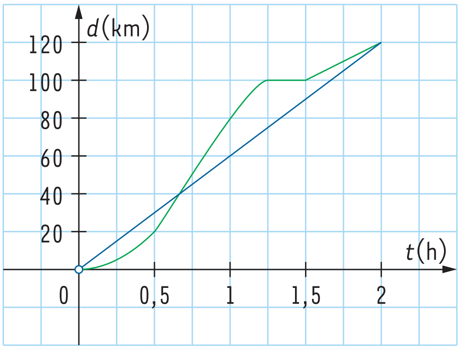
Hoofdstuk 6

Afgeleiden van veeltermfuncties

Opdracht 1 bladzijde 8

De familie Janssens rijdt naar de kust. De trip duurt 2 uur en in die tijd leggen ze 120 km af. De grafiek geeft de afstand d (in kilometer) tot hun vertrekpunt in functie van de tijd t (in uren).



1 Wat is hun gemiddelde snelheid voor de hele reis?

De gemiddelde snelheid is 60 km/h.

2 Hoe had de grafiek eruit gezien indien ze de hele reis aan die snelheid hadden gereden?

De grafiek is een rechte door de oorsprong en door het punt met coördinaat (2, 120).

3 Leid uit de grafiek de gemiddelde snelheid af in de tijdsintervallen [0; 0,5], [0,5; 1], [1; 1,5] en [1,5; 2].

[0; 0,5]: 20 km/0,5 h = 40 km/h

[0,5; 1]: (80 – 20) km/0,5 h = 120 km/h

[1; 1,5]: (100 – 80) km/0,5 h = 40 km/h

[1,5; 2]: (120 – 100) km/0,5h = 40 km/h

4 Hoe zie je op de grafiek, zonder berekeningen te maken, dat de gemiddelde snelheid het grootst is in het interval [0,5; 1]?

De grafiek is daar het steilst.

5 Bereken nu ook de gemiddelde snelheid in de intervallen [1; 1,25] en [1,25; 1,5].

[1; 1,25]: (100 – 80) km/0,25h = 80 km/h

[1,25; 1,5]: (100 – 100) km/h = 0 km/h

Opdracht 2 bladzijde 11

Een van de lastigste beklimmingen uit de Tour de France is ongetwijfeld deze van de Mont Ventoux. In de tabel vind je een schema van deze beklimming wanneer je vertrekt vanuit Bédoin.

plaats	Bédoin	Saint-Estève	Le Chalet Reynard	top Ventoux
horizontale afgelegde weg (in km)	0	5,5	15	21
hoogte (in m)	275	500	1419	1909

1 Bereken de gemiddelde verandering van de hoogte over de drie opeenvolgende trajecten in %.

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Bédoin – Saint-Estève:

$$\frac{500 - 275}{5{,}5} \text{ m/km} = 40{,}909 \text{ m/km} = 0{,}040909 \text{ km/km} = 4{,}09\ \%$$

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Saint-Estève – Le Chalet Reynard:

$$\frac{1419 - 500}{15 - 5{,}5} \text{ m/km} = 96{,}737 \text{ m/km} = 0{,}096737 \text{ km/km} = 9{,}67\ \%$$

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Le Chalet Reynard – top Ventoux:
$\frac{1909-1419}{21-15}$ m/km = 81,667 m/km = 0,081667 km/km = 8,17 %

2 Welk traject is gemiddeld het meest steile?

Van Saint-Estève tot Le Chalet Reynard.

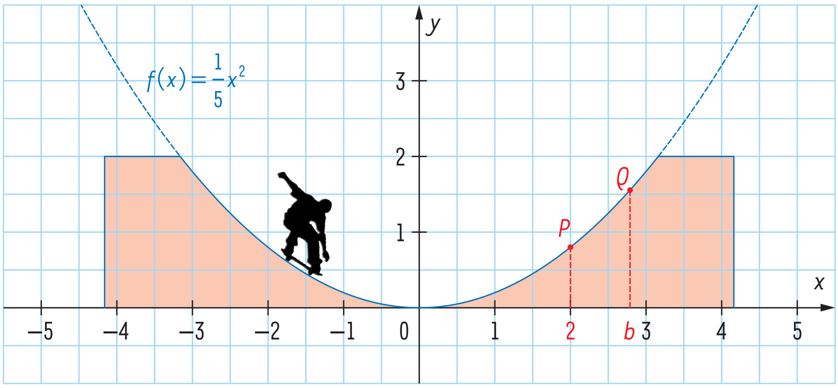
3 Bepaal de gemiddelde verandering van de hoogte over de totale beklimming in %.

1634 m/21 km = 77,8 m/km
= 0,0778 km/km
= 7,78 %

Opdracht 3 bladzijde 12

De doorsnede van het hellende deel van een skate ramp is parabolisch. In het getekende assenstelsel is de parabool de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x) = \frac{1}{5}x^2$ (met x en $f(x)$ in meter).

