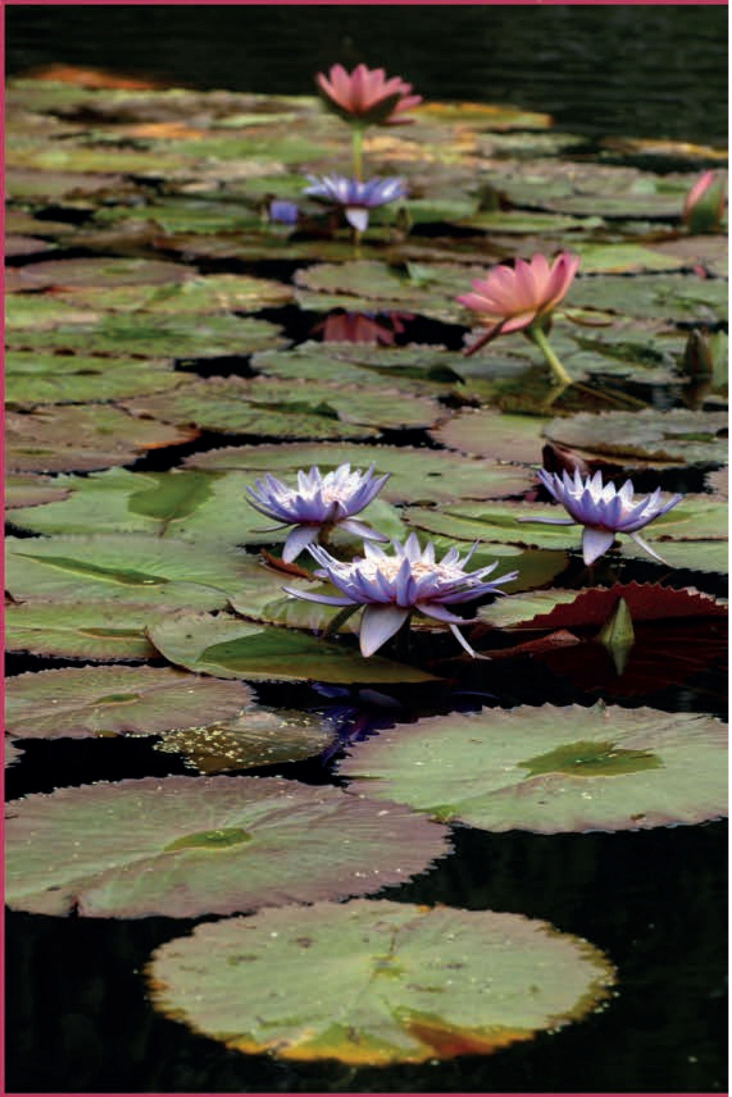
Hoofdstuk 4

Exponentiële en logaritmische functies



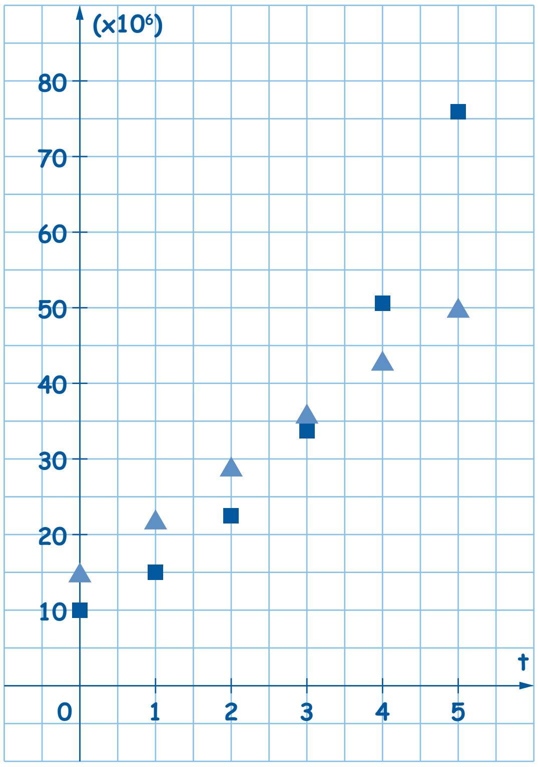
Opdracht 1 bladzijde 156

Eind 18e eeuw al waarschuwde Thomas Malthus ([1]) voor de onvermijdelijke catastrofen die de mensheid te wachten staan wanneer de bevolking met een vast percentage toeneemt, terwijl de voorzieningen van voedsel, energie, leefruimte … met een vaste *hoeveelheid* toenemen in een zelfde periode. Stel dat de bevolking B in een bepaald gebied op een zeker ogenblik gelijk is aan 10 miljoen personen. We laten dit tijdstip overeenkomen met $t = 0$. Veronderstel verder dat in dat gebied, met de landbouw- en ontginningsmogelijkheden van dat ogenblik, eigenlijk voor 15 miljoen mensen voedsel, energie en bouwmaterialen zijn. We noemen dit de capaciteit C. Door deze overcapaciteit kan de populatie zeer snel groeien, stel met 50 % per decennium. Tegelijkertijd neemt ook de capaciteit toe, met zo'n 7 miljoen per decennium. We drukken t daarom ook uit in decennia.

1 Stel een tabel op waarin B en C worden berekend voor de eerste vijf decennia.

t	B ($\times 10^6$)	C ($\times 10^6$)
0	10	15
1	15	22
2	22,5	29
3	33,75	36
4	50,625	43
5	75,9375	50

2 Geef deze evolutie weer in een puntgrafiek met goedgekozen assen.
Beschrijf de belangrijkste verschillen tussen beide puntgrafieken.



De punten bij C (▲) liggen op een rechte.
De punten bij B (■) liggen op een kromme, die eerst langzamer toeneemt dan die van C, maar dan sneller.

3 Stel een formule op die B en C berekent op het einde van een willekeurig gekozen decennium na de starttijd $t = 0$.

$B = 10 \cdot 1{,}5^t$
$C = 15 + 7 \cdot t$ $\qquad t = 0, 1, 2, 3, \dots$

4 Vanaf wanneer wordt de populatie groter dan de capaciteit en doet zich een zgn. 'malthusiaanse catastrofe' voor?

Voor t tussen 3 en 4 wordt de populatie B groter dan de capaciteit C, m.a.w. in de loop van het vierde decennium.

Opdracht 2 bladzijde 156

Het opblaasbaar zwembadje van Liam heeft een klein scheurtje, waardoor het water verliest. Na elke dag is het volume water met 2 % verminderd. Op een bepaald ogenblik, dat we laten overeenkomen met $t = 0$, is er 550 liter water in het zwembad.

Stel een formule op om het volume V, in liter, te berekenen in functie van de tijd t, in dagen.

$V = 550 \cdot 0{,}98^t \qquad t = 0, 1, 2, \dots$

Opdracht 3 bladzijde 160

Onderzoek welke van de onderstaande grootheden y lineair groeien, exponentieel of geen van beide. Geef bij lineaire of exponentiële groei telkens de algemene formule voor y in functie van t.

1

t	y
0	3
1	5,1
2	8,67
3	14,739
...	...

$$\frac{5{,}1}{3} = \frac{8{,}67}{5{,}1} = \frac{14{,}739}{8{,}67} = 1{,}7$$

$\Rightarrow$ exponentiële groei; $y = 3 \cdot 1{,}7^t$

2

t	y
0	$\frac{9}{2}$
1	3
2	$\frac{3}{2}$
3	0
...	...

$$3 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} - 3 = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ lineaire groei; $y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}t$

3

t	y
0	0
1	1
2	4
3	9
...	...

noch exponentieel, noch lineair

4

t	y
0	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
1	2
2	$2\sqrt{5}$
3	10
...	...

vaste verhouding tussen opeenvolgende waarden

$\Rightarrow$ exponentiële groei; $y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{5}^t$

Opdracht 4 bladzijde 160

Een populatie van 100 000 groeit aan met 4 % per jaar.

Hoe groot is ze na één decennium?

$N = 100\,000 \cdot 1{,}04^t$ met t in jaren

Na 10 jaar: $N = 100\,000 \cdot 1{,}04^{10} = 148\,024$.

Opdracht 5 bladzijde 160

Een nieuwe pc kost € 990. Elk jaar verliest hij 25 % van zijn waarde.

Voor de waarde W geldt: $W = 990 \cdot 0{,}75^t$ (W in € en t in jaren).

1 Bereken de waarde na 1 en 2 jaar.

Na 1 jaar: $W = 990 \cdot 0{,}75 = 742{,}5$

Na 2 jaar: $W = 990 \cdot 0{,}75^2 = 556{,}875$

2 Klopt het dat hij na 4 jaar 100 % van zijn aankoopwaarde kwijt is? Verklaar.

Neen, de waarde na 4 jaar is $990 \cdot 0{,}75^4$ euro $= 313{,}242$ euro.

(Hij is ongeveer 68 % van zijn waarde kwijt.)

3 Geef een formule voor de waarde W (in €) in functie van de tijd t (in jaren).

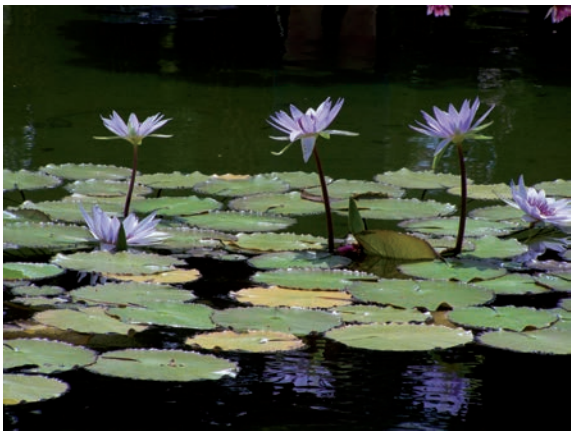
$W = 990 \cdot 0{,}75^t$

Opdracht 6 bladzijde 160

Een snel groeiende waterlelie verdubbelt elke dag in oppervlakte. Na 10 dagen bedekt zij een volledige vijver.

Na hoeveel dagen was de vijver half bedekt?

Na negen dagen.



Opdracht 7 bladzijde 160

Stel, je beschikt over een groot vel papier met een dikte van 0,1 mm. Je vouwt het in twee. Dit samengevouwen blad vouw je opnieuw in twee, zodat het resultaat nu 0,4 mm dik is. Je blijft telkens dubbelvouwen. Stel dat het je lukt om dat in totaal 25 keer te doen.

Hoe dik is je stapel papier dan?

Stel d de dikte in mm en n het aantal keer vouwen, dan geldt: $d = 0{,}1 \cdot 2^n$.

Na 25 keer is de dikte $d = 0{,}1 \cdot 2^{25} = 3{,}35544 \cdot 10^6$ (mm).

Dit komt overeen met ongeveer 3,355 km.

Opdracht 8 bladzijde 161

De bevolking van Senegal kent al jaren een tamelijk stabiele groei van 2,6 % per jaar, zodat we bij benadering kunnen stellen dat ze exponentieel toeneemt. In 2005 telde het land 11,281 miljoen inwoners.

Het aantal inwoners N (in miljoenen), in functie van de tijd t (in jaren vanaf 2005), kan dus berekend worden als

$$N = 11{,}281 \cdot 1{,}026^{t}$$

met $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Vóór 2005 groeide de bevolking ook al op die manier aan.

Bereken het aantal inwoners in 2004 en 2003.

In 2004 waren er $\dfrac{11{,}281}{1{,}026} = 10{,}995$ miljoen inwoners.

In 2003 waren er $\dfrac{10{,}995}{1{,}026} = 10{,}716$ miljoen inwoners.

Opdracht 9 bladzijde 161

De vader van Jens smeert ’s ochtends om 7 uur de boterhammen van zoonlief en stopt ze in zijn brooddoos. Het is een warme dag, met andere woorden ideaal weer voor de bacteriën in de vleessla op een van de boterhammen. Om 7u bevat die boterham 300 bacteriën en hun aantal verdubbelt om het uur. Van zodra er 15 000 zijn, kan Jens die boterham best niet meer opeten ...

Bij een verdubbeling per uur komt een groeifactor 2 overeen. De beginwaarde is 300. Laten we $t = 0$ overeenkomen met 7u ’s morgens, dan kunnen we het aantal bacteriën t uur na 7u ’s morgens berekenen als $N = 300 \cdot 2^{t}$.

1 De groeifactor per uur is 2. Gebruik het schema hieronder om x, de groeifactor per drie uur, te berekenen.

		t	N		
$+3$	$+1$	0	300	$\cdot 2$	$\cdot x$
	$+1$	1	600	$\cdot 2$	
	$+1$	2	1200	$\cdot 2$	
$+3$	$+1$	3	2400	$\cdot 2$	$\cdot x$
	$+1$	4	4800	$\cdot 2$	
	$+1$	5	9600	$\cdot 2$	
		6	19 200		
		...	...		
		t	$300 \cdot 2^t$		

$x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2 Wat is de groeifactor per 2 uur?

Per 2 u is de groeifactor $2 \cdot 2 = 4$.

3 Noem de groeifactor per half uur q. Wat is de waarde van q?

Na 2 keer een half uur moet het aantal bacteriën verdubbeld zijn:

$q^2 = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt{2}$ $(q > 0)$.

4 Bereken het aantal bacteriën N voor $t = \frac{1}{2}$ en $t = \frac{3}{2}$.

		t	N		
$+1$	$+\frac{1}{2}$	0	300	$\cdot q$	$\cdot 2$
	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...	$\cdot q$	
$+1$	$+\frac{1}{2}$	1	600	$\cdot q$	$\cdot 2$
	$+\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	...	$\cdot q$	
		2	1200		
		...	...		

Voor $t = \frac{1}{2}$: $N = 300\sqrt{2} \approx 424$

Voor $t = \frac{3}{2}$: $N = 600\sqrt{2} = 300\sqrt{2}^3 \approx 849$

5 Bepaal nu op dezelfde manier de groeifactor per kwartier.

Stel q' de groeifactor per kwartier, dan geldt
$(q')^4 = 2 \Leftrightarrow q' = \sqrt[4]{2}$ $(q' > 0)$.

6 Bereken tot slot het aantal bacteriën om 12u15, 12u30 en 12u45 en beslis tot wanneer Jens zijn boterham mag opeten.

Om 12u15: $N = 9600 \cdot \sqrt[4]{2} \approx 11\ 416$
Om 12u30: $N = 9600 \cdot \sqrt{2} \approx 13\ 576$
Om 12u45: $N = 9600 \cdot \sqrt[4]{2}^{\,3} \approx 16\ 145$
Na 12u30 kan hij die boterham best niet meer opeten.

Opdracht 10 bladzijde 164

De auto van de familie Peeters is een gammel bakje van 15 jaar oud. Elk jaar verminderde hij met 20 % in waarde. Nu is hij nog maar 350 euro waard.

Wat was zijn oorspronkelijke waarde?

Stel W de waarde, in €, en t de tijd, in jaren, sinds aankoop.
Dan geldt: $W = W_0 \cdot 0{,}8^t$ met W_0 de beginwaarde.
Uit het gegeven: $W_0 \cdot 0{,}8^{15} = 350$.
Daaruit volgt: $W_0 = 9948$ (afgerond op 1 euro).

Opdracht 11 bladzijde 164

Worden de uitgaven die je met een creditcard maakte niet tijdig terugbetaald, dan rekent de verstrekker van die kaart een fikse intrest aan. Van een bepaalde kaart is het jaarlijkse percentage 15,0 %.

Bereken de groeifactor en procentuele groei

1 per maand

Groeifactor per jaar: $a = 1{,}15$
$\Rightarrow$ per maand: groeifactor: $\sqrt[12]{1{,}15} \approx 1{,}0117$
$\Rightarrow$ procentuele groei: 1,17 %

2 per semester

Per semester: groeifactor: $\sqrt{1{,}15} \approx 1{,}0724$
$\Rightarrow$ procentuele groei: 7,24 %

Opdracht 12 bladzijde 164

Tussen januari 2009 en januari 2010 vertienvoudigde het aantal berichten dat via Twitter werd verzonden.

Bereken de groeifactor en de procentuele groei per half jaar.

Jaarlijkse groeifactor: 10

- halfjaarlijkse groeifactor: $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$
- procentuele groei: $1 + \dfrac{p}{100} = 3{,}1623 \Leftrightarrow p = 100 \cdot (3{,}1623 - 1) = 216{,}23$

  De procentuele groei is 216,23 %.

Opdracht 13 bladzijde 164

Een bacteriecultuur bevat om 7 u 's ochtends ($t = 0$) 300 bacteriën en hun aantal verdubbelt elk uur.

Hoeveel bacteriën zijn er om 10u23?

Groeifactor per minuut: $\sqrt[60]{2} = 2^{\frac{1}{60}}$.

Om 10u23 zijn er 203 minuten verstreken sinds 7u en bijgevolg is

$N = 300 \cdot \left(2^{\frac{1}{60}}\right)^{203} \approx 3130$. (N is aantal bacteriën.)

Opdracht 14 bladzijde 166

Uit een waterbassin lekt elke dag water weg. Het volume water V (in m^3) in het bassin neemt exponentieel af in functie van de tijd t (in dagen).
Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met maandag 12u00.

Na 10 dagen is er nog 600 m^3 in het bassin en na 20 dagen nog slechts 216 m^3.

1 Stel een formule op voor V in functie van t.

$$V = b \cdot a^t \text{ met } \begin{cases} 600 = b \cdot a^{10} & (1) \\ 216 = b \cdot a^{20} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Deel (2) door (1): } \frac{216}{600} = \frac{b \cdot a^{20}}{b \cdot a^{10}} \Leftrightarrow a^{10} = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (3)$$

$$\text{(3) in (1): } 600 = b \cdot \frac{9}{25} \Leftrightarrow b = \frac{5000}{3}$$

$$\text{Besluit: } V = \frac{5000}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{5}} \approx 1667 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{5}}.$$

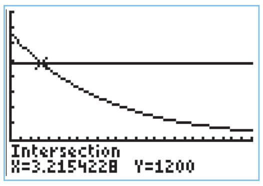
(Opmerking: $V \approx 1667 \cdot 0{,}9029^t$ kan ook, maar voor grote t zal dit steeds meer afwijken van de andere formule.)

2 Hoeveel water is er nog aanwezig op woensdag om 20u00 (tijdens dezelfde week)?

$$t = 2 + \frac{8}{24} = \frac{7}{3} \Rightarrow V \approx 1313.$$

3 Plot de grafiek van V voor t gaande van 0 tot 25.

4 Bepaal grafisch op welke dag en om welk uur er nog 1200 m^3 in het bassin aanwezig is.



Uit de afbeelding lezen we af:

$V = 1200$ voor $t \approx 3{,}2154$.

Dit komt overeen met donderdag rond 17u10.

Opdracht 15 bladzijde 166

Schrijf als één macht met geheel grondtal.

1 $2^{\sqrt{2}} \cdot 18^{\sqrt{2}} = 36^{\sqrt{2}}$

2 $\left(\sqrt[4]{10}\right)^{\sqrt{3}} = \left(10^{\frac{1}{4}}\right)^{\sqrt{3}} = 10^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

3 $\dfrac{15^{\sqrt{5}}}{3^{\sqrt{5}}} = 5^{\sqrt{5}}$

4 $\dfrac{4^{\sqrt{8}}}{4^{\sqrt{2}}} = 4^{\sqrt{8} - \sqrt{2}} = 4^{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$

5 $\left(6^{\sqrt{5}}\right)^{-3\sqrt{5}} = 6^{-15}$

6 $5^{-\sqrt{3}} \cdot 5^{2\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}}$

7 $\left(11^{-\sqrt{0{,}03}}\right)^{\sqrt{3}} = 11^{-\sqrt{0{,}09}} = 11^{-0{,}3}$

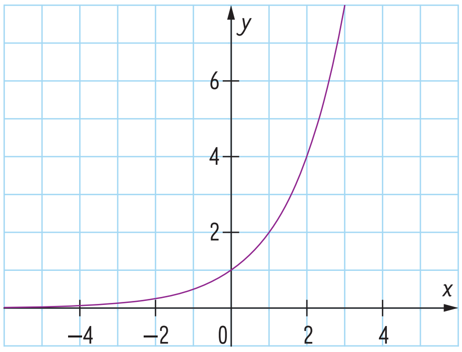
8 $\left(12^{\sqrt{2}} \cdot 12^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(12^{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(12^{3\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 12^{6}$

9 $\left(\dfrac{12^{\sqrt{6}}}{3^{\sqrt{6}}}\right) \cdot 4^{\sqrt{6}} = 4^{\sqrt{6}} \cdot 4^{\sqrt{6}} = \cdot\ 4^{2\sqrt{6}}$

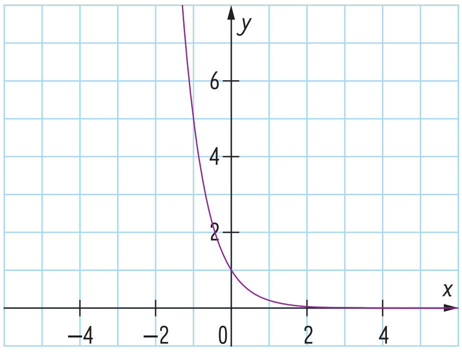
10 $100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}1^{\sqrt{28}} = 100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}1^{2\sqrt{7}} = 100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}01^{\sqrt{7}} = 1^{\sqrt{7}} = 1$

Opdracht 16 bladzijde 168

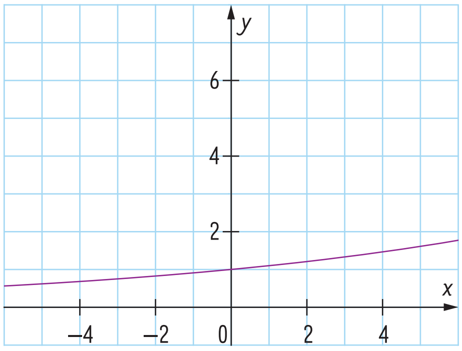
De onderstaande functies hebben een voorschrift van de vorm $f(x) = a^x$, met $a > 0$.



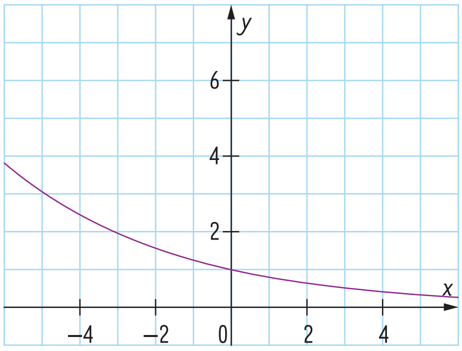
$f_1(x) = 2^x$



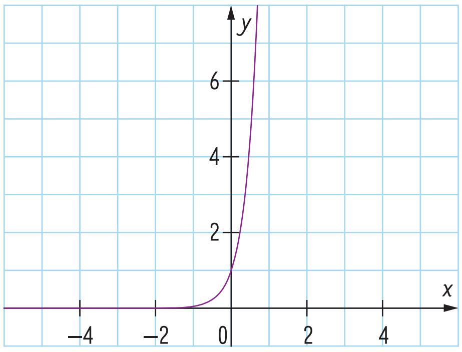
$f_2(x) = 0,2^x$



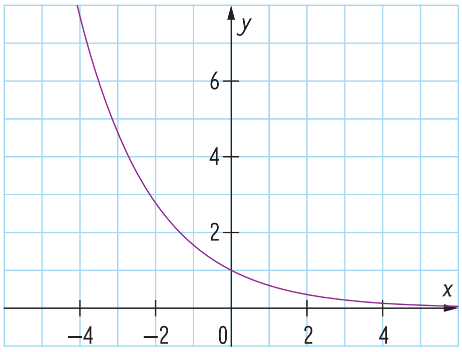
$f_3(x) = 1,1^x$



$f_4(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$



$f_5(x) = 20^x$



$f_6(x) = 0,6^x$

1 Voor welke waarden van a zullen functies met voorschrift $f(x) = a^x$ strikt stijgend zijn?

Stijgende functies: $a > 1$.

