Hoofdstuk 3

Inverse matrix

Opdracht 1 bladzijde 111

1 Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Bepaal een matrix $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ zodanig dat $A \cdot B = I_2$.

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{I}_2$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = 1 \\ 3y - 2t = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -\dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Besluit: $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$.

2 Zelfde vraag als $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{I}_2$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -6x + 4z & -6y + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = 1 \\ 3y - 2t = 0 \\ -6x + 4z = 0 \\ -6y + 4t = 1 \end{cases}$

Dit stelsel is strijdig, er bestaat bijgevolg geen matrix B zodat $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{I}_2$.

Opdracht 2 bladzijde 116

Bereken indien mogelijk A^{-1}.

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_1 - 2R_3 \\ R_2 - 2R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ -R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Besluit: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 + 2R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Besluit: A^{-1} bestaat niet, A is niet-inverteerbaar.

3 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 - aR_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -ab & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1 + abR_3 \\ R_2 - bR_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Besluit: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Opdracht 3 bladzijde 116

Voor welke waarden van a is $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}$ inverteerbaar?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_2 - R_1}{R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & a-2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{bmatrix}$$

Het is nu duidelijk dat de rijcanonieke matrix van A de eenheidsmatrix is als $a + 4 \neq 0$.

Besluit: A is inverteerbaar voor $a \neq -4$.

Opdracht 4 bladzijde 118

Onderzoek of de volgende stelsels in x, y en z stelsels van Cramer zijn en, indien ja, los ze op met de methode van de inverse matrix.

1 $\begin{cases} x - 3y + z = 4a \\ -x + 4y - 4z = a \\ 2x - y + 5z = -3a \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Met het rekentoestel vinden we: $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 16 & 14 & 8 \\ -3 & 3 & 3 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$.

Dit is een stelsel van Cramer, met oplossing

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 16 & 14 & 8 \\ -3 & 3 & 3 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4a \\ a \\ -3a \end{bmatrix} = \frac{a}{18}\begin{bmatrix} 16 & 14 & 8 \\ -3 & 3 & 3 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ -a \\ -2a \end{bmatrix}.$$

2 $\begin{cases} x + y - 7z = a \\ 2x + 3y - 10z = b \\ x + 2y - 2z = a + b \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & -10 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Met het rekentoestel vinden we: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -12 & 11 \\ -6 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dit is een stelsel van Cramer, met oplossing

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -12 & 11 \\ -6 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14a - 12b + 11a + 11b \\ -6a + 5b - 4a - 4b \\ a - b + a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25a - b \\ -10a + b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Opdracht 5 bladzijde 118

Een bedrijf deed een onderzoek naar de evolutie van het woon-werkverkeer. De werknemers komen met de auto, het openbaar vervoer of met de fiets.

Men stelt vast dat 4 % van de autogebruikers na een jaar overgestapt is op het openbaar vervoer en 3 % op de fiets.

Van wie het openbaar vervoer gebruikt, komt er een jaar later 4 % met de auto en 1 % met de fiets.

Van de fietsers komen er 1 % een jaar later met de auto en 2 % met het openbaar vervoer.

Als er nu 55 % met de auto komt, 24 % het openbaar vervoer gebruikt en 21 % fietst, wat was dan de verdeling een jaar geleden?

$$\text{De overgangsmatrix is } M = \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{auto} & \text{ov} & \text{fiets} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}01 & 0{,}97 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \text{auto} \\ \text{ov} \\ \text{fiets} \end{array}.$$

$$\text{De beginsituatie is } X_0 = \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}24 \\ 0{,}21 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{auto} \\ \text{ov} \\ \text{fiets} \end{array}.$$

$$\text{Een jaar geleden was de verdeling } M^{-1} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}04 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}95 & 0{,}02 \\ 0{,}03 & 0{,}01 & 0{,}97 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}24 \\ 0{,}21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}580 \\ 0{,}224 \\ 0{,}196 \end{bmatrix}.$$

58,0 % kwam toen met de auto, 22,4 % met het openbaar vervoer en 19,6 % met de fiets.

