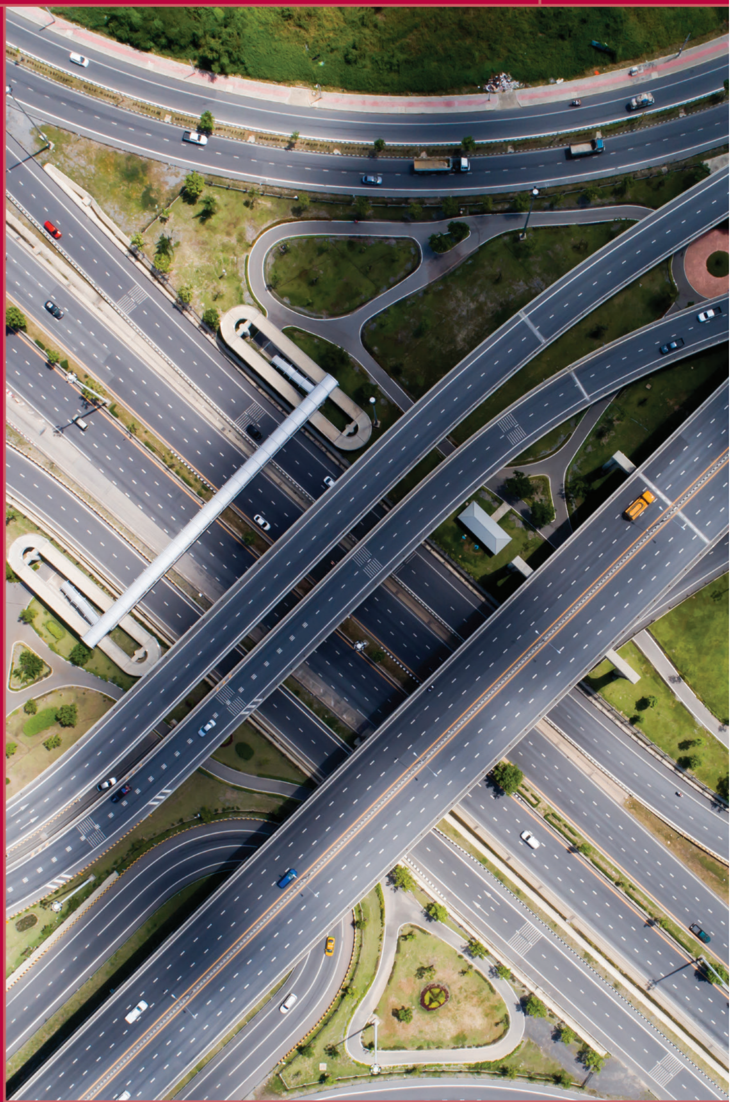
Hoofdstuk 2

Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen



Opdracht 1 bladzijde 64

Je wilt 620 euro betalen met briefjes van 5 euro en 20 euro.
Het totaal aantal briefjes moet 40 zijn.

1 Stel x is het aantal briefjes van 5 euro en y het aantal van 20 euro.
Schrijf het stelsel dat het verband geeft tussen x en y.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 20y = 620 \end{cases}$$

2 Los het stelsel op met een methode naar keuze.

Uit de eerste vergelijking volgt $y = 40 - x$.

Invullen in de tweede vergelijking geeft:

$5x + 20 \cdot (40 - x) = 620$

$\Leftrightarrow 5x + 800 - 20x = 620$

$\Leftrightarrow -15x = -180$

$\Leftrightarrow x = 12$

We vinden $y = 40 - 12 = 28$.

Er zijn 12 briefjes van 5 en 28 briefjes van 20 euro nodig.

Opdracht 2 bladzijde 64

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \quad\; y + z = 3 \end{cases}$ is een stelsel van 2 vergelijkingen met 3 onbekenden x, y en z.

1 $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ is een oplossing van dit stelsel. Geef nog drie andere oplossingen.

$(1, 0, 3), (1, -2, 5), (1, 3, 0), \ldots$

2 Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen.
Vul aan: alle oplossingen van het stelsel zijn van de vorm $(x, y, z) = (\ldots, r, \ldots)$, met $r \in \mathbb{R}$.

Alle oplossingen van het stelsel zijn van de vorm $(x, y, z) = (1, r, 3 - r)$, met $r \in \mathbb{R}$.

Opdracht 3 bladzijde 64

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \quad\; y + z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$ is een stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden x, y en z.

Waarom heeft dit stelsel geen oplossingen?

$x + y + z$ kan niet terzelfdertijd 4 en 5 zijn.

Opdracht 4 bladzijde 64

Bepaal x en y als $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Hiervoor lossen we het stelsel $\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ -x + 3y = 2 & (2) \end{cases}$ op.

(1) + (2) geeft: $2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

Invullen in (1) geeft: $x - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Opdracht 5 bladzijde 67

Welke oplossingen horen bij welke stelsels?

A $(2,1)$

B $(2,1,0)$

C $(1,2)$

D $(2,1,6)$

1 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 = 12 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x - 4y + 0z = 2 \\ x + y + 0z = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} a + b + c = 9 \\ 3a - c = 0 \\ 2a + 3b + 4c = 31 \end{cases}$

A is een oplossing van stelsel 3 want $\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2 \\ 2 + 1 = 3 \end{cases}$.

B is een oplossing van stelsel 2 want $\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2 \\ 2 + 1 + 0 = 3 \end{cases}$.

C is een oplossing van stelsel 1 want $\begin{cases} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 9 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12 \end{cases}$.

D is een oplossing van stelsel 2 en 4 want $\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 \cdot 6 = 2 \\ 2 + 1 + 0 = 3 \end{cases}$ en $\begin{cases} 2 + 1 + 6 = 9 \\ 3 \cdot 2 - 6 = 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 31 \end{cases}$.

Opdracht 6 bladzijde 67

Bepaal de oplossing van het stelsel waarvan $\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ de uitgebreide matrix is.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2 = 20 \\ 2x_2 + 2 - 1 = 7 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6 + 2 = 20 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

De oplossing is (4, 3, 2, 1).

Opdracht 7 bladzijde 67

1 Bepaal a, b, c en d in het stelsel $\begin{cases} 4x + ay + bz = 0 \\ cx - 2y + dz = 6 \end{cases}$ als $(2,1,0)$ en $(2,1,6)$ er oplossingen van zijn.

Invullen van (2, 1, 0): $\begin{cases} 8 + a = 0 \\ 2c - 2 = 6 \end{cases}$ (1)

Invullen van (2, 1, 6): $\begin{cases} 8 + a + 6b = 0 \\ 2c - 2 + 6d = 6 \end{cases}$ (2)

Uit (1) en (2) volgt dan: $\begin{cases} a = -8 \\ b = 0 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}$ (3)

2 Voor de gevonden waarden van a, b, c en d heeft het stelsel oneindig veel oplossingen van de vorm $(2, 1, r)$. Verklaar.

(2, 1, r) is een oplossing van het stelsel $\begin{cases} 4x - 8y + 0z = 0 \\ 4x - 2y + 0z = 6 \end{cases}$ want $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 + 0 = 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 0 = 6 \end{cases}$.

Opdracht 8 bladzijde 72

Gegeven de rijequivalente matrices $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 10 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & x \\ 1 & 1 & 2 \\ 15 & 0 & y \end{bmatrix}$.

1 Welke elementaire rijoperaties moet je uitvoeren om van A naar B over te gaan?

$R_1 - 6R_2$ en $R_3 + 5R_2$.

2 Bepaal de getallen x en y.

$x = 8 - 6 \cdot 2 = -4$ en $y = 6 + 5 \cdot 2 = 16$.

Opdracht 9 bladzijde 72

De uitgebreide matrix van een 3×3-stelsel is $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right]$.

1 Welke elementaire rijoperaties moet je uitvoeren op deze matrix om de oplossing van het stelsel rechtstreeks te kunnen aflezen?

$R_1 + R_2$, $R_3 + 3R_2$ en daarna $\frac{1}{2}R_3$.

2 Wat is de oplossing van het bijbehorende stelsel?

$(x, y, z) = (3, 2, 1)$

Opdracht 10 bladzijde 75

Welke van de onderstaande matrices staan in de rijcanonieke vorm?

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

A, B, D, E en F staan in de rijcanonieke vorm.

Opdracht 11 bladzijde 75

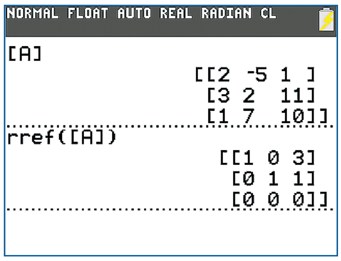
Herleid de volgende matrices tot hun rijcanonieke vorm. Controleer daarna met je rekentoestel.

$$A=\begin{bmatrix}2&-5&1\\3&2&11\\1&7&10\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&-1&2&-4\\4&1&4&-2\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2&-2&0\\3&2&5\\5&-4&1\\3&2&5\end{bmatrix}$$

A:

$$\begin{bmatrix}2&-5&1\\3&2&11\\1&7&10\end{bmatrix}\overset{R_{13}}{\sim}\begin{bmatrix}1&7&10\\3&2&11\\2&-5&1\end{bmatrix}\overset{\substack{R_2-3R_1\\R_3-2R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&7&10\\0&-19&-19\\0&-19&-19\end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{19}R_2\\-\frac{1}{19}R_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1&7&10\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\overset{\substack{R_1-7R_2\\R_3-R_2}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

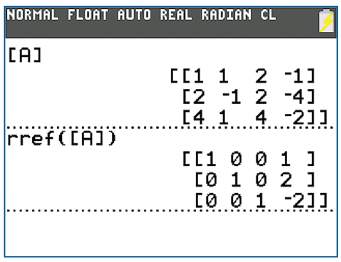


B:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\2&-1&2&-4\\4&1&4&-2\end{bmatrix}\overset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-4R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\0&-3&-2&-2\\0&-3&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{3R_1+R_2\\R_3-R_2}}{\sim}\begin{bmatrix}3&0&4&-5\\0&-3&-2&-2\\0&0&-2&4\end{bmatrix}\overset{-\frac{1}{2}R_3}{\sim}\begin{bmatrix}3&0&4&-5\\0&-3&-2&-2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

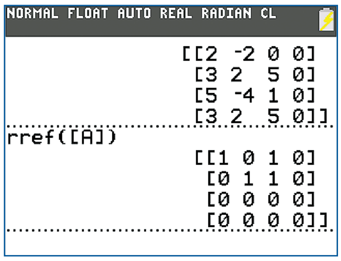
$$\overset{\substack{R_1-4R_3\\R_2+2R_3}}{\sim}\begin{bmatrix}3&0&0&3\\0&-3&0&-6\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\overset{\substack{\frac{1}{3}R_1\\-\frac{1}{3}R_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$



C:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 5R_1 \\ R_4 - 3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{5}R_2 \\ \frac{1}{5}R_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 + R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Merk op dat we een extra kolom nullen moeten toevoegen om de matrix met het rekentoestel te kunnen rijherleiden. Dit is het geval voor alle matrices waarbij het aantal rijen groter is dan het aantal kolommen.

Opdracht 12 bladzijde 75

De uitgebreide matrix van een stelsel in de onbekenden x, y en z is herleid tot de gegeven rijcanonieke vorm.

Bepaal de eventuele oplossing(en) van dit stelsel.

1 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ (x, y, z) = (1, 2, –1)

2 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ Dit stelsel is strijdig en heeft dus geen oplossingen.

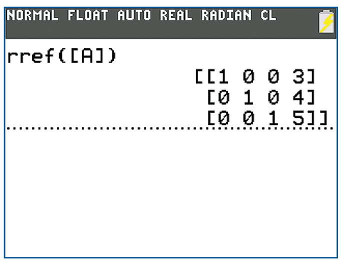
3 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (x, y, z) = (r, r, r) met $r \in \mathbb{R}$

Opdracht 13 bladzijde 81

Bepaal de oplossingsverzameling van de volgende stelsels.

1 $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 3x - y + z = 10 \\ 5x + y + 2z = 29 \end{cases}$

Het stelsel is bepaald met oplossing (x, y, z) = (3, 4, 5).

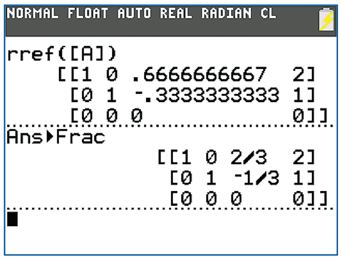


2 $\begin{cases} 5x-2y+4z=8 \\ x-y+z=1 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel

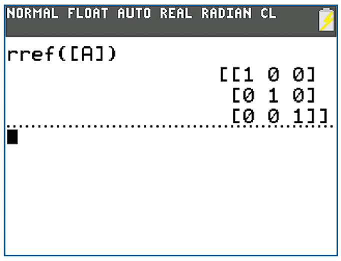
$\begin{cases} x+\frac{2}{3}z=2 \\ y-\frac{1}{3}z=1 \end{cases}$. Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met

als oplossingen $(x, y, z) = (2 - 2r, 1 + r, 3r)$ met $r \in \mathbb{R}$.



3 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=7 \\ 4x_1+6x_2=3 \\ x_1+17x_2=0 \end{cases}$

Het stelsel is strijdig. Het heeft geen oplossingen.

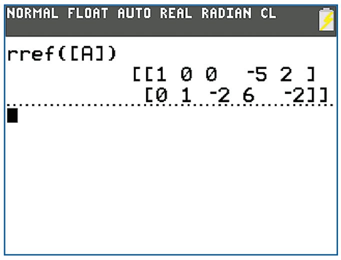


4 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4=2 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel

$\begin{cases} x_1-5x_4=2 \\ x_2-2x_3+6x_4=-2 \end{cases}$.

Het stelsel is tweevoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 + 5s, -2 + 2r - 6s, r, s)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.



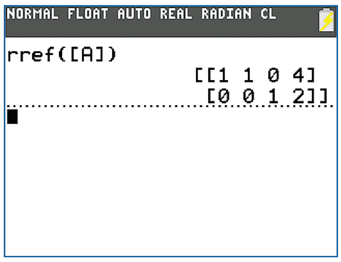
Opdracht 14 bladzijde 81

Los het stelsel $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2-x_3=2 \end{cases}$ op.

1 Schrijf de oplossingen met x_1 en x_3 als hoofdonbekenden.

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_3=2 \end{cases}$.

Nemen we x_1 en x_3 als hoofdonbekenden, dan vinden we als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (4 - r, r, 2)$ met $r \in \mathbb{R}$.



2 Schrijf de oplossingen met x_2 en x_3 als hoofdonbekenden.

Met x_2 en x_3 als hoofdonbekenden, vinden we $(x_1, x_2, x_3) = (r, 4 - r, 2)$ met $r \in \mathbb{R}$.

3 Kan x_3 als nevenonbekende? Verklaar.

Dit kan niet want $x_3 = 2$, dus altijd hoofdonbekende.

Opdracht 15 bladzijde 81

Als $x + 3z = 7$ en $x + y + z = 4$, dan is $2x + 4y - 2z = m$. Bepaal m.

