Hoofdstuk 3

Toepassingen van afgeleiden

Opdracht 1 bladzijde 106

Een bolvormige ballon wordt opgeblazen. Hierbij neemt het volume V toe met 50 cm^3/s.
Op een bepaald ogenblik is de straal r van de ballon gelijk aan 20 cm.

1 Wat is het verband tussen het volume V (in cm^3) en de straal r (in cm) van de bol?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2 Het volume V en de straal r zijn allebei afhankelijk van de tijd t (in s).

Wat is de betekenis van $\frac{dV}{dt}$ en $\frac{dr}{dt}$?

$\frac{dV}{dt}$ = de snelheid waarmee het volume verandert in de tijd

$\frac{dr}{dt}$ = de snelheid waarmee de straal verandert in de tijd

3 Bepaal uit **1** het verband tussen $\frac{dV}{dt}$ en $\frac{dr}{dt}$.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

4 Bereken de snelheid waarmee de straal van de ballon toeneemt op het moment dat $r = 20$ cm.

$\frac{dV}{dt} = 50$ (geg),

dus $4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 50$

zodat $\frac{dr}{dt} = \frac{50}{4\pi r^2} = \frac{25}{2\pi r^2}$

en $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=20} = \frac{25}{2\pi \cdot 20^2} = \frac{1}{32\pi} \approx 0{,}01$ cm/s

Opdracht 2 bladzijde 109

Volgens de wet van Boyle[1] wordt bij het comprimeren van een gas bij constante temperatuur het verband tussen de druk p en het volume V gegeven door de formule $p \cdot V = c$ waarbij c een constante is.
Op een bepaald moment is het volume van een gas 600 cm^3, is de druk 150 kPa en neemt de druk toe met 20 kPa/min.

Met welke snelheid neemt het volume af op dat moment?

- gegeven: $p \cdot V = c$ en $V = 600$ cm^3, $p = 150$ kPa, $\frac{dp}{dt} = 20$ kPa/min
- $\frac{dp}{dt} \cdot V + p \cdot \frac{dV}{dt} = 0$

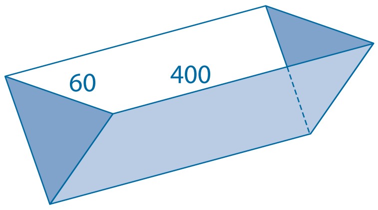
  $20 \cdot 600 + 150 \cdot \frac{dV}{dt} = 0$

  $\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-12\,000}{150} = -80$ cm^3 / min

Opdracht 3 bladzijde 109

Een drinkbak voor koeien is 4 m lang en heeft een gelijkzijdige driehoek met zijde 60 cm als dwarsdoorsnede.
We pompen 100 liter water per minuut in de bak.

Hoe snel stijgt het waterpeil op het moment dat het water 20 cm hoog staat?

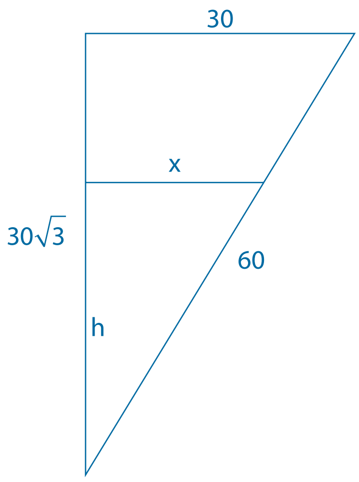


- $\frac{dV}{dt} = 100\ dm^3/min = 10^5\ cm^3/min$
- V = oppervlakte grondvlak · hoogte

$$= \frac{2x \cdot h}{2} \cdot 400 = x \cdot h \cdot 400 \qquad (1)$$

- Uit gelijkvormige driehoeken volgt:

$$\frac{x}{30} = \frac{h}{30\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$



- Uit (1) en (2) volgt:

$$V = \frac{400 \cdot h^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{800 \cdot h}{\sqrt{3}} \frac{dh}{dt}$$

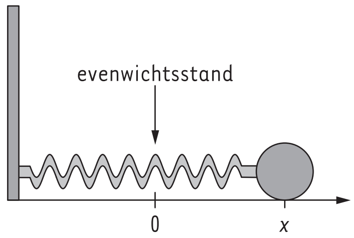
$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{800 \cdot h} \frac{dV}{dt}$$

$$\underset{h=20}{\Rightarrow} \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{800 \cdot 20} 10^5 \approx 10{,}8$$

De gevraagde snelheid is ongeveer 10,8 cm/min.

Opdracht 4 bladzijde 112

Een wieltje is vastgemaakt aan een veer en beweegt horizontaal. Bij verwaarlozen van de wrijving beweegt het voorwerp volgens de bewegingsvergelijking $x = 8 \sin 4t$ (t in seconden, x in cm).



1 Bepaal de frequentie van deze trilling.

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \text{ frequentie} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64 \text{ Hz}$$

2 Hoeveel keer gaat het wieltje per minuut over en weer?

Per minuut gaat het wieltje $\frac{2}{\pi} \cdot 60 \approx 38$ keer over en weer.

3 Bepaal de snelheidsfunctie $v(t)$.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 32 \cos 4t$$

4 In welke zin en met welke snelheid beweegt het wieltje op het moment dat $t = \frac{\pi}{6}$?

Op $t = \frac{\pi}{6}$ is $v = 32 \cos \frac{2\pi}{3} = -16$.

Het wieltje beweegt zich op dat moment naar links met een snelheid van 16 cm/s.

Opdracht 5 bladzijde 112

Een gedempte trilling wordt beschreven door het voorschrift $x(t) = 5\, e^{-0,2t} \sin 2t$.
Hierbij stelt x de uitwijking voor in cm en t de tijd in s.

1 Bereken de snelheid na 5 seconden.

$$x(t) = 5 \cdot e^{-0,2t} \cdot \sin 2t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = e^{-0,2t}\left(10 \cos 2t - \sin 2t\right)$$

$$\Rightarrow v(5) = e^{-1}\left(10 \cos 10 - \sin 10\right) \approx -2{,}89$$

De snelheid na 5 seconden is ongeveer −2,89 cm/s.

2 Op welke tijdstippen bereikt de uitwijking een extremum?

$x(t) = 5 \cdot e^{-0,2t} \cdot \sin 2t$ bereikt een extremum als

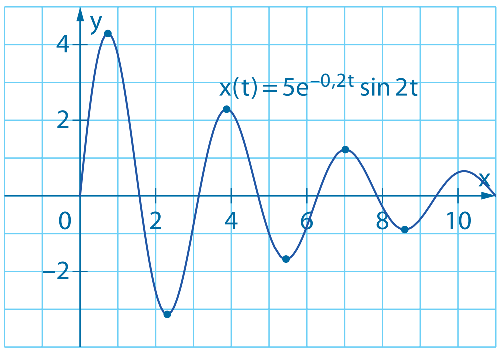
$$\frac{dx}{dt} = v(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10 \cos 2t - \sin 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2t = 10$$

$$\Leftrightarrow 2t = 1{,}4711276... + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow t = 0{,}735563... + \frac{k \cdot \pi}{2}$$



De beweging start vanaf $t = 0$ zodat $k \in \mathbb{N}$.

3 Op welke tijdstippen bereikt de snelheid een extremum?

$v(t) = e^{-0{,}2t}\left(10\cos 2t - \sin 2t\right)$ bereikt een extremum als

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

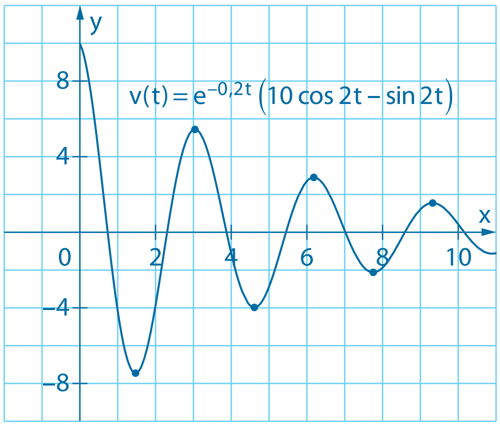
$$\Leftrightarrow\ -0{,}2e^{-0{,}2t}\left(10\cos 2t - \sin 2t\right) + e^{-0{,}2t}\left(-20\sin 2t - 2\cos 2t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ -4\cos 2t - 19{,}8\sin 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \tan 2t = -\frac{20}{99}$$

$$\Leftrightarrow\ 2t = -0{,}1993373... + k\cdot\pi$$

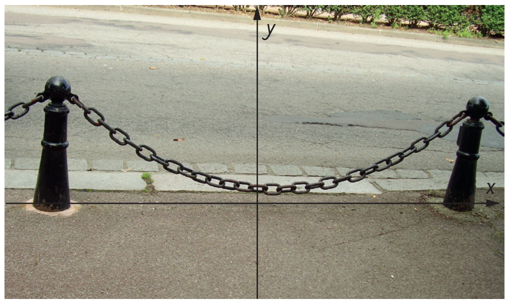
$$\Leftrightarrow\ t = -0{,}0996686... + \frac{k\cdot\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$



Opdracht 6 bladzijde 115

Om een voetpad af te bakenen worden kettingen tussen paaltjes, 50 cm hoog en op 2 m van elkaar, gehangen. Op het laagste punt hangen de kettingen 20 cm boven de grond.
Kiezen we een assenstelsel zoals op de figuur, dan is een vergelijking van de ketting van de vorm

$y = a \cdot \cosh\dfrac{x}{b}$ met x en y in m.



Bereken a en b.

