Hoofdstuk 3

K

Veeltermbenaderingen van functies

Opdracht 1 bladzijde 72

1 Voor welke waarden van x convergeert de meetkundige reeks

$$1 + (x-4) + (x-4)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (x-4)^k\ ?$$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (x-4)^k$ is een meetkundige reeks.

Ze convergeert als $|x-4| < 1$.

Deze uitdrukking is gelijkwaardig met $-1 < x - 4 < 1$ of $3 < x < 5$.

2 Wat is dan de som?

De som is dan $\dfrac{1}{1-(x-4)} = \dfrac{1}{5-x}$.

Opdracht 2 bladzijde 75

Gegeven is de machtreeks $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (4x+1)^k$.

1 Wat is het convergentie-interval van deze machtreeks?

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (4x+1)^k = 1 - (4x+1) + (4x+1)^2 - (4x+1)^3 + \ldots$$

Deze reeks convergeert als $|-(4x+1)| < 1$, dit is als

$$\begin{aligned} &|4x+1| < 1 \\ \Leftrightarrow\ & -1 < 4x+1 < 1 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < 4x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2} < x < 0 \end{aligned}$$

Het convergentie-interval is $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

2 Welke functie wordt door deze machtreeks beschreven?

De som is $\dfrac{1}{1+(4x+1)} = \dfrac{1}{4x+2}$.

De functie die beschreven wordt is $f : \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{4x+2}$.

Opdracht 3 bladzijde 78

Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksen.

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\,(3x-4)^k}{3^k}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(3x-4)^k}{3^k} = 1 + \frac{3x-4}{3} + \frac{2(3x-4)^2}{9} + \frac{3(3x-4)^3}{27} + \ldots$$

Dit is geen meetkundige reeks als $x \neq \frac{4}{3}$, we gebruiken het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)(3x-4)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{n(3x-4)^n}{3^n}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n}}_{=\frac{1}{3}} \cdot |3x-4|$$

$$\begin{aligned} L < 1 &\Leftrightarrow |3x-4| < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 < 3x-4 < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 < 3x < 7 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{7}{3} \end{aligned}$$

De convergentiestraal is 1.

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k!\,(3x-1)^k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!(3x-1)^k = 1 + (3x-1) + 2!(3x-1)^2 + 3!(3x-1)^3 + \ldots$$

Dit is geen meetkundige reeks als $x \neq \frac{1}{3}$, we gebruiken het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!(3x-1)^{n+1}}{n!(3x-1)^n}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}(n+1)}_{=+\infty} \cdot |3x-1|$$

Als $x \neq \frac{1}{3}$ is $L = +\infty$.

De convergentiestraal is 0.

Opdracht 4 bladzijde 78

Bepaal het convergentie-interval en de convergentiestraal van de machtreeksen.

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2k}}{k}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{2n+2}}{n+1}}{\frac{(x-1)^{2n}}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot(x-1)^2}{n+1} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}}_{=1}\cdot(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} L<1 &\Leftrightarrow (x-1)^2<1 \\ &\Leftrightarrow |x-1|<1 \\ &\Leftrightarrow -1<x-1<1 \\ &\Leftrightarrow 0<x<2 \end{aligned}$$

De randpunten van het convergentie-interval moeten we nog apart onderzoeken.

– Voor $x = 0$ vinden we de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$.

  Dit is de harmonische reeks, die divergeert.

– Voor $x = 2$ vinden we de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$.

  We herkennen opnieuw de harmonische reeks.

Besluit: het convergentie-interval van $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^{2k}}{k}$ is $]0, 2[$. De convergentiestraal is 1.

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x+3)^{k}}{k5^k}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(2x+3)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}}{\frac{(2x+3)^{n}}{n\,5^n}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5(n+1)}}_{=\frac{1}{5}}\cdot|2x+3|$$

$$\begin{aligned} L<1 &\Leftrightarrow |2x+3|<5 \\ &\Leftrightarrow -5<2x+3<5 \\ &\Leftrightarrow -8<2x<2 \\ &\Leftrightarrow -4<x<1 \end{aligned}$$

De randpunten van het convergentie-interval onderzoeken we apart.

– Voor $x = -4$ vinden we de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-5)^k}{k\,5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\dots$.

  Dit is het tegengestelde van de alternerende harmonische reeks, die convergeert.

– Voor $x = 1$ vinden we de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k\,5^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Dit is de harmonische reeks, die divergeert.

Besluit: het convergentie-interval van $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2x+3)^k}{k\,5^k}$ is $\left[-4, 1\right[$. De convergentiestraal is $\frac{5}{2}$.

Opdracht 5 bladzijde 78

De machtreeks $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ heeft als som $\frac{1}{1-x}$ in $\left]-1, 1\right[$.

1 Welke machtreeks heeft dan als som $\frac{1}{1+3x}$?

$$\frac{1}{1+3x} = \frac{1}{1-(-3x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-3x)^k = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \ldots$$

2 Bepaal het convergentie-interval van deze machtreeks.

$$|-3x| < 1 \iff -1 < 3x < 1 \iff \frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Het convergentie-interval is $\left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

Opdracht 6 bladzijde 82

Gebruik de machtreeks voor $f(x) = \frac{1}{1-x}$ om die van $g(x) = \frac{2}{x}$ te vinden.

Geef ook het convergentie-interval.