Opdracht 6 bladzijde 118

Bereken A als $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -\dfrac{19}{10} & -\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{8}{5} & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Opdracht 7 bladzijde 121

Bewijs dat $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$, met A een reguliere matrix.

We moeten aantonen dat $(A^{-1})^T$ de inverse is van A^T.

Enerzijds geldt:

$$\begin{aligned} A^T \cdot (A^{-1})^T &= (A^{-1} \cdot A)^T && \text{eigenschap getransponeerde van een product} \\ &= I^T && \text{definitie inverse matrix} \\ &= I \end{aligned}$$

Anderzijds geldt ook:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T \cdot A^T &= (A \cdot A^{-1})^T && \text{eigenschap getransponeerde van een product} \\ &= I^T && \text{definitie inverse matrix} \\ &= I \end{aligned}$$

Opdracht 8 bladzijde 121

Bereken X als $2X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$.

Maak gebruik van de eigenschappen uit de vorige opdracht.

$$2X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 2X^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2X^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2X^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2X^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 2X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opdracht 9 bladzijde 123

Bereken indien mogelijk A^{-1}.

1 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\overset{R_1-R_2}{\sim}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Besluit: $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

2 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{\sim}{\overset{R_2-2R_1}{R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{\sim}{\overset{R_1+2R_2}{R_3-2R_2}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0\\0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_1+R_3}{R_2+2R_3}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2\\0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]\overset{-R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2\\0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

Besluit: $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\0 & 3 & -2\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

3 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\a & a\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 0\\a & a & 0 & 1\end{array}\right]\overset{R_2-aR_1}{\sim}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & -a & 1\end{array}\right]$$

Besluit: A^{-1} bestaat niet, A is singulier.

4 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\a & a & 1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\a & a & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\overset{R_3-aR_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & a & 1 & -a & 0 & 1\end{array}\right]\overset{R_3-aR_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -a & -a & 1\end{array}\right]$$

Besluit: $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-a & -a & 1\end{bmatrix}$.

Opdracht 10 bladzijde 123

Bepaal A als $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$.

$(A^{-1})^{-1}=A$ zodat $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Opdracht 11 bladzijde 123

Bepaal x en y als $A=\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ y & -2\end{bmatrix}$ elkaars inverse zijn.

Als A en B elkaars inverse zijn, dan is

$A\cdot B=I$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\ y & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4+xy & 3-2x\\ -4-2y & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4+xy=1\\ 3-2x=0\\ -4-2y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=-2\end{cases}$

Opdracht 12 bladzijde 123

Bereken x en y als $\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}$.

Als $\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}$, dan is

$\frac{1}{8}\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2+2y & xy-2y\\ 2x-4 & 2y+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y=8\\ xy-2y=0\\ 2x-4=0\\ 2y+4=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$

Opdracht 13 bladzijde 123

Toon aan dat de matrix $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ zichzelf als inverse heeft voor elke hoek α.

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Hieruit volgt dat A zichzelf als inverse heeft voor elke hoek α.

Opdracht 14 bladzijde 124

Als $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \\ -\tan\theta & 1 \end{bmatrix}$, dan is $A^T \cdot A^{-1}$ gelijk aan

A $\begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ -1 & \tan\theta \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

We bepalen eerst A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \tan\theta & 1 & 0 \\ -\tan\theta & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 + \tan\theta \cdot R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1+\tan^2\theta & \tan\theta & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \cdot \cos^2\theta}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{array}\right] \overset{R_1 - \tan\theta \cdot R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{array}\right]$$

Bijgevolg: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$.

$$A^T \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 15 bladzijde 124

Onderzoek of de volgende stelsels stelsels van Cramer zijn en, indien ja, los ze op met de methode van de inverse matrix.

1 $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 5x - 2y = -a \end{cases}$

Met het rekentoestel vinden we: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

Dit is een stelsel van Cramer, met oplossing

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -a \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 + a \\ 35 + 4a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14+a}{3} \\ \frac{35+4a}{3} \end{bmatrix}.$$

2 $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + y - 2z = a \\ x + 2y - 3z = b \end{cases}$

Met het rekentoestel vinden we dat A^{-1} niet bestaat, dit is geen stelsel van Cramer.