- $y = a\cdot\cosh\dfrac{x}{b} = a\cdot\dfrac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{2}$
- (0; 0,2) invullen: $a\cdot\dfrac{1+1}{2} = 0{,}2$ zodat $a = 0{,}2$
- (1; 0,5) invullen: $0{,}2\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{b}} + e^{-\frac{1}{b}}}{2} = 0{,}5$

$$\Leftrightarrow\ e^{\frac{1}{b}} + e^{-\frac{1}{b}} = 5$$

$$\Leftrightarrow\ \left(e^{\frac{1}{b}}\right)^2 + 1 = 5e^{\frac{1}{b}}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(e^{\frac{1}{b}}\right)^2 - 5e^{\frac{1}{b}} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\frac{1}{b}} = 0{,}2087... \text{ of } e^{\frac{1}{b}} = 4{,}791...$$

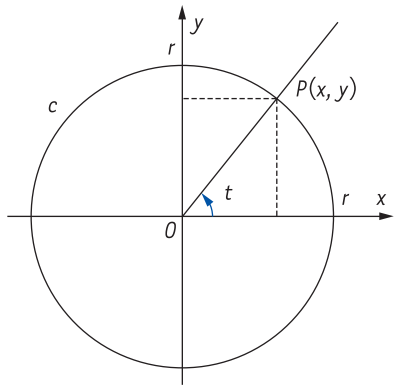
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{b} = \ln 0{,}2087... \text{ of } \frac{1}{b} = \ln 4{,}791...$$

$$\Leftrightarrow\ b = \frac{1}{\ln 0{,}2087...} \text{ of } b = \frac{1}{\ln 4{,}791...}$$

$$\Leftrightarrow\ b = -0{,}6382... \text{ of } b = 0{,}6382...$$

Besluit: $a = 0{,}2$ en $b = 0{,}638$ (of $b = -0{,}638$)

Opdracht 7 bladzijde 116



Het punt $P(x, y)$ beweegt op de cirkel $c(O, r)$ in tegenwijzerzin. Hierbij is t de hoek in radialen tussen de positieve x-as en OP met $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

1 Druk x en y uit in functie van t.

$x = r\cos t$ en $y = r\sin t$

2 Bereken $\dfrac{dx}{dt}$ en $\dfrac{dy}{dt}$.

$\dfrac{dx}{dt} = -r\sin t$ en $\dfrac{dy}{dt} = r\cos t$

3 Een vergelijking van de cirkel c is $x^2 + y^2 = r^2$.

Bepaal uit deze vergelijking $\dfrac{dy}{dx}$ als $y \neq 0$, door beide leden af te leiden naar x.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x + \cancel{2}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{r\cos t}{r\sin t}$$

4 Bepaal uit **2** en **3** het verband tussen $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dx}{dt}$ en $\dfrac{dy}{dt}$ als $y \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r\cos t}{r\sin t} = -\frac{\frac{dy}{dt}}{-\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Opdracht 8 bladzijde 119

Bepaal een vergelijking van de raaklijn l aan de parameterkromme

$$k \leftrightarrow \begin{cases} x = t \sin t \\ y = t \cos t \end{cases} \text{ in het punt } P(0, -\pi).$$

- We bepalen eerst de waarde van t die hoort bij het punt P(0, −π):

  we zoeken dus een oplossing voor t van het stelsel $\begin{cases} t \sin t = 0 \\ t \cos t = -\pi \end{cases}$.

  t = 0 is in elk geval geen oplossing, dus zoeken we een nulpunt t van de sinusfunctie waarvoor t cos t = −π.

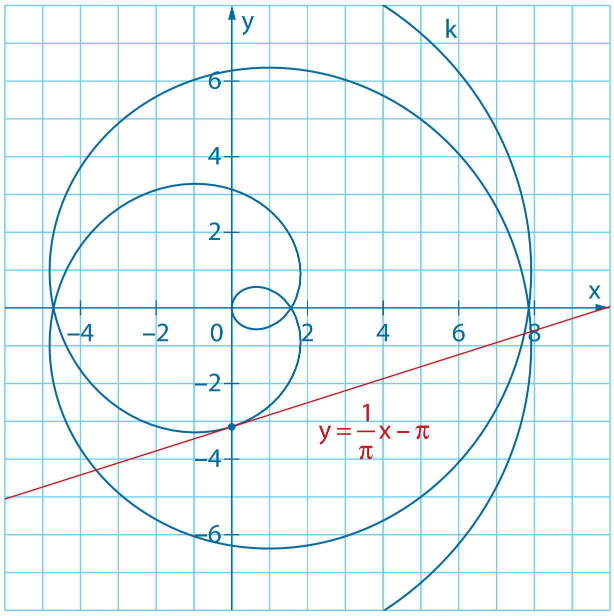
  t = π voldoet en op de grafiek van de parameterkromme is te zien dat dit de enige oplossing zal zijn, aangezien het punt P(0, −π) maar één keer doorlopen wordt.

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - t \sin t}{\sin t + t \cos t}$$

  Voor t = π is $\frac{dy}{dx} = \frac{-1-0}{0-\pi} = \frac{1}{\pi}$.

  De raaklijn heeft dus als vergelijking

  $y + \pi = \frac{1}{\pi}x$ of $y = \frac{1}{\pi}x - \pi$.

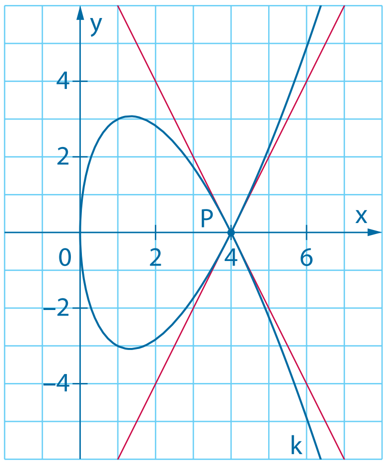


Opdracht 9 bladzijde 119

Gegeven de parameterkromme $k \leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$.

1 Toon aan dat k twee raaklijnen l_1 en l_2 heeft in het punt $P(4, 0)$ en bepaal vergelijkingen van deze raaklijnen.

Het punt P(4, 0) op de kromme $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$ vinden we zowel bij $t = 2$ als bij $t = -2$, vandaar de twee raaklijnen.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4}{2t}$$

Voor $t = 2$ is $\frac{dy}{dx} = 2$ zodat de eerste raaklijn als vergelijking $y = 2x - 8$ heeft.

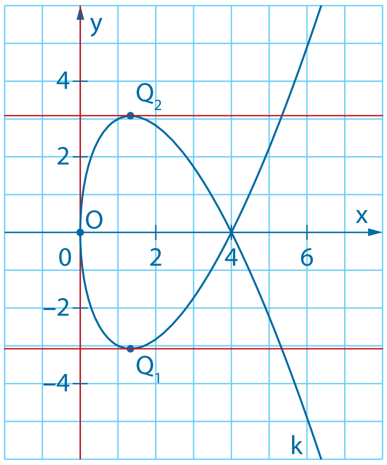
Voor $t = -2$ is $\frac{dy}{dx} = -2$, de tweede raaklijn heeft als vergelijking $y = -2x + 8$.

2 Bepaal de coördinaten van de punten op k met een horizontale raaklijn.

Bij een horizontale raaklijn is $\frac{dy}{dx} = 0$, dit is als

$3t^2 - 4 = 0 \iff t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Dit zijn de punten $Q_1\left(\frac{4}{3}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$ en $Q_2\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$.

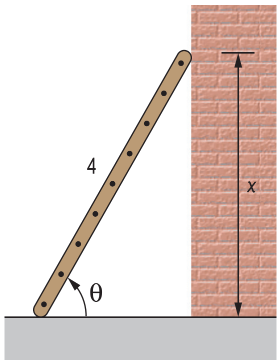


3 Bepaal de coördinaten van de punten op k met een verticale raaklijn.

Bij een verticale raaklijn bestaat $\frac{dy}{dx}$ niet, dit is als $2t = 0 \iff t = 0$.

We vinden een verticale raaklijn in de oorsprong.

Opdracht 10 bladzijde 121



Een 4 meter lange ladder leunt tegen een muur en maakt een hoek θ met de grond. Het bovenste punt van de ladder bevindt zich op een hoogte van *x* meter.

Als de onderkant van de ladder naar de muur toe wordt verschoven, bepaal dan de snelheid waarmee *x* verandert in functie van θ op het moment dat θ = 60°.

Geef je resultaat in meter per graad.

Het verband tussen x en θ in radialen wordt gegeven door

$$\sin\theta = \frac{x}{4} \quad \text{of} \quad x = 4\cdot\sin\theta$$

De snelheid waarmee x verandert in functie van θ wordt dan gegeven door

$$\frac{dx}{d\theta} = 4\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 4\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2$$

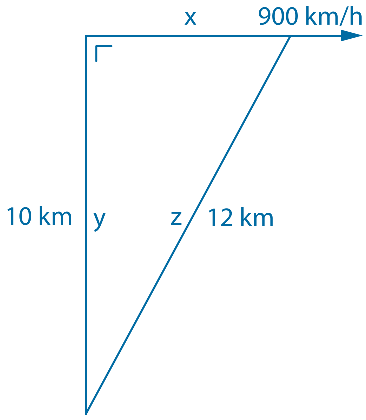
De snelheid is 2 m/rad.

Rekening houdend met 1 rad $= \dfrac{180°}{\pi}$ wordt dit $\dfrac{2\pi}{180}$ m/graad ≈ 0,035 m/graad.

Opdracht 11 bladzijde 121

Een vliegtuig vliegt horizontaal op 10 km hoogte met een snelheid van 900 km/h.
Op een bepaald moment bevindt het zich op een afstand van 12 km van een radarstation op de grond.

Met welke snelheid verwijdert het vliegtuig zich op dat ogenblik van het radarstation?



Stel x, y en z de afstanden op de figuur voorgesteld.

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Met $\dfrac{dx}{dt} = 900$, $\dfrac{dy}{dt} = 0$, $x = \sqrt{12^2 - 10^2} = \sqrt{44}$ en $z = 12$ is

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{44}}{12}\cdot 900 + 0 \approx 497{,}5$$

Het vliegtuig verwijdert zich van het station met een snelheid van ongeveer 497,5 km/h.

Opdracht 12 bladzijde 121

Veronderstel dat twee geleiders met weerstanden R_1 en R_2 (in Ω) parallel geschakeld zijn.

De totale weerstand R kan dan gevonden worden uit $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Als R_1 toeneemt met een snelheid van 0,5 Ω/min en R_2 afneemt met een snelheid van 0,8 Ω/min, met welke snelheid verandert R dan op het moment dat $R_1 = 40\ \Omega$ en $R_2 = 60\ \Omega$?

- $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R_1^2}\cdot\frac{dR_1}{dt} - \frac{1}{R_2^2}\cdot\frac{dR_2}{dt}$

  $\Rightarrow \frac{dR}{dt} = R^2 \cdot \left(\frac{1}{R_1^2}\cdot\frac{dR_1}{dt} + \frac{1}{R_2^2}\cdot\frac{dR_2}{dt}\right)$

- $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$

  dus $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = \frac{2400}{100} = 24$

- $\frac{dR}{dt} = 24^2 \cdot \left(\frac{1}{40^2}\cdot 0{,}5 + \frac{1}{60^2}\cdot(-0{,}8)\right) = 0{,}052$

  De snelheid waarmee R verandert is op dat moment 0,052 Ω/min.

Opdracht 13 bladzijde 121

De bewegingsvergelijking van een voorwerp is $x(t) = 3\cos t + 2\sin t$ met x in cm en t in seconden.

1 Bepaal de snelheid $\frac{dx}{dt}$ en de versnelling $\frac{d^2x}{dt^2}$ van het voorwerp.

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 2\cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -3\cos t - 2\sin t$

2 Na hoeveel seconden passeert het voorwerp de eerste keer zijn evenwichtsstand?

$x(t) = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos t + 2\sin t = 0$

$\Leftrightarrow \tan t = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow t = -0{,}982793... + k\cdot\pi$

De eerste strikt positieve t vinden we voor k = 1.

Na 2,16 seconden passeert het voorwerp de eerste keer zijn evenwichtsstand.

3 Wat is de maximale uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand?

$\frac{dx}{dt} = 0$

$\Leftrightarrow \; -3\sin t + 2\cos t = 0$

$\Leftrightarrow \; \tan t = \frac{2}{3}$

Dan is $\cos^2 t = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{13}$ zodat $\cos t = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$ en

$\sin^2 t = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$ zodat $\sin t = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Aangezien $\tan t > 0$ vinden we bij $\cos t = \frac{3}{\sqrt{13}} > 0$ dat $\sin t = \frac{2}{\sqrt{13}} > 0$

en is $x = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$.

