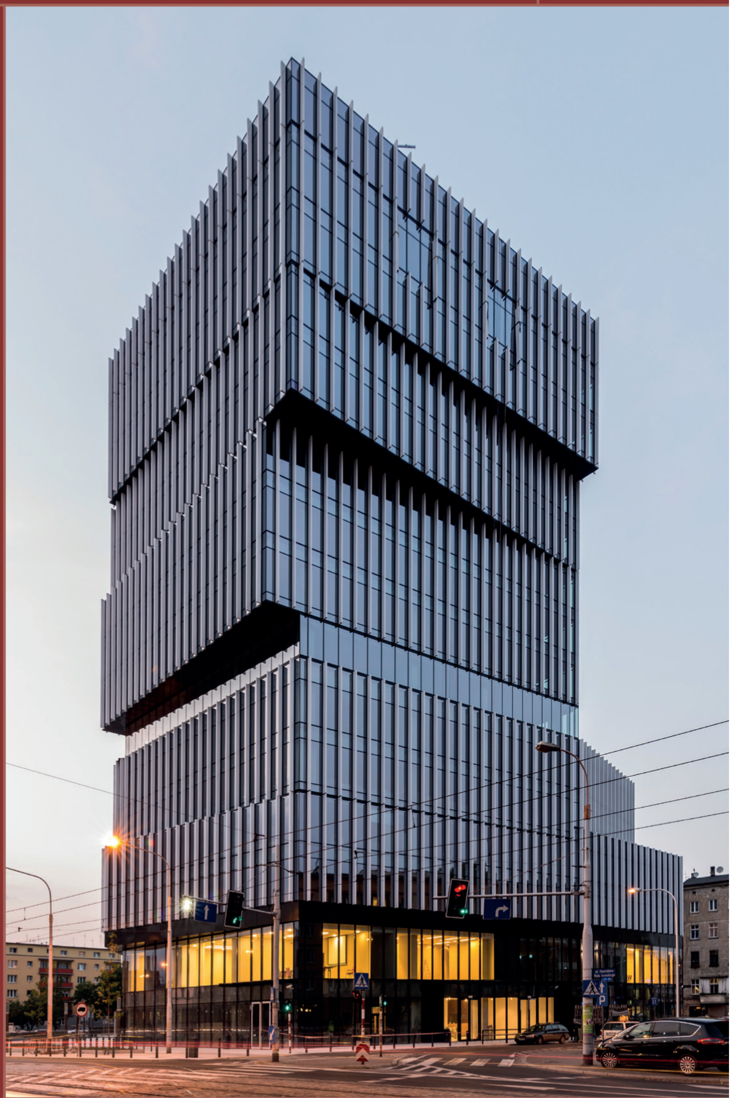
Hoofdstuk 2

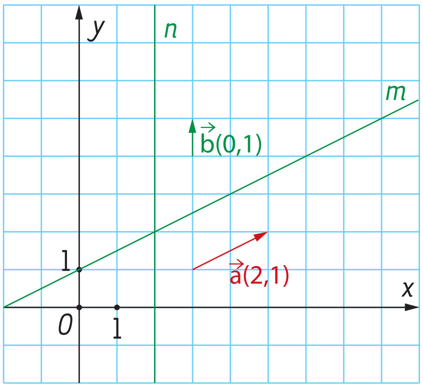
Vergelijkingen van rechten en vlakken



Opdracht 1 bladzijde 56

De richting van een rechte in het vlak kunnen we vastleggen met de richtingscoëfficiënt.
Dat kan echter ook gebeuren met vectoren.

We illustreren dat met de rechten $m \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ en $n \leftrightarrow x = 2$.



1 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{a}$ die evenwijdig is met de rechte m.

$\vec{a}(2,1)$

2 Welke andere vectoren zijn ook evenwijdig met m?

$r \cdot \vec{a}$ met $r \in \mathbb{R}_0$

3 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{b}$ die evenwijdig is met de rechte n.

$\vec{b}(0,1)$

4 De vector $\vec{c}(1, k)$ is evenwijdig met de rechte $p \leftrightarrow y = -4x + 5$. Bepaal k.

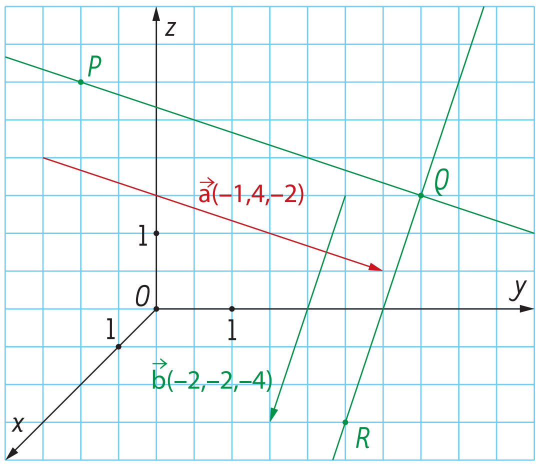
rico $p = -4 \Rightarrow k = -4$

5 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{d}$ die evenwijdig is met de rechte AB met co$(A) = (x_1, y_1)$ en co$(B) = (x_2, y_2)$.

$\vec{d}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Opdracht 2 bladzijde 56

Gegeven de punten $P(2,0,4)$, $Q(1,4,2)$ en $R(-1,2,-2)$.



1 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{a}$ die evenwijdig is met de rechte PQ.

$\vec{a}(-1,4,-2)$

2 Welke andere vectoren zijn ook evenwijdig met PQ?

$r \cdot \vec{a}$ met $r \in \mathbb{R}_0$

3 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{b}$ die evenwijdig is met de rechte QR.

$\vec{b}(-2,-2,-4)$

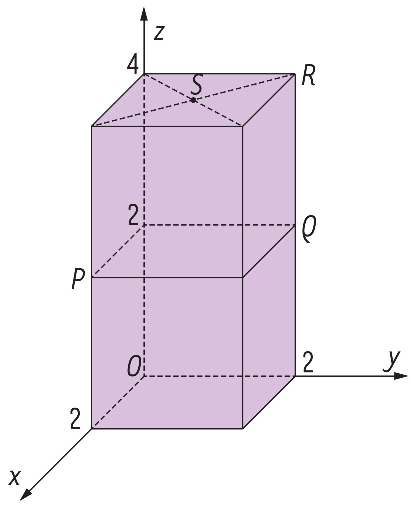
4 Bepaal de coördinaat van een vector $\vec{d}$ die evenwijdig is met de rechte AB met co$(A) = (x_1, y_1, z_1)$ en co$(B) = (x_2, y_2, z_2)$.

$\vec{d}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Opdracht 3 bladzijde 61

In de kubussen met ribbe 2 zijn de punten *P*, *Q*, *R* en *S* getekend.

Bepaal twee stellen richtingsgetallen van de rechte



1 *PQ*

P(2,0,2) en Q(0,2,2)

Stellen richtingsgetallen zijn bv. (–2,2,0) en (1,–1,0).

2 *PR*

P(2,0,2) en R(0,2,4)

Stellen richtingsgetallen zijn bv. (–2,2,2) en (1,–1, –1).

3 *QR*

Q(0,2,2) en R(0,2,4)

Stellen richtingsgetallen zijn bv. (0,0,2) en (0,0,1).

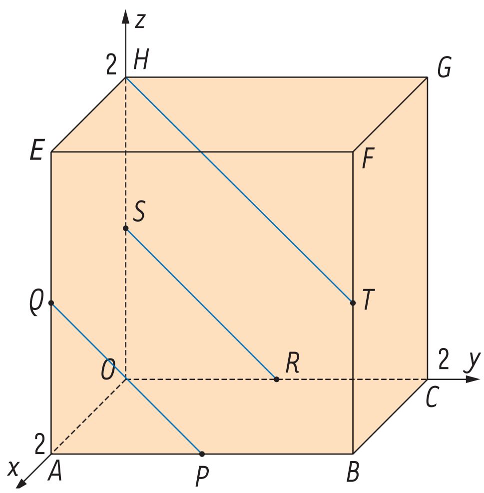
4 *SR*

S(1,1,4) en R(0,2,4)

Stellen richtingsgetallen zijn bv. (–1,1,0) en (1,–1,0).

Opdracht 4 bladzijde 61

In de kubus met ribbe 2 zijn de punten *P*, *Q*, *R*, *S* en *T* telkens de middens van een ribbe.



1 Bepaal een stel richtingsgetallen van de rechten *QP*, *SR* en *HT*.

Q(2,0,1) en P(2,1,0)

Een stel richtingsgetallen van PQ is (0,1,–1).

S(0,0,1) en R(0,1,0)

Een stel richtingsgetallen van SR is (0,1,–1).

H(0,0,2) en T(2,2,1)

Een stel richtingsgetallen van HT is (2,2,–1).

2 Welke van deze rechten zijn evenwijdig?

QP en SR zijn evenwijdig.

Opdracht 5 bladzijde 61

Gegeven de punten $A(1,1,3)$ en $B(2,1,4)$.

1 Bepaal een parametervoorstelling van de rechte AB.

$$\overrightarrow{AB}(1,0,1) \mathbin{//} AB;\ AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 1 \\ z = 3 + r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

2 Gebruik deze parametervoorstelling om de parameter te vinden die hoort bij het snijpunt S van AB met het yz-vlak en bepaal de coördinaat van S.

Stel $x = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we: $1 + r = 0 \Leftrightarrow r = -1$.

Het snijpunt met het yz-vlak is $S(0,1,2)$.

3 Bepaal het eventuele snijpunt T van de rechte AB met het xy-vlak.

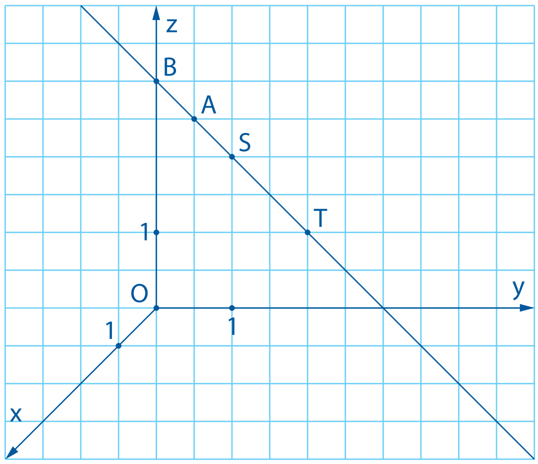
Stel $z = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we $3 + r = 0 \Leftrightarrow r = -3$.

Het snijpunt met het xy-vlak is $T(-2,1,0)$.

4 Bepaal het eventuele snijpunt U van de rechte AB met het xz-vlak.

Stel $y = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we: $1 = 0$.

Dit geeft een strijdige vergelijking, de rechte AB heeft geen snijpunt met het xz-vlak.



5 Teken de rechte AB in een orthonormaal assenstelsel.

Opdracht 6 bladzijde 62

De rechte m gaat door de punten $P(1,1,-1)$ en $Q(2,3,-2)$.

1 Bepaal een stel richtingsgetallen van de rechte m.

$(1,2,-1)$

2 Bepaal twee mogelijke parametervoorstellingen van m.

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 1 + 2r \\ z = -1 - r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \text{ en } m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 3 - 2s \\ z = -2 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

3 Bepaal het punt A van m waarvoor de som van de coördinaatgetallen nul is. Ga na of je voor beide parametervoorstellingen uit **2** hetzelfde punt A vindt.

$1 + r + 1 + 2r - 1 - r = 0$

$\Leftrightarrow\ 2r = -1$

$\Leftrightarrow\ r = -\dfrac{1}{2}$

$2 - s + 3 - 2s - 2 + s = 0$

$\Leftrightarrow\ -2s = -3$

$\Leftrightarrow\ s = \dfrac{3}{2}$

In beide gevallen vinden we het punt $A\left(\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Opdracht 7 bladzijde 62

Bepaal een parametervoorstelling van

1 de x-as;

$$\begin{cases} x = r \\ y = 0 \qquad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

2 de rechte die door het punt $A(1,2,3)$ gaat en evenwijdig met de y-as is;

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + s \qquad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 3 \end{cases}$$

3 de rechte die door het punt $A(1,2,3)$ gaat en evenwijdig met de z-as is.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Opdracht 8 bladzijde 62

Zijn $\begin{cases} x = -4 - 9r \\ y = -3 + 6r \\ z = 6 + 12r \end{cases}$ en $\begin{cases} x = 5 + 6s \\ y = -9 - 4s \\ z = -6 - 8s \end{cases}$ parametervoorstellingen van dezelfde rechte?

Verklaar.

– Stel $p \leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 9r \\ y = -3 + 6r \\ z = 6 + 12r \end{cases}$ en $q \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 6s \\ y = -9 - 4s \\ z = -6 - 8s \end{cases}$ dan is $\vec{d_1}(-9,6,12)$ // p en $\vec{d_2}(6,-4,-8)$ // q.

Aangezien $\vec{d_2} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{d_1}$ is p // q.

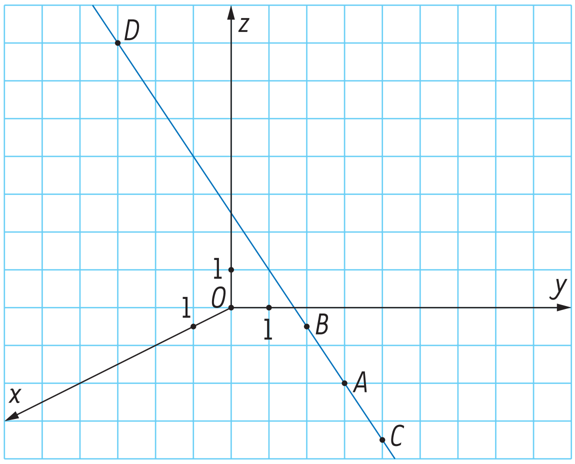
- We moeten nu nog nagaan of de rechten samenvallend of strikt evenwijdig zijn.

  We gaan daartoe na of het punt $P(-4,-3,6)$ van p op q ligt.

  Invullen in de parametervoorstelling van q geeft $\begin{cases} -4 = 5 + 6s \\ -3 = -9 - 4s \\ 6 = -6 - 8s \end{cases} \Leftrightarrow s = -\frac{3}{2}$.

  Het punt P ligt ook op q. Bijgevolg vallen p en q samen, dit zijn twee parametervoorstellingen van dezelfde rechte.

Opdracht 9 bladzijde 62



Gegeven de punten $A(0,3,-2)$ en $B(-1,1,-1)$.

Een parametervoorstelling van de rechte AB is

$$\begin{cases} x = -r \\ y = 3 - 2r \\ z = -2 + r \end{cases}.$$

Gebruik deze parametervoorstelling om na te gaan of

1 $C(1,5,-3)$ op AB ligt;

Invullen van de coördinaatgetallen van C in de parametervoorstelling van AB geeft

het stelsel $\begin{cases} 1 = -r \\ 5 = 3 - 2r \\ -3 = -2 + r \end{cases}$.

Dit stelsel heeft als oplossing $r = -1$, C ligt op AB.

2 $D(-4,-7,5)$ op AB ligt.

Invullen van de coördinaatgetallen van D in de parametervoorstelling van AB geeft het

stelsel $\begin{cases} -4 = -r \\ -7 = 3 - 2r. \\ 5 = -2 + r \end{cases}$

Dit stelsel in r is strijdig. D ligt niet op AB.

Opdracht 10 bladzijde 66

Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte m die het punt $C(1,2,-1)$ bevat en evenwijdig is met de rechte AB als $\text{co}(A) = (2,1,-1)$ en $\text{co}(B) = (1,3,-5)$.

$\overrightarrow{AB}(-1,2,-4)$ // AB;

$$m \leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-4} \quad \text{of} \quad m \leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = -y + 2 \\ -4x + 4 = -z - 1 \end{cases} \quad \text{of} \quad m \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 4x - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Opdracht 11 bladzijde 66

Gaat de rechte PQ door de oorsprong als $\text{co}(P) = (-6,3,-12)$ en $\text{co}(Q) = (16,-8,32)$?

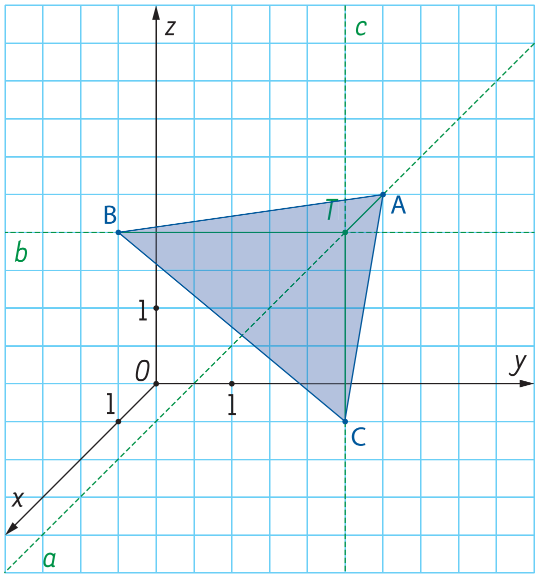
$\overrightarrow{PQ}(22,-11,44)$ // PQ of $\vec{d}(2,-1,4)$ // PQ

$$PQ \leftrightarrow \frac{x+6}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+12}{4} \quad \text{of} \quad PQ \leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}.$$

We zien onmiddellijk dat O(0,0,0) behoort tot PQ.

Opdracht 12 bladzijde 67

1 Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechten a, b en c die door het punt $T\left(1, 3, \frac{5}{2}\right)$ gaan en respectievelijk evenwijdig zijn met de x-as, de y-as en de z-as.



$a \leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$, $b \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$ en $c \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

2 Bepaal de snijpunten A, B en C van de rechten a, b en c met de coördinaatvlakken.

a snijdt het yz-vlak in $A\left(0,3,\frac{5}{2}\right)$,

b snijdt het xz-vlak in $B\left(1,0,\frac{5}{2}\right)$ en

c snijdt het xy-vlak in $C(1,3,0)$.

3 Bepaal de inhoud van het viervlak $TABC$.

$$I_{TABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{|TB|\cdot|TC|}{2}\cdot|TA| = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot\frac{5}{2}}{2}\cdot 1 = \frac{5}{4}$$

Opdracht 13 bladzijde 67

Bepaal een parametervoorstelling van de rechten waarvan een stel cartesiaanse vergelijkingen gegeven is.

1 $a \leftrightarrow \frac{x-1}{2} = 1 - y = \frac{2z}{3}$

Stel $\frac{x-1}{2} = 1 - y = \frac{2z}{3} = r$, dan vinden we: $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = 1 - r \\ z = \frac{3}{2}r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

2 $b \leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$

Stel $x = r$, dan vinden we: $b \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r - 3 \\ z = r - 1 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

3 $c \leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$

Na rijherleiden van het stelsel vinden we $\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ zodat $c \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 2r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

4 $d \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

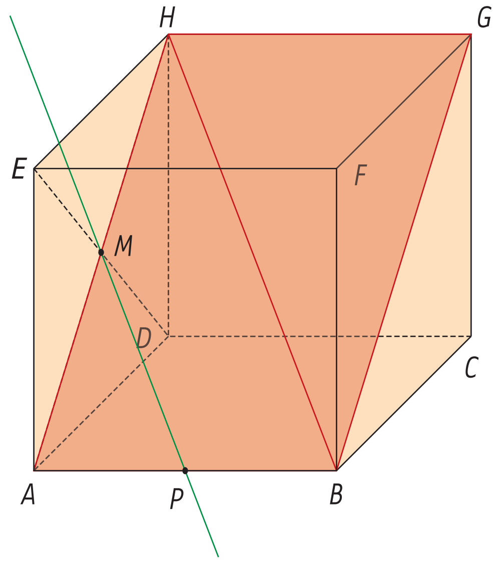
$d \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$

Opdracht 14 bladzijde 68

In de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ is P het midden van $[AB]$ en M het snijpunt van AH en DE.

Zijn de volgende rechten evenwijdig, snijdend of kruisend?

Verklaar.



1 PM en HB

PM en HB zijn strikt evenwijdig, want [PM] is middenparallel in de driehoek AHB.

2 PM en AF

M behoort niet tot vl(AP, F) zodat PM en AF niet coplanair en dus kruisend zijn.

3 PM en BG

PM en BG zijn niet evenwijdig want dan zouden ze evenwijdig getekend zijn.

Ze liggen in vl(AH, BG) en zijn dus niet kruisend. PM en BG zijn snijdend.

Opdracht 15 bladzijde 68

Gegeven de punten $A(3,-1,-1)$, $B(9,-4,8)$, $C(3,-1,2)$ en $D(-1,1,-3)$.

1 Verklaar waarom de rechten AB en CD niet evenwijdig zijn.

$\overrightarrow{AB}(6,-3,9)$ // AB en $\overrightarrow{CD}(-4,2,-5)$ // CD zodat $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{CD}$.

AB en CD zijn niet evenwijdig.

2 Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van AB en CD.

$$AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2r \\ y = -1 - r \\ z = -1 + 3r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \text{ en } CD \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 - 5s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Om het eventuele snijpunt te bepalen, zoeken we een oplossing van het stelsel

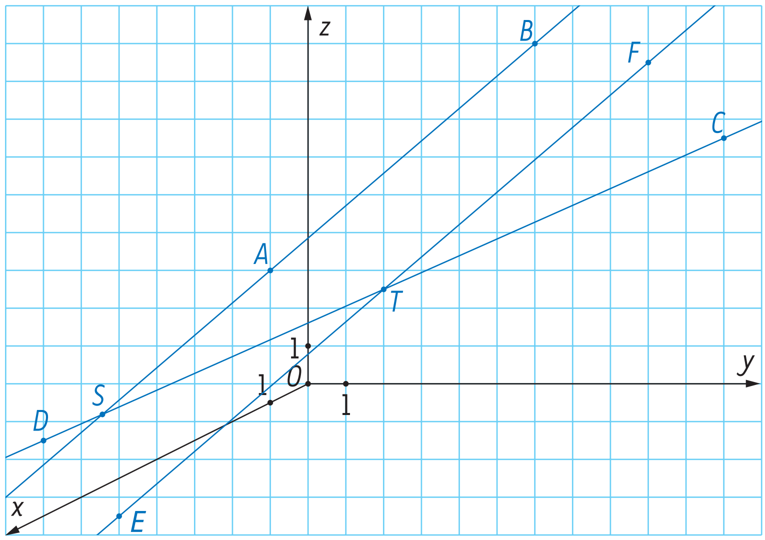
$$\begin{cases} 3 + 2r = 3 - 4s \\ -1 - r = -1 + 2s \\ -1 + 3r = 2 - 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r + 4s = 0 \\ -r - 2s = 0 \\ 3r + 5s = 3 \end{cases}.$$

Dit stelsel is bepaald en heeft als oplossing $\begin{cases} r = 6 \\ s = -3 \end{cases}$.

Het snijpunt van AB en CD is S(3 + 2 · 6, –1 – 6, –1+3 · 6) of S(15,–7,17).

Opdracht 16 bladzijde 72

Gegeven de punten $A(4,3,5)$, $B(0,6,9)$, $C(-7,4,3)$, $D(1,-6,-1)$, $E(1,-4,-3)$ en $F(-7,2,5)$.



1 In de figuur lijken AB en CD elkaar te snijden in het punt S. Is S een echt snijpunt? Verklaar.

– $\overrightarrow{AB}(-4,3,4)$ // AB en $\overrightarrow{CD}(8,-10,-4)$ // CD zodat $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{CD}$.

  AB en CD zijn niet evenwijdig.

– $\begin{cases} x = 4 - 4r \\ y = 3 + 3r \\ z = 5 + 4r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$ en $CD \leftrightarrow \dfrac{x+7}{4} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z-3}{-2}$ of $CD \leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 19 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

– Invullen van de parametervoorstelling van AB in de cartesiaanse vergelijkingen van CD geeft: $\begin{cases} 20 - 20r + 12 + 12r + 19 = 0 \\ 4 - 4r + 10 + 8r + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6{,}375 \\ r = -3{,}75 \end{cases}$.

