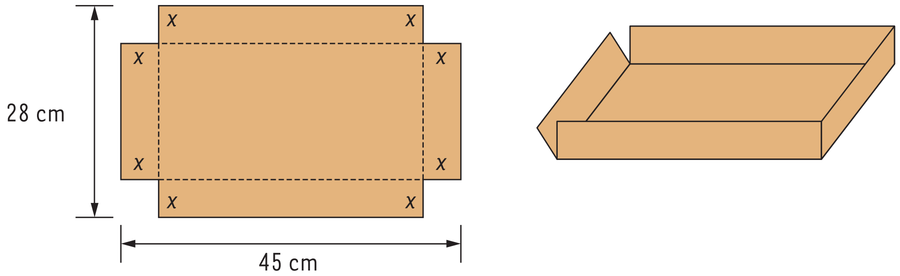
Hoofdstuk 1

Veeltermfuncties

Opdracht 1 bladzijde 8

Uit een stuk karton met lengte 45 cm en breedte 28 cm knip je in de vier hoeken vierkantjes af met zijde x cm. Zo verkrijg je een open doos.



1 Hoe groot is het volume van de doos als je vierkantjes met zijde 5 cm wegsnijdt?

$V = (45 - 2 \cdot 5)(28 - 2 \cdot 5) \cdot 5$

$\Rightarrow V = 3150\ \text{cm}^3 = 3{,}15\ \text{dm}^3$

2 Bepaal het volume V (in cm^3) van de doos in functie van x.

$V = (45 - 2x)(28 - 2x) \cdot x$

3 Welke waarden van x zijn zinvol?

De zijde x moet positief zijn en kleiner dan de helft van de breedte 28 cm. Dus $0 < x < 14$. Anders genoteerd: $x \in \,]0,14[$.

Opdracht 2 bladzijde 10

Zonder water kan een mens niet overleven. Wereldwijd worden er dan ook al vele jaren inspanningen geleverd om het tekort aan drinkwater aan te pakken. Een oplossing daarvoor zou het gebruik van Zuidpoolijs kunnen zijn. Een ijsberg bevat immers miljoenen tonnen zoet water, potentieel drinkwater dus.

De Franse ingenieur Georges Mougin ijvert al sinds 1975 om het verslepen van ijsbergen mogelijk te maken, maar stuitte op tal van problemen (financiële, technische ...). Het is pas sinds 2002 dat men, dankzij o.a. simulatietechnieken, een beter zicht heeft op het verslepen van een ijsberg.

Hoeveel ijs er tijdens een dergelijke tocht smelt, is onder andere afhankelijk van de tijd die het kost om de ijsberg naar de eindbestemming te slepen.

Stel dat men als model een bolvormige ijsberg neemt met straal 150 m en dat er per dag een laag ijs van 2 m dikte smelt.

1 Bepaal het voorschrift van het volume V van de ijsberg (in m^3) als functie van de vaartijd t (in dagen). Je mag aannemen dat het transport van de ijsberg begint op $t = 0$.

$$V_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(150 - 2t)^3$$

2 Wat is het volume van de ijsberg na 20 dagen varen?

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(150 - 2 \cdot 20)^3 = 5\,575\,279{,}763$$

Het volume is ongeveer 5 575 280 m³.

3 Na hoeveel dagen zou de ijsberg volledig gesmolten zijn?

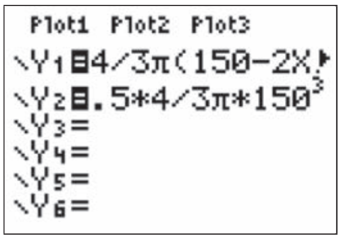
$$V = 0 \Leftrightarrow 150 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 75$$

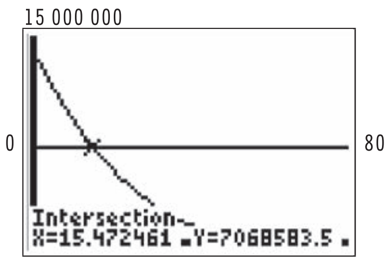
Na 75 dagen varen is het ijs gesmolten.

Opdracht 2(vervolg) bladzijde 11

4 Maak gebruik van de grafiek van V om na te gaan na hoeveel tijd het volume van de ijsberg gehalveerd is.

Grafisch:





Bereken dit tijdstip ook algebraïsch.

Algebraïsch:

$$\cancel{\frac{4}{3}}\pi(150 - 2t)^3 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{4}{3}}\pi \cdot 150^3$$

$$150 - 2t = \sqrt[3]{\frac{150^3}{2}}$$

$$t = \frac{150 - \sqrt[3]{\frac{150^3}{2}}}{2}$$

$$= 15{,}47246$$

Na ongeveer 16 dagen is het volume gehalveerd.

Opdracht 3 bladzijde 11

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

1 Welke nulpunten kun je aflezen uit de tabel van f?

Uit de tabel van f lezen we 3 nulpunten af: –3, 1 en 3.

2 Ontbind het voorschrift van f in factoren. Dit kan bijvoorbeeld door de termen twee aan twee samen te nemen.

$$\underbrace{x^3 - x^2} - \underbrace{9x + 9} = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 9)$$
$$= (x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

3 Hoe kun je uit die ontbinding de nulpunten van f algebraïsch bepalen?

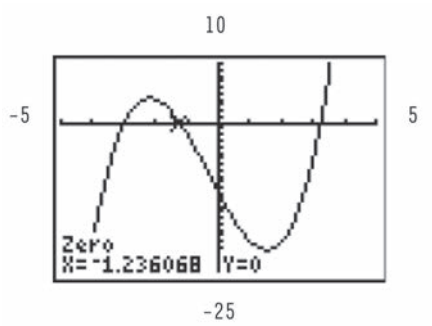
$$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{of} \quad x - 3 = 0 \quad \text{of} \quad x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = 3 \quad \text{of} \quad x = -3$$

Opdracht 4 bladzijde 11

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 12$. In een tabel kun je enkel het geheel nulpunt -3 aflezen.

1 Bepaal m.b.v. de grafiek de overige nulpunten op 0,001 nauwkeurig.

Op de grafiek lezen we de nulpunten –1,236 en 3,236 af.



2 Als -3 een nulpunt is van f, dan is $x+3$ een deler van $f(x)$ en geldt $f(x) = (x+3) \cdot q(x)$.
Bepaal het quotiënt $q(x)$ en bereken de nulpunten van f exact.

M.b.v. de Hornerschema vinden we:

	1	1	-10	-12
-3		-3	6	12
	1	-2	-4	0

Het quotiënt is $q(x) = x^2 - 2x - 4$.

Dit betekent dat $f(x) = (x+3)(x^2 - 2x - 4)$ en dus:

$(x+3)(x^2 - 2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ of $x^2 - 2x - 4 = 0$

$D = 4 + 16 = 20$

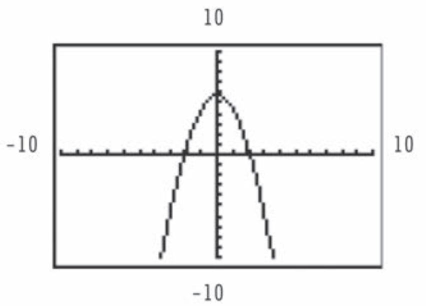
$\Leftrightarrow x = -3$ of $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

nulpunten : $-3,\ 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5}$

Opdracht 5 bladzijde 11

1 Plot de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1}{200}x^4 - \dfrac{521}{400}x^2 + \dfrac{144}{25}$.

Op basis van het standaardvenster vermoeden we twee nulpunten.



2 Bereken de nulpunten van f door de bikwadratische vergelijking
$\frac{1}{200}x^4 - \frac{521}{400}x^2 + \frac{144}{25} = 0$ op te lossen.

$$\frac{1}{200}x^4 - \frac{521}{400}x^2 + \frac{144}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 521x^2 + 2304 = 0$$

$$D = 253\,009 = 503^2$$

$$x^2_{1,2} = \frac{521 \pm 503}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \text{ of } x^2 = 256 = 16^2$$

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ of } x = \pm 16$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{of} \quad x = \pm 16$$

nulpunten : $-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -16, 16$

Opdracht 6 bladzijde 14
Bepaal exact de nulpunten van de veeltermfuncties.

1 $f(x) = 2x^3 - 2x$

$$2x^3 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\,(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = 1$$

nulpunten: 0, –1, 1

2 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

Via een tabel vinden we als nulpunten −5, −2 en 3.

Er kunnen niet meer nulpunten zijn.

Nulpunten: −5, −2, 3

3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 (x - 3) + 2 (x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \quad \text{of} \quad \underbrace{x^2 + 2 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = 3$

Nulpunt: 3

4 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

$4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$

In de tabel lezen we het nulpunt −2 af.

Regel van Horner:

	4	4	−7	2
−2		−8	8	−2
	4	−4	1	0

Er geldt: $f(x) = (x + 2)(4x^2 - 4x + 1)$

zodat: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \quad \text{of} \quad 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$

Opmerkingen: 1) $\frac{1}{2}$ is een dubbel nulpunt.

2) Kies je voor de tabel stapgrootte $\frac{1}{2}$, dan vind je ook $\frac{1}{2}$ als nulpunt via de tabel.

5 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ bikwadratische vergelijking:

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$ stel $x^2 = t$

$\left.\begin{array}{l} S = 5 \\ P = 6 \end{array}\right\}$ 2 en 3

$\Leftrightarrow t = 2$ of $t = 3$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$ of $x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ of $x = \pm\sqrt{3}$

Nulpunten: $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

6 $f(x) = x^4 - 9$

$x^4 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$ of $\underbrace{x^2 + 3 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Nulpunten: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

7 $f(x) = x^3 - 6x - 4$

$x^3 - 6x - 4 = 0$

In de tabel lezen we het nulpunt −2 af.

	1	0	−6	−4
−2		−2	4	4
	1	−2	−2	0

$(x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ of $x^2 - 2x - 2 = 0$

$D = 12$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Nulpunten: $-2, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$

8 $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

In de tabel lezen we de nulpunten −2 en 2 af.

	1	−1	−5	4	4
−2		−2	6	−2	−4
	1	−3	1	2	0
2		2	−2	−2	
	1	−1	−1	0	

$(x + 2)(x - 2)(x^2 - x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ of $x - 2 = 0$ of $x^2 - x - 1 = 0$

$D = 5$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 2$ of $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Nulpunten: $-2,\ 2,\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

9 $f(x) = 9x^3 + 39x^2 - 29x + 5$

In de tabel lezen we het nulpunt −5 af.

	9	39	−29	5
−5		−45	30	−5
	9	−6	1	0

$(x + 5)(9x^2 - 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5 = 0$ of $(3x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ of $x = \dfrac{1}{3}$

Nulpunten: $-5,\ \dfrac{1}{3}$

10 $f(x) = 4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9$

$4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 (4x^2 - 9) - (4x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 9)(x^4 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ of $2x + 3 = 0$ of $x - 1 = 0$ of $x + 1 = 0$ of $\underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ of $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 1$ of $x = -1$

Nulpunten: $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, -1$

Opdracht 7 bladzijde 15

Een veeltermfunctie van de derde graad heeft een (enkelvoudig) nulpunt 3 en een dubbel nulpunt -2. De grafiek van deze functie gaat door het punt $P(-3, 3)$.
Het voorschrift is bijgevolg van de vorm $f(x) = a \cdot (x - 3)^m \cdot (x + 2)^n$, met $a \neq 0$.

1 Bepaal m en n.

$f(x) = a(x - 3)^m \cdot (x + 2)^n$

3 is een enkelvoudig nulpunt: $m = 1, 3\ldots$

-2 is een dubbel nulpunt: $n = 2, 4\ldots$

Omdat de veeltermfunctie van de derde graad is, is $m = 1$ en $n = 2$.

2 Bereken a.

Het punt P $(-3, 3)$ ligt op de grafiek van f:

$a(-3 - 3)(-3 + 2)^2 = 3$

$\Leftrightarrow -6a = 3$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Opdracht 8 bladzijde 15
Bepaal het voorschrift van de vierdegraadsfunctie f met -1 en 1 als dubbele nulpunten en waarvan de grafiek door het punt $P(2, 3)$ gaat.

$f(x) = a\,(x + 1)^2\,(x - 1)^2$

De grafiek gaat door het punt P (2,3):

$a\,(2 + 1)^2\,(2 - 1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow 9a = 3$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

Voorschrift : $f(x) = \dfrac{1}{3}\,(x + 1)^2\,(x - 1)^2$

Opdracht 9 bladzijde 15
Geef een voorbeeld van een vierdegraadsfunctie met

1 geen nulpunten

$f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = 2x^4 + 3$…

2 één nulpunt

$f(x) = (x - 1)^4$, $g(x) = (x - 1)^2\,(x^2 + 1)$…

3 twee nulpunten

$f(x) = x^4 - 1$, $g(x) = (x - 1)\,(x + 1)^3$…

4 drie nulpunten

$f(x) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)^2$, $g(x) = (x - 1)^2\,(x^2 - 4)$…

5 vier nulpunten

$f(x) = x(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)$, $g(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 - 4)$…

Opdracht 10 bladzijde 16

Het voorschrift $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x$ kan ontbonden worden als $f(x) = x(x + 2)(2x - 3)$.
In de tabel vind je de functiewaarden bij een aantal originelen.

x	f(x)
−3	−27
−2,5	−10
−2	0
−1,5	4,5
−1	5
−0,5	3
0	0
0,5	−2,5
1	−3
1,5	0
2	8
2,5	22,5
3	45

1 Leid uit deze gegevens af voor welke intervallen van x de grafiek van f boven, respectievelijk onder de x-as ligt.
Doe dit zonder een grafiek te maken.

De grafiek van f ligt boven de x-as voor $-2 < x < 0$ en voor $x > 1,5$ want daar zijn de functiewaarden positief.

De grafiek van f ligt onder de x-as voor $x < -2$ en voor $0 < x < 1,5$ want daar zijn de functiewaarden negatief.

Omdat de functie van de derde graad is kunnen er maximum 3 nulpunten zijn. Een andere mogelijkheid voor de grafiek is er niet.

2 Voor $x = -3$ en $x = 1$ zijn de functiewaarden negatief:
$f(-3) = -27$ en $f(1) = -3$. Bepaal voor $x = -3$ het teken van elk van de factoren in de ontbinding van f.
Doe dit ook voor $x = 1$.

x = -3:

$$\left.\begin{array}{l} -3 < 0 \\ -3 + 2 < 0 \\ 2(-3) - 3 < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{3 negatieve factoren} \\ -3(-3+2)(2(-3)-3) < 0 \end{array}$$

x = 1:

$$\left.\begin{array}{l} 1 > 0 \\ 1 + 2 > 0 \\ 2 \cdot 1 - 3 < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{2 positieve en 1 negatieve factor} \\ 1 \cdot (1+2) \cdot (2 \cdot 1 - 3) < 0 \end{array}$$

3 Voor $x = -1$ en $x = 2$ zijn de functiewaarden positief. Wat kun je voorspellen over het aantal positieve factoren voor deze twee x-waarden? Controleer je bewering.

x = -1: **even aantal negatieve factoren**

$$\left.\begin{array}{l} -1 < 0 \\ -1 + 2 > 0 \\ 2(-1) - 3 < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{2 negatieve factoren} \\ -1 \cdot (-1+2)(2 \cdot (-1) - 3) > 0 \end{array}$$

x = 2:

$$\left.\begin{array}{l} 2 > 0 \\ 2 + 2 > 0 \\ 2 \cdot 2 - 3 > 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{3 positieve factoren} \\ 2 \cdot (2+2)(2 \cdot 2 - 3) > 0 \end{array}$$

Opdracht 11 bladzijde 18

Los de volgende ongelijkheden op met behulp van een tekentabel.

1 $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

* nulpunten:

$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

Tabel: 2

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

$(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ of $x^2 + x + 1 = 0$

$D = -3 < 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

* tekentabel:

x		2	
$x - 2$	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+
$f(x)$	-	0	+

* $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$ als $x > 2$

2 $-3x^4 - x^3 + 2x^2 \leqslant 0$

* nulpunten:

$-3x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2(3x^2 + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0\ (2x)$ of $3x^2 + x - 2 = 0$

$D = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{cases} -1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

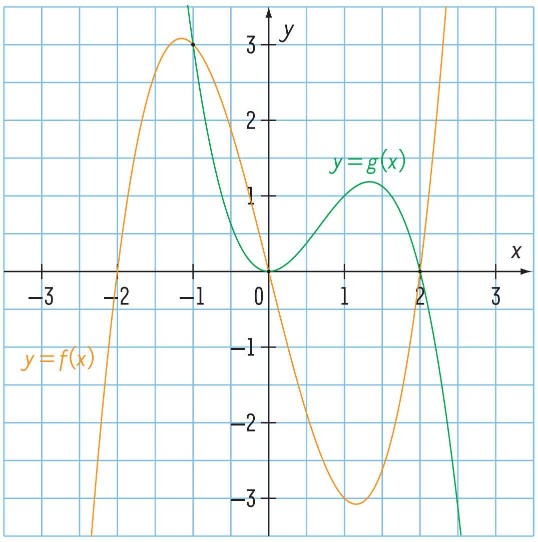
* tekentabel:

x		-1		0		$\frac{2}{3}$	
$-x^2$	-	-	-	0	-	-	-
$3x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+	0	-

* $-3x^4 - x^3 + 2x^2 \leqslant 0$ als $x \leqslant -1$ of $x = 0$ of $x \geqslant \frac{2}{3}$

Opdracht 12 bladzijde 18

Los grafisch op: $f(x) > g(x)$.



f(x) > g(x) als −1 < x < 0 of x > 2

Opdracht 13 bladzijde 18

Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4$ onder de grafiek van $g: x \mapsto -3x^2 - x + 2$?

De voorwaarde vertaalt zich in:

$x^2 + x^2 - 4 < -3x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4 + 3x^2 + x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0$

* nulpunten: −3, −2, 1 (tabel)

$x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x + 2)(x - 1) < 0$

* tekentabel:

x		−3		−2		1	
x + 3	−	0	+	+	+	+	+
x + 2	−	−	−	0	+	+	+
x − 1	−	−	−	−	−	0	+
f(x) − g(x)	−	0	+	0	−	0	+

* De grafiek van f ligt onder de grafiek van g als

$x < -3$ of $-2 < x < 1$

Opdracht 14 bladzijde 18

Los op.

1 $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant -x^2 + 4$

$$\underbrace{x^4 - 5x^2 + 4}_{f(x)} \quad \geqslant \quad \underbrace{-x^2 + 4}_{g(x)}$$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 + x^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2\,(x^2 - 4) \geqslant 0$

* nulpunten: 0, -2, 2
* tekentabel:

x		-2		0		2	
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	–	–	–	0	+
$f(x) - g(x)$	+	0	–	0	–	0	+

* $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant -x^2 + 4$

als $x \leqslant -2$ of $x = 0$ of $x \geqslant 2$

2 $2x^3 - x^2 - x < x - 1$

$$\underbrace{2x^3 - x^2 - x}_{f(x)} < \underbrace{x - 1}_{g(x)}$$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x - x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 < 0$

* nulpunten: $-1,\ 1,\ \frac{1}{2}$ (tabel)

$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x + 1\right)\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(2x - 1) = 0$

* tekentabel:

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) - g(x)$	$\underline{-}$	0	$+$	0	$\underline{-}$	0	$+$

* $2x^2 - x^2 - x < x - 1$ als $x < -1$ of $\frac{1}{2} < x < 1$

Opdracht 15 bladzijde 19

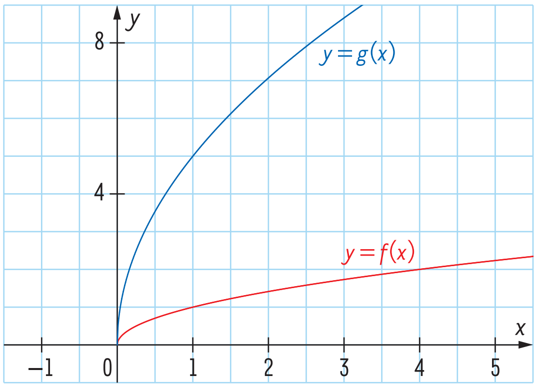
De functies f in deze opdracht hebben als voorschrift $f(x)=\frac{1}{x}$ of $f(x)=\sqrt{x}$ of $f(x)=\sqrt[3]{x}$ of $f(x)=x^3$.