2 Bepaal het snijpunt van de grafieken met de y-as.

Aangezien $a^0 = 1$ voor alle $a \neq 0$, snijden de grafieken de y-as in (0,1).

3 Bepaal de eventuele nulpunten van de functies.

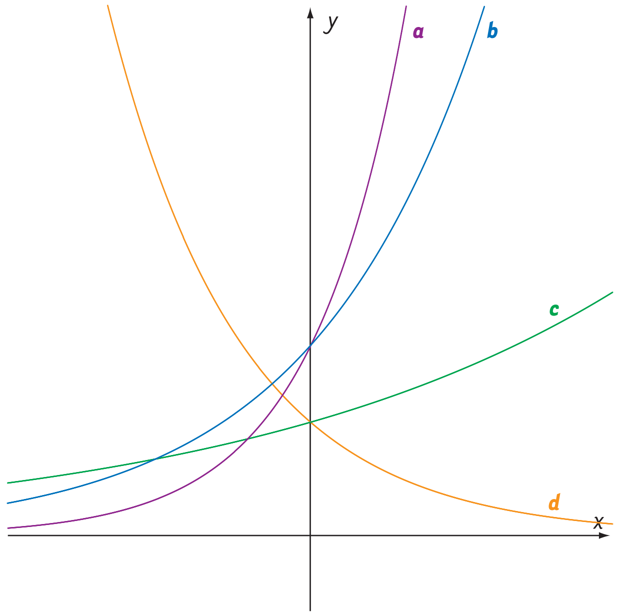
$a^x = 0$ heeft geen oplossingen voor $a \neq 0$, zodat de functies geen nulpunten hebben.

4 Beschouw de functies met $a < 1$. Tot welke waarde naderen de beeldwaarden voor $x \longrightarrow +\infty$?

Voor $0 < a < 1$ zal $f(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow +\infty$.

Opdracht 17 bladzijde 171

Beantwoord zonder je rekentoestel te gebruiken: welke functie komt met welke grafiek overeen?



1 $f_1: x \mapsto 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$

functie f_1 heeft grafiek d want 1) dalend ($a = \frac{3}{4} < 1$)

2) laagste snijpunt met y-as.

2 $f_2: x \mapsto 3 \cdot 1{,}1^x$

f_2 ➜ graf. c: 1) stijgend

2) laagste snijpunt met de y-as

3 $f_3: x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

f_3 ➜ graf. a: 1) stijgt sneller dan grafiek b, die met f_4 moet overeenkomen, wegens grotere groeifactor.

2) hoogste snijpunt met de y-as.

4 $f_4: x \mapsto 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$

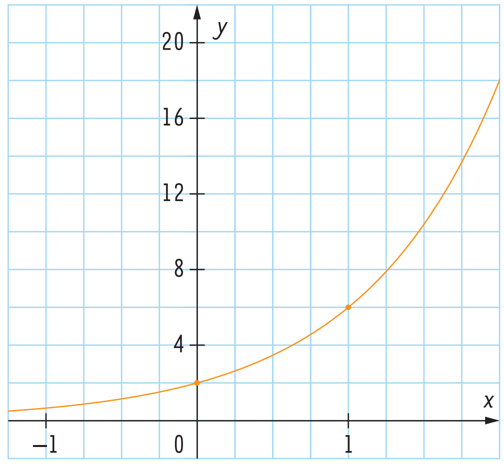
f_4 ➜ graf. b

Opdracht 18 bladzijde 171

De volgende grafieken zijn grafieken van functies met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$.

Bepaal a en b op basis van de gegeven punten.

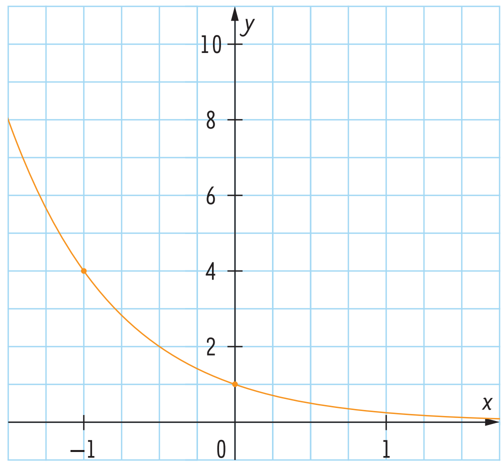
1



(0,2) en (1,6)

- algebraïsche oplossing: $f(x) = b \cdot a^x$
  1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 2 \Leftrightarrow \boxed{b = 2}$
  2) $f(1) = 6 \Leftrightarrow b \cdot a^1 = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot a = 6$
     $\Leftrightarrow \boxed{a = 3}$
- grafische/numerieke oplossing
  1) grafiek snijdt y-as in (0,2) $\Rightarrow \boxed{b = 2}$
  2) uit (0,2) en (1,6): als bij x 1 eenheid wordt opgeteld, wordt de y-coördinaat met 3 vermenigvuldigd $\Rightarrow \boxed{a = 3}$

2

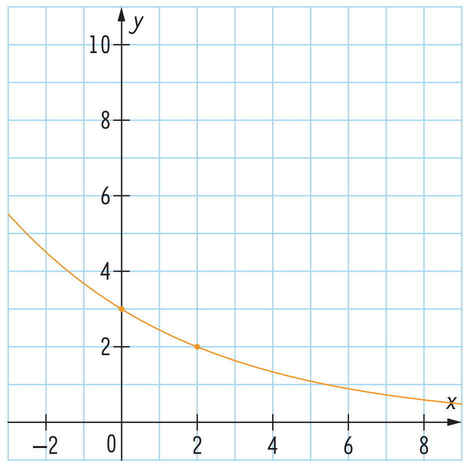


$f(-1) = 4 \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} = 4$ (1)

$f(0) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$ (2)

(2) invullen in (1): $a^{-1} = 4 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$

3

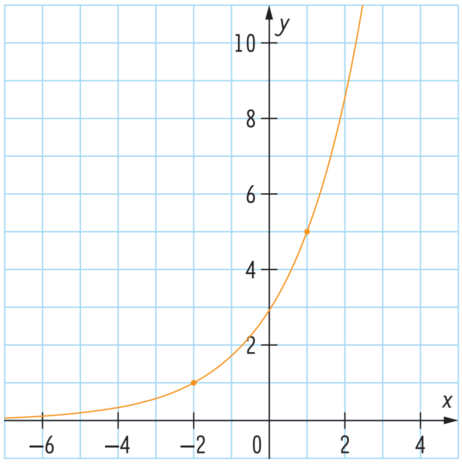


$f(0) = 3 \Leftrightarrow \boxed{b = 3}$

$f(2) = 2 \Leftrightarrow b \cdot a^2 = 2 \overset{b=3}{\Leftrightarrow} 3 \cdot a^2 = 2$

$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \boxed{a = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

4



$f(-2) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^{-2} = 1 \qquad (1)$

$f(1) = 5 \Leftrightarrow b \cdot a = 5 \qquad (2)$

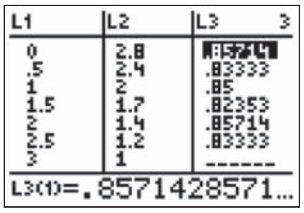
(2) delen door (1): $a^3 = 5 \Leftrightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{5}}$

Dit invullen in (1) (of (2)):

$b = \boxed{\sqrt[3]{5}^{\,2} = \sqrt[3]{25}}$

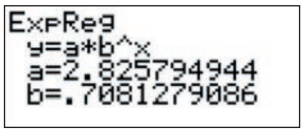
Opdracht 19 bladzijde 171

De hoogte van een schuimkraag op een vers getapt pintje verandert doorheen de tijd.



In de eerste kolom hiernaast staat de tijd t (in minuten) en in de tweede de hoogte h (in cm) van zo'n schuimkraag.

Door de verhouding te nemen van de opeenvolgende hoogten, kan nagegaan worden of deze afname min of meer exponentieel verloopt. In de derde kolom vind je deze verhouding. Ze blijkt tamelijk constant te zijn en gemiddeld gelijk aan ongeveer 0,84, wat de exponentiële afname bevestigt.



Deze verhouding wijkt echter af van de groeifactor van 0,7081 die we aflezen in de vergelijking van de exponentiële regressiekromme $h = 2{,}8258 \cdot 0{,}7081^t$.

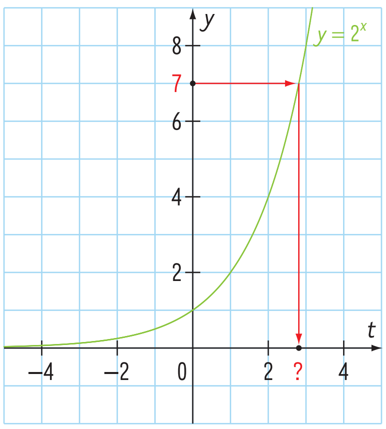
Verklaar dit verschil.

De groeifactor die uit de tabel wordt afgeleid, is die per halve minuut, terwijl die in het regressievoorschrift per minuut is.

(Er geldt inderdaad dat $\sqrt{0{,}7081} \approx 0{,}8415$.)

Opdracht 20 bladzijde 174

Beschouw een eenvoudig model voor de groei van het aantal bacteriën y, uitgedrukt in miljoenen, in functie van de tijd t in uren: $y = 2^t$.



We berekenen nu niet het aantal bacteriën y voor een gegeven tijd t, maar zoeken de tijd t nodig om een gegeven aantal y te bereiken.

1 Na hoeveel tijd bedraagt het aantal 8 miljoen?

$2^t = 8 \Leftrightarrow t = 3.$

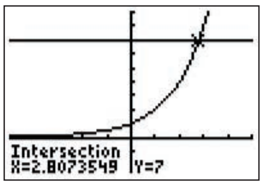
Na 3 u is het aantal 8 miljoen.

2 Na hoeveel uren is het aantal 1024 miljoen?

$2^t = 1024 \Leftrightarrow t = 10$ (trial and error).

Na 10 u is het aantal 1024 miljoen.

3 Na hoeveel uren heb je 7 miljoen bacteriën? Maak gebruik van je rekentoestel om de tijd tot twee cijfers na de komma te bepalen.



Na ongeveer 2,81 u is het aantal 7 miljoen.

Opdracht 21 bladzijde 174

Bepaal *x* zodanig dat

1 $4^x = 64 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$

2 $5^x = 25\sqrt{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

Opdracht 22 bladzijde 174

Los de volgende vergelijkingen op. Heb je een grafiek nodig, geef dan de oplossing op twee cijfers na de komma.

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 4$ Via grafiek: $x \approx -3{,}42$

2 $x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{3}{2}} = 8$ (zie hoofdstuk 3)

Opdracht 23 bladzijde 176

Bereken de volgende logaritmen, indien ze bestaan, zonder rekentoestel.

1 $\log 0{,}001 = -3$ (want $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$)

2 $\log(-10)$ bestaat niet (want 10^x kan niet -10 zijn)

3 ${}^{\frac{2}{3}}\log \frac{2}{3} = 1$ (want $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$)

4 ${}^{0,7}\log 1 = 0$ (want $0{,}7^0 = 1$)

5 ${}^{0,5}\log 8 = {}^{\frac{1}{2}}\log 8 = -3$ (want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$)

6 ${}^{-4}\log 16$ **bestaat niet** **(want grondtal is negatief)**

7 ${}^{\sqrt{2}}\log 2 = 2$ (want $\sqrt{2}^{2} = 2$)

8 ${}^{9}\log 27 = \frac{3}{2}$ (want $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9}^{3} = 3^3 = 27$)

9 ${}^{\frac{1}{25}}\log 125 = -\frac{3}{2}$ (want $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$)

10 ${}^{2}\log 2^{13} = 13$ (gevolg van de definitie: ${}^{a}\log a^{x} = x$)

Opdracht 24 bladzijde 176

Bereken, als $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

1 ${}^{a}\log a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $({}^{a}\log a^{x} = x)$

2 ${}^{a}\log \sqrt[3]{a} = {}^{a}\log a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

3 ${}^{a}\log \frac{1}{a} = {}^{a}\log a^{-1} = -1$

4 ${}^{a}\log a^{a} = a$

5 ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a\right) = {}^{a}\log(1) = 0$

6 ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a^{2}\right) = {}^{a}\log(a^2) = 2$

Opdracht 25 bladzijde 176

1 Schrijf de oplossingen x van $3^x = 2$ en $3^x = 10$ als logaritmen.

x is de macht die je aan 3 moet geven om 2 te verkrijgen, dus $x = {}^{3}\log 2$
(of via de definitie)
Analoog: $3^x = 10 \Leftrightarrow x = {}^{3}\log 10$.

2 Geef een vergelijking waarvan $x = {}^{\frac{1}{2}}\log 5$ de oplossing is.

$x = {}^{\frac{1}{2}}\log 5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 5$ (Andere antwoorden zijn mogelijk.)

3 Los de vergelijking $10^x = 50$ m.b.v. een rekentoestel op.

$10^x = 50 \Leftrightarrow x = \log 50 \approx 1{,}699$

Opdracht 26 bladzijde 176

Schrijf als een macht van 10 en benader de exponent tot drie cijfers na de komma.

1 $500 = 10^{\log 500} \approx 10^{2{,}699}$

2 $7 = 10^{\log 7} \approx 10^{0{,}845}$

Opdracht 27 bladzijde 177

Aangezien $10^3 = 1000$, is $\log 1000 = 3$. We kunnen log 1000 dus interpreteren als het aantal nullen van 1000. Op dezelfde manier kun je log 100 interpreteren als het aantal nullen van 100: $\log 100 = 2$.

Gebruik deze interpretatie om te verklaren waarom

1 voor de logaritme van het product van 1000 en 100 geldt:
$\log(1000 \cdot 100) = \log 1000 + \log 100$

$1000 \cdot 100 = 10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$

Bij het vermenigvuldigen van machten met eenzelfde grondtal, i.c. 10, moet je de exponenten optellen.

Die exponenten komen voor grondtal 10 overeen met het aantal nullen.

Bijgevolg: # nullen van 1000 · 100 = # nullen van 1000 + # nullen van 100.

$\Rightarrow \log(1000 \cdot 100) = \log(1000) + \log(100)$

2 voor de logaritme van de vijfde macht van 100 geldt: $\log(100^5) = 5 \cdot \log 100$

$100^5 = (10^2)^5 = 10^{2 \cdot 5} = 10^{10}$

Wegens de rekenregel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ geldt, voor $a = 10$:

nullen van 100^5 = 5 keer het aantal nullen van 100

$\Rightarrow \log(100^5) = 5 \cdot \log 100.$

Opdracht 28 bladzijde 179

Schrijf als één logaritme en bereken.

1 ${}^4\log 32 + {}^4\log 2 = {}^4\log 64 = 3$

2 ${}^{\sqrt{3}}\log 36 - {}^{\sqrt{3}}\log 4 = {}^{\sqrt{3}}\log 9 = 4$

3
$$\begin{aligned} {}^2\log 12 + 2 \cdot {}^2\log 6 - 3 \cdot {}^2\log 3 &= {}^2\log 12 + {}^2\log 36 - {}^2\log 27 \\ &= {}^2\log \frac{12 \cdot 36}{27} \\ &= {}^2\log 16 \\ &= 4 \end{aligned}$$

4 $-2 \cdot {}^{\sqrt[3]{2}}\log 6 + 2 \cdot {}^{\sqrt[3]{2}}\log 3 + {}^{\sqrt[3]{2}}\log 2 = {}^{\sqrt[3]{2}}\log \dfrac{3^2 \cdot 2}{6^2} = {}^{\sqrt[3]{2}}\log \dfrac{1}{2} = -3$

Opdracht 29 bladzijde 179

Aangezien $1000 = 10^3$ en $10\,000 = 10^4$, hebben alle getallen van 4 cijfers, van 1000 tot en met 9999, een Briggse logaritme in het interval [3, 4[. Eenzelfde redenering geldt voor getallen met 1, 2, 3, 5, 6 ... cijfers.

1 Gebruik dit inzicht om met behulp van logaritmen te bepalen hoeveel cijfers het getal 52^{73} bevat, wanneer je het zou uitschrijven.
(Je rekentoestel kan 52^{73} mogelijk niet rechtsreeks berekenen, maar dankzij de rekenregels van logaritmen kun je de vraag toch beantwoorden.)

$\log(52^{73}) = 73 \cdot \log 52 = 125{,}2682441$

$\Rightarrow 52^{73}$ is een getal van 126 cijfers.

2 Uit $\log(103^{365}) = 734{,}685587$ volgt per definitie dat $103^{365} = 10^{734{,}685587}$.

Leg uit hoe je hieruit tot de wetenschappelijke notatie $103^{365} = 4{,}848272 \cdot 10^{734}$ komt.

$$\begin{aligned} 103^{365} &= 10^{734{,}685587} \\ &= 10^{0{,}685587} \cdot 10^{734} \\ &= 4{,}848272 \cdot 10^{734} \end{aligned}$$

3 Geef de wetenschappelijke notatie van 52^{73}.

$$\begin{aligned} 52^{73} &= 10^{125{,}2682441} \qquad \text{(zie deelvraag 1)} \\ &= 10^{0{,}2682441} \cdot 10^{125} \\ &= 1{,}854574 \cdot 10^{125} \end{aligned}$$

4 Schrijf nu ook 13^{-205} in de wetenschappelijke notatie.

$$\begin{aligned} 13^{-205} &= 10^{\log(13^{-205})} \\ &= 10^{-228{,}3583872} \\ &= 10^{-229 + 0{,}6416128} \\ &= 10^{0{,}6416128} \cdot 10^{-229} \\ &= 4{,}381399 \cdot 10^{-229} \end{aligned}$$

Opmerking: er zijn vele manieren om een getal x te schrijven als $x = a \cdot 10^b$.
Het is echter gebruikelijk om a en b zo te kiezen dat $1 \leqslant |a| < 10$.
Daarom is de volgende aanpak niet wenselijk:

$$\begin{aligned} 13^{-205} &= 10^{-228{,}3583872} \\ &= 10^{-0{,}3583872} \cdot 10^{-228} \\ &= 0{,}438140 \cdot 10^{-228} \end{aligned}$$

Opdracht 30 bladzijde 180

Bereken met je rekentoestel en rond af op 3 cijfers na de komma indien het resultaat geen breuk is.

1 $^{0,75}\log \frac{243}{1024}$

5

2 $^{4}\log 8$

$\frac{3}{2}$

3 $^{5}\log 35$

$2{,}209$

Opdracht 31 bladzijde 181

Toon aan.

1 $^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d \cdot {}^{d}\log a = 1$

$^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d \cdot {}^{d}\log a$

$= \cancel{^{a}\log b} \cdot \frac{\cancel{^{a}\log c}}{\cancel{^{a}\log b}} \cdot \frac{\cancel{^{a}\log d}}{\cancel{^{a}\log c}} \cdot \frac{^{a}\log a}{\cancel{^{a}\log d}}$

$= {}^{a}\log a$

$= 1$ (alles in Briggse logaritme leidt nog sneller tot een resultaat)

2 $\frac{1}{^{a}\log c} + \frac{1}{^{b}\log c} = \frac{1}{^{ab}\log c}$

$\frac{1}{^{a}\log c} + \frac{1}{^{b}\log c}$

$= \frac{1}{\frac{^{ab}\log c}{^{ab}\log a}} + \frac{1}{\frac{^{ab}\log c}{^{ab}\log b}}$

$= \frac{^{ab}\log a + {}^{ab}\log b}{^{ab}\log c}$

$= \frac{^{ab}\log(ab)}{^{ab}\log c}$

$= \frac{1}{^{ab}\log c}$

3 $\left({}^{a^n}\log x\right)^2 = {}^{a}\log x \cdot {}^{a^{n^2}}\log x$

$${}^{a}\log x \cdot {}^{a^{n^2}}\log x$$

$$= \frac{{}^{a^n}\log x}{{}^{a^n}\log a} \cdot \frac{{}^{a^n}\log x}{{}^{a^n}\log a^{n^2}}$$

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{n^2} = (a^n)^n$$

$$= \frac{({}^{a^n}\log x)^2}{\frac{1}{n} \cdot n}$$

$$= ({}^{a^n}\log x)^2$$

Opdracht 32 bladzijde 181

Hieronder vind je vijf beweringen.

a ${}^{a \cdot r}\log\left(b \cdot r\right) = {}^{a}\log b$

b ${}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b} = \frac{1}{{}^{a}\log b}$

c ${}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b} = {}^{a}\log b$

d ${}^{\sqrt{a}}\log \sqrt{b} = {}^{a}\log b$

e ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

1 Welke van deze beweringen zijn waar voor alle waarden van a, b en r waarvoor de logaritmen gedefinieerd zijn? Bewijs de juistheid van de ware gelijkheden.

a → niet waar: ${}^{ar}\log(br) = \dfrac{{}^{a}\log b + {}^{a}\log r}{1 + {}^{a}\log r} \neq {}^{a}\log b$

b → niet waar: zie c

c → waar: ${}^{\frac{1}{a}}\log \dfrac{1}{b} = \dfrac{{}^{a}\log \frac{1}{b}}{{}^{a}\log \frac{1}{a}} = \dfrac{-{}^{a}\log b}{-1} = {}^{a}\log b$

d → waar: ${}^{\sqrt{a}}\log\sqrt{b} = \dfrac{{}^{a}\log \sqrt{b}}{{}^{a}\log \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}\,{}^{a}\log b}{\frac{1}{2}} = {}^{a}\log b$

e → waar: ${}^{a}\log b = \dfrac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} = \dfrac{1}{{}^{b}\log a}$

2 Bedenk zelf minstens één ware gelijkheid van de vorm ${}^{f(a)}\log f(b) = {}^{a}\log b$, met f een functie, en bewijs ze.