We lossen eerst het stelsel $\begin{cases} x + 3z = 7 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ op.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x + 3z = 7 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$ en heeft bijgevolg als oplossingen

$(x, y, z) = (7 - 3r, 2r - 3, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Invullen in de vergelijking $2x + 4y - 2z = m$ geeft:

$14 - 6r + 8r - 12 - 2r = m$

$\Leftrightarrow m = 2$

Alternatieve oplossingsmethode via rijherleiden:

We herleiden $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & m \end{array}\right]$ door eerst $R_2 - R_1$ en $R_3 - 2R_1$, en vervolgens $R_3 - 4R_2$ te doen. Dit geeft $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m - 2 \end{array}\right]$.

Opdat het stelsel niet strijdig zou zijn, moeten we eisen dat de 3de rij een nulrij wordt dus $m - 2 = 0$ of $m = 2$.

Opdracht 16 bladzijde 81

Als het stelsel $\begin{cases} x - 4y + az = 0 \\ -2x - 3y + 6z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$ in x, y en z met parameter a oneindig veel oplossingen heeft, bepaal dan $\frac{x}{z}$.

$$\begin{cases} x - 4y + az = 0 & (1) \\ -2x - 3y + 6z = 0 & (2) \\ x + 2y + az = 0 & (3) \end{cases}$$

Vergelijking (1) – vergelijking (3) geeft: $-6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x + az = 0 \\ -2x + 6z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + az = 0 \\ x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Dit homogeen stelsel is bepaald als $a \neq -3$. Het heeft dan enkel $(0,0,0)$ als oplossing.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald als $a = -3$. Het is dan gelijkwaardig met $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Het is duidelijk dat in dit geval $x = 3z$ of $\frac{x}{z} = 3$.

Opdracht 17 bladzijde 83

Joeri gaat verhuizen en wil zijn kippen, eenden en duiven verkopen, 27 in totaal. Hij heeft 3 keer zoveel kippen als eenden. Een kleinveehandelaar biedt 1 euro per kip, 1,5 euro per eend en 0,5 euro per duif. Hij biedt hiermee 21 euro in totaal.

Hoeveel kippen, eenden en duiven heeft Joeri?

We stellen x = het aantal kippen
y = het aantal eenden
z = het aantal duiven

Het stelsel is: $\begin{cases} x+y+z=27 \\ x-3y=0 \\ x+1{,}5y+0{,}5z=21 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=15 \end{cases}$

Joeri heeft 9 kippen, 3 eenden en 15 duiven.

Opdracht 18 bladzijde 83

Drie broers kopen een wijngaard voor 100 louis.

De jongste zegt tegen de tweede: "Ik zal hem betalen als jij me de helft van je geld geeft." De tweede zegt tegen de oudste: "Nee, geef jij me een derde van je geld en ik zal hem betalen!" De oudste zegt tegen de jongste: "Je zou beter een vierde van je geld aan mij geven, dan zal ik hem betalen."

Hoeveel geld heeft elk van de broers?

(Leonhard Euler, 18de eeuw)

We stellen x = het bedrag van de jongste
y = het bedrag van de tweede
z = het bedrag van de oudste

Stelsel: $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=100 \\ y+\frac{1}{3}z=100 \\ z+\frac{1}{4}x=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=200 \\ 3y+z=300 \\ x+4z=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=64 \\ y=72 \\ z=84 \end{cases}$

De jongste bezit 64 louis, de tweede 72 louis en de oudste 84 louis.

Opdracht 19 bladzijde 83

In een ruimte moeten 60 ledlampen geplaatst worden met een gezamenlijke lichtsterkte van 40 000 lumen. Er is keuze uit lampen van 900 lumen, 500 lumen en 400 lumen.

Stel een stelsel op en bereken alle mogelijkheden om de lampen te kiezen.

We stellen x = het aantal lampen van 900 lumen
y = het aantal lampen van 500 lumen
z = het aantal lampen van 400 lumen

Het stelsel is: $\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 900x + 500y + 400z = 40\,000 \end{cases}$.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x - \dfrac{1}{4}z = 25 \\ y + \dfrac{5}{4}z = 35 \end{cases}$, zodat we de oplossingen kunnen schrijven

als $\begin{cases} x = 25 + \dfrac{1}{4}r \\ y = 35 - \dfrac{5}{4}r. \\ z = r \end{cases}$

Het aantal oplossingen wordt beperkt door de context: z moet daarom zeker al een viervoud zijn.

– Kiezen we $r < 0$, dan is het aantal lampen z negatief, wat onmogelijk is.
– Kiezen we $r \geqslant 32$, dan is het aantal lampen z negatief, wat ook niet kan.

	x	y	z
~~r = –4~~	24	40	–4
r = 0	25	35	0
r = 4	26	30	4
r = 8	27	25	8
r = 12	28	20	12
r = 16	29	15	16
r = 20	30	10	20
r = 24	31	5	24
r = 28	32	0	28
~~r = 32~~	33	–5	32

Er zijn bijgevolg 8 mogelijke oplossingen:
1) 25 van 900 en 35 lampen van 500 lumen
2) 26 van 900, 30 van 500 en 4 van 400 lumen
3) 27 van 900, 25 van 500 en 8 van 400 lumen
4) 28 van 900, 20 van 500 en 12 van 400 lumen
5) 29 van 900, 15 van 500 en 16 van 400 lumen
6) 30 van 900, 10 van 500 en 20 van 400 lumen
7) 31 van 900, 5 van 500 en 24 van 400 lumen
8) 32 van 900 en 28 van 400 lumen.

Opdracht 20 bladzijde 83

In het kader van een dieet wordt aan een patiënt een strikt schema opgelegd in verband met de zuivelopname. De hoeveelheid melk die de patiënt opneemt, moet voldoen aan de volgende beperkingen:

– de totale hoeveelheid energie afkomstig van de melkopname moet gelijk zijn aan 400 kcal,

– de totale hoeveelheid vet moet gelijk zijn aan 26 g,

– de totale hoeveelheid vitamine A moet gelijk zijn aan 235 µg.

samenstelling (per 100 ml)	koemelk	geitenmelk	buffelmelk
energie (kcal)	60	70	120
vetten (g)	4	4	8
vitamine A (µg)	30	70	60

De melkopname kan bestaan uit drie melksoorten: koemelk, geitenmelk en buffelmelk.

Welke uitspraak is dan correct?

A De hoeveelheid geitenmelk moet 100 ml bedragen en de totale hoeveelheid buffel- en koemelk moet steeds 550 ml bedragen.

B De patiënt mag 300 ml buffelmelk drinken.

C De patiënt mag maximaal 550 ml koemelk drinken.

D De hoeveelheid geitenmelk moet steeds dezelfde zijn als de hoeveelheid koemelk.

E De hoeveelheid koemelk moet steeds het dubbele zijn van de hoeveelheid buffelmelk.

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2013)

We stellen x = de hoeveelheid koemelk (per eenheden van 100 ml)
y = de hoeveelheid geitenmelk (per eenheden van 100 ml)
z = de hoeveelheid buffelmelk (per eenheden van 100 ml)

Het stelsel vinden we uit de vereiste energie, vetten en vitamine A: $\begin{cases} 60x + 70y + 120z = 400 \\ 4x + 4y + 8z = 26 \\ 30x + 70y + 60z = 235 \end{cases}$.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x + 2z = 5{,}5 \\ y = 1 \end{cases}$.

De hoeveelheid geitenmelk is altijd 100 ml. De hoeveelheid koemelk is altijd 550 ml verminderd met het dubbele van de hoeveelheid buffelmelk. Aangezien alle hoeveelheden niet negatief kunnen zijn, betekent dit dat de hoeveelheid koemelk maximaal 550 ml kan zijn.

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 21 bladzijde 87

Bespreek de stelsels met parameter m.

1 $\begin{cases} x - my = 4 \\ 2x + (m-3)y = 6 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 4 \\ 2 & m-3 & 6 \end{array}\right] \overset{R_2 - 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 4 \\ 0 & 3m-3 & -2 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: m ≠ 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 4 \\ 0 & 3m-3 & -2 \end{array}\right] \overset{(3m-3)R_1 + mR_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3m-3 & 0 & 10m-12 \\ 0 & 3m-3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\frac{R_1}{3m-3} \\ \frac{R_2}{3m-3}}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{10m-12}{3m-3} \\ 0 & 3m-3 & \dfrac{-2}{3m-3} \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing: $(x, y) = \left(\dfrac{10m-12}{3m-3}, \dfrac{-2}{3m-3}\right)$.

2 $\begin{cases} x - y - mz = -1 \\ x + my - z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & -1 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - mR_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & -1 \\ 0 & m+1 & m-1 & 2 \\ 0 & m+1 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{2}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (r, r, -1)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2: $m \neq -1$

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -m & -1 \\ 0 & m+1 & m-1 & 2 \\ 0 & m+1 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{m+1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -m & -1 \\ 0 & m+1 & m-1 & 2 \\ 0 & 1 & m-1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -m & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m+1 & m-1 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1+R_2 \\ R_3-(m+1)R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m-m^2 & 1-m \end{array}\right]$$

Geval 2a: $m = 0$

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2b: $m = 1$

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (r, 1, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2c: $m \neq 0$ en $m \neq 1$

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m-m^2 & 1-m \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{1-m}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{mR_1+R_3 \\ mR_2-(m-1)R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{R_1}{m} \\ \frac{R_2}{m} \\ \frac{R_3}{m}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m} \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$.

Besluit:

- Als $m = -1$, dan is het stelsel enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (r, r, -1)$ met $r \in \mathbb{R}$.
- Als $m = 0$, dan is het stelsel strijdig.
- Als $m = 1$, dan is het stelsel enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (r, 1, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.
- Als $m \neq -1$, $m \neq 0$ en $m \neq 1$ dan is het stelsel bepaald met oplossing $(x, y, z) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$.

Opdracht 22 bladzijde 87

Welk verband moet er tussen de parameters a, b en c bestaan opdat

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{bmatrix}$$ de uitgebreide matrix zou zijn van een oplosbaar stelsel?

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 7R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right] \begin{array}{c} 3R_1 + 2R_2 \\ R_3 - 2R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & -3 & -5a+2b \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2b+8a \end{array}\right]$$

Dit stelsel is enkel oplosbaar als $a - 2b + c = 0$.

Opdracht 23 bladzijde 89

Onder welke voorwaarde is (a, b, c) een oplossing van het stelsel met als oplossingen $(x, y, z) = (4r, 2 + r - s, 3 - 4r + 2s)$ met $r, s \in \mathbb{R}$?

Opdat (a, b, c) een oplossing zou zijn van het stelsel, moet er een r en s bestaan zodanig dat

$$\begin{cases} a = 4r \\ b = 2 + r - s \\ c = 3 - 4r + 2s \end{cases}.$$

We schijven dit stelsel als een stelsel in r en s:

$$\begin{cases} 4r \phantom{{}-s} = a \\ r - s = b - 2 \\ -4r + 2s = c - 3 \end{cases}.$$

en lossen het op de methode van Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 0 & a \\ 1 & -1 & b-2 \\ -4 & 2 & c-3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_{12} \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & b-2 \\ 4 & 0 & a \\ -4 & 2 & c-3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - 4R_1 \\ R_3 + 4R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & b-2 \\ 0 & 4 & a-4b+8 \\ 0 & -2 & 4b+c-11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} 2R_3 + R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & b-2 \\ 0 & 4 & a-4b+8 \\ 0 & 0 & a+4b+2c-14 \end{array}\right]$$

Het stelsel in r en s is oplosbaar als en slechts als $a + 4b + 2c - 14 = 0$.

Opdracht 24 bladzijde 89

Bepaal een stelsel met als oplossingen $(x, y, z) = (r, 2r+1, 3r-1)$ met $r \in \mathbb{R}$.

(a, b, c) is een oplossing van het gevraagde stelsel als er een waarde van r bestaat zodanig dat

$$\begin{cases} r = a \\ 2r + 1 = b \\ 3r - 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = a \\ r = \dfrac{b-1}{2} \\ r = \dfrac{c+1}{3} \end{cases}$$

We vinden een oplossing voor r als en slechts als $a = \dfrac{b-1}{2}$ en $a = \dfrac{c+1}{3}$.

(a, b, c) is dus een oplossing van het gevraagde stelsel als en slechts als $\begin{cases} 2a = b - 1 \\ 3a = c + 1 \end{cases}$.

Het gevraagde stelsel is bijgevolg $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$.

Opdracht 25 bladzijde 93

1 Welk stelsel in $x_1, x_2 \ldots$ heeft als uitgebreide matrix $A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$?

Het stelsel is $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 6 \\ -x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$.

2 Los dit stelsel op.

Optellen van de twee laatste vergelijkingen geeft: $x_3 = 1$.

Invullen in de eerste en de tweede vergelijking geeft: $x_1 = 1$ en $x_2 = -4$.

De oplossing is $(x_1, x_2, x_3) = (1, -4, 1)$.

Opdracht 26 bladzijde 93

Los de volgende stelsels op.

1 $$\begin{cases} x + 3y - 4z + 2u = 1 \\ y + z - u = 4 \\ 2z + 2u = -6 \\ 3u = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z + 2u = 1 \\ y + z - u = 4 \\ 2z + 6 = -6 \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z + 2u = 1 \\ y - 6 - 3 = 4 \\ z = -6 \\ u = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 39 + 24 + 6 = 1 \\ y = 13 \\ z = -6 \\ u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -68 \\ y = 13 \\ z = -6 \\ u = 3 \end{cases}$$

2 $\begin{cases} 3x+2y-4z+u=-5 \\ 2y+4z-u=0 \\ 2z-7u=-6 \\ 5u=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4z+u=-5 \\ 2y+4z-u=0 \\ 2z+14=-6 \\ u=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-4z+u=-5 \\ 2y-40+2=0 \\ z=-10 \\ u=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+38+40-2=-5 \\ y=19 \\ z=-10 \\ u=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-27 \\ y=19 \\ z=-10 \\ u=-2 \end{cases}$

Opdracht 27 bladzijde 93

Bepaal indien mogelijk a en b zodat $(1, a, b)$ een oplossing is van het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

(1, a, b) is een oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ x-y+2z=-7 \\ 4x+y-2z=12 \end{cases}$ als en slechts als

$\begin{cases} 2+3a-b=11 \\ 1-a+2b=-7 \\ 4+a-2b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=9 \\ -a+2b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a-9 \\ -a+6a-18=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$

Opdracht 28 bladzijde 93

Als c een reële constante is, dan heeft het stelsel $\begin{cases} x-y=3 \\ cx+y=4 \end{cases}$ een oplossing (x, y) met $x>0$ en $y>0$ als en slechts als

A $c>-1$ **B** $0<c<\frac{4}{3}$ **C** $-1<c<\frac{4}{3}$ **D** $c>\frac{4}{3}$

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts, 2016)

Tellen we de vergelijkingen van het stelsel $\begin{cases} x-y=3 \\ cx+y=4 \end{cases}$ op, dan vinden we $(c+1)x=7$.

Als $c \neq -1$, dan is $x=\frac{7}{c+1}$ zodat $x>0$ als en slechts als $c>-1$ (1) .

Invullen in de eerste vergelijking geeft $y=\frac{7}{c+1}-3=\frac{7-3c-3}{c+1}=\frac{-3c+4}{c+1}$.

Als $c>-1$, dan is en $y>0$ als en slechts als $-3c+4>0$ $c<\frac{4}{3}$ (2).

Uit (1) en (2) volgt dat antwoord C het juiste is.