  Dit stelsel is strijdig. AB en CD hebben geen snijpunt, het zijn kruisende rechten.

2 In de figuur lijken *EF* en *CD* elkaar te snijden in het punt *T*. Is *T* een echt snijpunt? Verklaar.

– $\overrightarrow{EF}(-8,6,8)$ // EF en $\overrightarrow{CD}(8,-10,-4)$ // CD zodat $\overrightarrow{EF} \neq k \cdot \overrightarrow{CD}$.

EF en CD zijn niet evenwijdig.

– $EF \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = -4 + 3s \\ z = -3 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$ en $CD \leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 19 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

– Invullen van de parametervoorstelling van EF in de cartesiaanse vergelijkingen van CD geeft: $\begin{cases} 5 - 20s - 16 + 12s + 19 = 0 \\ 1 - 4s - 6 + 8s + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ s = 1 \end{cases}$.

EF en CD snijden elkaar in het punt T(–3,–1,1).

3 In de figuur lijken *AB* en *EF* evenwijdig te zijn. Is dat in werkelijkheid zo? Verklaar.

$\overrightarrow{AB}(-4,3,4)$ // AB en $\overrightarrow{EF}(-8,6,8)$ // EF zodat $\overrightarrow{EF} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

AB en EF zijn evenwijdig.

Opdracht 17 bladzijde 72

Onderzoek de onderlinge ligging van de rechten $p \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2r \\ y = 3 + 3r \\ z = 2 - 4r \end{cases}$ en $q \leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 4s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$.

– $\overrightarrow{d_1}(-2,3,-4)$ // p en $\overrightarrow{d_2}(-4,-1,1)$ // q zodat $\overrightarrow{d_1} \neq k \cdot \overrightarrow{d_2}$.

p en q zijn niet evenwijdig.

– Om het eventuele snijpunt van p en q te bepalen, zoeken we een oplossing van het stelsel $\begin{cases} -1 - 2r = -4 - 4s \\ 3 + 3r = 1 - s \\ 2 - 4r = 1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2r + 4s = -3 \\ 3r + s = -2 \\ 4r + s = 1 \end{cases}$.

Dit stelsel is strijdig zodat p en q geen snijpunt hebben.

p en q zijn kruisend.

Opdracht 18 bladzijde 72

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$, $b \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$, $c \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$ en $d \leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$.

Onderzoek de onderlinge ligging van

1 *a* en *b*

2 *a* en *c*

3 *b* en *c*

4 *c* en *d*

We bepalen eerst parametervoorstelling van de rechten:

$a \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 4 - 2r \\ z = 3 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$, $b \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 4 - s \\ z = 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$, $c \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ en

$d \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - u \\ y = 5 - 2u \\ z = u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$.

1 $\vec{d_1}(1,-2,0)$ // a en $\vec{d_2}(1,-1,2)$ // b zodat $\vec{d_1} \neq k \cdot \vec{d_2}$. a en b zijn niet evenwijdig.

Het eventuele snijpunt vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ z = 3 \\ x + y = 4 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$.

Dit stelsel is strijdig, bijgevolg zijn a en b kruisend.

2 $\vec{d_1}(1,-2,0)$ // a en $\vec{d_3}(1,-2,0)$ // c zodat a en c zijn evenwijdig zijn.

Alle punten van a hebben als z-coördinaat 3, terwijl deze bij c steeds 1 is.

a en c zijn strikt evenwijdig.

3 $\vec{d_2}(1,-1,2)$ // b en $\vec{d_3}(1,-2,0)$ // c zodat $\vec{d_3} \neq k \cdot \vec{d_2}$. b en c zijn niet evenwijdig.

Het eventuele snijpunt vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x + z = 0 \\ 2x + y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$.

Dit stelsel is strijdig, bijgevolg zijn b en c kruisend.

4 $\vec{d_3}(1,-2,0)$ // c en $\vec{d_4}(-1,-2,1)$ // d zodat $\vec{d_3} \neq k \cdot \vec{d_4}$. c en d zijn niet evenwijdig.

Het eventuele snijpunt vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ z = 1 \\ 2x - y = -1 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$.

Dit stelsel heeft als oplossing $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$. c en d zijn snijdend met snijpunt S(1,3,1).

Opdracht 19 bladzijde 72

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6.

Is er een rechte door *A* die de kruisende rechten *HB* en *EG* snijdt?

Verklaar met een berekening.

– $HB \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 6 - r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$ en $EG \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - s \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$.

Een lopend punt op HB is $K(r, r, 6 - r)$ en een lopend punt op EG is $L(6 - s, s, 6)$.

– Met $A(6,0,0)$ is $\overrightarrow{AK}(r - 6, r, 6 - r)$ en $\overrightarrow{AL}(-s, s, 6)$.

– A, K en L zijn collineair

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AL}$

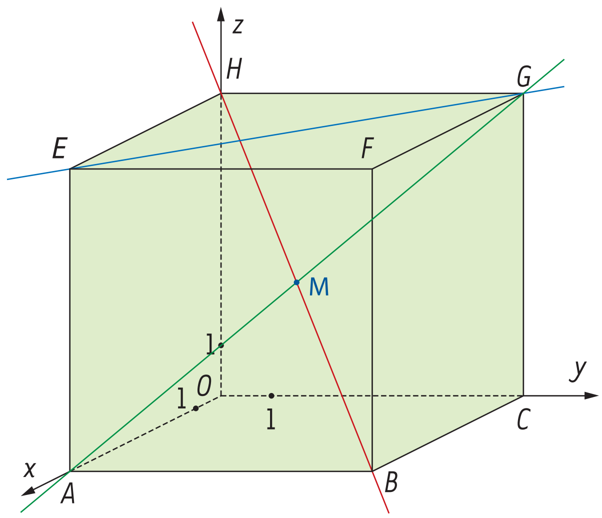
$\Leftrightarrow \begin{cases} r - 6 = -ks & (1) \\ r = ks & (2) \\ 6 - r = 6k & (3) \end{cases}$

Uit (1) en (2) volgt: $r - 6 = -r \Leftrightarrow r = 3$.

Uit (3) volgt dan: $k = \frac{1}{2}$.

Uit (2) tenslotte: $s = 6$.

De rechte door A die HB en EG snijdt gaat door M(3,3,3) en G(0,6,6).



Opdracht 20 bladzijde 77

1 Bepaal een parametervoorstelling van het vlak α door het punt $P(-1,-5,2)$ en met richtingsvectoren $\overrightarrow{d_1}(1,-1,0)$ en $\overrightarrow{d_2}(0,3,-1)$.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + r \\ y = -5 - r + 3s \\ z = 2 - s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

2 Ga na of α door de oorsprong gaat.

Het stelsel $\begin{cases} 0 = -1 + r \\ 0 = -5 - r + 3s \\ 0 = 2 - s \end{cases}$ heeft als oplossing $\begin{cases} r = 1 \\ s = 2 \end{cases}$.

Bijgevolg behoort O(0,0,0) tot α.

3 Geef een tweede parametervoorstelling van α.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t + 3u \\ z = -u \end{cases} \quad (t, u \in \mathbb{R})$$

Opdracht 21 bladzijde 77

1 Bepaal een parametervoorstelling van het vlak α dat de punten $A(1,0,2)$, $B(0,1,3)$ en $C(1,1,1)$ bevat.

Twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren van α zijn $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$ en $\overrightarrow{BC}(1,0,-2)$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = r \\ z = 2 - r - 2s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$.

2 Bepaal de snijpunten van α met de coördinaatassen.

– Het snijpunt met de x-as vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 0 = r \\ 0 = 2 - r - 2s \end{cases}$.

We vinden $\begin{cases} r = 0 \\ s = 1 \end{cases}$ zodat $S_1(2,0,0)$ het snijpunt van α met de x-as is.

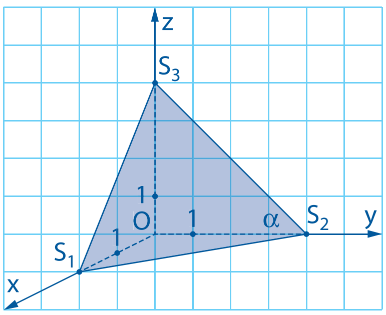
– Het snijpunt met de y-as vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 0 = 1 + s \\ 0 = 2 - r - 2s \end{cases}$.

We vinden $\begin{cases} r = 4 \\ s = -1 \end{cases}$ zodat $S_2(0,4,0)$ het snijpunt van α met de y-as is.

– Het snijpunt met de z-as vinden we uit de oplossing van het stelsel $\begin{cases} 0 = 1 + s \\ 0 = r \end{cases}$.

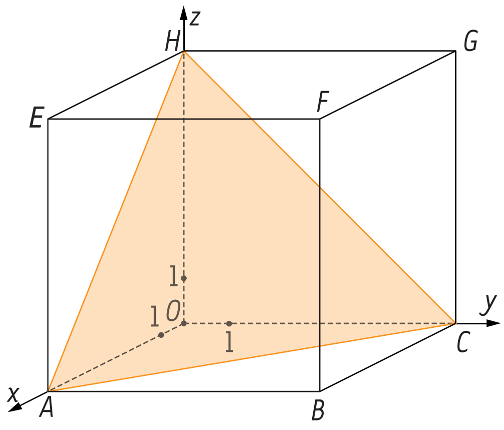
We vinden $\begin{cases} r = 0 \\ s = -1 \end{cases}$ zodat $S_3(0,0,4)$ het snijpunt van α met de z-as is.

3 Schets dit vlak.



Opdracht 22 bladzijde 77

Gegeven vl(H, A, C) waarvan de doorsnede met de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6 getekend is.



$\overrightarrow{HA}(6,0,-6)$ en $\overrightarrow{AC}(-6,6,0)$ zijn richtingsvectoren van vl(H, A, C), zodat $(1,0,-1)$ en $(-1,1,0)$ stellen richtingsgetallen zijn.

Met het steunpunt $H(0,0,6)$ krijgen we als parametervoorstelling $\begin{cases} x = r - s \\ y = s \\ z = 6 - r \end{cases}$ $(r, s \in \mathbb{R})$.

1 Behoort het punt $Q(3,-2,5)$ tot vl(H, A, C)?

Het stelsel $\begin{cases} 3 = r - s \\ -2 = s \\ 5 = 6 - r \end{cases}$ heeft als oplossing $\begin{cases} r = 1 \\ s = -2 \end{cases}$, dus ja.

2 En het punt $R(-1,10,-3)$?

Het stelsel $\begin{cases} -1 = r - s \\ 10 = s \\ -3 = 6 - r \end{cases}$ heeft als oplossing $\begin{cases} r = 9 \\ s = 10 \end{cases}$, dus ja.

3 Als het punt $P(x, y, z)$ tot vl(H, A, C) behoort, dan bestaan er voor de gegeven waarden van x, y en z waarden van r en s zodanig dat $\begin{cases} x = r - s & (1) \\ y = s & (2). \\ z = 6 - r & (3) \end{cases}$

Bepaal deze waarden van r en s uit (2) en (3) en eis dat ze ook voldoen aan (1).

Welke betrekking tussen x, y en z vind je?

Uit (2): $s = y$ en uit (3): $r = 6 - z$

Invullen in (1) geeft $x = 6 - z - y$ of $x + y + z = 6$.

4 Ga voor een aantal punten van dit vlak na of aan deze betrekking voldaan is.

Voor $Q(3,-2,5)$: $3 - 2 + 5 = 6$,

Voor $R(-1,10,-3)$: $-1 + 10 - 3 = 6$.

Opdracht 23 bladzijde 81

1 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat door de punten $A(2,0,1)$, $B(-1,2,1)$ en $C(2,1,-1)$ gaat.

Invullen van de coördinaten van A, B en C in de vergelijking $ux + vy + wz + t = 0$ geeft

het stelsel $\begin{cases} 2u + w + t = 0 \\ -u + 2v + w + t = 0 \\ 2u + v - w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \dfrac{4}{11}t = 0 \\ v + \dfrac{6}{11}t = 0 \\ w + \dfrac{3}{11}t = 0 \end{cases}.$

Kiezen we bv. $t = -11$, dan vinden we: $u = 4$, $v = 6$ en $w = 3$.

$\alpha \leftrightarrow 4x + 6y + 3z - 11 = 0$

2 Gebruik deze cartesiaanse vergelijking om na te gaan of de punten $D(2,3,-1)$ en $E(2,-1,3)$ in α liggen.

$D(2,3,-1)$: $4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 11 \neq 0$

$E(2,-1,3)$: $4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 11 = 0$

E ligt in α, D niet.

Opdracht 24 bladzijde 81

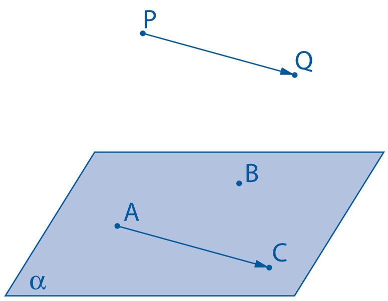
Het vlak α gaat door de punten $A(2,3,1)$ en $B(3,-3,4)$ en is evenwijdig met $\overrightarrow{PQ}(2,-1,5)$.

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van α.

We bepalen eerst een derde punt van α:

$C(2 + 2, 3 - 1, 1 + 5) = C(4,2,6)$.

Invullen van de coördinaten van A, B en C in de vergelijking $ux + vy + wz + t = 0$ geeft het stelsel



$\begin{cases} 2u + 3v + w + t = 0 \\ 3u - 3v + 4w + t = 0 \\ 4u + 2v + 6w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \dfrac{27}{40}t = 0 \\ v - \dfrac{1}{40}t = 0 \\ w - \dfrac{11}{40}t = 0 \end{cases}.$

Kiezen we bv. $t = -40$, dan vinden we $u = 27$, $v = -1$ en $w = -11$.

$\alpha \leftrightarrow 27x - y - 11z - 40 = 0$.

Opdracht 25 bladzijde 81

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α door het punt $P(1,2,0)$ dat de rechte

$$m \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 2 + 3r \\ z = -1 \end{cases}$$ omvat.

Het vlak α gaat door het punt P(1,2,0) en door de punten Q(0,2,–1) en R(2,5,–1) op m.

Invullen van de coördinaten van P, Q en R in de vergelijking ux + vy + wz + t = 0 geeft het

stelsel $\begin{cases} u + 2v + t = 0 \\ 2v - w + t = 0 \\ 2u + 5v - w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - 3t = 0 \\ v + 2t = 0 \\ w + 3t = 0 \end{cases}$.

Kiezen we bv. t = 1, dan vinden we u = 3, v = –2 en w = –3.

$\alpha \leftrightarrow 3x - 2y - 3z + 1 = 0$.

Opdracht 26 bladzijde 81

Bepaal k als de vier punten $P(2,0,0)$, $Q(0,-1,0)$, $R(0,0,4)$ en $S(1,2,k)$ coplanair zijn.

Het vlak α = vl(P,Q,R) heeft als vergelijking $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{4} = 1$ of $2x - 4y + z - 4 = 0$.

S(1,2,k) behoort tot α als en slechts als $2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 10$.

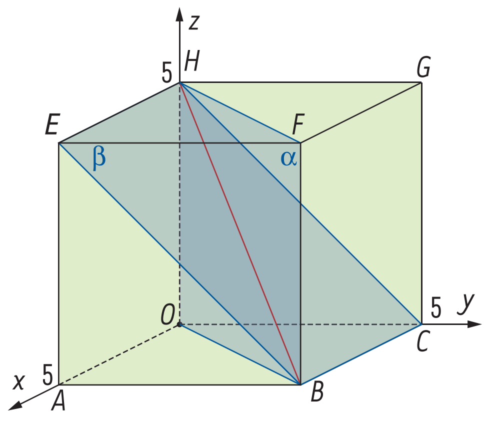
Opdracht 27 bladzijde 81

Beschouw de rechte $HB \leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 5 \end{cases}$ in de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 5.

1 $x - y = 0$ is een cartesiaanse vergelijking van een vlak.

Noem dit vlak α en kleur het deel van α dat binnen de kubus ligt.

Het vlak α bevat de punten O(0,0,0), B(5,5,0), F(5,5,5) en H(0,0,5).



2 $y + z = 5$ is ook een cartesiaanse vergelijking van een vlak.

Noem dit vlak β en arceer het deel van β dat binnen de kubus ligt.

Het vlak β bevat de punten B(5,5,0), C(0,5,0), E(5,0,5) en H(0,0,5).

3 Wat is de onderlinge ligging van α en β?

α en β zijn snijdende vlakken met snijlijn HB.

Opdracht 28 bladzijde 81

Gegeven de vlakken $\alpha \leftrightarrow x - 2y + z = 0$, $\beta \leftrightarrow 2x - 4y + 2z = 1$ en $\gamma \leftrightarrow x + y - 2z = 0$.

Wat is de onderlinge ligging van

1 α en β?

α en β zijn strikt evenwijdige vlakken want het stelsel $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$ gevormd door hun twee vergelijkingen is strijdig.

2 α en γ?

α en γ zijn snijdende vlakken want het stelsel $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ gevormd door hun twee vergelijkingen is enkelvoudig onbepaald. De snijlijn is $s \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

3 β en γ?

β en γ zijn snijdende vlakken want het stelsel $\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ gevormd door hun twee vergelijkingen is enkelvoudig onbepaald. De snijlijn is $s \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} + r \\ y = -\frac{1}{6} + r \\ z = r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

Opdracht 29 bladzijde 87

Gegeven de vlakken met cartesiaanse vergelijkingen $x + y + 2z = 5$ en $2x - y - z = 3$.

Welk van de volgende vectoren is een richtingsvector van hun snijlijn?

A $\vec{v_1}(1,-7,3)$ **B** $\vec{v_2}(1,-5,-3)$ **C** $\vec{v_3}(1,5,-3)$

D $\vec{v_4}(1,-6,5)$ **E** $\vec{v_5}(1,-6,-5)$

Kies het juiste antwoord en verklaar met een berekening.

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur-architect, 2013)

Het stelsel $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$ gevormd door de vergelijkingen van de vlakken is gelijkwaardig met $\begin{cases} x + \frac{1}{3}z = \frac{8}{3} \\ y + \frac{5}{3}z = \frac{7}{3} \end{cases}$.

De snijlijn $s \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} - r \\ y = \frac{7}{3} - 5r \\ z = 3r \end{cases}$ heeft $\vec{d}(-1,-5,3)$ als richtingsvector en dus ook $\vec{v_3}(1,5,-3)$.

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 30 bladzijde 87

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat door $P(3,-2,4)$ gaat en evenwijdig is met het vlak α door de punten $A(0,0,5)$, $B(4,1,-1)$ en $C(1,0,-1)$.

- Invullen van de coördinaten van A, B en C in de vergelijking ux + vy + wz + t = 0 van α

  geeft het stelsel $\begin{cases} 5w + t = 0 \\ 4u + v - w + t = 0 \\ u - w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{6}{5}t = 0 \\ v - \frac{18}{5}t = 0 \\ w + \frac{1}{5}t = 0 \end{cases}.$

  Kiezen we bv. t = –5, dan vinden we: u = 6, v = –18 en w = 1. Bijgevolg is

  $\alpha \leftrightarrow 6x - 18y + z - 5 = 0$.
- $\beta \,//\, \alpha$, zodat $\beta \leftrightarrow 6x - 18y + z + t = 0$.

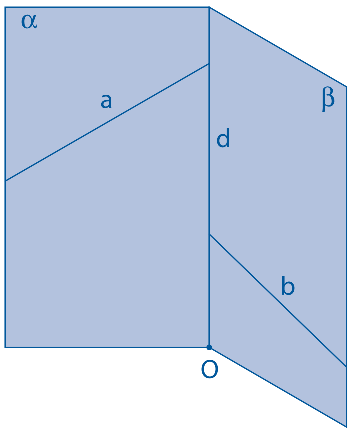
  Invullen van P(3,–2,4) geeft $6 \cdot 3 - 18 \cdot (-2) + 4 + t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -58$.

  Besluit: $\beta \leftrightarrow 6x - 18y + z - 58 = 0$.

Opdracht 31 bladzijde 87

Gegeven de kruisende rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 \\ 4y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2y - 5z + 7 = 0 \end{cases}$.

Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte *d* die door de oorsprong gaat en *a* en *b* snijdt.



- Een vlak α dat de rechte a omvat, heeft als vergelijking

  $r(3x + 4y - 24) + s(4y - 3z + 3) = 0$.

  Als dit vlak door O(0,0,0) gaat, zal $-24r + 3s = 0 \;\Leftrightarrow\; s = 8r$.

  Kiezen we bv. r = 1, dan is s = 8 en

  $\alpha \leftrightarrow 3x + 4y - 24 + 32y - 24z + 24 = 0$ of $\alpha \leftrightarrow x + 12y - 8z = 0$.
- Een vlak β dat de rechte b omvat, heeft als vergelijking

  $r(x + 2z + 1) + s(2y - 5z + 7) = 0$.

  Als dit vlak door O(0,0,0) gaat, zal $r + 7s = 0 \;\Leftrightarrow\; r = -7s$.

  Kiezen we bv. s = 1, dan is r = –7 en

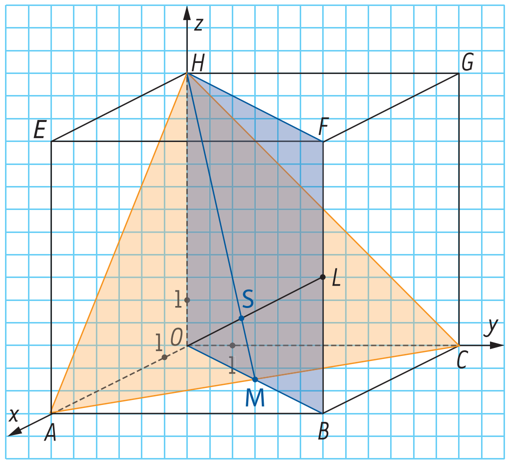
  $\beta \leftrightarrow -7x - 14z - 7 + 2y - 5z + 7 = 0$ of $\beta \leftrightarrow 7x - 2y + 19z = 0$.
- De snijlijn van α en β is $d \leftrightarrow \begin{cases} x + 12y - 8z = 0 \\ 7x - 2y + 19z = 0 \end{cases}$.

Opdracht 32 bladzijde 88

In de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6 is het vlak $\alpha = \text{vl}(H, A, C)$ getekend.

L is het midden van $[BF]$.

Bepaal het snijpunt S van α en OL



1 door constructie: maak hierbij gebruik van een hulpvlak β dat de rechte OL omvat;

Het hulpvlak $\beta = \text{vl(OB, HF)}$ omvat de rechte OL.

De snijlijn van α en β is HM.

Het snijpunt van HM en OL is het gezochte punt S.

2 door berekening: maak hierbij gebruik van een parametervoorstelling van OL en een cartesiaanse vergelijking van α.