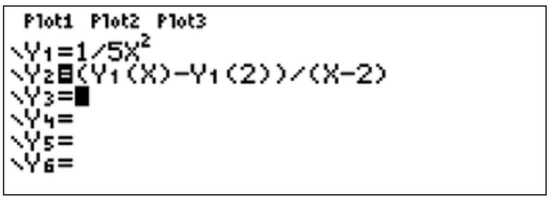


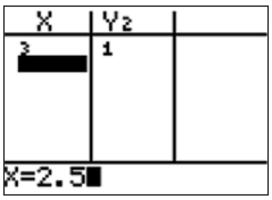
Om de helling te vinden *in* het punt $P\left(2, \frac{4}{5}\right)$, onderzoeken we de gemiddelde helling van de grafiek tussen P en Q, waarbij we Q steeds dichter bij P kiezen.

1 Kies $b = 3$. Dan is de coördinaat van Q gelijk aan $\left(3, \frac{9}{5}\right)$. Bereken de gemiddelde helling over het interval [2, 3].

gemiddelde helling = $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = 1$

2 Herhaal deze berekening voor de waarden van b in de tabel. Je rekentoestel kan al het rekenwerk uitvoeren.





b	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(2)}{b-2}$
2,5	0,9
2,1	0,82
2,01	0,802
2,001	0,8002

3 Naar welke waarde zal de gemiddelde helling volgens jou naderen, wanneer we *b* steeds dichter bij 2 kiezen?

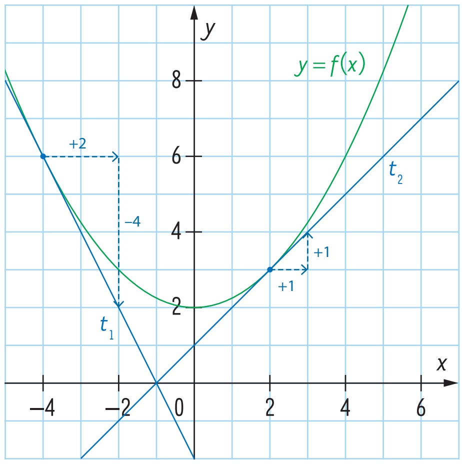
naar 0,8

Opdracht 4 bladzijde 17

Aan de grafieken van de functies zijn een aantal raaklijnen getekend.
Bepaal telkens de gevraagde afgeleiden.

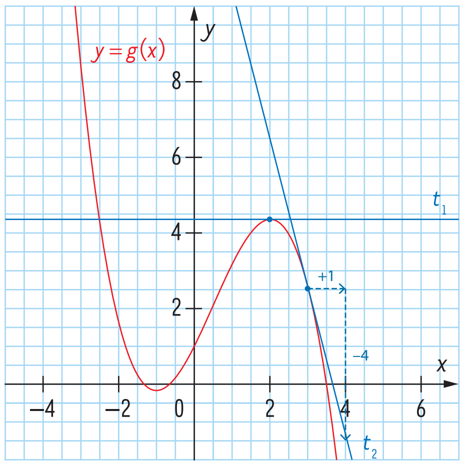
1 **a** $f'(-4) = -2$ zie figuur

b $f'(2) = 1$ zie figuur



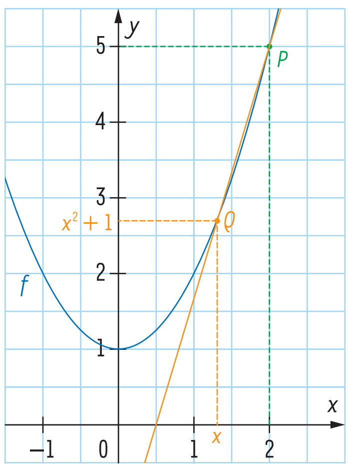
2 **a** $g'(2) = 0$ $\Delta g = 0$

b $g'(3) = -4$ zie figuur



Opdracht 5 bladzijde 17

Beschouw de functie $f: x \longmapsto x^2 + 1$. We willen $f'(2)$ berekenen, m.a.w. de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in $P(2, 5)$.
Beschouw daartoe een variabel punt $Q(x, x^2 + 1)$ op de grafiek van f, met $x \neq 2$.



1 Toon aan dat $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, de richtingscoëfficiënt van PQ, altijd gelijk is aan $x + 2$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} x + 2$$

2 Wanneer $Q \longrightarrow P$, zal $x \longrightarrow 2$ en $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \longrightarrow f'(2)$. Wat is de waarde van $f'(2)$?

$f'(2) = 2 + 2 = 4$

Opdracht 6 bladzijde 18

Bereken algebraïsch de afgeleide van de gegeven functies in de aangegeven x-waarden:

1 $f(x) = -x^2 + 8x$ in 4

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$
$$= \frac{-x^2 + 8x - 16}{x - 4}$$
$$= -\frac{(x-4)^2}{x - 4}$$
$$\underset{x \neq 4}{=} -(x - 4)$$

Als $x \rightarrow 4$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 0$.

