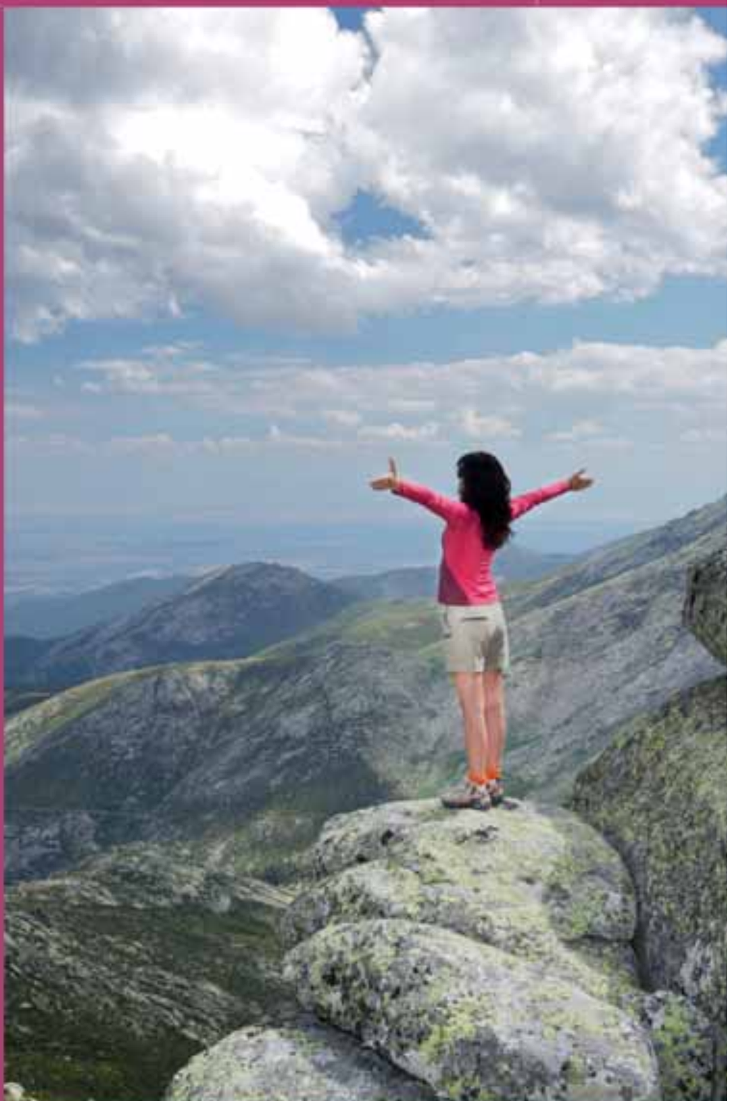
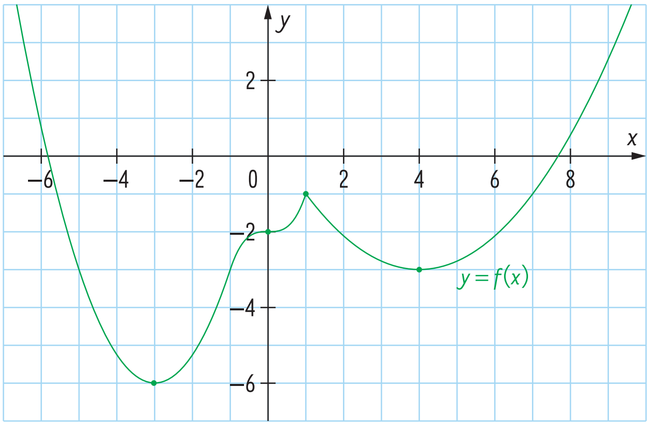
Hoofdstuk 10

Verloop van functies



Opdracht 1 bladzijde 212

Hieronder zie je de grafiek van een continue functie f.



1 Lees op de grafiek af voor welke x-waarden f een extremum bereikt.

f bereikt een relatief minimum voor x = –3 en voor x = 4.

f bereikt een relatief maximum voor x = 1.

2 Welke van de volgende uitspraken is waar?

A Indien f voor $x = a$ een relatief extremum bereikt, dan is $f'(a) = 0$.

B Indien $f'(a) = 0$, dan bereikt f een relatief extremum voor $x = a$.

C Indien f voor $x = a$ een relatief extremum bereikt en f is afleidbaar in a, dan is $f'(a) = 0$.

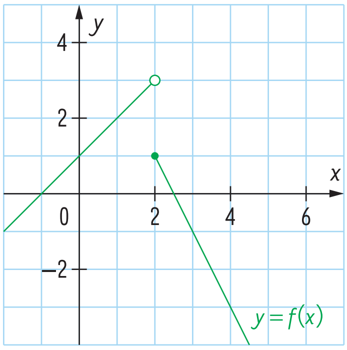
C

Opdracht 2 bladzijde 217

1 f bereikt geen absoluut maximum in $[0, 4]$.

Verklaar waarom dit niet in tegenspraak is met de stelling van Weierstrass.

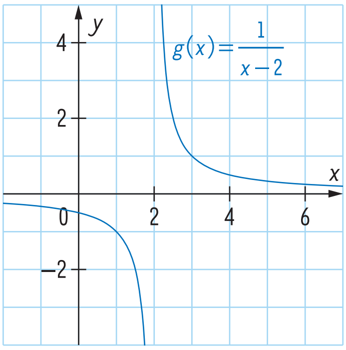
f is niet continu in [0, 4].



2 $g: x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ bereikt geen absoluut maximum in $]2, 4]$.

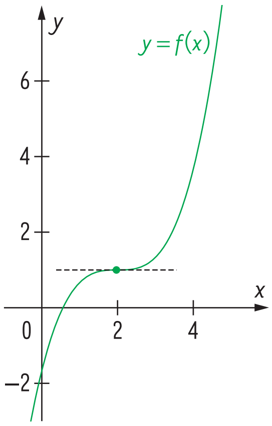
Verklaar waarom dit niet in tegenspraak is met de stelling van Weierstrass.

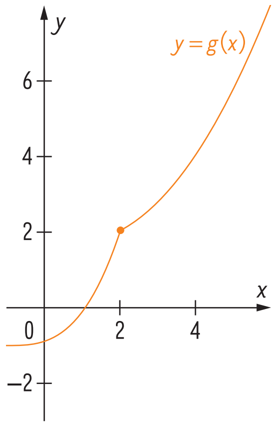
f is niet continu in [2, 4].

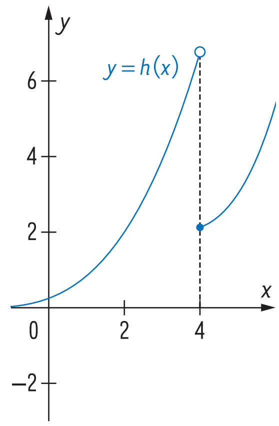


Opdracht 3 bladzijde 219

Welke van de volgende functies zijn stijgend in [0, 4]?







f en g zijn stijgend in [0, 4], want

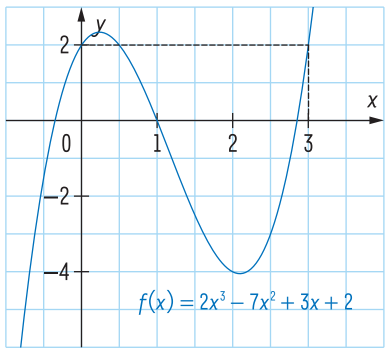
$\forall\ x_1, x_2 \in [0, 4] : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ en $g(x_1) < g(x_2)$.

Dit geldt niet voor h want bv. h(3) > h(4).

Opdracht 4 bladzijde 219

1 Bij de functie met voorschrift
$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ is $f(0) = f(3)$.

Verklaar waarom er een waarde $c \in\ ]0, 3[$ bestaat zodanig dat $f'(c) = 0$.



$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 2$

$f'(x) = 6x^2 - 14x + 3$

$f'(x) = 0 \iff 6x^2 - 14x + 3 = 0$

$\iff x = \dfrac{7 + \sqrt{31}}{6} \approx 2{,}09 \in\ ]0, 3[$

of $x = \dfrac{7 - \sqrt{31}}{6} \approx 0{,}24 \in\ ]0, 3[$

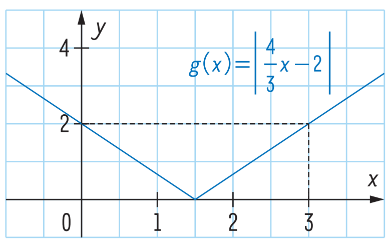
$c = \dfrac{7 + \sqrt{31}}{6}$ of $c = \dfrac{7 - \sqrt{31}}{6}$

2 Ook bij de functie met voorschrift

$g(x) = \left|\dfrac{4}{3}x - 2\right|$ is $g(0) = g(3)$.

Toch bestaat er geen waarde $c \in\ ]0, 3[$ zodanig dat $g'(c) = 0$.

Kun je dit verklaren?



g is niet afleidbaar in $\dfrac{3}{2}$.

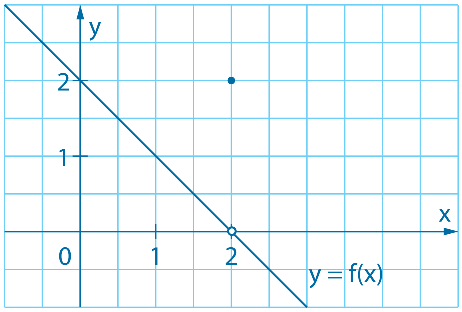
Opdracht 5 bladzijde 221

Illustreer met een voorbeeld dat continuïteit in een gesloten interval vereist is opdat de stelling van Rolle geldt.

De functie $f: x \mapsto \begin{cases} 2 - x & \text{als } x \neq 2 \\ 2 & \text{als } x = 2 \end{cases}$

is afleidbaar in $]0, 2[$, continu in $[0, 2[$ en $f(0) = f(2) = 2$.

Er is echter geen $c \in \,]0, 2[$ met $f'(c) = 0$.



Continuïteit in een gesloten interval is vereist.

Opdracht 6 bladzijde 221

Ga telkens na dat voor de functie *f* aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan is in het gegeven interval en bepaal alle waarden van *c* waarvoor
$f'(c) = 0$.

1 $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ in $[0, 2]$

$$\begin{cases} \bullet \; f \text{ is continu in } [0, 2] \\ \bullet \; f \text{ is afleidbaar in }]0, 2[\text{ met } f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \\ \bullet \; f(0) = f(2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58 \in \,]0, 2[\\ &\text{of } \; x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42 \in \,]0, 2[\end{aligned}$$

zodat $c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ of $c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2 $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ in $[0, 4]$

$$\begin{cases} \bullet \ \text{f is continu in } [0, 4] \\ \bullet \ \text{f is afleidbaar in }]0, 4[\text{ met } f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \bullet \ f(0) = f(4) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ x = 1 \in]0, 4[\end{aligned}$$

zodat $c = 1$.

Opdracht 7 bladzijde 224

Onderzoek of de volgende functies voldoen aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange.
Indien dit het geval is, bepaal dan alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

1 $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ in $[-1, 1]$

f is niet continu in $[-1, 1]$ dus er is niet voldaan aan de voorwaarden.

2 $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$ in $[0, 4]$

$$\begin{cases} \bullet \ \text{f is continu in } [0, 4] \\ \bullet \ \text{f is afleidbaar in }]0, 4[\text{ met } f'(x) = \frac{-3}{2}x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{3}{2}c^2 = \frac{-32}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ c^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ c = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{of} \quad c = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Aangezien $-\frac{4}{\sqrt{3}} \notin]0, 4[$ is $c = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

3 $f\colon x \mapsto px^2 + qx + r$ in $[x_1, x_2]$

$$\begin{cases} \bullet \ \ f \text{ is continu in } [x_1, x_2] \\ \bullet \ \ f \text{ is afleidbaar in }]x_1, x_2[\text{ met } f'(x) = 2px + q \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \ 2pc + q = \frac{px_2^2 + qx_2 \cancel{+r} - px_1^2 - qx_1 \cancel{-r}}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \ 2pc + q = \frac{p(x_2 + x_1)(\cancel{x_2 - x_1}) + q(\cancel{x_2 - x_1})}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

$$\Leftrightarrow \ 2pc \cancel{+q} = p(x_2 + x_1) \cancel{+q}$$

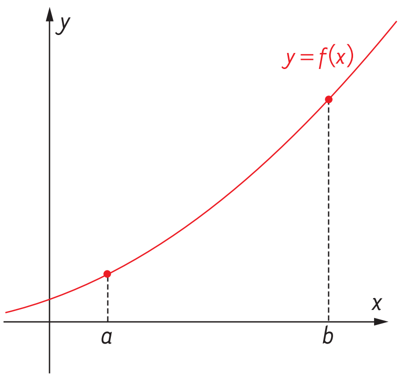
$$\Leftrightarrow \ c = \frac{\cancel{p}(x_2 + x_1)}{2\cancel{p}}$$

$$\Leftrightarrow \ c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

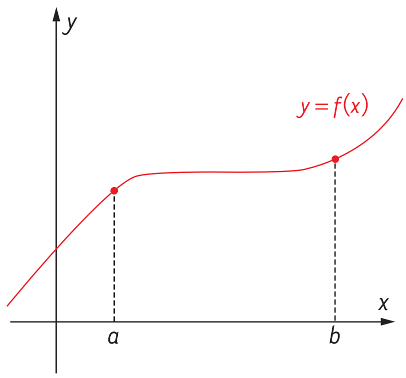
Opdracht 8 bladzijde 224

Onderzoek of de onderstaande uitspraken algemeen geldig zijn. Als de uitspraken niet algemeen geldig zijn, gebruik dan één van de getekende grafieken als tegenvoorbeeld.

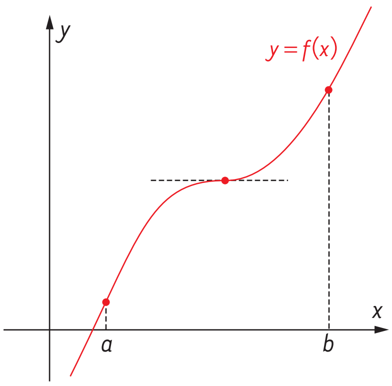
A



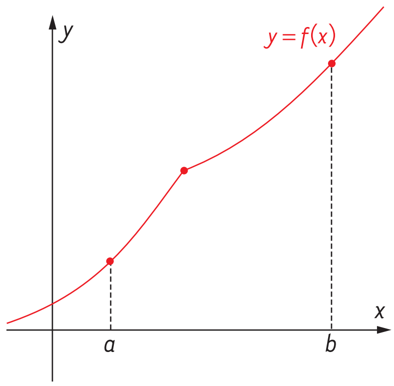
B



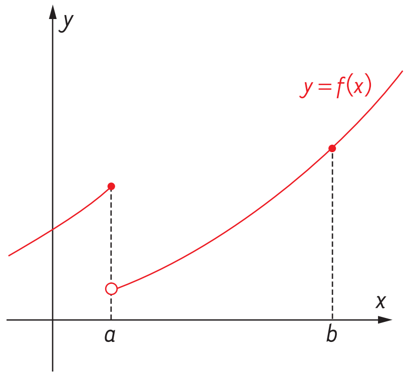
C



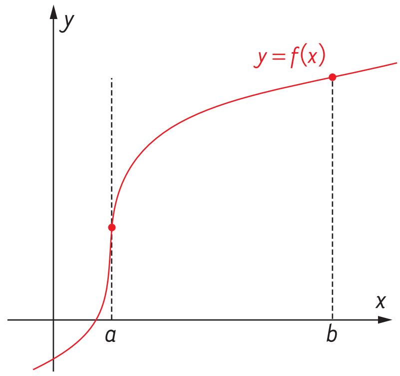
D



E



F



a Als f stijgend is in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$.

Niet waar: in C is f stijgend in [a, b] maar er is een $c \in\ ]a, b[$ waarbij $f'(c) = 0$.

b Als f stijgend is in $[a, b]$ en f is afleidbaar in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$.

Niet waar: in C is f stijgend in [a, b] en afleidbaar in [a, b] en toch is er een $c \in\ ]a, b[$ met $f'(c) = 0$.

c Als f stijgend is in $[a, b]$ en f is afleidbaar in $[a, b]$, dan is $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$.

Waar.

d Als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$, dan is f stijgend in $[a, b]$.

Niet waar: in E is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$, toch is f niet stijgend in [a, b].

e Als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$ en f is continu in $[a, b]$, dan is f stijgend in $[a, b]$.

Waar.

f Als $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$, dan is f stijgend in $[a, b]$.

Niet waar: in E is $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in\ ]a, b[$, toch is f niet stijgend in [a, b].

Opdracht 9 bladzijde 230

Bepaal het verloop en de relatieve extrema van de functie f.

1 $f: x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$

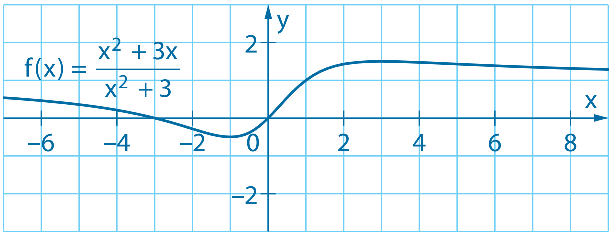
$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3) \cdot (2x + 3) - (x^2 + 3x) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 - 2x^3 - 6x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 6x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

x		−1		3	
f′(x)	−	0	+	0	−
f(x)	↘	−0,5 min.	↗	1,5 max.	↘

f stijgt in [–1, 3], daalt in]–∞, –1] en in [3, +∞[, heeft een relatief minimum $-\frac{1}{2}$ voor x = –1 en een relatief maximum $\frac{3}{2}$ voor x = 3.



2 $f\colon x \mapsto \sqrt[3]{-x^4 + 2x^3 - x^2}$

$f(x) = (-x^4 + 2x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(-x^4 + 2x^3 - x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-4x^3 + 6x^2 - 2x)$$

$$= \frac{-4x^3 + 6x^2 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(-x^4 + 2x^3 - x^2)^2}}$$

$$= \frac{-2x(x-1)(2x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot (x-1)^2}}$$

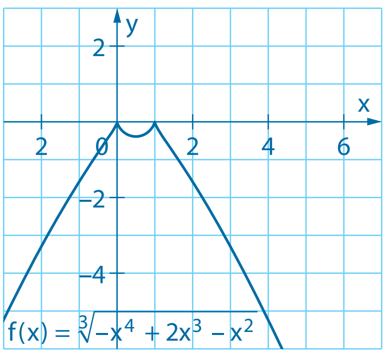
f is niet afleidbaar in 0 en 1.

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
f′(x)	+	|	–	0	+	|	–
f(x)	↗	0 max.	↘	$\sqrt[3]{\frac{-1}{16}}$ min.	↗	0 max.	↘

f stijgt in]–∞, 0] en in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

f daalt in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en in [1, +∞[,

f bereikt een relatief maximum 0 voor x = 0 en voor x = 1 en f bereikt een relatief minimum $\sqrt[3]{\frac{-1}{16}} = \frac{-1}{2\sqrt[3]{2}}$ voor $x = \frac{1}{2}$.



Opdracht 10 bladzijde 230

1 Bepaal m zodanig dat de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2}{x+m}$ een relatief extremum bereikt voor $x = 4$.

$f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x+m}$ is afleidbaar binnen haar domein, als f een extremum bereikt voor $x = 4$ is $f'(4) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(x+m)\cdot 2x - x^2}{(x+m)^2} = \frac{x^2 + 2mx}{(x+m)^2}$$

$$\Rightarrow \; f'(4) = \frac{16 + 8m}{(4+m)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; \boxed{m = -2}$$

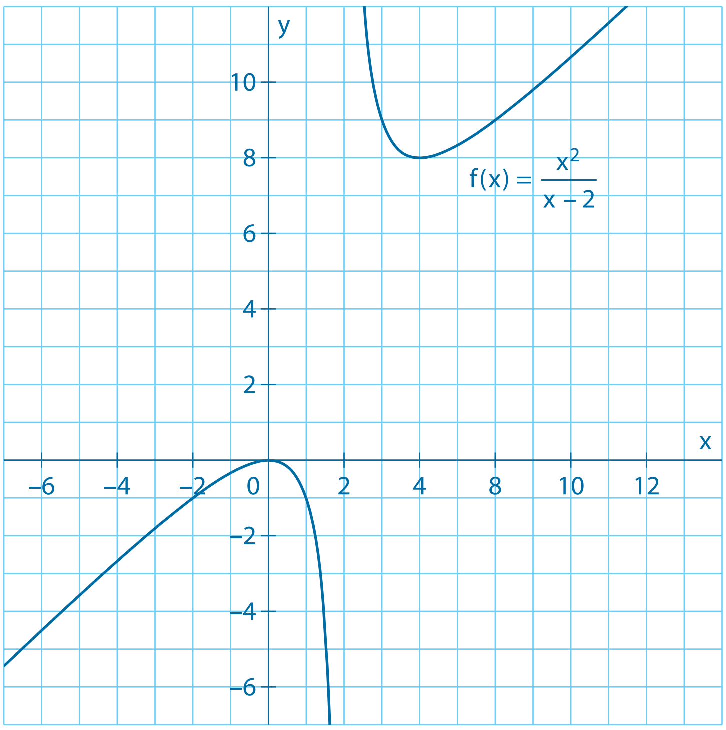
2 Bepaal voor de gevonden waarde van m of het gaat om een relatief maximum of om een relatief minimum.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

x		0		2		4	
f′(x)	+	0	−	|	−	0	+
f(x)	↗	max.	↘	|	↘	min.	↗

f bereikt een relatief minimum voor $x = 4$.

