Hoofdstuk 1

Matrices

Opdracht 1 bladzijde 7

Uit een gezelschap van zes personen (A, B, C, D, E en F) moet een voorzitter worden gekozen. Iedereen van het gezelschap moet door een cijfer zijn voorkeur bekendmaken: een eerste voorkeur door een 1, een tweede door een 2 enzovoort. Het is niet toegelaten voor zichzelf te stemmen of een cijfer meer dan eens te gebruiken. De persoon met de laagste totaalscore wordt voorzitter. De resultaten van de stemming zie je in de volgende tabel.

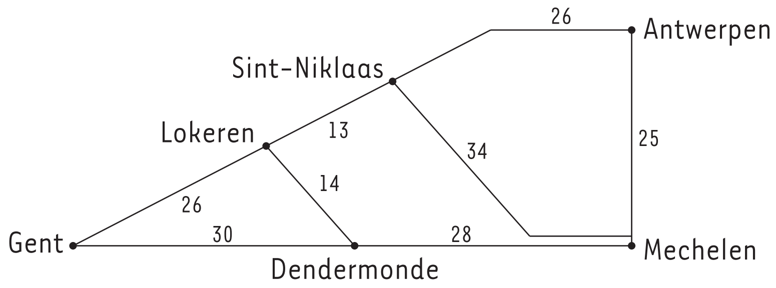
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Wie wordt voorzitter?

B heeft drie keer een eerste voorkeur gekregen, één keer een tweede voorkeur en één keer een derde. Dit is de beste score. B wordt dus voorzitter.

Opdracht 2 bladzijde 11

Hieronder zie je een deel van het IC-spoorwegennet. We kiezen als afstand tussen twee steden de kortste verbinding. Zo is de afstand tussen Mechelen en Lokeren 42 km.



We kunnen deze afstanden noteren in de matrix B:

$$B = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} A & D & G & L & M & S \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 53 & 65 & 39 & 25 & 26 \\ 53 & 0 & 30 & 14 & 28 & 27 \\ 65 & 30 & 0 & 26 & 58 & 39 \\ 39 & 14 & 26 & 0 & 42 & 13 \\ 25 & 28 & 58 & 42 & 0 & 34 \\ 26 & 27 & 39 & 13 & 34 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ D \\ G \\ L \\ M \\ S \end{array} \end{array}$$

1 Geef de dimensie van B.

dim B = 6 × 6

2 Geef het element b_{23}, b_{44} en b_{61}.

$b_{23} = 30$, $b_{44} = 0$ en $b_{61} = 26$

3 Welke elementen van B geven de langste trajecten weer?

b_{13} en b_{31}: van Gent naar Antwerpen en omgekeerd.

4 Welk soort matrix herken je en hoe kun je dit verklaren?

Dit is een symmetrische matrix: zo is bijvoorbeeld de afstand tussen Gent en Antwerpen dezelfde als de afstand tussen Antwerpen en Gent.

Opdracht 3 bladzijde 13

Bepaal $A - B + C$ als $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -a & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 2a & -2b \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

$$A - B + C = \begin{bmatrix} a + a + 2a & b - 2b - 2b \\ -a - 0 + a & 0 - a + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a & -3b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

Opdracht 4 bladzijde 13

Bepaal x, y, z en t als $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 2t & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & z \\ 4t & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 2t & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & z \\ 4t & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y & 4 - z \\ -2t & y + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 4 - z = 0 \\ -2t = 12 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = 4 \\ t = -6 \end{cases}$$

Opdracht 5 bladzijde 16

Als $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, bereken dan $\frac{1}{3}(2A - 5B) - \frac{2}{3}(4A - B)$.

$$\frac{1}{3}(2A - 5B) - \frac{2}{3}(4A - B)$$

$$= \frac{2}{3}A - \frac{5}{3}B - \frac{8}{3}A + \frac{2}{3}B$$

$$= -2A - B$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Opdracht 6 bladzijde 16

Bereken de matrices X en Y als $\begin{cases} 2X+Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \\ 3X+5Y=\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 19 & -5 \end{bmatrix} \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2X+Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \\ 3X+5Y=\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 19 & -5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}-2X \\ 3X+5\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}-2X\right)=\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 19 & -5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}-2X \\ -7X=\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 19 & -5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 40 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ -21 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ X=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Opdracht 7 bladzijde 17

Aaron en Bieke willen drie soorten chips kopen: zout (z), paprika (p) en grills (g). Ze vergelijken de promotieprijzen die twee van hun buurtwinkels aanbieden. Het gewenste aantal zakken chips staat in de matrix A en de kostprijs (in euro) in de winkels a en b vinden we in de matrix B.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & p & g \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{Aaron} \\ \text{Bieke} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \\ 1{,}25 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} z \\ p \\ g \end{array}$$

1 Hoeveel zou Aaron betalen in winkel a en hoeveel in winkel b?

winkel a: $8 \cdot 1 + 6 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}25 = 13{,}50$ dus € 13,50

winkel b: $8 \cdot 1 + 6 \cdot 0{,}75 + 2 \cdot 1 = 14{,}50$ dus € 14,50

2 Hoeveel zou Bieke betalen in beide winkels?

winkel a: $6 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1{,}25 = 10{,}25$ dus € 10,25

winkel b: $6 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}75 + 3 \cdot 1 = 9{,}75$ dus € 9,75

Opdracht 8 bladzijde 20

Bereken het product, als dit bestaat, zonder rekentoestel.

1 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot4+1\cdot2 & 2\cdot0+1\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot1 \\ 4\cdot4-1\cdot2 & 4\cdot0-1\cdot1 & 4\cdot(-1)-1\cdot1 \\ 1\cdot4+3\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot(-1)+3\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 14 & -1 & -5 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot2+0\cdot4-1\cdot1 & 4\cdot1+0\cdot(-1)-1\cdot3 \\ 2\cdot2+1\cdot4+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot4 & 2\cdot5 & 2\cdot6 \\ 3\cdot4 & 3\cdot5 & 3\cdot6 \\ -1\cdot4 & -1\cdot5 & -1\cdot6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot2-3\cdot2+2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)-2\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot0-2\cdot2+0\cdot3 \\ -1\cdot(-1)+2\cdot1-3\cdot2 & -1\cdot0+2\cdot2-3\cdot3 \\ 0\cdot(-1)-1\cdot1+4\cdot2 & 0\cdot0-1\cdot2+4\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -5 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

Een 3×2-matrix kan niet vermenigvuldigd worden met een 3×3-matrix.

Opdracht 9 bladzijde 21

Bepaal x en y als

1 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+4y \\ 2y \\ 3x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=2 \\ 2y=2 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

2 $\begin{bmatrix} 1 & y & 4 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ y & 0 \\ -2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2-3 & 1+4x \\ -5+y-2x & x^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

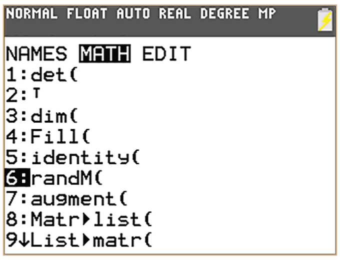
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ 4x = -12 \\ y - 2x = 4 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

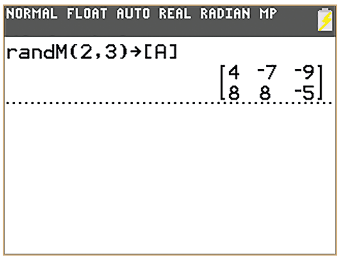
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Opdracht 10 bladzijde 21

Als a, b en c reële getallen zijn, dan weten we dat
- de vermenigvuldiging commutatief is: $a \cdot b = b \cdot a$;
- de vermenigvuldiging associatief is: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- de vermenigvuldiging distributief is ten opzichte van de optelling: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

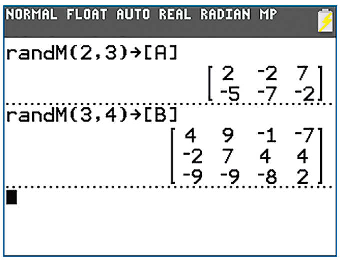
Onderzoek of deze drie eigenschappen ook geldig zijn voor matrices.
Je kunt eventueel toevalsmatrices genereren. Zorg er wel voor dat de gevraagde bewerkingen uitgevoerd kunnen worden, door gepaste dimensies te kiezen.

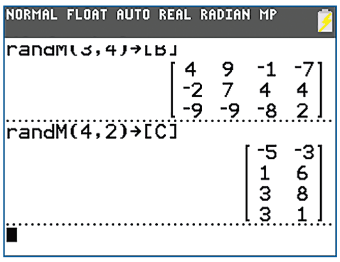


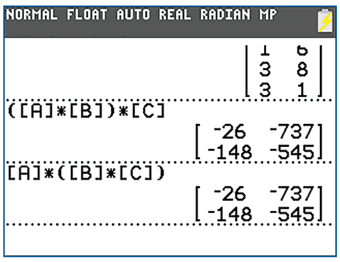


1 De vermenigvuldiging van matrices is niet commutatief want als je bijvoorbeeld een 3×2-matrix vermenigvuldigt met een 2×4-matrix, dan kun je die 2×4-matrix niet vermenigvuldigen met de 3×2-matrix.

2 De vermenigvuldiging van matrices is associatief.

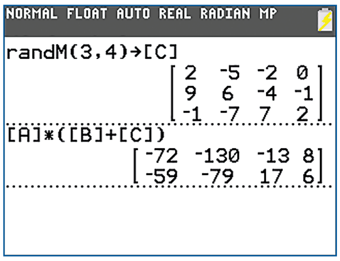


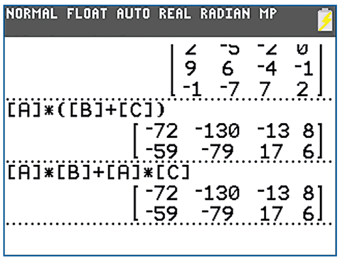




3 De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling.

Zelfde matrix A en B als bij eigenschap 2.





Opdracht 11 bladzijde 21

Als a een reëel getal is, dan geldt: $a \cdot 1 = a$.

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1 Bepaal, indien mogelijk, een matrix B zodat $A \cdot B = A$.

Het aantal rijen van B moet gelijk zijn aan het aantal kolommen van A, dus 3, en omdat A 3 kolommen heeft, zal ook het aantal kolommen van B gelijk moeten zijn aan 3, dus dim B = 3×3.

Als $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan is $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

2 Bepaal, indien mogelijk, een matrix C zodat $C \cdot A = A$.

Het aantal kolommen van C moet gelijk zijn aan het aantal rijen van A, dus 2, en omdat A 2 rijen heeft, zal ook het aantal rijen van C gelijk moeten zijn aan 2, dus dim C = 2×2.

Als $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan is $C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

Opdracht 12 bladzijde 27

Bewijs:

1 $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall\, C \in \mathbb{R}^{n\times p}: (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

- We tonen eerst aan dat de dimensies gelijk zijn.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ B\in\mathbb{R}^{m\times n}\end{array}\right\}\Rightarrow A+B\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow (A+B)\cdot C\in\mathbb{R}^{m\times p}\\
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot C\in\mathbb{R}^{m\times p}\\ \left.\begin{array}{l}B\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ C\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow B\cdot C\in\mathbb{R}^{m\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot C+B\cdot C\in\mathbb{R}^{m\times p}
\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\dim[(A+B)\cdot C]\\ \quad =\dim[A\cdot C+B\cdot C]\end{array}$$

- We tonen aan dat de overeenkomstige elementen gelijk zijn.
  We gebruiken de volgende notaties:

$$\underbrace{(\underbrace{A+B}_{\substack{\|\\ D}})\cdot C}_{\substack{\|\\ E}} \text{ en } \underbrace{\underbrace{A\cdot C}_{\substack{\|\\ F}} + \underbrace{B\cdot C}_{\substack{\|\\ G}}}_{\substack{\|\\ H}} \text{ en bewijzen dat } e_{ij} = h_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., p\}.$$

$$\begin{aligned}
e_{ij} &= d_{i1}c_{1j} + d_{i2}c_{2j} + ... + d_{in}c_{nj} && E = D\cdot C\\
&= (a_{i1}+b_{i1})c_{1j} + (a_{i2}+b_{i2})c_{2j} + ... + (a_{in}+b_{in})c_{nj} && D = A+B\\
&= (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + ... + a_{in}c_{nj}) + (b_{i1}c_{1j} + b_{i2}c_{2j} + ... + b_{in}c_{nj}) && \text{rekenen in } \mathbb{R}\\
&= f_{ij} + g_{ij} && F = A\cdot C \text{ en } G = B\cdot C\\
&= h_{ij} && H = F+G
\end{aligned}$$

2 $\forall\, r \in \mathbb{R}, \forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall\, B \in \mathbb{R}^{n\times p}: r\cdot(A\cdot B) = A\cdot(r\cdot B)$

- We tonen eerst aan dat de dimensies gelijk zijn.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} r\in\mathbb{R}\\ \left.\begin{array}{l}A\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot B\in\mathbb{R}^{m\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow r\cdot(A\cdot B)\in\mathbb{R}^{m\times p}\\
\left.\begin{array}{l} A\in\mathbb{R}^{m\times n}\\ \left.\begin{array}{l}r\in\mathbb{R}\\ B\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow r\cdot B\in\mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot(r\cdot B)\in\mathbb{R}^{m\times p}
\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\dim[r\cdot(A\cdot B)]\\ \quad =\dim[A\cdot(r\cdot B)]\end{array}$$

- We tonen aan dat de overeenkomstige elementen gelijk zijn.