$\Rightarrow f'(4) = 0$

2 $f(x) = x^3 + 4x$ in -2

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$
$$= \frac{x^3 + 4x + 16}{x + 2}$$
$$= \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 8)}{x + 2}$$
$$\underset{x \neq -2}{=} x^2 - 2x + 8$$

	1	0	4	16
−2		−2	4	−16
	1	−2	8	0

Als $x \rightarrow -2$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 16$.

$\Rightarrow f'(-2) = 16$

3 $f(x) = x^4$ in -1

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$
$$= \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$
$$= \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x + 1}$$
$$\underset{x \neq -1}{=} (x - 1)(x^2 + 1)$$

Als $x \rightarrow -1$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow -4$.

$\Rightarrow f'(-1) = -4$

Opdracht 7 bladzijde 19

Een bol rolt van een hellend vlak. Het verband tussen de tijd t (in s) en de afgelegde weg x (in m) wordt gegeven door het voorschrift $x(t) = 0{,}2t^2$.

1 Bereken de gemiddelde snelheid (in m/s) over het tijdsinterval [1;1,5].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1{,}5) - x(1)}{1{,}5 - 1}$$
$$= \frac{0{,}45 - 0{,}2}{0{,}5}$$
$$= 0{,}5$$

$\Rightarrow$ 0,5 m/s

2 Bereken de gemiddelde snelheid (in m/s) over het tijdsinterval [1;1,1].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1{,}1) - x(1)}{1{,}1 - 1}$$
$$= \frac{0{,}242 - 0{,}2}{0{,}1}$$
$$= 0{,}42$$

$\Rightarrow$ 0,42 m/s

3 Bereken de ogenblikkelijke snelheid (in m/s) voor $t = 1$.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(1)}{t - 1}$$
$$= \frac{0{,}2t^2 - 0{,}2}{t - 1}$$
$$= \frac{0{,}2(t-1)(t+1)}{t - 1}$$
$$\underset{t \neq 1}{=} 0{,}2(t+1)$$

Als $t \to 1$, dan $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to 0{,}4$.

$\Rightarrow x'(1) = 0{,}4$

$\Rightarrow$ 0,4 m/s

Opdracht 8 bladzijde 20

Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in de aangegeven punten.

1 $f: x \longmapsto -4x^3$ in $P(-1, f(-1))$

- $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-4x^3 - 4}{x+1} = \dfrac{-4(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} \underset{x \neq -1}{=} -4(x^2 - x + 1)$

  Als $x \to -1$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -12$.

  $\Rightarrow f'(-1) = -12$

- $t \leftrightarrow y - 4 = -12(x+1)$

  $t \leftrightarrow y = -12x - 8$

2 $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ in $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ en $Q\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$

In $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

- $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x-2} = \dfrac{2-x}{2x(x-2)} \underset{x \neq 2}{=} \dfrac{-1}{2x}$

  Als $x \to 2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{1}{4}$.

  $\Rightarrow f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

- $t \leftrightarrow y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-2)$

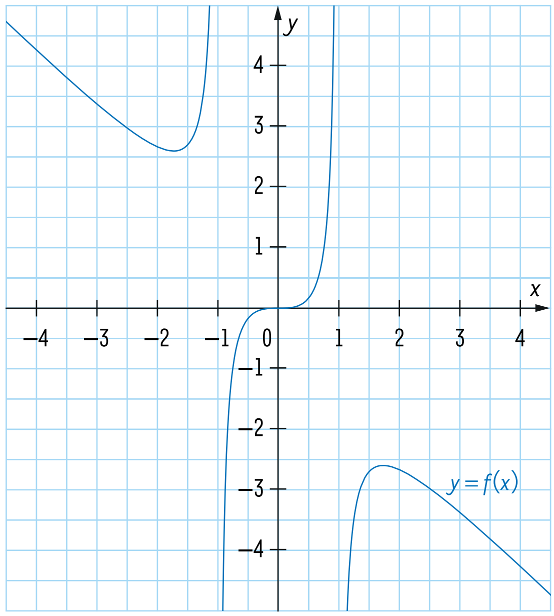
  $t \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$

In $Q\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$

- $f'(-2) = -\dfrac{1}{4}$
- $t \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - 1$

Opdracht 9 bladzijde 20

Gegeven is de grafiek van een functie f. Duid het juiste antwoord aan (slechts één antwoord is correct!) en motiveer.



1 **a** $f'(-4) > 0$

b $f'(-4) = 0$

c $f'(-4) < 0$

f is dalend in $-4 \Leftrightarrow f'(-4) < 0$

Antwoord c is juist.

2 **a** $f'(-1) = 0$ en $f'(1) = 0$

b $f'\left(-\sqrt{3}\right) = 0$ en $f'\left(\sqrt{3}\right) = 0$

c $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Antwoord a is niet juist, want in -1 en in 1 bestaat de afgeleide niet.

