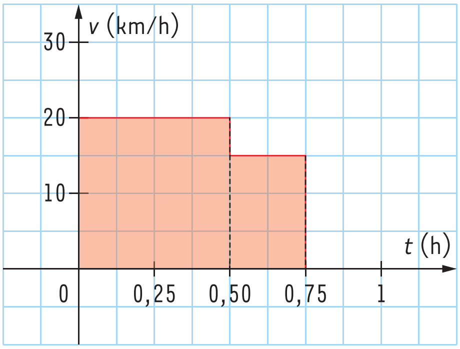
Hoofdstuk 4

De bepaalde integraal

Opdracht 1 bladzijde 65

Hans rijdt met de fiets 30 minuten aan een constante snelheid van 20 km/h en dan 15 minuten aan een constante snelheid van 15 km/h.



1 Hoeveel km heeft Hans in totaal afgelegd?

10 km + 3,75 km = 13,75 km

2 Hoe wordt deze afstand voorgesteld op de figuur?

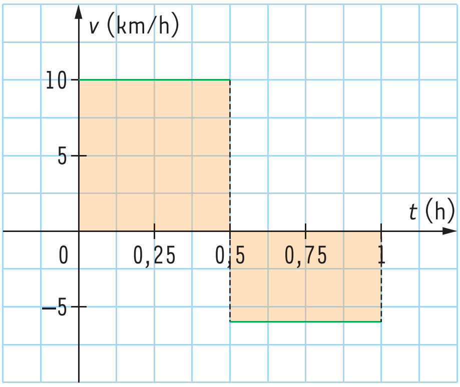
oppervlakte eerste rechthoek = $0{,}5 \cdot 20 = 10$

oppervlakte tweede rechthoek = $0{,}25 \cdot 15 = 3{,}75$

oppervlakte van de twee rechthoeken = $10 + 3{,}75 = 13{,}75$

Opdracht 2 bladzijde 8

Een jogger loopt gedurende een half uur aan een constante snelheid van 10 km/h. Daarna keert hij een eind terug, waarbij hij gedurende een half uur stevig doorstapt aan een snelheid van 6 km/h. Dit wordt als negatieve snelheid beschouwd.



1 Welke afstand legt de loper af tijdens het eerste half uur?

$0{,}5 \cdot 10 = 5 \Rightarrow 5$ km

2 Welke afstand legt hij af tijdens het tweede half uur?

$0{,}5 \cdot 6 = 3 \Rightarrow 3$ km

3 Hoeveel kilometer heeft hij in het totaal afgelegd?

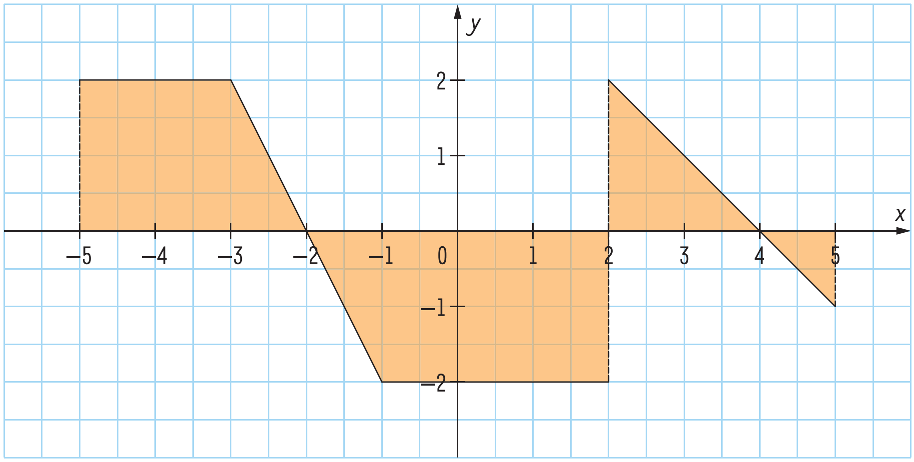
8 km

4 Hoeveel kilometer is hij na één uur verwijderd van het vertrekpunt?

$5 - 3 = 2 \Rightarrow 2$ km

Opdracht 3 bladzijde 9

Bereken de georiënteerde oppervlakte van het gekleurde gebied.



$$\frac{(3+2)\cdot 2}{2} - \frac{(4+3)\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot 1}{2}$$

$$= 5 - 7 + 2 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Opdracht 4 bladzijde 11

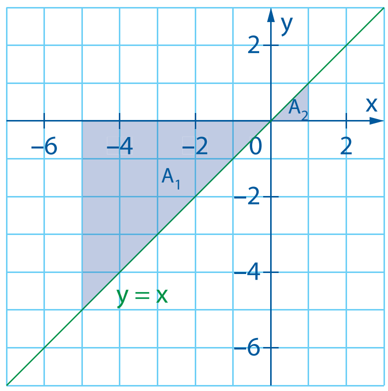
Bereken de bepaalde integralen. Teken daartoe eerst de grafiek van de functie in het gegeven interval.

1 $\int_{-5}^{1} x\,dx$

$$= -A_1 + A_2$$

$$= -\frac{5\cdot 5}{2} + \frac{1\cdot 1}{2}$$

$$= -12$$



2 $\int_{-1}^{2} (-3x + 4)\,dx$

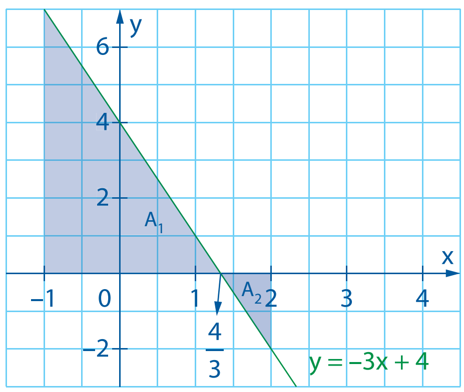
$$= A_1 - A_2$$

$$= \frac{\frac{7}{3}\cdot 7}{2} - \frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{2}$$

$$= \frac{49}{6} - \frac{4}{6}$$

$$= \frac{45}{6}$$

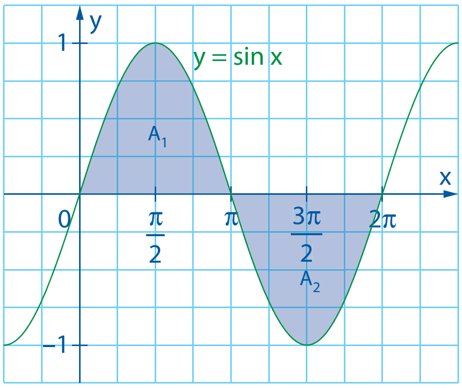
$$= \frac{15}{2}$$



3 $\int_0^{2\pi} \sin x \; dx$

$= A_1 - A_2$

$= 0$ want $A_1 = A_2$

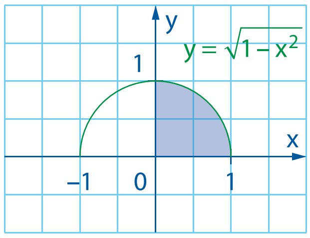


4 $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \; dx$

= oppervlakte van een kwartcirkel met straal 1

$= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$

$= \frac{\pi}{4}$

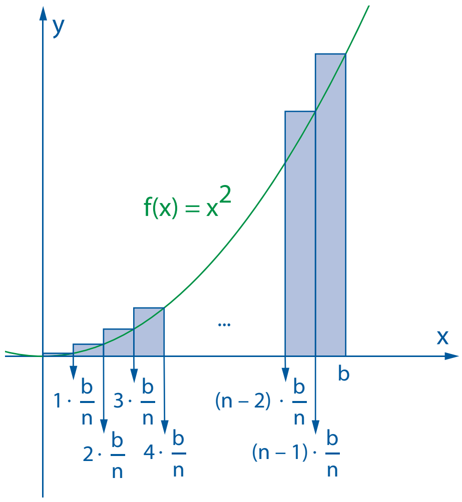


Opdracht 5 bladzijde 19

1 Bepaal $\int_0^b x^2 \; dx$ (met $b > 0$) met bovensommen.

Maak gebruik van $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

We verdelen het interval [0,b] in n gelijke deelintervallen met lengte $\Delta x = \frac{b}{n}$. De deelpunten op de x-as zijn: $0,\ 1 \cdot \frac{b}{n},\ 2 \cdot \frac{b}{n},\ 3 \cdot \frac{b}{n},\ \ldots,\ (n-1) \cdot \frac{b}{n}$ en $n \cdot \frac{b}{n} = b$.



Dan zal:

$$S_n = \frac{b}{n} \cdot \left(1 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(2 \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{b}{n} \cdot \left(n \cdot \frac{b}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

Omdat $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, zal:

$$S_n = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

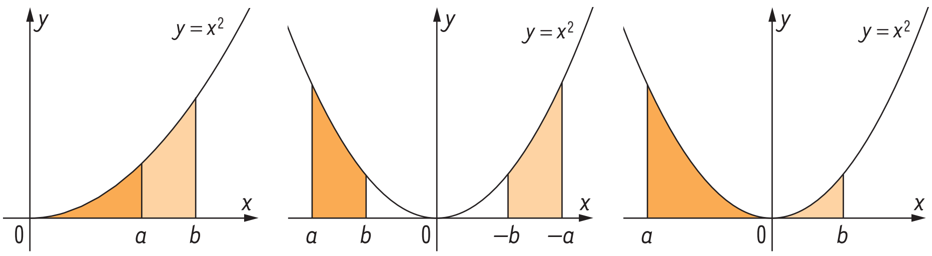
$$= \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Er geldt dat $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, waardoor $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{b^3}{3}$.

We kunnen dus besluiten dat $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$.

2 Maak gebruik van het resultaat uit **1** om $\int_a^b x^2\,dx$ te berekenen

a als $0 < a < b$ **b** als $a < b \leqslant 0$ **c** als $a < 0 < b$



We besluiten: $\boxed{\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$

a) We kunnen $\int_a^b x^2\,dx$ beschouwen als het verschil van twee oppervlakten.

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

b) Wegens de symmetrie van de parabool is

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_{-b}^{-a} x^2\,dx = \frac{(-a)^3}{3} - \frac{(-b)^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

c) $\int_a^b x^2\,dx = \int_a^0 x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx = \left(\frac{0^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) + \frac{b^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

Opdracht 6 bladzijde 20

Maak gebruik van het resultaat uit opdracht 5.

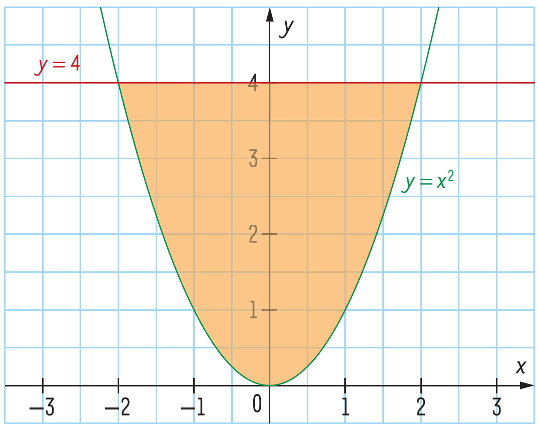
1 Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de rechte met vergelijking $y = 4$.

Oppervlakte

$$= 2 \cdot \left(2 \cdot 4 - \int_0^2 x^2\,dx\right)$$

$$= 2 \cdot \left(8 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{32}{3}$$



2 Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de rechte met vergelijking $y = -2x + 3$.

De snijpunten van de rechte en de parabool zijn (–3,9) en (1,1).

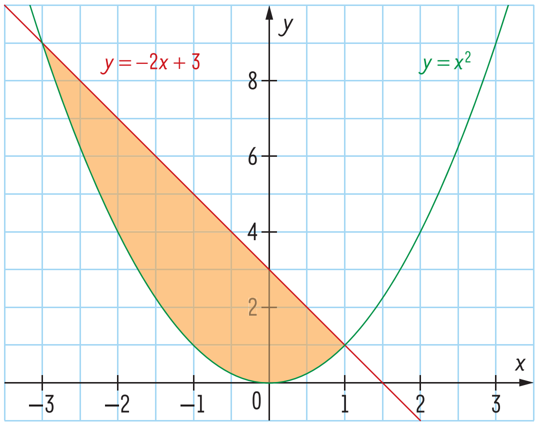
Oppervlakte

$$= \frac{(1+9)\cdot 4}{2} - \int_{-3}^{1} x^2\,dx$$

$$= 20 - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$

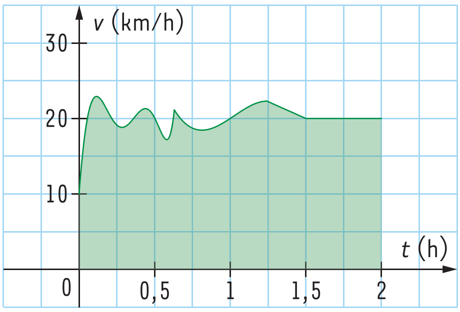
$$= 20 - \frac{28}{3}$$

$$= \frac{32}{3}$$



Opdracht 7 bladzijde 21

Beschouw een fietser die al een poosje aan een snelheid van ongeveer 20 km/h gereden heeft en voor $t = 2$ precies 40 km heeft afgelegd. Omdat deze afstand de (georiënteerde) oppervlakte is onder de grafiek van de functie v in het interval [0, 2], kunnen we dit noteren als $\int_0^2 v(t)\,dt = 40$.



1 Wat is de afgelegde weg tussen $t = 1,5$ en $t = 2$?

$0,5 \cdot 20 = 10 \Rightarrow$ 10 km

2 Bereken $\int_0^{1,5} v(t)\,dt$.

$$\int_0^{1,5} v(t)\,dt = \int_0^{2} v(t)\,dt - 10 = 40 - 10 = 30$$

Opdracht 8 bladzijde 23

Toon aan dat de eigenschap $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ geldt in de volgende gevallen.

1 $a \leqslant c \leqslant b$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$ want $a \leqslant c \leqslant b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

$$\Downarrow$$ uitbreiding integraalbegrip

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

2 $b \leqslant c \leqslant a$

$$\int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$ want $b \leqslant c \leqslant a$

$$\Downarrow$$

$$-\int_b^a f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$$

$$\Downarrow$$ uitbreiding integraalbegrip

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

3 $c \leqslant a \leqslant b$

$$\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$ want $c \leqslant a \leqslant b$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$$

$$\Downarrow$$ uitbreiding integraalbegrip

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

4 $c \leqslant b \leqslant a$

$$\int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_c^a f(x)dx$$ want $c \leqslant b \leqslant a$

$$\Downarrow$$

$$-\int_b^a f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$$

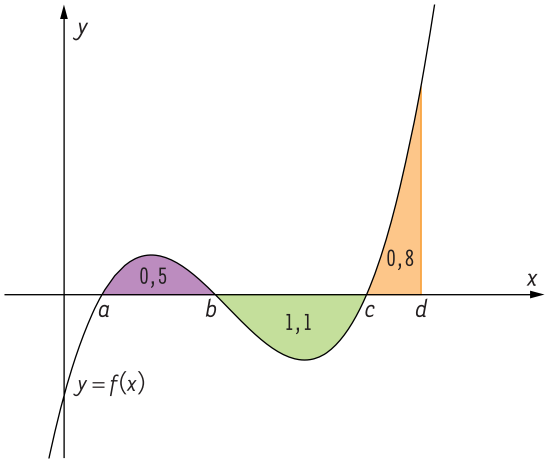
$$\Downarrow$$ uitbreiding integraalbegrip

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Opdracht 9 bladzijde 23

De oppervlaktes van de gekleurde gebieden zijn gegeven.

Bepaal



1 $\int_b^c f(x)\,dx = -1{,}1$

2 $\int_a^c f(x)\,dx = 0{,}5 - 1{,}1 = -0{,}6$

3 $\int_c^b f(x)\,dx = -(-1{,}1) = 1{,}1$

4 $\int_d^a f(x)\,dx = -(0{,}5 - 1{,}1 + 0{,}8) = -0{,}2$

Opdracht 10 bladzijde 23

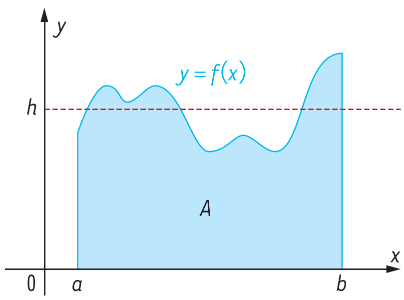
Gegeven: $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 8$, $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 5$ en $\int_{5}^{6} f(x)\,dx = 1$

Bereken $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{6} f(x)dx + \int_{6}^{1} f(x)dx\\ &= \int_{-1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{6} f(x)dx - \int_{1}^{6} f(x)dx\\ &= 8 + 1 - 5\\ &= 4\end{aligned}$$

Opdracht 11 bladzijde 24

De grafiek hiernaast kun je interpreteren als een momentopname van bewegend water in een tank, waarbij de rechten met vergelijking $x = a$ en $x = b$ de wanden van de tank voorstellen. Als het water beweegt, zal de hoogte van elk punt op het wateroppervlak veranderen, maar de gemiddelde hoogte blijft dezelfde. Om deze gemiddelde hoogte h te bepalen, laten we het water tot rust komen.