Aangezien $\tan t > 0$ vinden we bij $\cos t = -\frac{3}{\sqrt{13}} < 0$ dat $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0$

en is $x = -\sqrt{13}$.

De maximale uitwijking is $\sqrt{13}$ cm $\approx 3{,}61$ cm.

Opdracht 14 bladzijde 122

De bewegingsvergelijking van een voorwerp is $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ waarbij t de tijd voorstelt en x de uitwijking t.o.v. de evenwichtsstand.

1 Bepaal de snelheid $\frac{dx}{dt}$ van het voorwerp.

$\frac{dx}{dt} = a\,\omega\cos(\omega t + \varphi)$

2 Toon aan dat de versnelling $\frac{d^2x}{dt^2}$ recht evenredig is met de uitwijking x.

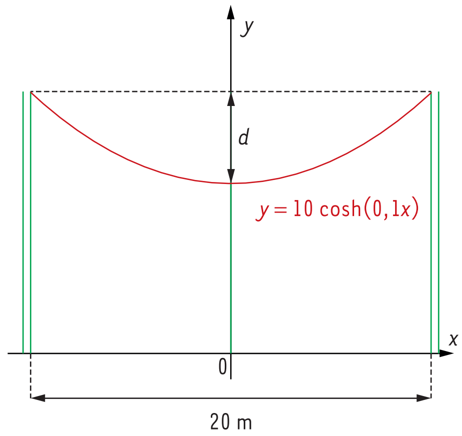
$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\,\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\cdot x(t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ is recht evenredig met de uitwijking x met evenredigheidsfactor $-\omega^2$.

Opdracht 15 bladzijde 122

Beschouw een kabel die opgehangen is tussen twee even hoge masten die 20 meter uit elkaar staan.
Het voorschrift van de kettinglijn is $y = 10\cosh(0{,}1x)$.

$y = 10\cosh(0{,}1x) = 5(e^{0{,}1x} + e^{-0{,}1x})$



1 Hoe hoog zijn de palen?

$x = 10 \Rightarrow y = 5(e^{1} + e^{-1}) \approx 15{,}43$

De palen zijn ongeveer 15,43 m hoog.

2 Wat is de maximale doorhanging *d* van de kabel?

$x = 0 \Rightarrow y = 10$

$d \approx 15{,}43 - 10 \approx 5{,}43$

De maximale doorhanging is ongeveer 5,43 m.

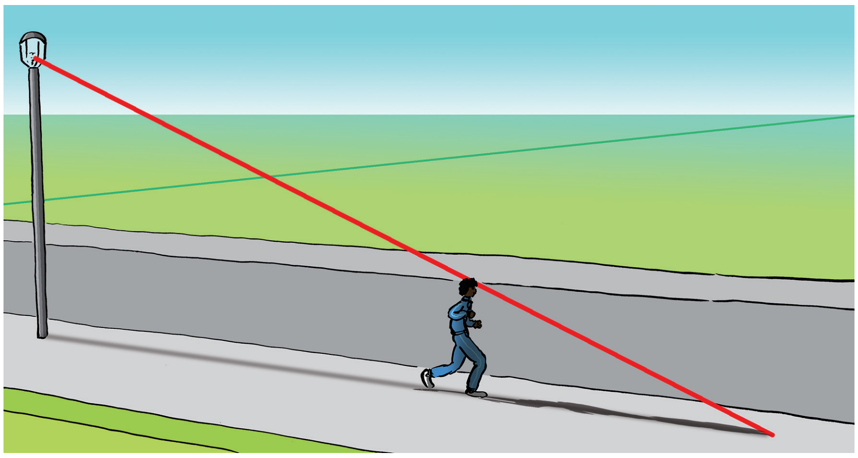
Opdracht 16 bladzijde 122

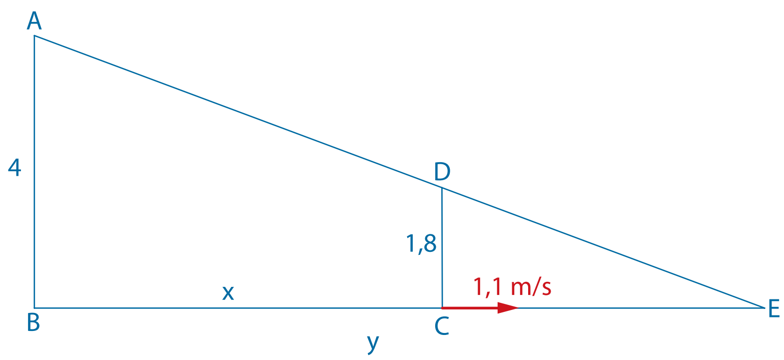
Een man van 1,80 m groot wandelt weg van een straatlantaarn die zich op 4 m boven de grond bevindt.
De man wandelt van de lantaarn weg met een snelheid van 1,1 m/s.

De schaduw van de man wordt groter naarmate de man zich verwijdert van de straatlantaarn.

1 Hoe snel beweegt het uiteinde van zijn schaduw?

Stel x de afstand tussen de voetpunten van de lantaarn en de man en y de afstand van het voetpunt van de lantaarn tot aan de top van de schaduw.





Uit de gelijkvormigheid van rechthoekige driehoeken vinden we

$$\frac{y}{y-x}=\frac{4}{1{,}8}$$
$$\Leftrightarrow 1{,}8y = 4y - 4x$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{20}{11}x$$

Hieruit vinden we het verband

$$\frac{dy}{dt}=\frac{20}{11}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Als $\frac{dx}{dt}=1{,}1$ m/s is bijgevolg $\frac{dy}{dt}=\frac{20}{11}\cdot 1{,}1\text{ m/s}=2\text{ m/s}$.

2 Met welke snelheid verandert de lengte van zijn schaduw op het moment dat de man zich op 6 m van de basis van de lantaarn bevindt?

De lengte van de schaduw is $y - x$ en die verandert met een snelheid

$$\frac{d}{dt}(y-x)=\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}=\frac{20}{11}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}=\frac{9}{11}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Als $\frac{dx}{dt}=1{,}1$ m/s dan is $\frac{d}{dt}(y-x)=0{,}9\text{ m/s}$.

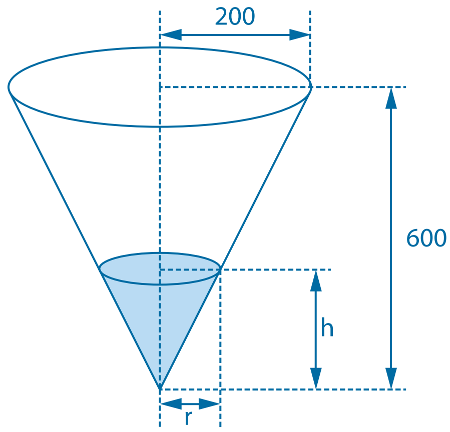
Deze snelheid is onafhankelijk van de afstand van de man tot de lantaarn.

Opdracht 17 bladzijde 122

Uit een waterreservoir stroomt water met een debiet van 10 000 cm^3/min, terwijl tegelijkertijd een pomp het reservoir vult met een constant debiet van q cm^3/min.
Het reservoir heeft de vorm van een omgekeerde kegel met hoogte 6 m en 2 m als straal van het bovenvlak.

Bepaal q als je weet dat de hoogte van het waterniveau stijgt met een snelheid van 20 cm/min op het moment dat die de hoogte 2 m bereikt.

- We stellen het volume water voor door V (in cm^3), de straal van het wateroppervlak door r (in cm) en de hoogte van het water door h (in cm). De tijd t wordt uitgedrukt in minuten.



- We weten dat $\frac{dV}{dt} = (q - 10\,000)\ cm^3/min$

  en $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=200} = 20\ cm/min.$

- $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (1)$

- $\frac{r}{h} = \frac{200}{600}$

  $\Updownarrow$

  $r = \frac{1}{3}h \quad (2)$

- (1) en (2):

  $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{9}h^2 \cdot h = \frac{1}{27}\pi h^3$

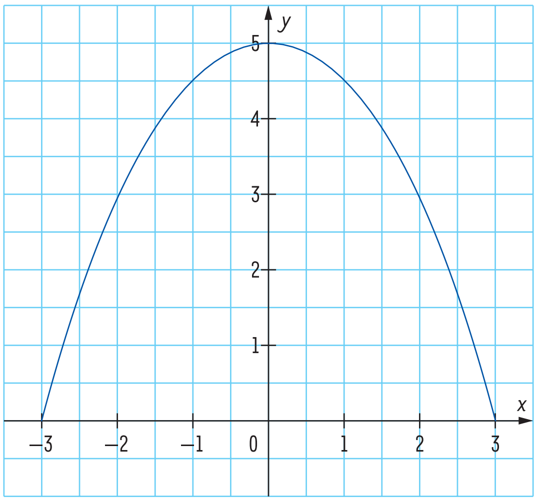
- $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

  dus $q - 10\,000 = \frac{1}{9} \cdot \pi \cdot 200^2 \cdot 20$

  $q = \frac{800\,000\,\pi}{9} + 10\,000 = 289\,252{,}68 \approx 289\,253$

Opdracht 18 bladzijde 123

Je wilt een vergelijking van een boog opstellen met hoogte 5 en breedte 6 in het getekende assenstelsel.
De boog heeft de vorm van een omgekeerde kettinglijn.



1 Verklaar algebraïsch waarom het voorschrift niet van de vorm $y = a \cosh \dfrac{x}{b}$ kan zijn.

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{b} = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}}{2}$$

- (0, 5) invullen: $a \cdot \dfrac{e^0 + e^0}{2} = a \cdot \dfrac{2}{2} = a = 5$ dus $y = \dfrac{5}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right)$
- (3, 0) invullen: $\dfrac{5}{2} \cdot \left(e^{\frac{3}{b}} + e^{-\frac{3}{b}}\right) = 0$

$$e^{\frac{3}{b}} + e^{-\frac{3}{b}} = 0$$

→ deze vergelijking heeft geen oplossing want $e^x > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$

2 Bepaal een mogelijk voorschrift van de boog.

- Naar analogie met het voorbeeld van Gateway Arch (kader p. 115), zoeken we een voorschrift van de vorm:

$$y = a \cdot (\cosh bx + c) = a \cdot \left(\frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2} + c \right)$$

- (3, 0) invullen:

$$a \cdot \left(\frac{e^{3b} + a^{-3b}}{2} + c \right) = 0$$

$$e^{3b} + e^{-3b} + 2c = 0$$

$$\left(e^{3b}\right)^2 + 2ce^{3b} + 1 = 0$$

$$D = 4c^2 - 4$$

↳ D moet positief zijn, anders heeft de vergelijking geen oplossingen in e^{3b} en bestaat ook b niet.