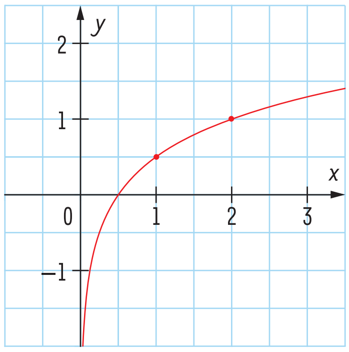
Uit b & c: ${}^{a^n}\log b^n = {}^{a}\log b$

Opdracht 33 bladzijde 183

1 Geef het voorschrift van de inverse functie f van de exponentiële functie met voorschrift $g(x) = b \cdot a^x$ ($b > 0$, $a > 0$ en $a \neq 1$).

$$y = b \cdot a^x \Leftrightarrow x = {}^a\log \frac{y}{b} \Rightarrow g^{-1}(x) = {}^a\log \frac{x}{b}$$

2 Hiernaast zie je de grafiek van zo'n functie f. Bepaal a en b.



$${}^a\log \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \text{ (1) en } {}^a\log \frac{2}{b} = 1 \text{ (2)}$$

$$\text{Uit (1): } \sqrt{a} = \frac{1}{b} \quad (1')$$

$$\text{Uit (2): } a = \frac{2}{b} \quad (2')$$

$$(2') / (1'): \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{Invullen in (1'): } 2 = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

3 Geef het voorschrift van zo'n functie f zodanig dat f dalend is en $f(3) = 0$.

f dalend ➜ kies a in $]0, 1[$

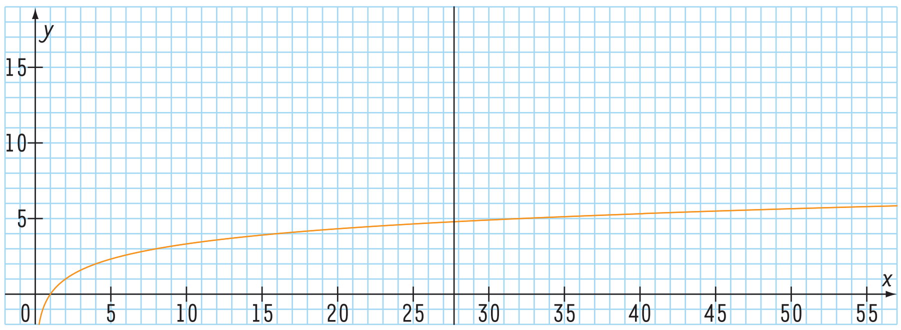
$$f(3) = 0 \Leftrightarrow {}^a\log \frac{3}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 3$$

Opdracht 34 bladzijde 183

Je legt een geruit blad van A4-formaat (21 cm × 29,7 cm) in de breedte. Op 2 cm van de onderkant teken je de x-as en op 2 cm van de linkerkant de y-as. Als eenheid op beide assen kies je 1 cm.

Je begint nu de functie met voorschrift $f(x) = {}^2\log x$ te tekenen. Wanneer je de rechterrand van het blad bereikt, plak je er een nieuw tegen en dat blijf je doen tot je aan de bovenrand komt. Deze komt overeen met $y = 19$.

Hoe breed zal je papierstrook zijn?



$^2\log x = 19 \Leftrightarrow x = 2^{19} = 524\ 288$

In totaal heb je dus minstens 524 288 + 1 = 524 289 cm papier nodig.

Aangezien 524 289 / 29,7 = 17 652,8, zijn er 17 653 vellen papier nodig.

De totale breedte van die papierstrook is 17 653 · 29,7 = 524 294,1 cm.

Opdracht 35 bladzijde 184

Bepaal de inverse functie van

1 $f_1 : x \mapsto 2^x + 1$

$y = 2^x + 1 \Leftrightarrow x = {}^2\log(y - 1)$ $\qquad f_1^{-1} : x \mapsto {}^2\log(x - 1)$

2 $f_2 : x \mapsto 3 \cdot 5^{x-2}$

$y = 3 \cdot 5^{x-2} \Leftrightarrow x = {}^5\log\left(\frac{y}{3}\right) + 2$ $\qquad f_2^{-1} : x \mapsto {}^5\log\left(\frac{x}{3}\right) + 2$

3 $f_3 : x \mapsto 1 - 3^{\frac{x}{2}}$

$y = 1 - 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x = 2 \cdot {}^3\log(1 - y)$ $\qquad f_3^{-1} : x \mapsto 2 \cdot {}^3\log(1 - x)$

4 $f_4 : x \mapsto 1 + {}^2\log(x - 3)$

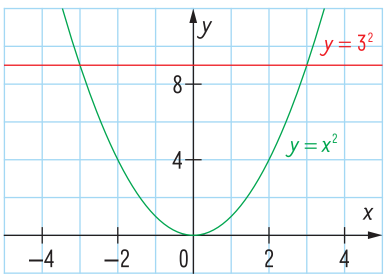
$y = 1 + {}^2\log(x - 3) \Leftrightarrow x = 2^{y-1} + 3$ $\qquad f_4^{-1} : x \mapsto 2^{x-1} + 3$

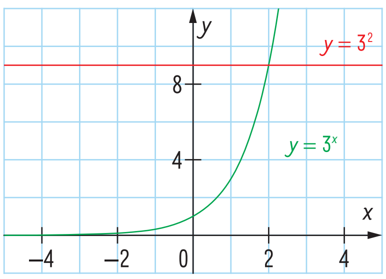
5 $f_5 : x \mapsto 3 \cdot {}^3\log(2x)$

$y = 3 \cdot {}^3\log(2x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{y}{3}}$ $\qquad f_5^{-1} : x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{x}{3}}$

Opdracht 36 bladzijde 185

1 Gebruik de grafische voorstellingen van de vierkantsvergelijking $x^2 = 3^2$ en de exponentiële vergelijking $3^x = 3^2$ om alle oplossingen van deze vergelijkingen te bepalen.





$x^2 = 3^2 \rightarrow$ 2 snijpunten $\Rightarrow$ 2 oplossingen: $x = \pm 3$

$3^x = 3^2 \rightarrow$ 1 snijpunt $\Rightarrow$ 1 oplossing: $x = 2$

2 Welke van de onderstaande beweringen zijn correct en waarom?
(Het grondtal a is positief en verschillend van 1.)

a $a^x = a^c \Leftrightarrow x = c$

b $x^2 = c^2 \Leftrightarrow x = c$

c $x^5 = c^5 \Leftrightarrow x = c$

d ${}^a\log x = {}^a\log c \Leftrightarrow x = c$

a. $a^x = a^c \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = a^x$ is strikt stijgend, zodat die de grafiek $y = a^c$ in één punt zal snijden.

b. $x^2 = c^2 \Leftrightarrow x = c$: fout, want de grafiek $y = x^2$ daalt en stijgt, symmetrisch t.o.v. de y-as, zodat die de grafiek $y = c^2$ in twee punten zal snijden als $c \neq 0$.
Dus heeft de vergelijking twee oplossingen, als $c \neq 0$.

c. $x^5 = c^5 \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = x^5$ is strikt stijgend en gaat van $-\infty$ naar $+\infty$.

d. ${}^a\log x = {}^a\log c \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = {}^a\log x$ is strikt stijgend of strikt dalend en gaat van $-\infty$ naar $+\infty$ of omgekeerd

(Opmerking: het strikt stijgend of dalend zijn is een voldoende maar geen nodige voorwaarde.)

Opdracht 37 bladzijde 187

Los de volgende exponentiële vergelijkingen op.

1 $3^{5x} = 9^{x+1}$

$$\Leftrightarrow 3^{5x} = 3^{2x+2}$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2x + 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

2 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = 5\sqrt[3]{5}$

$$\Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^{\frac{4}{3}}$$
$$\Leftrightarrow -2x = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

3 $3 \cdot 5^{x+1} = 15^{2x} \Leftrightarrow \log(3 \cdot 5^{x+1}) = \log 15^{2x}$

$\Leftrightarrow \log 3 + (x + 1) \log 5 = 2x \log 15$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5 + \log 3}{2 \log 15 - \log 5} = \dfrac{\log 15}{\log 45} = {}^{45}\log 15$

4 $2^{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = {}^{2}\log 6$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\,{}^{2}\log 6$

of $2^{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x \log 2 = \log 6$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 6}{3 \log 2} = \dfrac{\log 6}{\log 8} = {}^{8}\log 6$

5 $3 \cdot 4^{x} = 144 \Leftrightarrow \log 3 + x \cdot \log 4 = \log 144$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 144 - \log 3}{\log 4} = \dfrac{\log 48}{\log 4} = {}^{4}\log 48$

6 $4^{x} = 2 \cdot 5^{x} \Leftrightarrow x \log 4 = \log 2 + x \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 4 - \log 5} = \dfrac{\log 2}{\log \frac{4}{5}} = {}^{\frac{4}{5}}\log 2$

7 $2^{3x} - 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} = 3^{x+1}$

$\Leftrightarrow 3x \log 2 = (x + 1) \log 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 3}{3 \log 2 - \log 3} = \dfrac{\log 3}{\log \frac{8}{3}} = {}^{\frac{8}{3}}\log 3$

8 $3^{x} - 5 \cdot 9^{x} = 0 \Leftrightarrow 3^{x} = 5 \cdot 9^{x}$

$\Leftrightarrow x \log 3 = \log 5 + x \log 9$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 3 - \log 9} = \dfrac{\log 5}{\log \frac{1}{3}} = {}^{\frac{1}{3}}\log 5 \left(= {}^{3}\log \dfrac{1}{5} \right)$

9 $2^{2x+5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x^2 - 2x - 1} \Leftrightarrow 2^{2x+5} = 2^{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2x + 5 = (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

10 $10 \cdot 2^x - 8 \cdot 5^{x-2} = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^{x-2}$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^{x-2} \quad (*)$

$\Leftrightarrow \log 5 + x \log 2 = \log 4 + (x-2) \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \log 5 - \log 4}{\log 5 - \log 2} = \dfrac{\log \frac{125}{4}}{\log \frac{5}{2}} = {}^{\frac{5}{2}}\log \dfrac{125}{4}$

$\Big((*) \Leftrightarrow 2^{x-2} = 5^{x-3}$

$\Leftrightarrow (x-2) \log 2 = (x-3) \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \log 5 - 2 \log 2}{\log 5 - \log 2} = \dfrac{\log \frac{125}{4}}{\log \frac{5}{2}} = {}^{\frac{5}{2}}\log \dfrac{125}{4}\Big)$

Opdracht 38 bladzijde 187

Bepaal *x* zodanig dat

1 $9^x - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$ met $y = 3^x$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow 3^x = 2$ of $\cancel{3^x = -1}$

$\Leftrightarrow x = {}^3\log 2$

2 $4^{2x+1} - 10 \cdot 4^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (4^x)^2 - 10 \cdot 4^x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4^x = \dfrac{10 \pm 6}{8}$

$\Leftrightarrow 4^x = 2$ of $4^x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ of $x = -\dfrac{1}{2}$

3 $8^{x+1} - 4^x + 2^{x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - t^2 + 8t - 1 = 0$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t^2(8t - 1) + (8t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (8t - 1)(t^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow x = -3$

4 $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 31 \Leftrightarrow 2^x\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}\right) = 31$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{31}{\frac{31}{16}}$

$\Leftrightarrow x = 4$

Opdracht 39 bladzijde 187

Waar zit de fout in de volgende redenering? Verklaar.

$^2\log(x^2 - 6x + 6) = {}^2\log(-x + 2)$

(1)

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 6 = -x + 2$

(2)

$\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ of } x = 4$

De fout zit in stap (1): de vergelijkingen $^a\log b = {}^a\log c$ en $b = c$ zijn enkel gelijkwaardig wanneer b en c strikt positief zijn (en $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$).

Opdracht 40 bladzijde 189

Los de volgende logaritmische vergelijkingen op.

1 $^{\sqrt{2}}\log(x^2 + 1) - {}^{\sqrt{2}}\log(3x + 1) = 0$

BVW: $3x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{\sqrt{2}}\log(x^2 + 1) = {}^{\sqrt{2}}\log(3x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x + 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 3$

2 $^{3}\log(x-3)+{}^{3}\log(x+1)={}^{3}\log(2x+2)$

BVW 1: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$
BVW 2: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
BVW 3: $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log(x - 3) + \cancel{{}^{3}\log(x + 1)} = {}^{3}\log 2 + \cancel{{}^{3}\log(x + 1)}$

$\Leftrightarrow x - 3 = 2$

$\Leftrightarrow x = 5$

3 $2\log x+1=\log(19x+2)$

BVW 1: $x > 0$
BVW 2: $19x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{19}$

$\Leftrightarrow \log(10 \cdot x^2) = \log(19x + 2)$

$\Leftrightarrow 10x^2 - 19x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{19 \pm 21}{20}$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $\cancel{x = -\frac{1}{10}}$ zie BVW 1

4 $^{2}\log x={}^{4}\log(6-x)$

BVW 1: $x > 0$
BVW 2: $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x = \frac{{}^{2}\log (6 - x)}{{}^{2}\log 4}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x^2 = {}^{2}\log(6 - x)$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = -3}$ of $x = 2$ zie BVW 1

5 $^{x^2-5}\log 9=2$

BVW: $x^2 - 5 > 0$ en $x^2 - 5 \neq 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - 5)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 5 = 3$ of $\cancel{x^2 - 5 = -3}$ zie BVW

$\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

6 $^{\log x}\log 10=3$

BVW: $\log x > 0$ en $\log x \neq 1$

$\Leftrightarrow (\log x)^3 = 10$

$\Leftrightarrow \log x = \sqrt[3]{10}$

$\Leftrightarrow x = 10^{\sqrt[3]{10}}$

7 ${}^{x+3}\log(2x-1)=1$

BVW 1: $x + 3 > 0$ en $x + 3 \neq 1$
BVW 2: $2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x = 4$

8 ${}^{x-2}\log(2x-5)=2$

BVW 1: $x - 2 > 0$ en $x - 2 \neq 1$
BVW 2: $2x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 3}$ voldoet niet aan BVW1

Opdracht 41 bladzijde 189

Los op.

1 ${}^{2}\log x \cdot {}^{4}\log x \cdot {}^{8}\log x = \frac{4}{3}$

BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x \cdot \frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 4} \cdot \frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 8} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left({}^{2}\log x\right)^3 = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x = 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

2 ${}^{4}\log(x+3) - {}^{\frac{1}{4}}\log(x+3) = 2$

BVW: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$\Leftrightarrow {}^{4}\log(x + 3) + {}^{4}\log(x + 3) = 2$

$\Leftrightarrow {}^{4}\log(x + 3) = 1$

$\Leftrightarrow x + 3 = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$

3 $x + {}^{2}\log(2^x - 7) = 3$

BVW: $2^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log 2^x + {}^{2}\log(2^x - 7) = {}^{2}\log 8$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log(2^x \cdot (2^x - 7)) = {}^{2}\log 8$

$\Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \quad$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t = 8$ of $t = -1$

$\Leftrightarrow 2^x = 8$ of $\cancel{2^x = -1}$

$\Leftrightarrow x = 3$

4 ${}^{2}\log(2^x - 1) + x = {}^{4}\log 144$ **BVW: $2^x - 1 > 0$**

$\Leftrightarrow {}^{2}\log(2^x - 1) + {}^{2}\log 2^x = \dfrac{{}^{2}\log 144}{{}^{2}\log 4}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log((2^x - 1) \cdot 2^x) = {}^{2}\log\sqrt{144}$

$\Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t = 4$ of $t = -3$

$\Leftrightarrow 2^x = 4$ of $\cancel{2^x = -3}$

$\Leftrightarrow x = 2$

Opdracht 42 bladzijde 190

Gebruik telkens een schets of redenering om na te gaan of de onderstaande beweringen geldige gelijkwaardigheden voorstellen en om eventuele foute beweringen te corrigeren.

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x > 4$ **fout**

Aangezien $f: x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dalend is, geldt: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x < 4$.

2 $3^{-2x+1} > 81 \Leftrightarrow -2x + 1 > 4$ **correct**

3 ${}^{3}\log(-2x + 1) > {}^{3}\log 5 \Leftrightarrow -2x + 1 > 5$ **correct**

Aangezien $y = {}^{3}\log x$ strikt stijgend is, wordt de orde bewaard, maar er moet rekening gehouden worden met de bestaansvoorwaarde.
Als $-2x + 1 > 5$, dan geldt ook $-2x + 1 > 0$, zodat de gelijkwaardigheid waar is.

4 ${}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log(x + 3) \leqslant {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log 4 \Leftrightarrow x + 3 \leqslant 4$ **fout**

De grafiek $y = {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log x$ is dalend, zodat geldt ${}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log(x + 3) \leqslant {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log 4$

$\Leftrightarrow x + 3 \geqslant 4$.

Als $x + 3 \geqslant 4$, dan geldt ook dat $x + 3 \geqslant 0$, zodat er geen bestaansvoorwaarde toegevoegd moet worden.

Opdracht 43 bladzijde 192

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $4^{2x+1} < \frac{1}{64}$ $\Leftrightarrow 4^{2x+1} < 4^{-3}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 < -3$

$\Leftrightarrow x < -2$

2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$

$\Leftrightarrow x - 1 > 4x$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$

3 ${}^{\frac{1}{3}}\log(2x-3) < 1$ $\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{3}}\log(2x-3) < {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{3}$ BVW: $2x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 > \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

4 ${}^{4}\log(5-x) > {}^{4}\log x + 1$ $\Leftrightarrow {}^{4}\log(5-x) > {}^{4}\log(4x)$

BVW 1: $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$
BVW 2: $x > 0$

$\Leftrightarrow 5 - x > 4x$

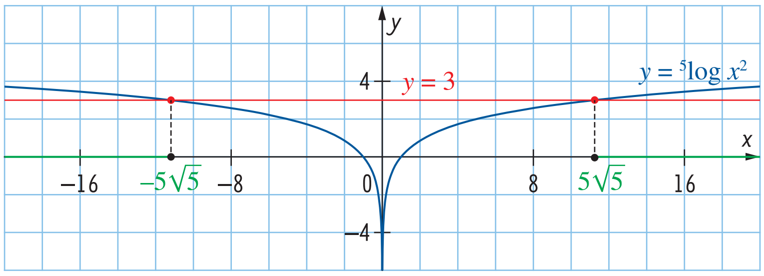
$\Leftrightarrow x < 1$

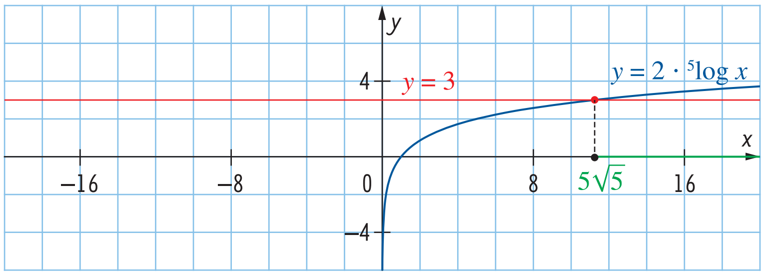
Rekening houdend met de bestaansvoorwaarden, is de oplossing: $0 < x < 1$.

Opdracht 44 bladzijde 192

1 Gebruik grafische voorstellingen om te verklaren waarom de ongelijkheid ${}^{5}\log x^2 > 3$ niet gelijkwaardig is met de ongelijkheid $2 \cdot {}^{5}\log x > 3$.

2 Los de ongelijkheid ${}^{5}\log x^2 > 3$ op.





De functies $f(x) = {}^5\log x^2$ en $g(x) = 2 \cdot {}^5\log x$ hebben een verschillend domein en dus een verschillende grafiek.

Uit de grafiek blijkt: ${}^5\log x^2 > 3 \Leftrightarrow x < -5\sqrt{5}$ of $x > 5\sqrt{5}$

en $2 \cdot {}^5\log x > 3 \Leftrightarrow x > 5\sqrt{5}$

Opdracht 45 bladzijde 193

1 Bereken uit het voorschrift $c(t) = b \cdot 0{,}99988^t$, met t uitgedrukt in jaren, de **halveringstijd** van ^{14}C. Dit is de tijd die nodig is om een gegeven concentratie tot de helft te reduceren.

2 Heb je in de vorige deelvraag aangetoond dat deze halveringstijd onafhankelijk is van de begintijd? Indien niet, doe dat nu.

Wanneer je de halveringstijd zoekt door de vergelijking $b \cdot 0{,}99988^t = \frac{b}{2}$ op te lossen, dan vertrek je van $t = 0$. Je vindt $t = 5776$ jaar.

Vertrek je van een willekeurig tijdstip t_0, dan geldt voor de halveringstijd Δt

$$\text{dat } c(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}\, c(t_0) \Leftrightarrow b \cdot 0{,}99988^{t_0 + \Delta t} = \frac{1}{2} b \cdot 0{,}99988^{t_0}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}99988^{\Delta t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 0{,}99988} = 5776$$

Bij exponentiële groei is de groeifactor gelijk voor gelijke tijdstoenames, onafhankelijk van de begintijd.

3 Na hoeveel jaar t.o.v. een willekeurige begintijd zal telkens 75 % van de ^{14}C verdwenen zijn?

Dit komt overeen met een groeifactor $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ en bijgevolg met een tijdstoename die het dubbele is van de halveringstijd, m.a.w. 11 552 jaar.

4 Hoe zal het voorschrift eruit zien voor de concentratie van een radioactieve atoomsoort met een halveringstijd van 500 jaar?

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ met } f(500) = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a^{500} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[500]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}998615$$

Dus: $f(t) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{500}} \approx b \cdot 0{,}998615^t$.

Opdracht 46 bladzijde 194

Men heeft in 1989 met de ^{14}C-methode de leeftijd van de lijkwade van Turijn (de zgn. lijkwade van Christus) trachten te achterhalen.

Men trof in het plantaardige weefsel van het doek 92,2 % van de natuurlijke concentratie ^{14}C aan.

Wijst dit erop dat die lijkwade daadwerkelijk uit de tijd van Christus stamt?

Maak gebruik van het voorschrift $c(t) = b \cdot 0{,}99988^t$.

$c(t) = 0{,}922 \cdot b$

$\Leftrightarrow 0{,}99988^t = 0{,}922 \Leftrightarrow t = \dfrac{\log 0{,}922}{\log 0{,}99988} \approx 677$

De lijkwade van Turijn zou volgens deze onderzoeksmethode maar ongeveer 7 eeuwen oud zijn en kan dus niet de lijkwade van Christus zijn.

Opdracht 47 bladzijde 206

Geef de groeifactor en de bijbehorende tijdseenheid bij de volgende exponentiële groeiprocessen.

1 De lengte van een zonnebloemstengel verdubbelt elke twee weken.

2 Op een spaarboekje krijg je 1,75 % intrest per jaar.

3 De waarde van een computer vermindert elk jaar met 30 %.

4 Het gasverlies in een luchtschip is 0,25 % per dag.

	groeifactor	tijdseenheid
1	2	2 weken
2	1,0175	1 jaar
3	0,7	1 jaar
4	0,9975	1 dag

Opdracht 48 bladzijde 206

De volgende tabel geeft de groei weer van een aantal grootheden tijdens vijf opeenvolgende tijdseenheden. In welke gevallen is er sprake van lineaire groei? In welke gevallen van exponentiële groei? Geef in dat geval ook de groeifactor.

t	0	1	2	3	4	5
y_1	1701	567	189	63	21	7
y_2	105	118	131	146	163	182
y_3	29,7	27,1	24,5	21,9	19,3	16,7

y_1: vaste verhouding van opeenvolgende waarden: $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ exponentiële groei met groeifactor $\frac{1}{3}$

y_2: geen vaste verhouding van of vast verschil tussen opeenvolgende waarden $\Rightarrow$ exponentiële noch lineaire groei.

y_3: vast verschil van -2,6 tussen opeenvolgende waarden $\Rightarrow$ lineaire groei

Opdracht 49 bladzijde 206

Wat verkies je: een spaarboekje met een intrest van 2 % per jaar of een waarbij de intrest 1 % per zes maand bedraagt? Verantwoord met een berekening.