Druk deze waarde h uit in functie van de totale oppervlakte A.

$$A = (b - a) \cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{A}{b - a}$$

Opdracht 12 bladzijde 27

Als $\int_0^3 (x^2 + 2x - 1)\,dx = 15$, dan is de waarde c waarvan sprake in de middelwaardestelling gelijk aan

A 5 **B** 3 **C** $-1+\sqrt{7}$ **D** $-1-\sqrt{7}$ **E** 1,5

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2012)

$$\int_0^3 (x^2 + 2x - 1)\,dx = (3-0)\cdot f(c) \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow$$
$$3 \cdot f(c) = 15 \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow$$
$$f(c) = 5 \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 + 2c - 1 = 5 \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 + 2c - 6 = 0 \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow \quad D = 28$$
$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ met } c \in [0,3]$$
$$\Downarrow$$
$$c = -1 + \sqrt{7}$$

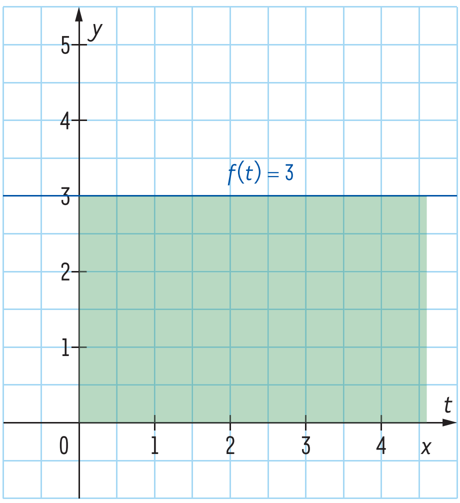
Antwoord C is correct.

Opdracht 13 bladzijde 29

Van drie functies f zijn de grafieken gegeven.

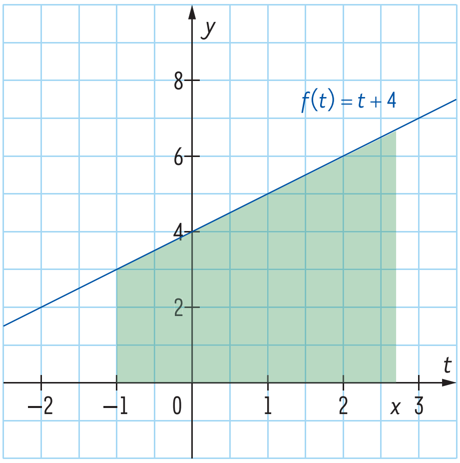
1 Bereken voor f de integraalfunctie

a $F_0(x)$



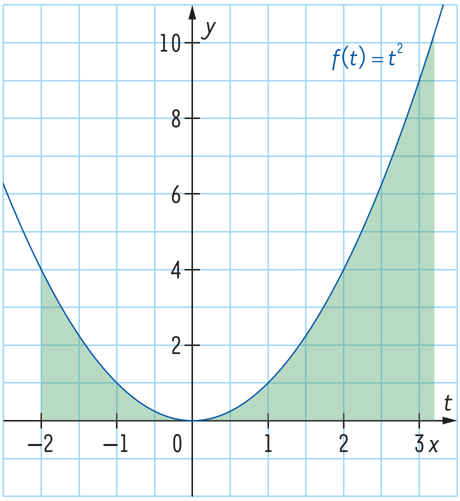
$$F_0(x) = \int_0^x 3\,dt = 3x$$

b $F_{-1}(x)$



$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} (t+4)\,dt$$
$$= \frac{((x+4)+3)\cdot(x+1)}{2}$$
$$= \frac{(x+7)\cdot(x+1)}{2}$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{7}{2}$$

c $F_{-2}(x)$



$$F_{-2}(x) = \int_{-2}^{x} t^2\,dt$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}$$

2 Welk verband bestaat er telkens tussen $F_a(x)$ en $f(x)$?

$$\frac{d}{dx}\big(F_a(x)\big) = f(x)$$

Opdracht 14 bladzijde 31

Gegeven is de functie $f\colon x \longmapsto \cos x$.

1 Bepaal een functie F zodat $\dfrac{dF}{dx} = f$.

$F(x) = \sin x$

2 Geef nog twee andere mogelijkheden voor F.

Andere mogelijkheden zijn: $F(x) = \sin x + c$ met $c \in \mathbb{R}$.

Opdracht 15 bladzijde 31

Stel $f'(x) = 3x^2 + 2x + 4$ en $f(1) = 5$.

Geef het voorschrift van f.

$f(x) = x^3 + x^2 + 4x + c$

Omdat $f(1) = 5$, zal $1^3 + 1^2 + 4 \cdot 1 + c = 5$,

zodat $c = 5 - 6 = -1$.

Het gevraagde voorschrift is $f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 1$.

Opdracht 16 bladzijde 34

Vervolledig de volgende tabel met primitieven F.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
1	$x + c$	$\cos x$	$\sin x + c$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$x^r \ (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Bgtan}\, x + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Bgsin}\, x + c$

Opdracht 17 bladzijde 34

Geef de primitieve functies F bij de gegeven functies f.

1 $f(x) = 2x - 4$ — $F(x) = x^2 - 4x + c$

2 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 4x + 8$ — $F(x) = \frac{1}{8}x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8x + c$

3 $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ — $F(x) = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c$

4 $f(x) = \sin x - 4\cos x$ — $F(x) = -\cos x - 4\sin x + c$

5 $f(x) = 3^x - 5e^x$ — $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - 5e^x + c$

6 $f(x) = \frac{7}{x}$ — $F(x) = 7\ln\lvert x\rvert + c$

Opdracht 18 bladzijde 34

Een functie f is gegeven.

Bepaal de primitieve functie F van f die voldoet aan de gegeven voorwaarde.

1 $f(x) = 8x^3 - x^2 + 4x - 3$ en $F(1) = 2$

$$F(x) = 2x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + c$$

$$F(1) = 2 \iff 2 - \frac{1}{3} + 2 - 3 + c = 2 \iff c = \frac{4}{3}$$

$$F(x) = 2x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + \frac{4}{3}$$

2 $f(x) = 5\cos x - 3\sin x$ en $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$F(x) = 5\sin x + 3\cos x + c$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff 5\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2} + c = 0 \iff c = -5$$

$$F(x) = 5\sin x + 3\cos x - 5$$

Opdracht 19 bladzijde 36

Bereken

1 $\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\, dx$

$= 0$ (wegens symmetrie)

2 $\int_0^{3\pi} \cos x\, dx$

$$= [\sin x]_0^{3\pi} = 0$$

3 $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

4 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

$$= [\text{Bgtan}\, x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Opdracht 20 bladzijde 38

Bereken

1 $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^4-3x^2+5}{x^2}\,dx$

$= \int_2^5 x^2\,dx - 3\int_2^5 dx + 5\int_2^5 x^{-2}\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 - 3[x]_2^5 + 5\left[\frac{-1}{x}\right]_2^5$

$= \left(\frac{125}{3}-\frac{8}{3}\right) - 3(5-2) + 5\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{63}{2}$

2 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 1 - 0$

$= 1$

3 $\int_1^3 (-x^2+2x+k)\,dx$

$= -\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx + k\int_1^3 dx$

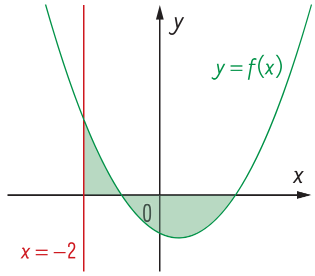
$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + k[x]_1^3$

$= -\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) + k(3-1)$

$= -\frac{2}{3} + 2k$

Opdracht 21 bladzijde 40

Bereken de (niet-georiënteerde) oppervlakte van het gekleurde gebied als $f(x) = x^2 - x - 2$.



Oppervlakte

$$= \int_{-2}^{-1}(x^2 - x - 2)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{-8}{3} - 2 + 4\right)\right) - \left(\left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right)$$

$$= \frac{19}{3}$$

Opdracht 22 bladzijde 42

1 Bereken de oppervlakte tussen de kromme met vergelijking $y = x^3 - 4x$ en de x-as.

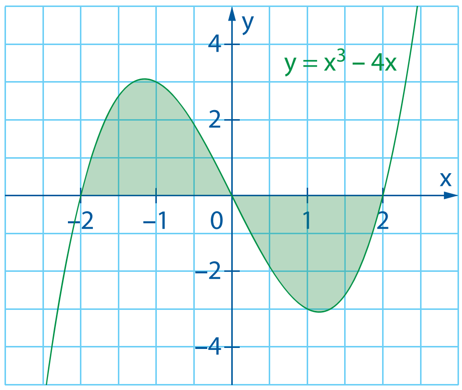
Oppervlakte

$$= 2\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= 2((0 - 0) - (4 - 8))$$

$$= 8$$



2 Bereken de oppervlakte tussen de kromme met vergelijking $y = x^2 + 3x - 4$ en de x-as over $[-1, 2]$.

Oppervlakte

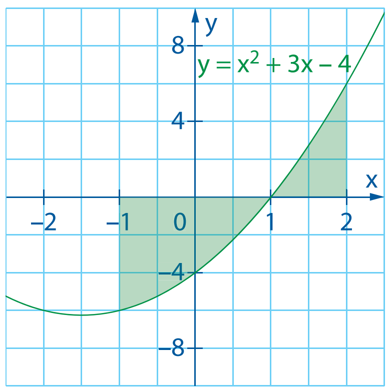
$$= -\int_{-1}^{1}(x^2 + 3x - 4)\,dx + \int_{1}^{2}(x^2 + 3x - 4)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{3}{2} + 4\right)\right)$$
$$+ \left(\left(\frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right)\right)$$

$$= -\left(-\frac{44}{6}\right) + \frac{17}{6}$$

$$= \frac{61}{6}$$



Opdracht 23 bladzijde 42

Bepaal k zó dat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = kx^2 - 9$ met de x-as een gebied insluit met oppervlakte $6\sqrt{3}$.

- Als $k > 0$, dan stelt de grafiek van de functie f een dalparabool voor die de x-as snijdt in de punten met x-coördinaat $-\frac{3}{\sqrt{k}}$ of $\frac{3}{\sqrt{k}}$.

  Er geldt:

  $$-2\int_0^{\frac{3}{\sqrt{k}}} (kx^2 - 9)\,dx = 6\sqrt{3}$$

  $$\left[k\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{k}}} = -3\sqrt{3}$$

  $$\frac{9}{\sqrt{k}} - \frac{27}{\sqrt{k}} = -3\sqrt{3}$$

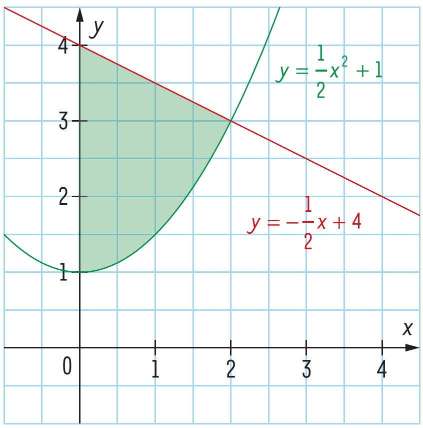
  $$-\frac{18}{\sqrt{k}} = -3\sqrt{3}$$

  $$k = 12$$

- Als $k < 0$, dan stelt de grafiek van de functie f een bergparabool voor die volledig onder de x-as ligt. De gevraagde ingesloten oppervlakte kan dan onmogelijk $6\sqrt{3}$ zijn.
- Als $k = 0$, dan is de grafiek van de functie f een horizontale rechte die onder de x-as ligt. Ook hier kan de gevraagde ingesloten oppervlakte dan onmogelijk $6\sqrt{3}$ zijn.

Opdracht 24 bladzijde 42

Bereken de oppervlakte van het gekleurde gebied.



Oppervlakte

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right)dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + 3x\right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{4}{3} - 1 + 6\right) - 0$$

$$= \frac{11}{3}$$

Opdracht 25 bladzijde 45

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de functies met voorschrift $f(x) = 4x + 8$ en $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Oppervlakte

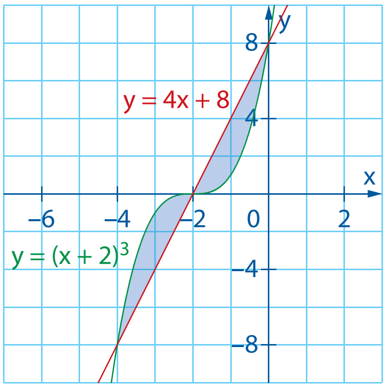
$$= 2\int_{-2}^{0}\left((4x+8) - (x+2)^3\right)dx$$

$$= 2\int_{-2}^{0}(-x^3 - 6x^2 - 8x)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 + 4x^2\right]_{-2}^{0}$$

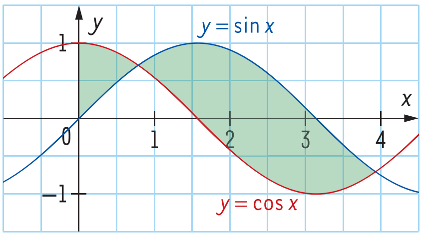
$$= -2(0 - (4 - 16 + 16))$$

$$= 8$$



Opdracht 26 bladzijde 45

Bereken de oppervlakte van het gekleurde gebied.



- $\sin x = \cos x$

  $\Updownarrow$ $\qquad$ $\cos x \neq 0$, want $\cos x = 0 = \sin x$ is onmogelijk

  $\tan x = 1$

  $\Updownarrow$

  $x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad$ met $k \in \mathbb{Z}$

- Oppervlakte

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \Big[\sin x + \cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} - 1$$

Opdracht 27 bladzijde 45

Eén van de meest gekende symbolen uit de sciencefiction is de dubbele parabool uit de Star Trek-serie.

In een bepaald assenstelsel zijn de voorschriften van de bijbehorende tweedegraadsfuncties $T(x) = -0,7x^2 + 0,1x + 9$ en $B(x) = -0,2x^2 + 0,1x - 3,7$.

De oppervlakte tussen deze twee parabolen is

A 8,92 **B** 12,41 **C** 43,05 **D** 54,36 **E** 85,34

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2011)

- We berekenen eerst de x-coördinaten van de snijpunten van de parabolen:

$$T(x) = B(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$-0,7x^2 + 0,1x + 9 = -0,2x^2 + 0,1x - 3,7$$
$$\Updownarrow$$
$$0,5x^2 = 12,7$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 = 25,4$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -\sqrt{25,4} \quad \text{of} \quad x = \sqrt{25,4}$$

- Oppervlakte

$$= 2\int_0^{\sqrt{25,4}} \left((-0,7x^2 + 0,1x + 9) - (-0,2x^2 + 0,1x - 3,7)\right)dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{25,4}} (-0,5x^2 + 12,7)dx$$

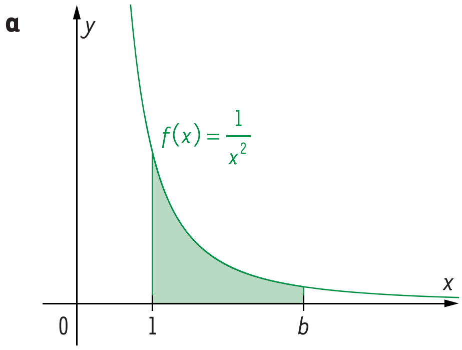
$$= 2 \cdot \left[-0,5\frac{x^3}{3} + 12,7x\right]_0^{\sqrt{25,4}}$$

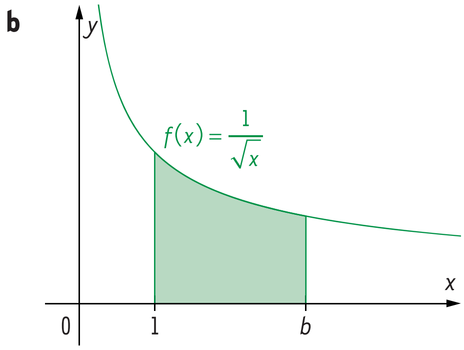
$$= 85,34$$

- Antwoord E is correct.

Opdracht 28 bladzijde 47

1 Bereken $\int_1^b f(x)\,dx$, met $b > 1$.





a $\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^b x^{-2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$

b $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^b x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = 2\sqrt{b} - 2$

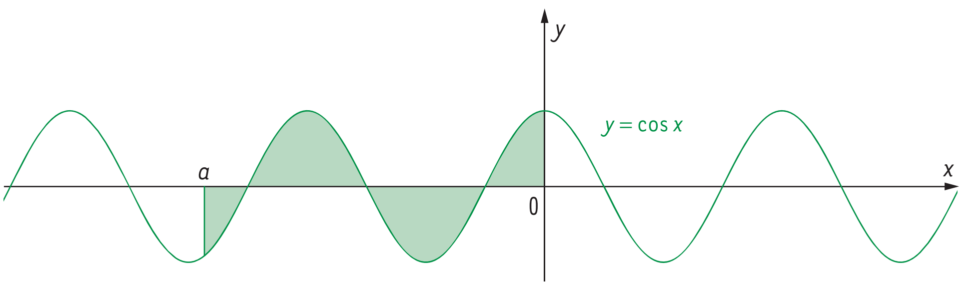
2 Bereken $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b f(x)\,dx$ voor de functies f vermeld bij **1**.

a $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$

b $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (2\sqrt{b} - 2) = +\infty$

Opdracht 29 bladzijde 47

Bereken, indien mogelijk: $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 \cos x\,dx$.



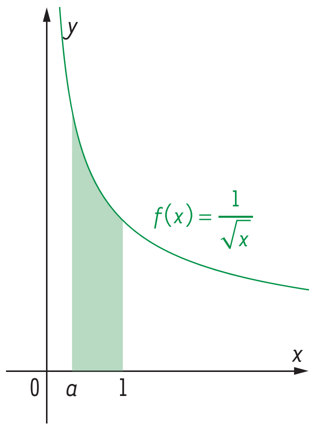
$\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 \cos x\,dx = \lim\limits_{a \to -\infty} [\sin x]_a^0 = \lim\limits_{a \to -\infty} (0 - \sin a) = -\lim\limits_{a \to -\infty} \sin a$

Deze limiet is onbepaald.