De machtreeks vinden we als volgt:

$$\frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (1-x)^k = 2 + 2 \cdot (1-x) + 2 \cdot (1-x)^2 + \ldots$$

Het convergentie-interval volgt uit:

$$-1 < 1 - x < 1 \iff 0 < x < 2$$

Een machtreeks van $g(x) = \frac{2}{x}$ is $\sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot (1-x)^k$ en het convergentie-interval is $\left]0, 2\right[$.

Opmerking

Je kunt ook als volgt te werk gaan.

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1-\frac{x}{2}\right)^k = 1 + \left(1-\frac{x}{2}\right) + \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$$

Bij deze machtreeks hoort het convergentie-interval $\left]0, 4\right[$, want:

$$-1 < 1 - \frac{x}{2} < 1 \iff -2 < -\frac{x}{2} < 0 \iff 0 < x < 4$$

Opdracht 7 bladzijde 82

1 Gebruik de machtreeks met als som $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ om een machtreeks voor $g(x) = \ln(1+x)$ op te stellen.

Uit $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ volgt:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ met convergentie-interval }]-1, 1[\ (*)$$

Nu is enerzijds

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) = \ln|x+1| + c_1$$

en aangezien $-1 < x < 1$ (*), is $x + 1 > 0$ zodat

$$\int f(x)\,dx = \ln(x+1) + c_1 \quad (1)$$

Anderzijds is

$$\int f(x)\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \dots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + c_2 \quad (2) \text{ voor } -1 < x < 1$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + c \text{ voor } -1 < x < 1$$

en aangezien $\ln(0+1) = 0$, is $c = 0$

Besluit: $\ln(x+1) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ voor $-1 < x < 1$.

2 Welke bijzondere reeks herken je voor $x = 1$? Wat is vermoedelijk de som van deze reeks?

Voor $x = 1$ hebben we $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$

Dit is de alternerende harmonische reeks.

Vermoedelijk is de som van deze reeks $\ln 2$.

Opdracht 8 bladzijde 83

Toon aan: $\dfrac{1}{x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(x+1)^k$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(x+1)^k = 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + \ldots$$

Dit is de afgeleide van de machtreeks $1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (x+1)^k$.

We vertrekken van deze reeks om het gestelde te bewijzen.

Bewijs

$$1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \ldots = \frac{1}{1-(1+x)} = -\frac{1}{x} \qquad \text{voor } -2 < x < 0$$

$$\Downarrow \qquad \text{term per term afleiden}$$

$$1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + \ldots = \frac{1}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(x+1)^k = \frac{1}{x^2}$$

Opdracht 9 bladzijde 86

1 Bepaal de Maclaurinreeks van $f(x) = \cos x$.

De functie met voorschrift $f(x) = \cos x$ is onbeperkt afleidbaar in 0.

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f^{(3)}(x) = \sin x$	$f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$
$f^{(5)}(x) = -\sin x$	$f^{(5)}(0) = 0$
…	…
	$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$
	$f^{(2n+1)}(0) = 0$

De Maclaurinreeks van $f(x) = \cos x$ is

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

2 Gebruik het criterium van d'Alembert om het convergentie-interval van de gevonden machtreeks te bepalen.

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

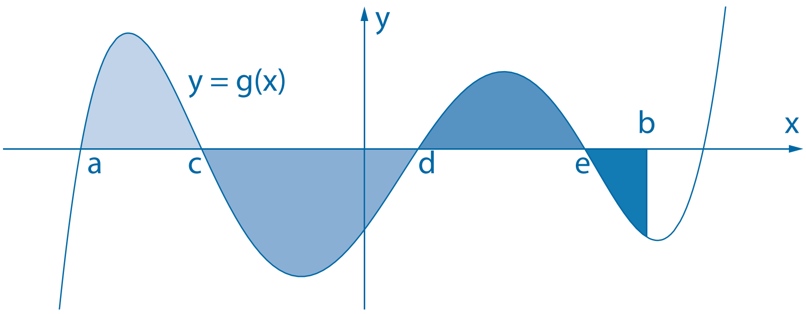
$L = 0 < 1$ voor elke waarde van x. De machtreeks convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Het convergentie-interval is $\left]-\infty, +\infty\right[$.

Opdracht 10 bladzijde 87

1 Verklaar met behulp van de grafische definitie van de bepaalde integraal dat voor een functie g die continu is in $[a, b]$ geldt:

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |g(x)|\,dx \text{ als } a \leqslant b\,.$$



Uit de meetkundige betekenis van de bepaalde integraal is duidelijk dat:

$$-\int_a^b |g(x)|\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b |g(x)|\,dx \qquad (*)$$

De middelste integraal kan namelijk bestaan uit positief en negatief georiënteerde oppervlakten, die elkaar opheffen. Bij de uiterste integralen worden enkel positieve oppervlakten opgeteld.

Aangezien $-p \leqslant q \leqslant p$ met $p > 0$ equivalent is met $|q| \leqslant p$, is (*) equivalent met:

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |g(x)|\,dx \qquad (**)$$

Merk op dat indien $\forall\, x \in [a, b] : g(x) \leqslant 0$ of $\forall\, x \in [a, b] : g(x) \geqslant 0$ er in (*) links respectievelijk rechts een gelijkheid ontstaat, zodat ook in (**) een gelijkheid zal staan.

2 Geldt deze eigenschap ook als $a > b$? Verklaar.

Als $a > b$, dan is $\int_a^b |g(x)|\,dx \leqslant 0$ en $\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \geqslant 0$.