1 % per 6 maand komt overeen met groeifactor 1,01.
Per jaar is de groeifactor dan $1{,}01^2 = 1{,}0201$, wat overeenkomt met een procentuele toename van 2,01 %.
Dit is iets voordeliger dan 2 % per jaar.

Opdracht 50 bladzijde 206

Stel dat je eerste (over^n)-grootvader met Belgische nationaliteit in 1830 precies één Belgische frank (de toenmalige munt, ongeveer € 0,025 waard) bij een bank zou hebben uitgezet tegen een samengestelde intrest van 5 %, hoeveel euro zou er dan nu op zijn rekening staan?

Bijv. in 2013: $1 \cdot 1{,}05^{2013 - 1830} \approx 7544{,}7$
Er zou € 7544,7 op zijn rekening staan.

Opdracht 51 bladzijde 206

Een herlaadbare batterij verliest per uur 2 % van haar lading.

Hoeveel % van haar lading verliest de batterij

1 per half uur?

2 per minuut?

3 per dag?

De groeifactor per uur is 0,98.

1 De groeifactor per half uur is $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}989949$, wat overeenkomt met een procentuele afname van 1,0051 %.

2 Per minuut is de groeifactor $\sqrt[60]{0{,}98} \approx 0{,}999663$.
Dit betekent een verlies van 0,0337 % per minuut.

3 Per dag: groeifactor $0{,}98^{24} \approx 0{,}61578$, of een afname van 38,422 %.

Opdracht 52 bladzijde 207

Schrijf als één macht met geheel grondtal.

1 $\dfrac{(7^3)^{\sqrt{5}}}{7^{\sqrt{5}}} = 7^{2\sqrt{5}}$

2 $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 3^{\sqrt{2}^2} = 3^{2\sqrt{2}} \cdot 3^2 = 3^{2+2\sqrt{2}}$

3 $\dfrac{4^{\sqrt{5}} \cdot 3^{2\sqrt{5}}}{72^{\sqrt{5}}} = \left(\dfrac{4 \cdot 9}{72}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{-\sqrt{5}}$

4 $3^{-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}}}{9^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3^{-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2\sqrt{3}}}{3^3} = 3^{-3\sqrt{3}-3}$

5 $\dfrac{\left((2\sqrt{3})^{\sqrt{5}}\right)^2}{9^{\frac{\sqrt{5}}{2}}} = \dfrac{\left((2\sqrt{3})^2\right)^{\sqrt{5}}}{3^{\sqrt{5}}} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^{\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}}$

Opdracht 53 bladzijde 207

Om overstromingen te voorkomen, wordt een rivier met dijken omgeven. De aarde voor die dijken wordt uit een nabijgelegen vlakte aangevoerd; op die plaats ontstaat een meer.

Op een bepaald ogenblik heeft dit meer een oppervlakte van 1000 m^2 water. Door de werken wordt het elke week 600 m^2 groter. Na de werken wil men het meer zo vlug mogelijk voor waterrecreatie gebruiken. Daarom wordt de kwaliteit van het water regelmatig gecontroleerd. Bij het begin van de werken vindt men 10 m^2 van een bepaalde algensoort in het meer. Tijdens de volgende weken verdubbelt deze oppervlakte elke week. Iemand merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. Het meer zal anders vlug volledig bedekt zijn met algen. Maar de beambte van het ministerie van volksgezondheid ziet voorlopig geen gevaar: "Het meer wordt toch elke week 600 m^2 groter."

Stel de oppervlakte van het meer voor door M en die van de algen door A, beide in m^2. De tijd stellen we voor door t, in weken. Laat $t = 0$ overeenkomen met
$M = 1000$ en $A = 10$.

1 Geef een formule voor M en A in functie van de tijd.

$M = 1000 + 600t$

$A = 10 \cdot 2^t$

2 Plot op je rekentoestel in een passend venster de grafieken waarop de punten voor $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$ liggen. Gebruik een tabel op je rekentoestel om snel een juiste keuze te maken voor de instelling op de y-as.
Noteer de vensterinstellingen.

Kies bijv. $[x_{min}, x_{max}] = [0,12]$ en $[y_{min}, y_{max}] = [-2000, 8000]$.

3 Na hoeveel weken is het meer vol algen?

Via "intersect" vind je als x-coördinaat 9,3713...
Het meer is dus vol algen na ongeveer 9,4 weken.

Opdracht 54 bladzijde 208

Veronderstel dat de concentraties in het bloed van stof A en van stof B omgekeerd evenredig zijn en positief. Als de concentratie van stof A met p % toeneemt, dan zal de concentratie van stof B afnemen met

A p % **B** $\frac{p}{1+p}$ % **C** $\frac{100p}{100+p}$ % **D** $\frac{p}{100+p}$ %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts)

Stel C_A en C_B de concentraties van A resp. B.
Noem het percentage waarmee C_B afneemt q:

C_B wordt dan $\left(1 - \frac{q}{100}\right) \cdot C_B$ wanneer C_A verandert in $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot C_A$.

Aangezien de concentraties omgekeerd evenredig zijn, is hun product constant:

$$C_A \cdot C_B = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot C_A \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right) C_B$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{q}{100} = \frac{100}{100 + p}$$

$$\Leftrightarrow q = 100\left(1 - \frac{100}{100 + p}\right) = \frac{100\,p}{100 + p}$$

Dit is antwoord C.

Opdracht 55 bladzijde 208

In Nederland verachtvoudigde het mobiel dataverbruik tussen het eerste halfjaar van 2008 en het eerste halfjaar van 2010, waarin 3,2 petabyte werd verbruikt.
(1 petabyte = 1024 terabyte = 1024 × 1024 gigabyte)

We veronderstellen dat de groei exponentieel verliep.

1 Bereken de procentuele groei per jaar van dat dataverbruik.

Groeifactor per 2 jaar: 8.
Per jaar is de groeifactor $\sqrt{8} \approx 2{,}828$, wat overeenkomt met een procentuele groei van 182,8 %.

2 Stel een formule op voor het dataverbruik per halfjaar D in functie van de tijd t in jaren. Laat $t = 0$ overeenkomen met het eerste halfjaar van 2010, $t = 1$ met het eerste halfjaar van 2011 enzovoort.

$$D(t) = 3{,}2 \cdot \sqrt{8}^{\,t} \text{ met } t = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \ldots$$

3 Bereken wat het dataverbruik zou zijn in het eerste halfjaar van 2014, mocht deze trend zich verderzetten.

$D(4) = 3{,}2 \cdot 64 \approx 204{,}8$ ➜ ongeveer 205 PB

4 Hoe groot was het dataverbruik in het tweede halfjaar van 2009?

$D\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}90273$ ➜ ongeveer 1,9 PB

Opdracht 56 bladzijde 208

Na een reeks politieke, economische en monetaire blunders door de regering van Robert Mugabe vanaf het begin van de jaren 2000, zakte de economie van Zimbabwe in elkaar. Dit leidde omstreeks 2005 tot een periode van hyperinflatie, d.w.z. een periode waarin de *maandelijkse* inflatie meer dan 50 % bedroeg.

Dit betekent dat een product dat op een bepaald ogenblik 100 munteenheden kostte, de maand erop minstens 150 munteenheden kostte.

1 Stel dat de maandelijkse inflatie precies 50 % bedraagt. Wat is dan de jaarlijkse inflatie?

Groeifactor per jaar: $1,15^{12} = 129,75$.

Uit $1 + \frac{p}{100} = 129,75$ volgt $p = 12875$.

De jaarlijkse inflatie is dan 12875 %.

2 In juli 2008, de laatste maand waarin de regering van Zimbabwe de inflatiecijfers bekendmaakte, werd de jaarlijkse inflatie geschat op 231 150 890 %. Toon stap voor stap aan hoe je uit dat cijfer kunt berekenen dat dit overeenkomt met een wekelijkse inflatie van ongeveer 33 %. Je mag hierbij stellen dat 1 jaar overeenkomt met 52 weken.

Groeifactor per jaar: $a_j = 1 + \frac{p_j}{100} = 2311\,509,9$.

Groeifactor per week: $a_w = \sqrt[52]{a_j} \approx 1,3255$.

Bijgevolg is de wekelijkse inflatie: $p_w = 100(a_w - 1)$

$= 32,55$

Afgerond is de wekelijkse inflatie ongeveer 33%.

3 Stel dat op 1 juli 2008 drie eieren 100 000 000 000 Zimbabwaanse dollars (afkorting Z$) kostten. Hoeveel Z$ zouden ze dan gekost hebben op 1 augustus 2008?

De uitkomst hangt af van hoe je te werk gaat.

a) Reken je in maanden, dan vind je (in Z$):

$$10^{11} \cdot a_j^{\frac{1}{12}} \approx 10^{11} \cdot 2\,311\,509,9^{\frac{1}{12}} \approx 339\,097\,545\,705$$

b) Reken je in dagen, dan vind je (2008 was een schrikkeljaar):

$$10^{11} \cdot a_j^{\frac{31}{366}} \approx 345\,954\,108\,947$$

c) In de financiële algebra wordt geen rekening gehouden met schrikkeljaren en dan vind je

$$10^{11} \cdot a_j^{\frac{31}{365}} \approx 347\,132\,484\,093$$

Opdracht 57 bladzijde 209

Je tekent de grafiek van de functie met voorschrift $y = 2^x$ in een assenstelsel waarbij de eenheid op de x- en y-as overeenkomt met 1 cm.

Vanaf welke gehele x-waarde is y groter dan de afstand tussen het aard- en het maanoppervlak (ongeveer 376 341 km)?

Via trial and error, via een grafiek of via een tabel vind je:

$2^{35} \approx 3{,}436 \cdot 10^{10} < 3{,}76341 \cdot 10^{10}$ (cm)

$2^{36} \approx 6{,}872 \cdot 10^{10} > 3{,}76341 \cdot 10^{10}$ (cm)

Vanaf $x = 36$ is y groter dan de gegeven afstand.

Opdracht 58 bladzijde 209

Wat gebeurt er met de functiewaarde $f(x) = 2^x$ wanneer we:

1 x met 10 vermeerderen?

$2^x \rightarrow 2^{x+10} = 2^{10} \cdot 2^x = 1024 \cdot 2^x \rightarrow$ **de functiewaarde wordt met 1024 vermenigvuldigd**

2 x met 3 verminderen?

$2^x \rightarrow 2^{x-3} = \frac{1}{8} \cdot 2^x \rightarrow$ **ze wordt door 8 gedeeld**

3 x verdubbelen?

$2^x \rightarrow 2^{2x} = (2^x)^2 \rightarrow$ **ze wordt gekwadrateerd**

4 x halveren?

$2^x \rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2^x} \rightarrow$ **ze wordt verminderd tot haar vierkantswortel**

Opdracht 59 bladzijde 209

De grafiek van een exponentiële functie met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$ bevat de punten P en Q.

Bepaal a en b.

1 $P(0,1)$ en $Q\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$P(0,1)$ **op grafiek** $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow b = 1$

$Q\left(1, \frac{3}{2}\right)$ **op grafiek** $\Leftrightarrow f(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \cdot a^1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

2 $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ en $Q(0,3)$

Analoog: $f(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3$

$f(-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \cdot a^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 6$

3 $P(-1,1)$ en $Q(2,27)$

$f(-1) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} = 1 \quad (1)$
$f(2) = 27 \Leftrightarrow b \cdot a^{2} = 27 \quad (2)$
Deel (2) door (1): $a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$
Dit invullen in (1) of (2): $b = 3$

4 $P(-2,48)$ en $Q(2,3)$

$f(-2) = 48 \Leftrightarrow b \cdot a^{-2} = 48 \ (1)$
$f(2) = 3 \Leftrightarrow b \cdot a^{2} = 3 \quad (2)$
(2)/(1): $a^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \ (a > 0)$
Invullen in (1) of (2): $b = 12$

Opdracht 60 bladzijde 209
Schrijf $f(x)$ in de vorm $b \cdot a^x$.

1 $f(x) = 2^{2x-1}$

$$f(x) = 2^{2x-1} = 2^{-1} \cdot (2^2)^x = \frac{1}{2} \cdot 4^x$$

2 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x+2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x+2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

3 $f(x) = 4^{1+\frac{x}{2}}$

$$f(x) = 4^{1+\frac{x}{2}} = 4 \cdot 2^x$$

4 $f(x) = \frac{24}{4^{-0,5x+1}}$

$$f(x) = \frac{24}{4^{-0,5x+1}} = \frac{24}{4 \cdot 4^{-0,5x}} = 6 \cdot 4^{0,5x} = 6 \cdot 2^x$$

Opdracht 61 bladzijde 209

Door welke transformaties (spiegelingen, verschuivingen, uitrekkingen) gaat de grafiek van $f: x \mapsto 2^x$ over in de grafiek van g?

1 $g: x \mapsto 2^{x-1}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x = \frac{1}{2}\, f(x) \rightarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

2 $g: x \mapsto 2^x + 1$

$g(x) = f(x) + 1 \rightarrow$ verticale verschuiving volgens vector $(0,1)$

3 $g: x \mapsto \frac{1}{2^{1-x}}$

$g(x) = 2^{x-1} \rightarrow$ zie 1.

4 $g: x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2}\, f(-x) \rightarrow$ spiegeling om de y-as en verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

5 $g: x \mapsto 3 \cdot 2^x - 1$

$g(x) = 3 \cdot f(x) - 1 \rightarrow$ verticale uitrekking met factor 3, gevolgd door een verticale verschuiving volgens de vector $(0,-1)$.

6 $g: x \mapsto -2^{x-1}$

$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x) \rightarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en spiegeling om de x-as

7 $g: x \mapsto 1 - 2^{\frac{x}{2}}$

$g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \rightarrow$ spiegeling om de x-as en horizontale uitrekking met factor 2, gevolgd door een verticale verschuiving volgens vector $(0,1)$

8 $g: x \mapsto 2^{-x}$

$g(x) = f(-x) \rightarrow$ spiegeling om de y-as

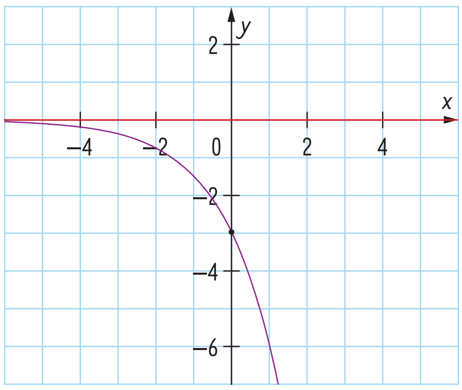
Opdracht 62 bladzijde 210

De grafieken hieronder zijn ontstaan door verticale verschuivingen of uitrekkingen en eventueel een spiegeling om de x- of y-as van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2^x$.

Geef telkens het voorschrift van de bijbehorende functie.

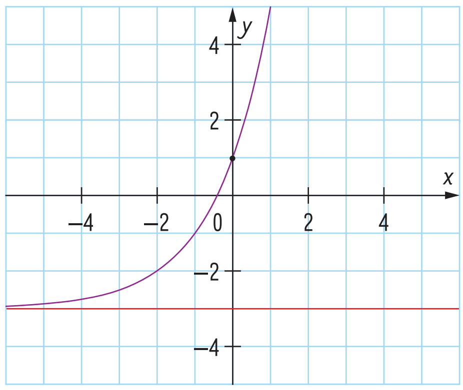
De asymptoten van de grafiek zijn in het rood getekend.

1



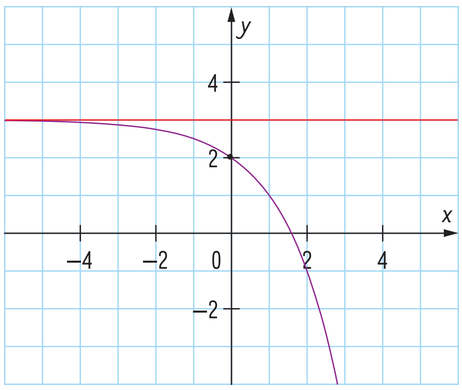
Verticale uitrekking met factor 3 en spiegeling om de x-as:
$\Rightarrow g(x) = -3 \cdot 2^x$

3



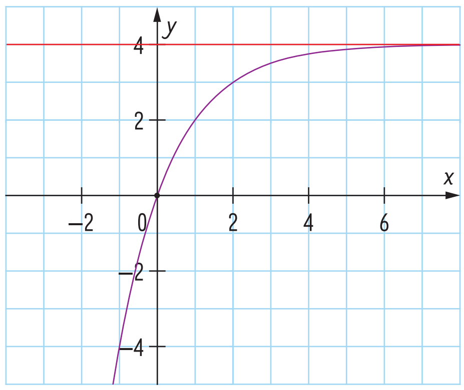
Verticale uitrekking met factor 4 en dan verschuiving volgens (0, -3) $\Rightarrow g(x) = 4 \cdot 2^x - 3$

2



Spiegeling om de x-as en dan verschuiving volgens de vector (0, 3) $\Rightarrow g(x) = -2^x + 3$

4



Verticale uitrekking met factor 4 en spiegeling om de x-as, gevolgd door een verticale verschuiving volgens (0,4) en spiegeling om de y-as

$$\Rightarrow g(x) = -4 \cdot 2^{-x} + 4 = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$$

Opdracht 63 bladzijde 210

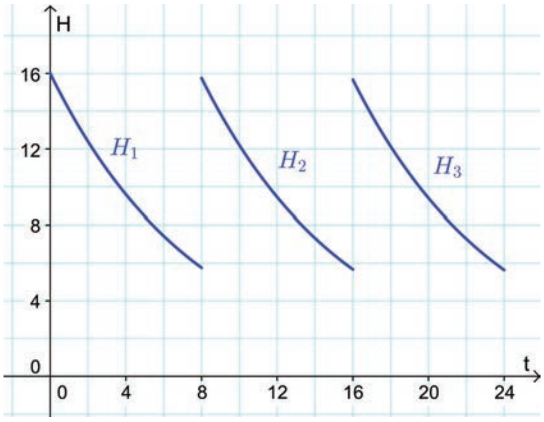
Toon aan dat een horizontale verschuiving van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = a^x$ over een afstand d (naar rechts indien $d > 0$ en naar links indien $d < 0$) geïnterpreteerd kan worden als een verticale uitrekking en geef de factor van die uitrekking.

$$y = a^x \xrightarrow[\text{volgens } (d,\ 0)]{\text{verschuiving}} y = a^{x-d} = a^{-d} \cdot a^x$$

Een horizontale verschuiving volgens de vector (d, 0) komt overeen met een verticale uitrekking met de factor a^{-d}.

Opdracht 64 bladzijde 210

Een model dat de hoeveelheid H (in mg) van een geneesmiddel in de bloedsomloop t uren na toediening van een dosis D (in mg) geeft, wordt beschreven door de formule $H = D \cdot 0{,}88^t$.



1 De dokter geeft een eerste dosis van 16 mg.
Schets de grafiek van H in functie van t gedurende de eerste 8 uur.

$H_1(t) = 16 \cdot 0{,}88^t \ (0 \leqslant t \leqslant 8)$

2 Na 8 uur krijgt de patiënt een bijkomende dosis van 10 mg toegediend.
Vervolledig de grafiek voor $8 \leqslant t < 16$ en geef het bijbehorend functievoorschrift.

Op einde eerste 8u: $H_1(8) = 16 \cdot 0{,}88^8 = 5{,}75$.

$\Rightarrow$ volgende 8u: $H_2(t) = (5{,}75 + 10) \cdot 0{,}88^{t-8} = 15{,}75 \cdot 0{,}88^{t-8} \ (8 \leqslant t \leqslant 16)$

3 Na nogmaals 8 uur krijgt de patiënt een laatste dosis van 10 mg.
Vervolledig de grafiek voor $16 \leqslant t < 24$ en geef het bijbehorend functievoorschrift.

$H_3(t) = (15{,}75 \cdot 0{,}88^{16-8} + 10) \cdot 0{,}88^{t-16} = 15{,}67 \cdot 0{,}88^{t-16} \ (16 \leqslant t \leqslant 24)$

Opmerking: door 3 functies te gebruiken, doen er zich geen complicaties voor bij $t = 8$ en $t = 16$.

Opdracht 65 bladzijde 211

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een brik fruitsap voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot de kamertemperatuur en de temperatuur van het fruitsap neemt af tot de koelkasttemperatuur. De temperatuur in °C van de flessen wordt weergegeven door de functievoorschriften $T_1(t) = 19 - 13 \cdot 0{,}8^t$ en $T_2(t) = 6 + 13 \cdot 0{,}8^t$ met t in uren.

Plot beide grafieken op je rekentoestel en beantwoord aan de hand van de grafieken de volgende vragen.

1 Welk voorschrift hoort bij de fles melk en welk bij het brik fruitsap?

T_2 is dalend en hoort dus bij het afkoelend fruitsap.

T_1 hoort bij de melk.

2 Bepaal een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk.

Als $t \to +\infty$ zal $T_1(t) \to 19$ want $0{,}8^t \to 0$.

De vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 19$.

3 Wat is de kamertemperatuur?

De kamertemperatuur komt overeen met $T_2(0)$ of $\lim\limits_{t \to +\infty} T_1(t)$ en bedraagt 19°C.

4 Vanaf welk tijdstip is het fruitsap kouder dan de melk?

Op dit ogenblik moeten leerlingen grafisch tewerk gaan of een CAS inschakelen. Ze vinden een snijpunt voor $t \approx 3{,}11$. Vanaf dan is het fruitsap kouder.

Opdracht 66 bladzijde 211

Een dierenarts moet een hond opereren. Ze gebruikt een verdovingsmiddel dat direct in de bloedbaan wordt gespoten. Na het inspuiten neemt de concentratie exponentieel af.

De halveringstijd is 2 uur. Dit wil zeggen dat na 2 uur nog 50 % van de oorspronkelijke hoeveelheid in het lichaam aanwezig is. Om de verdoving op gang te houden, moet er per kg lichaamsgewicht tenminste 20 milligram van het middel aanwezig zijn. De hond weegt 20 kg en de arts schat dat de operatie 70 minuten gaat duren.

1 Hoeveel milligram van het verdovingsmiddel zou de arts minstens moeten toedienen?

Stel b de toe te dienen hoeveelheid (in mg) en t de tijd in minuten, dan moet gelden:

$$b \cdot \left(\sqrt[120]{\frac{1}{2}}\right)^{70} = 400$$

Hierbij is $\sqrt[120]{\frac{1}{2}}$ de groeifactor per minuut.

Voor b vinden we: $$b = \frac{400}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{70}{120}}} \approx 599{,}3$$

De arts moet dus ongeveer 600 mg toedienen.