  We gebruiken de volgende notaties:

$$\underbrace{r\cdot(\underbrace{A\cdot B}_{\substack{\|\\ C}})}_{\substack{\|\\ D}} \text{en } \underbrace{A\cdot(\underbrace{r\cdot B}_{\substack{\|\\ E}})}_{\substack{\|\\ F}} \text{ en bewijzen dat } d_{ij} = f_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., p\}.$$

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= r\cdot c_{ij} && D = r\cdot C\\
&= r\cdot(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}) && C = A\cdot B\\
&= a_{i1}(r\cdot b_{1j}) + a_{i2}(r\cdot b_{2j}) + ... + a_{in}(r\cdot b_{nj}) && \text{rekenen in } \mathbb{R}\\
&= a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + ... + a_{in}e_{nj} && E = r\cdot B\\
&= f_{ij} && F = A\cdot E
\end{aligned}$$

Opdracht 13 bladzijde 27

Een fabrikant levert drie soorten bouwpakketten af aan tuinbouwcentra: tuinhuisjes, plantenkassen en dierenhokken.
De benodigde hoeveelheid hout, glas en roofing (dakbedekking), allemaal in m^2, nodig voor het vervaardigen van elk pakket vind je in de matrix A:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{hout} & \text{glas} & \text{roofing} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 12 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{tuinhuis (T)} \\ \leftarrow \text{plantenkas (P)} \\ \leftarrow \text{dierenhok (D)} \end{array}$$

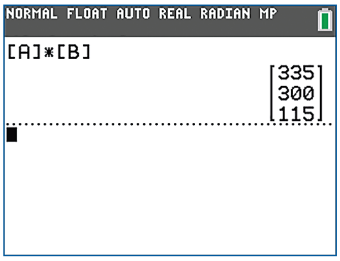
De kosten van de grondstoffen, in euro per m^2, worden in de matrix B gegeven:

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{hout} \\ \leftarrow \text{glas} \\ \leftarrow \text{roofing} \end{array}$$

Er komt een bestelling binnen, waarvan de aantallen in de matrix C worden gegeven.

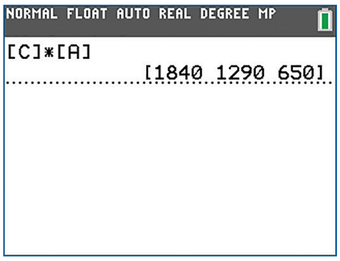
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{T} & \text{P} & \text{D} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ C = & \begin{bmatrix} 120 & 70 & 50 \end{bmatrix} \end{array}$$

1 Bereken $A \cdot B$. Wat is de betekenis van dit resultaat?



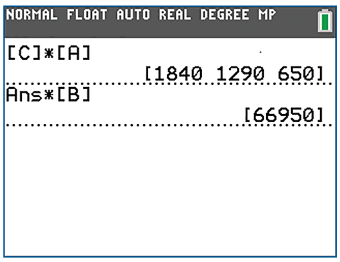
Deze matrix geeft de kostprijs voor 1 tuinhuisje (€ 335), 1 plantenkas (€ 300) en 1 dierenhok (€ 115).

2 Bereken $C \cdot A$. Wat stelt dit resultaat voor?



Deze matrix geeft de benodigde hoeveelheid hout, glas en roofing aan, in m^2, voor de hele bestelling.

3 Bereken $C \cdot A \cdot B$. Wat is de betekenis van dit resultaat?



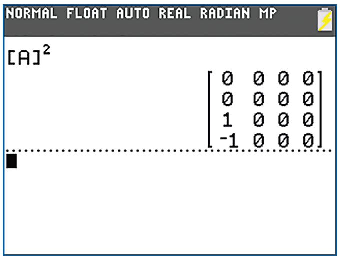
$(C \cdot A) \cdot B$ is de kostprijs voor de hele bestelling: € 66 950.

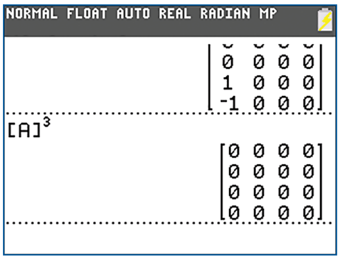
Dit resultaat kan ook gevonden worden via $C \cdot (A \cdot B)$.

Opdracht 14 bladzijde 29

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bereken A^2, A^3 en A^k ($k > 3$ en $k \in \mathbb{N}$).





$A^k = O$ met $k > 3$ en $k \in \mathbb{N}$.

Opdracht 15 bladzijde 29

Bepaal x en y als $\begin{bmatrix} -1 & x \\ -\frac{1}{3} & y \end{bmatrix}^2 = O$.

$$\begin{bmatrix} -1 & x \\ -\frac{1}{3} & y \end{bmatrix}^2 = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & x \\ -\frac{1}{3} & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & x \\ -\frac{1}{3} & y \end{bmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{3}x & -x+xy \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}y & -\frac{1}{3}x+y^2 \end{bmatrix} = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{1}{3}x = 0 \\ -x+xy = 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}y = 0 \\ -\frac{1}{3}x+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Opdracht 16 bladzijde 29

In de matrix A lees je af hoeveel gram vetten (V), koolhydraten (K) en eiwitten (E) er zitten in 100 gram brood, kaas en boter. In de matrix B vind je de hoeveelheden ($\times$ 100 gram) brood, kaas en boter die Fay en Robin nuttigen bij hun ontbijt.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & K & E \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & 45 & 8 \\ 25 & 1 & 21 \\ 80 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{brood} \\ \text{kaas} \\ \text{boter} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Fay} & \text{Robin} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 0{,}60 & 1{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}45 \\ 0{,}08 & 0{,}10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{brood} \\ \text{kaas} \\ \text{boter} \end{array}$$

1 Bereken het aantal gram vetten, koolhydraten en eiwitten in het ontbijt van Fay.

vetten: $2 \cdot 0{,}60 + 25 \cdot 0{,}30 + 80 \cdot 0{,}08 = 15{,}1$ dus 15,1 gram vetten

koolhydraten: $45 \cdot 0{,}60 + 1 \cdot 0{,}30 + 0 \cdot 0{,}08 = 27{,}3$ dus 27,3 gram koolhydraten

eiwitten: $8 \cdot 0{,}60 + 21 \cdot 0{,}30 + 0 \cdot 0{,}08 = 11{,}1$ dus 11,1 gram eiwitten

2 Zelfde vraag voor het ontbijt van Robin.

vetten: $2 \cdot 1{,}20 + 25 \cdot 0{,}45 + 80 \cdot 0{,}10 = 21{,}65$ dus 21,65 gram vetten

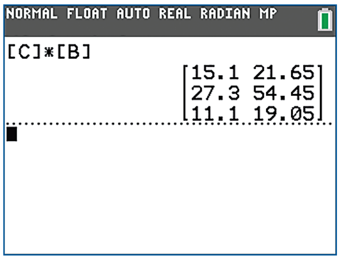
koolhydraten: $45 \cdot 1{,}20 + 1 \cdot 0{,}45 + 0 \cdot 0{,}10 = 54{,}45$ dus 54,45 gram koolhydraten

eiwitten: $8 \cdot 1{,}20 + 21 \cdot 0{,}45 + 0 \cdot 0{,}10 = 19{,}05$ dus 19,05 gram eiwitten

3 Welk matrixproduct moet je berekenen om de resultaten uit **1** en **2** te verkrijgen?

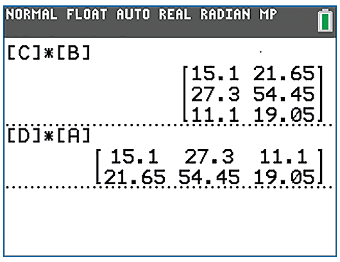
Je kunt de rijen en de kolommen van matrix A wisselen: $\begin{bmatrix} 2 & 25 & 80 \\ 45 & 1 & 0 \\ 8 & 21 & 0 \end{bmatrix}$.

Als je die nieuwe matrix (C) vermenigvuldigt met B, krijg je de gevraagde resultaten.



Je kunt ook de rijen en de kolommen van matrix B wisselen: $\begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 1{,}20 & 0{,}45 & 0{,}10 \end{bmatrix}$.

Als je die nieuwe matrix (D) vermenigvuldigt met A, krijg je ook de gevraagde resultaten.



Opdracht 17 bladzijde 33

Bewijs: $\forall\, r \in \mathbb{R}, \forall\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $(r \cdot A)^T = r \cdot A^T$.

- We tonen eerst aan dat de dimensies gelijk zijn.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} r \in \mathbb{R} \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array}\right\} \Rightarrow r \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow (r \cdot A)^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ \left.\begin{array}{l} r \in \mathbb{R} \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array}\right\} \Rightarrow r \cdot A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim\left((r \cdot A)^T\right) = \dim(r \cdot A^T)$$

- We tonen aan dat de overeenkomstige elementen gelijk zijn.

  We gebruiken de volgende notaties:

  $\underbrace{(\underbrace{r \cdot A}_{= B})^T}_{= C}$ en $\underbrace{r \,.\, \underbrace{A^T}_{= D}}_{= E}$ en bewijzen dat $c_{ij} = e_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$.

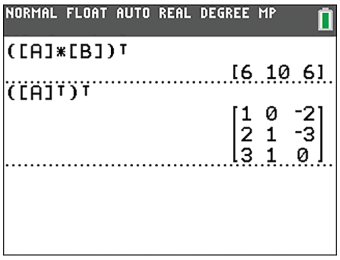
$$\begin{array}{ll} c_{ij} = b_{ji} & \qquad C = B^T \\ \quad = r \cdot a_{ji} & \qquad B = r \cdot A \\ \quad = r \cdot d_{ij} & \qquad D = A^T \\ \quad = e_{ij} & \qquad E = r \cdot D \end{array}$$

Opdracht 18 bladzijde 33

1 Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, bereken dan indien mogelijk:

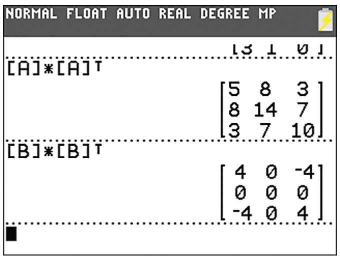
a $(A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

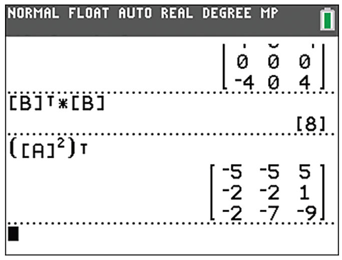
b $(A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



c $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 14 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

d $B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$





e $B^T \cdot B = [8]$

f $(A^2)^T = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & -9 \end{bmatrix}$

2 Toon aan: als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan geldt

a $(A^T)^T = A$

- We tonen eerst aan dat de dimensies gelijk zijn.

  $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \Rightarrow (A^T)^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \dim(A^T)^T = \dim(A)$

- We tonen aan dat de overeenkomstige elementen gelijk zijn.

  We gebruiken de volgende notaties:

  $\underbrace{(\underbrace{A^T}_{= B})^T}_{= C}$ en bewijzen dat $c_{ij} = a_{ij}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

$c_{ij} = b_{ji}$	$C = B^T$
$= a_{ij}$	$B = A^T$

b $A \cdot A^T$ is symmetrisch

- We tonen aan dat $A \cdot A^T$ een vierkante matrix is.

  $\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$

- We tonen aan dat de elementen die symmetrisch liggen ten opzichte van de hoofddiagonaal gelijk zijn.

  We gebruiken de volgende notaties:

  $\underbrace{A \cdot \underbrace{A^T}_{= B}}_{= C}$ en bewijzen dat $c_{ij} = c_{ji}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$.