Aangezien $\text{co(L)} = (6,6,3)$ is $\text{OL} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = 2r \\ z = r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad (1).$

$\alpha = \text{vl(H,A,C)}$ heeft als vergelijking $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$ of $\alpha \leftrightarrow x + y + z = 6 \quad (2).$

Invullen van (1) in (2) geeft $2r + 2r + r = 6 \iff r = \frac{6}{5}.$

Het snijpunt S heeft als coördinaat $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right).$

Opdracht 33 bladzijde 91

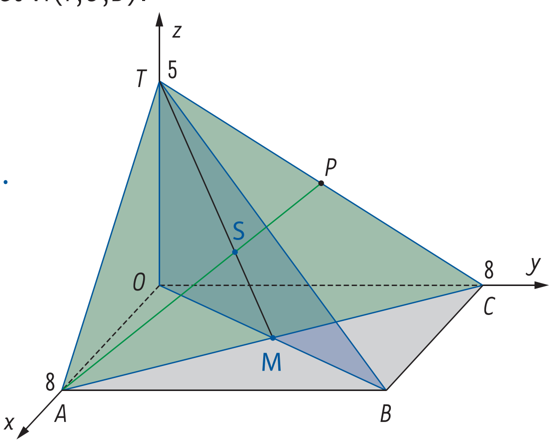
De piramide $\begin{pmatrix} & T & \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ is getekend in een orthonormaal assenstelsel en heeft een vierkant grondvlak met zijde 8.

De hoogte is $|TO| = 5$ en P is het midden van $[TC]$.

1 Bereken de coördinaat van het snijpunt S van AP met $\text{vl}(T,O,B)$.

Aangezien $\text{co(A)} = (8,0,0)$ en $\text{co(P)} = \left(0, 4, \frac{5}{2}\right)$

is $\text{co}\left(\overrightarrow{AP}\right) = \left(-8, 4, \frac{5}{2}\right)$ en $\text{AP} \leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 16r \\ y = 8r \\ z = 5r \end{cases} \quad (1).$



vl(T,O,B) heeft als vergelijking $x - y = 0 \quad (2).$

Invullen van (1) in (2) geeft

$8 - 16r - 8r = 0 \iff r = \frac{1}{3}.$

Het snijpunt S heeft als coördinaat $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

2 Construeer dit snijpunt.

vl(T,A,C) omvat de rechte AP. De snijlijn van dit hulpvlak met vl(T,O,B) is TM.

Het snijpunt van TM en AP is het gezochte punt S.

Opdracht 34 bladzijde 91

1 Onderzoek de onderlinge ligging van het vlak $\alpha \leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$ en de rechte AB met $A(4,5,-1)$ en $B(-5,-7,5)$.

$$\text{co}\left(\overrightarrow{AB}\right) = (-9,-12,6) \text{ en } AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3r \\ y = 5 - 4r \\ z = -1 + 2r \end{cases}.$$

Invullen van de parametervoorstelling van AB in de vergelijking van α geeft

$-4 + 3r - 5 + 4r + 1 - 2r + 3 = 0 \iff 5r - 5 = 0 \iff r = 1.$

AB en α snijden elkaar in S(1,1,1).

2 Onderzoek de onderlinge ligging van het vlak $\alpha \leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0$ en de rechte CD met $C(1,-4,3)$ en $D(0,3,-3)$.

$$\text{co}\left(\overrightarrow{CD}\right) = (-1,7,-6) \text{ en } CD \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -4 + 7s \\ z = 3 - 6s \end{cases}.$$

Invullen van de parametervoorstelling van CD in de vergelijking van α geeft

$-1 + s + 4 - 7s - 3 + 6s + 3 = 0 \iff 0 \cdot s = -3.$

Dit is een strijdige vergelijking. CD en α hebben geen enkel punt gemeenschappelijk, ze zijn strikt evenwijdig.

Opdracht 35 bladzijde 91

Gegeven het vlak $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 6z + 3 = 0$, de rechte $l \leftrightarrow \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z+5}{2}$ en het punt $P(2,7,1)$.

Bepaal de coördinaat van het punt S op l waarvoor de rechte PS evenwijdig is met α.

Beschouw het vlak β door P(2,7,1) en evenwijdig met $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 6z + 3 = 0$:

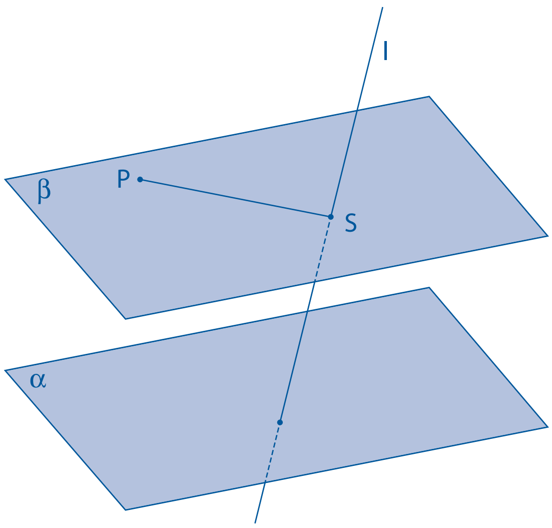
$\beta \leftrightarrow x + 2y - 6z + k = 0$. β gaat door P:

$2 + 14 - 6 + k = 0 \iff k = -10$

zodat $\beta \leftrightarrow x + 2y - 6z - 10 = 0$.

Het snijpunt van $\beta \leftrightarrow x + 2y - 6z - 10 = 0 \quad (1)$

$$\text{en } l \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 3r \\ y = 1 + 2r \\ z = -5 - 2r \end{cases} \quad (2) \text{ is S.}$$



Vul (2) in (1) in:

$-3 + 3r + 2 + 4r + 30 + 12r - 10 = 0 \iff r = -1.$

Het gevraagde punt is S(−6,−1,−3).

Opdracht 36 bladzijde 96

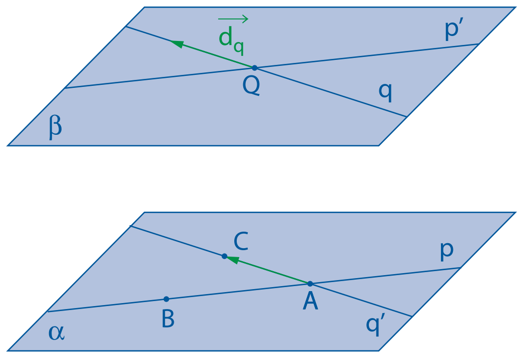
Gegeven de kruisende rechten $p \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = 2 + r \\ z = -r \end{cases}$ en $q \leftrightarrow \begin{cases} x = 2s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases}$.

Bepaal cartesiaanse vergelijkingen van de evenwijdige vlakken α en β waarin p en q verpakt kunnen worden.

– De rechte p gaat door A(3,2,0) en B(4,3,–1).

Verschuiven we nu A volgens $\vec{d_q}(2,0,1)$ dan vinden we C(5,2,1) op q′ // q.

Een vergelijking van α = vl(A,B,C) = vl(p,q′) vinden we door de coördinaten van A, B en C in te vullen in ux + vy + wz + t = 0:



$$\begin{cases} 3u + 2v + t = 0 \\ 4u + 3v - w + t = 0 \\ 5u + 2v + w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \frac{1}{3}t = 0 \\ v + t = 0 \\ w + \frac{2}{3}t = 0 \end{cases}.$$

Kiezen we bv. t = 3, dan vinden we u = 1, v = –3 en w = –2.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow x - 3y - 2z + 3 = 0$.

– β = vl(q,p′) // α, zodat $\beta \leftrightarrow x - 3y - 2z + t = 0$.

Invullen van Q(0,0,0), steunpunt van q, geeft t = 0.

$\beta \leftrightarrow x - 3y - 2z = 0$

Opdracht 37 bladzijde 96

Gegeven de punten $P\left(0,\frac{5}{2},4\right)$, $Q(4,0,2)$ en $R(2,4,0)$ en de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.

1 Construeer de doorsnede van de kubus met vl(P, Q, R).

We zoeken eerst het snijpunt van PQ met het grondvlak van de kubus.

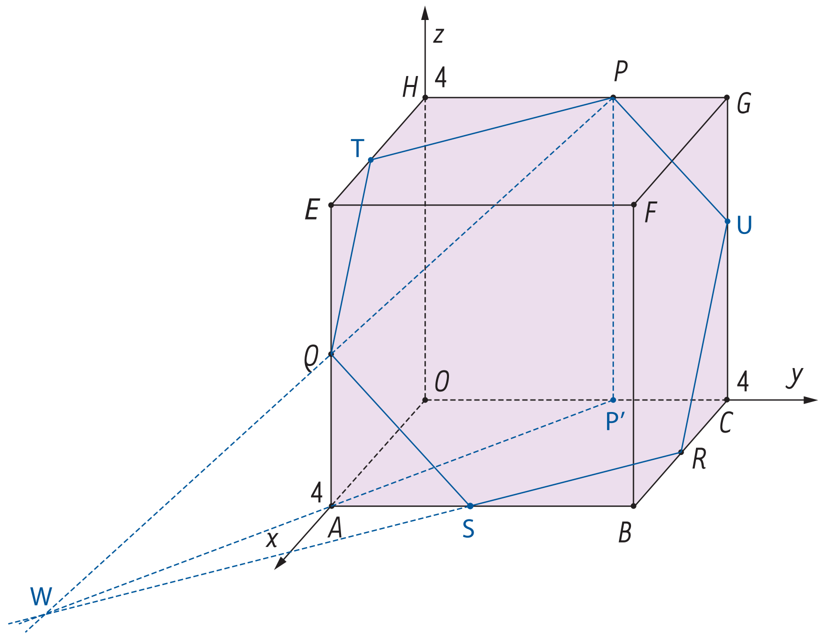
Beschouw het verticaal hulpvlak vl(P, P′, Q) dat PQ omvat.

Dit hulpvlak snijdt het grondvlak volgens de snijlijn P′A. Het snijpunt W van PQ en P′A ligt op PQ, dus in vl(P, Q, R) en ligt op P′A, dus in het grondvlak.

De snijlijn van vl(P, Q, R) met het grondvlak is WR. Deze rechte snijdt AB in S, een hoekpunt van de doorsnede.

Verder gaat de snijlijn van vl(P, Q, R) met het bovenvlak van de kubus door P en is evenwijdig met SR, zo vinden we het punt T op EH. Tenslotte tekenen we door R een evenwijdige met QT en we vinden U op CG.

De doorsnedeveelhoek is PURSQT.



2 Bereken de coördinaten van de hoekpunten van de doorsnede.

Het vlak door $P\left(0,\frac{5}{2},4\right)$, Q(4,0,2) en R(2,4,0) heeft een vergelijking van de vorm

$ux + vy + wz + t = 0$.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 5/2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 13/74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6/37 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/74 & 0 \end{array}\right].$$

We vinden $\begin{cases} u + \dfrac{13}{74}t = 0 \\ v + \dfrac{6}{37}t = 0 \\ x + \dfrac{11}{74}t = 0 \end{cases}$.

Kies $t = -74$. We vinden: vl(P, Q, R) $\leftrightarrow$ $13x + 12y + 11z - 74 = 0$. (1)

De coördinaat van het punt S vinden we door het snijpunt van vl(P, Q, R) te bepalen met $AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

Invullen in (1) geeft: $13 \cdot 4 + 12y + 11 \cdot 0 - 74 = 0 \iff y = \frac{11}{6}$.

We vinden: $S\left(4, \frac{11}{6}, 0\right)$.

De coördinaat van het punt T vinden we door het snijpunt van vl(P, Q, R) te bepalen met $EH \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$.

Invullen in (1) geeft: $13x + 12 \cdot 0 + 11 \cdot 4 - 74 = 0 \iff 13x = 30 \iff x = \frac{30}{13}$.

We vinden: $T\left(\frac{30}{13}, 0, 4\right)$.

Tenslotte bepalen we de coördinaat van U door het snijpunt te zoeken van vl(P, Q, R) en $GC \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$.

Invullen in (1) geeft: $13 \cdot 0 + 12 \cdot 4 + 11 \cdot z - 74 = 0 \iff 11z = 26 \iff z = \frac{26}{11}$.

We vinden: $U\left(0, 4, \frac{26}{11}\right)$.

Opdracht 38 bladzijde 101

1 Bepaal een stel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte l met richtingsvector $\vec{d}(-1,3,5)$ die het punt $P(2,-1,4)$ bevat.

$l \leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$ of $l \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = -y - 1 \\ 5x - 10 = -z + 4 \end{cases}$ of $l \leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 5x + z - 14 = 0 \end{cases}$.

2 Ligt het punt $Q(-7,6,-7)$ op l?

$\frac{-7-2}{-1} \neq \frac{6+1}{3} \neq \frac{-7-4}{5}$, Q ligt niet op l.

Opdracht 39 bladzijde 101

1 Schrijf een parametervoorstelling en een stel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte *m* met richtingsvector $\vec{d}(-1,0,1)$ en waarvan $P(1,1,3)$ een punt is.

Parametervoorstelling: $m \leftrightarrow \begin{cases} x=1-r \\ y=1 \\ z=3+r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$

Stel cartesiaanse vergelijkingen: $m \leftrightarrow \begin{cases} 1-x=z-3 \\ y=1 \end{cases}$ of $m \leftrightarrow \begin{cases} x+z-4=0 \\ y=1 \end{cases}$

2 Bepaal de snijpunten van de rechte *m* met de coördinaatvlakken.

– Stel $x = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we: $r = 1$.

Het snijpunt met het yz-vlak is $S(0,1,4)$.

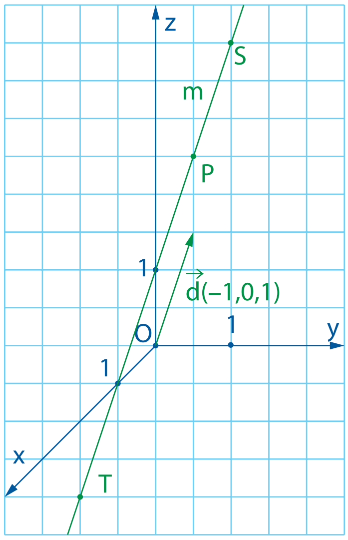
– Stel $y = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we: $0 = 1$.

De rechte m snijdt het xz-vlak niet.

– Stel $z = 0$ in de parametervoorstelling, dan vinden we: $r = -3$.

Het snijpunt met het xy-vlak is $T(4,1,0)$.

3 Teken de rechte *m* in een orthonormaal assenstelsel.



Opdracht 40 bladzijde 101

1 Bepaal een parametervoorstelling en cartesiaanse vergelijkingen van de rechte *OP* door de oorsprong en door $P(1,2,-1)$ en van de rechte *m* met richtingsvector $\vec{d}(-2,5,2)$ en door het punt $Q(1,1,-1)$.

$OP \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=2r \\ z=-r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$; $OP \leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ of $OP \leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$.

$m \leftrightarrow \begin{cases} x=1-2s \\ y=1+5s \\ z=-1+2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$; $m \leftrightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{2}$ of $m \leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y-7=0 \\ x+z=0 \end{cases}$.

2 Bepaal de onderlinge ligging van de rechten *OP* en *m*. Bepaal het eventuele snijpunt.

Uit de richtingsvectoren is onmiddellijk duidelijk dat OP en m niet evenwijdig zijn.

Het eventuele snijpunt vinden we door gebruik te maken van de parametervoorstellingen: $\begin{cases} r=1-2s \\ 2r=1+5s \\ -r=-1+2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r+2s=1 \\ 2r-5s=1 \\ -r-2s=-1 \end{cases}$.

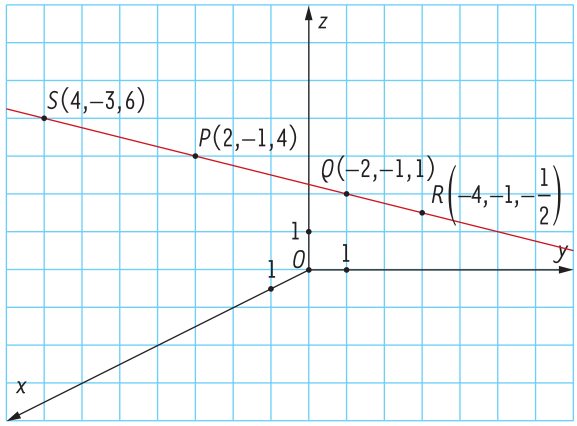
Dit stelsel is bepaald met als oplossing $\begin{cases} r=\frac{7}{9} \\ s=\frac{1}{9} \end{cases}$.

OP en m zijn snijdende rechten met snijpunt $S\left(\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{7}{9}\right)$.

Opdracht 41 bladzijde 101

Op de figuur lijken $R\left(-4,-1,-\frac{1}{2}\right)$ en $S(4,-3,6)$ op PQ te liggen.

Ga na of dat in werkelijkheid ook zo is.



P(2,–1,4) en Q(–2,–1,1), een stel richtingsgetallen van PQ is (4,0,3).

$$PQ \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{z-4}{3} & (1) \\ y = -1 \end{cases}$$

Uit de vergelijking $y = -1$ volgt dat S(4,–3,6) niet op PQ ligt.

Invullen van de coördinaatgetallen van R in (1) geeft

$$\begin{cases} \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-4{,}5}{3} \\ -1 = -1 \end{cases}$$

$R\left(-4,-1,-\frac{1}{2}\right)$ ligt op PQ.

Opdracht 42 bladzijde 101

Onderzoek of de punten A, B en C collineair zijn.

1 $A(2,1,3)$, $B(1,-1,1)$, $C(4,5,-2)$

Een stel richtingsgetallen van AB is (1,2,2), zodat $AB \leftrightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

Invullen van C(4,5,–2) geeft $\dfrac{4-2}{1} = \dfrac{5-1}{2} \neq \dfrac{-2-3}{2}$.

C ligt niet op AB, de drie punten zijn niet collineair.

2 $A(3,0,2)$, $B(1,2,2)$, $C(0,3,2)$

Een stel richtingsgetallen van AB is (–1,1,0), zodat $AB \leftrightarrow \begin{cases} -x+3 = y \\ z = 2 \end{cases}$.

Invullen van C(0,3,2) geeft $\begin{cases} 0+3 = 3 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

C ligt op AB, de drie punten zijn collineair.

Opdracht 43 bladzijde 102

Onderzoek telkens de onderlinge ligging van de rechten p en q.

1 $p \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 4r \\ y = 3 \\ z = -11 + 8r \end{cases}$ $\qquad q \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 5s \\ y = 3 \\ z = -5 - 10s \end{cases}$

- $\vec{d_1}(-4,0,8)$ // p en $\vec{d_2}(5,0,-10)$ // q zodat $\vec{d_2} = -\frac{5}{4} \cdot \vec{d_1}$.
  p en q zijn evenwijdig.
- Om na te gaan of p en q samenvallen, gaan we na of het punt P(5,3,–11) van p ook op q ligt: $\begin{cases} 2+5s=5 \\ 3=3 \\ -5-10s=-11 \end{cases} \Leftrightarrow s=\frac{3}{5}$.
  Dit stelsel is bepaald, p en q zijn samenvallende rechten.

2 $p \leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + r \\ y = -21 - r \\ z = 12 + 3r \end{cases}$ $\qquad q \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - 6s \\ z = 3 + s \end{cases}$

- $\vec{d_1}(1,-1,3)$ // p en $\vec{d_2}(1,-6,1)$ // q zodat $\vec{d_2} \neq k \cdot \vec{d_1}$.
  p en q zijn niet evenwijdig.
- Om na te gaan of p en q een snijpunt hebben, lossen we het volgende stelsel op:
  $\begin{cases} 7+r=2+s \\ -21-r=-1-6s \\ 12+3r=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r-s=-5 \\ -r+6s=20 \\ 3r-s=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=-2 \\ s=3 \end{cases}.$
  Dit stelsel is bepaald, p en q zijn snijdende rechten met snijpunt S(5,–19,6).

3 $p \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3r \\ y = 2 - 4{,}5r \\ z = -2 - 1{,}5r \end{cases}$ $\qquad q \leftrightarrow \begin{cases} x = -2s \\ y = 1 + 3s \\ z = s \end{cases}$

- $\vec{d_1}(6,-9,-3)$ // p en $\vec{d_2}(-2,3,1)$ // q zodat $\vec{d_2} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{d_1}$.
  p en q zijn evenwijdig.
- Om na te gaan of p en q samenvallen, gaan we na of het punt P(1,2,–2) van p ook op q ligt:
  Het stelsel $\begin{cases} -2s=1 \\ 1+3s=2 \\ s=-2 \end{cases}$ is strijdig, p en q zijn strikt evenwijdige rechten.

4 $p \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3r \\ y = 2 + r \\ z = 5 - 6r \end{cases}$ $\quad q \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7s \\ y = 6 + 3s \\ z = -1 \end{cases}$

– $\vec{d_1}(-3,1,-6) \,//\, p$ en $\vec{d_2}(7,3,0) \,//\, q$ zodat $\vec{d_2} \neq k \cdot \vec{d_1}$.
  p en q zijn niet evenwijdig.
- Om na te gaan of p en q een snijpunt hebben, lossen we het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} 1-3r = 5+7s \\ 2+r = 6+3s \\ 5-6r = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r+7s = -4 \\ r-3s = 4 \\ -6r = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ s = -1 \end{cases}.$$

Dit stelsel is bepaald, p en q zijn snijdende rechten met snijpunt S(–2,3,–1).

Opdracht 44 bladzijde 102

Gegeven de rechte $l \leftrightarrow \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

1 Bepaal een parametervoorstelling van l.

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 4+3r \\ y = -1+2r \quad (r \in \mathbb{R}) \\ z = -r \end{cases}$$

2 Onderzoek de onderlinge ligging van l met de coördinaatassen.

– Uit de richtingsvector van l is duidelijk dat l niet evenwijdig is met een van de coördinaatassen.

– De x-as heeft $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ als stel cartesiaanse vergelijkingen. Vullen we hier de parametervoorstelling van l in, dan vinden we $\begin{cases} -1+2r = 0 \\ -r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ r = 0 \end{cases}$.

  Dit stelsel is strijdig, l kruist de x-as.

– De y-as heeft $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ als stel cartesiaanse vergelijkingen. Vullen we hier de parametervoorstelling van l in, dan vinden we $\begin{cases} 4+3r = 0 \\ -r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{4}{3} \\ r = 0 \end{cases}$.

  Dit stelsel is strijdig, l kruist de y-as.

– De z-as heeft $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ als stel cartesiaanse vergelijkingen. Vullen we hier de parametervoorstelling van l in, dan vinden we $\begin{cases} 4+3r = 0 \\ -1+2r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{4}{3} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$.

  Ook dit stelsel is strijdig, l kruist de z-as.

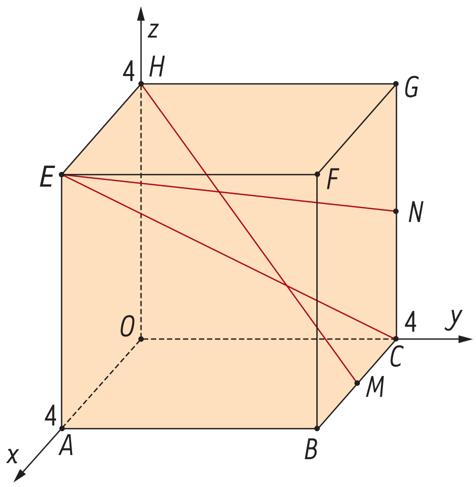
3 Bepaal het punt *A* van *l* waarvan het eerste coördinaatgetal gelijk is aan de som van de overige coördinaatgetallen.

$$4+3r=-1+2r-r \Leftrightarrow 2r=-5 \Leftrightarrow r=\frac{-5}{2}$$

Het punt is $A\left(-\frac{7}{2},-6,\frac{5}{2}\right)$.

Opdracht 45 bladzijde 102

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.



M is het midden van $[BC]$ en *N* is het midden van $[GC]$.

