Hoofdstuk 4

U

De bol

Opdracht 1 bladzijde 188

Stel een voorwaarde op waaraan de coördinaat (x, y, z) van een punt P moet voldoen opdat P op de bol met middelpunt $M(1,2,3)$ en straal 3 zou liggen.

Schrijf de voorwaarde zonder vierkantswortel.

$|PM| = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$

Opdracht 2 bladzijde 189

Bepaal telkens een vergelijking van de bol die aan de gegevens voldoet.

1 Het middelpunt is $M(-1,2,4)$ en de straal is $\sqrt{3}$.

$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$

2 Het middelpunt is $M(1,1,2)$ en het punt $A(5,3,6)$ behoort tot de bol.

De straal is dan $|MA| = \sqrt{16+4+16} = 6$.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 36$

3 $[PQ]$ is een middellijn van de bol met $P(1,-1,0)$ en $Q(5,-1,3)$.

Het middelpunt M is het midden van [PQ]: $M\left(3,-1,\frac{3}{2}\right)$. De straal is $\frac{|PQ|}{2} = \frac{\sqrt{16+0+9}}{2} = \frac{5}{2}$.

$(x-3)^2 + (y+1)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Opdracht 3 bladzijde 189

Bepaal de straal r en de coördinaat van het middelpunt M van de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y = 0$.

Schrijf hiertoe de gegeven vergelijking in de vorm $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 = 1 + 9$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-0)^2 = 10$

De straal r is $\sqrt{10}$ en het middelpunt is $M(1,-3,0)$.

Opdracht 4 bladzijde 191

Stellen de volgende vergelijkingen bollen voor? Zo ja, geef de straal en de coördinaat van het middelpunt.

1 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 8 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) + z^2 = -8 + 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = -\frac{19}{4}$$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 8 = 0$ stelt dus geen bol voor, want we kunnen deze vergelijking niet schrijven in de vorm $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$.

2 $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + y - 12 = 0$

$x^2 + 2y^2 + z^2 - x + y - 12 = 0$ stelt geen bol voor omdat de coëfficiënten van x^2, y^2 en z^2 niet gelijk zijn.

3 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8x - 10y + 12z - 11 = 0$

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8x - 10y + 12z - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - \frac{5}{2}y + 3z - \frac{11}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) + \left(z^2 + 3z + \frac{9}{4}\right) = \frac{11}{4} + 1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

Deze vergelijking stelt een bol voor met straal $\frac{11}{4}$ en middelpunt $M\left(-1, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

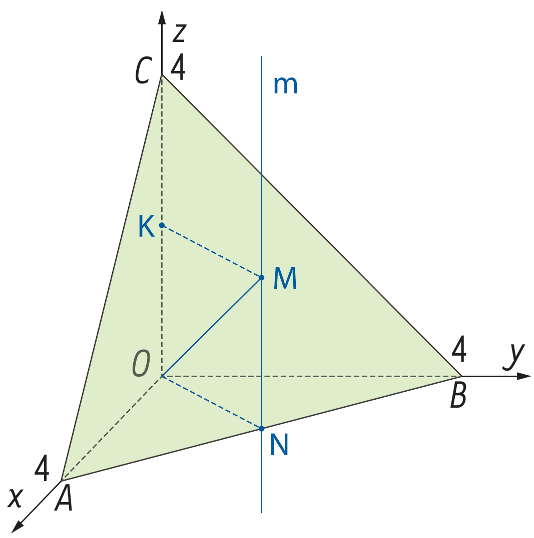
Opdracht 5 bladzijde 192

Gegeven de rechthoekige piramide *OABC*.

1 Teken het midden *N* van het lijnstuk [*AB*].

Waarom is *N* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek *OAB*?

In de rechthoekige driehoek OAB is de lengte van de zwaartelijn [ON] op de schuine zijde gelijk aan de helft van de schuine zijde. Dit betekent dat $|NO| = |NA| = |NB|$, zodat N het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van de driehoek OAB.



2 Alle punten die even ver van *O*, *A* en *B* verwijderd zijn, liggen op een rechte *m* door *N*.

Wat weet je van de stand van deze rechte *m* ten opzichte van het grondvlak?
Teken deze rechte *m* op de figuur en bepaal een parametervoorstelling van *m*.

m staat loodrecht op vl(O, A, B) (verklaring: zie hoofdstuk 3, opdracht 21.3) en is dus evenwijdig met OC.

Bijgevolg is $\vec{d}$ (0,0,1) een richtingvector van m; N(2,2,0) is een punt van m, zodat:

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3 We zoeken nu het punt *M* dat even ver van *O*, *A*, *B* en *C* ligt; dit is het middelpunt van de omgeschreven bol van de piramide *OABC*.

Waarom ligt *M* op *m*?

M ligt even ver van O, A en B en m bestaat uit alle punten even ver van deze drie punten.

4 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak μ van het lijnstuk [*OC*].

$\mu \leftrightarrow z = 2$

5 Bepaal de coördinaat van *M* en construeer *M* op de figuur.

M(2,2,2).

Teken door K, het midden van [OC], een evenwijdige met [ON].

6 Wat is de straal van de bol met middelpunt *M* die door de punten *O*, *A*, *B* en *C* gaat?

$r = |OM| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$

Opdracht 6 bladzijde 194

Bepaal een vergelijking van de omgeschreven bol van het viervlak *ABCD* met $A(4,0,0)$, $B(\sqrt{8},-\sqrt{8},0)$, $C(\sqrt{3},2,3)$ en $D(0,0,4)$.

Een vergelijking van de omgeschreven bol kunnen we voorstellen als

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$

Door invullen van de coördinaten van A, B, C en D krijgen we een stelsel van vier vergelijkingen in a, b, c en d:

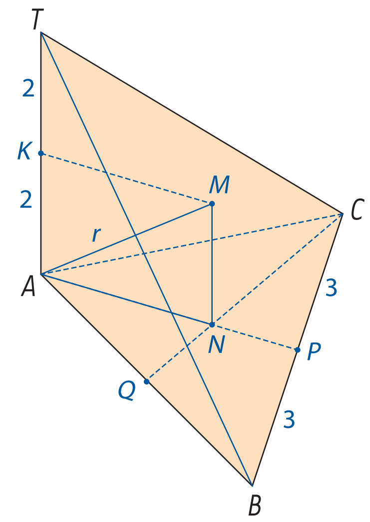
$$\begin{cases} 16 + 4a + d = 0 \\ 8 + 8 + \sqrt{8}a - \sqrt{8}b + d = 0 \\ 3 + 4 + 9 + \sqrt{3}a + 2b + 3c + d = 0 \\ 16 + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + d = -16 \\ \sqrt{8}a - \sqrt{8}b + d = -16 \\ \sqrt{3}a + 2b + 3c + d = -16 \\ 4c + d = -16 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als enige oplossing a = b = c = 0 en d = –16.