Opdracht 29 bladzijde 93

Veronderstel dat het stelsel $\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$ in de onbekenden x_1, x_2, x_3 en x_4 een oplossing heeft.

Dan geldt zeker:

A $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

B $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

C $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

D $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$

E De veronderstelling is fout, het stelsel heeft geen oplossing.

(Bron © VWO tweede ronde, 1998)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 & (1) \\ x_2 + x_3 = a_2 & (2) \\ x_3 + x_4 = a_3 & (3) \\ x_4 + x_1 = a_4 & (4) \end{cases}$$

- Uit (1) en (4) volgt: $x_2 - x_4 = a_1 - a_4$ (5)
- Uit (2) en (3) volgt: $x_2 - x_4 = a_2 - a_3$ (6)
- Uit (5) en (6) volgt: $a_1 - a_4 = a_2 - a_3$, dus $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$

Antwoord C is juist.

Opdracht 30 bladzijde 94

Herleid de matrices tot hun rijcanonieke vorm.

1 $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \overset{R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2 $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{5}R_2 \\ \frac{1}{2}R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 $$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 16 & 38 & 9 \end{bmatrix} \overset{R_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 16 & 38 & 9 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3 - 3R_1 \\ R_4 - 4R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{5}R_3 \\ -\frac{1}{3}R_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{4R_1 - 7R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{4}R_2 \\ \frac{1}{4}R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}R_2 \\ R_{13}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\overset{\substack{2R_1 - R_2 \\ -R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 - 9R_3 \\ R_2 + R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ \frac{1}{4}R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} \overset{\substack{\frac{R_2}{11} \\ \frac{R_3}{-11}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 - 3R_2 \\ R_3 - R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Opdracht 31 bladzijde 94

De rijcanonieke matrix van de uitgebreide matrix van een stelsel in x_1, x_2 … is gegeven.

Bepaal telkens of het stelsel bepaald, onbepaald (enkelvoudig, tweevoudig …) of strijdig is.

1 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Het stelsel is strijdig. Er komt een vergelijking van de vorm 0 = 1 voor.

2 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald. Er is geen vergelijking van de vorm 0 = 1, er zijn 2 hoofdelementen en 3 onbekenden.

3 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Het stelsel is bepaald. Er is geen vergelijking van de vorm 0 = 1, er zijn 2 hoofdelementen en 2 onbekenden.

4 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Het stelsel is tweevoudig onbepaald. Er is geen vergelijking van de vorm 0 = 1, er is 1 hoofdelement en 3 onbekenden.

5 $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald. Er is geen vergelijking van de vorm 0 = 1, er zijn 3 hoofdelementen en 4 onbekenden.

Opdracht 32 bladzijde 94

De rijcanonieke matrix van de uitgebreide matrix van een stelsel eerstegraads-vergelijkingen in x_1, x_2 … is gegeven. Bepaal de eventuele oplossingen van het stelsel.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(x_1, x_2) = (-2,0)$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Dit is stelsel is strijdig, de oplossingsverzameling is leeg.

3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$. Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (1 - r, r, 3)$ met $r \in \mathbb{R}$.

4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$. Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (4 - 7r, 3 + 2r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Het stelsel is gelijkwaardig met $x_1 + 2x_2 = 3$. Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2) = (3 - 2r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

6 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (r, -1, 0)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Opdracht 33 bladzijde 95

$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$ is de uitgebreide matrix van een stelsel eerstegraadsvergelijkingen.

Voor welke waarde(n) van a en b heeft dit stelsel

1 geen oplossingen?

Het stelsel heeft geen oplossingen als $a = 0$ en $b \neq 0$.

2 juist één oplossing?

Het stelsel heeft juist één oplossing als $a \neq 0$.

3 oneindig veel oplossingen?

Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als $a = b = 0$.

Opdracht 34 bladzijde 95

Los op zonder rekentoestel.

De x-coördinaat van de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 3x+5y-2z=14 \\ -x+4y-3z=1 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$ is

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** geen van de vorige

(Bron © University of Central Arkansas Region Algebra Exam, 2015)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 14 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{R_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 14 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2+3R_1 \\ R_3+3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 17 & -11 & 17 \\ 0 & 13 & -8 & 13 \end{bmatrix} \overset{\substack{-R_1 \\ R_2-R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & -8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & -8 & 13 \end{bmatrix}$$

De x-coördinaat is 3. D is het juiste antwoord.

Opdracht 35 bladzijde 95

Los de volgende stelsels op.

1 $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=-2 \\ 4x_1-3x_2+x_3=-3 \\ x_1-5x_3=3 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel $\begin{cases} x_1-5x_3=3 \\ x_2-7x_3=5 \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (3+5r, 5+7r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

2 $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3+5=0 \\ -x_1-x_2-x_3+7=0 \\ 9x_1-3x_2+3x_3+17=0 \\ 11x_1-x_2+3x_3+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=-5 \\ -x_1-x_2-x_3=-7 \\ 9x_1-3x_2+3x_3=-17 \\ 11x_1-x_2+3x_3=-3 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3} \\ x_2=\dfrac{20}{3} \\ x_3=0 \end{cases}$.

Het stelsel is bepaald met als oplossing $(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{20}{3}, 0\right)$.

3 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel $\begin{cases} x_1-\dfrac{1}{3}x_3=-\dfrac{1}{3} \\ x_2+\dfrac{5}{3}x_3+2x_4=\dfrac{11}{3} \end{cases}$.

Het stelsel is tweevoudig onbepaald met als oplossingen

$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(\dfrac{1}{3}r-\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}-\dfrac{5}{3}r-2s, r, s\right)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.

4 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=10 \\ x_1+x_2+5x_3+x_4=32 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=9 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel $\begin{cases} x_1-3x_4=-1 \\ x_2+\dfrac{31}{9}x_4=\dfrac{22}{9} \\ x_3+\dfrac{1}{9}x_4=\dfrac{55}{9} \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen

$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(3r-1, \dfrac{22}{9}-\dfrac{31}{9}r, \dfrac{55}{9}-\dfrac{1}{9}r, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

5 $\begin{cases} 3x-y+z=6 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-2y+z=-2 \\ 3x-7y+4z=4 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we $\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{26}{3} \\ z=\dfrac{50}{3} \end{cases}$.

Het stelsel is bepaald met als oplossing $(x, y, z)=\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{26}{3}, \dfrac{50}{3}\right)$.

6 $\begin{cases} x-y+5z=-6 \\ 3x+3y-z=10 \\ 2x+4y-6z=16 \end{cases}$

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x+\dfrac{7}{3}z=-\dfrac{4}{3} \\ y-\dfrac{8}{3}z=\dfrac{14}{3} \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen

$(x, y, z)=\left(-\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{3}r, \dfrac{14}{3}+\dfrac{8}{3}r, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

7 $\begin{cases} 4x+3y-5z=5 \\ 3x+2y-5t=12 \\ x-2z+3t=-4 \\ y-3z+4t=-5 \end{cases}$

Na herleiden vinden we onmiddellijk de enige oplossing: $(x, y, z, t) = (1, 2, 1, -1)$.

8 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+5x_4=10 \\ 3x_1-2x_2-5x_3+4x_4=-5 \\ 2x_1+x_2-x_3+5x_4=5 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we een vergelijking van de vorm $0 = 1$. Het stelsel is strijdig en heeft geen oplossingen.

9 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+1=0 \\ 3x_1-2x_3+3x_4+4=0 \\ 5x_1-4x_2+x_4+3=0 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we een vergelijking van de vorm $0 = 1$. Het stelsel is strijdig en heeft geen oplossingen.

10 $\begin{cases} x+2y-2z+3t=16 \\ 2x+5y+3z-t=7 \\ 3y+z-t=5 \end{cases}$

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x+t=2 \\ y=3 \\ z-t=-4 \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x, y, z, t) = (2 - r, 3, -4 + r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

11 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_4+x_5=0 \\ x_1+x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_1+x_3+x_4-2x_5=0 \\ x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}x_5=0 \end{cases}$.

Het stelsel is drievoudig onbepaald met als oplossingen

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-r-s+2t, \frac{1}{2}r+\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}t, r, s, t\right)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

12 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$

Het stelsel is drievoudig onbepaald met als oplossingen

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - r - s - t, r, s, t)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Opdracht 36 bladzijde 96

Jules brengt een aantal lege flessen en bakken terug naar de supermarkt. Voor een kleine fles krijgt hij € 0,10; voor een grote fles € 0,30 en voor een lege bak € 2,10. Alle kleine flesjes zitten in bakken die volledig gevuld zijn met 24 flesjes per bak. Hij brengt in totaal 150 flessen binnen en krijgt € 31,50 statiegeld.

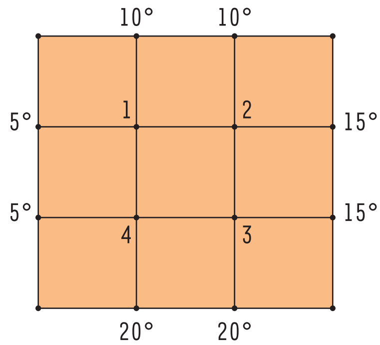
Hoeveel kleine flesjes, grote flessen en bakken heeft hij binnengebracht?

We stellen x = het aantal kleine flessen
y = het aantal grote flessen
z = het aantal bakken

Het stelsel is: $\begin{cases} x - 24z = 0 \\ x + y = 150 \\ 0{,}1x + 0{,}3y + 2{,}1z = 31{,}5 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x = 120 \\ y = 30 \\ z = 5 \end{cases}$.

Jules heeft 120 kleine flesjes, 30 grote flessen en 5 bakken binnengebracht.

Opdracht 37 bladzijde 96



In de figuur zie je een schets van een dunne metalen plaat waarop 12 knooppunten zijn aangebracht waarvan acht, die op de rand liggen, warmteproducerend zijn.

Voor de vier inwendige knooppunten 1, 2, 3 en 4 geldt dat de temperatuur het gemiddelde is van de temperatuur van de 4 knooppunten die er het dichtst bij liggen.

Bijvoorbeeld: als t_1, t_2, t_3 en t_4 de temperaturen voorstellen in de knooppunten 1, 2, 3 en 4,

dan is $t_1 = \frac{1}{4}(5° + 10° + t_2 + t_4)$.

Schrijf soortgelijke vergelijkingen op voor t_2, t_3 en t_4 en bepaal t_1, t_2, t_3 en t_4.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{4}(5 + 10 + t_2 + t_4) \\ t_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 10 + 15 + t_3) \\ t_3 = \frac{1}{4}(t_4 + t_2 + 15 + 20) \\ t_4 = \frac{1}{4}(5 + t_1 + t_3 + 20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t_1 - t_2 - t_4 = 15 \\ -t_1 + 4t_2 - t_3 = 25 \\ -t_2 + 4t_3 - t_4 = 35 \\ -t_1 - t_3 + 4t_4 = 25 \end{cases}$$

Oplossing stelsel: $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (10; 12{,}5; 15; 12{,}5)$.

Dus $t_1 = 10°$; $t_2 = 12{,}5°$; $t_3 = 15°$ en $t_4 = 12{,}5°$.

Opdracht 38 bladzijde 96

De Chiu Chang is een wiskundig standaardwerk uit het Oude China van omstreeks 180 voor Christus. In het achtste hoofdstuk vind je het volgende vraagstuk terug, waarbij je merkt dat de ruilhandel nog altijd was ingeburgerd, maar dat er toch al werd bijgepast met munten.

Bij verkoop van twee buffels en vijf schapen en aankoop van dertien varkens, krijgt men 1000 munten.
Bij verkoop van drie buffels en drie varkens, kan men precies negen schapen kopen.
Bij verkoop van zes schapen en acht varkens en bij aankoop van vijf buffels, moet men 600 munten bijleggen.

Wat is de prijs van een buffel, van een schaap en van een varken?

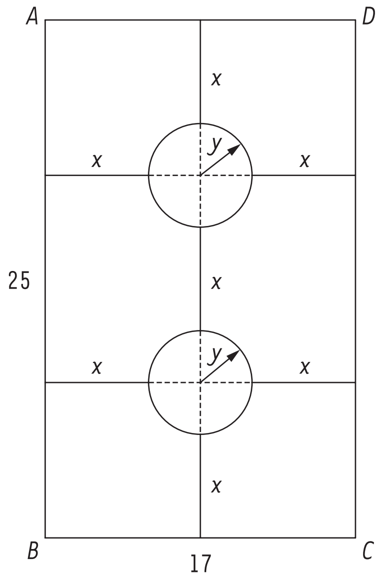
We stellen x = de prijs van een buffel
y = de prijs van een schaap
z = de prijs van een varken

Het stelsel is: $\begin{cases} 2x + 5y - 13z = 1000 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ -5x + 6y + 8z = -600 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x = 1200 \\ y = 500 \\ z = 300 \end{cases}$.

Voor een buffel betaal je 1200 munten, voor een schaap 500 en voor een varken 300 munten.

Opdracht 39 bladzijde 97

In de rechthoek *ABCD* met zijden 25 en 17 zijn twee cirkels getekend zoals op de figuur is weergegeven.



Voor welke waarden van *x* en *y* kan zo'n constructie getekend worden?

Het stelsel in x en y is $\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 2x + 2y = 17 \end{cases}$.

Dit stelsel heeft als oplossing $\begin{cases} x = 9 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

De straal y kan echter niet negatief zijn, zodat dit vraagstuk geen oplossing heeft.

Opdracht 40 bladzijde 97

Een arts schrijft een patiënt een dagelijkse inname van 50 mg van zowel niacine, riboflavine als thiamine voor om een vitaminetekort te verhelpen. De patiënt heeft nog drie soorten vitaminepreparaten liggen. De hoeveelheid van de relevante vitamines per capsule vind je in de tabel.

Hoeveel capsules van elke soort moet de patiënt nemen om aan 50 mg van elk van de drie vermelde vitamines te komen?

	VitaMax	Vitron	VitaPlus
niacine (mg)	5	10	15
riboflavine (mg)	15	20	0
thiamine (mg)	10	10	10

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts, 2016)

We stellen $x =$ het aantal capsules VitaMax
$y =$ het aantal capsules Vitron
$z =$ het aantal capsules VitaPlus

Het stelsel vinden we uit de benodigde hoeveelheden vitamines: $\begin{cases} 5x + 10y + 15z = 50 \\ 15x + 20y = 50 \\ 10x + 10y + 10z = 50 \end{cases}$.

We vinden als oplossing: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.

De patiënt moet dagelijks 2 capsules VitaMax, 1 capsule Vitron en 2 capsules Vita Plus nemen.

Opdracht 41 bladzijde 97

Een lineair $m \times n$-stelsel heeft als coëfficiëntenmatrix A en als uitgebreide matrix A_b.

Vul de tabel aan.

	m	n	$r(A)$	$r(A_b)$	het stelsel is
1	4		3		bepaald
2	4	3	2	3	
3	4	4	2	2	
4	3		1		enkelvoudig onbepaald
5				2	drievoudig onbepaald

	m	n	$r(A)$	$r(A_b)$	het stelsel is
1	4	3	3	3	bepaald
2	4	3	2	3	strijdig
3	4	4	2	2	tweevoudig onbepaald
4	3	2	1	1	enkelvoudig onbepaald
5	$\geqslant 2$	5	2	2	drievoudig onbepaald

Opdracht 42 bladzijde 98

Gegeven is het volgende stelsel van lineaire vergelijkingen: $\begin{cases} x+y-2z=10 \\ 6x+4y-9z=45 \\ 7x-3y+z=-5 \end{cases}$.

