gelijk aan 8192?

A $n = 13$ **B** $n = 14$ **C** $n = 26$ **D** $n = 27$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2017)

Als de oppervlakte van een vierkant z^2 is, dan is de oppervlakte van het volgende vierkant $2z^2$.

De rij van de oppervlaktes van de vierkanten is bijgevolg een meetkundige rij met $u_1 = 1$ en $q = 2$.

Het expliciet voorschrift van deze rij is: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Omdat $8192 = 2^{13}$, zal $n = 14$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 39 bladzijde 38

Bepaal de verzameling van alle waarden $a \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2 n^2 + 2}}{n} = 3.$$

A de lege verzameling **B** $\{2\}$ **C** $\{4\}$ **D** $\{-2, 2\}$ **E** $\{-4, 4\}$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2015)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2 n^2 + 2}}{n} = 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2 x^2 + 2}}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{(1-a^2)^2 + \frac{2}{x^2}}}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-a^2)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left|1 - a^2\right| = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - a^2 = -3 \text{ of } 1 - a^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4 \text{ of } a^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ of } a = 2$$

Antwoord D is juist.

Opdracht 40 bladzijde 38

De rij $u_n = \frac{2n}{n+3}$ heeft als limiet 2.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0 : n > N \Rightarrow \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$$

Er geldt:

$$\left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2n - 2(n+3)}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-6}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{n+3} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon} < n + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - 3\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

Vanaf welk volgnummer n liggen alle termen van de rij op een afstand kleiner dan ε van deze limiet als

1 $\varepsilon = 0{,}1$?

$$\frac{6-3\varepsilon}{\varepsilon} < n \text{, dus } \frac{6-0{,}3}{0{,}1} < n \Leftrightarrow \frac{5{,}7}{0{,}1} < n \Leftrightarrow 57 < n$$

2 $\varepsilon = 0{,}001$?

$$\frac{6-3\varepsilon}{\varepsilon} < n \text{, dus } \frac{6-0{,}003}{0{,}001} < n \Leftrightarrow \frac{5{,}997}{0{,}001} < n \Leftrightarrow 5997 < n$$

3 ε willekeurig is?

$$\frac{6-3\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

Opdracht 41 bladzijde 38

Bewijs dat de rij $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$ convergent is door te bewijzen dat ze dalend en naar onder begrensd is.

– De rij heeft 0 als ondergrens omdat elke term strikt positief is: bij elke term is zowel de teller als de noemer in de breuk strikt positief.

– De rij is dalend, want:

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)} = u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = u_n \cdot \frac{2n+2-1}{2n+2} = u_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right),$$

zodat $u_{n+1} < u_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.