De gevraagde vergelijking is dus $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$.

Opdracht 7 bladzijde 194

1 Construeer op de figuur het middelpunt van de omgeschreven bol van het viervlak *TABC* waarbij de driehoek *ABC* gelijkzijdig is met zijde 6, $|TA| = 4$ en $TA \perp \text{vl}(A, B, C)$.



- Teken eerst het middelpunt N van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC.

  Omdat de driehoek ABC gelijkzijdig is, is N het zwaartepunt van deze driehoek.

- Alle punten even ver van A, B en C liggen op een loodlijn op vl(A, B, C) door N.

  Omdat $TA \perp \text{vl}(A, B, C)$ is deze loodlijn evenwijdig met TA.

  Het middelpunt M van de omgeschreven bol ligt dus op een rechte evenwijdig met TA door N.

- Anderzijds ligt M ook in het middelloodvlak van [TA], dus 2 eenheden boven vl(A, B, C).

  We tekenen door K, het midden van [TA], een evenwijdige met AN en vinden het punt M.

2 Bereken de inhoud van deze bol.

- De straal r is gelijk aan $|MA|$. We bepalen deze afstand in de driehoek AMN.

  $|MA| = \sqrt{|AN|^2 + |NM|^2}$ waarbij $|AN| = \dfrac{2}{3} \cdot |AP| = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot \sin 60° = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, zodat

  $r = |MA| = \sqrt{12 + 4} = 4.$

- De inhoud van de omgeschreven bol is $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = \dfrac{256\pi}{3}$.

Opdracht 8 bladzijde 197

Gegeven de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

1 Bepaal een vergelijking van het raakvlak in het punt $P(2,-2,1)$ van de bol.

Het middelpunt van de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ is M(0,0,0) en een stel richtingsgetallen van MP is (2,–2,1).

Het raakvlak aan de bol in P heeft dus als vergelijking $2(x-2) - 2(y+2) + 1(z-1) = 0$ of $2x - 2y + z - 9 = 0$.

2 Bepaal *k* zodat het punt $Q(0,0,k)$ tot dat raakvlak behoort.

Q(0,0,k) behoort tot het raakvlak als $k - 9 = 0$, dus als $k = 9$.

3 Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de raaklijn *PQ* aan de bol.

$PQ \leftrightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{8}$ of $PQ \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 4y - z + 9 = 0 \end{cases}$

Opdracht 9 bladzijde 197

Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de cirkel c die bestaat uit de gemeenschappelijke punten van het vlak $\alpha \leftrightarrow y = \sqrt{7}$ en de bol met middelpunt $M(0,0,4)$ en straal 4.

Bepaal ook de straal en het middelpunt van deze cirkel.

Noem de straal van deze cirkel r en het middelpunt Q.

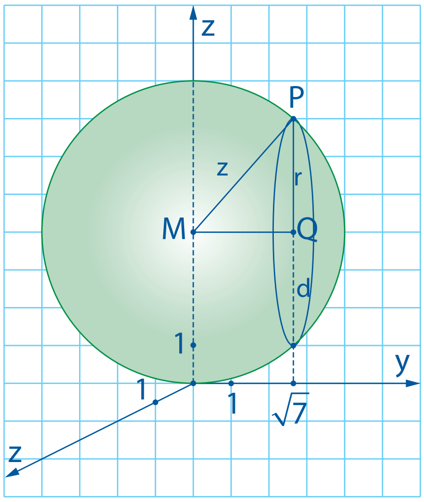
Er geldt:

$$c \leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{7} \\ x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16 \end{cases} \text{ of } c \leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{7} \\ x^2 + (z-4)^2 = 9 \end{cases}.$$

Bijgevolg is de straal $r = 3$ en het middelpunt $Q\left(0,\sqrt{7},4\right)$.

Je kan dit ook afleiden uit de figuur.

In ΔMPQ geldt: $r = \sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} = \sqrt{9} = 3$, met $Q\left(0,\sqrt{7},4\right)$.



Opdracht 10 bladzijde 199

Bepaal een vergelijking van de bol die aan de gegevens voldoet.

1 Het middelpunt is $M(0,1,0)$ en de diameter is 5.

De straal is $\frac{5}{2}$.

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{4}$$

2 Het middelpunt is $M(1,2,-3)$ en het punt $O(0,0,0)$ behoort tot de bol.

De straal is $|MO| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14$$

3 $[PQ]$ is een middellijn van de bol met $P(3,4,1)$ en $Q(-5,2,7)$.

Het middelpunt M is het midden van [PQ]: M(–1,3,4).

De straal is $\frac{|PQ|}{2} = \frac{\sqrt{64+4+36}}{2} = \sqrt{26}$.

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 26$$

Opdracht 11 bladzijde 199

Onderzoek of de vergelijkingen een bol voorstellen en bereken eventueel de straal r en de coördinaat van het middelpunt M.

1 $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 6y + 9) + z^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

Deze vergelijking stelt een bol voor met straal $r = 3$ en middelpunt $M(0,3,0)$.

2 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y + 4z + 2 = 0$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y + 4z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = -1 + 1 + 4 + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 5$

Deze vergelijking stelt een bol voor met straal $r = \sqrt{5}$ en middelpunt $M(1,-2,-1)$.

3 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 20 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 20 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) = -20 + 1 + 4 + 9$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = -6$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 20 = 0$ stelt dus geen bol voor, want we kunnen deze vergelijking niet schrijven in de vorm $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$.

Opdracht 12 bladzijde 199

Het middelpunt van een bol ligt op de x-as en deze bol gaat door de punten $P(2,0,-3)$ en $Q(4,-4,-1)$.

Bepaal een vergelijking van deze bol.

Het middelpunt M van deze bol ligt op de x-as, zodat de coördinaat van de vorm (t,0,0) is.