- (0, 5) invullen:

$$a \cdot \left(\frac{2}{2} + c \right) = 5$$

$$a \cdot (1 + c) = 5 \quad (*)$$

D = 0 kan enkel als c = 1 of c = –1, maar c = –1 is tegenstrijdig met (*)

en c = 1 geeft: $\left(e^{3b}\right)^2 + 2e^{3b} + 1 = 0$

$$\left(e^{3b} + 1\right)^2 = 0$$

$$e^{3b} = -1$$

↳ geen oplossing

Stel dan c = –2 (bv.),

zodat uit (*) volgt dat a = –5 en de vergelijking in e^{3b} wordt dan:

$$\left(e^{3b}\right)^2 - 4e^{3b} + 1 = 0$$

$$D = 12$$

$$e^{3b} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{of} \quad e^{3b} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{3b} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{of} \quad e^{3b} = 2 - \sqrt{3}$$

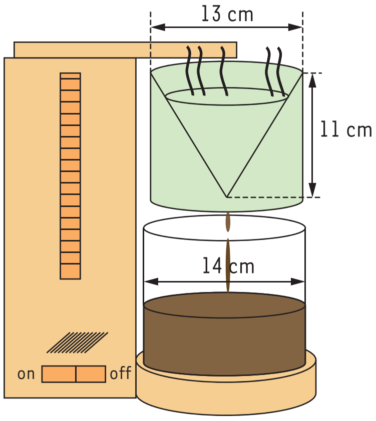
$$3b = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \quad \text{of} \quad 3b = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}{3} \quad \text{of} \quad b_2 = \frac{\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)}{3} = -b_1$$

Een mogelijk voorschrift is:

$$y = -5\left(\cosh\left(\frac{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}{3} x \right) - 2 \right)$$

Opdracht 19 bladzijde 123



Bij het koffiezetten zakt de oplossing door een kegelvormige filter met een diameter van 13 cm bovenaan en een diepte van 11 cm, in een cilindervormige glazen kan met een diameter van 14 cm.

Met welke snelheid stijgt het niveau in de cilinder als de snelheid waarmee het niveau in de filter daalt, gelijk is aan 1 cm per minuut op het moment dat de oplossing 9 cm hoog staat in de filter?

Stel h_k de hoogte van de oplossing in de kegelvormige filter en h_c de hoogte van de koffie in de cilinder (beide in cm) , t de tijd (in min), x de straal van het bovenoppervlak van de oplossing (in cm), V_k het volume oplossing in de kegel en V_c het volume koffie in de cilinder (beide in cm^3).

- $\dfrac{dh_k}{dt} = -1\,\text{cm/min als } h_k = 9\,\text{cm}$
- $V_k = \dfrac{1}{3}\pi x^2 \cdot h_k \quad (1)$
- $\dfrac{x}{6{,}5} = \dfrac{h_k}{11} \Rightarrow x = \dfrac{6{,}5}{11}h_k \quad (2)$
- Uit (1) en (2) volgt:

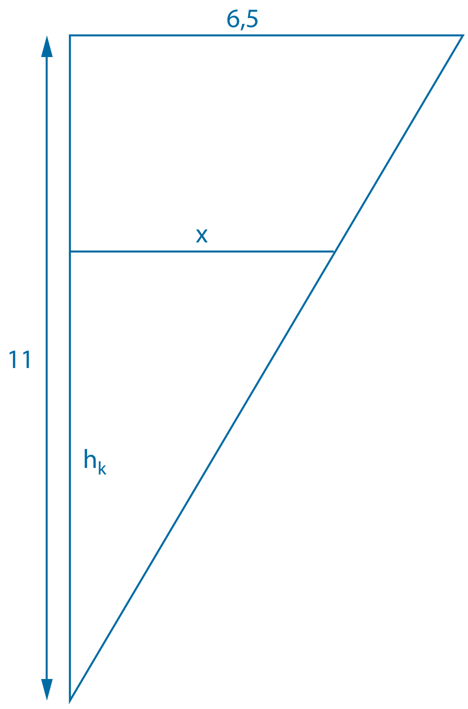
$$V_k = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6{,}5}{11}\right)^2 h_k^3 \Rightarrow \frac{dV_k}{dt} = \pi\left(\frac{6{,}5}{11}\right)^2 h_k^2\frac{dh_k}{dt}$$

$$\underset{\substack{h_k=9\\ \text{en } \frac{dh_k}{dt}=-1}}{\Rightarrow} \frac{dV_k}{dt} = \pi\left(\frac{6{,}5}{11}\right)^2 81\cdot(-1) = -81\left(\frac{6{,}5}{11}\right)^2 \pi \quad (3)$$

- $V_c = \pi r^2 \cdot h_c \underset{r=7}{=} 49\,\pi h_c$
- $\dfrac{dV_c}{dt} = 49\pi\dfrac{dh_c}{dt} \Rightarrow \dfrac{dh_c}{dt} = \dfrac{1}{49\pi}\dfrac{dV_c}{dt}$

$$\underset{\frac{dV_c}{dt}=-\frac{dV_k}{dt}}{\Rightarrow} \frac{dh_c}{dt} = -\frac{1}{49\pi}\frac{dV_k}{dt}$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \frac{dh_c}{dt} = -\frac{1}{49\pi}(-81)\left(\frac{6{,}5}{11}\right)^2\pi = 0{,}5772$$



De gevraagde snelheid is ongeveer 0,58 cm/min.

Opdracht 20 bladzijde 124
Hyperbolische functies

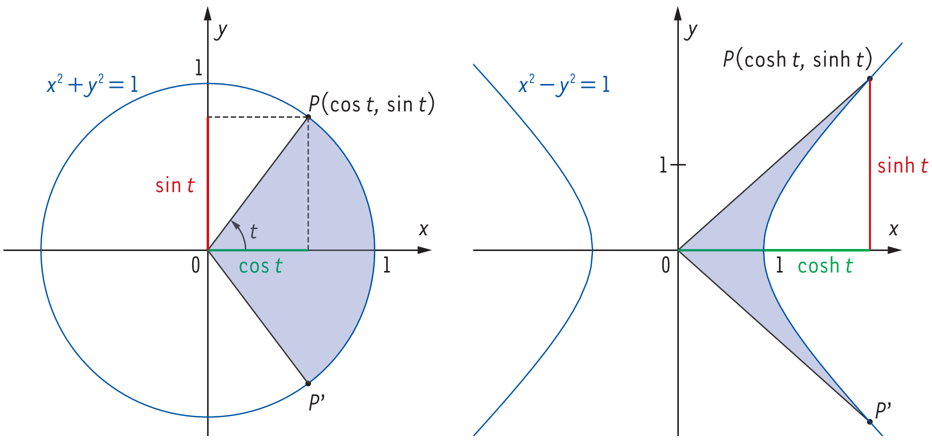
De cosinushyperbolicus is gedefinieerd als $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

De **sinushyperbolicus** is gedefinieerd als $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

De naam 'hyperbolicus' is afkomstig van het feit dat deze getallen verband houden met de hyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$, zoals de goniometrische getallen verband houden met de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

Het punt $P(\cos t, \sin t)$ ligt op de goniometrische cirkel. Hierbij is t de georiënteerde hoek die $[OP$ maakt met de positieve x-as. Maar t kan ook geïnterpreteerd worden als de oppervlakte van de cirkelsector OPP' waarbij P' het spiegelbeeld is van P om de x-as.

Het punt $P(\cosh t, \sinh t)$ ligt op de hyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$.
Hierbij is t de oppervlakte van de hyperboolsector OPP', ook wel de hyperboolhoek genoemd.



1 Bewijs de volgende formules.

a $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

b $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$
$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$$
$$= \sinh(x + y)$$

c $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

$$\begin{aligned}\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}\\&=\cosh(x+y)\end{aligned}$$

d $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

$$2\sinh x\cosh x=2\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\sinh 2x$$

e $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

$$\begin{aligned}\cosh^2 x+\sinh^2 x&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=\cosh 2x\end{aligned}$$

2 Bepaal $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)$ en $\dfrac{d}{dx}(\cosh x)$.

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x$$

3 We definiëren de **argument sinushyperbolicus** en de **argument cosinushyperbolicus** als volgt:

$y=\operatorname{Argsinh}x \;\Leftrightarrow\; x=\sinh y$

$y=\operatorname{Argcosh}x \;\Leftrightarrow\; x=\cosh y \;\text{ en }\; y\geqslant 0$

Bewijs:

a $\operatorname{Argsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\begin{aligned}y=\operatorname{Argsinh}x&\Leftrightarrow x=\sinh y\\&\Leftrightarrow x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&\Leftrightarrow 2x=e^y-e^{-y}\\&\Leftrightarrow e^{2y}-2xe^y-1=0\end{aligned}$$

De oplossingen van deze vierkantsvergelijking in e^y zijn

$$e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

Nu moet $e^y>0$, zodat $e^y=x+\sqrt{x^2+1} \;\Leftrightarrow\; y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

b Argcosh $x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$$
\begin{aligned}
y = \operatorname{Arg}\cosh x \iff & x = \cosh y \\
\iff & x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
\iff & 2x = e^y + e^{-y} \\
\iff & e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0
\end{aligned}
$$

De oplossingen van deze vierkantsvergelijking in e^y zijn

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Aangezien $y \geqslant 0$ als $y = \operatorname{Arg}\cosh x$, zal $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, want $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \leqslant 0$.

4 Bepaal $\frac{d}{dx}(\text{Argsinh } x)$ en $\frac{d}{dx}(\text{Argcosh } x)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{Arg}\sinh x) &= \frac{d}{dx}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{Arg}\cosh x) &= \frac{d}{dx}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\sqrt{x^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
\end{aligned}
$$

Opdracht 21 bladzijde 125

De tangenshyperbolicus wordt gedefinieerd als $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1 Bewijs:

a $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$$1-\tanh^2 x = 1-\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

b $\sinh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}$

$$\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x} = \frac{2\dfrac{\sinh x}{\cosh x}}{1-\dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}$$

$$= \frac{2\sinh x \cosh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$

$$= \frac{2\sinh x \cosh x}{1} \qquad \text{zie 1a}$$

$$= \sinh 2x \qquad \text{zie 1d}$$

2 We definiëren de **argument tangenshyperbolicus** als volgt:

$$y = \text{Argtanh}\, x \iff x = \tanh y$$

Toon aan dat Argtanh $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

$$\begin{aligned}
y = \text{Argtanh}\, x &\iff x = \tanh y \\
&\iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\
&\iff xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y} \\
&\iff (x+1)e^{-y} = (1-x)e^y \\
&\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\
&\iff 2y = \ln\frac{1+x}{1-x} \\
&\iff y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}$$

3 Bepaal $\frac{d}{dx}(\text{Argtanh}\, x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\text{Argtanh}\, x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Opdracht 22 bladzijde 125

Gegeven de kromme $k \leftrightarrow \begin{cases} x = \cos 2t + 2\sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ met $t \in [0, 2\pi]$.

1 Bepaal de helling van de kromme k in $P\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

- We bepalen eerst de waarde t die hoort bij het punt $P\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$:

  $$\begin{cases} \cos 2t + 2\sin t = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} & (1) \text{ met } t \in [0, 2\pi] \\ \cos t = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

  Uit (2) volgt: $t = \frac{\pi}{3}$ of $t = \frac{5\pi}{3}$.