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$	$C = A \cdot B$
$= a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn}$	$B = A^T$
$= a_{j1}a_{i1} + a_{j2}a_{i2} + ... + a_{jn}a_{in}$	rekenen in $\mathbb{R}$
$= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + ... + a_{jn}b_{ni}$	$B = A^T$
$= c_{ji}$	$C = A \cdot B$

c $A^T \cdot A$ is symmetrisch

- We tonen aan dat $A^T \cdot A$ een vierkante matrix is.

$$\left.\begin{array}{l} A^T \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{array}\right\} \Rightarrow A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- We tonen aan dat de elementen die symmetrisch liggen ten opzichte van de hoofddiagonaal gelijk zijn.

  We gebruiken de volgende notaties:

  $\underbrace{\underbrace{A^T}_{\substack{\shortparallel \\ B}} \cdot A}_{\substack{\shortparallel \\ C}}$ en bewijzen dat $c_{ij} = c_{ji}, \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}, \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + ... + b_{im}a_{mj} && C = B \cdot A \\ &= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + ... + a_{mi}a_{mj} && B = A^T \\ &= a_{1j}a_{1i} + a_{2j}a_{2i} + ... + a_{mj}a_{mi} && \text{rekenen in } \mathbb{R} \\ &= b_{j1}a_{1i} + b_{j2}a_{2i} + ... + b_{jm}a_{mi} && B = A^T \\ &= c_{ji} && C = B \cdot A \end{aligned}$$

Opdracht 19 bladzijde 34

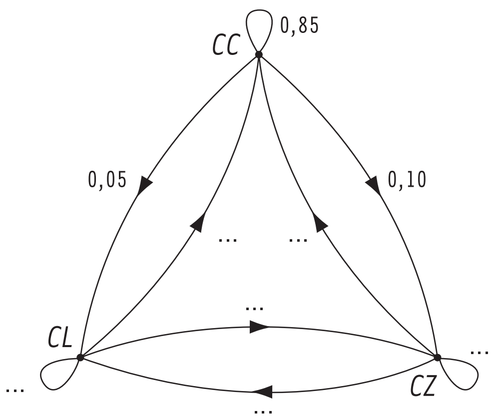
Van de vele soorten cola's zijn de volgende drie smaken erg in trek: Coca-Cola (*CC*), Coca-Cola light (*CL*) en Coca-Cola zero (*CZ*).

Stel nu dat van de mensen die vorige maand *CC* dronken er 85 % dat deze maand nog doet, er 5 % overstapt op *CL* en de overige 10 % op *CZ*.

Van de mensen die vorige maand trouw waren aan *CL*, zal amper 20 % dat nog deze maand zijn, 6 0 % zal deze maand *CC* drinken en 20 % verkiest *CZ*.

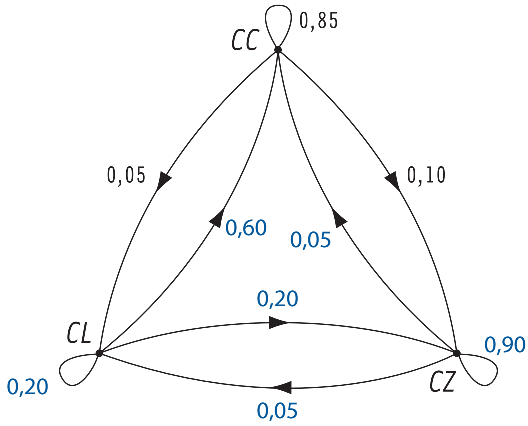
Ten slotte zal van hen die vorige maand *CZ* dronken 90 % dat deze maand ook nog doen, 5 % zal deze maand *CC* nuttigen en 5 % *CL*.

Deze overgangen kunnen we grafisch voorstellen in een pijlenschema. We kunnen dit ook in een matrix *A* weergeven.



$$\text{drinkt deze maand} \quad \begin{array}{c} \\ CC \\ CL \\ CZ \end{array} \begin{array}{c} \text{dronk vorige maand} \\ \begin{array}{ccc} CC & CL & CZ \end{array} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}85 & ... & ... \\ 0{,}05 & ... & ... \\ 0{,}10 & ... & ... \end{bmatrix}}_{A} \end{array}$$

1 Teken zelf een volledig pijlenschema en bepaal de matrix A.



dronk vorige maand

$$\text{drinkt deze maand}\quad \begin{array}{c} \\ CC \\ CL \\ CZ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} CC & CL & CZ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}60 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}90 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

2 Stel dat we 100 coladrinkers volgen en er vorige maand 60 van hen Coca-Cola dronken, 5 onder hen Coca-Cola light en 35 Coca-Cola zero.

Indien we deze aantallen noteren in een kolommatrix $B = \begin{bmatrix} 60 \\ 5 \\ 35 \end{bmatrix}$, met welk matrixproduct kun je dan bepalen hoeveel er deze maand nog Coca-Cola, Coca-Cola light en Coca-Cola zero drinken? Bereken dit product.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}60 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 5 \\ 35 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 56 \\ 6 \\ 38 \end{bmatrix}$$

Opdracht 20 bladzijde 37

In een bepaalde stad worden de werkloosheidscijfers onderzocht. De volgende tabel wordt gepubliceerd. De tijdspanne is een jaar.

$$\begin{array}{ll} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc}\text{werkloos} & \text{tewerkgesteld}\end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{l}\text{werkloos} \\ \text{tewerkgesteld}\end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}70 & 0{,}93 \end{bmatrix} = M \end{array}$$

1 Wat is de betekenis van het getal 0,07?

7 % van de werkenden wordt gedurende het jaar werkloos.

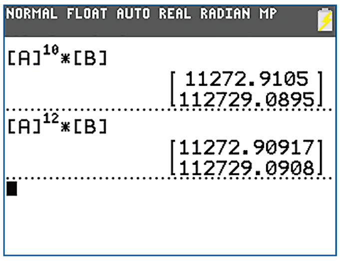
2 Bij het begin van het onderzoek zijn er 14 678 mensen in de stad werkloos en hebben 109 324 mensen werk. Stel dat deze evolutie jaarlijks aanhoudt, wat zou dan de toestand zijn na drie jaar?

$$\begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}70 & 0{,}93 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 14\,678 \\ 109\,324 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 11314 \\ 112\,688 \end{bmatrix}$$

Na 3 jaar zijn er ongeveer 11 314 mensen werkloos en 112 688 mensen tewerkgesteld.

3 Ga na hoe deze toestand zou evolueren op lange termijn.

Op lange termijn zouden er ongeveer 11 273 werklozen zijn en ongeveer 112 729 tewerkgesteld.



Opdracht 21 bladzijde 41

Beschouw de volgende fictieve lesliematrix in verband met een dierenpopulatie. De tijdseenheid is een jaar.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0 \end{bmatrix}$$

1 Geef de betekenis van het element l_{14}.

$l_{14} = 4$: de 3-4 jarigen hebben gemiddeld 4 nakomelingen per jaar.

2 Wat is de betekenis van het element l_{32}?

$l_{32} = 0{,}75$: de 1-2 jarigen hebben 75 % kans om te overleven.

3 Waarom is $l_{41} = 0$?

De 0-1 jarigen kunnen een jaar later niet bij de 3-4 jarigen horen.

4 Stel dat de beginpopulatie gegeven wordt door $X_0 = \begin{bmatrix} 479 \\ 231 \\ 105 \\ 43 \end{bmatrix}$, hoeveel dieren zijn er dan na 5 jaar in elke categorie?

$$L^5 \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 479 \\ 231 \\ 105 \\ 43 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 312 \\ 251 \\ 203 \\ 48 \end{bmatrix}$$

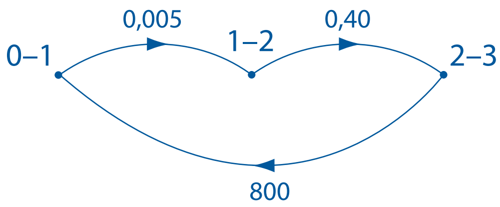
Er zullen na een jaar ongeveer 312 dieren zijn tussen 0 en 1 jaar, ongeveer 251 tussen 1 en 2 jaar, 203 tussen 2 en 3 jaar en 48 tussen 3 en 4 jaar.

Opdracht 22 bladzijde 41

De groei van een populatie vissen wordt vaak gekenmerkt door hoge vruchtbaarheidscijfers en door een lage overlevingskans voor pasgeboren exemplaren. De volgende gegevens zijn bekend:

- slechts 0,5 % van de eitjes komt uit en overleeft het eerste levensjaar;
- eenjarigen hebben 40 % kans om het jaar te overleven;
- geen van de vissen haalt de leeftijd van drie jaar;
- alleen tweejarige vissen kunnen nakomelingen hebben, gemiddeld legt zo'n vis 800 eitjes.

1 Stel de overgang van de levensfases voor met een graaf.



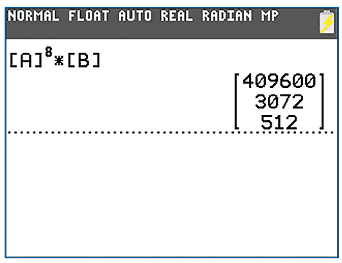
2 Stel de lesliematrix op.

$$L = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0\text{–}1 & 1\text{–}2 & 2\text{–}3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 800 \\ 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 0\text{–}1 \\ 1\text{–}2 \\ 2\text{–}3 \end{array}$$

3 Een bioloog brengt voor een studie 100 000 eitjes, 500 eenjarigen en 300 tweejarigen in een gunstige visomgeving.

Hoe is de populatie verdeeld na acht jaar?

Na 8 jaar zullen er ongeveer 409 600 eitjes zijn, 3072 vissen tussen 1 en 2 jaar oud en 512 tussen 2 en 3 jaar.



Opdracht 23 bladzijde 45

1 Schrijf de 3×2-matrix A met $a_{ij} = i + j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2 Schrijf de 2×4-matrix B met $b_{ij} = 2i - j$.

$$B = \begin{bmatrix} 2\cdot1-1 & 2\cdot1-2 & 2\cdot1-3 & 2\cdot1-4 \\ 2\cdot2-1 & 2\cdot2-2 & 2\cdot2-3 & 2\cdot2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opdracht 24 bladzijde 45

Bepaal a, b en c als

1 $$\begin{bmatrix} -1 & a & 3 \\ -b & 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 2b & -3 \\ -a & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1+c & a+2b & 0 \\ -b-a & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+c=-2 \\ a+2b=2 \\ -b-a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

2 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{5} \\ -3a & b \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{5} \\ -b & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 2\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2} & 3b \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 2\sqrt{5} \\ -3a-b & b+1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 2\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2} & 3b \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6} = c \\ -3a-b = -\frac{1}{2} \\ b+1 = 3b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Opdracht 25 bladzijde 45

Gegeven zijn $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \\ 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Bereken, zonder de volledige productmatrix te berekenen:

1 d_{32} van $D = A \cdot B$

$d_{32} = 0 \cdot 0 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot (-5) + 8 \cdot 3 = 57$

2 e_{41} van $E = B \cdot C$

$e_{41} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -2$

3 f_{21} van $F = C \cdot C$

$f_{21} = -2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 0$

Opdracht 26 bladzijde 45

Als $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$, bereken dan:

1 $A \cdot C = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot 0 + 1 \cdot x & x \cdot 1 + 1 \cdot y \\ 0 \cdot 0 + y \cdot x & 0 \cdot 1 + y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$

2 $B \cdot C = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \cdot 0 + 0 \cdot x & -x \cdot 1 + 0 \cdot y \\ 1 \cdot 0 + y \cdot x & 1 \cdot 1 + y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ xy & 1+y^2 \end{bmatrix}$

3 $A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} x & x+y \\ xy & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x \\ xy & 1+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 2xy & 1+2y^2 \end{bmatrix}$

4 $(A+B) \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot x & 0 \cdot 1 + 1 \cdot y \\ 1 \cdot 0 + 2y \cdot x & 1 \cdot 1 + 2y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 2xy & 1+2y^2 \end{bmatrix}$

5 $3I_2 - C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -x & 3-y \end{bmatrix}$

6 $C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot x & 0 \cdot 1 + 1 \cdot y \\ x \cdot 0 + y \cdot x & x \cdot 1 + y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ xy & x+y^2 \end{bmatrix}$

Opdracht 27 bladzijde 46

Bepaal x en y als $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2y & x^2+y^2 \\ 4 & -x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Opdracht 28 bladzijde 46

Bepaal een getal r zodanig dat $A \cdot X = r \cdot X$ als $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ en $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$A \cdot X = r \cdot X$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow r = 2$

Opdracht 29 bladzijde 46

Als $A = \begin{bmatrix} m & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, bepaal dan m zodat $A^2 = 9I$.

$A^2 = 9\mathrm{I}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m^2 & 2m+6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 9 \\ 2m+6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = -3$

Opdracht 30 bladzijde 46

Als $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & y \end{bmatrix}$, bepaal dan x en y zodat $A^2 = B$.

