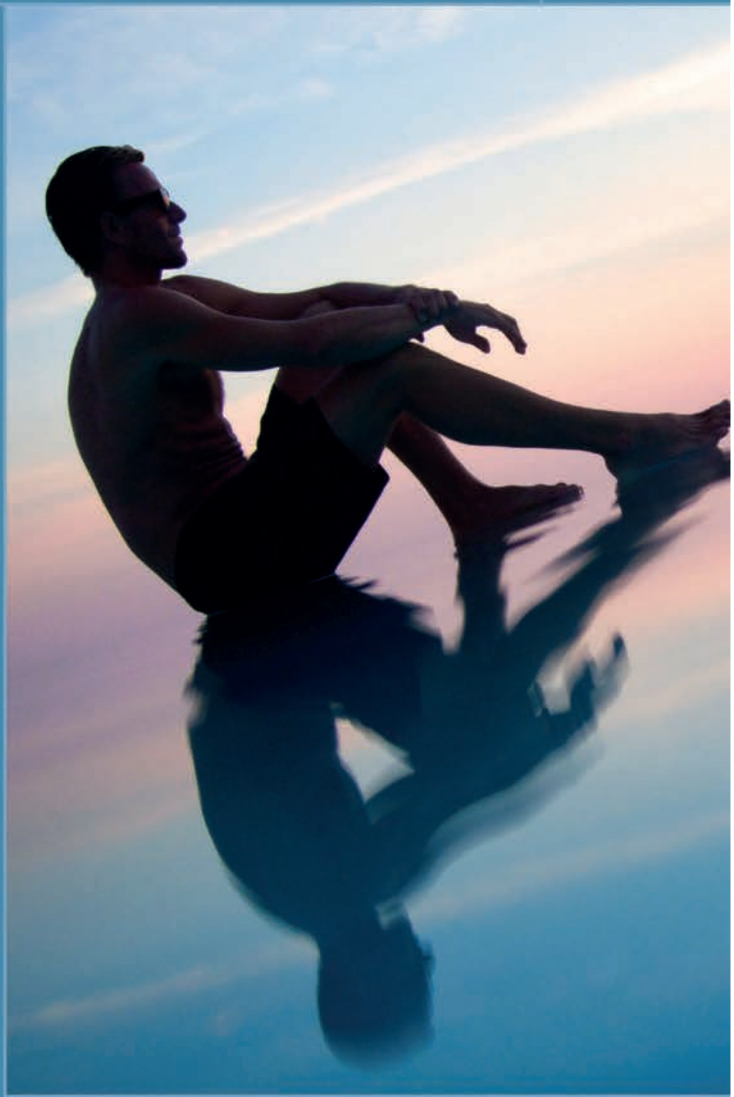
Hoofdstuk 3

Irrationale functies



Opdracht 1 bladzijde 108

De stralen van 3 bollen verhouden zich als 1 : 2 : 3.
Ze hebben samen een inhoud van 250 cm^3.

Bereken de straal van de kleinste bol op 0,1 cm nauwkeurig.

Noem de straal van de kleinste bol r, dan is

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 + \frac{4}{3}\pi(3r)^3 = 250$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (1 + 8 + 27) = 250$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{250 \cdot 3}{4 \cdot \pi \cdot 36} = \frac{125}{24\pi}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{24\pi}} \approx 1{,}184$$

De straal van de kleinste bol is 1,18 cm.

Opdracht 2 bladzijde 108
Bepaal alle mogelijke waarden van *x* als

1 $x^5 = 32$

$\Leftrightarrow x = 2$

2 $x^5 = -32$

$\Leftrightarrow x = -2$

3 $x^4 = 16$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

4 $x^4 = -16$

heeft geen reële oplossingen.

Opdracht 3 bladzijde 110
Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sqrt[3]{64} = 4$

2 $\sqrt[4]{81} = 3$

3 $-\sqrt[4]{81} = -3$

4 $\sqrt[5]{100\,000} = 10$

5 $\sqrt[19]{-1} = -1$

6 $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$

7 $\sqrt[3]{(-3)^9} = (-3)^3 = -27$

8 $\sqrt[4]{(-3)^{12}} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

9 $\left(\sqrt[3]{10}\right)^6 = \left[\left(\sqrt[3]{10}\right)^3\right]^2 = 10^2 = 100$

10 $\sqrt[6]{27^4} = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$

Opdracht 4 bladzijde 110

Bereken indien mogelijk. Rond, indien nodig, af op 3 cijfers na de komma.

1 $\sqrt[5]{-248\,832} = -12$

2 $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$

3 $\sqrt[6]{-100}$ bestaat niet in $\mathbb{R}$

4 $\sqrt[15]{15} = 1{,}198$

Opdracht 5 bladzijde 110

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $x^5 = 10$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}585$

2 $x^6 = 102$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[6]{102} \approx 2{,}162$ of $x = -\sqrt[6]{102} \approx -2{,}162$

3 $2x^7 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^7 = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[7]{\frac{5}{2}} \approx 1{,}140$

4 $4x^8 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^8 = -2$

geen reële oplossingen

5 $4(x+1)^4 - 1 = 63$

$\Leftrightarrow (x + 1)^4 = 16$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2$ of $x + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

6 $(2x^3 + 1)^6 = 64$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 1 = 2$ of $2x^3 + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2}$ of $x^3 = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}794$ of $x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \approx -1{,}145$

7 $(x^4 - 1)^{-3} = 8$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 1)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \quad \text{of} \quad x = -\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx -1{,}107$$

8 $-2(x+3)^{-5} + 1 = 12$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^{-5} = -\frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^5 = -\frac{2}{11}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \sqrt[5]{\frac{-2}{11}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{-2}{11}} - 3 \approx -3{,}711$$

Opdracht 6 bladzijde 110

Bewijs de volgende eigenschappen als $m, n \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}^+$.

1 $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Te bewijzen: als $n \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}^+$,

dan is $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Bewijs

Aangezien $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n =$ — rekenregel machten

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n =$ — $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$a \cdot b$

is volgens de definitie

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Te bewijzen: als $m, n \in \mathbb{N}_0$ en $a \in \mathbb{R}^+$,
dan is $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Bewijs

Aangezien $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n$ rekenregel machten

$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$= a$

is volgens de definitie
$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Opdracht 7 bladzijde 111

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$.

1 $\sqrt[3]{x^6} = x^2$ want $(x^2)^3 = x^6$

2 $\sqrt[4]{x^{12}} = x^3$ want $(x^3)^4 = x^{12}$

3 $\sqrt[6]{x^{-42}} = x^{-7}$ want $(x^{-7})^6 = x^{-42}$

Opdracht 8 bladzijde 113

Bereken zonder rekentoestel.

1 $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

2 $81^{-0,25} = 81^{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$

3 $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

of $27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

4 $49^{1,5} = (7^2)^{1,5} = 7^3 = 343$

Opdracht 9 bladzijde 113

Bepaal x op 0,001 nauwkeurig als

1 $x^{\frac{4}{5}} = 1000$

$\Leftrightarrow x = 1000^{\frac{5}{4}} \approx 5623{,}413$

2 $4x^{-6} = 5$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} = x^6$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{4}{5}} \approx 0{,}963$ of $x = -\sqrt[6]{\frac{4}{5}} \approx -0{,}963$

3 $x^{1,75} = 2$

$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{1,75}} \approx 1{,}486$

4 $3x^{-1,3} = 13$

$\Leftrightarrow \frac{3}{13} = x^{1,3}$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{13}\right)^{\frac{1}{1,3}} \approx 0{,}324$

Opdracht 10 bladzijde 113

Herleid de volgende formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ en bereken a en b op 0,01 nauwkeurig.

1 $P = \frac{1}{2} \cdot Q^3 \Leftrightarrow 2P = Q^3$

$\Leftrightarrow Q = (2P)^{\frac{1}{3}} = a \cdot P^b$

met $a = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}26$ en $b = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

2 $P = 3 \cdot Q^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \frac{P}{3} = Q^{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow Q = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = a \cdot P^b$

met $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 0{,}42$ en $b = \frac{4}{5} = 0{,}80$

3 $P = 0{,}22 \cdot Q^{-0{,}33} \Leftrightarrow \dfrac{P}{0{,}22} = Q^{-0{,}33}$

$\Leftrightarrow Q = \left(\dfrac{P}{0{,}22}\right)^{\frac{1}{-0{,}33}} = a \cdot P^b$

met $a = (0{,}22)^{\frac{1}{0{,}33}} \approx 0{,}01$ en $b = -\dfrac{1}{0{,}33} \approx -3{,}03$

4 $\sqrt[7]{P^2Q^3} = 2 \Leftrightarrow P^2Q^3 = 2^7 = 128$

$\Leftrightarrow Q^3 = 128 \cdot P^{-2}$

$\Leftrightarrow Q = (128 \cdot P^{-2})^{\frac{1}{3}} = a \cdot P^b$

met $a = 128^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}04$ en $b = -\dfrac{2}{3} \approx -0{,}67$

Opdracht 11 bladzijde 114

De tienkamp is een sportwedstrijd waarbij de atleten in twee dagen tijd tien atletieknummers moeten afleggen. Bij elke discipline kunnen de atleten punten verdienen, volgens een systeem dat is vastgelegd door de wereld-atletiekbond (IAAF).

De looponderdelen zijn hardlopen over verschillende afstanden en hordelopen.
De prestatie (tijd) wordt gegeven in seconden.
De springonderdelen zijn verspringen, hoogspringen en polsstokspringen.
De prestatie (afstand of hoogte) wordt in centimeter gegeven.
De werponderdelen zijn kogelstoten, speerwerpen en discuswerpen. De prestatie (afstand) wordt in meter gegeven.

Om het aantal punten P voor een atleet bij een prestatie M te berekenen, gebruikt men de volgende formules:

$P = a(b - M)^c$ bij de looponderdelen
$P = a(M - b)^c$ bij de spring- en werponderdelen

In de formules staan a, b en c voor coëfficiënten die verschillen per discipline.
Je vindt ze in de tabel.

De punten worden altijd naar beneden afgerond op een geheel getal.

onderdeel	*a*	*b*	*c*
100 m	25,4347	18	1,81
verspringen	0,14354	220	1,4
kogelstoten	51,39	1,5	1,05
hoogspringen	0,8465	75	1,42
400 m	1,53775	82	1,81
110 m horden	5,74352	28,5	1,92
discuswerpen	12,91	4	1,1
polsstokhoogspringen	0,2797	100	1,35
speerwerpen	10,14	7	1,08
1500 m	0,03768	480	1,85

1 Waarom is de formule bij de looponderdelen van een andere vorm dan die bij de spring- en werponderdelen?

Bij lopen presteer je het best bij een zo klein mogelijke tijd.
Bij spring- of werponderdelen krijg je meer punten bij een zo groot mogelijke afstand.

2 Tijdens de Olympische spelen van 2012 behaalde de Belg Hans Van Alphen de volgende resultaten tijdens de eerste dag van de tienkamp:

100 m: 11,05 s
verspringen: 764 cm
kogelstoten: 15,48 m

Bereken zijn puntentotaal na deze drie onderdelen.

100 m: $P_1 = 25{,}4347\ (18 - 11{,}05)^{1{,}81} \approx 850$

verspringen: $P_2 = 0{,}14354\ (764 - 220)^{1{,}4} \approx 970$

kogelstoten: $P_3 = 51{,}39\ (15{,}48 - 1{,}5)^{1{,}05} \approx 819$

Totaal na 3 onderdelen: 2639 punten.

3 De Nederlander Ingmar Vos liep de 100 m in 10,98 s en haalde bij het verspringen 727 cm.

Hoe ver moest hij bij het kogelstoten gooien om in de voorlopige stand vóór Hans Van Alphen te eindigen?

100 m: $P_1 = 25{,}4347\ (18 - 10{,}98)^{1{,}81} \approx 865$

verspringen: $P_2 = 0{,}14354\ (727 - 220)^{1{,}4} \approx 878$

Hij moet minstens 2640 – 865 – 878 = 897 punten halen bij het kogelstoten.

$$51{,}39 \cdot (M - 1{,}5)^{1{,}05} \geqslant 897$$

$$\Leftrightarrow (M - 1{,}5)^{1{,}05} \geqslant \frac{897}{51{,}39}$$

$$\Leftrightarrow M - 1{,}5 \geqslant \left(\frac{897}{51{,}39}\right)^{\frac{1}{1{,}05}}$$

$$\Leftrightarrow M \geqslant 1{,}5 + \left(\frac{897}{51{,}39}\right)^{\frac{1}{1{,}05}} = 16{,}7326\ldots$$

Ingmar Vos moet bij het kogelstoten minstens 16,74 m halen.

Opdracht 12 bladzijde 116

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1 Bereken $f(2)$, $g(2)$, $g(f(2))$ en $f(g(2))$.

$f(2) = 3 \qquad g(f(2)) = g(3) = \dfrac{1}{3}$

$g(2) = \dfrac{1}{2} \qquad f(g(2)) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$

2 Welke van de drie voorschriften is het juiste?

$g(f(x)) =$

a $\dfrac{x^2-1}{x}$ **b** $\dfrac{1}{x^2-1}$ **c** $\dfrac{1}{x^2}-1$

$g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \rightarrow$ b

3 Bepaal het voorschrift van de functie $y = f(g(x))$.

$f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

Opdracht 13 bladzijde 117

Als $f(x) = x - 1$ en $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, bepaal dan

1 $f\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

2 $g\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$

3 $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{1 - x - 1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1}$

4 $g(f(x)) = g(x - 1) = \dfrac{1}{x}$

5 $f(f(2)) = f(1) = 0$

6 $g(g(2)) = g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + 1} = \dfrac{3}{4}$

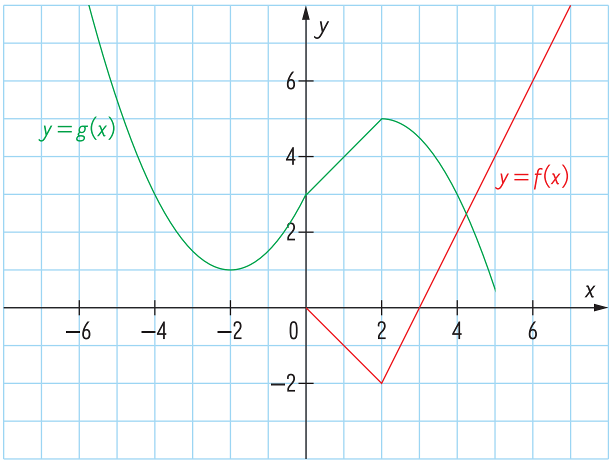
7 $f(f(x)) = f(x - 1) = x - 2$

8 $g(g(x)) = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+1} + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1 + x + 1}{x+1}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

Opdracht 14 bladzijde 117

De grafieken van de functies f en g zijn gegeven.

Bepaal hiermee



1 $f(g(2))$ $= f(5) = 4$

2 $g(f(0))$ $= g(0) = 3$

3 $(f \circ g)(0)$ $= f\big(g(0)\big) = f(3) = 0$

4 $(g \circ f)(2)$ $= g\big(f(2)\big) = g(-2) = 1$

5 $(g \circ g)(-2)$ $= g\big(g(-2)\big) = g(1) = 4$

6 $(f \circ f)(4)$ $= f\big(f(4)\big) = f(2) = -2$

Opdracht 15 bladzijde 118

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 6$.