3 $\begin{cases} x - y = a \\ x - 2y - z = b \\ 2x + y + z = 3a - b \end{cases}$

Met het rekentoestel vinden we: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Dit is een stelsel van Cramer, met oplossing

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ 3a - b \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -a + b + 3a - b \\ -3a + b + 3a - b \\ 5a - 3b - 3a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a - b \end{bmatrix}.$$

4 $\begin{cases} 5x + y - 10z = a \\ 2x + 3y - 4z = 2 \\ 2y = 1 \end{cases}$

A^{-1} bestaat niet, dit is geen stelsel van Cramer.

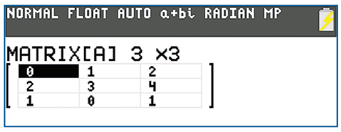
Opdracht 16 bladzijde 124

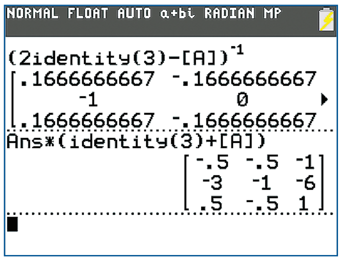
Bereken X als $(2I - A)X = I + A$ met $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$(2I - A)X = I + A$

$\Leftrightarrow X = (2I - A)^{-1}(I + A)$ 2I – A is inverteerbaar, zie hiernaast

$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -3 & -1 & -6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$





Opdracht 17 bladzijde 124

A is een 5×3-matrix en B is een 3×5-matrix.

Bewijs dat AB niet-inverteerbaar is.

(Vertrek van het homogeen stelsel $BX = O$ en gebruik opdracht 72 uit hoofdstuk 2.)

BX = O is een homogeen stelsel met meer onbekenden (5) dan vergelijkingen (3).

Uit opdracht 72 van hoofdstuk 2 volgt dan dat dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

Elke oplossing van BX = O is ook een oplossing van A · (BX) = A · O, dus van (AB)X = O.

Het stelsel (AB)X = O heeft bijgevolg ook oneindig veel oplossingen. De rijcanonieke matrix van AB is dus niet de eenheidsmatrix. AB is niet-inverteerbaar.

Opdracht 18 bladzijde 125

Bepaal telkens uit de gegeven uitdrukking de matrix X in functie van de reguliere matrices A, B en C.

1 $(AX)^{-1} = BC$

$\Leftrightarrow AX = (BC)^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (BC)^{-1}$

$\Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1}(BC)^{-1}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}C^{-1}B^{-1}$

2 $2X^{-1} + B = AC$

$\Leftrightarrow 2X^{-1} = AC - B$

$\Leftrightarrow X^{-1} = \frac{1}{2}(AC - B)$

$\Leftrightarrow X = \left(\frac{1}{2}(AC - B)\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow X = 2(AC - B)^{-1}$

3 $AX^{-1} - 3B^{-1} = (XC)^{-1}$

$\Leftrightarrow\ AX^{-1} - 3B^{-1} = C^{-1}X^{-1}$

$\Leftrightarrow\ AX^{-1} - C^{-1}X^{-1} = 3B^{-1}$

$\Leftrightarrow\ (A - C^{-1})X^{-1} = 3B^{-1}$

$\Leftrightarrow\ (A - C^{-1})^{-1} \cdot (A - C^{-1})X^{-1} = (A - C^{-1})^{-1} \cdot 3B^{-1}$

$\Leftrightarrow\ X^{-1} = 3(A - C^{-1})^{-1}B^{-1}$

$\Leftrightarrow\ X = \left(3(A - C^{-1})^{-1}B^{-1}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow\ X = \dfrac{1}{3}B(A - C^{-1})$

Opdracht 19 bladzijde 125

Gegeven zijn de reguliere matrices A, B en C.

Toon aan dat $A \cdot B \cdot C$ ook regulier is en geef een uitdrukking voor de inverse van $A \cdot B \cdot C$.