$A^2 = B$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & y \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-x & -4 \\ 4x & -x+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & y \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 3 \\ 4x = -8 \\ -x+9 = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 11 \end{cases}$

Opdracht 31 bladzijde 46

Als $\dim A = 6 \times 3$, $\dim B = 3 \times 3$, $\dim C = 3 \times 2$, $\dim D = 5 \times 2$ en voor de matrix E geldt:
$E = (A \cdot B^2) \cdot (C \cdot D^T)$, bepaal dan $\dim E$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dim A = 6 \times 3 \\ \dim B^2 = 3 \times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(A \cdot B^2) = 6 \times 3 \\ \left.\begin{array}{l} \dim C = 3 \times 2 \\ \dim D^T = 2 \times 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(C \cdot D^T) = 3 \times 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim E = 6 \times 5$$

Opdracht 32 bladzijde 46

Beschouw een (2×1)-matrix $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

Veronderstel dat $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 53 \end{bmatrix}$.

Wat mag je besluiten over $a + b$?

A $a + b \leqslant 0$

B $0 < a + b < 37$

C $a + b = 37$

D $37 < a + b < 53$

E $a + b \geqslant 53$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2015)

Uit $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 53 \end{bmatrix}$, volgt dat:

$$\begin{cases} a + 2b = 37 \\ 2a + b = 53 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 37 - 2b \\ b = 53 - 2(37 - 2b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 37 - 2b \\ -3b = 53 - 74 = -21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 37 - 2 \cdot 7 = 37 - 14 = 23 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 30$$

Antwoord B is juist.

Opdracht 33 bladzijde 47

Drie steden A, B en C zijn door snelwegen met elkaar verbonden die alle bestaan uit evenveel rijstroken.
Om een onderhoudsplan te kunnen opstellen, onderzoekt men welke wegen het zwaarst belast zijn. Hiertoe wordt gedurende een doorsneedag het aantal en het soort voertuigen geteld. Deze resultaten vind je in de volgende tabel:

	Aantal voertuigen per dag		
	moto's	**personenwagens**	**vrachtwagens**
van A naar B	60	1530	1345
van B naar A	81	3245	901
van A naar C	591	3834	967
van C naar A	645	6904	211
van B naar C	159	5289	78
van C naar B	145	7785	97

De *verkeersdruk* van een weg geeft aan *hoeveel* voertuigen er per dag van die weg gebruikmaken. Bij de *wegbelasting* van een weg houdt men ook rekening met het *gewicht* van het voertuig: het aantal personenwagens wordt met 2 en het aantal vrachtwagens met 10 vermenigvuldigd.

1 Stel de 3×3-matrix M op voor de bijdrage aan de verkeersdruk door de moto's.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 81 & 645 \\ 60 & 0 & 145 \\ 591 & 159 & 0 \end{bmatrix} = M \end{array}$$

2 Stel de 3×3-matrix P op voor de bijdrage aan de verkeersdruk van de personenwagens.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3245 & 6904 \\ 1530 & 0 & 7785 \\ 3834 & 5289 & 0 \end{bmatrix} = P \end{array}$$

3 Stel de 3×3-matrix V op voor de bijdrage aan de verkeersdruk door de vrachtwagens.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 901 & 211 \\ 1345 & 0 & 97 \\ 967 & 78 & 0 \end{bmatrix} = V \end{array}$$

4 Bereken de matrix $M + P + V$ voor de totale verkeersdruk.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4227 & 7760 \\ 2935 & 0 & 8027 \\ 5392 & 5526 & 0 \end{bmatrix} = M + P + V \end{array}$$

5 De matrix voor de wegbelasting is $M + rP + sV$. Welke waarde hebben r en s in deze situatie? Bereken de matrix voor de wegbelasting.

$r = 2$ en $s = 10$

$M + 2P + 10V =$

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 15\,581 & 16\,563 \\ 16\,570 & 0 & 16\,685 \\ 17\,929 & 11517 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

6 Welke weg zal het meest onderhevig zijn aan slijtage?
En welke het minst?

Hiervoor kijken we naar de matrix M + 2P + 10V: de weg van A naar C zal het meest onderhevig zijn aan slijtage, die van B naar C het minst.

7 Op welke weg zullen zich wellicht de meeste files voordoen? En op welke de minste?

Hiervoor kijken we naar de matrix M + P + V: de meeste files zullen zich wellicht voordoen op de weg van C naar B en de minste files op de weg van A naar B.

Opdracht 34 bladzijde 48

Bepaal een uitdrukking voor het element a_{ij} in de matrix A.

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^1 & 2^1 & 3^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{ij} = j^i$

2 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{ij} = i - j$

Opdracht 35 bladzijde 48

Beschouw een (2×2)-matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Veronderstel dat $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bereken $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

A $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ **E** $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(Bron © ijkingstoets farmacie, 2015)

Uit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, volgt dat: $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ c + 2d = 2 \end{cases}$.

Uit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, volgt dat: $\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 2c + d = -1 \end{cases}$.

We krijgen het stelsel:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = -2 \\ c + 2d = 2 \\ 2c + d = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ b = -2 - 2(1 - 2b) \\ c = 2 - 2d \\ d = -1 - 2(2 - 2d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = -\frac{4}{3} \\ d = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Zodat: $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Antwoord E is juist.

Opmerking

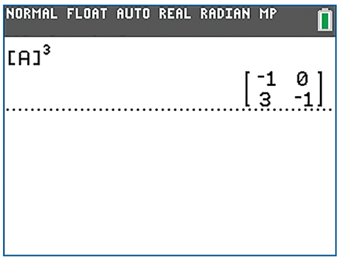
Alternatieve oplossingsmethode:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Opdracht 36 bladzijde 48

Als $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, bepaal dan x en y zodat $x \cdot A^3 + y \cdot A = I$.

$$\begin{aligned}
& x \cdot A^3 + y \cdot A = I \\
\Leftrightarrow\ & x \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^3 + y \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & x \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -x-y & 0 \\ 3x+y & -x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x-y=1 \\ 3x+y=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$



Opdracht 37 bladzijde 48

Bereken X als

$$X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot X - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 \times 2$$

$$\dim\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \times 1$$

$$\dim\left(-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1 \times 2$$

$$\Rightarrow \dim X = 1 \times 2$$

Stel $X = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, dan is

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = a - 3 \\ 3a - 2b = b - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = -3 \\ 3a - 3b = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = -\dfrac{7}{12} \end{cases}$$

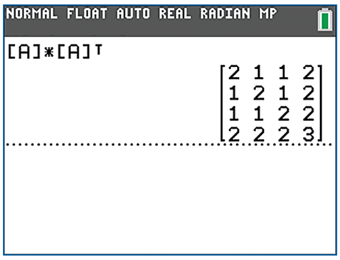
$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\dfrac{5}{4} & -\dfrac{7}{12} \end{bmatrix}$$

Opdracht 38 bladzijde 48

De matrix A geeft van vier personen (P_1, P_2, P_3 en P_4) aan welke van de drie talen Spaans (Sp), Engels (En) en Frans (Fr) ze spreken.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} \begin{array}{ccc} \text{Sp} & \text{En} & \text{Fr} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}$$

Bereken $A \cdot A^T$ en geef de betekenis van dit resultaat.



Deze matrix geeft weer in hoeveel talen de personen onderling kunnen communiceren. Bijvoorbeeld de eerste rij: P_1 kan zelf 2 talen spreken (Spaans en Frans), kan met P_2 praten in 1 taal (Frans), met P_3 ook 1 taal (Spaans) en met P_4 in 2 talen (Spaans en Frans).

Opdracht 39 bladzijde 49

We noemen twee matrices A en B *nuldelers* als $A \cdot B = O$ met $A \neq O$ en $B \neq O$.

1 Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ nuldelers zijn.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ -5 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ nuldelers zijn.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Als A en B nuldelers zijn, zijn dan ook B en A nuldelers? Verklaar je antwoord.

Omdat de vermenigvuldiging van matrices niet communicatief is, volgt uit $A \cdot B = 0$ niet automatisch dat $B \cdot A = 0$. Vaak is $B \cdot A$ zelfs niet gedefinieerd, omdat de dimensies niet overeenstemmen.

In opdrachten 39.1 en 39.2 zijn zowel $A \cdot B$ als $B \cdot A$ gedefinieerd, maar in beide gevallen geldt dat $B \cdot A \neq 0$:

$$39.1\text{: } B \cdot A = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$39.2\text{: } B \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 9 & 18 \\ 3 & 9 & 6 & 3 \\ -7 & -18 & -11 & -10 \\ -4 & -9 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Als A en B nuldelers zijn, kun je hieruit dus niet besluiten dat B en A ook nuldelers zijn.

Opdracht 40 bladzijde 49

A en B zijn vierkante matrices van orde n.
Onderzoek of de volgende uitdrukkingen algemeen geldig zijn en verklaar.

1 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$
De uitdrukking is bijgevolg niet algemeen geldig.

Enkel als $-AB + BA = O$ zal $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

2 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.
De uitdrukking is dus niet algemeen geldig.

Enkel als $AB = BA$ zal $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3 $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$

$(A + I)^2 = A^2 + IA + AI + I^2 = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I$.
Deze uitdrukking is algemeen geldig.

4 $(AB)^2 = A^2B^2$

$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB$.
Deze uitdrukking is niet algemeen geldig.

Enkel als $BA = AB$ zal $(AB)^2 = A^2B^2$, want dan is $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B$
$= (AA)(BB) = A^2B^2$.

Opdracht 41 bladzijde 49

Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bewijs dat $A + A^T$ een symmetrische matrix is.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow B = A + A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B is dus een vierkante matrix met $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$

Er geldt:

$b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$
$= a_{ji} + a_{ij}$ commutativiteit
$= b_{ji}$

Besluit: $B = A + A^T$ is een symmetrische matrix.

Opdracht 42 bladzijde 49

Stel $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bewijs: als A en B symmetrisch zijn, dan is $A^2 - B^2$ ook symmetrisch.

A en B zijn symmetrische matrices, dus is $A = A^T$ en $B = B^T$.

We moeten bewijzen dat $A^2 - B^2 = (A^2 - B^2)^T$.

Bewijs:

$(A^2 - B^2)^T = (A^2)^T - (B^2)^T$ eigenschap getransponeerde matrices
$= (A \cdot A)^T - (B \cdot B)^T$
$= A^T \cdot A^T - B^T \cdot B^T$ eigenschap getransponeerde matrices
$= (A^T)^2 - (B^T)^2$
$= A^2 - B^2$ gegeven

Opdracht 43 bladzijde 49

A is een vierkante matrix van de n-de orde waarvoor geldt dat $(A - I)^2 = O$.

Bewijs:

1 $A^2 = 2A - I$

$(A - I)^2 = O$

$\Leftrightarrow (A - I) \cdot (A - I) = O$

$\Leftrightarrow A^2 - A \cdot I - I \cdot A + I^2 = O$ distributiviteit

$\Leftrightarrow A^2 - 2A + I = O$ definitie en eigenschap eenheidsmatrix

$\Leftrightarrow A^2 = 2A - I$

2 $A^3 = 3A - 2I$

$A^3 = A^2 \cdot A$

$= (2A - I) \cdot A$ opdracht 1

$= 2A^2 - I \cdot A$ distributiviteit

$= 2(2A - I) - A$ opdracht 1 en definitie eenheidsmatrix

$= 4A - 2I - A$ distributiviteit

$= 3A - 2I$

3 $A^4 = 4A - 3I$

$A^4 = A^3 \cdot A$

$= (3A - 2I) \cdot A$ opdracht 2

$= 3A^2 - 2I \cdot A$ distributiviteit

$= 3(2A - I) - 2A$ opdracht 1 en definitie eenheidsmatrix

$= 6A - 3I - 2A$ distributiviteit

$= 4A - 3I$

Opdracht 44 bladzijde 49

Als $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, bereken:

1 A^2, A^3 en A^4;

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ en $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

2 A^{128}, A^{229}, A^{330} en A^{441} zonder rekentoestel.

$$A^{128} = (A^4)^{32} = I^{32} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{229} = A^{228} \cdot A = (A^4)^{57} \cdot A = I \cdot A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{330} = A^{328} \cdot A^2 = (A^4)^{82} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{441} = A^{440} \cdot A = (A^4)^{110} \cdot A = I \cdot A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opdracht 45 bladzijde 49

Bewijs: als $A(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, dan is $A(\alpha)\cdot A(\beta)=A(\alpha+\beta)$.

$$A(\alpha)\cdot A(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$
$$=A(\alpha+\beta)$$

Opdracht 46 bladzijde 50

Een grootkeuken levert per dag vijf verschillenden dagmenu's. De hoeveelheden (in kg) van een aantal ingrediënten staan in de volgende matrix:

$$A=\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\text{menu}\\ \begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}15\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0 & 0{,}15 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{aardappelen}\\ \leftarrow \text{rijst}\\ \leftarrow \text{vlees}\\ \leftarrow \text{vis}\\ \leftarrow \text{groenten}\end{array}$$

De inkoopprijs, in euro per kg, van de ingrediënten, lees je af in matrix B.