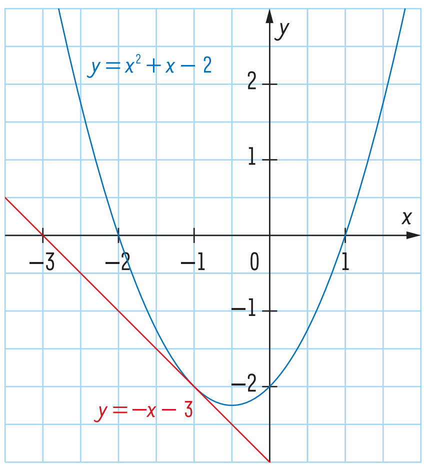
Antwoord c is ook niet juist want in $-\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$ is de afgeleide ook nul.

f is stijgend noch dalend in $-\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$, dus geldt dat $f'\left(-\sqrt{3}\right) = f'\left(\sqrt{3}\right) = 0$.

Antwoord b is juist.

Opdracht 10 bladzijde 22

Beschouw de functie $f: x \longmapsto x^2 + x - 2$. Voor een aantal x-waarden werd de afgeleide berekend, m.a.w. de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor die x-waarde. Je vindt die waarden in de tabel onder de grafiek. De grafiek toont de raaklijn voor $x = -1$.



a	$f'(a)$	vergelijking raaklijn in $P(a, f(a))$
-3	-5	$y = -5x - 11$
-2	-3	$y = -3x - 6$
-1	-1	$y = -x - 3$
0	1	$y = x - 2$
1	3	$y = 3x - 3$
2	5	$y = 5x - 6$
3	7	$y = 7x - 11$

1 Bepaal op basis van de eerste twee kolommen van de tabel een algemene formule voor $f'(a)$ in functie van a.

$f'(a) = 2a + 1$

2 Wat zal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de top van de parabool zijn?

Gebruik je formule voor $f'(a)$ uit de vorige vraag om de bijbehorende waarde van a te vinden.

Controleer vervolgens je antwoord met de formule voor de x-coördinaat van de top van een parabool die je kent uit het vierde jaar.

In de top van de parabool is de raaklijn horizontaal en dus is de richtingscoëfficiënt van die raaklijn 0.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

3 Controleer je uitdrukking voor $f'(a)$ door de afgeleide algebraïsch te berekenen.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 + x - 2 - (a^2 + a - 2)}{x - a}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 - a^2 - a + 2}{x - a}$$

$$= \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a}$$

$$= \frac{(x - a)(x + a + 1)}{x - a}$$

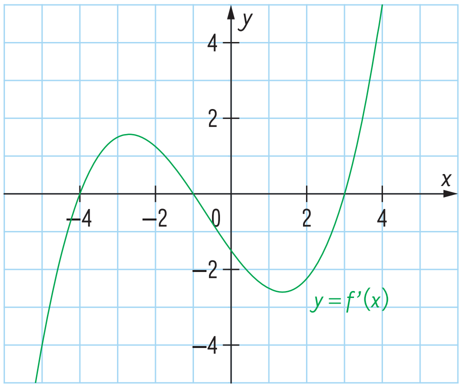
$$\underset{x \neq a}{=} x + a + 1$$

Als $x \to a$, zal $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to a + a + 1 = 2a + 1$.

$\to f'(a) = 2a + 1$

Opdracht 11 bladzijde 24

De hellinggrafiek van een functie f is gegeven.



Welke van de volgende besluiten kun je maken op basis van deze grafiek?

1 De grafiek van f is dalend voor $x = 2$.

juist, want $f'(2) < 0$

2 De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn voor $x = -1$.

juist, want $f'(-1) = 0$

3 De grafiek van f heeft juist twee punten met een horizontale raaklijn.

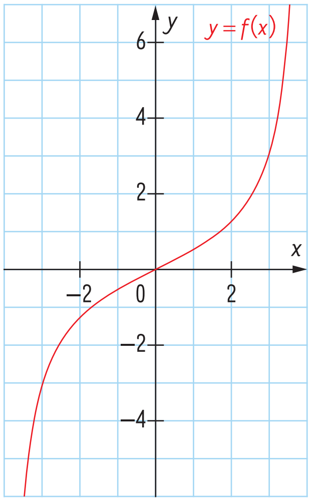
fout, f' heeft meer dan 2 nulpunten

4 De grafiek van f is stijgend voor $x = -2$.

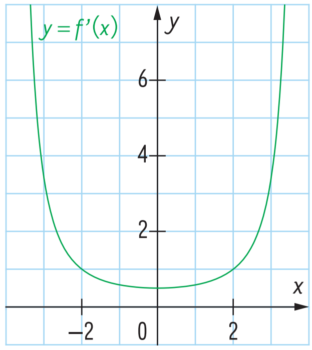
juist, want $f'(-2) > 0$

Opdracht 12 bladzijde 25

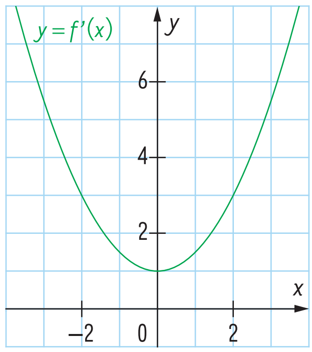
De grafiek van een functie f is gegeven.