1 Bepaal a als $f(a) = 70$.

$f(a) = a^3 + 6 = 70$

$\Leftrightarrow a^3 = 64$

$\Leftrightarrow a = 4$

2 Bepaal b als $f(b) = 2$.

$f(b) = b^3 + 6 = 2$

$\Leftrightarrow b^3 = -4$

$\Leftrightarrow b = \sqrt[3]{-4}$

3 Bepaal x als $f(x) = y$.

$f(x) = x^3 + 6 = y$

$\Leftrightarrow x^3 = y - 6$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y - 6}$

Opdracht 16 bladzijde 120
Welke van de volgende functies zijn elkaars inverse? Verklaar.

$f_1(x) = \dfrac{3}{x}$ $\qquad g_1(x) = \dfrac{x}{3}$

$f_2(x) = x + 3$ $\qquad g_2(x) = x - 3$

$f_3(x) = 2x + 1$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{x}{2} - 1$

$f_4(x) = \sqrt[5]{x-2}$ $\qquad g_4(x) = x^5 + 2$

$f_5(x) = \dfrac{x-2}{7}$ $\qquad g_5(x) = 7x + 2$

- f_2 en g_2 zijn elkaars inverse

  nl. $f_2\big(g_2(x)\big) = f_2(x - 3) = x$

  en $g_2\big(f_2(x)\big) = g_2(x + 3) = x$

- f_4 en g_4 zijn elkaars inverse

  nl. $f_4\big(g_4(x)\big) = f_4(x^5 + 2) = \sqrt[5]{x^5} = x$

  en $g_4\big(f_4(x)\big) = g_4\left(\sqrt[5]{x-2}\right) = x$

- f_5 en g_5 zijn elkaars inverse

  nl. $f_5\big(g_5(x)\big) = f_5(7x + 2) = \dfrac{7x + 2 - 2}{7} = x$

  en $g_5\big(f_5(x)\big) = g_5\left(\dfrac{x-2}{7}\right) = 7 \cdot \dfrac{x-2}{7} + 2 = x$

Opdracht 17 bladzijde 120
Bepaal algebraïsch het voorschrift van f^{-1}.

1 $f(x) = 5x$

- f: $y = 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{5}$
- $x \leftrightarrow y$: $\quad y = \dfrac{x}{5}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5}$

2 $f(x) = \dfrac{-5}{3x+4}$

- $f\colon\ y = \dfrac{-5}{3x+4}$

$$\underset{x \neq -\frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} \quad y(3x+4) = -5$$

$$\underset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 3x + 4 = \frac{-5}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{-5}{y} - 4 = \frac{-5-4y}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-5-4y}{3y}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\quad y = \dfrac{-5-4x}{3x}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-5-4x}{3x}$

3 $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

- $f\colon\ y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

$$\underset{x \neq -\frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} \quad 3xy + 2y = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x(3y-2) = -2y - 1$$

$$\underset{y \neq \frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{-2y-1}{3y-2}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\quad y = \dfrac{-2x-1}{3x-2}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{3x-2}$

4 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$

- $f\colon\ y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}} \Leftrightarrow y^3=\dfrac{x}{x+1}$

$$\underset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} \quad y^3x+y^3=x$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y^3-1)=-y^3$$

$$\underset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x=\frac{y^3}{1-y^3}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\quad y=\dfrac{x^3}{1-x^3}$
- $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3}{1-x^3}$

Opdracht 18 bladzijde 120

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x)=3x^3+x^2+x-1$.

Bepaal x als $f^{-1}(x)=-3$.

$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

$\Rightarrow f(-3)=x$

$\Rightarrow x=3\cdot(-3)^3+(-3)^2-3-1=-76$

Opdracht 19 bladzijde 121

De functies met voorschrift $f(x)=x^3+6$ en $g(x)=\sqrt[3]{x-6}$ zijn inverse functies.

1 Het punt $P(2,a)$ ligt op de grafiek van f en het punt $Q(14,b)$ ligt op de grafiek van g.

Bepaal a en b.

$a=14$ en $b=2$

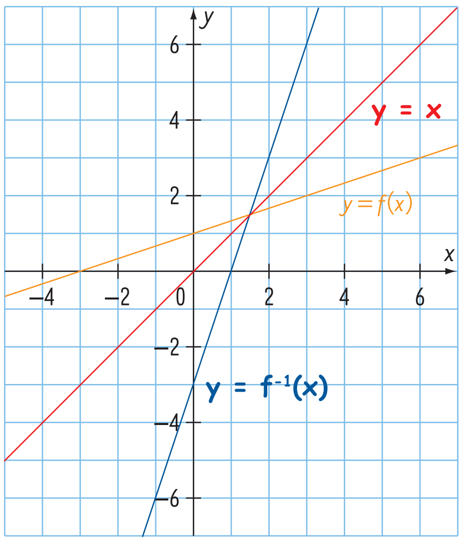
2 Als het punt $P(a,b)$ op de grafiek van f ligt, welk punt Q ligt dan zeker op de grafiek van g?

$Q(b,\ a)$

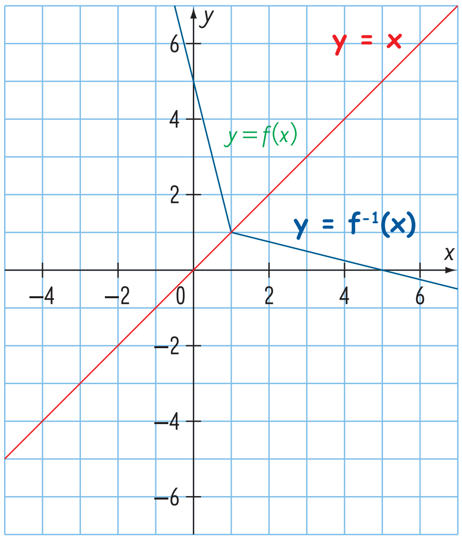
Opdracht 20 bladzijde 123

De grafiek van de functie f is gegeven. Teken de grafiek van haar inverse functie f^{-1}.

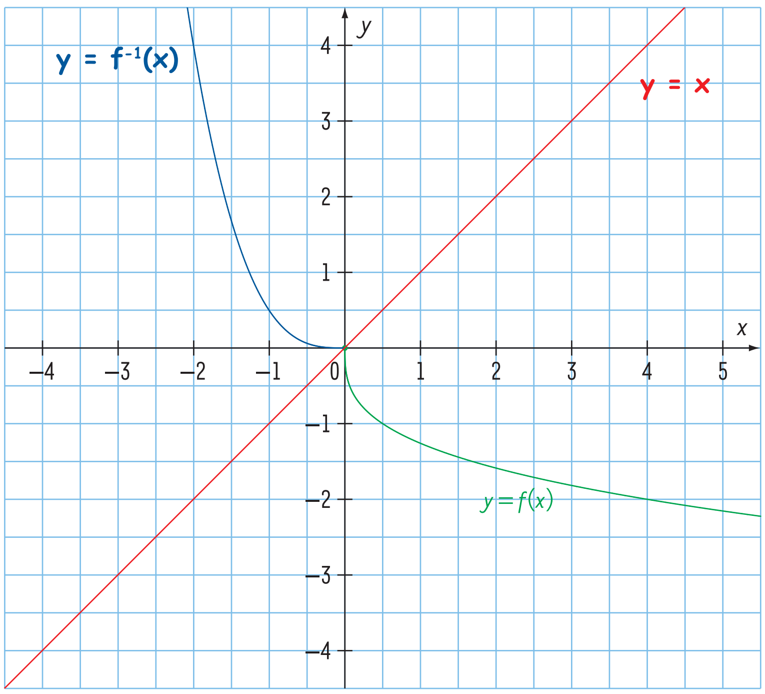
1



2



3



Opdracht 21 bladzijde 123

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - 1$.

1 Bepaal a als $f(a) = 48$.

$$f(a) = a^2 - 1 = 48 \Leftrightarrow a^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow a = 7 \quad \text{of} \quad a = -7$$

2 Bepaal x als $f(x) = y$ en $y \geqslant -1$.

$$f(x) = x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1$$

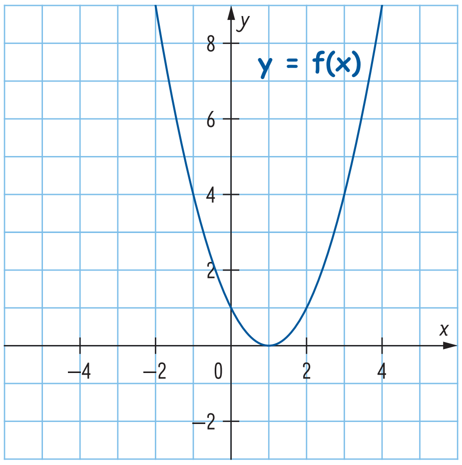
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{y+1} \text{ als } y \geqslant -1$$

Opdracht 22 bladzijde 126
Geef een mogelijke beperking van dom *f* zodat *f* inverteerbaar wordt.

1 $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Beperking: dom f: $[1, +\infty[$
of $]-\infty, 1]$
of $]-\infty, 0]$
of ...

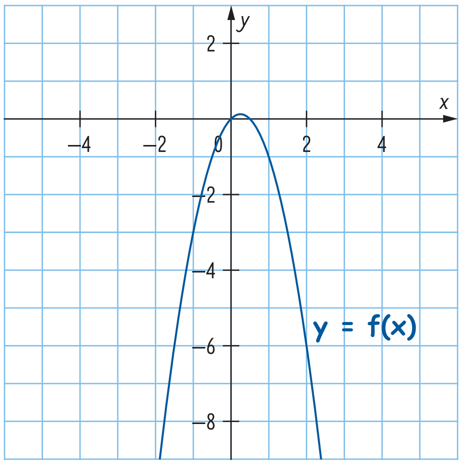


2 $f(x) = -2x^2 + x$

$f(x) = -2x^2 + x$

$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

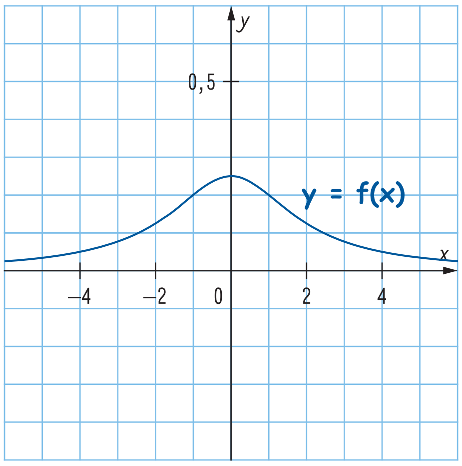
Beperking: dom f: $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$
of $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$
of $[1, +\infty[$
of ...



3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

Beperking: dom f: $]-\infty, 0]$
of $[0, +\infty[$
of ...



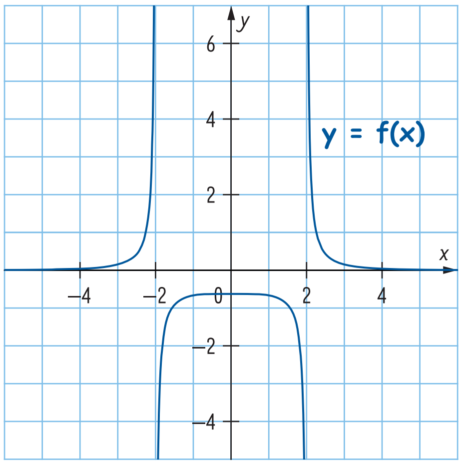
4 $f(x)=\dfrac{10}{x^4-16}$

$f(x) = \dfrac{10}{x^4 - 16}$

Beperking: dom f: $[0, 2[\cup]2, +\infty[$

of $]-\infty, -2[\cup]-2, 0]$

of ...

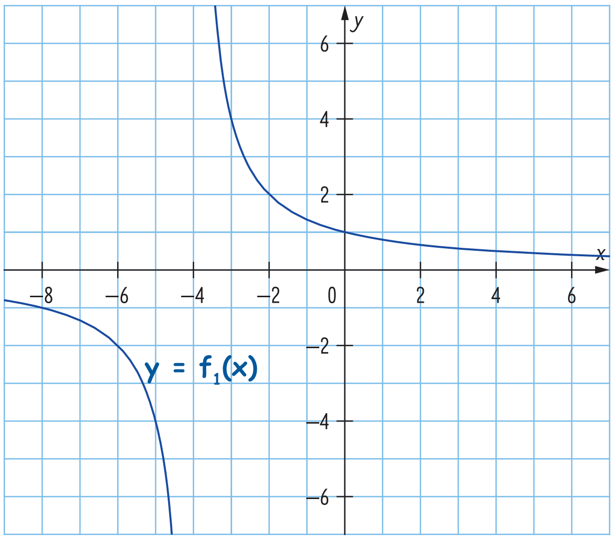


Opdracht 23 bladzijde 126

Ga grafisch na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn.

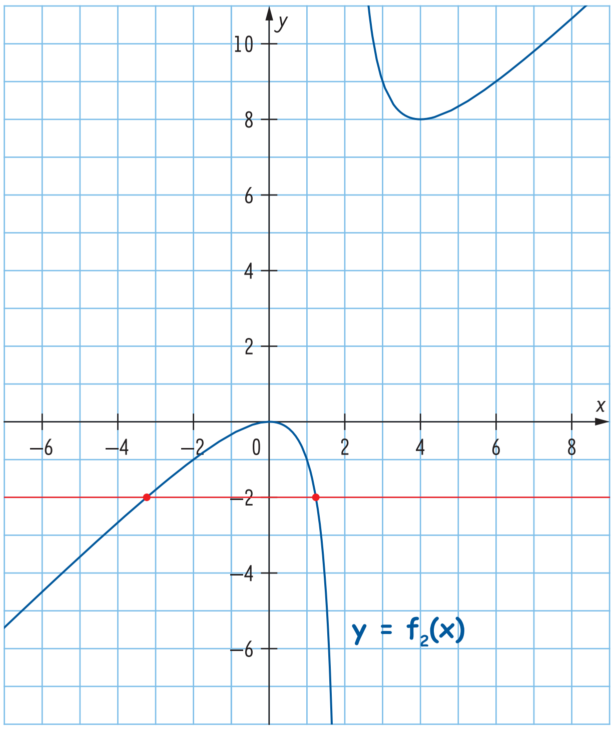
1 $f_1(x)=\dfrac{4}{x+4}$

f_1 is inverteerbaar.



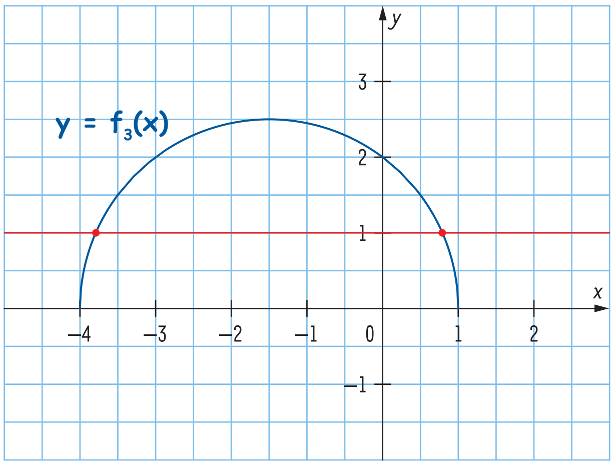
2 $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

f_2 is niet inverteerbaar.