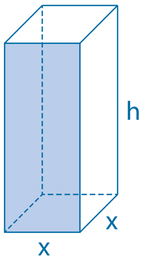
Dat is ook op de grafiek te zien.



Opdracht 11 bladzijde 230

Een doos heeft de vorm van een balk. Ze heeft een vierkant als grondvlak, is vooraan open en heeft een oppervlakte van 3 dm^2.

Bepaal de afmetingen van de doos als de inhoud maximaal is.



Stel x is de zijde van het vierkant grondvlak, en de hoogte is h (x en h in dm).

Dan is $2x^2 + 3 \cdot hx = 3$

$$\Leftrightarrow \ h = \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

Inhoud: $I = x^2 h$

$$\Rightarrow \ I(x) = x^2 \cdot \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

$$\text{of } \ I(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

$I'(x) = 1 - 2x^2$

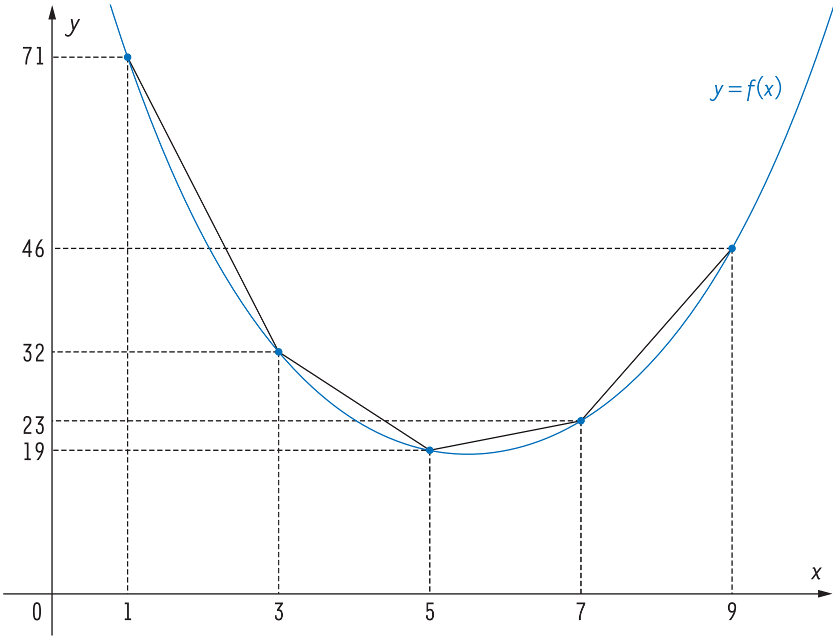
$I'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

x		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
I′(x)	−	0	+	+	+	0	−
I(x)	↘				↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘
		min.				max.	

De doos heeft een maximale inhoud als de zijde van het grondvlak $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dm is.

De hoogte is dan $\dfrac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ dm $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ dm.

Opdracht 12 bladzijde 230



1 De grafiek van de functie *f* is hol.

Bereken de gemiddelde helling van de grafiek van *f* in de intervallen [1, 3], [3, 5], [5, 7] en [7, 9].

in [1, 3] is $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{32 - 71}{2} = -\frac{39}{2}$

in [3, 5] is $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{19 - 32}{2} = -\frac{13}{2}$

in [5, 7] is $\frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{23 - 19}{2} = 2$

in [7, 9] is $\frac{f(9) - f(7)}{9 - 7} = \frac{46 - 23}{2} = \frac{23}{2}$

2 Hoe verandert deze gemiddelde helling als je de grafiek van *f* van links naar rechts doorloopt?

De gemiddelde helling neemt toe.

3 Hoe zal de gemiddelde helling van een functie *g* met een bolle grafiek veranderen als je deze van links naar rechts doorloopt?

Die zal afnemen.

Opdracht 13 bladzijde 237

Bepaal het hol en bol verloop en de eventuele buigpunten van de grafiek van de functie

1 $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+12}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+12)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+12)^2}$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+12-x^2+1)}{(x^2+12)^2}$$

$$= \frac{26x}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x) = 26\cdot\frac{(x^2+12)^{\cancel{2}}\cdot 1 - x\cdot 2(\cancel{x^2+12})\cdot 2x}{(x^2+12)^{\cancel{4}\,3}}$$

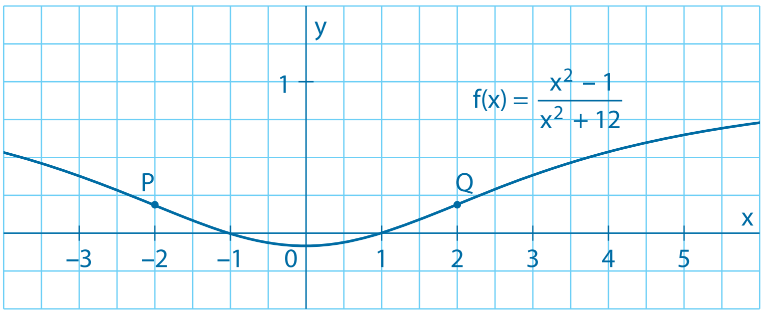
$$= 26\cdot\frac{x^2+12-4x^2}{(x^2+12)^3}$$

$$= 26\cdot\frac{-3x^2+12}{(x^2+12)^3} = \frac{78(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$$

x		−2		2	
f″(x)	−	0	+	0	−
f(x)	∩	$\frac{3}{16}$ bgpt.	∪	$\frac{3}{16}$ bgpt.	∩

De grafiek van f is hol in [−2, 2], bol in]−∞, −2] en in [2, +∞[,

de buigpunten zijn $P\left(-2, \dfrac{3}{16}\right)$ en $Q\left(2, \dfrac{3}{16}\right)$.



2 $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 9}$

$f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 9} = (x^2 - 9)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 9)^2}}$$

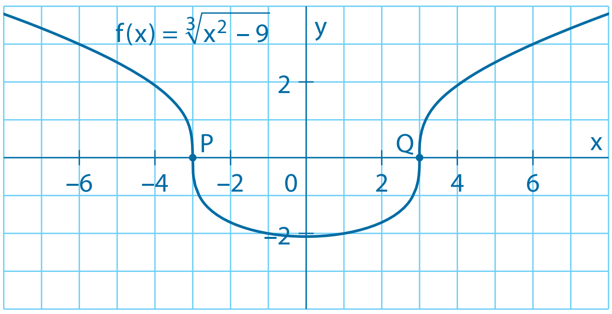
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot (x^2 - 9)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x \cdot \frac{-2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x \\ &= \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \left[\left(x^2 - 9\right) - \frac{4}{3}x^2 \right] \\ &= \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 - 9 \right) \\ &= -\frac{2}{9}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \left(x^2 + 27\right) \\ &= \frac{-2(x^2 + 27)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 9)^5}} \end{aligned}$$

f is niet afleidbaar in 3 en in –3.

x		–3		3	
f″(x)	–	|	+	|	–
f(x)	⌒	0	◡	0	⌒
		bgpt.		bgpt.	

De grafiek van f is hol in [–3 ,3], bol in]–∞, –3] en in [3, +∞[,

de buigpunten zijn P(–3, 0) en Q(3, 0).



Opdracht 14 bladzijde 237

Bepaal a en b zodanig dat $P(1\,,1)$ een buigpunt is van de grafiek van

$$f\colon x \mapsto \frac{a}{x^2+b}.$$

$f\colon x \mapsto \dfrac{a}{x^2+b}$ is twee keer afleidbaar binnen haar domein.

Als P(1, 1) een buigpunt is, dan is $f''(1) = 0$.

Bovendien is $f(1) = 1$.

1) $f(1) = 1 \iff \dfrac{a}{1+b} = 1$

$\iff a = 1 + b \qquad (1)$

2) $f'(x) = \dfrac{-2ax}{(x^2+b)^2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+b)^{\cancel{2}} \cdot (-2a) + 2ax \cdot 2\,\cancel{(x^2+b)} \cdot 2x}{(x^2+b)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2a \cdot (-x^2 - b + 4x^2)}{(x^2+b)^3}$$

$$= \frac{2a \cdot (3x^2 - b)}{(x^2+b)^3}$$

$f''(1) = 0 \iff 2a \cdot (3 - b) = 0$

$\overset{a \neq 0}{\iff} \boxed{b = 3}$

Uit (1) volgt dan $\boxed{a = 4}$

Opdracht 15 bladzijde 239

Bepaal de relatieve extrema van $f\colon x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x$ gebruik makend van de tweede afgeleide-test.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f'(x) = 0$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

$f''(x) = 12x - 18$

$f''(1) = -6 < 0$

$\Rightarrow$ relatief maximum voor $x = 1$ gelijk aan $f(1) = 5$.

$f''(2) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ relatief minimum voor $x = 2$ gelijk aan $f(2) = 4$.

Opdracht 16 bladzijde 243

Beschouw de rationale functie $f: x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

1 Maak een tekentabel van f en bepaal de asymptoten van de grafiek van f.

nulpunten teller: 1, 2

nulpunten noemer: 0

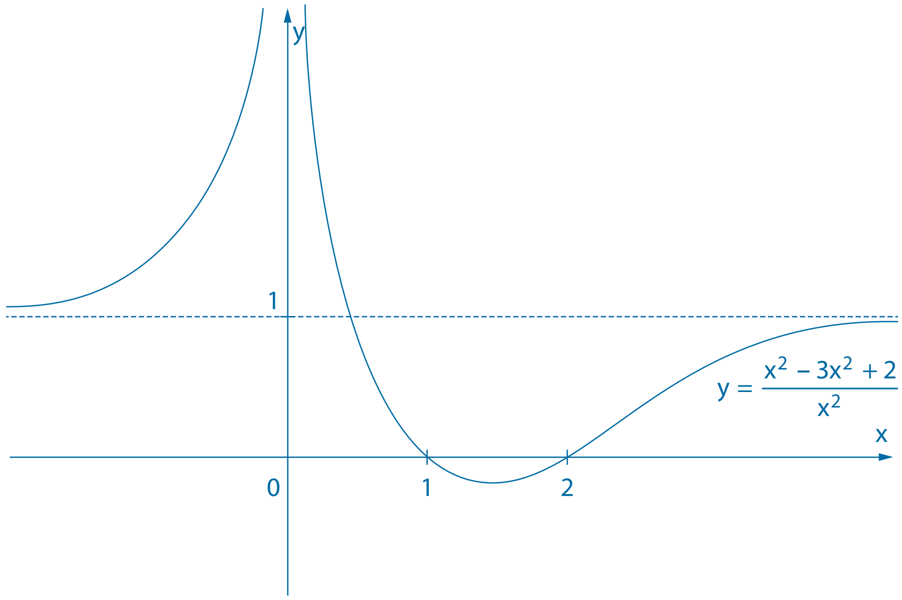
tekentabel:

x		0		1		2	
f(x)	+	|	+	0	−	0	+

H.A.: y = 1

V.A.: x = 0

2 Maak op basis van de informatie uit **1** een schets van de grafiek van f.
Waar vermoed je relatieve extrema en buigpunten?



Vermoeden: minimum voor x =1,5 en een buigpunt voor x = 2,5.

3 Bepaal de relatieve extrema en de buigpunten van f m.b.v. afgeleiden.

- $$f'(x) = \frac{(2x-3)x^2 - 2x(x^2 - 3x + 2)}{x^4}$$
$$= \frac{2x^2 - 3x - 2x^2 + 6x - 4}{x^3}$$
$$= \frac{3x - 4}{x^3}$$

x		0		$\frac{4}{3}$	
f′(x)	+	|	−	0	+
f(x)	↗	|	↘	$-\frac{1}{8}$	↗
				min.	

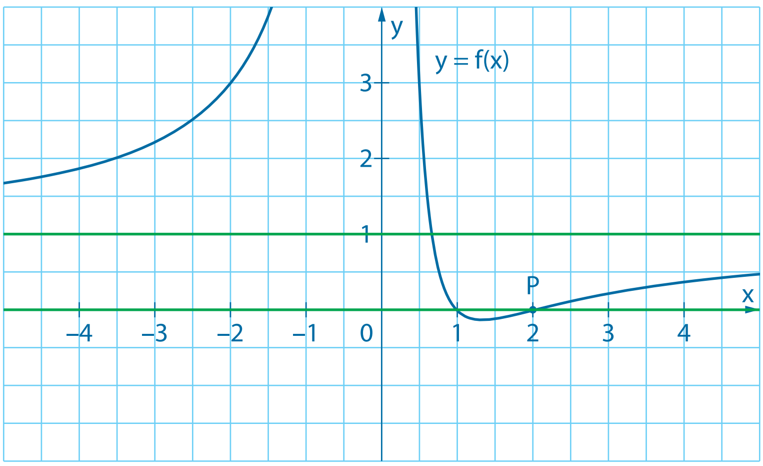
De functie bereikt een relatief minimum voor $x = \frac{4}{3}$, namelijk $-\frac{1}{8}$.

- $$f''(x) = \frac{3x^3 - 3x^2(3x-4)}{x^6}$$
$$= \frac{3x - 9x + 12}{x^4}$$
$$= \frac{-6x + 12}{x^4}$$

x		0		2	
f″(x)	+	|	+	0	−
f(x)	∪	|	∪	0	∩
				bgpt.	

De functie heeft P(2, 0) als buigpunt.

4 Plot de grafiek van *f* en kies je vensterinstellingen zodanig dat alle belangrijke informatie over de grafiek te zien is.



Opdracht 17 bladzijde 244

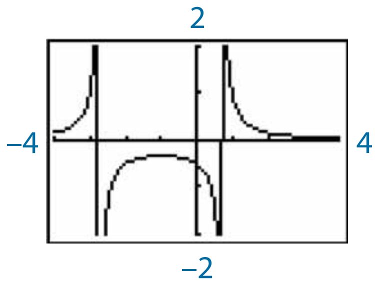
$f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$ stelt een familie van rationale functies voor.

1 Plot enkele grafieken van deze familie.

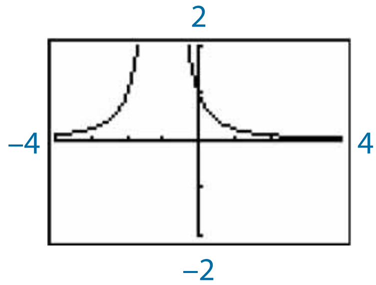
We plotten $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$ voor enkele waarden van m.

Aangezien de noemer een dubbel nulpunt heeft voor m = 1, kiezen we deze waarde van m, en ook een waarde die groter is dan 1 en een waarde die kleiner is dan 1.

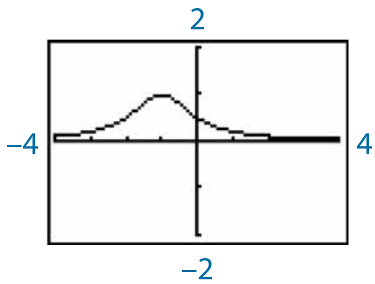
m = –2



m = 1



m = 2



We zien dat de grafiek van f voor m = –2 en voor m = 1 verticale asymptoten heeft, terwijl dat voor m = 2 niet het geval is. Deze laatste grafiek heeft twee buigpunten, terwijl de eerste twee geen buigpunten hebben. Bij m = –2 en m = 2 is een relatief maximum, bij m = 1 waarschijnlijk niet.

Vermoedelijk hebben alle grafieken een horizontale asymptoot.

2 Onderzoek hoe het domein van *f* en de asymptoten van de grafiek van *f* wijzigen in functie van *m*.

We bestuderen de asymptoten van de grafiek van $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$.

Omdat de graad van de teller steeds kleiner is dan de graad van de noemer, zal $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

De grafiek van f heeft dus steeds de rechte met vergelijking y = 0 (de x-as) als horizontale asymptoot.

De grafiek van f heeft verticale asymptoten als de noemer nulpunten heeft (die hier nooit nulpunten van de teller kunnen zijn).

$x^2 + 2x + m = 0$ heeft reële oplossingen als $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \geqslant 0$

dus als $4 - 4m \geqslant 0 \iff m \leqslant 1$.

1) Indien $m > 1$ heeft de grafiek geen verticale asymptoten en is het domein van f gelijk aan $\mathbb{R}$.
   De grafiek vertoont dan geen onderbrekingen.

2) Indien $m = 1$ is er één verticale asymptoot met vergelijking $x = -1$.
   Het domein is dan $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3) Indien $m < 1$ heeft de grafiek van f twee verticale asymptoten met vergelijking
   $$x = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4m}}{2} = -1 + \sqrt{1 - m} \text{ en } x = = -1 - \sqrt{1 - m}.$$
   Het domein is dan $\mathbb{R} \setminus \left\{-1 + \sqrt{1 - m}, -1 - \sqrt{1 - m}\right\}$.

3 Onderzoek hoe de extrema wijzigen in functie van *m*.

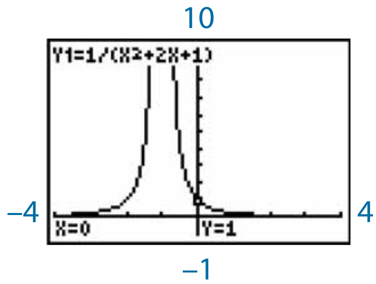
Om de extrema en het stijgen en dalen te onderzoeken, maken we een tekenonderzoek van de eerste afgeleide.

$$f'(x) = -(x^2 + 2x + m)^{-2} \cdot (2x + 2) = \frac{-2(x + 1)}{(x^2 + 2x + m)^2}$$

f′ gaat steeds van positief naar negatief in -1.

1) Indien $m \neq 1$, hebben we een maximum voor $x = -1$, met als waarde
   $$f(-1) = \frac{1}{1 - 2 + m} = \frac{1}{m - 1}.$$
   Dit maximum ligt boven de x-as als $m > 1$ en onder de x-as als $m < 1$.

2) Indien $m = 1$, dan behoort -1 niet tot het domein.
   Er is dan een verticale asymptoot met vergelijking $x = -1$ en de functie heeft geen relatieve extrema:
   $$f'(x) = \frac{-2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{-2}{(x + 1)^3}.$$



4 Onderzoek hoe de buigpunten wijzigen in functie van *m*.

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 2x + m)^2 \cdot (-2) + 2(x + 1) \cdot 2\,(x^2 + 2x + m)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + m)^4}$$
$$= \frac{2(-x^2 - 2x - m + 4x^2 + 8x + 4)}{(x^2 + 2x + m)^3} = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - m)}{(x^2 + 2x + m)^3}$$

Opdat er buigpunten zouden zijn, moet de teller twee nulpunten hebben die geen nulpunten zijn van de noemer.

De voorwaarde voor twee nulpunten in de teller is

$$6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4 - m) > 0 \Leftrightarrow 36 - 48 + 12m > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

1) Indien $m < 1$ heeft f″ geen nulpunten, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

2) Indien $m = 1$ is $f''(x) = \dfrac{6(x + 1)^2}{(x + 1)^6} = \dfrac{6}{(x + 1)^4}$. Ook nu zijn er geen buigpunten.

