Hoofdstuk 2

Rationale functies

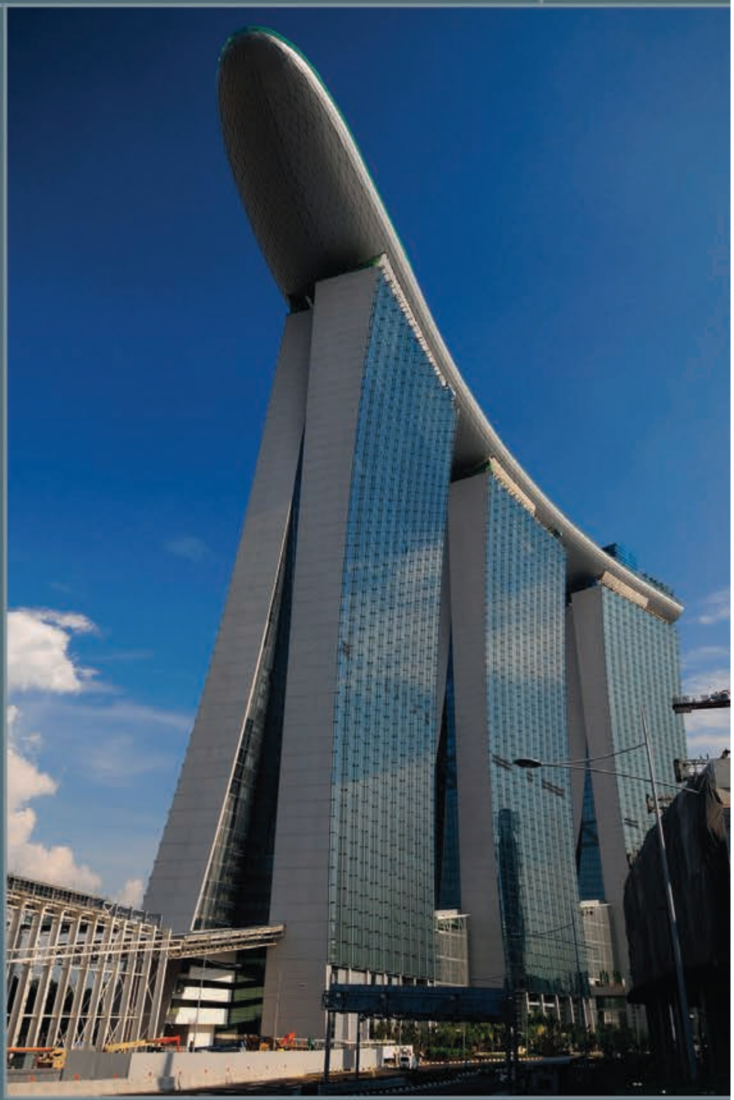
2.1 Domein, nulpunten en tekenonderzoek

2.1.1 Rationale functie, domein en nulpunten
2.1.2 Tekenonderzoek

2.2 Verticale asymptoten en openingen

2.2.1 Gedrag van de grafiek in de buurt van een nulpunt van de noemer
2.2.2 Verticale asymptoten en openingen uit het voorschrift afleiden

2.3 Gedrag op oneindig



Opdracht 1 bladzijde 66
Gegeven zijn een aantal grafieken en een aantal functievoorschriften.
Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift? Los op zonder rekentoestel.

- grafiek A hoort bij 6 $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
- grafiek B hoort bij 2 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
- grafiek C hoort bij 4 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$
- grafiek D hoort bij 1 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$

Opdracht 2 bladzijde 68
Bepaal het domein en de nulpunten van de functies met voorschrift

1 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}$
geen nulpunt

2 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$
  $D = 1$
- $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = -3$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$
nulpunt : 2

3 $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^3-2x^2-5x+6}$

- Horner :

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = 3$ of $x = -2$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1, 3, -2\}$
geen nulpunt

4 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-3x^4}$

- $x^2 - 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ of $1 - 3x^2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ of $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

geen nulpunt

Opdracht 3 bladzijde 70

Los de ongelijkheden op m.b.v. een tekentabel.

1 $\dfrac{-4x+3}{2x+5} > 0$

- $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$
- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$

x		$\frac{-5}{2}$		$\frac{3}{4}$	
$-4x + 3$	+	+	+	0	−
$2x + 5$	−	0	+	+	+
y	−	|	+	0	−

$\dfrac{-4x+3}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{2} < x < \dfrac{3}{4}$

2 $\dfrac{3x^2-x}{64-x^3} \leqslant 0$

- $3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{3}$
- $64 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x		0		$\frac{1}{3}$		4	
$3x^2 - x$	+	0	−	0	+	+	+
$64 - x^3$	+	+	+	+	+	0	−
y	+	0	−	0	+	|	−

$\dfrac{3x^2-x}{64-x^3} \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$ of $x > 4$

3 $\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+2x+1} \geqslant 0$

- Horner:

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	0

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x^2 - 3x + 2 = 0$
$D = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = 2$

- $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
(dubbel)

x		-1		1		2	
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$
$x^2 + 2x + 1$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$

$\dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x + 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \text{ of } x = 1$

Opdracht 4 bladzijde 70

1 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ boven die van $g(x) = 1$?

$\dfrac{x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-(1-x)}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{1-x} > 0$

- $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x		$\frac{1}{2}$		1	
$2x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f - g$	$-$	0	$+$	|	$-$

De grafiek van f ligt boven de grafiek van g $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 1$

2 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ onder die van $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$?

$$\frac{x}{1-x} < \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(1+x)-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x^2-1+2x-x^2}{1-x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{1-x^2} < 0$$

- $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
- $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$

x		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f-g$	$+$	|	$\underline{-}$	0	$+$	|	$\underline{-}$

De grafiek van f ligt onder die van $g \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$ of $x > 1$

Opdracht 5 bladzijde 71
Los de ongelijkheden op.

1 $\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x+1)^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x+1)^2}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2-2x-1}{(x+1)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-2}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

- $-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (dubbel nulpunt)

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$
y	$\underline{+}$	|	$-$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x < -1$$

2 $\dfrac{x}{4x-2} \leqslant \dfrac{4x+2}{x}$

$$\frac{x}{4x-2} \leqslant \frac{4x+2}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{4x-2} - \frac{4x+2}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 16x^2 + 4}{(4x-2)\,x} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-15x^2 + 4}{(4x-2)\,x} \leqslant 0$$

- $-15x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ of $x = \dfrac{-2\sqrt{15}}{15}$
- $(4x-2)\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{2}$

x		$\frac{-2\sqrt{15}}{15}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2\sqrt{15}}{15}$	
$-15x^2 + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(4x-2)\,x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$

$$\frac{x}{4x-2} \leqslant \frac{4x+2}{x} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-2\sqrt{15}}{15} \text{ of } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ of } x \geqslant \frac{2\sqrt{15}}{15}$$

3 $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3} > \dfrac{-5}{x^2-9}$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{-5}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x^2-9} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 3 + x - 3 + 5}{x^2 - 9} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x^2-9} > 0$$

- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$
- $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = -3$

x		-3		$\frac{-5}{2}$		3	
$2x + 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 9$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{-5}{x^2-9} \Leftrightarrow -3 < x < \frac{-5}{2} \text{ of } x > 3$$

Opdracht 6 bladzijde 72

Een breuk mag geen noemer gelijk aan nul hebben.
Maar wat wanneer de noemer *bijna* gelijk is aan nul? In de volgende twee situaties is dat het geval.

Bereken de quotiënten en voorspel wat er zou gebeuren mocht het gegeven patroon zich verderzetten.

1 $\frac{1,9}{0,1}$; $\frac{1,99}{0,01}$; $\frac{1,9999}{0,0001}$; $\frac{1,999999}{0,000001}$

$$\frac{1,9}{0,1} = 19 \quad \frac{1,99}{0,01} = 199 \quad \frac{1,9999}{0,0001} = 19999 \quad \frac{1,999999}{0,000001} = 1999999$$

Als het patroon zich verder zet nadert het quotiënt tot oneindig.

2 $\frac{0,3}{0,1}$; $\frac{0,039}{0,01}$; $\frac{0,0003999}{0,0001}$; $\frac{0,00000399999}{0,000001}$

$$\frac{0,3}{0,1} = 3 \quad \frac{0,039}{0,01} = 3,9 \quad \frac{0,0003999}{0,0001} = 3,999 \quad \frac{0,00000399999}{0,000001} = 3,99999$$

Als het patroon zich verder zet nadert het quotiënt tot 4.

Opdracht 7 bladzijde 75

Een grafiek van een rationale functie kan in de buurt van een verticale asymptoot op vier manieren liggen:

1 Onderzoek de ligging van de grafieken van de volgende functies in de buurt van $x = 1$.

a) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ type B

b) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$ type C

c) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ type B

d) $f(x) = \frac{-x^2}{(x - 1)^2}$ type A

e) $f(x) = \frac{-x}{x - 1}$ type D

2 Kun je een methode vinden om enkel op basis van het voorschrift te bepalen hoe de grafiek van een functie f ligt t.o.v. de verticale asymptoot met vergelijking $x = a$?

d.m.v. tekenonderzoek

a)

x		1	
1	+	+	+
$x - 1$	−	0	+
$f(x)$	−	)|(	+

↓ type B

d)

x		0		1	
$-x^2$	−	0	−	−	−
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$f(x)$	−	0	−	)|(	−

↓ type A

b)

x		1	
1	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	0	*+
$f(x)$	+	)|(	+

↓ type C

e)

x		0		1	
$-x$	+	0	−	−	−
$x - 1$	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	)|(	−

↓ type D

c)

x		0		1	
x	−	0	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	)|(	+

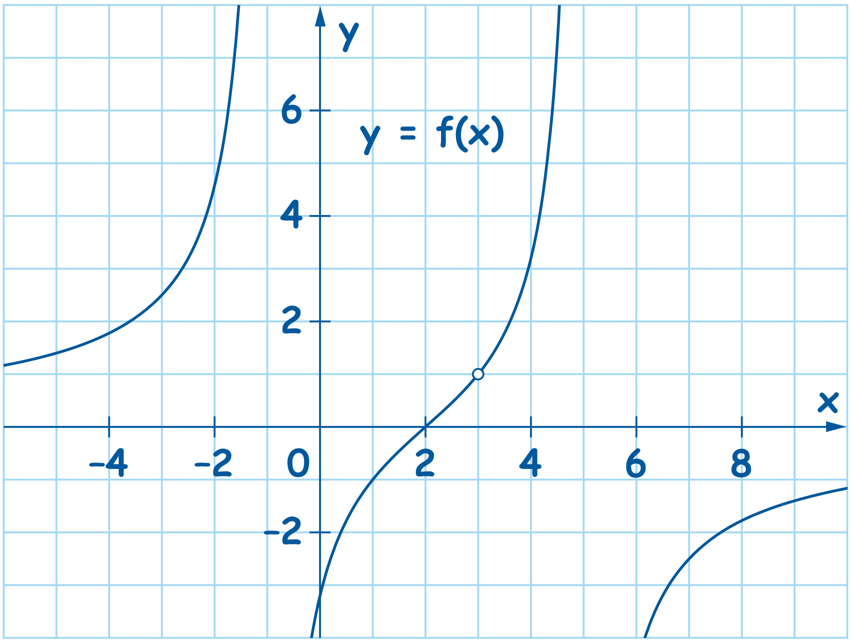
↓ type B

3 Stel een voorschrift op van een functie met een grafiek die zoals C ligt t.o.v. de verticale asymptoot met vergelijking $x = 3$ en waarvan de grafiek door de oorsprong gaat.