A



B



1 Is grafiek A of grafiek B de hellinggrafiek van f? Verklaar je antwoord.

De helling van f in 0 is ongeveer gelijk aan 0,5. Enkel in A is $f'(0) = 0{,}5$.

2 Voor welke waarden van x is de helling van de grafiek van f kleiner dan 1?

voor $-2 < x < 2$

3 Voor welke waarden van x neemt de helling van de grafiek van f toe?

voor $x > 0$

Opdracht 13 bladzijde 25

De veelterm $v(x) = x^3 - a^3$ is deelbaar door $x - a$, aangezien $v(a) = 0$.

Het quotiënt bepaal je met een Hornerschema, dat je hiernaast afgebeeld ziet. Je vindt: $v(x) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	0

1 Toon op dezelfde manier aan dat $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$.

	1	0	0	0	$-a^4$
a		a	a^2	a^3	a^4
	1	a	a^2	a^3	0

$\Rightarrow\ x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

2 Maak gebruik van een Hornerschema om $q(x)$ te bepalen in $x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$, met n een natuurlijk getal groter dan 1.

	1	0	0	…	0	0	$-a^n$
a		a	a^2		a^{n-2}	a^{n-1}	a^n
	1	a	a^2		a^{n-2}	a^{n-1}	0

$\Rightarrow\ x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

Opdracht 14 bladzijde 27

Bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan de grafiek van $f\colon x \mapsto x^4$ in het punt $P(2, f(2))$.

- $\dfrac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$

  $f'(2) = 32$
- $t \leftrightarrow y - 16 = 32(x - 2)$

  $t \leftrightarrow y = 32x - 48$

Opdracht 15 bladzijde 27

Bepaal de coördinaat van de punten op de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto x^3$ waar de raaklijn evenwijdig is met de rechte $a \leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$.

- $\dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

  $\Rightarrow\ f'(x_0) = 3x_0^2$
- $a \leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$
- $t \,//\, a$

  $\Updownarrow$

  $\text{rico } t = \text{rico } a$

  $\Updownarrow$

  $3x_0^2 = \dfrac{3}{4}$

  $\Updownarrow$

  $x_0^2 = \dfrac{1}{4}$

  $\Updownarrow$

  $x_0 = \pm\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ In de punten $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$ en $Q\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}\right)$.

Opdracht 16 bladzijde 30

Bereken.

1 $\dfrac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 - 6)$

$\dfrac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 - 6) = 3x^2 + 10x$

2 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5x\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5x\right) = 2x^3 - 8x + 5$$

3 $\dfrac{d}{dx}\left(-3x^6 + \sqrt{2}x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 145x + 2103\right)$

$$\frac{d}{dx}(-3x^6 + \sqrt{2}x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 145x + 2103)$$
$$= -18x^5 + 4\sqrt{2}x^3 - 36x^2 + 46x - 145$$

4 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-6x^3 + 3x - 2}{3}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-6x^3 + 3x - 2}{3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-2x^3 + x - \frac{2}{3}\right)$$
$$= -6x^2 + 1$$

Opdracht 17 bladzijde 30

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + 4$.

1 Bepaal het punt P waar de raaklijn t aan de grafiek van f evenwijdig is met de rechte met vergelijking $y = x$.

- $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4) = 2x$

  $f'(a) = 2a$

- t // rechte met vergelijking $y = x$

  $\Updownarrow$

  rico $t = 1$

  $\Updownarrow$

  $2a = 1$

  $\Updownarrow$

  $a = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ in $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{17}{4}\right)$

2 Bepaal een vergelijking van t.

$$t \leftrightarrow y - \frac{17}{4} = x - \frac{1}{2}$$

$$t \leftrightarrow y = x + \frac{15}{4}$$

Opdracht 18 bladzijde 30

De raaklijn t aan de grafiek van de functie $f : x \longmapsto -x^3 + 2x^2 - 36$ gaat door de oorsprong.

Bepaal de coördinaat van het raakpunt P.

- $f'(x) = -3x^2 + 4x$
- Noem P(a, f(a)) het raakpunt, dan is
  $t \leftrightarrow y - (-a^3 + 2a^2 - 36) = (-3a^2 + 4a)(x - a)$
- De raaklijn gaat door de oorsprong:

$$\begin{aligned} & a^3 - 2a^2 + 36 = 3a^3 - 4a^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2a^3 - 2a^2 - 36 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a^3 - a^2 - 18 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a - 3)(a^2 + 2a + 6) = 0 \quad \to D < 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = 3 \end{aligned}$$

- P(3, –45)

Opdracht 19 bladzijde 31

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3$.

1 Bereken $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$.

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 1$$

2 Bereken $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}[f(x)]\right)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right) = 12x^2 - 12x + 10$$

Opdracht 20 bladzijde 32

Bereken.