De bol gaat door de punten P(2,0,–3) en Q(4,–4,–1), zodat het middelpunt M even ver van P als van Q ligt. M ligt dus in het middelloodvlak μ van [PQ].

Het midden van [PQ] is N(3,–2,–2) en $\overrightarrow{PQ}(2,-4,2)$, zodat $\vec{n}(1,-2,1)$ een normaalvector is van μ.

Bijgevolg geldt: $\mu \leftrightarrow (x-3) - 2(y+2) + (z+2) = 0$ of $\mu \leftrightarrow x - 2y + z - 5 = 0$.

Het punt met coördinaat (t,0,0) dat in μ ligt, is het middelpunt M(5,0,0) van de gevraagde bol.

De straal is dan $|MP| = |MQ| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

De gevraagde bol heeft als vergelijking $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 18$ of $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 7 = 0$.

Opdracht 13 bladzijde 199

Bepaal een vergelijking van de bol die door de punten $P(5,3,6)$ en $Q(-3,-1,-2)$ gaat en waarvan het middelpunt M ligt op de rechte $m \leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-3}$.

Het middelpunt M ligt op de rechte $m \leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-3}$, zodat

$co(M) = (3+2t, 4+3t, -1-3t)$.

$|MP| = |MQ|$

$\Leftrightarrow |MP|^2 = |MQ|^2$

$\Leftrightarrow (2-2t)^2 + (-1-3t)^2 + (7+3t)^2 = (-6-2t)^2 + (-5-3t)^2 + (-1+3t)^2$

$\Leftrightarrow 22t^2 + 40t + 54 = 22t^2 + 48t + 62$

$\Leftrightarrow 8t = -8$

$\Leftrightarrow t = -1$

Het middelpunt M is dan (1,1,2).

De straal is $|MP| = \sqrt{16+4+16} = 6$.

De gevraagde bol heeft als vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 36$ of

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 30 = 0$.

Opdracht 14 bladzijde 199

Bepaal een vergelijking van de bol die door de punten $P(-6,0,-1)$, $Q(-2,7,4)$ en $R(6,3,-4)$ gaat en waarvan het middelpunt M in het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 6 = 0$ gelegen is.

Het middelpunt M van de bol ligt in het middelloodvlak μ_1 van [PQ], in het middelloodvlak μ_2 van [PR] en in het vlak $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 6 = 0$.

μ_1 gaat door $S\left(-4, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$, het midden van [PQ], en heeft $\overrightarrow{PQ}(4,7,5)$ als normaalvector:

$\mu_1 \leftrightarrow 4(x+4) + 7\left(y - \frac{7}{2}\right) + 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$ of $\mu_1 \leftrightarrow 4x + 7y + 5z - 16 = 0$.

μ_2 gaat door $T\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, het midden van [PR], en heeft $\overrightarrow{PR}(12,3,-3)$ of $\vec{n}(4,1,-1)$ als normaalvector:

$\mu_2 \leftrightarrow 4x + \left(y - \frac{3}{2}\right) - \left(z + \frac{5}{2}\right) = 0$ of $\mu_2 \leftrightarrow 4x + y - z - 4 = 0$.

De coördinaat van M is dus de oplossing van het stelsel:

$$\begin{cases} 4x + 7y + 5z - 16 = 0 \\ 4x + y - z - 4 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \\ z = 3 \end{cases}$$

Het middelpunt van de bol is M(2,–1,3) en de straal is $|MP| = \sqrt{64+1+16} = 9$.

De gevraagde bol heeft als vergelijking $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 81$.

Opdracht 15 bladzijde 199

Bepaal de punten op de rechte $a \leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ waarvan de afstand tot het punt $Q(1,1,2)$ gelijk is aan 6.

De punten P op a waarvan de afstand tot Q(1,1,2) gelijk is aan 6, zijn de snijpunten van a met de bol met middelpunt Q en straal 6.

Deze bol heeft als vergelijking: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 36$.

Een lopend punt P op a heeft als coördinaat $(-1 + 2t, t, 2t)$.

Voor de snijpunten van a met de bol geldt:

$(2t-2)^2 + (t-1)^2 + (2t-2)^2 = 36$

$\Leftrightarrow 9t^2 - 18t - 27 = 0$

$\Leftrightarrow t = 3 \text{ of } t = -1$

De gevraagde punten zijn $P_1(5,3,6)$ en $P_2(-3,-1,-2)$.

Opdracht 16 bladzijde 200

Een bol heeft middelpunt M en raakt aan het vlak π.

Bepaal een vergelijking van deze bol.

1 $M(1,-1,2)$ $\qquad \pi \leftrightarrow 3x - y + 2z + 6 = 0$

De straal r van de bol is de afstand van M tot het raakvlak π:

$$r = d(M,\pi) = \frac{|3\cdot 1 + 1 + 2\cdot 2 + 6|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$ of $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 8 = 0$.

2 $M(1,2,-1)$ $\qquad \pi \leftrightarrow x + 2y - 2z - 2 = 0$

De straal r van de bol is de afstand van M tot het raakvlak π:

$$r = d(M,\pi) = \frac{|1 + 2\cdot 2 - 2\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3}.$$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{25}{9}$ of $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 18x - 36y + 18z + 29 = 0$.

Opdracht 17 bladzijde 200

Bepaal de eventuele snijpunten van de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$ en de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

We bepalen eerst een parametervoorstelling van m:

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ z = x - y + 3 = 6 \end{cases} \text{ zodat } m \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 6 \end{cases}.$$

Voor de snijpunten van m met de bol geldt:

$(3 + t)^2 + t^2 + 6^2 - 2(3 + t) + 4t - 6 \cdot 6 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 + 8t + 8 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2$

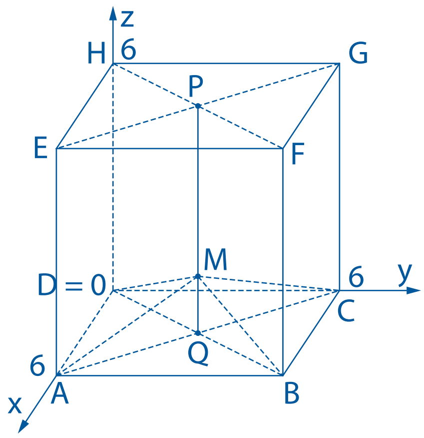
De rechte m en de bol hebben bijgevolg één snijpunt P(1,–2,6), zodat m een raaklijn is aan de bol.