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)^2}$$ (bijvoorbeeld)

Opdracht 8 bladzijde 75

Schets de grafiek van een functie met een opening voor $x = 3$, twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -1$ en $x = 5$ en een nulpunt voor $x = 2$.



Opdracht 9 bladzijde 76

Ga bij de onderstaande functies na of de grafiek een opening of een verticale asymptoot heeft voor $x = 2$.

Zie je een verband met het voorschrift?

1 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

verticale asymptoot, 2 is een nulpunt van de noemer en niet van de teller

2 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)}$

opening, 2 is een nulpunt van teller en noemer

3 $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)^2}$

verticale asymptoot, 2 is nulpunt van de teller en een dubbel nulpunt van de noemer

Opdracht 10 bladzijde 76

Voor $x = -2$ zijn de teller en de noemer van de functie met voorschrift

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ nul. Beide bevatten dus een factor $x + 2$.

Na ontbinden vind je $f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x-1)}$.

Verklaar waarom f niet dezelfde functie is als de functie g met voorschrift

$g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

–2 behoort niet tot domf en wel tot domg. De grafiek van f ziet er hetzelfde uit als die van g, met dat verschil dat er een opening is voor x = –2 bij de grafiek van f.

Voor de functie f is –2 een nulpunt van de teller en van de noemer, bij de functie g van geen van beiden.

Opdracht 11 bladzijde 78

Plaats bij elke grafiek het juiste functievoorschrift. Los op zonder rekentoestel.

grafiek	1	2	3	4
functievoorschrift	B	D	F	E

Opdracht 12 bladzijde 78

Bepaal voor de volgende functies de eventuele verticale asymptoten en openingen van de grafiek.

1 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-16}$

D = 36

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -2$
- $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -4$

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+4)}$$

VA $x = -4$

opening $\left(4, \dfrac{3}{4}\right)$ (vereenvoudigd functievoorschrijft : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$ mits $x \neq 4$)

2 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-8x+16}$

D = 36

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -2$
- $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (dubbel)

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)^2}$$

VA $x = 4$

(vereenvoudigd functievoorschrijft : $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$)

3 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (dubbel)

VA $x = -2$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

  $D = 1$

- $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = -3$

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)}$$

VA $x = -3$

opening $(-2, -4)$ (vereenvoudigd functievoorschrijft : $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$ mits $x \neq -2$)

Opdracht 13 bladzijde 79

Welke van de volgende functies zijn gelijk aan elkaar?

De functies f, g en i zijn gelijk aan elkaar

Opdracht 14 bladzijde 79

Geef een mogelijk voorschrift van een rationale functie met 0 als nulpunt en waarvan de grafiek een opening in $(3,4)$ heeft en als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 2$.

$$f(x) = \frac{ax(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

$$g(x) = \frac{ax}{(x - 1)(x - 2)}$$

$(3, 4)$ is opening van f dus $g(3) = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{a \cdot 3}{(3 - 1)(3 - 2)} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}$$

dus $f(x) = \dfrac{8x(x - 3)}{3(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

Opdracht 15 bladzijde 80

De volgende functies zijn gegeven.

$$f_1(x)=\frac{2x-3}{x^2+5} \qquad f_2(x)=\frac{-3x^2-x}{x^2+x-2} \qquad f_3(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$$

Wat gebeurt er met de functiewaarden voor zeer grote waarden van x?
Verklaar dit op basis van het voorschrift.

$$f_1(x)=\frac{2x-3}{x^2+5} \to 0 \text{ als } x \to +\infty$$

De graad van de noemer is hoger dan de graad van de teller, de noemer zal dus sneller stijgen voor grote waarden van x. Hierdoor zal de breuk tot 0 naderen.

$$f_2(x)=\frac{-3x^2-x}{x^2+x-2} \to -3 \text{ als } x \to +\infty$$

De graad van de teller en die van de noemer zijn gelijk, de teller en de noemer stijgen dus even snel voor grote waarden van x. Daardoor zal de breuk naderen tot –3 (het quotiënt van de coëfficiënten van de hoogstegraadstermen in teller en noemer).

$$f_3(x)=\frac{x^2+2x}{x-1} \to +\infty \text{ als } x \to +\infty$$

De graad van de teller is groter dan die van de noemer; de teller zal dus sneller stijgen voor grote waarden van x. Wanneer we de deling uitvoeren, kunnen we aantonen dat de breuk nadert tot de rechte y = x + 3.

$$\begin{array}{rr|l} & x^2+2x & x-1 \\ \cline{3-3} - & x^2-x & x+3 \\ \cline{2-2} & 3x & \\ - & 3x-3 & \\ \cline{2-2} & 3 & \end{array}$$

Opdracht 16 bladzijde 85

Bepaal de verticale, horizontale en schuine asymptoten van de grafiek van de volgende functies.

1 $f: x \mapsto \dfrac{2x-1}{4-3x}$ VA $x = \dfrac{4}{3}$ HA $y = \dfrac{-2}{3}$ geen SA

2 $f: x \mapsto \dfrac{-x^2+5}{x^2+2x+1}$ VA $x = -1$ HA $y = -1$ geen SA

3 $f: x \mapsto \dfrac{2x^2-1}{x+2}$ VA $x = -2$ geen HA SA $y = 2x - 4$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^2 \qquad\quad -1 & x+2 \\ \cline{3-3}
- & 2x^2 + 4x & 2x-4 \\ \cline{2-2}
 & -4x - 1 & \\
- & -4x - 8 & \\ \cline{2-2}
 & 7 &
\end{array}$$

4 $f: x \mapsto \dfrac{(x-3)(5-x)}{x^2+4}$ geen VA HA $y = -1$ geen SA

5 $f: x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x-1}$ VA $x = 1$ geen HA SA $y = x + 3$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + 2x & x-1 \\ \cline{3-3}
- & x^2 - x & x+3 \\ \cline{2-2}
 & 3x & \\
- & 3x - 3 & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}$$

6 $f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+8}$ VA $x = -2$ HA $y = 0$ geen SA

7 $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ geen VA geen HA SA $y = x$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{x^3 + x} & x \\ -2x & \end{array}$$

8 $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x}{x + 3}$ VA $x = -3$ geen HA geen SA

Opdracht 17 bladzijde 85

Geef het voorschrift van een functie met nulpunt 2 en waarvan de grafiek een verticale asymptoot met vergelijking $x = 4$ en een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$ heeft.

bijvoorbeeld $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x - 4)^2}$

Opdracht 18 bladzijde 85

Geef het functievoorschrift van een gebroken rationale functie waarvan de grafiek een schuine asymptoot met vergelijking $y = x$ heeft.

bijvoorbeeld $f(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ want

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 1 & x \\ \cline{2-2} -\;\underline{x^2 } & x \\ 1 & \end{array}$$

Opdracht 19 bladzijde 88

Welke grafiek hoort bij welke functie? Los op zonder rekentoestel.

grafiek A hoort bij $f_1(x) = \dfrac{1}{x+2}$

grafiek B hoort bij $f_5(x) = \dfrac{5x-25}{x^2}$

grafiek C hoort bij $f_3(x) = \dfrac{x-2}{-x^3+9x}$

Opdracht 20 bladzijde 89

Geef van elke functie het domein, de nulpunten en de tekentabel.

1 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$

- dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D = 16$

- nulpunten : $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

x		-3		-1		1	
x^2+2x-3	+	0	−	−	−	0	+
$x+1$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	|	−	0	+

2 $f(x)=\dfrac{-x^3+x^2-2}{x^2}$

- dom f $= \mathbb{R}_0$

- nulpunten : $-x^3 + x^2 - 2 = 0$

$(x+1)(-x^2+2x-2) = 0$

↳ geen nulpunten

$\Leftrightarrow x = -1$ $\qquad D = -4$

	-1	1	0	-2
-1		1	-2	2
	-1	2	-2	0

x		-1		0	
$-x^3+x^2-2$	+	0	−	−	−
x^2	+	+	+	0	+
$f(x)$	+	0	−	|	−

3 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^4+2x^2+1}$

- $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 0$ geen opl.
  domf $= \mathbb{R}$
- nulpunten $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = -3$

x		-3		3	
$x^2 - 9$	+	0	−	0	+
$x^4 + 2x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+

4 $f(x)=\dfrac{15x^2-13x+2}{-15x^3-7x^2+2x}$

- $-15x^3 - 7x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $-15x^2 - 7x + 2 = 0$

  $D = 169$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{-2}{3}$ of $x = \dfrac{1}{5}$

  domf $= \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-2}{3}, 0, \dfrac{1}{5}\right\}$

  $D = 49$
- nulpunten $15x^2 - 13x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ of $x = \dfrac{1}{5}$

x		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{3}$	
$15x^2 - 13x + 2$	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$-15x^3 - 7x^2 + 2x$	+	0	−	0	+	0	−	−	−
$f(x)$	+	|	−	|	+	|	+	0	−

Opdracht 21 bladzijde 89

Bepaal de verticale asymptoten en de openingen van de grafieken van de functies met voorschrift

1 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

VA $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$

geen openingen

2 $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+2}$

- $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 3$
- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