1 Bepaal een parametervoorstelling van *HM*.

H(0,0,4) en M(2,4,0) $\Rightarrow \overrightarrow{HM}(2,4,-4)$; (1,2,–2) is een stel richtingsgetallen van HM.

$$HM \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=2r \\ z=4-2r \end{cases} \quad (1)$$

2 Zijn *EC* en *HM* snijdende rechten? Bepaal de coördinaat van het snijpunt indien dat zo is.

E(4,0,4) en C(0,4,0) $\Rightarrow \overrightarrow{EC}(-4,4,-4)$; (1,–1,1) is een stel richtingsgetallen van EC.

$$EC \leftrightarrow x=\frac{y-4}{-1}=z \text{ of } EC \leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{(1) invullen in (2) geeft} \begin{cases} r-4+2r=0 \\ r+2r-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow r=\frac{4}{3}.$$

EC en HM snijden elkaar in $S\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$.

3 Zijn *EN* en *HM* snijdende rechten? Bepaal de coördinaat van het snijpunt indien dat zo is.

E(4,0,4) en N(0,4,2) $\Rightarrow \overrightarrow{EN}(-4,4,-2)$; (2,–2,1) is een stel richtingsgetallen van EN.

$$EN \leftrightarrow \frac{x-4}{2}=\frac{y}{-2}=z-4 \text{ of } EN \leftrightarrow \begin{cases} x-2z+4=0 \\ x+y-4=0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{(1) invullen in (3) geeft} \begin{cases} r-8+4r+4=0 \\ r+2r-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5r=4 \\ 3r=4 \end{cases}, \text{ zodat we geen oplossing hebben.}$$

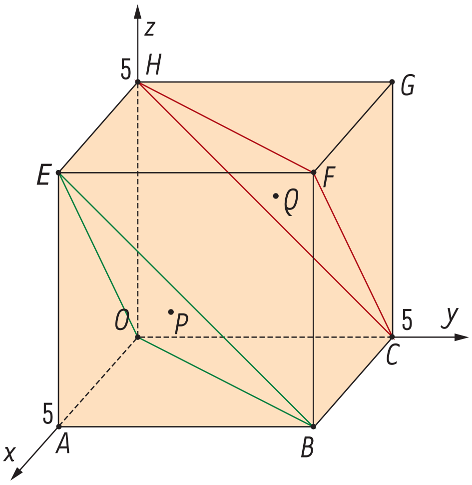
EN en HM zijn kruisende rechten.

Opdracht 46 bladzijde 102

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 5.

P is het zwaartepunt van ΔBOE en Q is het zwaartepunt van ΔHFC.

Onderzoek de onderlinge ligging van AP en GQ.



– O(0,0,0), B(5,5,0) en E(5,0,5) $\Rightarrow$ P$\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$

H(0,0,5), F(5,5,5) en C(0,5,0) $\Rightarrow$ Q$\left(\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right)$

– Met A(5,0,0) is $\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ of (–1,1,1) een stel richtingsgetallen van AP.

Met G(0,5,5) is $\left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ of (–1,1,1) een stel richtingsgetallen van GQ.

Bijgevolg is AP // GQ.

– $AP \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - r \\ y = r \\ z = r \end{cases}$

Voor r = 5 vinden G(0,5,5), G ligt op AP en dus vallen AP en GQ samen.

Opdracht 47 bladzijde 102

Gegeven zijn de rechten $l \leftrightarrow \frac{2x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{2z+1}{6}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 0 \\ 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

1 Schrijf een parametervoorstelling van de rechten l en m.

– Stel $\frac{2x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{2z+1}{6} = r$, dan vinden we: $l \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + r \\ y = 2r \\ z = -\frac{1}{2} + 3r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$

– $m \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{2}{3} - s \\ z = s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$

2 Ga na of *l* en *m* kruisend zijn.

- Uit de richtingsgetallen (1,2,3) en (0,–1,1) volgt dat l en m niet evenwijdig zijn.
- Om aan te tonen dat l en m geen snijpunt hebben, vullen we de parametervoorstelling van l in in de cartesiaanse vergelijkingen van m.

Dit geeft: $\begin{cases} 3\cdot\left(\dfrac{3}{2}+r\right)-5=0 \\ 3\cdot 2r+3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+3r\right)+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r=5-\dfrac{9}{2} \\ 6r+9r=-2+\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\dfrac{1}{6} \\ r=-\dfrac{1}{30} \end{cases}.$

Dit stelsel is strijdig, l en m zijn kruisend.

3 Bepaal een punt *L* op *l* en een punt *M* op *m* zodanig dat de rechte *LM* evenwijdig is met $p \leftrightarrow x=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{2}$.

- Een lopend punt op l is $L\left(\dfrac{3}{2}+r,2r,-\dfrac{1}{2}+3r\right)$ en een lopend punt op m is $M\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3}-s,s\right)$.
- $\overrightarrow{LM}\left(\dfrac{1}{6}-r,-\dfrac{2}{3}-2r-s,s+\dfrac{1}{2}-3r\right) // p \leftrightarrow x=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{6}-r,-\dfrac{2}{3}-2r-s,s+\dfrac{1}{2}-3r\right)=k\cdot(1,6,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{6}-r=k \\ -\dfrac{2}{3}-2r-s=6k \\ s+\dfrac{1}{2}-3r=2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r+k=\dfrac{1}{6} \\ 2r+s+6k=-\dfrac{2}{3} \\ 3r-s+2k=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=\dfrac{1}{2} \\ s=\dfrac{1}{3} \\ k=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

- Besluit: $L(2,1,1)$ en $M\left(\dfrac{5}{3},-1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Opdracht 48 bladzijde 102

Gegeven de rechte $h \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4r \\ y = -2 + 3r \\ z = 5r \end{cases}$ in een orthonormaal assenstelsel.

1 Bepaal een parametervoorstelling van het spiegelbeeld a van h om het xy-vlak.

$a \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4r \\ y = -2 + 3r \\ z = -5r \end{cases}$: bij spiegelen rond het xy-vlak gaat de z-coördinaat over op zijn tegenstelde.

2 Bepaal een parametervoorstelling van het spiegelbeeld b van h om het yz-vlak.

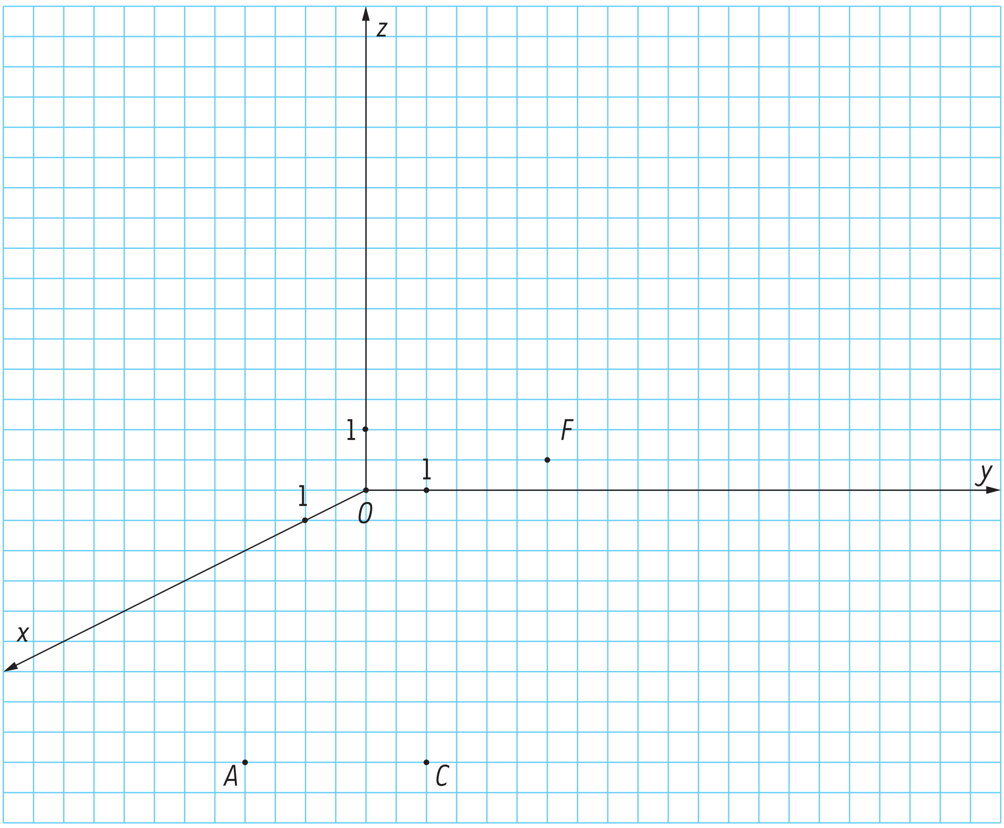
$b \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 4r \\ y = -2 + 3r \\ z = 5r \end{cases}$: bij spiegelen rond het yz-vlak gaat de x-coördinaat over op zijn tegenstelde.

3 Bepaal een parametervoorstelling van het spiegelbeeld c van h om het xz-vlak.

$c \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4r \\ y = 2 - 3r \\ z = 5r \end{cases}$: bij spiegelen rond het xz-vlak gaat de y-coördinaat over op zijn tegenstelde.

Opdracht 49 bladzijde 104

Gegeven de punten $A(1,-1,-4)$, $C(7,8,-1)$ en $F(1,4,1)$ in een orthonormaal assenstelsel.



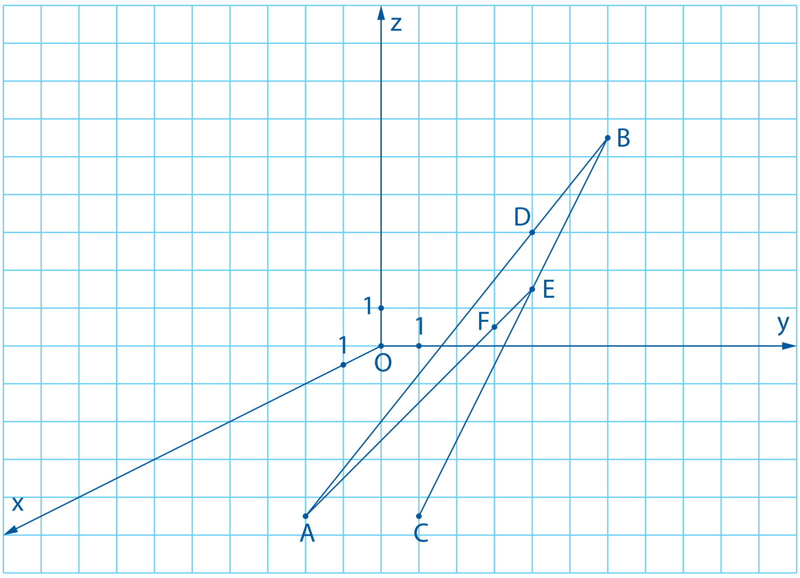
1 Verleng het lijnstuk $[AF]$ met $\frac{1}{5}$ langs de kant van F en noem het gevonden punt E.
Verleng het lijnstuk $[CF]$ langs de kant van F met de helft tot het punt D.
Bepaal de coördinaat van E en van D.

$\overrightarrow{AF}(0,5,5)$; een stel richtingsgetallen van AF is (0,1,1).

$$AF \leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1+r \\ z=-4+r \end{cases}. \text{ Voor A is } r=0, \text{ voor F is } r=5 \text{ zodat } r=6 \text{ voor E } \Rightarrow \text{ E}(1,5,2).$$

$\overrightarrow{CF}(-6,-4,2)$; een stel richtingsgetallen van CF is (3,2,–1).

$$CF \leftrightarrow \begin{cases} x=7+3s \\ y=8+2s \\ z=-1-s \end{cases}. \text{ Voor C is } s=0, \text{ voor F is } s=-2 \text{ zodat } s=-3 \text{ voor D } \Rightarrow \text{ D}(-2,2,2).$$



2 Het snijpunt van AD en CE noemen we B.
Stel vergelijkingen op van AD en CE en bereken de coördinaat van B.

$$AD \leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-4-2t \end{cases} \quad (1) \text{ en } CE \leftrightarrow \begin{cases} x-2y+9=0 \\ y+z-7=0 \end{cases} \quad (2).$$

Het snijpunt B vinden we door (1) in te vullen in (2): $\begin{cases} 1+t+2+2t+9=0 \\ -1-t-4-2t-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-4$

$\Rightarrow$ B(–3,3,4).

3 Bepaal de verhoudingen $\dfrac{|AD|}{|AB|}$ en $\dfrac{|CE|}{|CB|}$.

$AD \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$, voor A is $t = 0$, voor D is $t = -3$ en voor B is $t = -4$ zodat $\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{3}{4}$.

Met een parametervoorstelling van CE vinden we $\dfrac{|CE|}{|CB|} = \dfrac{3}{5}$.

Opdracht 50 bladzijde 104

Gegeven de punten $A(3,-1,2)$, $B(1,1,1)$, $C(5,-3,3)$ en $D(-3,5,-1)$.

Wat is de onderlinge ligging van de zes rechten bepaald door deze punten?

De zes rechten zijn samenvallend. A, B, C en D liggen alle vier op de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = 1 - 2r \\ z = 1 + r \end{cases}$.

Voor $r = 1$ vinden we A(3,–1,2), voor $r = 0$ vinden we B(1,1,1), voor $r = 2$ is dit C(5,–3,3) en tenslotte D(–3,5,–1) voor $r = -2$.

Opdracht 51 bladzijde 104

Voor welke waarden van k zijn de rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2z - 14 = 0 \\ 3x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3y - z + k = 0 \end{cases}$ strikt evenwijdig?

– $l \leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} - 2r \\ y = -\dfrac{1}{3} + r \\ z = 3r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ zodat $(-2,1,3)$ een stel richtingsgetallen van l is.

– $m \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = s \\ z = k + 3s \end{cases}$ zodat $(-2,1,3)$ ook een stel richtingsgetallen van m is.

l en m zijn evenwijdig voor elke waarde van k.

– Nemen we nu het punt P(4,0,1) op l $\left(\text{kies } r = \dfrac{1}{3}\right)$, dan ligt dit punt ook op m als en slechts als $\begin{cases} 4 + 2\cdot 0 - 4 = 0 \\ 3\cdot 0 - 1 + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$.

Als $k = 1$ zijn de rechten l en m samenvallend.

Bijgevolg zijn l en m strikt evenwijdig als $k \neq 1$.

Opdracht 52 bladzijde 105

Voor welke waarde(n) van k zijn de rechten $l \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + z = k \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + kz = -2 \end{cases}$

1 snijdend?

2 strikt evenwijdig?

3 kruisend?

– $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = -\frac{1}{2} - r \\ z = k - 2r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ zodat $(2,-1,-2)$ een stel richtingsgetallen van l is.

– $m \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2ks \\ y = s \\ z = 2s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$ zodat $(-2k,1,2)$ een stel richtingsgetallen van m is.

l en m zijn evenwijdig als en slechts als $k = 1$.

In dat geval is $l \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ en $m \leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = -2 \end{cases}$. Uit deze vergelijkingen is onmiddellijk duidelijk dat l en m geen gemeenschappelijke punten hebben, l en m zijn dan strikt evenwijdig.

– Als $k \neq 1$, bepalen we een eventueel snijpunt door de parametervoorstelling van l in te vullen in de cartesiaanse vergelijkingen van m:

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - r \right) - (k - 2r) = 0 \\ 2r + k(k - 2r) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2r - k + 2r = 0 & (1) \\ 2r + k(k - 2r) = -2 & (2) \end{cases}$$

Vergelijking (1) heeft enkel een oplossing als $k = -1$.

Vergelijking (2) wordt dan $2r - (-1 - 2r) = -2 \Leftrightarrow 4r = -3 \Leftrightarrow r = \frac{-3}{4}$.

Het snijpunt is dan $S\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$.

- We besluiten: l en m zijn

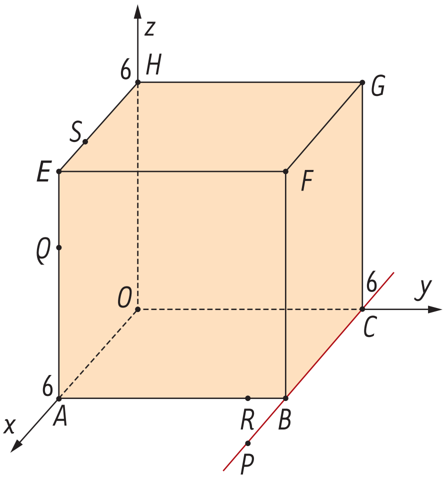
  1 snijdend als $k = -1$

  2 strikt evenwijdig als $k = 1$

  3 kruisend als $k \neq -1$ en $k \neq 1$

Opdracht 53 bladzijde 105

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6.



Q, R en S zijn vaste punten op ribben van de kubus zodanig dat $|AQ| = 2|QE|$, $|AR| = 5|RB|$ en $|HS| = 2|SE|$.

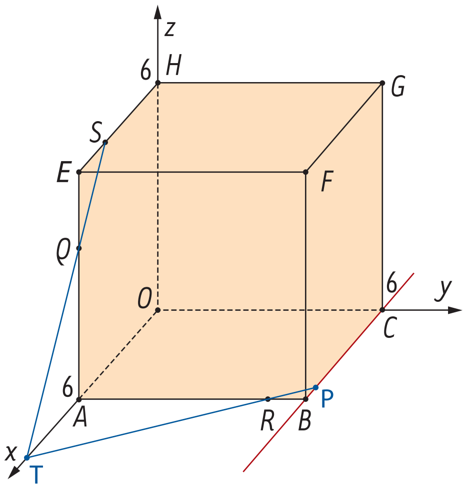
P is een veranderlijk punt op de rechte BC.

Meestal zullen de rechten RS en PQ elkaar kruisen.

1 Construeer de stand van P waarvoor PQ en RS elkaar snijden.

Bepaal het snijpunt van de rechte BC met het vlak SQR. We beschouwen het hulpvlak OABC dat de rechte BC omvat.

De snijlijn van het hulpvlak met het vlak SQR is TR, zodat P op BC het gevraagde snijpunt is.



2 Bereken de coördinaat van P in dat geval.

S(4,0,6), Q(6,0,4), R(6,5,0)

$SQ \leftrightarrow \begin{cases} x + z = 10 \\ y = 0 \end{cases}$ snijdt het vlak $z = 0$ in T(10,0,0).

$RT \leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 50 \\ z = 0 \end{cases}$ snijdt de rechte

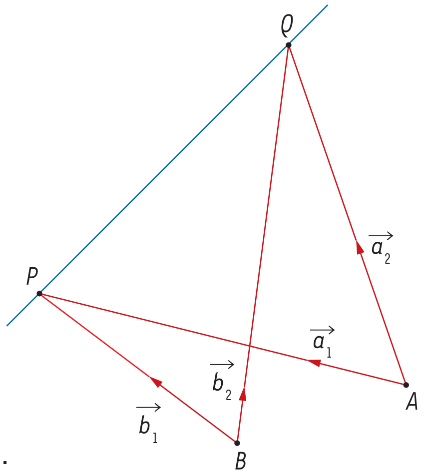
$BC \leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ z = 0 \end{cases}$ in $P\left(\dfrac{26}{5}, 6, 0\right)$.

3 Onderzoek of RS en PQ evenwijdig kunnen zijn.

$\overrightarrow{RS}$ (–2,–5,6) en aangezien P(r,6,0) is $\overrightarrow{PQ}$ (6 – r,–6,4). Het is duidelijk dat de richtingsgetallen van PQ en RS nooit evenredig kunnen zijn, zodat PQ en RS nooit evenwijdig kunnen zijn.

Opdracht 54 bladzijde 105

Om de koers van een vliegtuig vast te leggen, wordt zijn positie vanuit twee waarnemingspunten *A* en *B* gelijktijdig gemeten. Als we die metingen op verschillende tijdstippen herhalen, kunnen we ook de snelheid van het vliegtuig bepalen.



Veronderstel dat het waarnemingspunt *A* zich in de oorsprong bevindt en het waarnemingspunt *B* in (4,–3,0).

Bij een eerste meting zien we het vliegtuig vanuit *A* volgens de richting $\overrightarrow{a_1}(4,-2,1)$ en vanuit *B* volgens de richting $\overrightarrow{b_1}(8,-3,3)$.

Bij een volgende meting zien we het vliegtuig vanuit *A* volgens de richting $\overrightarrow{a_2}(3,-2,0)$ en vanuit *B* volgens de richting $\overrightarrow{b_2}(2,-1,0)$.

1 Bepaal de coördinaat van de positie *P* en *Q* van het vliegtuig bij de eerste en bij de tweede meting.

– Bij de eerste observatie zien we het vliegtuig vanuit A op de rechte $l_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = 4r \\ y = -2r \\ z = r \end{cases}$

en vanuit B op de rechte $m_1 \leftrightarrow \dfrac{x-4}{8} \overset{(1)}{=} \dfrac{y+3}{-3} \overset{(2)}{=} \dfrac{z}{3}$.

Het snijpunt van l_1 en m_1 vinden we door na te gaan of er een punt met coördinaat $(4r,-2r,r)$ op m_1 ligt.

Uit (1) volgt $\dfrac{4r-4}{8} = \dfrac{-2r+3}{-3}$ waaruit $r = 3$;

uit (2) volgt $\dfrac{-2r+3}{-3} = \dfrac{r}{3}$ waaruit ook $r = 3$.

We vinden de positie P(12,–6,3) van het vliegtuig bij de eerste meting.

– Bij de tweede meting bepalen we het snijpunt van de rechten $l_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 3s \\ y = -2s \text{ en} \\ z = 0 \end{cases}$

$m_2 \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{2} \overset{(3)}{=} \dfrac{y+3}{-1} \\ z = 0 \end{cases}.$

Uit (3) volgt $\dfrac{3s-4}{2} = \dfrac{-2s+3}{-1}$ en dus is $s = 2$ zodat Q(6,–4,0) de positie van het vliegtuig bij de tweede meting geeft.

2 Hoe groot is de gemiddelde snelheid tussen de twee metingen als het tijdsinterval 60 seconden is en de coördinaatgetallen in km gegeven zijn?

De afstand afgelegd gedurende die 60 seconden is

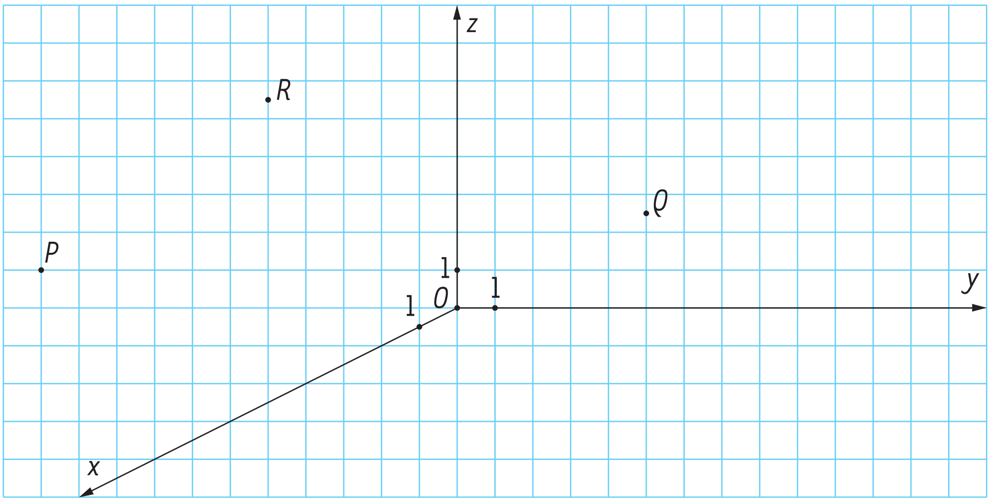
$|PQ| = \sqrt{(12-6)^2 + (-6+4)^2 + (3-0)^2}$ km = 7 km.

De gemiddelde snelheid is 7 km/min of 420 km/h.

