Hoofdstuk 2

Goniometrische vorm van een complex getal

Opdracht 1 bladzijde 39

Kies telkens het juiste antwoord.

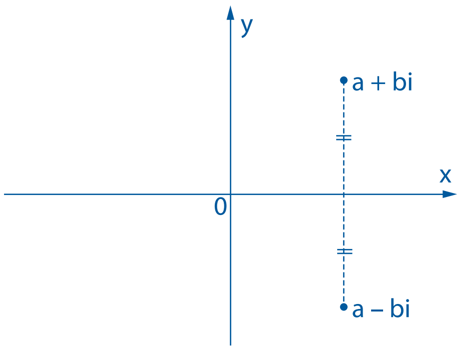
1 De beeldpunten van twee toegevoegde complexe getallen liggen

A symmetrisch t.o.v. de oorsprong;

B symmetrisch t.o.v. de x-as;

C symmetrisch t.o.v. de y-as.

B symmetrisch t.o.v. de x-as



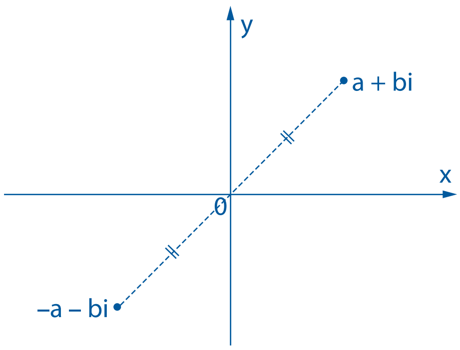
2 De beeldpunten van twee tegengestelde complexe getallen liggen

A symmetrisch t.o.v. de oorsprong;

B symmetrisch t.o.v. de x-as;

C symmetrisch t.o.v. de y-as.

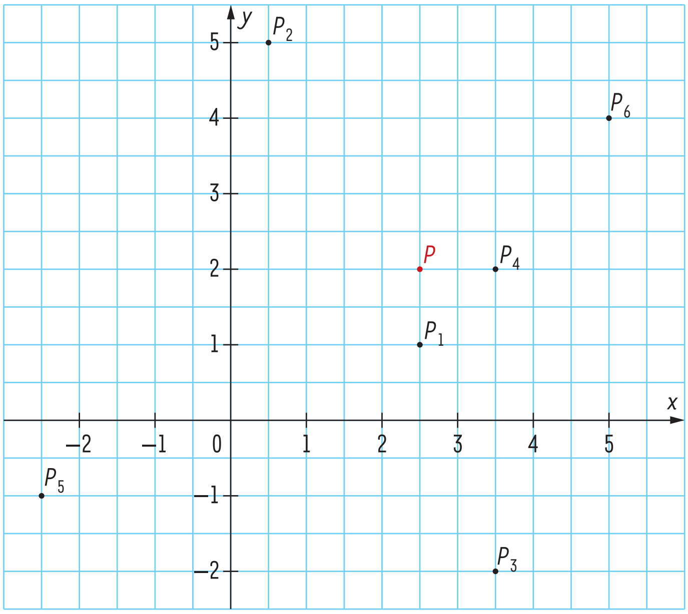
A symmetrisch t.o.v. de oorsprong



Opdracht 2 bladzijde 39

Gegeven is een complex getal z met beeldpunt P.

Bepaal telkens welk beeldpunt $P_1, P_2, \dots, P_6$ bij het gegeven complex getal hoort.



1 $1 + z$ $= 1 + (a + bi)$

$= (a + 1) + bi \quad \Rightarrow \quad P_4$

2 $z - i$ $= (a + bi) - i$

$= a + (b - 1)i \quad \Rightarrow \quad P_1$

3 $2z$ $= 2(a + bi)$

$= 2a + 2bi \quad \Rightarrow \quad P_6$

4 $z - 2 + 3i$ $= (a + bi) + (-2 + 3i)$

$= (a - 2) + (b + 3)i \quad \Rightarrow \quad P_2$

5 $-z + i$ $= -(a + bi) + i$

$= -a + (-b + 1)i \quad \Rightarrow \quad P_5$

6 $\bar{z} + 1$ $= (a - bi) + 1$

$= (a + 1) - bi \quad \Rightarrow \quad P_3$

Opdracht 3 bladzijde 39

Bepaal de modulus en het argument van

1 $1 + i$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = 1 \text{ en } z \in \text{I} \Rightarrow \theta = 45°$

2 $-1 - i$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = 1 \text{ en } z \in \text{III} \Rightarrow \theta = 45° - 180° = -135°$

3 $-1 + i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$\tan\theta = -\sqrt{3} \text{ en } z \in \text{II} \Rightarrow \theta = -60° + 180° = 120°$

4 4

$r = 4$

$\theta = 0°$

5 $2 - 5i$

$r = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

$\tan\theta = -\dfrac{5}{2} \text{ en } z \in \text{IV} \Rightarrow \theta \approx -68°\,11'\,55''$

6 $-1 + 4i$

$r = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$\tan\theta = -4 \text{ en } z \in \text{II} \Rightarrow \theta \approx -75° 57' 50'' + 180°$

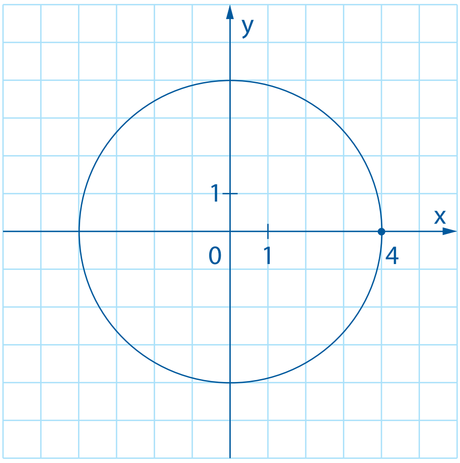
$\Rightarrow \theta \approx 104° 2' 10''$

Opdracht 4 bladzijde 39

Teken in het complexe vlak de verzameling van de beeldpunten van z waarvoor geldt

1 $|z| = 4$

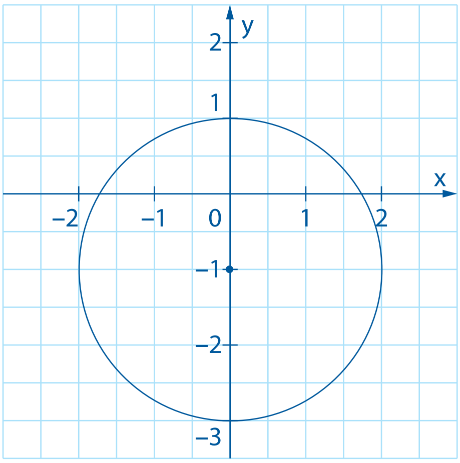
De beeldpunten liggen op een cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 4.



2 $|z + i| = 2$

De beeldpunten van de getallen z + i liggen op een cirkel met middelpunt O en straal 2.

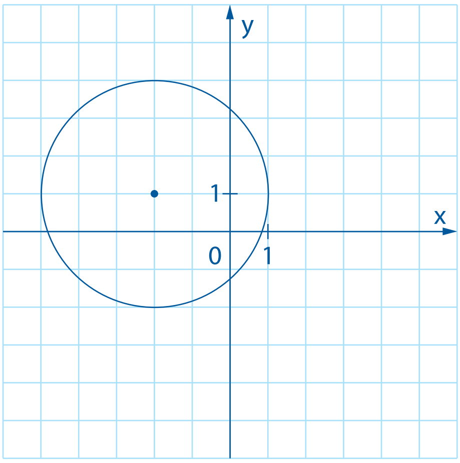
De beeldpunten van de getallen z liggen op een cirkel met middelpunt (0, –1) en straal 2 (verschuiving over $\vec{v}(0, -1)$ want de modulus van i is 1).



3 $|z + 2 - i| = 3$

De beeldpunten van z + 2 – i liggen op een cirkel met middelpunt O en straal 3.

De beeldpunten van z liggen op een cirkel met middelpunt (–2, 1) en straal 3.



Opdracht 5 bladzijde 39

Bewijs dat de beeldpunten van alle complexe getallen z die voldoen aan $z \cdot \overline{z} = 2z + 2\overline{z} + 12$ op een cirkel met straal 4 liggen.

Stel z = a + bi, dan geldt:

$$
\begin{aligned}
& z \cdot \overline{z} = 2z + 2\overline{z} + 12 \\
\Leftrightarrow\ & (a + bi)(a - bi) = 2(a + bi) + 2(a - bi) + 12 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 = 2a + 2bi + 2a - 2bi + 12 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - 4a + b^2 = 12 \\
\Leftrightarrow\ & (a - 2)^2 + b^2 = 12 + 4 \\
\Leftrightarrow\ & (a - 2)^2 + b^2 = 16 = 4^2
\end{aligned}
$$

De beeldpunten P(a, b) liggen op een cirkel met straal 4.

Opdracht 6 bladzijde 45

Bepaal de goniometrische vorm van

1 $1 - i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \theta = -45° \end{array}\right\} \Rightarrow z = \sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$$

2 $4 + 3i$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{25} = 5 \\ \theta \approx 36°\,52'\,12'' \end{array}\right\} \Rightarrow z \approx 5\,(\cos 36°52'\,12'' + i\sin 36°\,52'\,12'')$$

3 $-\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{5} \\ \theta \approx 140°\,46'\,7'' \end{array}\right\} \Rightarrow z \approx \sqrt{5}\,(\cos 140°\,46'\,7'' + i\sin 140°\,46'\,7'')$$

4 4

$$\left.\begin{array}{l} r = 4 \\ \theta = 0° \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4\,(\cos 0° + i\sin 0°)$$

Opdracht 7 bladzijde 45

Geef de exacte somschrijfwijze van

1 $2(\cos 135° + i\sin 135°)$

$$
\begin{aligned}
&= 2(\cos(180° - 45°) + i\sin(180° - 45°)) \\
&= 2(-\cos 45° + i\sin 45°) \\
&= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i
\end{aligned}
$$

2 $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

3 $6(\cos(-60°)+i\sin(-60°))$

$=6(\cos 60°-\mathrm{i}\sin 60°)$

$=6\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Opdracht 8 bladzijde 45

1 Stel $z_1=1+i\sqrt{3}$ en $z_2=1+i$.

Schrijf z_1, z_2 en $z_1\cdot z_2$ in de goniometrische vorm.

$z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$

$r=2$

$\tan\theta=\sqrt{3}$ en $z\in \mathrm{I} \Rightarrow \theta=60°$

$z_2=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,(\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°)$

$r=\sqrt{2}$

$\tan\theta=1$ en $z\in \mathrm{I} \Rightarrow \theta=45°$

$z_1\cdot z_2=\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(1+\mathrm{i})$

$=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$

$r=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{1\cancel{-2\sqrt{3}}+3+1\cancel{+2\sqrt{3}}+3}$

$=\sqrt{8}$

$=2\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ en $z_1\cdot z_2\in \mathrm{II} \Rightarrow \theta=-75°+180°=105°$

$\Rightarrow z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\,(\cos 105°+\mathrm{i}\sin 105°)$

2 Wat stel je vast i.v.m. de moduli? En i.v.m. de argumenten?

De moduli worden vermenigvuldigd: $2\cdot\sqrt{2}$.