Hoeveel oplossingen $(x,\ y,\ z)$ zijn er waarvoor geldt dat het product xyz gelijk is aan 0?

A geen **B** 1 **C** 2 **D** meer dan 2

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2017)

Het stelsel $\begin{cases} x+y-2z=10 \\ 6x+4y-9z=45 \\ 7x-3y+z=-5 \end{cases}$ is gelijkwaardig met $\begin{cases} x-\frac{1}{2}z=\frac{5}{2} \\ y-\frac{3}{2}z=\frac{15}{2} \end{cases}$ en heeft oneindig veel oplossingen $\begin{cases} x=\frac{5}{2}+r \\ y=\frac{15}{2}+3r. \\ z=r \end{cases}$

Voor $r=0$ is de oplossing $(x, y, z)=\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 0\right)$ en is bijgevolg $x\cdot y\cdot z=0$.

Voor $r=-\frac{5}{2}$ is de oplossing $(x, y, z)=\left(0, 0, -\frac{5}{2}\right)$ met ook $x\cdot y\cdot z=0$.

Dit zijn de enige twee mogelijkheden waarbij het product xyz gelijk is aan 0.

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 43 bladzijde 98

Schrijf de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$

1 met x_1 en x_2 als hoofdonbekenden,

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel $\begin{cases} x_1+\frac{4}{3}x_3+x_4=-\frac{2}{3} \\ x_2-\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3} \end{cases}$.

Kiezen we x_1 en x_2 als hoofdonbekenden, dan schrijven we de oplossingen als

$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}r-s, \frac{5}{3}+\frac{1}{3}r, r, s\right)$ met $r, s\in\mathbb{R}$.

2 met x_3 en x_4 als hoofdonbekenden.

$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(r, s, 3\cdot\left(s-\frac{5}{3}\right), -\frac{2}{3}-r-\frac{4}{3}\cdot3\cdot\left(s-\frac{5}{3}\right)\right)$ of $(r, s, 3s-5, 6-r-4s)$ met $r, s\in\mathbb{R}$.

Opdracht 44 bladzijde 98

Hoeveel oplossingen heeft het stelsel $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$ als x_1, x_2 en x_3 gehele getallen moeten zijn die in het interval [–10, 10] liggen?

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ en is dus enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3) = (-r, 1 + 2r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Als x_1, x_2 en x_3 gehele getallen in het interval [–10,10] zijn, dan moet r geheel zijn en

$$\begin{cases} -10 \leqslant r \leqslant 10 \\ -10 \leqslant 1 + 2r \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leqslant r \leqslant 10 \\ -11 \leqslant 2r \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leqslant r \leqslant 10 \\ -5{,}5 \leqslant r \leqslant 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leqslant r \leqslant 4.$$

Er zijn dus 10 verschillende oplossingen.

Opdracht 45 bladzijde 98

Een bioloog heeft voor een experiment met muizen een voedselmengsel nodig dat, buiten andere stoffen, bestaat uit 23 g eiwitten, 6,2 g vet en 16 g vocht.

De samenstelling van de mengsels die hij heeft, staat in de tabel.

	eiwitten (%)	vet (%)	vocht (%)
mengsel A	20	2	15
mengsel B	10	6	10
mengsel C	15	5	5

Hoeveel gram van elk mengsel moet hij mengen om het gevraagde dieet te krijgen?

We stellen x = het aantal gram van mengsel A
y = het aantal gram van mengsel B
z = het aantal gram van mengsel C

Het stelsel vinden we uit het gewenste aantal gram eiwitten, vet en vocht:

$$\begin{cases} 0{,}20x + 0{,}10y + 0{,}15z = 23 \\ 0{,}02x + 0{,}06y + 0{,}05z = 6{,}2 \\ 0{,}15x + 0{,}10y + 0{,}05z = 16 \end{cases}.$$

We vinden als oplossing: $\begin{cases} x = 60 \\ y = 50 \\ z = 40 \end{cases}$.

Hij moet 60 gram van mengsel A, 50 gram van mengsel B en 40 gram van mengsel C nemen.

Opdracht 46 bladzijde 98

Rania is dubbel zo oud als Brent. Vier jaar geleden was Brent twee keer zo oud als Emma en over 10 jaar zal Rania dubbel zo oud zijn als Emma.

Hoe oud is Rania nu?

We stellen x = de leeftijd van Rania nu
y = de leeftijd van Brent nu
z = de leeftijd van Emma nu

Het stelsel is: $\begin{cases} x = 2y \\ y - 4 = 2(z - 4) \\ x + 10 = 2(z + 10) \end{cases}$ is gelijkwaardig met $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = -4 \\ x - 2z = 10 \end{cases}$ met als oplossing x = 28, y = 14 en z = 9.

Antwoord: Rania is nu 28 jaar oud.

Opdracht 47 bladzijde 98

Een landheer geeft 100 dinar aan zijn ondergeschikte en beveelt hem 100 stukken vee te kopen door voor een stier slechts 10 dinar, voor een koe 5 dinar en voor een kalf 0,5 dinar te betalen. Hoeveel dieren van elke soort moet die man aankopen?

(Abū Kāmil, 10de eeuw)

We stellen x = het aantal stieren dat hij koopt
y = het aantal koeien dat hij koopt
z = het aantal kalveren dat hij koopt

Het stelsel is: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 5y + 0{,}5z = 100 \end{cases}$.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x - \dfrac{9}{10}z = -80 \\ y + \dfrac{19}{10}z = 180 \end{cases}$, zodat we de oplossingen kunnen schrijven

als $\begin{cases} x = -80 + \dfrac{9}{10}r \\ y = 180 - \dfrac{19}{10}r \\ z = r \end{cases}$.

Het aantal oplossingen wordt beperkt door de context: z moet daarom zeker al een tienvoud zijn.

- Kiezen we $r < 90$, dan is het aantal stieren x negatief, wat onmogelijk is.
- Kiezen we $r \geqslant 100$, dan is het aantal koeien y negatief, wat ook niet kan.

Er is bijgevolg maar 1 oplossing.

1 stier, 9 koeien en 90 kalveren

	x	y	z
~~r = 0~~	–80	180	0
r = 90	1	9	90
~~r = 100~~	10	–10	100

Opdracht 48 bladzijde 99

Een zoo wil zijn soorten uitbreiden met een aantal olifanten, giraffen en neushoorns.
Een olifant eet 200 kg voedsel per dag, een giraf 75 kg en een neushoorn 50 kg.

Als men in totaal 11 dieren wil en een budget heeft voor 950 kg voedsel per dag, hoeveel van elke soort kan men dan aankopen?

We stellen x = het aantal olifanten
y = het aantal giraffen
z = het aantal neushoorns

Het stelsel is: $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 200x+75y+50z=950 \end{cases}$.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x-\frac{1}{5}z=1 \\ y+\frac{6}{5}z=10 \end{cases}$, zodat we de oplossingen kunnen schrijven als

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{5}r \\ y=10-\frac{6}{5}r. \\ z=r \end{cases}$$

Het aantal oplossingen wordt beperkt door de context: z moet daarom zeker een positief vijfvoud zijn.

Kiezen we $r \geqslant 10$, dan is het aantal giraffen y negatief.

	x	y	z
r = 0	1	10	0
r = 5	2	4	5
~~r = 10~~	3	–2	10

Er zijn bijgevolg 2 oplossingen: de zoo kan 1 olifant en 10 giraffen kopen of 2 olifanten, 4 giraffen en 5 neushoorns.

Opdracht 49 bladzijde 99

1 Bij de volgende reactievergelijking zoeken we gehele getallen x, y, z en t zodat de reactie $x\ C_6H_5CH_3 + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + t\ H_2O$ mogelijk is. Deze reactie beschrijft de verbranding van methylbenzeen.

Het aantal atomen C, H en O links moet gelijk zijn aan het aantal rechts. Dit geeft aanleiding tot drie een stelsel van vergelijkingen in vier onbekenden.

Los het stelsel op gevormd door deze vergelijkingen en schrijf de bijbehorende reactievergelijking.

De evenwichten tussen de molaire massa's van de verschillende atomen geeft het volgende stelsel: $\begin{cases} 7x = z \\ 8x = 2t \\ 2y = 2z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - z = 0 \\ 8x - 2t = 0 \\ 2y - 2z - t = 0 \end{cases}$.

Dit homogeen stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x - \frac{1}{4}t = 0 \\ y - \frac{9}{4}t = 0 \\ z - \frac{7}{4}t = 0 \end{cases}$, zodat we de oplossingen kunnen schrijven als $\begin{cases} x = r \\ y = 9r \\ z = 7r \\ t = 4r \end{cases}$.

De oplossingen worden beperkt door de context. Het is gebruikelijk in de chemie om te kiezen voor de kleinst mogelijke strikt positieve gehele coëfficiënten.

De reactievergelijking wordt: $C_6H_5CH_3 + 9O_2 \rightarrow 7CO_2 + 4H_2O$.

2 Bepaal de gehele getallen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* en *g* in de reactievergelijking $a\ KMnO_4 + b\ FeSO_4 + c\ H_2SO_4 \rightarrow d\ MnSO_4 + e\ Fe_2(SO_4)_3 + f\ K_2SO_4 + g\ H_2O$.

Het stelsel is $\begin{cases} a = 2f \\ a = d \\ 4a + 4b + 4c = 4d + 12e + 4f + g \\ b = 2e \\ b + c = d + 3e + f \\ 2c = 2g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2f = 0 \\ a - d = 0 \\ 4a + 4b + 4c - 4d - 12e - 4f - g = 0 \\ b - 2e = 0 \\ b + c - d - 3e - f = 0 \\ c - g = 0 \end{cases}$.

Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} a - \frac{1}{4}g = 0 \\ b - \frac{5}{4}g = 0 \\ c - g = 0 \\ d - \frac{1}{4}g = 0 \\ e - \frac{5}{8}g = 0 \\ f - \frac{1}{8}g = 0 \end{cases}$.

De keuze $g = 8$ geeft de kleinste strikt positieve gehele coëfficiënten $a = d = 2$, $b = 10$, $c = 8$, $e = 5$ en $f = 1$.

De reactievergelijking wordt
$2KMnO_4 + 10FeSO_4 + 8H_2SO_4 \rightarrow 2MnSO_4 + 5Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 8H_2O$.

Opdracht 50 bladzijde 99

Een bouwfirma is gespecialiseerd in modulaire bouwconstructies. Ze beschikt over drie verschillende soorten woonplatforms die in willekeurige volgorde boven elkaar kunnen worden geplaatst. Plan A bevat 3 flats met 3 slaapkamers, 6 met 2 slaapkamers en 9 met 1 slaapkamer. Plan B levert 4 flats met 3 slaapkamers, 5 met 2 slaapkamers en 7 met 1 slaapkamer. Plan C geeft 2 flats met 3 slaapkamers, 7 met 2 slaapkamers en 11 met 1 slaapkamer.

Is het mogelijk een building te construeren die 36 flats met 3 slaapkamers, 81 flats met 2 slaapkamers en 123 flats met 1 slaapkamer bevat?

Zo ja, geef alle mogelijke antwoorden.

We stellen x = het aantal keer platform A in de building
y = het aantal keer platform B
z = het aantal keer platform C

Het aantal flats met 3 slaapkamers geeft de vergelijking $3x + 4y + 2z = 36$.
Voor het aantal flats met 2 slaapkamers is dit $6x + 5y + 7z = 81$
en voor het aantal flats met 1 slaapkamer $9x + 7y + 11z = 123$.

Het stelsel is: $\begin{cases} 3x+4y+2z=36 \\ 6x+5y+7z=81 \\ 9x+7y+11z=123 \end{cases}$.

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x+2z=16 \\ y-z=-3 \end{cases}$, zodat we de oplossingen kunnen schrijven als

$\begin{cases} x=16-2r \\ y=-3+r \\ z=r \end{cases}$. Het aantal oplossingen wordt beperkt door de context: z moet daarom zeker al een geheel getal zijn.

- Kiezen we $r < 3$, dan is y negatief, wat onmogelijk is.
- Kiezen we $r \geq 9$, dan is x negatief.

	x	y	z
~~r = 2~~	12	−1	2
r = 3	10	0	3
r = 4	8	1	4
r = 5	6	2	5
r = 6	4	3	6
r = 7	2	4	7
r = 8	0	5	8
~~r = 9~~	−2	6	9

Er zijn bijgevolg 6 mogelijke oplossingen:

1) 10 keer plan A en 3 keer plan C
2) 8 keer plan A, 1 keer plan B en 4 keer plan C
3) 6 keer plan A, 2 keer plan B en 5 keer plan C
4) 4 keer plan A, 3 keer plan B en 6 keer plan C
5) 2 keer plan A, 4 keer plan B en 7 keer plan C
6) 5 keer plan B en 8 keer plan C

Opdracht 51 bladzijde 99

Een klein metaalbedrijfje heeft 3 machines voor het modelleren en 4 machines voor het bedraden van bouten.
Er worden twee types van bouten geproduceerd: om een lot (1000 stuks) van type A te produceren moet men 3 minuten modelleren en 5 minuten bedraden, voor type B is dit 10 minuten voor beide.

Hoeveel loten van elk type moet men per uur produceren om de machines voltijds te benutten?

We stellen x = het aantal loten van type A
y = het aantal loten van type B

Voor het modelleren heeft men 180 minuten per uur beschikbaar, voor bedraden is dat 240 minuten.

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} 3x + 10y = 180 \\ 5x + 10y = 240 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x = 30 \\ y = 9 \end{cases}$.

Er moeten per uur 30 loten van A en 9 van B, dit zijn 30 000 stuks van type A en 9000 stuks van type B geproduceerd worden.

Opdracht 52 bladzijde 100

Een groothandel in meststoffen heeft 3 soorten tuinmest:

- een eerste soort A met 5 % stikstof waarvan nog 4000 kg voorradig is,
- een tweede soort B met 10 % stikstof waarvan nog 1500 kg voorradig is,
- een derde soort C met 20 % stikstof waarvan nog 8000 kg voorradig is.

Er komt een bestelling van 1000 kg mest dat een stikstofgehalte van 15 % moet hebben. Men mengt daarom de drie soorten meststof met elkaar. Omwille van de voorraad wil men van soort C tweemaal zoveel gebruiken als van soort A.

Hoeveel kg van elke soort moet men mengen?

We stellen x = de hoeveelheid van soort A (in kg)
y = de hoeveelheid van soort B (in kg)
z = de hoeveelheid van soort C (in kg)

Het stelsel is $\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ z = 2x \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}20z = 0{,}15 \cdot 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x - z = 0 \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}20z = 150 \end{cases}$.

De oplossing is $\begin{cases} x = \dfrac{1000}{3} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{2000}{3} \end{cases}$.

We moeten 333,33 kg van soort A en 666,67 kg van soort C mengen.

Opdracht 53 bladzijde 100

Bepaal een natuurlijk getal van drie cijfers dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

- de som van de cijfers is 12,
- trek je het getal af van datgene wat je vindt door de cijfers in omgekeerde volgorde te zetten, dan vind je 297,
- het cijfer van de honderdtallen is het gemiddelde van het cijfer van de eenheden en dat van de tientallen.