Het is met behulp van het bovenstaande voorbeeld onmiddellijk duidelijk dat in dat geval $\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \geqslant \int_a^b |g(x)|\,dx$ en de eigenschap dus niet geldt.

Opdracht 11 bladzijde 94

Bepaal de Maclaurinreeks voor $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Bepaal ook het convergentie-interval.

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\Rightarrow \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Het convergentie-interval kunnen we vinden met het criterium van d'Alembert:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$L = 0 < 1$ voor elke waarde van x.

De machtreeks convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$, het convergentie-interval is $]-\infty, +\infty[$.

Opdracht 12 bladzijde 94

Bereken $1 - \cos 10^{-6}$ op 10^{-15} nauwkeurig met behulp van een Maclaurin-benadering.

De meeste rekentoestellen geven 0 als benadering voor $1 - \cos 10^{-6}$, wat niet klopt want $\cos 10^{-6} \neq \cos 0 = 1$.

De Maclaurinreeks van cos x geeft een waarde voor $\cos 10^{-6}$ verschillend van 1:

$$\cos 10^{-6} = 1 - \frac{(10^{-6})^2}{2!} + \frac{(10^{-6})^4}{4!} - \ldots = 1 - \frac{10^{-12}}{2} + \frac{10^{-24}}{24} - \ldots$$

Aangezien $\frac{10^{-24}}{24} < 10^{-15}$ en alle verdere termen nog kleiner zijn, is een benadering van

$1 - \cos 10^{-6}$ op 10^{-15} nauwkeurig gelijk aan $\frac{10^{-12}}{2} = 0{,}000\,000\,000\,000\,500$.

Opdracht 13 bladzijde 94

Gebruik de reeksontwikkelingen die je kent om de volgende oneindige sommen uit te rekenen.

1 $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \ldots$

$= \sin \pi = 0$

2 $2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} + \ldots$

$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \ldots = e^2$

$\Rightarrow 2 + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} + \ldots = e^2 - 1$

3 $1 - \ln 3 + \frac{(\ln 3)^2}{2!} - \frac{(\ln 3)^3}{3!} + \ldots$

$= 1 + \frac{(-\ln 3)}{1!} + \frac{(-\ln 3)^2}{2!} + \frac{(-\ln 3)^3}{3!} + \ldots$

$= e^{-\ln 3}$

$= e^{\ln 3^{-1}}$

$= \frac{1}{3}$

Opdracht 14 bladzijde 98

Bepaal het convergentie-interval van de meetkundige machtreeksen. Geef ook de som.

1 $1 + \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x-2)^3}{8} + \ldots$

Deze meetkundige machtreeks convergeert als $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, dit is als

$|x-2| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < x - 2 < 2$

$\Leftrightarrow 0 < x < 4$

Het convergentie-interval is $]0, 4[$.

De som is $\frac{1}{1 - \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{4-x}$.

2 $\sum_{k=0}^{+\infty} (x+6)^k$

Deze meetkundige machtreeks convergeert als $|x+6| < 1$, dit is als

$-1 < x+6 < 1$

$\Leftrightarrow -7 < x < -5$

Het convergentie-interval is $]-7, -5[$.

De som is $\dfrac{1}{1-(x+6)} = -\dfrac{1}{x+5}$.

3 $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k (3x-1)^k$

Deze meetkundige machtreeks convergeert als $\left|-\dfrac{3x-1}{2}\right| < 1$, dit is als

$|3x-1| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < 3x-1 < 2$

$\Leftrightarrow -1 < 3x < 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{3} < x < 1$

Het convergentie-interval is $\left]-\dfrac{1}{3}, 1\right[$.

De som is $\dfrac{1}{1+\dfrac{3x-1}{2}} = \dfrac{2}{3x+1}$.

Opdracht 15 bladzijde 98

Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksen.

1 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(x-1)^{2k+1}}{k!} = (x-1) + \dfrac{(x-1)^3}{1!} + \dfrac{(x-1)^5}{2!} + \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-1)^{2n+3}}{(n+1)!}}{\dfrac{(x-1)^{2n+1}}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\cdot(x-1)^2 = 0 \text{ voor elke } x \in \mathbb{R}.$$

De convergentiestraal is $+\infty$.

2 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!\,x^k}{2^k} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{2!x^2}{4} + \frac{3!x^3}{8} + \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n!\,x^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}\cdot|x| = +\infty \text{ als } x \neq 0.$$

De convergentiestraal is 0.

3 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{5^k}$ is een meetkundige reeks die convergeert als $\left|\frac{(x+1)^2}{5}\right| < 1$, dit is als

$(x+1)^2 < 5$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5} < x+1 < \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5} < x < -1+\sqrt{5}$

De convergentiestraal is $\sqrt{5}$.

4 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}}{\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^4}{(4n+1)4n(4n-1)(4n-2)} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De convergentiestraal is $+\infty$.

Opdracht 16 bladzijde 98

Vertrek van de gelijkheid $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, met $|x| < 1$, om een machtreeks voor de volgende functies op te stellen. Geef ook het convergentie-interval.

1 $f(x) = \frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1-(-9x^2)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-9x^2)^k = 1 - 9x^2 + 81x^4 - 729x^6 + \ldots$

Deze meetkundige reeks convergeert als $|-9x^2| < 1$, dit is als

$x^2 < \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

Het convergentie-interval is $\left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

2 $f(x) = \frac{x}{1+x} = x\cdot\frac{1}{1-(-x)} = x\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{k+1} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$

Het convergentie-interval is $]-1, 1[$.