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{aard.} & \text{rijst} & \text{vlees} & \text{vis} & \text{grt.}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}\\ \begin{bmatrix}0{,}15 & 2{,}50 & 12 & 14 & 2\end{bmatrix}\end{array}$$

Om de kostprijs van de maaltijd te berekenen, moet er ook rekening gehouden worden met het werk om de maaltijd te bereiden. Je mag aannemen dat 1,5 keer de inkoopprijs van alle ingrediënten samen de reële kostprijs van een maaltijd oplevert.

De verkoopprijzen, in euro, van de verschillende maaltijden staan in de matrix C.

$$C=\begin{array}{c}\text{menu}\\ \begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}6{,}10 & 7{,}40 & 9{,}2 & 8 & 10{,}2\end{bmatrix}\end{array}$$

De grootkeuken levert aan twee bedrijven. Voor vandaag zijn de verkoopcijfers:

$$D=\begin{array}{c}\text{menu}\\ \begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}213 & 101 & 68 & 156 & 95\\ 176 & 89 & 56 & 102 & 35\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{bedrijf 1}\\ \leftarrow \text{bedrijf 2}\end{array}$$

1 Welk matrixproduct moet je uitrekenen om voor elke maaltijd de ingrediëntenkostprijs te bepalen?

$$B\cdot A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}2{,}23 & 2{,}73 & 3{,}4225 & 2{,}9 & 3{,}575\end{bmatrix}\end{array}$$

2 Noteer de reële kostprijs van elke maaltijd in een matrix.

$$K=1{,}5(B\cdot A)=\begin{bmatrix}3{,}345 & 4{,}095 & 5{,}13375 & 4{,}35 & 5{,}3625\end{bmatrix}$$

3 Noteer de winst per maaltijd in een matrix.

$C - K = \begin{bmatrix} 2{,}755 & 3{,}305 & 4{,}06625 & 3{,}65 & 4{,}8375 \end{bmatrix}$

4 Noteer de winstcijfers van de gaarkeuken in beide bedrijven in een matrix.

$D(C - K)^T = \begin{bmatrix} 2226{,}0875 \\ 1548{,}3475 \end{bmatrix}$

5 Bepaal voor die dag de totale winst van de grootkeuken voor deze twee bedrijven.

$2226{,}0875 + 1548{,}3475 = 3774{,}435$

De totale winst bedraagt € 3774,44.

Opdracht 47 bladzijde 51

Aan een schermtoernooi nemen zeven schermers deel.

De uitslagen zijn:
A wint van B, C, F en G;
B wint van D, E en F;
C wint van B, E, F en G;
D wint van A, C, E en G;
E wint van A, F en G;
F wint van D;
G wint van B en F.

1 Hoeveel duels zijn er geweest?

A-B, A-C, A-D, A-E, A-F, A-G, B-C …: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. Er waren 21 duels.

2 Stel de uitslagen voor in een matrix *V*. Gebruik 1 om een overwinning en 0 om verlies aan te geven.

$$\begin{array}{cc} & \text{wint} \\ & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \text{van} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = V \end{array}$$

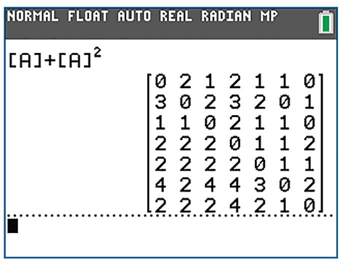
3 Kun je uit deze matrix de winnaar afleiden? Waarom (niet)?

De som van de cijfers in de kolommen van V geeft het aantal gewonnen duels: 4, 3, 4, 4, 3, 1 en 2. Aangezien A, C en D elk 4 duels wonnen, is er geen winnaar uit V af te leiden.

4 Als er met *V* geen winnaar aangeduid kan worden, probeert de jury een winnaar te vinden door de matrix $V + V^2$ te gebruiken.

Welke informatie geeft deze matrix?

$V + V^2$ bevat het aantal keer dat X wint van Y door een rechtstreekse overwinning (in V) of door een tweestapsoverwinning, dit wil zeggen: X wint van Z, die zelf wint van Y (in V^2).



5 Wie is de winnaar van het tornooi?

De som van de cijfers in de kolommen is: 14, 11, 13, 17, 10, 5 en 6.

D is de winnaar van het tornooi.

Opdracht 48 bladzijde 51

Van drie klassen van vijfdejaarsleerlingen zijn de resultaten op tien voor een overhoring gegeven in de matrix R.

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 5a \\ \leftarrow 5b \\ \leftarrow 5c \end{array}$$

1 Bepaal een matrix A zodat $R \cdot A$ aangeeft hoeveel zessen er per klas gescoord zijn.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \\ \leftarrow 6 \\ \leftarrow 7 \\ \leftarrow 8 \end{array} \qquad R \cdot A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{aantal zessen in 5a} \\ \leftarrow \text{aantal zessen in 5b} \\ \leftarrow \text{aantal zessen in 5c} \end{array}$$

2 Bepaal een matrix B zodat $R \cdot B$ aangeeft hoeveel voldoendes er per klas gescoord zijn.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R \cdot B = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \\ 21 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{aantal voldoendes in 5a} \\ \leftarrow \text{aantal voldoendes in 5b} \\ \leftarrow \text{aantal voldoendes in 5c} \end{array}$$

3 Bepaal een matrix C zodat $R \cdot C$ aangeeft hoeveel leerlingen er per klas zijn.

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad R \cdot C = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 22 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{aantal leerlingen in 5a} \\ \leftarrow \text{aantal leerlingen in 5b} \\ \leftarrow \text{aantal leerlingen in 5c} \end{array}$$

4 Bepaal een matrix D zodat $R \cdot D$ aangeeft hoeveel punten er in totaal per klas gescoord zijn.

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad R \cdot D = \begin{bmatrix} 110 \\ 149 \\ 134 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{aantal punten in 5a} \\ \leftarrow \text{aantal punten in 5b} \\ \leftarrow \text{aantal punten in 5c} \end{array}$$

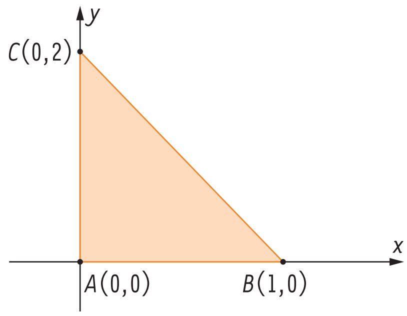
5 Bepaal een matrix E zodat $E \cdot R$ aangeeft hoeveel vieren, hoeveel vijven, hoeveel zessen … de drie klassen samen gescoord hebben.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E \cdot R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 17 & 15 & 18 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{aantal} & \text{aantal} & \text{aantal} & \text{aantal} & \text{aantal} \\ \text{vieren} & \text{vijven} & \text{zessen} & \text{zevens} & \text{achten} \end{array} \end{array}$$

Opdracht 49 bladzijde 51

De figuur toont een vlak met cartesiaans assenstelsel xy met daarin een driehoek ABC.
Verder is een lineaire transformatie T gegeven met voorschrift

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Na toepassing van de transformatie T op alle punten van de driehoek ABC vinden we een nieuwe driehoek DEF. Bepaal de oppervlakte van deze driehoek DEF.

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2016)

A(0,0) $\Rightarrow$ D(0,0)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B(1,0) $\Rightarrow$ E(1,–1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

C(0,2) $\Rightarrow$ F(2,2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nu is $|DE| = \sqrt{2}$, $|DF| = \sqrt{8}$ en $|EF| = \sqrt{10}$, zodat driehoek DEF rechthoekig is in D.

oppervlakte driehoek DEF $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2$.

Antwoord B is juist.

Opdracht 50 bladzijde 52

Als $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ commuterende matrices zijn, bewijs dan dat

1 A en $A + B$ commuteren;

Gegeven: $AB = BA$

Te bewijzen: $A(A + B) = (A + B)A$

Bewijs:

$$\begin{aligned} A(A + B) &= A^2 + AB && \text{distributiviteit} \\ &= A^2 + BA && \text{gegeven} \\ &= (A + B)A && \text{distributiviteit} \end{aligned}$$

2 $A + B$ en $A - B$ commuteren;

Gegeven: $AB = BA$

Te bewijzen: $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$

Bewijs:

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= A^2 - AB + BA - B^2 && \text{distributiviteit} \\ &= A^2 - B^2 && AB = BA \\ (A - B)(A + B) &= A^2 + AB - BA - B^2 && \text{distributiviteit} \\ &= A^2 - B^2 && AB = BA \end{aligned}$$

$\Rightarrow (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$

3 $2A + B$ en $2A - B$ commuteren.

Gegeven: $AB = BA$

Te bewijzen: $(2A + B)(2A - B) = (2A - B)(2A + B)$

Bewijs:

$$\begin{aligned} (2A + B)(2A - B) &= 4A^2 - 2AB + 2BA - B^2 && \text{distributiviteit} \\ &= 4A^2 - B^2 && AB = BA \\ (2A - B)(2A + B) &= 4A^2 + 2AB - 2BA - B^2 && \text{distributiviteit} \\ &= 4A^2 - B^2 && AB = BA \end{aligned}$$

$\Rightarrow (2A + B)(2A - B) = (2A - B)(2A + B)$

Opdracht 51 bladzijde 52

De vierkante matrix A is een *idempotente matrix* als en slechts als $A^2 = A$.

1 Toon aan: als $A \cdot B = A$ en $B \cdot A = B$, dan zijn A en B idempotent.

Gegeven: $A \cdot B = A$ en $B \cdot A = B$

Te bewijzen: $A^2 = A$ en $B^2 = B$

Bewijs:

$A^2 = A \cdot A$	
$= (A \cdot B) \cdot A$	$A \cdot B = A$
$= A \cdot (B \cdot A)$	associativiteit
$= A \cdot B$	$B \cdot A = B$
$= A$	$A \cdot B = A$
$B^2 = B \cdot B$	
$= (B \cdot A) \cdot B$	$B \cdot A = B$
$= B \cdot (A \cdot B)$	associativiteit
$= B \cdot A$	$A \cdot B = A$
$= B$	$B \cdot A = B$

2 Toon aan: als A en B idempotente matrices zijn en $A \cdot B = B \cdot A$, dan is $A \cdot B$ ook idempotent.

Gegeven: $A^2 = A$, $B^2 = B$ en $A \cdot B = B \cdot A$

Te bewijzen: $(A \cdot B)^2 = A \cdot B$

Bewijs:

$(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)$	
$= A \cdot (B \cdot A) \cdot B$	associativiteit
$= A \cdot (A \cdot B) \cdot B$	$A \cdot B = B \cdot A$
$= (A \cdot A) \cdot (B \cdot B)$	associativiteit
$= A^2 \cdot B^2$	
$= A \cdot B$	$A^2 = A, B^2 = B$

Opdracht 52 bladzijde 52

Als A een diagonaalmatrix is met diagonaalelementen 3, –4, 0 en 2, genoteerd als diag(3, –4, 0, 2), bereken dan:

1 $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \text{diag}(9,16,0,4)$

2 $A^3 = \text{diag}(27,-64,0,8)$

3 $A^n \; (n \in \mathbb{N}_0) = \text{diag}(3^n,(-4)^n,0,2^n)$

Opdracht 53 bladzijde 52

Stel $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

Bepaal een formule voor A^{2n} en bewijs ze door middel van inductie.

Omdat $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vermoeden we dat

$A^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bewijs

1 De formule is waar voor $n = 1$: $A^{2 \cdot 1} = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2 Als de formule waar is voor n, dan is ze ook waar voor n + 1:

$$\begin{aligned} A^{2(n+1)} &= A^{2n} \cdot A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 + 2n \\ 0 & 1 & 2 + 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De formule is waar voor $n = 1$, dus ook voor $n = 2$, $n = 3$ ..., dus voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 54 bladzijde 53

De rij 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... wordt de rij van Fibonacci genoemd. Elk getal vanaf het derde is de som van de twee vorige. Stellen we die zogenaamde Fibonacci-getallen voor door F_0, F_1, F_2 ..., dan geldt: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ en $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor elke $n \geqslant 2$.