Op de grafiek van zo'n functie f wordt een transformatie (spiegeling, uitrekking, verschuiving) uitgevoerd. Zo ontstaat de grafiek van een functie g.

Bepaal telkens het voorschrift van f en g.

1

x	f(x)	g(x)
−1	/	/
0	0	0
1	1	5
2	1,4142	7,0711
3	1,7321	8,6603
4	2	10
5	2,2361	11,18

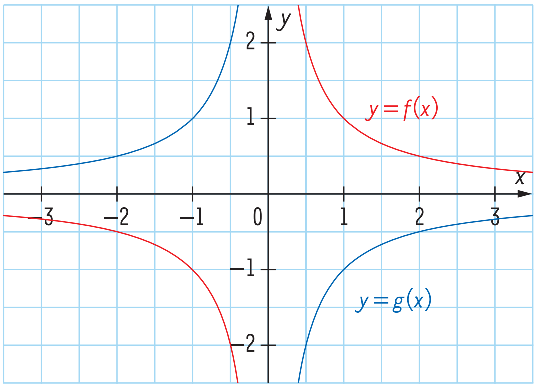


$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 5\sqrt{x}$

2

x	f(x)	g(x)
−3	−0,3333	0,3333
−2	−0,5	0,5
−1	−1	1
0	/	/
1	1	−1
2	0,5	−0,5
3	0,3333	−0,3333

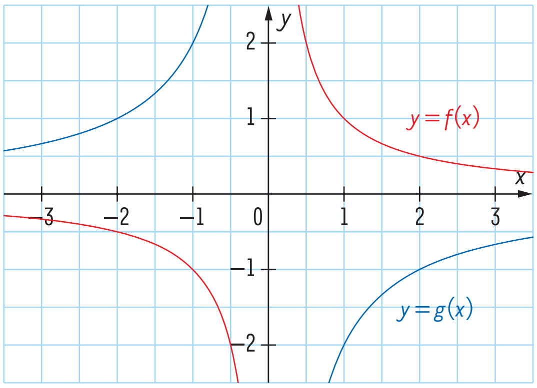


$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$

3

x	f(x)	g(x)
−3	−0,3333	0,6667
−2	−0,5	1
−1	−1	2
0	/	/
1	1	−2
2	0,5	−1
3	0,3333	−0,6667



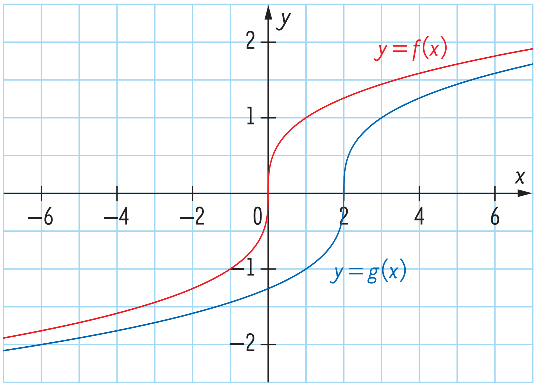
$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = -\frac{2}{x}$

Opdracht 15(vervolg) bladzijde 20

4

x	f(x)	g(x)
−4	−1,587	−1,817
−2	−1,26	−1,587
0	0	−1,26
2	1,2599	0
4	1,5874	1,2599
6	1,8171	1,5874
8	2	1,8171

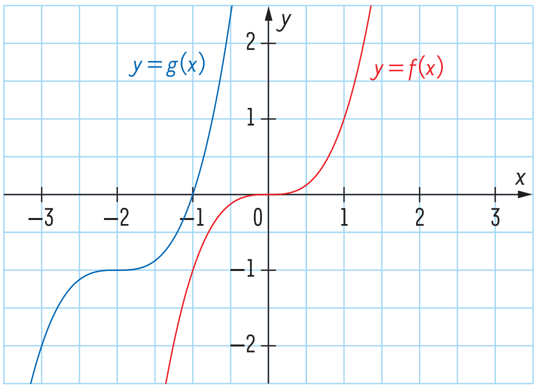


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$g(x) = \sqrt[3]{x-2}$

5

x	f(x)	g(x)
−5	−125	−28
−3	−27	−2
−1	−1	0
1	1	26
3	27	124
5	125	342



$f(x) = x^3$

$g(x) = (x + 2)^3 - 1$

Opdracht 16 bladzijde 22

1 Op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4$ past men, in de gegeven volgorde, de volgende transformaties toe:

- een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$
- een spiegeling om de x-as
- een verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-2,3)$

Je krijgt de grafiek van een functie g.

Bepaal het voorschrift van deze functie.

$$y = x^4$$
$$\downarrow \text{ verticale uitrekking met factor } \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x^4$$
$$\downarrow \text{ spiegeling om de } x\text{-as}$$
$$y = -\frac{1}{2}x^4$$
$$\downarrow \text{ verschuiving volgens } \vec{v}(-2, 3)$$
$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$$
$$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$$

2 Je verandert nu de volgorde van de transformaties als volgt:

- eerst een verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-2,3)$
- daarna een spiegeling om de x-as
- tenslotte een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

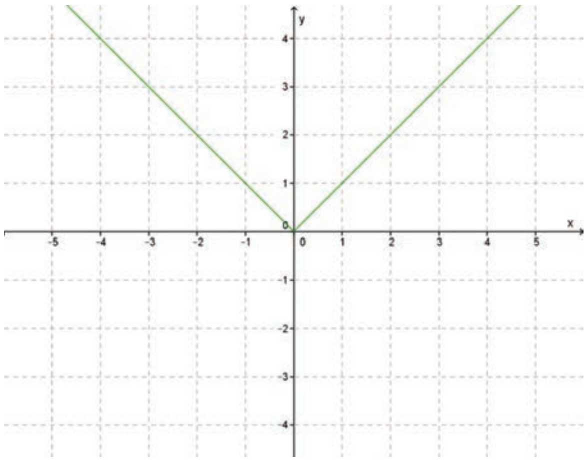
Je krijgt de grafiek van een functie h.

Bepaal het voorschrift van deze functie.

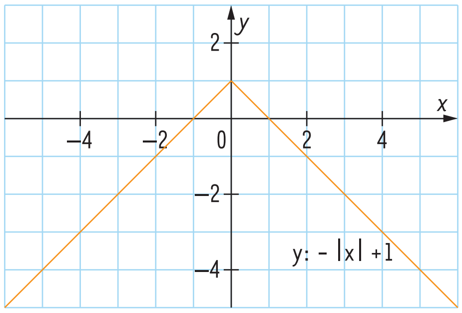
$$y = x^4$$
$$\downarrow \text{ verschuiving volgens } \vec{v}(-2, 3)$$
$$y = (x+2)^4 + 3$$
$$\downarrow \text{ spiegeling om de } x\text{-as}$$
$$y = -(x+2)^4 - 3$$
$$\downarrow \text{ verticale uitrekking met factor } \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - \frac{3}{2}$$
$$h(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - \frac{3}{2}$$

Opdracht 17 bladzijde 22

1 Teken de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = |x|$.



2 Welke transformaties zijn er nodig om deze grafiek om te vormen tot de nevenstaande grafiek?



spiegeling om de x-as → $y = -|x|$
verschuiving volgens $\vec{v}(0,1)$ → $y = -|x| + 1$

3 Geef het voorschrift dat hoort bij die grafiek.

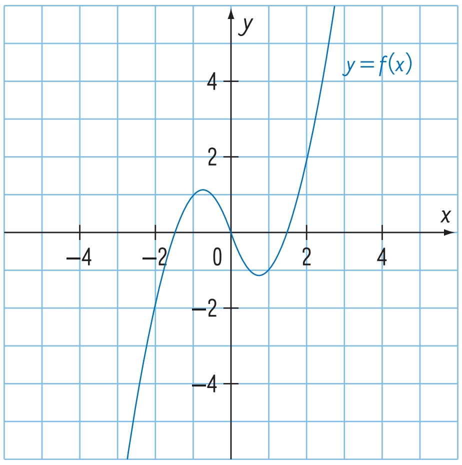
$y = -|x| + 1$

Opdracht 18 bladzijde 23

Gegeven zijn een aantal functiegrafieken.

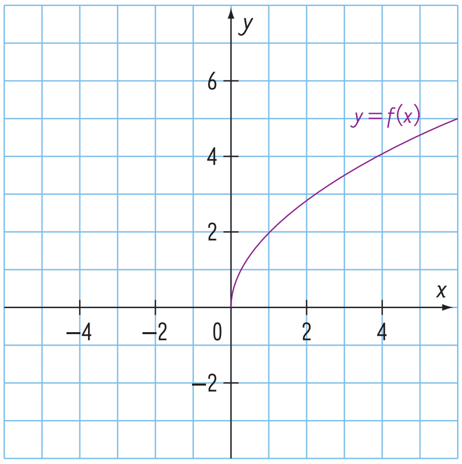
Bepaal de eventuele symmetrieassen en symmetriemiddelpunten van de grafieken.

1



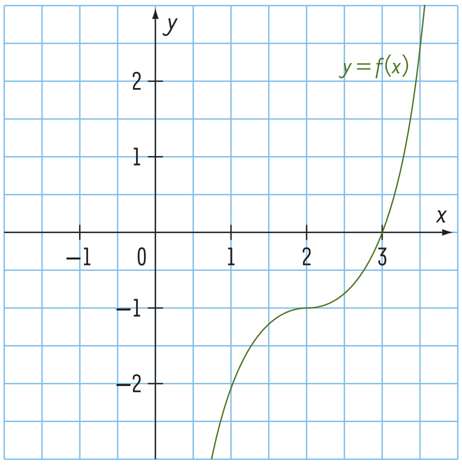
symmetriemiddelpunt: (0,0)

2



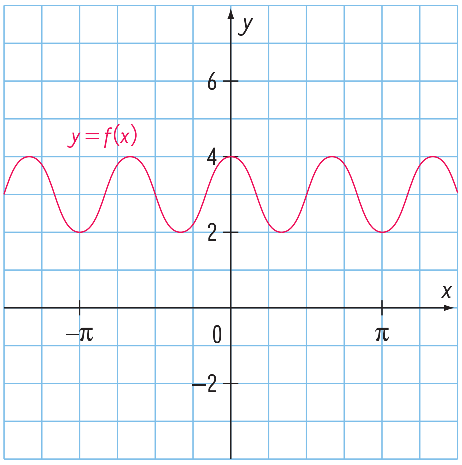
geen symmetrie

3



symmetriemiddelpunt (2, −1)

4



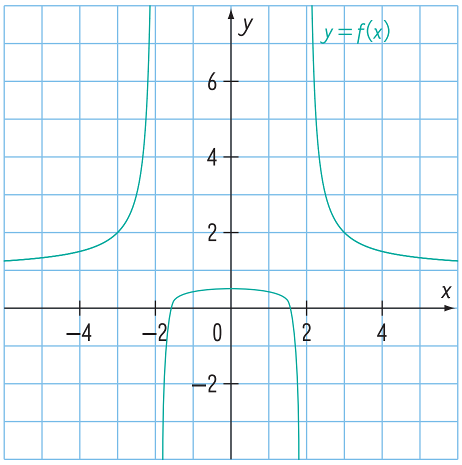
oneindig veel symmetrieassen

→ $[0, \pi]$ verdelen in 3 delen

→ $x = 0,\ x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3},\ x = \pi,\ x = \frac{4\pi}{3},\ \dots$

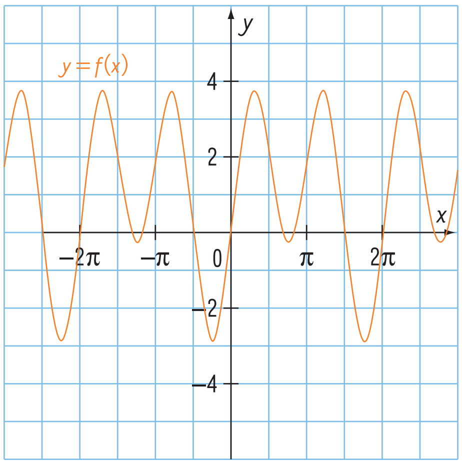
$x = -\frac{\pi}{3},\ x = -\frac{2\pi}{3},\ \dots$

5



1 symmetrieas: $x = 0$

6



oneindig veel symmetrieassen: $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \ldots$

Opdracht 19 bladzijde 26

Onderzoek algebraïsch of de functies met gegeven voorschrift even, oneven of geen van beide zijn. Controleer daarna d.m.v. een grafiek.

1 $f(x) = x^4 + 5$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 5 \\ &= x^4 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

2 $f(x) = x^5 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 3(-x) + 2 \\ &= -x^5 + 3x + 2 \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

3 $f(x) = -2x^3 + 5x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -2(-x)^3 + 5(-x) \\ &= 2x^3 - 5x \\ &= -(-2x^3 + 5x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f is oneven

Opdracht 20 bladzijde 30

Hieronder zie je een aantal grafieken met voorschrift $f(x) = ax^n$.

Maak een classificatie van de vorm van de grafiek van deze functies op basis van de waarde van a en n.

$f(x) = ax^n$

	n even		n oneven	
$a > 0$	$f_5(x)$ $f_9(x)$		$f_1(x)$ $f_3(x)$ $f_7(x)$ $f_{11}(x)$	
$a < 0$	$f_2(x)$ $f_6(x)$ $f_{10}(x)$		$f_4(x)$ $f_8(x)$ $f_{12}(x)$	

Opdracht 21 bladzijde 32

In welke kwadranten liggen de grafieken van de volgende functies, voor zeer grote absolute waarden van x?

1 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x$

$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ n \text{ even} \end{array}\right\}$  eerste en tweede kwadrant

2 $f(x) = -x^3 + 1000x^2 + 10\ 000\ 000x + 1\ 000\ 000\ 000$

$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ n \text{ oneven} \end{array}\right\}$  tweede en vierde kwadrant

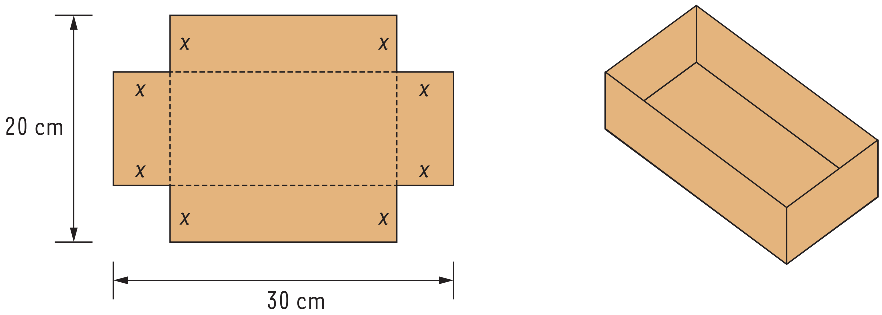
3 $f(x) = -0{,}8x^6 - 1{,}2x^4 + x^2 + 1$

$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ n \text{ even} \end{array}\right\}$  derde en vierde kwadrant

4 $f(x) = 0{,}01x^5 + 100x^4 + x^3$

$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ n \text{ oneven} \end{array}\right\}$  eerste en derde kwadrant

Opdracht 22 bladzijde 33
Bij een rechthoekige metalen plaat van 30 cm bij 20 cm worden in de hoeken kleine vierkanten weggesneden. Daarna wordt van de plaat een bakje gebogen.
De hoogte van de rand is x (in cm).



De inhoud I van dit bakje kunnen we uitdrukken in functie van x:

$$I(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x$$

1 Welke inhoud heeft het bakje als $x = 3$? En als $x = 11$?

$x = 3$: $I(x) = (30 - 6)(20 - 6) \cdot 3 = 1008 \Rightarrow 1008 \text{ cm}^3$

$x = 11$: $I(x) = (30 - 22)\underbrace{(20 - 22)}_{< 0} \cdot 11$, geen oplossing want

de inhoud kan niet negatief zijn.

2 Welke zijn de zinvolle waarden voor x?

De zijde van het vierkantje moet positief zijn en moet kleiner zijn dan de helft van de kortste zijde van de rechthoek (20 cm), dus
$0 < x < 10$

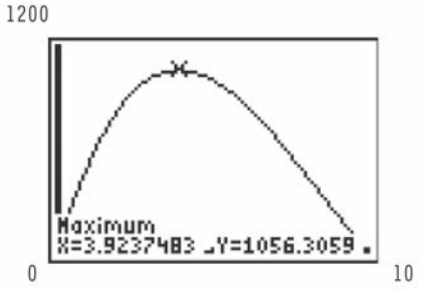
3 Stel een tabel op van I, waarbij x zinvolle gehele waarden aanneemt. Voor welke waarde van x, bij benadering, is de inhoud maximaal?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I(x)	504	832	1008	1056	1000	864	672	448	216

$x \approx 4$ cm

4 Kies vensterinstellingen op basis van de tweede en de derde vraag en plot de grafiek van *I*. Ga op deze grafiek na voor welke *x*-waarde de inhoud maximaal is. Geef het resultaat in mm.

x ≈ 3,9237 cm ≈ 39 mm

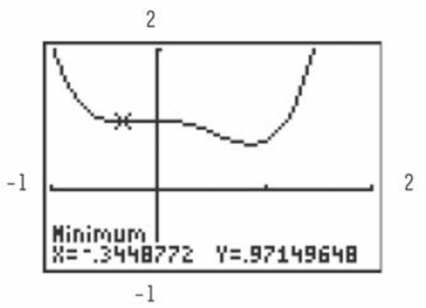


Opdracht 23 bladzijde 36

Bepaal grafisch de relatieve extrema van de veeltermfunctie met voorschrift

$f(x) = x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}6x^2 + 1$.

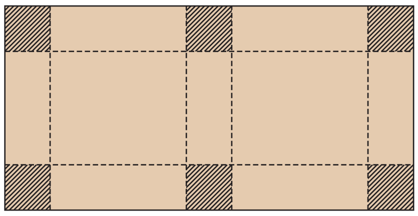
Via een tabel bepalen we de geschikte vensterinstelling



De functie bereikt een minimum voor x = – 0,345 met waarde 0,971 en voor x = 0,870 met waarde 0,658.

De functie bereikt een maximum voor x = 0 met waarde 1.

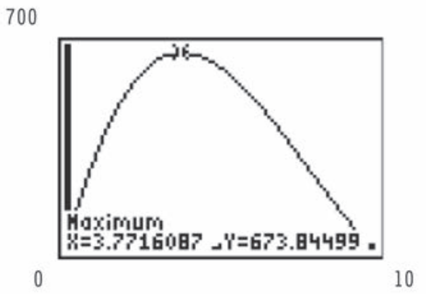
Opdracht 24 bladzijde 36
Uit een rechthoek van 40 cm lang en 20 cm breed snijden we zes gelijke vierkanten weg zoals aangegeven op de figuur.
Met het overblijvende deel maken we een taartdoosje.



Hoe groot moet de zijde van de vierkantjes zijn opdat de doos een maximale inhoud zou hebben?