Stel x = het cijfer van de eenheden
y = het cijfer van de tientallen
z = het cijfer van de honderdtallen

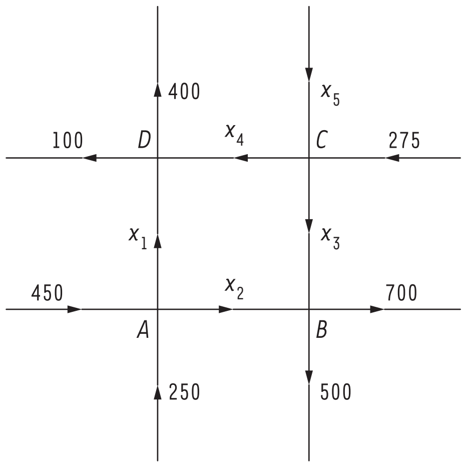
Het getal is dan $x + 10y + 100z$. Door de cijfers in omgekeerde volgorde te zetten, krijg je het getal $100x + 10y + z$.

Het stelsel wordt: $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ (100x + 10y + z) - (x + 10y + 100z) = 297. \\ z = \dfrac{x + y}{2} \end{cases}$

Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 99x - 99z = 297 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}.$

Het getal is 417.

Opdracht 54 bladzijde 100
Netwerken



In de figuur zie je een stukje stratenplan van een stad. Het kan beschouwd worden als een netwerk. Zoals een computernetwerk bestaat uit een aantal pc's die met elkaar verbonden zijn, bestaat een netwerk in het algemeen uit een aantal 'knopen' of 'knooppunten', die verbonden zijn door 'takken'.

De getallen op de figuur geven informatie over de in- en uitstroom van het aantal voertuigen per uur in het netwerk. Deze data zijn het gemiddelde resultaat van waarnemingen gedurende een lange periode. In alle straten kun je enkel rijden in de richting van de pijl.

De basisprincipes bij de studie van het verloop in een netwerk zijn de volgende:

– de totale instroom in het netwerk moet gelijk zijn aan de totale uitstroom,

– de instroom in een knoop is even groot als de uitstroom bij deze knoop.

1 Onderzoek de verkeersstroom in het netwerk, met andere woorden bereken x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5.

Gelijkstellen van in- en uitstroom geeft de volgende vergelijkingen:

in A: $450 + 250 = x_1 + x_2$

in B: $x_2 + x_3 = 500 + 700$

in C: $x_5 + 275 = x_3 + x_4$

in D: $x_1 + x_4 = 100 + 400$

totaal: $x_5 + 275 + 250 + 450 = 700 + 500 + 100 + 400$

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} x_1 + x_2 = 700 \\ x_2 + x_3 = 1200 \\ x_1 + x_4 = 500 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 275 \\ x_5 = 725 \end{cases}$.

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $\begin{cases} x_1 = 500 - r \\ x_2 = 200 + r \\ x_3 = 1000 - r \\ x_4 = r \\ x_5 = 725 \end{cases}$.

Omdat het aantal voertuigen strikt positief moet zijn, krijgen we de volgende voorwaarden voor r: $\begin{cases} 500 - r \geqslant 0 \\ 200 + r \geqslant 0 \\ 1000 - r \geqslant 0 \\ r \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \leqslant 500 \\ r \geqslant -200 \\ r \leqslant 1000 \\ r \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant 500.$

Bovendien moet $r \in \mathbb{N}$.

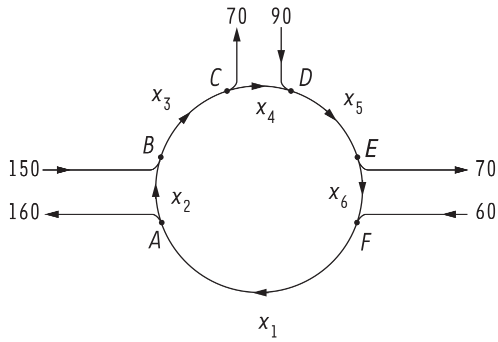
2 Hoeveel oplossingen zijn er?

Aangezien $r \in \mathbb{N}$ en $0 \leqslant r \leqslant 500$ zijn er 501 verschillende oplossingen.

Opdracht 55 bladzijde 101

In Groot-Brittannië zijn de meeste rotondes geconstrueerd zoals in de figuur.

De getallen stellen het aantal wagens per uur voor in de door pijlen aangegeven rijrichting.



1 Bereken het verkeersverloop binnen het netwerk, met andere woorden bereken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en x_6.

$$\begin{cases} x_1 = 160 + x_2 \\ 150 + x_2 = x_3 \\ x_3 = x_4 + 70 \\ x_4 + 90 = x_5 \\ x_5 = x_6 + 70 \\ x_6 + 60 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_3 = -150 \\ x_3 - x_4 = 70 \\ x_4 - x_5 = -90 \\ x_5 - x_6 = 70 \\ x_1 - x_6 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 60 + r \\ x_2 = r - 100 \\ x_3 = 50 + r \\ x_4 = r - 20 \\ x_5 = 70 + r \\ x_6 = r \end{cases}$$

Hierbij is $r \in \mathbb{N}$, $60 + r \geqslant 0$, $r - 100 \geqslant 0$, $50 + r \geqslant 0$, $r - 20 \geqslant 0$ en $70 + r \geqslant 0$.

2 Wat is de kleinste realistische waarde voor x_6?

Uit de voorwaarden voor r volgt dat $r \in \mathbb{N}$ en $r \geqslant 100$.

De kleinste waarde voor x_6 is 100.

Opdracht 56 bladzijde 101

Als je bij elke elementaire rijoperatie de bijbehorende stelsels beschouwt, dan zijn de oplossingsverzamelingen van beide stelsels gelijk. Dit is triviaal voor de rijoperaties R_{ij} en kR_i. We tonen dit aan voor de rijoperatie $R_i + kR_j$.

We nemen daartoe $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + kR_2} \begin{bmatrix} a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ met de bijbehorende stelsels $\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$ (1) en $\begin{cases} (a_1 + kb_1)x + (a_2 + kb_2)y = a_3 + kb_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$ (2).

1 Toon aan dat elke oplossing (p, q) van stelsel (1) ook een oplossing is van (2).

2 Toon aan dat elke oplossing (p, q) van stelsel (2) ook een oplossing is van (1).

Uit **1** en **2** volgt dan dat de oplossingsverzamelingen van beide stelsels gelijk zijn.

Stel $\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + kR_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right]$

De bijbehorende stelsels zijn:

$S_1 \begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$ en $S_2 \begin{cases} (a_1 + kb_1)x + (a_2 + kb_2)y = a_3 + kb_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$

1

$$(p, q) \text{ is een oplossing van } S_1$$
$$\Downarrow$$
$$a_1p + a_2q = a_3 \text{ en } b_1p + b_2q = b_3 \qquad (1)$$
$$\Downarrow$$
$$a_1p + a_2q = a_3 \text{ en } k(b_1p + b_2q) = kb_3$$
$$\Downarrow$$
$$a_1p + a_2q + kb_1p + kb_2q = a_3 + kb_3$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1 + kb_1)p + (a_2 + kb_2)q = a_3 + kb_3 \qquad (2)$$
$$\Downarrow \quad (1) \text{ en } (2)$$
$$(p, q) \text{ is een oplossing van } S_2$$

Elke oplossing van S_1 is dus een oplossing van S_2.

2

$$(p, q) \text{ is een oplossing van } S_2$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1 + kb_1)p + (a_2 + kb_2)q = a_3 + kb_3 \text{ en } b_1p + b_2q = b_3 \qquad (1)$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1 + kb_1)p + (a_2 + kb_2)q = a_3 + kb_3 \text{ en } -k(b_1p + b_2q) = -kb_3$$
$$\Downarrow$$
$$(a_1 + kb_1 - kb_1)p + (a_2 + kb_2 - kb_2)q = a_3 + kb_3 - kb_3$$
$$\Downarrow$$
$$a_1p + a_2q = a_3 \qquad (2)$$
$$\Downarrow \quad (1) \text{ en } (2)$$
$$(p, q) \text{ is een oplossing van } S_1$$

De oplossingsverzamelingen van S_1 en S_2 zijn dus gelijk.

Opdracht 57 bladzijde 102

Los de volgende stelsels op.

1 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{3}{z}=-9 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}-\dfrac{2}{z}=15 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y}+\dfrac{1}{z}=-14 \end{cases}$

Stel $\dfrac{1}{x}=X, \dfrac{1}{y}=Y, \dfrac{1}{z}=Z$, dan wordt het stelsel

$$\begin{cases} 2X+Y+3Z=-9 \\ X-4Y-2Z=15 \\ X+6Y+Z=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ Y=-2 \\ Z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \dfrac{1}{y}=-2 \\ \dfrac{1}{z}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

2 $\begin{cases} \dfrac{1}{u}+\dfrac{3}{v}+\dfrac{1}{w}=9 \\ \dfrac{2}{u}-\dfrac{1}{v}-\dfrac{4}{w}=9 \\ -\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}+\dfrac{5}{w}=-15 \end{cases}$

Stel $\dfrac{1}{u}=U, \dfrac{1}{v}=V$ en $\dfrac{1}{w}=W$, dan wordt het stelsel

$$\begin{cases} U+2V+W=9 \\ 2U-V-4W=9 \\ -U-V+5W=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U=2 \\ V=3 \\ W=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{2} \\ v=\dfrac{1}{3} \\ w=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

3 $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4}{z^2}=-13 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=12 \\ \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3}{z^2}=-7 \end{cases}$

Stel $\dfrac{1}{x^2}=X$, $\dfrac{1}{y^2}=Y$ en $\dfrac{1}{z^2}=Z$, dan wordt het stelsel $\begin{cases} 3X-Y-4z=-13 \\ x+2Y+Z=12 \\ 4x-Y-3Z=-7 \end{cases}$.

De oplossing van dit stelsel is $\begin{cases} X=2 \\ Y=3. \\ Z=4 \end{cases}$

Dit geeft 8 verschillende oplossingen voor (x, y, z): $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2}\right)$ en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2}\right)$.

4 $\begin{cases} \dfrac{1}{xy}-\dfrac{3}{yz}+\dfrac{4}{zx}=-\dfrac{4}{xyz} \\ \dfrac{3}{xy}-\dfrac{7}{yz}+\dfrac{7}{zx}=-\dfrac{8}{xyz} \\ -\dfrac{4}{xy}+\dfrac{6}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{7}{xyz} \end{cases}$

We vermenigvuldigen elke vergelijking met $xyz \neq 0$.

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} z-3x+4y=-4 \\ 3z-7x+7y=-8. \\ -4z+6x+y=7 \end{cases}$

De oplossing van dit stelsel is $\begin{cases} x=\dfrac{23}{4} \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=\dfrac{29}{4} \end{cases}$.

Opdracht 58 bladzijde 102

In een afdeling van een autofabriek worden drie modellen gemaakt: A, B en C. Voor de assemblage zijn per stuk respectievelijk 56, 91 en 87,5 werkuren nodig. In deze afdeling werken 350 arbeiders gedurende 36 uur per week. Men verwacht nu dat er op 100 auto's 30 van model A, 20 van model B en 50 van model C zullen worden verkocht.

Hoeveel auto's van elk model zal men nu per week produceren?

- We stellen x = aantal auto's van model A
  y = aantal auto's van model B
  z = aantal auto's van model C
- Stelsel: $\begin{cases} 56x + 91y + 87{,}5z = 350 \cdot 36 \\ \dfrac{x}{30} = \dfrac{y}{20} = \dfrac{z}{50} \end{cases}$

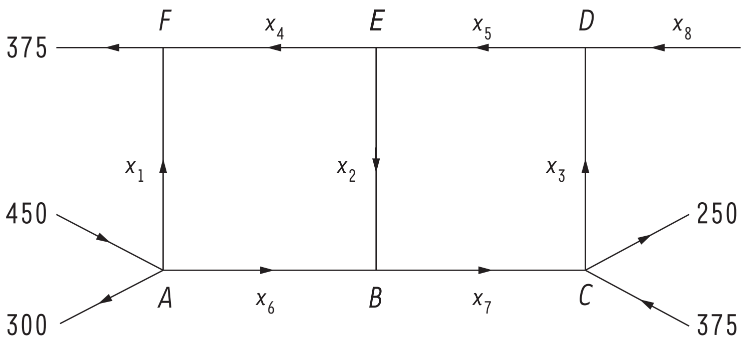
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 56x + 91y + 87{,}5z = 12\,960 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 32 \\ z = 80 \end{cases}$$

- Antwoord: per week worden er 48 auto's van model A, 32 van model B en 80 van model C geproduceerd.

Opdracht 59 bladzijde 102

1 Bepaal de verkeersstroom in het volgende netwerk: bereken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 en x_8.

De getallen stellen het aantal voertuigen voor per uur. Alle straten hebben eenrichtingsverkeer in de richting van de pijlen, behalve het stuk tussen A en C. Hier geldt geen eenrichtingsverkeer. De onbekenden x_6 en x_7 stellen de 'nettostromen' voor, telkens het aantal voertuigen in oostelijke richting verminderd met het aantal in westelijke richting.



	Instroom		Uitstroom
	$450 + 375 + x_8$	=	$375 + 300 + 250$
In A:	450	=	$300 + x_1 + x_6$
In B:	$x_2 + x_6$	=	x_7
In C:	$x_7 + 375$	=	$x_3 + 250$
In D:	$x_3 + x_8$	=	x_5
In E:	x_5	=	$x_2 + x_4$
In F:	$x_1 + x_4$	=	375

$$\begin{cases} x_1 & & & & & +x_6 & & & = 150 \\ & x_2 & & & & +x_6 & -x_7 & & = 0 \\ & & x_3 & & & & -x_7 & & = 125 \\ & & x_3 & & -x_5 & & & +x_8 & = 0 \\ & x_2 & & +x_4 & -x_5 & & & & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & & & & & = 375 \\ & & & & & & & x_8 & = 100 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \left[\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 225 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_8 = 100 & & \\ x_7 = r & & \\ x_6 = s & & \\ x_5 = 225 + r & 225 + r \geqslant 0 & r \geqslant -225 \\ x_4 = 225 + s & 225 + s \geqslant 0 & s \geqslant -225 \\ x_3 = 125 + r & 125 + r \geqslant 0 & r \geqslant -125 \\ x_2 = r - s & r - s \geqslant 0 & r \geqslant s \\ x_1 = 150 - s & 150 - s \geqslant 0 & s \leqslant 150 \end{cases}$$

2 Onderzoek tussen welke waarden x_6 en x_7 kunnen variëren.

Uit 1: $-225 \leqslant s \leqslant 150$

$-125 \leqslant r$

$r \geqslant s$

Tussen A en B is het verschil van het aantal voertuigen in oostelijke richting en het aantal in westelijke richting maximaal 150; het verschil van het aantal voertuigen in westelijke richting en het aantal in oostelijke richting is maximaal 225.

Tussen B en C is het verschil van het aantal voertuigen in westelijke richting en het aantal in oostelijke richting maximaal 125. Het verschil van het aantal voertuigen in oostelijke richting en het aantal in westelijke richting is in theorie onbeperkt.

Het verschil van het aantal voertuigen in oostelijke richting en het aantal in westelijke richting tussen B en C moet minstens even groot zijn als tussen A en B.