2 De arts besluit om aan het begin van de operatie een kleinere hoeveelheid toe te dienen en tijdens de operatie nog een tweede spuitje te geven. Ze begint met een spuitje van 500 mg en geeft na 30 minuten nog een tweede spuitje van 100 mg. Geef een formule voor de hoeveelheid verdovingsmiddel (in mg) als functie van de tijd (in minuten) in de eerste 30 minuten.

De beginwaarde is 500 en de groeifactor $\sqrt[120]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}$.

Bijgevolg is $$y = 500 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}\right)^{t} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{120}}$$

3 Idem voor de totale hoeveelheid in de periode van 30 tot 70 minuten.

Na 30 minuten is de hoeveelheid verdovingsmiddel

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{120}} \approx 420,45$$

Voor de periode van 30 tot 70 minuten is de groeifactor nog steeds $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}$, maar b moet nu zó gekozen worden dat

$$b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{120}} = 520,45$$

of dus

$$b = \frac{520,45}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} = 618,92$$

Voor t tussen 30 en 70 minuten geldt dus:

$$y = 618,92 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{120}}$$

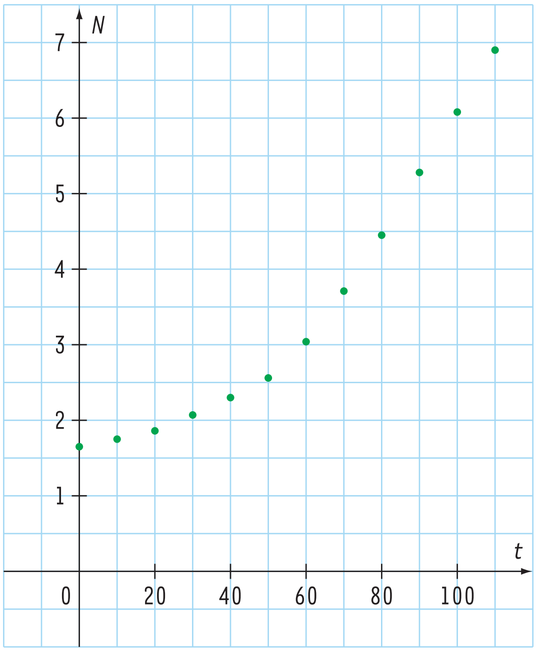
4 Toon aan dat er gedurende die 70 minuten steeds voldoende verdovingsmiddel in het lichaam van de hond aanwezig is om de verdoving op gang te houden.

Na 70 minuten is er nog $618,92 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{70}{120}} \approx 413$ mg verdovingsmiddel aanwezig, meer dan de 400 mg die vereist zijn.

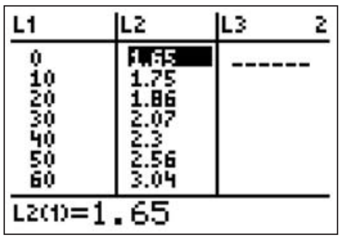
Opdracht 67 bladzijde 212

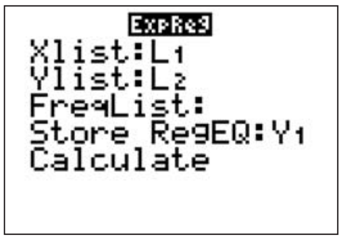
Stel je de wereldbevolking uit de tabel voor door punten, dan lijkt de groei exponentieel te verlopen.

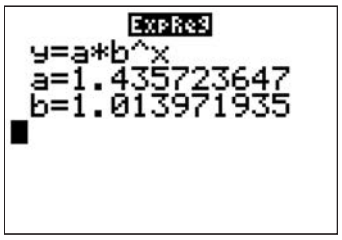
t (jaren t.o.v. 1900)	***N*** (in miljarden)
0	1,65
10	1,75
20	1,86
30	2,07
40	2,30
50	2,56
60	3,04
70	3,71
80	4,45
90	5,28
100	6,08
110	6,90



1 Gebruik software of je rekentoestel om bij deze gegevens een best passende exponentiële functie $N = b \cdot a^t$ te bepalen. Welk functievoorschrift krijg je?







Het voorschrift is $N = 1{,}4357 \cdot 1{,}0140^t$

(in berekeningen kan voor de groeifactor met meer cijfers na de komma gewerkt worden.)

2 Bereken hieruit voor deze periode de gemiddelde procentuele groei per jaar.

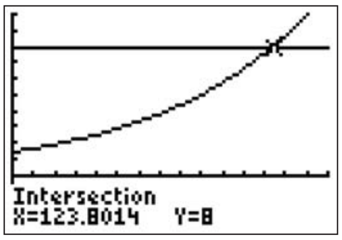
De jaarlijkse groei is ongeveer 1,40 %.

3 Op 31 oktober 2011 waren er officieel 7 miljard mensen op aarde. Is dit in overeenstemming met je model?

Deze datum komt overeen met $t = 111 + \dfrac{304}{365} \approx 111{,}83$.

Volgens ons model is $N(111{,}83) \approx 6{,}78$. Het model schat de wereldbevolking lager in dan in werkelijkheid het geval was.

4 Wanneer zullen we met 8 miljard zijn, indien deze best passende kromme ook voor de komende jaren gebruikt mag worden?



We zullen volgens dit model met 8 miljard zijn voor $t \approx 123{,}8$, m.a.w. eind 2023.

Opdracht 68 bladzijde 212

In paragraaf 4.1 aanvaardden we op basis van een voorbeeld dat de formule voor exponentiële groei ook voor negatieve en rationale waarden van de exponent geldig blijft. In de wiskunde volstaan voorbeelden niet om een bewering te bekrachtigen. In deze opdracht bewijzen we die bewering.

Van de functie f is gegeven:

- bij gelijke toenamen van de onafhankelijke variabele x worden de functiewaarden met eenzelfde getal vermenigvuldigd (dit is het kenmerk van exponentiële groei);
- $f(0) = 1$;
- $f(1) = a$.

1 Bewijs: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Stel b de factor waarmee de beeldwaarden vermenigvuldigd worden wanneer x met x_2 toeneemt.

Dan geldt: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot b$. $\quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad$ (1)

Bovendien geldt: $f(x_2) = f(0 + x_2) = 1 \cdot b = b$. $\quad$ (2)

Uit (1) & (2) volgt: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

2 Bewijs: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $f(n) = a^n$.

Dit bewijzen we mbv. volledige inductie.

1. Basisstap: $n = 0$

   $f(0) = 1 = a^0$

2. Inductiestap

   Stel $f(k) = a^k$ met k een natuurlijk getal.

   Dan geldt: $f(k+1) = f(k) \cdot f(1)$ (zie deelvraag 1)

   $= a^k \cdot a$ (inductiehypothese)

   $= a^{k+1}$

Uit 1 & 2 volgt dat $f(n) = a^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3 Bewijs dat voor elk strikt positief rationaal getal $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}_0)$ geldt: $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}$.

Stel $f\left(\frac{1}{n}\right) = b$.

Door volledige inductie op k is, op dezelfde manier als in 2, aan te tonen dat $f\left(\frac{k}{n}\right) = b^k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. (1)

Als gevolg hiervan is $f\left(\frac{n}{n}\right) = b^n$ en aangezien $f(1) = a$ vinden we $b^n = a$

$\Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{n}}$ (want $a, b > 0$). (2)

Uit (1) en (2) volgt: $f\left(\frac{k}{n}\right) = a^{\frac{k}{n}}$.

4 Bewijs dat voor elk strikt negatief rationaal getal q geldt: $f(q) = a^q$.

$q \in \mathbb{Q}_0^- \Rightarrow -q \in \mathbb{Q}_0^+$

$f(q + (-q)) = f(q) \cdot f(-q)$ (zie vraag 1)

$= f(q) \cdot a^{-q}$ (1) (zie vraag 3)

Bovendien: $f(q + (-q)) = f(0) = 1$ (2) (geg.)

Uit (1) en (2) volgt: $f(q) \cdot a^{-q} = 1$

$\Rightarrow f(q) = a^q$

Opdracht 69 bladzijde 213

Bereken de volgende logaritmen, als ze bestaan, zonder rekentoestel.

1 $^{3}\log 81 = 4$

2 $^{8}\log 8^{3} = 3$

3 $^{5}\log 1 = 0$

4 $^{-1}\log 1$ **bestaat niet**

5 $^{4}\log 4 = 1$

6 $^{4}\log(-64)$ **bestaat niet**

7 $\log\left(10^{^{27}\log 3}\right) = {}^{27}\log 3 = \frac{1}{3}$

8 $^{5}\log (5\sqrt{5})^{5} = {}^{5}\log \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{5} = {}^{5}\log 5^{\frac{15}{2}} = \frac{15}{2}$

9 $^{9}\log \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

10 $^{9}\log \left(27\sqrt[4]{3}\right) = {}^{9}\log \left(3^{3} \cdot 3^{\frac{1}{4}}\right) = {}^{9}\log 3^{\frac{13}{4}} = {}^{9}\log 9^{\frac{13}{8}} = \frac{13}{8}$

Opdracht 70 bladzijde 213

Welk antwoord is correct?

1 $\log(0{,}00001) =$

A -10000 **B** $10^{0{,}00001}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** -5 **E** $-\frac{1}{5}$

$\log(0{,}00001) = \log 10^{-5} = -5 \rightarrow$ **antwoord D**

2 $^{4}\log x$ verdubbelt als men

A x verdubbelt **B** x kwadrateert **C** x halveert **D** x verviervoudigt

$2 \cdot {}^{4}\log x = {}^{4}\log x^{2} \rightarrow$ **antwoord B**

3 Welke uitdrukking verandert niet van waarde wanneer je x alle strikt positieve getallen laat aannemen?

A $\log 5x + \log x$ **B** $\log 5x - \log x$ **C** $\log 5x \cdot \log x$ **D** $\frac{\log 5x}{\log x}$

$\log 5x - \log x = \log \frac{5x}{x} = \log 5 \rightarrow$ **antwoord B**

Opdracht 71 bladzijde 214

Bereken zonder rekentoestel.

1 $^3\log 36 - {}^3\log 4 \quad = {}^3\log \dfrac{36}{4} = {}^3\log 9 = 2$

2 $2 \cdot {}^3\log 5 - {}^3\log 50 + {}^3\log 2 \quad = {}^3\log \dfrac{5^2 \cdot 2}{50} = {}^3\log 1 = 0$

3 $^2\log 25 + {}^2\log 12 - {}^2\log 75 \quad = {}^2\log \dfrac{25 \cdot 12}{75} = {}^2\log 4 = 2$

4 $2 \cdot {}^4\log 6 - 3 \cdot {}^4\log 3 - {}^4\log \dfrac{2}{3} \quad = {}^4\log \dfrac{6^2 \cdot 3}{3^3 \cdot 2} = {}^4\log 2 = \dfrac{1}{2}$

5 $2 \cdot {}^8\log 6 - {}^8\log 90 + {}^8\log 5 \quad = {}^8\log \dfrac{6^2 \cdot 5}{90} = {}^8\log 2 = \dfrac{1}{3}$

6 $-{}^5\log(5\sqrt{5}) + 3 \cdot {}^5\log(2\sqrt{5}) - 2 \cdot {}^5\log(50\sqrt{2}) \quad = {}^5\log \dfrac{2^3 \cdot \sqrt{5}^3}{5\sqrt{5} \cdot 50^2 \cdot 2} = {}^5\log \dfrac{1}{5^4} = -4$

Opdracht 72 bladzijde 214

Schrijf elke uitdrukking als één logaritme.

1 $\log 7 + \log 4 + \log 5 \quad = \log(7 \cdot 4 \cdot 5) = \log 140$

2 $^3\log 10 - {}^3\log 5 \quad = {}^3\log \dfrac{10}{5} = {}^3\log 2$

3 $2 \cdot \log x - \dfrac{1}{2} \cdot \log(x-2) \quad = \log \dfrac{x^2}{\sqrt{x-2}}$

4 $^2\log 5 - {}^2\log 7 + {}^2\log 3 \quad = {}^2\log \dfrac{5 \cdot 3}{7} = {}^2\log \dfrac{15}{7}$

5 $3 \cdot ({}^3\log x + {}^3\log y - 2 \cdot {}^3\log z) \quad = {}^3\log\left(\left(\dfrac{x \cdot y}{z^2}\right)^3\right) = {}^3\log \dfrac{x^3\, y^3}{z^6}$

6 $9 \cdot \log 7 + 5 \cdot \log 23 \quad = \log(7^9 \cdot 23^5)$

7 $2 + 4 \cdot {}^5\log 3 \quad = {}^5\log 5^2 + {}^5\log 3^4 = {}^5\log(5^2 \cdot 3^4) = {}^5\log 2025$

8 $^3\log(a-b) + {}^3\log(a^2 + ab + b^2) \quad = {}^3\log((a-b)(a^2+ab+b^2)) = {}^3\log(a^3 - b^3)$

Opdracht 73 bladzijde 214

Stel dat a een strikt positief getal is dat verschillend is van 1. Bereken dan de volgende uitdrukkingen.

1 $^{a}\log a^{a} = a$

2 $^{\sqrt{a}}\log(^{a}\log a) = {}^{\sqrt{a}}\log 1 = 0$

3 $^{a}\log(^{a}\log a^{a}) = {}^{a}\log(a) = 1$

4 $a^{\left(^{a}\log \frac{1}{a^{2}}\right)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^{2}}$

5 $^{\sqrt[3]{a}}\log a = 3$

6 $^{\sqrt{a}}\log a^{a} = {}^{\sqrt{a}}\log \sqrt{a}^{2a} = 2a$

7 $^{a}\log a^{a^{3}} = a^{3}$

8 $^{a}\log\left(^{a}\log a^{a^{a}}\right) = {}^{a}\log a^{a} = a$

Opdracht 74 bladzijde 214

Bereken met je rekentoestel en rond af op twee cijfers na de komma.

1 $^{2}\log 3$

2 $^{3}\log 0{,}121$

3 $^{\frac{1}{2}}\log 1000$

4 $^{0{,}3}\log 8$

zie rekentoestel.

Opdracht 75 bladzijde 215

Bereken $u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$ zonder rekentoestel als $2^{u} = 3$, $3^{v} = 4$, $4^{w} = 5$, $5^{x} = 6$, $6^{y} = 7$ en $7^{z} = 8$.

$$
\begin{aligned}
u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z &= {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot {}^{4}\log 5 \cdot {}^{5}\log 6 \cdot {}^{6}\log 7 \cdot {}^{7}\log 8 \\
&= \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 6}} \cdot \frac{\log 8}{\cancel{\log 7}} \\
&= \frac{\log 8}{\log 2} \\
&= \frac{3 \log 2}{\log 2} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Opdracht 76 bladzijde 215

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\left(\sqrt{3}\right)^{{}^{3}\log 16} = 3^{\frac{1}{2}\cdot {}^{3}\log 16} = 3^{{}^{3}\log\sqrt{16}} = 3^{{}^{3}\log 4} = 4$

2 $\dfrac{{}^{4}\log 3 \cdot {}^{8}\log 4 \cdot {}^{16}\log 5}{{}^{8}\log 3 \cdot {}^{16}\log 4 \cdot {}^{32}\log 5} = \dfrac{\cancel{{}^{4}\log 3} \cdot \dfrac{\cancel{{}^{4}\log 4}}{\cancel{{}^{4}\log 8}} \cdot \dfrac{\cancel{{}^{4}\log 5}}{\cancel{{}^{4}\log 16}}}{\dfrac{\cancel{{}^{4}\log 3}}{\cancel{{}^{4}\log 8}} \cdot \dfrac{\cancel{{}^{4}\log 4}}{\cancel{{}^{4}\log 16}} \cdot \dfrac{\cancel{{}^{4}\log 5}}{{}^{4}\log 32}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{1}{{}^{4}\log 32}}$

$= {}^{4}\log 32$

$= \dfrac{5}{2}$

Opdracht 77 bladzijde 215

Toon aan (we veronderstellen dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn).

1 ${}^{ab}\log x = \dfrac{{}^{a}\log x}{1 + {}^{a}\log b}$

${}^{ab}\log x = \dfrac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log (ab)} = \dfrac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log a + {}^{a}\log b} = \dfrac{{}^{a}\log x}{1 + {}^{a}\log b}$

2 ${}^{c}\log ax = (1 + {}^{a}\log x) \cdot {}^{b}\log a \cdot {}^{c}\log b$

$(1 + {}^{a}\log x) \cdot {}^{b}\log a \cdot {}^{c}\log b = ({}^{a}\log a + {}^{a}\log x) \cdot \dfrac{{}^{a}\log a}{\cancel{{}^{a}\log b}} \cdot \dfrac{\cancel{{}^{a}\log b}}{{}^{a}\log c}$

$= {}^{a}\log(ax) \cdot \dfrac{1}{{}^{a}\log c}$

$= {}^{c}\log(ax)$

3 ${}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x + {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x + {}^{c}\log x \cdot {}^{a}\log x = \dfrac{{}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x}{{}^{abc}\log x}$

${}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x + {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x + {}^{c}\log x \cdot {}^{a}\log x$

$= \dfrac{\log x}{\log a} \cdot \dfrac{\log x}{\log b} + \dfrac{\log x}{\log b} \cdot \dfrac{\log x}{\log c} + \dfrac{\log x}{\log c} \cdot \dfrac{\log x}{\log a}$

$= \dfrac{(\log x)^2 \ (\log c + \log a + \log b)}{\log a \ \log b \ \log c}$

$= \dfrac{\log x \ \log x \ \log x \ \log (abc)}{\log a \ \log b \ \log c \ \log x}$

$$= \frac{{}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x}{\dfrac{\log x}{\log (abc)}}$$

$$= \frac{{}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x}{{}^{abc}\log x}$$

4 ${}^{ab}\log cd = \dfrac{{}^{a}\log c + {}^{a}\log d + {}^{b}\log c + {}^{b}\log d}{2 + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a}$

$$\frac{{}^{a}\log c + {}^{a}\log d + {}^{b}\log c + {}^{b}\log d}{2 + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a} = \frac{{}^{a}\log(cd) + {}^{b}\log(cd)}{{}^{a}\log a + {}^{b}\log b + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a}$$

$$= \frac{{}^{a}\log(cd) + {}^{b}\log(cd)}{{}^{a}\log(ab) + {}^{b}\log(ab)}$$

$$= \frac{\dfrac{{}^{ab}\log(cd)}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{{}^{ab}\log(cd)}{{}^{ab}\log b}}{\dfrac{{}^{ab}\log(ab)}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{{}^{ab}\log(ab)}{{}^{ab}\log b}}$$

$$= \frac{{}^{ab}\log(cd)\cancel{\left(\dfrac{1}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{1}{{}^{ab}\log b}\right)}}{\cancel{\dfrac{1}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{1}{{}^{ab}\log b}}}$$

$$= {}^{ab}\log(cd)$$

5 $a^{\log b} = b^{\log a}$

$$a^{\log b} = b^{\,{}^{b}\log(a^{\log b})} = b^{\log b \cdot {}^{b}\log a} = b^{\log b \cdot \frac{\log a}{\log b}} = b^{\log a}$$

Opdracht 78 bladzijde 215

Vereenvoudig: ${}^{a^b}\log a^{b^c}$.

$${}^{a^b}\log a^{b^c} = \frac{{}^{a}\log a^{b^c}}{{}^{a}\log a^{b}} = \frac{b^c}{b} = b^{c-1}$$

Opdracht 79 bladzijde 215

Bewijs: $\frac{1}{2} \cdot \log 5 = \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right) - \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)$.

$$\log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right) - \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)$$

$$= \log \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$= \log \frac{\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \log \frac{6+2\sqrt{5} + 2\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{6-2\sqrt{5}} + 6 - 2\sqrt{5}}{\left(6+2\sqrt{5}\right) - \left(6-2\sqrt{5}\right)}$$

$$= \log \frac{12 + 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}}{4\sqrt{5}}$$

$$= \log \frac{20}{4\sqrt{5}}$$

$$= \log \sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2} \log 5$$

Opdracht 80 bladzijde 215

1 Als ${}^{mn}\log m = 5$, bereken dan ${}^{mn}\log \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

$${}^{mn}\log \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = {}^{mn}\log \frac{m}{\sqrt{m \cdot n}} = {}^{mn}\log m - \frac{1}{2}\,{}^{mn}\log(mn) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

2 Als $a^2 + b^2 = 7ab$ $(a, b \in \mathbb{R}_0^+)$, bewijs dan dat $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} \log \frac{(a+b)^2}{9} = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} = \frac{1}{2} \log \frac{7ab + 2ab}{9}$$

$$= \frac{1}{2} \log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

Opdracht 81 bladzijde 215

Stel dat a en b twee positieve reële getallen zijn, waarvoor ${}^a\log b + {}^b\log a = 3$.

Wat is dan de waarde van $({}^a\log b)^2 + ({}^b\log a)^2$?

A 2 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2010)

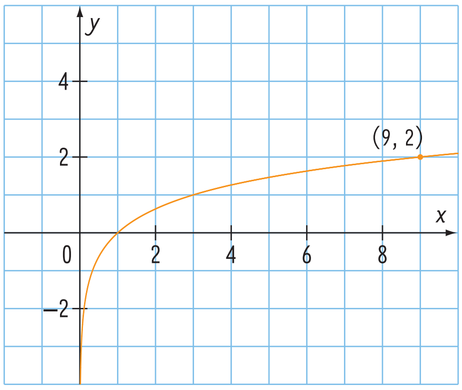
$${}^a\log b + {}^b\log a = 3 \Rightarrow ({}^a\log b + {}^b\log a)^2 = 9$$
$$\Rightarrow ({}^a\log b)^2 + 2\,{}^a\log b \cdot {}^b\log a + ({}^b\log a)^2 = 9$$
$$\Rightarrow ({}^a\log b)^2 + 2\,\cancel{{}^a\log b} \cdot \frac{{}^a\log a}{\cancel{{}^a\log b}} + ({}^b\log a)^2 = 9$$
$$\Rightarrow ({}^a\log b)^2 + ({}^b\log a)^2 = 7 \rightarrow \text{antwoord } C$$

Opdracht 82 bladzijde 216

De onderstaande krommen zijn grafieken van functies met voorschrift $f(x) = {}^a\log x$.

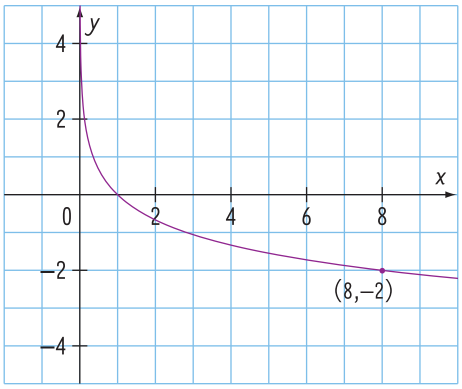
Bepaal a.