3 $f(x) = \dfrac{3}{2-x} = 3 \cdot \dfrac{1}{1-(x-1)} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (x-1)^k = 3 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \ldots$

Deze meetkundige reeks convergeert als $|x-1| < 1$, dit is als

$-1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Het convergentie-interval is $]0, 2[$.

4 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Uit $g(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ volgt:

$g'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k x^{k-1}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} k(-x)^{k-1}$.

Het convergentie-interval is $]-1, 1[$.

Opdracht 17 bladzijde 99

Bepaal het convergentie-interval van de machtreeksen.

1 $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}} \right| = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}}_{=1} \cdot |x|$$

$L < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

Onderzoek in de randpunten van het convergentie-interval:

– $x = -1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{2k-1}}{k} = -1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - \ldots = -\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots\right)$.

Deze reeks divergeert, want de harmonische reeks divergeert.

– $x = 1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$.

We herkennen de alternerende harmonische reeks, die convergeert.

Het convergentie-interval is $]-1, 1]$.

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^k}{k(k+1)}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{(x+1)^n}{n(n+1)}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}}_{=1}\cdot\left|x+1\right|$$

$$\begin{aligned} L<1 &\Leftrightarrow \left|x+1\right|<1\\ &\Leftrightarrow -1<x+1<1\\ &\Leftrightarrow -2<x<0\end{aligned}$$

Onderzoek in de randpunten van het convergentie-interval:

– $x=-2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\dots.$

Dit is een alternerende reeks die voldoet aan de voorwaarden van de convergentietest voor alternerende reeksen. Bijgevolg is ze convergent.

– $x=0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$

Deze reeks convergeert, zie blz. 41 van het handboek.

Het convergentie-interval is $[-2, 0]$.

3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^{2k+1}}{2k+1}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\dfrac{(x-1)^{2n+3}}{2n+3}}{(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}}_{=1}\cdot(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} L<1 &\Leftrightarrow (x-1)^2<1\\ &\Leftrightarrow \left|x-1\right|<1\\ &\Leftrightarrow -1<x-1<1\\ &\Leftrightarrow 0<x<2\end{aligned}$$

Onderzoek in de randpunten van het convergentie-interval:

– $x=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots.$

Dit is een alternerende reeks die voldoet aan de voorwaarden van de convergentietest voor alternerende reeksen. Bijgevolg is ze convergent.

– $x = 2$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$

Ook deze alternerende reeks convergeert.

Het convergentie-interval is $\left[0, 2\right]$.

4 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k (x-2)^k}{k+1}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}(x-2)^{n+1}}{n+2}}{\frac{3^n(x-2)^n}{n+1}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+3}{n+2}}_{=3} \cdot |x-2|$$

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$$

Onderzoek in de randpunten van het convergentie-interval:

– $x = \frac{5}{3}$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k\left(-\frac{1}{3}\right)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots .$

Dit is de alternerende harmonische reeks, die convergeert.

– $x = \frac{7}{3}$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots .$

We herkennen de harmonische reeks, die divergeert.

Het convergentie-interval is $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right[$.

5 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!\,x^k}{(2k)!}$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n!\,x^n}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} |x| = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

De reeks convergeert voor elke waarde van x. Het convergentie-interval is $\left]-\infty, +\infty\right[$.

Opdracht 18 bladzijde 99

Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksen.

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)} = x + \frac{2x^2}{3} + \frac{3x^3}{15} + \frac{4x^4}{105} + \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}}{\dfrac{nx^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n(2n+1)}\cdot|x| = 0$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$.

De convergentiestraal is $+\infty$.

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k\cdot x^k}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4k-3)} = x + \frac{2x^2}{5} + \frac{6x^3}{45} + \frac{24x^4}{585} + \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1)\cdot x^{n+1}}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)\cdot(4n+1)}}{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot x^n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}}\right| = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{4n+1}}_{=\frac{1}{4}}\cdot|x|$$

$L < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$

De convergentiestraal is 4.

Opdracht 19 bladzijde 99

Een functie wordt gedefinieerd aan de hand van een reeks:

$f: x \mapsto 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \ldots$.

De coëfficiënten zijn dus $c_{2n} = 1$ en $c_{2n+1} = 2$ voor elke waarde van n.

Bepaal het convergentie-interval van de reeks en geef een gesloten uitdrukking voor $f(x)$.

We groeperen de termen als volgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) + (2x + 2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + \ldots) \\ &= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) + 2x\cdot(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \\ &= (1+2x)\cdot(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \end{aligned}$$

Nu is $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \dfrac{1}{1-x^2}$ voor $|x| < 1$, zodat $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}: x \mapsto \dfrac{1+2x}{1-x^2}$.

Opdracht 20 bladzijde 99

Gegeven $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

Bepaal de convergentie-intervallen van f, f' en f''.

Voor de convergentie in de randpunten zul je gebruik moeten maken van opdracht 31 in hoofdstuk 2.

1) $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} + \ldots$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}}_{=1} \cdot |x|$$

$L < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Onderzoek in de randpunten:

- $x = -1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \ldots.$

  Dit is een alternerende reeks die voldoet aan de voorwaarden van de convergentietest voor alternerende reeksen. Bijgevolg is ze convergent.

- $x = 1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots.$

  Met de integraaltest kan aangetoond worden dat deze reeks convergent is (zie opdracht 31 hoofdstuk 2).

Het convergentie-interval van f is $[-1, 1]$.