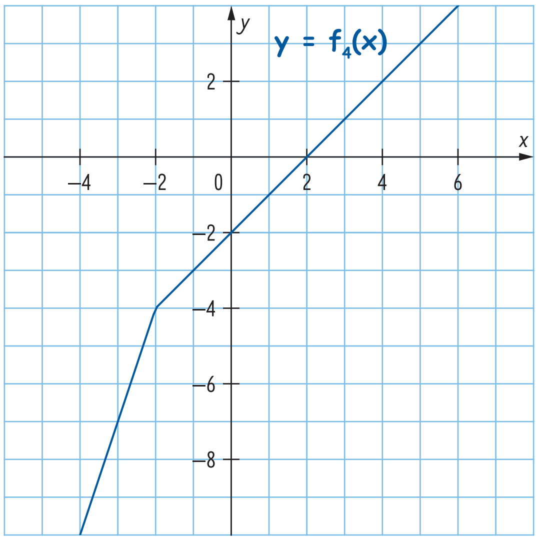
3 $f_3(x) = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

f_3 is niet inverteerbaar.



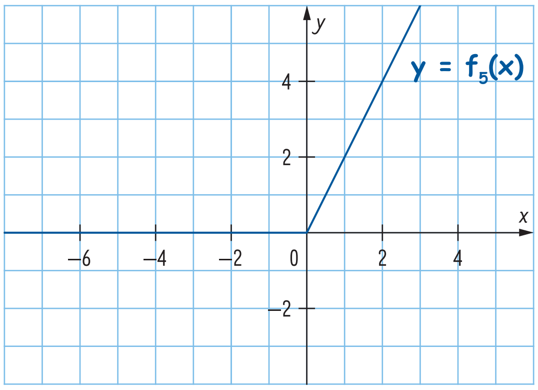
4 $f_4(x) = 2x - |x + 2|$

f_4 is inverteerbaar.



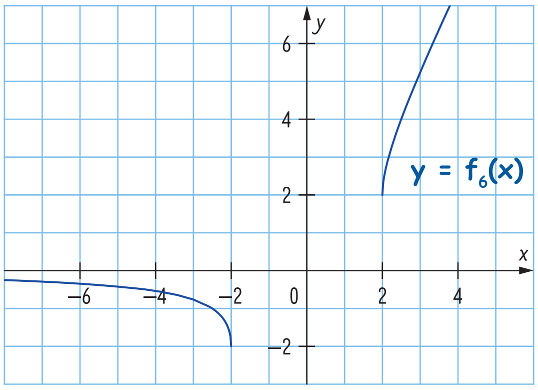
5 $f_5(x) = x + |x|$

f_5 is niet inverteerbaar want de rechte met vergelijking y = 0 heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van f.



6 $f_6(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

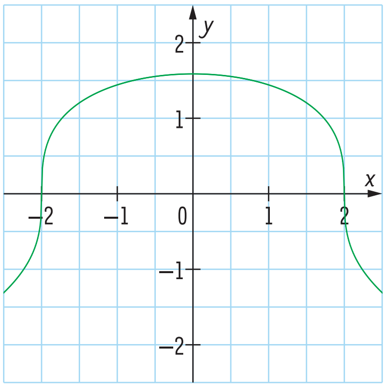
f_6 is inverteerbaar.



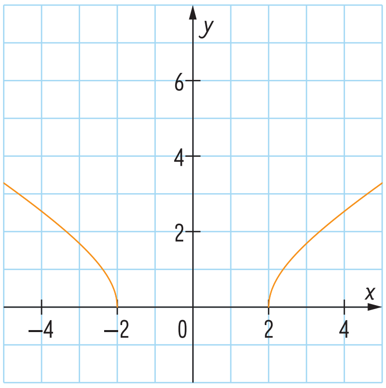
Opdracht 24 bladzijde 127

Kies de juiste grafiek bij elk van de voorschriften zonder een rekentoestel te gebruiken.

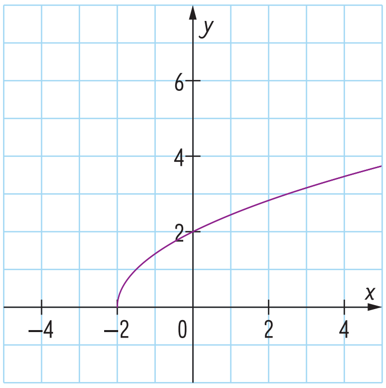
A



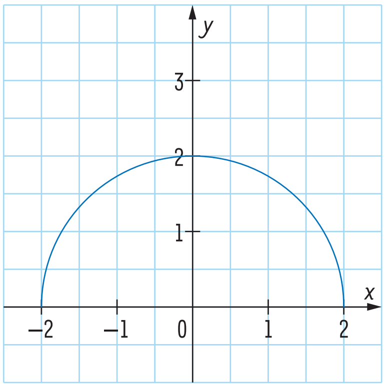
B



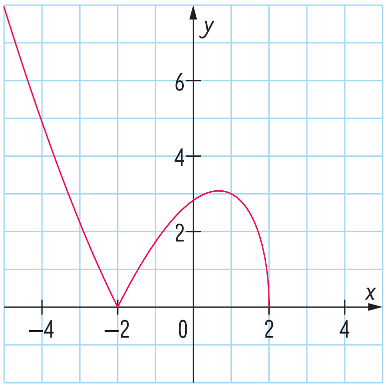
C



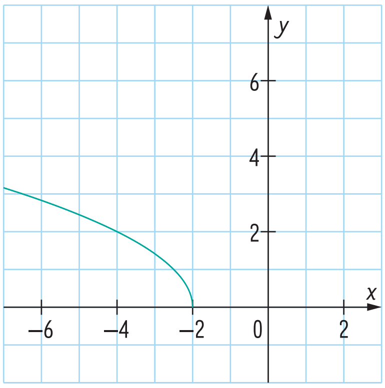
D



E



F



1 $f(x) = \sqrt{-2x - 4}$

$f(x) = \sqrt{-2x - 4}$ is enkel gedefinieerd als $-2x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant -2$

$\Rightarrow$ grafiek F

2 $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ is enkel gedefinieerd als $x^2 - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -2$ of $x \geqslant 2$

$\Rightarrow$ grafiek B

3 $h(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

$h(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$ is gedefinieerd voor elke x en heeft 2 en -2 als nulpunten.

$\Rightarrow$ grafiek A

Opdracht 25 bladzijde 130
Bepaal het domein en de nulpunten van de irrationale functies met voorschrift

1 $f(x)=\sqrt{x^2-8x+4}$

- f(x) bestaat
  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 \geqslant 0$

x		$4-2\sqrt{3}$		$4+2\sqrt{3}$	
x^2-8x+4	+	0	-	0	+

$\Leftrightarrow x \leqslant 4 - 2\sqrt{3}$ of $x \geqslant 4 + 2\sqrt{3}$

dom f = $\left]-\infty, 4-2\sqrt{3}\right] \cup \left[4+2\sqrt{3}, +\infty\right[$

- f(x) = 0
  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}$ of $x = 4 + 2\sqrt{3}$

  Nulpunten van f: $4 - 2\sqrt{3}$ en $4 + 2\sqrt{3}$.

2 $f(x)=\sqrt{x^3-5x^2+6x}$

- f(x) bestaat
  $\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x \geqslant 0$

x		0		2		3	
x	-	0	+	+	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	+	0	-	0	+
x^3-5x^2+6x	-	0	+	0	-	0	+

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$ of $x \geqslant 3$

dom f = $[0, 2] \cup [3, +\infty[$

- Nulpunten van f: 0, 2 en 3.

3 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-8}{x^4-7x^2+10}}$

- $f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 10 \neq 0$

  Nu is $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 2$ of $x^2 = 5$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$

  dom f $= \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$

- $f(x) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ ($\in$ dom f)

  $\Rightarrow$ Nulpunt f: 8.

Opdracht 26 bladzijde 130

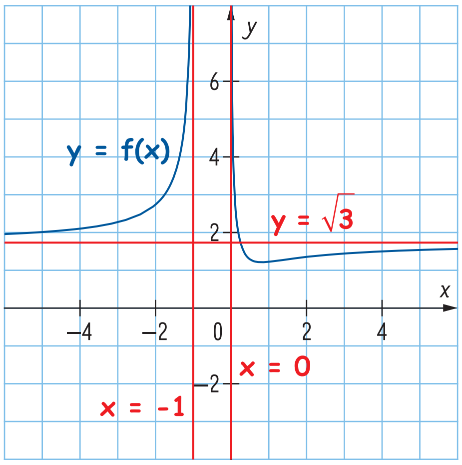
Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2-x+1}{x^2+x}}$.

- dom f

x		-1		0	
$3x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$x^2 + x$	+	0	-	0	+
$\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + x}$	+	|	-	|	+

  dom f $=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$



- Aangezien -1 en 0 nulpunten zijn van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn, zijn de V.A. $x = 0$ en $x = -1$.

- Als $x \to +\infty$, zal $\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + x} \to 3$

  zodat $f(x) \to \sqrt{3}$.

  $y = \sqrt{3}$ is H.A. van de grafiek van f.

Opdracht 27 bladzijde 131

Zijn de functies met voorschrift $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ en $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ gelijk? Verklaar.

- $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

x		-1		1	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ dom $f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

- $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

is gedefinieerd als $x - 1 \geqslant 0$ én $x + 1 \geqslant 0$ dus enkel als $x \geqslant 1$

$\Rightarrow$ dom $g = [1, +\infty[$

- dom $f \neq$ dom g zodat f en g verschillende functies zijn.

Opdracht 28 bladzijde 131

Gegeven de cirkel $c(M,4)$ met $M(2,3)$.

1 Bepaal een vergelijking van c.

$c \leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

2 De cirkel kan opgevat worden als de unie van twee functiegrafieken.

Bepaal het voorschrift van de bijbehorende functies.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)^2 = 16 - (x - 2)^2$$
$$= 16 - (x^2 - 4x + 4)$$
$$= -x^2 + 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \quad \text{of} \quad y - 3 = -\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 + \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \quad \text{of} \quad y = 3 - \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

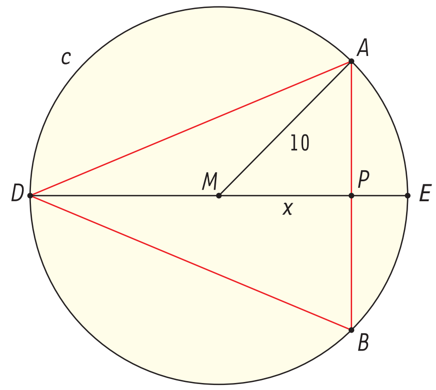
De twee bijbehorende functies zijn

$$f_1(x) = 3 + \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

en $f_2(x) = 3 - \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$

Opdracht 29 bladzijde 131

In de cirkel $c(M,10)$ snijdt de verticale koorde $[AB]$ de horizontale koorde $[DE]$ in P. Stel $|MP| = x$.



1 Bereken de oppervlakte van de driehoek ABD als $x = 7$.

Als $x = |MP| = 7$,

dan is $|AP| = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$

en $|AB| = 2\sqrt{51}$.

De oppervlakte van ΔABD is dan

$$\frac{2\sqrt{51} \cdot 17}{2} = 17\sqrt{51}.$$

2 Toon aan dat voor de oppervlakte A van de driehoek ABD geldt:

$A(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$.

$$A(x) = \frac{|AB| \cdot |DP|}{2} = |AP| \cdot |DP|$$

met $|AP| = \sqrt{|AM|^2 - |MP|^2} = \sqrt{100 - x^2}$

en $|DP| = |DM| + |MP| = 10 + x$

zodat $A(x) = (10 + x) \cdot \sqrt{100 - x^2}$

3 Voor welke x is de oppervlakte van de driehoek ABD maximaal?

Bepaal voor die waarde van x de zijden van de driehoek ABD.

Met het rekentoestel vinden we dat de oppervlakte $A(x)$ maximaal is voor $x = 5$.

Dan is $|AB| = 2\sqrt{100 - 25} = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$,

$|AD| = \sqrt{15^2 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ en $|DB| = |DA|$

De driehoek is dan gelijkzijdig.

Opdracht 30 bladzijde 131

Om de vergelijking $-x+4=\sqrt{3x-2}$ op te lossen, gaan we beide leden kwadrateren.

Zijn de oplossingen van de vergelijking $(-x+4)^2=3x-2$ dezelfde als die van $-x+4=\sqrt{3x-2}$? Verklaar.

- $(-x + 4)^2 = 3x - 2$

  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 3x - 2$

  $\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 9$ of $x = 2$

- $x = 2$ is een oplossing van $-x + 4 = \sqrt{3x - 2}$

  want $\underbrace{-2 + 4}_{= 2} = \underbrace{\sqrt{3 \cdot 2 - 2}}_{= \sqrt{4}}$

- $x = 9$ is geen oplossing van $-x + 4 = \sqrt{3x - 2}$

  want $\underbrace{-9 + 4}_{= -5} \neq \underbrace{\sqrt{3 \cdot 9 - 2}}_{= 5}$

  Voor $x = 9$ is de getalwaarde in het linkerlid tegensteld aan die in het rechterlid.

  Via kwadrateren worden deze tegenstelde waarden gelijk, zodat 9 wel een oplossing wordt van de 'gekwadrateerde' vergelijking.

De oplossingen van deze twee vergelijkingen zijn bijgevolg niet dezelfde.

Opdracht 31 bladzijde 135

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{5x-1}+2=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x - 1} = 3$

BVW: $5x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 5x - 1 = 9$

$\Leftrightarrow x = 2$

2 $\sqrt{3x-6}+x=-5$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x - 6} = -5 - x$

BVW: $3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

KWVW: $-5 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -5$

Uit de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarde is onmiddelijk duidelijk dat deze vergelijking geen oplossingen kan hebben.

3 $2\sqrt{3x^2 - x + 15} = 5x$

$\Updownarrow$

BVW: $3x^2 - x + 15 \geqslant 0$ is oké $\forall\, x \in \mathbb{R}$

KWVW: $5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

$4(3x^2 - x + 15) = 25x^2$

$\Updownarrow$

$-13x^2 - 4x + 60 = 0$

$\Updownarrow$

$x = 2$ of $\cancel{x = \frac{-30}{13}}$

$x = \frac{-30}{13}$ wordt geschrapt omdat $\frac{-30}{13}$ niet voldoet aan de KWVW.