Opdracht 60 bladzijde 103

Jan en Piet moeten elk een even grote bak vol water leegscheppen. Jan heeft al 36 emmers geschept als Piet begint en bovendien schept Jan 8 emmers in dezelfde tijd als Piet 7 emmers schept. Maar 3 emmers van Piet zijn evenveel als 4 emmers van Jan.

Als je weet dat ze samen op hetzelfde tijdstip hun taak beëindigen, hoeveel emmers heeft elk dan geschept?

- We stellen x = het aantal emmers dat Jan heeft geschept
  y = het aantal emmers dat Piet heeft geschept
- Stel V is het volume van de volledige bak water. Het volume van een emmer van Jan is dan $\frac{V}{x}$ en het volume van een emmer van Piet is $\frac{V}{y}$.
  Uit het gegeven volgt dat $3 \cdot \frac{V}{y} = 4 \cdot \frac{V}{x} \Leftrightarrow 3x = 4y \quad (1)$

- Jan schept 8 emmers in dezelfde tijd als Piet 7 emmers schept, en Jan heeft al 36 emmers geschept voor Piet begint. Er geldt bijgevolg dat $x - 36 = 8k$ en $y = 7k$ met k een natuurlijk getal.

  Het stelsel wordt $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x - 8k = 36 \\ y - 7k = 0 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x = 252 \\ y = 189. \\ k = 27 \end{cases}$

Jan heeft 252 emmers geschept en Piet 189.

Opdracht 61 bladzijde 103

Drie mannen bezitten elk een hoeveelheid ecu's. De eerste geeft aan de beide anderen evenveel ecu's als ze al hadden. Daarna doet de tweede hetzelfde en ten slotte de derde ook. Op het einde hebben ze elk 8 ecu's.

Hoeveel hadden ze er bij het begin?
(Bachet, 17de eeuw)

We stellen x = het aantal écu's dat de eerste bezit bij het begin
y = het aantal écu's dat de tweede bezit bij het begin
z = het aantal écu's dat de derde bezit bij het begin

We bepalen het bezit van elk stap per stap:

	eerste	tweede	derde
start	x	y	z
na stap 1	$x - y - z$	$2y$	$2z$
na stap 2	$2(x - y - z)$	$2y - (x - y - z) - 2z$ $= -x + 3y - z$	$4z$
na stap 3	$4(x - y - z)$	$2(-x + 3y - z)$	$4z - 2(x - y - z) - (-x + 3y - z)$ $= -x - y + 7z$

Op het einde hebben ze elk 8 écu's. Dit geeft het stelsel $\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 8 \\ -2x + 6y - 2z = 8 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$ met als oplossing

$\begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \\ z = 4 \end{cases}$.

De eerste heeft aanvankelijk 13 écu's, de tweede 7 en de derde 4.

Opdracht 62 bladzijde 104

1 Voor welke waarde(n) van m is het stelsel $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+3y+3z=-4 \\ 5x+9y-6z=m \end{cases}$ oplosbaar?

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 5 & 9 & -6 & m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-2R_1}{R_3-5R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & -6 \\ 0 & -1 & 9 & m-5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1+2R_2}{R_3-R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 15 & -11 \\ 0 & -1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is oplosbaar als $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

2 Bepaal de oplossing(en) van het stelsel voor de gevonden waarde(n) van m.

Voor $m=-1$ is het stelsel gelijkwaardig met $\begin{cases} x+15z=-11 \\ -y+9z=-6 \end{cases}$.

De oplossingen zijn $(x, y, z) = (-11-15r, 6+9r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Alternatieve oplossingsmethode

We bepalen eerst de oplossingen van het stelsel dat bestaat uit de eerste twee vergelijkingen:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+3y+3z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+15z=-11 \\ y-9z=6 \end{cases}$$

De oplossingen zijn $(x, y, z) = (-11-15r, 6+9r, r)$.

Invullen van deze oplossingen in de derde vergelijking $5x+9y-6z=m$ geeft:

$$-55-75r+54+81r-6r=m \Leftrightarrow m=-1$$

Voor $m=-1$ zijn de oplossingen van het stelsel dezelfde als de oplossingen van de eerste twee vergelijkingen, zodat het stelsel dan oplosbaar is.

Opdracht 63 bladzijde 104

Bespreek de volgende stelsels met parameter m.

1 $\begin{cases} x+my=-3 \\ mx+y=3 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & -3 \\ m & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{R_2-mR_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & -3 \\ 0 & 1-m^2 & 3+3m \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: m = –1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y) = (-3+r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 3: m ≠ 1 en m ≠ −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & -3 \\ 0 & 1-m^2 & 3+3m \end{array}\right] \overset{\frac{R_2}{1+m}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & -3 \\ 0 & 1-m & 3 \end{array}\right] \overset{(1-m)R_1 - mR_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1-m & 0 & -3 \\ 0 & 1-m & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\frac{R_1}{1-m} \\ \frac{R_2}{1-m}}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{1-m} \\ 0 & 1 & \frac{3}{1-m} \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing: $(x, y) = \left(\frac{-3}{1-m}, \frac{3}{1-m}\right)$.

2 $\begin{cases} mx + y = 4 \\ x + my = 5 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} m & 1 & 4 \\ 1 & m & 5 \end{array}\right] \overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & 5 \\ m & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{R_2 - mR_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & 5 \\ 0 & 1-m^2 & 4-5m \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: m = −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 3: m ≠ 1 en m ≠ −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & 5 \\ 0 & 1-m^2 & 4-5m \end{array}\right] \overset{(1-m^2)R_1 - mR_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1-m^2 & 0 & 5-4m \\ 0 & 1-m^2 & 4-5m \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\frac{R_1}{1-m^2} \\ \frac{R_2}{1-m^2}}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5-4m}{1-m^2} \\ 0 & 1 & \frac{4-5m}{1-m^2} \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing: $(x, y) = \left(\frac{5-4m}{1-m^2}, \frac{4-5m}{1-m^2}\right)$.

3 $\begin{cases} mx+2y=4 \\ mx+(m+1)y=m+3 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} m & 2 & 4 \\ m & m+1 & m+3 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 0

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{2R_2 - R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: m ≠ 0

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} m & 2 & 4 \\ m & m+1 & m+3 \end{array}\right] \overset{R_2 - R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} m & 2 & 4 \\ 0 & m-1 & m-1 \end{array}\right]$$

Geval 2a: m = 1

$$A_b \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen (x, y) = (4 – 2r, r) met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2b: m ≠ 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc|c} m & 2 & 4 \\ 0 & m-1 & m-1 \end{array}\right] \overset{\frac{R_2}{m-1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} m & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 - 2R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{R_1}{m}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{m} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing: $(x, y) = \left(\frac{2}{m}, 1\right)$.

4 $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 2x-2y-z=3 \\ x+y+z=m \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\substack{R_2 + 2R_1 \\ R_3 + R_1}}{}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & m+2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\substack{-4R_1 + 3R_2 \\ R_3 - R_2}}{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\substack{\frac{R_1}{4} \\ \frac{R_2}{4}}}{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = \left(\frac{13-r}{4}, \frac{7-3r}{4}, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2: m ≠ 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{m-5}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

5 $\begin{cases} 2x + y - z = m \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 5x - 3y + 2z = -3m \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -3m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2 - R_1}{2R_3 - 5R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m \\ 0 & -2 & 5 & 1-m \\ 0 & -11 & 9 & -11m \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{2R_1 + R_2}{2R_3 - 11R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & m+1 \\ 0 & -2 & 5 & 1-m \\ 0 & 0 & -37 & -11m-11 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{37R_1 + 3R_3}{37R_2 + 5R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 148 & 0 & 0 & 4m+4 \\ 0 & -74 & 0 & -92m-18 \\ 0 & 0 & -37 & -11m-11 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{\frac{R_1}{148}}{\overset{\frac{R_2}{-74}}{\frac{R_3}{-37}}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{m+1}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{46m+9}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{11m+11}{37} \end{array}\right]$$

Het stelsel is altijd bepaald met oplossing $(x, y, z) = \left(\dfrac{m+1}{37}, \dfrac{46m+9}{37}, \dfrac{11m+11}{37}\right)$.

6 $\begin{cases} x+2y-3z=-9 \\ x-y+mz=17 \\ x-2y-2z=3m \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -1 & m & 17 \\ 1 & -2 & -2 & 3m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-R_1}{\overset{R_3-R_1}{}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & m+3 & 26 \\ 0 & -4 & 1 & 3m+9 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{3R_1+2R_2}{\overset{3R_3-4R_2}{}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2m-3 & 25 \\ 0 & -3 & m+3 & 26 \\ 0 & 0 & -4m-9 & 9m-77 \end{array}\right]$$

Geval 1: $m = -\frac{9}{4}$

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -\frac{15}{2} & 25 \\ 0 & -3 & \frac{3}{4} & 26 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{389}{4} \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: $m \neq -\frac{9}{4}$

$$A_b \overset{-R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2m-3 & 25 \\ 0 & -3 & m+3 & 26 \\ 0 & 0 & 4m+9 & -9m+77 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{(4m+9)R_1-(2m-3)R_3}{\overset{(4m+9)R_2-(m+3)R_3}{}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 12m+27 & 0 & 0 & 18m^2-81m+456 \\ 0 & -12m-27 & 0 & 9m^2+54m+3 \\ 0 & 0 & 4m+9 & -9m+77 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{\frac{R_1}{12m+27}}{\overset{\frac{R_2}{-12m-27}}{\overset{\frac{R_3}{4m+9}}{}}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{6m^2-27m+152}{4m+9} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3m^2+18m+1}{4m+9} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-9m+77}{4m+9} \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing

$$(x, y, z) = \left(\frac{6m^2-27m+152}{4m+9}, -\frac{3m^2+18m+1}{4m+9}, \frac{-9m+77}{4m+9}\right).$$

Opdracht 64 bladzijde 104

Bepaal de oplossingsvoorwaarde voor de stelsels met parameters p, q en r.

1 $\begin{cases} 3x - 4p = 0 \\ 5x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 & 4p \\ 5 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{3R_2 - 5R_1}{}} \left[\begin{array}{c|c} 3 & 4p \\ 0 & -6 - 20p \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\frac{R_2}{-2}}{}} \left[\begin{array}{c|c} 3 & 4p \\ 0 & 10p + 3 \end{array}\right]$$

De oplossingsvoorwaarde voor het stelsel is: $10p + 3 = 0$.

2 $\begin{cases} 3x - 4y = p \\ 2x - 4y = q \\ x - y = r + 1 \\ x - 3y = p + q \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & p \\ 2 & -4 & q \\ 1 & -1 & r+1 \\ 1 & -3 & p+q \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_{13}}{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & r+1 \\ 2 & -4 & q \\ 3 & -4 & p \\ 1 & -3 & p+q \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1}}{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & r+1 \\ 0 & -2 & q - 2r - 2 \\ 0 & -1 & p - 3r - 3 \\ 0 & -2 & p + q - r - 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{\substack{-R_2 \\ -R_3 \\ -R_4 \\ R_{23}}}{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & r+1 \\ 0 & 1 & 3r - p + 3 \\ 0 & 2 & 2r - q + 2 \\ 0 & 2 & r + 1 - p - q \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\substack{R_3 - 2R_2 \\ R_4 - 2R_2}}{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & r+1 \\ 0 & 1 & 3r - p + 3 \\ 0 & 0 & -4r + 2p - q - 4 \\ 0 & 0 & -5r + p - q - 5 \end{array}\right]$$

De oplossingsvoorwaarden zijn:

$-4r + 2p - q - 4 = 0 \quad (1) \quad$ en $\quad -5r + p - q - 5 = 0 \quad (2)$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$2p - q = 4(r + 1) \quad (1') \qquad p - q = 5(r + 1) \quad (2')$

Uit (1′) en (2′) volgt $\dfrac{2p - q}{4} = \dfrac{p - q}{5} \Leftrightarrow 10p - 5q = 4p - 4q$

$\Leftrightarrow q - 6p = 0 \quad (3)$

$\Rightarrow$ De oplossingsvoorwaarden zijn $q - 2p + 4r + 4 = 0 \quad (1)$ en $q - 6p = 0 \quad (3)$.

Opdracht 65 bladzijde 104

Elimineer r en s uit de volgende stelsels.

1 $\begin{cases} x=2+s \\ y=1+r+s \\ z=2r+2s \end{cases}$ **2** $\begin{cases} x=r-3s \\ y=2r+2s \\ z=3r-3s \end{cases}$

1 $\begin{cases} x = 2 + r & \Rightarrow\ s = x - 2 & (1) \\ y = 1 + r + s & \Rightarrow\ r = y - 1 - x + 2 & (2) \\ z = 2r + 2s & & (3) \end{cases}$

(1) en (2) in (3): $z = 2y - 2 - 2x + 4 + 2x - 4$

$\Rightarrow\ z = 2y - 2$

Na eliminatie van de parameters r en s vinden we: $z - 2y + 2 = 0$.

2 $\begin{cases} x = r - 3s \\ y = 2r + 2s \\ z = 3r - 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - 3s = x \\ 2r + 2s = y \\ 3r - 3s = z \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & x \\ 0 & 8 & y-2x \\ 0 & 6 & z-3x \end{array}\right] \overset{-4R_3+3R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} & \cdots & x \\ 0 & 8 & y-2x \\ 0 & 0 & 6x+3y-4z \end{array}\right]$$

Na eliminatie van de parameters r en s vinden we: $6x + 3y - 4z = 0$.

Opdracht 66 bladzijde 104

Onder welke voorwaarde is (a, b, c) een oplossing van het stelsel met als oplossingen $(x, y, z) = (4 + r,\ 2 + s,\ 3r - 4s)$ met $r, s \in \mathbb{R}$?

$\begin{cases} x = 4 + r \\ y = 2 + s \\ z = 3r - 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = x - 4 \\ s = y - 2 \\ 3r - 4s = z \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-4 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 3 & -4 & z \end{array}\right] \overset{R_3-3R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-4 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 0 & -4 & z-3x+12 \end{array}\right] \overset{R_3+4R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-4 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 0 & -3x+4y+z+4 \end{array}\right]$$

(a, b, c) is een oplossing van het stelsel als en slechts als $-3a + 4b + c + 4 = 0$.

Alternatief:

$\begin{cases} r = x - 4 \\ s = y - 2 \end{cases}$

$3r - 4s = z$

$\Updownarrow$

$3(x - 4) - 4(y - 2) = z$

$\Updownarrow$

$3x - 12 - 4y + 8 = z$

$\Updownarrow$

$3x - 4y - z - 4 = 0$

De voorwaarde voor (a, b, c) is dan $3a - 4b - c - 4 = 0$.

Opdracht 67 bladzijde 105

Beschouw het volgend stelsel in de onbekenden x, y en z:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+4y+5z=2a \\ 4x+6y+8z=3a-2 \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$$

Voor welke waarde van de parameter a heeft dit stelsel precies één oplossing?

- We lossen eerst het stelsel $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ op dat de parameter a niet bevat.

  Dit stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x+\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \\ y-\frac{1}{2}z=\frac{3}{2} \end{cases}$ en heeft als oplossingen $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-3r \\ y=\frac{3}{2}+r \\ z=2r \end{cases}$.