2) $f'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$

Uit de eigenschap bij paragraaf 3.1.3 weten we dat de convergentiestraal van de afgeleide ook 1 is. We kunnen meteen de convergentie in de randpunten onderzoeken:

- $x = -1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$

  Dit is de alternerende harmonische reeks, die convergent is.

- $x = 1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$

  Dit is de harmonische reeks, die divergeert.

Het convergentie-interval van f′ is $[-1, 1[$.

3) $f''(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{5} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{k+1}$

Uit de eigenschap bij paragraaf 3.1.3 weten we dat de convergentiestraal van de tweede afgeleide ook 1 is. We kunnen meteen de convergentie in de randpunten onderzoeken:

– $x = -1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$.

Deze reeks divergeert, want de termen naderen niet tot 0. Er is niet voldaan aan de nodige voorwaarde voor convergentie.

– $x = 1$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$.

De termen naderen niet tot 0, dus ook deze reeks divergeert.

Het convergentie-interval van f″ is $]-1, 1[$.

Opdracht 21 bladzijde 100

De aarde oefent op een voorwerp met massa m op een hoogte h boven het aardoppervlak een kracht uit die gelijk is aan $F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$. Hierbij is R de aardstraal (ongeveer 6370 km) en g de valversnelling (9,81 m/s^2).

1 Druk F uit als een machtreeks in $\frac{h}{R}$.

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2} = \frac{mg}{\left(\frac{R+h}{R}\right)^2} = mg \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

We maken gebruik van de machtreeks $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} k(-x)^{k-1}$

met $-1 < x < 1$ uit opdracht 16.4 en vinden:

$$F = mg \cdot \left(1 - 2\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 4\left(\frac{h}{R}\right)^3 + \ldots\right) = mg \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^{k-1} \text{ met } \frac{h}{R} < 1.$$

2 Toon aan dat we de gekende uitdrukking $F = mg$ terugvinden als h heel klein is t.o.v. R.

Als h heel klein is ten opzichte van R, dan is $\frac{h}{R}$ te verwaarlozen ten opzichte van 1, en natuurlijk ook alle termen $\left(\frac{h}{R}\right)^k$, die steeds kleiner worden voor toenemende waarden van k.

Voor voorwerpen dicht bij het aardoppervlak geldt dan als goede benadering $F = mg \cdot 1 = mg$.

Opdracht 22 bladzijde 100

De reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k x^k}$ is een machtreeks in $\frac{1}{x}$.

Bepaal het convergentie-interval.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k x^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)}{2^{n+1}x^{n+1}}}{\frac{n}{2^n x^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{1}{|x|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|x|}$$

$$\begin{aligned} L < 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < |x| \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ of } x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

We onderzoeken de convergentie in de randpunten:

- $x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}(-2)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^k = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots$.

  Deze reeks divergeert, want de termen naderen niet tot 0.

- $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}2^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$.

  De termen naderen niet tot 0, dus ook deze reeks divergeert.

Het convergentie-interval is $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Opdracht 23 bladzijde 100

Bepaal de convergentiestraal van $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k!)^p}{(pk)!} x^k$ met $p > 0$.

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^p}{(p(n+1))!} x^{n+1}}{\frac{(n!)^p}{(pn)!} x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right)^p \cdot \frac{(pn)!}{(pn+p)!} \cdot |x|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)^p \cdot \frac{(pn)!}{(pn+p)!} \cdot |x|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^p}{\underbrace{(pn+p)\cdot(pn+p-1)\cdot(pn+p-2)\cdot\ldots\cdot(pn+1)}_{\text{p factoren}}} \cdot |x|$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{pn+p} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{pn+p-1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{pn+p-2} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{pn+1}}_{\text{p factoren met limiet } \frac{1}{p}} \cdot |x|$$

$$= \frac{1}{p^p} \cdot |x|$$

$L < 1 \Leftrightarrow |x| < p^p$

De convergentiestraal is p^p.

Opdracht 24 bladzijde 101

Maak gebruik van gekende reeksontwikkelingen om een reeksontwikkeling van de volgende functies te bepalen

1 $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

$$e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \left(\frac{-x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{-x}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2! \cdot 2^2} - \frac{x^3}{3! \cdot 2^3} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k! \cdot 2^k}$$

2 $f(x) = \cos\sqrt{x}$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{x})^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!}$$

3 $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots\right)$$

$$= \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} + \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2x)^{2k}}{2 \cdot (2k)!}$$

4 $f(x) = x \cos \pi x$

$$x \cdot \cos \pi x = x \cdot \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + \frac{(\pi x)^4}{4!} - \frac{(\pi x)^6}{6!} + \dots\right)$$

$$= x - \frac{\pi^2 x^3}{2!} + \frac{\pi^4 x^5}{4!} - \frac{\pi^6 x^7}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k} x^{2k+1}}{(2k)!}$$

Opdracht 25 bladzijde 101

Bereken de som van de reeksen, gebruik makend van gekende reeksontwikkelingen.

1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - 1$$

$$= e^x - 1$$

2 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{3^{2k}(2k)!}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{3^{2k}(2k)!} = 1 - \frac{\pi^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{3^4 \cdot 4!} - \frac{\pi^6}{3^6 \cdot 6!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^6}{6!} + \dots$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3 $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{k!} = 1 - \frac{x^4}{1!} + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{(-x^4)^1}{1!} + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \dots$$

$$= e^{-x^4}$$

4 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{4^{2k+1}(2k+1)!}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{4^{2k+1}(2k+1)!} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{4^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{4^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{4^7 \cdot 7!} + \dots$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!} + \dots$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Opdracht 26 bladzijde 101

Gebruik reeksontwikkelingen om $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ te berekenen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{1!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Opdracht 27 bladzijde 101

Een reeksontwikkeling van $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ kunnen we vinden door de euclidische deling te maken van de reeksontwikkelingen voor $\sin x$ en $\cos x$.