Bewijs door inductie dat voor elke $n \geqslant 2$ geldt: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

1 De formule is waar voor n = 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} F_{1+1} & F_1 \\ F_1 & F_{1-1} \end{bmatrix} \text{want: } F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ en } F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

2 Als de formule waar is voor n, dan is ze ook waar voor n + 1:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{(n+1)+1} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{(n+1)-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De formule is waar voor n = 1, dus ook voor n = 2, n = 3 ..., dus voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 55 bladzijde 53

Bewijs door inductie:

als $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan is $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ -\dfrac{n(n+1)}{2} & -n & 0 & 1 \end{bmatrix}$, voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

1 De formule is waar voor n = 1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1 \cdot (1-1)}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1 \cdot (1+1)}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2 Als de formule waar is voor n, dan is ze ook waar voor n + 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ \dfrac{-n(n+1)}{2} & -n & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} + n & n+1 & 1 & 0 \\ \dfrac{-n(n+1)}{2} - n - 1 & -n-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{(n+1)n}{2} & n+1 & 1 & 0 \\ \dfrac{-(n+1)(n+2)}{2} & -(n+1) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De formule is waar voor n = 1, dus ook voor n = 2, n = 3 ..., dus voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Opdracht 56 bladzijde 53

Stel $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Als $C \cdot A = I_n$ en $A \cdot D = I_m$, dan geldt: $C = D$. Bewijs.

$C \cdot A \cdot D = (C \cdot A) \cdot D$	associativiteit
$= I_n \cdot D$	gegeven
$= D$	eenheidsmatrix
$C \cdot A \cdot D = C \cdot (A \cdot D)$	associativiteit
$= C \cdot I_m$	gegeven
$= C$	eenheidsmatrix

$\Rightarrow \; C = D$

Opdracht 57 bladzijde 53

Een foute positie- en lenskeuze door een fotograaf resulteerde in een sterk vervormde foto. Gegeven is dat de vervorming lineair was, zodat het punt met coördinaten (x, y) na vervorming terechtkwam op de locatie met coördinaten (x', y') waarbij

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

met A een reële 2×2-matrix. Bovendien weten we dat punten met coördinaten van de vorm $(\alpha, 2\alpha)$ na vervorming terechtkwamen op $(3\alpha, 6\alpha)$. Punten met coördinaten van de vorm $(2\alpha, \alpha)$ kwamen terecht op $(18\alpha, 9\alpha)$.

Wat is de som van de elementen van de matrix A?

A 3 **B** 4 **C** 9 **D** 12 **E** 36

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2013)

Stel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan geldt:

$\begin{bmatrix} 3\alpha \\ 6\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 18\alpha \\ 9\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, zodat

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ c + 2d = 6 \\ 2a + b = 18 \\ 2c + d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = -4 \\ c = 4 \\ d = 1 \end{cases}$$

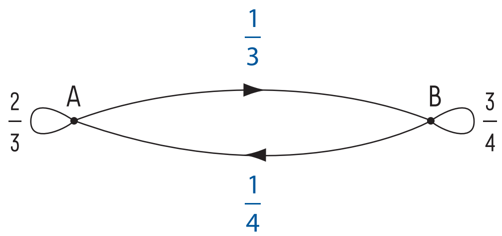
$a + b + c + d = 12$

Antwoord D is juist.

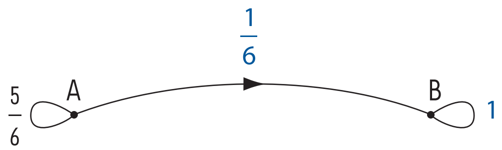
Opdracht 58 bladzijde 54

Vul de graaf aan en noteer de bijbehorende overgangsmatrix.

1
$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = M \end{array}$$

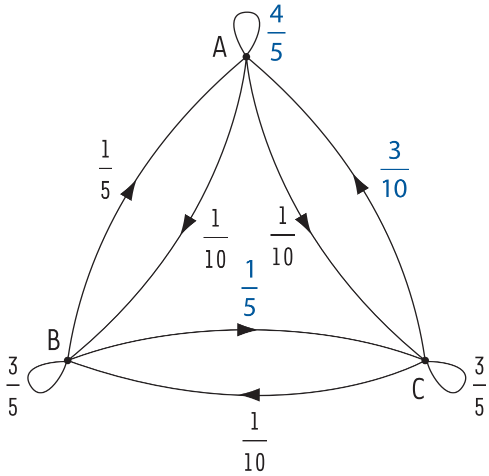


2
$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} = M \end{array}$$



3

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{van} & \\ A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = M \end{array}$$

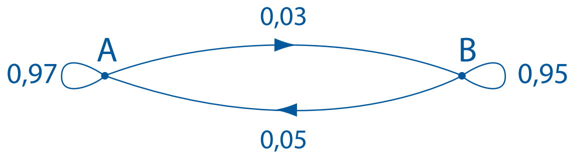


Opdracht 59 bladzijde 54

Teken een graaf bij de volgende overgangsmatrices.

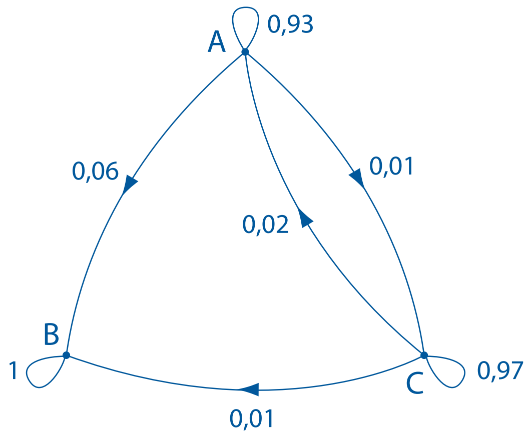
1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{van}} \\ A & B \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}95 \end{bmatrix} \end{array}$$



2

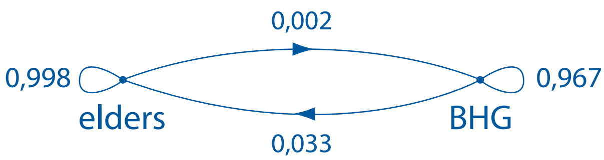
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \text{van} & \\ A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}06 & 1 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0 & 0{,}97 \end{bmatrix} \end{array}$$



Opdracht 60 bladzijde 54

Op 1 januari 2016 telde België 11 267 910 inwoners, waarvan 1 187 890 in het Brussels Hoofdstedelijk Gewest (afkorting: BHG). Ongeveer 0,2 % van de Belgen kwam dat jaar in het Brussels Hoofdstedelijk Gewest wonen, terwijl ongeveer 3,3 % het BHG verliet om ergens anders in België te gaan wonen.

1 Stel met deze gegevens een graaf en een migratiematrix op.

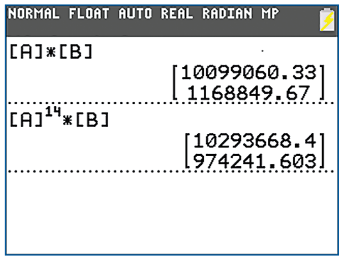


$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{van}} \\ \text{elders} & \text{BHG} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{elders} \\ \text{BHG} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}998 & 0{,}033 \\ 0{,}002 & 0{,}967 \end{bmatrix} \end{array}$$

2 Stel dat de gegeven emigratie/immigratie jaarlijks aanhoudt, hoeveel Belgen zouden er dan in 2017 in het Brussels Hoofdstedelijk Gewest wonen en hoeveel erbuiten?

Beginpopulatie: $\begin{bmatrix} 11\,267\,910 - 1\,187\,890 \\ 1\,187\,890 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,080\,020 \\ 1\,187\,890 \end{bmatrix}$

In 2017 zijn er ongeveer 10 099 060 Belgen die in België zonder BHG (elders) wonen en ongeveer 1 168 850 in BHG.



3 En hoeveel in 2030?

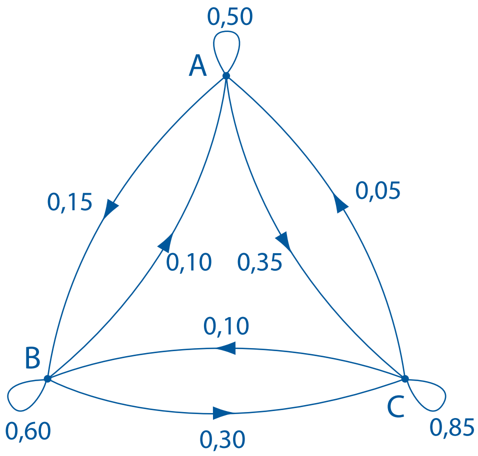
In 2030 zullen er ongeveer 10 293 668 Belgen zijn die elders wonen en ongeveer 974 242 in BHG. Het aantal inwoners in BHG zou dus afnemen.

Opdracht 61 bladzijde 55

Drie merken van detergenten verdelen de markt in een bepaald gebied.

40 % van de verbruikers koopt merk A, 50 % koopt merk B en 10 % koopt merk C. Elke maand zijn er wijzigingen in de keuze van de verbruikers. Van deze die merk A kochten de vorige maand, koopt 50 % hetzelfde merk, 15 % neemt merk B en 35 % merk C. Van deze die B kochten, koopt 60 % het opnieuw, 10 % koopt A en 30 % C. Van zij die C kochten, koopt 85 % het opnieuw, 5 % koopt A en 10 % B.

1 Teken een graaf en stel de bijbehorende overgangsmatrix op.



$$\text{naar}\quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}85 \end{bmatrix} \end{array} = M$$

2 Hoe zal de markt verdeeld zijn na één maand?

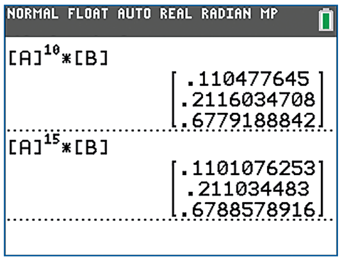
Na 1 maand

$$M \cdot \begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}50 \\ 0{,}10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}255 \\ 0{,}370 \\ 0{,}375 \end{bmatrix}$$

Dus 25,5 % voor merk A, 37,0 % voor merk B en 37,5 % voor merk C.

3 Hoe zal de verdeling van de markt zijn op lange termijn?

Op lange termijn zal 11,0 % kiezen voor merk A, 21,1 % voor merk B en 67,9 % voor merk C.



Opdracht 62 bladzijde 55

In het tropische Amazonegebied werd een nieuwe kleine vogelsoort ontdekt. Na jaren observatie kwamen de ornithologen tot de volgende vaststellingen:

– slechts 40 % van de eieren komt uit en bereikt de leeftijd van 1 jaar;

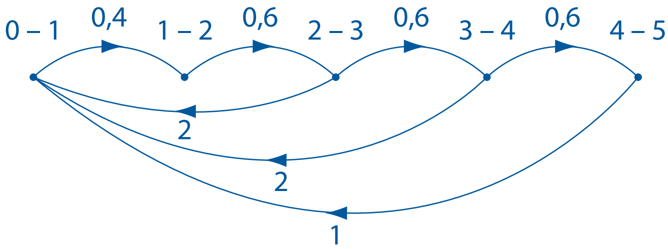
– van het tweede tot het vierde jaar is de kans om het volgende levensjaar te halen steeds 60 %;

– geen enkele vogel wordt vijf jaar;

– in het derde en het vierde levensjaar legt elke vogel gemiddeld twee eieren;

– in het vijfde levensjaar legt elke vogel gemiddeld één ei.

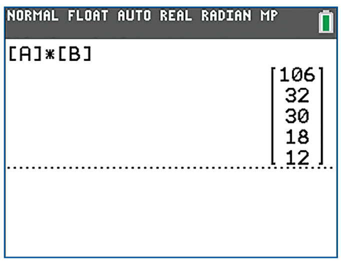
1 Teken de bijbehorende graaf en stel de lesliematrix op.



$$\begin{array}{c} \\ 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \\ 3-4 \\ 4-5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0-1 & 1-2 & 2-3 & 3-4 & 4-5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = L$$

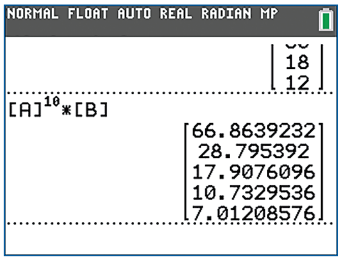
2 Als de begintoestand gegeven wordt door de matrix $X_0 = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 30 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$, hoeveel vogels zullen er dan een jaar later in elke leeftijdscategorie zijn?

$$L \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 30 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \\ 32 \\ 30 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \\ 3-4 \\ 4-5 \end{array}$$



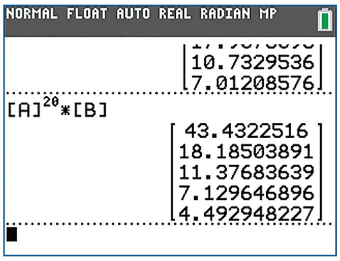
3 En hoeveel 10 jaar later?