Opdracht 32 bladzijde 135

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} = 5$

$\Updownarrow$

BVW: $x - 4 \geqslant 0$ en $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

$x - 4 + x + 1 + 2\sqrt{(x-4)(x+1)} = 25$

$\Updownarrow$

$2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 25 - 2x + 3$

$\Updownarrow$

$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 14 - x$

$\Updownarrow$

BVW: $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ of $x \geqslant 4$

KWVW: $14 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 14$

$x^2 - 3x - 4 = 196 - 28x + x^2$

$\Updownarrow$

$25x = 200$

$\Updownarrow$

$x = 8$

2 $\sqrt{x+5}+3=\sqrt{12-x}$

$\Updownarrow$ BVW: $x + 5 \geqslant 0$ en $12 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 12$

$x + 5 + 6\sqrt{x + 5} + 9 = 12 - x$

$\Updownarrow$

$6\sqrt{x + 5} = -2 - 2x$

$\Updownarrow$

$3\sqrt{x + 5} = -1 - x$

$\Updownarrow$

BVW: $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$
KWVW: $-1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ (*)

$9(x + 5) = x^2 + 2x + 1$

$\Updownarrow$

$0 = x^2 - 7x - 44$

$\Updownarrow$

$x = -4$ of $\cancel{x = 11}$

11 voldoet niet aan (*)

3 $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$

$\Updownarrow$

$\sqrt{x + 4} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 4}$

$\Updownarrow$

BVW: $x + 4 \geqslant 0$ en $x - 1 \geqslant 0$ en $x - 4 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \geqslant 4$ (*)

$x + 4 = x - 1 + x - 4 + 2\sqrt{(x - 1)(x - 4)}$

$\Updownarrow$

$-x + 9 = 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

$\Updownarrow$

BVW: $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ of $x \geqslant 4$
KWVW: $-x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 9$

$x^2 - 18x + 81 = 4(x^2 - 5x + 4)$

$\Updownarrow$

$-3x^2 + 2x + 65 = 0$

$\Updownarrow$

$\cancel{x = \frac{-13}{3}}$ of $x = 5$

$\frac{-13}{3}$ voldoet niet aan (*)

Opdracht 33 bladzijde 135

Bepaal het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift
$f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}-5$.

- $f(x)$ bestaat
  $\Leftrightarrow 2x + 1 \geqslant 0$ en $x \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow x \geqslant 0$
  dom $f = [0, +\infty[$

- $f(x) = 0$
  $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$ BVW: $2x + 1 \geqslant 0$ en $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow 2x + 1 + x + 2\sqrt{(2x+1)x} = 25$
  $\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = 24 - 3x$ BVW: $2x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$ of $x \geqslant 0$
  KWVW: $24 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 8$ (*)
  $\Leftrightarrow 4(2x^2 + x) = 576 - 144x + 9x^2$
  $\Leftrightarrow -x^2 + 148x - 576 = 0$
  $\Leftrightarrow \cancel{x = 144}$ of $x = 4$ 144 voldoet niet aan (*)
  Nulpunt f : 4.

Opdracht 34 bladzijde 139

Bereken, indien mogelijk, zonder rekentoestel.

1 $\sqrt[4]{10\,000} = 10$
2 $\sqrt[3]{-27} = -3$
3 $\sqrt[7]{1} = 1$
4 $\sqrt[5]{-32} = -2$
5 $\sqrt[3]{125} = 5$
6 $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10$
7 $\sqrt[9]{-1} = -1$
8 $\sqrt[4]{-81}$ bestaat niet
9 $\sqrt[3]{216} = 6$
10 $-\sqrt[10]{1024} = -2$

Opdracht 35 bladzijde 139

Bereken zonder rekentoestel.

1 $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

2 $1000^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10}$

3 $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

4 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (4^2)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

5 $4^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} \cdot 64^{\frac{1}{6}} = (4 \cdot 16 \cdot 64)^{\frac{1}{6}} = (4 \cdot 4^2 \cdot 4^3)^{\frac{1}{6}} = (4^6)^{\frac{1}{6}} = 4$

6 $\dfrac{320^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}} = \left(\dfrac{320}{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

Opdracht 36 bladzijde 139

Schrijf als een macht van 3.

1 $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$

2 $\sqrt{\dfrac{1}{3}} = (3^{-1})^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

3 $9\sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$

4 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{81}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{-\frac{4}{5}}$

5 $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3} = 3^{\frac{1}{4}-1} = 3^{-\frac{3}{4}}$

6 $\sqrt{\sqrt[5]{3}} = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{10}}$

Opdracht 37 bladzijde 140

Welke van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk?

A $4x^{\frac{1}{7}}$

C $x^{\frac{4}{7}}$

E $\dfrac{1}{4}x^{-7}$

G $7x^{-4}$

I $\dfrac{1}{4x^7}$

B $7\sqrt[4]{x}$

D $4\sqrt[7]{x}$

F $\dfrac{7}{x^4}$

H $\sqrt[4]{x^7}$

J $\sqrt[7]{x^4}$

A $4x^{\frac{1}{7}} = 4 \cdot \sqrt[7]{x}$ D

C $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$ J

E $\dfrac{1}{4}x^{-7} = \dfrac{1}{4x^7}$ I

F $\dfrac{7}{x^4} = 7x^{-4}$ G

Opdracht 38 bladzijde 140

Los de volgende vergelijkingen op. Rond af op 3 cijfers na de komma.

1 $\sqrt[5]{x^3} = -4$

$\Leftrightarrow x^3 = (-4)^5$

$\Leftrightarrow x = (-4)^{\frac{5}{3}} \approx -10{,}079$

2 $(x-2)^{\frac{5}{8}} = 20{,}13$

$\Leftrightarrow x - 2 = 20{,}13^{\frac{8}{5}}$

$\Leftrightarrow x = 2 + 20{,}13^{\frac{8}{5}} \approx 123{,}941$

3 $x^{5{,}25} = 4589$

$\Leftrightarrow x = 4589^{\frac{1}{5{,}25}} \approx 4{,}983$

4 $(x^3+1)^4 = 5$

$\Leftrightarrow x^3 + 1 = \sqrt[4]{5}$ of $x^3 + 1 = -\sqrt[4]{5}$

$\Leftrightarrow x^3 = -1 + \sqrt[4]{5}$ of $x^3 = -1 - \sqrt[4]{5}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt[4]{5}} \approx 0{,}791$ of $x = \sqrt[3]{-1 - \sqrt[4]{5}} \approx -1{,}356$

Opdracht 39 bladzijde 140

$\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$ is gelijk aan

A $x\sqrt{x}$ **B** $\sqrt{x^5}$ **C** $\sqrt[6]{x}$ **D** $\sqrt[8]{x}$ **E** $\sqrt[8]{x^7}$

$$\begin{aligned}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} &= \left(x \cdot \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(x \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= x^{\frac{7}{8}}\\ &= \sqrt[8]{x^7}\end{aligned}$$

E

Opdracht 40 bladzijde 140

De formule $H = c \cdot M^{\frac{2}{3}}$ geeft, bij benadering, het verband aan tussen de massa M (in kg) en de huidoppervlakte H (in dm^2) van een diersoort. De constante c, de zogenaamde Meeh-coëfficiënt, verschilt per diersoort. Hiernaast vind je een tabel van c voor een aantal diersoorten.

diersoort	c
muis	9,0
rat	9,1
kat	10,0
konijn	9,8
schaap	8,4
varken	9,0
koe	9,0
paard	10,0
egel	7,5
vleermuis	57,5
slang	12,5
mens	11,2

1 Hoe groot is, volgens dit model, de huidoppervlakte van een mens met een massa van 75 kg?

$$H = 11{,}2 \cdot 75^{\frac{2}{3}}\ dm^2 = 199{,}2\ dm^2$$

2 Schrijf de massa van de mens als functie van de huidoppervlakte.

$$\left(\frac{H}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(M^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{H}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3 Wat is de massa van een mens met een huidoppervlakte van 150 dm^2 volgens dit model?

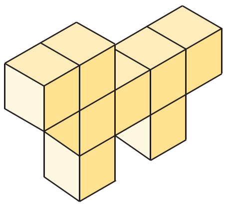
$$M = \left(\frac{150}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}}\ kg \approx 49{,}0\ kg$$

4 Verklaar waarom in deze tabel de Meeh-coëfficiënt van een vleermuis de grootste is.

Een vleermuis heeft een kleine massa en een grote huidoppervlakte door de enorme vleugels.

Opdracht 41 bladzijde 141

De figuur hiernaast is opgebouwd uit kubussen met ribben van r cm.



1 Druk r uit in functie van de inhoud I.

$$I = 8r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{I}{8}} = \frac{\sqrt[3]{I}}{2}$$

2 Toon aan dat de oppervlakte A gelijk is aan $8{,}5 I^{\frac{2}{3}}$.

$$A = 34r^2 \Leftrightarrow A = 34 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{I}}{2}\right)^2 = 8{,}5\ I^{\frac{2}{3}}$$

3 Bereken de inhoud van de figuur en de lengte van de ribben als de oppervlakte gelijk is aan 80 cm^2.

$$A = 80 = 8{,}5 \cdot I^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{80}{8{,}5}\right)^{\frac{3}{2}} = I$$

$$\Leftrightarrow I \approx 28{,}874$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{I}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{80}{8{,}5}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}534$$

De inhoud is 28,874 cm^3 en de lengte van de ribbe is 1,534 cm.

Opdracht 42 bladzijde 141

In de tabel staat voor een aantal planeten in ons zonnestelsel de afstand A tot de zon in miljoen kilometer en de omlooptijd T in dagen.

planeet	A	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150

Het verband tussen A en T wordt gegeven door de formule $T = c \cdot A^{1,5}$ waarbij c een constante is.

1 Uit de tabel kun je afleiden dat voor de planeet Jupiter geldt dat $4329 = c \cdot 778^{1,5}$.
Bereken c op twee cijfers na de komma nauwkeurig.

$$4329 = c \cdot 778^{1,5} \Leftrightarrow c = \frac{4329}{778^{1,5}} \approx 0{,}20$$

2 Ga na dat je voor de andere planeten dezelfde c krijgt.

Saturnus: $c = \dfrac{10\,753}{1427^{1,5}} \approx 0{,}20$

Uranus: $c = \dfrac{30\,660}{2870^{1,5}} \approx 0{,}20$

Neptunus: $c = \dfrac{60\,150}{4497^{1,5}} \approx 0{,}20$

3 De omwentelingstijd van Mercurius is 88 dagen.
Hoe ver ligt Mercurius van de zon?

$$T = 88 = 0{,}20 \cdot A^{1,5} \Leftrightarrow \left(\frac{88}{0{,}20}\right)^{\frac{1}{1,5}} = A$$

$$\Leftrightarrow A \approx 58$$ Mercurius ligt ongeveer 58 miljoen km van de zon.

4 Hoe ver ligt de aarde van de zon?

$$T = 365{,}25 = 0{,}20 \cdot A^{1,5} \Leftrightarrow \left(\frac{365{,}25}{0{,}20}\right)^{\frac{1}{1,5}} = A$$

$$\Leftrightarrow A \approx 149$$ De aarde ligt ongeveer 149 miljoen km van de zon.

Opdracht 43 bladzijde 142

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$ en $y > 0$.

Schrijf het resultaat zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

1 $$\left(\frac{4x^4}{9y^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}(x^4)^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}(y^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2}{3y^{-1}} = \frac{2}{3}x^2y$$

2 $$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}}{x^{-\frac{5}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-2-\left(-\frac{5}{2}\right)} \cdot y^{\frac{2}{3}-1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= x^{\frac{1}{2}-2+\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}-1+\frac{1}{3}}$$
$$= x^1 \cdot y^0$$
$$= x$$

3 $$\frac{(x^{16} \cdot y^{-24})^{\frac{1}{8}}}{(x^{-4} \cdot y)^{-1}} = \frac{x^{16 \cdot \frac{1}{8}}\, y^{-24 \cdot \frac{1}{8}}}{x^{(-4)\cdot(-1)} \cdot y^{-1}}$$
$$= \frac{x^2 \cdot y^{-3}}{x^4 \cdot y^{-1}}$$
$$= x^{2-4} \cdot y^{-3-(-1)}$$
$$= x^{-2}y^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2y^2}$$

4 $(2x^6)^{\frac{1}{4}} \cdot (2x^{10})^{\frac{1}{12}} \cdot (2x)^{\frac{2}{3}}$ $= 2^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}\,2}} \cdot 2^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{12}\,6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}$

$= 2^1x^3 = 2x^3$

5 $\dfrac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[9]{x^3} \cdot y} = \dfrac{x^{\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{9}\,3}} \cdot y}$

$= x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{4}{3}-1}$

$= x^1 \cdot y^{\frac{1}{3}} = x \cdot \sqrt[3]{y}$

6 $\dfrac{\sqrt[3]{x \cdot y^5} \cdot \sqrt[4]{y^2}}{\sqrt[3]{x^{-2}} \cdot \sqrt{y^{-1}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}\,2}}}{x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

$= x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$= x^1 \cdot y^{\frac{8}{3}} = x \cdot \sqrt[3]{y^8}$

Opdracht 44 bladzijde 142

Als $f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^{x-\frac{1}{2}}$, bepaal dan zonder rekentoestel welk van de volgende getallen het grootst is.

A $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **B** $f(0)$ **C** $f(-1)$

D $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ **E** $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

A $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1^{-1} = 1$

B $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

C $f(-1) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

D $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

E $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6}$

B $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[6]{8}$ is het grootst.

Opdracht 45 bladzijde 143

Bewijzen van de rekenregels van machten met rationale exponenten

Als $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$, dan geldt:

1 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

2 $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

3 $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

4 $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

5 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Bewijs van **1**

Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen. (*)

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ definitie macht met rationale exponent

$$a^p \cdot a^q = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = \left(\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^s \cdot \left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = (a^m)^s \cdot (a^r)^n$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = a^{ms} \cdot a^{rn}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = a^{ms+rn}$$

$\Downarrow$ $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{ms+rn}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

2 <u>T.B.</u>: $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$

<u>Bew.</u>: Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \left(\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \frac{\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^s}{\left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^n}$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \frac{\left(a^m\right)^s}{\left(a^r\right)^n}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = a^{ms-rn}$$

$\Downarrow$ $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{\frac{ms-rn}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

3 T.B.: $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$ met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$

Bew.: Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \frac{m}{n}$ en $q = \frac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$\left(a^p\right)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$\left(a^p\right)^q = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left(\sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left[\left[\sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r\right)}\right]^s\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolgen definitie n-de machtswortel

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left(\sqrt[n]{\left(a^m\right)^r}\right)^n$$

$\Downarrow$ gevolg def. n-de machtswortel en rekenregel machten met gehele exponenten

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = a^{m \cdot r}$$

$\Downarrow$ $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\left(a^p\right)^q = a^{\frac{mr}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$\left(a^p\right)^q = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$$

4 <u>T.B.</u>: $(ab)^p = a^p \cdot b^p$ met $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $p \in \mathbb{Q}$

<u>Bew.</u>: Aangezien $p \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ met $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$(ab)^p = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$(ab)^p = \sqrt[n]{(ab)^m}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left((ab)^p\right)^n = \left[\sqrt[n]{(ab)^m}\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$\left((ab)^p\right)^n = (ab)^m$$

$\Downarrow$ rekenregel machten met gehele exponenten

$$\left((ab)^p\right)^n = a^m \cdot b^m$$

$\Downarrow$ $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$(ab)^p = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m}$$

$\Downarrow$ eigenschap n-de machtswortels (oefening 6/1)

$$(ab)^p = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$$

$\Downarrow$ definitie n-de machtswortel

$$(ab)^p = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p$$

5 T.B.: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ = met a, b $\in \mathbb{R}_0^+$ en p $\in \mathbb{Q}$

Bew.: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \left(a \cdot \dfrac{1}{b}\right)^p$

$= a^p \cdot \left(\dfrac{1}{b}\right)^p$ zie 4

$= a^p \cdot \left(b^{-1}\right)^p$

$= a^p \cdot b^{-p}$ zie 3

$= a^p \cdot \dfrac{1}{b^p}$ rekenen in $\mathbb{R}$

$= \dfrac{a^p}{b^p}$

Opdracht 46 bladzijde 144

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f(x) = x^2 + 3x$ en $g(x) = -2x + 5$.