De argumenten worden opgeteld: $60°+45°=105°$.

Opdracht 9 bladzijde 48

Noteer $z_1 \cdot z_2$ en $\dfrac{z_1}{z_2}$ exact in de somschrijfwijze.

1 $z_1 = 3(\cos 45° + i \sin 45°)$ $\qquad z_2 = 6(\cos 15° + i \sin 15°)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 18(\cos 60° + i \sin 60°) \\ &= 18\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 9 + 9\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{2}(\cos 30° + i \sin 30°) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \end{aligned}$$

2 $z_1 = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$ $\qquad z_2 = 4(\cos 120° + i \sin 120°)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 12(\cos 150° + i \sin 150°) \\ &= 12(-\cos 30° + i \sin 30°) \\ &= 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= -6\sqrt{3} + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{4}(\cos(-90°) + i \sin(-90°)) \\ &= \frac{3}{4}(0 - i) \\ &= -\frac{3}{4}i \end{aligned}$$

Opdracht 10 bladzijde 48

P is het beeldpunt van $z = 1 + i$.

Over welke hoek zal het lijnstuk $[OP]$ gedraaid zijn als z achtereenvolgens wordt vermenigvuldigd met $\sqrt{3} + i$, $-i$ en met $-2 + 2i$?

Het argument van $\sqrt{3} + i$ is $30°$.

Het argument van $-i$ is $-90°$.

Het argument van $-2 + 2i$ is $135°$.

Het lijnstuk [OP] zal gedraaid zijn over een hoek van $(30 - 90 + 135)°$, dus over een hoek van $75°$.

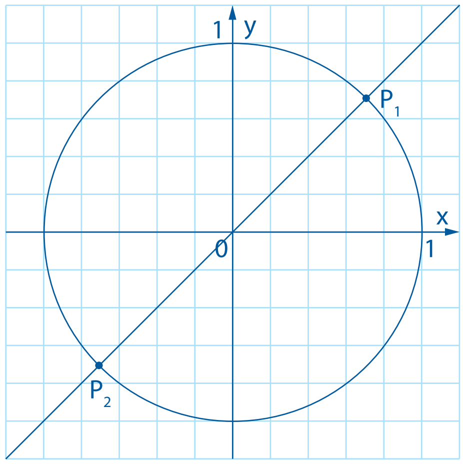
Opdracht 11 bladzijde 48

Gegeven zijn twee complexe getallen z_1 en z_2 waarvan de beeldpunten P_1 en P_2 de snijpunten zijn van de goniometrische cirkel met de eerste bissectrice.

Wat is de coördinaat van het beeldpunt van

1 $z_1 \cdot z_2$?

2 $\dfrac{z_1}{z_2}$?



$z_1 = \cos 45° + i \sin 45°$

$z_2 = \cos 225° + i \sin 225°$

1. $z_1 \cdot z_2 = \cos 270° + i \sin 270°$
$= -i$

$\Rightarrow \ co(z_1 \cdot z_2) = (0, -1)$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \cos(-180°) + i \sin(-180°)$

$= -1$

$\Rightarrow \ co\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = (-1, 0)$

Opdracht 12 bladzijde 49

1 Bepaal de goniometrische vorm van $z = 1 + i$ en bereken hieruit z^2, z^3 en z^4 in goniometrische vorm.

- $z = 1 + i$

  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

  $\tan \theta = 1$ en $z \in \mathrm{I} \ \Rightarrow \ \theta = 45°$

  $\Rightarrow \ z = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$

- $z^2 = z \cdot z$

  $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,(\cos(45° + 45°) + i \sin(45° + 45°))$

  $= 2\,(\cos 90° + i \sin 90°)$

- $z^3 = z^2 \cdot z$

  $= 2\sqrt{2}\,(\cos(90° + 45°) + i \sin(90° + 45°))$

  $= 2\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \sin 135°)$

- $z^4 = z^2 \cdot z^2$

  $= 2 \cdot 2\,(\cos(90° + 90°) + i \sin(90° + 90°))$

  $= \underset{\sqrt{2}^4}{\underset{\parallel}{4}}\,(\cos \underset{4 \cdot 45°}{\underset{\parallel}{180°}} + i \sin 180°)$

2 Leid een formule af voor $z^n = (1 + i)^n$ in goniometrische vorm.

$z^n = (1 + i)^n = \sqrt{2}^n(\cos(n \cdot 45°) + i \sin(n \cdot 45°))$

Opdracht 13 bladzijde 51

Bereken zonder rekentoestel.

1 $(-1-i)^3$

$r=\sqrt{2}$

$\tan\theta = 1 \text{ en } z\in \text{III} \Rightarrow \theta = 45° + 180° = 225°$

$=\left(\sqrt{2}(\cos 225° + i\sin 225°)\right)^3$

$=\sqrt{2}^3(\cos 675° + i\sin 675°)$

$=2\sqrt{2}(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$

$=2\sqrt{2}(\cos 45° - i\sin 45°)$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2-2i$

2 $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$

$r=\sqrt{3+1}=2$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ en } z\in \text{I} \Rightarrow \theta = 30°$

$=(2(\cos 30° + i\sin 30°))^{12}$

$=2^{12}(\cos 360° + i\sin 360°)$

$=4096$

3 $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{-3}$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\tan\theta = \sqrt{3} \text{ en } z\in \text{III} \Rightarrow \theta = 60° + 180° = 240°$

$=(2(\cos 240° + i\sin 240°))^{-3}$

$=2^{-3}(\cos(-720°) + i\sin(-720°))$

$=\frac{1}{8}(\cos 0° + i\sin 0°)$

$=\frac{1}{8}$

4 $(4-4i)^{-2} \quad = 4^{-2}(1-\mathrm{i})^{-2}$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = -1 \;\text{ en }\; z \in \text{IV} \;\Rightarrow\; \theta = -45°$

$$= \frac{1}{16}\left(\sqrt{2}(\cos(-45°) + \mathrm{i}\sin(-45°)\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sqrt{2}\right)^{-2}(\cos 90° + \mathrm{i}\sin 90°)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$= \frac{1}{32}\mathrm{i}$$

Opdracht 14 bladzijde 51

Schrijf $\cos 3\theta$ in functie van $\cos\theta$ en $\sin 3\theta$ in functie van $\sin\theta$ door te steunen op de formule van de Moivre.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\cdot \mathrm{i}\sin\theta + 3\cos\theta\cdot \mathrm{i}^2\sin^2\theta + \mathrm{i}^3\sin^3\theta\\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\cdot \mathrm{i} - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\cdot\sin^3\theta\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\\ \sin 3\theta = 3\,(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{cases}$$

Opdracht 15 bladzijde 54

Bereken de gevraagde *n*-de machtswortels en stel ze voor in het complexe vlak.

1 de derdemachtswortels van $1 - i$

$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i\,(\sin(-45°))$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = -1 \;\text{ en }\; z \in \text{IV} \;\Rightarrow\; \theta = -45°$

De derdemachtswortels van 1 – i zijn:

$$w_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-45° + k \cdot 360°}{3} + i\sin\frac{-45° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}(\cos(-15° + k \cdot 120°) + i\sin(-15° + k \cdot 120°))$$

$k = 0 \qquad w_0 = \sqrt[6]{2}(\cos(-15°) + i\sin(-15°))$

$\approx 1{,}08 - 0{,}29\,i$

$k = 1 \qquad w_1 = \sqrt[6]{2}(\cos 105° + i\sin 105°)$

$\approx -0{,}29 + 1{,}08\,i$

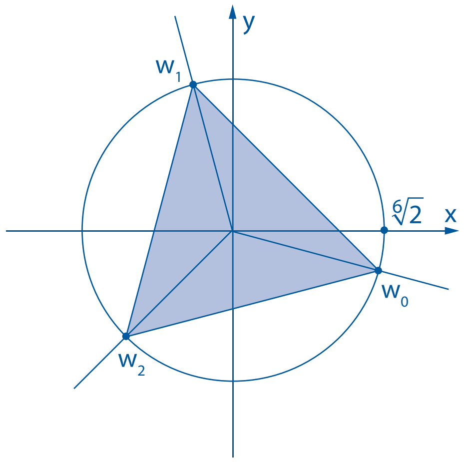
$k = 2 \qquad w_2 = \sqrt[6]{2}(\cos 225° + i\sin 225°)$

$= \sqrt[6]{2}(\cos(180° + 45°) + i\sin(180° + 45°))$

$= \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,i$

Meetkundige voorstelling



2 de vierdemachtswortels van $8 - i\,8\sqrt{3}$

$8 - i\,8\sqrt{3} = 16\,(\cos(-60°) + i \sin(-60°))$

$r = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 4} = 8 \cdot 2 = 16$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$ en $z \in \text{IV} \Rightarrow \theta = -60°$

De vierdemachtswortels van $8 - i\,8\sqrt{3}$ zijn:

$$w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{-60° + k \cdot 360°}{4} + i \sin\frac{-60° + k \cdot 360°}{4}\right)$$

$$= 2(\cos(-15° + k \cdot 90°) + i \sin(-15° + k \cdot 90°))$$

$k = 0$ $\quad w_0 = 2(\cos(-15°) + i \sin(-15°))$

$\approx 1{,}93 - 0{,}52\,i$

$k = 1$ $\quad w_1 = 2(\cos 75° + i \sin 75°)$

$\approx 0{,}52 + 1{,}93\,i$

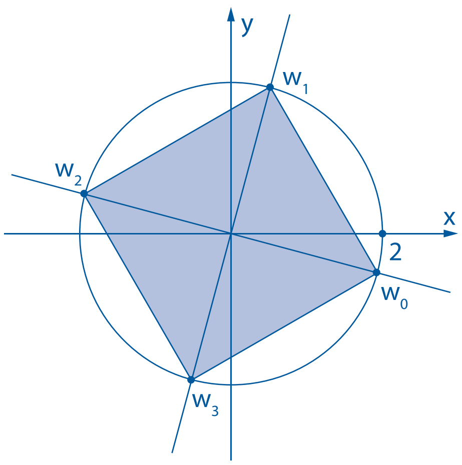
$k = 2$ $\quad w_2 = 2(\cos 165° + i \sin 165°)$

$\approx -1{,}93 + 0{,}52\,i$

$k = 3$ $\quad w_3 = 2(\cos 255° + i \sin 255°)$

$\approx -0{,}52 - 1{,}93\,i$

Meetkundige voorstelling



Opdracht 16 bladzijde 55

Los op.