Opdracht 30 bladzijde 49

1 Bereken $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, voor $a > 0$.

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$



2 Omdat f niet gedefinieerd is in 0, heeft $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ geen betekenis.

Gebruik een limiet om deze integraal toch te berekenen.

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$

Opdracht 31 bladzijde 51

Bepaal, in geval van convergentie, de volgende oneigenlijke integralen van de eerste soort.

1 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\ln|x|\right]_a^{-1}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\ln 1 - \ln|a|\right)$$

$$= 0 - (+\infty)$$

$$= -\infty \qquad \text{(geen convergentie)}$$

2 $\int_1^{+\infty} 2^x\,dx$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b 2^x\,dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{2^b}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\right)$$

$$= +\infty \qquad \text{(geen convergentie)}$$

3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\mathrm{Bgtan}\; x\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left[\mathrm{Bgtan}\; x\right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (0 - \mathrm{Bgtan}\; a) + \lim_{b\to+\infty} (\mathrm{Bgtan}\; b - 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi$$

Opdracht 32 bladzijde 51

Bepaal, in geval van convergentie, de volgende oneigenlijke integralen van de tweede soort.

1 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \int_{a}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{\substack{a\to 0\\ >}} \left(-1 + \frac{1}{a}\right) = +\infty \quad \text{(geen convergentie)}$$

2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ <}} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\substack{b\to 0\\ >}} \int_{b}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ <}} \left[\ln|x|\right]_{-1}^{a} + \lim_{\substack{b\to 0\\ >}} \left[\ln|x|\right]_{b}^{1}$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0\\ <}} (\ln|a| - 0) + \lim_{\substack{b\to 0\\ >}} (0 - \ln|b|)$$

$$= (-\infty) + (+\infty)$$

$$= / \quad \text{(geen convergentie)}$$

3 $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ <}} \int_{-1}^{a} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \lim_{\substack{b \to 0 \\ >}} \int_{b}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ <}} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{a} + \lim_{\substack{b \to 0 \\ >}} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{b}^{8}$$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ <}} \left(\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{\substack{b \to 0 \\ >}} \left(6 - \frac{3}{2}b^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2}$$

Opdracht 33 bladzijde 54

Definieer de functie $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met als voorschrift $f(x) = n$ als $n \leqslant x < n + 1$ met n een geheel getal, m.a.w. $n \in \mathbb{Z}$.

Bepaal $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$.

A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** 12

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, 2012)

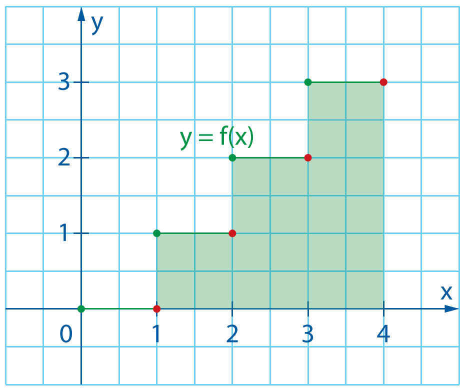
$$\int_0^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^4 3\,dx$$

$$= 0 + 1 + 2 + 3$$

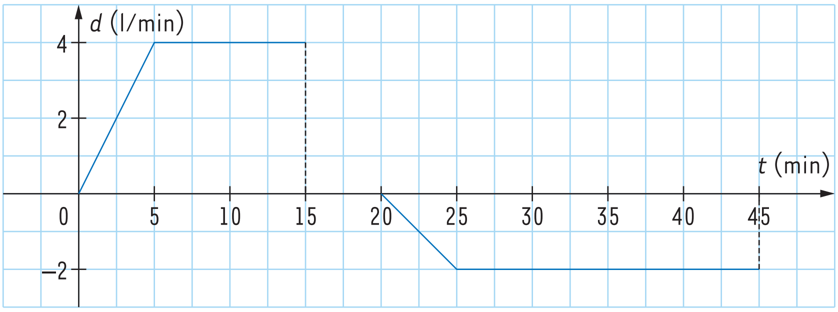
$$= 6$$

Antwoord B is correct.



Opdracht 34 bladzijde 62

Een meter registreert het debiet d (in l/min) van een vloeistof in een tank.
De tijd is gemeten in minuten.



Bij de start zit er 15 liter in de tank.

Bereken de hoeveelheid vloeistof in de tank op de gegeven tijdstippen.

1 $t = 5$ min

$15 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 25 \;\Rightarrow\; 25$ l

2 $t = 10$ min

$25 + 5 \cdot 4 = 45 \;\Rightarrow\; 45$ l

3 $t = 20$ min

$45 + 20 = 65 \;\Rightarrow\; 65$ l

4 $t = 25$ min

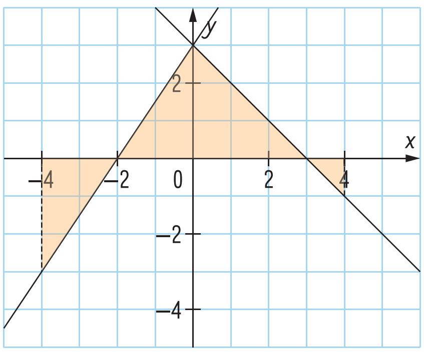
$65 - \frac{5 \cdot 2}{2} = 60 \;\Rightarrow\; 60$ l

5 $t = 45$ min

$60 - 20 \cdot 2 = 20 \;\Rightarrow\; 20$ l

Opdracht 35 bladzijde 62

Bereken de gekleurde georiënteerde oppervlakte.



georiënteerde oppervlakte

$= -\frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2}$

$= 4$

Opdracht 36 bladzijde 63

Kies het juiste antwoord.

$\int_{-2}^{3} f(x)\ dx =$

A $-\frac{13}{2}$

B $-\frac{5}{2}$

C 0

D $\frac{5}{2}$

E $\frac{13}{2}$

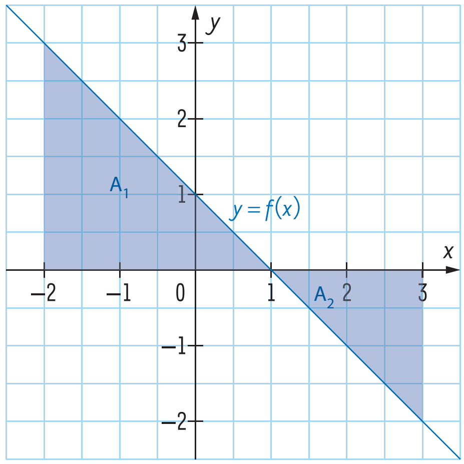
$\int_{-2}^{3} f(x)dx$

$= A_1 - A_2$

$= \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2}$

$= \frac{5}{2}$

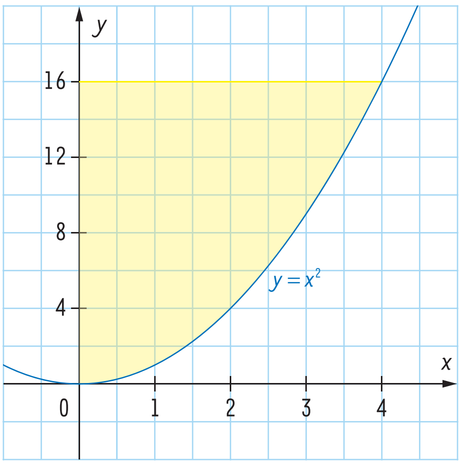
Antwoord D is correct.



Opdracht 37 bladzijde 63

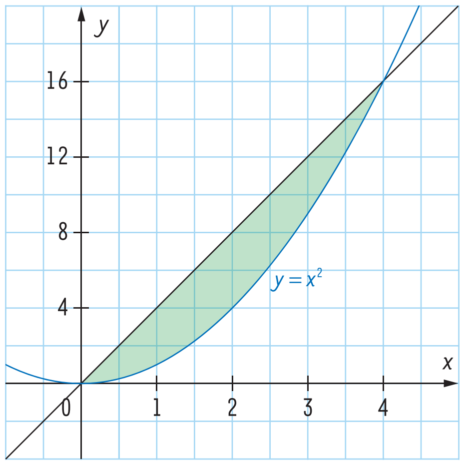
Bepaal de gekleurde oppervlaktes als je weet dat $\int_{0}^{4} x^2\ dx = \frac{64}{3}$.

1



$4 \cdot 16 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

2



$\frac{4 \cdot 16}{2} - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

Opdracht 38 bladzijde 63

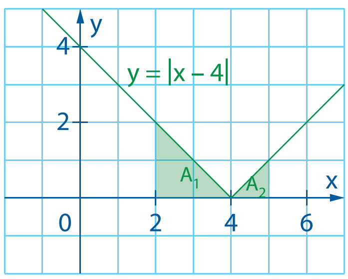
Bereken de bepaalde integralen. Teken daartoe eerst de grafiek van de functie in het gegeven interval.

1 $\int_{2}^{5} |x - 4|\ dx$

$= A_1 + A_2$

$= \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2}$

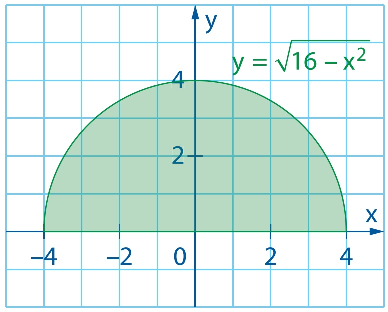
$= \frac{5}{2}$



2 $\displaystyle\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\;dx$

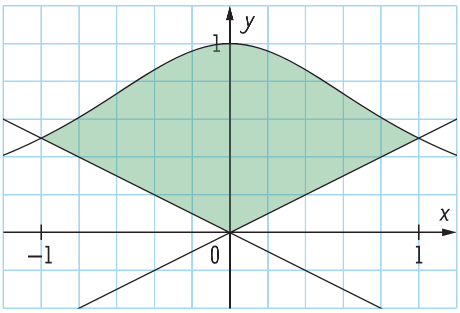
$= \dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4^2$ (opp. halve cirkel met straal 4)

$= 8\pi$



Opdracht 39 bladzijde 64

In de figuur hieronder worden de grafieken van de drie functies met voorschrift $f(x)=\dfrac{1}{2}x$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}x$ en $h(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ weergegeven.



Gegeven is de volgende integraal: $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

Hoeveel bedraagt de gekleurde oppervlakte in de figuur?

A $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$ **B** $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$ **C** $\pi-1$ **D** $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

gekleurde oppervlakte

$= 2\cdot\left(\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx-\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{2}\right)$

$= 2\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$

Antwoord B is correct.

Opdracht 40 bladzijde 64

Stel dat we een bepaalde integraal van een continue functie f in $[a, b]$ benaderen met een linkerriemannsom (dit is een riemannsom waarbij in elk deelinterval de functiewaarde van het meest linkse punt wordt gebruikt).

Deze schatting is steeds kleiner dan de bepaalde integraal als

A f dalend is in $[a, b]$

B f stijgend is in $[a, b]$

C f hol is in $[a, b]$

D f bol is in $[a, b]$

E geen van de voorgaande

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2013)

Als f stijgend is in [a, b], dan zal de functiewaarde van het meest linkse punt in een deelinterval de minimale functiewaarde in dat deelinterval geven. Hierdoor zal de linkerriemannsom een ondersom zijn, waardoor de schatting steeds kleiner is dan de bepaalde integraal.

Antwoord B is correct.

Opdracht 41 bladzijde 64

Definieer de functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = |x - 1| + 1$.

Bepaal $\int_0^2 f(x)\,dx$.

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, 2013)

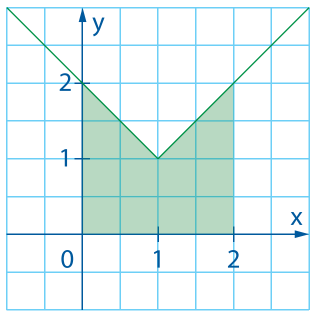
Het voorschrift van f is te herschrijven als: $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{als } x < 1 \\ x & \text{als } x \geqslant 1 \end{cases}$.

De grafische voorstelling laat toe de integraal snel te berekenen als oppervlakte.

$\int_0^2 f(x)\,dx$

$= 2 \cdot \dfrac{(2+1)\cdot 1}{2}$

$= 3$



Antwoord C is correct.

Opdracht 42 bladzijde 65

Bewijs met inductie.

1 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(a) Inductiebasis

De eigenschap geldt voor $n = 1$, want $1^2 \overset{!}{=} \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$.

(b) Inductiestap

Stel gegeven: $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

Te bewijzen is dan:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Bewijs

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2 &= \underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}_{\parallel\ \text{zie gegeven}}+(k+1)^2\\ &= \overbrace{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}+\frac{6}{6}(k+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

Besluit: uit de inductiebasis weten we dat de eigenschap al geldt voor $n = 1$. Wegens de inductiestap volgt hieruit dat ze ook geldt voor $n = 2$. Opnieuw inroepen van de inductiestap garandeert dat de eigenschap ook geldt voor $n = 3$, $n = 4$ ...

2 $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(a) Inductiebasis

De eigenschap geldt voor $n = 1$, want $1^3 \overset{!}{=} \frac{1^2\cdot 2^2}{4}$.

(b) Inductiestap

Stel gegeven: $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

Te bewijzen is dan:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}$$
$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Bewijs

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 &= \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + k^3}_{\text{zie gegeven}} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4}{4}(k+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2\left(k^2 + 4(k+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4k + 4) \\
&= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

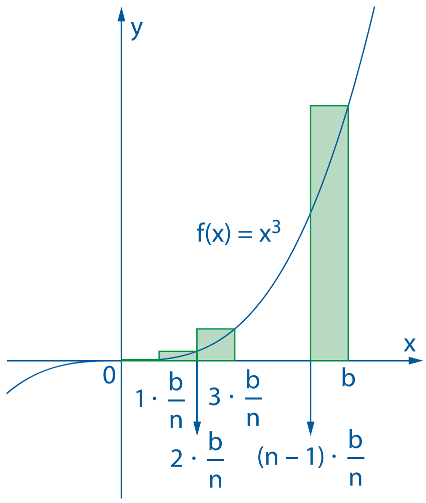
Besluit: uit de inductiebasis weten we dat de eigenschap al geldt voor $n = 1$. Wegens de inductiestap volgt hieruit dat ze ook geldt voor $n = 2$. Opnieuw inroepen van de inductiestap garandeert dat de eigenschap ook geldt voor $n = 3$, $n = 4$ ...

Opdracht 43 bladzijde 65

1 Bepaal $\int_0^b x^3\,dx$ (met $b > 0$) met bovensommen.

Maak gebruik van $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

We verdelen het interval [0,b] in n gelijke deelintervallen met lengte $\Delta x = \frac{b}{n}$. De deelpunten op de x-as zijn: $0,\ 1\cdot\frac{b}{n},\ 2\cdot\frac{b}{n},\ 3\cdot\frac{b}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{b}{n}$ en $n\cdot\frac{b}{n} = b$.



Dan zal:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{b}{n}\cdot\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^3 + \frac{b}{n}\cdot\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^3 + \dots + \frac{b}{n}\cdot\left(n\cdot\frac{b}{n}\right)^3 \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3)
\end{aligned}$$

Omdat $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, zal:

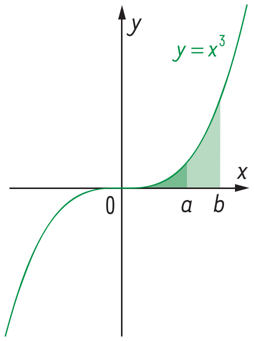
$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \\
&= \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{b^4}{4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^2\cdot n^2} \\
&= \frac{b^4}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Er geldt dat $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, waardoor $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{b^4}{4}$.

We kunnen dus besluiten dat $\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$.