Opdracht 18 bladzijde 200

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 6.

Bereken de straal r van de bol die door de punten A, B, C en D gaat en raakt aan het bovenvlak $EFGH$.

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.



Het middelpunt M van de bol ligt even ver van A, B, C en D.

M ligt dus op een loodlijn op het grondvlak door het middelpunt Q van de omgeschreven cirkel van A, B, C en D.

De loodlijn QP, met Q(3,3,0) en P(3,3,6), heeft als vergelijking $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3. \\ z = t \end{cases}$

Het middelpunt M(3,3,t) van de bol ligt even ver van A(6,0,0) als van het vlak EFGH met vergelijking $z - 6 = 0$:

$|MA| = d(M, EFGH)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-t)^2} = \dfrac{|t - 6|}{\sqrt{0 + 0 + 1}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{18 + t^2} = |t - 6|$

$\Leftrightarrow 18 + t^2 = t^2 - 12t + 36$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{18}{12} = \dfrac{3}{2}$

Het middelpunt van de bol is $M\left(3,3,\dfrac{3}{2}\right)$.

De gevraagde straal is dan $r = |MP| = 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

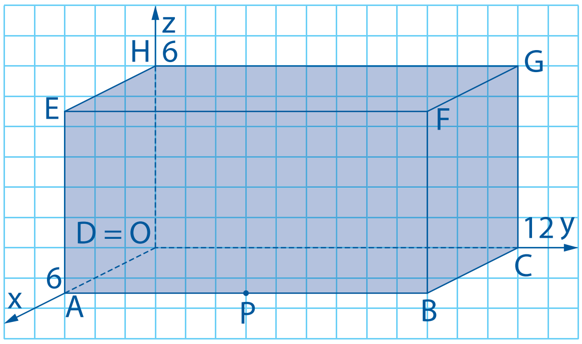
Opdracht 19 bladzijde 200

Gegeven de balk $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met $|DA| = 6$, $|DC| = 12$ en $|DH| = 6$.

P is het midden van $[AB]$.

Bereken de straal r van de bol die door de punten P, B, C en F gaat.

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.



Het middelpunt van de bol is het snijpunt van het middelloodvlak van [BC] met vergelijking $x = 3$, het middelloodvlak van [PB] met vergelijking $y = 9$ en het middelloodvlak van [BF] met vergelijking $z = 3$. Het middelpunt is dus $M(3,9,3)$.

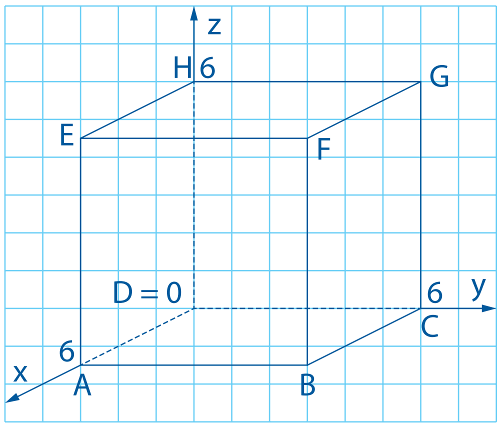
De straal is dan $r = |MC| = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.

Opdracht 20 bladzijde 201

Gegeven een kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 6.

Bereken de straal r van de bol die door de punten A, F en G gaat en die raakt aan de rechte EH.

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.



- Het middelloodvlak μ_1 van [AF] gaat door $P(6,3,3)$, het midden van [AF], en heeft $\overrightarrow{AF}\,(0,6,6)$ of $\overrightarrow{n_1}\,(0,1,1)$ als normaalvector:

  $\mu_1 \leftrightarrow (y-3)+(z-3)=0$ of $\mu_1 \leftrightarrow y+z-6=0$.
- Het middelloodvlak μ_2 van [FG] heeft als vergelijking:

  $\mu_2 \leftrightarrow x = 3$.
- Het middelpunt M van de bol ligt in μ_1 en μ_2 en heeft dus een coördinaat van de vorm $(3, s, 6-s)$.
- $\overrightarrow{EH}\,(-6,0,0)$ of $\vec{d}\,(1,0,0)$ is een richtingsvector van EH. $Q(t,0,6)$ is een lopend punt op EH, zodat $\overrightarrow{MQ}\,(t-3, -s, s)$.

  EH is raaklijn aan de bol met middelpunt M en heeft Q als raakpunt

  $\Leftrightarrow \ \vec{d} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$

  $\Leftrightarrow \ t-3=0$

  $\Leftrightarrow \ t=3$

  zodat $Q(3, 0, 6)$.
- Het middelloodvlak μ_3 van [GQ] gaat door $R\left(\frac{3}{2}, 3, 6\right)$, het midden van [GQ], en heeft $\overrightarrow{GQ}\,(3,-6,0)$ of $\overrightarrow{n_2}\,(1,-2,0)$ als normaalvector:

  $\mu_3 \leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)-2(y-3)=0$ of $\mu_3 \leftrightarrow 2x-4y+9=0$.

– Het middelpunt $M(3, s, 6 - s)$ ligt ook in μ_3, zodat $6 - 4s + 9 = 0$ of $s = \frac{15}{4}$.

Bijgevolg zal $M\left(3, \frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

– Besluit: $r = |MQ| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} = \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Opdracht 21 bladzijde 201

Gegeven de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 35 = 0$.

Bepaal vergelijkingen van de raakvlakken π_1 en π_2 aan deze bol die evenwijdig zijn met het vlak met vergelijking $6x + 3y - 2z - 5 = 0$.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 35 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 4z + 4) = 35 + 1 + 9 + 4$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49$

De bol heeft als middelpunt $M(1,-3,2)$ en als straal $r = 7$.

Alle vlakken π die evenwijdig zijn met het gegeven vlak hebben als vergelijking $6x + 3y - 2z + k = 0$.

Er geldt:

π is een raakvlak aan de gegeven bol

$\Leftrightarrow d(M,\pi) = 7$

$\Leftrightarrow \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + k|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = 7$

$\Leftrightarrow |k - 7| = 49$

$\Leftrightarrow k - 7 = 49 \text{ of } k - 7 = -49$

$\Leftrightarrow k = 56 \text{ of } k = -42$

De gevraagde raakvlakken zijn: $\pi_1 \leftrightarrow 6x + 3y - 2z + 56 = 0$ en $\pi_2 \leftrightarrow 6x + 3y - 2z - 42 = 0$.