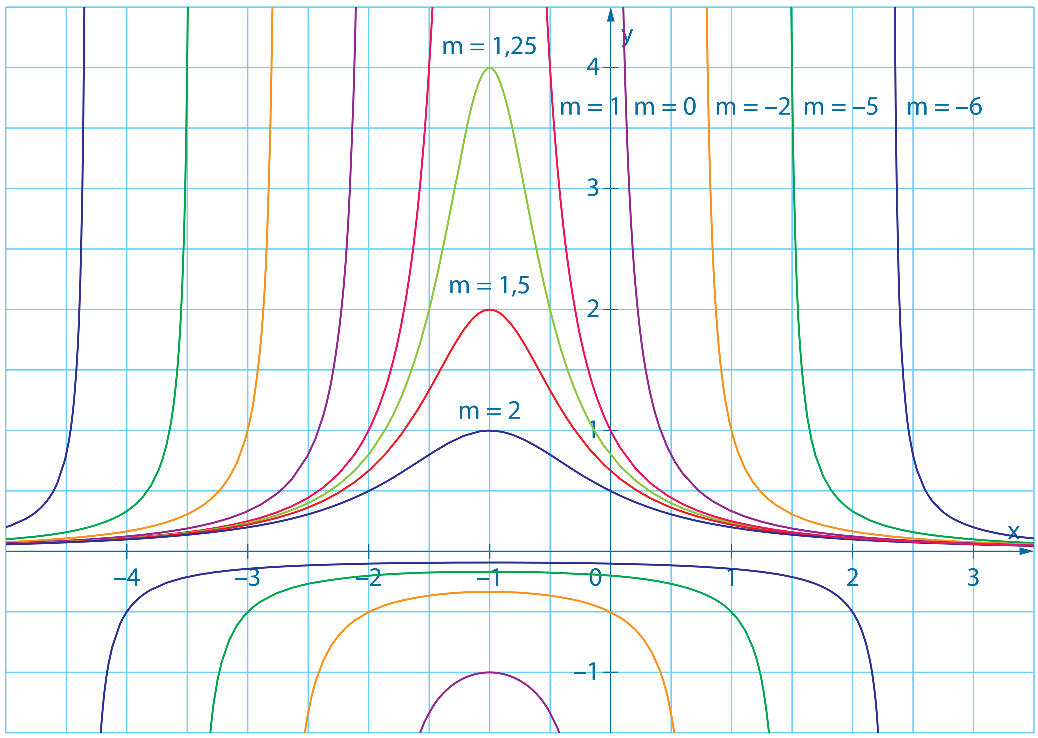
3) Indien m > 1 heeft de teller twee nulpunten en heeft de grafiek van f twee buigpunten met x-coördinaten $\dfrac{-6 \pm \sqrt{12m - 12}}{6} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{3m - 3}}{3}$.

De buigpunten liggen dus symmetrisch t.o.v. de rechte met vergelijking $x = -1$.

Overzicht: grafiek van $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + m}$

	asymptoten	relatieve extrema	buigpunten
$m < 1$	V.A. $x = -1 - \sqrt{1 - m}$ $x = -1 + \sqrt{1 - m}$ H.A. $x = 0$	rel. max. $\dfrac{1}{m - 1}$ bij $x = -1$	geen
$m = 1$	V.A. $x = -1$ H.A. $y = 0$	geen	geen
$m > 1$	H.A. $y = 0$	rel. max. $\dfrac{1}{m - 1}$ bij $x = -1$	voor $x = -1 - \dfrac{\sqrt{3m - 3}}{3}$ en voor $x = -1 + \dfrac{\sqrt{3m - 3}}{3}$

Tenslotte plotten we enkele grafieken die tot deze familie functies behoren, waarbij veel van bovenstaande onderzochte kenmerken terug te vinden zijn.



Opdracht 18 bladzijde 248

Bepaal het stijgen en dalen, de relatieve en absolute extrema van de functie *f*.

1 $f\colon x \mapsto \dfrac{3x-4}{x^2}$

- dom f = $\mathbb{R}_0$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot 3 - (3x-4)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-3x^2+8x}{x^4}$
  $= \dfrac{-3x+8}{x^3}$
- nulpunt f′: $\dfrac{8}{3}$
- verloopschema f:

x		0		$\frac{8}{3}$	
$-3x+8$	+	+	+	0	−
x^3	−	0	+	+	+
$f'(x)$	−	|	+	0	−
$f(x)$	↘	|	↗	$\frac{9}{16}$ max.	↘

- Omdat f(x) < 0 als x < 0, is het relatief maximum $\dfrac{9}{16}$ ook het absoluut maximum.

2 $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$
- nulpunt f′: 0
- verloopschema f:

x		−1		0		1	
$f'(x)$	+	|	+	0	−	|	−
$f(x)$	↗	|	↗	0 max.	↘	|	↘

- Er is een relatief maximum 0 voor x = 0. Dit is geen absoluut maximum.

3 $f: x \longmapsto x\sqrt{x+1}$

- dom f = [−1, +∞[
- $f'(x) = x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \dfrac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$

  $= \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$
- nulpunt f′: $-\dfrac{2}{3}$
- verloopschema f:

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
$f'(x)$		$\mid$	$-$	0	$+$
$f(x)$		0	↘	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$ min.	↗

- f bereikt een relatief minimum $\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$ voor $x = -\dfrac{2}{3}$. Dit is ook een absoluut minimum.

4 $f: x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+4x^2} = (x^3+4x^2)^{\frac{1}{3}}$

- dom f = ℝ
- $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x^3+4x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2+8x)$

  $= \dfrac{3x^2+8x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}}$

  $= \dfrac{x(3x+8)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4(x+4)^2}}$

  $= \dfrac{\cancel{x}(3x+8)}{3\cancel{x} \cdot \sqrt[3]{x(x+4)^2}}$

  $= \dfrac{3x+8}{3 \cdot \sqrt[3]{x(x+4)^2}}$
- nulpunt f′: $-\dfrac{8}{3}$
- verloopschema van f:

x		-4		$-\frac{8}{3}$		0	
$3x+8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 \cdot \sqrt[3]{x(x+4)^2}$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	$\mid$	$+$
$f(x)$	↗		↗	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ max.	↘	0 min.	↗

- f bereikt een relatief maximum $\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ voor $x = -\frac{8}{3}$ en een relatief minimum 0 voor $x = 0$.

Opdracht 19 bladzijde 248

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \frac{x^2-4}{x^2}$ geen extrema bereikt.

- dom $f = \mathbb{R}_0$
- $$f'(x) = \frac{x^2 \cdot 2x - (x^2-4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$
- verloopschema van f:

x		0	
f′(x)	–	|	+
f(x)	↘	|	↗

f bereikt geen extrema.

Opdracht 20 bladzijde 248

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \sqrt{\frac{5-x}{x}}$ dalend is over haar domein.

- dom f: $\frac{5-x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 5 \Rightarrow$ dom $f =]0, 5]$
- $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-x}{x}}} \cdot \frac{x\cdot(-1)-(5-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{5-x}} \cdot \frac{-5}{x^2} = \frac{-5}{2\sqrt{x^3(5-x)}}$$

Aangezien $f'(x) < 0$ voor $x \in]0, 5]$ is f dalend over haar hele domein.

Opdracht 21 bladzijde 248

Bepaal de punten met horizontale raaklijn van de functie

$f\colon x \mapsto \dfrac{x^3+5x^2+12x+8}{3x^2}$.

In welke van deze punten bereikt f een relatief extremum?

- dom f = $\mathbb{R}_0$
- $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (3x^2+10x+12) - 6x \cdot (x^3+5x^2+12x+8)}{9x^4}$

$$= \frac{3x^3+10x^2+12x-2x^3-10x^2-24x-16}{3x^3}$$

$$= \frac{x^3-12x-16}{3x^3}$$

$$= \frac{(x+2)^2 \cdot (x-4)}{3x^3}$$

Er is een horizontale raaklijn in $P\left(-2, -\dfrac{1}{3}\right)$ en in $Q\left(4, \dfrac{25}{6}\right)$.

f′ verandert van teken in 4, maar niet in –2, er is dus enkel een extremum voor x = 4.

Opdracht 22 bladzijde 248

Bepaal a als de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+a}$ voor $x = 2{,}5$ een extremum bereikt.

$f'(x) = \dfrac{(x^2+a) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \dfrac{-5x^2+5a}{(x^2+a)^2}$

Nodige voorwaarde voor een extremum voor x = 2,5:

$$f'(2{,}5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 \cdot 2{,}5^2 + 5a}{(2{,}5^2+a)^2} = 0$$

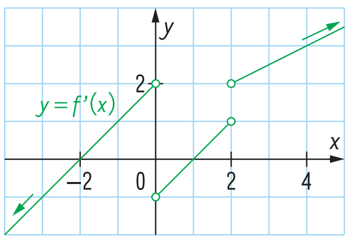
$$\Leftrightarrow -2{,}5^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 6{,}25$$

Opdracht 23 bladzijde 248

Van een continue functie f is de hellinggrafiek gegeven.

Voor welke x-waarde(n) bereikt f een relatief extremum?



Uit de grafiek van f′ kunnen we de tekentabel van f′ en het verloopschema van f halen:

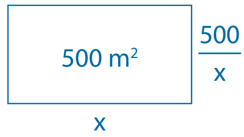
x		–2		0		1		2	
f′(x)	–	0	+	|	–	0	+	|	+
f(x)	↘	min.	↗	max.	↘	min.	↗		↗

f bereikt een relatief extremum voor x = –2, x = 0 en x = 1.

Opdracht 24 bladzijde 248

Welke rechthoek met een oppervlakte van 500 m^2 heeft de kleinste omtrek?

Hoeveel bedraagt deze minimale omtrek?



- Omtrek rechthoek $= P(x) = 2 \cdot \left(x + \dfrac{500}{x}\right)$

- $P'(x) = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{500}{x^2}\right)$

  $= 2 \cdot \dfrac{x^2 - 500}{x^2}$

  Nulpunten P': $-10\sqrt{5}$ en $10\sqrt{5}$

- verloopschema:

x	$-10\sqrt{5}$		0		$10\sqrt{5}$	
P'(x)	+ 0	−	|	−	0	+
P(x)			|	↘	min.	↗

  minimum voor $x = 10\sqrt{5}$ gelijk aan $2 \cdot \left(10\sqrt{5} + \dfrac{500}{10\sqrt{5}}\right) = 40\sqrt{5}$

Een vierkant met zijde $10\sqrt{5}$ m $\approx$ 22,36 m heeft de kleinste omtrek.

Deze minimale omtrek is $40\sqrt{5}$ m $\approx$ 89,44 m.

Opdracht 25 bladzijde 249

Bepaal de minimale afstand van het punt $P(2,0)$ tot de grafiek van $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

$Q\left(x, \sqrt{x}\right)$ ligt op de grafiek van $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

De afstand van P(2 ,0) tot Q is $|PQ| = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

$|PQ|$ is minimaal als slechts $|PQ|^2$ minimaal is.

Stel $|PQ|^2 = f(x) = x^2 - 3x + 4$ (met $x \geqslant 0$).

$f'(x) = 2x - 3$ met nulpunt $\dfrac{3}{2}$

Aangezien $f''(x) = 2 > 0$, is dit een minimum.

$Q\left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ en de minimale afstand is $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Opdracht 26 bladzijde 249

Gegeven is de rationale functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$.

Welke informatie over de nulpunten en de extrema is geldig voor deze functie?

A Deze functie heeft een relatief minimum tussen de twee nulpunten.

B Deze functie heeft een relatief maximum tussen de twee nulpunten.

C Deze functie heeft een relatief minimum buiten de twee nulpunten.

D Deze functie heeft een relatief maximum buiten de twee nulpunten.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+2)^2 \cdot (2x-4) - (x^2-4x)2(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)\cdot(2x-4) - 2(x^2-4x)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{\cancel{2x^2} \cancel{+4x} \cancel{-4x} - 8 \cancel{-2x^2} + 8x}{(x+2)^3} \\ &= \frac{8x-8}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

verloopschema f:

x		−2		1	
f′(x)	+	|	−	0	+
f(x)	↗	|	↘	min.	↗

De nulpunten van f zijn 0 en 4.

Bijgevolg is A het juiste antwoord.

Opdracht 27 bladzijde 249

Ga telkens na of voor de gegeven functie aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan is in het gegeven interval. Indien dit zo is, bepaal dan alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

1 $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4 - 4x^2}$ in $[-1, 1]$

- f is continu in $[-1, 1]$.
- f is echter niet afleidbaar in $]-1, 1[$ want $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x^4 - 4x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x^3 - 8x)$

$$= \frac{4x^3 - 8x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4 - 4x^2)^2}}$$

f is niet afleidbaar in $0 \in\ ]-1, 1[$.

Bijgevolg is niet aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan.

2 $f: x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-2}$ in $[-1, 1]$

- f is continu in $[-1, 1]$
- f is afleidbaar in $]-1, 1[$
- $f(-1) = f(1) = 0$

  $\Rightarrow \exists\, c \in\,]-1, 1[\, : f'(c) = 0 \quad$ met $\; f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$

  $f'(x) = 0 \underset{D=12}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

  $\overset{c \in]-1, 1[}{\Rightarrow} c = 2 - \sqrt{3}$

3 $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3}$ in $[1, 3]$

- f is continu in $[1, 3]$
- f is afleidbaar in $]1, 3[$
- $f(1) = f(3) = 0$

  $\Rightarrow \exists\, c \in\,]1, 3[\, : f'(c) = 0 \quad$ met $\; f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{4}{3x^2} = \dfrac{4x-6}{3x^3}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

  $\Rightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Opdracht 28 bladzijde 249

Ga telkens na of voor de gegeven functie aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange voldaan is in het gegeven interval. Indien dit zo is, bepaal alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

1 $f: x \mapsto x^2 + x$ in $[-4, 6]$

- f is continu in $[-4, 6]$
- f is afleidbaar in $]-4, 6[$

  $\Rightarrow \exists\, c \in\,]-4, 6[\, : f'(c) = \dfrac{f(6) - f(-4)}{6-(-4)} = \dfrac{42-12}{10} = 3$

- $f'(x) = 2x + 1$

  $2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

  $\Rightarrow c = 1$

2 $f: x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ in $[2, 5]$

- f is continu in [2 ,5]
- f is afleidbaar in]2 ,5[

$$\Rightarrow \exists\, c \in\,]2, 5[\, : f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{\frac{1}{4}-1}{3} = -\frac{1}{4}$$

- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x-1=2 \quad \text{of} \quad x-1=-2$$
$$\Leftrightarrow x=3 \quad \text{of} \quad x=-1$$
$$\overset{c\,\in\,]2,\,5[}{\Rightarrow} \quad c = 3$$

3 $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x}$ in $[2, 5]$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

f is bijgevolg niet continu in [2, 5].

Er is niet voldaan aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange.

Opdracht 29 bladzijde 249

Voor welke waarden van a, m en b voldoet de functie

$$f: x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{als } x = 0 \\ -x^2+3x+a & \text{als } 0 < x < 1 \\ mx+b & \text{als } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange in $[0, 2]$?

- f moet continu zijn in [0, 2]

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = a = f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -1+3+3 = 5 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = m+b \end{array}\right\} \Rightarrow m+b=5$$

- f moet afleidbaar zijn in]0, 2[

$f'(x) = -2x+3$ als $0 < x < 1$
$f'(x) = m$ als $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = -2+3 = 1 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f'(x) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m=1$$

Uit $m+b=5$ en $m=1$ volgt dan dat $b=4$.

Opdracht 30 bladzijde 250

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ een absoluut maximum M en een absoluut minimum m heeft en dat $M + m = 1$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)-(x^2-x)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1 - 2x^3 + 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
f′(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ max.	↘	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ min.	↗

Nu is $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ zodat $M = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} > 1$ een absoluut maximum is en $m = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 1$ een absoluut minimum is met $M + m = \dfrac{\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}}{2} = 1$.

Opdracht 31 bladzijde 250

Voor welke waarden van a is de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x-2}{1-ax}$ stijgend over het domein?

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{a}\right\}$

$$f'(x) = \frac{1-2a}{(ax-1)^2}$$

$f'(x) > 0$ voor alle $x \in \text{dom } f$

$\Leftrightarrow 1 - 2a > 0$

$\Leftrightarrow a < \dfrac{1}{2}$

Voor alle waarden van $a < \dfrac{1}{2}$ is f stijgend over het hele domein.

Opdracht 32 bladzijde 250

Bepaal a en b als je weet dat de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x^2+bx+5}$ voor $x=2$ en voor $x=3$ een extremum bereikt.

$$f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x^2+bx+5}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+bx+5)(2x+a)-(x^2+ax-3)(2x+b)}{(x^2+bx+5)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+2bx^2+10x+ax^2+\cancel{abx}+5a\cancel{-2x^3}-2ax^2+6x-bx^2\cancel{-abx}+3b}{(x^2+bx+5)^2}$$

$$=\frac{(b-a)x^2+16x+5a+3b}{(x^2+bx+5)^2}$$

$f'(2)=0 \;\Rightarrow\; (b-a)\cdot 4+32+5a+3b=0 \qquad (1)$

$f'(3)=0 \;\Rightarrow\; (b-a)\cdot 9+48+5a+3b=0 \qquad (2)$

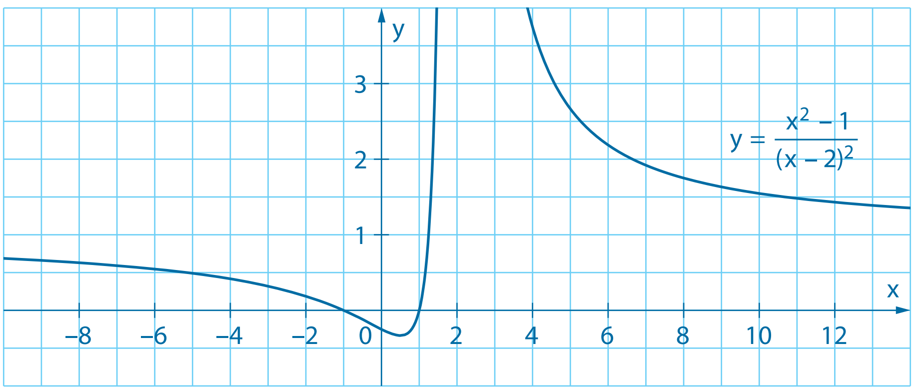
$$\left.\begin{array}{l}(1)\;\Rightarrow\; a+7b=-32\\(2)\;\Rightarrow\; a-3b=12\end{array}\right\}\;\Leftrightarrow\;\left\{\begin{array}{l}a=-1{,}2\\b=-4{,}4\end{array}\right.$$

Opdracht 33 bladzijde 250

Voor welke waarde(n) van p hebben de rechte met vergelijking $y=p$ en de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$ precies twee snijpunten?

- $f'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{(2-x)^3} \;\Rightarrow\;$ minimum voor f bij $x=\dfrac{1}{2}$, nl. $-\dfrac{1}{3}$
- asymptoten: V.A.: $x=2$
  H.A.: $y=1$

Er zullen twee verschillende snijpunten zijn voor $p\in\left]-\dfrac{1}{3},1\right[$ en voor $p\in\,]1,+\infty[$, dit is ook op de grafiek te zien.

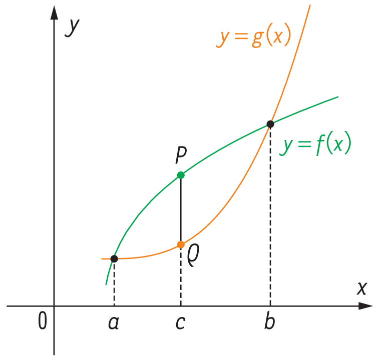


Opdracht 34 bladzijde 250

De functies f en g zijn afleidbaar in $[a, b]$.
De verticale afstand tussen de grafiek van f en die van g is maximaal in $[a, b]$ voor $x = c$.

Wat weet je over de raaklijnen t_1 en t_2 aan de grafieken van f en g in $P(c, f(c))$ en $Q(c, g(c))$?

Toon aan.



f en g zijn afleidbaar in [a, b]

$\Rightarrow$ als de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van g maximaal is voor x = c is

$(f - g)'(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $f'(c) - g'(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $f'(c) = g'(c)$

$\Leftrightarrow$ de raaklijnen t_1 en t_2 aan de grafieken van f en g in P(c, f(c)) en Q(c, g(c)) zijn evenwijdig.

Opdracht 35 bladzijde 250

Bepaal het stijgen en dalen, de relatieve en absolute extrema van de functie f.

1 $f: x \mapsto |x^2 - 5x + 4|$

of $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{als } x \leqslant 1 \text{ of } x \geqslant 4 \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{als } 1 < x < 4 \end{cases}$

f is niet afleidbaar in 1 en in 4.

- $f'(x) = 2x - 5$ als $x < 1$ of $x > 4$

  $f'(x) = -2x + 5$ als $1 < x < 4$

  nulpunt f': $\frac{5}{2}$

- verloopschema van f:

x		1		$\frac{5}{2}$		4	
f'(x)	–	|	+	0	–	|	+
f(x)	↘	0	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0	↗
		min.		max.		min.	

f bereikt een relatief maximum $\frac{9}{4}$ voor $x = \frac{5}{2}$ en relatieve minima 0 voor x = 1 en x = 4 die ook absolute minima zijn.

2 $f: x \mapsto \left|\dfrac{x-3}{x^2+2x+2}\right|$

of $\quad f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2+2x+2} & \text{als } x \geqslant 3 \\ \dfrac{-x+3}{x^2+2x+2} & \text{als } x < 3 \end{cases}$ $\quad$ (dom f = $\mathbb{R}$)

f is niet afleidbaar in 3.