  $t = \frac{\pi}{3}$ invullen in (1):

  $$\cos\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \neq -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

  $t = \frac{5\pi}{3}$ invullen in (1):

  $$\cos\frac{10\pi}{3} + 2\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

  $t = \frac{5\pi}{3}$ geeft dus het punt $P\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

- $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{-2\sin 2t + 2\cos t}$$

  voor $t = \frac{5\pi}{3}$ geeft dit de rico van de raaklijn aan de kromme in P en dus ook de helling van de kromme in P:

  $$\frac{-\sin\frac{5\pi}{3}}{-2\sin\frac{10\pi}{3} + 2\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$$

2 Bepaal de coördinaten van de meest rechts gelegen punten op de kromme.

- De meest rechtse punten op de kromme zijn de punten waarvoor de x-coördinaat maximaal is.

  We zoeken deze punten via:

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-2 \sin 2t + 2 \cos t = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-4 \sin t \cos t + 2 \cos t = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos t(1 - 2 \sin t) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos t = 0 \quad \text{of} \quad \sin t = \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{in } [0, 2\pi]\text{: } t = \frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad t = \frac{3\pi}{2} \quad \text{of} \quad t = \frac{\pi}{6} \quad \text{of} \quad t = \frac{5\pi}{6}$$

- $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -1 + 2 \cdot 1 = 1$

  $y = 0$ dus $R(1, 0)$

  $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -1 + 2 \cdot (-1) = -3$

  $y = 0$ dus $S(-3, 0)$

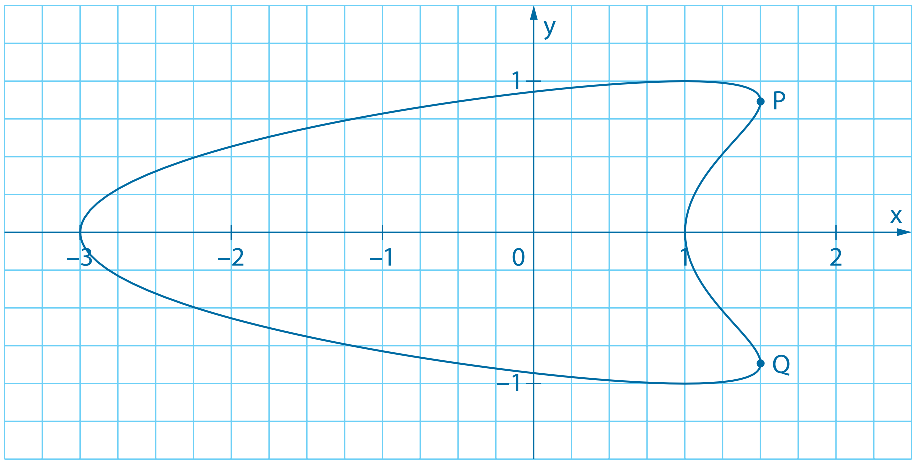
  $t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dus $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

  $t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dus $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

  De meest rechtse punten op de kromme zijn $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en $Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Opdracht 23 bladzijde 126

Gegeven de kromme $k \leftrightarrow \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin 2t \end{cases}$ met $t \in [0, 2\pi]$.

1 Bepaal een vergelijking van de raaklijn *l* aan de kromme *k* in het punt $P\left(\frac{3}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

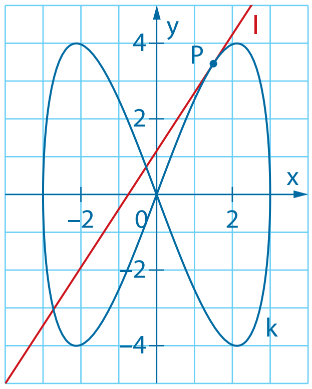
We bepalen eerst de waarde van t die hoort bij het punt $P\left(\frac{3}{2}, 2\sqrt{3}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = 3\cos t \\ 2\sqrt{3} = 4\sin 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ \sin 2t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

De enige waarde van $t \in [0, 2\pi]$ die hieraan voldoet is $t = \frac{\pi}{3}$.

Om de richtingscoëfficiënt van raaklijn l in P te bepalen, berekenen we eerst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8\cos 2t}{-3\sin t}.$$



Voor $t = \frac{\pi}{3}$ vinden we

$$\text{rico } l = \frac{-8\cos\frac{2\pi}{3}}{3\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{-8\cdot\frac{-1}{2}}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

We vinden $l \leftrightarrow y - 2\sqrt{3} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

of $\quad l \leftrightarrow y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2 Bepaal de coördinaten van de punten op deze kromme met horizontale raaklijn.

Bij een horizontale raaklijn is $\frac{dy}{dt} = 0$ en $\frac{dx}{dt} \neq 0$,

dus $8 \cos 2t = 0$ en $-3 \sin t \neq 0$

$\cos 2t = 0$ en $\sin t \neq 0$

$2t = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ en $t \neq k \cdot \pi$

$t = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ en $t \neq k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

in $[0, 2\pi]$:

$t = \frac{\pi}{4}$ geeft het punt $P_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\right)$

$t = \frac{3\pi}{4}$ geeft het punt $P_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -4\right)$

$t = \frac{5\pi}{4}$ geeft het punt $P_3\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\right)$

$t = \frac{7\pi}{4}$ geeft het punt $P_4\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -4\right)$

3 Bepaal de coördinaten van de punten op deze kromme met verticale raaklijn.

Bij een verticale raaklijn is $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$,

dus $-3 \sin t = 0$ en $8 \cos 2t \neq 0$

$\sin t = 0$ en $\cos 2t \neq 0$

$t = k \cdot \pi$ en $2t \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

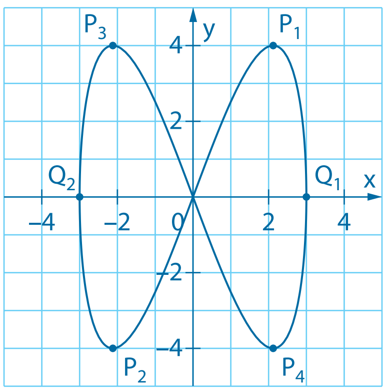
$t = k \cdot \pi$ en $t \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

in $[0, 2\pi]$:

$t = 0$ geeft het punt $Q_1(3, 0)$

$t = \pi$ geeft het punt $Q_2(-3, 0)$

$t = 2\pi$ geeft het punt $Q_3(3, 0) = Q_1$

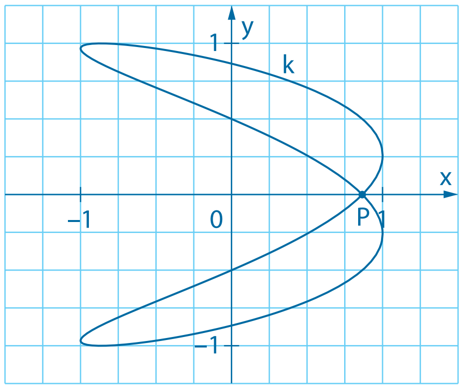


Opdracht 24 bladzijde 126

Gegeven de kromme $k \leftrightarrow \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin\left(t + \dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases}$ met $t \in [0, 2\pi]$.

1 Toon aan dat de kromme zichzelf snijdt in een punt op de x-as en bepaal de coördinaat van dit punt P.

Als de kromme zichzelf snijdt op de x-as, moeten er twee waarden van t zijn die dezelfde x geven bij y = 0.



$$y = 0 \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Met $t \in [0, 2\pi]$ vinden we $t = \dfrac{11\pi}{12}$ en $t = \dfrac{23\pi}{12}$.

Nu is $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\dfrac{23\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ zodat de kromme zichzelf snijdt in het punt $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

2 Bereken de richtingscoëfficiënt van elk van de raaklijnen aan de kromme in P.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos\left(t + \frac{\pi}{12}\right)}{-2\sin 2t}$$

Voor $t = \dfrac{11\pi}{12}$ is $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos \pi}{-2\sin\frac{11\pi}{6}} = -1$,

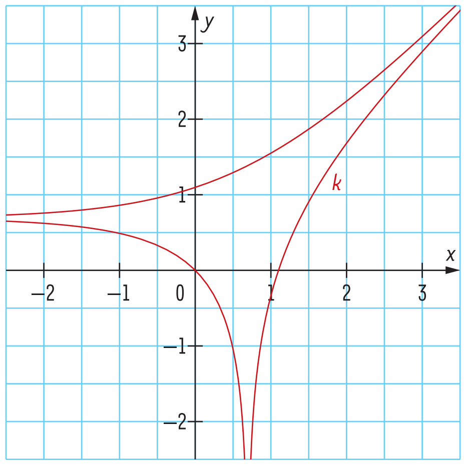
voor $t = \dfrac{23\pi}{12}$ is $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 2\pi}{-2\sin\frac{23\pi}{6}} = 1$.

De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de kromme in P zijn –1 en 1.

Opdracht 25 bladzijde 126

De kromme k is gegeven door

$$\begin{cases} x = \ln|t| \\ y = \ln|t+2| \end{cases}.$$



1 De kromme k heeft een horizontale, een verticale en een schuine asymptoot.

Bepaal vergelijkingen van deze rechten.

– Bij $t = -2$ is $x = \ln 2$ en $\lim\limits_{t \to -2} y = -\infty$, dit betekent dat $x = \ln 2$ een vergelijking is van de verticale asymptoot van de grafiek van f.

– Bij $t = 0$ is $y = \ln 2$ en $\lim\limits_{t \to 0} x = -\infty$, dit betekent dat $y = \ln 2$ een vergelijking is van de horizontale asymptoot van de grafiek van f voor $x \to -\infty$.

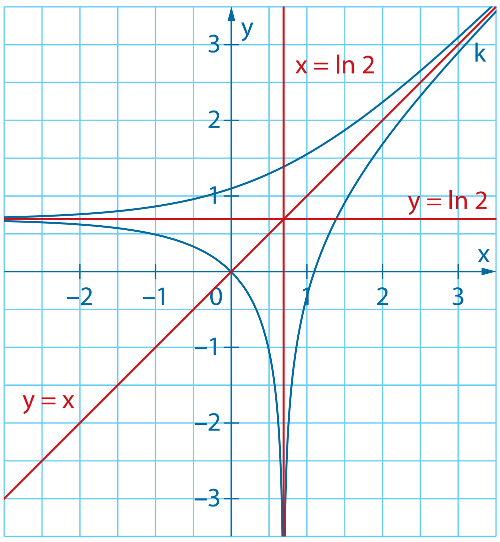
– Uit $x = \ln|t|$ volgt $t = e^x$ of $t = -e^x$ zodat

$y = \ln|e^x + 2| = \ln(e^x + 2)$

of $y = \ln|-e^x + 2| = \ln(e^x - 2)$ als $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x \pm 2)}{x} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x \pm 2} \underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} 1 \text{ en}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x \pm 2) - x\right) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x \pm 2) - \ln(e^x)\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \ln\frac{e^x \pm 2}{e^x} \\
&= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \pm 2}{e^x}\right) \\
&\underset{H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \ln 1 = 0
\end{aligned}$$



De schuine asymptoot van de grafiek van f is de rechte met vergelijking $y = x$.