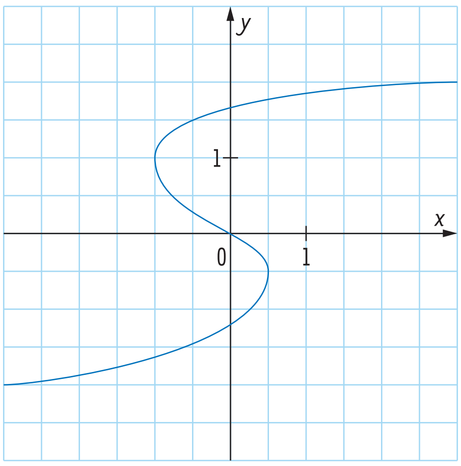
De inhoud van de doos = $I(x) = \left(\dfrac{40 - 3x}{2}\right) \cdot (20 - 2x) \cdot x$

De zijde van het vierkantje moet ongeveer 3,77 cm zijn opdat de inhoud van de doos maximaal is (± 673,84 cm^3).



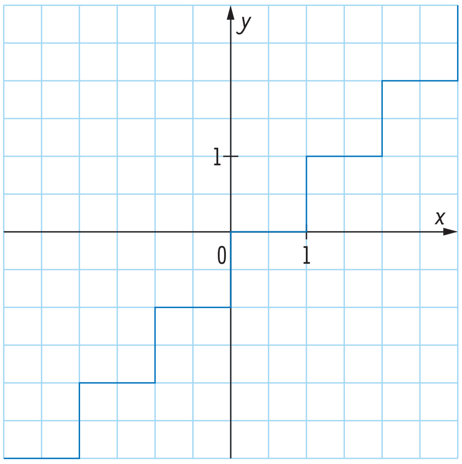
Opdracht 25 bladzijde 39
Welke van de onderstaande grafieken zijn functiegrafieken?
Bepaal in dit geval het domein en het bereik van de functie.

1



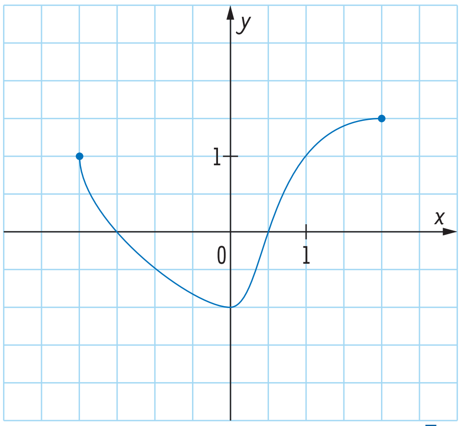
geen functie

2



geen functie

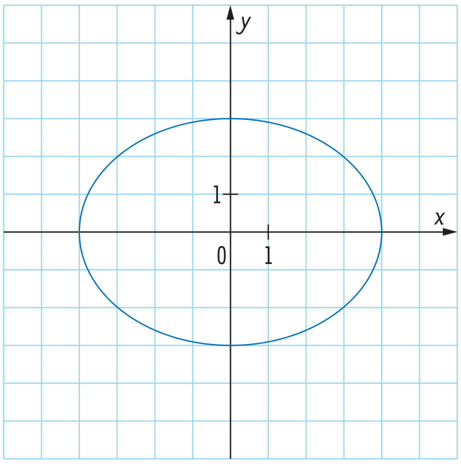
3



functie

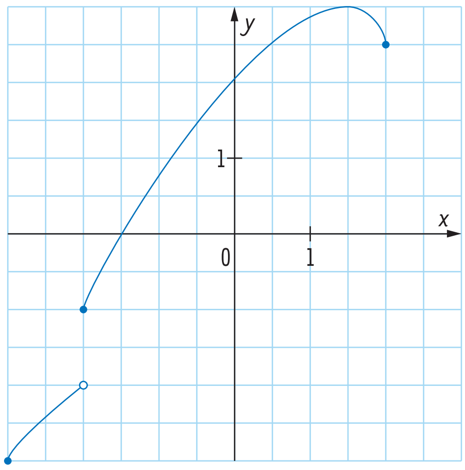
dom f = [-2, 2]   ber f = $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$

4



geen functie

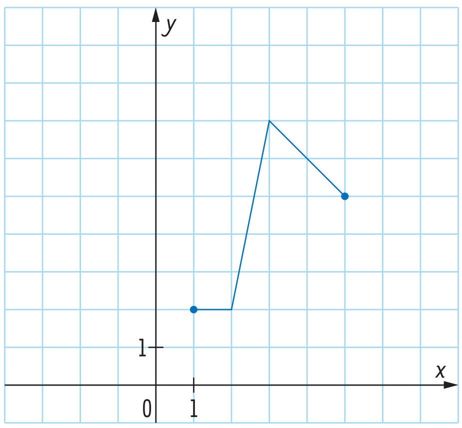
5



functie

dom f = [-3, 2]   ber f = [-3, -2[∪ [-1, 3]

6

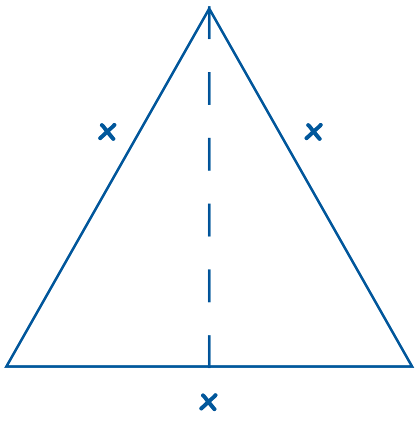


functie

dom f = [1, 5]   ber f = [2, 7]

Opdracht 26 bladzijde 40

Druk de oppervlakte *A* van een gelijkzijdige driehoek met zijde *x* uit in functie van *x*.



Oppervlakte driehoek

$$= \frac{\text{basis} \cdot \text{hoogte}}{2}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{\frac{3}{4}x^2}}{2}$$

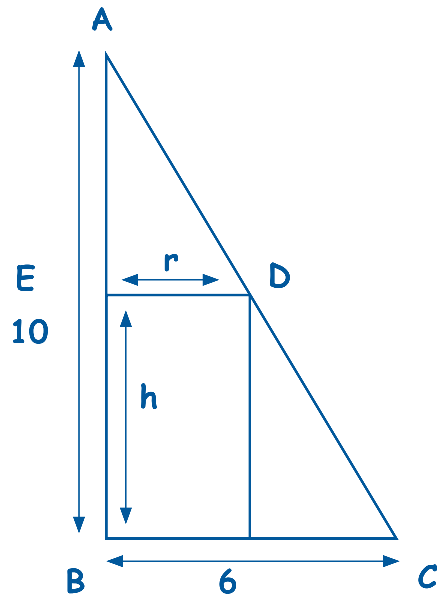
$$= \frac{x \cdot \sqrt{3}x}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\, x^2$$

Opdracht 27 bladzijde 40

Beschouw een kegel waarvan de straal van het grondvlak 6 cm is en de hoogte 10 cm.
In die kegel is een cilinder ingeschreven.

1 Druk de hoogte *h* van de cilinder uit in functie van de straal *r*.



$\Delta\ AED \sim \Delta\ ABC$:

$$\frac{r}{6} = \frac{10 - h}{10}$$

$$10\,r = 60 - 6\,h$$

$$6\,h = 60 - 10\,r$$

$$h = 10 - \frac{5}{3}\,r$$

2 Druk het volume *V* van de cilinder uit in functie van *r*.

$$V = \pi x^2 \cdot h$$

$$= \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3}r\right)$$

Opdracht 28 bladzijde 40

Beantwoord de volgende vraag zonder je rekentoestel te gebruiken.

Beschouw de functie $f: x \mapsto x^{17} + x^{16} + x^{15} + \ldots + x^2 + x$ met domein $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Welke van de volgende beweringen geldt dan?

1 *f* neemt alleen waarden aan in $[0,1[$

2 *f* neemt alle waarden aan in $[0,17]$

3 *f* wordt nooit groter dan $\frac{1}{2}$

4 *f* neemt alle reële waarden aan

5 *f* neemt alle positieve waarden aan

$$f(x) = x^{17} + x^{16} + x^{15} + \ldots + x^2 + x \qquad \text{dom } f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Tussen 0 en $\frac{1}{2}$ is de functie f stijgend.

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{18} - 1}{\frac{-1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \approx 1$$

MR, $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = u_n \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

→ *Antwoord 1*

Opdracht 29 bladzijde 41

Hieronder vind je een overzicht van de geziene ontbindingstechnieken.

Om een veelterm te ontbinden in factoren, kun je de volgende methodes volgen.

- Zonder alle gemeenschappelijke factoren af.
- Maak gebruik van de formules voor merkwaardige producten:

  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

  $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

  $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

- Maak gebruik van de formule voor het ontbinden van een drieterm van de tweede graad:

  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ als $D \geqslant 0$ met $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

- Neem termen samen zodat een gemeenschappelijke factor voorop kan.
- Bepaal delers van de vorm $x - a$.

Ontbind met deze methodes $f(x)$ in factoren met een zo laag mogelijke graad.

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

$f(x) = x(x^2 + 4x + 3)$

$\quad\;\;\, = x(x + 1)(x + 3)$

$\left.\begin{array}{l} S = -4 \\ P = 3 \end{array}\right\}$ -1 en -3

2 $f(x) = x^6 - 1$

$f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$\quad\;\;\, = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

3 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

stel $x^2 = t$, dan is

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$\left.\begin{array}{l} S = 4 \\ P = 3 \end{array}\right\}$ 1 en 3

$t = 1$ of $t = 3$

$x = \pm 1$ of $x = \pm\sqrt{3}$

$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

4 $f(x) = 2x^4 - 32$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,(x^4 - 16) \\ &= 2\,(x^2 - 4)\,(x^2 + 4) \\ &= 2\,(x - 2)\,(x + 2)\,(x^2 + 4) \end{aligned}$$

5 $f(x) = 4x^6 - x^4 + 4x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4\,(4x^2 - 1) + (4x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 1)\,(x^4 + 1) \\ &= (2x - 1)\,(2x + 1)\,(x^4 + 1) \end{aligned}$$

6 $f(x) = 5x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 10x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x\,(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= 5x\,(x^2\,(x - 2) - (x - 2)) \\ &= 5x\,(x - 2)\,(x^2 - 1) \\ &= 5x\,(x - 2)\,(x - 1)\,(x + 1) \end{aligned}$$

7 $f(x) = 2x^2 + x - 6$

$D = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 2) \\ &= (2x - 3)\,(x + 2) \end{aligned}$$

8 $f(x) = 4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4\,(4x^2 - 9) - (4x^2 - 9) \\ &= (4x^2 - 9)\,(x^4 - 1) \\ &= (2x - 3)\,(2x + 3)\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1) \end{aligned}$$

9 $f(x) = -x^3 + x^2 + 14x - 24$

Tabel, nulpunten: $-4,\ 2,\ 3$

$$f(x) = -\,(x + 4)\,(x - 2)\,(x - 3)$$

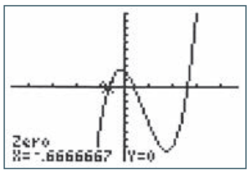
10 $f(x) = 27x^3 + 8$

$f(x) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$

Opdracht 30 bladzijde 42

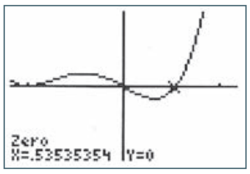
Als je er mag van uitgaan dat de nulpunten van de onderstaande functies geen irrationale getallen zijn, welke zijn dan naar alle waarschijnlijkheid de exacte waarden van de aangeduide nulpunten?

1



$-0{,}666\ldots \Rightarrow -\dfrac{2}{3}$

2



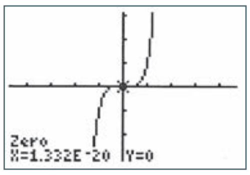
$0{,}535353\ldots$

$$\begin{array}{rrl} & 100q = & 53{,}5353\ldots \\ - & q = & 0{,}5353\ldots \\ \hline & 99q = & 53 \end{array}$$

$$q = \frac{53}{99}$$

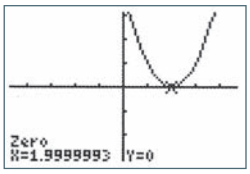
$\Rightarrow \dfrac{53}{99}$

3



0

4



2

Opdracht 31 bladzijde 42

Bepaal exact de nulpunten van de veeltermfuncties met gegeven voorschrift.

1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

$f(x) = x\,(x^2 - 2x - 8)$

$x = 0$ of $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\left.\begin{array}{l} S = 2 \\ P = -8 \end{array}\right\}\ 4 \text{ en } -2$

Nulpunten: 0, 4, -2

2 $f(x) = x^4 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x^3 - 4x^2 + \sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\right) \\ &= x\left(x^2\left(x-4\right) + \sqrt{2}\left(x-4\right)\right) \\ &= x\left(x-4\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Nulpunten: 0, 4

3 $f(x) = 20x^3 + 19x^2 - 2x - 1$

Tabel, nulpunt: -1

	20	19	-2	-1
-1		-20	1	1
	20	-1	-1	0

$(x + 1)\,(20x^2 - x - 1) = 0$

$x + 1 = 0$ of $20x^2 - x - 1 = 0$

$D = 81$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{40} \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\[2mm] -\dfrac{8}{40} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Nulpunten: $-1,\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{5}$

4 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

Tabel, nulpunten: -5, -3, 1

Nulpunten: -5, -3, 1

5 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

$(x - 1)(x - 2)(2x + 1) = 0$

Nulpunten: $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$

Tabel, nulpunten: 1, 2

	2	-5	1	2
1		2	-3	-2
	2	-3	-2	0
2		4	2	
	2	1	0	

6 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 8$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x + 1) - 8(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - 8) \\ &= (x + 1)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Nulpunten: $-1,\ 2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$

7 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

$(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x + 1) = 0$

Nulpunten: $-3,\ -1,\ 2$

Tabel, nulpunten: -3, -1, 2

	1	3	-3	-11	-6
-3		-3	0	9	6
	1	0	-3	-2	0
-1		-1	1	2	
	1	-1	-2	0	
2		2	2		
	1	1	0		

8 $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24$

$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 + 4) = 0$

Nulpunten: $-2,\ 1,\ 3$

Tabel, nulpunten: -2, 1, 3

	1	-2	-1	-2	-20	24
-2		-2	8	-14	32	-24
	1	-4	7	-16	12	0
1		1	-3	4	12	
	1	-3	4	-12	0	
3		3	0	12		
	1	0	4	0		

9 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 48x - 16$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(3x + 1) - 16(3x + 1) \\ &= (3x + 1)(x^2 - 16) \\ &= (3x + 1)(x - 4)(x + 4) \end{aligned}$$

Nulpunten: $-\frac{1}{3},\ 4,\ -4$

10 $f(x) = 15x^3 - x^2 - 114x + 72$

$15x^3 - x^2 - 114x + 72 = 0$

Tabel, nulpunt: -3

	15	-1	-114	72
-3		-45	138	-72
	15	-46	24	0

$(x + 3)(15x^2 - 46x + 24) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ of $15x^2 - 46x + 24 = 0$

$D = 676 = 26^2$

$$x_{1,2} = \frac{46 \pm 26}{30} \quad \begin{cases} \frac{12}{5} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nulpunten: $-3, \frac{12}{5}, \frac{2}{3}$

11 $f(x) = 9x^4 + 18x^3 + 29x^2 + 20x + 4$

$9x^4 + 18x^3 + 29x^2 + 20x + 4 = 0$

Via grafiek of tabel $\left(\text{stapgrootte } \frac{1}{3}\right)$: $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

	9	18	29	20	4
$-\frac{2}{3}$		-6	-8	-14	-4
	9	12	21	6	0
$-\frac{1}{3}$		-3	-3	-6	
	9	9	18	0	

$9(x^2 + x + 2) = 0$

$D < 0$

Nulpunten : $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

12 $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

$f(x) = 2x^2(3x - 2) + (3x - 2)$

$= (3x - 2)(2x^2 + 1)$

Nulpunt: $\frac{2}{3}$

13 $f(x) = 10x^4 + 9x^3 + 17x^2 - 4x - 4$

$10x^4 + 9x^3 + 17x^2 - 4x = 0$

Tabel, nulpunt: $\frac{1}{2}$

grafiek : $\frac{1}{2}$, $-0{,}4 = -\frac{2}{5}$

	10	9	17	-4	-4
$\frac{1}{2}$		5	7	12	4
	10	14	24	8	0
$-\frac{2}{5}$		-4	-4	-8	
	10	10	20	0	

$10\,(x^2 + x + 2) = 0$

$\rightarrow D < 0$

Nulpunt: $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$

14 $f(x) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

$f(x) = (3x + 1)^3$

Nulpunt: $-\frac{1}{3}$

15 $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 30x + 25$

$4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 30x + 25 = 0$

Tabel, nulpunt: 1

Grafiek : 1, $-\frac{5}{2}$

	4	12	-11	-30	25
1		4	16	5	-25
	4	16	5	-25	0
$-\frac{5}{2}$		-10	-15	25	
	4	6	-10	0	

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$D = 49$

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 7}{4}$ → 1, $-\frac{5}{2}$

Nulpunten : 1, $-\frac{5}{2}$

Opdracht 32 bladzijde 42

Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g.

1 $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x + 3$ en $g(x) = 3$

Voor de snijpunten geldt:

$3x^3 - 3x^2 - 6x + 3 = 3$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x\,(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 - x - 2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} S = 1 \\ P = -2 \end{matrix}\right\} 2 \text{ en } -1$$

De snijpunten zijn: $S_1\,(0,\ 3)$, $S_2\,(2,\ 3)$ en $S_3\,(-1,\ 3)$

2 $f(x) = x^5$ en $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

Voor de snijpunten geldt:

$x^5 = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

$\Leftrightarrow x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

Tabel, nulpunten: $-2,\ 1$

	1	0	-2	2	-3	2
-2		-2	4	-4	4	-2
	1	-2	2	-2	1	0
1		1	-1	1	-1	
	1	-1	1	-1	0	

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2\,(x - 1) + (x - 1) = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{(x - 1)}\ \underset{\substack{\downarrow \\ /}}{(x^2 + 1)}$$

De snijpunten zijn: $S_1\,(-2,\ -32)$ en $S_2\,(1,\ 1)$

Opdracht 33 bladzijde 42
Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie f van de derde graad met drie nulpunten 0, 5 en 8 en waarbij $f(10) = 17$.

$$f(x) = ax\,(x - 5)\,(x - 8)$$
$$f(10) = 17$$
$$\Rightarrow 17 = 10a \cdot 5 \cdot 2$$
$$17 = 100a$$
$$a = \frac{17}{100}$$

$$f(x) = \frac{17}{100}\,x\,(x - 5)\,(x - 8)$$

Opdracht 34 bladzijde 42
Bepaal een voorschrift van een derdegraadsfunctie die enkel -1 en 1 als nulpunten heeft.

Voorbeelden: $f(x) = (x + 1)^2\,(x - 1)$
$f(x) = (x + 1)\,(x - 1)^2$

Opdracht 35 bladzijde 42
Bepaal een voorschrift van een vijfdegraadsfunctie die enkel 2 als nulpunt heeft.

Voorbeelden: $f(x) = (x - 2)^5$
$f(x) = (x - 2)\,(x^4 + 1)$

Opdracht 36 bladzijde 42

Bepaal zonder rekentoestel welk functievoorschrift bij de grafiek kan horen.

A $f(x) = 2(x+1)(x-3)$

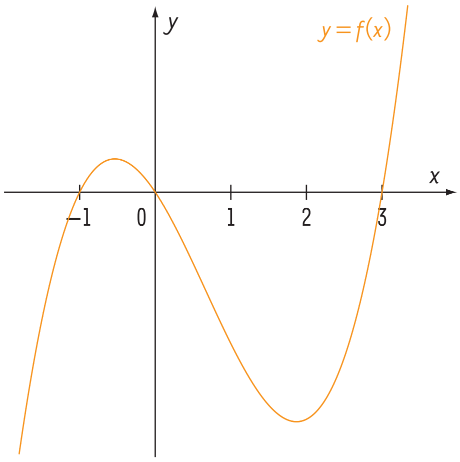
B $f(x) = x(x+1)(x-3)$

C $f(x) = x^2(x+1)(x-3)$

D $f(x) = 2(x-1)(x+3)$

E $f(x) = x(x-1)(x+3)$

F $f(x) = x^2(x-1)(x+3)$



Op de grafiek lezen we de nulpunten – 1, 0 en 3 af.