1 $z^4 + 1 = 0$

$z^4 = -1 = \cos 180° + i \sin 180°$

De vierdemachtswortels van -1 zijn:

$$w_k = \cos\left(\frac{180° + k \cdot 360°}{4}\right) + i \sin\left(\frac{180° + k \cdot 360°}{4}\right)$$

$$= \cos(45° + k \cdot 90°) + i \sin(45° + k \cdot 90°)$$

$$w_0 = \cos 45° + i \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \cos 135° + i \sin 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2 = \cos 225° + i \sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_3 = \cos 315° + i \sin 315° = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ of } z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ of } z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ of } z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2 $27iz^3 - 1 = 0$

$$z^3 = \frac{1}{27i} = -\frac{1}{27}i$$

$$= \frac{1}{27}(\cos(-90°) + i \sin(-90°))$$

De derdemachtswortels van $-\frac{1}{27}i$ zijn:

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}\left(\cos\frac{-90° + k \cdot 360°}{3} + i \sin\frac{-90° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(\cos(-30° + k \cdot 120°) + i \sin(-30° + k \cdot 120°))$$

$$w_0 = \frac{1}{3}(\cos(-30°) + i \sin(-30°)) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

$$w_1 = \frac{1}{3}(\cos 90° + i \sin 90°) = \frac{1}{3}i$$

$$w_2 = \frac{1}{3}(\cos 210° + i \sin 210°) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

$$27iz^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i \text{ of } z = \frac{1}{3}i \text{ of } z = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

3 $z^3 = 125$

$z^3 = 125 = 125(\cos 0° + i \sin 0°)$

De derdemachtswortels van 125 zijn:

$$w_k = \sqrt[3]{125}\left(\cos\frac{k \cdot 360°}{3} + i \sin\frac{k \cdot 360°}{3}\right)$$
$$= 5(\cos(k \cdot 120°) + i \sin(k \cdot 120°))$$

$w_0 = 5(\cos 0° + i \sin 0°) = 5$

$$w_1 = 5(\cos 120° + i \sin 120°) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

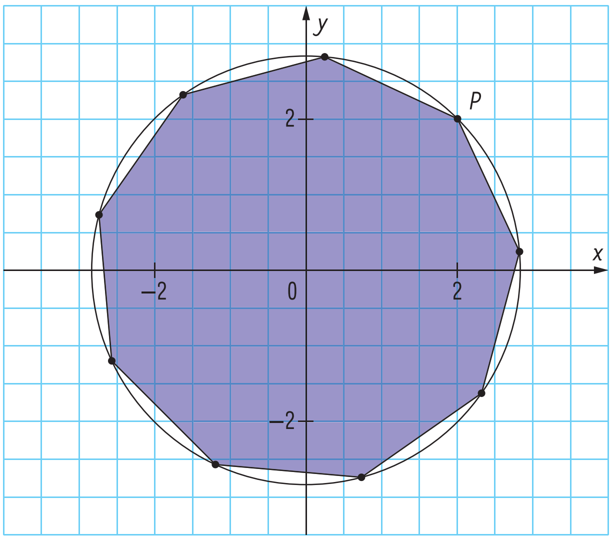
$$w_2 = 5(\cos 240° + i \sin 240°) = 5\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$z^3 = 125 \Leftrightarrow z = 5 \text{ of } z = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \text{ of } z = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

Vergelijkingen van de vorm $az^n + b = 0$, met $a \in \mathbb{C}_0$ en $b \in \mathbb{C}$ noemen we **binomiaalvergelijkingen**.

Opdracht 17 bladzijde 55

Het beeldpunt P van $2 + 2i$ is een van de hoekpunten van een regelmatige negenhoek.



1 Bepaal de coördinaten van de andere hoekpunten.

$2 + 2i = 2(1 + i)$

$= 2\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

De andere hoekpunten zijn telkens gedraaid over een hoek van $\frac{360°}{9} = 40°$.

De andere hoekpunten zijn de beeldpunten van:

$2\sqrt{2}(\cos 85° + i \sin 85°) \approx 0{,}25 + 2{,}82\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 125° + i \sin 125°) \approx -1{,}62 + 2{,}32\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 165° + i \sin 165°) \approx -2{,}73 + 0{,}73\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 205° + i \sin 205°) \approx -2{,}56 - 1{,}20\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 245° + i \sin 245°) \approx -1{,}20 - 2{,}56\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 285° + i \sin 285°) \approx 0{,}73 - 2{,}73\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 325° + i \sin 325°) \approx 2{,}31 - 1{,}62\, i$

$2\sqrt{2}(\cos 5° + i \sin 5°) \approx 2{,}82 + 0{,}25\, i$

2 Aan welke vergelijking voldoen de complexe getallen die deze hoekpunten als beeldpunten hebben?

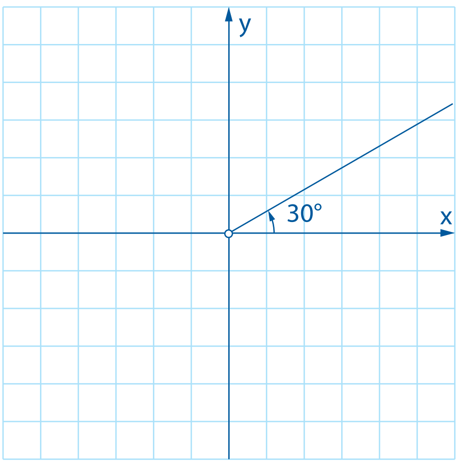
Er geldt: $z^9 = (2 + 2i)^9$

$$\begin{aligned}
&= \left(2\sqrt{2}\right)^9 (\cos(9 \cdot 45°) + i \sin(9 \cdot 45°)) \\
&= 2^9 \cdot \sqrt{2}^8 \cdot \sqrt{2}(\cos 405° + i \sin 405°) \\
&= 512 \cdot 16 \cdot \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°) \\
&= 8192\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 8192 + 8192\, i
\end{aligned}$$

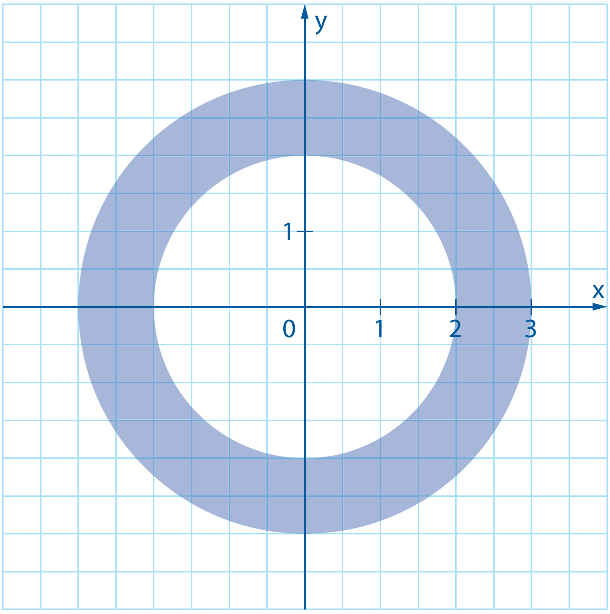
Opdracht 18 bladzijde 57

Teken in het complexe vlak de verzameling van de beeldpunten van alle complexe getallen *z*

1 met $\arg(z) = 30°$



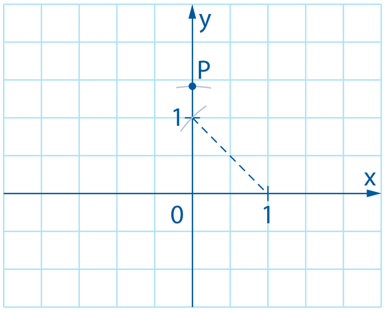
2 met $2 \leqslant |z| \leqslant 3$



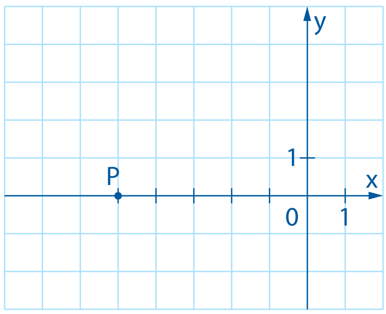
Opdracht 19 bladzijde 57

Stel de beeldpunten van de complexe getallen voor in het complexe vlak en schrijf ze in de goniometrische vorm.

1 $i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\cos 90° + i \sin 90°)$



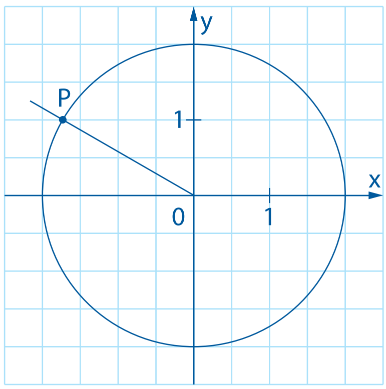
2 $-5 = 5(\cos 180° + i \sin 180°)$



3 $-\sqrt{3} + i \;= 2(\cos 150° + i \sin 150°)$

$r = \sqrt{3+1} = 2$

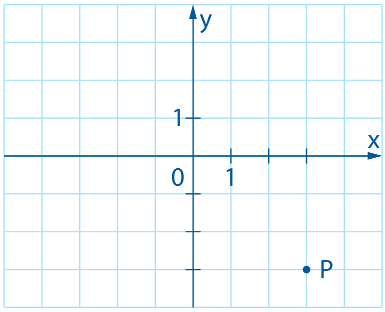
$\tan \theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ en $z \in \text{II} \Rightarrow \theta = -30° + 180° = 150°$



4 $3 - 3i = 3\sqrt{2}\,(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$

$r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

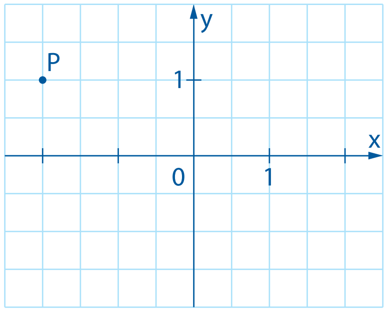
$\tan\theta = -1$ en $z \in \text{IV} \Rightarrow \theta = -45°$



5 $-2 + i = \sqrt{5}\,(\cos 153°\,26'\,6'' + i\sin 153°\,26'\,6'')$

$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

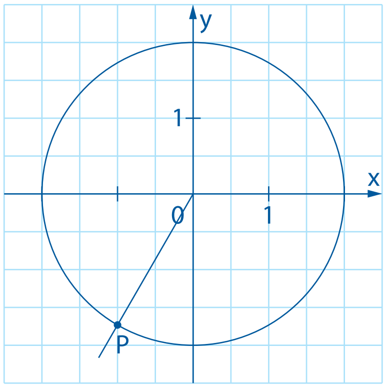
$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$ en $z \in \text{II} \Rightarrow \theta = 153°\,26'\,6''$



6 $-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-120°) + i\sin(-120°))$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ en $z \in \text{III} \Rightarrow \theta = -120°$



Opdracht 20 bladzijde 57

In het complexe vlak zijn de beeldpunten P en Q van de complexe getallen z_1 en z_2 getekend.