- Invullen van deze oplossing in de tweede vergelijking $3x+4y+5z=2a$ geeft:

  $$\frac{3}{2}-9r+6+4r+10r=2a \iff 5r=2a-\frac{15}{2} \iff r=\frac{2a}{5}-\frac{3}{2}$$

  Het stelsel $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+4y+5z=2a \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$ heeft bijgevolg voor elke waarde van a één oplossing,

  namelijk $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-3\left(\frac{2a}{5}-\frac{3}{2}\right)=5-\frac{6a}{5} \\ y=\frac{3}{2}+\frac{2a}{5}-\frac{3}{2}=\frac{2a}{5} \\ z=2\left(\frac{2a}{5}-\frac{3}{2}\right)=\frac{4a}{5}-3 \end{cases}$

- Dit is een oplossing van de vergelijking $4x+6y+8z=3a-2$ als en slechts als

  $$20-\frac{24}{5}a+\frac{12}{5}a+\frac{32}{5}a-24=3a-2$$

  $$\iff 4a-4=3a-2$$

  $$\iff a=2$$

Opdracht 68 bladzijde 105

Bespreek de volgende stelsels met parameter *a*.

1 $\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x + ay + z = 3a \\ x + y + az = 2 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 & 3a \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right] \overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3a \\ a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 - aR_1 \\ R_3 - R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & -2a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 2-3a \end{array}\right]$$

$$\overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3a \\ 0 & 1-a & a-1 & 2-3a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & -2a^2 \end{array}\right]$$

Geval 1: a = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: a ≠ 1

$$A_b \overset{\substack{(1-a)R_1 - aR_2 \\ R_3 - (1+a)R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 2-3a \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 & a^2 + a - 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{R_3}{a-1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 2-3a \\ 0 & 0 & -(a+2)\cancel{(a-1)} & (a+2)\cancel{(a-1)} \end{array}\right]$$

Geval 2a: a = −2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald. De oplossingen zijn:

$(x, y, z) = \left(\dfrac{3r-2}{3}, \dfrac{3r+8}{3}, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2a: a ≠ −2

$$A_b \overset{\frac{R_3}{-a-2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 1-a^2 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 2-3a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 - (1-a^2)R_3 \\ R_2 - (a-1)R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 0 & -a^2 + a + 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 1-2a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft 1 oplossing: $(x, y, z) = \left(\dfrac{a^2 - a - 1}{a-1}, \dfrac{2a-1}{a-1}, -1\right)$.

2 $\begin{cases} ax+(a+1)y+z=0 \\ ax+y+(a+1)z=0 \\ 2ax+y+z=a+1 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a+1 & 0 \\ 2a & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right]$$

Geval 1: a = 0

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-R_1}{R_3-R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: a ≠ 0

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a+1 & 0 \\ 2a & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-R_1}{R_3-2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & -2a-1 & -1 & a+1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\frac{R_2}{-a}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2a-1 & -1 & a+1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1-(a+1)R_2}{R_3+(2a+1)R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-2 & a+1 \end{array}\right]$$

Geval 2a: a = −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (r, r, r)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 2b: a ≠ −1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-2 & a+1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\frac{R_3}{-a-1}} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{2R_1-(a+2)R_3}{2R_2+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(\frac{a+2}{2a}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3 $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+y+2z=a \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right] \overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 - aR_1 \\ R_3 - R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]$$

Geval 1: a = 2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 + R_2 \\ R_3 + R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: a ≠ 2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right] \overset{(2-a)R_1 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2-a & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{-R_1 + R_3 \\ R_2 - (1-a)R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} a-2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2-a & 0 & a^2-a+1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(\dfrac{a+1}{a-2}, \dfrac{a^2-a+1}{2-a}, a\right)$.

4 $\begin{cases} x-5y+11z=-6 \\ 2x-3y+8z=-2 \\ 3x-y+(a^2-11)z=a-2 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 11 & -6 \\ 2 & -3 & 8 & -2 \\ 3 & -1 & a^2-11 & a-2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-2R_1}{\scriptstyle R_3-3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 11 & -6 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 14 & a^2-44 & a+16 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{7R_1+5R_2}{\scriptstyle R_3-2R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$$

Geval 1: a = −4

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: a = 4

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\frac{R_1}{7}}{\scriptstyle \frac{R_2}{7}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - r, \frac{10}{7} + 2r, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 3: a ≠ −4 en a ≠ 4

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{a-4}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a+4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{(a+4)R_1-7R_3}{\scriptstyle (a+4)R_2+14R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 7a+28 & 0 & 0 & 8a+25 \\ 0 & 7a+28 & 0 & 10a+54 \\ 0 & 0 & a+4 & 1 \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(\frac{8a+25}{7a+28}, \frac{10a+54}{7a+28}, \frac{1}{a+4}\right)$.

Opdracht 69 bladzijde 105

Bespreek de volgende niet-vierkante stelsels met parameter m.

1 $\begin{cases} mx + y = 0 \\ 2x + my = m - 1 \\ mx + 2y = 1 - m \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{cc:c} m & 1 & 0 \\ 2 & m & m-1 \\ m & 2 & 1-m \end{array}\right] \overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & m & m-1 \\ m & 1 & 0 \\ m & 2 & 1-m \end{array}\right] \overset{\substack{2R_2 - mR_1 \\ 2R_3 - mR_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & m & m-1 \\ 0 & 2-m^2 & -m^2+m \\ 0 & 4-m^2 & -m^2-m+2 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 - R_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & m & m-1 \\ 0 & -2 & 2m-2 \\ 0 & 4-m^2 & -m^2-m+2 \end{array}\right] \overset{\frac{R_2}{-2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & m & m-1 \\ 0 & 1 & 1-m \\ 0 & 4-m^2 & -m^2-m+2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_1 - mR_2 \\ R_3 - (4-m^2)R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & m^2-1 \\ 0 & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & -(m-1)^2(m+2) \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing $(x, y) = (0,0)$.

Geval 2: m = –2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met oplossing $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

Geval 3: m ≠ 1 en m ≠ –2

Het stelsel is strijdig.

2 $\begin{cases} mx+y+z=1\\ x+my+z=1\\ x+y+mz=1\\ x+y+z=m \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m & 1\\ 1 & 1 & 1 & m \end{array}\right] \overset{R_{14}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m\\ 1 & m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m & 1\\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2-R_1\\ R_3-R_1\\ R_4-mR_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m\\ 0 & m-1 & 0 & 1-m\\ 0 & 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is tweevoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = (1 - r - s, r, s)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.

Geval 2: m ≠ 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m\\ 0 & m-1 & 0 & 1-m\\ 0 & 0 & m-1 & 1-m\\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{R_2}{m-1}\\ \frac{R_3}{m-1}\\ \frac{R_4}{1-m}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1-R_2\\ R_4-R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m+1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & m+2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_1-R_3\\ R_4-R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m+2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array}\right]$$

Geval 2a: m = –3

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is bepaald met als oplossing $(x, y, z) = (-1,-1,-1)$.

Geval 2b: m ≠ –3

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m+2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array}\right] \overset{\frac{R_4}{m+3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m+2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Opdracht 70 bladzijde 105

Voor welke waarde van de parameter p heeft het stelsel $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ px+py+3z=5 \\ 3x+(p-3)y+z=2 \end{cases}$

1 geen oplossing?

2 juist 1 oplossing?

3 oneindig veel oplossingen?

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ p & p & 3 & 5 \\ 3 & p-3 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-pR_1}{R_3-3R_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2p & 3+p & 5+p \\ 0 & p & 4 & 5 \end{array}\right]$$

Geval 1: p = 0

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{3R_1+R_2}{3R_3-4R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft geen oplossingen.

Geval 2: p ≠ 0

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2p & 3+p & 5+p \\ 0 & p & 4 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{2pR_1+R_2}{2R_3-R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 2p & 0 & 3-p & 5-p \\ 0 & 2p & 3+p & 5+p \\ 0 & 0 & 5-p & 5-p \end{array}\right]$$

Geval 2a: p = 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 10 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen.

Geval 2b: p ≠ 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2p & 0 & 3-p & 5-p \\ 0 & 2p & 3+p & 5+p \\ 0 & 0 & 5-p & 5-p \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{5-p}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 2p & 0 & 3-p & 5-p \\ 0 & 2p & 3+p & 5+p \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft juist één oplossing.

Besluit:

1 Het stelsel heeft geen oplossing als p = 0.

2 Het stelsel heeft juist één oplossing als p ≠ 0 en p ≠ 5.

3 Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als p = 5.

Opdracht 71 bladzijde 106

Indien het stelsel $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ oplossingen moet hebben verschillend van de nuloplossing, welke waarden van λ zijn dan mogelijk?

A $\lambda = 0$ **B** $\lambda = 1$ en $\lambda = 4$ **C** $\lambda = -1$ en $\lambda = 4$

D $\lambda = -1$ en $\lambda = -4$ **E** geen enkele waarde

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur architect, 2013)

Het stelsel $\begin{cases} 2x + y + z = \lambda x \\ x + 2y + z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases}$ is gelijkwaardig met $\begin{cases} (2-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$. Het is een homogeen stelsel.

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc:c} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_{13}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_2 - R_1}{R_3 - (2-\lambda)R_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda^2 + 4\lambda - 3 & 0 \end{array}\right]$$

- Als $\lambda = 1$ is de uitgebreide matrix rijequivalent met $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

  Het stelsel heeft dan oneindig veel oplossingen verschillend van de nuloplossing.
- Als $\lambda \neq 1$ kunnen we de uitgebreide matrix verder herleiden tot

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda + 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1 - R_2}{R_3 - R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + 4 & 0 \end{array}\right].$$

  Hieruit volgt dat ook voor $\lambda = 4$ het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 72 bladzijde 106

Een homogeen stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen heeft steeds oneindig veel oplossingen.

Bewijs.

Stel dat het stesel m vergelijkingen heeft met n onbekenden met m < n.

Noem B de rijcanonieke vorm van de coëfficiëntenmatrix A en r het aantal niet-nulrijen van B.

Dan is $r \leqslant m < n$ zodat $n - r > 0$.

Er is dus minstens één nevenonbekende.

Stelt men één van de nevenonbekenden gelijk aan 1, dan verkrijgen we een oplossing verschillend van de nuloplossing.

Opdracht 73 bladzijde 106

Voor welke waarde(n) van de parameters a en b heeft het stelsel

$$\begin{cases} 2x + y + z = -6a \\ bx + 3y + 2z = 2a \\ 2x + y + (b+1)z = 4 \end{cases}$$

1 geen oplossing?

2 juist 1 oplossing?

3 oneindig veel oplossingen?

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ b & 3 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{2R_2 - bR_1}{R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 6-b & 4-b & 4a+6ab \\ 0 & 0 & b & 4+6a \end{array}\right]$$

Geval 1: b = 6

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & 1 & -20a \\ 0 & 0 & 6 & 4+6a \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1 - R_2}{R_3 - 6R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 14a \\ 0 & 0 & 1 & -20a \\ 0 & 0 & 0 & 4+126a \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig als $4 + 126a \neq 0 \iff a \neq -\dfrac{2}{63}$ en onbepaald als $a = -\dfrac{2}{63}$.

Geval 2: b ≠ 6

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 6-b & 4-b & 4a+6ab \\ 0 & 0 & b & 4+6a \end{array}\right] \underset{\sim}{(6-b)R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 12-2b & 0 & 2 & -40a \\ 0 & 6-b & 4-b & 4a+6ab \\ 0 & 0 & b & 4+6a \end{array}\right]$$

Indien $b = 0$, dan zal het aantal oplossingen van a afhangen:

- als $a = -\frac{2}{3}$, dan ontstaat er een nulrij en heeft het stelsel oneindig veel oplossingen;
- als $a \neq -\frac{2}{3}$, dan is het stelsel strijdig.

Indien $b \neq 0$, dan kunnen we verder rijherleiden en heeft het stelsel één oplossing.

Besluit:

1. Het stelsel heeft geen oplossing als ($b = 0$ en $a \neq -\frac{2}{3}$) of ($b = 6$ en $a \neq -\frac{2}{63}$).
2. Het stelsel heeft juist één oplossing als $b \neq 0$ en $b \neq 6$.
3. Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als ($b = 0$ en $a = -\frac{2}{3}$) of ($b = 6$ en $a = -\frac{2}{63}$).

Opdracht 74 bladzijde 106

Bespreek de rang van $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$ in functie van λ.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Geval 1: $\lambda = 0$

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang(A) = 3

Geval 2: $\lambda \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_1 - 2R_2}{\overset{R_3 - R_2}{R_4 - \lambda R_2}}} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 2-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Geval 2a: $\lambda = 1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang(A) = 2

Geval 2b: $\lambda \neq 1$

$$A \overset{\substack{\frac{R_3}{1-\lambda} \\ \frac{R_4}{1-\lambda}}}{\sim} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 2-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-R_3 \\ R_4-R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 2-2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \end{bmatrix}$$

Geval 2bI: $\lambda = -2$

$$A \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang(A) = 3

Geval 2bII: $\lambda \neq -2$

$$A \overset{\frac{R_4}{2+\lambda}}{\sim} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 2-2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rang(A) = 4

Besluit:

$\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ en $\lambda \neq -2$: rang(A) = 4

$\lambda = 0$: rang(A) = 3

$\lambda = 1$: rang(A) = 2

$\lambda = -2$: rang(A) = 3

Opdracht 75 bladzijde 106

Bespreek het stelsel $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a^3 \end{cases}$ met parameter a.

$$A_b = \left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{array}\right] \overset{R_{12}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_2-aR_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & a(a-1) \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & a(a^2-1) \end{array}\right] \overset{R_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & a(a-1) \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & a(a^2-1) \end{array}\right]$$

Geval 1: a = 1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen:

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - r - s - t, r, s, t)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Geval 2: a ≠ 1

$$A_b \underset{\substack{\frac{R_2}{1-a} \\ \frac{R_3}{1-a} \\ \frac{R_4}{1-a}}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -a \\ 0 & 1+a & 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -a(a+1) \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_1 - aR_2 \\ R_3 - (1+a)R_2 \\ R_4 - R_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1+a & 1 & a(a+1) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 2+a & 1 & a^2 + 2a + 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a^2 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_{34}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1+a & 1 & a(a+1) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 & a^2 + 2a + 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_1 - (1+a)R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_4 - (a+2)R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+a & a(a+1)^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -a(1+a) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \end{array}\right]$$

Geval 2a: a = –3

$$A_b \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2b: $a \neq -3$

$$A_b \underset{\substack{(a+3)R_1-(a+2)R_4 \\ (a+3)R_2+R_4 \\ (a+3)R_3+R_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} a+3 & 0 & 0 & 0 & -a^2-2a-2 \\ 0 & a+3 & 0 & 0 & -a^2-a+1 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & a^3+3a^2+2a+1 \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft 1 oplossing:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{a^2+2a+2}{a+3}, -\frac{a^2+a-1}{a+3}, \frac{2a+1}{a+3}, -\frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}\right)$$

Samenvatting

	oplossingen
$a \neq 1$ en $a \neq -3$	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{a^2+2a+2}{a+3}, -\frac{a^2+a-1}{a+3}, \frac{2a+1}{a+3}, -\frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}\right)$
$a = -3$	geen
$a = 1$	$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1-r-s-t, r, s, t)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Opdracht 76 bladzijde 107

Los de volgende stelsels op:

1 $\begin{cases} x-2y-2z=6 \\ 3x+4y=10 \\ 3x+2y-2z=0 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we onmiddellijk de oplossing: het stelsel is bepaald met oplossing $(x, y, z) = \left(16, -\frac{19}{2}, \frac{29}{2}\right)$.