Het voorschrift bevat de factoren x + 1, x en x – 3.

De nulpunten zijn enkelvoudig want de grafiek snijdt de x-as in de punten (-1, 0) (0, 0) en (3, 0).

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 37 bladzijde 42

Bepaal zonder rekentoestel welk functievoorschrift bij de grafiek kan horen.
Er kunnen meerdere oplossingen zijn.

A $f(x) = (x-2)(x-4)$

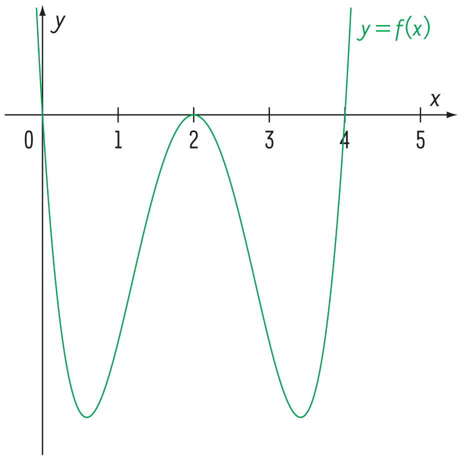
B $f(x) = x(x+2)(x+4)$

C $f(x) = 2x(x-2)(x-4)$

D $f(x) = 3x(x-2)^2(x-4)$

E $f(x) = x(x-2)^2(2x-8)$

F $f(x) = x(x-2)(4x-1)$



We lezen de nulpunten 0, 2 en 4 af. Het nulpunt 2 is een dubbel nulpunt.
Het voorschrift bevat de factoren x, $(x-2)^2$ en $x-4$.
Antwoord D en antwoord E zijn juist.

Opdracht 38 bladzijde 44

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de volgende veeltermfuncties.

1 $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Tabel: -3, 2

	1	-1	-8	12
-3		-3	12	-12
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nulpunten: -3, 2

2 $f(x) = x^4 - 2,5x^3 - 7,5x^2 + 7,5x + 9$

$$x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 15x + 18 = 0$$

Tabel: -2

Grafiek : $-2, \frac{3}{2}$

	2	-5	-15	15	18
-2		-4	18	-6	-18
	2	-9	3	9	0
$\frac{3}{2}$		3	-9	-9	
	2	-6	-6	0	

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$D = 21$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Nulpunten : $-2, \frac{3}{2}, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

Opdracht 39 bladzijde 44

Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $|1-x^2| = 1-x$ is gelijk aan

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO, eerste ronde 1999)

1) $1 - x^2 \geqslant 0$: $1 - x^2 = 1 - x$

$(1 - x)(1 + x) - (1 - x) = 0$

$(1 - x)(1 + x - 1) = 0$

$x(1 - x) = 0$

$x = 0$ of $x = 1$

2) $1 - x^2 \leqslant 0$: $-1 + x^2 = 1 - x$

$(x - 1)(x + 1) - (1 - x) = 0$

$(x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0$

$(x - 1)(x + 1 + 1) = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1$ of $x = -2$

3 oplossingen: 0, 1, −2, dus antwoord D is juist.

Opdracht 40 bladzijde 44

Los algebraïsch op.

1 $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{3x^3}_{2x^3 + x^3} + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + (x + 1)^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^3 = -2x^3$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{-2}\ x$

$\Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt[3]{2}\ x$

$\Leftrightarrow x + \sqrt[3]{2}\ x = -1$

$\Leftrightarrow x\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$

2 $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^3 = -3$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-3}$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{3}$

Opdracht 41 bladzijde 44

Welke van de volgende beweringen over de veeltermfunctie $f(x) = 6acx^3 + 4bcx^2 + 9adx + 6bd$ is **niet** juist?

$$\begin{aligned} f(x) &= 6acx^3 + 4bcx^2 + 9adx + 6bd \\ &= 2cx^2 (3ax + 2b) + 3d (3ax + 2b) \\ &= (3ax + 2b)(2cx^2 + 3d) \end{aligned}$$

A Als $a = 0$ en $bcd \neq 0$ dan heeft de veeltermfunctie hoogstens 2 nulpunten.

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = 2b\,(2cx^2 + 3d) = 0$$

$$\underset{bcd \neq 0}{\Rightarrow} x^2 = -\frac{3d}{c}$$

als $-\frac{3d}{c} > 0$, dan zijn er 2 nulpunten

en als $-\frac{3d}{c} < 0$ zijn er geen nulpunten.

Juiste uitspraak.

B Als $2c + 3d = 0$ dan heeft de veeltermfunctie -1 en 1 als nulpunten.

$$2c + 3d = 0 \Rightarrow 2c = -3d$$

$$\Rightarrow (3ax + 2b)\,\underbrace{(-3dx^2 + 3d)}_{3d\,(1 - x^2)} = 0$$

$\rightarrow$ -1 en 1 zijn nulpunten.

Juiste uitspraak.

C Als $cd > 0$ dan heeft de veeltermfunctie 2 tegengestelde nulpunten.

$cd > 0 \qquad 2cx^2 + 3d = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{3d}{2c} < 0 \quad \rightarrow \text{geen nulpunten.}$$

Antwoord C is een foutieve uitspraak.

D Als $a = 2$ dan heeft de veeltermfunctie $-\frac{b}{3}$ als nulpunt.

$a = 2 \quad \rightarrow \quad 6x + 2b = 0$

$$x = -\frac{1}{3}b$$

D is een juiste uitspraak.

$\Rightarrow$ uitspraak C is niet juist

Opdracht 42 bladzijde 44

Hoeveel uitspraken over de reële nulpunten van $x^7 + x + 1$ zijn juist?

1 Ze zijn alle positief.

2 Minstens één is positief.

3 Ze zijn alle negatief.

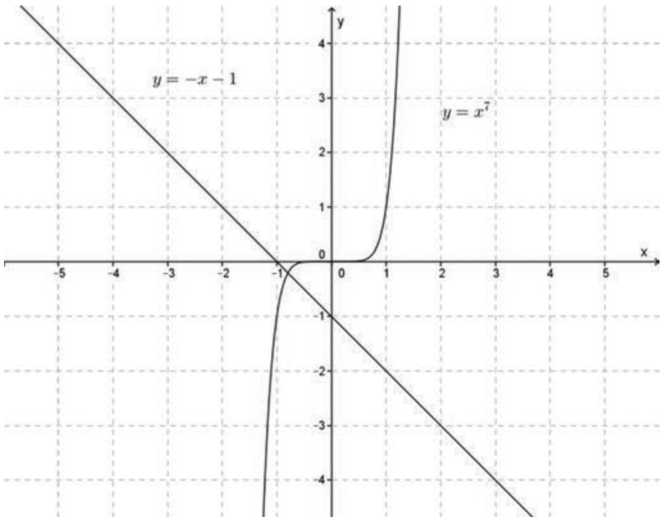
4 Ze zijn alle begrepen tussen -1 en 0.

5 Er zijn precies vier verschillende reële nulpunten.

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

$$x^7 + x + 1 = 0$$
$$x^7 = -x - 1$$

Grafiek:



Er is één nulpunt tussen –1 en 0.

Uitspraak 3 en uitspraak 4 zijn juist.

Dus B

Opdracht 43 bladzijde 45
Los de volgende ongelijkheden op.

1 $(3x-4)(8x^2-22x+15)>0$

2 $(-7x^2+x)(7x^2-8x+1)<0$

3 $6x^3-5x^2-12x-4\leqslant 0$

4 $x^3-2x^2-5x+7\geqslant 2x-1$

5 $x^2(x+3)\geqslant 4$

6 $x^4+4x^3-x^2-16x-12\geqslant 0$

7 $x^4-6x^3+10x^2-6x+9\leqslant 0$

8 $36x^4-12x^3-11x^2+2x+1\geqslant 0$

9 $x^4+3x^2<7x^3$

10 $x^4-10x^2<-24-x(x^2-4)$

1) $(3x-4)(8x^2-22x+15)>0$

* nulpunten: $3x-4=0$ of $8x^2-22x+15=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ $\qquad$ $D=4$

$x_{1,2}=\frac{22\pm 2}{16}$ $\quad \frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ of $x=\frac{3}{2}$ of $x=\frac{5}{4}$

* tekentabel

x		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$3x-4$	-	-	-	0	+	+	+
$8x^2-22x+15$	+	0	-	-	-	0	+
$(3x-4)(8x^2-22x+15)$	-	0	+	0	-	0	+

* $(3x-4)(8x^2-22x+15)>0$ als $\frac{5}{4}<x<\frac{4}{3}$ of $x>\frac{3}{2}$

2) $(-7x^2+x)(7x^2-8x+1)<0$

* nulpunten: $-7x^2+x=0$ of $7x^2-8x+1=0$

$\Leftrightarrow x(-7x+1)=0$ $\qquad$ $D=36$

$x_{1,2}=\frac{8\pm 6}{14}$ $\quad 1$, $\frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow x=0$ of $x=\frac{1}{7}$ of $x=1$

* tekentabel

x		0		$\frac{1}{7}$		1	
$-7x^2 + x$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$7x^2 - 8x + 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(-7x^2 + x)(7x^2 - 8x + 1)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

* $(-7x^2 + x)(7x^2 - 8x + 1) < 0$ als $x < 0$ of $x > 1$

3) $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \leqslant 0$

* nulpunten: $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 = 0$

Tabel: 2

	6	-5	-12	-4
2		12	14	4
	6	7	2	0

$x - 2 = 0$ of $6x^2 + 7x + 2 = 0$

$D = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{12} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{2}{3}$

* tekentabel

x		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		2	
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$6x^2 + 7x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 2)(6x^2 + 7x + 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \leqslant 0$ als $x \leqslant -\frac{2}{3}$ of $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$

4) $x^3 - 2x^2 - 5x + 7 \geqslant 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 7 - 2x + 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 7x + 8 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 - 2x^2 - 7x + 8 = 0$

Tabel 1:

	1	-2	-7	8
1		1	-1	-8
	1	-1	-8	0

$x - 1 = 0$ of $x^2 - x - 8 = 0$

$D = 33$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2} \approx -2{,}37 \\[2ex] \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2} \approx -3{,}37 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2}$ of $x = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2}$

* tekentabel

x		$\frac{1-\sqrt{33}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{33}}{2}$	
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - x - 8$	+	0	-	-	-	0	+
$(x - 1)(x^2 - x - 8)$	-	0	+	0	-	0	+

* $x^3 - 2x^2 - 5x + 7 \geqslant 2x - 1$ als $\dfrac{1 - \sqrt{33}}{2} \leqslant x \leqslant 1$

of $x \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2}$

DEN5A16H_H1.indd 56 14/08/13 13:20

5) $x^2\,(x + 3) \geqslant 4$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Tabel: -2, 1

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$\Leftrightarrow x = -2 \text{ of } x = 1 \text{ of } x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \text{ of } x = 1$

* tekentabel

x		-2		1	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^3 + 3x^2 - 4$	$-$	0	$-$	0	$+$

* $x^2\,(x + 3) \geqslant 4$ als $x = -2$ of $x \geqslant 1$

6) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$ Tabel: -3, -2, -1, 2

$\Leftrightarrow (x + 3)\,(x + 2)\,(x + 1)\,(x - 2) = 0$

* tekentabel

x		-3		-2		-1		2	
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geqslant 0$
  als $x \leqslant -3$ of $-2 \leqslant x \leqslant -1$ of $x \geqslant 2$

7) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

* nulpunten:

$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$ Tabel: 3

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -6 & 10 & -6 & 9 \\
3 & & 3 & -9 & 3 & -9 \\
\hline
 & 1 & -3 & 1 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}
$$

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 (x - 3) + (x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

* tekentabel:

x		3	
$(x - 3)^2$	$+$	0	$+$
$x^2 + 1$	$+$	$+$	$+$
$(x - 3)^2 (x^2 + 1)$	$+$	0	$+$

* $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$ als $x = 3$

8) $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$

* nulpunten:

$36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = 0$ grafiek : $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

	36	-12	-11	2	1
$\frac{1}{2}$		18	3	-4	-1
	36	6	-8	-2	0
$-\frac{1}{3}$		-12	2	2	
	36	-6	-6	0	

$6x^2 - x - 1 = 0$

$D = 25$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

* tekentabel:

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$x - \frac{1}{2}$	-	-	-	0	+
$x + \frac{1}{3}$	-	0	+	+	+
$36x^2 - 6x - 6$	+	0	-	0	+
$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(36x^2 - 6x - 6\right)$	+	0	+	0	+

* $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$ als $-\infty < x < +\infty$

9) $x^4 + 3x^2 < 7x^3$

$\Leftrightarrow x^4 - 7x^3 + 3x^2 < 0$

* nulpunten:

$x^2\,(x^2 - 7x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 - 7x + 3 = 0$

(dubbel) $D = 37$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

* tekentabel:

x		0		$\frac{7-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{7+\sqrt{37}}{2}$	
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 7x + 3$	+	+	+	0	-	0	+
$x^2\,(x^2 - 7x + 3)$	+	0	+	0	-	0	+

* $x^4 + 3x^2 < 7x^3$ als $\frac{7-\sqrt{37}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{37}}{2}$

10) $x^4 - 10x^2 < -24 - x\,(x^2 - 4)$

$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 < -24 - x^3 + 4x$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 < 0$

* nulpunten:

$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 = 0$ Tabel: $-3, -2, 2$

	1	1	-10	-4	24
-3		-3	6	12	-24
	1	-2	-4	8	0
-2		-2	8	-8	
	1	-4	4	0	
2		2	-4		
	1	-2	0		

$\rightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

* tekentabel:

x		-3		-2		2	
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+
$(x - 2)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$(x + 3)\,(x + 2)\,(x - 2)^2$	+	0	-	0	+	0	+

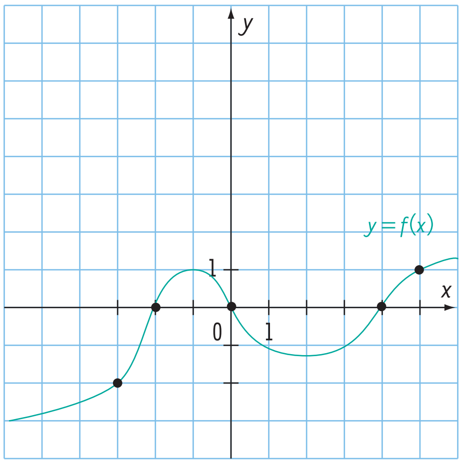
* $x^4 - 10x^2 < -24 - x\,(x^2 - 4)$ als $-3 < x < -2$

Opdracht 44 bladzijde 45
Teken de grafiek van een functie die voldoet aan de gegeven voorwaarden.

1 $f(5) = 1$, $f(-3) = -2$ en als tekentabel

x		-2		0		4	
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

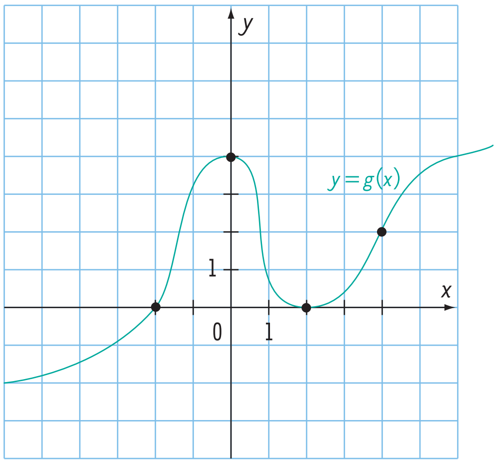
Voorbeeld:



2 $g(0) = 4$, $g(4) = 2$ en als tekentabel

x		-2		2	
y	$-$	0	$+$	0	$+$

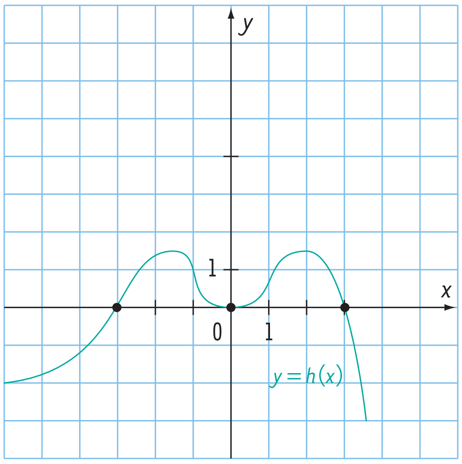
Voorbeeld:



3 Een functie h met als tekentabel

x		-3		0		3	
y	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Voorbeeld:



Opdracht 45 bladzijde 45

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $f(x) > g(x)$ met $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1$ en $g(x) = x + 3$

$f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1 > x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1 - x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 18x - 18 > 0$

* nulpunten:

$2(x^3 + x^2 - 9x - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $x = -3$ of $x = 3$

* tekentabel:

x		-3		-1		3	
2	+	+	+	+	+	+	+
$x + 1$	−	−	−	0	+	+	+
$x^2 - 9$	+	0	−	−	−	0	+
$2(x + 1)(x^2 - 9)$	−	0	+	0	−	0	+

* $f(x) > g(x)$ als $-3 < x < -1$ of $x > 3$

2 $f(x) \leqslant g(x)$ met $f(x) = x^3 - x + 1$ en $g(x) = 2x - 1$

$f(x) \leqslant g(x)$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 1 \leqslant 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 1 - 2x + 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \leqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 - 3x + 2 = 0$ Tabel: -2, 1

	1	0	−3	2
−2		−2	4	−2
	1	−2	1	0
1		1	−1	
	1	−1	0	

$(x + 2)(x - 1)(x - 1) = 0$

$(x + 2)(x - 1)^2 = 0$

* tekentabel:

x		-2		1	
$x + 2$	−	0	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$(x + 2)(x - 1)^2$	−	0	+	0	+

* $f(x) \leqslant g(x)$ als $x \leqslant -2$ of $x = 1$

Opdracht 46 bladzijde 45

Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven die van g?

1 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$ met $g(x) = -2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3) > -2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3) + (x - 1)(2x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 3 + 2x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 6x + 8) > 0$

* nulpunten:

$x - 1 = 0$ of $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} S = -6 \\ P = 8 \end{array}\right\} -4 \text{ en } -2$$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -4$ of $x = -2$

* tekentabel:

x		-4		-2		1	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + 6x + 8$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)(x^2 + 6x + 8)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $f(x) > g(x)$ als $-4 < x < -2$ of $x > 1$

2 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$ en $g(x) = 3x^3 - 3x^2$

$f(x) > g(x)$

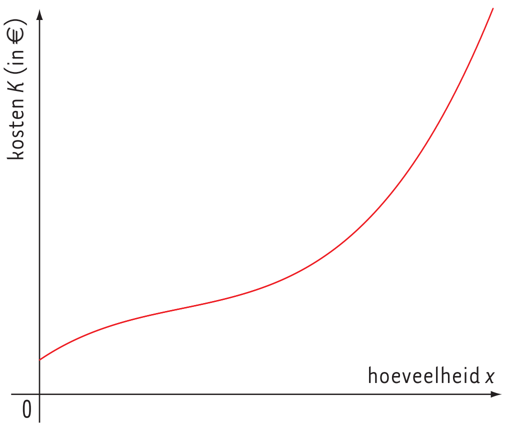
$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 > 3x^3 - 3x^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 - 3x^3 + 3x^2 > 0$

$x^4 + x^2 + 1 > 0$: is waar voor elk reëel getal

$f(x) > g(x)$ als $-\infty < x < +\infty$

Opdracht 47 bladzijde 46
Kostenfuncties zijn vaak 'S-vormig'. Bij een kleine productie liggen de kosten relatief hoog omdat de productiecapaciteit niet ten volle benut wordt. Bij toenemende productie groeien de totale kosten eerst trager en daarna weer sneller, wegens o.a. hogere lonen voor overuren en nachtarbeid. 'S-vormige' krommen worden meestal benaderd door derdegraadsfuncties.