- $f'(x) = \dfrac{-x^2+6x+8}{(x^2+2x+2)^2}$ als $x > 3$

  $f'(x) = \dfrac{x^2-6x-8}{(x^2+2x+2)^2}$ als $x < 3$

  nulpunten f′: $3 \pm \sqrt{17}$

- verloopschema van f:

x		$3-\sqrt{17}$		3		$3+\sqrt{17}$	
f′(x)	+	0	–	|	+	0	–
f(x)	↗	4,061... max.	↘	0 min.	↗	0,0615... max.	↘

f bereikt een relatief minimum 0 dat ook een absoluut minimum is voor x = 3.

f bereikt twee relatieve maxima: $f\left(3-\sqrt{17}\right) = 4{,}061...$ voor $x = 3-\sqrt{17}$ en $f\left(3+\sqrt{17}\right) = 0{,}0615...$ voor $x = 3+\sqrt{17}$.
Dit eerste is ook een absoluut maximum.

3 $f: x \mapsto \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{als } x \leqslant 3 \\ -2x^2+16x-24 & \text{als } x > 3 \end{cases}$

f is afleidbaar in 3 met f′(3) = 4

- $f'(x) = 2x - 2$ als $x \leqslant 3$

  nulpunt f′: 1

  en $f'(x) = -4x + 16$ als $x > 3$

  nulpunt f′: 4

- verloopschema van f:

x		1		4	
f′(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘	2 min.	↗	8 max.	↘

f bereikt een relatief maximum 8 voor x = 4 en een relatief minimum 2 voor x = 1.

f bereikt geen absolute extrema.

4 $f: x \mapsto \begin{cases} -x^2+5 & \text{als } x \leqslant 2 \\ -x^2+8x-11 & \text{als } x > 2 \end{cases}$

f is niet afleidbaar in 2.

- $f'(x) = -2x$ als $x < 2$

  nulpunt f′: 0

  en $f'(x) = -2x + 8$ als $x > 2$

  nulpunt f′: 4

- verloopschema van f:

x		0		2		4	
f′(x)	+	0	–	|	+	0	–
f(x)	↗	5 max.	↘	1 min.	↗	5 max.	↘

f bereikt een relatief minimum 1 voor x = 2.

f bereikt een relatief maximum 5 voor x = 0 en x = 4. Dit is ook een absoluut maximum.

Opdracht 36 bladzijde 250

Bewijs dat $\dfrac{a}{a^2+4} > \dfrac{b}{b^2+4}$ als $2 \leqslant a < b$.

Beschouw de functie met voorschrift

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+4-x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

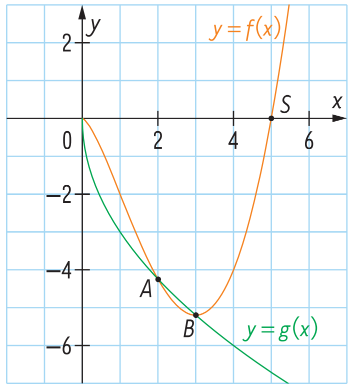
x		–2		2	
f′(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘	min.	↗	max.	↘

Als $2 \leqslant a < b$ dan is $f(a) > f(b)$ want f is dalend in $[2, +\infty[$.

Bijgevolg is $\dfrac{a}{a^2+4} > \dfrac{b}{b^2+4}$.

Opdracht 37 bladzijde 251

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}(x^2-5x)\sqrt{x}$ en $g\colon x \mapsto -3\sqrt{x}$.



1 De snijpunten van de grafieken van f en g zijn O, A en B.
Bereken de coördinaten van A en B.

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2-5x)\sqrt{x} = -3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot(x^2-5x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{of} \quad x = 3$$

Snijpunten: $O(0, 0)$, $A\left(2, -3\sqrt{2}\right)$, $B\left(3, -3\sqrt{3}\right)$

2 We noemen S het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as. Een punt P doorloopt de grafiek van g.
Bereken de minimale lengte van $[PS]$.

$S(5, 0)$

$P\left(x, -3\sqrt{x}\right)$

$$|PS| = \sqrt{(x-5)^2 + \left(-3\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - x + 25}$$

$|PS|$ is minimaal als $|PS|^2$ minimaal is:

Stel $f(x) = |PS|^2 = x^2 - x + 25$

$f'(x) = 2x - 1$

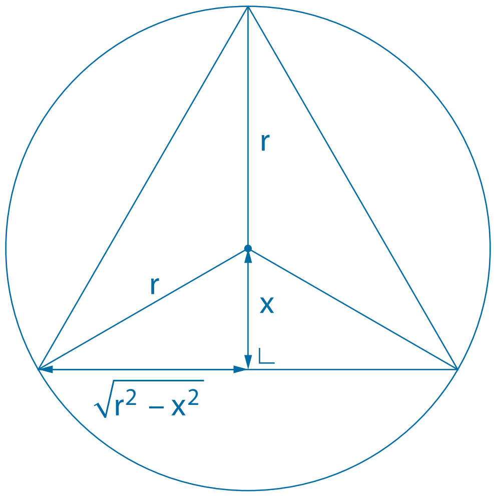
f' gaat over van negatief naar positief in $\frac{1}{2}$, dus f bereikt een minimum voor $x = \frac{1}{2}$.

De minimale lengte van $[PS]$ is $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 25} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

Opdracht 38 bladzijde 251

In een cirkel met straal *r* beschrijven we een gelijkbenige driehoek.

Bepaal de basis en de hoogte van de driehoek zodat de oppervlakte maximaal is.



- Oppervlakte driehoek $= \dfrac{2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot (r + x)}{2}$
- Om de vierkantswortel te vermijden beschouwen we het kwadraat van de oppervlakte.

  $A(x) = (r^2 - x^2)(r + x)^2$

  $A'(x) = -2x(r + x)^2 + (r^2 - x^2)\, 2\,(r + x) = 2(r + x)^2[-x + r - x]$

  $\qquad = 2(r + x)^2(-2x + r)$

x	$-r$	0		$\frac{r}{2}$	
A′(x)			+	0	−
A(x)			↗	max.	↘

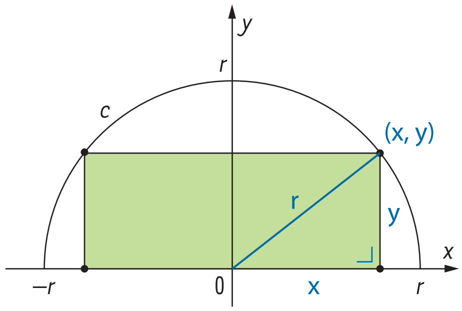
- Basis $= 2\sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{4}} = 2\sqrt{\dfrac{3}{4}r^2} = \sqrt{3}\,r$

  Hoogte $= r + \dfrac{r}{2} = \dfrac{3}{2}r$

  $\Rightarrow$ De oppervlakte is maximaal als we voor de basis $r\sqrt{3}$ nemen en als hoogte $\dfrac{3}{2}r$.

Opdracht 39 bladzijde 251

Bereken de oppervlakte van de grootst mogelijke rechthoek die kan ingeschreven worden in een halve cirkel *c* met straal *r*.



- Een vergelijking van de cirkel met middelpunt O en straal r is.

  $x^2 + y^2 = r^2$

  $\Rightarrow \; y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (bovenste helft cirkel)

  Oppervlakte rechthoek $= A(x)$

  $= 2x \cdot y$

  $= 2x\sqrt{r^2 - x^2}$

- $A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{-4x^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

  Nulpunten teller: $\pm\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

  Nulpunten noemer: $\pm r$

x	$-r$	$-\frac{r}{\sqrt{2}}$	0		$\frac{r}{\sqrt{2}}$		r	
$A'(x)$				+	0	−	|	+
$A(x)$				↗	max.	↘		

- De oppervlakte van de grootst mogelijk ingeschreven rechthoek is:

  $2 \cdot \dfrac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}} = \sqrt{2}r \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}r = r^2$

Opdracht 40 bladzijde 251

De energie die een vis per tijdseenheid verbruikt als hij zwemt met een snelheid v, is evenredig met v^3. Vissen die migreren proberen de energie die ze nodig hebben om een bepaalde afstand af te leggen, te minimaliseren.

Als een vis tegen een stroming met snelheid u $(u < v)$ zwemt, is de tijd die hij nodig heeft om zich te verplaatsen over een afstand d gelijk aan $\frac{d}{v-u}$.

Hieruit volgt de uitdrukking voor de verbruikte energie $E(v) = k \cdot v^3 \cdot \frac{d}{v-u}$ waarbij k een evenredigheidsconstante is.

Uit experimenten blijkt dat vissen die migreren tegenstroom zwemmen met een snelheid die 50 % hoger ligt dan de stromingssnelheid.

Toon aan dat je deze snelheid met het bovenstaande model vindt bij minimaal energieverbruik.

- Verbruikte energie $= E(v) = k \cdot v^3 \cdot \dfrac{d}{v-u}$

- $E'(v) = kd\left(\dfrac{3v^2(v-u) - v^3}{(v-u)^2}\right)$

$$= \frac{kdv^2(3v - 3u - v)}{(v-u)^2}$$

$$= \frac{kdv^2(2v - 3u)}{(v-u)^2}$$

v	0	u		$\frac{3u}{2}$	
$E'(v)$			$-$	0	$+$
$E(v)$			↘	min.	↗

$\Rightarrow$ Optimale snelheid is $v = \frac{3u}{2} = 1{,}5\ u$; m.a.w. een snelheid die 50% hoger ligt dan de stromingssnelheid u.

Opdracht 41 bladzijde 252

1 Toon aan dat de vergelijking $3ax^2 + 2bx = a + b$ minstens één oplossing heeft in $]0, 1[$.

Beschouw hiervoor de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x$ en gebruik de stelling van Rolle.

f: $x \mapsto ax^3 + bx^2 - (a + b)x$

- f is continu in $[0, 1]$
- f is afleidbaar in $]0, 1[$
- $f(0) = f(1) = 0$

$$\overset{\text{Stelling van Rolle}}{\Rightarrow} \quad \exists\, c \in\,]0, 1[: f'(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3ac^2 + 2bc - (a + b) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3ac^2 + 2bc = a + b$$

Bijgevolg heeft de vergelijking $3ax^2 + 2bx = a + b$ minstens één oplossing in $]0, 1[$.

2 Toon aan dat de vergelijking $6x^5 - 4x + 1 = 0$ minstens één oplossing heeft in $]0, 1[$.

f: $x \mapsto x^6 - 2x^2 + x$

- f is continu in $[0, 1]$
- f is afleidbaar in $]0, 1[$
- $f(0) = f(1) = 0$

$$\overset{\text{Stelling van Rolle}}{\Rightarrow} \quad \exists\, c \in\,]0, 1[: f'(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 6c^5 - 4c + 1 = 0$$

Bijgevolg heeft de vergelijking $6x^5 - 4x + 1 = 0$ minstens één oplossing in $]0, 1[$.

Opdracht 42 bladzijde 252

1 Voor de functie f geldt: $1 \leqslant f'(x) \leqslant 2$ voor elke $x \in [3, 5]$.

Tussen welke grenzen ligt $f(5) - f(3)$?

$1 \leqslant f'(x) \leqslant 2, \forall\, x \in [3, 5]$

Uit het gegeven volgt dat f afleidbaar is over het beschouwde interval en dus ook continu.

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt:

$\exists\, c \in]3, 5[: f'(c) = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$

$\Rightarrow\ 1 \leqslant \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \leqslant 2$

$\Rightarrow\ 2 \leqslant f(5) - f(3) \leqslant 4$

$\Rightarrow$ f(5) – f(3) ligt tussen 2 en 4

2 Als voor elke $x \in [x_1, x_2]$ geldt: $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, dan geldt $m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1)$.

Bewijs.

$m \leqslant f'(x) \leqslant M, \forall\, x \in]x_1, x_2[$

Uit het gegeven volgt dat f afleidbaar is over het beschouwde interval en dus ook continu.

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt dat:

$\exists\, c \in]x_1, x_2[: f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\Rightarrow\ m \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant M$

$\overset{x_2 - x_1 > 0}{\Rightarrow}\ m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1)$

Opdracht 43 bladzijde 252

Beschouw de familie functies met voorschrift $f(x)=\dfrac{x+m}{x^2+1}$ met m als reële parameter.

dom f = $\mathbb{R}$, geen V.A., H.A.: $y = 0$

1 Toon aan dat elk van deze functies een relatief maximum en een relatief minimum heeft.

$$f'(x) = -\frac{x^2+2mx-1}{(x^2+1)^2}$$

Nulpunten teller: nulpunten noemer: /

$D = 4(m^2+1) > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{m^2+1}}{2} = -m \pm \sqrt{m^2+1}$$

f′ heeft dus 2 nulpunten.

x		x_1		x_2	
f′(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘		↗		↘
		min.		max.	

De coördinaten van de extrema zijn:

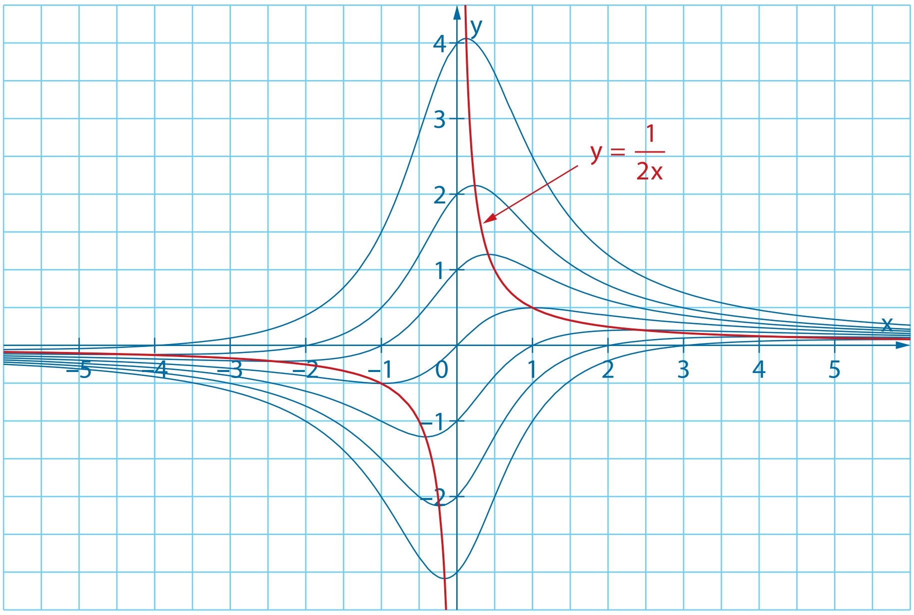
$$\left(-m-\sqrt{m^2+1};\ \frac{m-\sqrt{m^2+1}}{2}\right) \text{ en } \left(-m+\sqrt{m^2+1};\ \frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$

2 Op welke kromme liggen al deze extrema?

$$x_1 \cdot y_1 = \left(-m - \sqrt{m^2+1}\right) \cdot \left(\frac{m - \sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(m^2 + 1 - m^2)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$x_2 \cdot y_2 = \left(-m + \sqrt{m^2+1}\right) \cdot \left(\frac{m + \sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(m^2 + 1 - m^2)$$
$$= \frac{1}{2}$$

Deze extrema liggen op de hyperbool met vergelijking $y = \frac{1}{2x}$.

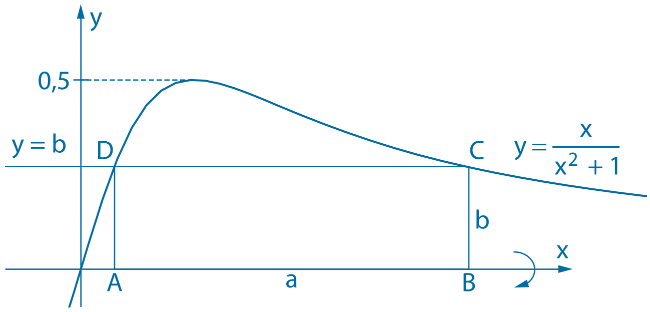


Opdracht 44 bladzijde 252

Van een rechthoek met twee hoekpunten op de positieve x-as, liggen de andere hoekpunten op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Door wentelen van deze rechthoek rond de x-as onstaat een cilinder.

Bepaal de afmetingen en de ligging van de rechthoek waarvoor de inhoud van deze cilinder maximaal is.



- Er geldt: $b = \dfrac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow bx^2 + b = x$

$$\Leftrightarrow bx^2 - x + b = 0$$

$$\underset{D = 1 - 4b^2}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4b^2}}{2b}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1-\sqrt{1-4b^2}}{2b}, 0\right), B\left(\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2b}, 0\right) \text{ zodat } |AB| = \frac{\sqrt{1-4b^2}}{b}$$

- Inhoud cilinder

$$I(b) = \pi \cdot b^2 \cdot \frac{\sqrt{1-4b^2}}{b}$$

$$= \pi \cdot b \cdot \sqrt{1-4b^2}$$

$$I'(b) = \pi \cdot \left(\sqrt{1-4b^2} + b\frac{-4b}{\sqrt{1-4b^2}}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{1-4b^2-4b^2}{\sqrt{1-4b^2}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1-8b^2}{\sqrt{1-4b^2}}$$

Nulpunten teller: $\pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Nulpunten noemer: $\pm\dfrac{1}{2}$

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0		$\frac{\sqrt{2}}{4}$		$\frac{1}{2}$	
A′(x)				+	0	−		+
A(x)				↗	max.	↘		

$\Rightarrow$ de hoogte (b) van de rechthoek is $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

de basis ($|AB|$) van de rechthoek is $\dfrac{\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{8}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2$

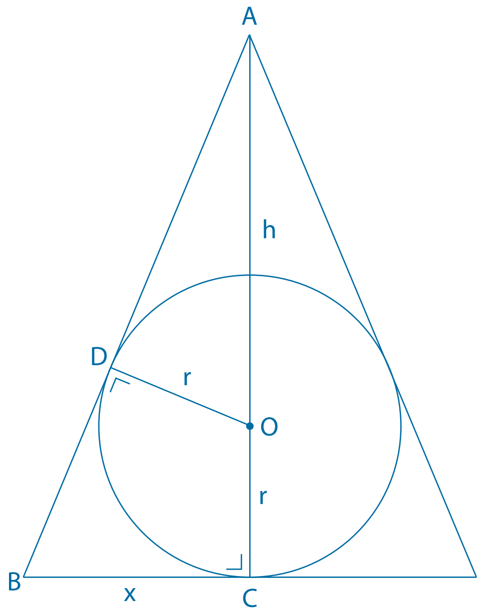
$$A\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0\right) = A\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, 0\right) = A\left(\sqrt{2}-1, 0\right)$$

$$B\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0\right) = B\left(\sqrt{2}+1, 0\right)$$

Opdracht 45 bladzijde 252

Een kegel is beschreven om een bol met straal *r*.

Bereken de verhouding van het volume van de kegel en het volume van de bol als het volume van de kegel minimaal is.



- We tekenen een doorsnede van de bol en de kegel met een vlak door de top van de kegel en loodrecht op het grondvlak. We stellen x gelijk aan de straal van het grondvlak van de kegel.

  Trek $OD \perp AB$

- Nu is ΔABC gelijkvormig met ΔAOD ($\hat{A}$ gemeenschappelijk en $\hat{C} = \hat{D} = 90°$)

$$\Rightarrow \quad \frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x}{r} = \frac{h}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}} \qquad \left(|AD| = \sqrt{|AO|^2 - |OD|^2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{h^2}{h^2 - 2hr}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{h}{h-2r}$$
$$\Downarrow$$
$$hx^2 - 2rx^2 = hr^2$$
$$\Downarrow$$
$$h = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$$

Het volume van de kegel is dus $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x^2 \cdot \dfrac{2rx^2}{x^2-r^2} = \dfrac{2}{3}\pi r \cdot \dfrac{x^4}{x^2-r^2}$.

- $V'(x) = \frac{2}{3}\pi r\left(\frac{4x^3(x^2 - r^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - r^2)^2}\right)$

$= \frac{2}{3}\pi r \cdot 2x^3 \frac{2x^2 - 2r^2 - x^2}{(x^2 - r^2)^2}$

$= \frac{4}{3}\pi r \cdot x^3 \cdot \frac{x^2 - 2r^2}{(x^2 - r^2)^2}$

Nulpunten teller: $\pm\sqrt{2}r$

Nulpunten noemer: $\pm r$

x	$-\sqrt{2}r$	$-r$	0	r		$\sqrt{2}r$	
$V'(x)$					$-$	0	$+$
$V(x)$					$\searrow$	min.	$\nearrow$

$\Rightarrow$ De straal van het grondvlak van de kegel is $x = \sqrt{2}r$ en het volume is dan

$\frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{4r^4}{r^2} = \frac{8}{3}\pi r^3.$

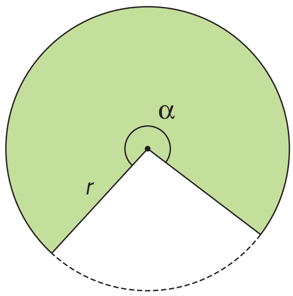
Het volume van de bol is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

De gevraagde verhouding is $\frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2.$

Opdracht 46 bladzijde 252

Uit een cirkelvormig blad papier met straal r snijden we een sector uit met middelpunthoek α. Met deze sector maken we een kegel.