Opdracht 55 bladzijde 106

Twee vliegende objecten A en B die zich op tijdstip t_1 respectievelijk in de punten $P(4,-7,3)$ en $Q(-1,4,2)$ bevinden, bewegen zich op evenwijdige rechte banen. Vanuit een vast waarnemingspunt S zien we deze objecten op elk moment als samenvallend.
De snelheid van A is drie keer zo groot als die van B en A bevindt zich op het tijdstip t_2 in $R(7,2,9)$.

Bepaal de coördinaat van S.

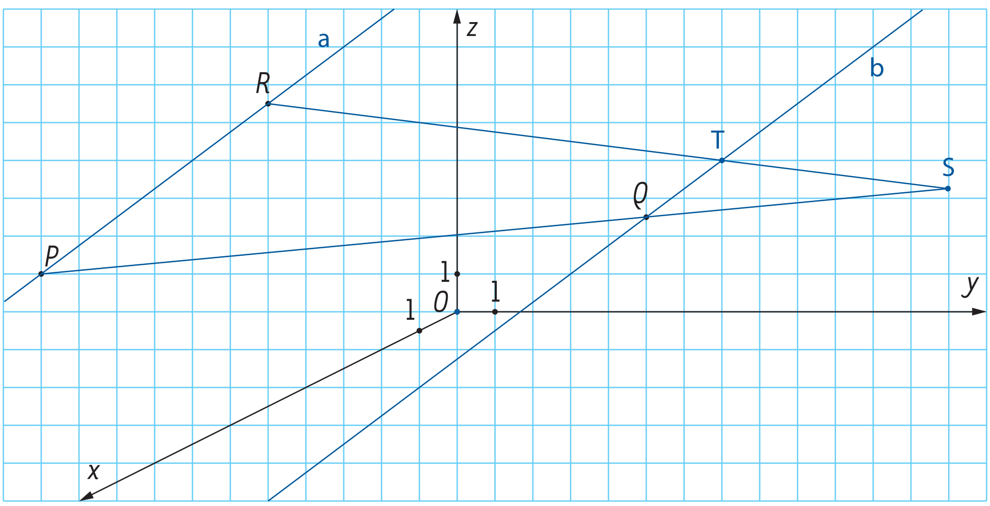


Object A verplaatst zich volgens de baan $PR \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -7 + 9t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$. Op tijdstip t_1 is $t = 0$, op tijdstip t_2 is $t = 1$. Object B verplaatst zich op een evenwijdige baan b. Omdat de snelheid van B een derde is van de snelheid van A, nemen we (1,3,2) als richtingsgetallen bij de parametervoorstelling van b: $b \leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Op tijdstip t_2 bevindt object B zich dan in T(0,7,4).

Het snijpunt S van $RT \leftrightarrow \begin{cases} x = 7r \\ y = 7 - 5r \\ z = 4 + 5r \end{cases}$ en $PQ \leftrightarrow \begin{cases} x - 5z + 11 = 0 \\ 11x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$ vinden we voor $r = \dfrac{-1}{2}$.

Het gevraagde punt is $S\left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{19}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.



Opdracht 56 bladzijde 106

Gegeven de rechte $a \leftrightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ en de punten $A(-9,6,0)$, $B(-3,3,6)$, $C(-1,-4,-5)$ en $D(0,-3,-5)$.

1 Toon aan dat *AB* en *CD* kruisende rechten zijn.

- (6,–3,6) en (2,–1,2) zijn stellen richtingsgetallen van AB,
  (1,1,0) is een stel richtingsgetallen van CD.
  Bijgevolg zijn AB en CD niet evenwijdig.

- $\mathrm{AB} \leftrightarrow \frac{x+9}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{2}$ of $\mathrm{AB} \leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2y+z-12=0 \end{cases}$ (1)

  $\mathrm{CD} \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=-3+r \\ z=-5 \end{cases}$ (2)

  (2) in (1) invullen geeft $\begin{cases} r-6+2r-3=0 \\ -6+2r-5-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=3 \\ r=11{,}5 \end{cases}$

  Dit stelsel is strijdig, AB en CD zijn kruisend.

2 Het punt *L* ligt op *AB* en *M* ligt op *CD* zodanig dat *LM* // *a*.
Bepaal de coördinaat van *L* en van *M*.

- Een lopend punt op AB is L(–9 + 2r, 6 – r, 2r) en een lopend punt op CD is M(s, –3 + s, –5).

  $\overrightarrow{\mathrm{LM}}(s+9-2r,-9+s+r,-5-2r) \,//\, a \leftrightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

  $\Leftrightarrow \left(s+9-2r,-9+s+r,-5-2r\right) = k \cdot (-2,2,3)$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} -2r+s+2k=-9 \\ r+s-2k=9 \\ -2r-3k=5 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} r=2 \\ s=1 \\ k=-3 \end{cases}$

- Besluit: L(–5,4,4) en M(1,–2,–5).

3 Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte q die AB en CD snijdt en die door het punt $Q\left(-3,3,\frac{7}{4}\right)$ gaat.

- Neem opnieuw $L(-9+2r,6-r,2r)$ als lopend punt op AB en $M(s,-3+s,-5)$ als lopend punt op CD.
- Met $Q\left(-3,3,\frac{7}{4}\right)$ is $\overrightarrow{QL}\left(2r-6,3-r,2r-\frac{7}{4}\right)$ en $\overrightarrow{QM}\left(s+3,s-6,-\frac{27}{4}\right)$.
- Q, L en M zijn collineair

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{QL}=k\cdot\overrightarrow{QM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r-6=k\cdot s+3k & (1)\\ 3-r=k\cdot s-6k & (2)\\ 2r-\frac{7}{4}=-\frac{27}{4}k & (3)\end{cases}$$

Uit (1) en (2) volgt: $2r-6-3k=3-r+6k \Leftrightarrow 3r-9k=9 \Leftrightarrow r=3k+3 \quad (4)$.

Uit (3) volgt : $8r-7=-27k \quad (5)$.

Invullen in (4) in (5): $24k+24-7=-27k \Leftrightarrow 51k=-17 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$.

Invullen in (4) geeft $r=2$ en tenslotte in (1): $4-6=-\frac{1}{3}s-1 \Leftrightarrow s=3$.

- De rechte q gaat door $L(-5,4,4)$ en door $M(3,0,-5)$ en heeft als stel richtingsgetallen $(8,-4,-9)$ zodat $q \leftrightarrow \frac{x-3}{8}=\frac{y}{-4}=\frac{z+5}{-9}$ of $q\leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3=0\\9y-4z-20=0\end{cases}$.

Opdracht 57 bladzijde 107

Bepaal een parametervoorstelling en een cartesiaanse vergelijking van het vlak met richtingsvectoren $\overrightarrow{d_1}(1,1,0)$ en $\overrightarrow{d_2}(0,0,1)$ dat het punt $P(0,2,5)$ bevat.

- $\alpha \leftrightarrow \begin{cases}x=r\\y=2+r \qquad (r,s\in\mathbb{R})\\z=5+s\end{cases}$
- Uit de eerste twee vergelijkingen volgt: $r=x=y-2$ zodat $\alpha\leftrightarrow x-y+2=0$.

Opdracht 58 bladzijde 107

Bepaal een parametervoorstelling en een cartesiaanse vergelijking van vl(A,B,C) als

1 $A(3,-4,0)$, $B(0,-4,2)$, $C(3,0,2)$

– Twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren van $\alpha = \text{vl}(A,B,C)$ zijn $\overrightarrow{AB}(-3,0,2)$ en $\overrightarrow{AC}(0,4,2)$, dus ook $(0,2,1)$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3r \\ y = -4 + 2s \\ z = 2r + s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$.

– Uit de eerste en de tweede vergelijking volgt: $r = 1 - \dfrac{x}{3}$ en $s = 2 + \dfrac{y}{2}$.

Invullen in de derde vergelijking geeft: $z = 2 - \dfrac{2x}{3} + 2 + \dfrac{y}{2}$ of $6z = 24 - 4x + 3y$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow 4x - 3y + 6z - 24 = 0$.

2 $A(1,4,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(0,1,1)$

- Twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren van $\alpha = \text{vl}(A,B,C)$ zijn $\overrightarrow{AB}(-2,-2,1)$ en $\overrightarrow{BC}(1,-1,0)$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2r + s \\ y = 4 - 2r - s \\ z = r \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$.

– Uit de derde en de tweede vergelijking volgt: $r = z$ en $s = 4 - 2r - y = 4 - 2z - y$.

Invullen in de eerste vergelijking geeft: $x = 1 - 2z + 4 - 2z - y$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow x + y + 4z - 5 = 0$.

Opdracht 59 bladzijde 107

Gegeven de punten $P(2,0,0)$, $Q(0,-3,0)$ en $R(0,0,6)$ in de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel xyz. Het vlak v is het vlak door de punten P, Q en R.

Welk van de volgende punten ligt in het vlak v?

A $A(1,1,1)$ **B** $B(1,1,2)$ **C** $C(1,1,3)$ **D** $D(1,1,4)$ **E** $E(1,1,5)$

(Bron © IJkingstoets bio-ingenieur, 2015)

$v \leftrightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{6} = 1$ of $v \leftrightarrow 3x - 2y + z - 6 = 0$.

Enkel het punt $E(1,1,5)$ voldoet aan de vergelijking: $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 5 - 6 = 0$.

E is het juiste antwoord.

Opdracht 60 bladzijde 107

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat de punten $A(2,3,1)$ en $B(0,1,-1)$ bevat en evenwijdig is met de y-as.

(0,1,0) is een stel richtingsgetallen van de y-as en (1,1,1) is een stel richtingsgetallen van AB.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 1 + r + s \qquad (r, s \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + s \end{cases}$$

Uit de eerste en de derde vergelijking volgt: $s = x = z + 1$.

Bijgevolg is $\alpha \leftrightarrow x - z - 1 = 0$.

Opdracht 61 bladzijde 107

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat de punten $A(2,-1,1)$ en $B(1,3,2)$ bevat en evenwijdig is met de rechte PQ met $P(5,-4,0)$ en $Q(1,-2,-3)$.

Twee richtingsvectoren zijn $\overrightarrow{AB}(-1,4,1)$ en $\overrightarrow{PQ}(-4,2,-3)$.

Een parametervoorstelling van α:

$$\begin{cases} x = 2 - r - 4s & (1) \\ y = -1 + 4r + 2s & (2) \\ z = 1 + r - 3s & (3) \end{cases}$$

(1) + (3) geeft: $x + z = 3 - 7s \iff s = \frac{3}{7} - \frac{x}{7} - \frac{z}{7} \quad (4)$

(4) in (3) geeft: $z = 1 + r - \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}z \iff r = \frac{2}{7} - \frac{3}{7}x + \frac{4}{7}z \quad (5)$

(4) en (5) in (2) tenslotte geeft:

$$y = -1 + \frac{8}{7} - \frac{12}{7}x + \frac{16}{7}z + \frac{6}{7} - \frac{2}{7}x - \frac{2}{7}z \text{ of } 2x + y - 2z - 1 = 0$$

Besluit: $\alpha \leftrightarrow 2x + y - 2z - 1 = 0$.

Opdracht 62 bladzijde 107

Onderzoek in de volgende gevallen de onderlinge ligging van de vlakken α en β.

Bepaal bij snijdende vlakken een parametervoorstelling van de snijlijn.

1 $\alpha \leftrightarrow x + 2y + z - 3 = 0$ $\qquad$ $\beta \leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 1 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x + 2y + z - 3 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 1 = 0$ zijn strikt evenwijdig want $(2,4,2) = 2 \cdot (1,2,1)$ maar $1 \neq 2 \cdot (-3)$.

2 $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$ $\beta \leftrightarrow 2x - 2y + z - 3 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - 2y + z - 3 = 0$ zijn snijdende vlakken want (2,–2,1) is geen veelvoud van (1,–1,1). De snijlijn heeft als stelsel cartesiaanse vergelijkingen

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{cases}.$$

We herleiden de uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$ van het stelsel tot de rijcanonieke vorm en vinden $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$. Het stelsel is gelijkwaardig met $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

De snijlijn heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 1 + r \\ y = r \\ z = 1 \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

3 $\alpha \leftrightarrow x - 2y + 3z - 1 = 0$ $\beta \leftrightarrow -3x + 6y - 9z + 3 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x - 2y + 3z - 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow -3x + 6y - 9z + 3 = 0$ zijn samenvallende vlakken want de gegeven vergelijking van β kunnen we vereenvoudigen tot $x - 2y + 3z - 1 = 0$.

4 $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$ $\beta \leftrightarrow 2y - 2z - 2x + 5 = 0$

$\alpha \leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$ en $\beta \leftrightarrow -2x + 2y - 2z + 5 = 0$ zijn strikt evenwijdig want $(-2,2,-2) = -2 \cdot (1,-1,1)$ maar $5 \neq -2 \cdot (2)$.

Opdracht 63 bladzijde 107

Bepaal een parametervoorstelling en een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de snijlijn s van de vlakken $\alpha \leftrightarrow x - 2y + 3z - 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow y + 3z - 5 = 0$.

De snijlijn is $s \leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

Rijherleiden van dit stelsel geeft $\begin{cases} x + 9z = 11 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ waaruit de parametervoorstelling volgt:

$$s \leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 9r \\ y = 5 - 3r \\ z = r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Opdracht 64 bladzijde 108

Onderzoek de onderlinge ligging van de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = 1 + 2r \\ z = 5 + 3r \end{cases}$ en het vlak $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 4s - 2t \\ y = s - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$(r, s, t \in \mathbb{R})$.

Bepaal het eventuele snijpunt.

Het eventuele snijpunt vinden we uit de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 3 + r = 6 + 4s - 2t \\ 1 + 2r = s - 2t \\ 5 + 3r = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r - 4s + 2t = 3 \\ 2r - s + 2t = -1 \\ 3r - 2t = -3 \end{cases}.$$

Dit stelsel is bepaald en heeft als oplossing $\begin{cases} r = -1 \\ s = -1. \\ t = 0 \end{cases}$

De rechte l en het vlak α snijden elkaar en hebben als snijpunt S(2,–1,2).

Opdracht 65 bladzijde 108

Geef een parametervoorstelling van α.

1 $\alpha \leftrightarrow x + 2y - z = 0$

We beschouwen $x + 2y - z = 0$ als een stelsel van 1 vergelijking in 3 onbekenden.

Het is tweevoudig onbepaald en de oplossing $\begin{cases} x = -2r + s \\ y = r \\ z = s \end{cases}$ $(r, s \in \mathbb{R})$ kunnen we

beschouwen als een parametervoorstelling van α.

2 $\alpha \leftrightarrow 5x - 4y + 2z - 7 = 0$

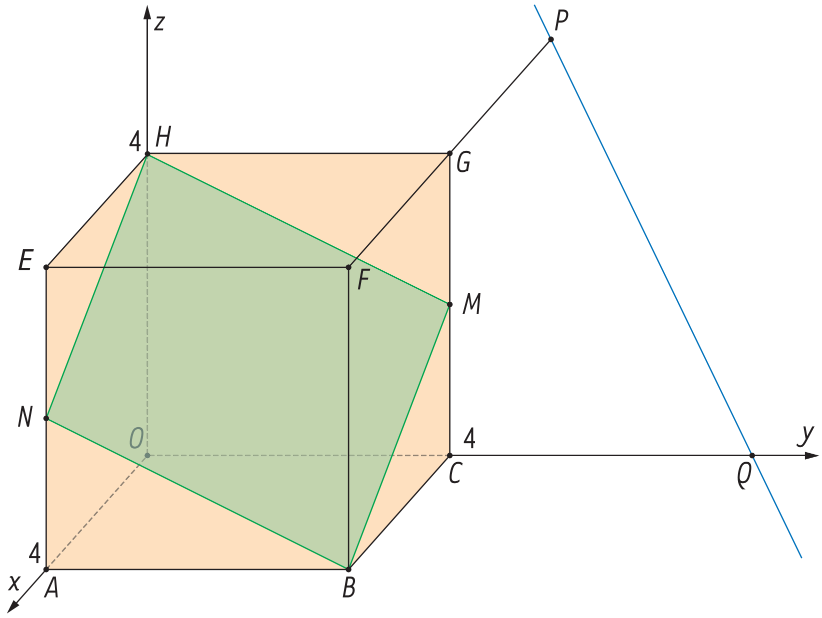
$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4r - 2s + 7}{5} \\ y = r \\ z = s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

3 $\alpha \leftrightarrow y - 7 = 0$

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 7 \\ z = s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Opdracht 66 bladzijde 108

$\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ is een kubus met ribbe 4. M is het midden van $[CG]$, N het midden van $[AE]$, G het midden van $[FP]$ en C het midden van $[OQ]$.



1 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α waarin de vierhoek $BMHN$ ligt.

We stellen $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$.

Aangezien co(B) = (4,4,0), co(H) = (0,0,4) en co(M) = (0,4,2), kunnen we u, v, w en t vinden uit:

$$\begin{cases} 4u + 4v + t = 0 \\ 4w + t = 0 \\ 4v + 2w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{1}{8}t = 0 \\ v + \frac{1}{8}t = 0 \\ w + \frac{1}{4}t = 0 \end{cases}.$$

Kiezen we bv. $t = -8$, dan is $\alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 8 = 0 \quad (1)$.

2 Wat is de onderlinge ligging van de rechte PQ en het vlak α?

co(P) = (–4,4,4) en co(Q) = (0,8,0) zodat (4,4,–4) en (1,1–1) richtingsgetallen van PQ zijn.

$$PQ \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = 8 + r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$$

Invullen in (1) geeft: $r + 8 + r - 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot r = 0$.

Dit betekent dat elk punt van PQ in α ligt: de rechte ligt in het vlak.

Opdracht 67 bladzijde 108

Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak γ dat de snijlijn van de vlakken $\alpha \leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$ en $\beta \leftrightarrow 2x - y + 4z + 1 = 0$ omvat en door het punt $P(1,1,1)$ gaat.

Alle vlakken die de snijlijn van α en β omvatten behoren tot de vlakkenwaaier $r(x + y + z + 1) + s(2x - y + 4z + 1) = 0$.

Het vlak van deze vlakkenwaaier dat door P(1,1,1) gaat, vinden we uit:

$r(1 + 1 + 1 + 1) + s(2 - 1 + 4 + 1) = 0 \iff 4r + 6s = 0.$

Kiezen we bv. r = 3 en s = –2, dan vinden we

$\gamma \leftrightarrow 3x + 3y + 3z + 3 - 4x + 2y - 8z - 2 = 0$ of $\gamma \leftrightarrow -x + 5y - 5z + 1 = 0.$

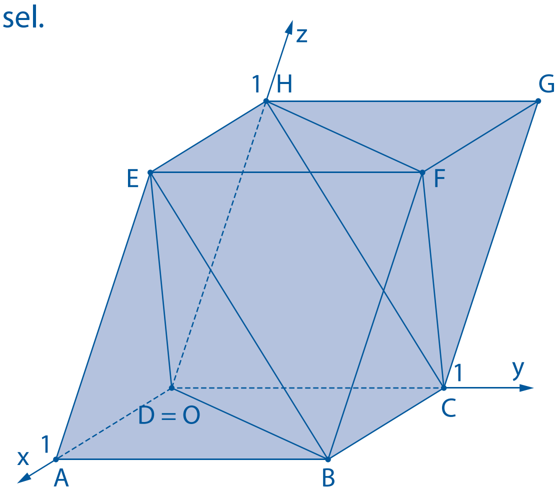
Opdracht 68 bladzijde 109

Gegeven het parallellepipedum $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$.

Bewijs analytisch dat vl(B,D,E) // vl(H,F,C).

Kies een affien assenstelsel zoals in de figuur.

Stel vl(B,D,E) = α, met als richtingsvectoren $\overrightarrow{DB}(1,1,0)$ en $\overrightarrow{DE}(1,0,1)$ in het getekende assenstelsel.



$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = r + s \\ y = r \\ z = s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Na eliminatie van de parameters vinden we $\alpha \leftrightarrow x - y - z = 0.$

Stel vl(H,F,C) = β, met als richtingsvectoren $\overrightarrow{HF}(1,1,0)$ en $\overrightarrow{HC}(0,1,-1)$.

$$\beta \leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t + u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad (t, u \in \mathbb{R})$$

Na eliminatie van de parameters vinden we $\beta \leftrightarrow y = 1 - z + x$ of $\beta \leftrightarrow x - y - z + 1 = 0.$

Uit de cartesiaanse vergelijkingen van α en β volgt: α // β.

Opdracht 69 bladzijde 109

Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte m die in het vlak $\alpha \leftrightarrow 3x - 2y - z + 4 = 0$ ligt, de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ snijdt en evenwijdig is met het vlak $\beta \leftrightarrow x + y + z = 0$.

Het snijpunt S van $l \leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ en $\alpha \leftrightarrow 3x - 2y - z + 4 = 0$ ligt op m.

De coördinaatgetallen van S zijn oplossingen van $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = 3 \\ 3x - 2y - z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ zodat S(1,2,3).

We beschouwen m als snijlijn van twee vlakken om een stelsel cartesiaanse vergelijkingen te bepalen.

Het eerste vlak is in elk geval α.

Het tweede vlak γ is evenwijdig met β en gaat door S.

$\gamma \leftrightarrow x + y + z + k = 0.$

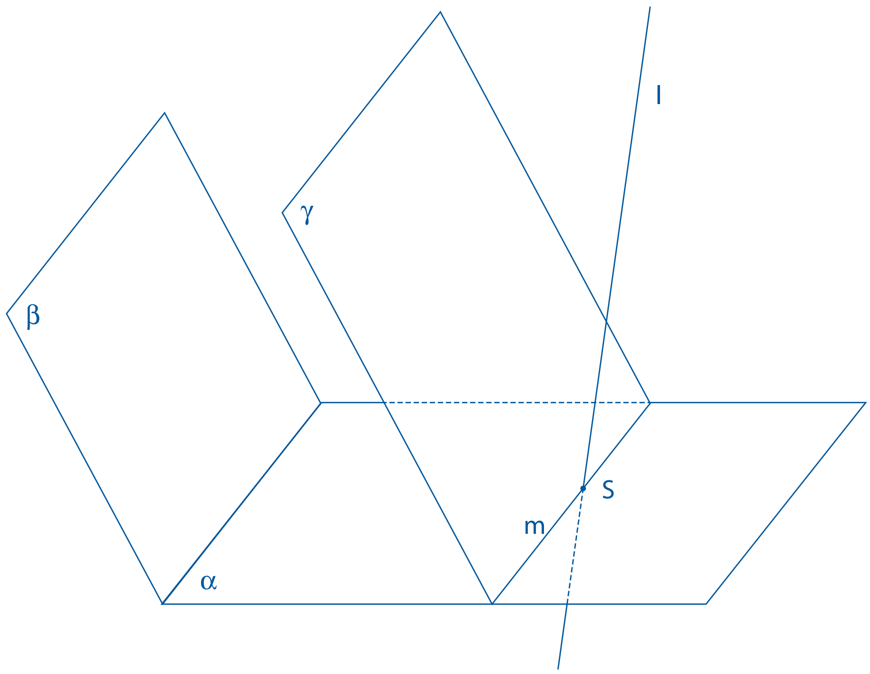
Door uit te drukken dat S(1,2,3) in γ ligt, bepalen we k:

$1 + 2 + 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -6.$

We hebben: $\gamma \leftrightarrow x + y + z - 6 = 0.$

Omdat m in γ ligt, heeft m geen enkel punt met β gemeen, dus m // β.

Besluit: $m \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}.$



Opdracht 70 bladzijde 109

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x - y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2y - 7 = 0 \\ 3x + 2z - 7 = 0 \end{cases}$.

Toon aan dat a en b een vlak bepalen en bepaal een cartesiaanse vergelijking van dat vlak.

– Parametervoorstellingen van de rechten zijn bv. $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2r \\ y = -7 + 7r \\ z = 1 + 3r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ en

$b \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -7s \\ z = 2 - 3s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Uit de richtingsgetallen volgt dat a evenwijdig is met b.