Bepaal

1 $(f \circ g)(0)$ $= f(g(0)) = f(5) = 40$

2 $(g \circ f)(1)$ $= g(f(1)) = g(4) = -3$

3 $(g \circ g)(3)$ $= g(g(3)) = g(-1) = 7$

4 $[f \circ (g \circ f)](1)$ $= f((g \circ f)(1)) \overset{2}{=} f(-3) = 0$

5 $(f \circ g)(x)$ $= f(g(x)) = f(-2x + 5)$
$= (-2x + 5)^2 + 3(-2x+5)$
$= 4x^2 - 26x + 40$

6 $(g \circ f)(x)$ $= g(f(x)) = g(x^2 + 3x)$
$= -2(x^2 + 3x) + 5$
$= -2x^2 - 6x + 5$

7 $(f \circ f)(x)$ $= f(f(x)) = f(x^2 + 3x)$
$= (x^2 + 3x)^2 + 3(x^2 + 3x)$
$= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x$

8 $[g \circ (g \circ g)](x)$ $= g(g(g(x))) = g(g(-2x + 5))$
$= g(-2(-2x + 5) + 5) = g(4x - 5)$
$= -2(4x - 5) + 5 = -8x + 15$

Opdracht 47 bladzijde 144

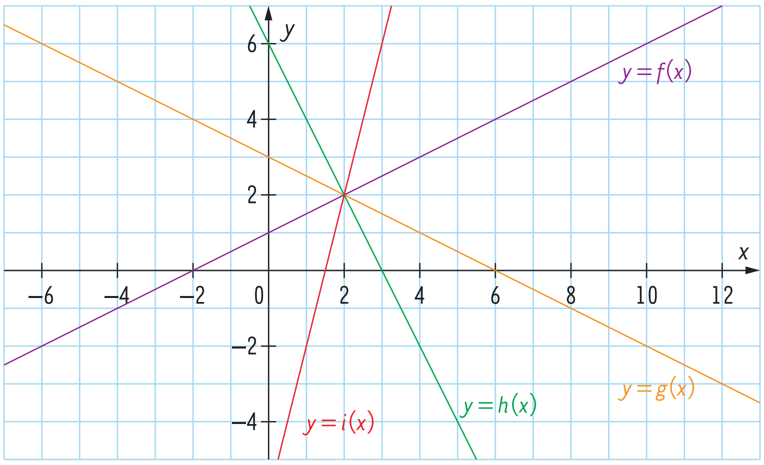
Vervolledig de volgende tabel.

x	$f(x)$	$g(x)$	$g(f(x))$
-1	3	1	8
1	-1	4	**1**
3	1	**8**	**4**

- $g(f(1)) = g(-1) = 1$
- $g(f(-1)) = 8$ en $f(-1) = 3 \Rightarrow g(3) = 8$
- $g(f(3)) = g(1) = 4$

Opdracht 48 bladzijde 144

Welk paar grafieken hoort bij inverse functies?



g en h zijn inverse functies want hun grafieken zijn elkaars spiegelbeeld om de rechte met vergelijking $y = x$

Opdracht 49 bladzijde 144

1 Verklaar waarom de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + 3x - 4$ niet inverteerbaar is.

Verwisselen we x en y in het voorschrift van f, dan vinden we

$x = y^2 + 3y - 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 3y - x - 4 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-x - 4)$

$D = 4x + 25$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{4x + 25}}{2}$$

Dit is niet het voorschrift van een functie.

Ofwel

De grafiek van f is een parabool, zodat meerdere x-waarden een zelfde y-waarde hebben.

2 Hoe kun je het domein van f beperken zodanig dat functie met beperkt domein g wel inverteerbaar is?

$f(x) = x^2 + 3x - 4$

$$x_T = \frac{-3}{2}$$

zodat we het domein van f bv. kunnen beperken tot $\left]-\infty, \frac{-3}{2}\right]$ of $\left[\frac{-3}{2}, +\infty\right[$

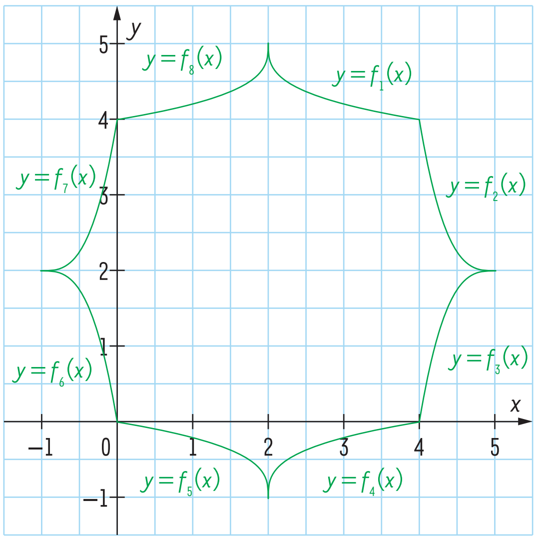
3 Bepaal het voorschrift van g^{-1}.

Nemen we als beperking $\left[\frac{-3}{2}, +\infty\right[$, dan is $g^{-1}(x) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{4x+25}}{2}$.

Opdracht 50 bladzijde 145

De volgende figuur is opgebouwd uit acht functiegrafieken.

Welke paren grafieken horen bij inverse functies?



f_1 en f_2 zijn inverse functies.

f_3 en f_8 zijn inverse functies.

f_4 en f_7 zijn inverse functies.

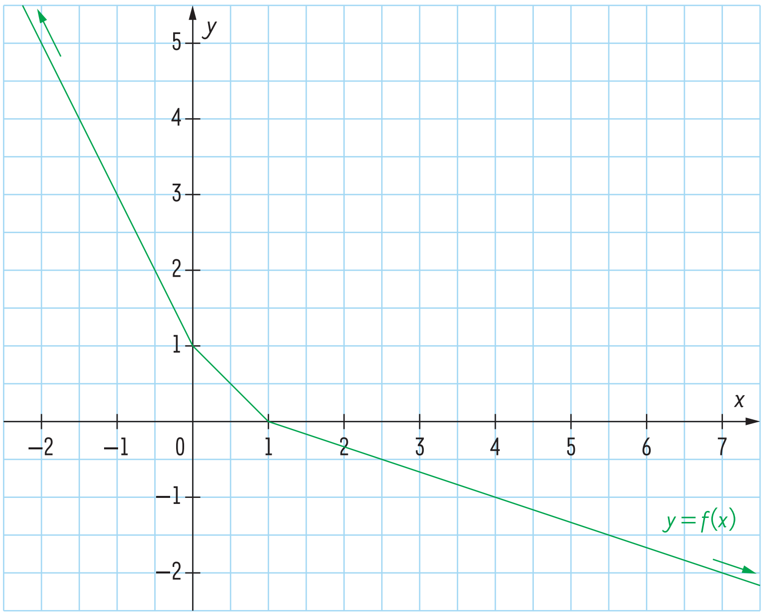
f_5 en f_6 zijn inverse functies.

De grafieken van inverse functies zijn elkaars spiegelbeeld om de rechte met vergelijking $y = x$.

Opdracht 51 bladzijde 145

De grafiek van een functie f is gegeven.

Bepaal



1 $f^{-1}(3) = -1$

want $f(-1) = 3$

2 $f^{-1}(0) = 1$

want $f(1) = 0$

3 $f^{-1}(-1) = 4$

want $f(4) = -1$

4 $f^{-1}(-8) = 25$

want $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

voor $x \geqslant 1$

en $f(25) = -8$

Opdracht 52 bladzijde 146

Kies het juiste antwoord.

Het spiegelbeeld van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 4x^3 + 5$ om de rechte met vergelijking $y = x$ is de grafiek van de functie met voorschrift

A $g(x) = \dfrac{1}{4x^3 + 5}$ **B** $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{4}}$ **C** $g(x) = \dfrac{4}{x^3} + 5$

D $g(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x} + 5$ **E** $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{4} - 5$

$f\colon\ y = 4x^3 + 5$

$f^{-1}\colon\ x = 4y^3 + 5 \Leftrightarrow 4y^3 = x - 5$

$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{4}} \rightarrow$ B

Opdracht 53 bladzijde 146

Bepaal van de inverteerbare functies het voorschrift van de inverse functie.

1 $f(x) = 3x + 4$

- $f\colon\ y = 3x + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-4}{3}$
- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{x-4}{3}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$

2 $f(x) = 5$

$f(x) = 5$ is niet inverteerbaar.

3 $f(x) = 2x^5 - 32$

- $f\colon y = 2x^5 - 32 \Leftrightarrow x^5 = \dfrac{y + 32}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{y + 32}{2}}$$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \sqrt[5]{\dfrac{x + 32}{2}}$
- $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x + 32}{2}}$

4 $f(x) = -2\sqrt[3]{x - 1}$

- $f\colon y = -2 \cdot \sqrt[3]{x - 1} \Leftrightarrow y^3 = -8(x - 1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{y^3}{8} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y^3}{8} + 1$$

- $x \leftrightarrow y\colon y = -\dfrac{x^3}{8} + 1$
- $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{8}x^3 + 1$

5 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

- $f\colon y = \dfrac{1}{1 - x} \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} y - xy = 1$

$$\Leftrightarrow xy = y - 1$$

$$\overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y - 1}{y}$$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \dfrac{x - 1}{x}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

6 $f(x) = \dfrac{4x}{x-3}$

- $f\colon\ y = \dfrac{4x}{x-3} \overset{x \neq 3}{\Leftrightarrow} xy - 3y = 4x$

  $\Leftrightarrow\ x(y-4) = 3y$

  $\overset{y \neq 4}{\Leftrightarrow}\ x = \dfrac{3y}{y-4}$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{3x}{x-4}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{x-4}$

7 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

- $f\colon\ y = \dfrac{x-1}{x+2} \overset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} xy + 2y = x - 1$

  $\Leftrightarrow\ x(y-1) = -2y - 1$

  $\overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow}\ x = \dfrac{2y+1}{1-y}$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{2x+1}{1-x}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$

8 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}}$

- $f\colon\ y = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{x^2+2}{x^2}$

  $\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}\ x^2y^2 - x^2 = 2$

  $\overset{x \neq \pm 1}{\Leftrightarrow}\ x^2 = \dfrac{2}{y^2-1}$

  $\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{y^2-1}}$

f is niet inverteerbaar.

Opdracht 54 bladzijde 146

De functie met voorschrift $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ zet een temperatuur x in graden Celcius om in een temperatuur $f(x)$ in graden Fahrenheit.

Bepaal het voorschrift van de inverse functie g van f en geef de betekenis van dit voorschrift.

- $f\colon y = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x = y - 32 \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}(y - 32)$
- $x \leftrightarrow y\colon y = \frac{5}{9}(x - 32)$

Het voorschrift $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ zet een temperatuur x in graden Fahrenheit om in een temperatuur $g(x)$ in graden Celsius.

Opdracht 55 bladzijde 147

Bepaal het voorschrift van de inverse functie van

1 $f\colon x \mapsto \sqrt{x} - 2$

- $f\colon y = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x}$

  $\Leftrightarrow x = (y + 2)^2$ met $y + 2 \geqslant 0$
- $x \leftrightarrow y\colon y = (x + 2)^2$ met $x \geqslant -2$
- $f^{-1}(x) = (x + 2)^2$ met $x \geqslant -2$

2 $f\colon x \mapsto \sqrt[4]{3x + 8}$

- $f\colon y = \sqrt[4]{3x + 8} \Leftrightarrow y^4 = 3x + 8$ met $y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x = \frac{y^4 - 8}{3}$ met $y \geqslant 0$
- $x \leftrightarrow y\colon y = \frac{x^4 - 8}{3}$ met $x \geqslant 0$
- $f^{-1}(x) = \frac{x^4 - 8}{3}$ met $x \geqslant 0$

3 $f: x \mapsto 1 - \sqrt[6]{2-4x}$

- $f: y = 1 - \sqrt[6]{2 - 4x} \Leftrightarrow \sqrt[6]{2 - 4x} = 1 - y$

$$\Leftrightarrow 2 - 4x = (1 - y)^6 \quad \text{met } 1 - y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 - (1 - y)^6}{4} \quad \text{met } y \leqslant 1$$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{2 - (1 - x)^6}{4}$ met $x \leqslant 1$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(1 - x)^6$ met $x \leqslant 1$

4 $f: x \mapsto x^2 + x$ met $x \geqslant 0$

- $f: y = x^2 + x$ met $x \geqslant 0$ (en dus ook $y \geqslant 0$ (*))

$\Leftrightarrow x^2 + x - y = 0$ met $x \geqslant 0$ en $y \geqslant 0$ (*)

$D = 1 + 4y > 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$ met $x \geqslant 0$ en $y \geqslant 0$

Uit de voorwaarden volgt dat

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2}$ met $y \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ met $x \geqslant 0$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ met $x \geqslant 0$

5 $f: x \mapsto 2x^2 - x \quad \text{met } x \leqslant 0$

- $f: y = 2x^2 - x \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en dus } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow 2x^2 - x - y = 0 \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0$

  $D = 1 + 8y > 0$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8y}}{4} \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0$

  Uit de voorwaarden volgt:

  $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8y}}{4} \quad \text{met } y \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y: \ y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{4} \quad \text{met } x \geqslant 0$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{4} \quad \text{met } x \geqslant 0$

Opdracht 56 bladzijde 147

Welke van de volgende functies zijn gelijk aan hun inverse? Verklaar.

$f_1: x \mapsto \sqrt{4 - x^2} \text{ met } 0 \leqslant x \leqslant 2$

- $f_1: y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } 0 \leqslant x \leqslant 2 \ (*)$

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \quad \text{met } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2} \quad \text{aangezien } x \geqslant 0 \ (*)$

- $x \leftrightarrow y: \ y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } x \geqslant 0 \text{ zodat } 0 \leqslant x \leqslant 2$

f_1 is gelijk aan haar inverse.

$f_2: x \mapsto \sqrt{4 - x^2} \text{ met } -2 \leqslant x \leqslant 0$

- $f_2: y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } -2 \leqslant x \leqslant 0 \ (*)$

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \quad \text{met } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{4 - y^2} \quad \text{aangezien } x \leqslant 0 \ (*)$

- $x \leftrightarrow y: \ y = -\sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } x \geqslant 0$

f_2 is niet gelijk aan haar inverse.

f_3: $x \mapsto -\sqrt{4-x^2}$ met $0 \leqslant x \leqslant 2$

- f_3: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $0 \leqslant x \leqslant 2$ (*)

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$ met $y \leqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$ aangezien $x \geqslant 0$ (*)

- $x \leftrightarrow y$: $y = \sqrt{4 - x^2}$ met $x \leqslant 0$

f_3 is niet gelijk aan haar inverse.

f_4: $x \mapsto -\sqrt{4-x^2}$ met $-2 \leqslant x \leqslant 0$

- f_4: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $-2 \leqslant x \leqslant 0$ (*)

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$ met $y \leqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

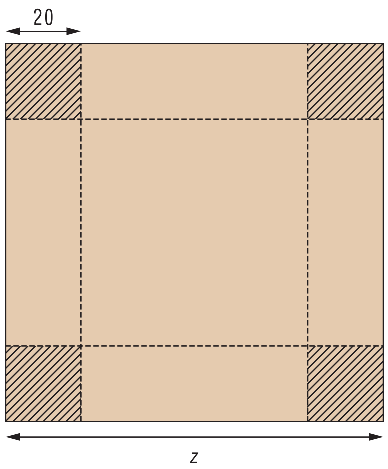
  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{4 - y^2}$ aangezien $x \leqslant 0$ (*)

- $x \leftrightarrow y$: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $x \leqslant 0$ zodat $-2 \leqslant x \leqslant 0$

f_4 is gelijk aan haar inverse.