$(ABC)^{-1} = ((AB)C)^{-1}$

We weten dat als A en B regulier zijn, dan ook AB regulier is, met $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bijgevolg: $(ABC)^{-1} = ((AB)C)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Dit resultaat hangt niet af van hoe de matrices worden samengenomen:

$(A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Opdracht 20 bladzijde 125

1 Stel dat de matrix A voldoet aan $A^6 - 2A + I = O$.

Toon aan dat A inverteerbaar is en bepaal een uitdrukking voor A^{-1} in functie van A.

$A^6 - 2A + I = O \iff I = 2A - A^6 \iff I = A(2I - A^5)$ en

$A^6 - 2A + I = O \iff I = 2A - A^6 \iff I = (2I - A^5)A$.

Hieruit volgt: A is inverteerbaar en $A^{-1} = 2I - A^5$.

2 Zelfde vraag als de matrix A voldoet aan $A^3 - 2A^2 + 4A - 3I = O$.

$A^3 - 2A^2 + 4A - 3I = O \iff \frac{1}{3}(A^3 - 2A^2 + 4A) = I \iff A\left(\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A + \frac{4}{3}I\right) = I$ en

$A^3 - 2A^2 + 4A - 3I = O \iff \frac{1}{3}(A^3 - 2A^2 + 4A) = I \iff \left(\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A + \frac{4}{3}I\right)A = I$.

Hieruit volgt: A is inverteerbaar en $A^{-1} = \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A + \frac{4}{3}I$.

Opdracht 21 bladzijde 125

Als A en B reguliere matrices zijn, dan geldt: $(A + B) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (A - B) \cdot A^{-1} \cdot (A + B)$.

Toon aan.

$(A + B) \cdot A^{-1} \cdot (A - B)$		$(A - B) \cdot A^{-1} \cdot (A + B)$
$= (A + B) \cdot (A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot B)$		$= (A - B) \cdot (A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B)$
$= (A + B) \cdot (I - A^{-1} \cdot B)$		$= (A - B) \cdot (I + A^{-1} \cdot B)$
$= (A + B) \cdot I - (A + B) \cdot A^{-1} \cdot B$	en	$= (A - B) \cdot I + (A - B) \cdot A^{-1} \cdot B$
$= A + B - A \cdot A^{-1} \cdot B - B \cdot A^{-1} \cdot B$		$= A - B + A \cdot A^{-1} \cdot B - B \cdot A^{-1} \cdot B$
$= A + B - I \cdot B - B \cdot A^{-1} \cdot B$		$= A - B + I \cdot B - B \cdot A^{-1} \cdot B$
$= A - B \cdot A^{-1} \cdot B$		$= A - B \cdot A^{-1} \cdot B$

Bijgevolg is $(A + B) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (A - B) \cdot A^{-1} \cdot (A + B)$.

Opdracht 22 bladzijde 125

Bereken X en Y als $\begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ 2(X^{-1})^T + Y^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \\ 2(X^{-1})^T + Y^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} & (1) \\ (X^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} Y^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} & (2) \end{cases}$$

Uit (2) volgt: $X^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} Y.$ (3)

Invullen in (1) geeft:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} Y \right) + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 24 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 14 & -8 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 14 & -8 \end{bmatrix} \right) Y = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 24 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} \\ -8 & 4 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{11}{2} \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} \\ -8 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{11}{2} \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Invullen in (3) geeft:

$$X^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ zodat } X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Opdracht 23 bladzijde 125

Bewijs met inductie: als A een reguliere matrix is en $n \in \mathbb{N}_0$, dan is ook A^n regulier, met $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Gegeven: A is een reguliere matrix en $n \in \mathbb{N}_0$

Te bewijzen: A^n is regulier met $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Bewijs

1) Voor n = 1 geldt $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ want $A^{-1} = A^{-1}$.

2) Veronderstel dat voor een bepaalde k geldt dat A^k regulier is, met $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ (*),

   dan is $A^{k+1} = A^k \cdot A$ regulier met $(A^{k+1})^{-1} = (A^k \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot (A^k)^{-1} \overset{(*)}{=} A^{-1} \cdot (A^{-1})^k = (A^{-1})^{k+1}$.