Opdracht 22 bladzijde 201

Gegeven de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Bereken de hoek tussen de raakvlakken π_1 en π_2 aan deze bol in de punten $P(2,-2,1)$ en $Q(1,2,-2)$.

De bol heeft als middelpunt de oorsprong en als straal r = 3.

De hoek tussen de raakvlakken π_1 en π_2 is de scherpe of rechte hoek tussen twee loodlijnen op deze raakvlakken. De rechten die het middelpunt van de bol met de raakpunten verbinden zijn loodlijnen op deze raakvlakken.

We zoeken dus de scherpe of rechte hoek tusen de rechten $OP \leftrightarrow \begin{cases} x = 2s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$ en

$OQ \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$.

We vinden deze hoek als volgt: $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow \alpha = 116°23'16''$.

De gevraagde hoek tussen de raakvlakken π_1 en π_2 is dan $180° - 116°23'16'' = 63°36'44''$.

Opdracht 23 bladzijde 201

Schrijf telkens cartesiaanse vergelijkingen van de raakvlakken aan de bol met gegeven vergelijking in de snijpunten van de bol met de rechte *m*.

1 $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = r \\ z = 4 + r \end{cases}$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 22 + 1 + 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

De bol heeft als middelpunt M(1,1,1) en als straal r = 5.

De snijpunten van de rechte m met de bol vinden we uit:

$(1+r)^2 + r^2 + (4+r)^2 - 2(1+r) - 2r - 2(4+r) - 22 = 0$

$\Leftrightarrow 3r^2 + 4r - 15 = 0$

$\Leftrightarrow r = -3 \text{ of } r = \dfrac{5}{3}$

De snijpunten zijn $P(-2,-3,1)$ en $Q\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{17}{3}\right)$.

Het raakvlak π_1 in $P(-2,-3,1)$ heeft als normaalvector $\overrightarrow{MP}(-3,-4,0)$, zodat

$\pi_1 \leftrightarrow -3(x+2) - 4(y+3) = 0$ of $\pi_1 \leftrightarrow 3x + 4y + 18 = 0$.

Het raakvlak π_2 in $Q\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{17}{3}\right)$ heeft als normaalvector $\overrightarrow{MQ}\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{14}{3}\right)$ of $\vec{n}(5,2,14)$ zodat

$\pi_2 \leftrightarrow 5\left(x - \dfrac{8}{3}\right) + 2\left(y - \dfrac{5}{3}\right) + 14\left(z - \dfrac{17}{3}\right) = 0$ of $\pi_2 \leftrightarrow 5x + 2y + 14z - 96 = 0$.

2 $m \leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = -5 + 1 + 4 + 9$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

De bol heeft als middelpunt M(1,–2,3) en als straal r = 3.

In opdracht 17 vonden we dat de rechte en de bol één snijpunt P(1,–2,6) hebben.

Het raakvlak π in dit punt heeft als normaalvector $\overrightarrow{MP}(0,0,3)$ of $\vec{n}(0,0,1)$, zodat

$\pi \leftrightarrow z - 6 = 0$ of $\pi \leftrightarrow z = 6$.

3 $m \leftrightarrow x - 1 = y - 2 = 2 - z$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 17$

De bol heeft als middelpunt de oorsprong en als straal $r = \sqrt{17}$.

Een parametervoorstelling van m is $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 2 + r. \\ z = 2 - r \end{cases}$

De snijpunten van de rechte m met de bol vinden we uit:

$(1+r)^2 + (2+r)^2 + (2-r)^2 = 17$

$\Leftrightarrow 3r^2 + 2r - 8 = 0$

$\Leftrightarrow r = -2 \text{ of } r = \dfrac{4}{3}$

De snijpunten zijn P(–1,0,4) en $Q\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Het raakvlak π_1 in P(–1,0,4) heeft als normaalvector $\overrightarrow{OP}(-1,0,4)$, zodat

$\pi_1 \leftrightarrow -(x+1) + 4(z-4) = 0$ of $\pi_1 \leftrightarrow x - 4z + 17 = 0$.

Het raakvlak π_2 in $Q\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ heeft als normaalvector $\overrightarrow{OQ}\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ of $\vec{n}(7,10,2)$, zodat

$\pi_2 \leftrightarrow 7\left(x - \dfrac{7}{3}\right) + 10\left(y - \dfrac{10}{3}\right) + 2\left(z - \dfrac{2}{3}\right) = 0$ of $\pi_2 \leftrightarrow 7x + 10y + 2z - 51 = 0$.

Opdracht 24 bladzijde 201

1 Bepaal het middelpunt M, de straal r en een vergelijking van de bol met middellijn $[PQ]$ waarbij $P(3,2,2)$ en $Q(-1,-2,4)$.

Het middelpunt M(1,0,3) is het midden van [PQ].

De straal is dan $r = |MP| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$.

De gevraagde vergelijking is: $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ of $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$.

2 Bepaal de snijpunten R en S van deze bol met de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 2r \\ z = 3 - r \end{cases}$.

$(2 + r)^2 + (2r)^2 + (3 - r)^2 - 2(2 + r) - 6(3 - r) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6r^2 + 2r - 8 = 0$

$\Leftrightarrow r = 1 \text{ of } r = -\dfrac{4}{3}$

De snijpunten zijn R(3,2,2) en $S\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{13}{3}\right)$.

3 Bepaal cartesiaanse vergelijkingen van de raakvlakken aan deze bol in R en in S.

Het raakvlak π_1 in R(3,2,2) heeft als normaalvector $\overrightarrow{MR}$ (2,2,–1), zodat

$\pi_1 \leftrightarrow 2(x - 3) + 2(y - 2) - (z - 2) = 0$ of $\pi_1 \leftrightarrow 2x + 2y - z - 8 = 0$.

Het raakvlak π_2 in $S\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{13}{3}\right)$ heeft als normaalvector $\overrightarrow{MS}\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ of $\vec{n}(1,8,-4)$,

zodat $\pi_2 \leftrightarrow \left(x - \dfrac{2}{3}\right) + 8\left(y + \dfrac{8}{3}\right) - 4\left(z - \dfrac{13}{3}\right) = 0$ of $\pi_2 \leftrightarrow x + 8y - 4z + 38 = 0$.