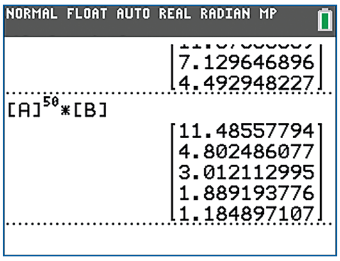
$$L^{10} \cdot X_0 \approx \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 67 \\ 29 \\ 18 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \\ 3-4 \\ 4-5 \end{array}$$



4 Indien deze evolutie zich zo verder zet, wat zal er met deze vogelsoort gebeuren op lange termijn?

Deze vogelsoort zal uitsterven.

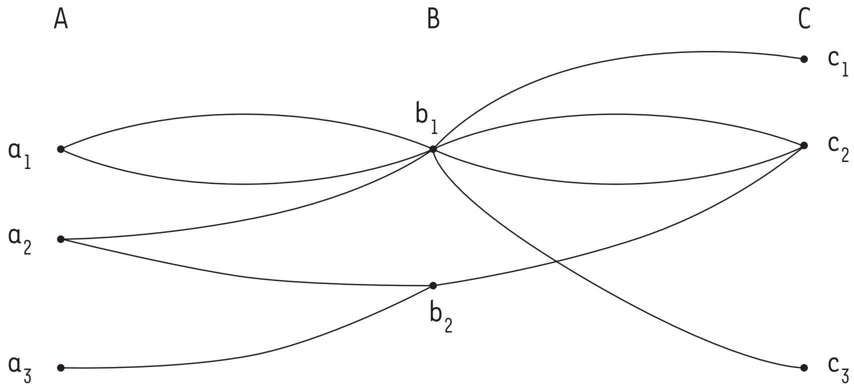




Opdracht 63 bladzijde 56

Directe wegenmatrix

Beschouw drie steden in land A: a_1, a_2 en a_3; twee steden in land B: b_1 en b_2 en vervolgens drie steden in land C: c_1, c_2 en c_3.
Het volgende schema toont de verbindingswegen die er bestaan tussen de steden. Soms is er meer dan één weg.



1 Noteer het aantal verbindingswegen in matrixvorm.

van

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = M$$

van

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = N$$

2 Bereken het product $N \cdot M$. Wat stelt deze matrix voor?

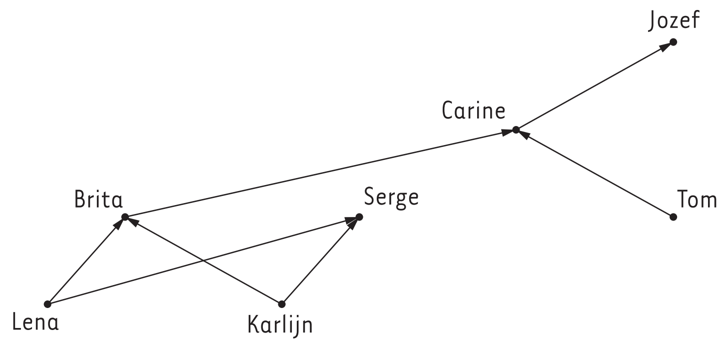
$$N \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix geeft het aantal verbindingswegen tussen de steden in land A en de steden in land C:

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Opdracht 64 bladzijde 57

Met het verband '… is kind van …' maken we de volgende graaf.

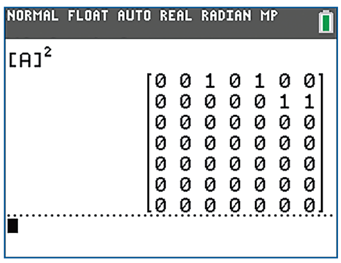


Hiermee correspondeert de matrix A. We plaatsen een 1 bij '… is een kind van …' en een 0 bij '… is geen kind van …'.

$$\begin{array}{cc} & \text{is kind} \\ & \begin{array}{ccccccc} J & C & B & S & T & L & K \end{array} \\ \text{van} \begin{array}{c} J \\ C \\ B \\ S \\ T \\ L \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \end{array}$$

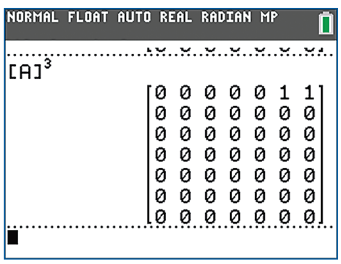
1 Bereken A^2. Wat drukt deze matrix uit?

Deze matrix drukt 'is kleinkind van' uit: Brita en Tom zijn kleinkinderen van Jozef; Lena en Karlijn zijn kleinkinderen van Carine.



2 Idem voor A^3.

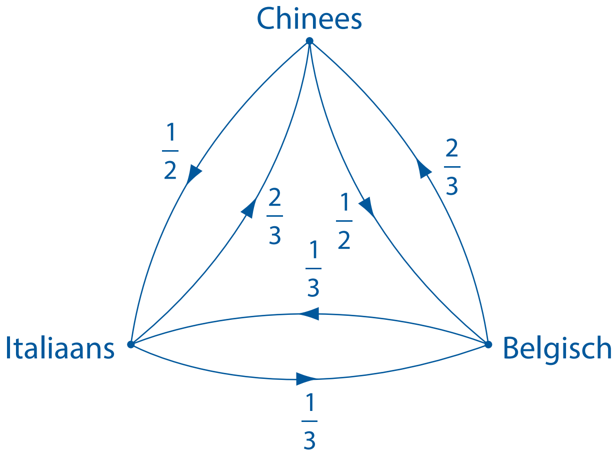
Deze matrix drukt 'is achterkleinkind van' uit: Lena en Karlijn zijn achterkleinkinderen van Jozef.



Opdracht 65 bladzijde 57

Jef, de eeuwige vrijgezel, gaat ’s middags steeds uit eten. Hij heeft de keuze tussen drie restaurants: een Chinees, een Italiaans en een Belgisch.
Nooit gaat hij twee dagen na elkaar op dezelfde plaats eten. Eet hij op een dag Chinees, dan is de kans dat hij de volgende dag Italiaans of Belgisch gaat eten even groot. Eet hij op een dag niet Chinees, dan is de kans dat hij dit ’s anderendaags wel doet tweemaal zo groot als de kans dat hij dit niet doet.

1 Teken een graaf en stel de bijbehorende overgangsmatrix op.



$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Ch} & \text{It} & \text{Be} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{Ch} \\ \text{It} \\ \text{Be} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = M \end{array}$$

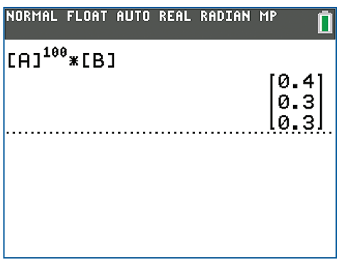
2 Als Jef vandaag Chinees eet, hoe groot is dan de kans dat hij dit overmorgen opnieuw doet?

$$M^2 \cdot X_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

De kans is $\frac{2}{3}$.

3 Hoe zal de verdeling over de drie eethuizen eruitzien na verloop van tijd?

Na verloop van tijd zal 40 % van de dagen voor een Chinees restaurant gekozen worden, 30 % voor een Italiaans restaurant en 30 % voor een Belgisch.



Opdracht 66 bladzijde 58

We willen een voorspelling doen over het aantal Belgische vrouwen, gebruikmakend van de volgende statistische gegevens.

leeftijd	aantal vrouwen op 1 januari 2013	vruchtbaarheids-cijfers	overlevings-kans
0 – 19	1 230 458	0,43	0,995
20 – 39	1 417 422	0,34	0,993
40 – 59	1 552 853	0,01	0,955
60 – 79	1 069 557	0	0,775
80 – 99	380 161	0	0,056
100 – 120	1615	0	0

1 Stel met deze gegevens een lesliematrix op.

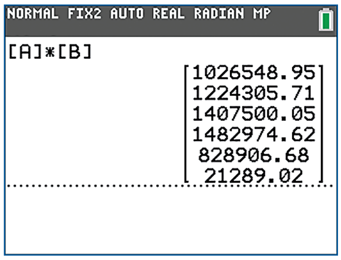
$$L = \begin{bmatrix} 0{,}43 & 0{,}34 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}955 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}056 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Hoe verklaar je het groot vruchtbaarheidscijfer voor de leeftijdsklasse 0 – 19?

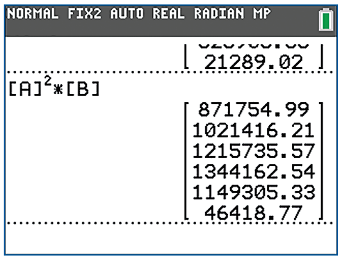
De klasse 0 – 19 bevat vrouwen tussen 0 en 19 jaar. Twintig jaar later (bij de volgende telling) zijn die vrouwen tussen 20 en 39 jaar. Het is dus evident dat er binnen die klasse tussen 2013 en 2033 (veel) kinderen geboren worden.

3 Maak een schatting van het aantal vrouwen in 2033 en in 2053.

In 2033: ongeveer 1 026 549 tussen 0 en 19 jaar,
1 224 306 tussen 20 en 39 jaar
1 407 500 tussen 40 en 59 jaar
1 482 975 tussen 60 en 79 jaar
828 907 tussen 80 en 99 jaar
21 289 ouder dan 100 jaar



In 2053: ongeveer 871 755 tussen 0 en 19 jaar,
1 021 416 tussen 20 en 39 jaar
1 215 736 tussen 40 en 59 jaar
1 344 163 tussen 60 en 79 jaar
1 149 305 tussen 80 en 99 jaar
46 419 ouder dan 100 jaar



4 Ga na of er sprake is van 'vergrijzing' van de vrouwelijke bevolking.

Uit de vorige schermafdrukken is reeds duidelijk dat er een 'vergrijzing' is van de vrouwelijke bevolking: het aantal vrouwen boven de 60 neemt sterk toe.

Opdracht 67 bladzijde 58

Betreffende een soort kever weten we het volgende: de kevers sterven enkel in de winter; van de nuljarigen overleeft een kwart de eerste winter; de helft hiervan overleeft ook de tweede winter; geen enkele kever overleeft de derde winter. Een kever die de eerste winter overleeft, noemen we een eenjarige kever.

Elke eenjarige kever brengt vlak na de eerste winter 2 nakomelingen ter wereld. Elke tweejarige kever brengt vlak na de winter 4 nakomelingen ter wereld.

We starten vlak voor de winter van 2011 met een populatie van 1200 nuljarigen, 600 eenjarigen en 300 tweejarigen.

Wat is dan de populatie vlak voor de winter van 2013?

A 2100 **B** 2550 **C** 2750 **D** 3000 **E** 5250

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2013)

Schematische oplossing:

	nuljarigen	eenjarigen	tweejarigen	
voor winter 2011	1200	600	300	
na winter 2011		300	300	$\frac{1}{4} \cdot 1200 = 300$ en $\frac{1}{2} \cdot 600 = 300$
voor winter 2012	$\underbrace{600 + 1200}_{1800}$	300	300	nakomelingen: $300 \cdot 2 = 600$ en $300 \cdot 4 = 1200$
na winter 2012		450	150	$\frac{1}{4} \cdot 1800 = 450$ en $\frac{1}{2} \cdot 300 = 150$
voor winter 2013	$\underbrace{900 + 600}_{1500}$	450	150	nakomelingen: $450 \cdot 2 = 900$ en $150 \cdot 4 = 600$

Er zijn dus in totaal 2100 kevers: antwoord A is juist.

Oplossing met een lesliematrix:

Enkel de kevers die de winter overleven, kunnen vlak na de winter voor nakomelingen zorgen. Dus moet je eerst de overleving in rekening brengen en pas daarna de nakomelingen. Een vierde van de nuljarigen overleeft de winter en krijgt dan twee nakomelingen, dus gemiddeld krijgen de nuljarigen 0,5 nakomelingen. De helft van de eenjarige kevers overleeft de tweede winter en krijgt gemiddeld 4 nakomelingen, dus gemiddeld krijgen de eenjarige kevers twee nakomelingen.

Populatie voor de winter van 2012:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1200 \\ 600 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1800 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Populatie voor de winter van 2013:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1800 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 450 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Er zijn dus in totaal 2100 kevers: antwoord A is juist.

Opdracht 68 bladzijde 59

Gegeven: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

1 Bereken $A^2 - I_2$.

$$A^2 - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 8 \\ 20 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

2 Bereken X en Y als

a $3X + B^2 = X - A$

$$\Leftrightarrow 2X = -A - B^2$$

$$\Leftrightarrow 2X = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 39 & -65 \\ 26 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & 63 \\ -31 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -21 & \frac{63}{2} \\ -\frac{31}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

b $\begin{cases} X - Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = A + Y \\ 2A + 2Y + 3Y = B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = A + Y \\ Y = \frac{1}{5} \cdot (B - 2A) = \frac{1}{5} \cdot \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{17}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Opdracht 69 bladzijde 59

Welke van de volgende gelijkheden geldt niet voor alle 2×2-matrices A, B en C?