2 Onder welke scherpe hoeken snijdt *k* de *x*-as?

$y=0 \Leftrightarrow \ln|t+2|=0 \Leftrightarrow |t+2|=1 \Leftrightarrow t+2=\pm1 \Leftrightarrow t=-1 \text{ of } t=-3$

De snijpunten met de x-as zijn O(0, 0) en A(ln 3, 0).

Nu is $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t}{t+2}$ zodat

– de helling in O(0, 0) gelijk is aan $\frac{-1}{-1+2}=-1$;

uit $\tan\alpha=-1$ vinden we $\alpha=-45°$ of een scherpe hoek van 45°.

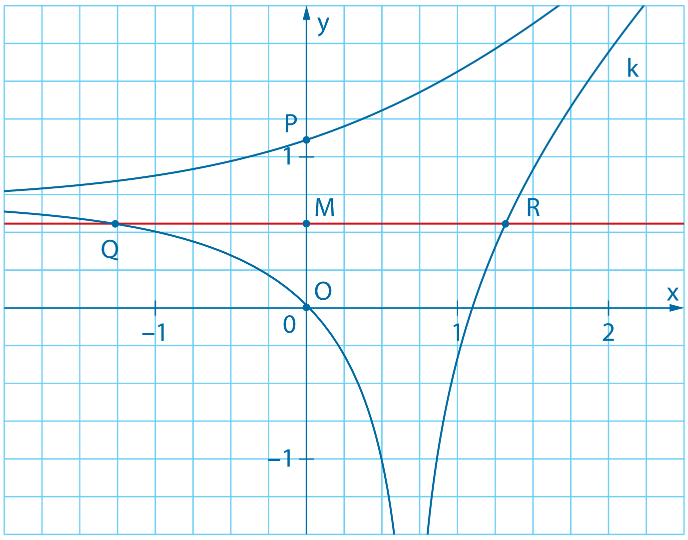
– de helling in A(ln 3, 0) is $\frac{-3}{-3+2}=3$;

uit $\tan\beta=3$ vinden we een scherpe hoek van 71°33′54″.

3 De snijpunten van *k* met de *y*-as zijn de oorsprong *O* en *P*.
Noem *M* het midden van [*OP*].

De rechte *l* gaat door *M* en is evenwijdig met de *x*-as, *l* snijdt *k* in de punten *Q* en *R*.

Toon aan dat *M* het midden is van [*QR*].



– We zoeken eerst de snijpunten met de y-as:

$x=\ln|t|=0 \Leftrightarrow t=\pm1$

De gezochte snijpunten zijn O(0, 0) en P(0, ln 3).

Hieruit volgt $M\left(0, \frac{1}{2}\ln 3\right)$

$= M\left(0, \ln\sqrt{3}\right)$.

– De snijpunten van k met $y=\ln\sqrt{3}$ vinden we uit

$\ln|t+2|=\ln\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |t+2|=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow t=-2\pm\sqrt{3}$

Voor $t=-2+\sqrt{3}$ vinden we $Q\left(\ln\left(2-\sqrt{3}\right), \ln\sqrt{3}\right)$, voor $t=-2-\sqrt{3}$ het punt $R\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right), \ln\sqrt{3}\right)$.

Het midden van [QR] is het punt met coördinaat $\left(\frac{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}, \ln\sqrt{3}\right)$ of

$$\left(\frac{\ln\left[\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right]}{2}, \ln\sqrt{3}\right)=\left(\frac{\ln(4-3)}{2}, \ln\sqrt{3}\right)=\left(0, \ln\sqrt{3}\right).$$

Dit is het punt M, wat moest bewezen worden.

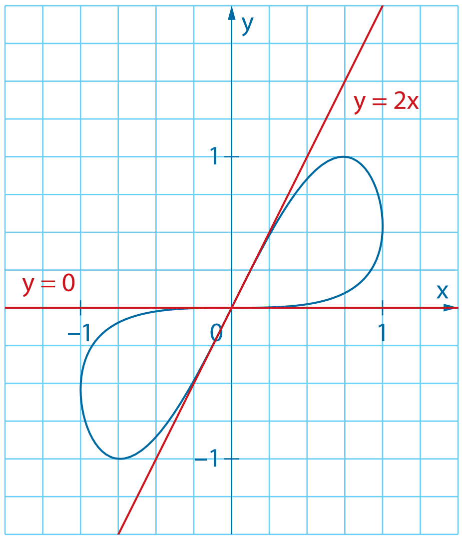
Opdracht 26 bladzijde 127

Toon aan dat de kromme met parametervergelijking $k \leftrightarrow \begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(t + \sin t) \end{cases}$,

met $t \in [0, 2\pi]$, twee raaklijnen heeft in de oorsprong en bepaal vergelijkingen van deze raaklijnen.

We vinden het punt O(0, 0) op de kromme $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(t + \sin t) \end{cases}$ zowel voor t = 0 als voor t = π

(ook voor t = 2π maar dit geeft geen nieuwe raaklijn).



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos(t + \sin t) \cdot (1 + \cos t)}{\cos t}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2 \quad \text{en} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = 0$$

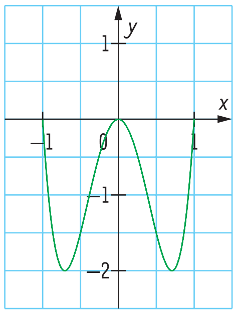
De eerste raaklijn heeft als vergelijking y = 2x.

De tweede raaklijn is de x-as.

Opdracht 27 bladzijde 127

Een punt beweegt zich in het vlak op de kromme

$k \leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 4t - 1 \end{cases}$ met $t \in [0, 2\pi]$.



Het lijkt alsof het punt zich beweegt op een deel van de grafiek van een veeltermfunctie van de vierde graad.

Onderzoek of dit inderdaad het geval is.

Uit de verdubbelingsformules vinden we een verband tussen cos 4t en cos t:

$\cos 4t = 2\cos^2 2t - 1 = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$

zodat $\cos 4t - 1 = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t \iff y = 8x^4 - 8x^2$, dit is het voorschrift van een veeltermfunctie van de vierde graad.

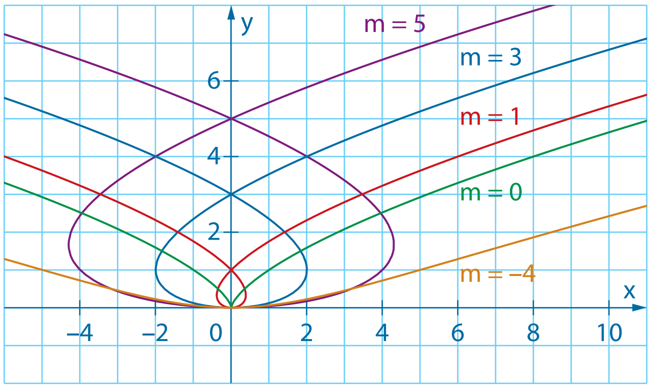
Aangezien $x = \cos t$ en $t \in [0, 2\pi]$, zal $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$y = \cos 4t - 1$ zodat $-2 \leqslant y \leqslant 0$.

Opdracht 28 bladzijde 127

Beschouw de familie krommen met parametervergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^3 - m \cdot t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$.

We plotten een aantal krommen van de familie met parametervergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^3 - m \cdot t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$.



1 Voor welke waarden van *m* maakt de kromme een lus?

We hebben een lus als we eenzelfde punt P(x, y) vinden voor verschillende waarden van t.

Noem deze waarden t_1 en t_2, dan moet het stelsel $\begin{cases} t_1^3 - m \cdot t_1 = t_2^3 - m \cdot t_2 & (1) \\ t_1^2 = t_2^2 & (2) \end{cases}$

een oplossing hebben voor t_1 en t_2 waarbij $t_1 \neq t_2$.

Uit (2) volgt dan dat $t_2 = -t_1$.

Invullen in (1) geeft

$t_1^3 - m \cdot t_1 = -t_1^3 + m \cdot t_1$

$\Leftrightarrow\ 2t_1^3 - 2m \cdot t_1 = 0$

$\Leftrightarrow\ 2t_1(t_1^2 - m) = 0$

De oplossing $t_1 = t_2 = 0$ komt niet in aanmerking (want $t_1 \neq t_2$), dus moet $t_1^2 - m = 0$ twee oplossingen voor t_1 hebben.

Dit is enkel zo als $m > 0$.

Besluit: de grafiek maakt een lus als $m > 0$.

2 Indien de kromme een lus vertoont, situeer dan het punt waar ze zichzelf snijdt.

Uit **1** volgt dat we hetzelfde punt vinden voor $t = \sqrt{m}$ en voor $t = -\sqrt{m}$ als $m > 0$.

Dit is het punt P(0, m).

3 Bepaal de verzameling van alle punten met verticale raaklijn van deze familie krommen.

We vinden een verticale raaklijn als $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - m = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{m}{3}}$, $\frac{dy}{dt} \neq 0$ geeft de voorwaarde $t \neq 0$.

Er zijn dus twee verticale raaklijnen als $m > 0$,

in de punten $Q_1\left(\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}, \frac{m}{3}\right)$ en $Q_2\left(-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}, \frac{m}{3}\right)$.

Voor $m = 0$ is $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0$ voor $t = 0$.

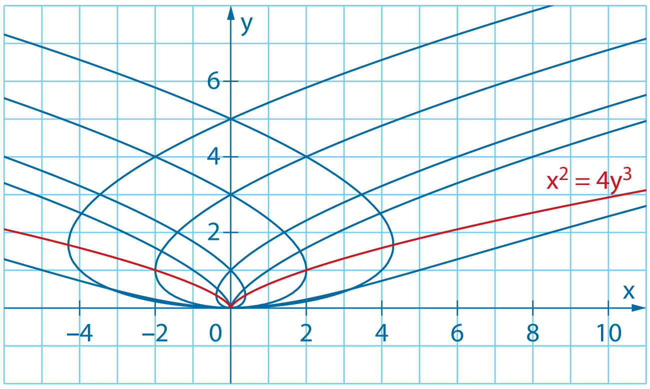
Aangezien dan echter $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{3t^2}$, is $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{dy}{dx} = -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{dy}{dx} = +\infty$.

Er is dan ook een verticale raaklijn in de oorsprong.

De punten $Q_1\left(\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}, \frac{m}{3}\right)$ liggen op de kromme met vergelijking $x = 2y\sqrt{y}$

en de punten $Q_2\left(-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}, \frac{m}{3}\right)$ op de kromme met vergelijking $x = -2y\sqrt{y}$.

Samen met de oorsprong vormen deze de kromme met vergelijking $x^2 = 4y^3$.



Opdracht 29 bladzijde 127

Gegeven de kromme $k \leftrightarrow \begin{cases} x = t\ \ln|t| \\ y = \ln|t-2| \end{cases}$.

1 Bepaal een vergelijking van de verticale asymptoot van deze kromme.

Bij t = 2 is x = 2 ln 2 en $\lim\limits_{t \to 2} \ln|t-2| = -\infty$,

dit betekent dat x = 2 ln 2 een verticale asymptoot is van deze kromme.