Aangezien B(1,0,2) een punt van b is dat niet tot a behoort, zijn deze rechten strikt evenwijdig en bepalen ze bijgevolg een vlak α.

- A(2,–7,1) is een punt van a, B(1,0,2) en C(3,–7,–1) zijn punten van b.

Invullen in de vorm $ux + vy + wz + t = 0$ en rijherleiden geeft $\begin{cases} u + \frac{1}{2}t = 0 \\ v + \frac{1}{28}t = 0. \\ w + \frac{1}{4}t = 0 \end{cases}$

Kiezen we $t = -28$, dan vinden we $\alpha \leftrightarrow 14x + y + 7z - 28 = 0$.

Opdracht 71 bladzijde 109

Gegeven de rechten l door $A(9,6,0)$ en $B(3,3,6)$ en m door $C(1,-4,-5)$ en $D(0,-3,-5)$.

1 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat door $P(1,1,1)$ gaat en evenwijdig is met l en m.

(2,1,–2) is een stel richtingsgetallen van de rechte l en (1,–1,0) is een stel richtingsgetallen van m, zodat $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r + s & (1) \\ y = 1 + r - s & (2). \\ z = 1 - 2r & (3) \end{cases}$

Uit (3) volgt: $r = \dfrac{1-z}{2}$ (3′).

Invullen in (2) geeft: $y = 1 + \dfrac{1-z}{2} - s \iff s = 1 - y + \dfrac{1-z}{2}$ (2′).

(3′) en (2′) invullen in (1) geeft: $x = 1 + 1 - z + 1 - y + \dfrac{1-z}{2} \iff 2x = 6 - 2z - 2y + 1 - z$

zodat: $\alpha \leftrightarrow 2x + 2y + 3z - 7 = 0$.

2 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat door l gaat en evenwijdig is met m en van het vlak γ dat door m gaat en evenwijdig is met l.

Aangezien een rechte evenwijdig is met een vlak als ze evenwijdig is met een rechte van dat vlak, zijn β en γ evenwijdig met α. Hun vergelijking is dus van de vorm $2x + 2y + 3z + t = 0$.

Het vlak β gaat door het punt A(9,6,0) zodat $2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + t = 0$ of $t = -30$.

Het vlak γ gaat door het punt D(0,–3,–5) zodat $2 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) + t = 0$ of $t = 21$.

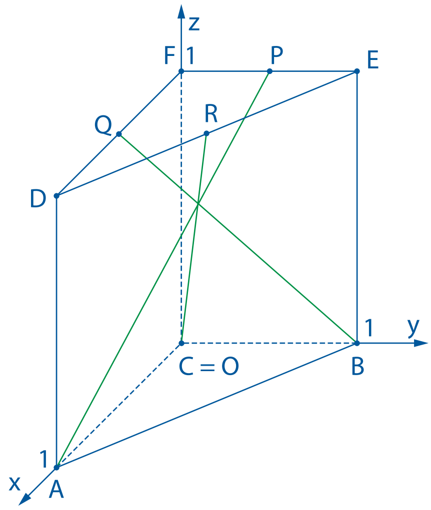
Besluit: $\beta \leftrightarrow 2x + 2y + 3z - 30 = 0$ en $\gamma \leftrightarrow 2x + 2y + 3z + 21 = 0$.

Opdracht 72 bladzijde 109

$\begin{pmatrix} D & E & F \\ A & B & C \end{pmatrix}$ is een recht prisma, d.w.z. dat de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan.
Bovendien is $AC \perp CB$. De middens van $[EF]$, $[DF]$ en $[DE]$ noemen we respectievelijk P, Q en R.

1 Toon aan dat de rechten AP, BQ en CR door hetzelfde punt gaan.

Kies de oorsprong van het assenstelsel in C en de assen volgens de ribben van het prisma zoals op de figuur.



Als lengte-eenheden kiezen we de lengtes van de ribben.

$P\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ en $A(1,0,0)$ bepalen de rechte

$$AP \leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2r \\ y = r \\ z = 2r \end{cases} \quad (1).$$

$Q\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ en $B(0,1,0)$ bepalen de rechte

$$BQ \leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Het snijpunt S van AP en BQ vinden we door (1) in (2) in te vullen:

$$\begin{cases} 2-4r-2r = 0 \\ r+2r-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$$

zodat $S\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

De oorsprong O en $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ bepalen de rechte $OR \leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$. Het is onmiddellijk duidelijk dat $S\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ behoort tot OR zodat OR, BQ en AP concurrent zijn.

2 Geldt deze eigenschap ook als de opstaande ribben niet loodrecht op het grondvlak staan en als ΔABC niet rechthoekig is? Verklaar.

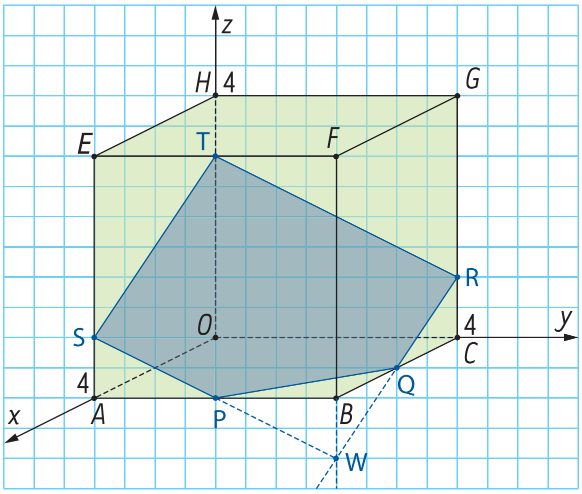
Indien we een niet-rechthoekig prisma hebben, staan de assen niet meer loodrecht op elkaar, maar dat maakt niets uit voor de berekening. Dezelfde berekeningen als hierboven (in een affien assenstelsel) tonen aan dat de eigenschap blijft gelden.

Opdracht 73 bladzijde 110

Gegeven is de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.

Construeer telkens de doorsnede van de kubus met vl(P,Q,R) en bereken de coördinaten van de hoekpunten van de doorsnede.

1 $P(4,2,0)$, $Q(2,4,0)$, $R(0,4,1)$



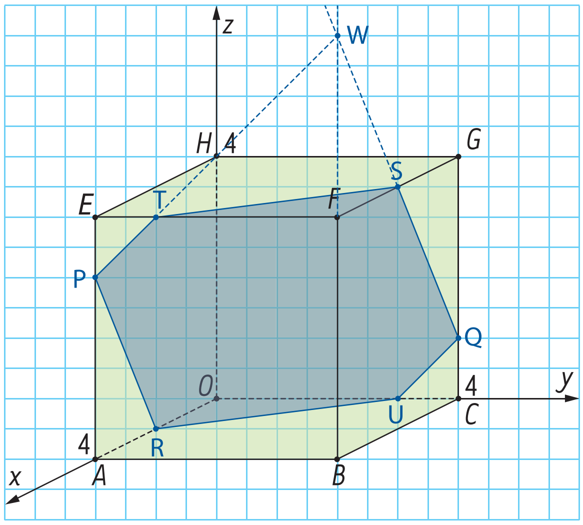
De zijden [PQ] en [QR] van de doorsnede kunnen onmiddellijk getekend worden.
We verlengen QR tot in het voorvlak, dit is tot op BF en vinden zo het punt W.
De snijlijn van vl(P,Q,R) met het voorvlak is dan PW, deze rechte snijdt AE in het punt S.
Tekenen we door S een evenwijdige met QR, dan vinden we het punt T op OH.
De doorsnedeveelhoek is PQRTS.

Om de coördinaten van S en T te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $x + y + 2z - 6 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte AE $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ is S(4,0,1).

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met OH $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ is T(0,0,3).

2 $P(4,0,3)$, $Q(0,4,1)$, $R(2,0,0)$



De zijden [PR] en [QS] (QS // PR) van de doorsnede kunnen onmiddellijk getekend worden.
We verlengen QS tot het voorvlak, dit is tot op BF en vinden het punt W.
De snijlijn van vl(P,Q,R) met het voorvlak is dan PW die EF snijdt in het punt T.
Tekenen we door R een evenwijdige met TS, dan vinden we het punt U op OC.
De doorsnedeveelhoek is PTSQUR.

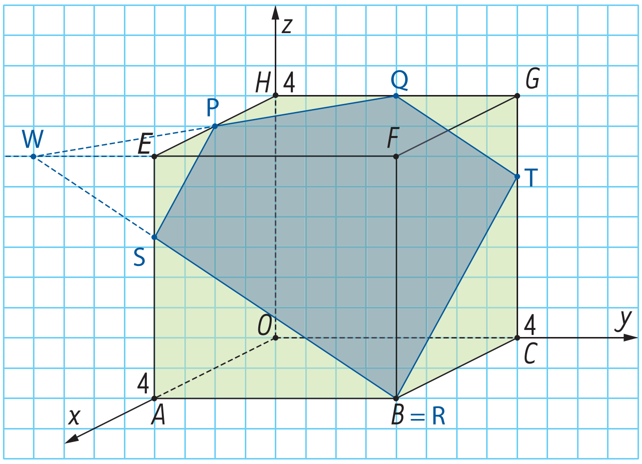
Om de coördinaten van S, T en U te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $3x + 2y - 2z - 6 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte FG $\leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ is S(2,4,4).

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met de rechte EF $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ is T(4,1,4).

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met de rechte OC $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ is U(0,3,0).

3 $P(2,0,4)$, $Q(0,2,4)$, $R(4,4,0)$



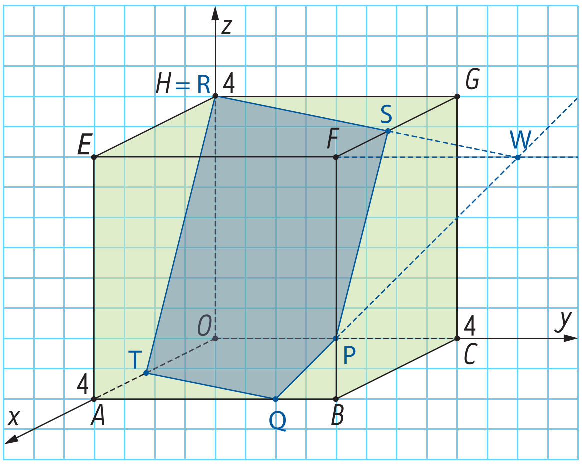
De zijde [PQ] van de doorsnede kan onmiddellijk getekend worden.
We verlengen PQ tot in het voorvlak, dit is tot op EF en vinden het punt W.
De snjlijn van vl(P,Q,R) met het voorvlak is dan WR die AE snijdt in het punt S.
Tekenen we door Q een evenwijdige met SR, dan vinden we het punt T op GC.
De doorsnedeveelhoek is PQTRS.

Om de coördinaten van S en T te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $2x + 2y + 3z - 16 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte EA $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ is $S\left(4, 0, \dfrac{8}{3}\right)$.

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met CG $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ is $T\left(0, 4, \dfrac{8}{3}\right)$.

4 $P(4,4,1)$, $Q(4,3,0)$, $R(0,0,4)$



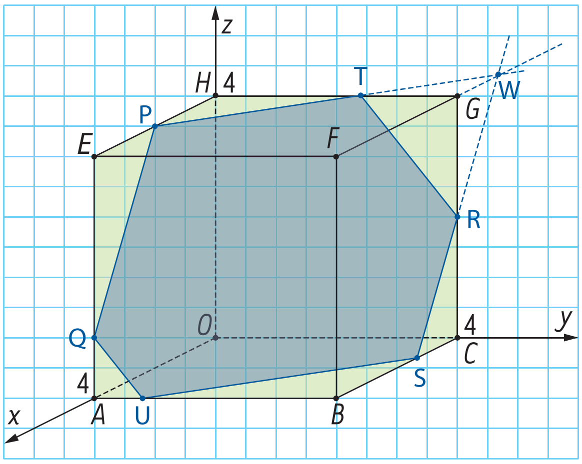
De zijde [PQ] van de doorsnede kan onmiddellijk getekend worden.
We verlengen PQ tot in het bovenvlak, dit is tot op EF en vinden het punt W.
De snijlijn van vl(P,Q,R) met het bovenvlak is dan RW die FG snijdt in het punt S.
Tekenen we door R een evenwijdige met SP, dan vinden we het punt T op OA.
De doorsnedeveelhoek is QPSRT.

Om de coördinaten van S en T te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $7x - 4y + 4z - 16 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte FG $\leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ is $S\left(\dfrac{16}{7}, 4, 4\right)$.

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met OA $\leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ is $T\left(\dfrac{16}{7}, 0, 0\right)$.

5 $P(2,0,4)$, $Q(4,0,1)$, $R(0,4,2)$



De zijden [PQ] en [RS] (RS // PQ) van de doorsnede kunnen onmiddellijk getekend worden.
We verlengen RS tot in het bovenvlak, dit is tot op FG en vinden het punt T.
De snijlijn van vl(P,Q,R) met het bovenvlak is dan PW die HG snijdt in het punt W.
Tekenen we door S een evenwijdige met PT, dan vinden we het punt U op AB.
De doorsnedeveelhoek is PTRSUQ.

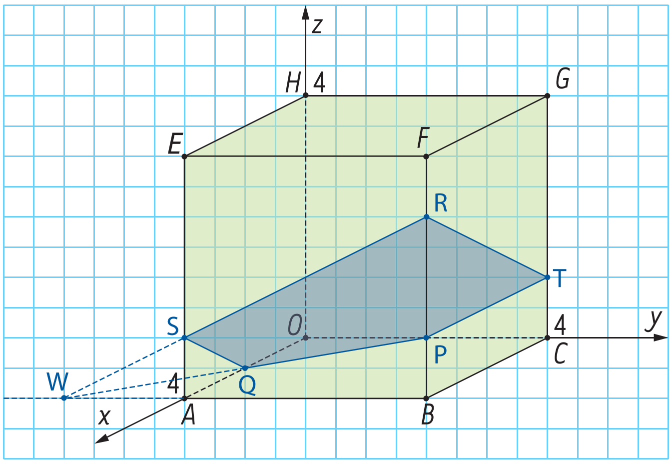
Om de coördinaten van S, T en U te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $6x + 5y + 4z - 28 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte BC $\leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ is $S\left(\dfrac{4}{3}, 4, 0\right)$.

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met HG $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ is $T\left(0, \dfrac{12}{5}, 4\right)$.

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met AB $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ is $U\left(4, \dfrac{5}{4}, 0\right)$.

6 $P(0,2,0)$, $Q(2,0,0)$, $R(4,4,3)$



De zijde [PQ] van de doorsnede kan onmiddellijk getekend worden.
We verlengen PQ tot het voorvlak, dit is tot op AB en vinden het punt W.
De snijlijn van vl(P,Q,R) met het voorvlak is dan WR die AE snijdt in het punt S.
Tekenen we door P een evenwijdige met SR, dan vinden we het punt T op CG.
De doosnedeveelhoek is PTRSQ.

Om de coördinaten van S en T te bepalen, maken we gebruik van een cartesiaanse vergelijking van vl(P,Q,R): $x + y - 2z - 2 = 0$.

Het snijpunt van dit vlak met de rechte AE $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ is S(4,0,1).

Het snijpunt van vl(P,Q,R) met CG $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ is T(0,4,1).

Opdracht 74 bladzijde 110

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 4.

P is het midden van $[EH]$ en *Q* is het midden van $[HG]$.

1 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat de rechte *PQ* omvat en evenwijdig is met *HB*.

H(0,0,4) en B(4,4,0) zodat $\overrightarrow{HB}(4,4,-4)$ een richtingsvector is van α.

P(2,0,4) en Q(0,2,4) zodat ook $\overrightarrow{PQ}(-2,2,0)$ een richtingsvector is van α.

(1,1,–1) en (–1,1,0) zijn stellen richtingsgetallen van α.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + r - s \\ y = r + s \\ z = 4 - r \end{cases} \quad \text{of } \alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 10 = 0.$$

2 Bereken de coördinaten van de hoekpunten van de doorsnede van de kubus met α.

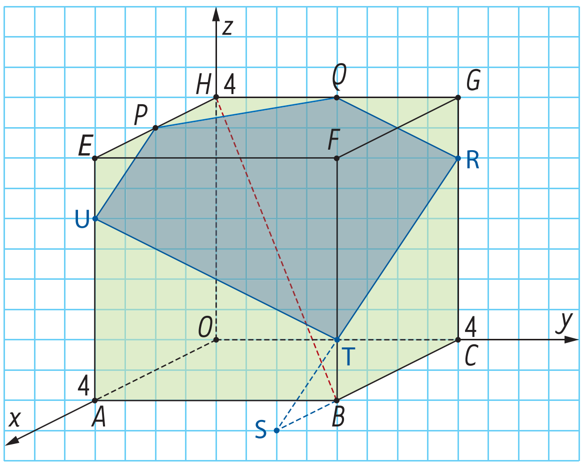
Het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 10 = 0$ met GC $\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ is R(0,4,3).

Het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 10 = 0$ met BC $\leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ is S(6,4,0), dat buiten de kubus ligt, we berekenen daarom het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 10 = 0$ met BF $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ en vinden T(4,4,1).

Tenslotte bepalen we het snijpunt van $\alpha \leftrightarrow x + y + 2z - 10 = 0$ met AE $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$: U(4,0,3).

3 Teken die doorsnede.

De doorsnede is de vijfhoek PQRTU.



Opdracht 75 bladzijde 110

Bewijs: een rechte m met richtingsvector $\vec{d}(a, b, c)$ is evenwijdig met het vlak $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ als en slechts als $ua + vb + wc = 0$.

Te bewijzen: de rechte l met richtingsvector $\vec{d}(a,b,c)$ is evenwijdig met het vlak

$$\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0 \iff ua + vb + wc = 0.$$

Bewijs:

1 $\Rightarrow$

Als $l \,//\, \alpha$, is $\vec{d}(a,b,c)$ een richtingsvector van α, dus bestaan er punten $A(x_1,y_1,z_1)$ en $B(x_2,y_2,z_2)$ van α waarbij $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$.
Aangezien A en B in α liggen, is $ux_1 + vy_1 + wz_1 + t = 0$ (1) en $ux_2 + vy_2 + wz_2 + t = 0$ (2).
(2) – (1) geeft $u(x_2 - x_1) + v(y_2 - y_1) + w(z_2 - z_1) = 0$.
En aangezien $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \vec{d}(a,b,c)$, volgt hieruit het te bewijzen:
$ua + vb + wc = 0$

2 $\Leftarrow$

Voor de rechte l met richtingsvector $\vec{d}(a,b,c)$ en $\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$ geldt $ua + vb + wc = 0$, dit betekent dat het punt $P(a,b,c)$ in het vlak $\beta \leftrightarrow ux + vy + wz = 0$ ligt, dit is het vlak evenwijdig met α door de oorsprong. $\overrightarrow{OP} = \vec{d}$ is dus een richtingsvector van β, en dus van α zodat $l \,//\, \alpha$.

Opdracht 76 bladzijde 110

Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken, dan is ze evenwijdig met de snijlijn van die vlakken. Bewijs.

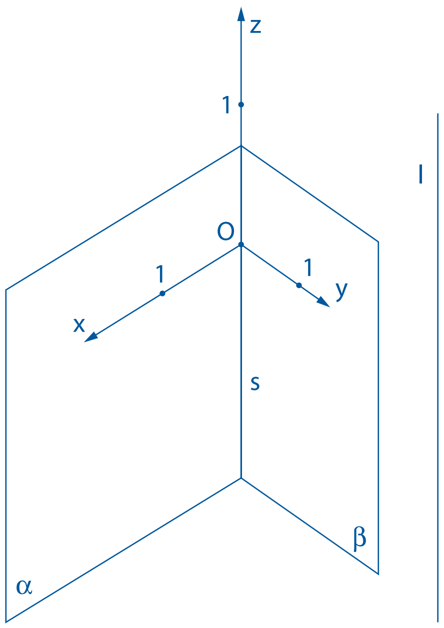
Gegeven: de rechte l en de snijdende vlakken α en β;
s is de snijlijn van α en β;
$l \,//\, \alpha$ en $l \,//\, \beta$.

Te bewijzen: $l \,//\, s$

Bewijs:

Kies een affien assenstelsel met de z-as op s, kies de x-as in α en de y-as in β zodanig dat $\alpha \leftrightarrow y = 0$ en $\beta \leftrightarrow x = 0$.

Zij $\vec{d}(a,b,c)$ een richtingsvector van l, dan volgt wegens opdracht 75 uit $l \,//\, \alpha$ dat $b = 0$ en uit $l \,//\, \beta$ volgt dat $a = 0$.
l heeft dus $\vec{d}(0,0,c)$ als richtingsvector, zodat l evenwijdig is met de z-as of $l \,//\, s$.



Opdracht 77 bladzijde 111

Bestaat er een rechte die door $P(2,0,-1)$ gaat en de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+3z+4=0 \end{cases}$ en

$b \leftrightarrow \begin{cases} x-3y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ snijdt? Verklaar met een berekening.

– $a \leftrightarrow \begin{cases} x=3r+5 \\ y=-3r-4 \\ z=r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x=3s-1 \\ y=s \\ z=s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$

Een lopend punt op a is $A(3r+5,-3r-4,r)$ en een lopend punt op b is $B(3s-1,s,s)$.

- P, A en B zijn collineair

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = k \cdot \overrightarrow{PA}$

$\Leftrightarrow (3s-3,s,s+1) = k \cdot (3r+3,-3r-4,r+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3s-3=3kr+3k & (1) \\ s=-3kr-4k & (2) \\ s+1=kr+k & (3) \end{cases}$

(1) + (2) geeft $4s-3=-k \Leftrightarrow k=3-4s$ (4)

(4) in (3) geeft $s+1=kr+3-4s \Leftrightarrow kr=5s-2$ (5)

(4) en (5) in (1): $3s-3=15s-6+9-12s \Leftrightarrow 0 \cdot s=6$.

Dit betekent dat het stelsel strijdig is, en P, A en B niet collineair kunnen zijn.

Er is geen rechte door P die a en b snijdt.

– Opmerking: je kunt nagaan dat b strikt evenwijdig is met vl(P,a). Dit verklaart ook waarom er geen zo'n rechte is.

Opdracht 78 bladzijde 111

Gegeven de vlakken $\alpha \leftrightarrow x+my+z=2m$, $\beta \leftrightarrow x+y+z=0$ en $\gamma \leftrightarrow (m+1)x+my+z=m$ met $m \in \mathbb{R}$.

1 Bepaal de gehele waarde(n) van m waarvoor de drie vlakken juist één punt gemeen hebben dat drie gehele coördinaatgetallen heeft.

Deze opdracht is eigenlijk een oefening uit de lineaire algebra op het bespreken van stelsels met een parameter. De resultaten worden dan meetkundig geïnterpreteerd.

We bespreken het stelsel $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+my+z=2m \\ (m+1)x+my+z=m \end{cases}$ met parameter m met de methode van het rijherleiden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ m+1 & m & 1 & m \end{array}\right] \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-(m+1)R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 2m \\ 0 & -1 & -m & m \end{array}\right]$$

Om geen parameter als spil te krijgen, wisselen we de tweede en de derde rij:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -m & m \\ 0 & m-1 & 0 & 2m \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1+R_2}{\scriptstyle -R_3-(m-1)R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-m & m \\ 0 & -1 & -m & m \\ 0 & 0 & m(m-1) & -m^2-m \end{array}\right]$$

Om verder te gaan, moet de spil op de derde rij verschillend van 0 zijn, dit is zo als $m \neq 0$ en $m \neq 1$.
We moeten dus een opsplitsing maken:

<u>1e geval</u>: $m \neq 0$ en $m \neq 1$:
We zetten de uitgebreide matrix verder om naar haar rijcanonieke vorm, waarbij we eerst alle hoofdelementen 1 maken door te vereenvoudigen.

$$\underset{\sim}{\overset{\frac{R_2}{(-1)}}{\frac{R_3}{m(m-1)}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-m & m \\ 0 & 1 & m & -m \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+1}{1-m} \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_1-(1-m)R_3}{\scriptstyle R_2-mR_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2m}{1-m} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+1}{1-m} \end{array}\right]$$

Het stelsel heeft één oplossing: $\begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-2m}{1-m} \\ z=\dfrac{m+1}{1-m} \end{cases}$.