Opdracht 57 bladzijde 147

In een kartonfabriek worden open dozen gemaakt uit vierkante stukken karton. Hiertoe worden aan de hoeken vierkanten met zijde 20 cm weggesneden.



Het voorschrift van de functie die het volume V (in cm^3) van een doos uitdrukt in functie van de zijde z (in cm) is $V(z) = 20 \cdot (z - 40)^2$.

1 Wat is de betekenis van $V^{-1}(1000)$?

$V^{-1}(1000)$ is de zijde die hoort bij een inhoud van 1000 cm^3.

2 Bepaal het voorschrift van de functie V^{-1}.

- $V = 20(z - 40)^2$ met $z > 40$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{20} = (z-40)^2$$

$$\Leftrightarrow z - 40 = \sqrt{\frac{V}{20}} \quad \text{want } z > 40$$

$$\Leftrightarrow z = 40 + \sqrt{\frac{V}{20}}$$

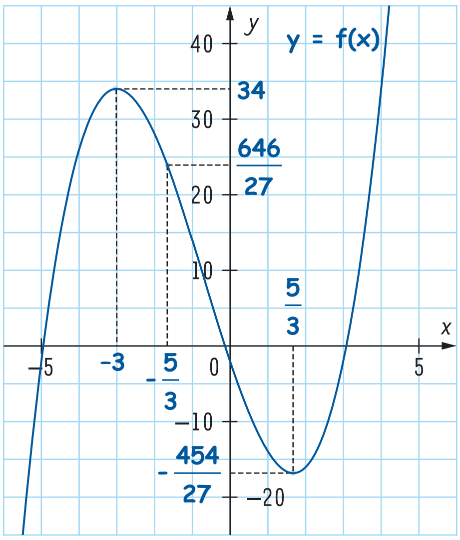
- De functie V^{-1} die de zijde in functie van het volume geeft, heeft als voorschrift

$$z = 40 + \sqrt{\frac{V}{20}}$$

(Omwille van de context is het niet aangewezen de letters z en V om te wisselen)

Opdracht 58 bladzijde 147

1 Bepaal grafisch de grootste waarde van a zodanig dat de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 2$ inverteerbaar is over $[-a, a]$.



Uit de grafiek leiden we het verloopschema af:

x		-3		$\frac{5}{3}$	
f(x)	↗	max 34	↘	min $-\frac{454}{27}$	↗

f is inverteerbaar over $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

2 Bepaal voor de gevonden waarde van a het domein en het bereik van de inverse functie f^{-1} van f met $-a \leqslant x \leqslant a$.

- dom f^{-1} = ber f over $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

  Aangezien $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{646}{27}$ en $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{454}{27}$,

  is dom $f^{-1} = \left[-\frac{454}{27}, \frac{646}{27}\right]$

- ber f^{-1} = dom f = $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Opdracht 59 bladzijde 147

Toon aan dat de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \sqrt{ax+b}$ met $a \neq 0$ een halve parabool is.

- $f\colon y = \sqrt{ax+b}$

  $\Leftrightarrow y^2 = ax + b \quad$ met $y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{y^2 - b}{a} \quad$ met $y \geqslant 0$

- Spiegelen we de grafiek van f om de rechte y = x, dan vinden we als spegelbeeld de grafiek van een functie g met voorschrift

  $y = \dfrac{x^2 - b}{a} \quad$ met $x \geqslant 0$.

  Dit is een grafiek van een halve parabool zodat het spiegelbeeld om de eerste bissectrice ook een halve parabool is.

Opdracht 60 bladzijde 148

1 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ zichzelf als inverse heeft.

- $f\colon y = \dfrac{2x+1}{3x-2} \overset{x \neq 2/3}{\Leftrightarrow} 3xy - 2y = 2x + 1$

  $\Leftrightarrow x(3y - 2) = 2y + 1$

  $\overset{y \neq 2/3}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{2y+1}{3y-2}$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \dfrac{2x+1}{3x-2}$

Dit is opnieuw het voorschrift van f.

2 Aan welke voorwaarden moeten a, b, c en d voldoen opdat de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$ gelijk zou zijn aan haar inverse?

- $f\colon\ y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \overset{x \neq -\frac{d}{c}}{\Leftrightarrow} cxy + dy = ax + b$

$$\Leftrightarrow x(cy - a) = b - dy$$

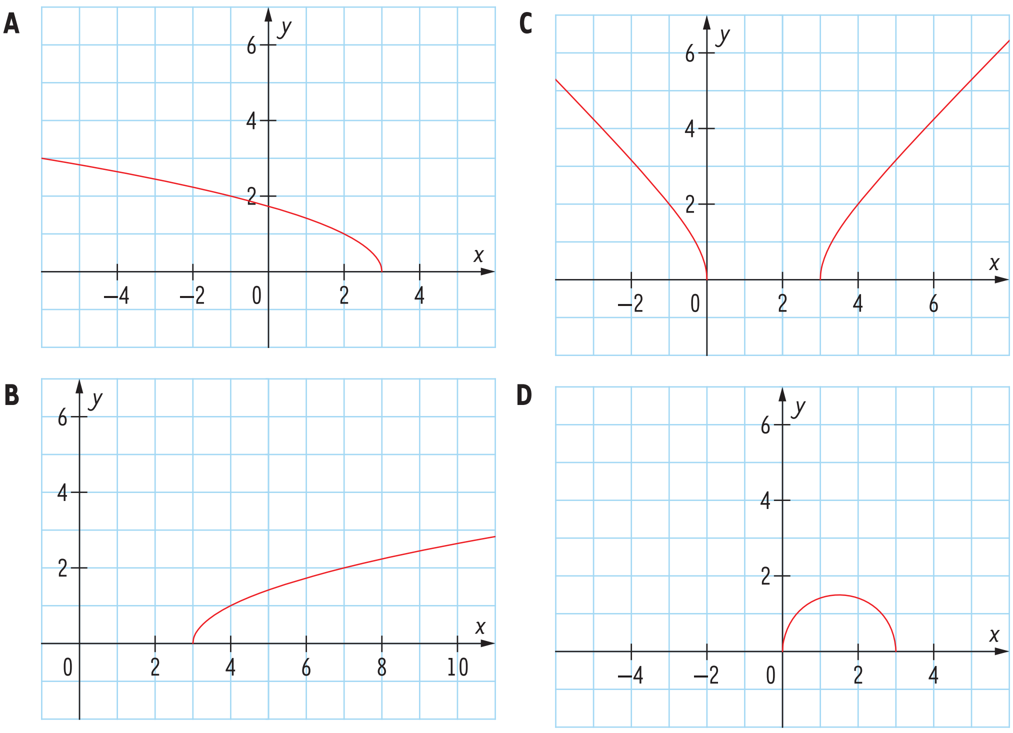
$$\overset{y \neq \frac{a}{c}}{\Leftrightarrow} x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a} = f(x) \Leftrightarrow a = -d$

Opdracht 61 bladzijde 148

Kies de juiste grafiek nadat je het domein en de nulpunten van de functies hebt bepaald.
Los op zonder rekentoestel.

1 $f(x) = \sqrt{-x+3}$ **2** $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$



1 $f(x) = \sqrt{-x + 3}$

- $f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow -x + 3 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow x \leqslant 3$$

- nulpunt f: 3

$\Rightarrow$ grafiek *A*

2 $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

- $g(x)$ bestaat $\Leftrightarrow x^2 - 3x \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow x \leqslant 0$ of $x \geqslant 3$
- nulpunten g: 0 en 3

$\Rightarrow$ grafiek C

Opdracht 62 bladzijde 149

Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift

1 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$

- $f(x)$ bestaat
  $\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 5$
  dom $f = [-2, 5]$

x		-2		5	
$-x^2 + 3x + 10$	$-$	0	$+$	0	$-$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = 0$
  $\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 5$
  nulpunten f: -2 en 5

2 $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x^3 - 1}}$

- $f(x)$ bestaat
  $\Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{x^3 - 1} \geqslant 0$
  $\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 4$
  dom $f =]1, 4]$

x		1		4	
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x^3 - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{4 - x}{x^3 - 1}$	$-$	|	$+$	0	$-$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{x^3 - 1} = 0$
  $\Leftrightarrow x = 4$
  nulpunt f: 4

3 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 5x + 5}}$

- f(x) bestaat niet

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 1) - 5(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$

dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 5x + 5} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ en $x \in$ dom f

$\Leftrightarrow \cancel{x = 1}$ of $x = 2$

$1 \notin$ dom f

nulpunt f: 2

4 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x}}$

- f(x) bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x} \geqslant 0$

x		-2		-1		0		2	
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	-	-	-	0	-	0	+	+	+
$\dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x}$	-	0	+	|	+	|	-	0	+

$\Leftrightarrow -2 \leqslant x < -1$ of $-1 < x < 0$ of $x \geqslant 2$

dom f $= [-2, -1[\cup]-1, 0[\cup [2, +\infty[$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 2$

nulpunten f: -2 en 2

Opdracht 63 bladzijde 149

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x^2+4}=7$

$\sqrt{x^2+4} = 7$

$\Updownarrow$ BVW: $x^2 + 4 \geqslant 0$ (overbodig)

$x^2 + 4 = 49$

$\Updownarrow$

$x^2 = 45$

$\Updownarrow$

$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ of $x = -3\sqrt{5}$

2 $\sqrt{2x+5}-x=1$

$\sqrt{2x+5} - x = 1$

$\Updownarrow$

$\sqrt{2x+5} = x + 1$

$\Updownarrow$ BVW: $2x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{5}{2}$

KWVW: $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$ (*)

$2x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$\Updownarrow$

$4 = x^2$

$\Updownarrow$

$x = 2$ of $\cancel{x = -2}$

voldoet niet aan (*)

3 $2\sqrt{2x+1}=x-2$

$2\sqrt{2x+1} = x - 2$

$\Updownarrow$ BVW: $2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

KWVW: $x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$ (*)

$4(2x + 1) = x^2 - 4x + 4$

$\Updownarrow$

$-x^2 + 12x = 0$

$\Updownarrow$

$\cancel{x = 0}$ of $x = 12$

voldoet niet aan (*)

4 $\sqrt{5x^2+2x+6}-4=x$

$$\sqrt{5x^2+2x+6}-4=x$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{5x^2+2x+6}=x+4$$

BVW: $5x^2+2x+6 \geqslant 0$ (overbodig)
KWVW: $x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -4$

$$\Updownarrow$$
$$5x^2+2x+6=x^2+8x+16$$
$$\Updownarrow$$
$$4x^2-6x-10=0$$
$$\Updownarrow$$
$$x=-1 \quad \text{of} \quad x=\frac{5}{2}$$

Opdracht 64 bladzijde 149

Stellen f en g dezelfde functies voor? Verklaar algebraïsch.

1 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ en $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$

- $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x+1} \geqslant 0$

x		-1		3	
$3-x$	+	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$\dfrac{3-x}{x+1}$	-	|	+	0	-

$\Leftrightarrow -1 < x \leqslant 3$

dom f = $]-1, 3]$

- $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$ bestaat

$\Leftrightarrow 3-x \geqslant 0$ én $x+1>0$

$\Leftrightarrow x \leqslant 3$ én $x>-1$

$\Leftrightarrow -1 < x \leqslant 3$

dom g = $]-1, 3]$

Aangezien dom f = dom g en $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ als $a \geqslant 0$ en $b>0$, is $f=g$.

2 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}}$ en $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-2x}}$

- $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}}$ bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} \geqslant 0$

x		-2		0		2	
x^2-4	+	0	-	-	-	0	+
x^2-2x	+	+	+	0	-	0	+
$\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$	+	0	-	|	+	|	+

$\Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $0 < x < 2$ of $x > 2$

dom $f =]-\infty, -2] \cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

- $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-2x}}$ bestaat

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$ én $x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow (x \leqslant -2$ of $x \geqslant 2)$ én $(x < 0$ of $x > 2)$

$\Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $x > 2$

dom $g =]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$

dom $f \neq$ dom g zodat $f \neq g$.

Opdracht 65 bladzijde 149

Bepaal exact de coördinaten van de eventuele snijpunten van de grafieken van de functies met voorschrift $f(x)=x+6$ en $g(x)=\sqrt{-x^2-12x-32}$.

$f(x) = g(x)$

$\Updownarrow$

$x + 6 = \sqrt{-x^2 - 12x - 32}$

$\Updownarrow$

BVW: $-x^2 -12x - 32 \geqslant 0 \Leftrightarrow -8 \leqslant x \leqslant -4$
KWVW: $x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -6$ (*)

$x^2 + 12x + 36 = -x^2 - 12x - 32$

$\Updownarrow$

$2x^2 + 24x + 68 = 0$

$\Updownarrow$

$x^2 + 12x + 34 = 0$

$\Updownarrow$

$D = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = 8$

$x = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$-6 + \sqrt{2}$

$\cancel{-6 - \sqrt{2}}$ voldoet niet aan (*)

Het enige snijpunt van de grafieken van f en g is $S\left(-6 + \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Opdracht 66 bladzijde 149

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=-1$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=-1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+4}$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x-1 \geqslant 0 \text{ en } x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$
$$x-1+1+2\sqrt{x-1}=x+4$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-1}=2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$
$$x-1=4$$
$$\Updownarrow$$
$$x=5$$

2 $\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}=1$

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-2}=1+\sqrt{1-x}$$

BVW: $x-2 \geqslant 0$ en $1-x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow$ $x \geqslant 2$ en $x \leqslant 1$
onmogelijk

De vergelijking heeft geen oplossingen.