2 Onder welke scherpe hoek snijdt deze kromme de x-as in de oorsprong?

Bij de oorsprong is $\begin{cases} t \cdot \ln|t| = 0 & (1) \\ \ln|t-2| = 0 & (2) \end{cases}$

Uit (2) volgt dat $|t-2| = 1$ dus t = 3 of t = 1.

Ingevuld in (1) zien we dat enkel t = 1 de oorsprong geeft.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}} = \frac{\left.\frac{1}{t-2}\right|_{t=1}}{\left.\left(\ln|t| + t \cdot \frac{1}{t}\right)\right|_{t=1}} = \frac{-1}{0+1} = -1$$

tan α = –1 geeft α = –45°, zodat de gevraagde scherpe hoek 45° is.

3 Bepaal de coördinaten van de punten van k met een verticale raaklijn.

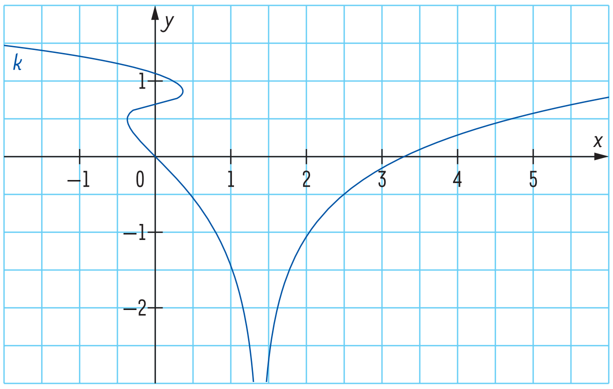
We vinden een verticale raaklijn als $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln t + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln t = -1 \Leftrightarrow t = e^{-1} & (\text{voor } t > 0) \\ \ln(-t) + t \cdot \frac{1}{-t} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(-t) = -1 \Leftrightarrow t = -e^{-1} & (\text{voor } t < 0) \end{cases}$$

$t = e^{-1}$ geeft het punt $P_1\left(-\frac{1}{e}, \ln\left|\frac{1}{e} - 2\right|\right)$

$t = -e^{-1}$ geeft het punt $P_2\left(\frac{1}{e}, \ln\left|-\frac{1}{e} - 2\right|\right)$

4 Bepaal de coördinaat van de opening in *k*.



Voor t = 0 bestaat de x-coördinaat niet, maar

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} t \cdot \ln|t| \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{\ln(-t)}{t^{-1}}$$

$$\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{\frac{-1}{t} \cdot (-1)}{-t^{-2}}$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} -\frac{t^2}{t}$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} (-t)$$

$$= 0$$

en $\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} t \cdot \ln|t| \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln t}{t^{-1}}$

$$\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{t}}{-t^{-2}}$$

$$= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} (-t)$$

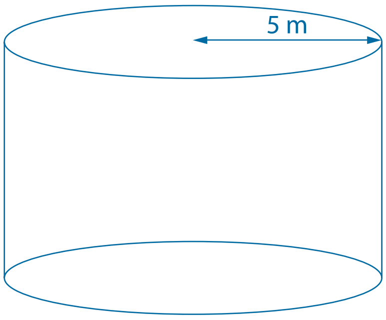
$$= 0$$

De coördinaat van de opening is (0, ln2).

Opdracht 30 bladzijde 128

Een rechtopstaande cilindervormige tank met een straal van 5 m wordt leeggepompt met een snelheid van 3000 l/min.

Met welke snelheid (in cm/min) neemt de hoogte van de vloeistof af?



- Er is gegeven dat

$$\frac{dV}{dt} = -3000 \text{ l/min}$$

$$= -3\,000\,000 \text{ cm}^3/\text{min}$$

- $V = \pi \cdot 500^2 \cdot h \quad (\text{in cm}^3)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 500^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 500^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot 500^2} \cdot (-3\,000\,000) \text{ cm/min}$$

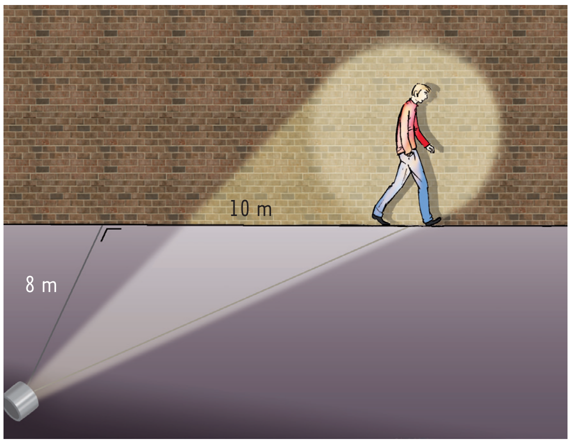
$$= -3{,}82 \text{ cm/min}$$

De hoogte neemt af met een snelheid van ongeveer 3,82 cm/min.

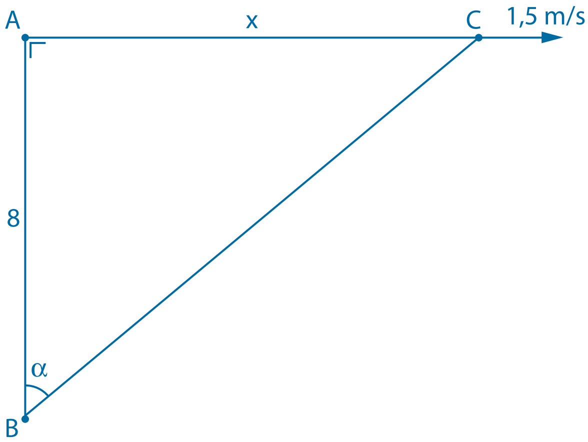
Opdracht 31 bladzijde 128

Een man verplaatst zich op het toneel met een snelheid van 1,5 m/s langs een muur.
Een spot op de grond op 8 m van de muur volgt de man.

Met welke snelheid (in rad/s) draait de spot op het moment dat de man zich op 10 m van het dichtste punt van de spot tot de muur bevindt?



In de driehoek ABC is



$$\tan\alpha = \frac{x}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{8}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{8}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\cos^2\alpha$$

Voor $x = 10$ is $\tan\alpha = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

en dus $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{25}{16}} = \frac{16}{41}$.

Met $\frac{dx}{dt} = 1{,}5$ is dan $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{8}\cdot 1{,}5\cdot\frac{16}{41} = \frac{3}{41} \approx 0{,}073$.

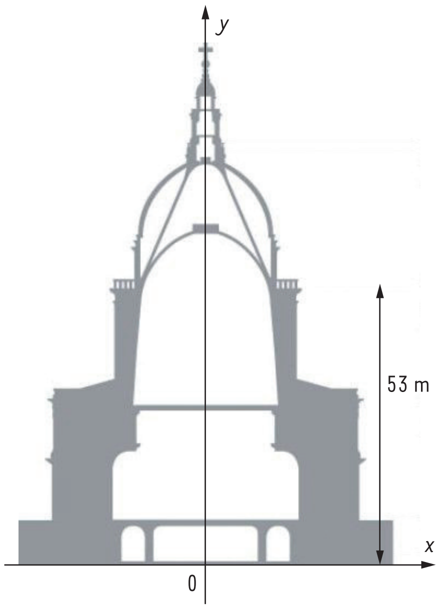
De spot draait op dat moment met een snelheid van ongeveer 0,073 rad/s.

Opdracht 32 bladzijde 129

De middelste dragende koepel van St. Paul's Cathedral heeft in het getekende assenstelsel als vergelijking

$$y = 170 - 85 \cdot \cosh \frac{x}{18{,}277} \text{ met } x \text{ en } y \text{ in m.}$$

De voet van de koepel bevindt zich op 53 m hoogte.



$$y = 170 - 85 \cdot \cosh \frac{x}{18{,}277} = 170 - 85 \cdot \frac{e^{\frac{x}{18{,}277}} + e^{\frac{-x}{18{,}277}}}{2}$$

1 Hoe hoog is St. Paul's Cathedral als je weet dat de lantaarn bovenop de koepel 26 m hoog is?

Als $x = 0$, dan is $y = 170 - 85 \cdot \frac{1+1}{2} = 170 - 85 = 85$.

De totale hoogte van St. Paul's Cathedral is dus (85 + 26) m = 111 m.

2 Wat is de diameter van de koepel?

Neem $f(x) = 170 - 85 \cdot \frac{e^{\frac{x}{18{,}277}} + e^{\frac{-x}{18{,}277}}}{2} - 53$

dus $f(x) = 117 - 85 \cdot \frac{e^{\frac{x}{18{,}277}} + e^{\frac{-x}{18{,}277}}}{2}$.

$$f(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$117 - 85 \cdot \frac{e^{\frac{x}{18{,}277}} + e^{\frac{-x}{18{,}277}}}{2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\frac{x}{18{,}277}} + e^{\frac{-x}{18{,}277}} = -117 \cdot \left(-\frac{2}{85}\right) = \frac{234}{85}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(e^{\frac{x}{18{,}277}}\right)^2 - \frac{234}{85} \cdot e^{\frac{x}{18{,}277}} + 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{\frac{x}{18{,}277}} = 2{,}322... \quad \text{of} \quad e^{\frac{x}{18{,}277}} = 0{,}4305...$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{18{,}277} = \ln 2{,}322... \quad \text{of} \quad \frac{x}{18{,}277} = \ln 0{,}4305...$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 15{,}3997... \quad \text{of} \quad x = -15{,}3997...$$

De diameter van de koepel is 30,80 m.

Opdracht 33 bladzijde 129

De onderstaande figuur geeft de grafiek weer van de functie f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(t) = e^{1-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ waarbij T en τ constant zijn.

Kies het juiste antwoord.

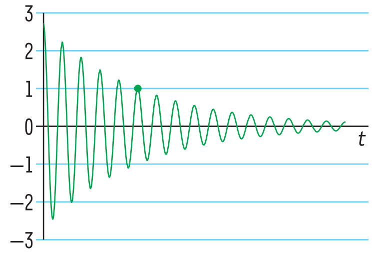
A $\frac{T}{\tau} = 0{,}1$

B $\frac{T}{\tau} = 0{,}2$

C $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{e}$

D $\frac{T}{\tau} = e$

E $\frac{T}{\tau} = 5$



(bron © Typevragen ijkingstoets burgerlijk ingenieur)

$f(t) = e^{1-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ (met T en τ constant)

- De getekende grafiek ligt tussen de krommen

  $x_1(t) = e^{1-\frac{t}{\tau}}$ en $x_2(t) = -e^{1-\frac{t}{\tau}}$

  bovenste omhullende

- Bij y = 1 hebben we een snijpunt van de bovenste omhullende en de grafiek van de functie f.