Welk van de punten A, B, ..., H is het beeldpunt van

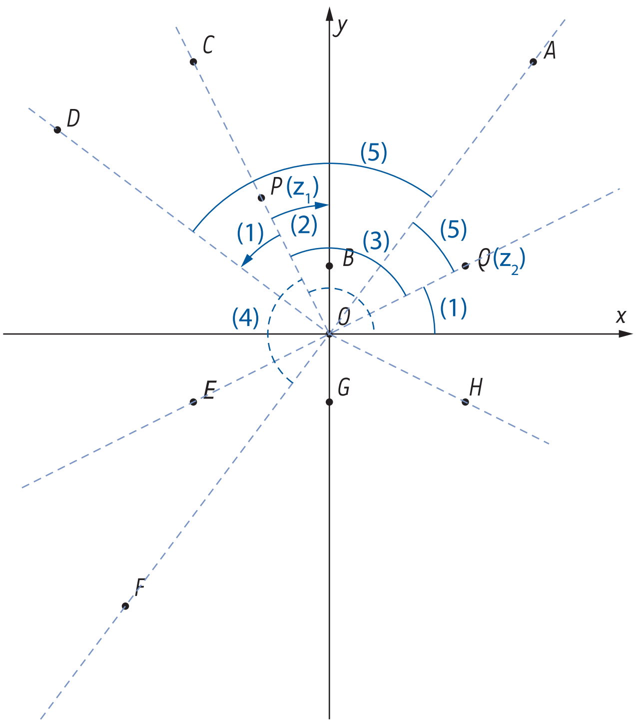
1 $z_1 \cdot z_2$? $\rightarrow$ D

2 $\dfrac{z_1}{z_2}$? $\rightarrow$ B

3 $\dfrac{z_1}{i}$? $\rightarrow$ Q

4 z_1^2? $\rightarrow$ F

5 iz_2^2? $\rightarrow$ D



Opdracht 21 bladzijde 58

Bereken en schrijf exact in de somschrijfwijze.

1 $\sqrt{2}(\cos 125° + i \sin 125°) \cdot \sqrt{18}\,(\cos(-125°) + i \sin(-125°))$

$= \sqrt{36}\,(\cos 0° + \mathrm{i} \sin 0°)$

$= 6$

2 $\dfrac{6(\cos 50° + i \sin 50°)}{3(\cos 20° + i \sin 20°)}$

$= 2(\cos 30° + \mathrm{i} \sin 30°)$

$= 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i} \cdot \dfrac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + \mathrm{i}$

3 $\dfrac{1}{5(\cos 300° + i \sin 300°)} = \dfrac{\cos 0° + \mathrm{i} \sin 0°}{5(\cos 300° + \mathrm{i} \sin 300°)}$

$= \dfrac{1}{5}(\cos(-300°) + \mathrm{i} \sin(-300°))$

$= \dfrac{1}{5}(\cos 60° + \mathrm{i} \sin 60°)$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{10} + \dfrac{\sqrt{3}}{10}\mathrm{i}$

Opdracht 22 bladzijde 58

Bereken de reële getallen a en b als $z = a + bi$ en $z + |z| = 2 + 8i$.

$z + |z| = 2 + 8\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ a + b\mathrm{i} + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = 8 \end{cases}$ gelijke complexe getallen

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \\ b = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a^2} + 64 = 4 - 4a + \cancel{a^2} \\ b = 8 \end{cases}$ KV: $2 - a \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 \\ b = 8 \end{cases}$

Opdracht 23 bladzijde 58

Toon aan dat $z \cdot \bar{z} + i \cdot \bar{z} - i \cdot z = 0$ de vergelijking van een cirkel c voorstelt in het complexe vlak en bepaal de straal en het middelpunt van c.

Stel $z = a + bi$,

dan is $z \cdot \bar{z} + i \cdot \bar{z} - i \cdot z = 0$

$\Leftrightarrow\ (a + bi)(a - bi) + i(a - bi) - i(a + bi) = 0$

$\Leftrightarrow\ a^2 + b^2 \cancel{+ ia} + b \cancel{- ia} + b = 0$

$\Leftrightarrow\ a^2 + b^2 + 2b = 0$

$\Leftrightarrow\ a^2 + (b + 1)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow\ (a - 0)^2 + (b - (-1))^2 = 1$

De punten P(a, b) liggen op een cirkel met middelpunt M(0, –1) en straal 1.

Opdracht 24 bladzijde 58

Alle beeldpunten van complexe getallen z waarvoor $(3 + 4i) \cdot z$ een reëel getal is, vormen in het vlak van Gauss

A een rechte **B** een driehoek **C** een cirkel

D een hyperbool **E** een parabool

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 1991)

Stel $z = a + bi$,

dan is $(3 + 4i)z$

$= (3 + 4i)(a + bi)$

$= 3a + 3bi + 4ai - 4b$

$= 3a - 4b + (3b + 4a)i$

$(3 + 4i)z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3b + 4a = 0$

$\Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}a$

$\Rightarrow$ De beeldpunten liggen op de rechte met vergelijking $y = -\frac{4}{3}x$.

$\Rightarrow$ Antwoord A is juist.

Opdracht 25 bladzijde 58

Als $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, onder welke voorwaarde is dan $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$?

Als $z_1 = 0$, dan is enkel aan de gelijkheid voldaan indien ook $z_2 = 0$.
In wat volgt veronderstellen we $z_1 \neq 0$.
Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$, dan is $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

$$|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \text{ en } \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{c^2+d^2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2} + 2ac + \cancel{c^2} + \cancel{b^2} + 2bd + \cancel{d^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + \cancel{c^2} + \cancel{d^2} \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow 2ac + 2bd = -2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow -(ac + bd) = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \text{ en } ac + bd \leqslant 0 \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2c^2} + 2abcd + \cancel{b^2d^2} = \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2} \text{ en } ac + bd \leqslant 0 \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow 2abcd = a^2d^2 + b^2c^2 \text{ en } ac + bd \leqslant 0 \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 = 0 \text{ en } ac + bd \leqslant 0 \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2$$

$$\Leftrightarrow ad = bc \;\; (1) \text{ en } ac + bd \leqslant 0 \;\; (2) \text{ en } a^2 + b^2 \geqslant c^2 + d^2 \;\; (3)$$

Uit de evenredigheid in (1) volgt dat $c = ra$ en $d = rb$ met $r \in \mathbb{R}$. Met andere woorden: $z_2 = r \cdot z_1$.

Invullen in (2) geeft: $r(a^2 + b^2) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; r \leqslant 0$ (want $a^2 + b^2 \neq 0$).

Uit (3) volgt: $a^2 + b^2 \geqslant r^2 \cdot (a^2 + b^2) \;\Leftrightarrow\; r^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leqslant r \leqslant 1$.

Besluit: $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2| \;\Leftrightarrow\; z_2 = r \cdot z_1$ met $-1 \leqslant r \leqslant 0$. Deze voorwaarde is ook bruikbaar voor $z_1 = 0$.

Opdracht 26 bladzijde 58

Bewijs.

1 $\forall z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} \leqslant 2|z|$

Stel $z = a + bi$, dan is $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ en $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Uit $a \leqslant \sqrt{a^2}$ volgt dat $2a \leqslant 2\sqrt{a^2}$.

Er geldt ook dat $\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, zodat $2a \leqslant 2\sqrt{a^2 + b^2}$, dus: $z + \bar{z} \leqslant 2|z|$.

2 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$, dan is $\overline{z_1} = a - bi$ en $\overline{z_2} = c - di$.

- $|z_1 + z_2|^2 = |a + c + (b + d)i|^2 = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}^{\,2} = (a + c)^2 + (b + d)^2 \quad (1)$
- $(z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = (a + c + (b + d)i) \cdot (a + c + (-b - d)i)$
  $= (a + c + (b + d)i) \cdot (a + c - (b + d)i)$
  $= (a + c)^2 - (b + d)^2 i^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 \quad (2)$

Omdat (1) = (2) geldt dat $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2})$.

Opdracht 27 bladzijde 59

Bereken zonder rekentoestel en schrijf het resultaat in de somschrijfwijze.

1 $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$

$r=\sqrt{1+3}=2$

$\tan\theta=-\sqrt{3}$ en $z\in \text{IV} \Rightarrow \theta=-60°$

$=(2(\cos(-60°)+i\sin(-60°)))^5$

$=32(\cos(-300°)+i\sin(-300°))$

$=32(\cos 60°+i\sin 60°)$

$=32\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=16+16\sqrt{3}\,i$

2 $\left(\frac{1-i}{2}\right)^{-4}$

$=2^4(1-i)^{-4}$

$r=\sqrt{2}$

$\tan\theta=-1$ en $z\in \text{IV} \Rightarrow \theta=-45°$

$=16\left(\sqrt{2}(\cos(-45°)+i\sin(-45°))\right)^{-4}$

$=16\cdot\sqrt{2}^{-4}(\cos 180°+i\sin 180°)$

$=-4$

3 $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8$

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

$=1$

4 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{10}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{10}$

$r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $z\in \text{I} \Rightarrow \theta=30°$

$r=1$

$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $z\in \text{IV} \Rightarrow \theta=-30°$

$=(\cos 30°+i\sin 30°)^{10}-(\cos(-30°)+i\sin(-30°))^{10}$

$=\cos 300°+i\sin 300°-\cos(-300°)-i\sin(-300°)$

$=\cancel{\cos 300°}+i\sin 300°\cancel{-\cos 300°}+i\sin 300°$

$=2i\sin(-60°)=-2i\sin 60°$

$=-2i\frac{\sqrt{3}}{2}=-i\sqrt{3}$

Opdracht 28 bladzijde 59

Toon aan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(n \cdot 45°) + i\sin(n \cdot 45°)\right)$.

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)\right)^n$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = 1 \;\text{ en }\; z \in \text{I} \;\Rightarrow\; \theta = 45°$$

$$= \sqrt{2}^n\left(\cos(n \cdot 45°) + i\sin(n \cdot 45°)\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(n \cdot 45°) + i\sin(n \cdot 45°)\right)$$

Opdracht 29 bladzijde 59

Bereken en stel de oplossingen voor in het complexe vlak.

1 de derdemachtswortels van -1

$$-1 = \cos 180° + i\sin 180°$$

De derdemachtswortels van -1 zijn:

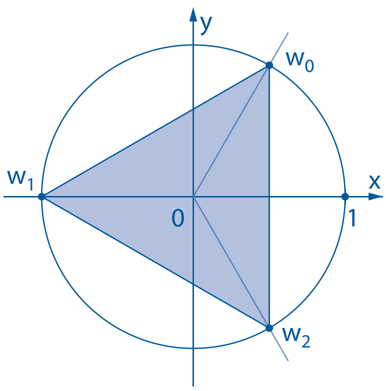
$$w_k = \cos\frac{180° + k \cdot 360°}{3} + i\sin\frac{180° + k \cdot 360°}{3}$$

$$= \cos(60° + k \cdot 120°) + i\sin(60° + k \cdot 120°)$$

$$w_0 = \cos 60° + i\sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_1 = \cos 180° + i\sin 180° = -1$$

$$w_2 = \cos 300° + i\sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



2 de vierdemachtswortels van $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 120° + i \sin 120°$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3} \text{ en } z \in \text{II} \Rightarrow \theta = -60° + 180° = 120°$$

De vierdemachtswortels van $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ zijn:

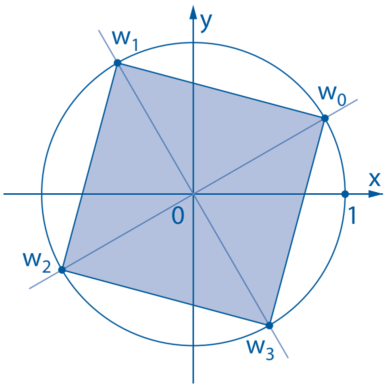
$$w_k = \cos\frac{120° + k \cdot 360°}{4} + i \sin\frac{120° + k \cdot 360°}{4}$$
$$= \cos(30° + k \cdot 90°) + i \sin(30° + k \cdot 90°)$$

$$w_0 = \cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos 120° + i \sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos 210° + i \sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos 300° + i \sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