3 $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}=2$

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}=2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x+2 \geqslant 0 \text{ en } 2x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$$
$$x+2+2x+3+2\sqrt{(x+2)(2x+3)}=4$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{2x^2+7x+6}=-1-3x$$

BVW: $2x^2+7x+6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $x \geqslant -\frac{3}{2}$

$$\Updownarrow$$

KWVW: $-1-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{3}$ (*)

$$4(2x^2+7x+6)=1+6x+9x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 22x + 23 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = 23} \quad \text{of} \quad x = -1$$

voldoet niet aan (*)

4 $\sqrt{2x+1}+2=2\sqrt{x+9}-3$

$$\sqrt{2x+1} + 2 = 2\sqrt{x+9} - 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2x+1} + 5 = 2\sqrt{x+9}$$

$$\Updownarrow$$

BVW: $2x + 1 \geqslant 0$ en $x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

$$2x + 1 + 25 + 10\sqrt{2x+1} = 4(x + 9)$$

$$\Updownarrow$$

$$10\sqrt{2x+1} = 2x + 10$$

$$\Updownarrow$$

$$5\sqrt{2x+1} = x + 5$$

$$\Updownarrow$$

BVW: $2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

KWVW: $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$

$$25(2x + 1) = x^2 + 10x + 25$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 40x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \quad \text{of} \quad x = 40$$

5 $\sqrt{3-4x}=\sqrt{x+5}-\sqrt{5x+2}$

$$\sqrt{3-4x} = \sqrt{x+5} - \sqrt{5x+2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{3-4x} + \sqrt{5x+2} = \sqrt{x+5}$$

BVW: $3-4x \geqslant 0$ en $5x+2 \geqslant 0$ en $x+5 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-2}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$

$$\Updownarrow$$
$$3-4x+5x+2+2\sqrt{(3-4x)(5x+2)} = x+5$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{-20x^2+7x+6} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{-20x^2+7x+6} = 0$$
$$\Updownarrow$$

BVW: $-20x^2+7x+6 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$

$$-20x^2+7x+6 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\frac{3}{4} \text{ of } x=\frac{-2}{5}$$

6 $\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}\sqrt{4x+6}-\sqrt{x}=0$

$$\sqrt{x+4} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+6} - \sqrt{x} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{x+4} = \sqrt{4x+6} + 2\sqrt{x}$$

BVW: $x+4 \geqslant 0$ en $4x+6 \geqslant 0$ en $x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \geqslant 0$ (*)

$$\Updownarrow$$
$$4(x+4) = 4x+6+4x+4\sqrt{x(4x+6)}$$
$$\Updownarrow$$
$$4\sqrt{4x^2+6x} = -4x+10$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{4x^2+6x} = -2x+5$$

BVW: $4x^2+6x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{2}$ of $x \geqslant 0$

$$\Updownarrow$$

KWVW: $-2x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{2}$

$$4(4x^2+6x) = 4x^2-20x+25$$

$$\Updownarrow$$

$$12x^2 + 44x - 25 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = -\frac{25}{6}} \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$$

→ voldoet niet aan (*)

Opdracht 67 bladzijde 149

Bepaal vergelijkingen van de eventuele horizontale en verticale asymptoten van de grafieken van de volgende irrationale functies.

1 $f\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-3x-4}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x-4}}$$

•

x		-2		-1		4	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3x - 4$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+2}{x^2-3x-4}$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

dom $f = [-2, -1[\cup]4, +\infty[$

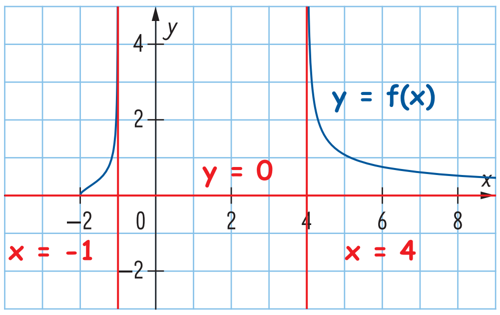
• $x = -1$ en $x = 4$ zijn V.A.

want -1 en 4 zijn nulpunten van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn.

• Als $x \to +\infty$, dan $\dfrac{x+2}{x^2-3x-4} \to 0$

zodat ook $f(x) \to 0$.

$y = 0$ is H.A.



2 $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x^3+32}{x^3+3x^2+3x+1}}$

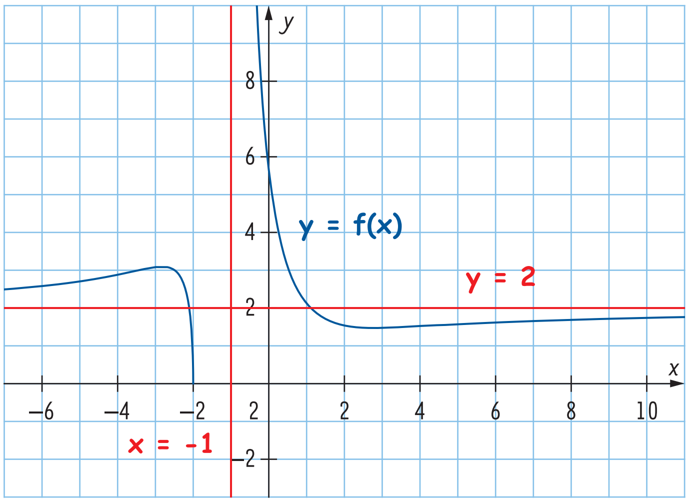
$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^3 + 32}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$$

-

x		-2		-1	
$4x^3 + 32$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4x^3+32}{x^3+3x^2+3x+1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

dom f = $]-\infty, -2] \cup]-1, +\infty[$

- $x = -1$ is V.A.
  want -1 is een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt van de teller is.



- Als $x \to \pm\infty$,
  dan $\dfrac{4x^3 + 32}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \to 4$
  zodat $f(x) \to 2$.
  $y = 2$ is H.A. van de grafiek van f.

3 $f: x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{3x^2 - x}{6x^2 - 5x + 1}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2 - x}{6x^2 - 5x + 1}}$$

- $6x^2 - 5x + 1 = 0$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ of $x = \dfrac{1}{2}$
  $3x^2 - x = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{3}$

  $\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x(3x-1)}{(3x-1)(2x-1)}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$

  met dom f = $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$

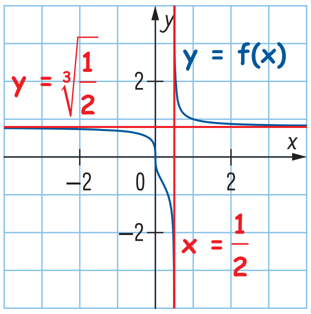
- $x = \frac{1}{2}$ is V.A. want $\frac{1}{2}$ is een nulpunt van de noemer

  dat geen nulpunt van de teller is.

- Als $x \rightarrow \pm\infty$, dan $\dfrac{3x^2 - x}{6x^2 - 5x + 1} \rightarrow \dfrac{1}{2}$

  zodat $f(x) \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ is H.A. van de grafiek van f.



Opdracht 68 bladzijde 150

Bepaal het voorschrift van een mogelijke irrationale functie *f* die voldoet aan de volgende voorwaarden:

– het nulpunt van *f* is –1

– dom $f =]-\infty,-1] \cup]3,+\infty[$

– de rechte $y = 2$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van *f*

x		-1		3	
x + 1	-	0	+	+	+
x - 3	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-3}$	+	0	-	|	+

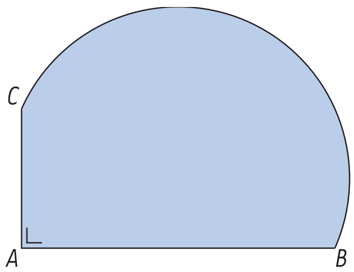
$\Rightarrow f(x) = a \cdot \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$

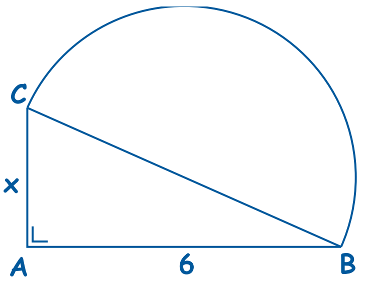
en y = 2 is H.A. zodat $f(x) = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$ een mogelijk voorschrift is.

Opdracht 69 bladzijde 150

Op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek *ABC* wordt een halve cirkel geconstrueerd.
Zo ontstaat de plattegrond van een zwembad met | *AB* | = 6 m.

Bepaal | *AC* | op 1 cm nauwkeurig als de omtrek van het zwembad gelijk moet zijn aan 18 m.





$|AB| = 6$ en $|AC| = x$

$\Rightarrow |BC| = \sqrt{36 + x^2}$

De omtrek van de halve cirkel is bijgevolg $\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2}$.

De totale omtrek is 18 m zodat

$x + 6 + \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2} = 18$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2} = 12 - x$ KWVW: $12 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 12$

$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} \cdot (36 + x^2) = 144 - 24x + x^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) x^2 + 24x + 9\pi^2 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow x = -18{,}40$ of $x = 2{,}043561722$

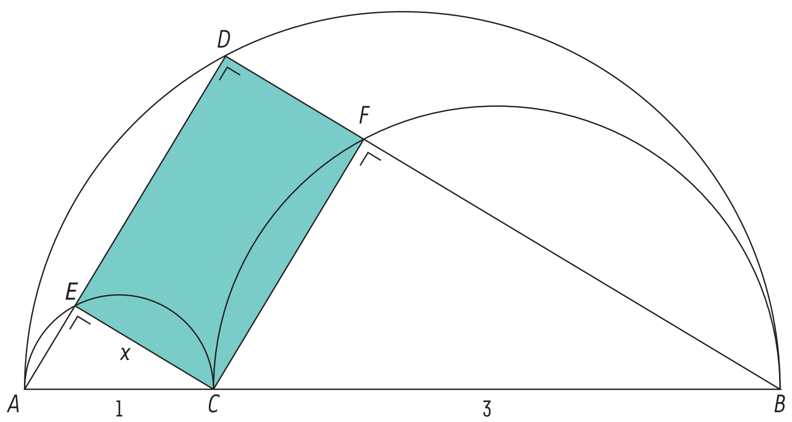
$|AC|$ heeft een lengte van 2,04 m.

Opdracht 70 bladzijde 150

Op een lijnstuk $[AB]$ met lengte 4 ligt het punt C zo dat $|AC| = 1$.
Op $[AC]$, $[CB]$ en $[AB]$ zijn halve cirkels getekend, alle drie aan dezelfde kant van $[AB]$.
D is een punt op de grootste halve cirkel, verschillend van A en B.
AD en BD snijden de andere halve cirkels in E en F.

$A\hat{D}B$, $A\hat{E}C$ en $C\hat{F}B$ zijn rechte hoeken want het zijn omtrekshoeken op een halve cirkel.
Bijgevolg is de vierhoek $ECFD$ een rechthoek.

We stellen $|EC| = x$.



1 Bepaal een formule voor de oppervlakte *A* van de rechthoek *ECFD* in functie van *x*.

$\Delta AEC \sim \Delta CFB$ (hh)

$\Rightarrow \dfrac{|FB|}{|EC|} = \dfrac{|CB|}{|AC|}$

$\Rightarrow |FB| = 3x$

In ΔCFB is dan $|CF| = \sqrt{9 - (3x)^2}$

$= 3\sqrt{1 - x^2}$.

De oppervlakte van ECFD is $A(x) = 3x\sqrt{1 - x^2}$.

2 Er zijn twee situaties waarin de oppervlakte van de rechthoek *ECFD* gelijk is aan $\sqrt{2}$.

Bereken de bijbehorende waarden van *x*.

$A(x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad 3x\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}$

BVW: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$
en natuurlijk ook $x > 0$ (*)

$\Leftrightarrow \quad 9x^2(1 - x^2) = 2$

$\Leftrightarrow \quad -9x^4 + 9x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{2}{3}$ of $x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\overset{x > 0\ (*)}{\Leftrightarrow} \quad x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ of $x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

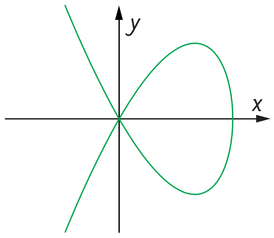
3 Gebruik je rekentoestel om de waarde van *x* te bepalen waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

(Bron © www.examenbundel.nl, examen VWO wiskunde B van 20 juni 2012)

$x = 0{,}707107\ldots$

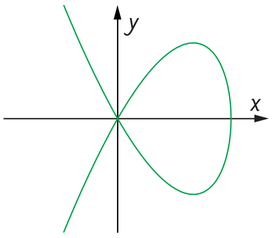
Opdracht 71 bladzijde 151

De kromme met vergelijking $y^2 = x^2(3 - x)$ wordt weergegeven in de volgende figuur

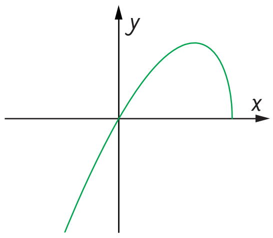


Welke grafiek heeft als voorschrift $y = x\sqrt{3 - x}$?

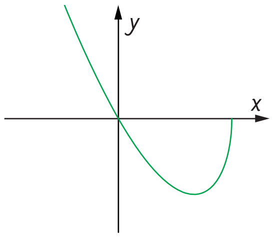
A



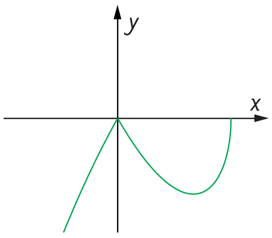
B



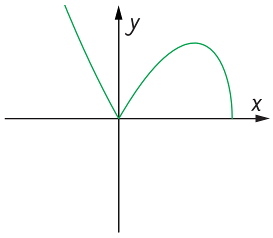
C



D



E



(Bron © VWO 2011, tweede ronde)

x		0		3	
x	-	0	+	+	+
$\sqrt{3 - x}$	+	+	+	0	
$y = x\sqrt{3 - x}$	-	0	+	0	

$y = x\sqrt{3 - x}$ is het voorschrift van een functie, dus A is al uitgesloten.
Uit de tekentabel volgt dat voorschrift B het juiste is.

Opdracht 72 bladzijde 151

Heeft de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{5\sqrt{x^2 - 3x} + 4x - 6}{x + 1 - \sqrt{x^2 + x}}$ nulpunten?

Verklaar algebraïsch.

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x^2 - 3x} + 4x - 6}{x + 1 - \sqrt{x^2 + x}}$$

- Nulpunten teller:

$$5\sqrt{x^2 - 3x} = 6 - 4x$$

BVW: $x^2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ of $x \geqslant 3$

KWVW: $6 - 4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ (*)

$$\Updownarrow$$

$$25(x^2 - 3x) = 36 - 48x + 16x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2 - 27x - 36 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -1 \text{ of } \cancel{x = 4}$$

voldoet niet aan (*)

- Noemer $n(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x}$

$$n(-1) = -1 + 1 - \sqrt{1 - 1} = 0$$

zodat -1 niet behoort tot dom f.

f heeft geen nulpunten.

Opdracht 73 bladzijde 151

Los op.

1 $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = |x| + 1$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = |x| + 1$$

BVW: $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$ is overbodig

KWVW: $|x| + 1 \geqslant 0$ is ook overbodig

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x^2} - 3x + 5 = \cancel{x^2} + 2|x| + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-3x + 4 = 2|x|$$

$$\Updownarrow$$

KWVW: $-3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$ (*)

$$9x^2 - 24x + 16 = 4x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ of } \cancel{x = 4}$$

voldoet niet aan (*)

2 $\sqrt{2-3x+x^2} = |x| - 2$

$$\sqrt{2 - 3x + x^2} = |x| - 2$$

$$\Updownarrow$$

$$2 + \sqrt{2 - 3x + x^2} = |x|$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1 \text{ of } x \geqslant 2$$

$$4 + 4\sqrt{2 - 3x + x^2} = 2 - 3x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sqrt{2 - 3x + x^2} = 3x - 6$$

$$\Updownarrow \qquad \text{KWVW: } 3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \text{ (*)}$$

$$16(2 - 3x + x^2) = 9x^2 - 36x + 36$$

$$\Updownarrow$$

$$7x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = -\frac{2}{7}} \text{ of } x = 2$$

voldoet niet aan (*)

Opdracht 74 bladzijde 151

Los de volgende irrationale vergelijkingen op.