  Dit betekent dat:

  $e^{1-\frac{t}{\tau}} = 1$, zodat $\frac{t}{\tau} = 1$ of $t = \tau$

  Maar ook f(t) = f(τ) = 1

  dus

  $\cos\frac{2\pi \cdot \tau}{T} = 1$

  $\frac{2\pi \cdot \tau}{T} = k \cdot 2\pi$

  $\frac{\tau}{T} = k \quad (k \in \mathbb{Z})$

  Omdat er vanaf de oorsprong 5 periodes van de cosinus gepasseerd zijn op het moment dat y = 1, zal $\frac{\tau}{T} = 5$, zodat $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Antwoord B is correct.

Opdracht 34 bladzijde 130

Een condensator is een elektrische component waarin je elektrische lading kunt opslaan. Iemand heeft een elektrisch circuit met één condensator gemaakt waarin geldt: als de lege condensator wordt opgeladen, neemt de condensatorspanning toe van 0 tot een limietspanning volgens de formule

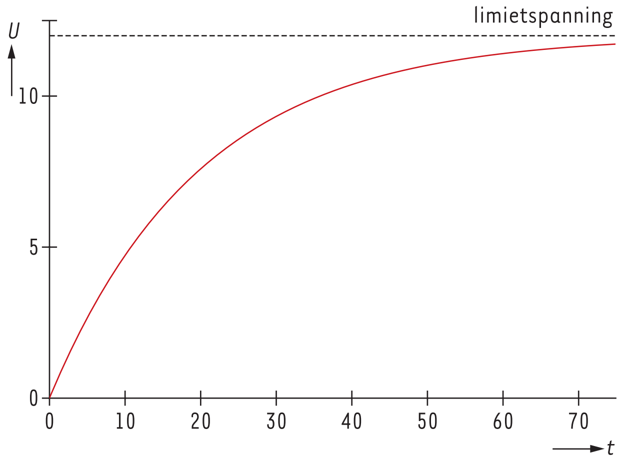
$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2000C}}\right)$$

Hierin is: U de condensatorspanning in volt,
t de oplaadtijd in seconden en
C de capaciteit van de condensator in farad.

Een condensator met een capaciteit van 0,01 farad wordt in dit circuit opgeladen. Voor deze condensator in dit circuit geldt dus:

$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$$

In de figuur hieronder is de grafiek van deze U als functie van t getekend.



1 Bereken met behulp van differentiëren met welke snelheid (in volt per seconde) de spanning van een condensator met een capaciteit van 0,01 farad toeneemt op tijdstip $t = 0$.

$$U = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = 12 \cdot \left(-e^{-\frac{t}{20}}\right) \cdot \frac{-1}{20} = 0{,}6 \cdot e^{-\frac{t}{20}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0} = 0{,}6 \cdot e^{0} = 0{,}6$$

De snelheid waarmee de spanning toeneemt op dat tijdstip is 0,6 volt per seconde.

2 Bereken algebraïsch hoe lang het duurt voordat bij een condensator met een capaciteit van 0,01 farad de condensatorspanning 90 % van de limietspanning is.
Rond je antwoord af op hele seconden.

$$\lim_{t\to+\infty} 12\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{20}}\right)=12$$

$$12\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{20}}\right)=0{,}90\cdot 12$$

$$\Leftrightarrow\ 1-e^{-\frac{t}{20}}=0{,}90$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-\frac{t}{20}}=0{,}10$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{t}{20}=\ln 0{,}10$$

$$\Leftrightarrow\ t=20\ln 10\approx 46{,}05$$

Na 46 seconden wordt 90 % van de limietspanning bereikt.

3 Soms heb je niet direct de beschikking over een condensator met de juiste capaciteit. Om een kleinere capaciteit te krijgen, kun je meerdere condensatoren in serie schakelen. Een serieschakeling van n condensatoren met capaciteiten $C_1, \ldots, C_n$ heeft dezelfde werking als één condensator met capaciteit C_s, waarbij $\frac{1}{C_s}=\frac{1}{C_1}+\ldots+\frac{1}{C_n}$.

Zo hebben bijvoorbeeld twee in serie geschakelde condensatoren met een capaciteit van 0,01 farad dezelfde werking als één condensator met een capaciteit van 0,005 farad.

We willen in het bovengenoemde circuit binnen een tijd van 10 seconden een condensatorspanning van minstens 10 volt verkrijgen. We beschikken over een groot aantal lege condensatoren, elk met een capaciteit van 0,01 farad.

Onderzoek hoeveel van deze condensatoren ten minste in serie geschakeld moeten worden om het gestelde doel te bereiken.

(bron © Examen 2010 wiskunde B VWO Nederland)

Na 10 seconden moet de condensatorspanning C_s minstens 10 volt zijn.

Dit betekent dat

$$12\cdot\left(1-e^{-\frac{10}{2000C_s}}\right)\geqslant 10$$

$$\Leftrightarrow\ 1-e^{-\frac{10}{2000C_s}}\geqslant\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ e^{-\frac{10}{2000C_s}}\leqslant\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{-10}{2000C_s}\leqslant\ln\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\ C_s\leqslant\frac{-10}{2000\ln\frac{1}{6}}$$

$$\Leftrightarrow\ C_s\leqslant 0{,}00279\approx\frac{1}{359}$$

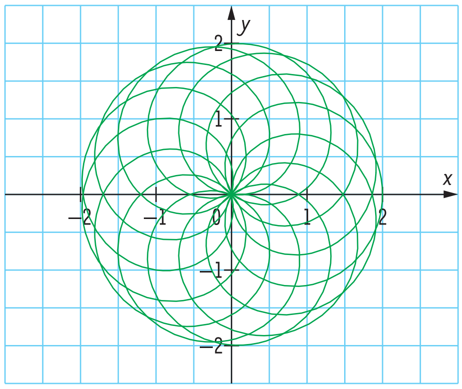
Aangezien alle condensatoren in serie een capaciteit hebben van 0,01 farad, moet
$\frac{1}{C_s} = \frac{n}{0{,}01} \geqslant 359$ of $n \geqslant 3{,}59$.

Er moeten minstens 4 condensatoren in serie geschakeld worden.

Opdracht 35 bladzijde 130

De beweging van een punt in het vlak wordt voor $t \in [0, 2\pi]$ gegeven door

$$\begin{cases} x = \cos 15t + \cos 2t \\ y = \sin 15t + \sin 2t \end{cases}$$



1 Toon aan dat de bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot

$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \cos\frac{17}{2}t \\ y = 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \sin\frac{17}{2}t \end{cases}$$

We kunnen de vergelijkingen $\begin{cases} x = \cos 15t + \cos 2t \\ y = \sin 15t + \sin 2t \end{cases}$ met de formules van Simpson herschrijven als

$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \cos\frac{17}{2}t \\ y = 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \sin\frac{17}{2}t \end{cases}.$$

2 Bij het doorlopen van de baan voor $t \in [0, 2\pi]$ passeert het punt een aantal keren (0,0).
Bereken dit aantal algebraïsch.

We zoeken de waarden van $t \in [0, 2\pi]$ die oplossingen zijn van het stelsel

$$\begin{cases} 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \cos\frac{17}{2}t = 0 \\ 2\cos\frac{13}{2}t \cdot \sin\frac{17}{2}t = 0 \end{cases}.$$

Aangezien de cosinus en de sinus nooit terzelfdertijd 0 zijn, zoeken we dus de oplossingen van $\cos\frac{13}{2}t = 0$ in $[0, 2\pi]$.

We vinden:

$$\cos\frac{13}{2}t = 0 \Leftrightarrow \frac{13}{2}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi + 2k\pi}{13} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

De 13 oplossingen in $[0,2\pi]$ zijn $\frac{\pi}{13}, \frac{3\pi}{13}, \dots, \frac{25\pi}{13}$.

De oorsprong wordt dus 13 keer gepasseerd.

Hersenbrekers bladzijde 132

1 Bij een supermarkt staan twee rijen in elkaar geschoven winkelwagentjes. De eerste rij van 10 winkelwagentjes is 2,9 m lang. De tweede rij van 20 winkelwagentjes is 4,9 m lang.

Hoe lang is een winkelwagentje?

A 0,9 m **B** 1 m **C** 1,1 m **D** 1,2 m **E** 1,4 m

(bron © Kangoeroewedstrijd wizprof 2010)

Stel x is de lengte van een winkelwagentje en y de extra lengte bij ineenschuiven van twee wagentjes, dan is

$$\begin{cases} x + 9y = 2{,}9 \\ x + 19y = 4{,}9 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat $10y = 2$ zodat $y = 0{,}2$ en $x = 2{,}9 - 9 \cdot 0{,}2 = 1{,}1$.

Antwoord C is het juiste.

2 Welke van de volgende verzamelingen is eindig?

A $\left\{ \frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \geqslant 2000, x \geqslant 2000 \right\}$

B $\left\{ \frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leqslant 2000, x \leqslant 2000 \right\}$

C $\left\{ \frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leqslant 2000, y \leqslant 2000 \right\}$

D $\left\{ \frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leqslant 2000, x \geqslant 2000 \right\}$

E $\left\{ \frac{x}{y}; x, y \in \mathbb{N}_0, \frac{x}{y} \leqslant 2000, y \geqslant 2000 \right\}$

(bron © VWO tweede ronde 2000)

A is een oneindige verzameling, je kunt namelijk $x = 2000y$ kiezen bij elk natuurlijk getal y, en je hebt dan al oneindig veel breuken $\frac{x}{y} = 2000$.

B is een oneindige verzameling: kies je $x = 2000$, dan is $\frac{x}{y} \leqslant 2000$ voor elk natuurlijk getal y.

Om dezelfde reden is D een oneindige verzameling.

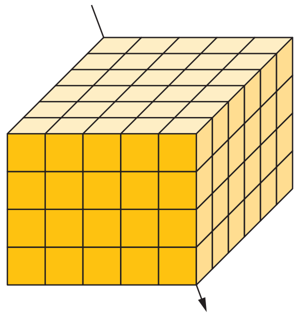
E is een oneindige verzameling want er zijn oneindig veel natuurlijke getallen $y \geqslant 2000$. Voor elk van deze getallen y zijn er x-waarden te vinden waarvoor $x \leqslant 2000y$.

C is een eindige verzameling want er zijn 2000 natuurlijke getallen $y \leqslant 2000$. Voor elk van deze getallen y zijn er een eindig aantal x-waarden te vinden waarvoor $x \leqslant 2000y$.

Antwoord C is het juiste.

3 Een rechthoekig blok kaas is verdeeld in $4 \times 5 \times 6$ gelijke kaasblokjes.
Een satéprikker prikt door het blok kaas via een lichaamsdiagonaal.

Hoeveel kaasblokjes zitten aan de satéprikker vastgeprikt?



(bron © quizarchief.be)

We tekenen het bovenaanzicht en verdelen het lijnstuk dat de satéprikker voorstelt in 4 gelijke delen. Zo vinden we de punten M_1, M_2 en M_3 waar de prikker overgaat naar een nieuwe horizontale laag.

In de bovenste laag worden er de 3 blokjes doorprikt die in de linkerbovenhoek gekleurd zijn.

In de tweede laag zijn er ook 3 blokjes, waarvan er één in het bovenaanzicht samenvalt met de vorige. Ook in de derde laag en in de vierde laag zijn er 3 blokjes doorprikt.

In totaal worden er 12 blokjes doorprikt.