Opdracht 25 bladzijde 201

Een bol gaat door de punten $A(3,-1,1)$ en $B(5,-3,1)$ en raakt aan de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = 3 \\ z = 5 + 2r \end{cases}$ in het punt $P(3,3,5)$.

Bepaal een vergelijking van deze bol.

– Het middelloodvlak μ_1 van [AB] gaat door N(4,–2,1), het midden van [AB], en heeft $\overrightarrow{AB}$(2,–2,0) of $\vec{n}_1$(1,–1,0) als normaalvector:

$\mu_1 \leftrightarrow (x - 4) - (y + 2) = 0$ of $\mu_1 \leftrightarrow x - y - 6 = 0$.

– Het middelloodvlak μ_2 van [AP] gaat door Q(3,1,3), het midden van [AP], en heeft $\overrightarrow{AP}$(0,4,4) of $\vec{n}_2$(0,1,1) als normaalvector:

$\mu_2 \leftrightarrow (y - 1) + (z - 3) = 0$ of 2 $\mu_2 \leftrightarrow y + z - 4 = 0$.

– Het middelpunt M van de bol ligt in μ_1 en μ_2 en heeft dus een coördinaat van de vorm (6 + s, s, 4 – s), zodat $\overrightarrow{MP}$ (–3 – s, 3 – s, 1 + s).

– $\vec{d}$(1,0,2) is een richtingsvector van m, zodat:

m is een raaklijn aan de bol in het punt P

$\Leftrightarrow \vec{d} \perp \overrightarrow{MP}$

$\Leftrightarrow (-3 - s) + 2(1 + s) = 0$

$\Leftrightarrow s = 1$

zodat M(7, 1, 3).

– De straal van de bol is $r = |MP| = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6}$.

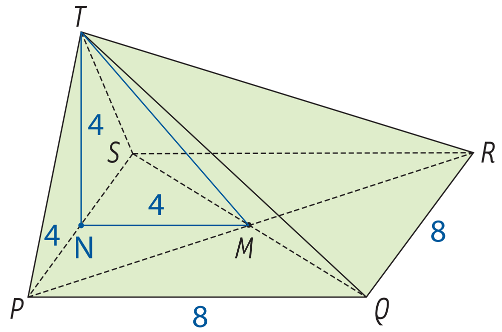
– De gevraagde vergelijking is $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 24$.

Opdracht 26 bladzijde 202

Van een vierzijdige piramide $\left(\begin{smallmatrix} & T & \\ P & Q & R & S\end{smallmatrix}\right)$ is het grondvlak $PQRS$ een vierkant met zijde 8.

Het vlak door P, S en T staat loodrecht op het grondvlak, terwijl $|TP| = |TS| = 4\sqrt{2}$.

1 Toon aan dat het middelpunt M van het grondvlak ook het middelpunt is van de bol die door P, Q, R, S en T gaat.



Aangezien de driehoek TPS gelijkbenig is, is de zwaartelijn [TN] ook hoogtelijn. Hieruit volgt

$|TN| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = 4.$

Aangezien $|NM| = 4$ volgt hieruit dat

$|TM| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$

Bovendien is $|MP| = |MQ| = |MR| = |MS| = \dfrac{|PR|}{2} = \dfrac{\sqrt{8^2 + 8^2}}{2} = 4\sqrt{2}.$

Bijgevolg ligt M even ver van P, Q, R, S en T, zodat M het middelpunt is van de omgeschreven bol van deze piramide.

2 Bereken de verhouding van de inhoud van de piramide en de inhoud van de bol.

Inhoud piramide $= \dfrac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4 = \dfrac{256}{3}.$

Inhoud bol $= \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{2})^3 = \dfrac{512\pi\sqrt{2}}{3}.$

De verhouding van de inhoud van de piramide tot de inhoud van de bol is $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2}}$.

Opdracht 27 bladzijde 202

Gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$ en $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

1 Bepaal de coördinaat van het punt C, dat boven het xy-vlak ligt, zodat $OABC$ een regelmatig viervlak is.

De ribbe van het regelmatig viervlak OABC is $|OA| = |OB| = |AB| = 1$.

Stel co(C) = (x, y, z), dan is OABC een regelmatig viervlak $\Leftrightarrow |OC| = |AC| = |BC| = 1$.

Dit geeft het volgende stelsel:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & (1) \\ (x-1)^2+y^2+z^2=1 & (2) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2=1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & \\ 2x-1=0 & (1)-(2) \\ x+\sqrt{3}y-1=0 & (1)-(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Omdat C boven het xy-vlak ligt, is $z > 0$, waardoor $z=\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{8}{12}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Besluit: $C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

2 Bepaal de inhoud van dit viervlak.

Indien we als grondvlak de gelijkzijdige driehoek OAB nemen, dan is de hoogte de afstand van C tot het xy-vlak. Deze hoogte is de z-coördinaat van C: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

De oppervlakte van de driehoek OAB is $\frac{1\cdot 1\cdot \sin 60°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Besluit: inhoud OABC $=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

3 Bepaal de straal *r* van de omgeschreven bol van het viervlak.

Noem M het middelpunt van de omgeschreven bol van het viervlak.

Omdat deze bol door O, A en B gaat, ligt M op een loodlijn l op vl(O, A, B) = xy-vlak (verklaring: zie hoofdstuk 3, opdracht 21.3).

Omdat C even ver van O, A en B ligt, is C een punt van l, zodat l de loodlijn is uit C op het xy-vlak.

Hieruit volgt: $l \leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$, zodat $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{6}, t\right)$.

Om t te bepalen drukken we uit dat M even ver van O als van C ligt:

$|MO| = |MC|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + t^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - t\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{6}}{3} t = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Het middelpunt van de bol is $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{12}\right)$.