Hoe groot moeten we α nemen opdat het volume van de kegel zo groot mogelijk zou zijn?



- Met een middelpuntshoek van 360° correspondeert een lengte van $2\pi r$.
- Met een middelpuntshoek van α° correspondeert een lengte van $\frac{2\pi r \cdot \alpha}{360}$

Als a de straal is van het grondvlak van de kegel is $2\pi a$ de omtrek van het grondvlak.

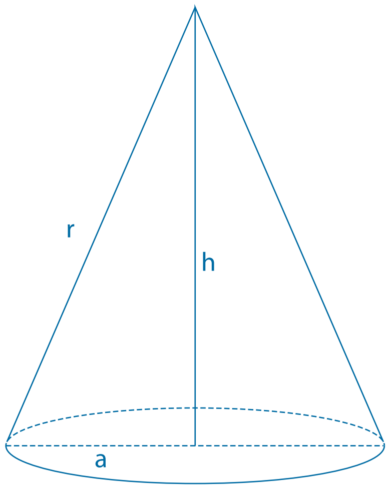
Dus $2\pi a = \frac{2\pi r\alpha}{360}$

$\Downarrow$

$a = \frac{r\alpha}{360}$

De hoogte h van de kegel is dan

$\sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2\alpha^2}{360^2}}$



- Het volume van de kegel is bijgevolg:

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\, a^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^2\alpha^2}{360^2}\sqrt{r^2 - \frac{r^2\alpha^2}{360^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3\alpha^2}{360^3} \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}$$

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\left(2\alpha\sqrt{360^2 - \alpha^2} - \alpha^2\frac{\alpha}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\frac{\alpha(2(360^2 - \alpha^2) - \alpha^2)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\frac{\alpha(2 \cdot 360^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

Nulpunten teller: $\pm 360\sqrt{\frac{2}{3}}$

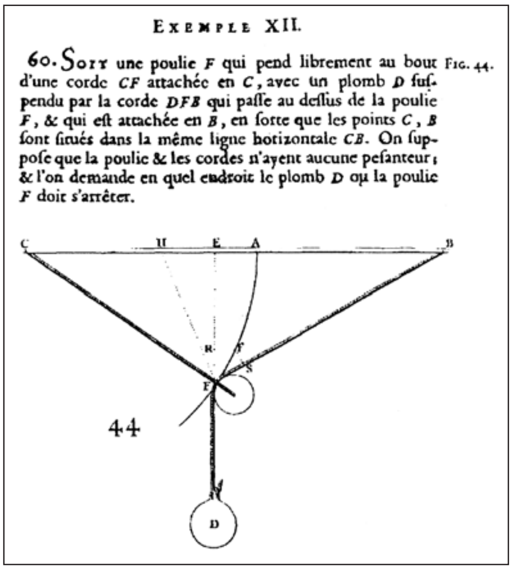
Nulpunten noemer: ± 360

α	-360	$-360\sqrt{\frac{2}{3}}$	0		$360\sqrt{\frac{2}{3}}$		360	
$V'(\alpha)$				$+$	0	$-$	|	$+$
$V(\alpha)$				$\nearrow$	max.	$\searrow$		

$$\Rightarrow \quad \alpha = 360°\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\approx 294°$$

Opdracht 47 bladzijde 253


EXEMPLE XII.

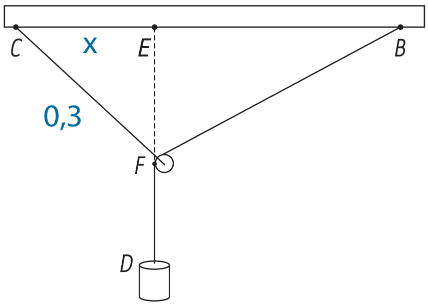
60. Soit une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D ſuſpendu par la corde DFB qui paſſe au deſſus de la poulie F, & qui eſt attachée en B, en ſorte que les points C, B ſont ſitués dans la même ligne horizontale CB. On ſuppoſe que la poulie & les cordes n'ayent aucune peſanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

In 1696 publiceerde Guillaume de L'Hôpital[3] het eerste franstalige boek over analyse.
Daarin loste hij het volgende probleem op.

Aan een horizontale balk worden twee touwtjes van ongelijke lengte bevestigd. Aan het uiteinde van het linkertouwtje (het kortste touwtje) wordt een katrol bevestigd en door deze katrol wordt het rechtertouwtje gehaald, waarna aan het uiteinde van dit touwtje een gewicht wordt bevestigd. Hierna wordt het geheel losgelaten, waarop het gewicht verschuift totdat een evenwicht bereikt wordt.

De vraag is waar de rustpositie van het gewicht zich bevindt en hoe dit berekend kan worden.

Ter vereenvoudiging nemen we aan dat de straal van de katrol zeer klein is en dus buiten beschouwing mag worden gelaten. Alhoewel de L'Hôpital het probleem algemeen oploste, voeren we de volgende afmetingen in: het linkertouwtje is
0,3 m lang, het rechtertouw is 1,5 m lang en $|CB| = 1$ m.



- Bij het bereiken van een evenwicht zal het gewichtje zo laag mogelijk hangen, m.a.w. de afstand tussen E en D moet zo groot mogelijk zijn.
- Stellen we nu $|CE| = x$, dan is $|EB| = 1 - x$.

  Verder is gegeven dat $|CF| = 0{,}3$, zodat

  $|EF| = \sqrt{0{,}09 - x^2}$.
- In de rechthoekige driehoek BEF is $|EB|$ gelijk aan $1 - x$ en $|EF|$ gelijk aan $\sqrt{0{,}09 - x^2}$ zodat

  $|FB| = \sqrt{(1-x)^2 + 0{,}09 - x^2} = \sqrt{1{,}09 - 2x}$.
- Uit $|BD| = 1{,}5$ volgt dan dat $|FD| = 1{,}5 - \sqrt{1{,}09 - 2x}$.
- Voor $|ED|$ verkrijgen we dan als lengte: $f(x) = 1{,}5 - \sqrt{1{,}09 - 2x} + \sqrt{0{,}09 - x^2}$.
- $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}09 - 2x}} - \dfrac{x}{\sqrt{0{,}09 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{0{,}09 - x^2} - x\sqrt{1{,}09 - 2x}}{\sqrt{(1{,}09 - 2x)(0{,}09 - x^2)}}$

x	−0,3	−0,191	0		0,236		0,3	0,545	1
f′(x)	|	0		+	0	−	|	|	0
f(x)				↗	max.	↘			

De afstand $|CE|$ is ongeveer 0,236 m.

Opdracht 48 bladzijde 253

Onderzoek het hol en bol verloop van de volgende functies. Bepaal ook de eventuele buigpunten van de grafiek van f.

1 $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2) - x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+2)^{\cancel{2}} \cdot (-2x) - (-x^2+2) \cdot 2\,\cancel{(x^2+2)} \cdot 2x}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

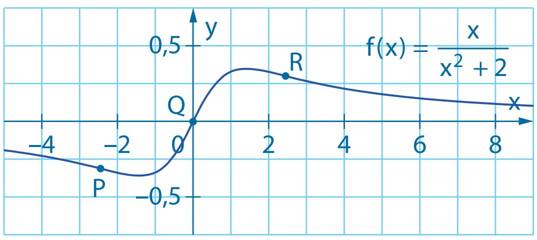
$$= \frac{2x(-x^2-2+2x^2-4)}{(x^2+2)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$$

x		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ bgpt.	$\smile$	0 bgpt.	$\frown$	$\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ bgpt.	$\smile$

De grafiek van f is hol in $\left[-\sqrt{6}, 0\right]$ en in $\left[\sqrt{6}, +\infty\right[$ en bol in $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right]$ en $\left[0, \sqrt{6}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(-\sqrt{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{8}\right)$, $Q(0, 0)$ en $R\left(\sqrt{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{8}\right)$.



2 $f: x \mapsto \dfrac{(x+3)^2}{x^2+2x+5}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+5)2(x+3)-(x+3)^2(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$= \frac{2(x+3)(x^2+2x+5-x^2-4x-3)}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$= \frac{2(x+3)(-2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{4(x+3)(1-x)}{(x^2+2x+5)^2}$$

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{(x^2+2x+5)(-2x-2)-(x+3)(1-x)\cdot 2(2x+2)}{(x^2+2x+5)^3}$$

$$= \frac{4\cdot(2x+2)\cdot(-x^2-2x-5+2x^2+4x-6)}{(x^2+2x+5)^3}$$

$$= \frac{8(x+1)(x^2+2x-11)}{(x^2+2x+5)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x^2+2x-11=0$

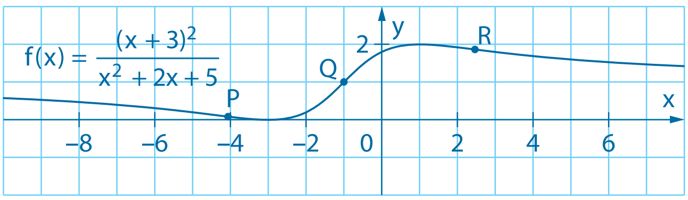
$$D = 4+4\cdot 1\cdot 11$$
$$= 48$$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{-2\pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$

x		$-1-2\sqrt{3}$		-1		$-1+2\sqrt{3}$	
f″(x)	–	0	+	0	–	0	+
f(x)	$\frown$	$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bgpt.	$\smile$	1 bgpt.	$\frown$	$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bgpt.	$\smile$

De grafiek van f is hol in $\left[-1-2\sqrt{3}, -1\right]$ en in $\left[-1+2\sqrt{3}, +\infty\right[$ en bol in $\left]-\infty, -1-2\sqrt{3}\right]$ en in $\left[-1, -1+2\sqrt{3}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(-1-2\sqrt{3}, 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q(-1, 1)$ en $R\left(-1+2\sqrt{3}, 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



3 $f\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}$

dom f =]–4, 4]

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}} \cdot \frac{(4+x)(-1)-(4-x)1}{(4+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}} \cdot \frac{-4}{(4+x)^2}$$

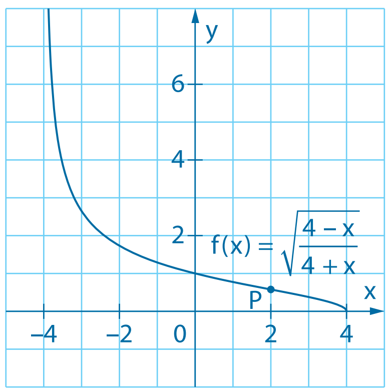
$$= \frac{-4}{\sqrt{(4-x)(4+x)^3}} = -4\left[(4-x)(4+x)^3\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -4 \cdot \frac{-1}{2}\left[(4-x)(4+x)^3\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[-(4+x)^3 + (4-x)\cdot 3(4+x)^2\right]$$

$$= \frac{2(4+x)^2 \cdot (-4-x+12-3x)}{\sqrt{(4-x)^3(4+x)^9}}$$

$$= \frac{8(2-x)}{\sqrt{(4-x)^3(4+x)^5}}$$

x	–4		2		4
$f''(x)$	|	+	0	–	|
$f(x)$	|	$\cup$	$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ bgpt.	$\cap$	0



De grafiek van f is hol in]–4, 2], bol in [2, 4] en heeft een buigpunt $P\left(2, \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

4 $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^4}$

$$f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(1 + x)$$

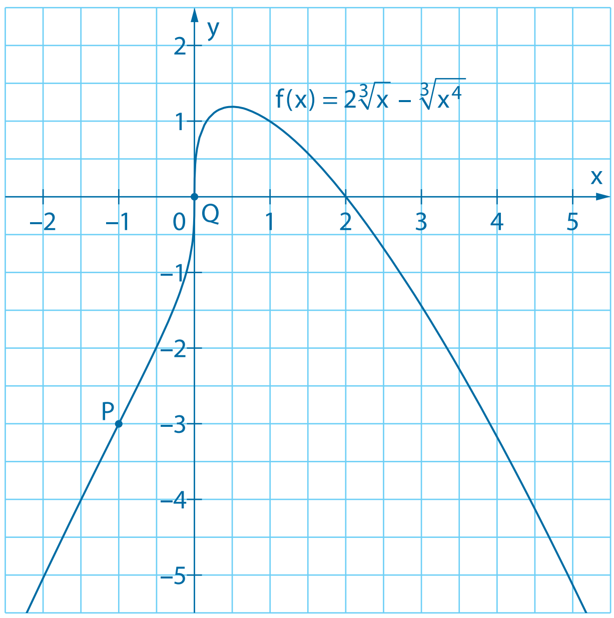
$$= \frac{-4(1 + x)}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$$

f is niet afleidbaar in 0.

x		-1		0	
$-4(1 + x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$9 \cdot \sqrt[3]{x^5}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$
$f(x)$	$\frown$	-3 bgpt.	$\smile$	0 bgpt.	$\frown$

De grafiek van f is hol in $[-1, 0]$ en bol in $]-\infty, -1]$ en in $[0, +\infty[$.

De buigpunten zijn $P(-1, -3)$ en $Q(0, 0)$.



Opdracht 49 bladzijde 254

Bepaal de relatieve extrema van $f: x \mapsto -x^3 + 5x^2 - 3x + 9$ gebruik makend van de tweede afgeleide-test.

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 3$

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 + 10x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{3}$$

$f''(x) = -6x + 10$

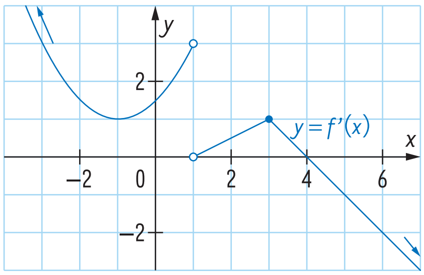
$f''(3) = -8 < 0 \Rightarrow$ f bereikt een rel. max. voor $x = 3$ gelijk aan $f(3) = 18$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 8 > 0 \Rightarrow$ f bereikt een rel. min. voor $x = \frac{1}{3}$ gelijk aan $\frac{230}{27}$.

Opdracht 50 bladzijde 254

Van een continue functie f is de hellinggrafiek gegeven.

Voor welke x-waarde(n) heeft de grafiek van f een buigpunt?



f′ bereikt een relatief extremum voor $x = -1$ en voor $x = 3$, zodat de grafiek van f daar een buigpunt heeft.

Voor $x = 1$ is er geen unieke raaklijn, dus ook geen buigpunt.

Opdracht 51 bladzijde 254

Gegeven is de rationale functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-2)^2}$.

Welke informatie over extrema, buigpunten en asymptoten is geldig voor deze functie?

A Deze functie heeft een verticale en een horizontale asymptoot, een minimum voor $x = \frac{1}{2}$ en een buigpunt voor $x = -\frac{1}{4}$.

B Deze functie heeft alleen een verticale asymptoot, een minimum voor $x = \frac{1}{2}$ en meer dan 1 buigpunt.

C Deze functie heeft een verticale en een horizontale asymptoot, een maximum voor $x = \frac{1}{2}$ en meer dan 1 buigpunt.

D Geen van de drie bovenstaande mogelijkheden is correct.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

- V.A.: $x = 2$ en H.A.: $y = -1$ nl. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$

  $\Rightarrow$ B is fout

- $f'(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(-2x)-(1-x^2)\cdot 2}{(x-2)^3}$

  $= \dfrac{-2x^2 + 4x - 2 + 2x^2}{(x-2)^3}$

  $= \dfrac{4x-2}{(x-2)^3}$

x		$\frac{1}{2}$		2	
f′(x)	+	0	–	|	+
f(x)	↗	max.	↘	|	↗

f bereikt een maximum voor $x = \frac{1}{2}$ zodat ook A fout is.

- $f''(x) = \dfrac{(x-2)^3 \cdot 4 - (4x-2)\cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$

  $= \dfrac{4x - 8 - 12x + 6}{(x-2)^4}$

  $= \dfrac{-8x-2}{(x-2)^4}$

x		$-\frac{1}{4}$		2	
f″(x)	+	0	–	|	–
f(x)	∪	bgpt.	∩	|	∩

De grafiek van f heeft juist 1 buigpunt voor $x = -\frac{1}{4}$ zodat ook C fout is.

Antwoord D is het juiste.

Opdracht 52 bladzijde 254

Gegeven is de familie van rationale functies $f\colon x \mapsto \dfrac{mx}{x^2 - m^2}$ met parameter m.

1 Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{-m(x^2+m^2)}{(x^2-m^2)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{(x^2 - m^2)\cdot m - mx \cdot 2x}{(x^2-m^2)^2}$

$= \dfrac{mx^2 - m^3 - 2mx^2}{(x^2-m^2)^2}$

$= \dfrac{-m(x^2+m^2)}{(x^2-m^2)^2}$

2 Voor welke waarde van m is de helling in het buigpunt gelijk aan 4?

$$f''(x) = \frac{(x^2 - m^2)\cdot(-2mx) + m(x^2 + m^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{2mx(-x^2 + m^2 + 2x^2 + 2m^2)}{(x^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{2mx(x^2 + 3m^2)}{(x^2 - m^2)^3}$$

f'' heeft maar één nulpunt met tekenwissel: 0.

Het buigpunt is P(0, 0).

De helling in het buigpunt is $f'(0)$.

$$f'(0) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m^3}{m^4} = 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{m} = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{4}}$$

Opdracht 53 bladzijde 254

Gegeven is de familie van irrationale functies $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2+1} - mx$ met parameter m.

1 Voor welke waarden van m heeft f een extremum?

Gebruik de tweede afgeleide-test om na te gaan of dit extremum een maximum of een minimun is.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x - m = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$$

- Opdat f' een nulpunt met tekenwissel zou hebben, moeten de grafieken van $f_1\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ en $f_2\colon x \mapsto m$ een snijpunt hebben (geen raakpunt).
- We onderzoeken het verloop van $f_1\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
  - $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

    $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

    $y = 1$ en $y = -1$ zijn vergelijkingen van de H.A.

- $$f_1'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

  $f_1'(x) > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ zodat f_1 overal stijgend is.

  We besluiten: $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

  $\Rightarrow$ f_1 snijdt f_2 enkel als $\boxed{-1 < m < 1}$.

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Bijgevolg heeft f steeds een relatief minimum als $-1 < m < 1$.

2 Toon aan dat de grafiek van *f* voor geen enkele waarde van *m* een buigpunt heeft.

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

De grafiek van f heeft nooit buigpunten.

Opdracht 54 bladzijde 255

Bepaal de coördinaten van de eventuele hoekpunten van de volgende functies.

1 $f\colon x \mapsto (x^2+1) \cdot |x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+1)(x-3) & \text{als } x \geqslant 3 \\ (x^2+1)(3-x) & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 & \text{als } x > 3 \\ -3x^2 + 6x - 1 & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

$f'(3)$ bestaat niet

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{als } x > 3 \\ -6x + 6 & \text{als } x < 3 \end{cases}$$

$f''(3)$ bestaat niet,
maar als $x \underset{>}{\rightarrow} 3$, dan is $f''(x) > 0$

als $x \underset{<}{\rightarrow} 3$, dan is $f''(x) < 0$

Het hol en bol verloop van f wijzigt in 3.

Bij een hoekpunt is de linker- en rechterafgeleide verschillend.

linkerafgeleide in 3:

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 3} \frac{(x^2+1)\cancel{(3-x)}}{\cancel{x-3}_{\,-1}}$$

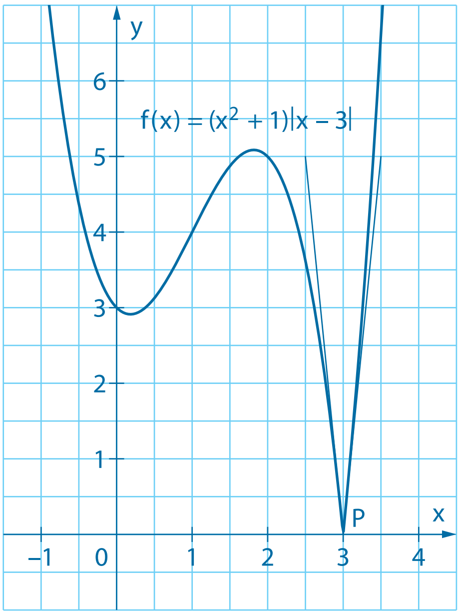
$$= \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 3} (-(x^2+1)) = -10$$

rechterafgeleide in 3:

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{(x^2 + 1)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = 10$$

$\Rightarrow$ P(3, 0) is een hoekpunt van de grafiek van f.