VA $x = -2$

geen openingen

3 $f(x)=\dfrac{3x}{x(x-1)}$

- $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 1$

VA $x = 1$

opening $(0, -3)$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \text{ mits } x \neq 0$$

4 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$

- $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (dubbel)

$D = 16$

- $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} \text{ mits } x \neq 1$$

VA $x = -3$

opening $(1,0)$

5 $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

- $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \text{ mits } x \neq 2$$

VA $x = -2$

opening $(2,3)$

6 $f(x)=\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-1}{x+2}$

$$= \frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+4x+4-x^2+2x-1}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{6x+3}{(x-1)(x+2)}$$

- $6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
- $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -2$ VA $x = 1$ en $x = -2$

geen openingen

Opdracht 22 bladzijde 89

Hoeveel reële nulpunten heeft de functie met voorschrift

$f(x)=\frac{x(x^2+1)(x^2-x-6)}{(x-3)^2(5-x)}$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

(Bron © VWO 1985-1986, eerste ronde)

$x(x^2 + 1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 + 1 = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0$

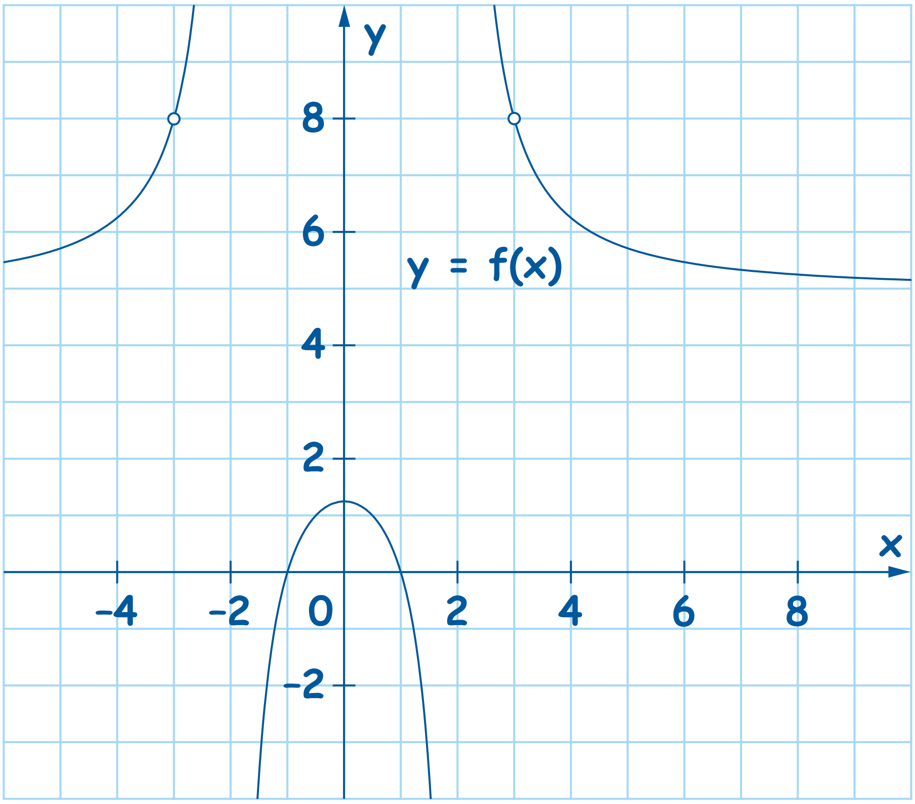
$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -2$ of $x = 3$

$(x - 3)^2(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (dubbel) of $x = 5$

3 is geen nulpunt van de functie, dus zijn er 2 nulpunten (0 en –2) $\rightarrow$ antwoord B

Opdracht 23 bladzijde 89

Schets de grafiek van een functie met nulpunten 1 en −1, waarvan de grafiek als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 2$ en $x = -2$ heeft en openingen voor $x = 3$ en voor $x = -3$ heeft.



Opdracht 24 bladzijde 89

Bepaal telkens het voorschrift van een rationale functie

1 met nulpunt 2 en waarvan de grafiek als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 4$ en $x = -3$ heeft;

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x - 4)(x + 3)}$$

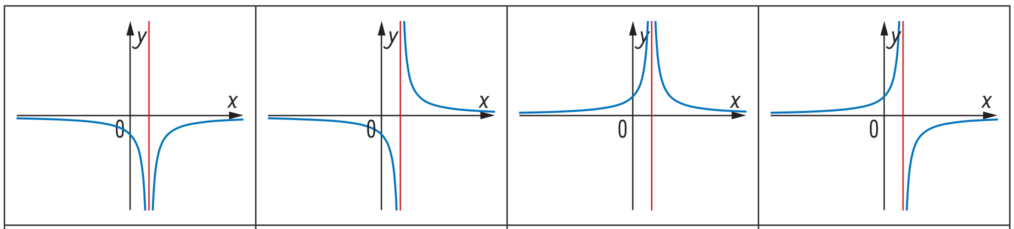
2 waarvan de grafiek door de oorsprong gaat, de rechte met vergelijking $x = 1$ als verticale asymptoot heeft en voor $x = 3$ een opening heeft.

$$f(x) = \frac{x(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)}$$

Opdracht 25 bladzijde 90
Beantwoord de vragen voor de gegeven functies.

a Bepaal de eventuele verticale asymptoten en openingen van de grafiek van f.

b Voor de ligging van de grafiek t.o.v. de verticale asymptoot zijn er vier mogelijkheden:



A	B	C	D

Bepaal hoe de grafiek van f ligt t.o.v. elke verticale asymptoot.

c Geef, indien mogelijk, het vereenvoudigd functievoorschrift.

1 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}$

D = 1

a) • $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = 1$ VA $x = -2$

• $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ geen openingen

b)

x		-2		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	0	−	0	+
$x + 2$	−	0	+	+	+	+	+
f(x)	−	|	+	0	−	0	+

type B : als $x \underset{<}{\to} -2$ dan $f(x) \to -\infty$

als $x \underset{>}{\to} -2$ dan $f(x) \to +\infty$

c) geen vereenvoudigd functievoorschrift want geen opening

2 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

a) • $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$ VA $x = 3$

$D = 1$

• $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = 3$ opening voor $x = 2$

b)

x	-2		2		3	
$x^2 - 4$	+ 0	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+ +	+	0	-	0	+
f(x)	+ 0	-	|	-	|	+

type D : als $x \underset{<}{\rightarrow} 3$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} 3$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

c) vereenvoudigd functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ mits $x \neq 2$ (opening is dus (2,-4))

3 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

a) • $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ VA $x = -1$

• $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$ opening voor $x = 1$

b)

x		-1		1	
$x^3 - 1$	-	-	-	0	+
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
f (x)	-	|	+	|	+

type B : als $x \underset{<}{\rightarrow} -1$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} -1$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

c) vereenvoudigd functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ mits $x \neq 1$ (opening is dus $(1, \frac{3}{2})$)

4 $f(x)=\dfrac{3x^3+4x+1}{-x+1}$

a) • $3x^3 + 4x + 1 = \Leftrightarrow x \approx -0{,}2397$ (met rekentoestel) VA $x = 1$

• $-x + 1 = \Leftrightarrow x = 1$ geen openingen

b)

x		−0,2397		1	
$3x^3 + 4x + 1$	−	0	+	+	+
$-x + 1$	+	+	+	0	−
y	−	0	+	|	−

type D : als $x \underset{<}{\rightarrow} 1$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} 1$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

c) geen openingen dus geen vereenvoudigd functievoorschrift

5 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

a) • $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ geen VA

• $x^2 + 1 = 0$ geen oplossingen geen openingen

b) geen VA dus geen type wat betreft de ligging

c) geen openingen dus geen vereenvoudigd functievoorschrift

6 $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}$

D = 9

a) • $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ of $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$ of $x = 1$ of $x = -1$

b) • $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$

geen VA

opening voor $x = 1$ en voor $x = -1$

geen VA dus geen type wat betreft de ligging

vereenvoudigd functievoorschrift

c) $f(x) = (x - 2)(x + 2)$ mits $x \neq -1$ en $x \neq 1$

(dus openingen $(1, -3)$ en $(-1, -3)$)

Opdracht 26 bladzijde 90

Stel $f(x)=\dfrac{x-a}{x-b}$ voor zekere constanten $a, b \in \mathbb{R}$.

Als $f(1)$ niet gedefinieerd is en $f(2)=0$, dan is $f(0{,}5)$ gelijk aan

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO 2007–2008, tweede ronde)

- f(1) is niet gedefinieerd, dus 1 is een nulpunt van de noemer, dus b = 1
- f(2) = 0 dus a = 2
- $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$
- $f(0{,}5) = \dfrac{\frac{-3}{2}}{\frac{-1}{2}} = 3 \rightarrow$ antwoord D

Opdracht 27 bladzijde 90

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $\dfrac{-3x^2+4x-5}{2x-7} > 0$

D = -44

- $-3x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen
- $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

x		$\frac{7}{2}$	
$-3x^2 + 4x - 5$	-	-	-
$2x - 7$	-	0	+
$f(x)$	+	|	-

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{2}$

2 $\dfrac{x^3-1}{4x^3+4x^2+x} \leqslant 0$

- $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $4x^3 + 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $4x^2 + 4x + 1 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $(2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{-1}{2}$ (dubbel)

x		$\frac{-1}{2}$		0		1	
$x^3 - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x^3 + 4x^2 + x$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	|	$+$	|	$-$	0	$+$

fx) $\leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$

3 $\dfrac{-x^2-3x+4}{x} \geqslant 0$

D = 25

- $-x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ of $x = 1$
- $x = 0$

x		-4		0		1	
$-x^2 - 3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -4$ of $0 < x \leqslant 1$

4 $\dfrac{x^6 - x^4 + x^3 - x}{5x^2 + 12x + 4} < 0$

- $x^6 - x^4 + x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x^4 (x^2 - 1) + x (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x)(x^2 - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$ of $x = -1$

- $5x^2 + 12x + 4 = 0 \overset{D = 64}{\Leftrightarrow} x = -2$ of $x = \dfrac{-2}{5}$

x		-2		-1		$\frac{-2}{5}$		0		1	
$x^6 - x^4 + x^3 - x$	+	+	+	0	+	+	+	0	-	0	+
$5x^2 - 12x + 4$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	|	-	0	-	|	+	0	-	0	+