3 de vijfdemachtswortels van $-1 - i$

$-1 - i = \sqrt{2}(\cos(-135°) + i\sin(-135°))$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = 1$ en $z \in \text{III} \Rightarrow \theta = 45° - 180° = -135°$

De vijfdemachtswortels van $-1 - i$ zijn:

$$w_k = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-135° + k \cdot 360°}{5} + i\sin\frac{-135° + k \cdot 360°}{5}\right)$$

$$= \sqrt[10]{2}(\cos(-27° + k \cdot 72°) + i\sin(-27° + k \cdot 72°))$$

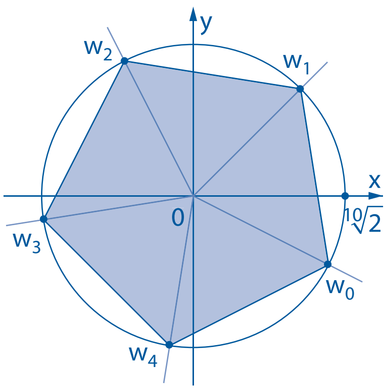
$$w_0 = \sqrt[10]{2}(\cos(-27°) + i\sin(-27°)) \approx 0{,}95 - 0{,}49i$$

$$w_1 = \sqrt[10]{2}(\cos 45° + i\sin 45°) = \sqrt[10]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} + \frac{1}{\sqrt[5]{4}}i \approx 0{,}76 + 0{,}76i$$

$$w_2 = \sqrt[10]{2}(\cos 117° + i\sin 117°) \approx -0{,}49 + 0{,}95i$$

$$w_3 = \sqrt[10]{2}(\cos 189° + i\sin 189°) \approx -1{,}06 - 0{,}17i$$

$$w_4 = \sqrt[10]{2}(\cos 261° + i\sin 261°) \approx -0{,}17 - 1{,}06i$$



4 de zesdemachtswortels van *i*

$i = \cos 90° + \sin 90°$

De zesdemachtswortels van i zijn:

$$w_k = \cos\frac{90° + k \cdot 360°}{6} + i\sin\frac{90° + k \cdot 360°}{6}$$
$$= \cos(15° + k \cdot 60°) + i\sin(15° + k \cdot 60°)$$

$w_0 = \cos 15° + i\sin 15° \approx 0{,}97 + 0{,}26i$

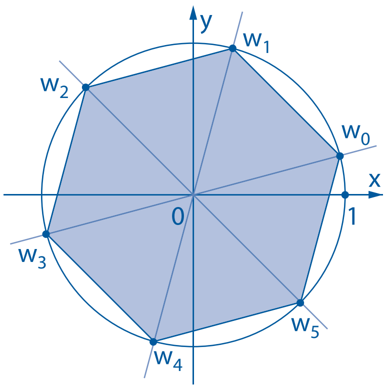
$w_1 = \cos 75° + i\sin 75° \approx 0{,}26 + 0{,}97i$

$w_2 = \cos 135° + i\sin 135° \approx -0{,}71 + 0{,}71i$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$w_3 = \cos 195° + i\sin 195° \approx -0{,}97 - 0{,}26i$

$w_4 = \cos 255° + i\sin 255° \approx -0{,}26 - 0{,}97i$

$w_5 = \cos 315° + i\sin 315° \approx 0{,}71 - 0{,}71i$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$



Opdracht 30 bladzijde 59

Los op in $\mathbb{C}$. Schrijf de oplossingen exact in de somschrijfwijze.

1 $z^8 = 1$

$z^8 = 1 = \cos 0° + i \sin 0°$

De achtstemachtswortels van 1 zijn:

$$\begin{aligned} w_k &= \cos\frac{0° + k \cdot 360°}{8} + i \sin\frac{0° + k \cdot 360°}{8} \\ &= \cos(k \cdot 45°) + i \sin(k \cdot 45°) \end{aligned}$$

$w_0 = \cos 0° + i \sin 0° = 1$

$w_1 = \cos 45° + i \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$w_2 = \cos 90° + i \sin 90° = i$

$w_3 = \cos 135° + i \sin 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$w_4 = \cos 180° + i \sin 180° = -1$

$w_5 = \cos 225° + i \sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$w_6 = \cos 270° + i \sin 270° = -i$

$w_7 = \cos 315° + i \sin 315° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

Oplossingen: $1, -1, i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

2 $z^4 = 16$

$z^4 = 16 = 16(\cos 0° + i \sin 0°)$

De vierdemachtswortels van 16 zijn:

$$\begin{aligned} w_k &= 2\left(\cos\frac{0° + k \cdot 360°}{4} + i \sin\frac{0° + k \cdot 360°}{4}\right) \\ &= 2(\cos(k \cdot 90°) + i \sin(k \cdot 90°)) \end{aligned}$$

$w_0 = 2(\cos 0° + i \sin 0°) = 2$

$w_1 = 2(\cos 90° + i \sin 90°) = 2i$

$w_2 = 2(\cos 180° + i \sin 180°) = -2$

$w_3 = 2(\cos 270° + i \sin 270°) = -2i$

Oplossingen: $2, -2, 2i, -2i$

3 $z^3 + 1000 = 0$

$\Leftrightarrow z^3 = -1000$

$\Leftrightarrow z^3 = 1000(\cos 180° + i \sin 180°)$

De derdemachtswortels van –1000 zijn:

$$w_k = 10\left(\cos\frac{180° + k \cdot 360°}{3} + i \sin\frac{180° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

$$= 10(\cos(60° + k \cdot 120°) + i \sin(60° + k \cdot 120°))$$

$$w_0 = 10(\cos 60° + i \sin 60°) = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 + 5\sqrt{3}\,i$$

$$w_1 = 10(\cos 180° + i \sin 180°) = -10$$

$$w_2 = 10(\cos 300° + i \sin 300°) = 10\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5 - 5\sqrt{3}\,i$$

Oplossingen: -10, $5 + 5\sqrt{3}\,i$, $5 - 5\sqrt{3}\,i$

4 $z^6 - 64 = 0$

$\Leftrightarrow z^6 = 64$

$\Leftrightarrow z^6 = 64(\cos 0° + i \sin 0°)$

De zesdemachtswortels van 64 zijn:

$$w_k = 2\left(\cos\frac{0° + k \cdot 360°}{6} + i \sin\frac{0° + k \cdot 360°}{6}\right)$$

$$= 2(\cos(k \cdot 60°) + i \sin(k \cdot 60°))$$

$$w_0 = 2(\cos 0° + i \sin 0°) = 2$$

$$w_1 = 2(\cos 60° + i \sin 60°) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

$$w_2 = 2(\cos 120° + i \sin 120°) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$w_3 = 2(\cos 180° + i \sin 180°) = -2$$

$$w_4 = 2(\cos 240° + i \sin 240°) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}\,i$$

$$w_5 = 2(\cos 300° + i \sin 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Oplossingen: 2, -2, $1 + \sqrt{3}\,i$, $1 - \sqrt{3}\,i$, $-1 + \sqrt{3}\,i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$

5 $z^3 + 8i = 0$

$$\Leftrightarrow z^3 = -8i$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 8(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$$

De derdemachtswortels van $-8i$ zijn:

$$w_k = 2\left(\cos\frac{-90° + k \cdot 360°}{3} + i\sin\frac{-90° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

$$= 2(\cos(-30° + k \cdot 120°) + i\sin(-30° + k \cdot 120°))$$

$$w_0 = 2(\cos(-30°) + i\sin(-30°)) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

$$w_1 = 2(\cos 90° + i\sin 90°) = 2i$$

$$w_2 = 2(\cos 210° + i\sin 210°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

Oplossingen: $2i$, $\sqrt{3} - i$, $-\sqrt{3} - i$

6 $16z^4 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z^4 = -\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow z^4 = \frac{1}{16}(\cos 180° + i\sin 180°)$$

De vierdemachtswortels van $-\frac{1}{16}$ zijn:

$$w_k = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{180° + k \cdot 360°}{4} + i\sin\frac{180° + k \cdot 360°}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(45° + k \cdot 90°) + i\sin(45° + k \cdot 90°))$$

$$w_0 = \frac{1}{2}(\cos 45° + i\sin 45°) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(\cos 135° + i\sin 135°) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(\cos 225° + i\sin 225°) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$w_3 = \frac{1}{2}(\cos 315° + i\sin 315°) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

Oplossingen: $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$, $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Opdracht 31 bladzijde 59

We beschouwen het complex getal $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}$.

De som van het reëel deel van z en het imaginair deel van z is gelijk aan

A -4 **B** $-2+2\sqrt{3}$ **C** $-4+4\sqrt{3}$

D $4-4\sqrt{3}$ **E** 4

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2014)

$$z = \frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2} = \frac{\left(2(\cos 30° + \mathrm{i}\sin 30°)\right)^4}{\left(2(\cos(-30°) + \mathrm{i}\sin(-30°))\right)^2}$$

$$= \frac{16(\cos 120° + \mathrm{i}\sin 120°)}{4(\cos(-60°) + \mathrm{i}\sin(-60°))}$$

$$= 4\,(\cos 180° + \mathrm{i}\sin 180°)$$

$$= -4$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{reële deel} = -4 \\ \text{imaginaire deel} = 0\end{array}\right\}\ \text{som} = -4$$

Antwoord A is juist.

Opdracht 32 bladzijde 60

Een hoekpunt van een regelmatige vijftienhoek met de oorsprong als middelpunt is het beeldpunt van $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Bepaal een vergelijking waarvan de beeldpunten van de oplossingen de hoekpunten zijn van deze vijftienhoek.

Voor $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ geldt:

$$z^{15} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{15}$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \text{ en } \ z \in \mathrm{II} \ \Rightarrow \ \theta = 150°$$

$$= (\cos 150° + \mathrm{i}\sin 150°)^{15}$$

$$= \cos 2250° + \mathrm{i}\sin 2250°$$

$$= \cos 90° + \mathrm{i}\sin 90°$$

$$= \mathrm{i}$$

De gevraagde vergelijking is: $z^{15} = \mathrm{i}$.

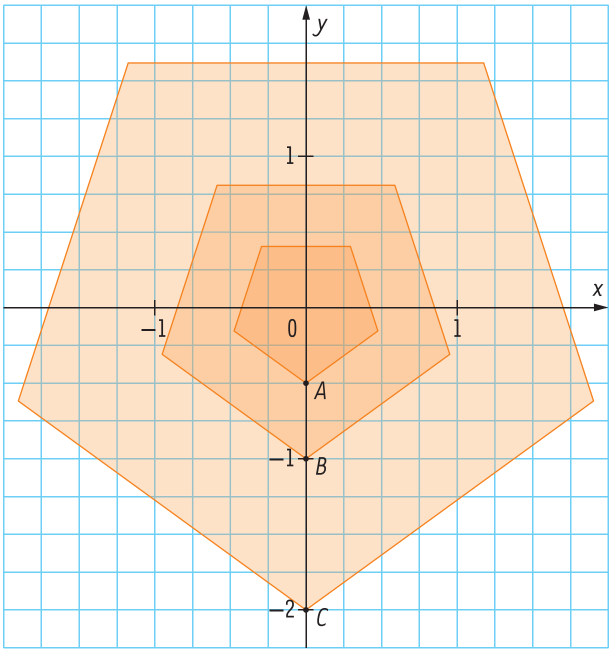
Opdracht 33 bladzijde 60

De drie getekende regelmatige vijfhoeken hebben de oorsprong als middelpunt.