1



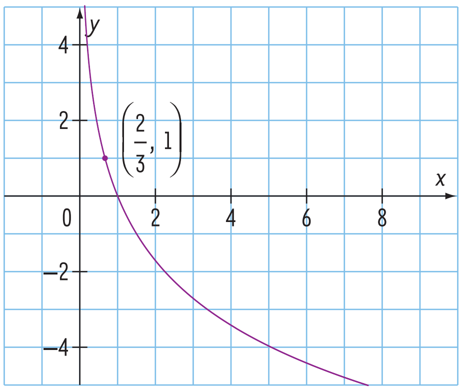
$${}^a\log 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 3$$

2



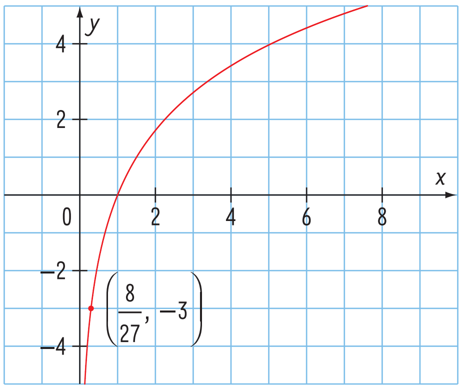
$${}^a\log 8 = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = 8$$
$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 8^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3



$${}^a\log \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

4

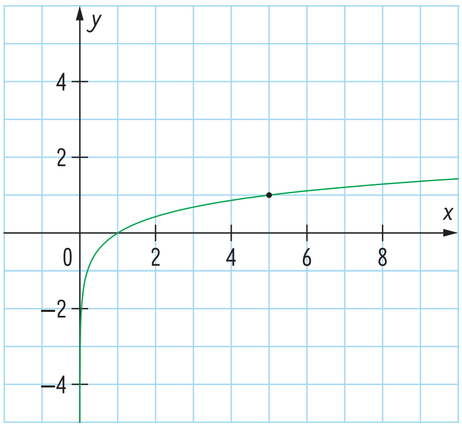


$$^{a}\log \frac{8}{27} = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow a = \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Opdracht 83 bladzijde 216

De volgende zes grafieken stellen exponentiële functies met voorschrift van de vorm $f(x) = a^x$ voor of logaritmische functies met voorschrift van de vorm $f(x) = {}^{a}\log x$. Geef van elke grafiek het voorschrift.

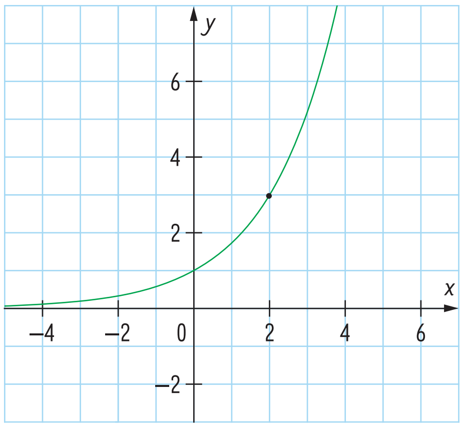
1



$$^{a}\log 5 = 1 \Leftrightarrow a = 5$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{5}\log x$$

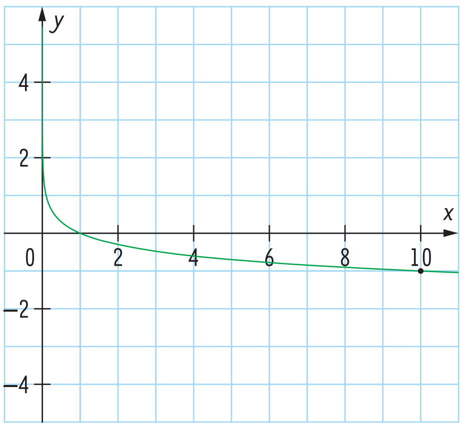
2



$$a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \qquad (a > 0)$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{3}^{\,x}$$

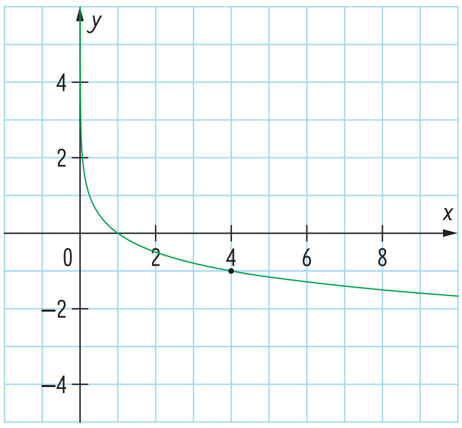
3



$$^{a}\log 10 = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = 10 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{\frac{1}{10}}\log x$$

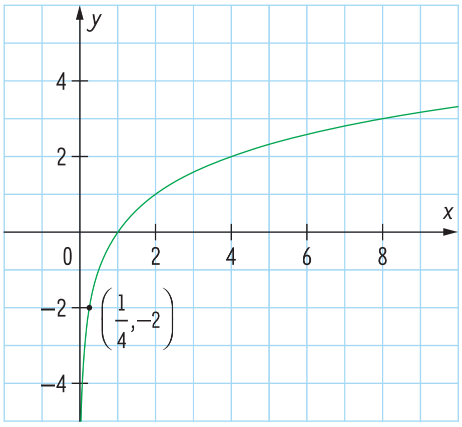
4



$$^{a}\log 4 = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log x$$

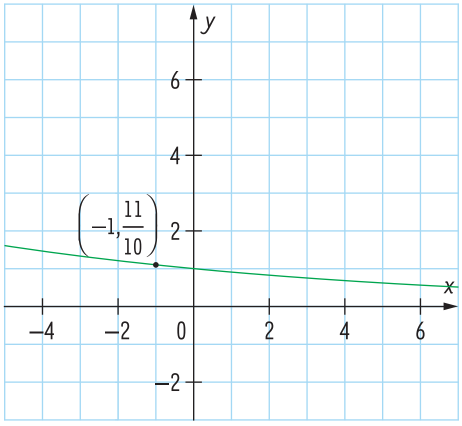
5



$^a\log \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow a = 2$

$\rightarrow f(x) = {}^2\log x$

6



$a^{-1} = \frac{11}{10} \Leftrightarrow a = \frac{10}{11}$

$\rightarrow f(x) = \left(\frac{10}{11}\right)^x$

Opdracht 84 bladzijde 217

Schets de grafiek van de functies, door minstens drie punten exact te bepalen.

1 $f: x \mapsto {}^4\log x$

2 $f: x \mapsto {}^{\frac{3}{4}}\log x$

3 $f: x \mapsto {}^{\sqrt{3}}\log x$

4 $f: x \mapsto {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log x$

Opdracht 85 bladzijde 217

Bepaal de inverse functie van

1 $f: x \mapsto 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$

$$y = 2\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 - \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

$$f^{-1}: x \mapsto {}^{\frac{1}{3}}\log\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

2 $f: x \mapsto 2 \cdot 10^{2x-3}$

$$y = 2 \cdot 10^{2x-3} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 10^{2x-3} \Leftrightarrow 2x - 3 = \log \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{2}\log \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

3 $f\colon x \mapsto \dfrac{5}{1+3\cdot 2^{-x}}$

$$y = \frac{5}{1 + 3 \cdot 2^{-x}} \Leftrightarrow 1 + 3 \cdot 2^{-x} = \frac{5}{y} \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{y} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -x = {}^{2}\log \frac{5 - y}{3y}$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{2}\log \frac{3y}{5 - y}$$

$$f^{-1}\colon x \mapsto {}^{2}\log \frac{3x}{5 - x}$$

4 $f\colon x \mapsto \log(2x+6)$

$$y = \log(2x + 6) \Leftrightarrow 2x + 6 = 10^{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 10^{y} - 3$$

$$f^{-1}\colon x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 10^{x} - 3$$

Opdracht 86 bladzijde 217

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log\,(9x)$.

1 Het voorschrift van f kan ook geschreven worden in de vorm $f(x) = a + {}^{\frac{1}{4}}\log x$. Bepaal a.

$${}^{\frac{1}{4}}\log(9x) = {}^{\frac{1}{4}}\log 9 + {}^{\frac{1}{4}}\log x \Rightarrow a = {}^{\frac{1}{4}}\log 9$$

2 Het voorschrift van f kan ook geschreven worden als $f(x) = b \cdot {}^{2}\log(9x)$.

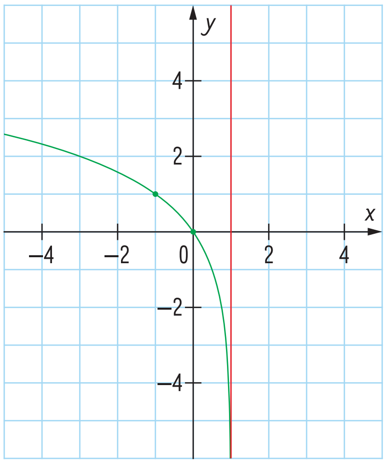
Bepaal b.

$${}^{\frac{1}{4}}\log(9x) = \frac{{}^{2}\log(9x)}{{}^{2}\log \frac{1}{4}} = \frac{1}{-2} \cdot {}^{2}\log(9x) \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

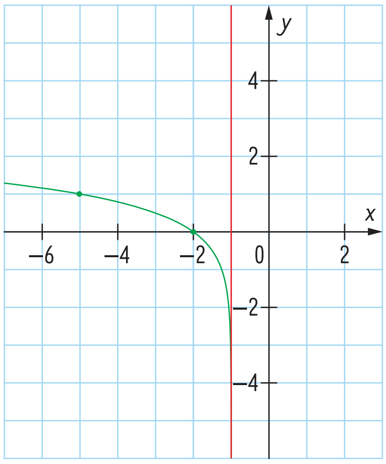
Opdracht 87 bladzijde 218

In de figuren hieronder is de grafiek van drie logaritmische functies getekend, evenals hun verticale asymptoot.

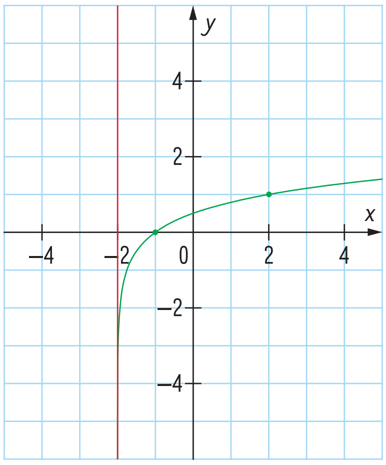
1



3



2



Bepaal voor elk van deze grafieken met welke functie hieronder ze overeenkomen.

$f: x \mapsto {}^2\log(x-1)$	$k: x \mapsto {}^2\log(1-x)$
$g: x \mapsto {}^4\log(x+2)$	$l: x \mapsto {}^2\log(x+2)$
$h: x \mapsto {}^4\log(1-x)$	$m: x \mapsto {}^4\log(-1-x)$

1. V.A. $x = 1 \Rightarrow {}^a\log(x - 1)$ of ${}^a\log(1 - x)$

   spiegeling om y-as $\Rightarrow y = {}^a\log(1 - x)$

   $y(-1) = 1 \Leftrightarrow {}^a\log 2 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \rightarrow$ functie k

2. $y = {}^a\log(x + 2)$ en $y(2) = 1 \Leftrightarrow {}^a\log 4 = 1 \Leftrightarrow a = 4 \rightarrow$ functie g

3. $y = {}^a\log(-1-x)$ en $y(-5) = 1 \Leftrightarrow {}^a\log 4 = 1 \Leftrightarrow a = 4 \rightarrow$ functie m

Opdracht 88 bladzijde 218

1 Geef het voorschrift van een stijgende logaritmische functie met domein $]5,+\infty[$.

Uit het domein volgt dat het voorschrift van de vorm $f(x) = {}^{a}\log(x - 5)$ is.

Kies $a > 1$ voor een stijgende functie.

2 Bedenk een mogelijk voorschrift voor een logaritmische functie f waarvoor geldt dat $f(0) = 0$ en $f(2) > 2$.

Begin met een functie g met voorschrift $g(x) = {}^{a}\log x$.

Er geldt $g(1) = 0$. Als a nu zo gekozen wordt dat $g(3) > 2$, dan voldoet $f(x) = g(x + 1)$ aan de gestelde eisen.

$$\begin{aligned} g(3) = 2 &\Leftrightarrow {}^{a}\log 3 = 2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{3} \qquad (a > 0) \end{aligned}$$

Kies $a < \sqrt{3}$ en $f(x) = {}^{a}\log(x + 1)$ voldoet aan $f(0) = 0$ en $f(2) > 2$.

(Er zijn verschillende andere manieren om een functie f te vinden.)

3 Bepaal een waarde voor a en b zodat voor de functie met voorschrift $f(x) = {}^{a}\log(bx)$ zou gelden dat $f(2) < 0$ en $f(3) > 1$.

Voor een functie $g(x) = {}^{a}\log x$ met $a > 1$ geldt:

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$g(x) > 1 \Leftrightarrow x > a$

Voor $f(x) = {}^{a}\log(bx)$ moet dus gelden:

$f(2) < 0 \Leftrightarrow 2b < 1$

$f(3) > 1 \Leftrightarrow 3b > a \quad (\text{met } a > 1)$

Kies bijvoorbeeld $b = \dfrac{2}{5}$ en $a = \dfrac{11}{10}$.

Opdracht 89 bladzijde 219

De atmosferische druk is afhankelijk van de hoogte boven de zeespiegel. Hiervoor geldt de formule $h = -18\,400 \cdot \log \dfrac{p}{p_0}$ waarbij p_0 de atmosferische druk op zeeniveau en p die op een hoogte van h meter boven de zeespiegel voorstelt.

1 Druk p uit in functie van h.

$$h = -18400 \log \frac{p}{p_0} \Leftrightarrow p = p_0 \cdot 10^{-\frac{h}{18400}}$$

2 Tot welke fractie van de druk op zeeniveau daalt de druk op het hoogste punt van de Passo di Pordoi in de Dolomieten, op 2239 m hoogte?

$h = 2239 \Rightarrow p = p_0 \cdot 10^{-\frac{2239}{18400}} \approx p_0 \cdot 0{,}7556.$

De druk bedraagt daar nog 75,56 % van de druk op zeeniveau.

3 Op welke hoogte is de atmosferische druk tot één derde van de waarde op zeeniveau gedaald?

$p = \frac{1}{3} p_0 \Leftrightarrow h = -18400 \cdot \log \frac{1}{3} \approx 8779$

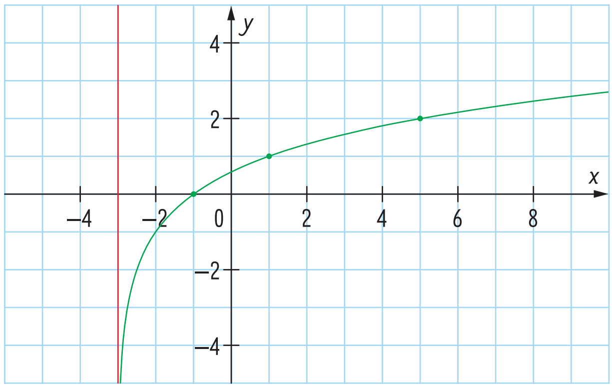
Op een hoogte van 8779 m bedraagt de druk nog één derde van die op zeeniveau.

Opdracht 90 bladzijde 219

De getekende grafieken en de asymptoten ervan horen bij functies met voorschrift $f(x) = {}^{a}\log(x + b) + c$.

Bepaal a, b en c.

1



V.A.: $x = -3 \Leftrightarrow b = 3$

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow {}^{a}\log 2 + c = 0 \quad (1)$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 + c = 1 \quad (2)$

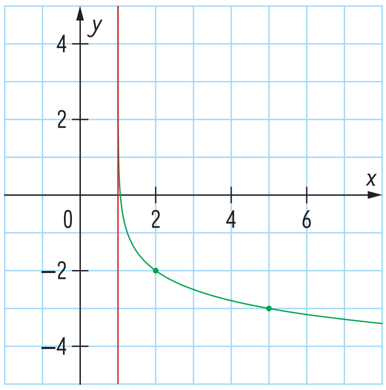
Uit (1): $c = -{}^{a}\log 2$.

In (2): $2 \cdot {}^{a}\log 2 + (-{}^{a}\log 2) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$

Hieruit volgt $c = -{}^{2}\log 2 = -1$.

Besluit: $a = 2$, $b = 3$ en $c = -1$.

2



V.A.: $x = 1 \Rightarrow b = -1$

$f(2) = -2 \Leftrightarrow {}^{a}\log 1 + c = -2 \Leftrightarrow c = -2$

$f(5) = -3 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 - 2 = -3 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Besluit: $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$, $c = -2$.

Opdracht 91 bladzijde 219

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van $f: x \mapsto {}^{4}\log(x+2) - 1$ te spiegelen om de rechte met vergelijking $x = 1$.

Bepaal het voorschrift van g.

Verschuif de grafiek van f één eenheid naar links. Je krijgt een grafiek die bij een functie $h: x \mapsto f(x + 1) = {}^{4}\log(x + 3) - 1$ hoort.

Vervolgens spiegel je die grafiek om de y-as. Die grafiek hoort bij

$i: x \mapsto h(-x) = {}^{4}\log(-x + 3) - 1$.

Tot slot verschuiven we de grafiek één eenheid naar rechts:

$g: x \mapsto i(x - 1) = {}^{4}\log(-x + 4) - 1$.

Opdracht 92 bladzijde 219

Stel $f(x) = {}^{2}\log({}^{3}\log x) - {}^{3}\log({}^{2}\log x)$ voor alle reële getallen $x \geqslant 3$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

A $f(x) > 0$ voor alle $x \geqslant 3$

B $f(x) < 0$ voor alle $x \geqslant 3$

C $f(x) = 0$ voor alle $x \geqslant 3$

D $f(x) = 0$ voor exact één waarde $x \geqslant 3$

E geen van de vorige is waar

Los op zonder rekentoestel.

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 1998)

We herschrijven f(x) door alle logaritmen naar grondtal 2 te herleiden:

$$\begin{aligned}
f(x) &= {}^{2}\log({}^{3}\log x) - {}^{3}\log({}^{2}\log x)\\
&= {}^{2}\log\left(\frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 3}\right) - \frac{{}^{2}\log({}^{2}\log x)}{{}^{2}\log 3}\\
&= {}^{2}\log({}^{2}\log x) - {}^{2}\log({}^{2}\log 3) - \frac{1}{{}^{2}\log 3}\,{}^{2}\log({}^{2}\log x)\\
&= \left(1 - \frac{1}{{}^{2}\log 3}\right)\cdot {}^{2}\log({}^{2}\log x) - {}^{2}\log({}^{2}\log 3)
\end{aligned}$$

Er geldt:

- ${}^{2}\log 3 > 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{{}^{2}\log 3} > 0$ (1)
- ${}^{2}\log x$ neemt toe voor toenemende x en dus neemt ook ${}^{2}\log({}^{2}\log x)$ voortdurend toe voor toenemende x. (2)
- Uit (1) & (2) volgt dat f stijgend is. (3)
- Op de rand van het domein geldt

  $$\begin{aligned} f(3) &= {}^{2}\log({}^{3}\log 3) - {}^{3}\log({}^{2}\log 3) \\ &= {}^{2}\log 1 - {}^{3}\log({}^{2}\log 3) \\ &= -{}^{3}\log({}^{2}\log 3) < 0 \qquad (\text{want } {}^{2}\log 3 > 1) \end{aligned}$$ (4)

- Als $x \to +\infty$ zal ${}^{2}\log x \to +\infty$ en dus zal ook ${}^{2}\log({}^{2}\log x) \to +\infty$. (5)

Besluit: uit (3), (4) en (5) volgt dat f(x) toeneemt van $-{}^{3}\log({}^{2}\log 3) < 0$ tot $+\infty$, zodat antwoord D het correcte antwoord is.

Opdracht 93 bladzijde 220

Los de volgende vergelijkingen op en rond af indien nodig op twee cijfers na de komma.

1 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} = 8$ $\quad\Leftrightarrow 3x = {}^{\frac{1}{2}}\log 8$

$\Leftrightarrow 3x = -3$

$\Leftrightarrow x = -1$

2 $10^{x-1} = 0{,}01$ $\quad\Leftrightarrow x - 1 = \log 0{,}01$

$\Leftrightarrow x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$

3 $3^{x} = 11$ $\quad\Leftrightarrow x = {}^{3}\log 11 \ (\approx 2{,}18)$

4 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{t} = 5$ $\quad\Leftrightarrow t = {}^{\frac{1}{3}}\log 5 \ (\approx -1{,}46)$

5 $2^{x+3} = 16^{x-3}$ $\quad\Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^{4(x-3)}$

$\Leftrightarrow x + 3 = 4x - 12$

$\Leftrightarrow x = 5$

6 $2^{2x-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$ $\quad\Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{-\frac{1}{2}x}$

$\Leftrightarrow 2x - 2 = -\dfrac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$

7 $\left(\frac{12}{7}\right)^y - \frac{3}{25} = 0$ $\quad\Leftrightarrow \left(\frac{12}{7}\right)^y = \frac{3}{25}$

$\Leftrightarrow y = {}^{\frac{12}{7}}\log \frac{3}{25}$ (≈ −3,93)

8 $27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{4x-1} = (\sqrt{3})^x$ $\quad\Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{-2(4x-1)} = 3^{\frac{1}{2}x}$

$\Leftrightarrow 3 - 8x + 2 = \frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow x = \frac{10}{17}$

9 $9 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 3^x$ $\quad\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \frac{3^x}{9}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 3^{x-2}$

$(\Leftrightarrow (x-2)\log\frac{2}{5} = (x-2)\log 3)$

$(\Leftrightarrow (x-2)\left(\log\frac{2}{5} - \log 3\right) = 0)$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

$a^x = b^x$ met $a \neq b$
$\Leftrightarrow x = 0$

10 $3^{4x+5} = 5^{x-1}$ $\quad\Leftrightarrow (4x+5)\log 3 = (x-1)\log 5$

$\Leftrightarrow (4\log 3 - \log 5)\,x = -\log 5 - 5\log 3$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\log 5 + 5\log 3}{4\log 3 - \log 5}$ (≈ −2,55)

Opdracht 94 bladzijde 220

Bereken *x* als

1 ${}^5\log(2x-5) = 0$

${}^5\log(2x-5) = 0$ $\qquad$ BVW: $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = 1$

$\Leftrightarrow x = 3$

2 $^{3}\log(x^2-1)=-1$

$$^{3}\log\,(x^2-1)=-1 \qquad \text{BVW: } x^2-1>0$$
$$\Leftrightarrow x^2-1=3^{-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3 $\log(x^2-5)-\log(5x-11)=0$

$$\log\,(x^2-5)-\log\,(5x-11)=0 \qquad \text{BVW: } x^2-5>0,\; 5x-11>0$$
$$\Leftrightarrow \log\,(x^2-5)=\log\,(5x-11)$$
$$\Leftrightarrow x^2-5=5x-11$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x=2} \text{ of } x=3$$

(x = 2 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

4 $^{2}\log(2x+3)+{}^{2}\log(x-1)={}^{2}\log(x^2+9)$

$$^{2}\log\,(2x+3)+{}^{2}\log\,(x-1)={}^{2}\log\,(x^2+9) \qquad \text{BVW: } 2x+3>0,\; x-1>0$$
$$\Leftrightarrow {}^{2}\log\,((2x+3)(x-1))={}^{2}\log\,(x^2+9)$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)(x-1)=x^2+9$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-12=0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x=-4} \text{ of } x=3$$

(x = -4 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

5 $^{3}\log(x+2)+{}^{3}\log(3x+14)=1$

$$^{3}\log\,(x+2)+{}^{3}\log\,(3x+14)=1 \qquad \text{BVW: } x+2>0,\; 3x+14>0$$
$$\Leftrightarrow {}^{3}\log\,((x+2)(3x+14))={}^{3}\log 3$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(3x+14)=3$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+20x+25=0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x=-5} \text{ of } x=-\frac{5}{3}$$

(x = -5 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

6 $^{2}\log(^{7}\log x) = -1$

$^{2}\log\,(^{7}\log x) = -1$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow\ ^{7}\log x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

7 $^{16}\log(^{5}\log x) = \frac{1}{4}$

$^{16}\log\,(^{5}\log x) = \frac{1}{4}$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow\ ^{5}\log x = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

$\Leftrightarrow x = 5^{2} = 25$

8 $^{4}\log(^{x}\log 5) = -1$

$^{4}\log\,(^{x}\log 5) = -1$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow\ ^{x}\log 5 = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} = 5$

$\Leftrightarrow x = 5^{4} = 625$

9 $^{2}\log x = {}^{3}\log x$

$^{2}\log x = {}^{3}\log x$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

10 $^{4}\log x = {}^{x}\log 4$

$^{4}\log x = {}^{x}\log 4$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow\ ^{4}\log x = \dfrac{^{4}\log 4}{^{4}\log x}$

$\Leftrightarrow (^{4}\log x)^{2} = 1$

$\Leftrightarrow\ ^{4}\log x = 1$ of $^{4}\log x = -1$

$\Leftrightarrow x = 4$ of $x = \frac{1}{4}$

Opdracht 95 bladzijde 221

Wat zijn de oplossingen van de vergelijking ${}^6\log(x-3) + {}^6\log(x+2) - {}^6\log 6 = 0$?