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ of $-1 < x < \dfrac{-2}{5}$ of $0 < x < 1$

5 $x - 7 + \dfrac{24x + 12}{x^2 + 3x + 2} \geqslant 0$

$\dfrac{(x - 7)(x^2 + 3x + 2) + 24x + 12}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x - 7x^2 - 21x - 14 + 24x + 12}{x^2 + 3x + 2}$

$= \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

- $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1$ of $x^2 - 3x + 2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1$ of $x = 1$ of $x = 2$

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	0

- $x^2 - 3x + 2 = 0 \overset{D = 1}{\Leftrightarrow} x = -2$ of $x = -1$

x		-2		-1		1		2	
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	-	-	-	-	-	0	-	0	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	|	+	|	-	0	-	0	+

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ of $x > 2$ of $x = 1$

Opdracht 28 bladzijde 91

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $\dfrac{x^2-12}{x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-12}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-12-x}{x} < 0$

D = 49

- $x^2 - 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -3$
- $x = 0$

x		-3		0		4	
$x^2 - x - 12$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
y	$\underline{-}$	0	+	|	$\underline{-}$	0	+

$\dfrac{x^2-12}{x} < 1 \Leftrightarrow x < -3$ of $0 < x < 4$

2 $\dfrac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} < 7 \Leftrightarrow \dfrac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} - 7 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x^2+5x+5-7(x^2+x+1)}{x^2+x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-2x-2}{x^2+x+1} < 0$

D = -4

- $-x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen

D = -3

- $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen

x	
$-x^2 - 2x - 2$	-
$x^2 + x + 1$	+
y	$\underline{-}$

$\dfrac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} < 7 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

3 $\dfrac{x}{1-x^2} \geqslant \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-(1-x)(1-x)}{1-x^2} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-(1-2x+x^2)}{1-x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+3x-1}{1-x^2} \geqslant 0$

$D = 5$

- $-x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ of $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
- $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1$ of $x=-1$

x		-1		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$-x^2+3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

$\dfrac{x}{1-x^2} \geqslant \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow x < -1$ of $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 1$ of $x \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

4 $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-4} \leqslant \dfrac{-8}{x^2-16} \Leftrightarrow \dfrac{x-4+x+4-8}{x^2-16} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+8}{x^2-16} \leqslant 0$

- $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$
- $x^2-16=0 \Leftrightarrow x=4$ of $x=-4$

x		-4		4	
$2x+8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-16	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

$\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-4} \leqslant \dfrac{-8}{x^2-16} \Leftrightarrow x < -4$ of $-4 < x < 4$

5 $\frac{x}{x^2-5x+6} > \frac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{(x-2)(x+2)} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)-2(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-2x+6}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+6}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0$

- $x^2 + 6 = 0$ geen oplossingen
- $(x-2)(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = 3$ of $x = -2$

x		-2		2		3	
x^2+6	+	+	+	+	+	+	+
$(x-2)(x-3)(x+2)$	−	0	+	0	−	0	+
y	−	|	$\underline{+}$	|	−	|	$\underline{+}$

$\frac{x}{x^2-5x+6} > \frac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow -2 < x < 2$ of $x > 3$

6 $\frac{x}{x^2-6x+9} + \frac{2}{x^2-7x+12} < \frac{1}{x-3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)^2} + \frac{2}{(x-3)(x-4)} - \frac{1}{x-3} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-4)+2(x-3)-(x-3)(x-4)}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+2x-6-x^2+4x+3x-12}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x-18}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

- $5x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{5}$
- $(x-3)^2(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (dubbel) of $x = 4$

x		3		$\frac{18}{5}$		4	
$5x-18$	−	−	−	0	+	+	+
$(x-3)^2(x-4)$	−	0	−	−	−	0	+
y	+	|	+	0	$\underline{-}$	|	+

$\frac{x}{x^2-6x+9} + \frac{2}{x^2-7x+12} < \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{18}{5} < x < 4$

Opdracht 29 bladzijde 91

Bepaal het voorschrift van een rationale functie

1 die even is en waarvan de grafiek de rechte met vergelijking $x = 3$ als verticale asymptoot heeft;

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

2 die oneven is en waarvan de grafiek de rechte met vergelijking $x = -1$ als verticale asymptoot heeft;

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

3 waarvan de grafiek door de oorsprong gaat, de rechte met vergelijking $x = -1$ als verticale asymptoot heeft en een opening heeft in het punt met coördinaat $(6,3)$.

$$f(x) = \frac{a\,(x - 6)x}{(x + 1)\,(x - 6)}$$

$$\text{stel } g(x) = \frac{ax}{x + 1} \text{ dan is } g(6) = 3 \Leftrightarrow \frac{6a}{7} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$\text{dus } f(x) = \frac{7x\,(x - 6)}{2(x + 1)\,(x - 6)} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

Opdracht 30 bladzijde 91

Bepaal c als je weet dat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^3 - cx^2 + x - 2}$ als verticale asymptoot de rechte met vergelijking $x = 2$ heeft.

2 is geen nulpunt van de teller, dus moet het een (minstens) enkelvoudig nulpunt van de noemer zijn als $x = 2$ een verticale asymptoot is, dus

$2^3 - c \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4c = 0$

$\Leftrightarrow c = 2$

Opdracht 31 bladzijde 92

Bepaal een mogelijk voorschrift van de functies waarvan de grafiek gegeven is. De verticale asymptoten zijn in het rood getekend.

1) $f(x) = \dfrac{a\,(x^2 - 16)}{x^2 - 9}$ $\quad f(0) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-16a}{-9} = -1 \Leftrightarrow a = \dfrac{-9}{16}$

dus $f(x) = \dfrac{-9\,(x^2 - 16)}{16\,(x^2 - 9)}$

2) $f(x) = \dfrac{x\,(x-2)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+2)}{(x-2)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+2)} = \dfrac{x\,(x^2-1)\,(x^2-4)}{(x^2-1)\,(x^2-4)}$

3) $f(x) = \dfrac{a}{(x^2-9)\,(x^2-16)}$ $\quad f(0) = 10 \Leftrightarrow \dfrac{a}{-9\cdot(-16)} = 10 \Leftrightarrow a = 1440$

dus $f(x) = \dfrac{1440}{(x^2-9)\,(x^2-16)}$

4) $f(x) = \dfrac{(-x^2 + 4)\,(x-1)}{x-1}$

Opdracht 32 bladzijde 92

Een cilindervormig blikje frisdrank heeft een inhoud van 0,33 l. De oppervlakte van het materiaal dat nodig is om dit blikje te maken, hangt af van de hoogte *h* en van de straal *r* van het boven– en grondvlak.

1 Toon aan dat $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$ (met *h* en *r* in cm).

$0{,}33\ \text{l} = 0{,}33\ \text{dm}^2 = 330\ \text{cm}^2$

$V = \pi r^2 h$

$330 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{330}{\pi r^2}$

2 Noem *A* de totale oppervlakte van het blikje.

Toon aan dat $A = \dfrac{2\pi r^3 + 660}{r}$.

$A = 2\cdot\pi r^2 - 2\pi r\cdot h = 2\pi r^2 + \dfrac{2\pi r\cdot 330}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3 + 660}{r}$

3 Hoe groot is de straal *r*, op 1 mm nauwkeurig, bij een minimale totale oppervlakte van het blikje?

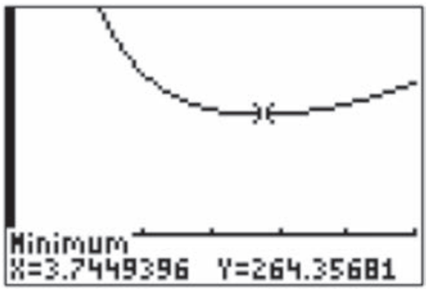
Wat is de hoogte van zo'n blikje?

We plotten de grafiek van *A* met het grafisch rekentoestel, met bijvoorbeeld als vensterinstellingen: $x_{min} = 0$; $x_{max} = 6$

$y_{min} = -100$; $y_{max} = 500$.

We vinden een minimum voor $r \approx 3{,}75$ cm; nl. $A \approx 264$ cm^2

De hoogte is dan $h = \dfrac{330}{\pi \cdot 3{,}75^2} = 7{,}50$ cm



Opdracht 33 bladzijde 93

Thomas wil een rechthoekig gedeelte van een stuk grond omheinen. Het moet een oppervlakte van 1200 m^2 hebben. Het stuk grond grenst aan een gebouw dat aan één zijde als afsluiting dient. De afsluiting evenwijdig met het gebouw kost € 30 per meter en die aan de andere twee zijden € 20 per meter.

Voor welke afmetingen van het stuk grond is de kostprijs minimaal?

$xy = 1200 \Leftrightarrow y = \dfrac{1200}{x}$

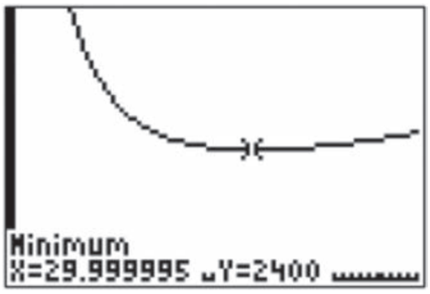
kostprijs: $f(x) = 2x \cdot 20 + y \cdot 30$

$= 40x + \dfrac{36000}{x}$

We plotten de grafiek met bijvoorbeeld als vensterinstellingen

$x_{min} = 0$; $x_{max} = 50$;

$y_{min} = 0$; $y_{max} = 5000$



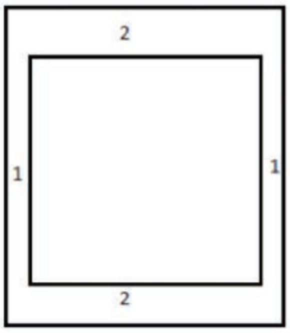
We vinden een minimum voor $x = 30$ m; dan is de kostprijs € 2400.

De zijden loodrecht op het gebouw meten 30 m, de zijde parallel aan het gebouw meet 40 m.

Opdracht 34 bladzijde 93

Het bedrukte gedeelte van een rechthoekig blad is 200 cm².

Bepaal het voordeligste formaat (dit is het formaat met de kleinste oppervlakte) als er links en rechts 1 cm en onder en boven 2 cm wit moet blijven.