De straal van de omgeschreven bol van het viervlak is

$$r = |OM| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{9}{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

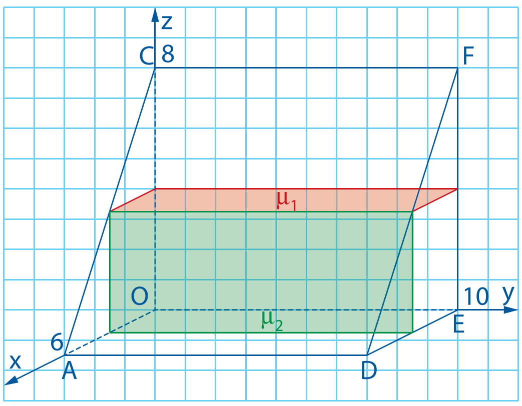
Opdracht 28 bladzijde 202

Van het getekende recht prisma is gegeven dat $|OA| = 6$, $|OC| = 8$ en $|OE| = 10$.

Een bol raakt vl(A, C, O) en gaat door D, E en F.

Bereken de straal *r* van deze bol.

De bol die we zoeken gaat door D, E en F, zodat het middelpunt M op de snijlijn m ligt van de middelloodvlakken $\mu_1 \leftrightarrow z = 4$ van [EF] en $\mu_2 \leftrightarrow x = 3$ van [DE]. Bijgevolg zal M(3, t,4).



α = vl(A, C, O) is een raakvlak aan de bol, zodat d(M, α) = |MF| of $(d(M, \alpha))^2 = |MF|^2$.

Aangezien $\alpha \leftrightarrow y = 0$ en F(0,10,8), kunnen we dit schrijven als:

$$t^2 = 9 + (10 - t)^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 20t = 125$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{125}{20} = \frac{25}{4}$$

Het middelpunt van de gevraagde bol is $M\left(3, \dfrac{25}{4}, 4\right)$ en de straal is $\dfrac{25}{4}$.

Opdracht 29 bladzijde 203

Bepaal telkens een vergelijking van de bol die aan de gegevens voldoet.

1 De straal is 6 en het middelpunt $M(1,2,3)$.

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$

2 Het middelpunt is $(-3,3,1)$ en de bol gaat door de oorsprong.

De straal r is $|MO|=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$.

$(x+3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=19$

3 $[PQ]$ is een middellijn met $P(1,3,5)$ en $Q(-1,-5,7)$.

Het middelpunt M is het midden van [PQ]: M(0,–1,6).

De straal is $\dfrac{|PQ|}{2}=\dfrac{\sqrt{4+64+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{72}}{2}=3\sqrt{2}$.

$x^2+(y+1)^2+(z-6)^2=18$

4 Het middelpunt M ligt op de z-as en de bol gaat door de punten $A(1,2,0)$ en $B(4,-2,3)$.

- Het middelloodvlak μ van [AB] gaat door $N\left(\dfrac{5}{2},0,\dfrac{3}{2}\right)$, het midden van [AB], en heeft $\overrightarrow{AB}(3,-4,3)$ als normaalvector: $\mu \leftrightarrow 3\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-4y+3\left(z-\dfrac{3}{2}\right)=0$ of

  $\mu \leftrightarrow 3x-4y+3z-12=0$.
- Het middelpunt M(0,0, t) ligt in μ: $3t-12=0 \Leftrightarrow t=4$, zodat M(0,0,4).
- De straal van de bol is $r=|MA|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$.
- De vergelijking van de bol is $x^2+y^2+(z-4)^2=21$.

Opdracht 30 bladzijde 203

Toon aan dat de vergelijking $x^2+y^2+z^2-x+2y-3z-1=0$ een bol voorstelt en bepaal het middelpunt en de straal van deze bol.

$x^2+y^2+z^2-x+2y-3z-1=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+(y^2+2y+1)+\left(z^2-3z+\frac{9}{4}\right)=1+\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

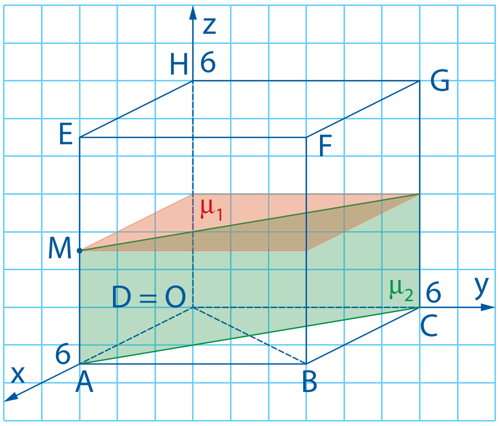
Deze vergelijking stelt een bol voor met straal $r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ en middelpunt $M\left(\dfrac{1}{2},-1,\dfrac{3}{2}\right)$.

Opdracht 31 bladzijde 203

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ met ribbe 6.

Bereken de straal r van de bol die door de punten B en F gaat en raakt aan de rechte CD in het punt D.

We kiezen een orthonormaal assenstelsel zoals op de figuur.



Het middelpunt M van de bol ligt in het middelloodvlak μ_1 van [BF]: $\mu_1 \leftrightarrow z = 3$.

M ligt ook in het middelloodvlak μ_2 van [BD]: $\mu_2 \leftrightarrow x + y = 6$.

De coördinaat van M is dus van de vorm: (t,6 – t,3).

Omdat CD een raaklijn is aan de bol met raakpunt D zal $DM \perp DC$ of $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.

Met $\overrightarrow{DM}(t,6-t,3)$ en $\overrightarrow{DC}(0,6,0)$ wordt dit: $(6-t)\cdot 6 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Het middelpunt van de bol is (6,0,3).

De straal is dan $r = |MD| = \sqrt{36+0+9} = 3\sqrt{5}$.

Opdracht 32 bladzijde 203

Bepaal vergelijkingen van de raakvlakken aan de bol met vergelijking

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z - 4 = 0$ die loodrecht staan op de rechte $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 3r \\ z = 4r \end{cases}$.

Bepaal ook de raakpunten.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z - 4 = 0$

  $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 - 4z + 4) = 4 + 1 + 16 + 4$

  $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 25$

  De bol heeft middelpunt M(1,–4,2) en straal r = 5.

- De richtingsvector $\vec{d}(0,3,4)$ van m is normaalvector van de gevraagde raakvlakken π, zodat: $\pi \leftrightarrow 3y + 4z + k = 0$.