A $A + B = B + A$

B $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$

C $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

D $I_2 \cdot A = A$, met $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(Bron © ijkingstoets bio-ingenieur/burgerlijk ingenieur, 2017)

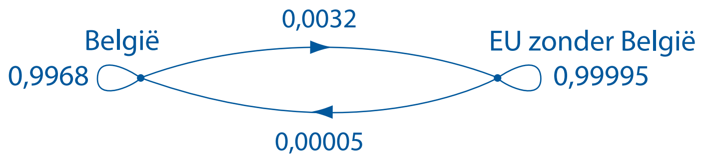
B geldt niet voor alle 2×2-matrices A en B: $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ en de vermenigvuldiging van matrices is niet commutatief.

Opdracht 70 bladzijde 59

In 2015 emigreerde ongeveer 0,32 % van de Belgen naar een van de overige 27 landen van de Europese Unie, terwijl er toen van die landen ongeveer 0,005 % immigreerde naar België.

In 2015 waren er ongeveer 11,24 miljoen Belgen en de 28 landen van de Europese Unie telden ongeveer 508,5 miljoen inwoners.

1 Stel met deze gegevens een graaf en een overgangsmatrix op.



$$\begin{array}{ccc} & & \text{van} \\ & \text{België} & \text{EU zonder België} \\ \text{naar: België} & & \\ \text{EU zonder België} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{naar} \\ \text{België} \\ \text{EU zonder België} \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}9968 & 0{,}00005 \\ 0{,}0032 & 0{,}99995 \end{bmatrix} = M$$

2 Als we geen rekening houden met andere in- en uitstromen, hoeveel mensen zouden er dan dit jaar in België wonen? Vergelijk dit met het werkelijke aantal en probeer een verklaring te vinden voor een eventueel verschil.

Bereken $M^{\text{huidig jaartal} - 2015} \cdot \begin{bmatrix} 11{,}24 \\ 508{,}5 - 11{,}24 \end{bmatrix}$ (aantal in miljoenen).

Opdracht 71 bladzijde 60

Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, bepaal dan x en y zodat $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & y-2 \\ -x-1 & -y+1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 2x-y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$AB = BA$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = x-y \\ y-2 = 2x-y \\ -x-1 = 2 \\ -y+1 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Opdracht 72 bladzijde 60

Bepaal a zodanig dat de matrix $X = \begin{bmatrix} 0 & p \\ \frac{4}{p} & 3 \end{bmatrix}$ met $p \neq 0$ steeds een oplossing is van de vergelijking

$X^2 - 3X + aI = O$.

$X^2 - 3X + aI = O$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & p \\ \frac{4}{p} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & p \\ \frac{4}{p} & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & p \\ \frac{4}{p} & 3 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3p \\ \frac{12}{p} & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -3p \\ -\frac{12}{p} & a-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+4 & 0 \\ 0 & a+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \; a = -4$

Opdracht 73 bladzijde 60

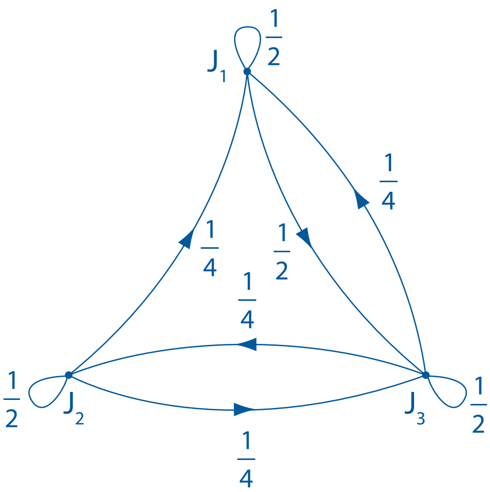
Een leeuw gaat elke dag op jacht en heeft drie jachtterreinen J_1, J_2 en J_3.

– De kans dat hij de volgende dag gaat jagen op hetzelfde terrein is $\frac{1}{2}$.

– Gaat hij op een dag jagen op J_1, dan gaat hij de dag erop zeker niet jagen op J_2.

– Gaat hij op jacht op terrein J_2 of J_3, dan is de kans dat hij ’s anderendaags gaat jagen op een van de andere twee terreinen even groot.

1 Teken een graaf en stel de bijbehorende overgangsmatrix op.



$$\begin{array}{c|ccc} & & \text{van} & \\ & J_1 & J_2 & J_3 \\ \hline \text{naar } J_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ J_2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ J_3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = M$$

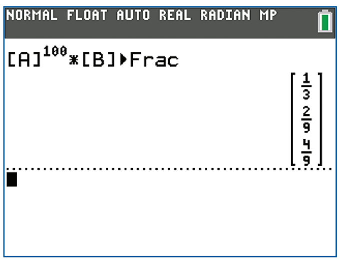
2 Stel dat onze leeuw op maandag J_1 als jachtterrein heeft gekozen, hoe groot is dan de kans dat hij de volgende donderdag ook daar op jacht is?

$$M^3 \cdot X_0 = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} & \frac{21}{64} & \frac{21}{64} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{15}{64} \\ \frac{15}{32} & \frac{27}{64} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{15}{32} \end{bmatrix}$$

De kans is $\frac{11}{32}$.

3 Wat is na verloop van tijd het terrein waar hij het meest is gaan jagen? En waar het minst?

Hij is het meest gaan jagen op J_3 (44 %) en het minst op J_2 (22 %).



Opdracht 74 bladzijde 60

De volgende redenering voor vierkante matrices van dezelfde orde is niet algemeen geldig.

In welke overgang zit de fout?

$$
\begin{array}{cl}
AC = BC & \\
\Downarrow & (1) \\
AC - BC = O & \\
\Downarrow & (2) \\
(A - B)C = O & \\
\Downarrow & (3) \\
A - B = O \text{ of } C = O & \\
\Downarrow & (4) \\
A = B \text{ of } C = O &
\end{array}
$$

De fout zit in overgang 3: (A – B) · C kan ook O zijn zonder dat A – B of C gelijk is aan O.
A – B en C zijn dan nuldelers, zie opdracht 39.

Opdracht 75 bladzijde 61

Drie mensen met een besmettelijke ziekte, groep 1, kunnen contact hebben met vier niet-besmette personen, groep 2. In de matrix A kun je aflezen welke personen contact hebben gehad: $a_{ij} = 1$ betekent dat de i-de persoon uit groep 1 contact heeft gehad met de j-de persoon uit groep 2.

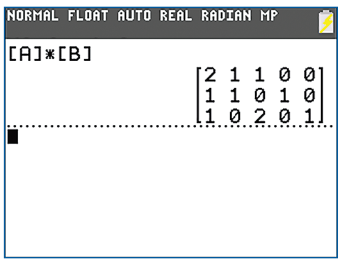
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De vier personen uit groep 2 kunnen contact hebben met vijf niet-besmette personen, groep 3. Hun contacten lees je af in de matrix B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bereken de matrix $C = A \cdot B$ en leg uit wat de getallen in deze matrix betekenen.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Deze matrix drukt uit op hoeveel manieren de drie personen uit groep 1 contact hebben gehad met de vijf personen uit groep 3 en dit via een tussencontact met de personen uit groep 2.

Bijvoorbeeld: $c_{11} = 2 = a_{11} \cdot b_{11} + a_{13} \cdot b_{31}$. De eerste persoon van groep 1 heeft contact gehad met de eerste persoon van groep 2 die op zijn/haar beurt contact heeft gehad met de eerste persoon van groep 3. De eerste persoon van groep 1 heeft ook contact gehad met de derde persoon van groep 2 die eveneens contact heeft gehad met de eerste persoon van groep 3.

Opdracht 76 bladzijde 61

Een bepaald type muurverf wordt in vijf tinten geproduceerd. Die tinten ontstaan door het mengen van drie kleurstoffen in verschillende verhoudingen.
De tabel geeft weer in welke verhouding de kleurstoffen worden gemengd voor elk van de vijf tinten.

Per maand wordt er 1200 liter van tint a geproduceerd, 1600 liter van tint b, 950 liter van tint c, 1750 liter van tint d en 1300 liter van tint e.

		kleurstof		
		A	**B**	**C**
tint	**a**	0,40	0,40	0,20
	b	0	0,50	0,50
	c	0,15	0,55	0,30
	d	0,60	0,20	0,20
	e	0,80	0	0,20

1 Stel een mengmatrix *M* en een productiematrix *P* op zodanig dat *M* · *P* betekenis heeft.

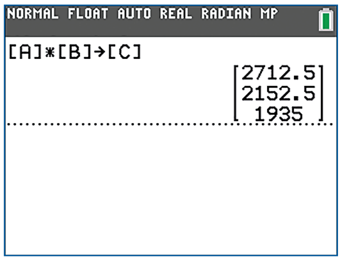
$$M = \begin{array}{cc} \text{tint} & \\ \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0 & 0{,}15 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0{,}55 & 0{,}20 & 0 \\ 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \text{kleurstof} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cc} \text{liter} & \\ \begin{bmatrix} 1200 \\ 1600 \\ 950 \\ 1750 \\ 1300 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \text{tint} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim M = 3 \times 5 \\ \dim P = 5 \times 1 \end{array}\right\} \dim(M \cdot P) = 3 \times 1$$

2 Bereken *M* · *P* en omschrijf de betekenis van deze matrix.

De matrix $M \cdot P = \begin{bmatrix} 2712{,}5 \\ 2152{,}5 \\ 1935 \end{bmatrix}$ drukt uit dat er per maand 2712,5 liter van kleurstof A, 2152,5 liter van kleurstof B en 1935 liter van kleurstof C nodig is.



3 De kosten voor de kleurstoffen zijn € 52 per liter voor A, € 24 per liter voor B en € 46 per liter voor C.

Stel een kostenmatrix *K* voor de kleurstoffen op zodanig dat *K* · *M* · *P* betekenis heeft.

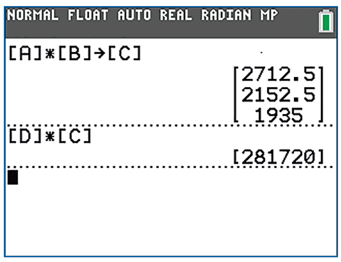
$$K = \begin{bmatrix} 52 & 24 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim K = 1 \times 3 \\ \dim(M \cdot P) = 3 \times 1 \end{array}\right\} \dim(K \cdot M \cdot P) = 1 \times 1$$

4 Bereken *K* · *M* · *P* en omschrijf de betekenis van die matrix.

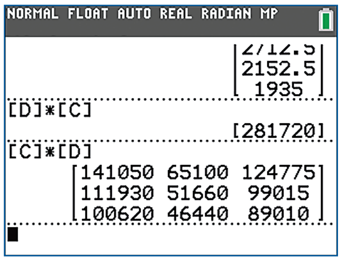
$$K \cdot M \cdot P = \begin{bmatrix} 281720 \end{bmatrix}$$

Deze matrix geeft de totale kostprijs per maand voor de productie van de tinten: € 281 720.



5 Zijn er getallen in de matrix $M \cdot P \cdot K$ die betekenis hebben? Verklaar.

$$M \cdot P \cdot K = \begin{bmatrix} 141050 & 65100 & 124775 \\ 111930 & 51660 & 99015 \\ 100620 & 46440 & 89010 \end{bmatrix}$$



Enkel de getallen op de hoofddiagonaal zijn zinvol: ze drukken de maandelijkse kostprijs uit van de nodige hoeveelheid van kleurstof A, respectievelijk B en C: 141 050 + 51 660 + 89 010 = 281 720.

Opdracht 77 bladzijde 61

De vier reële getallen a, b, c en d zijn zo gekozen dat er geldt

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & -c \end{bmatrix}$$

Hoeveel verschillende waarden kan de grootheid $a + b$ aannemen?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** meer dan 2

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur, 2016)

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & -c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + ab & 1 + a \\ a + b^2 & 1 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & -c \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+b) = c & (1) \\ 1 + a = d & (2) \\ a + b^2 = -d & (3) \\ 1 + b = -c & (4) \end{cases}$$

(1) en (4): $-ac = c \Leftrightarrow c(1 + a) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ of $a = -1$

- $c = 0$ invullen in (4) geeft $b = -1$, zodat:

  $$\begin{cases} b = -1 \\ c = 0 \\ 1 + a = d \\ a + 1 = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

  Hieruit volgt dat $a + b = -2$.

- $a = -1$ invullen in (2) geeft $d = 0$, zodat:

  $$\begin{cases} a = -1 \\ d = 0 \\ -1 - b = c \\ -1 + b^2 = 0 \\ 1 + b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b^2 = 1 \\ c = -1 - b \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

  Hieruit volgt dat $a + b = 0$ of $a + b = -2$.

Antwoord C is juist.