$h \cdot b = 200 \Leftrightarrow h = \frac{200}{b}$

oppervlakte blad : $A = (h + 4)(b + 2)$

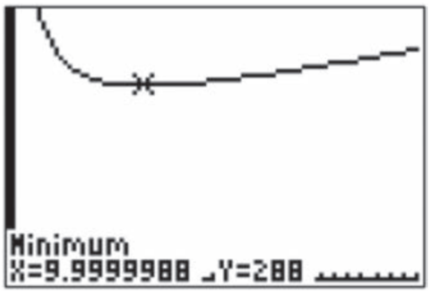
$= hb + 2h + 4b + 8$

$= 208 + 4b + \frac{400}{b}$

Plot de grafiek met mogelijke vensterinstellingen

$x_{min} = 0;\ x_{max} = 30;$

$y_{min} = 0;\ y_{max} = 400$



We vinden een minimum voor x = 10 cm. De oppervlakte van het blad is dan 288 cm². De breedte van het bedrukt gedeelte is 10 cm, de hoogte 20 cm.

Opdracht 35 bladzijde 93

Hoeveel gehele oplossingen heeft de ongelijkheid $\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{4}$?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

(Bron © VWO 2007–2008, tweede ronde)

$\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x - 1| < 4$ mits $x \neq 1$

x mag gelijk zijn aan 4, 3, 2, 0, –1, –2

dus antwoord B: 6

Opdracht 36 bladzijde 93

Bepaal alle horizontale, verticale en schuine asymptoten van de grafiek van de functies met voorschrift

1 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

VA $x = 2$

gr (t(x)) = gr(n(x)) dus HA $y = 1$

geen SA

2 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

VA $x = -1$

gr (t(x)) = gr(n(x))+1 dus SA $y = x - 2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{5-5}
-\;\; x^3 & + 2x^2 & + x & & x - 2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & - x & & \\
- & -2x^2 & - 4x & - 2 & \\ \cline{1-4}
 & & 3x & + 2 &
\end{array}
$$

geen HA

3 $f(x)=4+\dfrac{x}{x^2-1}$

$f(x) = 4 + \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{4x^2 - 4 + x}{x^2 - 1}$

VA $x = 1$ of $x = -1$

gr (t(x)) = gr(n(x)) dus HA $y = 4$

4 $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+x-6}$

$D = 25$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -3$

VA $x = 2;\ x = -3$

gr (t(x)) < gr(n(x)) dus HA $y = 0$

5 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+1}$

$D = 25$

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 4$

geen VA want -1 is ook nulpunt van de teller

gr (t(x)) = gr(n(x)) +1 dus SA $y = x + 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + 3x - 4 & x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^2 + x & x + 2 \\ \cline{2-2}
 & 2x - 4 & \\
- & 2x + 2 & \\ \cline{2-2}
 & -6 &
\end{array}
$$

Opdracht 37 bladzijde 93

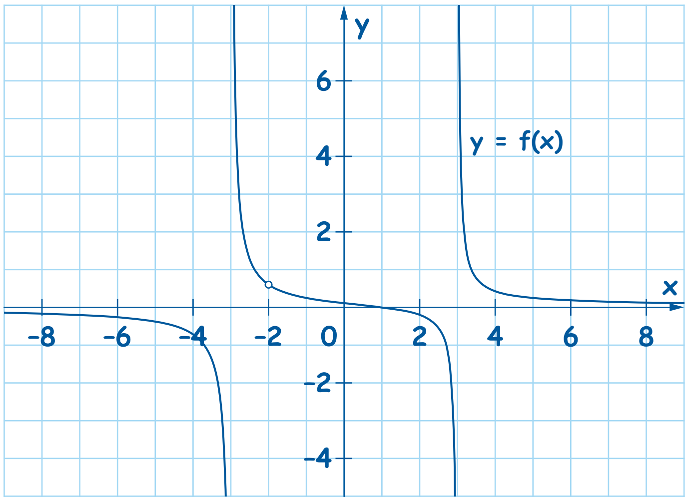
Toon aan dat de grafiek van de functie met voorschrift $g(x)=x^2-2x+7$ de asymptotische kromme is van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+3}$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 + x^2 + x + 1 & x + 3 \\ \cline{3-3}
- & x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x + 7 \\ \cline{2-2}
 & -2x^2 + x + 1 & \\
- & -2x^2 - 6x & \\ \cline{2-2}
 & 7x + 1 & \\
- & 7x + 21 & \\ \cline{2-2}
 & -20 &
\end{array}
$$

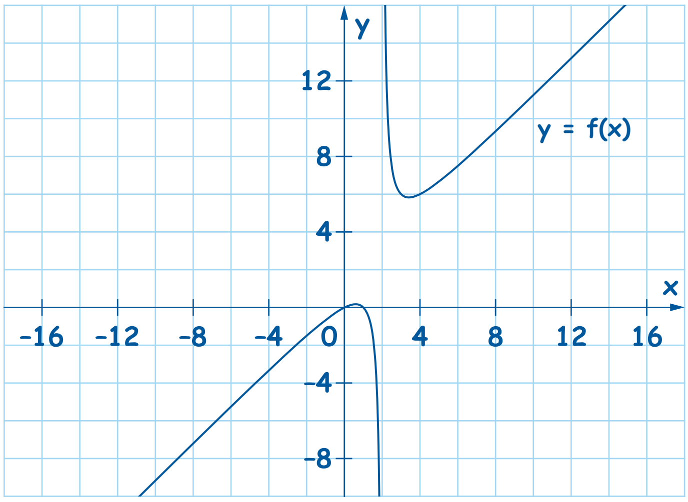
$y = x^2 - 2x + 7$ is de asymtotische kromme van de grafiek van f(x)

Opdracht 38 bladzijde 94
Maak een ruwe schets van de grafiek van de gegeven functies.
Gebruik geen rekentoestel.

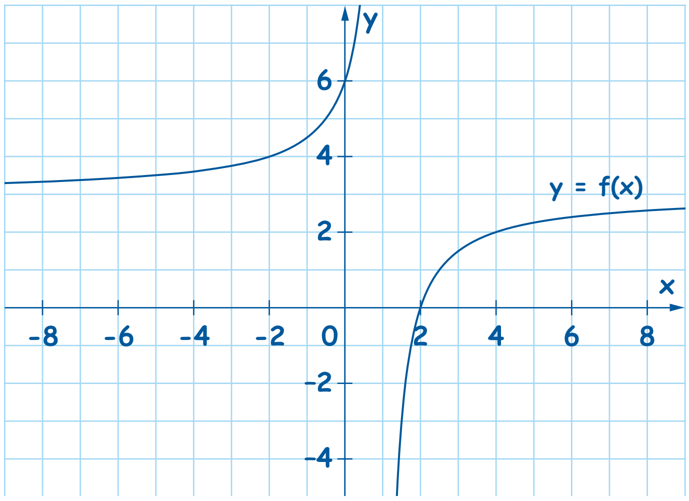
1 $f: x \mapsto \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2-9)}$



2 $f: x \mapsto \dfrac{x(x-1)}{(x-2)}$



3 $f: x \mapsto \dfrac{3(x-2)}{(x-1)}$



Opdracht 39 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + 27}{x - a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Bepaal a zodat de grafiek van f een verticale en een horizontale asymptoot heeft.

horizontale asymptoot: gr(t(x)) ⩽ gr(n(x)); dus a = 0

Dan is er ook een VA: x = 0

2 Bepaal a zodat de grafiek van f een rechte is met een opening voor $x = a$.

a moet nulpunt zijn van de teller (en van de noemer)

dus $a^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

3 Bepaal a zodat de grafiek van f een verticale en een schuine asymptoot heeft.

$a \neq 0$ en $a \neq -3$

Dan is gr(t(x)) = gr(n(x)) + 1 dus is er een schuine asymptoot.

a is dan geen nulpunt van de teller dus x = a is VA.

Opdracht 40 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x+2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Voor welke waarde van a is de grafiek van f een rechte met een opening?

-2 moet een nulpunt zijn van de teller, dus $4 - 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$

2 Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f voor de andere waarden van a.

VA $x = -2$

$gr(t(x)) = gr(n(x))$ dus SA $y = x - 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + x - a & x + 2 \\
\cline{3-3}
- & x^2 + 2x & x - 1 \\
\cline{2-2}
 & -x - a & \\
- & -x - 2 & \\
\cline{2-2}
 & -a + 2 &
\end{array}
$$

Opdracht 41 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x)=\dfrac{ax^3+x^2-9ax-7}{x^2-9}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Voor welke waarde van a heeft de grafiek van f een horizontale asymptoot?

$gr(t(x)) \leqslant gr(n(x))$ dus $a = 0$

2 Geef een vergelijking van deze horizontale asymptoot.

$y = 1$

3 Waarom heeft de grafiek van f geen opening voor $x = 3$ en ook niet voor $x = -3$, ongeacht de waarde van a?

3 en -3 zijn geen nulpunten van de teller, ongeacht de waarde van a:

$a \cdot 3^3 + 3^2 - 9a \cdot 3 - 7 = 2 \neq 0$

$a(-3)^3 + (-3)^2 - 9a(-3) - 7 = 2 \neq 0$

4 Bepaal een vergelijking van elke verticale asymptoot van de grafiek van f.

$x = 3;\ x = -3$

5 Bepaal een vergelijking van de schuine asymptoot van de grafiek van f, in functie van a.

$$\begin{array}{rrrr|l} ax^3 & +\,x^2 & -\,9ax & -\,7 & x^2-9 \\ \cline{5-5} ax^3 & & -\,9ax & & ax+1 \\ \cline{1-4} & x^2 & & -\,7 & \\ & x^2 & & -\,9 & \\ \cline{2-4} & & & 2 & \end{array}$$

SA $y = ax + 1$

6 Door welk punt gaan al deze schuine asymptoten?

door $(0, 1)$

Opdracht 42 bladzijde 95

Bereken a en b zodat $y = 4x + 3$ een vergelijking is van de schuine asymptoot van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x - 2}$.

$$\begin{array}{r|l} ax^2 + bx + 3 & x-2 \\ \cline{2-2} ax^2 - 2ax & ax + b + 2a \\ \cline{1-1} (b+2a)x + 3 & \\ (b+2a)x - 2b - 4a & \\ \cline{1-1} 3 + 2b + 4a & \end{array}$$

$$ax + b + 2a = 4x + 3$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 - 8 = -5 \end{cases}$$

Opdracht 43 bladzijde 95

Bepaal a, b en c als de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 4}{x + c}$ de rechten met vergelijking $x = 2$ en $y = x + 4$ als asymptoten heeft.