Bepaal op deze manier de eerste drie termen van de reeksontwikkeling van $\tan x$.

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \cline{2-2}
 & \\
\end{array}$$

De eerste drie termen van de reeksontwikkeling van $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ zijn $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}$.

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \\ \cline{2-2}
-x \pm \frac{x^3}{2!} \mp \frac{x^5}{4!} \pm \frac{x^7}{6!} \dots & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \dots \\ \cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} \dots & \\
\mp \frac{x^3}{3} \pm \frac{x^5}{6} \mp \frac{x^7}{72} \dots & \\ \cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} \dots & \\
\dots &
\end{array}$$

Opdracht 28 bladzijde 101

Men kan aantonen dat de reeksontwikkelingen die we voor reële functies vonden, ook toegepast kunnen worden voor complexe functies. Hierbij rekenen we in $\mathbb{C}$.

Toon met behulp van reeksontwikkelingen aan dat $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, met i de imaginaire eenheid $(i^2 = -1)$.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + i\cdot\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\cdot\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\cdot\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) + i\cdot\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos\theta + i\cdot\sin\theta \end{aligned}$$

Opdracht 29 bladzijde 101

Geef een benadering voor de oplossingen van de volgende vergelijkingen, gebruik makend van de eerste twee termen van de reeksontwikkeling van $\cos x$ of e^{-x}.

1 $10x - e^{-x} = 0$

Voor $x \approx 0$ is $e^{-x} \approx 1 - x$.

Hiermee lossen we de vergelijking $10x - e^{-x} = 0$ benaderend op:

$$10x - (1 - x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 11x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{11}$$

Aangezien $\frac{1}{11}$ een kleine waarde is, is het wellicht een goede schatting van de oplossing.

Ter controle: $\frac{10}{11} - e^{\frac{-1}{11}} \approx -0{,}00401$.

2 $2x^2 - \cos x = 0$

In de buurt van 0 is $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Hiermee lossen we de vergelijking $2x^2 - \cos x = 0$ benaderend op:

$$2x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{5x^2}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Controle: $2\cdot\frac{2}{5} - \cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \approx -0{,}006578$.

Opdracht 30 bladzijde 102

Toon aan dat de functie $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$ niet gelijk is aan haar Maclaurinreeks.

We bewijzen: $\forall n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$ waarbij r(x) een rationale functie is.

1) We tonen eerst aan dat $f^{(n)}(x) = r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$.

- Voor $n = 0$ geldt deze uitdrukking want $f(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$.
- Als $f^{(k)}(x) = r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, dan is

  $$f^{(k+1)}(x) = r'(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = r_1(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

  waarbij $r_1(x) = r'(x) + r(x) \cdot \frac{2}{x^3}$ een rationale functie is.
- Volgens het inductieprincipe is dus $f^{(n)}(x) = r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, met r(x) een rationale functie, voor elke $n \in \mathbb{N}$.

2) We onderzoeken nu wat er gebeurt met de n-de afgeleide als x nadert tot 0.

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} \left[r(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right] \quad (1)$$

Stellen we nu $t = \frac{1}{x}$, dan zal $t \to \pm\infty$.

Deze limiet wordt dan $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{p(t) \cdot e^{-t^2}}{q(t)} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{p(t)}{q(t) \cdot e^{t^2}}$ waarbij p(t) en q(t) veeltermfuncties zijn.

Op deze onbepaalde vorm passen we de regel van de l'Hôpital toe tot de teller een constante is.

Dan hebben we: $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{c}{k(t) \cdot e^{t^2}} = 0$.

In de buurt van de oorsprong nadert de n-de afgeleide dus naar 0.

3) We tonen nu aan dat $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(0) = 0$.

- Deze uitdrukking geldt voor $n = 0$.
- Als de uitdrukking geldt voor een bepaalde waarde k, dan geldt ze ook voor $k + 1$.

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{r(x)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \left(r'(x)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2r(x)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{\left(r'(x) + \frac{2r(x)}{x^3} \right)}_{r_1(x)} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \right] \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}
$$

- Volgens het inductieprincipe is dus $f^{(n)}(0) = 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

De Maclaurinreeks is 0, en dus niet gelijk aan f(x).

Opdracht 31 bladzijde 102

Binomiaalreeksen

1 Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = (1+x)^q$ met $q \in \mathbb{Q}$.

f is gedefinieerd en onbeperkt afleidbaar in $]-1, +\infty[$. Er bestaat dus een Taylorreeks rond a als $a > -1$.

Toon aan dat de Maclaurinreeks van f gelijk is aan $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)x^k}{k!}$.

Merk op dat voor $k = 0$ de teller geen enkele factor bevat. Daarom wordt hij dan gelijk aan 1 gesteld.

We bepalen de Maclaurinreeks van f.