2 $f: x \mapsto |x^3 - 9x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{als } -3 \leqslant x \leqslant 0 \text{ of } x \geqslant 3 \\ -x^3 + 9x & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9 & \text{als } -3 < x < 0 \text{ of } x > 3 \\ -3x^2 + 9 & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

f is niet afleidbaar in –3, 0 en in 3.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{als } -3 < x < 0 \text{ of } x > 3 \\ -6x & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

- Als $x \underset{<}{\to} -3$, dan is $f''(x) > 0$ en

  als $x \underset{>}{\to} -3$, dan is $f''(x) < 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in –3.

  linkerafgeleide in –3:

  $$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{-x(\cancel{x + 3})(x - 3)}{\cancel{x + 3}} = -18$$

  rechterafgeleide in –3:

  $$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{x(\cancel{x + 3})(x - 3)}{\cancel{x + 3}} = 18$$

  $\Rightarrow$ P(–3, 0) is een hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} 0$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} 0$, dan is $f''(x) < 0$

  zodat het hol en bol verloop niet wijzigt in 0, bijgevolg is (0,0) geen hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} 3$, dan is $f''(x) > 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} 3$, dan is $f''(x) < 0$

  Het hol en bol verloop van f wijzigt in 3.

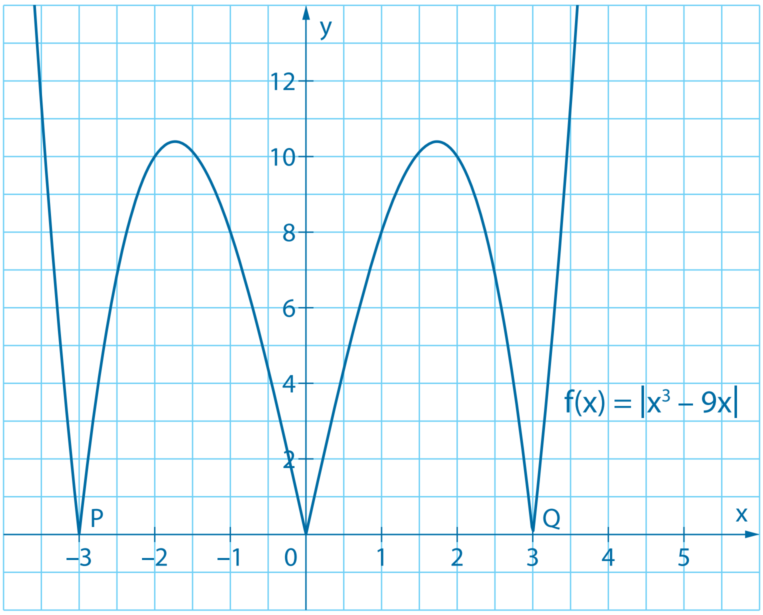
  linkerafgeleide in 3:

  $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}} = -18$$

  rechterafgeleide in 3:

  $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}} = 18$$

  $\Rightarrow$ Q(3, 0) is een hoekpunt.



3 $f: x \mapsto (x-2) \cdot |x^2 - 4|$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)(x^2-4) & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ (x-2)(4-x^2) & \text{als } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ -3x^2 + 4x + 4 & \text{als } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 4 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ -6x + 4 & \text{als } -2 < x < 2 \end{cases}$$

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} -2$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} -2$, dan is $f''(x) > 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in −2.

  linkerafgeleide in −2:

  $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{(x-2)^2 (\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} = 16$$

  rechterafgeleide in −2:

  $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-(x-2)^2 (\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} = -16$$

  $\Rightarrow$ P(−2, 0) is een hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} 2$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} 2$, dan is $f''(x) > 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in 2.

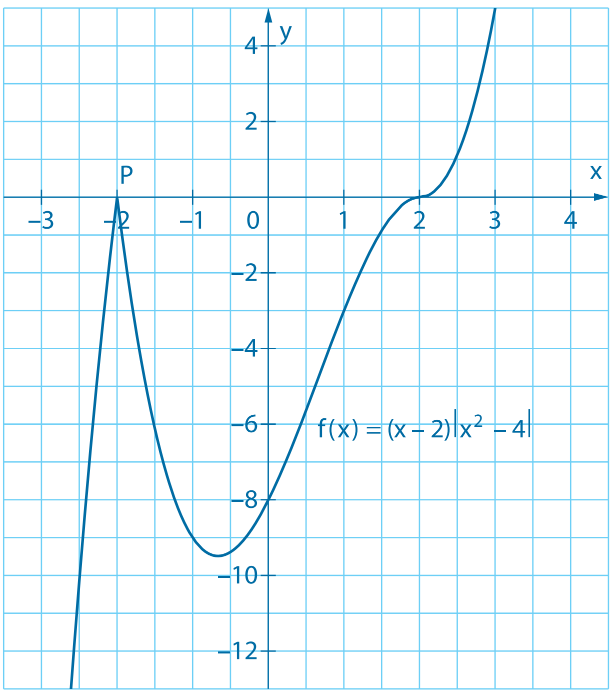
  linkerafgeleide in 2:

  $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{(\cancel{x-2})(4 - x^2)}{\cancel{x-2}} = 0$$

  rechterafgeleide in 2:

  $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(\cancel{x-2})(x^2 - 4)}{\cancel{x-2}} = 0$$

  f is afleidbaar in 2, er is een unieke raaklijn en het hol en bol verloop wijzigt. Bijgevolg is Q(2, 0) een buigpunt en geen hoekpunt.



Opdracht 55 bladzijde 255

Onderzoek het verloop van de volgende rationale functies (asymptoten, relatieve extrema, stijgen en dalen, buigpunten, hol en bol verloop).

1 $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3+4x}{2x^2-10}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- V.A.: $x = -\sqrt{5}$

  $x = \sqrt{5}$

  S.A.: $y = ax + b$

  $$\text{met } a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x}{x(2x^2-10)} = \frac{1}{2}$$

  $$\text{en } b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+4x}{2x^2-10} - \frac{1}{2}x\right)$$

  $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x-x^3+5x}{2x^2-10}$$

  $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x}{2x^2-10} = 0$$

  De S.A. heeft als vergelijking $y = \dfrac{1}{2}x$.

- $f'(x) = \dfrac{2x^4-38x^2-40}{(2x^2-10)^2} = \dfrac{x^4-19x^2-20}{2(x^2-5)^2}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 19x^2 - 20 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 20$ of $x^2 = -1$

  $\Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$ of $x = -2\sqrt{5}$ → geen oplossing

x		$-2\sqrt{5}$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$	
f′(x)	+	0	−	|	−	|	−	0	+
f(x)	↗	$\frac{-8\sqrt{5}}{5}$ max.	↘	|	↘	|	↘	$\frac{8\sqrt{5}}{5}$ min.	↗

f is stijgend in $\left]-\infty, -2\sqrt{5}\right]$ en in $\left[2\sqrt{5}, +\infty\right[$.

f is dalend in $\left[-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right[$, in $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$ en in $\left]\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right]$.

f bereikt een relatief maximum $\dfrac{-8\sqrt{5}}{5}$ voor $x = -2\sqrt{5}$ en een relatief minimum $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ voor $x = 2\sqrt{5}$.

- $f''(x) = \dfrac{9x(x^2 + 15)}{(x^2 - 5)^3}$

x		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	
f″(x)	−	|	+	0	−	|	+
f(x)	$\frown$	|	$\smile$	0	$\frown$	|	$\smile$
				bgpt.			

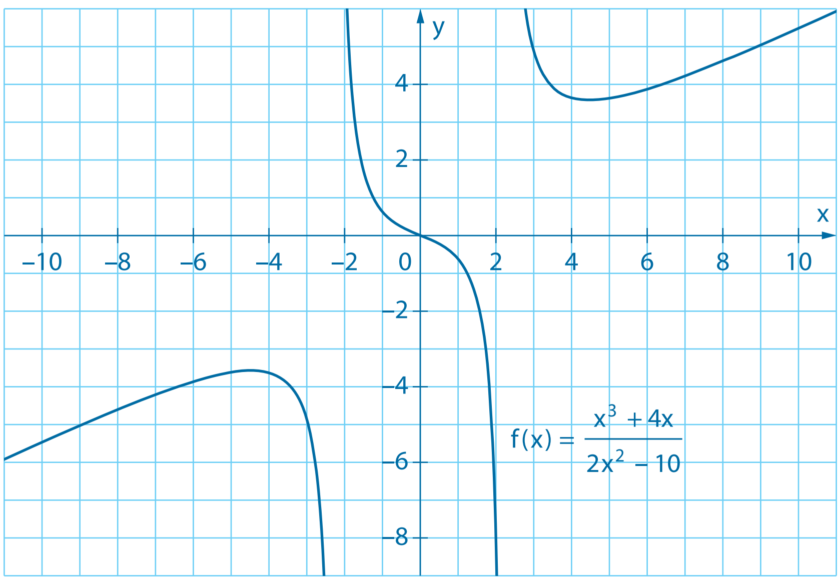
De grafiek van f is hol in $\left]-\sqrt{5}, 0\right]$ en in $\left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.

De grafiek van f is bol in $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right[$ en in $\left[0, \sqrt{5}\right[$.

P(0, 0) is het buigpunt van de grafiek van f.

- Samenvattende tabel

x		$-2\sqrt{5}$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$	
f′(x)	+	0	−	|	−	−	−	|	−	0	+
f″(x)	−	−	−	|	+	0	−	|	+	+	+
f(x)	↗	$\dfrac{-8\sqrt{5}}{5}$	↘	|	↘	0	↘	|	↘	$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$	↗
		max.				bgpt.				min.	



2 $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

- dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- V.A.: $x = -1$

  H.A.: $y = 1$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.
- $f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3 + 1)^3}$

x		−1		0	
f′(x)	+	|	+	0	+
f(x)	↗	|	↗		↗

  f bereikt geen relatieve extrema en is stijgend binnen haar domein.

- $f''(x) = \dfrac{12x(1 - 2x^3)}{(x^3 + 1)^3}$

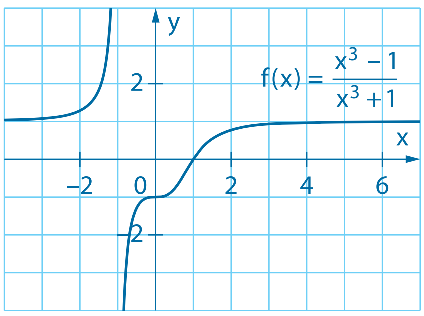
x		−1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	
f″(x)	+	|	−	0	+	0	−
f(x)	∪	|	∩	−1	∪	$\frac{-1}{3}$	∩
				bgpt.		bgpt.	

  De grafiek van f is hol in $]-\infty, -1[$ en in $\left[0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ en bol in $]-1, 0]$ en in $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

  De buigpunten zijn $P(0, -1)$ en $Q\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{3}\right)$.

- Samenvattende tabel

x		−1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	
f(x)	↗	|	↗	−1	↗	$\frac{-1}{3}$	↗
				bgpt.		bgpt.	



3 $f: x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$
- V.A.: $x = 0$ en $x = 6$

  H.A.: $y = 1$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$
- $$f'(x) = \frac{(x^2 - 6x)\,2x - (x^2 - 4)(2x - 6)}{(x^2 - 6x)^2}$$
  $$= \frac{2x^3 - 12x^2 - 2x^3 + 8x + 6x^2 - 24}{(x^2 - 6x)^2}$$
  $$= \frac{-6x^2 + 8x - 24}{(x^2 - 6x)^2}$$

  f′ heeft geen nulpunten, $f'(x) < 0$ binnen het domein, f is overal dalend.
- $$f''(x) = \frac{(x^2 - 6x)(-12x + 8) + (6x^2 - 8x + 24)2(2x - 6)}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{-12x^3 + 72x^2 - 48x + 8x^2 + 24x^3 - 72x^2 - 32x^2 + 96x + 96x - 288}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{12x^3 - 24x^2 + 144x - 288}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{12(x - 2)(x^2 + 12)}{(x^2 - 6x)^3}$$

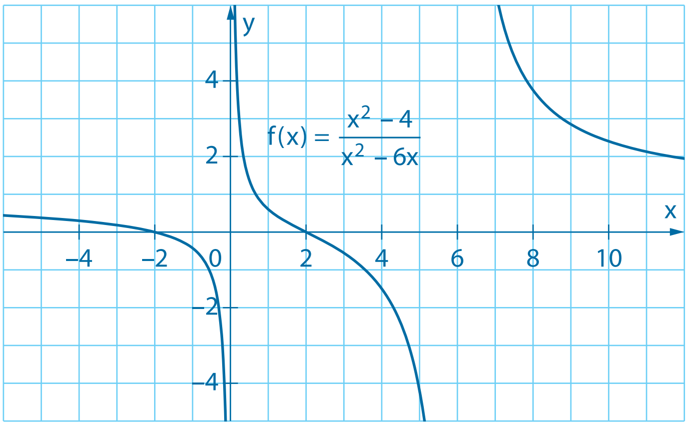
x		0		2		6	
f″(x)	–	|	+	0	–	|	+
f(x)	$\frown$	|	$\smile$	0 bgpt.	$\frown$	|	$\smile$

De grafiek van f is hol in]0, 2] en in]6, +∞[en bol in]–∞, 0[en in [2, 6[.

Het buigpunt is P(2, 0).

- Samenvattende tabel

x		0		2		6	
f(x)	↘	|	↘	0 bgpt.	↘	| bgpt.	↘



4 $f: x \mapsto \dfrac{-x^2+2x}{(x+1)^2}$

- dom f = ℝ \{–1}
- V.A.: x = –1

  H.A.: y = –1
- $f'(x) = \dfrac{(x+1)(-2x+2)+(x^2-2x)\cdot 2}{(x+1)^3}$

  $= \dfrac{\cancel{-2x^2} - \cancel{2x} + \cancel{2x} + 2 + \cancel{2x^2} - 4x}{(x+1)^3}$

  $= \dfrac{2-4x}{(x+1)^3}$

x		–1		$\frac{1}{2}$	
f′(x)	–	|	+	0	–
f(x)	↘	|	↗	$\frac{1}{3}$ max.	↘

f is stijgend in $\left]-1, \frac{1}{2}\right]$ en dalend in]–∞, –1[en in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

f bereikt een relatief maximum $\frac{1}{3}$ voor $x = \frac{1}{2}$.

- $f''(x) = \dfrac{(x+1)\cdot(-4)-(2-4x)\cdot 3}{(x+1)^4}$

  $= \dfrac{-4x-4-6+12x}{(x+1)^4}$

  $= \dfrac{8x-10}{(x+1)^4}$

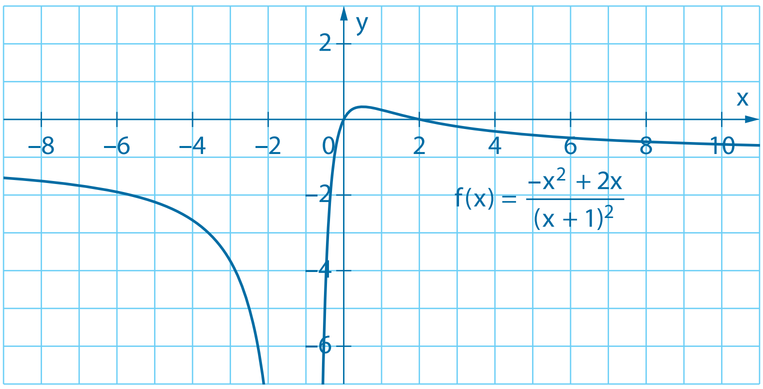
x		-1		$\frac{5}{4}$	
$f''(x)$	$-$	|	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	|	$\frown$	$\frac{5}{27}$ bgpt.	$\smile$

De grafiek van f is hol in $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ en bol in $]-\infty, -1[$ en in $\left]-1, \frac{5}{4}\right]$.

Het buigpunt is $P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{27}\right)$.

- Samenvattende tabel

x		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{4}$	
$f(x)$	↘	|	↗	$\frac{1}{3}$ max.	↘	$\frac{5}{27}$ bgpt.	↘

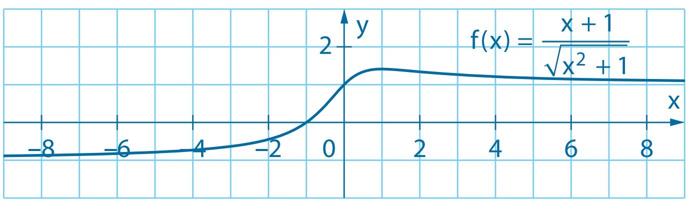


Opdracht 56 bladzijde 255

Onderzoek het verloop van de volgende irrationale functies (asymptoten, relatieve extrema, stijgen en dalen, buigpunten, hol en bol verloop).

1 $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

- We plotten eerst de grafiek van f.



- Aangezien $x^2 + 1 > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ is dom $f = \mathbb{R}$.
- Op basis van de grafiek vermoeden we twee horizontale asymptoten.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

$y = 1$ en $y = -1$ zijn vergelijkingen van de H.A. van de grafiek van f.

- $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x		1	
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗	$\sqrt{2}$ max.	↘

f stijgt in $]-\infty, 1]$, daalt in $[1, +\infty[$ en bereikt een absoluut maximum $\sqrt{2}$ voor $x = 1$.

- $$f''(x) = \frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1-x)\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 3x - 1}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

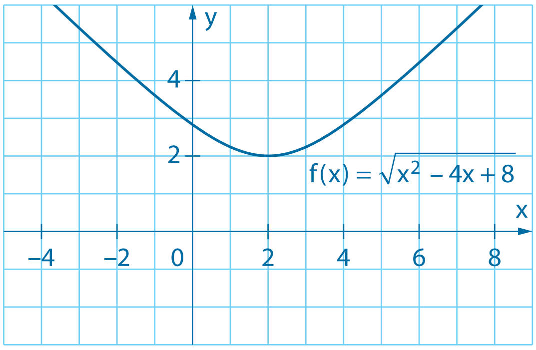
x		$\frac{3-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$	
f″(x)	+	0	−	0	+
f(x)	∪	0,692 bgpt.	∩	1,362 bgpt.	∪

De grafiek van f is hol in $\left]-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right]$ en in $\left[\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$ en bol in $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; 0{,}692\right)$ en $Q\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}; 1{,}362\right)$.

2 $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

- We plotten eerst de grafiek van f.



- $x^2 - 4x + 8 > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ zodat dom $f = \mathbb{R}$.
- We vermoeden 2 schuine asymptoten:

Voor $x \to +\infty$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-4 + \frac{8}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = -2$$

$y = x - 2$ is een vergelijking van de eerste S.A.

Voor $x \to -\infty$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}}}{\cancel{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-4 + \frac{8}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = 2$$

$y = -x + 2$ is een vergelijking van de tweede S.A.

- $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

x		2	
f′(x)	–	0	+
f(x)	↘	2 min.	↗

f daalt in]–∞, 2], stijgt in [2,+∞[en bereikt een absoluut minimum 2 voor x = 2.

- $$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+8} - (x-2)\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}}{x^2-4x+8}$$
$$= \frac{x^2-4x+8-x^2+4x-4}{(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{(x^2-4x+8)^3}}$$

f″(x) > 0 voor elke x.

De grafiek van f is overal hol.

Opdracht 57 bladzijde 255

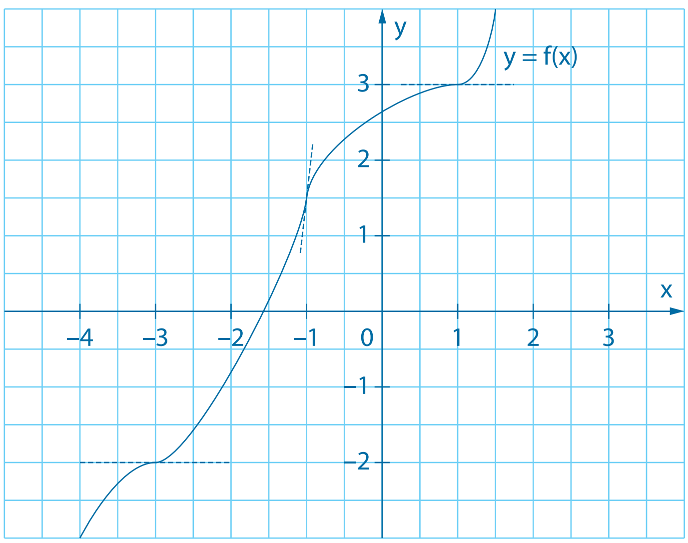
Maak telkens een schets van een mogelijke grafiek van een rationale functie *f* op basis van de gegeven tabel.