A er zijn geen oplossingen

B $x = 4$

C $x = 4$ en $x = -3$

D $x = -4$ en $x = 3$

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts)

$${}^6\log(x-3) + {}^6\log(x+2) - {}^6\log 6 = 0$$

BVW : $x - 3 > 0$
$x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow {}^6\log((x-3)(x+2)) = {}^6\log 6$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ of $\cancel{x = -3}$

(x = -3 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

Antwoord B is correct.

Opdracht 96 bladzijde 221

Los op.

1 $3^{x+1} < \frac{1}{81}$

$\Leftrightarrow 3^{x+1} < 3^{-4}$

$\Leftrightarrow x + 1 < -4$

$\Leftrightarrow x < -5$

2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2^{-\frac{x}{2}} \geqslant 2^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} \geqslant -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \leqslant 3$

3 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$

$\Leftrightarrow x - 1 > 4x$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$

4 $4^{x+3} > \left(\frac{1}{16}\right)^{x}$

$\Leftrightarrow 4^{x+3} > 4^{-2x}$

$\Leftrightarrow x + 3 > -2x$

$\Leftrightarrow x > -1$

5 $\sqrt{7^x} > \frac{1}{49}$ $\Leftrightarrow 7^{\frac{x}{2}} > 7^{-2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} > -2$

$\Leftrightarrow x > -4$

6 ${}^4\log(x-1) < -3$ BVW: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\Leftrightarrow {}^4\log(x - 1) < {}^4\log 4^{-3}$

$\Leftrightarrow x - 1 < \frac{1}{64}$

$\Leftrightarrow x < \frac{65}{64}$

Rekening houdend met de bestaansvoorwaarde zijn de oplossingen:

$1 < x < \frac{65}{64}$

7 ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x+1) > 1$ BVW: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log(2x + 1) > {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$

Rekening houdend met de bestaansvoorwaarde zijn de oplossingen:

$-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$

8 ${}^5\log x^3 \leqslant 4$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^5\log x^3 \leqslant {}^5\log 5^4$

$\Leftrightarrow x^3 \leqslant 5^4$

$\Leftrightarrow x \leqslant 5^{\frac{4}{3}}$

De oplossingen zijn: $0 < x \leqslant 5^{\frac{4}{3}}$

9 $^{2}\log \frac{1}{x} \geqslant \frac{3}{4}$

BVW: $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log \frac{1}{x} \geqslant {}^{2}\log 2^{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant 2^{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$

De oplossingen zijn : $0 < x \leqslant 2^{-\frac{3}{4}}$

10 $^{0,99}\log (x^2 + 2) < {}^{0,99}\log (3x)$

BVW: $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 > 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

x		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	−	0	+

$\Leftrightarrow x < 1$ of $x > 2$

De oplossingen zijn : $0 < x < 1$ of $x > 2$

Opdracht 97 bladzijde 221

Bij een kernramp is een hoeveelheid jodium 131 vrijgekomen. De radioactieve neerslag heeft een in de buurt gelegen weide besmet. Metingen wijzen uit dat de toegestane hoeveelheid becquerel 10 maal overschreden is (1 becquerel is 1 straling per seconde).

Hoeveel dagen moet men het vee uit de weide houden, als je weet dat de halveringstijd van jodium 131 gelijk is aan 8 dagen?

De groeifactor per 8 dagen is $\frac{1}{2} \Rightarrow$ per dag : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$

De evolutie van de hoeveelheid becquerel y in functie van de tijd t in dagen wordt beschreven door de formule $y = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, met b de beginhoeveelheid.

We zoeken t waarvoor $y = \frac{b}{10}$:

$$b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{b}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow t = 8 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{10} \approx 26{,}6$$

Na 27 dagen zal de hoeveelheid becquerel opnieuw onder de toegestane waarde zitten.

Opdracht 98 bladzijde 221

De wereldwijde uitstoot van broeikasgassen uit fossiele brandstof nam van 2000 tot 2006 met 20 procent toe, tot een record van 8,38 miljard ton in 2006.

1 Bereken de jaarlijkse procentuele toename van de broeikasgassen.

Groeifactor per 6 jaar: 1,2

$\Rightarrow$ per jaar: $1,2^{\frac{1}{6}} \approx 1,0309$

De jaarlijkse procentuele groei bedraagt 3,09%.

2 Stel een formule op die de jaarlijkse uitstoot y (in miljard ton) berekent in functie van de tijd t (in jaren vanaf 2006), als je exponentiële groei veronderstelt.

$$y = 8,38 \cdot 1,2^{\frac{t}{6}}$$

3 Stel dat deze trend zich doorzet, in welk jaar zal de uitstoot dan 20 miljard ton bedragen?

$$y = 20 \Leftrightarrow 8,38 \cdot 1,2^{\frac{t}{6}} = 20$$
$$\Leftrightarrow t = 6 \cdot {}^{1,2}\log \frac{20}{8,38}$$
$$\Leftrightarrow t \approx 28,6$$

In 2035 zal de uitstoot minstens 20 miljard ton bedragen.

4 Bereken de verdubbelingstijd in jaren.

$$b \cdot 1,2^{\frac{t}{6}} = 2b \Leftrightarrow 1,2^{\frac{t}{6}} = 2 \Leftrightarrow t = 6 \cdot {}^{1,2}\log 2 \approx 22,81$$

De verdubbelingstijd is 22,81 jaar.

Opdracht 99 bladzijde 222

Het RIZIV (Rijksinstituut voor ziekte- en invaliditeitsverzekering) gaf in 2004 een bedrag van 91,7 miljoen euro uit voor geneesmiddelen van kinderen en jongeren onder de 20 jaar. In 2009 was dat 146,3 miljoen euro.

(Bron: Het Laatste Nieuws, 19 mei 2011)

1 Wat is de groeifactor en procentuele groei voor de periode 2004-2009?

Groeifactor: $\frac{146,3 \cdot 10^6}{91,7 \cdot 10^6} \approx 1,5954 \Rightarrow$ procentuele groei: 59,54%

2 Stel dat de procentuele jaarlijkse toename van de uitgaven nagenoeg constant is. Wat zou dan de procentuele toename per jaar zijn?

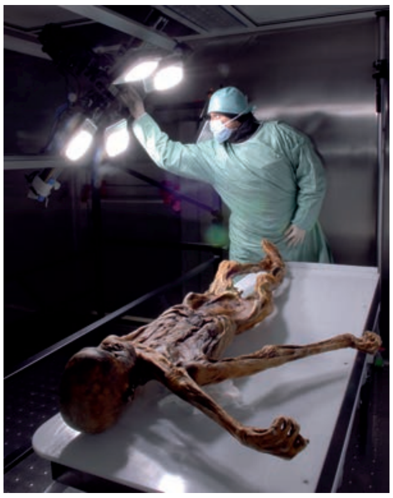
Per jaar: groeifactor: $1,5954^{\frac{1}{5}} \approx 1,0979 \Rightarrow$ procentuele groei: 9,79%

3 Indien de jaarlijkse procentuele toename constant is, wanneer zal het RIZIV dan wellicht de kaap van de 200 miljoen euro bereiken?

$$146,3 \cdot 1,0979^t = 200 \Leftrightarrow t = {}^{1,0979}\log \frac{200}{146,3} \approx 3,35$$

Aangezien $t = 0$ overeenkomt met 2009, zal in 2013 de kaap van 200 miljoen euro voor het eerst overschreden worden.

Opdracht 100 bladzijde 222



In 1991 ontdekten enkele bergwandelaars in de Alpen een gemummificeerd lijk. Uit onderzoek bleek dat deze 'ijsman van de Alpen', die later Ötzi werd gedoopt, al duizenden jaren oud was.

Via de koolstof 14-methode ontdekte men dat de concentratie ^{14}C in het lichaam ongeveer 53% bedroeg van de concentratie in levende organismen.

De ^{14}C-concentratie c evolueert volgens het voorschrift $c(t) = c_0 \cdot 0{,}99988^t$ met c_0 de beginconcentratie, m.a.w. de concentratie in levende organismen en t in jaren vanaf het afsterven.

Gebruik deze gegevens om te schatten wanneer Ötzi ongeveer leefde.

$c(t) = 0{,}53 \cdot c_0 \Leftrightarrow c_0 \cdot 0{,}99988^t = 0{,}53\ c_0$

$\Leftrightarrow t = {}^{0{,}99988}\log 0{,}53 \approx 5290$

Ötzi leefde rond 3300 vóór Christus.

Opdracht 101 bladzijde 222

In een grot in Lascaux (Frankrijk), waar beroemde grotschilderingen zijn aangetroffen, vond men restanten van houtskool. Dit bevatte nog ongeveer 14 % van de koolstof 14 die men in levend hout aantreft.

Schat de ouderdom van de houtskool op honderd jaar nauwkeurig. Gebruik hiertoe de formule uit de vorige opdracht.

$c(t) = 0{,}14 \cdot c_0 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}99988}\log 0{,}14 \approx 16383$

De houtskool is ongeveer 16400 jaar oud.

Opdracht 102 bladzijde 223

Los de volgende exponentiële vergelijkingen op.

1 $3^{\sqrt{x}+1} = 3^{x-5}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = x - 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 6$

$\Leftrightarrow x = (x-6)^2$ KVW: $x - 6 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 4}$ of $x = 9$ (x = 4 voldoet niet aan de kwadrateringsvoorwaarde)

2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{5}{2}\right)^{x^3-10x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x^3+10x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 12 = -x^3 + 10x$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 10x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ of $x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ of $x = 1 \pm \sqrt{5}$

3 $15 \cdot 3^{x+1} - 243 \cdot 5^{x-2} = 0$ $\Leftrightarrow 5 \cdot 3 \cdot 3^{x+1} = 3^5 \cdot 5^{x-2}$

$\Leftrightarrow 3^{x-3} = 5^{x-3}$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

4 $2 \cdot 10^{2x-1} - 3 \cdot 5^{3x+1} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 10^{2x-1} = 3 \cdot 5^{3x+1}$

$\Leftrightarrow \log 2 + 2x - 1 = \log 3 + (3x+1) \cdot \log 5$

$\Leftrightarrow (2 - 3\log 5)\,x = \log 3 + \log 5 - \log 2 + 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{2}}{\log \frac{100}{5^3}} = \frac{\log 75}{\log \frac{4}{5}} = {}^{\frac{4}{5}}\log 75$$

5 $7^{2x} - 9 \cdot 7^x + 14 = 0$ $\Leftrightarrow y^2 - 9 \cdot y + 14 = 0$ met $y = 7^x$

$\Leftrightarrow y = 2$ of $y = 7$

$\Leftrightarrow 7^x = 2$ of $7^x = 7$

$\Leftrightarrow x = {}^7\log 2$ of $x = 1$

6 $4^{x+1} = 6 + 10 \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x - 6 = 0$ vierkantsvergelijking in 2^x

$\Leftrightarrow 2^x = 3$ of $\cancel{2^x = -\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = {}^2\log 3$

7 $5^{-2x+1} - 29 \cdot 5^{-x} + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 5 \cdot (5^{-x})^2 - 29 \cdot 5^{-x} + 20 = 0$ vierkantsvergelijking in 5^{-x}

$\Leftrightarrow 5^{-x} = 5$ of $5^{-x} = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $x = -{}^5\log \frac{4}{5} = {}^5\log \frac{5}{4}$

8 $8^x = 5 \cdot 4^x + 6 \cdot 2^{x+2}$ $\Leftrightarrow (2^x)^3 - 5 \cdot (2^x)^2 - 24 \cdot 2^x = 0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2^x = -3}$ of $2^x = 8$

$\Leftrightarrow x = 3$

9 $\frac{1}{25} \cdot 8^x + 125^x = 4^{1,5x} - 5^{3x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{25} \cdot 2^{3x} + 5^{3x} = 2^{3x} - 5 \cdot 5^{3x}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 5^{3x} = \frac{24}{25} \cdot 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 25 \cdot 5^{3x} = 4 \cdot 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 5^{3x+2} = 2^{3x+2}$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

10 $11 \cdot 6^{1-x} - 8 \cdot 6^{x-1} = 18$ $\Leftrightarrow \frac{11}{y} - 8y = 18$ met $y = 6^{x-1}$

$\Leftrightarrow 8y^2 + 18y - 11 = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{11}{4}$ of $y = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cancel{6^{x-1} = -\frac{11}{4}}$ of $6^{x-1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = {}^6\log \frac{1}{2} + 1 = {}^6\log 3$

Opdracht 103 bladzijde 223

Los de volgende logaritmische vergelijkingen op.

1 ${}^3\log x \cdot {}^9\log x \cdot {}^{81}\log x = 54$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^3\log x \cdot \frac{{}^3\log x}{{}^3\log 9} \cdot \frac{{}^3\log x}{{}^3\log 81} = 54$

$\Leftrightarrow ({}^3\log x)^3 = 54 \cdot 2 \cdot 4$

$\Leftrightarrow {}^3\log x = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x = 3^{6\sqrt[3]{2}}$

2 $^{\frac{1}{3}}\log\left({}^{\frac{1}{x}}\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ BVW: $\frac{1}{x} > 0$ en $\frac{1}{x} \neq 1$

$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{x}}\log\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3$

$\Leftrightarrow x = 3^{\sqrt{3}}$

3 $^{5}\log(5^x-7)-{}^{25}\log 324=2-x$ BVW: $5^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{5}\log(5^x-7) + {}^{5}\log 5^x = \frac{^{5}\log 324}{^{5}\log 25} + {}^{5}\log 5^2$

$\Leftrightarrow {}^{5}\log((5^x-7)\cdot 5^x) = {}^{5}\log(18\cdot 25)$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 7\cdot 5^x - 450 = 0$

$\Leftrightarrow 5^x = 25$ of $\cancel{5^x = -18}$

$\Leftrightarrow x = 2$

4 $^{3}\log(x-3)=\frac{1}{2\cdot{}^{2}\log 3}+{}^{81}\log(3x-13)^2$ BVW: $x - 3 > 0$, $3x - 13 \neq 0$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log(x-3) = \frac{1}{2}\cdot{}^{3}\log 2 + \frac{1}{4}\,{}^{3}\log\left(\left(3x-13\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3x-13}$ of $x - 3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13-3x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2(3x-13)$ of $x^2 - 6x + 9 = 2(13-3x)$ KVW: $x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$ of $x^2 = 17$

$\Leftrightarrow x = 5$ of $x = 7$ of $\cancel{x = -\sqrt{17}}$ of $x = \sqrt{17}$

5 $x - 2 + {}^{2}\log(2^x - 3) = {}^{4}\log 49$ BVW: $2^x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log 2^x + {}^{2}\log(2^x - 3) = \frac{1}{2}\,{}^{2}\log 49 + {}^{2}\log 2^2$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 28 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2^x = -4}$ of $2^x = 7$

$\Leftrightarrow x = {}^{2}\log 7$

6 ${}^{x}\log(3x - 4) = 2$ BVW: $3x - 4 > 0$
$x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 3x - 4$

geen oplossingen ($D < 0$)

7 ${}^{x-1}\log(5x - 9) = 2$ BVW: $x - 1 > 0$ en $x - 1 \neq 1$
$5x - 9 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5x - 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5x - 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 2}$ of $x = 5$

8 ${}^{x}\log(x^2 - 2x + 2) = 1$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$
$x^2 - 2x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 1}$ of $x = 2$

9 ${}^{4}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 3 \cdot {}^{2}\log x + {}^{8}\log(x^3)$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 3 \cdot {}^{2}\log x + \frac{1}{3}\,{}^{2}\log x^3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 4 \cdot {}^{2}\log x$

$\Leftrightarrow {}^{x}\log 7 = 8$

$\Leftrightarrow x^8 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[8]{7}$

10 $\frac{1}{{}^{x+6}\log x} + {}^{x}\log(x - 1) = 2 + \frac{1}{{}^{2}\log x}$ BVW: $x + 6 > 0$ en $x + 6 \neq 1$
$x > 0$ en $x \neq 1$
$x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{x}\log(x + 6) + {}^{x}\log(x - 1) = {}^{x}\log x^2 + {}^{x}\log 2$

$\Leftrightarrow (x + 6)(x - 1) = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = 3$

Opdracht 104 bladzijde 223

Los de volgende stelsels op.

1 $\begin{cases} 5^x \cdot {}^3\log y = 2 \\ 5^{x+1} + {}^3\log y = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x\,(11 - 5^{x+1}) = 2 \\ {}^3\log y = 11 - 5^{x+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot (5^x)^2 + 11 \cdot 5^x - 2 = 0 \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot 5^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = \dfrac{1}{5} \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot \dfrac{1}{5} \end{cases}$ of $\begin{cases} 5^x = 2 \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3^{10} \end{cases}$ of $\begin{cases} x = {}^5\log 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3\log x - \log y = \log 1024 \\ 2\log x - \log y^3 = 2\log 2 \end{cases}$ BVW: $x > 0$ en $y > 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ {}^2\log x - {}^2\log y = {}^2\log 1024 \\ 2 \cdot {}^2\log x - 3 \cdot {}^2\log y = {}^2\log 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v = 10 \\ 2u - 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^2\log x = 4 \\ {}^2\log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}$

Opdracht 105 bladzijde 224

Los op: $3^{{}^x\log(3x^3)} - 3^{{}^x\log 9x} = 9 - 9^{{}^x\log\sqrt{3}}$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow 3^{{}^x\log 3 + 3} - 3^{2 \cdot {}^x\log 3 + 1} = 3^2 - 3^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^x\log 3}$

$\Leftrightarrow 27\,y - 3 \cdot y^2 = 9 - y$ met $y = 3^{{}^x\log 3}$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 28y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}$ of $y = 9$

$\Leftrightarrow 3^{{}^x\log 3} = \dfrac{1}{3}$ of $3^{{}^x\log 3} = 9$

$\Leftrightarrow {}^x\log 3 = -1$ of ${}^x\log 3 = 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ of $x = \sqrt{3}$

Opdracht 106 bladzijde 224

1 De oplossingen van de exponentiële vergelijking $[f(x)]^{g(x)} = 1$ vallen uiteen in drie categorieën. Leg uit.

$(f(x))^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$
of $g(x) = 0$ en $f(x) \neq 0$
of $f(x) = -1$ en $g(x)$ is even

2 Los nu de volgende vergelijkingen op.

a $(3x-2)^{2x+3} = 1$

① $3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

② $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ (en dan is $3x - 2 \neq 0$)

③ $3x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ maar dan is de exponent niet even

Oplossingen : $x = 1$ of $x = -\dfrac{3}{2}$

b $(2x-3)^{x^2+2x-15} = 1$

① $2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

② $x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ of $x = 3$ (hiervoor is $2x - 3 \neq 0$)

③ $2x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1$. Hiervoor is de exponent -12.

Oplossingen : $x = -5$ of $x = 1$ of $x = 2$ of $x = 3$

c $(3x^2-5x+1)^{2x^2-8x-10} = 1$

① $3x^2 - 5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{5}{3}$

② $2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 5$ ($3x^2 - 5x + 1 \neq 0$)

③ $3x^2 - 5x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = \dfrac{2}{3}$

Voor $x = 1$ is $2x^2 - 8x - 10$ gelijk aan -16

Voor $x = \dfrac{2}{3}$ is $2x^2 - 8x - 10$ gelijk aan $-\dfrac{130}{9}$ maar $(-1)^{-\frac{130}{9}}$ is niet gedefinieerd.

Oplossingen : $x = -1$ of $x = 0$ of $x = 1$ of $x = \dfrac{5}{3}$ of $x = 5$

Opdracht 107 bladzijde 224

1 Los de vergelijking $x^{^2\log x} = p\sqrt{2}$ op voor $p = 8$.

$x^{^2\log x} = 8\sqrt{2}$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow \left(2^{^2\log x}\right)^{^2\log x} = 2^{\frac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(^2\log x\right)^2 = \dfrac{7}{2}$

$\Leftrightarrow {}^2\log x = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$ of ${}^2\log x = -\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow x = 2^{\sqrt{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{14}}{2}}$ of $x = 2^{-\sqrt{\frac{7}{2}}} = 2^{-\frac{\sqrt{14}}{2}}$

2 Voor welke waarden van p heeft de bovenstaande vergelijking minstens één oplossing?

$x^{^2\log x} = p\sqrt{2} \Leftrightarrow (^2\log x)^2 = {}^2\log p + \dfrac{1}{2}$

Deze vergelijking heeft maar oplossingen wanneer

${}^2\log p + \dfrac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow {}^2\log p \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow {}^2\log p \geqslant {}^2\log \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Opdracht 108 bladzijde 225

iPad knabbelt aan pc-verkoop

De wereldwijde pc-verkoop zal dit jaar stijgen, maar minder dan verwacht. De schuldigen zijn de iPad en andere tablet-pc's.
Voor 2010 voorspelt analistenbureau Gartner dat er 352,4 miljoen computers verkocht zullen worden. Dat is een puik cijfer, dat 14,3 procent hoger ligt dan vorig jaar. Toch was de verwachting in september nog hoger, met een groei van 17,9 procent.

(Bron © ZDNet België, 30 november 2010)

1 Hoeveel computers werden er wereldwijd in 2009 verkocht?

$x \cdot 1{,}143 = 352{,}4 \Leftrightarrow x = 308{,}3$

In 2009 werden ongeveer 308,3 miljoen computers verkocht.