VA $x = 2$ dus $c = -2$

SA $y = x + 4$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & ax^2 + bx + 4 & x - 2 \\ \cline{3-3}
- & ax^2 - 2ax & ax + b + 2a \\ \cline{2-2}
 & (b + 2a)x + 4 & \\
- & (b + 2a)x - 2b - 4a & \\ \cline{2-2}
 & + 2b + 4a &
\end{array}
$$

$$
x + 4 = ax + b + 2a \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 2 = 2 \end{cases}
$$

Opdracht 44 bladzijde 95

Bepaal a en b als de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{x - b}$ de parabool met vergelijking $y = 3x^2 + 6x + 12$ als asymptotische kromme heeft.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & ax^3 + \qquad\qquad b & x - b \\ \cline{3-3}
- & ax^3 - abx^2 & ax^2 + abx + ab^2 \\ \cline{2-2}
 & abx^2 + \qquad b & \\
- & abx^2 - ab^2x & \\ \cline{2-2}
 & ab^2x + b & \\
- & ab^2x - ab^3 & \\ \cline{2-2}
 & b + ab^3 &
\end{array}
$$

$$
ax^2 + abx + ab^2 = 3x^2 + 6x + 12
$$

$$
\begin{cases} a = 3 \\ ab = 6 \\ ab^2 = 12 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{6}{3} = 2 \\ b^2 = \dfrac{12}{3} = 4 \end{cases}
$$

dus $a = 3$ en $b = 2$

Opdracht 45 bladzijde 95

Bepaal een gebroken rationale functie

1 met 3 en 4 als nulpunten en waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $x = 2$ en $y = 1$ heeft;

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)^2} \text{ (bijvoorbeeld)}$$

2 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $x = -3$ en $y = 2$ heeft;

$$f(x) = \frac{2x}{x + 3} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

3 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $y = x + 2$ en $x = 4$ heeft;

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 4}$$

$$\begin{array}{l|l}
ax^2 + bx + c & x - 4 \\ \cline{2-2}
ax^2 - 4ax & ax + (b + 4a) \\ \cline{1-1}
(b + 4a)x + c & \\
(b + 4a)x - 4b - 16a & \\ \cline{1-1}
\qquad c + 4b + 16a &
\end{array}$$

$$ax + b + 4a = x + 2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 4a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - 4 = -2 \end{cases} \qquad c \text{ is willekeurig, bijv. } c = 0$$

$$\text{Dus: } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 4} \text{ (bijvoorbeeld)}$$

4 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $y = -x - 1$, $x = 1$ en $x = 3$ heeft.

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-1)(x-3)}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & ax^3 + bx^2 + \quad\quad cx + d & x^2 - 4x + 3 \\ \cline{3-3}
- & ax^3 - 4ax^2 + \quad\quad 3ax & ax + (b + 4a) \\ \cline{2-2}
 & (b + 4a)x^2 + (c - 3a)x + d & \\
- & (b + 4a)x^2 + (-4b - 16a)x + (3b + 12a) & \\ \cline{2-3}
 & (c - 3a + 4b + 16a)x + (d - 3b - 12a) &
\end{array}$$

$ax + b + 4a = -x - 1$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b + 4a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

c en d zijn willekeurig, bijv. $c = d = 0$

Dus: $f(x) = \dfrac{-x^3 + 3x^2}{(x-1)(x-3)}$ (bijvoorbeeld)

Opdracht 46 bladzijde 95

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$.

1) Bepaal de asymptoten van de grafiek van f.

VA $x = -1$

SA $y = x - 3$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^2 - 2x + 1 & x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^2 + x \quad\quad & x - 3 \\ \cline{2-2}
 & -3x + 1 & \\
- & -3x - 3 & \\ \cline{2-2}
 & 4 &
\end{array}$$

2) Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van deze asymptoten.

snijpunt $S(-1, -4)$

3) Toon aan dat S een symmetriemiddelpunt is van deze grafiek.

Verschuif de grafiek van f over $\vec{v}$ (1, 4), zo ontstaat de grafiek van g:

$$g(x) = f(x-1) + 4 = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1) + 1}{(x-1)+1} + 4$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 + 1}{x} + \frac{4x}{4}$$

$$= \frac{x^2 + 4}{x}$$

$g(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 4}{-x} = -g(x)$ dus g is oneven, dat betekent dat de grafiek van f het punt $S(-1, -4)$ als symmetriemiddelpunt heeft.

Opdracht 47 bladzijde 95

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^4}$.

1) Bepaal het domein en de eventuele nulpunten van f.

dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

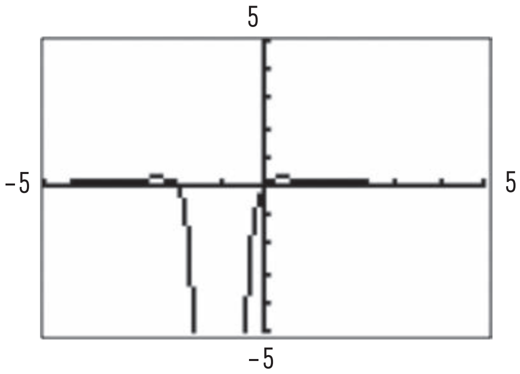
nulpunten: 0, -2

2) Geef een vergelijking van elke asymptoot van de grafiek van f.

HA $y = 0$

VA $x = -1$

3) Plot de grafiek van f.



4) Toon aan dat de rechte met vergelijking $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

We verschuiven de grafiek van f over $\vec{v}$ (1, 0), dan ontstaat de grafiek van g :

$$g(-x) = f(x - 1) = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)}{(x-1+1)^4} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 2x - 2}{x^4} = \frac{x^2 - 1}{x^4}$$

$g(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4} = \dfrac{x^2 - 1}{x^4} = g(x)$ dus g is een even functie, dat wil zeggen dat $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

Opdracht 48 bladzijde 96

De gegeven grafieken zijn die van de asymptotische krommen van de functies waarvan het voorschrift gegeven is. Bepaal zonder rekentoestel welke asymptotische kromme bij welk voorschrift hoort.

1) $f_1(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$

$= x^2 - x + 1 - \dfrac{2}{x + 1} \rightarrow$ grafiek B

2) $f_2(x) = \dfrac{-x^4 + 16}{x + 3}$ quotiënt is een dalende functie van de 3^e^ graad $\rightarrow$ grafiek F

3) $f_3(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 9}$ quotiënt is een tweedegraadsfunctie met als grafiek een dalparabool $\rightarrow$ grafiek E

4) $f_4(x) = \dfrac{-2x^3}{x - 1}$ quotiënt is een tweedegraadsfunctie, de grafiek is de smalste bergparabool ($q(x) = \underline{-2}x^2$ ....) $\rightarrow$ grafiek D

5) $f_5(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x - 2}$ quotiënt is stijgende derdegraadsfunctie $\rightarrow$ grafiek C

6) $f_6(x) = \dfrac{-x^4}{x^2 - 1}$ quotiënt is tweedegraadsfunctie met grafiek de breedste bergparabool

$(q(x) = \underline{-x^2} \; ....) \rightarrow$ grafiek A

Opdracht 49 bladzijde 97

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 4x}$.

1) Bepaal het domein en de eventuele nulpunten van f.

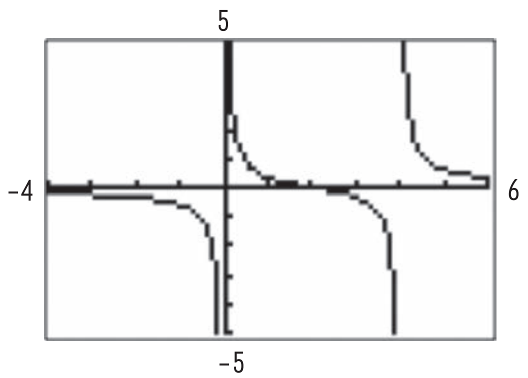
dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$ nulpunt 2

2) Geef een vergelijking van elke asymptoot van de grafiek van f.

VA $x = 0$; $x = 4$

HA $y = 0$

3) Plot de grafiek van f.



4) Toon aan dat het punt $P(2,0)$ een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f.

Verschuif de grafiek van f over $\vec{v}$ (-2, 0), zo ontstaat de grafiek van g:

$$g(x) = f(x+2) = \frac{x+2-2}{(x+2)^2 - 4(x+2)} = \frac{x}{x^2 + 4x + 4 - 4x - 8} = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2 - 4} = -g(x) \rightarrow$ g is een oneven functie, P(2,0) is dus een symmetriemiddelpunt van de grafiek van f.

Opdracht 50 bladzijde 97

1) a) Schrijf de functie $f(x) = \dfrac{-3x - 10}{x + 4}$ als $f(x) = q(x) + \dfrac{r(x)}{n(x)}$ m.b.v. de euclidische deling.

$$\begin{array}{rl|l} & -3x - 10 & x + 4 \\ \cline{3-3} - & -3x - 12 & -3 \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

$$f(x) = -3 + \frac{2}{x + 4}$$

$$\left(\text{of } f(x) = \frac{-3x - 12 + 2}{x + 4} = \frac{-3\,(x + 4)}{x + 4} + \frac{2}{x + 4}\right)$$

b) Toon aan dat de grafiek van de functie f ontstaat uit die van de functie met voorschrift $g(x) = \dfrac{1}{x}$ door een aantal transformaties.

$$y = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$$y = \frac{2}{x}$$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (-4, -3)

$$y = \frac{2}{x + 4} - 3$$

c) Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

VA $x = -4$

HA $y = -3$

2) Bepaal bij de volgende functies de asymptoten van de grafiek. Geef eveneens de transformaties waardoor de grafiek is ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$.

a) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4} = \frac{2x + 8 - 9}{x + 4} = 2 - \frac{9}{x + 4}$

VA $x = -4$

HA $y = 2$

$$y = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 9

$$y = \frac{9}{x}$$

$\downarrow$ spiegeling om de x - as

$$y = \frac{-9}{x}$$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\ (-4,\ 2)$

$$y = 2 - \frac{9}{x + 4}$$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x-3} = \dfrac{1}{5}\,\dfrac{x - \frac{3}{5} + \frac{18}{5}}{x - \frac{3}{5}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\frac{18}{5}}{5x-3}$

VA $x = \dfrac{3}{5}$

HA $y = \dfrac{1}{5}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{18}{25}$

$y = \dfrac{\frac{18}{5}}{5x}$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$

$y = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\frac{18}{5}}{5x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{3x - 1} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{\frac{10}{3}}{3x - 1}$

VA $x = \dfrac{1}{3}$

HA $y = \dfrac{4}{3}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{10}{9}$

$y = \dfrac{\frac{10}{3}}{3x}$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

$y = \dfrac{4}{3} + \dfrac{\frac{10}{3}}{3x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3} = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$

VA $x = 3$

HA $y = 1$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$y = \dfrac{3}{x}$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (3, 1)

$y = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$

3) a) Schrijf de functie $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ als $f(x)=q(x)+\dfrac{r(x)}{n(x)}$ m.b.v. de euclidische deling.
Veronderstel hierbij dat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ en $ad-bc \neq 0$.

$$\begin{array}{rl|l} & ax + b & cx + d \\ \hline - & ax + \dfrac{ad}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \hline & b - \dfrac{ad}{c} & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$$

b) Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f. Maak hierbij gebruik van de resultaten uit de vorige opdracht.