2 Maak gebruik van het resultaat uit **1** om $\int_a^b x^3\,dx$ te berekenen

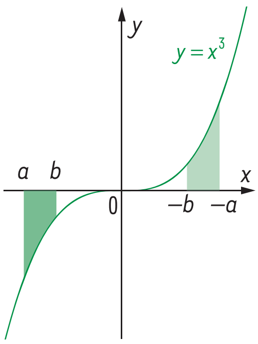
a als $0 < a < b$



We kunnen $\int_a^b x^3\,dx$ beschouwen als het verschil van twee oppervlakten.

$$\int_a^b x^3\,dx = \int_0^b x^3\,dx - \int_0^a x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

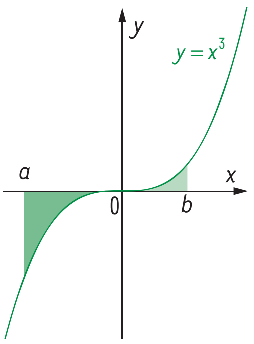
b als $a < b \leqslant 0$



Omdat de grafiek symmetrisch is t.o.v. de oorsprong geldt

$$\int_a^b x^3\,dx = -\int_{-b}^{-a} x^3\,dx = -\left(\frac{(-a)^4}{4} - \frac{(-b)^4}{4}\right) = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$$

c als $a < 0 < b$



$$\begin{aligned}\int_a^b x^3\,dx &= \int_a^0 x^3\,dx + \int_0^b x^3\,dx \\ &= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + \frac{b^4}{4} \\ &= \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\end{aligned}$$

We besluiten: $\boxed{\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}}$

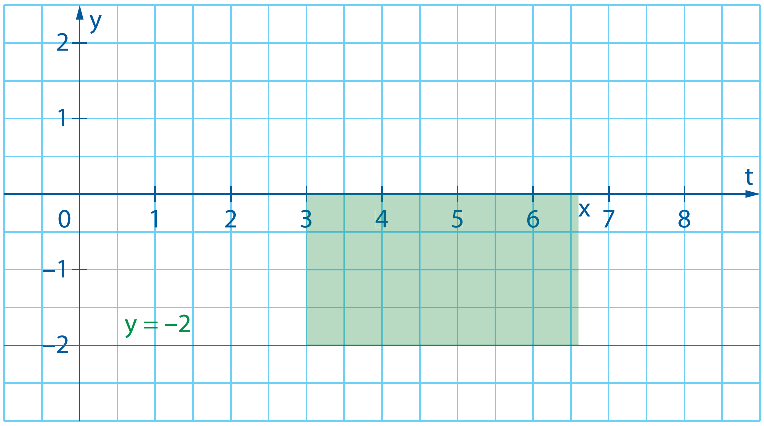
Opdracht 44 bladzijde 66

1 Bepaal de integraalfunctie F_3 van de functies met gegeven voorschrift.

a $f(t) = -2$

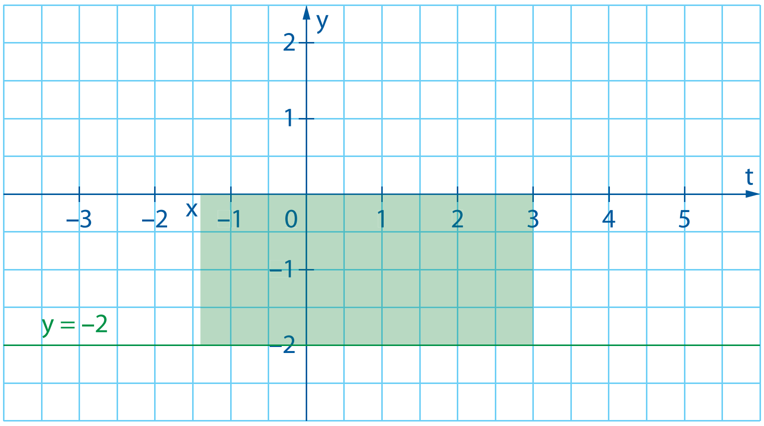
– Als $x \geqslant 3$, dan geldt:

$$F_3(x) = \int_3^x -2\,dt$$
$$= -2 \cdot (x-3)$$
$$= -2x + 6$$



– Als $x \leqslant 3$, dan geldt:

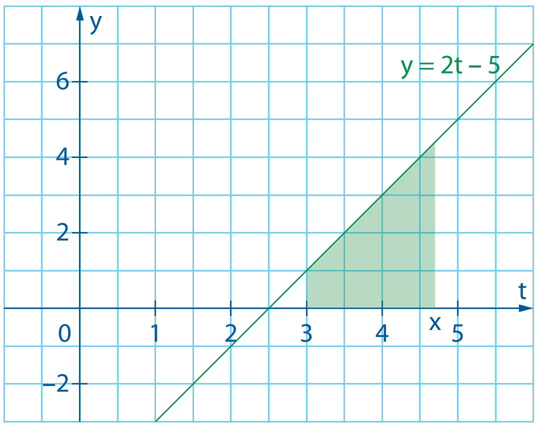
$$F_3(x) = \int_3^x -2\,dt$$
$$= -\int_x^3 -2\,dt$$
$$= -(-2) \cdot (3-x)$$
$$= -2x + 6$$



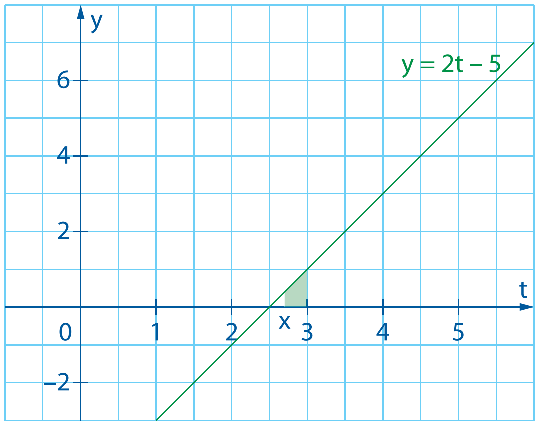
b $f(t) = 2t - 5$

– Als $x \geqslant 3$, dan geldt:

$$F_3(x) = \int_3^x (2t-5)\,dt$$
$$= \frac{(1 + 2x - 5) \cdot (x-3)}{2}$$
$$= (x-2) \cdot (x-3)$$
$$= x^2 - 5x + 6$$

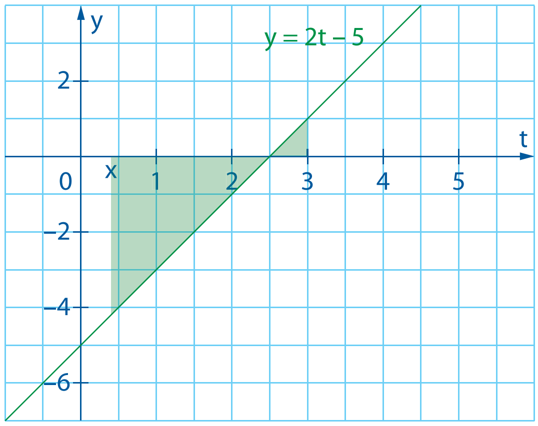


– Als $\frac{5}{2} \leqslant x < 3$, dan geldt:



$$F_3(x) = \int_3^x (2t-5)\,dt$$
$$= -\int_x^3 (2t-5)\,dt$$
$$= -\frac{(2x-5+1)\cdot(3-x)}{2}$$
$$= (x-2)\cdot(x-3)$$
$$= x^2 - 5x + 6$$

– Als $x < \frac{5}{2}$, dan geldt:



$$F_3(x) = \int_3^x (2t-5)\,dt$$
$$= -\int_x^3 (2t-5)\,dt$$
$$= -\left(\frac{\left(\frac{5}{2}-x\right)\cdot(2x-5)}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}\right)$$
$$= -\frac{-2x^2+10x-12}{2}$$
$$= x^2 - 5x + 6$$

c $f(t) = t^2$

– Als $x \geqslant 3$, dan geldt:

$$F_3(x) = \int_3^x t^2\,dt$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3^3}{3} \quad \text{(opdracht 5)}$$
$$= \frac{x^3}{3} - 9$$

– Als $x < 3$, dan geldt:

$$F_3(x) = \int_3^x t^2\,dt$$
$$= -\int_x^3 t^2\,dt$$
$$= -\left(9 - \frac{x^3}{3}\right)$$
$$= \frac{x^3}{3} - 9$$

2 Ga telkens na dat $\frac{d}{dx}(F_3(x)) = f(x)$.

a $\frac{d}{dx}(-2x+6) = -2$

b $\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 6) = 2x - 5$

c $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 9\right) = x^2$

Opdracht 45 bladzijde 66

Bepaal de primitieve functie F van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ met $F\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

$F(x) = \text{Bgsin}\, x + c$

$F\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \iff \text{Bgsin}\,\frac{1}{2} + c = \pi \iff c = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$F(x) = \text{Bgsin}\, x + \frac{5\pi}{6}$

Opdracht 46 bladzijde 66

Bepaal de primitieve functies F van de functies met gegeven voorschrift.

1 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x$

$F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + c$

2 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$F(x) = 2\sqrt{x} + c$

3 $f(x) = \frac{2}{x^3} + 4$

$F(x) = -\frac{1}{x^2} + 4x + c$

4 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 + x^2$

$F(x) = -\frac{1}{x} + x + \frac{x^3}{3} + c$

5 $f(x) = 5 + \sin x$

$F(x) = 5x - \cos x + c$

6 $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

$F(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + c$

Opdracht 47 bladzijde 66

Welke functie is een primitieve functie van de functie met voorschrift $y(x) = \sin^2(2x)$?

A $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\cos(4x)$

B $y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\cos(4x)$

C $y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x)$

D $y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sin^2 2x$$
$$= \sin^2 2x$$

Antwoord D is correct.

Opdracht 48 bladzijde 67

Bereken

1 $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

$$= \left[\ln|x|\right]_{-3}^{-1} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$$

2 $\int_{2}^{3} \left(\frac{2}{x^3} + 4\right) dx$

$$= \left[-\frac{1}{x^2} + 4x\right]_2^3 = \left(-\frac{1}{9} + 12\right) - \left(-\frac{1}{4} + 8\right) = \frac{149}{36}$$

3 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$= \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan 0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

4 $\int_{0}^{8} \sqrt[3]{x^2}\, dx$

$$= \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{3}{5}8^{\frac{5}{3}} - 0 = \frac{96}{5}$$

5 $\int_{-4}^{1} (x-2)(-x+3)\,dx$

$$= \int_{-4}^{1} (-x^2 + 5x - 6)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-4}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6\right) - \left(\frac{64}{3} + 40 + 24\right) = -\frac{535}{6}$$

6 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$

$$= \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (-\cos \pi - \sin \pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

7 $\int_{0}^{1} \left(3e^x + \frac{4}{1+x^2}\right) dx$

$$= \left[3e^x + 4\,\text{Bgtan}\,x\right]_{0}^{1} = (3e + \pi) - (3 + 0) = 3e + \pi - 3$$

8 $\int_{2}^{4} \left(\sqrt{x} - e^x\right) dx - \int_{4}^{5} \left(e^x - \sqrt{x}\right) dx$

$$= \int_{2}^{4} \left(\sqrt{x} - e^x\right) dx + \int_{4}^{5} \left(\sqrt{x} - e^x\right) dx$$

$$= \int_{2}^{5} \left(\sqrt{x} - e^x\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^x\right]_{2}^{5}$$

$$= \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - e^5\right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - e^2\right)$$

$$= \frac{10\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{3} - e^5 + e^2$$

Opdracht 49 bladzijde 67

Kies het juiste antwoord.

$\int_{a}^{b} f'(x)\,dx =$

A $f(b) - f(a)$ **B** $f'(b) - f'(a)$ **C** $f(a) - f(b)$ **D** $f'(a) - f'(b)$ **E** $f'(a) + f'(b)$

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2015)

$$\int_{a}^{b} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{a}^{b} = f(b) - f(a)$$

Antwoord A is correct.

Opdracht 50 bladzijde 67

Bereken de gemiddelde waarde van

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ over [0, 3]

$$\frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]_0^3=\frac{1}{3\ln\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}-1\right)=\frac{-7}{24\ln\frac{1}{2}}$$

2 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ over [4, 9]

$$\frac{1}{9-4}\cdot\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{5}\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_4^9=\frac{1}{5}\cdot(6-4)=\frac{2}{5}$$

Opdracht 51 bladzijde 67

Bepaal k zodat

1 $\int_{-1}^{1}(-x^3+k)\,dx=4$

$$\int_{-1}^{1}(-x^3+k)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+kx\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{4}+k\right)-\left(-\frac{1}{4}-k\right)=2k$$

$2k=4$ zodat $k=2$

2 $\int_0^k(x^2-2x)\,dx=-\frac{2}{3}$

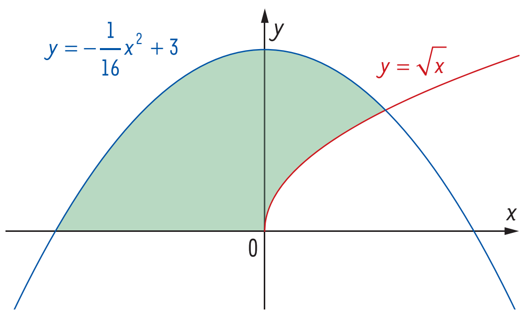
$$\int_0^k(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^k=\frac{k^3}{3}-k^2$$

$$\frac{k^3}{3}-k^2=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow k^3-3k^2+2=0\Leftrightarrow (k-1)(k^2-2k-2)=0$$

zodat $k=1$ of $k=1-\sqrt{3}$ of $k=1+\sqrt{3}$

Opdracht 52 bladzijde 68

1 Noteer de oppervlakte van het volgende vlakdeel met behulp van bepaalde integralen.
Er zijn meerdere oplossingen mogelijk.



- $-\frac{1}{16}x^2+3=0$
  $\Leftrightarrow x^2=48$
  $\Leftrightarrow x=4\sqrt{3}$ of $x=-4\sqrt{3}$
- $-\frac{1}{16}x^2+3=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=4$
- opp. $=\int_{-4\sqrt{3}}^{4}\left(-\frac{1}{16}x^2+3\right)dx-\int_0^4\sqrt{x}\,dx$

2 Bereken deze oppervlakte met behulp van een grafisch rekentoestel.

19,18973958

Opdracht 53 bladzijde 68

Bepaal een functie f en alle mogelijke getallen $a \in \mathbb{R}$ zó dat $\int_a^x f(t)\,dt = F_a(x)$ als:

1 $F_a(x) = x + 5$

Omdat $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ zal $f(x) = \frac{d}{dx}(x+5) = 1$.

$\int_a^x 1\,dt = [t]_a^x = x - a$, zodat $x - a = x + 5 \iff a = -5$

Alternatieve redenering:

$\int_a^a 1\,dt = 0$ zodat $0 = a + 5 \iff a = -5$

2 $F_a(x) = 3x + 2$

$\int_a^x f(t)dt = 3x + 2 \implies f(x) = 3$

$\int_a^x 3\,dt = [3t]_a^x = 3x - 3a \implies a = -\frac{2}{3}$

3 $F_a(x) = x^3 - 9x$

$\int_a^x f(t)dt = x^3 - 9x \implies f(x) = 3x^2 - 9$

$\int_a^x (3t^2 - 9)dt = \left[t^3 - 9t\right]_a^x = (x^3 - 9x) - (a^3 - 9a) \implies a^3 - 9a = 0$

zodat $a = 0$ of $a = -3$ of $a = 3$

4 $F_a(x) = \sin x - 1$

$\int_a^x f(t)dt = \sin x - 1 \implies f(x) = \cos x$

$\int_a^x \cos t\,dt = [\sin t]_a^x = \sin x - \sin a \implies \sin a = 1$

zodat $a = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 54 bladzijde 68

Voor welke waarde van x bereikt $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}\,dt$ een minimum?

$\frac{d}{dx}(F(x)) = 0 \iff \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \iff x = 3$

Voor $x = 3$ gaat $\frac{dF}{dx}$ over van negatief naar positief, zodat F daar inderdaad een relatief minimum bereikt.

Opdracht 55 bladzijde 68

De gemiddelde waarde van $f(x) = \cos x$ over het interval $[-2, 5]$ is

A $\dfrac{\sin 5 - \sin 2}{3}$ **B** $\dfrac{\sin 5 - \sin 2}{7}$ **C** $\dfrac{\sin 5 + \sin 2}{3}$ **D** $\dfrac{\sin 5 + \sin 2}{7}$ **E** geen van de voorgaande

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2015)

$$\frac{1}{5-(-2)} \cdot \int_{-2}^{5} \cos x\,dx = \frac{1}{7} \cdot [\sin x]_{-2}^{5} = \frac{\sin 5 - \sin(-2)}{7} = \frac{\sin 5 + \sin 2}{7}$$

Antwoord D is correct.

Opdracht 56 bladzijde 68

Bereken $f(3)$ als $\int_0^x f(t)\,dt = x \cdot \cos(\pi x)$.

Omdat $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$ zal $f(x) = \dfrac{d}{dx}(x \cdot \cos(\pi x)) = \cos(\pi x) - \pi \cdot x \sin(\pi x)$,

zodat $f(3) = \cos(3\pi) - 3\pi \sin(3\pi) = -1 - 0 = -1$.

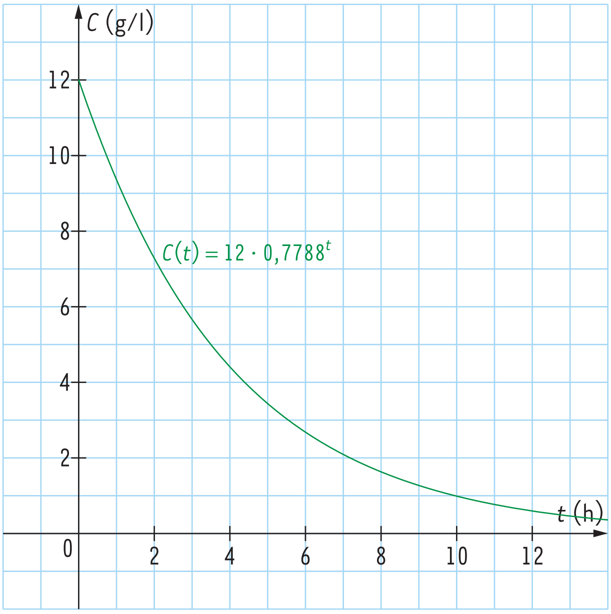
Opdracht 57 bladzijde 69

Een patiënt krijgt een injectie met een medicijn. De concentratie van het medicijn in het bloed neemt na de injectie langzamerhand af volgens het voorschrift $C(t) = 12 \cdot 0{,}7788^t$.
Hierbij is t de tijd in uren en C de concentratie in gram per liter bloed.