2 Stel dat de verwachte groei van 17,9 % ten opzichte van 2009 was uitgekomen. Hoeveel computers zouden er dan in 2010 verkocht zijn?

$308{,}3 \cdot 1{,}179 = 363{,}5$

Er zouden dan ongeveer 363,5 miljoen computers verkocht zijn.

3 Als de computerverkoop jaarlijks blijft groeien met 14,3 %, hoeveel computers zullen er dan dit jaar verkocht worden?

/

Opdracht 109 bladzijde 225

Bereken zonder rekentoestel.

1. $^{64}\log 16 = \frac{2}{3}$

2. $^{27}\log \frac{1}{9} = \frac{-2}{3}$

3. $^{2}\log(^{2}\log 256) = {}^{2}\log(8) = 3$

4. $\log(\log 10) = \log 1 = 0$

5. $^{125}\log 5^{33} = {}^{125}\log (5^3)^{11} = 11$

6. $\frac{\log 49}{\log 7} = \frac{2\ \log 7}{\log 7} = 2$

7. $^{5}\log 36 \cdot {}^{6}\log 5 = \frac{\log 36}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\log 6} = \frac{2\ \cancel{\log 6}}{\cancel{\log 6}} = 2$

8. $^{5}\log 3 + {}^{\frac{1}{5}}\log 3 = {}^{5}\log 3 + \frac{^{5}\log 3}{^{5}\log \frac{1}{5}} = 0$

9. $\frac{\log(10\sqrt{10})}{\log 0{,}1} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} = -\frac{3}{2}$

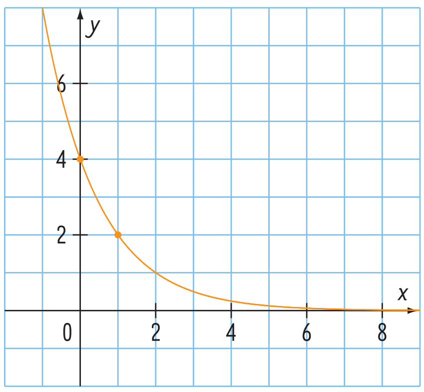
10. $^{2}\log\left[(^{9}\log 3)^{^{3}\log 9}\right] = {}^{2}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2 \cdot {}^{2}\log 2^{-1} = -2$

Opdracht 110 bladzijde 226

De grafieken hieronder horen bij functies met voorschrift $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot a^x$ of $f(x) = {}^{a}\log x$.

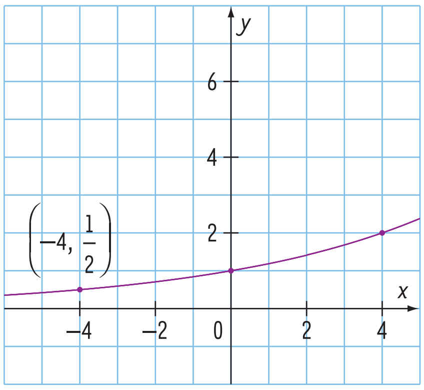
Bepaal het exacte voorschrift.

1



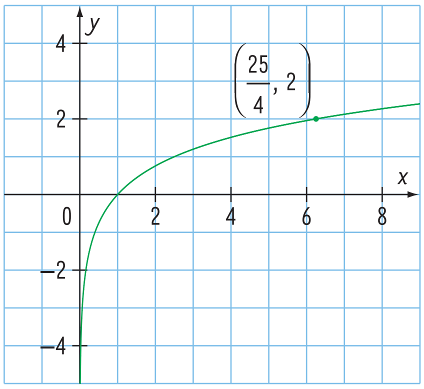
$b \cdot a^0 = 4 \Leftrightarrow b = 4$ en $4 \cdot a^1 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2



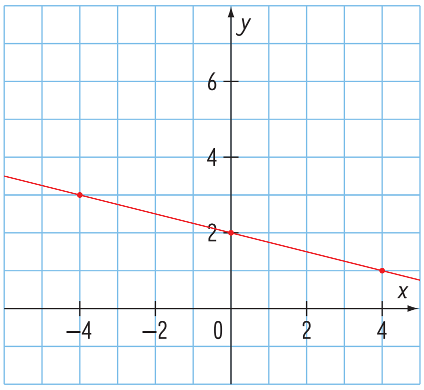
$b \cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow b = 1$ en $a^{-4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt[4]{2}^{\,x}$

3



${}^{a}\log \dfrac{25}{4} = 2 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{2}\ (a > 0) \Rightarrow f(x) = {}^{\frac{5}{2}}\log x$

4



$f(x) = 2 - \dfrac{1}{4}x$

Opdracht 111 bladzijde 226

De temperatuur T (in °C) van een kop koffie t minuten na het inschenken wordt gegeven door de formule $T = 20 + 55 \cdot 0{,}85^t$.

1 Wat is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

$T(0) = 75$

Bij het inschenken is de temperatuur van de koffie 75°C.

2 Wat is de temperatuur van de koffie 5 minuten na inschenken?

$T(5) \approx 44$

Na vijf minuten is de temperatuur 44°C.

3 De koffie is pas drinkbaar als de temperatuur hoogstens 60 °C is.
Hoeveel minuten en seconden moet je na het inschenken wachten om van de koffie te kunnen drinken?

$$T(t) = 60 \iff 20 + 55 \cdot 0{,}85^t = 60$$

$$\iff t = {}^{0{,}85}\log \frac{40}{55} \approx 1{,}9595$$

Aangezien $0{,}9595 \cdot 60 \approx 58$, geldt dat de temperatuur 60°C bereikt vanaf 1 minuut en 58 seconden na het inschenken.

Opdracht 112 bladzijde 226

Als x, y en z strikt positieve getallen zijn verschillend van 1, toon dan aan dat ${}^{z^2}\log x \cdot {}^{x^2}\log y \cdot {}^{y^2}\log z$ gelijk is aan een constante en bepaal deze constante.

$${}^{z^2}\log x \cdot {}^{x^2}\log y \cdot {}^{y^2}\log z = \frac{\cancel{\log x}}{2\cancel{\log z}} \cdot \frac{\cancel{\log y}}{2\cancel{\log x}} \cdot \frac{\cancel{\log z}}{2\cancel{\log y}} = \frac{1}{8}$$

Opdracht 113 bladzijde 226

Toon aan (we veronderstellen dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn).

1 ${}^{c}\log a \cdot {}^{d}\log b = {}^{c}\log b \cdot {}^{d}\log a$

$${}^{c}\log a \cdot {}^{d}\log b = \frac{\log a}{\log c} \cdot \frac{\log b}{\log d} = \frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log a}{\log d} = {}^{c}\log b \cdot {}^{d}\log a$$

2 $^{\frac{1}{p}}\log \frac{1}{q} \cdot {}^{q}\log p \cdot {}^{s}\log r = \dfrac{^{p}\log r + {}^{q}\log r}{^{p}\log s + {}^{q}\log s}$

$$\frac{^{p}\log r + {}^{q}\log r}{^{p}\log s + {}^{q}\log s} = \frac{\dfrac{\log r}{\log p} + \dfrac{\log r}{\log q}}{\dfrac{\log s}{\log p} + \dfrac{\log s}{\log q}}$$

$$= \frac{\log r\left(\dfrac{1}{\log p} + \dfrac{1}{\log q}\right)}{\log s\left(\dfrac{1}{\log p} + \dfrac{1}{\log q}\right)}$$

$$= \frac{\log r}{\log s}$$

$$= {}^{s}\log r$$

$$= {}^{s}\log r \cdot \frac{\log p}{\log q} \cdot \frac{\log q}{\log p}$$

$$= {}^{s}\log r \cdot {}^{q}\log p \cdot \frac{\log \frac{1}{q}}{\log \frac{1}{p}}$$

$$= {}^{s}\log r \cdot {}^{q}\log p \cdot {}^{\frac{1}{p}}\log \frac{1}{q}$$

Opdracht 114 bladzijde 227

De sterkte van het geluid dat we horen, noemen we het geluidsniveau N. Dit wordt uitgedrukt in decibel (dB). Om het geluidsniveau te bepalen, wordt de geluidsintensiteit I gemeten in Watt per vierkante meter (W/m^2).

Het geluidsniveau N kun je uit de intensiteit I berekenen met de formule:

$N = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ met $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

1 Van het geluid op een rustige dag buiten is de intensiteit I ongeveer 10^{-7} W/m^2.
Bereken het bijbehorende geluidsniveau.

$$N = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50$$

Het geluidsniveau is dan 50 dB.

2 Op diezelfde rustige dag rijdt een bromfiets voorbij. Het geluidsniveau N neemt daardoor toe met 30 dB. Hoe groot is de geluidsintensiteit I op dat ogenblik?

$$N = 80 \quad \Leftrightarrow \quad I = 10^{-4} \text{ (want dan is } \frac{I}{I_0} = 10^{8}\text{)}$$

De geluidsintensiteit is dan 10^{-4} $\dfrac{W}{m^2}$.

3 Reken na dat telkens wanneer de intensiteit verdubbelt het geluidsniveau met ongeveer 3 dB toeneemt.

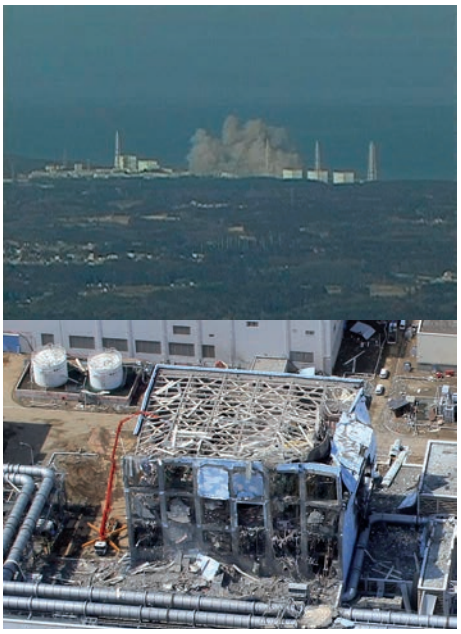
$$10 \log \frac{2I}{I_0} = 10\left(\log \frac{I}{I_0} + \log 2\right)$$
$$= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} + 10 \cdot 0{,}301$$
$$\approx 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} + 3$$

4 Stel een formule op voor de geluidsintensiteit in functie van het geluidsniveau.

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{N}{10}}$$

Opdracht 115 bladzijde 227

Op 11 maart 2011 werd Japan getroffen door een hevige aardbeving, gevolgd door een verwoestende tsunami. Dit zorgde voor een hele reeks problemen in de kerncentrale van Fukushima. Op 12 maart werd daar een eerste ontploffing waargenomen en in de weken die daarop volgden, kwam heel wat radioactief materiaal in de lucht en in de zee terecht. Eén van die stoffen is plutonium 239, dat ook in atoombommen wordt gebruikt.



Beschouw een hoeveelheid plutonium 239 met beginmassa m_0. Ten gevolge van radioactieve straling is die massa op elk tijdstip t (in jaren) te berekenen met de formule $m(t) = m_0 \cdot 0{,}999971^t$.

1 Elke radioactieve stof heeft een bepaalde halveringstijd, dit is de tijd nodig opdat van een gegeven beginmassa van die stof slechts de helft zou overblijven. Voor elke radioactieve stof is die halveringstijd verschillend.
Bereken de halveringstijd voor plutonium 239.

$$m(t) = \frac{1}{2} m_0 \Leftrightarrow \cancel{m_0} \cdot 0{,}999971^t = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m_0}$$
$$\Leftrightarrow t = {}^{0{,}999971}\log \frac{1}{2} \approx 23901$$

De halveringstijd is ongeveer 23900 jaar.

2 Hoe lang duurt het opdat 1 % van de beginmassa vervallen zou zijn?

$$m(t) = 0{,}99\, m_0 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}999971}\log 0{,}99 \approx 347$$

Het duurt ongeveer 347 jaar.

Opdracht 116 bladzijde 227

Door welke transformaties kan de grafiek van de functie $f: x \longmapsto {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{x}{4}$ omgevormd worden tot die van $g: x \longmapsto 2^{x+2}$?

$$y = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{x}{4} \quad \left(\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^y \Leftrightarrow x = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 4 \cdot 2^{-y} \right)$$

$\downarrow$ spiegeling om de eerste deellijn

$y = 4 \cdot 2^{-x}$

$\downarrow$ spiegeling om de y-as

$y = 4 \cdot 2^{x} = 2^{x+2} = g(x)$

Opdracht 117 bladzijde 228

In een bosgebied lijden de konijnen aan myxomatose, een virale aandoening met een hoog sterftecijfer. De eerste twee weken van de epidemie sterft per dag 1 konijn op 10. Vanaf de derde week sterven er tot op het einde van de ziekte nog slechts 1 konijn op 20. Na de vijfde week is de epidemie over. Gedurende de epidemie sterven geen konijnen omwille van een andere oorzaak en worden er geen konijnen geboren.

Na een week van epidemie zijn er nog 1521 konijnen in leven.

1 Hoeveel konijnen waren er bij het begin van de ziekte?

Eerste twee weken : aantal konijnen N is $N(t) = b \cdot 0{,}9^t$ met t in dagen.

Uit $N(7) = 1521$ volgt $b \cdot 0{,}9^7 = 1521 \quad \Leftrightarrow \quad b \approx 3180$

Bij het begin van de ziekte waren er 3180 konijnen.

2 Hoeveel van deze konijnen zijn er nog in leven na 3 weken epidemie?

$N(14) = 3180 \cdot 0{,}9^{14}$

Voor $14 < t \leqslant 35$ geldt $N(t) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^{t-14}$ zodat na drie weken geldt : $N(21) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^7 \approx 508$.

Na drie weken zijn er nog 508 konijnen in leven.

3 Hoeveel overleven er de epidemie?

Op het einde is $N(35) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^{21} \approx 248$.

Zo'n 248 konijnen overleven de epidemie.

Opdracht 118 bladzijde 228

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} (\log x)^2 + \log(xy) = 4 \\ \log x + \log(y^2) = 5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} (\log x)^2 + \log(xy) = 4 \\ \log x + \log(y^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log x)^2 + \log x + \log y = 4 \\ \log x + 2\log y = 5 \end{cases} \qquad \text{BVW: } x > 0,\ y > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log x)^2 + \log x + \log y = 4 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (25 - 20\log y + 4(\log y)^2) + (5 - 2\log y) + \log y = 4 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(\log y)^2 - 21 \cdot \log y + 26 = 0 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log y = \frac{13}{4} \\ \log x = 5 - 2 \cdot \frac{13}{4} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \log y = 2 \\ \log x = 5 - 2 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{-\frac{3}{2}} \\ y = 10^{\frac{13}{4}} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 100 \end{cases}$$

Opdracht 119 bladzijde 228

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op.

1 $3 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^x = 6$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 17 \cdot 3^x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3^x = 6 \quad \text{of} \quad \cancel{3^x = -\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x = {}^3\log 6$$

2 $16^x + 3 \cdot 4^{1-x} = 3 \cdot 2^{2x} + 4$

$$\Leftrightarrow 4^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} = 3 \cdot 4^x + 4$$
$$\Leftrightarrow 4^{3x} + 12 = 3 \cdot 4^{2x} + 4 \cdot 4^x$$
$$\Leftrightarrow y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0 \quad \text{met} \quad y = 4^x$$
$$\Leftrightarrow y^2(y - 3) - 4(y - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 3)(y^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 3 \quad \text{of} \quad y = 2 \quad \text{of} \quad y = -2$$
$$\Leftrightarrow 4^x = 3 \quad \text{of} \quad 4^x = 2 \quad \text{of} \quad \cancel{4^x = -2}$$
$$\Leftrightarrow x = {}^4\log 3 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$$

3 ${}^{6}\log 5 \cdot {}^{5}\log 4 \cdot {}^{4}\log 3 \cdot {}^{3}\log x = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{\log 5}}{\log 6} \cdot \dfrac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}} \cdot \dfrac{\log x}{\cancel{\log 3}} = 2$

$\Leftrightarrow \log x = 2 \log 6$

$\Leftrightarrow x = 36$

4 $4 + {}^{3x}\log 27 + 3 \cdot {}^{27}\log 3x = 0$ BVW: $3x > 0$ en $3x \neq 1$

$\Leftrightarrow 4 + \dfrac{{}^{27}\log 27}{{}^{27}\log 3x} + 3\ {}^{27}\log 3x = 0$

$\Leftrightarrow 4\ {}^{27}\log 3x + 1 + 3\ ({}^{27}\log 3x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 + 4y + 1 = 0$ met $y = {}^{27}\log 3x$

$\Leftrightarrow y = -1$ of $y = -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{27}\log 3x = -1$ of ${}^{27}\log 3x = -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3x = 27^{-1}$ of $3x = 27^{-\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{81}$ of $x = \dfrac{1}{9}$

5 ${}^{4}\log\sqrt{x^3} = 7 - 3 \cdot {}^{x}\log 16x$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \cdot {}^{4}\log x = 7 - 3 \cdot \dfrac{{}^{4}\log 16 + {}^{4}\log x}{{}^{4}\log x}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot y^2 = 14y - 12 - 6y$ met $y = {}^{4}\log x$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 12 = 0 \rightarrow$ geen oplossingen

6 ${}^{\sqrt{3}}\log(3^x - 7) + x = 2 - {}^{\frac{1}{3}}\log 4$ BVW: $3^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{{}^{3}\log\left(3^x - 7\right)}{{}^{3}\log\sqrt{3}} + x = 2 - \dfrac{{}^{3}\log 4}{{}^{3}\log\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log (3^x - 7)^2 + {}^{3}\log 3^x = {}^{3}\log 9 + {}^{3}\log 4$

$\Leftrightarrow ((3^x)^2 - 14 \cdot 3^x + 49) \cdot 3^x = 36$

$\Leftrightarrow y^3 - 14y^2 + 49y - 36 = 0$ en $y = 3^x$

$\Leftrightarrow (y - 1)(y - 4)(y - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{3^x = 1}$ of $\cancel{3^x = 4}$ of $3^x = 9$ $3^x = 1$ en $3^x = 4$ voldoen niet aan de bestaansvoorwaarde

$\Leftrightarrow x = 2$

7 $2^x - 5 < 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 1$

$\Leftrightarrow 2^x - 4 < 3 \cdot 2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^x - 4 < 12 \cdot 2^{-x}$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y < 12$ met $y = 2^x$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 12 < 0$

$\Leftrightarrow -2 < y < 6$

$\Leftrightarrow -2 < 2^x < 6$

$\Leftrightarrow 2^x < 6$

$\Leftrightarrow x < {}^2\log 6$

y		-2		6	
$y^2 - 4y - 12$	+	0	-	0	+

8 ${}^2\log x^2 > 8$

BVW: $x \neq 0$

$\Leftrightarrow {}^2\log x^2 > {}^2\log 2^8$

$\Leftrightarrow x^2 > 256$

$\Leftrightarrow x^2 - 256 > 0$

$\Leftrightarrow x < -16$ of $x > 16$

Opdracht 120 bladzijde 228

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x} = 1$?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

$$\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x} = 1$$

1. $\frac{2x^2-5}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$
2. $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 2$
3. $\frac{2x^2-5}{3} = -1 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$

Als $x = 1$, is $x^2 - 2x$ gelijk aan -1: oneven

Als $x = -1$, is $x^2 - 2x$ gelijk aan 3: oneven

Er zijn 3 verschillende oplossingen: antwoord D

Opdracht 121 bladzijde 228

Als $f(n) = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot {}^{4}\log 5 \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\log n$, met n een natuurlijk getal groter dan 2, bereken dan $\sum_{k=3}^{100} f(2^k)$.

$$f(n) = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\log n$$

$$= \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\log n}{\cancel{\log(n-1)}}$$

$$= \frac{\log n}{\log 2}$$

$$\sum_{k=3}^{100} f\left(2^k\right) = \sum_{k=3}^{100} \frac{\log\left(2^k\right)}{\log 2} = \sum_{k=3}^{100} \frac{k \cdot \cancel{\log 2}}{\cancel{\log 2}} = 98 \cdot \frac{3+100}{2} = 5047$$

Hersenbrekers 1 bladzijde 229

Een draak met 99 koppen en 99 staarten bewaakt een prinses. Een prins wil haar heldhaftig bevrijden en daarbij kan hij bij elke slag kiezen of hij ofwel 1 kop, ofwel 2 koppen, ofwel 1 staart ofwel 2 staarten afhakt.
Wanneer hij echter 1 kop afsnijdt, dan groeit deze kop onmiddellijk terug. Wanneer er 1 staart wordt afgehakt, dan komen er 2 staarten in de plaats. Als hij 2 staarten ineens afsnijdt, dan groeit er terstond een extra kop. Als er 2 koppen ineens worden afgehakt, groeit er niets bij. De draak sterft als hij geen kop noch staart overhoudt.

Hoeveel bedraagt het minimaal aantal slagen dat de prins nodig heeft om de draak te doden?

(Bron © Wiskunnend Wiske 2012)

Een mogelijke manier om alle koppen en staarten af te hakken, is de volgende.

Aantal slagen	Welk type slag	Aantal koppen over	Aantal staarten over
49	2 koppen	1	99
48	2 staarten	49	3
24	2 koppen	1	3
3	1 staart	1	6
3	2 staarten	4	0
2	2 koppen	0	0
TOTAAL: 129			

Daarmee is echter nog niet aangetoond dat 129 het kleinste aantal hakbeurten is: misschien kan het op een meer vernuftige manier in minder beurten?

Het is duidelijk dat hoe dan ook alle staarten omgezet moeten worden in koppen, die dan per twee afgehakt moeten worden.

Aangezien dat omzetten van staarten moet resulteren in een totaal aantal koppen dat even is, moeten we een oneven aantal koppen, stel $2n + 1$, zien toe te voegen aan de 99 die we bij de start hebben.

Een kop bij maken, gebeurt door twee staarten af te hakken. Er zijn dus $4n + 2$ staarten nodig om die $2n + 1$ koppen bij te maken. Aangezien daarbij alle staarten omgezet moeten zijn, zoeken we de kleinste waarde $4n + 2$ waarvoor $4n + 2 \geqslant 99$. Dit is 102.

Voor een minimaal aantal hakbeurten moeten we bijgevolg eerst 3 staarten bij maken. Dit kan door er 3 keer één af te hakken. Dan zijn er dus 102 staarten. We hakken ze alle 102 in 51 hakbeurten van twee staarten af. Nu zijn er 99 + 51 koppen, die we in 75 hakbeurten van twee koppen weghakken.

Het minimum aantal hakbeurten is dus $3 + 51 + 75 = 129$. Met minder lukt het echt niet.

Hersenbrekers 2 bladzijde 229

In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een rijsom is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde 3×3 -magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.

Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

		7
?		
	10	3

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 9

(Bron © NWO eerste ronde 2008)

We noemen de cellen a_{ij} met i het rij- en j het kolomnummer.

Stel $a_{31} = n$. Dan moet $a_{23} = 3 + n$. Om ook op de diagonaal als som $13 + n$ te krijgen, moet $a_{22} = 6$. Daaruit volgt dat $a_{21} = 4$.

Antwoord B is dus correct.