De bijbehorende vlakken hebben één punt gemeen.

Om te bepalen wanneer dit punt gehele coördinaatgetallen heeft, schrijven we via de euclidische deling de coördinaatgetallen als volgt: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2-\dfrac{2}{1-m} \\ z=-1+\dfrac{2}{1-m} \end{cases}$.

In elk geval zijn de y- en z-coördinaat niet geheel als $|1-m| > 2$, dit is als $m < -1$ of als $m > 3$.

We zoeken nu alle gehele waarden van m in $[-1,3] \setminus \{0,1\}$ waarvoor $\dfrac{2}{1-m}$ geheel is:

- $m = -1$: de vlakken snijden elkaar in het punt $S(-1,1,0)$.
- $m = 2$: de vlakken snijden elkaar in het punt $T(-1,4,-3)$.
- $m = 3$: de vlakken snijden elkaar in het punt $U(-1,3,-2)$.

2 Bepaal *m* zodanig dat de drie vlakken een rechte *d* gemeen hebben en bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van deze snijlijn.

<u>2e geval</u>: m = 0

De rijcanonieke matrix van het stelsel wordt dan $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

De rechte $d \leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ is een snijlijn van de drie vlakken.

Het gaat hier om de vlakken $\begin{cases} \alpha \leftrightarrow x+z=0 \\ \beta \leftrightarrow x+y+z=0 \\ \gamma \leftrightarrow x+z=0 \end{cases}$.

De vlakken α en γ zijn samenvallend en snijden het vlak β.

3 Bepaal *m* zodanig dat de drie vlakken geen enkel punt gemeenschappelijk hebben.

<u>3e geval</u>: m = 1

De rijcanonieke matrix van het stelsel is $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Het stelsel is strijdig. De drie vlakken hebben geen enkel punt gemeen.

Het zijn de vlakken $\begin{cases} \alpha \leftrightarrow x+y+z=2 \\ \beta \leftrightarrow x+y+z=0 \\ \gamma \leftrightarrow 2x+y+z=1 \end{cases}$.

Het is duidelijk dat α en β strikt evenwijdig zijn. Beide vlakken snijden γ.

Opdracht 79 bladzijde 111

Van piramide $\left(\begin{smallmatrix} & & T & \\ A & B & C & D \end{smallmatrix}\right)$ ligt de top *T* op hoogte 12 boven het grondvlak *ABCD*.

Het grondvlak is een rechthoek waarbij $|AB| = 12$ en $|BC| = 9$.

De hoogte van de piramide is $|TO|$. De oorsprong *O* ligt op *BD* zodanig dat $|BO| = 2 \cdot |DO|$.

1 Bepaal de coördinaten van *A*, *B*, *C* en *D* in het getekende orthonormaal assenstelsel.

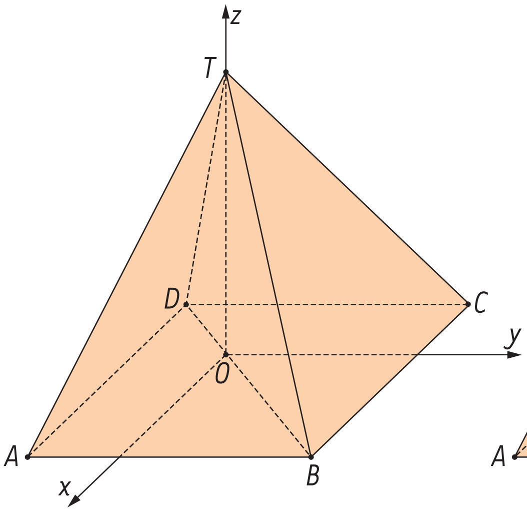
Volgens de stelling van Thales wordt [AB] door de x-as ook verdeeld in stukken die zich verhouden als 1: 2, hetzelfde geldt voor [BC] en de y-as.

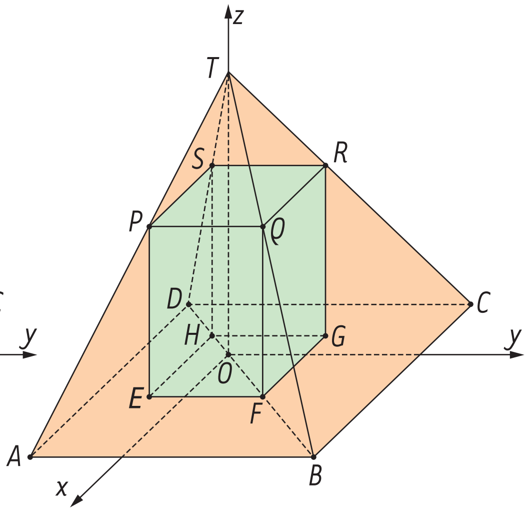
We vinden: A(6,–4,0), B(6,8,0), C(–3,8,0) en D(–3,–4,0).

2 Een vlak $\alpha \leftrightarrow z = h$ $(0 < h < 12)$ snijdt de piramide volgens de rechthoek $PQRS$.

$PQRS$ is het bovenvlak van een balk $\begin{pmatrix} P & Q & R & S \\ E & F & G & H \end{pmatrix}$ waarbij $EFGH$ in het grondvlak van de piramide ligt.

Voor welke waarde van h is de inhoud van die balk maximaal? Hoeveel bedraagt die inhoud dan?





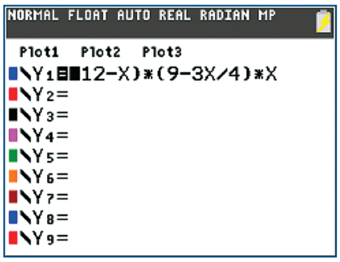
Het snijpunt van AT $\leftrightarrow \begin{cases} x = 3r \\ y = -2r \\ z = 12 - 6r \end{cases}$ en het vlak $z = h$ is $P\left(6 - \frac{h}{2}, -4 + \frac{h}{3}, h\right)$.

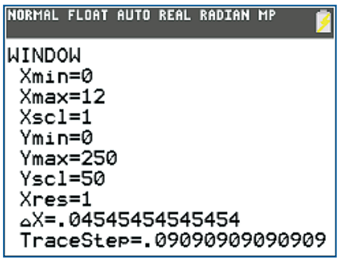
Het snijpunt van BT $\leftrightarrow \begin{cases} x = 3s \\ y = 4s \\ z = 12 - 6s \end{cases}$ en het vlak $z = h$ is $Q\left(6 - \frac{h}{2}, 8 - \frac{2h}{3}, h\right)$.

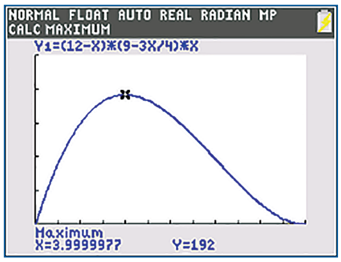
Het snijpunt van CT $\leftrightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 8t \\ z = 12 - 12t \end{cases}$ en het vlak $z = h$ is $R\left(-3 + \frac{h}{4}, 8 - \frac{2h}{3}, h\right)$.

De inhoud van de balk is $|PQ| \cdot |QR| \cdot h = (12 - h) \cdot \left(9 - \frac{3h}{4}\right) \cdot h$.

Met een GRM vinden we de maximale inhoud bij $h = 4$, de inhoud is dan 192 volume-eenheden.







Opdracht 80 bladzijde 112

Gegeven het viervlak *ABCD* met $A(0,-4,0)$, $B(10,2,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(4,1,8)$ en het vlak $\alpha \leftrightarrow 3x + 4y + 6z = 24$.

1 Teken het viervlak en (een deel van) het vlak α in een orthonormaal assenstelsel, gebruikmakend van de snijpunten van α met de coördinaatassen.

Het vlak $\alpha \leftrightarrow 3x + 4y + 6z - 24 = 0$ snijdt de coördinaatassen in P(8,0,0), Q(0,6,0) en R(0,0,4).

2 Welke ribben van het viervlak *ABCD* worden door α gesneden? Bepaal de coördinaten van de snijpunten en teken de doorsnede.

$$AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 5r \\ y = 3r - 4 \\ z = 0 \end{cases} \text{ snijdt } \alpha \leftrightarrow 3x + 4y + 6z - 24 = 0 \text{ voor } 15r + 12r - 16 - 24 = 0 \iff r = \frac{40}{27}.$$

Het snijpunt is $K\left(\frac{200}{27}, \frac{4}{9}, 0\right)$.

$$BC \leftrightarrow \begin{cases} x = 5s \\ y = 4 - s \\ z = 0 \end{cases} \text{ snijdt } \alpha \text{ voor } 15s + 16 - 4s - 24 = 0 \iff s = \frac{8}{11}.$$

Het snijpunt is $L\left(\frac{40}{11}, \frac{36}{11}, 0\right)$.

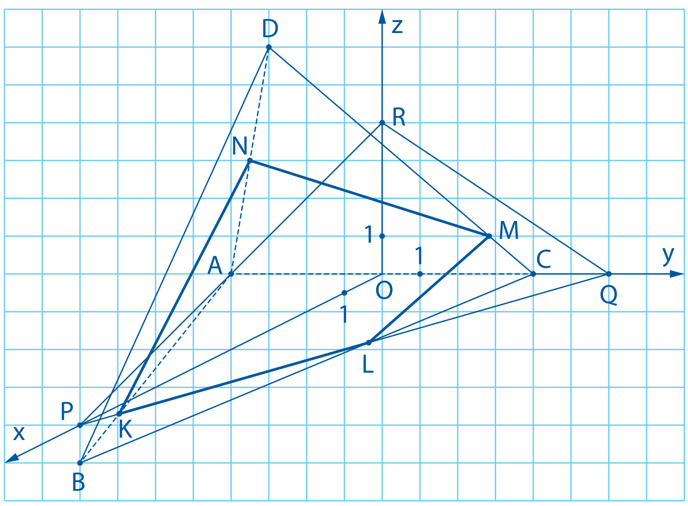
$$CD \leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 4 - 3t \\ z = 8t \end{cases} \text{ snijdt } \alpha \text{ voor } 12t + 16 - 12t + 48t - 24 = 0 \iff t = \frac{1}{6}.$$

Het snijpunt is $M\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

$$AD \leftrightarrow \begin{cases} x = 4u \\ y = 5u - 4 \\ z = 8u \end{cases} \text{ snijdt } \alpha \text{ voor } 12u + 20u - 16 + 48u - 24 = 0 \iff u = \frac{1}{2}.$$

Het snijpunt is $N\left(2, \frac{-3}{2}, 4\right)$.

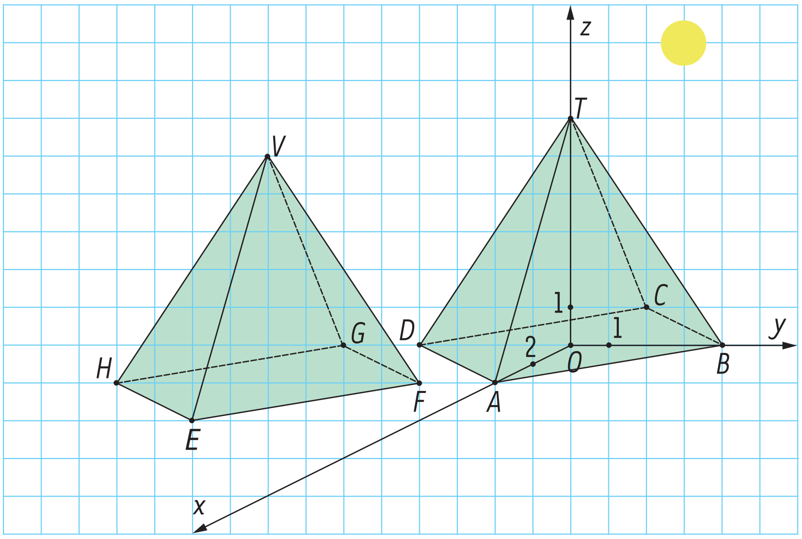
Doorsnede is KLMN.



Opdracht 81 bladzijde 112

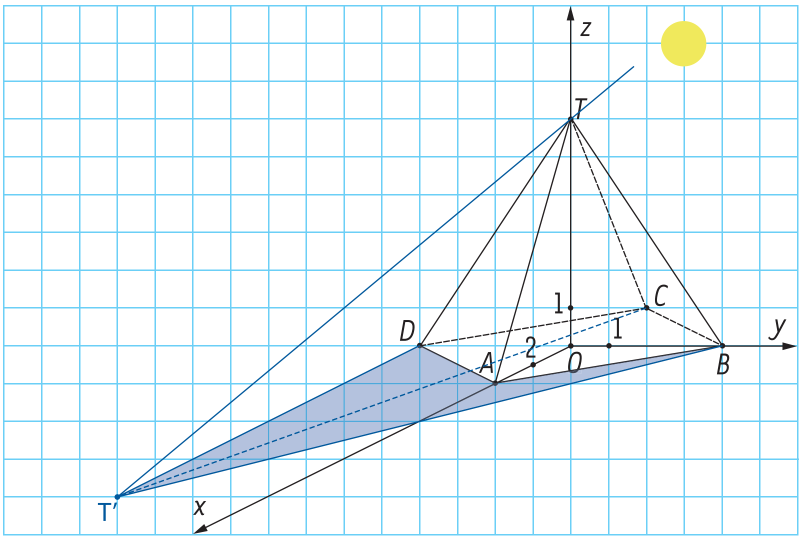
Gegeven twee piramides. De eerste heeft als top $T(0,0,6)$ en als grondvlak $ABCD$ met $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(-4,0,0)$ en $D(0,-4,0)$. De tweede piramide heeft als top $V(4,-6,6)$ en als grondvlak $EFGH$ met $E(8,-6,0)$, $F(4,-2,0)$, $G(0,-6,0)$ en $H(4,-10,0)$.

1 Bepaal de schaduw die de eerste piramide afwerpt op de tweede als de richting van de zonnestralen die is van de vector $\vec{v}(8,-2,-3)$.



Beschouwen we alleen de eerste piramide, dan snijdt de zonnestraal door T met vergelijking $\begin{cases} x = 8r \\ y = -2r \\ z = 6 - 3r \end{cases}$ het grondvlak in T′(16,–4,0). Dit heeft als gevolg dat de rechte T′B buiten de driehoek T′AB valt, wat betekent dat het opstaand zijvlak TAB ook in de schaduw ligt.

Het schaduwgebeid bestaat uit de unie van het viervlak TT′AD en TT′BA.



Nu plaatsen we de tweede piramide in dit schaduwgebied.

Het punt L(6,–4,0) is het snijpunt van de rechten DT' $\leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}$ en EF $\leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Het punt K(2,–4,0) is het snijpunt van de rechten DT' $\leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}$ en GF $\leftrightarrow \begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

De rechte TT' $\leftrightarrow \begin{cases} x = 8r \\ y = -2r \\ z = 6 - 3r \end{cases}$ snijdt vl(V,E,F) met vergelijking 3x + 3y + 2z – 6 = 0 in

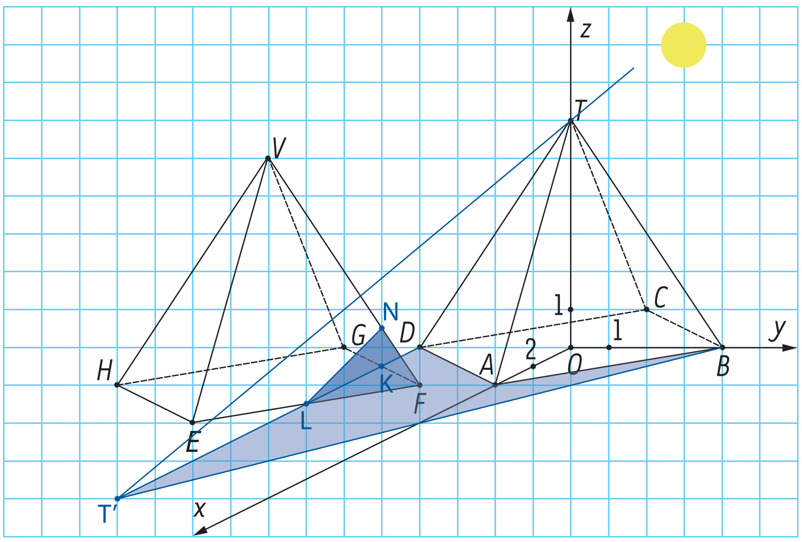
$M\left(-4,1,\frac{15}{2}\right)$, dit is buiten de piramide, de rechte TT' snijdt de tweede piramide niet.

De schaduw word vervolledigd door na te gaan waar de rechte VF $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + 2s \\ z = -3s \end{cases}$

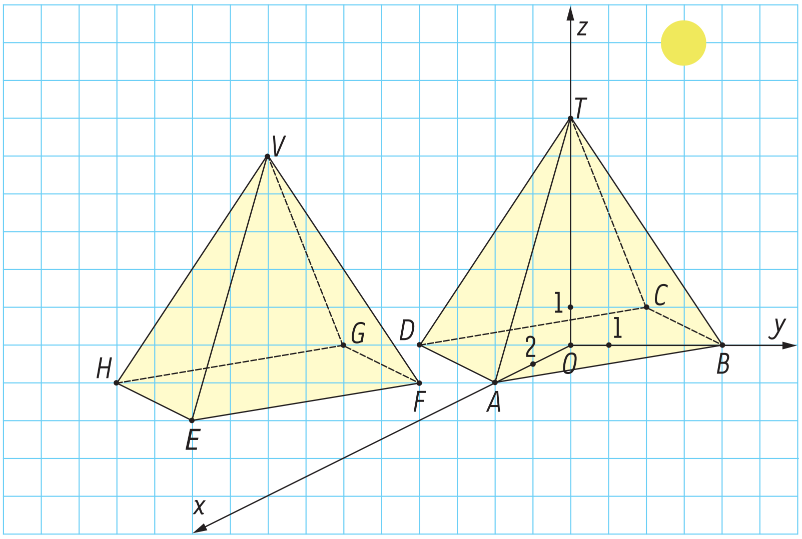
het vlak DTT' met vergelijking 3y – 2z + 12 = 0 snijdt.

Dit is in het punt $N\left(4,-3,\frac{3}{2}\right)$ waar de rechte VF het schaduwgebied binnendringt.

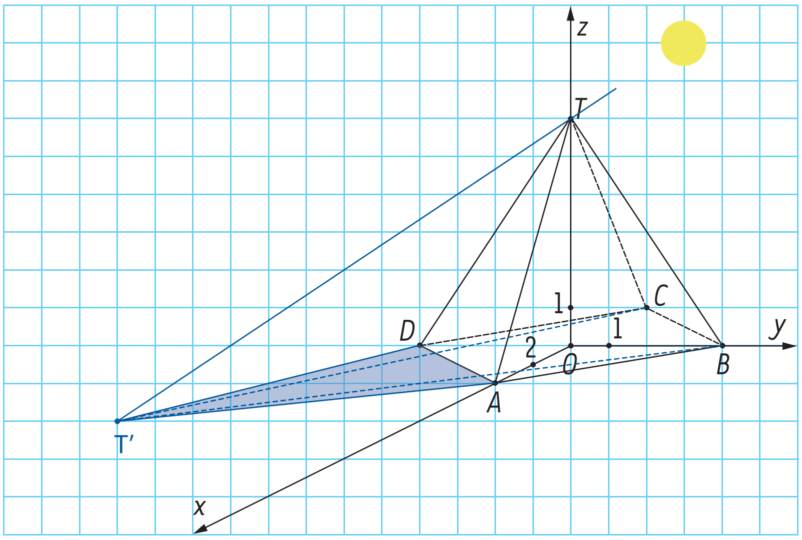
Hiermee is de schaduw van de tweede piramide op de eerste voltooid: de driehoekjes LNF en NKF op de tweede piramide liggen in de schaduw.



2 Bepaal de schaduw die de eerste piramide afwerpt op de tweede als de richting van de zonnestralen die is van de vector $\vec{w}(4,-4,-3)$.



Eerst denken we de tweede piramide weg, de zonnestraal T heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 4r \\ y = -4r \\ z = 6 - 3r \end{cases}$ en snijdt het grondvlak in T′(8,–8,0).



Nu wordt de tweede piramide in het 'schaduwviervlak' TT′DA geplaatst.

Het punt L(6,–4,0) is het snijpunt van de rechten $AT' \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + r \\ y = -2r \\ z = 0 \end{cases}$ en $EF \leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

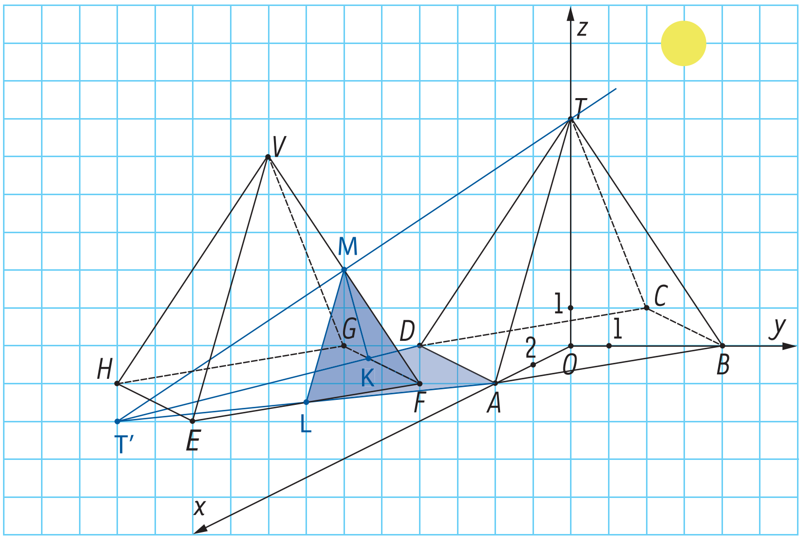
Het punt $K\left(\frac{4}{3}, \frac{-14}{3}, 0\right)$ is het snijpunt van de rechten $DT' \leftrightarrow \begin{cases} x = 2r \\ y = -4 - r \text{ en} \\ z = 0 \end{cases}$

$GF \leftrightarrow \begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

De rechte TT' $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4r \\ y = -4r \\ z = 6 - 3r \end{cases}$ snijdt vl(V,E,F) met vergelijking $3x + 3y + 2z - 6 = 0$ in

M(4,–4,3), dit is op VF $\leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + 2s. \\ z = -3s \end{cases}$

De schaduw van de eerste op de tweede piramide is hiermee voltooid: op het zijvlak VEF ligt de driehoek MLF in de schaduw, op het zijvlak VGF is dat de driehoek MKF.



Opdracht 82 bladzijde 114

Bepaal de onderlinge stand van de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = -2 + 2r \\ z = 2 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2s \\ z = -1 - 3s \end{cases}$.

- (1,2,0) is een stel richtingsgetallen van a en (0,2,–3) is een stel richtingsgetallen van b. a en b zijn niet evenwijdig.
- Om het eventuele snijpunt te bepalen, zoeken we een oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 3 + r = 1 \\ -2 + 2r = 2s \\ 2 = -1 - 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ 2r - 2s = 2. \\ 3s = -3 \end{cases}$$

Dit stelsel is strijdig, a en b zijn kruisende rechten.