1 Bereken de gemiddelde concentratie C_g gedurende de eerste tien uren.

$$\begin{aligned} C_g &= \frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} (12 \cdot 0{,}7788^t)\,dt \\ &= \frac{6}{5} \cdot \int_0^{10} 0{,}7788^t\,dt \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left[\frac{0{,}7788^t}{\ln 0{,}7788}\right]_0^{10} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{0{,}7788^{10}}{\ln 0{,}7788} - \frac{1}{\ln 0{,}7788}\right) \\ &\approx 4{,}406 \end{aligned}$$

$C_g \approx 4{,}406$ g/l



2 Na hoeveel tijd wordt de gemiddelde concentratie C_g bereikt?

$$12 \cdot 0{,}7788^t = \frac{6}{5 \cdot \ln 0{,}7788}(0{,}7788^{10} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \; 0{,}7788^t = \frac{1}{10 \cdot \ln 0{,}7788}(0{,}7788^{10} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \; t \cdot \ln 0{,}7788 = \ln\left(\frac{1}{10 \cdot \ln 0{,}7788}(0{,}7788^{10} - 1)\right)$$

$$\Leftrightarrow \; t = \frac{\ln\left(\frac{1}{10 \cdot \ln 0{,}7788}(0{,}7788^{10} - 1)\right)}{\ln 0{,}7788} = 4\text{u } 28\text{sec}$$

Opdracht 58 bladzijde 69

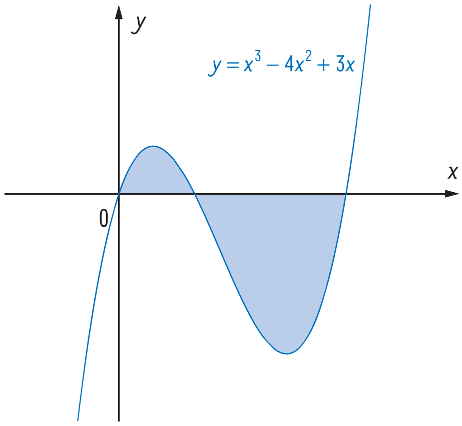
Bereken $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{\int_3^x \frac{\sin t}{t}\, dt}{\frac{x-3}{3}} \right)$.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{\int_3^x \frac{\sin t}{t}\, dt}{\frac{x-3}{3}} \right) \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 3} \left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{3\sin 3}{3} = \sin 3$$

Opdracht 59 bladzijde 70

Bereken de oppervlakte van het gekleurde gebied.

1



- $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

  $\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = 1$ of $x = 3$
- Oppervlakte

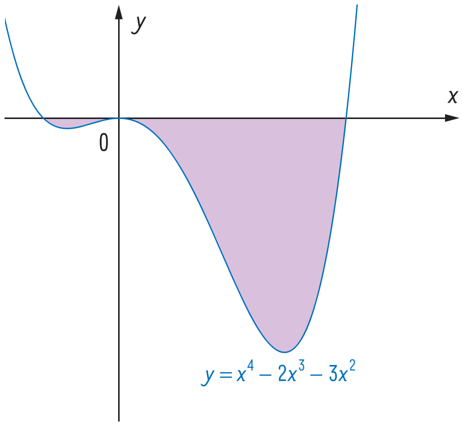
  $= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx$

  $= \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_1^3$

  $= \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - 0 \right) - \left(\left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \right)$

  $= \frac{37}{12}$

2



- $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -1$ of $x = 3$
- Oppervlakte

  $= -\int_{-1}^3 (x^4 - 2x^3 - 3x^2)\,dx$

  $= -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 \right]_{-1}^3$

  $= -\left(\left(\frac{243}{5} - \frac{81}{2} - 27 \right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{1}{2} + 1 \right) \right)$

  $= \frac{96}{5}$

Opdracht 60 bladzijde 70

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 8x$ en de x-as.

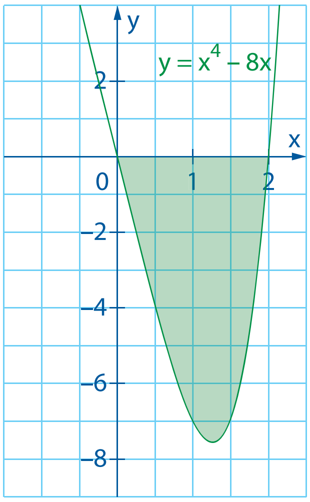
Oppervlakte

$$= -\int_0^2 (x^4 - 8x)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^5}{5} - 4x^2\right]_0^2$$

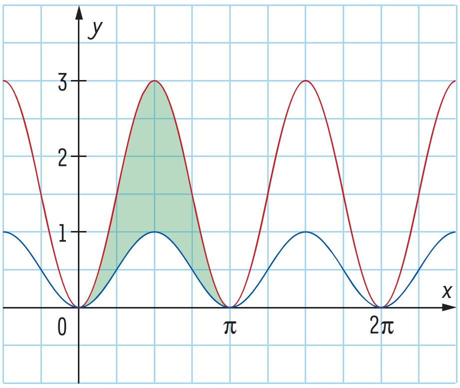
$$= -\left(\frac{32}{5} - 16\right)$$

$$= \frac{48}{5}$$



Opdracht 61 bladzijde 70

Hieronder zijn de functies met voorschrift $y = 3\sin^2 x$ en $y = \sin^2 x$ weergegeven.



Gegeven is de volgende integraal: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \; dx = \frac{\pi}{4}$.

Hoeveel bedraagt de gekleurde oppervlakte?

A $\frac{\pi}{2}$ **B** $\frac{2\pi}{3}$ **C** $\frac{3\pi}{4}$ **D** π

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

Oppervlakte

$$= \int_0^{\pi} (3\sin^2 x - \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$= 2 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \qquad \text{o.w.v. symmetrie}$$

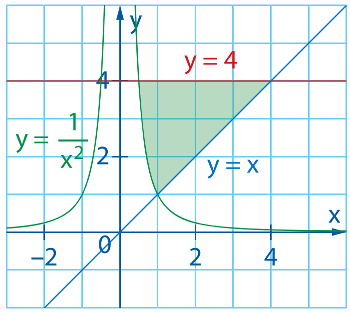
$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

Antwoord D is correct.

Opdracht 62 bladzijde 71

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de rechten met vergelijking $y = 4$ en $y = x$ en de kromme met vergelijking $y = \dfrac{1}{x^2}$.



- $\dfrac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ of $x = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{1}{x^2} = x \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
- Oppervlakte

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(4 - \frac{1}{x^2}\right) dx + \frac{3 \cdot 3}{2}$$

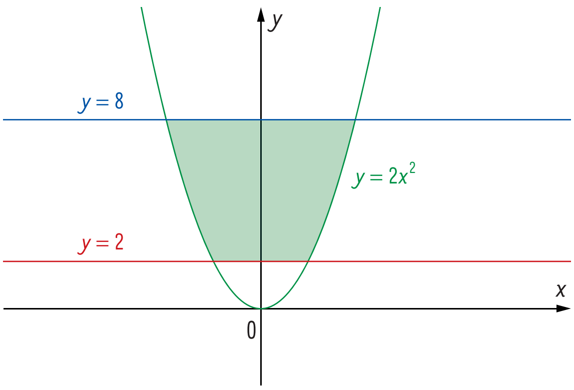
$$= \left[4x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{9}{2}$$

$$= (5 - 4) + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{11}{2}$$

Opdracht 63 bladzijde 71

Bereken de gekleurde oppervlakte.



- $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 1$
- $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = 2$
- Oppervlakte

$$= 2 \cdot \left(1 \cdot 6 + \int_1^2 (8 - 2x^2)\,dx\right)$$

$$= 2 \cdot \left(6 + \left[8x - 2\frac{x^3}{3}\right]_1^2\right)$$

$$= 2 \cdot \left(6 + \left(\left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(8 - \frac{2}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{56}{3}$$

Opdracht 64 bladzijde 71

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme met vergelijking $y = x^3$ en de rechten met vergelijking $y = -x$ en $y = 8$.

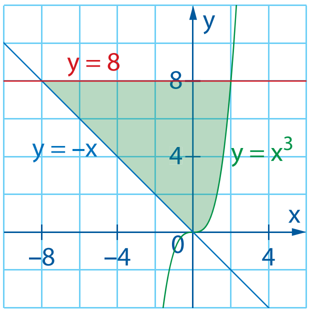
- $x^3 = 8 \iff x = 2$
- Oppervlakte

$$= \frac{8 \cdot 8}{2} + \int_0^2 (8 - x^3)\,dx$$

$$= 32 + \left[8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 32 + ((16 - 4) - 0)$$

$$= 44$$



Opdracht 65 bladzijde 71

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = 2x^2$.

Hoeveel bedraagt de oppervlakte begrensd door de grafieken van deze functies?

A $\frac{2}{3}$ **B** $\frac{4}{3}$ **C** $\frac{5}{3}$ **D** 2

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

- $x^2 + 1 = 2x^2 \iff x^2 = 1 \iff x = -1$ of $x = 1$
- Oppervlakte

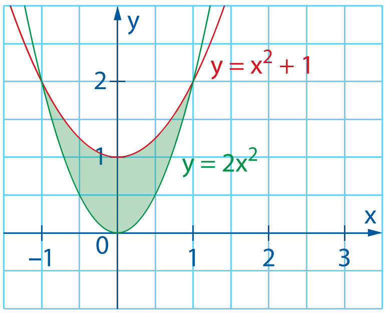
$$= 2 \cdot \int_0^1 ((x^2 + 1) - 2x^2)\,dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 1)\,dx$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - 0\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$



Antwoord B is correct.

Opdracht 66 bladzijde 71

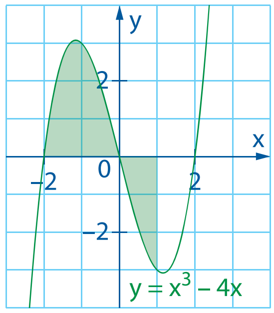
Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 4x$.

1 Bereken $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ en $\int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx$.

Wat is de (meetkundige) betekenis van deze integralen?

- $\int_{-2}^{1}(x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - 2\right) - (4 - 8) = \frac{9}{4}$

  Dit is de georiënteerde oppervlakte over [–2, 1].



- $\int_{-2}^{1}|x^3 - 4x|\,dx$

  $= \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\,dx - \int_{0}^{1}(x^3 - 4x)\,dx$

  $= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{1}$

  $= (0 - (4 - 8)) - \left(\left(\frac{1}{4} - 2\right) - 0\right)$

  $= \frac{23}{4}$

  Dit is de werkelijke oppervlakte over [–2, 1].

2 Bepaal de waarde(n) van a zodat $\int_{a}^{2} f(x)\,dx = 0$.

$\int_{a}^{2}(x^3 - 4x)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{a}^{2} = 0$

$\Leftrightarrow (4 - 8) - \left(\frac{a^4}{4} - 2a^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow a^4 - 8a^2 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = 4$

$\Leftrightarrow a = -2 \text{ of } a = 2$

Alternatieve redenering:
omdat f een oneven functie is, zal de integraal 0 zijn voor a = –2. Voor a = 2 is de integraal ook 0 omwille van de uitbreiding van het integraalbegrip. Vermits –2, 0 en 2 de enige nulpunten van deze functie zijn, bestaan er geen andere a-waarden waarvoor de integraal ook 0 zou zijn

Opdracht 67 bladzijde 71

Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de krommen met vergelijking

1 $y = x^2$, $y = x$ en $y = 2x$

- $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 1$
- $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$
- Oppervlakte

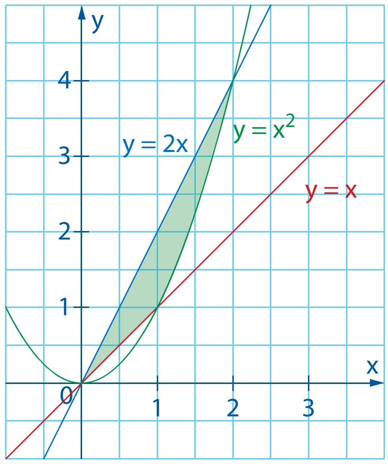
$$= \int_0^1 (2x - x)\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{7}{6}$$



2 $y = x^2 - 4x + 3$ en $y = -x^2 - x + 2$

- $x^2 - 4x + 3 = -x^2 - x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ of $x = 1$
- Oppervlakte

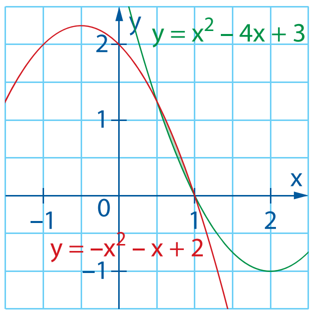
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left((-x^2 - x + 2) - (x^2 - 4x + 3)\right)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-2x^2 + 3x - 1)\,dx$$

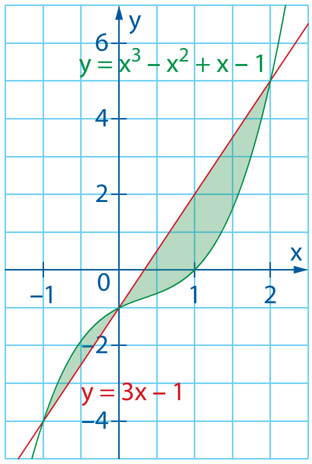
$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{24}$$



3 $y = x^3 - x^2 + x - 1$ en $y = 3x - 1$



- $x^3 - x^2 + x - 1 = 3x - 1$

  $\Leftrightarrow\ x^3 - x^2 - 2x = 0$

  $\Leftrightarrow\ x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$

  $\Leftrightarrow\ x = 0\ \text{ of }\ x = -1\ \text{ of }\ x = 2$

- Oppervlakte

  $= \int_{-1}^{0}((x^3 - x^2 + x - 1) - (3x - 1))\,dx$

  $+ \int_{0}^{2}((3x - 1) - (x^3 - x^2 + x - 1))\,dx$

  $= \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx + \int_{0}^{2}(-x^3 + x^2 + 2x)\,dx$

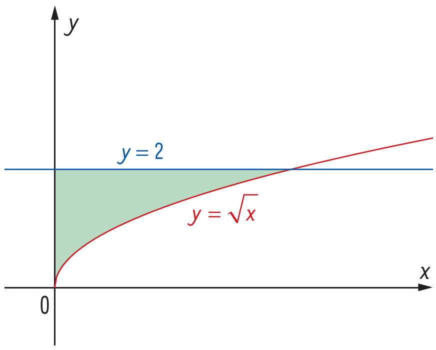
  $= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2}$

  $= \left(0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right)\right) + \left(\left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) - 0\right)$

  $= \frac{37}{12}$

Opdracht 68 bladzijde 72

Bereken de gekleurde oppervlakte.



- $\sqrt{x} = 2 \ \Leftrightarrow\ x = 4$
- Oppervlakte

  $= \int_{0}^{4}\left(2 - \sqrt{x}\right)dx$

  $= \left[2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}$

  $= \left(8 - \frac{16}{3}\right) - 0$

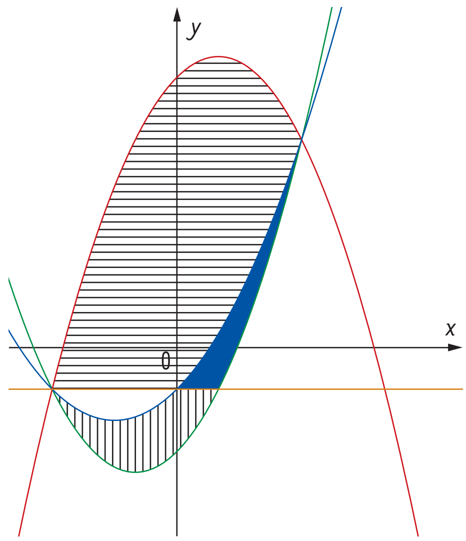
  $= \frac{8}{3}$

Opdracht 69 bladzijde 72

De grafieken van de functies met voorschrift

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{13}{2}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$

en $k(x) = -1$ zijn gegeven.



1 Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied.

- De grafiek van f is de bergparabool; de grafiek van g is de onderste dalparabool en de grafiek van h is de bovenste dalparabool.
- $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = -1$

  $\Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 3 = 0$

  $\Leftrightarrow\ x = -3 \text{ of } x = 1$
- $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$

  $\Leftrightarrow\ x^2 = 9$

  $\Leftrightarrow\ x = -3 \text{ of } x = 3$
- $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{13}{2} = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$

  $\Leftrightarrow\ \frac{5}{6}x^2 = \frac{15}{2}$

  $\Leftrightarrow\ x^2 = 9$

  $\Leftrightarrow\ x = 3 \text{ of } x = -3$
- Oppervlakte

$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3}x^2 + x - 1\right) - (-1)\right)dx + \int_1^3 \left(\left(\frac{1}{3}x^2 + x - 1\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}\right)\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^2 + x\right)dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x\right]_1^3$$

$$= \left(\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\right) - 0\right) + \left(\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) - \left(-\frac{1}{18} + \frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{13}{6}$$

2 Bereken de oppervlakte van het horizontaal gestreepte gebied.

- $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{13}{2} = -1$

  $\Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 15 = 0$

  $\Leftrightarrow\ x = -3 \text{ of } x = 5$

- Oppervlakte

$$= \int_{-3}^{0}\left(\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{13}{2}\right)-(-1)\right)dx+\int_{0}^{3}\left(\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{13}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}x^2+x-1\right)\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{0}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{15}{2}\right)dx+\int_{0}^{3}\left(-\frac{5}{6}x^2+\frac{15}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{15}{2}x\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{5}{6}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{15}{2}x\right]_{0}^{3}$$

$$= \left(0-\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{45}{2}\right)\right)+\left(\left(-\frac{15}{2}+\frac{45}{2}\right)-0\right)$$

$$= \frac{57}{2}$$

3 Bereken de oppervlakte van het verticaal gestreepte gebied.

- Oppervlakte

$$= \int_{-3}^{0}\left(\left(\frac{1}{3}x^2+x-1\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}\right)\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-1-\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}\right)\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{0}\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(0-\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)\right)+\left(\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-0\right)$$

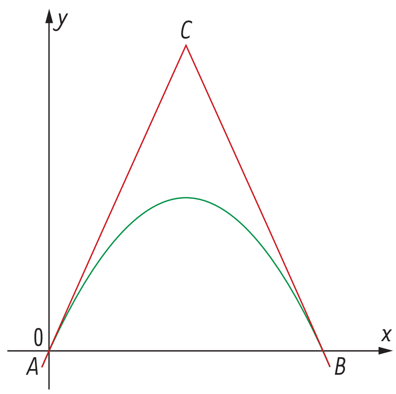
$$= \frac{23}{6}$$

Opdracht 70 bladzijde 72

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x) = -x^2 + bx$.