   Als de eigenschap geldt voor k, dan geldt hij bijgevolg ook voor k + 1.

3) Besluit

   $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ geldt voor n = 1   1)

   $\Downarrow$ 2)

   $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ geldt voor n = 2

   $\Downarrow$ 2)

   $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ geldt voor n = 3

   $\Downarrow$ 2)

   …

   A^n is regulier en $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ geldt voor elk natuurlijk getal verschillend van 0.

Opdracht 24 bladzijde 126

Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$.

1 Bepaal A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b + ac & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Welke betrekking moet er bestaan tussen a, b en c opdat zou gelden dat $A^2 = I$?

Wat is dan de inverse van A?

Als $2b + ac = 0$, dan is $A^2 = A \cdot A = I$.

Uit de definitie van de inverse volgt dan dat $A^{-1} = A$.

3 Wat is de inverse van A^{2n-1}, met n een strikt positief natuurlijk getal, als $A^2 = I$?

$A^{2n-1} = A^{2n-2} \cdot A = (A^2)^{n-1} \cdot A = I^{n-1} \cdot A = I \cdot A = A$

De inverse van A^{2n-1} is bijgevolg dezelfde als de inverse van A, en dit is A zelf.

Opdracht 25 bladzijde 127

Bereken a, b, c en d als $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & -2 & -1 \\ -1 & d & 2 \end{bmatrix}$.

Als $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & -2 & -1 \\ -1 & d & 2 \end{bmatrix}$, dan is

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & -2 & -1 \\ -1 & d & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2c-1 & a-4+d & 0 \\ bc & 1-2b & -b \\ c-1 & -1+d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c-1=1 \\ a-4+d=0 \\ bc=0 \\ 1-2b=1 \\ -b=0 \\ c-1=0 \\ -1+d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Opdracht 26 bladzijde 127

Gegeven het stelsel $\begin{cases} 3x-7y-2z=-7a \\ -3x+5y+z=5b \\ 6x-4y=2c \end{cases}$ in de onbekenden x, y en z.

1 Waarom is dit een stelsel van Cramer?

Omdat de coëfficiëntenmatrix $A=\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ van het stelsel regulier is.

Met het rekentoestel vinden we immers: $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 6 & 12 & 3 \\ -18 & -30 & -6 \end{bmatrix}$.

2 Los dit stelsel op.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 6 & 12 & 3 \\ -18 & -30 & -6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -7a \\ 5b \\ 2c \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -28a+40b+6c \\ -42a+60b+6c \\ 126a-150b-12c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{-14a+20b+3c}{3} \\ -7a+10b+c \\ 21a-25b-2c \end{bmatrix}.$$

Opdracht 27 bladzijde 127

Bereken A als $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 9 & -9 \\ 0 & 3 & -15 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 9 & -9 \\ 0 & 3 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 9 & -9 \\ 0 & 3 & -15 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 9 & -9 \\ 0 & 3 & -15 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Opdracht 28 bladzijde 127

Stel dat de reguliere matrix D voldoet aan $I + D + D^2 + \ldots + D^n = O$, dan is D^{-1} gelijk aan

A O **B** D **C** D^n **D** I

Uit $I + D + D^2 + ... + D^n = O$ volgt allereerst dat

$I = -D - D^2 - ... - D^n = D(-I - D - D^2 - ... - D^{n-1})$ en ook $I = (-I - D - D^2 - ... - D^{n-1})D$,

zodat $D^{-1} = -I - D - D^2 - ... - D^{n-1}$. (1)

Uit de gegeven uitdrukking volgt ook dat $D^n = -I - D - D^2 - ... - D^{n-1}$. (2)

Uit (1) en (2) vinden we dan: $D^{-1} = D^n$.

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 29 bladzijde 127

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \lambda & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ is niet inverteerbaar. Waaraan is λ gelijk?