De kleinste heeft $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ als hoekpunt, de middelste $B(0, -1)$ en de grootste $C(0, -2)$.

De hoekpunten van de kleinste vijfhoek zijn de beeldpunten van de oplossingen van de vergelijking $z^5 = p$, die van de middelste van $z^5 = q$ en die van de grootste van $z^5 = r$.

Bepaal pqr.



Voor de kleinste vijfhoek geldt: $z^5 = \left(-\frac{1}{2}\text{i}\right)^5$

$$\Leftrightarrow z^5 = -\frac{1}{32}\text{i} \Rightarrow p = -\frac{1}{32}\text{i}$$

Voor de middelste vijfhoek geldt: $z^5 = (-\text{i})^5$

$$\Leftrightarrow z^5 = -\text{i} \Rightarrow q = -\text{i}$$

Voor de grootste vijfhoek geldt: $z^5 = (-2\text{i})^5$

$$\Leftrightarrow z^5 = -32\text{i} \Rightarrow r = -32\text{i}$$

$$p \cdot q \cdot r = -\frac{1}{32}\text{i} \cdot (-\text{i}) \cdot (-32\text{i})$$
$$= \text{i}$$

Opdracht 34 bladzijde 60

Voor welke waarden van $n \in \mathbb{N}$ is $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$

1 reëel?

2 zuiver imaginair?

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n \qquad r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ en } z\in \mathrm{I} \Rightarrow \theta = 30°$$

$$= (\cos 30° + \mathrm{i}\sin 30°)^n$$

$$= \cos(n\cdot 30°) + \mathrm{i}\sin(n\cdot 30°)$$

1 $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n$ is reëel als $\sin(n\cdot 30°)=0$

$$\Leftrightarrow n\cdot 30° = k\cdot 180° \quad \text{met } k\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = 6k \quad \text{met } k\in\mathbb{N}$$

2 $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n$ is zuiver imaginair als $\cos(n\cdot 30°)=0$

$$\Leftrightarrow n\cdot 30° = 90° + k\cdot 180° \quad \text{met } k\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = 3+6k \quad \text{met } k\in\mathbb{N}$$

Opdracht 35 bladzijde 61

Bereken $\frac{(1+i)^{3m}}{(1-i)^m}$ als $m \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{(1+\mathrm{i})^{3m}}{(1-\mathrm{i})^m} = \frac{\left(\sqrt{2}(\cos 45° + \mathrm{i}\sin 45°)\right)^{3m}}{\left(\sqrt{2}(\cos(-45°)+\mathrm{i}\sin(-45°))\right)^m}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^{3m}(\cos(m\cdot 135°)+\mathrm{i}\sin(m\cdot 135°))}{\sqrt{2}^{m}(\cos(-m\cdot 45°)+\mathrm{i}\sin(-m\cdot 45°))}$$

$$= 2^m(\cos(m\cdot 180°)+\mathrm{i}\sin(m\cdot 180°))$$

$$= \begin{cases} 2^m \text{ als m even is} \\ -2^m \text{ als m oneven is} \end{cases}$$

$$= (-2)^m \quad \text{met } m\in\mathbb{Z}$$

Opdracht 36 bladzijde 61

Bereken $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2}$ als $m \in \mathbb{Z}$.

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2}$$

$= (\cos 120° + i \sin 120°)^{3m+2} + (\cos 240° + i \sin 240°)^{3m+2}$

$= \cos((3m+2)\cdot 120°) + i \sin((3m+2)\cdot 120°) + \cos((3m+2)\cdot 240°) + i \sin((3m+2)\cdot 240°)$

$= \cos(m\cdot 360° + 240°) + i \sin(m\cdot 360° + 240°) + \cos(m\cdot 720° + 480°) + i \sin(m\cdot 720° + 480°)$

$= \cos 240° + i \sin 240° + \cos 120° + i \sin 120°$

$= -\cos 60° \cancel{- i \sin 60°} - \cos 60° \cancel{+ i \sin 60°}$

$= -2 \cdot \frac{1}{2}$

$= -1$

Opdracht 37 bladzijde 61

Druk cos 4θ uit in functie van cos θ door gebruik te maken van de formule van de Moivre.

Er geldt:

$(\cos\theta + i \sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$

$\Leftrightarrow (\cos^2\theta + 2i \cos\theta \sin\theta - \sin^2\theta)^2 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$

$\Leftrightarrow (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + 4i \cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4 \cos^2\theta \sin^2\theta = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$

$\Leftrightarrow \cos^4\theta - 2\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta + 4i \cos^3\theta \sin\theta - 4i \cos\theta \sin^3\theta - 4 \cos^2\theta \sin^2\theta$
$= \cos 4\theta + i \sin 4\theta$

$\Rightarrow \cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$

$\Leftrightarrow \cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos^2\theta)^2$

$\Leftrightarrow \cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 6\cos^4\theta + 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta$

$\Leftrightarrow \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Opdracht 38 bladzijde 61

Los op in $\mathbb{C}$ en stel de oplossingen voor in het complexe vlak.

1 $z^4 = (1+i)^2$

$$\Leftrightarrow\ z^4 = \left(\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\ z^4 = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$$

De vierdemachtswortels van $(1 + i)^2$ zijn:

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{90° + k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{90° + k\cdot 360°}{4}\right)$$
$$= \sqrt[4]{2}(\cos(22°\,30' + k\cdot 90°) + i\sin(22°\,30' + k\cdot 90°))$$

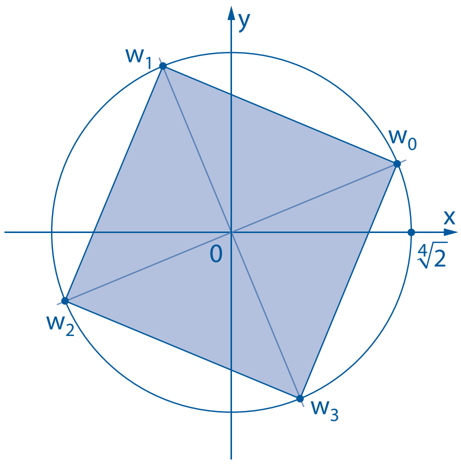
$$w_0 = \sqrt[4]{2}(\cos 22°\,30' + i \sin 22°\,30') \approx 1{,}10 + 0{,}46\,i$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 112°\,30' + i \sin 112°\,30') \approx -0{,}46 + 1{,}10\,i$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 202°\,30' + i \sin 202°\,30') \approx -1{,}10 - 0{,}46\,i$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}(\cos 292°\,30' + i \sin 292°\,30') \approx 0{,}49 - 1{,}10\,i$$

Oplossingen: w_0, w_1, w_2 en w_3.



2 $z^5 - (1+i)^4 = 0$

$\Leftrightarrow\ z^5 = (1+i)^4$

$\Leftrightarrow\ z^5 = \left(\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)\right)^4$

$\Leftrightarrow\ z^5 = 4(\cos 180° + i \sin 180°)$

De vijfdemachtswortels van $(1+i)^4$ zijn:

$$w_k = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{180° + k \cdot 360°}{5} + i \sin\frac{180° + k \cdot 360°}{5}\right)$$

$$= \sqrt[5]{4}(\cos(36° + k \cdot 72°) + i \sin(36° + k \cdot 72°))$$

$w_0 = \sqrt[5]{4}(\cos 36° + i \sin 36°) \approx 1{,}07 + 0{,}78\,i$

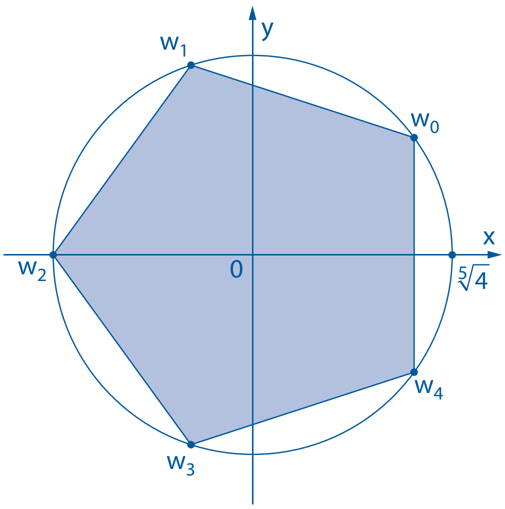
$w_1 = \sqrt[5]{4}(\cos 108° + i \sin 108°) \approx -0{,}41 + 1{,}25\,i$

$w_2 = \sqrt[5]{4}(\cos 180° + i \sin 180°) \approx -1{,}32 \qquad \left(-\sqrt[5]{4}\right)$

$w_3 = \sqrt[5]{4}(\cos 252° + i \sin 252°) \approx -0{,}41 - 1{,}25\,i$

$w_4 = \sqrt[5]{4}(\cos 324° + i \sin 324°) \approx 1{,}07 - 0{,}78\,i$

Oplossingen: w_0, w_1, w_2, w_3 en w_4.



3 $z^6 + 9z^3 + 8 = 0$

Stel $t = z^3$:

$$t^2 + 9t + 8 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $t = -8$ of $t = -1$

- $z^3 = -8$

  $\Leftrightarrow$ $z^3 = 8(\cos 180° + i \sin 180°)$

  De derdemachtswortels van -8 zijn:

  $$w_k = 2\left(\cos\frac{180° + k \cdot 360°}{3} + i\sin\frac{180° + k \cdot 360°}{3}\right)$$
  $$= 2\,(\cos(60° + k \cdot 120°) + i\sin(60° + k \cdot 120°))$$

  $w_0 = 2\,(\cos 60° + i \sin 60°) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$

  $w_1 = 2\,(\cos 180° + i \sin 180°) = -2$

  $w_2 = 2\,(\cos 300° + i \sin 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

- $z^3 = -1$

  $\Leftrightarrow$ $z^3 = \cos 180° + i \sin 180°$

  De derdemachtswortels van -1 zijn:

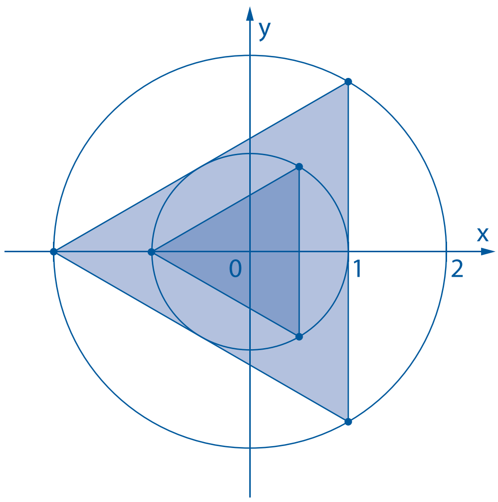
  $$w_k = \cos\frac{180° + k \cdot 360°}{3} + i\sin\frac{180° + k \cdot 360°}{3}$$
  $$= \cos(60° + k \cdot 120°) + i\sin(60° + k \cdot 120°)$$

  $w_0 = \cos 60° + i \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

  $w_1 = \cos 180° + i \sin 180° = -1$

  $w_2 = \cos 300° + i \sin 300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Oplossingen: $1 + \sqrt{3}\,i, -2, 1 - \sqrt{3}\,i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$