1 De oppervlakte A_p van het gebied dat ingesloten wordt door de parabool en de x-as hangt af van b.

Bereken A_p.



- $-x^2+bx=0 \Leftrightarrow x\cdot(-x+b)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ of } x=b$
- $A_p = \int_0^b(-x^2+bx)\,dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+b\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \left(-\frac{b^3}{3}+b\cdot\frac{b^2}{2}\right)-0$$

$$= \frac{b^3}{6}$$

2 De grafiek van f snijdt de x-as in de punten A en B. In deze punten tekenen we de raaklijnen aan de grafiek van f. Deze raaklijnen snijden elkaar in het punt C.
De driehoek ABC is gelijkbenig met oppervlakte A_{ABC}.

Bereken $\dfrac{A_p}{A_{ABC}}$.

- raaklijnen t_A in A en t_B in B:

  $f'(x) = -2x + b \;\Rightarrow\; f'(0) = b$ en $f'(b) = -b$

  $t_A \leftrightarrow y = bx$ en $t_B \leftrightarrow y = -b(x - b)$

  $t_B \leftrightarrow y = -bx + b^2$

- snijpunt C van de raaklijnen t_A en t_B:

  $bx = -bx + b^2 \;\Leftrightarrow\; 2bx = b^2 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{b}{2}$

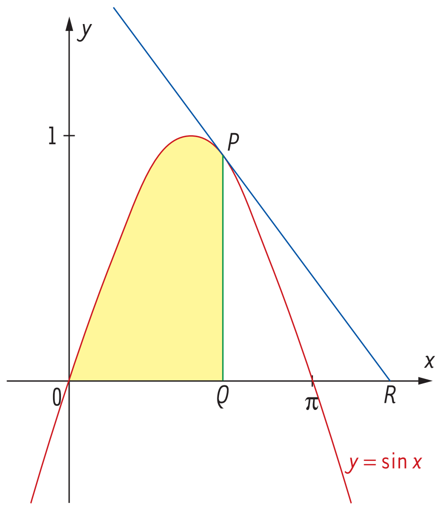
  $y = \dfrac{b^2}{2}$, zodat $C\left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{b^2}{2}\right)$

- $A_{ABC} = \dfrac{b \cdot \dfrac{b^2}{2}}{2} = \dfrac{b^3}{4}$

- $\dfrac{A_p}{A_{ABC}} = \dfrac{\dfrac{b^3}{6}}{\dfrac{b^3}{4}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Opdracht 71 bladzijde 73

Gegeven is het punt $P(a, \sin a)$ met $\dfrac{\pi}{2} < a \leqslant \pi$ en de raaklijn PR aan de grafiek van de functie met voorschrift $y = \sin x$ in het punt P. R ligt op de x-as.



1 Toon aan dat de x-coördinaat van R gelijk is aan $a - \tan a$.

$PR \leftrightarrow y - \sin a = \cos a \cdot (x - a)$

Als $y = 0$, dan is $x = a - \tan a$.

2 Druk de oppervlakte A van het gekleurde gebied uit in functie van a.

$A = \int_0^a \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^a = 1 - \cos a$

3 Bereken *a* als *A* tweemaal zo groot is als de oppervlakte van driehoek *PQR*.

- $\text{Opp. } \Delta PQR = \dfrac{(a - \tan a - a) \cdot \sin a}{2} = -\dfrac{\sin^2 a}{2 \cos a}$
- $A = 2 \cdot \text{opp.}\Delta PQR$

  $\Leftrightarrow\ 1 - \cos a = 2 \cdot \left(-\dfrac{\sin^2 a}{2 \cos a}\right)$

  $\Leftrightarrow\ \cos a - \cos^2 a = -(1 - \cos^2 a)$

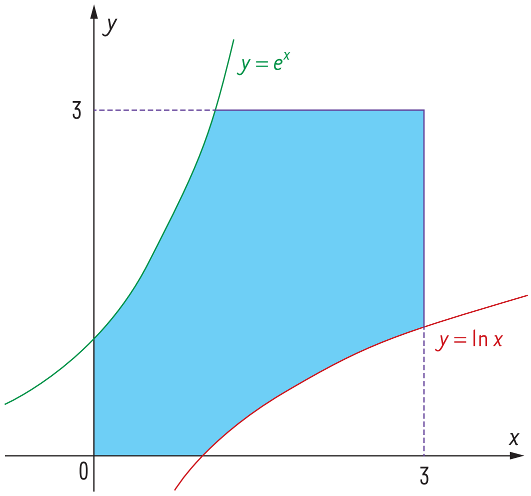
  $\Leftrightarrow\ 2 \cos^2 a - \cos a - 1 = 0$

  $\Leftrightarrow\ \cos a = 1 \text{ of } \cos a = -\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow\ a = \dfrac{2\pi}{3}, \text{ want } \dfrac{\pi}{2} < a \leqslant \pi$

Opdracht 72 bladzijde 73

Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.



- $e^x = 3 \ \Leftrightarrow\ x = \ln 3$
- De functies met voorschrift $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln x$ zijn inverse functies, zodat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn om de rechte met vergelijking $y = x$ in een orthonormaal assenstelsel. Hierdoor zijn de twee witte oppervlakten binnen het vierkant even groot.
- Oppervlakte

  $= 3 \cdot 3 - 2 \cdot \int_0^{\ln 3} (3 - e^x)\,dx$

  $= 9 - 2 \cdot \left[3x - e^x\right]_0^{\ln 3}$

  $= 9 - 2 \cdot ((3 \ln 3 - 3) - (0 - 1))$

  $= 13 - 6 \ln 3$

Opdracht 73 bladzijde 73

1 De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - kx$ sluit met de x-as een gebied in waarvan de oppervlakte gelijk is aan 36.

Bepaal k.

- $x^2 - kx = 0 \iff x \cdot (x - k) = 0 \iff x = 0 \text{ of } x = k$
- Als $k > 0$, dan is $36 = -\int_0^k (x^2 - kx)\,dx$ (1).

  $\int_0^k (x^2 - kx)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - k\frac{x^2}{2}\right]_0^k = \left(\frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{2}\right) - 0 = -\frac{k^3}{6}$ (2).

  Uit (1) en (2) volgt dat $36 = \frac{k^3}{6}$, zodat $k = 6$.
- Als $k < 0$, dan is $36 = -\int_k^0 (x^2 - kx)\,dx$ (3).

  $\int_k^0 (x^2 - kx)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - k\frac{x^2}{2}\right]_k^0 = 0 - \left(\frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{2}\right) = \frac{k^3}{6}$ (4).

  Uit (3) en (4) volgt dat $36 = -\frac{k^3}{6}$, zodat $k = -6$.

2 De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = kx^3 - 3kx$ sluit met de x-as een gebied in waarvan de oppervlakte gelijk is aan 1,5.

Bepaal k.

- $kx^3 - 3kx = 0 \iff kx \cdot (x^2 - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ of } x = -\sqrt{3} \text{ of } x = \sqrt{3}$
- Als $k > 0$, dan is $\frac{3}{2} = 2k\int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x)\,dx$ (1).

  $\int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^0 = 0 - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4}$ (2).

  Uit (1) en (2) volgt dat $\frac{3}{2} = 2k \cdot \frac{9}{4}$, zodat $k = \frac{1}{3}$.
- Als $k < 0$, dan is $\frac{3}{2} = 2k\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,dx$ (3).

  $\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) - 0 = -\frac{9}{4}$ (4).

  Uit (3) en (4) volgt dat $\frac{3}{2} = 2k \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)$, zodat $k = -\frac{1}{3}$.

3 De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - k^3x$ sluit met de x-as een gebied in waarvan de oppervlakte gelijk is aan 9,6.

Bepaal k.

- $x^4 - k^3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^3 - k^3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = k$
- Als $k > 0$, dan is $9{,}6 = -\int_0^k (x^4 - k^3x)\,dx$ (1).

  $\int_0^k (x^4 - k^3x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - k^3\frac{x^2}{2}\right]_0^k = \left(\frac{k^5}{5} - \frac{k^5}{2}\right) - 0 = -\frac{3k^5}{10}$ (2).

  Uit (1) en (2) volgt dat $9{,}6 = \frac{3k^5}{10}$, zodat $k = 2$.
- Als $k < 0$, dan is $9{,}6 = -\int_0^k (x^4 - k^3x)\,dx$ (3).

  $\int_k^0 (x^4 - k^3x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - k^3\frac{x^2}{2}\right]_k^0 = 0 - \left(\frac{k^5}{5} - \frac{k^5}{2}\right) = \frac{3k^5}{10}$ (4).

  Uit (3) en (4) volgt dat $9{,}6 = -\frac{3k^5}{10}$, zodat $k = -2$.

Opdracht 74 bladzijde 73

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f_k(x) = k(-x^3 + 3x + 4)$ en $k > 0$.

Bepaal k zodat de grafiek van f_k met de raaklijn in het maximum een gebied insluit met oppervlakte 45.

- $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow k \cdot (-3x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 1$ $(k \neq 0)$
- De functie bereikt een maximum voor $x = 1$ (zie grafiek; $k > 0$).
- De raaklijn in dit maximum heeft als vergelijking $y = 6k$.
- $k \cdot (-x^3 + 3x + 4) = 6k \Leftrightarrow -x^3 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = 1$
- $45 = \int_{-2}^{1} \left(6k - \left(k(-x^3 + 3x + 4)\right)\right)dx$

$$\Leftrightarrow k \cdot \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx = 45$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = 45$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4)\right) = 45$$

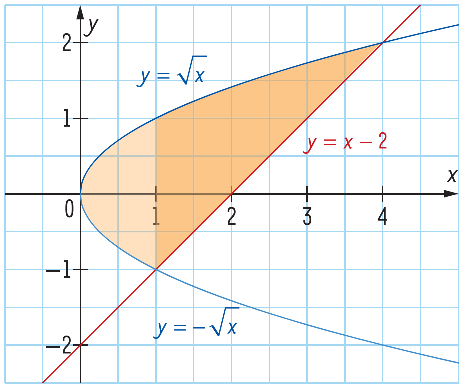
$$\Leftrightarrow k \cdot \frac{27}{4} = 45$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{20}{3}$$

Opdracht 75 bladzijde 74-75

Oppervlakteberekening met y als onafhankelijke veranderlijke

Voorbeeld



We berekenen de oppervlakte A van het gebied begrensd door de krommen met vergelijking $y^2 = x$ en $y = x - 2$.

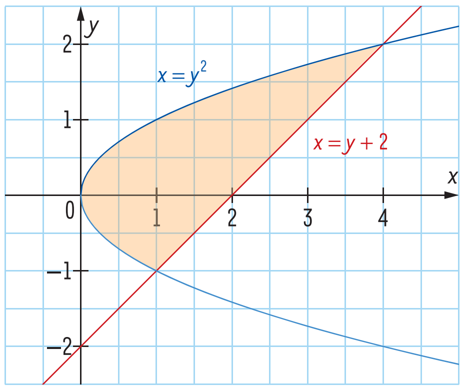
De snijpunten van beide krommen zijn de punten $P(1, -1)$ en $Q(4, 2)$.

Uit de grafiek blijkt dat we de oppervlakte moeten bepalen tussen de grafieken van de krommen met vergelijking $y = -\sqrt{x}$ en $y = \sqrt{x}$ over $[0, 1]$ en tussen de grafieken van de krommen met vergelijking $y = x - 2$ en $y = \sqrt{x}$ over $[1, 4]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right) dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right) dx \\
&= 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 \\
&= 2\left(\frac{2}{3} - 0\right) + \left(\left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right) \\
&= \frac{18}{3} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

De oppervlakte A is echter eenvoudiger te berekenen door y in plaats van x te bekijken als onafhankelijke veranderlijke.

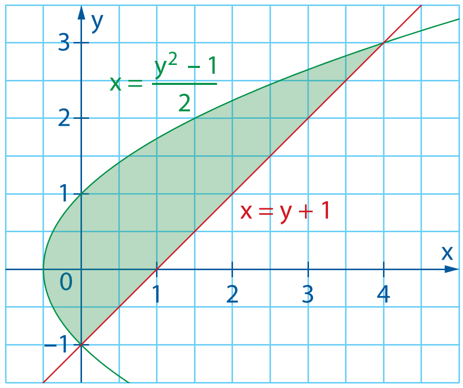
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2)\, dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^2 \\
&= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) \\
&= 5 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$



Bereken

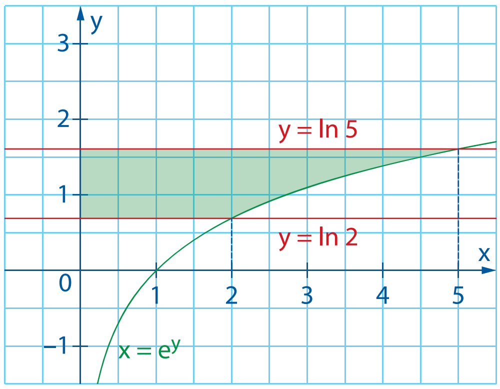
1 de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y^2 = 2x + 1$ en de rechte met vergelijking $y = x - 1$

$$\begin{aligned}\text{Opp.} &= \int_{-1}^{3}\left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)dy\\ &= \int_{-1}^{3}\left(-\frac{y^2}{2} + y + \frac{3}{2}\right)dy\\ &= \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y\right]_{-1}^{3}\\ &= \left(-\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$



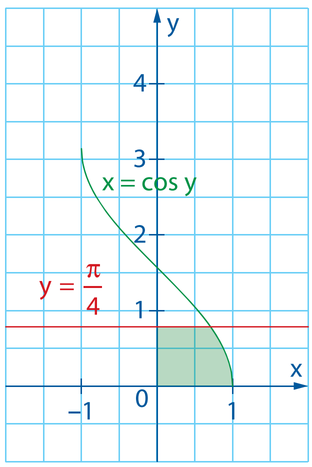
2 de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme met vergelijking $y = \ln x$, de y-as en de rechten met vergelijking $y = \ln 2$ en $y = \ln 5$

$$\begin{aligned}\text{Opp.} &= \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^y\,dy\\ &= \left[e^y\right]_{\ln 2}^{\ln 5}\\ &= 5 - 2\\ &= 3\end{aligned}$$



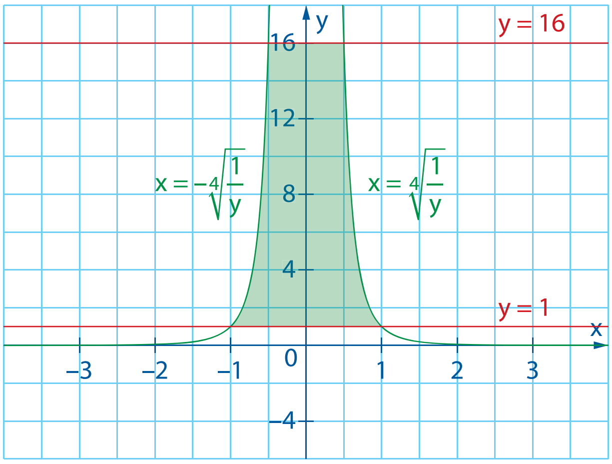
3 de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme met vergelijking $y = \text{Bgcos}\, x$, de x-as, de y-as en de rechte met vergelijking $y = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\text{Opp.} &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos y\,dy\\ &= \left[\sin y\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



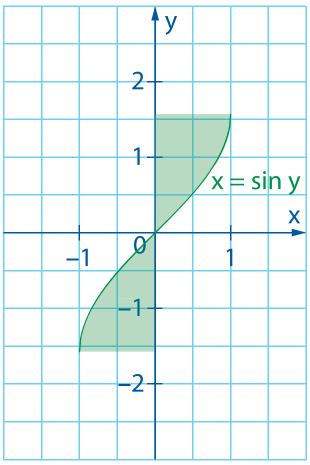
4 de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{x^4}$ en de rechten met vergelijking $y = 1$ en $y = 16$

$$\text{Opp.} = 2 \cdot \int_1^{16} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{y}}\right) dy$$
$$= 2 \cdot \int_1^{16} y^{-\frac{1}{4}}\, dy$$
$$= 2 \cdot \left[\frac{4}{3} y^{\frac{3}{4}}\right]_1^{16}$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{56}{3}$$



5 de oppervlakte van het gebied begrensd door de kromme met vergelijking $y = \text{Bgsin } x$ en de y-as

$$\text{Opp.} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\ dy$$
$$= 2\left[-\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2(0 + 1)$$
$$= 2$$



Opdracht 76 bladzijde 75

Bepaal een vergelijking van een rechte l door de oorsprong die het gebied tussen de grafiek van de functie met voorschrift $y = -x^2 + 6x$ en de x-as in twee gebieden verdeelt met dezelfde oppervlakte.

- $l \leftrightarrow y = ax$
- $-x^2 + 6x = 0 \iff x \cdot (-x + 6) = 0 \iff x = 0$ of $x = 6$
- $-x^2 + 6x = ax \iff x \cdot (-x + 6 - a) = 0 \iff x = 0$ of $x = 6 - a$
- We bepalen a zodat $\int_0^{6-a} \left((-x^2 + 6x) - ax\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^6 (-x^2 + 6x)\, dx \qquad (1)$

- $\int_0^{6-a}\left((-x^2+6x)-ax\right)dx = \int_0^{6-a}\left(-x^2+(6-a)x\right)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+(6-a)\frac{x^2}{2}\right]_0^{6-a}$$

$$= -\frac{(6-a)^3}{3}+\frac{(6-a)^3}{2}$$

$$= \frac{(6-a)^3}{6} \quad (2)$$

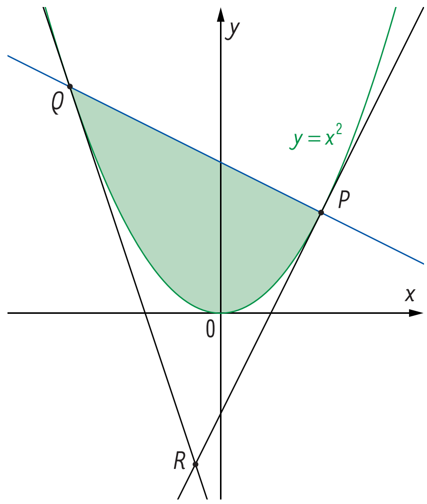
- $\frac{1}{2}\cdot\int_0^6(-x^2+6x)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^6$

$$= 18 \quad (3)$$

- Uit (1), (2) en (3) volgt dat $\frac{(6-a)^3}{6}=18$, zodat $a=6-3\sqrt[3]{4}$.
- De rechte l heeft als vergelijking $y=\left(6-3\sqrt[3]{4}\right)x$.