A $\lambda = 0$ **B** $\lambda = 1$ **C** $\lambda = 2$ **D** $\lambda = 3$ **E** $\lambda = 4$

(Bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \lambda & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - \lambda R_1 \\ R_3 - 7R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6-3\lambda & 5-2\lambda \\ 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \overset{R_3/(-6)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6-3\lambda & 5-2\lambda \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6-3\lambda & 5-2\lambda \end{bmatrix} \overset{2R_3 - (6-3\lambda)R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

Merk op dat het volstaat naar onder te vegen: het kunnen maken van nullen boven de spillen bepaalt de inverteerbaarheid van een matrix niet.

Als $\lambda = 4$, dan zal de rijcanonieke matrix van $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \lambda & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ niet de eenheidsmatrix zijn, en dan is deze matrix niet-inverteerbaar. Antwoord E is het juiste.

Opdracht 30 bladzijde 127

Voor welke waarden van a is de matrix $A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 5 & a & 4\\ a & a & a\end{bmatrix}$ niet inverteerbaar?

Het is onmiddellijk duidelijk dat de rijcanonieke matrix van A nooit de eenheidsmatrix kan zijn als a = 0.

Als a ≠ 0 kunnen we A als volgt werken:

$$\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 5 & a & 4\\ a & a & a\end{bmatrix}\underset{R_3-aR_1}{\overset{R_2-5R_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & -4a & 4-5a\\ 0 & a-a^2 & a-a^2\end{bmatrix}\overset{\frac{R_3}{a}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & -4a & 4-5a\\ 0 & 1-a & 1-a\end{bmatrix}$$

Uit de derde rij is duidelijk dat we nooit de eenheidsmatrix kunnen krijgen als a = 1.

Voor a ≠ 1 gaan we verder als volgt:

$$\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & -4a & 4-5a\\ 0 & 1-a & 1-a\end{bmatrix}\overset{\frac{R_3}{1-a}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & -4a & 4-5a\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\overset{R_{23}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -4a & 4-5a\end{bmatrix}\overset{R_3+4aR_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & a & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4-a\end{bmatrix}$$

Om te kunnen herleiden tot de eenheidsmatrix, moet ook nog a ≠ 4.

Besluit: A is niet-inverteerbaar als a = 0, a = 1 of a = 4.

Opdracht 31 bladzijde 128

Als $ABA=\begin{bmatrix}0 & 18\\ -3 & 21\end{bmatrix}$ het product is van drie 2×2-matrices en $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, bepaal dan $(BA)^{-1}$.

Als $ABA=\begin{bmatrix}0 & 18\\ -3 & 21\end{bmatrix}$, dan is $BA=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 18\\ -3 & 21\end{bmatrix}$ zodat $(BA)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 18\\ -3 & 21\end{bmatrix}^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}-\frac{7}{18} & -\frac{11}{18}\\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{18}\end{bmatrix}$.

Opdracht 32 bladzijde 128

Bereken de matrix X als $\left(3 \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^T + \left(\frac{1}{2}X^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$.

$$\left(3 \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^T + \left(\frac{1}{2}X^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}(X^{-1})^T + 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}(X^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}(X^{-1})^T + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}(X^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\right)(X^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}(X^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}(X^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (X^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opdracht 33 bladzijde 128

We definiëren: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is orthogonaal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Als AB en B orthogonaal zijn, dan is ook A orthogonaal. Bewijs.

Gegeven: AB en A zijn orthogonaal, met andere woorden $(AB)^{-1} = (AB)^T$ en $B^{-1} = B^T$.

Te bewijzen: A is orthogonaal, met andere woorden $A^{-1} = A^T$.

Bewijs

Uit het gegeven volgt:

$$B^{-1}A^{-1} = B^TA^T$$

$$\overset{B^T = B^{-1}}{\Rightarrow} B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^T$$

$$\Rightarrow B \cdot (B^{-1}A^{-1}) = B \cdot (B^{-1}A^T)$$

$$\Rightarrow (B \cdot B^{-1})A^{-1} = (B \cdot B^{-1})A^T$$

$$\Rightarrow I \cdot A^{-1} = I \cdot A^T$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^T$$

Hieruit volgt dat A ook orthogonaal is.