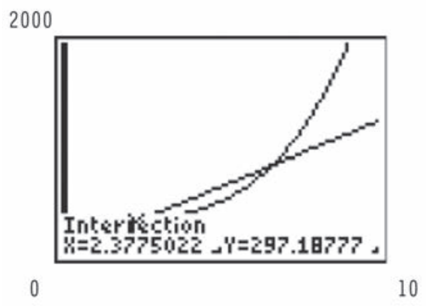


Een firma produceert potloden. De totale productiekosten $K(x)$ per tijdseenheid (in €) zijn een functie van de geproduceerde hoeveelheid x (per 1000 stuks).
Deze functie heeft als voorschrift $K(x) = 5x^3 - 37{,}5x^2 + 135x + 121$. De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks. De omzet is dus $O(x) = 125x$.

1 Plot de kostenfunctie en de omzetfunctie in één venster.

$K(x) = 5x^3 - 37{,}5x^2 + 135x + 121$

$O(x) = 125x$



2 Bij welke productie wordt er winst gemaakt?

Er wordt winst gemaakt als $O(x) > K(x)$.

Grafisch: $O(x) = K(x)$

$\Rightarrow x \approx 2377{,}5$ en $x \approx 6652{,}6$

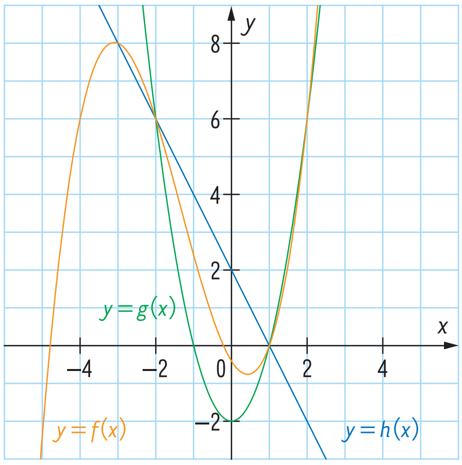
Er wordt winst gemaakt bij een productie tussen 2378 en 6652 stuks.

Opdracht 48 bladzijde 47

Voor welke waarden van x geldt: $h(x) \geqslant f(x) \geqslant g(x)$?

De bijbehorende functievoorschriften zijn:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{8}{5}x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{2}{5},\ g(x) = 2x^2 - 2 \text{ en } h(x) = -2x + 2$$



Grafisch aflezen:

$h(x) \geqslant f(x) \geqslant g(x)$ als $-2 \leqslant x \leqslant 1$

Opdracht 49 bladzijde 47

Bepaal een ongelijkheid van de derde graad met als oplossing

1 $x \leqslant -2$ of $1 \leqslant x \leqslant 3$

x		- 2		1		3	
f(x)	–	0	+	0	–	0	+
of f(x)	+	0	–	0	+	0	–

Voorbeeld: $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \geqslant 0$

of $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$

2 $0 < x < 2$ of $x > 5$

x		0		2		5	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+
of f(x)	+	0	-	0	+	0	-

Voorbeeld: $x(x-2)(x-5) > 0$

of $x(x-2)(x-5) < 0$

3 $x \geqslant 1$

x		1	
f(x)	-	0	+
of f(x)	+	0	-

Voorbeeld: $(x-1)^3 \geqslant 0$

of $(x-1)^3 \leqslant 0$

Opdracht 50 bladzijde 47

De ongelijkheid $(x-a)(x-b)(x-c)^2 > 0$ heeft als oplossing $x < -2$ of $-2 < x < 2$ of $x > 3$.

Bepaal a, b en c.

$(x-a)(x-b)(x-c)^2 > 0$

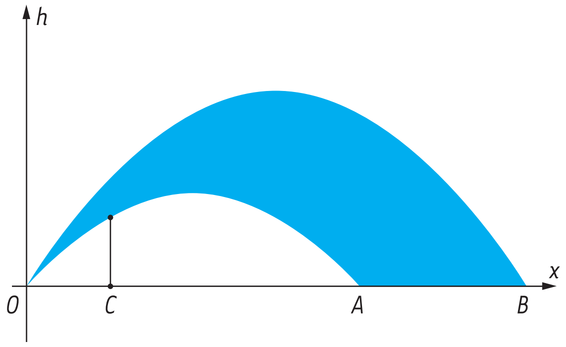
		c		b		a	
				a		b	
x		-2		2		3	
f(x)	+	0	+	0	-	0	+

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2$

of $a = 3,\ b = 2,\ c = -2$

Opdracht 51 bladzijde 48

In de volgende figuur staat een schets van een brandweeractie.



Het gedeelte tussen A en B staat in brand met $|AB| = 10$ m. A bevindt zich op 20 m van O. In C, gelegen op 5 m van O, staat een 4 m hoge muur. De waterstraal begint in O en is begrensd door twee parabolen.

1 Stel het functievoorschrift op voor de onderste parabool.

O (0,0), C (5,0), A (20,0), B (30,0)

De lage parabool gaat door de punten (0,0), (20,0) en (5,4):

$y = ax\,(x - 20)$

$4 = 5a\,(-15)$

$a = -\dfrac{4}{75}$

Het functievoorschrift is $y = -\dfrac{4}{75}x\,(x - 20)$

$= -\dfrac{4}{75}x^2 + \dfrac{16}{15}x$

2 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

dom f = [0,20]

3 Tussen welke grenzen liggen de zinvolle functiewaarden?

ber f $= \left[0, \dfrac{16}{3}\right]$

max: $f(10) = -\dfrac{4}{75} \cdot 100 + \dfrac{16}{15} \cdot 10 = \dfrac{16}{3}$

4 Op welke afstanden van *O* bevindt deze waterstraal zich minstens 4 m boven de grond? En 5 m boven de grond? Controleer dit met je rekentoestel.

$$f(x) \geqslant 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x \geqslant 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x - 4 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 80x - 300 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 \leqslant 0$$

x		5		15	
$x^2 - 20x + 75$	+	0	−	0	+

De waterstraal bevindt zich minstens 4 m boven de grond voor afstanden tussen 5 en 15 meter van O.

$$f(x) \geqslant 5$$

$$-\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x - 5 \geqslant 0$$

$$-4x^2 + 80x - 375 \geqslant 0$$

x		7,5		12,5	
$-4x^2 + 80x - 375$	−	0	+	0	−

De waterstraal bevindt zich op minstens 5 m van de grond voor afstanden tussen 7,5 en 12,5 meter van O.

5 Welke zijn mogelijke functievoorschriften voor de 'hoge' parabool? Controleer dit met je rekentoestel.

Voor de hoge parabool geldt:

$y = ax(x - 30)$

Deze parabool mag de kleine parabool enkel snijden in 0.

$$-\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x = ax^2 - 30ax$$

$$\left(a + \frac{4}{75}\right)x^2 - \left(\frac{16}{15} + 30a\right)x = 0$$

$$x\underbrace{\left(\left(a + \frac{4}{75}\right)x - \left(\frac{16}{15} + 30a\right)\right)} = 0$$

mag enkel 0 als oplossing hebben,

dus moet $\frac{16}{15} + 30a = 0$

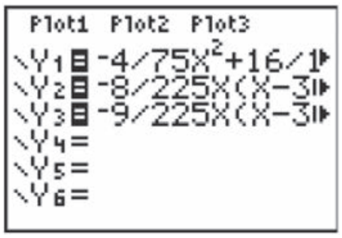
$$a = -\frac{16}{15 \cdot 30}$$

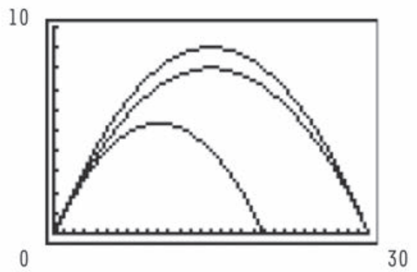
$$a = -\frac{8}{225}$$

Grafisch zien we dat de parabolen met voorschrift

$y = a\,x\,(x - 30)$ met $a \leqslant -\frac{8}{225}$

beantwoorden aan de opgave.





6 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

door f = [0,30]

7 Wat is het bijbehorend bereik van deze functie?

ber f = [0, −225a] met $a \leqslant -\frac{8}{225}$

$y_{top} = f(15)$

$= a \cdot 15\,(-15)$

$= -225a$

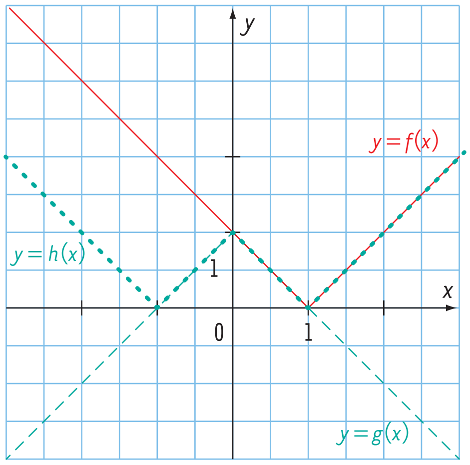
Opdracht 52 bladzijde 48
Beschouw de functies met voorschrift
$f(x) = |1 - x|$, $g(x) = 1 - |x|$ en $h(x) = |1 - |x||$.

Dan geldt, voor alle x in $\mathbb{R}$:

A $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ **B** $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$ **C** $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

D $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ **E** $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$

(Bron © VWO, eerste ronde 1998)



Antwoord B

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{als } 1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{als } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{als } x \geqslant 0 \\ 1 + x & \text{als } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= |1 - x| && \text{als } x \geqslant 0 \\ &= 1 - x && \text{als } \underbrace{x \geqslant 0 \text{ en } 1 - x \geqslant 0}_{0 \leqslant x \leqslant 1} \\ &= x - 1 && \text{als } \underbrace{x \geqslant 0 \text{ en } 1 - x \leqslant 0}_{x \geqslant 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= |1 + x| && \text{als } x \leqslant 0 \\ &= 1 + x && \text{als } \underbrace{x \leqslant 0 \text{ en } 1 + x \geqslant 0}_{-1 \leqslant x \leqslant 0} \\ &= -1 - x && \text{als } \underbrace{x \leqslant 0 \text{ en } 1 + x \leqslant 0}_{x \leqslant -1} \end{aligned}$$

Opdracht 53 bladzijde 48

Hoeveel positieve natuurlijke getallen voldoen aan de ongelijkheid

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdots\left(x-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0\,?$$

A 503 **B** 999 **C** 1005 **D** 1006 **E** 1995

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdots\left(x-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0$$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{9}{2}$		$\frac{11}{2}$		$\frac{13}{2}$		$\frac{15}{2}$		…	pos. nat. getallen
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}$	– 0	+																0
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}$	+ 0	–	0	+														1
…	– 0	+	0	–	0	+												1
…	+ 0	–	0	+	0	–	0	+										2
	– 0	+	0	–	0	+	0	–	0	+								2
	+ 0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+						3
	– 0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+				3
	+ 0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+		4
																		…
																		…

macht	pos. nat. getallen	
1	0	
3	1	$8 \cdot 1 \to 1$
5	1	
7	2	$16 = 8 \cdot 2 \to 2$
9	2	
11	3	$24 = 8 \cdot 3 \to 3$
13	3	
15	4	$32 = 8 \cdot 4 \to 4$
17	4	
19	5	
…	…	

$$\left.\begin{array}{l}4019\\4021\end{array}\right\}\ 8040 = 8 \cdot \boxed{1005}$$

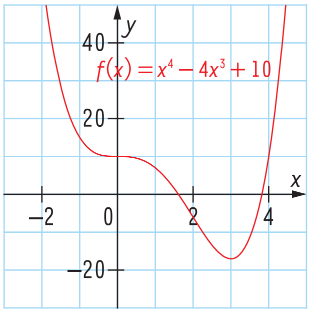
4021
4023
Antwoord C

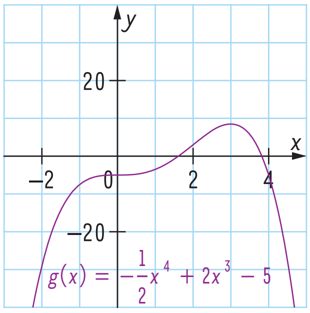
8044 niet deelbaar door 8

Opdracht 54 bladzijde 49
Gegeven is de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Op de grafiek van f passen we de volgende transformaties toe: een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en een spiegeling om de x-as.

Ga na dat het voorschrift van de bijbehorende functie $g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5$ is.





$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5$

Opdracht 55 bladzijde 49
Op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x$ passen we achtereenvolgens de volgende transformaties toe:

– een verticale uitrekking met factor 2,

– een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1,1)$.

Bepaal het voorschrift van de nieuwe functie g.

$y = x^3 - x$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2x^3 - 2x$

$\downarrow$ verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-1,1)$

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^3 - 2(x+1) + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 - 2x - 2 + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

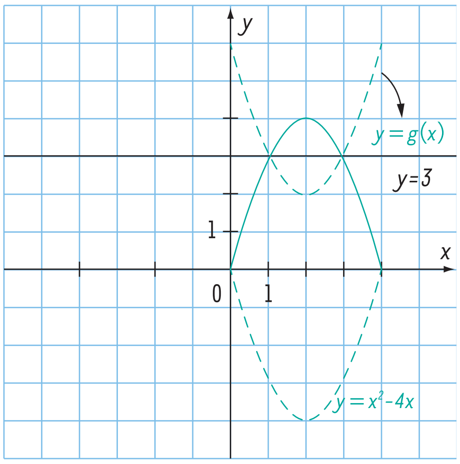
$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Opdracht 56 bladzijde 49
Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = -x^2 + 4x$.

Door spiegeling om de rechte met vergelijking $y = 3$ ontstaat de grafiek van een functie g.

Bepaal het voorschrift van g.

$f(x) = -x^2 + 4x$



$g(x) = x^2 - 4x + 6$

nulpunt: 0, 4
top (2, 4)

$y = -x^2 + 4x$

$\downarrow$ spiegelen om de x-as

$y = x^2 - 4x$

$\downarrow$ verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,6)

$y = x^2 - 4x + 6$

Opdracht 57 bladzijde 50

Elke parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ kan door middel van verschuivingen en verticale uitrekkingen afgeleid worden uit de parabool met vergelijking $y = x^2$.

Kan men op dezelfde manier zeggen dat elke derdegraadskromme met vergelijking $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ook door dergelijke transformaties uit de kromme met vergelijking $y = x^3$ afgeleid kan worden?

Indien je antwoord 'ja' is, bewijs dit dan. Is je antwoord 'neen', geef dan een tegenvoorbeeld.

$y = x^3$ $\rightarrow$ 1 nulpunt : 0

$\downarrow$ uitrekking | verschuiving

$y = a(x - p)^3 + q$ $\rightarrow$ 1 nulpunt: $\sqrt[3]{-\frac{q}{a}} + p$

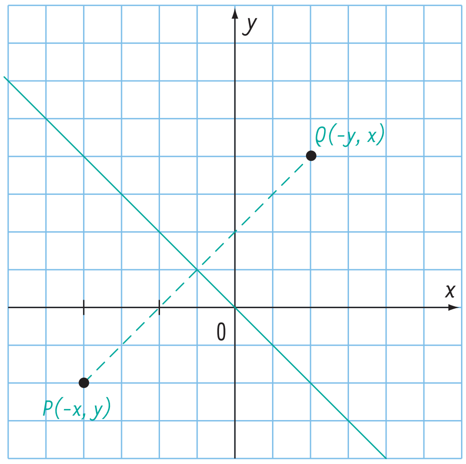
maar bijvoorbeeld $y = x^3 - 2x^2 + x$ heeft 2 nulpunten 0 en 1 en kan dus niet afgeleid worden uit $y = x^3$ m.b.v. de transformaties.

Opdracht 58 bladzijde 50

Als P met coördinaat $(-x, y)$ in het derde kwadrant ligt, wat is dan de coördinaat van het spiegelbeeld van P ten opzichte van de bissectrice van het tweede en het vierde kwadrant?

A (x, y) **B** (y, x) **C** $(y, -x)$ **D** $(x, -y)$ **E** $(-y, x)$

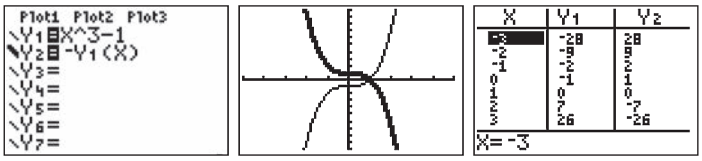
(Bron © VWO, tweede ronde 1997)



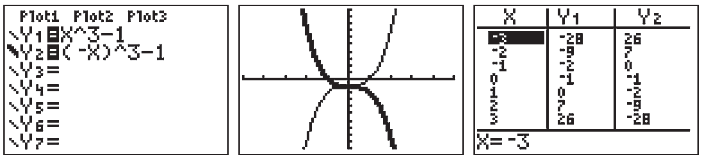
Antwoord: E $(-y, x)$

Opdracht 59 bladzijde 50
Spiegeling om de *y*-as en horizontale uitrekking

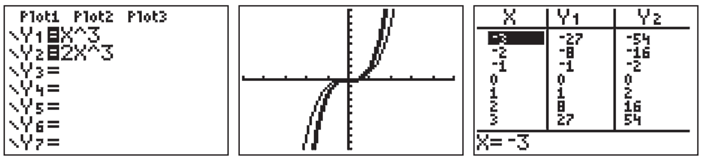
Als de grafiek van de functie $y = f(x)$ gespiegeld wordt om de x-as, verkrijg je de grafiek van de functie $y = -f(x)$.



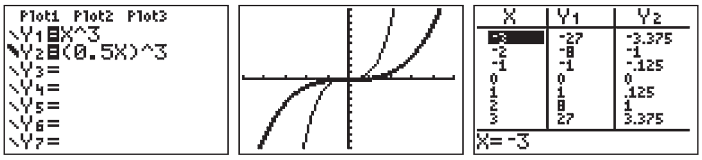
Als de grafiek van de functie $y = f(x)$ gespiegeld wordt om de y-as, verkrijg je de grafiek van de functie $y = f(-x)$.



Als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ verticaal uitrekt met factor k, verkrijg je de grafiek van de functie $y = kf(x)$.



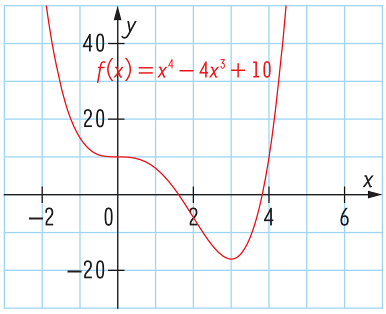
Als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ horizontaal uitrekt met factor k, verkrijg je de grafiek van de functie

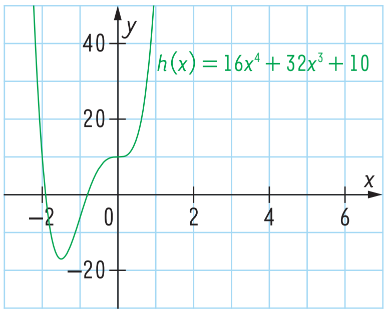


$y = f\left(\dfrac{1}{k}x\right)$.

Gegeven is de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Op de grafiek van f passen we de volgende transformaties toe: een horizontale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en een spiegeling om de y-as.
Ga na dat het voorschrift van de bijbehorende functie $h(x) = 16x^4 + 32x^3 + 10$ is.