1

x		–3		–1		1	
f′(*x*)	+	0	+	+	+	0	+
f″(*x*)	–	0	+	0	–	0	+

x		–3		–1		1	
f(x)	↗	bgpt. + hor. rkl.	↗	bgpt.	↗	bgpt. + hor. rkl.	↗

Schets:

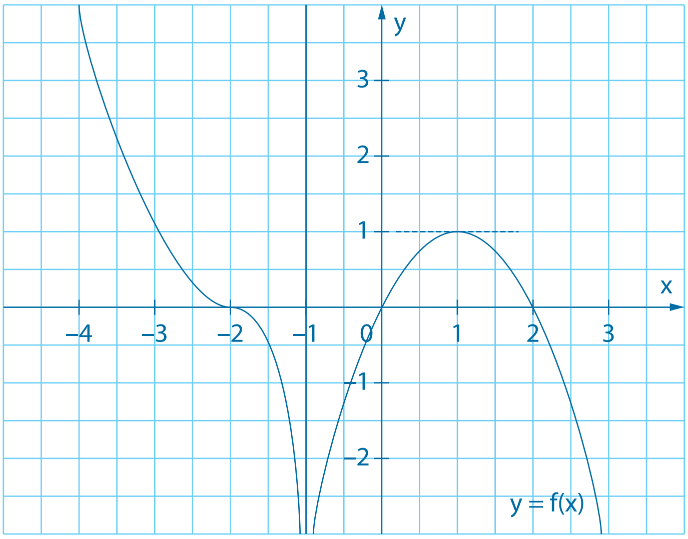


2

x		-2		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	|	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	|	$-$	$-$	$-$

x		−2		−1		1	
f(x)	↘	bgpt. + hor. rkl.	↘	| V.A.	↗	max.	↘

Schets:



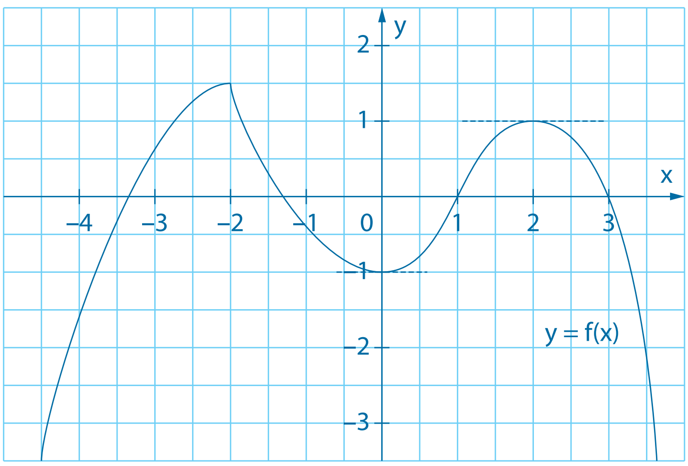
Opdracht 58 bladzijde 256

Maak een schets van een mogelijke grafiek van een functie f die continu is in $\mathbb{R}$ op basis van de tabel.

x		-2		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	|	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	|	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

x		−2		0		1		2	
f(x)	↗	max.	↘	min.	↗	bgpt.	↗	max.	↘

Schets:



Opdracht 59 bladzijde 256

Bespreek hoe de grafiek van de volgende functies verandert als de parameter *m* wijzigt.

1 $f: x \mapsto 2 + \frac{m}{x} + \frac{m}{x^2}$

$$f(x) = \frac{2x^2 + mx + m}{x^2}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}_0$
- nulpunten

  1) $2x + mx + m = 0$

     $D = m^2 - 8m = m(m - 8)$

m			0		8	
$m^2 - 8m$		+	0	−	0	+

  2) $m = 0$: $y = 2$, de grafiek van f is een horizontale rechte met perforatie in (0, 2)

  3) $m = 8$: $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{x^2}$, de grafiek van f raakt de x-as in (−2, 0)

  4) $D < 0$ voor $0 < m < 8$: f heeft geen nulpunten

  5) $D > 0$ voor $m < 0$ en voor $m > 8$: f heeft twee nulpunten

- Asymptoten

  Voor $m \neq 0$: V.A.: $x = 0$
  H.A.: $y = 2$

- Relatieve extrema

  $$f'(x) = \frac{-mx - 2m}{x^3} = \frac{-m(x+2)}{x^3}$$

  Nulpunten f′: −2 met tekenwissel.

  $m > 0$

x		−2		0	
f′(x)	−	0	+	|	−
f(x)	↘	$2 - \frac{m}{4}$ min.	↗	|	↘

  $m < 0$

x		−2		0	
f′(x)	+	0	−	|	+
f(x)	↗	$2 - \frac{m}{4}$ max.	↘	|	↗

- Buigpunten

  $$f''(x) = \frac{2mx + 6m}{x^4} = \frac{2m(x+3)}{x^4}$$

  Nulpunten f″: −3

$m > 0$

x		-3		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$2 - \dfrac{2m}{9}$	$\smile$	$\vert$	$\smile$
		bgpt.			

$m < 0$

x		-3		0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$
$f(x)$	$\smile$	$2 - \dfrac{2m}{9}$	$\frown$	$\vert$	$\frown$
		bgpt.			

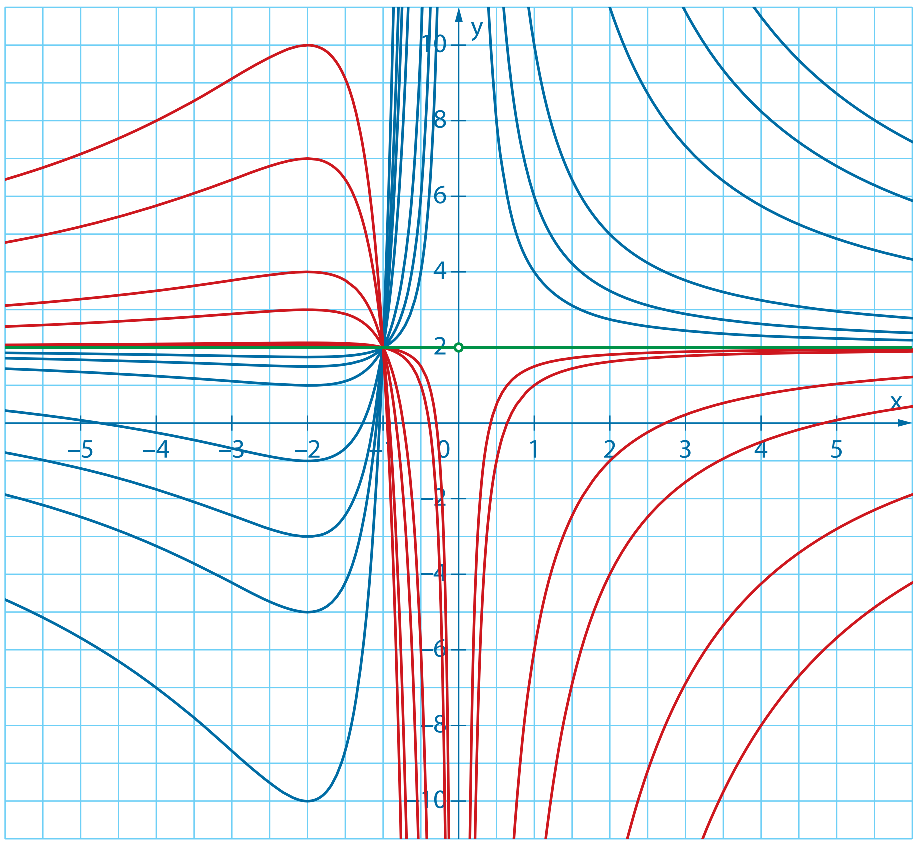
Samenvatting

$m = 0$	De grafiek is de rechte $y = 2$ met perforatie in $(0, 2)$		
	Asymptoten	Relatieve extrema	Buigpunt
$m > 0$	V.A.: $x = 0$ H.A.: $y = 2$	rel. min. $2 - \dfrac{m}{4}$ voor $x = -2$	$P\left(-3, 2 - \dfrac{2m}{9}\right)$
$m < 0$	V.A.: $x = 0$ H.A.: $y = 2$	rel. max. $2 - \dfrac{m}{4}$ voor $x = -2$	$P\left(-3, 2 - \dfrac{2m}{9}\right)$

$m > 0$

$m < 0$

$m = 0$



2 $f: x \mapsto \dfrac{x^2 + m}{x^2 - m}$

- Domein en nulpunten

1) $m = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ met $x \neq 0$

De grafiek van f is de rechte $y = 1$ met perforatie in (0, 1), dom $f = \mathbb{R}_0$.

2) $m < 0 \Rightarrow$ de noemer heeft geen nulpunten, de teller twee nulpunten

$\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}$, twee nulpunten, H.A.: $y = 1$

3) $m > 0 \Rightarrow$ de noemer heeft twee nulpunten, de teller geen nulpunten

$\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{m}, \sqrt{m}\}$, V.A.: $x = -\sqrt{m}$, $x = \sqrt{m}$; H.A.: $y = 1$

- Relatieve extrema

$$f'(x) = -\frac{4mx}{(x^2 - m)^2}$$

$m > 0$

x		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	
f′(x)	+	|	+	0	−	|	−
f(x)	$\nearrow$	|	$\nearrow$	−1 max.	$\searrow$	|	$\searrow$

$m < 0$

x		0	
f′(x)	−	0	+
f(x)	$\searrow$	−1 min.	$\nearrow$

- Buigpunten

$$f''(x) = \frac{4m(3x^2 + m)}{(x^2 - m)^3}$$

$m > 0$

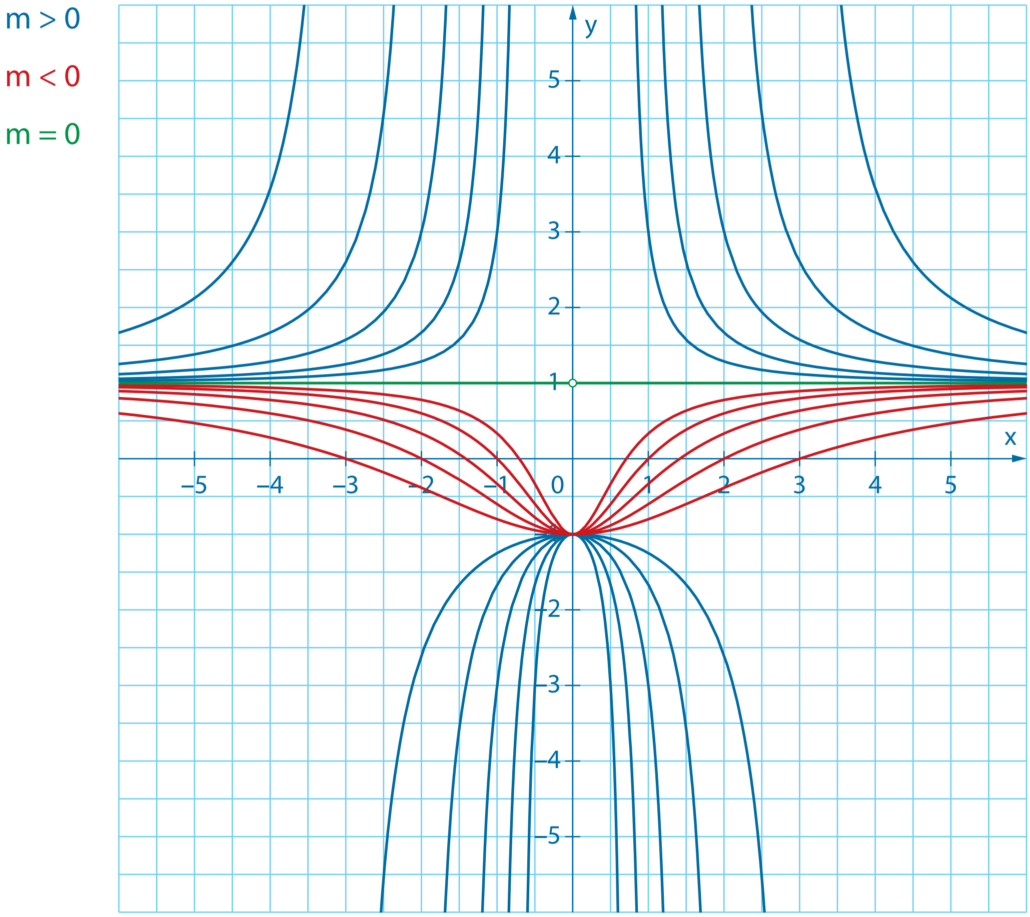
x		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$	
f″(x)	+	0	−	|	+
f(x)	$\cup$	|	$\cap$	|	$\cup$

$m < 0$

x		$-\sqrt{-\frac{m}{3}}$		$\sqrt{-\frac{m}{3}}$	
f″(x)	−	0	+	0	+
f(x)	$\cap$	$-\frac{1}{2}$ bgpt.	$\cup$	$-\frac{1}{2}$ bgpt.	$\cap$

Samenvatting

$m = 0$	De grafiek is de rechte $y = 1$ met perforatie in (0, 1)		
	Asymptoten	Relatieve extrema	Buigpunten
$m > 0$	V.A.: $x = -\sqrt{m}$, $x = \sqrt{m}$ H.A.: $y = 1$	rel. max. −1 voor $x = 0$	geen
$m < 0$	H.A.: $y = 1$	rel. min. −1 voor $x = 0$	$P\left(-\sqrt{-\frac{m}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ en $Q\left(\sqrt{-\frac{m}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$



3 $f: x \mapsto \dfrac{mx}{1+m^2x^2}$

- dom f = $\mathbb{R}$

  Als m = 0 is f(x) = 0, dan is de grafiek van f de x-as.
- Nulpunt f: (0, 0)
- H.A.: y = 0
- Relatieve extrema

  $$f'(x) = \frac{m(1-m^2x^2)}{(m^2x^2+1)^2}$$

m > 0

x		$-\frac{1}{m}$		$\frac{1}{m}$	
f′(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘	$-\frac{1}{2}$ min.	↗	$\frac{1}{2}$ max.	↘

m < 0

x		$\frac{1}{m}$		$-\frac{1}{m}$	
f′(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	$\frac{1}{2}$ max.	↘	$-\frac{1}{2}$ min.	↗

- Buigpunten

$$f''(x) = \frac{2m^3x(m^2x^2 - 3)}{(m^2x^2 + 1)^3}$$

m > 0

x		$-\frac{\sqrt{3}}{m}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{m}$	
f″(x)	−	0	+	0	−	0	+
f(x)	$\frown$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\smile$	0	$\frown$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\smile$
		bgpt.		bgpt.		bgpt.	

m < 0

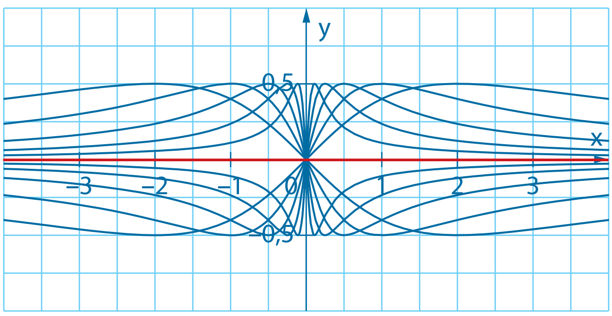
x		$\frac{\sqrt{3}}{m}$		0		$-\frac{\sqrt{3}}{m}$	
f″(x)	+	0	−	0	+	0	−
f(x)	$\smile$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frown$	0	$\smile$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frown$
		bgpt.		bgpt.		bgpt.	

Samenvatting

$m = 0$	De grafiek is de rechte $y = 0$ (x-as)
$m \neq 0$	H.A.: $y = 0$ Maximum voor $x = \frac{1}{m}$, nl. $\frac{1}{2}$ Minimum voor $x = -\frac{1}{m}$, nl. $-\frac{1}{2}$ Buigpunten: $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{m}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $P_2(0, 0)$, $P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{m}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

m ≠ 0

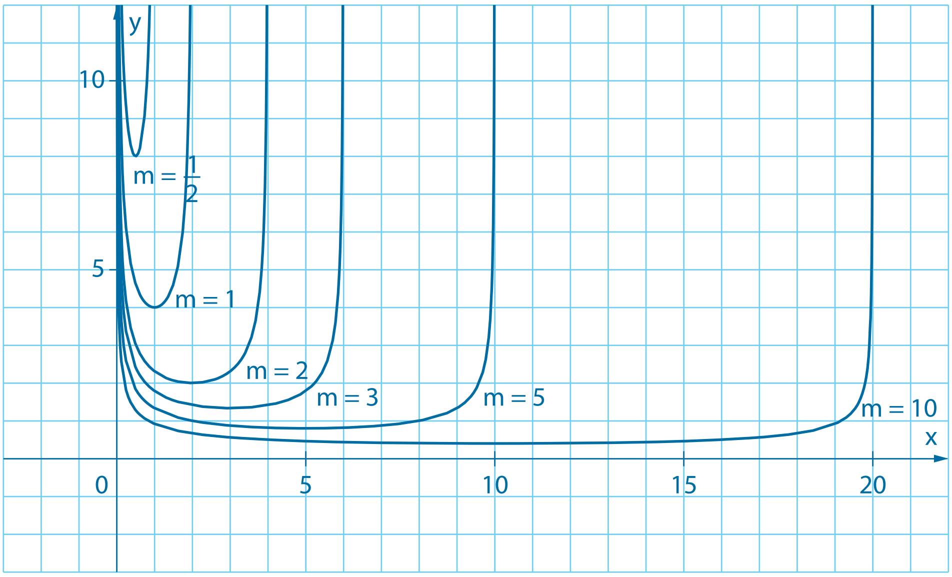
m = 0



Opdracht 60 bladzijde 256

$f\colon x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{2mx - x^2}}$ met $m > 0$ stelt een familie van irrationale functies voor.

1 Plot enkele grafieken van deze familie.



2 Onderzoek van f het domein, de asymptoten en de extrema.

- Om het domein van f te bepalen, lossen we de ongelijkheid $2mx - x^2 > 0$ op.
  Rekening houdend met $m > 0$ krijgen we de volgende tekentabel:

x		0		2m	
x(2m – x)	–	0	+	0	–

  Hieruit volgt: dom f =]0, 2m[.

- Aangezien 0 en 2m nulpunten zijn van de noemer van f die geen nulpunten van de teller zijn, heeft de grafiek van f als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 0$ en $x = 2m$.
  Het domein van f is steeds begrensd, zodat er geen horizontale of schuine asymptoten zijn.

- $f'(x) = \dfrac{4(x-m)}{\sqrt{(2mx - x^2)^3}}$ heeft binnen het domein het teken van $x - m$ zodat f dalend is voor $x < m$ en stijgend voor $x > m$.

  Voor $x = m$ bereikt f een minimum aan $f(m) = \dfrac{4}{\sqrt{2m^2 - m^2}} = \dfrac{4}{m}$.

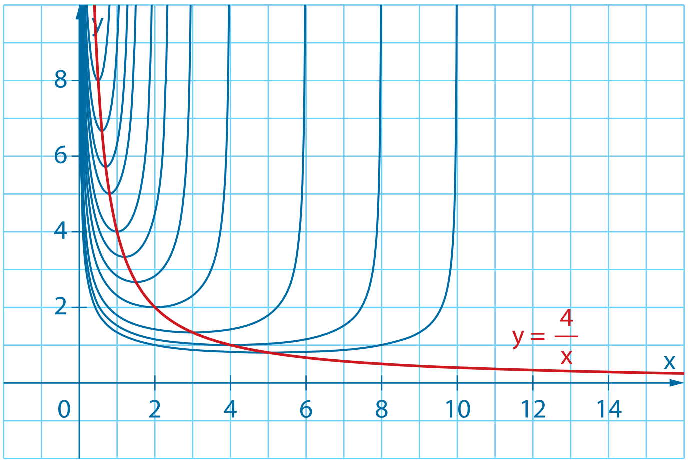
x	0		m		2m
f′(x)	|	–	0	+	|
f(x)	|	↘	$\frac{4}{m}$ min.	↗	|

3 Op welke kromme liggen de extrema van alle grafieken van f?

Alle extrema hebben als coördinaten $\begin{cases} x = m \\ y = \dfrac{4}{m} \end{cases}$.

Eliminatie van de parameter m kan op zicht. We vinden $y = \dfrac{4}{m}$ $(x > 0)$.

Alle minima liggen dus op de rechtertak van de hyperbool met vergelijking $y = \dfrac{4}{x}$.