Opdracht 83 bladzijde 114

Bepaal een stel richtingsgetallen van de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} 2x+7y-8z-1=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$.

Het stelsel $\begin{cases} 2x+7y-8z=1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ is gelijkwaardig met $\begin{cases} x+3z=\frac{34}{5} \\ y-2z=-\frac{9}{5} \end{cases}$.

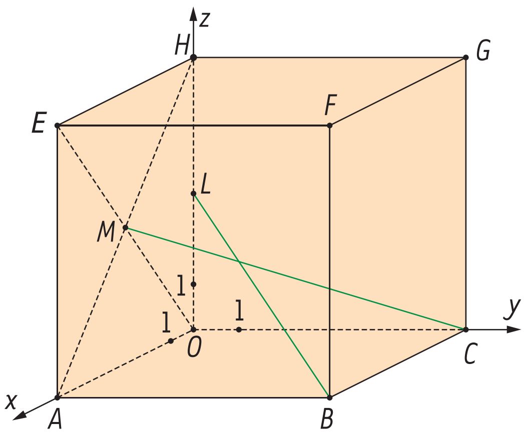
Een parametervoorstelling van de rechte l is $\begin{cases} x=-3r+\frac{34}{5} \\ y=2r-\frac{9}{5} \\ z=r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

Een stel richtingsgetallen van l is bijgevolg (–3,2,1).

Opdracht 84 bladzijde 114

De kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ heeft ribbe 6.

L is het midden van $[OH]$ en M is het snijpunt van de zijvlaksdiagonalen $[EO]$ en $[HA]$.



1 Bepaal een parametervoorstelling van de rechte CM.

co(C) = (0,6,0) en co(M) = (3,0,3), een stel richtingsgetallen van CM is (1,–2,1).

$$CM \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=6-2r \\ z=r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

2 Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte BL.

co(B) = (6,6,0) en co(L) = (0,0,3), een stel richtingsgetallen van BL is (2,2,–1).

$$BL \leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-1} \text{ of } BL \leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y+2z-6=0 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

3 Wat is de onderlinge ligging van CM en BL? Bepaal de coördinaat van het eventuele snijpunt.

Uit de stellen richtingsgetallen van de rechten volgt dat ze niet evenwijdig zijn.

Invullen van (1) in (2) geeft $\begin{cases} r-6+2r=0 \\ 6-2r+2r-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow r=2.$

CM en BL zijn snijdende rechten met snijpunt S(2,2,2).

Opdracht 85 bladzijde 114

Gegeven de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel *xyz* met daarin het vlak *v* met vergelijking $x + y + z = 1$ en het vlak *w* met vergelijking $x = 0$. De rechte *l* is de doorsnede van de vlakken *v* en *w*. De rechte *m* is de rechte door de oorsprong, evenwijdig met de rechte *l*.

Welk van de volgende punten ligt op deze rechte *m*?

A $A(1,1,1)$ **B** $B(0,1,1)$ **C** $C(0,1,0)$ **D** $D(0,-1,0)$ **E** $E(0,1,-1)$

(Bron © IJkingstoets wiskunde-informatica-fysica, 2015)

Uit de vergelijkingen van de vlakken v en w volgt: $l \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

De rechte l heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

Een parametervoorstelling van de rechte m is dan $\begin{cases} x = 0 \\ y = -s \\ z = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$.

Enkel het punt E(0,1,–1) ligt op deze rechte. E is het juiste antwoord.

Opdracht 86 bladzijde 115

Gegeven de punten $A(2,3,0)$, $B(-1,1,0)$, $C(-1,4,-5)$ en $D(0,-3,-5)$.

1 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van $\alpha = \text{vl}(A,B,C)$.

Invullen van de coördinaten van A, B en C in de vergelijking $ux + vy + wz + t = 0$ geeft

het stelsel $\begin{cases} 2u + 3v + t = 0 \\ -u + v + t = 0 \\ -u + 4v - 5w + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \dfrac{2}{5}t = 0 \\ v + \dfrac{3}{5}t = 0 \\ w + \dfrac{9}{25}t = 0 \end{cases}$.

Kiezen we bv. $t = -25$, dan vinden we $u = -10$, $v = 15$ en $w = 9$.

$\alpha \leftrightarrow -10x + 15y + 9z - 25 = 0.$ (1)

2 Bepaal een cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat evenwijdig is met α en door *D* gaat.

Invullen van de coördinaatgetallen van D in $\beta \leftrightarrow -10x + 15y + 9z + t = 0$ geeft

$-10 \cdot 0 + 15 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) + t = 0 \Leftrightarrow t = 90.$

$\beta \leftrightarrow -10x + 15y + 9z + 90 = 0$

3 Bepaal de onderlinge ligging van het vlak α en de rechte OD.

De rechte OD heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3r \\ z = 5r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

Invullen in (1) geeft $45r + 45r - 25 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{18}$.

Het vlak α en de rechte OD snijden elkaar in het punt $S\left(0, \frac{5}{6}, \frac{25}{18}\right)$.

Opdracht 87 bladzijde 115

In de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6 zijn de vlakken $\alpha = \text{vl}(B,E,G)$ en $\beta = \text{vl}(O,B,P)$ getekend.

Hierbij is P het midden van $[CG]$.

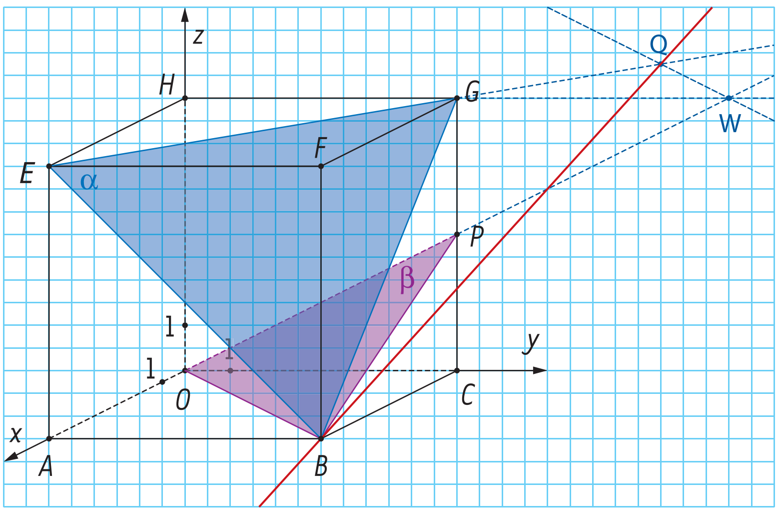
1 Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn s van α en β.

- Het vlak α gaat door de punten B(6,6,0), E(6,0,6), en G(0,6,6).

  We zien op zicht dat $x + y + z = 12$ een cartesiaanse vergelijking is van α.
- Het vlak β gaat door de punten O(0,0,0), B(6,6,0), en P(0,6,3). Invullen van de coördinaten van O, B en P in $ux + vy + xz + t = 0$ geeft dan $x - y + 2z = 0$ als cartesiaanse vergelijking van β.
- $s \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ is de snijlijn van α en β met als parametervoorstelling

  $\begin{cases} x = 6 - 3r \\ y = 6 + r \\ z = 2r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$.

2 Teken s in de figuur.



De snijlijn van β met het bovenvlak EFGH van de kubus is de rechte door W evenwijdig met OB.
De snijlijn van α met het bovenvlak EFGH van de kubus is de rechte door EG.
Die twee snijlijnen met het bovenvlak snijden elkaar in het punt Q zodat s de rechte BQ is.

Opmerking

We kunnen de coördinaat van Q ook analytisch bepalen en vinden dan (–3,9,6).
Dit is inderdaad een punt van de rechte s (nl. r = 3 in de parametervoorstelling).

Opdracht 88 bladzijde 115

Bepaal k zodanig dat de punten $A(6,-1,2)$, $B(3,1,3)$ en $C(0,k,4)$ collineair zijn.

Een stel richtingsgetallen van AB is (–3,2,1) zodat $AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 6-3r \\ y = -1+2r \\ z = 2+r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R})$.

Invullen van de coördinaatgetallen van C geeft $\begin{cases} 0 = 6-3r \\ k = -1+2r. \\ 4 = 2+r \end{cases}$

Dit stelsel heeft als oplossing $\begin{cases} r = 2 \\ k = 3 \end{cases}$.

De punten A(6,–1,2), B(3,1,3) en C(0,3,4) zijn collineair.

Opdracht 89 bladzijde 115

Gegeven de drie punten $P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$ en $R(-3,2,1)$ en de rechte $l \leftrightarrow \{x = y+1, x+y+z = 7\}$ in de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel xyz.

Bepaal de doorsnede D van de rechte l met het vlak dat door de drie punten P, Q en R gaat.

A Er is geen snijpunt.

B Er zijn oneindig veel snijpunten.

C Er is juist één snijpunt met x-coördinaat 5.

D Er is juist één snijpunt met y-coördinaat 5.

E Er is juist één snijpunt met z-coördinaat 5.

(Bron © IJkingstoets handelsingenieur, 2014)

– Invullen van de coördinaten van P, Q en R in de vergelijking ux + vy + wz + t = 0 geeft

het stelsel $\begin{cases} u+t=0 \\ 2v+t=0 \\ -3u+2v+w+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+t=0 \\ v+\frac{1}{2}t=0 \\ w+3t=0 \end{cases}$.

Kiezen we bv. t = –2, dan vinden we u = 2, v = 1 en w = 6.

$vl(P,Q,R) \leftrightarrow 2x+y+6z-2=0$.

– De coördinaat van het snijpunt van vl(P,Q,R) met de rechte l vinden we als oplossing van

het stelsel $\begin{cases} 2x+y+6z=2 \\ x-y=1 \\ x+y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}$.

De x-coördinaat van dit snijpunt is 5, C is het juiste antwoord.

Opdracht 90 bladzijde 116

Gegeven de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

1 Bepaal een parametervoorstelling van l.

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 4r \\ y = r \\ z = 3 \end{cases}$$

Een richtingsvector van l is $\vec{d}(-4,1,0)$.

2 Bepaal de eventuele snijpunten van l met de coördinaatvlakken.

- Het yz-vlak heeft als vergelijking x = 0.

  Invullen in de parametervoorstelling van l geeft $r = \frac{1}{4}$.

  Het snijpunt met het yz-vlak is $S\left(0, \frac{1}{4}, 3\right)$.

- Het xz-vlak heeft als vergelijking y = 0.

  Invullen in de parametervoorstelling van l geeft r = 0.

  Het snijpunt met het yz-vlak is T(1,0,3).

- Het xy-vlak heeft als vergelijking z = 0.

  Invullen in de parametervoorstelling van l geeft geen oplossing voor r.

  De rechte l heeft geen snijpunt met het xy-vlak, ze is er strikt evenwijdig mee.

3 De rechte AB met het punt A op $a \leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ en het punt B op $b \leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - 3z = 3 \end{cases}$ is evenwijdig met l.

Bepaal de coördinaat van A en van B.

- $a \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$ zodat A(s,s,s) een lopend punt is op de rechte a.

  $b \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ zodat B(3+3t,1,t) een lopend punt is op de rechte b.

- Een richtingsvector van AB is $\overrightarrow{AB}(3+3t - s, 1 - s, t - s)$.

– AB // l

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{d}$

$\Leftrightarrow (3+3t - s, 1 - s, t - s) = (-4k, k, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -s + 3t + 4k = -3 \\ s + k = 1 \\ -s + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = t = \dfrac{7}{2} \\ k = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

– $co(A) = \left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ en $co(B) = \left(\dfrac{27}{2}, 1, \dfrac{7}{2}\right)$.

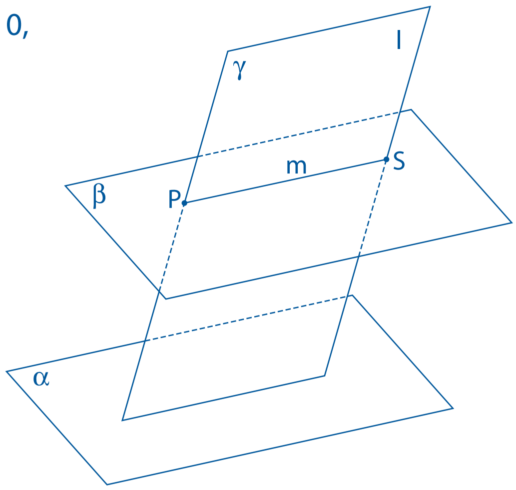
Opdracht 91 bladzijde 116

Gegeven het vlak $\alpha \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 3 = 0$, de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} 11x - 2y - 9 = 0 \\ 9x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$ en het punt $P(5,2,1)$.

1 Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte *m* die door *P* gaat, evenwijdig is met α en *l* snijdt.

We bepalen twee snijdende vlakken β en γ met als snijlijn m:

– β door P(5,2,1) en // met $\alpha \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 3 = 0$,
$\beta \leftrightarrow 4x - 5y + 4z + k = 0$, door P(5,2,1):
$20 - 10 + 4 + k = 0 \Leftrightarrow k = -14$,
dus $\beta \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 14 = 0$.



– γ omvat $l \leftrightarrow \begin{cases} 11x - 2y - 9 = 0 \\ 9x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$ en gaat door P;

vlakkenwaaier door l:
$r(11x - 2y - 9) + s(9x - 2z - 7) = 0$,
γ door P(5,2,1):

$r(55 - 4 - 9) + s(45 - 2 - 7) = 0 \Leftrightarrow 7r = -6s$.

Kies bv. r = 6 en s = –7,
dan is $\gamma \leftrightarrow 3x - 12y + 14z - 5 = 0$.

Besluit: $m \leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y + 4z - 14 = 0 \\ 3x - 12y + 14z - 5 = 0 \end{cases}$.

2 Bepaal de coördinaat van het snijpunt *S* van *l* en *m*.

Voor de coördinaten van het snijpunt S van m en l lossen we het volgend stelsel op met een GRM:

$$\begin{cases} 11x - 2y = 9 \\ 9x - 2z = 7 \\ 4x - 5y + 4z = 14 \\ 3x - 12y + 14z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -10 \\ z = -8 \end{cases}$$

Het snijpunt is S(–1,–10,–8).

Opdracht 92 bladzijde 116

Gegeven de kubus $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met ribbe 6.

Is er een rechte door *A* die de kruisende rechten *HB* en *FC* snijdt?

Verklaar met een berekening.

– $HB \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 6 - r \end{cases}$ $(r \in \mathbb{R})$ en $FC \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 6 \\ z = s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Een lopend punt op HB is K(r, r, 6 – r); een lopend punt op FC is L(s, 6 ,s).

– Met A(6,0,0) is $\overrightarrow{AK}\,(r - 6, r, 6 - r)$ en $\overrightarrow{AL}\,(s - 6, 6, s)$.

– A, K en L zijn collineair

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AL}$

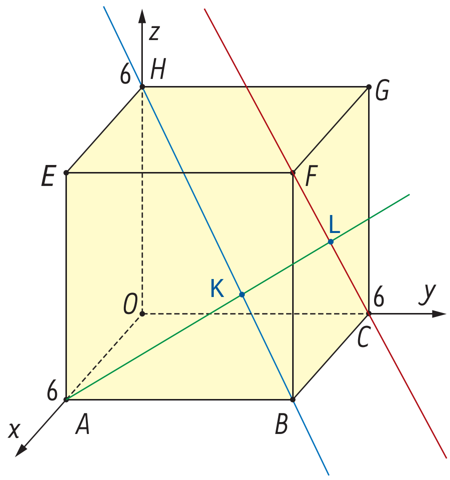
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r - 6 = sk - 6k & (1) \\ r = 6k & (2) \\ 6 - r = sk & (3) \end{cases}$$

Uit (1) en (3) volgt: $r - 6 = 6 - r - 6k \Leftrightarrow 6k = 12 - 2r \quad (4)$.

Met (2) vinden we dan: $r = 12 - 2r \Leftrightarrow r = 4$.

In (4) geeft: $k = \dfrac{2}{3}$ en tenslotte uit (3): $s = 3$.

De rechte door A die HB en FC snijdt gaat door K(4,4,2) en L(3,6,3).



Opdracht 93 bladzijde 117

Gegeven de balk $\begin{pmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & O \end{pmatrix}$ met lengte 6, breedte 5 en hoogte 8. D is het midden van $[EH]$.

1 Bereken de coördinaten van de hoekpunten van de doorsnede van de balk met het vlak β door D dat evenwijdig is met $\alpha \leftrightarrow x + 6y + 3z = 0$.

D(3,0,8) behoort tot $\beta \leftrightarrow x + 6y + 3z + k = 0$ zodat $3 + 24 + k = 0 \iff k = -27$ en dus: $\beta \leftrightarrow x + 6y + 3z - 27 = 0$.

Snijpunt met de assen: P(27,0,0), $Q\left(0,\frac{9}{2},0\right)$ en R(0,0,9); alleen Q ligt binnen de kubus en is dus een hoekpunt van de doorsnede.

$DR \leftrightarrow \begin{cases} x = 3r \\ y = 0 \\ z = 9 - r \end{cases}$ snijdt de rechte $EA \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases}$ in S(6,0,7);

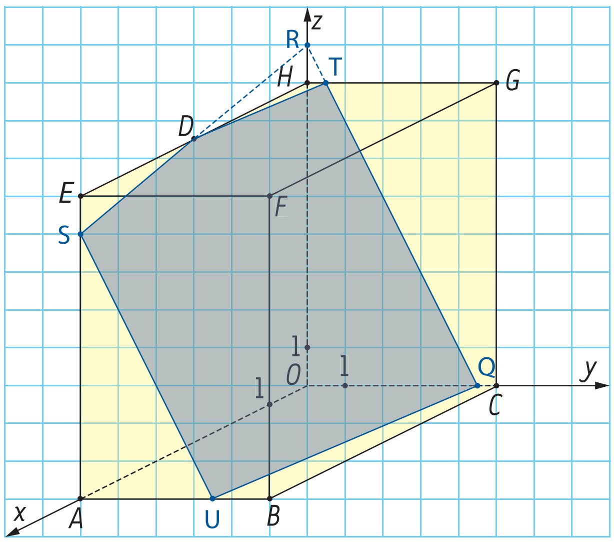
$QR \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = r \\ z = 9 - 2r \end{cases}$ snijdt de rechte $HG \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 8 \end{cases}$ in $T\left(0,\frac{1}{2},8\right)$;

Door S(6,0,7) evenwijdig met QR hebben we de rechte $s \leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = r \\ z = 7 - 2r \end{cases}$.

s snijdt het grondvlak in $U\left(6,\frac{7}{2},0\right)$.

De doorsnede is de veelhoek DTQUS.

2 Teken die doorsnede.



Opdracht 94 bladzijde 117

Voor welke waarde(n) van m is de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x+(m+1)z=4 \\ 2x-y+(m+5)z=3 \end{cases}$ evenwijdig met het xz-vlak?

– Een parametervoorstelling van l is $\begin{cases} x=4-(m+1)r \\ y=8-(2m+2)r+(m+5)r-3 \\ z=r \end{cases}$ of $\begin{cases} x=4-(m+1)r \\ y=5+(3-m)r. \\ z=r \end{cases}$

– Het xz-vlak heeft als vergelijking $y=0$.
Invullen in de parametervoorstelling geeft $(3-m)r=-5$.

Dit is een strijdige vergelijking als en slechts als $m=3$. De rechte l heeft dan geen punten gemeen met het xz-vlak en is er dus evenwijdig mee.

– Voor $m=3$ is de rechte $l \leftrightarrow \begin{cases} x=4-4r \\ y=5 \\ z=r \end{cases}$ evenwijdig met het xz-vlak.

Opdracht 95 bladzijde 117

Gegeven de rechten $a \leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, $b \leftrightarrow \begin{cases} 2y-z=-2 \\ x=1 \end{cases}$, $c \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$ en $d \leftrightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ y-z=1 \end{cases}$.

1 Toon aan dat a en b een vlak α bepalen en bepaal een vergelijking van dit vlak.

a en b zijn snijdende rechten met snijpunt S(1,–1,0). Snijdende rechten bepalen een vlak.

Uit $a \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=-r \\ z=0 \end{cases}$ en $b \leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=s \\ z=2+2s \end{cases}$ volgt: $\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x=r \\ y=-r+s. \\ z=2s \end{cases}$

Elimineren van de parameters geeft $y=-x+\dfrac{z}{2}$ zodat $\alpha \leftrightarrow 2x+2y-z=0$.

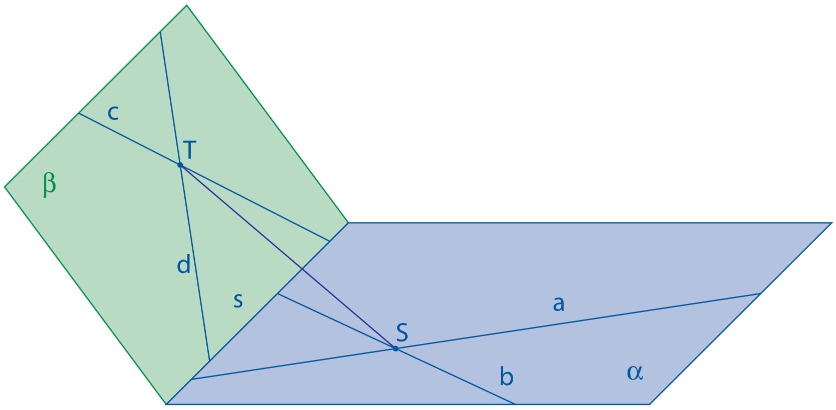
2 Toon aan dat c en d een vlak β bepalen en bepaal een vergelijking van dit vlak.

c en d zijn snijdende rechten met snijpunt T(0,3,2). Snijdende rechten bepalen een vlak.

Uit $c \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$ en $d \leftrightarrow \begin{cases} x=-3+u \\ y=u \\ z=u-1 \end{cases}$ volgt: $\beta \leftrightarrow \begin{cases} x=u \\ y=t+u. \\ z=2+u \end{cases}$

Elimineren van de parameters geeft $x=z-2$ zodat $\beta \leftrightarrow x-z+2=0$.

3 Bepaal een parametervoorstelling van alle rechten die de vier rechten a, b, c en d snijden.



– De rechte ST $\leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - r \\ y = -1 + 4r \\ z = 2r \end{cases}$ snijdt de vier rechten a, b, c en d.

Ook de snijlijn s $\leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ snijdt de vier rechten. De snijpunten met a, b, c en d zijn respectievelijk A(–2,2,0), B$\left(1,\frac{1}{2},3\right)$, C(0,1,2) en D$\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$. Geen van deze vier rechten is dus evenwijdig met s.

Een parametervoorstelling van s is $\begin{cases} x = -2 + 2s \\ y = 2 - s \\ z = 2s \end{cases}$.

Opdracht 96 bladzijde 118

Beschouw de driedimensionale ruimte met een cartesiaans assenstelsel xyz. De verzameling v is de verzameling van alle punten (x, y, z) die voldoen aan $x + z = 2$. De verzameling w is de verzameling van alle punten die voldoen aan $x^2 + z^2 = 4$.

Welke van de onderstaande uitspraken is dan geldig?

A De doorsnede van v en w bevat juist 1 punt.

B De doorsnede van v en w bevat juist 2 punten.

C De doorsnede van v en w is een rechte.

D De doorsnede van v en w is de unie van 2 verschillende rechten.

E De doorsnede van v en w is een ellips.

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, 2015)

De doorsnede vinden we uit de oplossingen van het stelsel $\begin{cases} x + z = 2 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$.

Oplossen van het stelsel gebeurt als volgt:

$$\begin{cases} z = 2 - x \\ x^2 + (2 - x)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} z = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Grafisch zijn dit vergelijkingen van twee verschillende rechten.

Antwoord D is het juiste.