$y = x^4 - 4x^3 + 10$

$\downarrow$ horizontale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

$y = (2x)^4 - 4(2x)^3 + 10$

$y = 16x^4 - 32x^3 + 10$

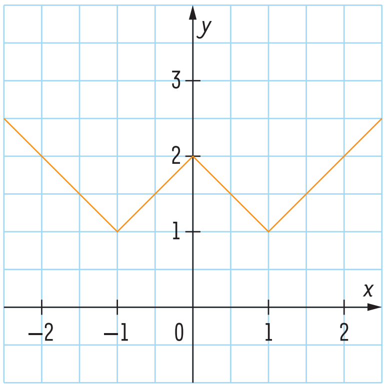
$\downarrow$ spiegeling om de y-as

$y = 16(-x)^4 - 32(-x)^3 + 10$

$y = 16x^4 + 32x^3 + 10$

Opdracht 60 bladzijde 51

Welk voorschrift hoort bij de volgende grafiek?



A $y = |x-1|+1$

B $y = ||x|-1|+1$

C $y = |x-1|+|x+1|$

D $y = ||x|+1|+1$

E $y = |x^2-1|+1$

(Bron © VWO, eerste ronde 1995)

(0,2) $\rightarrow$ A, B, C, D, E

(1,1) $\rightarrow$ A, B, E

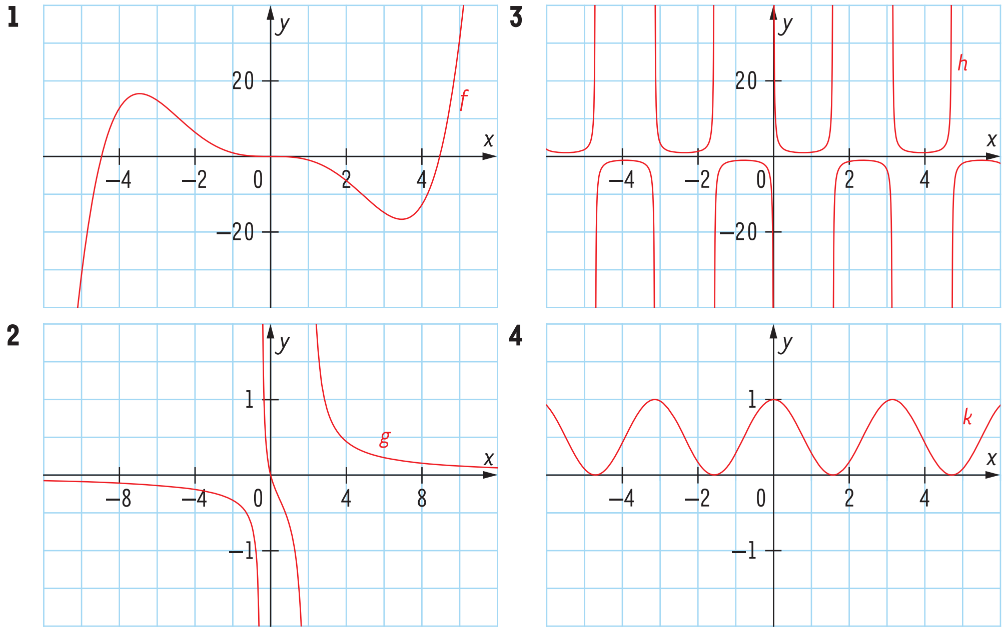
(-1,1) $\rightarrow$ B, E

(2,2) $\rightarrow$ B

$\Rightarrow$ B

Opdracht 61 bladzijde 52

De grafieken van f, g, h en k zijn gegeven.
Welke van deze functies zijn even? En welke oneven?



1: oneven 2: 3: oneven 4: even

Opdracht 62 bladzijde 52

Ga algebraïsch na of de volgende functies even, oneven of geen van beide zijn.

1 $f(x) = 3$

$f(-x) = 3 = f(x)$

f is even

2 $f(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + 1 \\ &= x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

3 $f(x) = x^3 + x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f is oneven

4 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 \\ &= x^4 + 3x^2 - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

5 $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + 3(-x)^3 - (-x)^5 \\ &= 1 - 3x^3 + x^5 \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

6 $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

DEN5A16H_H1.indd 79 14/08/13 13:20

Opdracht 63 bladzijde 52

1 Als het punt $A(5,3)$ op de grafiek van een even functie ligt, welk ander punt moet dan ook op de grafiek liggen?

Als A (5,3) op de grafiek ligt, ligt ook B (–5,3) op de grafiek.

2 Als het punt $A(5,3)$ op de grafiek van een oneven functie ligt, welk ander punt moet dan ook op de grafiek liggen?

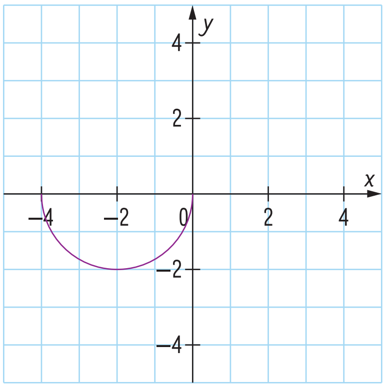
Als A (5,3) op de grafiek ligt, ligt ook B (–5, –3) op de grafiek.

Opdracht 64 bladzijde 53

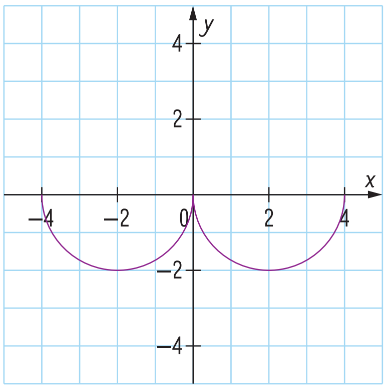
Een functie f heeft als domein $[-4,4]$ en een deel van haar grafiek is getekend.
Vervolledig de grafiek als

1 de functie even is;

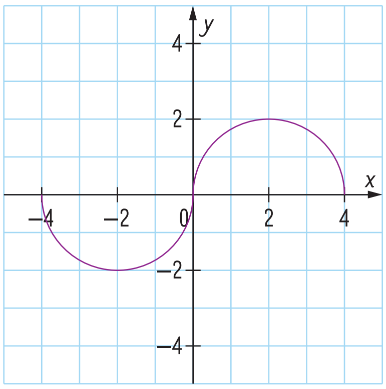
2 de functie oneven is.



1)



2)

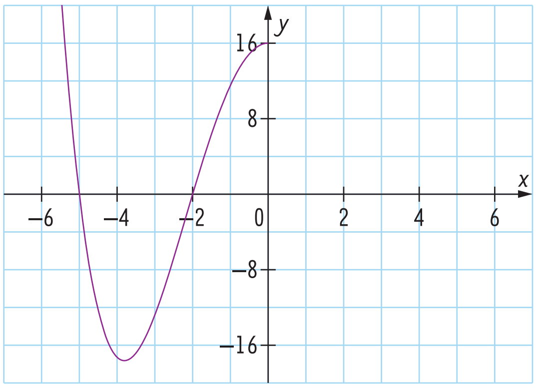


Opdracht 65 bladzijde 53

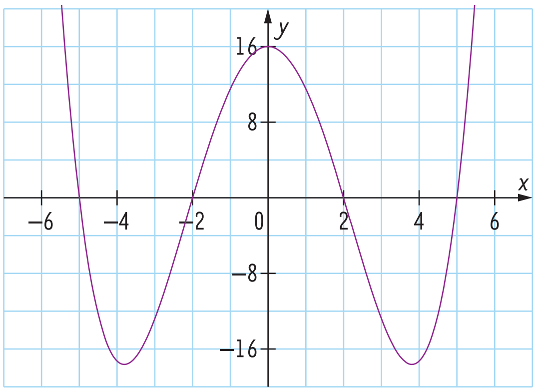
Hiernaast zie je de onvolledige grafiek van een even vierdegraadsfunctie.

1 Vervolledig deze grafiek.

2 Bepaal het voorschrift van deze functie.



1)



2)

$f(x) = a\,(x + 5)\,(x + 2)\,(x - 2)\,(x - 5)$

$16 = a \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-5)$

$16 = 100a$

$\dfrac{4}{25} = a$

$f(x) = \dfrac{4}{25}\,(x^2 - 4)\,(x^2 - 25)$

Opdracht 66 bladzijde 53

1 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$ oneven is als en slechts als $b = d = 0$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d$

$\Leftrightarrow \; b = d = 0$

2 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ met $a \neq 0$ even is als en slechts als $b = d = 0$.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\Leftrightarrow \quad b = d = 0$

3 Verklaar nu vanwaar de benaming 'even' en 'oneven' functie vermoedelijk komt.

even $\rightarrow$ even exponenten

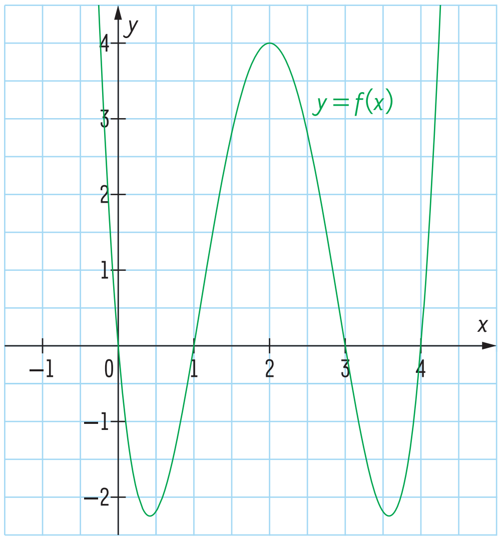
oneven $\rightarrow$ oneven exponenten

Opdracht 67 bladzijde 54

Gegeven is de grafiek van een functie met voorschrift
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x$.

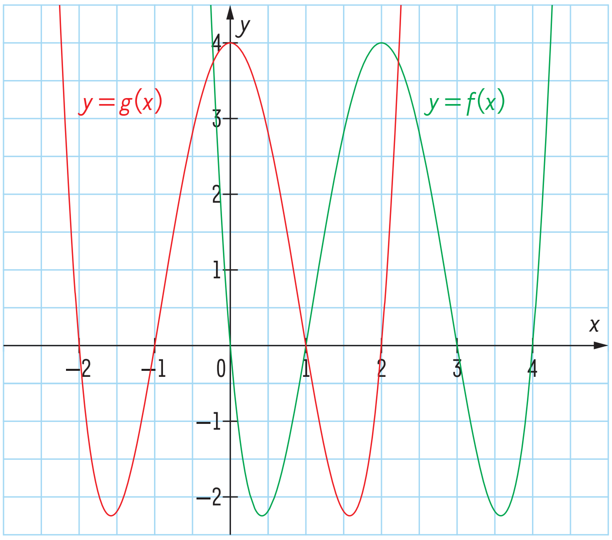
Deze functie is niet even, want de y-as is geen symmetrieas. We vermoeden echter dat de grafiek de verticale rechte met vergelijking $x = 2$ als symmetrieas heeft.

Om na te gaan of dit vermoeden correct is, kunnen we als volgt te werk gaan.



– We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}\,(-2,0)$. We verkrijgen dan de grafiek van de functie met voorschrift

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x+2)\\
&= (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 19(x+2)^2 - 12(x+2)\\
&= (x+2)\left[(x+2)^3 - 8(x+2)^2 + 19(x+2) - 12\right]\\
&= (x+2)\left[x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 8x^2 - 32x - 32 + 19x + 38 - 12\right]\\
&= (x+2)\left[x^3 - 2x^2 - x + 2\right]\\
&= x^4 - 5x^2 + 4
\end{aligned}$$



– Vervolgens tonen we aan dat de verschoven grafiek de y-as als symmetrieas heeft en dat de functie g dus even is.

$$g(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = g(x)$$

Omdat deze gelijkheid geldt voor alle waarden van x, is g inderdaad een even functie en dus heeft de grafiek van de oorspronkelijke functie f de rechte met vergelijking $x = 2$ als symmetrieas.

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$.

1 Bepaal de nulpunten van deze functie.

nulpunten

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = 0$$

→ tabel: -2, -1

	1	4	5	2
-2		-2	-4	-2
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	

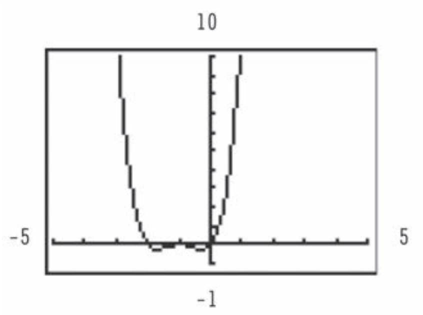
→ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

nulpunten: 0, -2, -1

2 Stel een tabel op voor x gaande van -5 tot 5.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	240	72	12	0	0	0	12	72	240	600	1260

3 Plot de grafiek van deze functie.



4 Welke rechte is volgens jou een symmetrieas van de grafiek? Toon dit aan m.b.v. de hierboven geziene methode.

We vermoeden dat de rechte $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}$ (1,0).

We krijgen dan de grafiek van de functie

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) \\ &= (x-1)((x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 5(x-1) + 2) \\ &= (x-1)(x^3 - 3x^2 + \cancel{3x} - \cancel{1} + 4x^2 - \cancel{8x} + \cancel{4} + \cancel{5x} - \cancel{5} + \cancel{2}) \\ &= (x-1)(x^3 + x^2) \\ &= x^4 + x^3 - x^3 - x^2 \\ &= x^4 - x^2 \end{aligned}$$

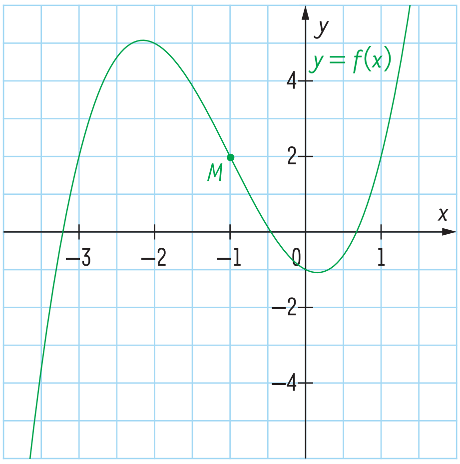
g is even want $g(-x) = x^4 - x^2 = g(x)$, dus heeft de grafiek van f de rechte $x = -1$ als symmetrieas.

Opdracht 68 bladzijde 55
Functiegrafieken met een symmetriemiddelpunt

Gegeven is de grafiek van een functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$.

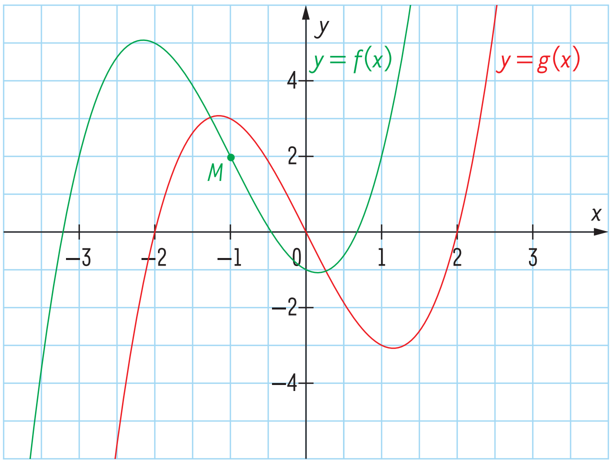
Deze functie is niet oneven, want de oorsprong is geen symmetriemiddelpunt. We vermoeden echter dat de grafiek het punt $M(-1,2)$ als symmetriemiddelpunt heeft.

Om na te gaan of dit vermoeden correct is, kunnen we als volgt te werk gaan.



– We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}(1,-2)$. We verkrijgen dan de grafiek van de functie met voorschrift

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) - 2 \\ &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) - 1 - 2 \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

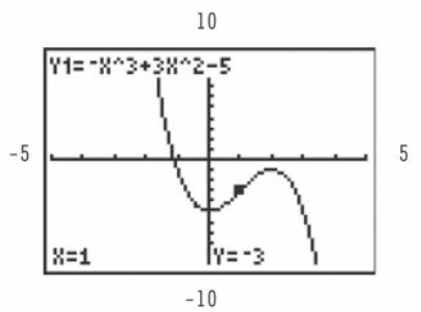


– Vervolgens tonen we aan dat de verschoven grafiek de oorsprong als symmetriemiddelpunt heeft en dat de functie g dus oneven is.

$$g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -(x^3 - 4x) = -g(x)$$

Omdat deze gelijkheid geldt voor alle waarden van x, is g inderdaad een oneven functie en dus heeft de grafiek van de oorspronkelijke functie f het punt $M(-1,2)$ als symmetriemiddelpunt.

Toon aan dat $M(1,-3)$ een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$.



We vermoeden dat M (1, –3) een symmetriemiddelpunt is en verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}(-1, 3)$.
We krijgen dan de functie

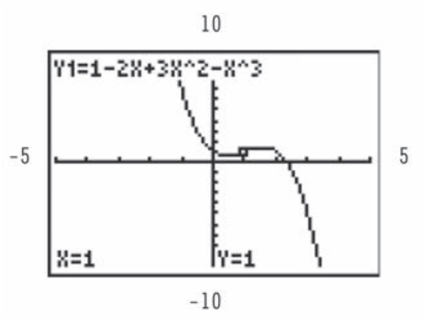
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) + 3 \\ &= -(x+1)^3 + 3(x+1)^2 - 5 + 3 \\ &= -x^3 - \cancel{3x^2} - 3x - \cancel{1} + \cancel{3x^2} + 6x + \cancel{3} - \cancel{2} \\ &= -x^3 + 3x \end{aligned}$$

g is oneven want $g(-x) = x^3 - 3x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van g het punt M (1, –3) als symmetriemiddelpunt.

Opdracht 69 bladzijde 56

Ga grafisch na of de grafieken van de volgende functies een symmetrieas of een symmetriemiddelpunt hebben. Bepaal die vervolgens en toon je bewering aan met behulp van de passende transformaties van de grafiek van *f*.

1 $f: x \mapsto 1 - 2x + 3x^2 - x^3$

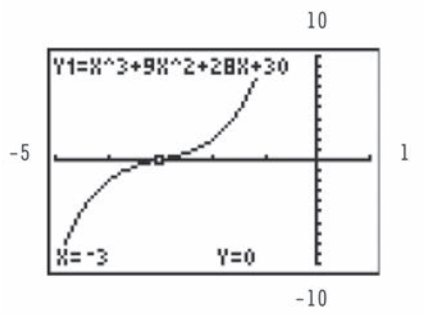


We vermoeden dat M (1, 1) een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f.
We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}(-1, -1)$ en krijgen de functie.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) - 1 \\ &= 1 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^3 - 1 \\ &= \cancel{1} - \underline{2x} - \cancel{2} + \cancel{3x^2} + \underline{6x} + \cancel{3} - x^3 - \cancel{3x^2} - \underline{3x} - \cancel{1} - \cancel{1} \\ &= -x^3 + x \end{aligned}$$

g is oneven want $g(-x) = x^3 - x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van f het punt M (1, 1) als symmetriemiddelpunt.

2 $f: x \mapsto x^3 + 9x^2 + 28x + 30$

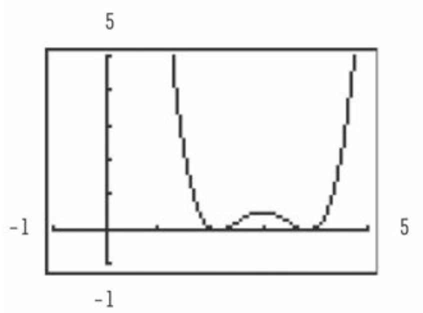


We vermoeden dat M (–3, 0) een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f en verschuiven de grafiek volgens de vector $\vec{v}$ (3, 0).
Zo verkrijgen we de functie

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(x-3) \\
&= (x-3)^3 + 9(x-3)^2 + 28(x-3) + 30 \\
&= x^3 - \cancel{9x^2} + \underline{27x} - \cancel{27} + \cancel{9x^2} - \underline{54x} + \cancel{81} + \underline{28x} - \cancel{84} + \cancel{30} \\
&= x^3 + x
\end{aligned}
$$

g is oneven want $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van f het punt M (–3, 0) als symmetriemiddelpunt.