VA $x = \dfrac{-d}{c}$

HA $y = \dfrac{a}{c}$

c) Leg uit wat er gebeurt als $c=0$ en als $ad-bc=0$.

$c = 0$: f is eerstegraadsfunctie, dus geen gebroken rationale functie.
Er zijn dus geen VA en HA.

$bc - ad = 0$: de rest is dan nul, dus teller en noemer zijn veelvoud van elkaar.
De grafiek van f is dan een constante rechte $y = \dfrac{a}{c}$ met een opening $\left(\dfrac{-b}{a}, \dfrac{a}{c}\right) = \left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$

4) Geef een voorschrift van een homografische functie waarbij de grafiek als verticale asymptoot de rechte $x=-5$ heeft en als horizontale asymptoot de rechte $y=4$.

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x + 5} = \frac{4x + 21}{x + 5}$$

5) Geef een voorschrift van een homografische functie waarvan de grafiek ontstaat uit de grafiek van $g(x) = \frac{1}{x}$ door een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1, 2)$.

$$y = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$$y = \frac{3}{x}$$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (-1, 2)

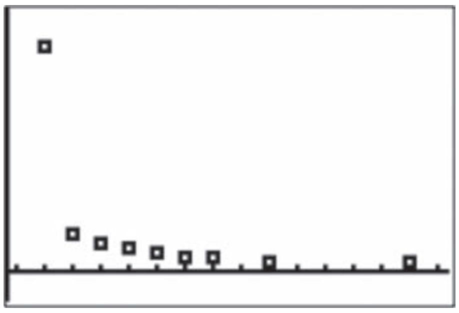
$$y = 2 + \frac{3}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$$

Opdracht 51 bladzijde 98

1) Voer deze data in in de lijsten L_1 en L_2 van je rekentoestel.

2) Plot de grafiek van deze punten met L_1 op de x–as.



3) $N = 1 + \frac{r}{H - H_0} \Leftrightarrow N - 1 = \frac{r}{H - H_0} \Leftrightarrow H - H_0 = \frac{r}{N-1} \Leftrightarrow H = H_0 + \frac{r}{N-1}$

4) De punten lijken op een kromme te liggen die nogal lijkt op de grafiek van $y = \frac{1}{x}$. Uit de context vermoeden we echter een horizontale asymptoot met

vergelijking $N = 1$: naarmate de valhoogte H toeneemt ($H \longrightarrow +\infty$) zal het benodigd gemiddeld aantal worpen afnemen, met als minimum $N = 1$ ($N \longrightarrow 1$).

Verder vermoeden we een verticale asymptoot: hoe lager de hoogte H, hoe groter het gemiddeld aantal worpen N en vanaf een bepaalde hoogte H_0 zal de schelp zelfs niet meer breken.
Wiskundig: als $H \longrightarrow H_0$, zal $N \longrightarrow +\infty$.
Een vergelijking van de verticale asymptoot is bijgevolg $H = H_0$.

Het eenvoudigste model voor N en H is dus

$$N = 1 + \frac{r}{H - H_0}$$

Toon aan dat je dit kunt herschrijven als

$$H = H_0 + r \cdot \frac{1}{N - 1}$$

m.b.v. LinReg (ax + b) L_1, L_2, y_1 vinden we $a \approx 19{,}704 = r$
$b \approx 1{,}047 = H_o$

5) Toon nu aan dat je de gemiddelde vereiste arbeid W om een schelp te breken kunt benaderen door $W = k \cdot H \cdot \left(1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}\right)$.

$$N = 1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}$$

$$W = k.H.N = k.H.\left(1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}\right)$$

6) Aangezien die k grafisch overeenkomt met een verticale uitrekking, heeft ze geen invloed op de waarde H waarvoor W een minimum bereikt en kunnen we voor dit probleem $k = 1$ stellen.
Bepaal nu de H–waarde waarvoor de vereiste arbeid voor de kraai minimaal wordt.

(Bron © Renée Gossez – T3 symposium, Oostende 2000)

W bereikt een minimum voor H ≈ 5,6 m.

Deze hoogte komt ongeveer overeen met de gemiddelde hoogte waarvan kraaien de schelp laten vallen.

Opdracht 52 bladzijde 100

1 $f_1(x)=\dfrac{-2x^2}{3x+3}$ hoort bij grafiek C

2 $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^2}$ hoort bij grafiek A

3 $f_3(x)=\dfrac{x^2-4}{-x^2}$ hoort bij grafiek D

4 $f_4(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ hoort bij grafiek F

5 $f_5(x)=\dfrac{x^3-8}{4x^2}$ hoort bij grafiek E

6 $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$ hoort bij grafiek B

Opdracht 53 bladzijde 101

Heeft de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+4}$ voor $x=2$ een opening of is de rechte met vergelijking $x=2$ een verticale asymptoot?

Verklaar.

- $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-2) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$ of $x = 2$
- $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (dubbel)

$x = 2$ is een VA want 2 is een dubbel nulpunt van de noemer en slechts een enkelvoudig nulpunt van de teller.

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-1}{x-2}$$

Opdracht 54 bladzijde 101

Koppel elk voorschrift aan de bijbehorende grafiek zonder je rekentoestel te gebruiken.

1 $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6} = \dfrac{(x + 4)(x - 3)}{(x + 2)(x - 3)}$ hoort bij grafiek A

2 $f_2(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{(x+3)^2}$ hoort bij grafiek C

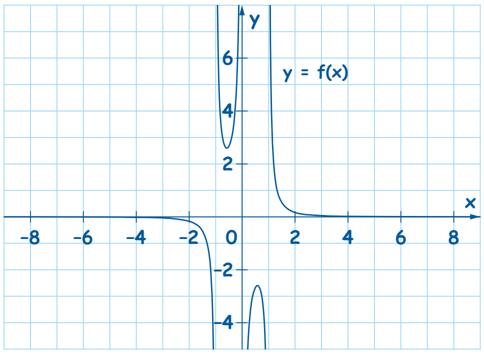
3 $f_3(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$ hoort bij grafiek B

4 $f_4(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2}{x^2 - 4}$ hoort bij grafiek D

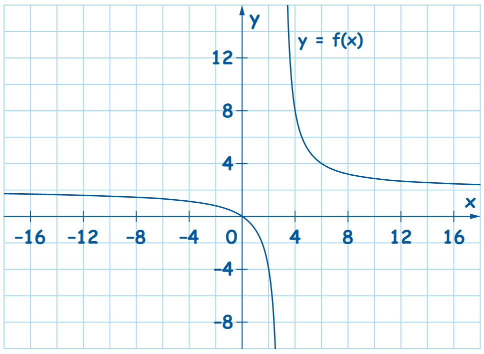
Opdracht 55 bladzijde 102

Maak een schets van de grafiek van volgende functies. Gebruik geen rekentoestel.

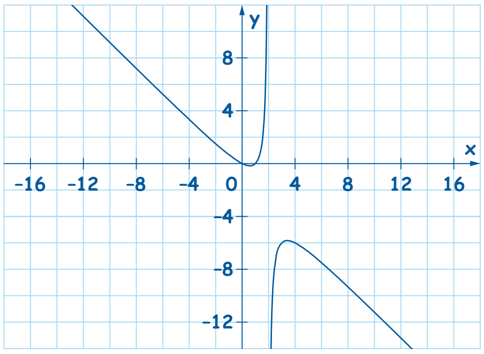
1 $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$



2 $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$



3 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x-2}$



Opdracht 56 bladzijde 102

Los op.

1 $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-2x-8}=0$

$$D = 4$$

- $x^2 + 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x -3 \text{ of } x = -5$

$$D = 36$$

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2 \text{ of } x = 4$

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 2x - 8} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ of } x = -5$$

2 $\dfrac{-3x^2-2x+1}{x^3-500} > 0$

$$D = 16$$

- $-3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \text{ of } x = -1$
- $x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{500}$

x		-1		$\frac{1}{3}$		$\sqrt[3]{500}$	
$-3x^2 - 2x + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x^3 - 500$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$

$$\frac{-3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 500} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ of } \frac{1}{3} < x < \sqrt[3]{500}$$

3 $\dfrac{x^2+x-6}{x(x^3-8)} < 0$

D = 25

- $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ of $x = 2$
- $x\,(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$

x		-3		0		2	
$x^2 + x - 6$	+	0	-	-	-	0	+
$x(x^3 - 8)$	+	+	+	0	-	0	+
y	+	0	-	|	+	|	+

$\dfrac{x^2+x-6}{x(x^3-8)} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$

4 $\dfrac{x(x+3)^2}{x^2+4x+3} = 0$

- $x\,(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = -3$ (dubbel)

D = 4

- $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ of $x = -1$

$\dfrac{x(x+3)^2}{x^2+4x+3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Opdracht 57 bladzijde 102

Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van de functies met voorschrift

1 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-9}$

VA $x = 3$; $x = -3$

HA $y = 0$ (gr(t(x)) < gr(n(x)))

2 $f(x) = \dfrac{5x^2-22}{3(x^2-4)}$

VA $x = 2$; $x = -2$

HA $y = \dfrac{5}{3}$ (gr(t(x)) = gr(n(x)))

3 $f(x)=\dfrac{9x^3}{3(x-1)}$

VA $x = 1$

geen HA en geen SA want $gr(t(x)) = gr(n(x)) + 2$

4 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$

VA $x = 1$

SA $y = x - 1$

$$\begin{array}{rr|l} & x^2 - 2 & x + 1 \\ \cline{3-3} - & \underline{x^2 + x} & x - 1 \\ & -x - 2 & \\ - & \underline{-x - 1} & \\ & -1 & \end{array}$$

5 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4x} = \dfrac{(x + 2)(x - 4)}{x(x - 4)}$

VA $x = 0$

HA $y = 1$

6 $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x}$

VA $x = 0$

geen HA en geen SA want $gr(t(x)) = gr(n(x)) + 2$

Opdracht 58 bladzijde 103

Bepaal een mogelijk voorschrift van de functies waarvan de grafiek gegeven is.
De asymptoten zijn in het rood getekend.