$f(x) = (1+x)^q$	$f(0) = 1$
$f'(x) = q(1+x)^{q-1}$	$f'(0) = q$
$f''(x) = q(q-1)(1+x)^{q-2}$	$f''(0) = q(q-1)$
$f^{(3)}(x) = q(q-1)(q-2)(1+x)^{q-3}$	$f^{(3)}(0) = q(q-1)(q-2)$
...	
$f^{(n)}(x) = q(q-1)(q-2)\ \ldots\ (q-n+1)(1+x)^{q-n}$	$f^{(n)}(0) = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)$

De Maclaurinreeks van $f(x) = (1+x)^q$ is gelijk aan

$$1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)}{k!}x^k.$$

2 **a** Toon met behulp van de algemene formule uit **1** aan dat de Maclaurinreeks van $\sqrt{1+x}$ gelijk is aan

$$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k+\ldots.$$

De Maclaurinreeks van $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ is gelijk aan

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k$$

b Bepaal de Maclaurinreeks van $\sqrt[3]{1+x}$.

De Maclaurinreeks van $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ is gelijk aan

$$1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}x^4+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{3}-k+1\right)}{k!}x^k$$

3 Bepaal met behulp van de formule uit **1** de Maclaurinreeks voor $(1+x)^2$.

In het algemeen vinden we voor $(1+x)^n$ met $n\in\mathbb{N}_0$:

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{n!}x^n$$

$$=\frac{n!}{0!n!}+\frac{n!}{1!(n-1)!}x+\frac{n!}{2!(n-2)!}x^2+\frac{n!}{3!(n-3)!}x^3+\ldots+\frac{n!}{n!0!}x^n$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^k$$

We vinden het binomium van Newton terug, zodat we zeker zijn van convergentie in dit geval.

We noemen de Maclaurinreeksen van $(1+x)^q$ met $q\in\mathbb{Q}$ naar analogie met het binomium van Newton **binomiaalreeksen**.

We voeren dan ook de volgende notatie in:

$$\binom{q}{k} = \frac{q\,(q-1)\,(q-2)\ldots(q-k+1)}{k!} \quad \text{voor } q \in \mathbb{Q} \text{ en } k \in \mathbb{N}_0.$$

We spreken af dat $\binom{q}{0} = 1$.

Een binomiaalreeks is dus te schrijven als $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$.

De Maclaurinreeks voor $(1+x)^2$ is

$$1 + 2x + \frac{2 \cdot (2-1)}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot (2-1) \cdot (2-2)}{3!}x^3 + \ldots = 1 + 2x + x^2$$

4 Toon aan dat de reeks $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$ convergeert als $|x| < 1$.

We gebruiken het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\binom{q}{n+1} x^{n+1}}{\binom{q}{n} x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)(q-n)}{(n+1)!}x}{\dfrac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|q-n|}{n+1} \cdot |x|$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{n-q}{n+1}}_{=1} \cdot |x| \qquad n \to +\infty \Rightarrow n - q > 0$$

$$L < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

De reeks $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$ convergeert als $|x| < 1$.

5 Om aan te tonen dat $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$ convergeert naar $(1+x)^q$ voor $|x| < 1$ gaan we als volgt te werk.

Stel $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)}{k!} x^k$$

$$= 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

dan $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)}{k!} kx^{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1}$$

$$= q + \frac{q(q-1)}{1!}x + \frac{q(q-1)(q-2)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{3!}x^3 + \ldots$$

zodat $(1+x) \cdot f'(x)$

$$= q + \frac{q(q-1)}{1!}x + \frac{q(q-1)(q-2)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{n!}x^n + \ldots$$

$$+ qx \qquad + \frac{q(q-1)}{1!}x^2 \qquad + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{(n-1)!}x^n + \ldots$$

$$= q \cdot \left(1 + \underbrace{\left[(q-1)+1\right]}_{=q} x + (q-1)\underbrace{\left[\frac{(q-2)}{2!}+1\right]}_{=\frac{q}{2!}} x^2 + (q-1)(q-2)\underbrace{\left[\frac{(q-3)}{3!}+\frac{1}{2!}\right]}_{=\frac{q}{3!}} x^3 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)\underbrace{\left[\frac{(q-n)}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right]}_{=\frac{q}{n!}} x^n + \ldots \right)$$

$$= q \cdot f(x)$$

Hieruit volgt: $f'(x) = \dfrac{q\,f(x)}{1+x}$.

a Stel $g(x) = (1+x)^{-q} f(x)$. Toon aan dat $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = -q(1+x)^{-q-1} \cdot f(x) + (1+x)^{-q} \cdot f'(x)$$

$$= -q(1+x)^{-q-1} \cdot f(x) + (1+x)^{-q} \cdot \frac{q\,f(x)}{1+x}$$

$$= -q(1+x)^{-q-1} \cdot f(x) + q(1+x)^{-q-1} \cdot f(x)$$

$$= 0$$

b Gebruik **a** om te bewijzen dat $f(x) = (1+x)^q$.

Uit $g'(x) = 0$ en dus ook g continu volgt dat $g(x) = c$ met c een constante.

Aangezien $g(x) = (1+x)^{-q} f(x)$, is

$$(1+x)^{-q} f(x) = c \iff f(x) = c \cdot (1+x)^q$$

Nu is $f(0) = 1$, waaruit volgt dat $c = 1$ zodat

$$f(x) = (1+x)^q$$

We hebben hiermee bewezen dat $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} x^k$ convergeert naar $(1+x)^q$

voor $|x| < 1$.