1 $\dfrac{d^3}{dx^3}(x^6 - x^5 + x - 1)$

$= \dfrac{d^2}{dx^2}(6x^5 - 5x^4 + 1)$

$= \dfrac{d}{dx}(30x^4 - 20x^3)$

$= 120x^3 - 60x^2$

2 $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n)$

$= \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(nx^{n-1})$

$= \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(n(n-1)x^{n-2})$

$\vdots$

$= n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$(= n!)$

Opdracht 21 bladzijde 33

Gegeven is de functie $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Bepaal de scherpe hoek, in zestigdelige graden, tussen de x-as en de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(1, 0)$.

- $f'(x) = x$
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P(1, 0) is dus 1, zodat de scherpe hoek tussen de raaklijn en de x-as gelijk is aan 45°.

Opdracht 22 bladzijde 34

Bepaal de hoek, in zestigdelige graden, tussen de grafieken van f en g in hun snijpunten.

1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = x + 2$

- snijpunten:

  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 4 \;\text{ of }\; x = -2$

  Snijpunten: $S_1(-2,0)$, $S_2(4,6)$
- $f'(x) = x$

  $g'(x) = 1$

- In $S_1(-2, 0)$ is $f'(-2) = -2$ en $g'(-2) = 1$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\alpha_2 = 45°$

  $63°\,26'\,5{,}816'' + 45° = 108°\,26'5{,}816''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_1(-2, 0)$

  $= 180° - 108°\,26'\,5{,}816''$

  $\Rightarrow 71°\,33'\,54''$

- In $S_2(4, 6)$ is $f'(4) = 4$ en $g'(4) = 1$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = 75°\,57'\,49{,}524''$ $\alpha_2 = 45°$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_2(4, 6)$

  $= 75°\,57'\,49{,}524'' - 45°$

  $\Rightarrow 30°\,57'\,50''$

2 $f(x) = x^3 - 9x$ en $g(x) = -x^2 + 9$

- snijpunten:

  $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

  Snijpunten: $S_1(-3, 0)$, $S_2(-1,8)$, $S_3(3, 0)$

- $f'(x) = 3x^2 - 9$

  $g'(x) = -2x$

- In $S_1(-3, 0)$ is $f'(-3) = 18$ en $g'(-3) = 6$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = 86°\,49'\,12{,}612''$ $\alpha_2 = 80°\,32'\,15{,}64''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_1(-3, 0)$

  $= 86°\,49'\,12{,}612'' - 80°\,32'\,15{,}64''$

  $\Rightarrow 6°\,16'\,57''$

- In $S_2(-1, 8)$ is $f'(-1) = -6$ en $g'(-1) = 2$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -80°\,32'\,15{,}64''$ $\alpha_2 = 63°\,26'\,5{,}816''$

  $80°\,32'\,15{,}64'' + 63°\,26'\,5{,}816'' = 143°\,58'\,21{,}456''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_2(-1, 8)$

  $= 180° - 143°\,58'\,21{,}456''$

  $\Rightarrow 36°\,1'\,39''$

- In $S_3(3, 0)$ is $f'(3) = 18$ en $g'(3) = -6$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha_1 = 86°\,49'\,12{,}612'' \quad \alpha_2 = -80°\,32'\,15{,}64''$$

$86°\,49'\,12{,}612'' + 80°\,32'\,15{,}64'' = 167°\,21'\,28{,}252''$

De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_3(3, 0)$

$= 180° - 167°\,21'\,28{,}252''$

$\Rightarrow 12°\,38'\,32''$

Opdracht 23 bladzijde 35

Toon aan dat de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de rechte met vergelijking $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ elkaar loodrecht snijden.

- Snijpunten:

$$x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

$$4x^2 - x - 18 = 0$$

$$D = 289$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ of } x = -2$$

$$S_1\left(\frac{9}{4}, \frac{81}{16}\right), S_2(-2, 4)$$

- $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{4}$$

- In $S_1\left(\frac{9}{4}, \frac{81}{16}\right)$: $2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ en $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ De parabool en de rechte snijden elkaar niet loodrecht in S_1 want $\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} \neq -1$.

- In $S_2(-2, 4)$: $2 \cdot (-2) = -4$ en $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ De parabool en de rechte snijden elkaar loodrecht in S_2 want $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$.

Opdracht 24 bladzijde 35

Bepaal k zodat de parabolen met vergelijking $y = x^2 - 4$ en $y = kx^2 + \frac{21}{4}$ elkaar loodrecht snijden.

- $f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$g(x) = kx^2 + \frac{21}{4} \Rightarrow g'(x) = 2kx$$

- Noem het snijpunt P met abscis x_0.

  Dan geldt: $\begin{cases} x_0^2 - 4 = kx_0^2 + \dfrac{21}{4} & \text{(snijpunt)} \\ 2x_0 \cdot 2kx_0 = -1 & \text{(raaklijnen loodrecht)} \end{cases}$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ -\dfrac{1}{4k} - 4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{4} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ -\dfrac{1}{4k} = 9 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ k = -\dfrac{1}{36} \end{cases}$$

  $k = -\dfrac{1}{36}$

Opdracht 25 bladzijde 36

Toon aan dat de grafieken van de functies $f: x \longmapsto x^2 - 5x$ en $g: x \longmapsto x^3 - 4x^2 - 5x$ elkaar raken in de oorsprong.