1 $\sqrt{x^2-5x+20} + \sqrt{x^2-5x+4} = 4$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 20} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 4$$

$$\Updownarrow \qquad \text{stel } x^2 - 5x + 4 = y$$

$$\sqrt{y + 16} + \sqrt{y} = 4$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } y + 16 \geqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant 0$$

$$y + 16 + y + 2\sqrt{y^2 + 16y} = 16$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{y^2 + 16y} = -y$$
$$\Updownarrow \qquad \text{KWVW: } -y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 0$$
$$y^2 + 16y = y^2$$
$$\Updownarrow$$
$$y = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 1 \text{ of } x = 4$$

2 $2x - x^2 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

$$2x - x^2 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

BVW: $6x^2 - 12x + 7 \geqslant 0$ (overbodig)

$$\Updownarrow$$

KWVW: $2x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$ (*)

$$4x^2 - 4x^3 + x^4 = 6x^2 - 12x + 7$$
$$\Updownarrow$$
$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$\Updownarrow$$

	1	-4	-2	12	-7
1		1	-3	-5	7
	1	-3	-5	7	0
1		1	-2	-7	
	1	-2	-7	0	

$$x = 1 \text{ of } x^2 - 2x - 7 = 0$$
$$\Updownarrow \qquad D = 4 + 4 \cdot 7 = 32$$
$$x = 1 \text{ of } x = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{2} = \cancel{1 + 2\sqrt{2}} \text{ of } x = \cancel{1 - 2\sqrt{2}}$$

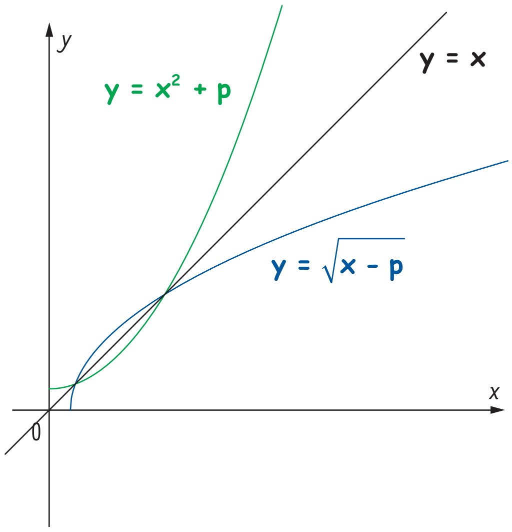
voldoet niet aan (*)

Opdracht 75 bladzijde 151

Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $\sqrt{x-p}=x$ twee verschillende reële wortels?

Grafisch zoeken we de snijpunten van de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \sqrt{x - p}$ en $g(x) = x$.

Om het rekenwerk te vereenvoudigen, zoeken we de snijpunten van $f^{-1}(x) = x^2 + p$ met $x \geqslant 0$ en $g(x) = x$.



$$x^2 + p = x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + p = 0$$

Er zijn enkel 2 oplossingen als

$D = 1 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < \dfrac{1}{4}$

Deze zijn dan $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2}$ of $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2}$.

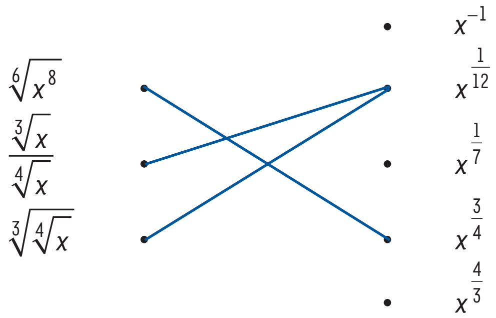
Als $p < 0$, is $1 - 4p > 1$ zodat $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2} < 0$.

Bijgevolg hebben de grafieken in dat geval ook maar 1 snijpunt.

<u>Besluit</u>: $\sqrt{x - p} = x$ heeft 2 verschillende reële wortels als $0 \leqslant p < \dfrac{1}{4}$.

Opdracht 76 bladzijde 152

Welke van de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$, zijn gelijk?



$$\sqrt[6]{x^8} = x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}}$$

Opdracht 77 bladzijde 152

Vereenvoudig, met $x > 0$ en $y > 0$.

1 $\dfrac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[12]{\sqrt{x}}}$

$$\frac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[12]{\sqrt{x}}} = \frac{x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{8}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{12}}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{3}{8}-\frac{1}{24}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

2 $\dfrac{\left(16x^{-6}y^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(36x^{5}y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{(27y^{2})^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\left(16x^{-6}y^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(36x^{5}y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27y^{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{16^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{9}{2}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}{27^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{8 \cdot 6}{3} \cdot x^{-\frac{9}{2}+\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}$$

$$= 16x^{-2}y^{\frac{1}{6}} = 16 \cdot \frac{\sqrt[6]{y}}{x^2}$$

Opdracht 78 bladzijde 152

Het draagvermogen van een vliegtuig is de maximale massa van het vliegtuig, inclusief passagiers en bagage. De grootte van het draagvermogen hangt onder andere af van de oppervlakte van de vleugels.

Het verband tussen de oppervlakte A van de vleugels (in m^2) en het draagvermogen D (in kg) wordt gegeven door de formule $A = 0{,}1 \cdot D^{0{,}67}$.

1 Bereken de vleugeloppervlakte van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 378 000 kg bedraagt.

$D = 0{,}1 \cdot 378\,000^{0{,}67} \approx 545{,}66$

De vleugeloppervlakte is 545,66 m^2.

2 Druk D uit in functie van A.

$A = 0{,}1 \cdot D^{0{,}67}$

$\Leftrightarrow 10A = D^{0{,}67}$

$\Leftrightarrow (10A)^{\frac{1}{0{,}67}} = D$

$\Leftrightarrow D = (10A)^{\frac{100}{67}}$

3 Bereken hoeveel kilogram vracht (passagiers en bagage) een vliegtuig met een vleugeloppervlakte van 510 m^2 en een massa van 174 000 kg maximaal mag meenemen.

$D = (10 \cdot 510)^{\frac{100}{67}} = 341\,733$ kg

$-\ 174\,000$ kg

$167\,733$ kg

Het vliegtuig kan maximaal 167 733 kg vracht meenemen.

Opdracht 79 bladzijde 153

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 11x^2 + 4x}}$.

1 Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van f.

- $f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 11x^2 + 4x} \geqslant 0$

$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = x^2(2x - 1) - (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 1)$

$6x^3 - 11x^2 + 4x = x(6x^2 - 11x + 4)$

x		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$	
$2x - 1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$6x^2 - 11x + 4$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 11x^2 + 4x}$	+	0	-	|	+	|	+	0	-	|	+

$\text{dom } f = \left]-\infty, -1\right] \cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

- nulpunten f: -1 en 1

2 Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

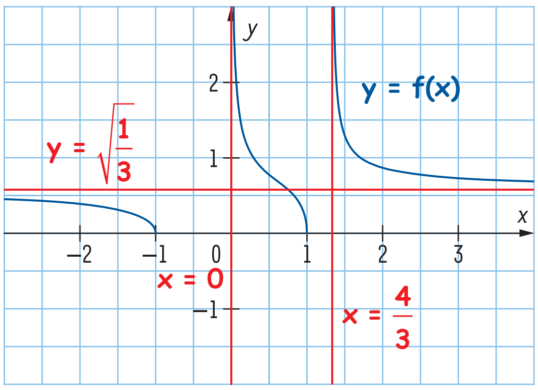
$f(x) = \sqrt{\dfrac{(2x - 1)(x^2 - 1)}{x(2x - 1)(3x - 4)}} = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x(3x - 4)}}$ als $x \neq \dfrac{1}{2}$

V.A.: $x = 0$ en $x = \dfrac{4}{3}$

nl. 0 en $\frac{4}{3}$ zijn nulpuntn van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn.

H.A.: $y = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

nl. als $x \to \pm\infty$, dan $f(x) \to \sqrt{\dfrac{1}{3}}$



Opdracht 80 bladzijde 153

Bepaal de inverse functie indien f inverteerbaar is.

1 $f: x \mapsto \dfrac{4x+3}{3x-1}$

- $f: y = \dfrac{4x+3}{3x-1}$

$$\overset{x \neq \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} \quad 3xy - y = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x(3y - 4) = y + 3$$

$$\overset{y \neq \frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{y+3}{3y-4}$$

- $x \leftrightarrow y$: $\quad y = \dfrac{x+3}{3x-4}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{3x-4}$

2 $f: x \mapsto \dfrac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \leqslant 0$

- $f: y = \dfrac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^6 = 5y$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2 = \sqrt[6]{5y} \quad \text{of} \quad x + 2 = -\sqrt[6]{5y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 + \sqrt[6]{5y} \quad \text{of} \quad x = -2 - \sqrt[6]{5y}$$

- $x \leqslant 0$ is mogelijk bij beide voorschriften.

  f is niet inverteerbaar.

3 $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \geqslant 0$

- $f: y = \frac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow \quad x = -2 + \sqrt[6]{5y}$ of $x = -2 - \sqrt[6]{5y}$
- $x \geqslant 0$ is enkel mogelijk bij $x = -2 + \sqrt[6]{5y}$.
- $x \leftrightarrow y$: $y = -2 + \sqrt[6]{5x}$ met $y \geqslant 0$.

  Nu is $-2 + \sqrt[6]{5x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{5x} \geqslant 2$

  $\Leftrightarrow 5x \geqslant 64$

  $\Leftrightarrow x \geqslant \frac{64}{5}$
- $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt[6]{5x}$ met $x \geqslant \frac{64}{5}$

4 $f: x \mapsto 1 - \sqrt{2x+1}$

- $f: y = 1 - \sqrt{2x+1}$

  $\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x+1} = 1 - y$

  $\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = (1-y)^2$ met $1 - y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 1$

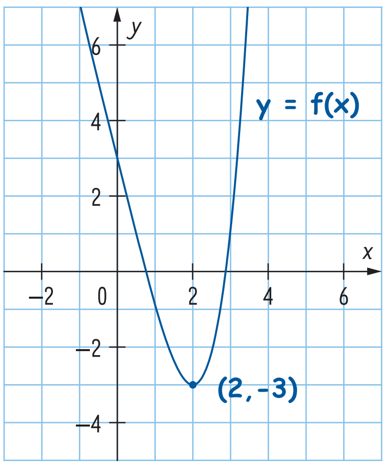
  $\Leftrightarrow \quad x = \frac{(1-y)^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}y^2 - y$ met $y \leqslant 1$
- $x \leftrightarrow y$: $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ met $x \leqslant 1$
- $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ met $x \leqslant 1$

Opdracht 81 bladzijde 153

Bepaal grafisch de grootste waarde van a zodanig dat de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x + 3$ inverteerbaar is over $]-\infty, a]$.

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x + 3$ heeft als verloopschema

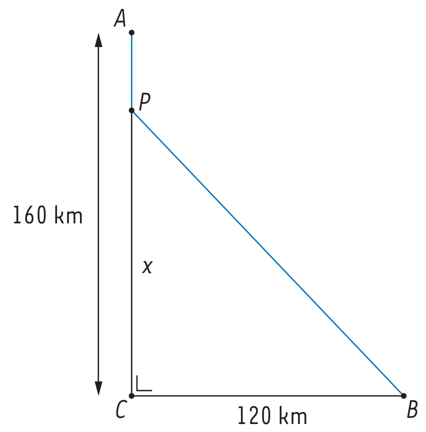
x		2	
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



f is inverteerbaar over $]-\infty, 2]$, dus $a = 2$.

Opdracht 82 bladzijde 153

Er moet een gasleiding aangelegd worden van *A* (aan de kust) naar *B* (120 km het binnenland in). Omdat de aanlegkosten in het binnenland € 300 000/km bedragen en langs de kustlijn € 200 000/km, is het interessant de leiding eerst een stukje [*AP*] van de kustlijn *AC* te laten volgen met $|AC| = 160$ km.



1 Schrijf de kostprijs *K* (in €) van de leiding als functie van $x = |PC|$ (in km).

$$K(x) = (160 - x) \cdot 200\,000 + \sqrt{120^2 + x^2} \cdot 300\,000$$
$$= 32\,000\,000 - 200\,000x + 300\,000\sqrt{14\,400 + x^2}$$

2 Bepaal met je rekentoestel voor welke waarde van *x* (op 0,1 km nauwkeurig) de kostprijs *K* minimaal is.

Voor x = 107,3 km is de kostprijs minimaal.

Opdracht 83 bladzijde 153

Stel dat $f(x) = ax + b$ met *a* en *b* reële getallen.
Als $f(f(f(x))) = 8x + 21$, dan is $a + b$ gelijk aan

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2004)

$$f(x) = ax + b$$
$$\Rightarrow \quad f\big(f(x)\big) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$
$$\Rightarrow \quad f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$$

Nu is $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 8x + 21$

zodat $\begin{cases} a^3 = 8 \\ a^2b + ab + b = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4b + 2b + b = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

$a + b = 5 \;\rightarrow\;$ D

Opdracht 84 bladzijde 153

Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift

$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}-\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}$.

- $f(x)$ bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{2x-1} \geqslant 0$ én $1 - x \neq 0$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$2x+1$	-	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$\frac{2x+1}{2x-1}$	+	0	-	|	+

$\text{dom } f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

- $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{2x-1} = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ BVW: $\dfrac{2x+1}{2x-1} \geqslant 0$

KWVW: $\dfrac{1+x}{1-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(1-2x+x^2) = (2x-1)(1+2x+x^2)$

$\Leftrightarrow \cancel{2x^3} + x^2 - 4x^2 \cancel{-2x} \cancel{+2x} + 1 = \cancel{2x^3} - x^2 + 4x^2 \cancel{-2x} \cancel{+2x} - 1$

$\Leftrightarrow -6x^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ of $x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

nulpunten f: $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ en $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

Hersenbrekers 1 bladzijde 154

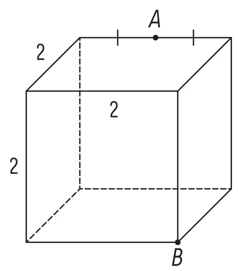
Vier heren staan achter elkaar: een Belg, een Nederlander, een Chinees en een Engelsman. Er zijn vijf hoeden waarvan iedereen weet dat er drie witte en twee zwarte zijn. Een dame neemt willekeurig vier hoeden en zet vervolgens één hoed op het hoofd van de Belg, de Nederlander, de Chinees en de Engelsman.
De Belg – die de Nederlander, de Chinees en de Engelsman kan zien – zegt: "Ik kan de kleur van mijn hoed niet bepalen". De Nederlander – die de Chinees en de Engelsman kan zien – zegt: "Nou, ik vind hem hartstikke leuk, maar heb je hem niet in het oranje?". De Chinees – die slechts de Engelsman kan zien – zegt: "Ik kan de kleur van mijn hoed niet bepalen."

Welke kleur van hoed draagt de Engelsman?

De Belg zou de kleur van zijn hoed kunnen bepalen als hij 3 witte ziet of 2 zwarte en 1 witte. Dit is niet het geval, dus ziet de Belg 1 zwarte en 2 witte.
De Chinees heeft de Belg gehoord en zou de kleur van zijn hoed kunnen bepalen als hij een zwarte zou zien op het hoofd van de Engelsman.
Dit is niet het geval, de Engelsman draagt bijgevolg een witte hoed.

Hersenbrekers 2 bladzijde 154

Een mier bevindt zich in A, het midden van een ribbe van een massieve houten kubus met ribbe 2 (zie figuur).
Ze loopt over het oppervlak langs de kortste weg naar het hoekpunt B.



Hoe lang is die weg?

A $\sqrt{13}$ **B** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C** $1+2\sqrt{2}$
D $\sqrt{17}$ **E** $2+\sqrt{5}$

Op een (deel van) een ontwikkeling van de kubus, zien we de kortste weg als de schuine zijde van een rechthoekige driehoek:

$|AB| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

Antwoord D.