3 $f: x \mapsto x^4 - 12x^3 + \frac{105}{2}x^2 - 99x + 68$

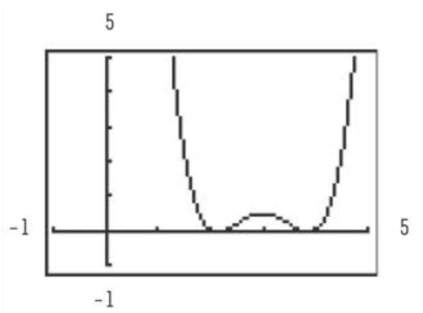


We vermoeden dat x = 3 een symmetrieas is van de grafiek van f.
We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}$ (–3, 0) en krijgen dan de functie

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f\,(x + 3)\\
&= (x + 3)^4 - 12\,(x + 3)^3 + \frac{105}{2}\,(x + 3)^2 - 99\,(x + 3) + 68\\
&= (x^2 + 6x + 9)^2 - 12\,(x^3 + 9x^2 + 27x + 27) + \frac{105}{2}\,(x^2 + 6x + 9)\\
&\qquad - 99x - 297 + 68\\
&= x^4 + 36x^2 + 81 + \cancel{12x^3} + 18x^2 + 108x - \cancel{12x^3} - 108x^2\\
&\qquad - 324x - 324 + \frac{105}{2}x^2 + 315x + \frac{945}{2} - 99x - 297 + 68\\
&= x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

g is even want $g(-x) = g(x)$ en dus heeft de grafiek van f de rechte $x = 3$ als symmetrieas.

4 $f\colon x \mapsto 12x^4 + 97x^3 + 245x^2 + 196x + 94$



x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	614	94	64	98	58	94	644

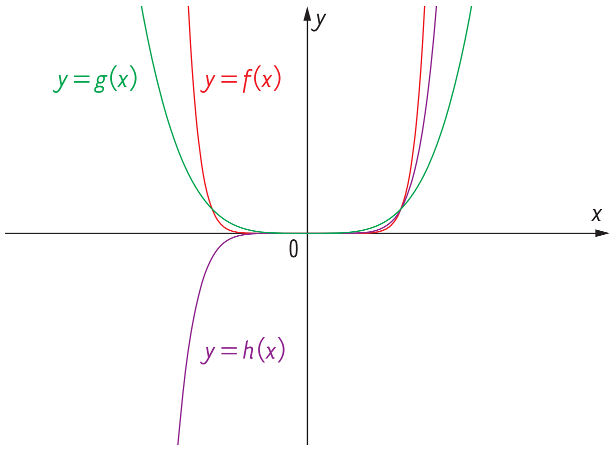
Grafisch vermoeden we $x = -2$ als symmetrieas maar dit klopt niet met de tabel.

$\rightarrow$ geen symmetrie

Opdracht 70 bladzijde 57

Welk voorschrift hoort thuis bij welke grafiek? Los op zonder rekentoestel.

1 $y = x^4$ **2** $y = x^7$ **3** $y = x^{10}$



$y = x^4$ $y = g(x)$

$y = x^7$ $y = h(x)$

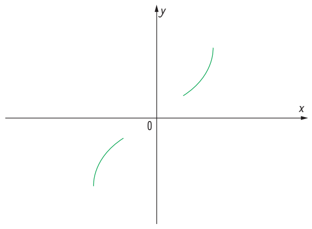
$y = x^{10}$ maar smaller dan $y = x^4$ $y = f(x)$

Opdracht 71 bladzijde 57

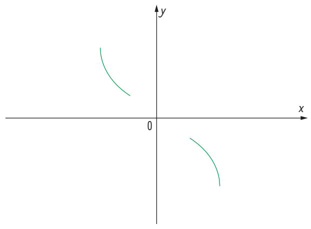
Verklaar aan de hand van de vorm van de grafiek: een derdegraadsfunctie heeft altijd minstens één nulpunt.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \sim y = ax^3$ voor $x \to \pm\infty$

$a > 0$



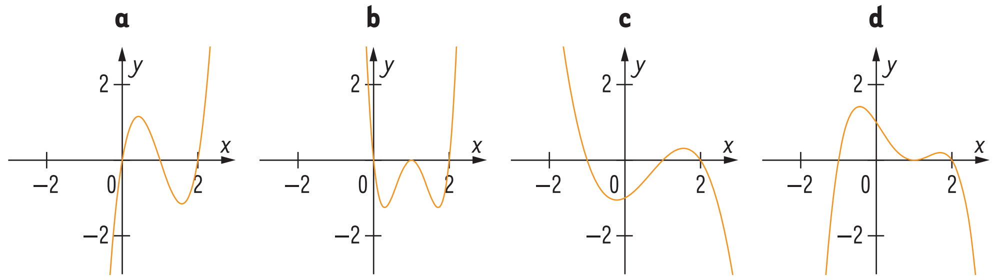
$a < 0$



De grafiek moet minstens 1 keer de x-as snijden en dus heeft een derdegraadsfunctie minstens één nulpunt.

Opdracht 72 bladzijde 57

Hieronder vind je vier grafieken en vier voorschriften van veeltermfuncties. Zet bij elke grafiek het juiste voorschrift zonder je rekentoestel te gebruiken.



1 $f_1(x) = (x^2 - 1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

2 $f_2(x) = 3x(x-1)(x-2)$

3 $f_3(x) = 5x(x-1)^2(x-2)$

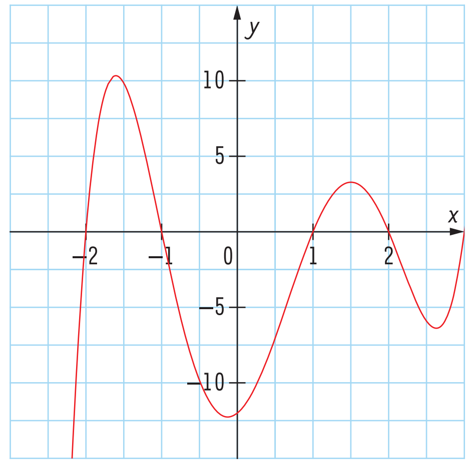
4 $f_4(x) = (x-1)^2(x+1)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

a	b	c	d
$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$

Opdracht 73 bladzijde 58

Hieronder zie je drie grafieken van vijfdegraadsfuncties. De coëfficiënt van x^5 is 1 of −1. Bepaal het voorschrift van deze functies.

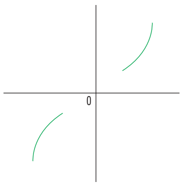
1



$y = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

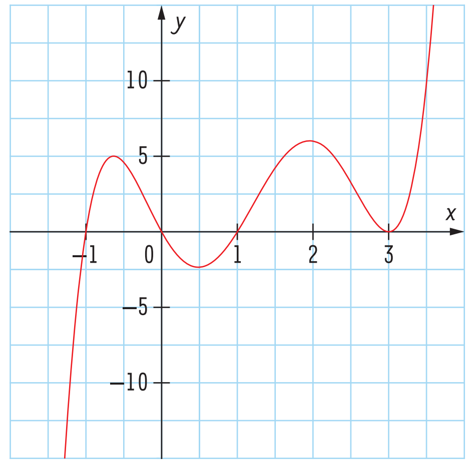
coëfficiënt = 1

want



dus $a > 0$

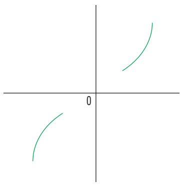
2



$y = x\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 3)^2$

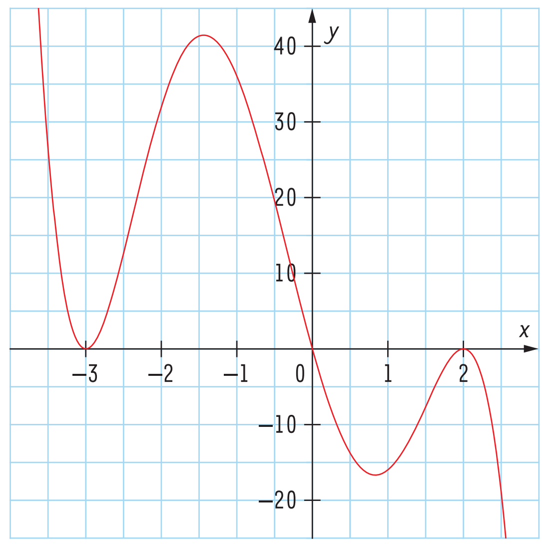
coëfficiënt = 1

want



dus $a > 0$

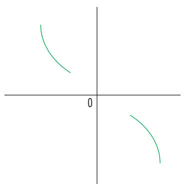
3



$y = -x\,(x + 3)^2\,(x - 2)^2$

coëfficient = −1

want



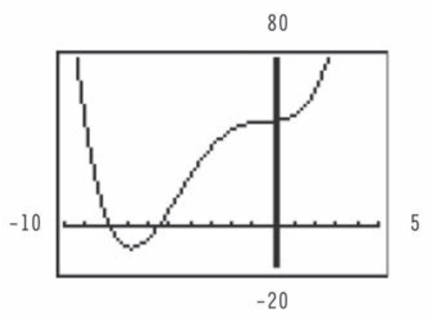
dus $a < 0$

Opdracht 74 bladzijde 59

Gegeven zijn de functies met voorschrift

1 $f(x) = 0{,}1x^4 + x^3 + x^2 + x + 50$ (twee nulpunten, één extremum)

a)



b) S_1 (-7,86; 0)

S_2 (-5,49, 0)

S_3 (0, 50)

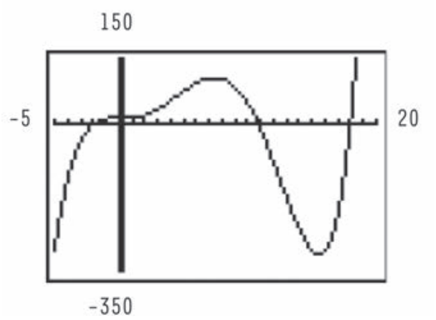
minimum voor x = -6,82 met waarde -11, 18

2 $f(x) = 0{,}007x^5 - 0{,}2x^4 + 1{,}332x^3 - 0{,}004x^2 + 10$ (drie nulpunten, twee extrema)

a Plot de grafiek van de gegeven functies zo dat de snijpunten met de assen en de extrema goed in beeld komen. Noteer je vensterinstellingen.

b Bepaal de snijpunten met de assen en de extrema m.b.v. je rekentoestel.

a)



b) S_1 (-1,80; 0)

S_2 (10,72; 0)

S_3 (17,97; 0)

S_4 (0, 10)

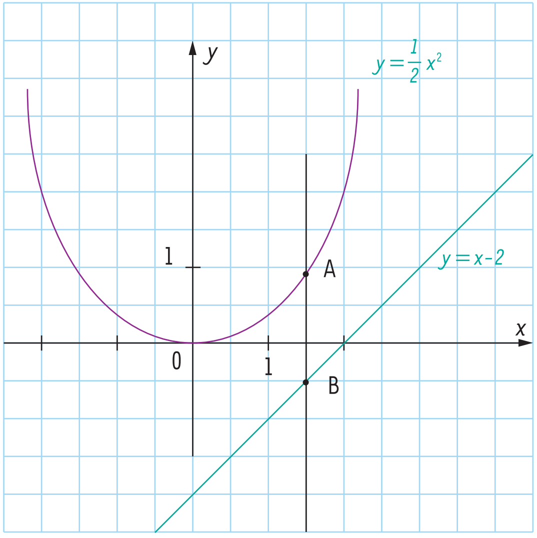
minimum voor x = 15,49 met waarde -312,15

maximum voor x = 7,37 met waarde 105,15

Opdracht 75 bladzijde 59

Een verticale rechte snijdt de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2$ in het punt A en de rechte met vergelijking $y = x - 2$ in het punt B.

Bepaal de coördinaten van A en B zodat de afstand tussen A en B minimaal is.



$A\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$

$B\ (x,\ x - 2)$

$|AB| = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ (\cup)$

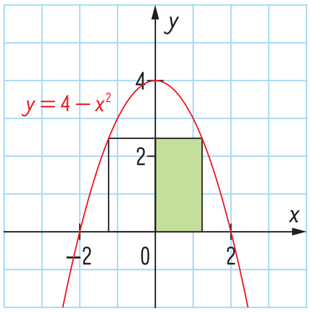
minimum voor $x = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

De coördinaten zijn $A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ en $B\ (1,\ -1)$.

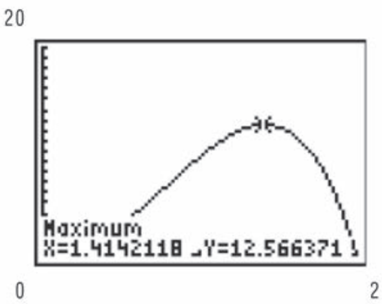
Opdracht 76 bladzijde 59

Een veranderlijke rechthoek heeft een deel van de x-as als basis en een deel van de y-as als hoogte.
Het vierde hoekpunt ligt op de parabool $y = 4 - x^2$.
Men laat deze rechthoek wentelen om de y-as.
Zo ontstaat een cilinder.

Bepaal de afmetingen van die cilinder met de grootste inhoud.
Rond je resultaten af op 2 cijfers na de komma.



We noemen x de basis van de rechthoek,
de hoogte is dan $4 - x^2$.
De inhoud van de cilinder is $I(x) = \pi \cdot x^2\,(4 - x^2)$

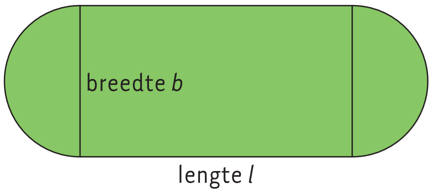


De inhoud is maximaal voor $x \approx 1{,}414$.
Dan is $h \approx 4 - (1{,}414)^2 = 2$.
De straal van het grondvlak is 1,41
en de hoogte 2.

Opdracht 77 bladzijde 59

Een sportstadion bestaat uit een rechthoek, begrensd door twee halve cirkelschijven. De omtrek van het stadion moet 400 m bedragen.

Hoe moeten de lengte *l* en de breedte *b* genomen worden, opdat de oppervlakte van het rechthoekig middenveld maximaal zou worden?



Stel y = oppervlakte middenveld = $l \cdot b$

Gegeven: omtrek = 400

omtrek cirkel + 2l = 400

$$2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{b}{2} = \pi b$$

$$\pi b + 2l = 400$$

$$2l = 400 - \pi b$$

$$l = 200 - \frac{1}{2}\pi b$$

Hieruit volgt:

$$y = \left(200 - \frac{1}{2}\pi b\right) \cdot b$$

$$= -\frac{1}{2}\pi b^2 + 200b$$

De oppervlakte is maximaal in de top van de parabool.

$$b = -\frac{200}{2\left(-\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}66$$

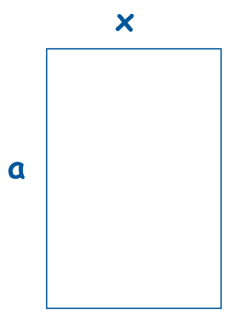
$$l = 200 - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{200}{\pi} = 200 - 100 = 100$$

Als we de lengte 100 m nemen en voor de breedte ≈ 63,66 m zal de oppervlakte maximaal zijn.

Opdracht 78 bladzijde 60

Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van € 100 per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van € 75 per cm lengte.

Wat is de grootst mogelijke oppervlakte die hij kan verkrijgen als de totale kostprijs € 1500 mag zijn?



$a \rightarrow$ € 75/cm

$x \rightarrow$ € 100/cm

Stel y = oppervlakte rechthoek

$= x \cdot a$

We weten dat $1500 = 2x \cdot 100 + 2a \cdot 75$

$$200x + 150a = 1500$$

$$4x + 3a = 30$$

$$a = \frac{30 - 4x}{3}$$

$$= 10 - \frac{4}{3}x$$

Zodat $y = x\left(10 - \frac{4}{3}x\right)$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + 10x$$

y is maximaal in de top van de bergparabool:

$$x = \frac{-10}{\frac{-8}{3}} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

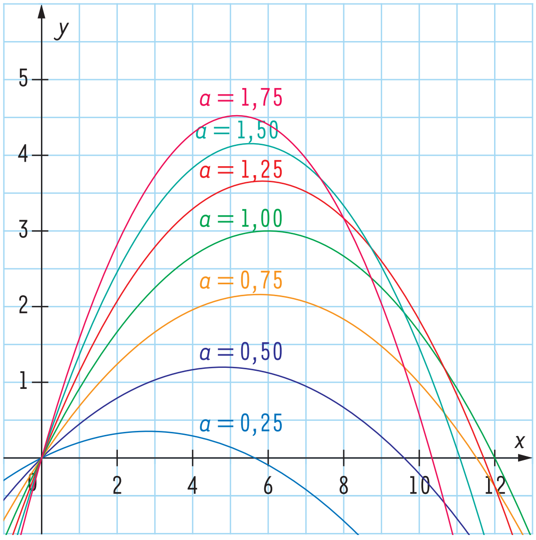
$$a = 10 - \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{4} = 10 - 5 = 5$$

Kiezen we voor x een afstand van 3,75 cm en voor de andere zijde 5 cm, dan zal de oppervlakte een maximale waarde hebben, namelijk 18,75 cm^2.

Opdracht 79 bladzijde 60

Voor elke waarde van a stelt de functie met voorschrift $f(x) = ax - \frac{1+a^2}{24}x^2$ een andere parabool voor.

Hieronder zie je enkele van die parabolen. We beperken ons in deze oefening tot $a > 0$.



1 Bepaal de nulpunten van f in functie van a.

$$f(x) = ax - \frac{1 + a^2}{24}x^2 \qquad a > 0$$

$$ax - \frac{1 + a^2}{24}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x\left(a - \frac{1 + a^2}{24}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x = 0 \text{ of } a = \frac{1 + a^2}{24}x$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{24a}{1 + a^2}$$

nulpunten: $0, \; \frac{24a}{1 + a^2}$

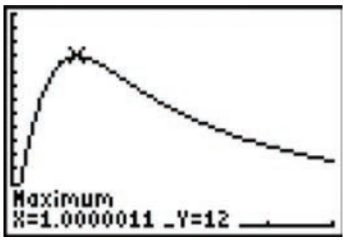
2 Bepaal voor welke waarde van *a* het strikt positief nulpunt zo groot mogelijk is. Wat is de waarde van dat nulpunt?

$\dfrac{24a}{1 + a^2}$ is maximaal

voor $a = 1$,

dan is $\dfrac{24a}{1 + a^2}$ gelijk aan 12.

15



0 5

3 Noem de twee snijpunten met de *x*-as *A* en *B*. Bepaal de coördinaat van de top *T*. Voor welke waarde van *a* is de oppervlakte van de driehoek *ABT* maximaal?