Er moet gelden dat: $\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$

Nu is $f'(x) = 2x - 5$ en $g'(x) = 3x^2 - 8x - 5$,

zodat $\begin{cases} 0^2 - 5 \cdot 0 = 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 5 = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 5 \end{cases}$

De grafieken raken elkaar in de oorsprong.

Opdracht 26 bladzijde 36

Onderzoek of de krommen met vergelijking $y = x^3$ en $y = x^2 + 3x - 2$ elkaar raken.

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

  $g(x) = x^2 + 3x - 2 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$

- Snijpunten:

  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

  $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 2$ of $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ of $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

- voor $x = 2$: $3 \cdot 2^2 \neq 2 \cdot 2 + 3$
- voor $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$: $\underbrace{3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}_{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}} \neq \underbrace{2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)+3}_{2-\sqrt{5}}$
- voor $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: $\underbrace{3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}_{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}} \neq \underbrace{2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+3}_{2+\sqrt{5}}$

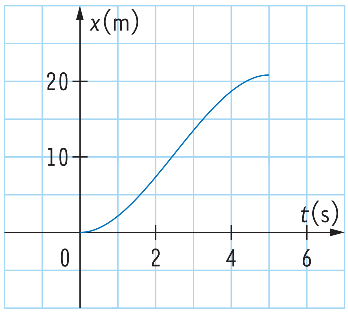
De krommen raken elkaar niet.

Opdracht 27 bladzijde 37

Een voorwerp beweegt op een rechte lijn.
De positie x (in meter) in functie van de tijd t (in seconden) wordt gegeven door de formule

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2$$

De beweging duurt van $t = 0$ s tot $t = 5$ s.



1 Bereken de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1, 2].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2)-x(1)}{2-1} = \frac{22}{3} - \frac{13}{6} = \frac{31}{6}$$

De gemiddelde snelheid is $\frac{31}{6}$ m/s ($\approx$ 5,17 m/s).

2 Bereken de ogenblikkelijke snelheid voor $t = 1$.

$x'(t) = -t^2 + 5t$

$x'(1) = -1 + 5 = 4$

De ogenblikkelijke snelheid is 4 m/s.

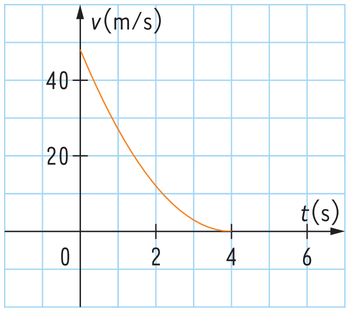
3 Op welk(e) tijdstip(pen) is de snelheid gelijk aan 6 m/s?

$-t^2 + 5t = 6 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 5t + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 2 \text{ of } t = 3$

Op de tijdstippen 2s en 3s is de snelheid 6 m/s.

Opdracht 28 bladzijde 37

De snelheid v (in m/s) van een kanonskogel, die op het tijdstip $t = 0$ s is afgeschoten, evolueert volgens de formule $v(t) = 3t^2 - 24t + 48$. In het begin neemt de snelheid heel snel af, na een seconde of twee gebeurt dit trager.



1 Wat is de gemiddelde verandering van de snelheid in het tijdsinterval [0, 2]?
En in het interval [2, 4]?

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(2) - v(0)}{2} = \frac{12 - 48}{2} = -18$$

Over het tijdsinterval [0, 2] is de gemiddelde snelheidsverandering –18 m/s^2.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(4) - v(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 12}{2} = -6$$

De gemiddelde snelheidsverandering is dan –6 m/s^2.

2 Bereken de ogenblikkelijke verandering van de snelheid voor $t = 1$ s. We noemen dit ook de ogenblikkelijke versnelling. De eenheid is m/s².

$v'(t) = 6t - 24$

$v'(1) = 6 - 24 = -18$

De ogenblikkelijke versnelling is –18 m/s^2 op het tijdstip 1 s.

3 Op welk(e) tijdstip(pen) is de versnelling gelijk aan –6 m/s²?

$6t - 24 = -6 \iff t = 3$

Op het tijdstip 3 s is de versnelling –6 m/s^2.

Opdracht 29 bladzijde 40

Een vuurwerkpijl wordt verticaal afgeschoten.
De hoogte h (in m) in functie van de tijd t (in s) wordt beschreven met het voorschrift $h(t) = 60t - 5t^2$.

1 Bepaal het voorschrift van de snelheid v in functie van t.

$v(t) = h'(t) = 60 - 10t$

2 Bepaal de snelheid bij het afschieten van de pijl.

$v(0) = 60 \implies 60$ m/s

3 Bepaal de snelheid na 2 seconden.

$v(2) = 40 \implies 40$ m/s

4 De vuurwerkpijl ontploft op een hoogte van 120 meter.

a Na hoeveel seconden is dat?