Opdracht 61 bladzijde 257

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?
Geef bij de foute uitspraken een tegenvoorbeeld.

1 Als een veeltermfunctie f stijgend is in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \,]a, b[$.

Niet waar, $f : x \mapsto x^3$ is stijgend in $[-2, 2]$ maar $f'(0) = 0$.

2 Als $P(c, f(c))$ een buigpunt is van de grafiek van een rationale functie f, dan is $f''(c) = 0$.

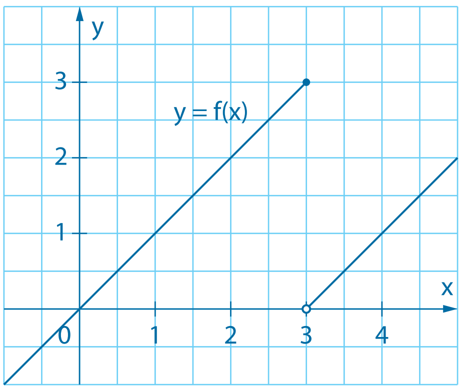
Waar.

3 Als $f'(c) = 0$ voor een veeltermfunctie f, dan bereikt f een extremum voor $x = c$ of heeft de grafiek van f een buigpunt voor $x = c$.

Waar.

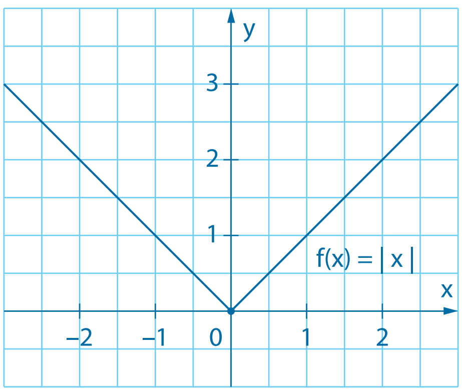
4 Een functie f die niet continu is in $[a, b]$, bereikt geen absoluut maximum in $[a, b]$.

Niet waar, $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \leqslant 3 \\ x - 3 & \text{als } x > 3 \end{cases}$ is niet continu in $[0, 4]$, maar bereikt er toch een absoluut maximum 3 voor $x = 3$.



5 Als een functie f een relatief extremum bereikt voor $x = c$, dan is $f'(c) = 0$.

Niet waar, $f : x \mapsto |x|$ bereikt in 0 een relatief minimum maar $f'(0) \neq 0$.

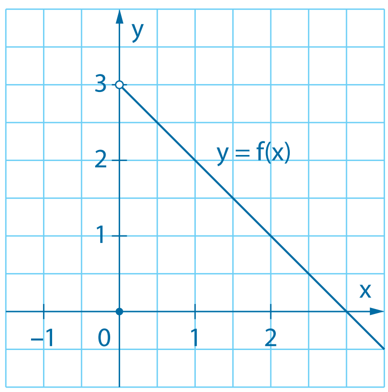


6 Als voor een functie f geldt dat $f'(x) \leqslant 0$ voor elke $x \in \,]a, b[$, dan is f dalend in $[a, b]$.

Niet waar.

Voor de functie $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ 3 - x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ geldt:

$f'(x) \leqslant 0$ voor $x \in \,]0, 3[$ maar f is niet dalend in $[0, 3]$.



Opdracht 62 bladzijde 257

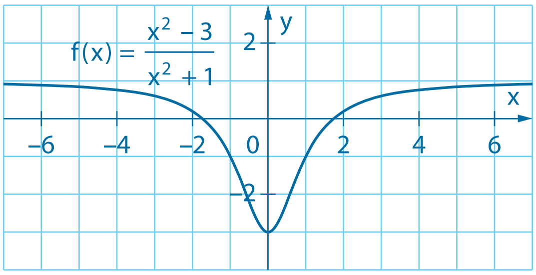
Bepaal het verloop, de relatieve en absolute extrema van de functie f: $x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)2x - (x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

x		0	
f′(x)	–	0	+
f(x)	↘	–3 min.	↗

f stijgt in [0, +∞[en daalt in]–∞, 0] .

f bereikt een relatief minimum –3 voor x = 0 dat ook een absoluut minimum is.



Opdracht 63 bladzijde 257

Bepaal de relatieve extrema en de buigpunten van de grafiek van $f\colon x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 - 3x^3}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x^3} = (x^2 - 3x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 9x^2)$$

$$= \frac{2x - 9x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x^3)^2}}$$

f is niet afleidbaar in 0 en in $\frac{1}{3}$

x		0		$\frac{2}{9}$		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$	$\searrow$	0	$\searrow$
		min.		max.			

f bereikt een relatief minimum 0 voor $x = 0$ en een relatief maximum $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ voor $x = \frac{2}{9}$.

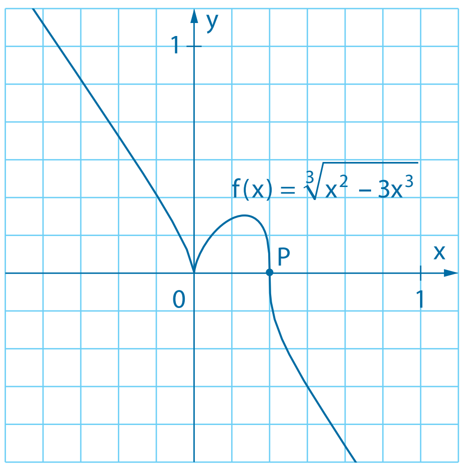
$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}(2x - 9x^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{2}{3}}(2 - 18x)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}\left[-2(2x - 9x^2)^2 + 3(x^2 - 3x^3)(2 - 18x)\right]$$

$$= \frac{1}{9}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}(-8x^2 + \cancel{72x^3} \cancel{-162x^4} + 6x^2 \cancel{-54x^3} \cancel{-18x^3} + \cancel{162x^4})$$

$$= \frac{-2x^2}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x^3)^5}}$$

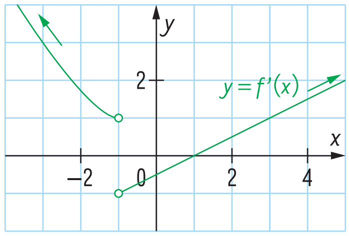
x		0		$\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$-$	|	$-$	|	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\frown$	0	$\smile$
				bgpt.	



De grafiek van f heeft 1 buigpunt: $P\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Opdracht 64 bladzijde 257

Van een continue functie f is de hellinggrafiek gegeven.



1 Voor welke x-waarde(n) bereikt f een relatief extremum?

Voor $x = -1$ gaat f' over van positief naar negatief, f bereikt er een relatief maximum.

Voor $x = 1$ gaat f' over van negatief naar positief, f bereikt er een relatief minimum.

2 Heeft de grafiek van f buigpunten?
Verklaar.

f' bereikt geen extremum met een unieke raaklijn zodat de grafiek van f geen buigpunt heeft.

Opdracht 65 bladzijde 258

Gegeven de irrationale functie $f\colon x \mapsto -\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$.

Welke van de volgende beweringen is niet juist?

A Zij heeft een buigpunt voor $x = 2$.

B Zij heeft een minimum voor $x = -1$.

C Zij is alleen gedefinieerd in het interval $[-4, 2]$.

D Zij heeft twee snijpunten met de rechte $r \leftrightarrow y = -2$.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

$f : x \mapsto -\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

- $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$ voor $x \in [-4, 2]$

  C is juist.

- $f'(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$

  f gaat over van negatief naar positief in –1 en bereikt er bijgevolg een minimum.

  B is juist.

- $f(-4) = f(2) = 0$ en $f(-1) = -3$.

  De grafiek van f heeft dus 2 snijpunten met de rechte $r \leftrightarrow y = -2$.

  D is juist.

- $$f''(x) = \frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 8} - (x + 1)\dfrac{-x - 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}}{-x^2 - 2x + 8}$$

  $$= \frac{-x^2 - 2x + 8 + x^2 + 2x + 1}{(-x^2 - 2x + 8)\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$$

  $$= \frac{9}{(-x^2 - 2x + 8)\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$$

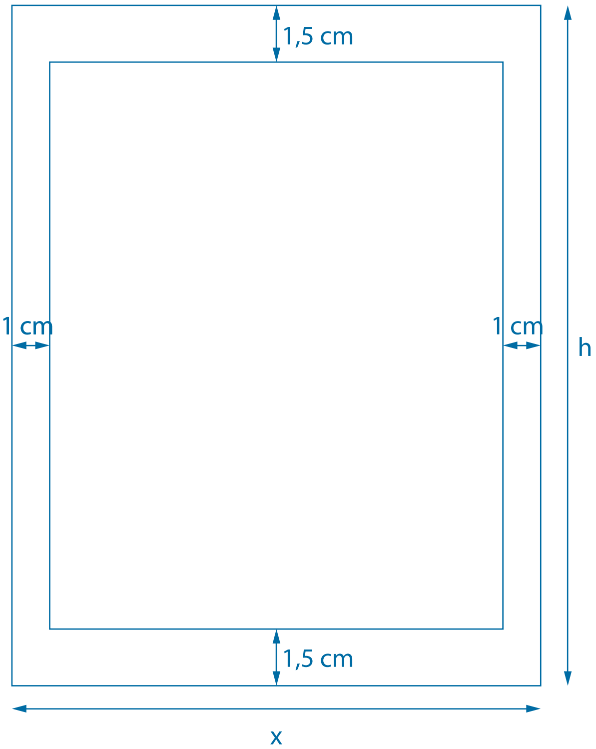
  $f''(x) > 0$ voor $x \in \,]-4, 2[$

  De grafiek van f heeft geen buigpunt: A is fout.

Opdracht 66 bladzijde 258

Een rechthoekig blad heeft een totale oppervlakte van 600 cm^2. Voor het bedrukken ervan moet er boven en onder 1,5 cm en links en rechts 1 cm wit blijven.

Bepaal de afmetingen van het blad als de bedrukte oppervlakte maximaal is.



Stel x = basis van de rechthoek en h de hoogte (allebei in cm)

Dan is $x \cdot h = 600$

$$\Rightarrow h = \frac{600}{x}$$

De bedrukte oppervlakte is

$$B = (x-2)(h-3)$$

$$\Rightarrow B(x) = (x-2)\left(\frac{600}{x} - 3\right)$$

$$\Rightarrow B'(x) = \frac{600}{x} - 3 + (x-2)\cdot\frac{-600}{x^2}$$

$$= \frac{600x - 3x^2 - 600x + 1200}{x^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 1200}{x^2}$$

x		−20		0		20	
B′(x)	−	0	+	$\vert$	+	0	−
B(x)	↘		↗	$\vert$	↗	486 max	↘

De afmetingen van het blad bij een maximale bedrukte oppervlakte zijn 20 cm × 30 cm.

Opdracht 67 bladzijde 258

1 De functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx + e}$ heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y = \dfrac{1}{2}$, twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -2$ en $x = 1$ en twee nulpunten -3 en 2.

Bepaal de parameters a, b, c, d en e.

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx + e}$$

- $\left.\begin{array}{l} \text{H.A.: } y = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c = 2}$

- V.A.: $x = -2$ en $x = 1$

  $\Rightarrow$ -2 en 1 zijn nulpunten van de noemer.

  $\Rightarrow n(x) = 2(x + 2)(x - 1)$

  $= 2(x^2 + x - 2)$

  $= 2x^2 + 2x - 4$

  $\Rightarrow \boxed{d = 2}$ en $\boxed{e = -4}$

  $\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{2x^2 + 2x - 4}$

- nulpunten f: -3 en 2

  $\Rightarrow t(x) = (x + 3)(x - 2)$

  $= x^2 + x - 6$

  $\Rightarrow \boxed{a = 1}$ en $\boxed{b = -6}$

2 De functie bereikt een relatief minimum voor $x = q$ met $q \in \,]-2, 1[$.

Bereken q.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 2x - 4}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 2}{(x^2 + x - 2)^2}$$

f' gaat over van negatief naar positief voor $x = -\dfrac{1}{2}$.

f bereikt een relatief minimum in $-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{q = -\dfrac{1}{2}}$

Opdracht 68 bladzijde 258

Bepaal een mogelijk voorschrift van een functie f zodanig dat $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ of toon aan dat het onmogelijk is dat zo'n functie bestaat.

Als $f''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, is f afleidbaar, dus continu in $\mathbb{R}$.

Bovendien zal, aangezien $(f')'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, de afgeleide overal stijgend zijn zodat $f'(-1) < f(0)$.

Het is dus onmogelijk dat $f'(-1) = \frac{1}{2}$ en $f'(0) = 0$.

Zo'n functie bestaat niet.

Opdracht 69 bladzijde 258

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - mx - 12}{x^2 + 2x - 3}$ met m een reële parameter.

1 Voor welke waarde(n) van m is f dalend over elk interval van het domein?

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2(m+2) + 18x + 3(m+8)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff (m+2)x^2 + 18x + 3m + 24 = 0$$

$$D = 324 - 4(m+2)(3m+24)$$

$$= -12(m+11)(m-1)$$

Opdat f binnen dom f dalend zou zijn, moet $f'(x) < 0$ voor alle $x \in$ dom f, dus $D \leqslant 0$ én $m + 2 < 0$

$\iff$ ($m \geqslant 1$ of $m \leqslant -11$) én $m < -2$

$\iff$ $\boxed{m \leqslant -11}$

2 Voor welke waarde(n) van m heeft f zowel een relatief maximum als een relatief minimum?

f heeft een relatief maximum en een relatief minimum als f' twee verschillende nulpunten (met tekenwissel) heeft.

Dit is zo als $D > 0$ én $m \neq -2$

$\iff$ $\boxed{-11 < m < 1 \text{ én } m \neq -2}$

3 Bepaal de eventuele waarde(n) van m waarvoor f slechts één relatief extremum bereikt.

f heeft slechts één extremum als $m + 2 = 0$

$\iff$ $\boxed{m = -2}$

f' verandert dan juist 1 keer van teken.

Opdracht 70 bladzijde 258

Beschouw de familie functies met voorschrift $f(x) = \frac{8}{x}\left(\sqrt{x} - m\right)$ met $m > 0$.

Op welke kromme liggen de extrema van elke functie f?

$$f(x) = \frac{8}{x}(\sqrt{x} - m) \text{ met } m > 0 \quad \text{of} \quad f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{8m}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{8m}{x^2} \\ &= \frac{-4}{x\sqrt{x}} + \frac{8m}{x^2} \\ &= \frac{8m - 4\sqrt{x}}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \iff 8m = 4\sqrt{x} \overset{m>0}{\iff} x = 4m^2$$

De eerste afgeleide gaat voor $x = 4m^2$ over van positief naar negatief zodat f er een relatief maximum heeft gelijk aan

$$\begin{aligned} f(4m^2) &= \frac{8}{4m^2}\left(\sqrt{4m^2} - m\right) \\ &= \frac{2}{m^2} \cdot m \\ &= \frac{2}{m} \end{aligned}$$

Eliminatie van m uit

$$\begin{cases} x = 4m^2 \\ y = \dfrac{2}{m} \end{cases} \quad \text{met } m > 0 \text{ (en dus } y > 0)$$

geeft $x = 4 \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^2$ of $\boxed{y = \frac{4}{\sqrt{x}}}$

De extrema liggen op de kromme met vergelijking $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

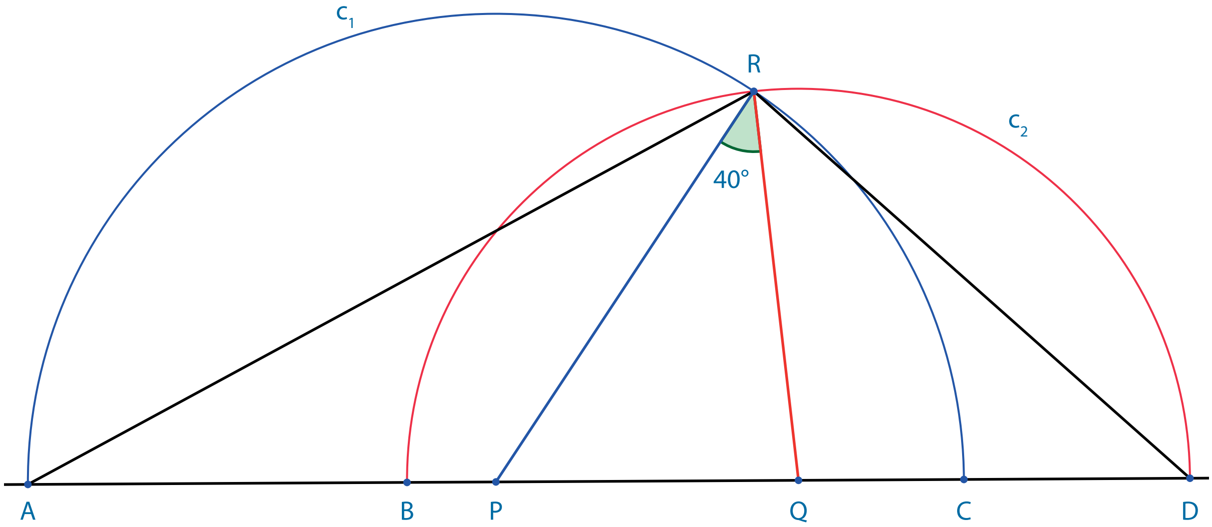
Hersenbrekers

Opdracht 1 bladzijde 259

De punten B, P, Q en C liggen op het lijnstuk $[AD]$.

De halfcirkel met diameter $[AC]$ heeft als middelpunt P en de halfcirkel met diameter $[BD]$ heeft middelpunt Q. De twee halfcirkels snijden elkaar in R.

Indien $\widehat{PRQ} = 40°$, hoe groot is $\widehat{ARD}$ dan?



110°

Omdat een omtrekshoek de helft is van de middelpuntshoek op dezelfde boog, geldt:

$\widehat{RAD} = \frac{1}{2}\widehat{RPD}$ (in c_1) en $\widehat{RDA} = \frac{1}{2}\widehat{RQA}$ (in c_2).

Uit de hoekensom in de driehoek PQR volgt dat $\widehat{RPD} + \widehat{RQA} = 140°$ zodat

$\widehat{RAD} + \widehat{RDA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{RPD} + \widehat{RQA}\right) = 70° \quad (1)$

In de driehoek ARD geldt $\widehat{RAD} + \widehat{ARD} + \widehat{RDA} = 180°$.

Met (1) geeft dit $\widehat{ARD} = 110°$.

Opdracht 2 bladzijde 259

In ΔABC geldt $\cos(2\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\hat{A} + \hat{B}) = 2$ en $|AB| = 4$.

Waaraan is $|BC|$ gelijk?

A $\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{3}$ **C** 2 **D** $2\sqrt{2}$ **E** $2\sqrt{3}$

C

Uit de opgave volgt dat $\cos(2\hat{A} - \hat{B}) = 1$ en $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = 1$.

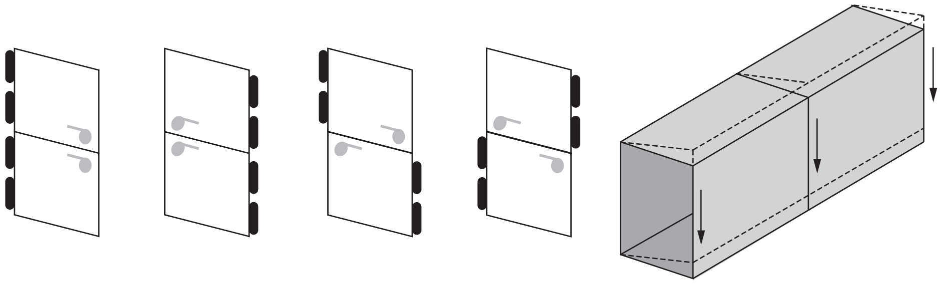
In een driehoek betekent dit dat $2\hat{A} - \hat{B} = 0$ en $\hat{A} + \hat{B} = 90°$ zodat $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$ en dus $\hat{C} = 90°$.

$|BC| = |AB| \cdot \sin\hat{A}$ zodat $|BC| = 2$.

Opdracht 3 bladzijde 259

Een gang is aan de rechterkant verzakt. Als gevolg daarvan is de doorsnede niet rechthoekig, maar een parallellogram.
Halverwege de gang wordt een deur gemaakt. De deur heeft twee helften die apart open moeten kunnen.

Waar moeten de scharnieren komen?



A beide links

B beide rechts

C boven links, onder rechts

D boven rechts, onder links

E de helften kunnen nooit goed open

(bron © Europese kangoeroewedstrijd wizPROF 2007)

C

Als de scharnieren boven rechts komen, dan draait de hogere kant linksboven naar rechts, maar daar is geen ruimte. Dus moeten de scharnieren boven links komen. Net zo moeten de scharnieren onder rechts komen.