A (0, 0)

$$B\left(\frac{24a}{1 + a^2}, 0\right)$$

$$x_T = \frac{-a}{2\left(-\dfrac{1 + a^2}{24}\right)} = \frac{12a}{1 + a^2} \text{ of via midden van [AB]}$$

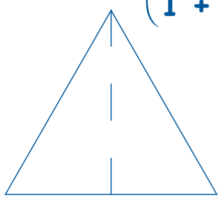
$$y_T = a \cdot \frac{12a}{1 + a^2} - \frac{1 + a^2}{24} \cdot \frac{144a^2}{(1 + a^2)^2}$$

$$= \frac{12a^2}{1 + a^2} - \frac{6a^2}{1 + a^2}$$

$$= \frac{6a^2}{1 + a^2}$$

$$T\left(\frac{12a}{1 + a^2}, \frac{6a^2}{1 + a^2}\right)$$

$T\left(\dfrac{12a}{1+a^2}, \dfrac{6a^2}{1+a^2}\right)$



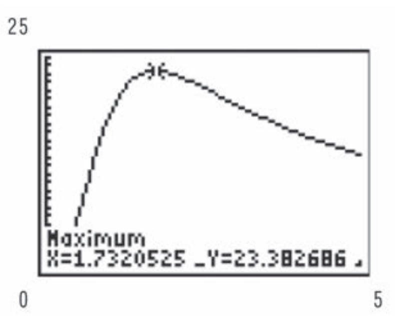
$A\ (0, 0)$ $\quad B\left(\dfrac{24a}{1+a^2}, 0\right)$

$y = \text{oppervlakte } \Delta ABT$

$$= \frac{\dfrac{24a}{1+a^2} \cdot \dfrac{6a^2}{1+a^2}}{2}$$

$$= \frac{72 \cdot a^3}{\left(1+a^2\right)^2}$$

De oppervlakte is maximaal voor $a \approx 1{,}73$.



Opdracht 80 bladzijde 61

Gegeven is de functie $f\colon x \mapsto (x+4)(x^2-6)(x-1)^2(x-3)$.

1 Bepaal de graad van deze functie.

graad = 6

2 Bepaal de nulpunten van deze functie.

nulpunten: -4, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, 1, 3

3 In welke punten snijdt de grafiek de x-as?

De grafiek snijdt de x-as in $(-4, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$ en $(3{,}0)$.

4 In welke punten raakt de grafiek de x-as?

De grafiek raakt de x-as in (1, 0).

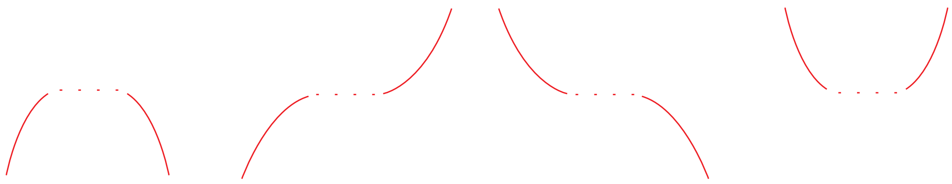
5 Los op: $f(x) \leqslant 0$.

x		-4		$-\sqrt{6}$		1		$\sqrt{6}$		3	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \leqslant 0$ als $-4 \leqslant x \leqslant -\sqrt{6}$ of $x = 1$ of $\sqrt{6} \leqslant x \leqslant 3$

6 Tot welk van de volgende types behoort de grafiek van f?

a **b** **c** **d**



$\left.\begin{array}{l} n \text{ even} \\ a > 0 \end{array}\right\}$ type d

Opdracht 81 bladzijde 61

Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie f van de vierde graad met nulpunten $-3, -1$, 0 en 2 en waarbij $f(3) = 288$.

$f(x) = ax\,(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 2)$

$f(3) = 288$

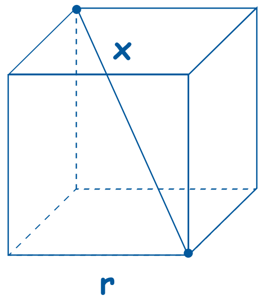
$\Leftrightarrow 3a \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 = 288$

$\Leftrightarrow a = 4$

$f(x) = 4x\,(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 2)$

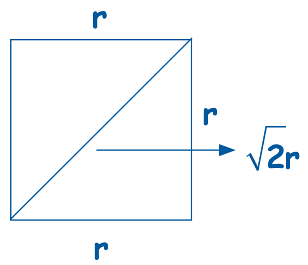
Opdracht 82 bladzijde 61

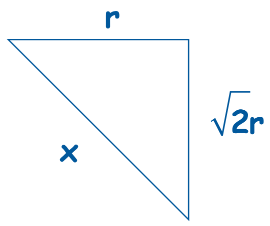
Beschouw een kubus waarvan de ruimtediagonaal lengte *x* heeft.



1 Druk het verband uit tussen *x* en de totale lengte *L* van alle ribben van de kubus.

Totale lengte van alle ribben = 12r





$$x^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\Rightarrow \quad 12r = \frac{12}{\sqrt{3}}x$$

$$= 4\sqrt{3}x$$

2 Schrijf nu ook het volume *V* van de kubus als functie van *x*.

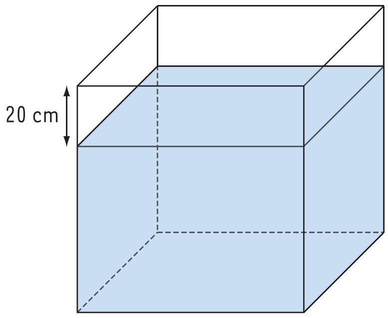
$$V = r^3$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^3$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}x^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$$

Opdracht 83 bladzijde 61
Een kubusvormig aquarium is gevuld tot op 20 cm van de bovenrand en bevat 1440 liter water.
Bereken de zijde van het aquarium.



Stel z = zijde aquarium

$I = z^2 \cdot (z - 2) = 1440$ $\qquad$ $1\ l = 1\ dm^3$

20 cm = 2 dm

$z^3 - 2z^2 = 1440$

$\Leftrightarrow z^3 - 2z^2 - 1440 = 0$

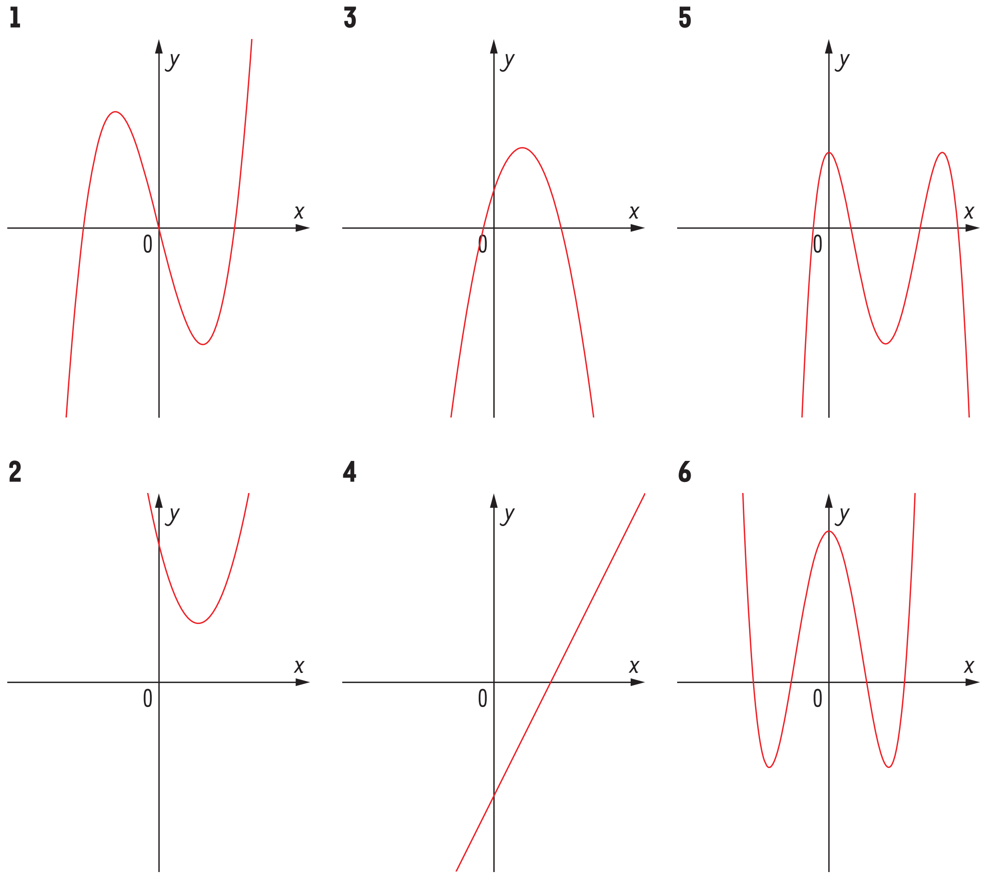
$\rightarrow$ Tabel: 12

De zijde van het aquarium is 12 dm.

Opdracht 84 bladzijde 62

Hieronder zie je zes grafieken en zes voorschriften van veeltermfuncties.

Geef bij elke grafiek het juiste voorschrift zonder je rekentoestel te gebruiken.



$f_1(x) = 2x - 3$ $\quad$ $f_3(x) = x^2 - 4x + 7$ $\quad$ $f_5(x) = -2x^2 + 3x + 1$

$f_2(x) = x^3 - 4x$ $\quad$ $f_4(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ $\quad$ $f_6(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 2$

$f_1(x) = 2x - 3$: de grafiek is een stijgende rechte $\Rightarrow$ figuur 4

$f_2(x) = x^2 - 4x + 7$: de grafiek is een dalparabool $\Rightarrow$ figuur 2

$f_3(x) = -2x^2 + 3x + 1$: de grafiek is een bergparabool $\Rightarrow$ figuur 3

$f_4(x) = x^3 - 4x = x\,(x^2 - 4)$: nulpunten 0, −2, 2 $\Rightarrow$ figuur 1

$f_5(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: even functie $\Rightarrow$ figuur 6

$f_6(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 2$: type $\Rightarrow$ figuur 5

figuur	1	2	3	4	5	6
functie	f_4	f_2	f_3	f_1	f_6	f_5

Opdracht 85 bladzijde 62
Welke van de volgende combinatie van transformaties mag je van volgorde verwisselen, zonder dat het uiteindelijke voorschrift verandert?

1 verticale uitrekking met factor 2 en spiegeling om de x-as

$y = f(x)$	$y = f(x)$
↓ verticale uitrekking met factor 2	↓ spiegeling om de x-as
$y = 2f(x)$	$y = -f(x)$
↓ spiegeling om de x-as	↓ verticale uitrekking met factor 2
$y = -2f(x)$	$y = 2(-f(x)) = -2f(x)$

→ volgorde mag verwisseld worden

2 verticale uitrekking met factor 2 en verticale verschuiving over 3 eenheden naar boven

$y = f(x)$	$y = f(x)$
↓ verticale uitrekking met factor 2	↓ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,3)
$y = 2f(x)$	$y = f(x) + 3$
↓ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,3)	↓ verticale uitrekking met factor 2
$y = 2f(x) + 3$	$y = 2[f(x) + 3]$
	$= 2f(x) + 6$

→ je mag de volgorde niet wisselen

3 verticale uitrekking met factor 2 en horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links

$y = f(x)$	$y = f(x)$
↓ verticale uitrekking met factor 2	↓ horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links
$y = 2f(x)$	$y = f(x + 2)$
↓ horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links	↓ verticale uitrekking met factor 2
$y = 2f(x + 2)$	$y = 2f(x + 2)$

→ de volgorde mag verwisseld worden

4 spiegeling om de *x*-as en verticale verschuiving over 3 eenheden naar boven

$y = f(x)$
↓ spiegeling om de x-as

$y = -f(x)$
↓ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = -f(x) + 3$

$y = f(x)$
↓ verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = f(x) + 3$
↓ spiegeling om de x-as

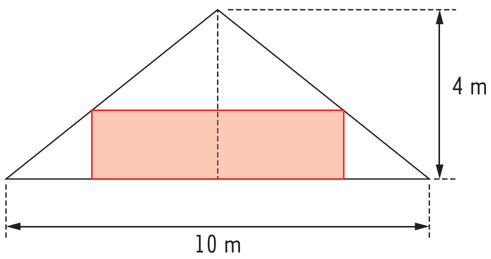
$y = -(f(x) + 3)$
$= -f(x) - 3$

→ de volgorde mag niet verwisseld worden

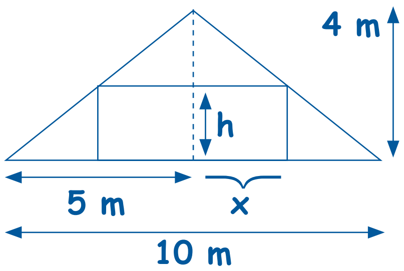
Opdracht 86 bladzijde 63

Een symmetrische puntgevel heeft bij de basis een breedte van 10 m en een hoogte van 4 m.
In deze puntgevel wil men een rechthoekig ateliervenster inbouwen zoals op de figuur is aangegeven.

Om zoveel mogelijk licht binnen te krijgen, wil men een zo groot mogelijk venster.



1 Kies een variabele *x*.

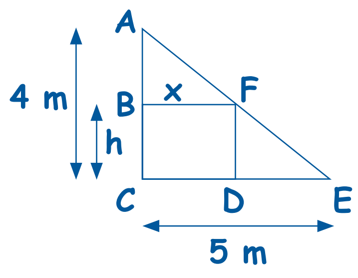


x = halve breedte ateliervenster

2 Druk de oppervlakte *A* van dit venster uit in functie van *x*.

$A = 2x \cdot h$

Om h uit te drukken in functie van x gebruiken we de eigenschap bij gelijkvormige driehoeken:



$\Delta ACE \sim \Delta ABF$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden zijn evenredig

$$\frac{4}{4-h} = \frac{5}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$4x = 20 - 5h$$

$$5h = 20 - 4x$$

$$h = 4 - \frac{4}{5}x$$

$$\text{Dus } A = 2x\left(4 - \frac{4}{5}x\right)$$

$$= -\frac{8}{5}x^2 + 8x$$

3 Bepaal grafisch de afmetingen van het venster zodat de oppervlakte ervan maximaal is.

De oppervlakte is maximaal in de top van de bergparabool:

$$x = \frac{-8}{\frac{-16}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$h = 4 - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = 2$$

Kiezen we voor de basis 5 m $\left(2 \times \frac{5}{2}\right)$ en voor de hoogte 2 m, dan zal de oppervlakte maximaal zijn.

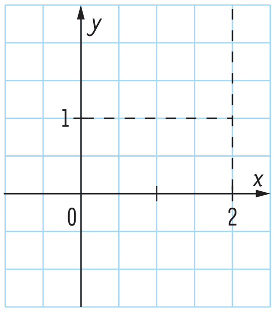
Opdracht 87 bladzijde 63

En functie $y = f(x)$ heeft als domein $[0,2]$ en als bereik $[0,1]$.

Bepaal het domein en het bereik van de volgende functies.

dom f = [0,2]

ber f = [0,1]



1 $y = f(x) + 2$

y = f(x) + 2: verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,2)

→ dom g = [0,2]

ber g = [2,3]

2 $y = 2\,f(x)$

y = 2f(x): verticale uitrekking met factor 2

→ dom g = [0,2]

→ ber g = [0,2]

3 $y = f(x + 2)$

y = f(x + 2): verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (–2,0)

→ dom g = [–2,0]

→ ber g = [0,1]

4 $y = -f(x)$

y = f(x): spiegeling om de x-as

→ dom g = [0,2]

→ ber g = [–1,0]

5 $y = -f(x + 1) + 1$

y = –f(x + 1) + 1: spiegeling om de x-as en verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (–1,1)

→ dom g = [–1,1]

→ ber g = [0,1]

6 $y = f(-x)$

$y = f(-x)$: spiegeling om de y-as

$\rightarrow$ dom $g = [-2,0]$

$\rightarrow$ ber $g = [0,1]$

Opdracht 88 bladzijde 63

1 De ongelijkheid $(x+1)(x-a)(x-b) < 0$ heeft als oplossing $x < -1$ of $2 < x < 4$.

Bepaal a en b.

$(x + 1)(x - a)(x - b) < 0$

x		-1		2		4	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

a = 2 en b = 4
of
a = 4 en b = 2

2 De ongelijkheid $(x+a)(x-b)(x-2) \geqslant 0$ heeft als oplossing $-1 \leqslant x \leqslant 2$ of $x \geqslant 3$.

Bepaal a en b.

$(x + a)(x - b)(x - 2) \geqslant 0$

x		-1		2		3	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

a = 1 en b = 3
of
a = -3 en b = -1

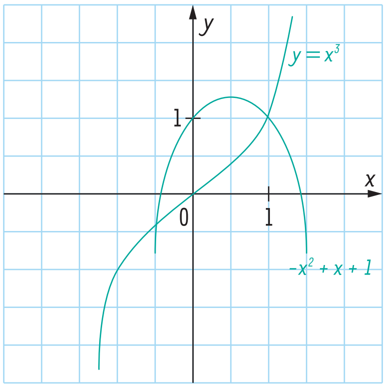
Opdracht 89 bladzijde 63

Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking $1 + x - x^2 = |x^3|$?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO, eerste ronde 2011)

1) $x \geqslant 0$: $1 + x - x^2 = x^3$



één snijpunt

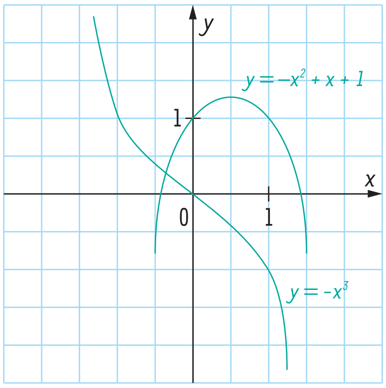
$y = -x^2 + x + 1$

de grafiek is een bergparabool

2 nulpunten: $= \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — 1 negatief, 1 positief

en door (0,1) en top $\left(\dfrac{1}{2}, \underbrace{\dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1}_{\frac{5}{4}}\right)$

2) $x \leqslant 0$: $1 + x - x^2 = -x^3$

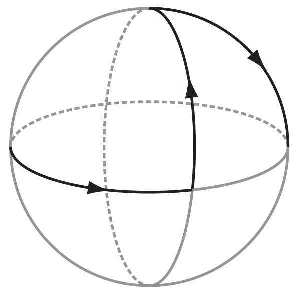


één snijpunt

$\Rightarrow$ 2 oplossingen $\Rightarrow$ antwoord C

Hersenbrekers

1 Drie cirkelvormige hoepels zijn aan elkaar gelijmd. Ze snijden elkaar onder rechte hoeken. Een lieveheersbeestje vliegt naar een snijpunt. Daar begint het een wandeling. Het wandelt een kwart hoepel en slaat daarna linksaf naar een andere hoepel. Het beestje wandelt weer een kwart hoepel en slaat dan rechtsaf. En zo gaat het door, telkens om en om links of rechts afslaand.



Na hoeveel kwart hoepels komt het lieveheersbeestje terug in het beginpunt?

A 6 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

(Bron © wizPROF 2009)

start op hoepel 1, links op hoepel 2, rechts op hoepel 3, links op hoepel 1, rechts op hoepel 2, links op hoepel 3: terug bij startpunt

antwoord A: 6

2 Een kikker zit op een waterlelie en ziet 3 meter verderop een vlo. De kikker achtervolgt de vlo met sprongen van 20 cm en de vlo vlucht met sprongen van 10 cm.

Voor elke twee sprongen van de kikker doet de vlo er drie.

Waar pakt de kikker de vlo?

A op 3 m van de lelie

B op 6 m van de lelie

C op 12 m van de lelie

D op 30 m van de lelie

E op 60 m van de lelie

(Bron © JWO, eerste ronde 2006)

tijdstip	afstand kikker t.o.v. lelie	afstand vlo t.o.v. lelie
0	0	3
1	0,4	3,3
2	0,8	3,6
...		
t	0,4t	3+0,3t

$0{,}4t = 3 + 0{,}3t$

$0{,}1t = 3$

$t = 30$

$\Rightarrow$ afstand $= 0{,}4 \cdot 30 = 3 + 0{,}3 \cdot 30 = 12$

Antwoord C: op 12 m van de lelie