Opdracht 77 bladzijde 75

Gegeven zijn de punten $P(a,\ a^2)$ en $Q(b,\ b^2)$ op de parabool met vergelijking $y=x^2$.



1 Stel een vergelijking op van de rechte PQ.

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow\ y=(b+a)(x-a)+a^2$$

$$\Leftrightarrow\ y=(a+b)x-ab$$

2 Bepaal de oppervlakte begrensd door de parabool en de rechte PQ (deze oppervlakte is gekleurd).

Oppervlakte

$$= \int_b^a\left((a+b)x-ab-x^2\right)dx$$

$$= \int_b^a\left(-x^2+(a+b)x-ab\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}-abx\right]_b^a$$

$$= \left(-\frac{a^3}{3}+(a+b)\frac{a^2}{2}-a^2b\right)-\left(-\frac{b^3}{3}+(a+b)\frac{b^2}{2}-ab^2\right)$$

$$= \frac{(a-b)^3}{6}$$

3 PR is de raaklijn in P aan de parabool en QR is de raaklijn in Q. Bepaal vergelijkingen van de rechten PR en QR.

$PR \leftrightarrow y-a^2=2a(x-a)$, zodat $PR \leftrightarrow y=2ax-a^2$

$QR \leftrightarrow y-b^2=2b(x-b)$, zodat $QR \leftrightarrow y=2bx-b^2$

4 Bepaal de coördinaat van het snijpunt *R* van deze raaklijnen.

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \iff 2(a-b)x = a^2 - b^2 \iff x = \frac{a+b}{2}$$

$$y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = ab$$

$$\text{zodat } R\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

5 Bereken de oppervlakte van de driehoek *PQR*.

- $PQ \leftrightarrow (a+b)x - y - ab = 0$
- $$d(R, PQ) = \frac{\left|(a+b)\cdot\frac{a+b}{2} - ab - ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2 + (-1)^2}} = \frac{(a-b)^2}{2\sqrt{(a+b)^2+1}}$$
- Opp. driehoek PQR

$$= \frac{|PQ| \cdot d(R, PQ)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a^2-b^2)^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{2\sqrt{(a+b)^2+1}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2(a+b)^2} \cdot (a-b)^2}{4\sqrt{(a+b)^2+1}}$$

$$= \frac{(a-b)^3 \cdot \sqrt{1+(a+b)^2}}{4\sqrt{(a+b)^2+1}} \qquad a > b, \text{ dus } \sqrt{(a-b)^2} = a-b$$

$$= \frac{(a-b)^3}{4}$$

6 Wat is de verhouding van de gekleurde oppervlakte uit **2** en de oppervlakte van de driehoek *PQR*?

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{6}}{\frac{(a-b)^3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Opdracht 78 bladzijde 76

Bereken, in geval van convergentie, de volgende oneigenlijke integralen.

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln 5} e^x\,dx$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^{\ln 5} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^{\ln 5} = \lim_{a \to -\infty} (5 - e^a) = 5$$

2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right) = \frac{1}{n-1}$$

3 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \int_{-1}^{c} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \int_{c}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{c} + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{c}^{1}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \left(\frac{3}{2}c^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}c^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= 0$$

4 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^3\, dx + \int_{0}^{+\infty} x^3\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} x^3\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x^3\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{a}^{0} + \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{b}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(0 - \frac{a^4}{4}\right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^4}{4} - 0\right)$$

$$= (-\infty) + (+\infty)$$

$= /$ (geen convergentie)

5 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^4}\, dx$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^4} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^4}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \int_{-2}^{c} \frac{dx}{x^4} + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \int_{c}^{2} \frac{dx}{x^4}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{c} + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{c}^{2}$$

$$= \lim_{\substack{c \to 0 \\ <}} \left(-\frac{1}{3c^3} - \frac{1}{24}\right) + \lim_{\substack{c \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3c^3}\right)$$

$$= (+\infty) + (+\infty)$$

$= +\infty$ (geen convergentie)

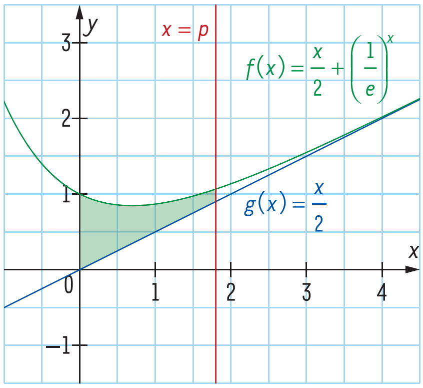
6 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_{2}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

Opdracht 79 bladzijde 76

Gegeven zijn de functies met voorschrift

$f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{e}\right)^x$ en $g(x) = \frac{x}{2}$.



1 De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g, de y-as en de rechte met vergelijking $x = p$ met $p > 0$ is gelijk aan 0,9.

Bereken p.

$$\int_0^p \left(\left(\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{e}\right)^x \right) - \frac{x}{2} \right) dx = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \int_0^p \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} \right]_0^p = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \left[-\left(\frac{1}{e}\right)^x \right]_0^p = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^p = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^p = 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow p = -\ln 0{,}1 = \ln 10$$

2 Wat kun je zeggen over de oppervlakte van het gebied als $p \longrightarrow +\infty$?

$$\lim_{p \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^p \right) = 1, \text{ want } 0 < \frac{1}{e} < 1$$

Opdracht 80 bladzijde 76

1 **a** Verklaar waarom $F(x) = \frac{1}{4 - x}$ een primitieve functie is van de functie met voorschrift

$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4-x}\right) = \frac{-(-1)}{(4-x)^2} = \frac{1}{(x-4)^2}$$

b Bereken, in geval van convergentie, de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-4)^2} dx$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-4)^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x-4)^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{4-x} \right]_a^0 = \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4-a} \right) = \frac{1}{4}$$

2 **a** Verklaar waarom $F(x) = -2\sqrt{5-x}$ een primitieve functie is van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$.

$$\frac{d}{dx}\left(-2\sqrt{5-x}\right) = -2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

b Bereken, in geval van convergentie, de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx$.

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx = \lim_{\substack{b \to 5 \\ <}} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx = \lim_{\substack{b \to 5 \\ <}} \left[-2\sqrt{5-x}\right]_0^b = \lim_{\substack{b \to 5 \\ <}} \left(-2\sqrt{5-b} + 2\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}$$

Opdracht 81 bladzijde 77

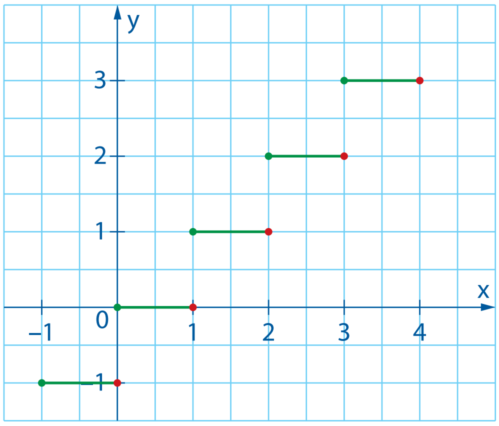
Onder $\lfloor x \rfloor$ verstaat men het grootste geheel getal dat kleiner of gelijk is aan x.

Zo geldt bijvoorbeeld: $\lfloor 3{,}75 \rfloor = 3$, $\lfloor -4{,}1 \rfloor = -5$ en $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Bereken de volgende integralen.

1 $\displaystyle\int_0^5 \lfloor x \rfloor\,dx$

$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$



2 $\displaystyle\int_0^n \lfloor x \rfloor\,dx$ met $n \in \mathbb{N}_0$

$= 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)$

$= n \cdot \dfrac{0 + n - 1}{2}$ (somformule van een rekenkundige rij)

$= \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$

3 $\displaystyle\int_n^{2n} \lfloor x \rfloor\,dx$ met $n \in \mathbb{N}_0$

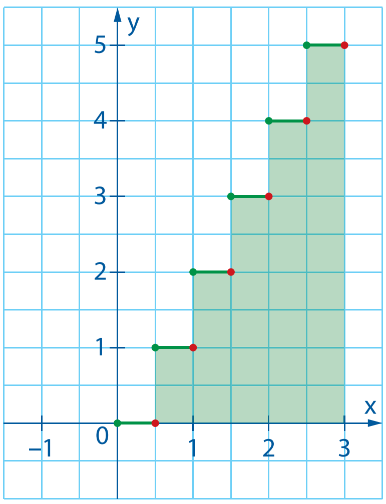
$= n + (n+1) + (n+2) + \dots + (2n-1)$

$= n \cdot \dfrac{n + 2n - 1}{2}$

$= \dfrac{n \cdot (3n-1)}{2}$

4 $\displaystyle\int_0^3 \lfloor 2x \rfloor\,dx$

$= 0 + \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + 2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{2}$



Opdracht 82 bladzijde 77

De functie sgn (signum-functie of tekenfunctie genoemd) wordt gedefinieerd door

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}.$$

Bereken $\int_0^4 x \operatorname{sgn}(2-x)\,dx$.

A 8 **B** 4 **C** 0 **D** −4 **E** −8

(Bron © IJkingstoets burgerlijk ingenieur, 2014)

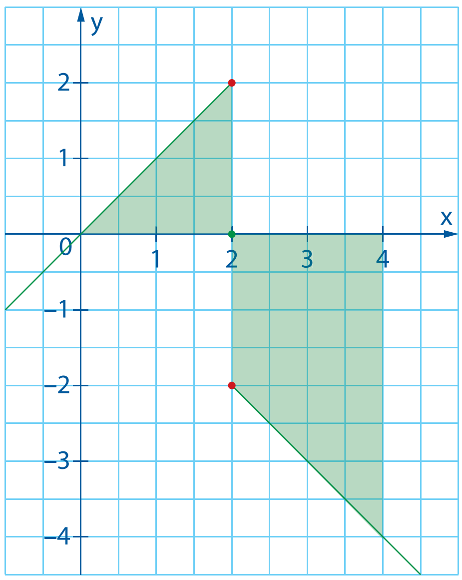
- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$
- $\operatorname{sgn}(2-x) = \begin{cases} -1 & \text{als } 2-x < 0 \\ 0 & \text{als } 2-x = 0 \\ 1 & \text{als } 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(2-x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x > 2 \\ 0 & \text{als } x = 2 \\ 1 & \text{als } x < 2 \end{cases}$
- $x \cdot \operatorname{sgn}(2-x) = \begin{cases} -x & \text{als } x > 2 \\ 0 & \text{als } x = 2 \\ x & \text{als } x < 2 \end{cases}$
- $\int_0^4 x \operatorname{sgn}(2-x)\,dx$

$$= \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{(2+4) \cdot 2}{2}$$

$$= 2 - 6$$

$$= -4$$

Antwoord D is correct.



Opdracht 83 bladzijde 78

Bepaal de primitieve functie F van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ waarbij $F(1) = \pi$.

$F(x) = \operatorname{Bgtan} x + c$

$F(1) = \pi \Leftrightarrow \operatorname{Bgtan} 1 + c = \pi \Leftrightarrow c = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

$F(x) = \operatorname{Bgtan} x + \dfrac{3\pi}{4}$

Opdracht 84 bladzijde 78

Bereken

1 $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\, dx$

$= \left[\ln|x|\right]_{-4}^{-2} = \ln 2 - \ln 4 = \ln \frac{1}{2}$

2 $\int_{-2}^{3} (-3x^2 + 5)\, dx - \int_{3}^{4} (3x^2 - 5)\, dx$

$= \int_{-2}^{3} (-3x^2 + 5)dx + \int_{3}^{4} (-3x^2 + 5)dx$

$= \int_{-2}^{4} (-3x^2 + 5)dx$

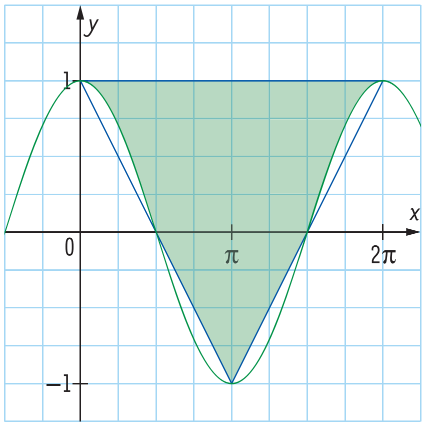
$= \left[-x^3 + 5x\right]_{-2}^{4}$

$= (-64 + 20) - (8 - 10)$

$= -42$

Opdracht 85 bladzijde 78

Gegeven is de grafiek van de cosinusfunctie en drie lijnstukken.



Wat is de oppervlakte van het gekleurde gebied?

A $\frac{5}{2}\pi$ **B** $\frac{5}{2}\pi - 2$ **C** $\frac{3}{2}\pi + 2$ **D** $\frac{3}{2}\pi$

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

Oppervlakte

$= 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)dx + \pi \cdot 1 + \frac{\pi \cdot 1}{2}$

$= 2 \cdot \left[x - \sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi}{2}$

$= 2 \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - (0 - 0)\right) + \frac{3\pi}{2}$

$= \frac{5}{2}\pi - 2$

Antwoord B is correct.

Opdracht 86 bladzijde 78

Bepaal een functie f en een getal a zodanig dat

1 $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} - 6$

Omdat $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ zal $\dfrac{f(x)}{x^2} = \dfrac{d}{dx}(2\sqrt{x} - 6) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, zodat $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$.

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = \int_a^x \frac{t^2}{t^2\sqrt{t}} = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[2\sqrt{t}\right]_a^x = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a}$$

zodat $2\sqrt{x} - 6 = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow a = 9$

2 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{1}{2}$

Omdat $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ zal $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right) = \cos x$.

$$\int_a^x \cos t\,dt = [\sin t]_a^x = \sin x - \sin a,$$

zodat $\sin x - \sin a = \sin x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ of $a = \dfrac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 87 bladzijde 79

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + x^2$ sluit met de raaklijn in $P(2, 12)$ en met de x-as een gebied in.

Bereken de oppervlakte van dit gebied.

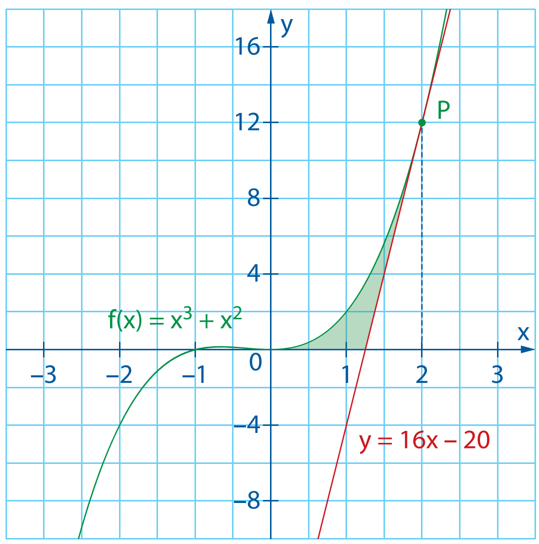
- $f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(2) = 16$
- raaklijn $t \leftrightarrow y - 12 = 16(x - 2)$, zodat $t \leftrightarrow y = 16x - 20$
- Oppervlakte

$$= \int_0^2 (x^3 + x^2)dx - \frac{\frac{3}{4}\cdot 12}{2}$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \frac{9}{2}$$

$$= \left(\left(4 + \frac{8}{3}\right) - 0\right) - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{13}{6}$$



Opdracht 88 bladzijde 79

Bepaal het interval $[a, b]$ waarvoor de waarde van de integraal $\int_a^b (-2x^2 + 5x + 3)\, dx$ maximaal is.

De grafiek van de functie met voorschrift $y = -2x^2 + 5x + 3$ is een bergparabool.

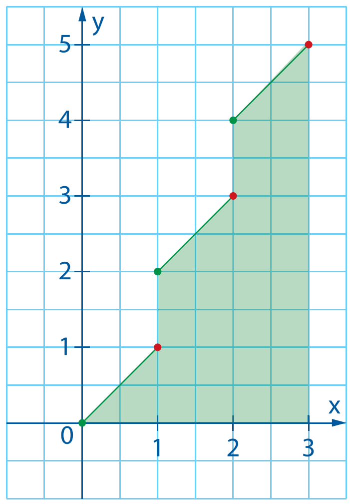
De parabool ligt boven de x-as in het interval $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$. Omdat de bepaalde integraal de georiënteerde oppervlakte is, zal deze maximaal zijn in $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$.

Opdracht 89 bladzijde 79

Beschouw de functie f met voorschrift $f(x) = x + a$ als $a \leqslant x < a + 1$, met a een geheel getal.

Bepaal $\int_0^3 f(x)\, dx$.