- π is raakvlak aan de bol met middelpunt M(1,–4,2) en straal 5

  $\Leftrightarrow d(M,\pi) = 5$

  $\Leftrightarrow \dfrac{|3\cdot(-4) + 4\cdot 2 + k|}{\sqrt{0+9+16}} = 5$

  $\Leftrightarrow |k-4| = 25$

  $\Leftrightarrow k - 4 = -25 \text{ of } k - 4 = 25$

  $\Leftrightarrow k = -21 \text{ of } k = 29$

  De raakvlakken zijn: $\pi_1 \leftrightarrow 3y + 4z - 21 = 0$ en $\pi_2 \leftrightarrow 3y + 4z + 29 = 0$.

- Om de raakpunten T_1 en T_2 te vinden, zoeken we het snijpunt van elk raakvlak met de rechte l door het middelpunt M(1,–4,2) van de bol en loodrecht op de raakvlakken:

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}.$$

Voor π_1 vinden we: $3(-4+3t)+4(2+4t)-21=0 \Leftrightarrow t=\frac{25}{25}=1$, zodat $T_1(1,-1,6)$.

Voor π_2 vinden we: $3(-4+3t)+4(2+4t)+29=0 \Leftrightarrow t=-\frac{25}{25}=-1$, zodat $T_2(1,-7,-2)$.

Opdracht 33 bladzijde 203

Bepaal vergelijkingen van de raakvlakken aan de bol met vergelijking $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+5=0$ die evenwijdig zijn met het vlak α dat de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} 2y+z=5 \\ x=1 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} 2y-z=-1 \\ 2x+z=5 \end{cases}$ omvat.

- $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+5=0$

$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)+(z^2-2z+1)=-5+9+16+1$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=21$

De bol heeft middelpunt M(3,–4,1) en straal $r=\sqrt{21}$.

- Parametervoorstellingen van a en b zijn:

$$a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = 5-2s \end{cases} \quad \text{en } b \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-t = 2-t \\ z = 5-2t \end{cases}.$$

Met A(1,0,5) een punt op a geeft dit de volgende parametervoorstelling van α:

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = s-t \\ z = 5-2s-2t \end{cases}.$$

Eliminatie van de parameters geeft: $\alpha \leftrightarrow 4x+2y+z-9=0$.

Omdat de gevraagde raakvlakken π evenwijdig zijn met α is hun vergelijking van de vorm: $\pi \leftrightarrow 4x+2y+z+k=0$.

- π is raakvlak aan de bol met middelpunt M(3,–4,1) en straal $\sqrt{21}$

$\Leftrightarrow d(M,\pi)=\sqrt{21}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|4\cdot 3+2\cdot(-4)+1+k|}{\sqrt{16+4+1}}=\sqrt{21}$

$\Leftrightarrow |k+5|=21$

$\Leftrightarrow k+5=21$ of $k+5=-21$

$\Leftrightarrow k=16$ of $k=-26$

- De raakvlakken zijn: $\pi_1 \leftrightarrow 4x+2y+z+16=0$ en $\pi_2 \leftrightarrow 4x+2y+z-26=0$.

Opdracht 34 bladzijde 204

1 Een bol heeft als middelpunt $M(1,2,1)$ en raakt aan de rechte PQ met $P(1,0,3)$ en $Q(3,1,5)$.

Bepaal een vergelijking van deze bol.

Noem T het raakpunt op PQ $\leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$. De coördinaat van T is dan van de vorm $(1 + 2s, s, 3 + 2s)$.

Een raaklijn staat loodrecht op de middellijn door het raakpunt, dus $MT \perp PQ$ of $\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Met $\overrightarrow{MT}(2s, s-2, 2s+2)$ en $\overrightarrow{PQ}(2,1,2)$ wordt deze voorwaarde:

$4s + s - 2 + 4s + 4 = 0 \Leftrightarrow s = -\dfrac{2}{9}$.

Het raakpunt is dan $T\left(\dfrac{5}{9}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{23}{9}\right)$.

De straal van de bol is $|MT| = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(-\dfrac{20}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{14}{9}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{612}}{9} = \dfrac{2\sqrt{17}}{3}$.

Een vergelijking van de bol is dan $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{68}{9}$ of

$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 18x - 36y - 18z - 14 = 0$.

2 Als α het raakvlak aan de bol is dat PQ omvat, bepaal dan de hoek tussen

a α en vl(P,Q,M)

Het raakvlak α dat PQ omvat, staat loodrecht op vl(P, Q, M), want vl(P, Q, M) omvat de loodlijn MT op α. De gevraagde hoek is dus 90°.

b α en QM

Omdat $MT \perp \alpha$ is $\overrightarrow{MT}\left(-\dfrac{4}{9}, -\dfrac{20}{9}, \dfrac{14}{9}\right)$ en dus ook $\vec{n}(2, 10, -7)$ een normaalvector van α.

Met $\overrightarrow{QM}(-2, 1, -4)$ vinden we de gevraagde hoek β uit:

$\cos(90° - \beta) = \dfrac{2 \cdot (-2) + 10 \cdot 1 - 7 \cdot (-4)}{\sqrt{4 + 100 + 49} \cdot \sqrt{4 + 1 + 16}} = \dfrac{34}{\sqrt{153} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow \beta = 36°51'26''$.

Opdracht 35 bladzijde 204

Bepaal een vergelijking van de bol die raakt aan elk van de vlakken
$\alpha \leftrightarrow x - 2z - 8 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - z + 5 = 0$ en waarvan het middelpunt op de rechte $a \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ ligt.

Zijn er meerdere oplossingen mogelijk?

– Het middelpunt M ligt op a en heeft dus een coördinaat van de vorm (–2,0, s).

Er geldt:

$$d(M,\alpha) = d(M,\beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2-2s-8|}{\sqrt{1+0+4}} = \frac{|-4-s+5|}{\sqrt{4+0+1}}$$

$$\Leftrightarrow |-10-2s| = |1-s|$$

$$\Leftrightarrow -10-2s = 1-s \text{ of } -10-2s = -1+s$$

$$\Leftrightarrow s = -11 \text{ of } s = -\frac{9}{3} = -3$$

Er zijn bijgevolg twee mogelijke middelpunten: $M_1(-2,0,-11)$ en $M_2(-2,0,-3)$.

– De bijbehorende stralen zijn:

$$r_1 = d(M_1,\alpha) = \frac{|-2+22-8|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \text{ en } r_2 = d(M_2,\alpha) = \frac{|-2+6-8|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

– De gevraagde bollen zijn:

$$(x+2)^2 + y^2 + (z+11)^2 = \frac{144}{5} \text{ en } (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{16}{5}.$$