4 $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$

Stel $t = z^4$:

$t^2 + 15t - 16 = 0$

$\Leftrightarrow\ t = -16 \quad \text{of} \quad t = 1$

- $z^4 = -16$

$\Leftrightarrow\ z^4 = 16(\cos 180° + i \sin 180°)$

De vierdemachtswortels van −16 zijn:

$$w_k = 2(\cos(45° + k \cdot 90°) + i \sin(45° + k \cdot 90°))$$

$$w_0 = 2(\cos 45° + i \sin 45°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$w_1 = 2(\cos 135° + i \sin 135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = 2(\cos 225° + i \sin 225°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

$$w_3 = 2(\cos 315° + i \sin 315°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

- $z^4 = 1$

$\Leftrightarrow\ z^4 = \cos 0° + i \sin 0°$

De vierdemachtswortels van 1 zijn:

$$w_k = \cos(k \cdot 90°) + i \sin(k \cdot 90°)$$

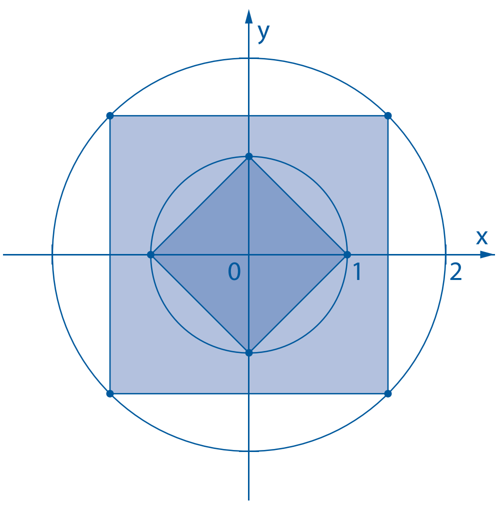
$$w_0 = \cos 0° + i \sin 0° = 1$$

$$w_1 = \cos 90° + i \sin 90° = i$$

$$w_2 = \cos 180° + i \sin 180° = -1$$

$$w_3 = \cos 270° + i \sin 270° = -i$$

Oplossingen: $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$, 1, −1, i, −i.



5 $z^6 - 7iz^3 + 8 = 0$

Stel $t = z^3$:

$t^2 - 7it + 8 = 0$

$D = -49 - 32 = -81 = (9i)^2$

$t = \frac{7i - 9i}{2}$ of $t = \frac{7i + 9i}{2}$

$t = -i$ of $t = 8i$

- $z^3 = -i$

$\Leftrightarrow z^3 = \cos(-90°) + i\sin(-90°)$

De derdemachtswortels van $-i$ zijn:

$$w_k = \cos(-30° + k \cdot 120°) + i\sin(-30° + k \cdot 120°)$$

$$w_0 = \cos(-30°) + i\sin(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos 90° + i\sin 90° = i$$

$$w_2 = \cos 210° + i\sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

- $z^3 = 8i$

$\Leftrightarrow z^3 = 8(\cos 90° + i\sin 90°)$

De derdemachtswortels van $8i$ zijn:

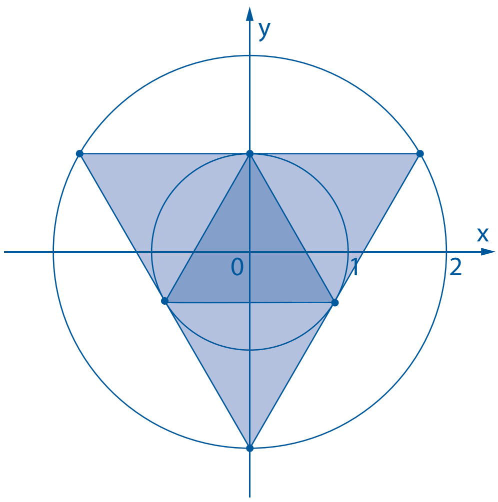
$$w_k = 2(\cos(30° + k \cdot 120°) + i\sin(30° + k \cdot 120°))$$

$$w_0 = 2(\cos 30° + i\sin 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2(\cos 150° + i\sin 150°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_2 = 2(\cos 270° + i\sin 270°) = -2i$$

Oplossingen: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i,\ -2i.$



6 $z^{12} - 7z^6 - 8 = 0$

Stel $t = z^6$:

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $t = 8$ of $t = -1$

- $z^6 = 8$

$\Leftrightarrow$ $z^6 = 8(\cos 0° + i \sin 0°)$

De zesdemachtswortels van 8 zijn:

$$w_k = \sqrt{2}(\cos(k \cdot 60°) + i \sin(k \cdot 60°))$$

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 0° + i \sin 0°) = \sqrt{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2}(\cos 60° + i \sin 60°) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$w_2 = \sqrt{2}(\cos 120° + i \sin 120°) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$w_3 = \sqrt{2}(\cos 180° + i \sin 180°) = -\sqrt{2}$$

$$w_4 = \sqrt{2}(\cos 240° + i \sin 240°) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$w_5 = \sqrt{2}(\cos 300° + i \sin 300°) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

- $z^6 = -1$

$\Leftrightarrow$ $z^6 = \cos 180° + i \sin 180°$

De zesdemachtswortels van –1 zijn:

$$w_k = \cos(30° + k \cdot 60°) + i \sin(30° + k \cdot 60°)$$

$$w_0 = \cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos 90° + i \sin 90° = i$$

$$w_2 = \cos 150° + i \sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

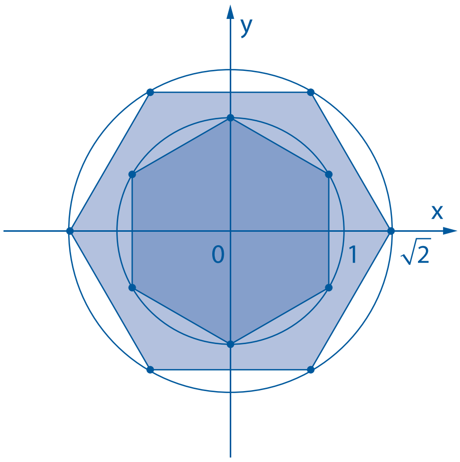
$$w_3 = \cos 210° + i \sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_4 = \cos 270° + i \sin 270° = -i$$

$$w_5 = \cos 330° + i \sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Oplossingen: $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i},$

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}, \mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}, -\mathrm{i}, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$



Opdracht 39 bladzijde 61

De hoekpunten van de regelmatige zeshoek *ABCDEF* zijn de beeldpunten van de oplossingen van de vergelijking $z^6 - 64 = 0$ in $\mathbb{C}$.

De punten *G*, *H*, *I*, *J*, *K* en *L* zijn de middens van de zijden van deze zeshoek.

Bepaal een vergelijking waarvan de beeldpunten van de oplossingen de hoekpunten zijn van deze kleinere zeshoek.

Voor H geldt:

$|OH| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow\ H\left(0, \sqrt{3}\right)$

H is het beeldpunt van het complex getal $z = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

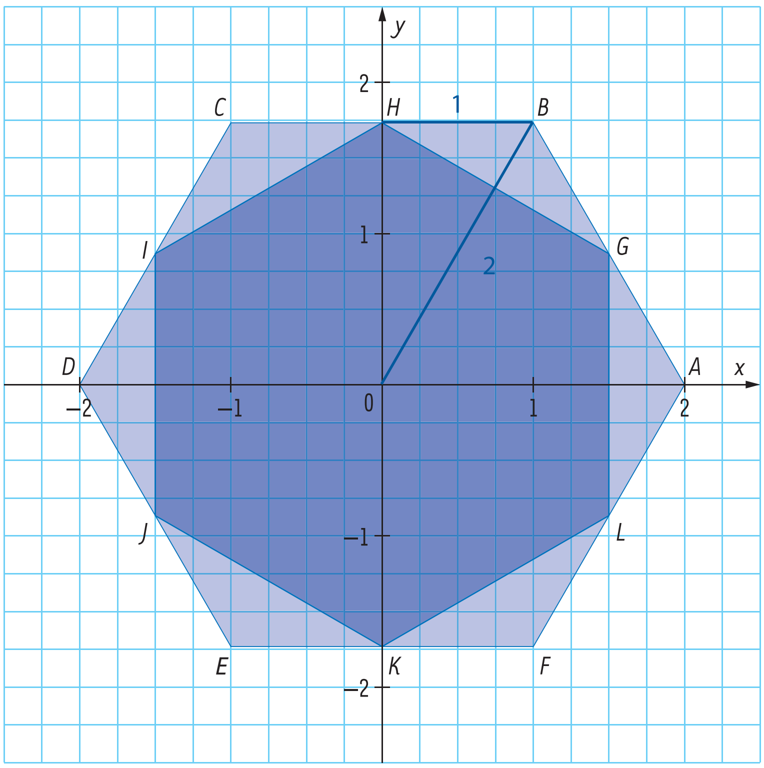
Voor dit getal geldt:

$z^6 = \left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^6$

$\quad = -27$

De gevraagde vergelijking is

$z^6 = -27$.



Opdracht 40 bladzijde 62

Bewijs: $\forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N} : (\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Stel $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, dan geldt:

- $(\overline{z})^n = (r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n$
  $= r^n(\cos(-n\cdot\theta) + i\sin(-n\cdot\theta))$
- $\overline{z^n} = \overline{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$
  $= r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$
  $= r^n(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ en $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Hieruit volgt dat $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

Opdracht 41 bladzijde 62

Toon aan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right).$$

$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n\\
&= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\\
&= \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n\\
&= 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n\\
&= 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

Opdracht 42 bladzijde 63

Kies het juiste antwoord.

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta} =$$

A $\cos(\alpha + \beta)$

B $\sin(\alpha + \beta)$

C $\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$

D $\cos(\alpha + \beta) - i\sin(\alpha + \beta)$

E $\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta} &= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)}\\
&= \cos(\alpha - (-\beta)) + i\sin(\alpha - (-\beta))\\
&= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

Antwoord C is juist.

Opdracht 43 bladzijde 63

Als het complex getal z voldoet aan $z^2 = \dfrac{(2+i)(-1+2i)}{2(3+4i)}$, dan is de modulus van z gelijk aan

A $\dfrac{1}{2}$ **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\sqrt{2}$

D $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\dfrac{1}{4}$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2013)

$$z^2 = \frac{(2+i)(-1+2i)}{2(3+4i)}$$

modulus van $2+i$: $\sqrt{5}$

modulus van $-1+2i$: $\sqrt{5}$

modulus van $3+4i$: 5

$\Rightarrow$ modulus van z^2: $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ modulus van z: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Antwoord B is juist.

Opdracht 44 bladzijde 63

Als u en v de complexe oplossingen zijn van de vergelijking $z^2 + (3+2i)z - 1 + 3i = 0$, dan is $|u - v|$ gelijk aan

A 1 **B** 3 **C** 4

D $\sqrt{10} - 1$ **E** $\sqrt{10} + 1$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2014)

$z^2 + (3+2i)z - 1 + 3i = 0$

$D = (3+2i)^2 - 4\cdot(-1+3i)$

$D = 9 + 12i - 4 + 4 - 12i$

$D = 9$

$z = \dfrac{-3-2i-3}{2}$ of $z = \dfrac{-3-2i+3}{2}$

$z = -3 - i$ of $z = -i$

Stel $u = -3 - i$ en $v = -i$, dan is $u - v = -3$.