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{(2+3) \cdot 1}{2} + \frac{(4+5) \cdot 1}{2}$$
$$= \frac{15}{2}$$

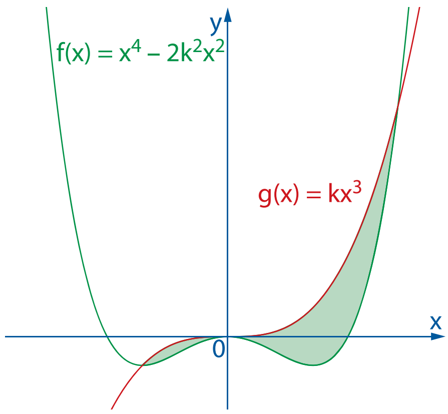


Opdracht 90 bladzijde 79

Bereken k zodanig dat de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = x^4 - 2k^2x^2$ en $g(x) = kx^3$ een gebied insluiten met oppervlakte 63.

- $x^4 - 2k^2x^2 = kx^3 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - kx - 2k^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = -k$ of $x = 2k$
- Als $k > 0$, dan is $63 = \int_{-k}^{2k} \left(kx^3 - \left(x^4 - 2k^2x^2\right)\right) dx$ (1)

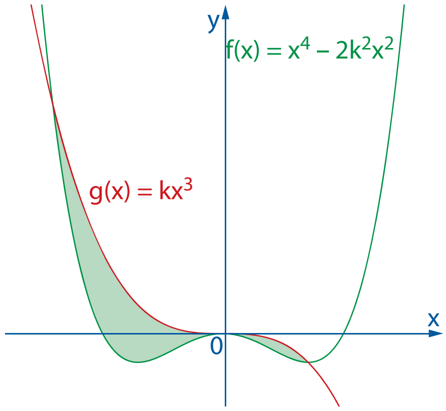
$$\int_{-k}^{2k} \left(kx^3 - \left(x^4 - 2k^2x^2\right)\right) dx$$
$$= \int_{-k}^{2k} \left(-x^4 + kx^3 + 2k^2x^2\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^5}{5} + k\frac{x^4}{4} + 2k^2\frac{x^3}{3}\right]_{-k}^{2k}$$
$$= \left(-\frac{32k^5}{5} + 4k^5 + \frac{16k^5}{3}\right) - \left(\frac{k^5}{5} + \frac{k^5}{4} - \frac{2k^5}{3}\right)$$
$$= \frac{63k^5}{20} \quad (2)$$



Uit (1) en (2) volgt dat $63 = \frac{63k^5}{20}$, zodat $k = \sqrt[5]{20}$.

- Als $k < 0$, dan is $63 = \int_{2k}^{-k} \left(kx^3 - \left(x^4 - 2k^2x^2\right)\right) dx$ (3)

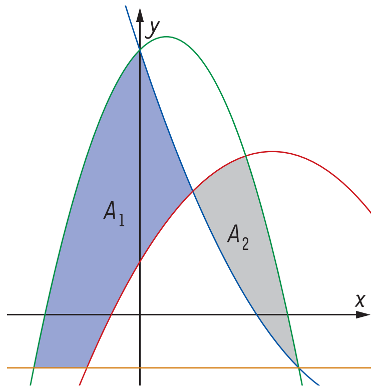
$$\int_{2k}^{-k} \left(kx^3 - \left(x^4 - 2k^2x^2\right)\right) dx$$
$$= \int_{2k}^{-k} \left(-x^4 + kx^3 + 2k^2x^2\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^5}{5} + k\frac{x^4}{4} + 2k^2\frac{x^3}{3}\right]_{2k}^{-k}$$
$$= \left(\frac{k^5}{5} + \frac{k^5}{4} - \frac{2k^5}{3}\right) - \left(-\frac{32k^5}{5} + 4k^5 + \frac{16k^5}{3}\right)$$
$$= -\frac{63k^5}{20} \quad (4)$$



Uit (3) en (4) volgt dat $63 = -\dfrac{63k^5}{20}$, zodat $k = -\sqrt[5]{20}$.

Opdracht 91 bladzijde 79

De grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = -x^2 + x + 5$, $g(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 5$, $h(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x + 1$ en $k(x) = -1$ zijn gegeven.



1 Bereken de oppervlakte A_1 van het blauwe gebied.

- De grafiek van f is de bovenste bergparabool; de grafiek van g is de dalparabool en de grafiek van h is de onderste bergparabool.

- $-x^2 + x + 5 = -1$
  $\Leftrightarrow\ -x^2 + x + 6 = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = -2$ of $x = 3$

- $-\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x + 1 = -1$
  $\Leftrightarrow\ -x^2 + 5x + 6 = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = -1$ of $x = 6$

- $-x^2 + x + 5 = \dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 5$
  $\Leftrightarrow\ -4x^2 + 12x = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = 0$ of $x = 3$

- $\dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 5 = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x + 1$
  $\Leftrightarrow\ 2x^2 - 14x + 12 = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = 1$ of $x = 6$

- Oppervlakte A_1

$$= \int_{-2}^{-1} ((-x^2 + x + 5) - (-1))\,dx + \int_{-1}^{0} \left((-x^2 + x + 5) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 \right) \right) dx$$

$$+ \int_{0}^{1} \left(\left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 5 \right) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 \right) \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + x + 6)\,dx + \int_{-1}^{0} \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4 \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 4 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x^2 + 4x \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{7}{3}x^2 + 4x \right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12 \right) \right) + \left(0 - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3} - 4 \right) \right) + \left(\left(\frac{2}{9} - \frac{7}{3} + 4 \right) - 0 \right)$$

$$= \frac{49}{6}$$

2 Bereken de oppervlakte A_2 van het grijze gebied.

- $-x^2 + x + 5 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$

$\Leftrightarrow\ -2x^2 - 2x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow\ x = -3 \text{ of } x = 2$

- Oppervlakte A_2

$$= \int_{1}^{2} \left(\left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 \right) - \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 5 \right) \right) dx + \int_{2}^{3} \left((-x^2 + x + 5) - \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 5 \right) \right) dx$$

$$= \int_{1}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x - 4 \right) dx + \int_{2}^{3} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x^2 - 4x \right]_{1}^{2} + \left[-\frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\left(-\frac{16}{9} + \frac{28}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{2}{9} + \frac{7}{3} - 4 \right) \right) + \left((-12 + 18) - \left(-\frac{32}{9} + 8 \right) \right)$$

$$= 3$$

Opdracht 92 bladzijde 79

De gemiddelde diepte van een watertank waarvan de dwarsdoorsnede begrensd is door de krommen met vergelijking $y = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$ en $y = 2$, met $0 \leqslant x \leqslant 3$ (x en y uitgedrukt in meter) is

A $\frac{2}{3}$ m **B** 1 m **C** $\frac{4}{3}$ m **D** 3 m **E** 6 m

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2011)

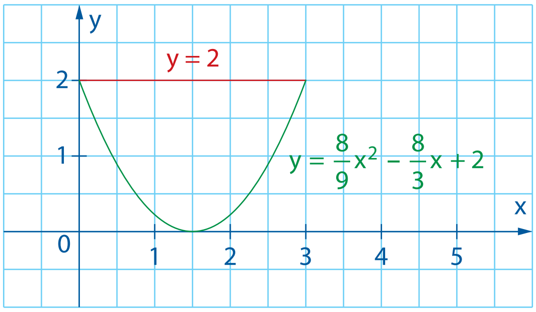
$$\frac{1}{3-0} \cdot \int_0^3 \left(2 - \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 \left(-\frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{3}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{8}{9} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} \cdot x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot ((-8 + 12) - 0)$$

$$= \frac{4}{3}$$



Antwoord C is correct.

Opdracht 93 bladzijde 79

De oppervlakte van het kleinste gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$, de rechte met vergelijking $y = 2x - 4$ en de x-as bedraagt

A 3 **B** $\frac{5}{2}$ **C** $\frac{7}{3}$ **D** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(Bron © Toelatingsproef arts-tandarts)

Oppervlakte

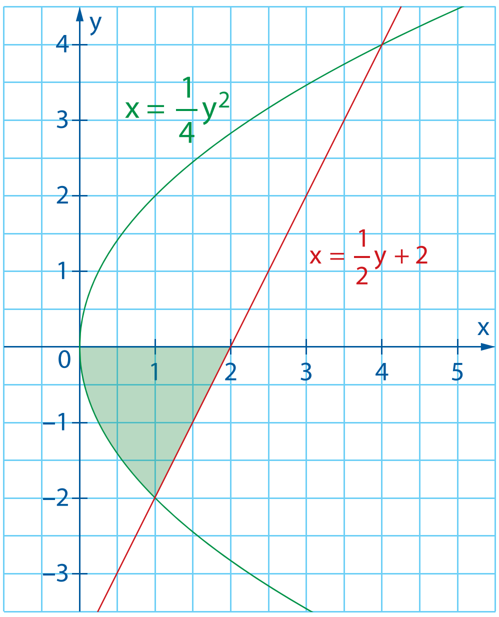
$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}y + 2 - \frac{1}{4}y^2\right) dy$$

$$= \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + 2\right) dy$$

$$= \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^0$$

$$= 0 - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right)$$

$$= \frac{7}{3}$$



Antwoord C is correct.

Opdracht 94 bladzijde 80

Stel dat f een negatieve afgeleide heeft voor alle x-waarden en dat $f(2) = 0$.

De functie g wordt gedefinieerd via $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

Welke van de onderstaande uitspraken zijn waar? Verklaar.

1 g is een afleidbare functie.

$$\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

De uitspraak is waar.

2 De grafiek van g heeft een horizontale raaklijn voor $x = 2$.

$g'(2) = f(2) = 0 \;\Rightarrow\;$ de rico van de raaklijn aan de grafiek van g voor $x = 2$ is 0

De uitspraak is waar.

3 g bereikt een minimum voor $x = 2$.

$g''(2) = f'(2) < 0 \;\Rightarrow\;$ g bereikt een maximum voor $x = 2$ (tweede afgeleide-test)

De uitspraak is niet waar.

4 g bereikt een maximum voor $x = 2$.

zie **3**

De uitspraak is waar.

5 De grafiek van g' snijdt de x-as ter hoogte van $x = 2$.

- $g'(x) = f(x)$ (zie **1**)
- f is overal dalend en $f(2) = 0$ (gegeven) zodat de grafiek van f de x-as snijdt ter hoogte van $x = 2$.

De uitspraak is waar.

Opdracht 95 bladzijde 80

De onderstaande limiet is de limiet van een riemannsom voor een functie die gedefinieerd is over het interval [0, 1].

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) =$$

A 1 **B** $\frac{5}{9}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 2 **E** $\frac{2}{3}$

(Bron © ACTM State Math Contest, 2013)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - 0$$

$$= \frac{2}{3}$$

Antwoord E is correct.

Opdracht 96 bladzijde 80

1 De rechte met vergelijking $x = a$ verdeelt de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x^2}$, de x-as en de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 4$ in twee gelijke delen.

Bepaal a.

- $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$
- $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = -\frac{1}{a} + 1 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow a = \frac{8}{5}$

2 De rechte met vergelijking $y = b$ verdeelt de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x^2}$, de x-as en de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 4$ in twee gelijke delen.

Bepaal b.

- $\frac{1}{x^2} = b \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{b} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{b}}$ $(x > 0)$

- $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left(\frac{1}{x^2} - b \right) dx = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{x} - bx \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{b} - \sqrt{b}\right) - (-1 - b) = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{b} + b + 1 = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow b - 2\sqrt{b} = -\frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow 8b - 16\sqrt{b} + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{b} = \frac{16 - \sqrt{96}}{16}$ of $\sqrt{b} = \frac{16 + \sqrt{96}}{16}$

$\Leftrightarrow \sqrt{b} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4}$ of $\sqrt{b} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\Leftrightarrow b = \frac{11}{8} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ of $b = \frac{11}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Zodat $b = \frac{11}{8} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{3}{2}}$, want dan zal $\frac{1}{\sqrt{b}}$ tussen 1 en 4 liggen.

Opdracht 97 bladzijde 80

Een rechte *r* door de oorsprong verdeelt het gebied begrensd door de parabool met vergelijking $y = x - x^2$ en de *x*-as in twee gebieden met gelijke oppervlakte.

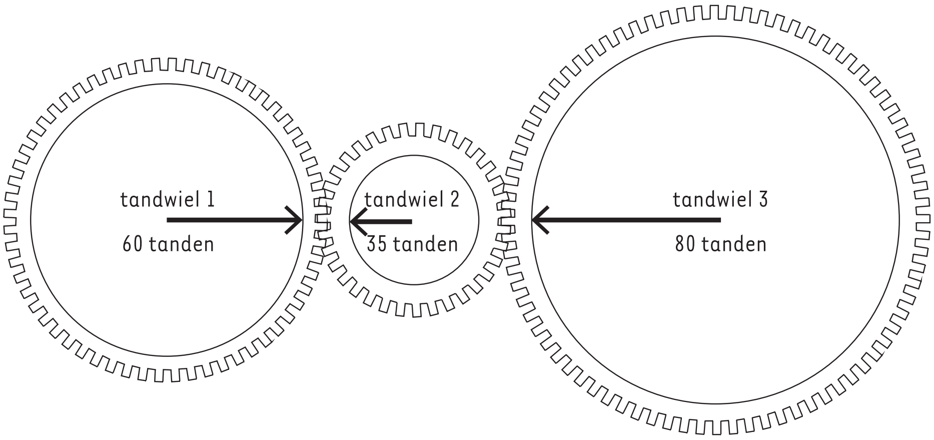
Bepaal de richtingscoëfficiënt van deze rechte *r*.

(Bron © University of Central Arkansas Regional Math Contest, 2009)

- $r \leftrightarrow y = ax$
- $x - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (1 - x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ of $x = 1$
- $x - x^2 = ax \;\Leftrightarrow\; x \cdot (-x + 1 - a) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ of $x = 1 - a$
- We bepalen a zodat $\int_0^{1-a} \left((x - x^2) - ax\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x - x^2)\, dx$ (1).
- $$\begin{aligned} \int_0^{1-a} \left((x - x^2) - ax\right) dx &= \int_0^{1-a} \left(-x^2 + (1 - a)x\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + (1 - a)\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-a} \\ &= -\frac{(1-a)^3}{3} + \frac{(1-a)^3}{2} \\ &= \frac{(1-a)^3}{6} \quad (2) \end{aligned}$$
- $\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$ (3)
- Uit (1), (2) en (3) volgt dat $\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{1}{12}$, zodat $a = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Oplossingen hersenbrekers p. 81

1 Hoeveel omwentelingen van tandwiel 1 zijn er minimaal nodig opdat de drie tandwielen terug in de getoonde positie zouden staan, met de pijlen op een lijn en in dezelfde richting wijzend als in het begin?



A 28 **B** 70 **C** 175 **D** 1680 **E** 168 000

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2015)

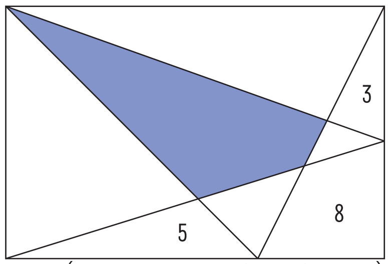
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ en $35 = 5 \cdot 7$ en $80 = 2^4 \cdot 5$

$\text{kgv}(60, 35, 80) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680 = 60 \cdot 28$

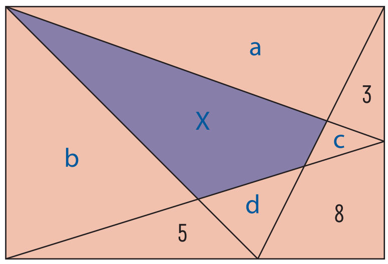
Antwoord A is correct.

2 Een rechthoek is door vier lijnstukken verdeeld in acht stukken zoals aangegeven in de figuur.
Van drie stukken zijn de oppervlaktes aangegeven, namelijk 3, 5 en 8.

Wat is de oppervlakte van de gekleurde vierhoek?



(Bron © NWO tweede ronde, 2015)



- $X + b + c = a + 3 + 13 + d$

  $\Downarrow$

  $X - 16 = a + d - b - c \qquad (1)$

- $X + a + d = b + 5 + 11 + c$

  $\Downarrow$

  $X - 16 = b + c - a - d \qquad (2)$

- Uit (1) en (2) volgt:

  $$a + d - b - c = b + c - a - d$$
  $$\Downarrow$$
  $$2a + 2d = 2b + 2c$$
  $$\Downarrow$$
  $$a + d = b + c$$
  $$\Downarrow \quad (1)$$
  $$X - 16 = 0$$
  $$\Downarrow$$
  $$X = 16$$

3 De punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $(x^2 - y^2)(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$ verdelen het vlak in een aantal delen (waarvan sommige begrensd zijn en andere niet).

Hoeveel delen zijn dat?

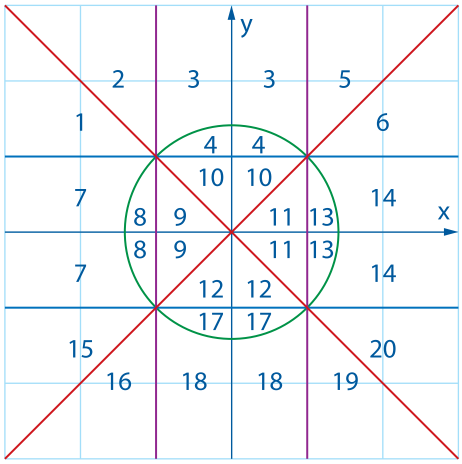
A 10 **B** 20 **C** 24 **D** 28 **E** 32

(Bron © VWO tweede ronde, 2008)

$(x^2 - y^2)(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 = y^2$ of $x^2 = 1$ of $y^2 = 1$ of $x^2 + y^2 = 2$

$\Leftrightarrow\ y = x$ of $y = -x$ of $x = 1$ of $x = -1$ of $y = 1$ of $y = -1$ of $x^2 + y^2 = 2$



Antwoord B is correct.