1) $f(x) = \dfrac{a(x - 1)x}{(x + 1)(x - 1)}$ HA $y = 4$ dus $a = 4$

$f(x) = \dfrac{4x^2 - x}{x^2 - 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)x} = \dfrac{x - 1}{x(x^2 - 4)}$

3) $f(x) = \dfrac{a(x + 2)(x - 2)}{x} = \dfrac{a(x^2 - 4)}{x}$

SA $y = -x$ dus $a = -1$

want dan

$$\begin{array}{rr|l} & -x^2 + 4 & x \\ \cline{3-3} - & -x^2 & -x \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x}$

Opdracht 59 bladzijde 103

De functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{(x - c)(x - d)}$ is even, heeft 0 als nulpunt en de grafiek van f heeft als asymptoten de rechte met vergelijking $x = 1$ en $y = 2$.
Bepaal a, b, c en d.

even functie met VA $x = 1$; dus ook $x = -1$ moet VA zijn

$\Rightarrow c = 1$ en $d = -1$ (of omgekeerd)

$f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$

HA $y = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Opdracht 60 bladzijde 103

Bepaal a en b zodat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 + bx}{x - a}$ als asymptoten de rechten met vergelijking $x = -2$ en $y = x + 1$ heeft.

VA $x = -2$ dus $a = -2$

SA $y = x + 1$ dus

$$\begin{array}{rr|l} & x^2 + bx & x + 2 \\ \cline{3-3} - & x^2 + 2x & x + (b - 2) \\ \cline{2-2} & (b - 2)x & \\ - & (b - 2)x + 2(b - 2) & \\ \cline{2-2} & -2(b - 2) & \end{array}$$

$b - 2 = 1 \Leftrightarrow b = 3$

Opdracht 61 bladzijde 104

Je wil een balkvormige kartonnen doos met een vierkant grond– en bovenvlak en een inhoud van 1 m^3 maken.

1) Wat is de minimale hoeveelheid (in m^2) karton die je nodig hebt om een dergelijke doos te maken? Geef ook de afmetingen van de doos.

inhoud balk $= z^2 \cdot h = 1\ m^3$

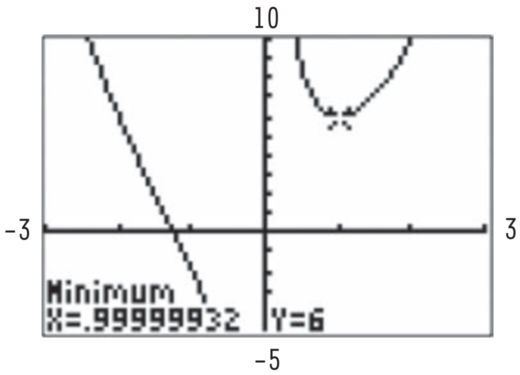
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{z^2}$$

Oppervlakte = hoeveelheid karton

$$= 2z^2 + 4zh$$

$$= 2z^2 + \frac{4z}{z^2}$$

$$= \frac{2z^3 + 4}{z}$$

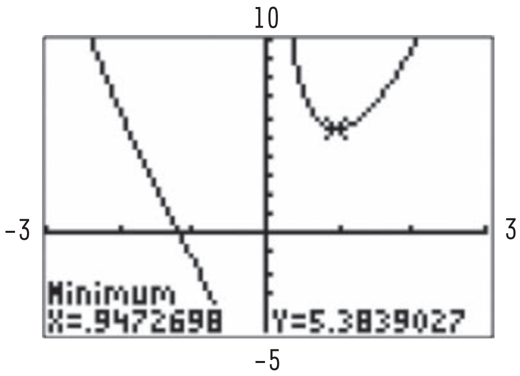


We vinden een minimum voor z = 1 en h = 1, de minimale hoeveelheid karten is dan 6 m^2.

2) In de rechthoek $OPQR$ is $|OP| = 1$ en $|OR| = 2$. De rechte r draait om het hoekpunt Q van de rechthoek en snijdt de assen in de punten $A(x,0)$ en $B(0,y)$.

prijs $= 2z^2 + 0{,}85 \cdot \frac{4z}{z^2} = 2z^2 + \frac{3{,}4}{z}$

We vinden een minimum voor z = 0,947 m en h = 1,115 m. De minimale kostprijs is dan € 5,384.



Opdracht 62 bladzijde 104

In de rechthoek $OPQR$ is $|OP| = 1$ en $|OR| = 2$. De rechte r draait om het hoekpunt Q van de rechthoek en snijdt de assen in de punten $A(x,0)$ en $B(0,y)$.

1 Toon aan dat $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

$$\Delta RBQ \sim \Delta RBQ \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} = \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 2$$

$$= \frac{2 + 2x + -2}{x-1}$$

$$= \frac{2x}{x-1}$$

2 Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie $y = \dfrac{2x}{x-1}$?

Wat betekent dit voor de figuur?

VA $x = 1$;	HA $y = 2$
$\downarrow$	$\downarrow$
als $A \to P$	als A naar rechts
dan zal B	blijft bewegen dan
steeds hoger	zal $B \to R$
liggen	$(x \to +\infty$ dan $y \to 2)$
$(y \to +\infty$ want	
$x \overset{>}{\to} 1)$	

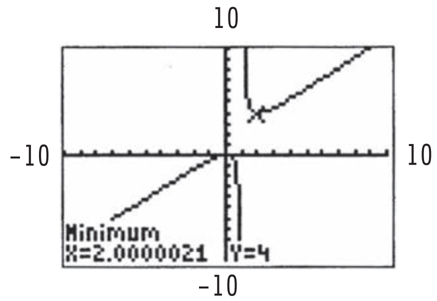
3 Stel de oppervlakte van de driehoek OAB gelijk aan S.

Toon aan dat $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

$$S(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

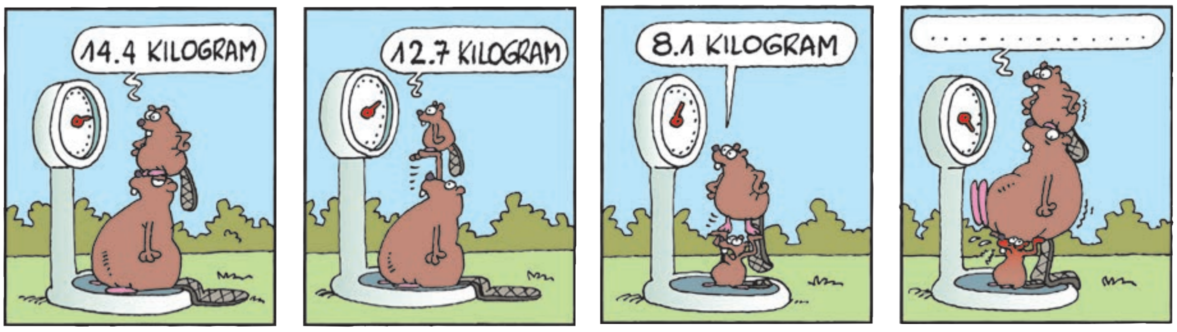
4 Bepaal de coördinaten van *A* en *B* in het geval dat de oppervlakte van de driehoek *OAB* minimaal is.

S(x) is minimaal voor x = 2 en y = 4



Hersenbrekers

1 Hoeveel wegen de drie bevers samen?



Stel x de massa van de grootste bever, y de massa van de middelste en z van de kleinste.

Dan geldt:

$$\begin{cases} x + y = 14{,}4 \\ x + z = 12{,}7 \\ y + z = 8{,}1 \end{cases}$$

Uit de eerste en de tweede vergelijking vinden we dat y – z = 1,7.

Uit de derde vergelijking vinden we dat y = 8,1 – z.

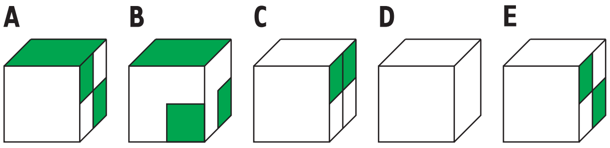
Uit bovenstaande kan je z berekenen: z = 3,2.

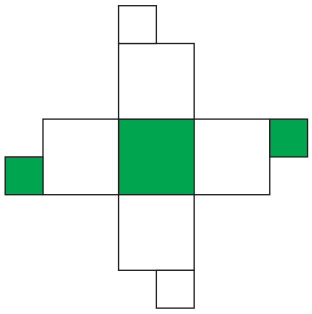
Dus x + y + z = 14,4 + 3,2 = 17,6.

De drie bevers wegen samen 17,6 kg.

(Wanneer je het stelsel verder oplost, vind je dat de grootste bever 9,5 kg weegt en de middelste 4,9 kg.)

2 Van de bouwplaat hiernaast wordt een kubus gevouwen.
Welke kubus kun je dan krijgen?





(Bron: WizBRAIN 2005)

- Antwoord E is correct.
  Verklaring: De vlakken grenzend aan het gekleurde vlak moeten allemaal wit zijn, dus A en B kunnen niet. De twee kleine groene vierkantjes kunnen niet naast elkaar liggen (dus C kan niet), maar moeten in eenzelfde vlak liggen (dus B kan alweer niet). D kan niet want er kunnen geen drie witte vlakken in deze positie staan, een van de vlakken moet groen zijn. Antwoord E is het enige mogelijke antwoord. Het linkervlak van E moet dan groen zijn (dat zien we niet).