2 $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+9y+9z=2 \\ 5x+6y-9z=1 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we het gelijkwaardig stelsel $\begin{cases} x-\frac{45}{13}z=-\frac{1}{13} \\ y+\frac{18}{13}z=\frac{3}{13} \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen

$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{13}+\frac{45}{13}r, \frac{3}{13}-\frac{18}{13}r, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

3 $\begin{cases} 4x-2y+8z=2 \\ x-y+z=2 \\ 7x-5y+11z=4 \\ 6x-4y+10z=3 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we een vergelijking van de vorm 0 = 1. Het stelsel is strijdig en heeft geen oplossingen.

4 $\begin{cases} 3x=29+y-z \\ 3y=6-30z-x \\ 3z=51-3x+3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+z=29 \\ x+3y+30z=6 \\ 3x-3y+3z=51 \end{cases}$

Het stelsel is bepaald met oplossing (x, y, z) = (6, –10, 1).

5 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=-19 \\ x_1-x_2+4x_3+x_4=-5 \\ 6x_1-2x_2+14x_3+8x_4=1 \end{cases}$

Na rijherleiden vinden we $\begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_4=\frac{53}{16} \\ x_2+\frac{1}{2}x_4=\frac{109}{16} \\ x_3=-\frac{3}{8} \end{cases}$.

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met als oplossingen $(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left(\frac{53}{16}-\frac{3}{2}r, \frac{109}{16}-\frac{1}{2}r, -\frac{3}{8}, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

6 $\begin{cases} 3x+5y+4z=1 \\ 9x+15y+12z=3 \end{cases}$

Het stelsel is gelijkwaardig met $x+\frac{5}{3}y+\frac{4}{3}z=\frac{1}{3}$. Het stelsel is tweevoudig onbepaald met als oplossingen $(x, y, z)=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}r-\frac{4}{3}s, r, s\right)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.

Opdracht 77 bladzijde 107

Los het stelsel $\begin{cases} x_1+x_2+x_4+2x_5=-1 \\ x_1+2x_2-4x_3+x_4=3 \end{cases}$ op en schrijf de oplossingen op twee manieren door een verschillende keuze voor de hoofd- en nevenonbekenden te nemen.

Na rijherleiden vinden we $\begin{cases} x_1+4x_3+x_4+4x_5=-5 \\ x_2-4x_3-2x_5=4 \end{cases}$.

Het is stelsel is drievoudig onbepaald. We kiezen bijgevolg 3 nevenonbekenden.

Kiezen we x_3, x_4 en x_5 als nevenonbekenden, dan kunnen we de oplossingen schrijven als $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(-5-4r-s-4t, 4+4r+2t, r, s, t)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Kiezen we x_1, x_3 en x_5 als nevenonbekenden, dan kunnen we de oplossingen schrijven als $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(r, 4+4s+2t, s, -5-r-4s-4t, t)$ met $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Opdracht 78 bladzijde 107

In de bank beschikt men over drie soorten geldbuideltjes.
Buideltje A bevat 5 stukken van € 0,50, 3 stukken van € 0,20 en 2 stukken van € 0,10.
Buideltje B bevat 4 stukken van € 0,50, 2 stukken van € 0,20 en 3 stukken van € 0,10.
Buideltje C bevat 3 stukken van € 0,50, 4 stukken van € 0,20 en 5 stukken van € 0,10.
Een man stapt de bank buiten met 12 buideltjes, van elke soort minstens één.
In totaal heeft hij dan 49 stukken van € 0,50 en 37 stukken van € 0,10.

Hoeveel stukken van € 0,20 heeft hij dan in totaal?

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts, 2008)

We stellen x = het aantal van buideltje A
y = het aantal van buideltje B
z = het aantal van buideltje C

Het stelsel is: $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 5x+4y+3z=49 \\ 2x+3y+5z=37 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x=3 \\ y=7. \\ z=2 \end{cases}$

Aangezien buidel A 3 stukken van € 0,20 bevat, buidel B 2 en buidel C 4 heeft hij in totaal 3A + 2B + 4C = 9 + 14 + 8 = 31 stukken van € 0,20.

Opdracht 79 bladzijde 108

In een ziekenhuisapotheek zijn twee actieve stoffen A en B beschikbaar als mengsels. Men beschikt over een stock van 2 soorten mengsels: mengsel 1 en mengsel 2. De samenstelling van deze twee mengsels is in de tabel weergegeven.

	mengsel 1	mengsel 2
A	20 %	5 %
B	10 %	15 %

De apotheker mengt een hoeveelheid mengsel 1 met een andere hoeveelheid mengsel 2.
Hij verkrijgt dan een nieuw mengsel met 80 mg actieve stof A en 50 mg actieve stof B.

Welke hoeveelheid van dit nieuwe mengsel vindt hij dan?

A 460 mg **B** 560 mg **C** 640 mg **D** 880 mg

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts, 2012)

We stellen x = de hoeveelheid van mengsel A in mg
y = de hoeveelheid van mengsel B in mg

Het stelsel is: $\begin{cases} 0{,}20x+0{,}05y=80 \\ 0{,}10x+0{,}15y=50 \end{cases}$ met als oplossing $\begin{cases} x=380 \\ y=80 \end{cases}$.

Hij vindt 460 mg van het nieuwe mengsel.

Antwoord A is het juiste.

Opdracht 80 bladzijde 108

Door halveliterpakken van 3 soorten melk A, B en C te mengen willen we 10-literpakken maken met een vetgehalte van 5 %.
De soorten A, B en C hebben een vetgehalte van respectievelijk 3 %, 4 % en 6 %.

Soort A kost € 0,30 per halve liter, soort B € 0,40 en soort C € 0,50.

1 Hoe moeten we A, B en C mengen om de goedkoopste 10-literpakken te krijgen?

2 Welke mengeling is het duurst?

We stellen x = het aantal liter van soort A per 10 liter pak
y = het aantal liter van soort B per 10 liter pak
z = het aantal liter van soort C per 10 liter pak

Het stelsel is: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 0{,}03 \cdot x + 0{,}04 \cdot y + 0{,}06 \cdot z = 0{,}05 \cdot 10 \end{cases}$.

We kunnen de oplossingen van dit stelsel schrijven als $\begin{cases} x = -10 + 2r \\ y = 20 - 3r \\ z = r \end{cases}$.

Het aantal oplossingen wordt beperkt door de context: z moet daarom zeker positief zijn. Bovendien werken we met halve liters, dus r moet een geheel veelvoud van 0,5 zijn.

In de tabel zijn alle oplossingen weergegeven.

	x	y	z
~~r = 0~~	–10	20	0
r = 5	0	5	5
r = 5,5	1	3,5	5,5
r = 6	2	2	6
r = 6,5	3	0,5	6,5
~~r = 7~~	4	–1	7

– We kunnen 10 halve liter pakken van soort B mengen met 10 halve liter pakken van soort C. Dit kost € (10·0,40 + 10·0,50) = € 9 per 10 liter pak.

– 2 pakken van A, 7 pakken van B en 11 pakken van C mengen kost € (2·0,30 + 7·0,40 + 11·0,50) = € 8,9 per 10 liter pak.

– 4 pakken van A, 4 pakken van B en 12 pakken van C mengen kost € (4·0,30 + 4·0,40 + 12·0,50) = € 8,8 per 10 liter pak.

– 6 pakken van A, 1 pak van B en 13 pakken van C mengen kost € (6·0,30 + 1·0,40 + 13·0,50) = € 8,7 per 10 liter pak.

1 Het goedkoopst is om 6 halve literpakken van A, 1 van B en 13 van C te mengen.

2 Het duurst is om 10 halve literpakken van B en 10 van C te mengen.

Opdracht 81 bladzijde 108

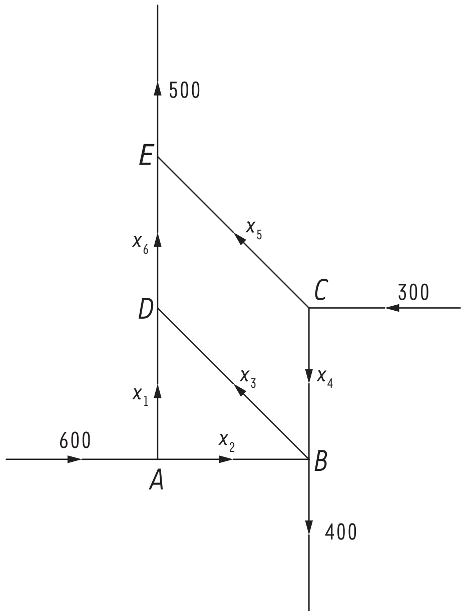
Als $x + 3y + 5z = 200$ en $x + 4y + 7z = 225$, bepaal dan $x + y + z$.

We lossen eerst het stelsel $\begin{cases} x + 3y + 5z = 200 \\ x + 4y + 7z = 225 \end{cases}$ op.

De oplossingen zijn $\begin{cases} x = 125 + r \\ y = 25 - 2r \\ z = r \end{cases}$.

Bijgevolg is $x + y + z = 125 + r + 25 - 2r + r = 150$.

Opdracht 82 bladzijde 108



In de figuur is een stratenplan gegeven waar eenrichtingsverkeer in alle straten geldt.
De getallen geven informatie over het aantal voertuigen per uur en de pijlen geven de rijrichting aan.

1 Onderzoek de verkeersstroom in het netwerk, met andere woorden bereken x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en x_6.

Gelijkstellen van in- en uitstroom geeft de volgende vergelijkingen:

in A: $600 = x_1 + x_2$

in B: $x_2 + x_4 = x_3 + 400$

in C: $300 = x_4 + x_5$

in D: $x_1 + x_3 = x_6$

in E: $x_5 + x_6 = 500$

totaal: $300 + 600 = 400 + 500$

Dit geeft het stelsel $\begin{cases} x_1 + x_2 = 600 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 400 \\ x_4 + x_5 = 300 \\ x_1 + x_3 - x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 500 \end{cases}$.

Dit stelsel is tweevoudig onbepaald met als oplossingen $\begin{cases} x_1 = s - r \\ x_2 = r - s + 600 \\ x_3 = r \\ x_4 = s - 200 \\ x_5 = 500 - s \\ x_6 = s \end{cases}$.

De waarden van r en s zijn beperkt tot die waarbij het aantal voertuigen een natuurlijk getal is.

2 Welke waarden kan x_6 aannemen?

Allereerst moet $x_6 = s \in \mathbb{N}$. Bovendien volgt uit de uitdrukkingen voor x_4 en x_5 dat $s - 200 \geqslant 0 \Leftrightarrow s \geqslant 200$ en $500 - s \geqslant 0 \Leftrightarrow s \leqslant 500$.

Bijgevolg zal $x_6 \in \mathbb{N}$ en $200 \leqslant x_6 \leqslant 500$.

Opdracht 83 bladzijde 109

Bespreek de stelsels met parameter *m*.

1 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+my+z=0 \\ x-3y+mz=m+2 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ 1 & -3 & m & m+2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-3R_1}{R_3-R_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-3 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & m-1 & m+1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_{23}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & m-1 & m+1 \\ 0 & m-3 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{4R_1+R_2}{4R_3+(m-3)R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 0 & m+3 & m+5 \\ 0 & -4 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & m^2-4m-5 & m^2-2m-15 \end{array}\right]$$

Geval 1: m = –1

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 2: m = 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\frac{R_1}{4}}{\frac{R_2}{-4}}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is enkelvoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - 2r, -\frac{3}{2} + r, r\right)$ met $r \in \mathbb{R}$.

Geval 3: m ≠ −1 en m ≠ 5

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & m+3 & m+5 \\ 0 & -4 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & (m-5)(m+1) & (m-5)(m+3) \end{array}\right] \underset{\sim}{\frac{R_3}{m-5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & m+3 & m+5 \\ 0 & -4 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+1 & m+3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{matrix} \frac{R_1}{2} \\ \frac{R_2}{-2} \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} (m+1)R_1 - R_3 \\ (m+1)R_2 - R_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2m+2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2m+2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & m+1 & m+3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{matrix} \frac{R_1}{2m+2} \\ \frac{R_2}{2m+2} \\ \frac{R_3}{m+1} \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+3}{m+1} \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{m+1}, -\frac{1}{m+1}, \frac{m+3}{m+1}\right)$.

2 $\begin{cases} mx + my + 2z = 1 \\ mx + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + mz = 1 \end{cases}$

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} m & m & 2 & 1 \\ m & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & m & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & m & 1 \\ m & 2 & 2 & 1 \\ m & m & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{matrix} 2R_2 - mR_1 \\ 2R_3 - mR_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & m & 1 \\ 0 & 4-2m & 4-m^2 & 2-m \\ 0 & 0 & 4-m^2 & 2-m \end{array}\right]$$

Geval 1: m = 2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Het stelsel is tweevoudig onbepaald met oplossingen $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} - r - s, r, s\right)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.

Geval 2: m = −2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Het stelsel is strijdig.

Geval 3: m ≠ −2 en m ≠ 2

$$A_b \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & m & 1 \\ 0 & 2(2-m) & (2-m)(2+m) & 2-m \\ 0 & 0 & (2-m)(2+m) & 2-m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{\frac{R_2}{2-m}}{\frac{R_3}{2-m}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & m & 1 \\ 0 & 2 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\frac{R_1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{(m+2)R_1 + R_3}{R_2 - R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} m+2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{\frac{R_1}{m+2}}{\overset{\frac{R_2}{2}}{\frac{R_3}{m+2}}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m+2} \end{array}\right]$$

Er is één oplossing: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{m+2}, 0, \frac{1}{m+2}\right)$.

Opdracht 84 bladzijde 109

Bepaal een stelsel met als oplossingen
$(x,\ y, z, t) = (r + s - 2, r + 3s + 1, 2s - 1, r + 2s)$ met $r, s \in \mathbb{R}$.

(x, y, z, t) is een oplossing van het gevraagde stelsel als er een waarde van r en s bestaat zodanig dat

$$\begin{cases} r + s - 2 = x \\ r + 3s + 1 = y \\ 2s - 1 = z \\ r + 2s = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r + s = x + 2 \\ r + 3s = y - 1 \\ 2s = z + 1 \\ r + 2s = t \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+2 \\ 1 & 3 & y-1 \\ 0 & 2 & z+1 \\ 1 & 2 & t \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2 - R_1}{R_4 - R_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+2 \\ 0 & 2 & y-x-3 \\ 0 & 2 & z+1 \\ 0 & 1 & t-x-2 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_{24}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+2 \\ 0 & 1 & t-x-2 \\ 0 & 2 & z+1 \\ 0 & 2 & y-x-3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1 - R_2}{\overset{R_3 - 2R_2}{R_4 - 2R_2}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x-t+4 \\ 0 & 1 & t-x-2 \\ 0 & 0 & z-2t+2x+5 \\ 0 & 0 & y-2t+x+1 \end{array}\right]$$

Dit stelsel heeft een oplossing voor r en s als en slechts als $z - 2t + 2x + 5 = 0$ en $y - 2t + x + 1 = 0$.

Het gevraagde stelsel is bijgevolg $\begin{cases} 2x + z - 2t = -5 \\ x + y - 2t = -1 \end{cases}$.