Dus: $|u - v| = |-3| = 3$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 45 bladzijde 63

Bereken de vierdemachtswortels van $-i$ en stel ze voor in het complexe vlak.

$-i = \cos(-90°) + i \sin(-90°)$

De vierdemachtswortels van $-i$ zijn:

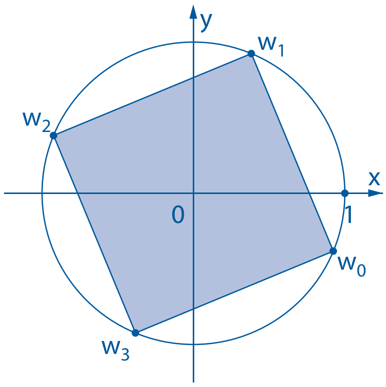
$$w_k = \cos(-22° \, 30' + k \cdot 90°) + i \sin(-22° \, 30' + k \cdot 90°)$$

$w_0 = \cos(-22° \, 30') + i \sin(-22° \, 30') \approx 0{,}92 - 0{,}38\, i$

$w_1 = \cos 67° \, 30' + i \sin 67° \, 30' \approx 0{,}38 + 0{,}92\, i$

$w_2 = \cos 157° \, 30' + i \sin 157° \, 30' \approx -0{,}92 + 0{,}38\, i$

$w_3 = \cos 247° \, 30' + i \sin 247° \, 30' \approx -0{,}38 - 0{,}92\, i$



Opdracht 46 bladzijde 63

Los op in $\mathbb{C}$ en stel de oplossingen voor in het complexe vlak.

1 $z^6 = -64$

$\Leftrightarrow z^6 = 64(\cos 180° + i \sin 180°)$

De zesdemachtwortels van -64 zijn:

$$w_k = 2(\cos(30° + k \cdot 60°) + i \sin(30° + k \cdot 60°))$$

$w_0 = 2(\cos 30° + i \sin 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} + i$

$w_1 = 2(\cos 90° + i \sin 90°) = 2i$

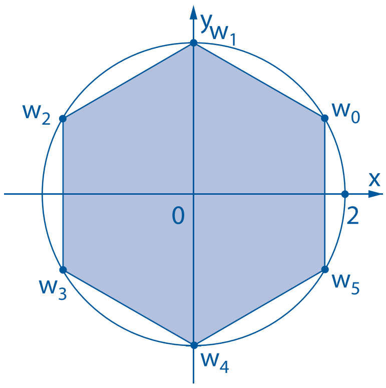
$w_2 = 2(\cos 150° + i \sin 150°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = -\sqrt{3} + i$

$w_3 = 2(\cos 210° + i \sin 210°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\sqrt{3} - i$

$w_4 = 2(\cos 270° + i \sin 270°) = -2i$

$w_5 = 2(\cos 330° + i \sin 330°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3} - i$

Oplossingen: $\sqrt{3} + i$, $2i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$, $\sqrt{3} - i$.



2 $z^{10} + 8z^5 + 32 = 0$

Stel $t = z^5$

$t^2 + 8t + 32 = 0$

$D = -64 = (8i)^2$

$t = \dfrac{-8-8i}{2} = -4-4i$ of $t = \dfrac{-8+8i}{2} = -4+4i$

- $z^5 = -4-4i$

$\Leftrightarrow z^5 = 4\sqrt{2}\,(\cos 225° + i \sin 225°)$

De vijfdemachtswortels van $-4-4i$ zijn:

$w_k = \sqrt[5]{4\sqrt{2}}\ (\cos(45° + k \cdot 72°) + i \sin(45° + k \cdot 72°))$

$w_0 = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$

$w_1 = \sqrt{2}\,(\cos 117° + i \sin 117°) \approx -0{,}64 + 1{,}26\,i$

$w_2 = \sqrt{2}\,(\cos 189° + i \sin 189°) \approx -1{,}40 - 0{,}22\,i$

$w_3 = \sqrt{2}\,(\cos 261° + i \sin 261°) \approx -0{,}22 - 1{,}40\,i$

$w_4 = \sqrt{2}\,(\cos 333° + i \sin 333°) \approx 1{,}26 - 0{,}64\,i$

- $z^5 = -4+4i$

$\Leftrightarrow z^5 = 4\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \sin 135°)$

De vijfdemachtswortels van $-4+4i$ zijn:

$w_k = \sqrt{2}\,(\cos(27° + k \cdot 72°) + i \sin(27° + k \cdot 72°))$

$w_0 = \sqrt{2}\,(\cos 27° + i \sin 27°) \approx 1{,}26 + 0{,}64\,i$

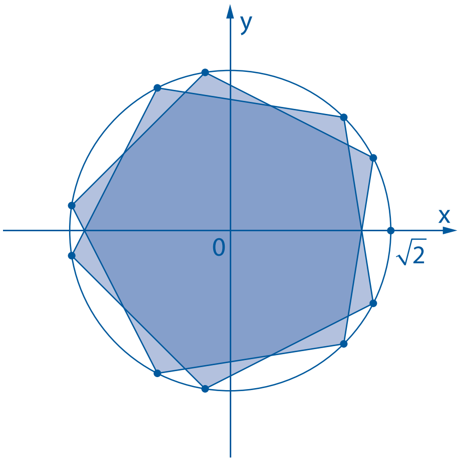
$w_1 = \sqrt{2}\,(\cos 99° + i \sin 99°) \approx -0{,}22 + 1{,}40\,i$

$w_2 = \sqrt{2}\,(\cos 171° + i \sin 171°) \approx -1{,}40 + 0{,}22\,i$

$w_3 = \sqrt{2}\,(\cos 243° + i \sin 243°) \approx -0{,}64 - 1{,}26\,i$

$w_4 = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i \sin 315°) = 1 - i$

Oplossingen : 1 + i; –0,64 + 1,26 i; –1,40 – 0,22 i; –0,22 – 1,40 i; 1,26 – 0,64 i,
1,26 + 0,64 i; –0,22 + 1,40 i; –1,40 + 0,22 i; –0,64 – 1,26 i; 1 – i.



Opdracht 47 bladzijde 64

Twee hoekpunten van een regelmatige achthoek met straal 2 liggen op de y-as.

Bepaal een vergelijking waarvan de beeldpunten van de oplossingen de hoekpunten zijn van deze achthoek.

Er geldt dat $z^8 = (2i)^8 = (-2i)^8$; dus $z^8 = 256$.

Opdracht 48 bladzijde 64

Bereken $(2 + 2i)^{4m}$ als $m \in \mathbb{Z}$.

$$(2 + 2i)^{4m}$$

$$= \left(\sqrt{8}(\cos 45° + i \sin 45°)\right)^{4m}$$

$$= 64^m(\cos(m \cdot 180°) + i \underbrace{\sin(m \cdot 180°)}_{0})$$

$$= \begin{cases} 64^m & \text{als m even is} \\ -64^m & \text{als m oneven is} \end{cases}$$

$$= (-64)^m$$

Opdracht 49 bladzijde 64

Los op zonder rekentoestel.

Als z een complex getal is dat een oplossing is van de vergelijking $z^2 - z + 1 = 0$, dan is z^{24} gelijk aan

A 1 **B** -1 **C** i

D $-i$ **E** geen van vorige

(Bron © Alabama Statewide High School Math Contest, 2011)

$z^2 - z + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$z = \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ of $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

$z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ of $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z = \cos 60° - i \sin 60°$ of $z = \cos 60° + i \sin 60°$

$z = \cos(-60°) + i \sin(-60°)$ of $z = \cos 60° + i \sin 60°$

Hieruit volgt dat

$z^{24} = \cos(-24 \cdot 60°) + i \sin(-24 \cdot 60°)$ of $z^{24} = \cos(24 \cdot 60°) + i \sin(24 \cdot 60°)$

$\Leftrightarrow z^{24} = \cos(4 \cdot \underbrace{6 \cdot 60°}_{360°}) - i \sin(4 \cdot \underbrace{6 \cdot 60°}_{360°})$ of $z^{24} = \cos(4 \cdot \underbrace{6 \cdot 60°}_{360°}) + i \sin(4 \cdot \underbrace{6 \cdot 60°}_{360°})$

$\Leftrightarrow z^{24} = 1$ of $z^{24} = 1$

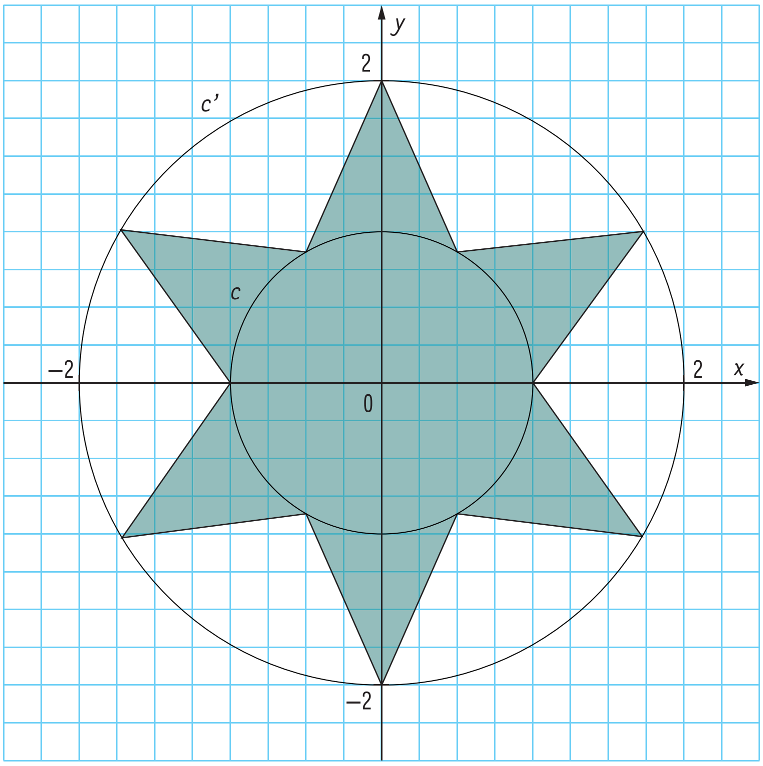
$\Leftrightarrow z^{24} = 1$

Antwoord A is juist.

Opdracht 50 bladzijde 64

De hoekpunten van een twaalfpuntige ster liggen op de cirkels $c(O,1)$ en $c'(O,2)$.

Van welke vergelijking zijn de beeldpunten van de oplossingen de hoekpunten van deze ster?



Het punt met coördinaat (1, 0) is een hoekpunt van de zeshoek met straal 1, dus geldt

$z^6 = 1^6 = 1$ of $z^6 - 1 = 0$.

Het punt met coördinaat (0, 2) is een hoekpunt van de zeshoek met straal 2, dus

$z^6 = (2i)^6 = -64$, m.a.w. $z^6 + 64 = 0$.

Voor de hoekpunten van de twaalfpuntige ster geldt dus:

$(z^6 - 1)(z^6 + 64) = 0$, m.a.w. $z^{12} + 63z^6 - 64 = 0$.