6 Bepaal de eerste vier termen van de reeksontwikkeling van $\text{Bgsin}\, x$ door de reeksontwikkeling van $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te bepalen en dan te integreren.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + (-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Voor $|x| < 1$ geldt:

$$\left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{2!}(-x^2)^2 + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}}{3!}(-x^2)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots$$

Nu is:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{Bgsin}\, x + c_1 \quad (1) \text{ en}$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots\right) dx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots + c_2 \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\text{Bgsin}\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots + c$$

Aangezien $\text{Bgsin}\, 0 = 0$ is $c = 0$ zodat geldt:

$$\text{Bgsin}\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots \text{ voor } |x| < 1$$

Opdracht 32 bladzijde 105

Bepaal een reeksontwikkeling van de functies.

1 $f(x) = \text{Bgtan } 2x$

Uit $\text{Bgtan } x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$ volgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Bgtan } 2x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{2k+1} \\ &= 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5} - \frac{128x^7}{7} + \ldots \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 $f(x) = x \ln(1 + 2x)$

Aangezien $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ voor x in $]-1, 1]$, geldt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \ln(1 + 2x) \\ &= x \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2x)^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k x^{k+1}}{k} \\ &= 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 - 4x^5 + \ldots \qquad \forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Opdracht 33 bladzijde 105

Bepaal het convergentie-interval van de machtreeksen.

1 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} + \frac{x-4}{9} + \frac{(x-4)^2}{27} + \ldots$

Dit is een meetkundige reeks met $q = \frac{x-4}{3}$.

Ze convergeert als

$$\begin{aligned} &\left|\frac{x-4}{3}\right| < 1 \\ \Leftrightarrow\ & -3 < x - 4 < 3 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < x < 7 \end{aligned}$$

Het convergentie-interval is $]1, 7[$.

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots = \sin 2x$

Het convergentie-interval is $]-\infty, +\infty[$.

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^k (x-\pi)^k}{k} = -e(x-\pi) + \frac{e^2(x-\pi)^2}{2} - \frac{e^3(x-\pi)^3}{3} + \ldots$

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{e^{n+1}(x-\pi)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\dfrac{e^n(x-\pi)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{en}{n+1}\cdot|x-\pi| = e\cdot|x-\pi|$$

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-\pi| < \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} < x - \pi < \frac{1}{e}$$
$$\Leftrightarrow \pi - \frac{1}{e} < x < \pi + \frac{1}{e}$$

Onderzoek in de randpunten van het convergentie-interval:

- $x = \pi - \dfrac{1}{e}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^k\left(\pi - \frac{1}{e} - \pi\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$

  Dit is de harmonische reeks, die divergeert.

- $x = \pi + \dfrac{1}{e}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^k\left(\pi + \frac{1}{e} - \pi\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$

  Deze reeks convergeert want de alternerende harmonische reeks convergeert.

Het convergentie-interval is $\left]\pi - \dfrac{1}{e}, \pi + \dfrac{1}{e}\right]$.

Opdracht 34 bladzijde 105

De onbepaalde integraal $\int e^{-x^2}dx$ is niet te berekenen aan de hand van gekende basisfuncties.

Bereken deze integraal door de integrand te schrijven als een reeksontwikkeling en dan term per term te integreren.

$$\int e^{-x^2}dx = \int\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots\right)dx$$
$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \ldots + c$$

Opdracht 35 bladzijde 105

Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} x^k$.

We onderzoeken de convergentie met het criterium van d'Alembert.

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} x^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot |x| = 4 \cdot |x|$$

$$L < 1 \iff |x| < \frac{1}{4}$$

De convergentiestraal is $\frac{1}{4}$.

Opdracht 36 bladzijde 105

1 Bepaal een reeksontwikkeling van $\frac{x}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ voor } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \text{ voor } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k \text{ voor } |x| < 1$$

2 Gebruik **1** om de som van de reeks $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$ te berekenen.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \qquad \left|\frac{1}{2}\right| < 1$$

$$= 2$$

Opdracht 37 bladzijde 105

1 Toon aan dat $\ln x = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-2)^k}{k2^k}$.

$$\ln x = \ln\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^k}{k}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-2)^k}{k2^k}$$

2 Bepaal het convergentie-interval van deze machtreeks.

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ als $-1 < x \leqslant 1$.

Bijgevolg is $\ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^k}{k}$ als

$$-1 < \frac{x-2}{2} \leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow -2 < x - 2 \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow 0 < x \leqslant 4$$

Het convergentie-interval is] 0, 4].

Opdracht 38 bladzijde 105

Stel een machtreeks op met convergentie-interval]2, 6].

Het centrum van een machtreeks met convergentie-interval] 2, 6] is 4.

Ze is dus van de vorm $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x-4)^k$.

De convergentiestraal is 2. Nemen we $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{2^k}$, dan hebben we een meetkundige reeks die convergeert als $-1 < \frac{x-4}{2} < 1$, dit is als $2 < x < 6$. De straal is dan 2.

Een meetkundige reeks convergeert echter niet in de randpunten. Om de straal niet te wijzigen, voegen we in elke term een factor k toe in de noemer: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^k}{k2^k}$. Zo is voor $x = 2$ en $x = 6$ aan de nodige voorwaarde voor convergentie voldaan.

Voor $x = 6$ wordt dit nu echter de harmonische reeks, die divergeert. Om er de alternerende reeks van te maken, voegen we bij elke term nog een factor $(-1)^{k+1}$ toe:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-4)^k}{k2^k}.$$

Voor $x = 6$ wordt dit de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, die convergeert.

Voor $x = 2$ wordt dit de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$, die divergeert.

Besluit: de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-4)^k}{k2^k}$ heeft als convergentie-interval]2, 6].