$60t - 5t^2 = 120$

$5t^2 - 60t + 120 = 0$

$t^2 - 12t + 24 = 0$

$t = 2{,}535\ldots$ of $t = 9{,}464\ldots$

Na ongeveer 2, 54 s ontploft de pijl.

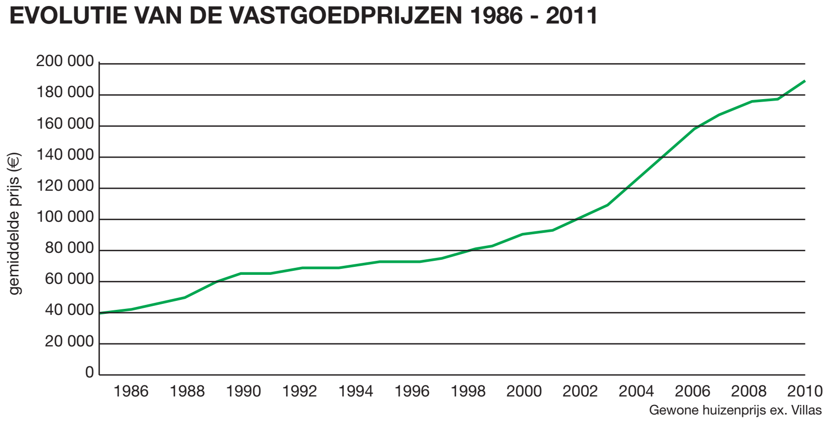
b Wat is de snelheid op dat moment?

v(2,54) = 34,6

De snelheid is dan 34,6 m/s.

Opdracht 30 bladzijde 45

De evolutie van de huizenprijzen (in euro) is weergegeven in de grafiek.



Bron: FOD Economie - Kerncijfers vastgoed 2011

Kies het juiste antwoord en verklaar met een berekening.

1 De gemiddelde prijsstijging van een gewoon huis tussen 2001 en 2011 was ongeveer

A 10 000 euro per jaar
C 50 000 euro per jaar
B 20 000 euro per jaar
D 100 000 euro per jaar

De gemiddelde prijsstijging was ongeveer

$$\frac{190\,000 - 90\,000}{10} = 10\,000$$

$\Rightarrow$ antwoord A

2 De gemiddelde prijsstijging van een gewoon huis tussen 1986 en 2011 was ongeveer

A 5000 euro per jaar
C 7000 euro per jaar
B 6000 euro per jaar
D 8000 euro per jaar

De gemiddelde prijsstijging was ongeveer

$$\frac{190\,000 - 40\,000}{25} = 6000$$

$\Rightarrow$ antwoord B

Opdracht 31 bladzijde 45

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f(x) = x^2 + 2$ en $g(x) = x^2 - 3$.

1 Bereken voor elk van deze functies de gemiddelde verandering over het interval $[-1, 5]$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{27 - 3}{6} = 4$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(5) - g(-1)}{5 - (-1)} = \frac{22 + 2}{6} = 4$$

2 Wat stel je vast? Is dit ook zo voor andere intervallen? Verklaar.

De gemiddelde veranderingen zijn gelijk.

- grafisch verklaring:

  de grafiek van g (parabool) ontstaat uit de grafiek van f (parabool) door een verschuiving over $\vec{v}$ (0, –5) zodat de gemiddelde verandering over [a, b] dezelfde blijft.

- algebraïsche verklaring:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 + 2 - a^2 - 2}{b - a} \underset{a \neq b}{=} b + a$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{b^2 - 3 - a^2 + 3}{b - a} \underset{a \neq b}{=} b + a$$

Opdracht 32 bladzijde 46

De tabel geeft een schatting van de bevolking in Europa tussen 400 v.C. en 1500 n.C.

jaar	–400	0	200	700	1000	1100	1200	1300	1400	1500
bevolking in miljoenen	23	37	67	27	42	48	61	73	45	69

De bevolking nam geleidelijk toe, behalve tijdens twee periodes:

– tussen 200 en 700: ondergang van het Romeinse Rijk, volksverhuizingen, oorlogen ten tijde van de Merovingers ...

– tussen 1300 en 1400: in de zogenaamde waanzinnige 14de eeuw: pest, 100-jarige oorlog ...

1 Toon met een berekening aan dat de bevolking gemiddeld toenam met 50 000 mensen per jaar tussen 700 en 1000.

$\frac{42 - 27}{300} = 0{,}05 \Rightarrow$ 0,05 miljoen mensen per jaar = 50 000 mensen per jaar.

2 Wat is de gemiddelde bevolkingstoename per jaar tussen 400 v.C. en 1500 n.C.?

$\frac{69 - 23}{1900} = 0{,}0242... \Rightarrow$ 0,024211 miljoen mensen per jaar = 24 211 mensen per jaar.

3 In welke periode daalde de bevolking het snelst?

Tussen 200 en 700: $\frac{27 - 67}{500} = -0{,}28 \Rightarrow$ –0,08 miljoen mensen per jaar

= –80 000 mensen per jaar.

Tussen 1300 en 1400: $\frac{45 - 73}{100} = -0{,}28 \Rightarrow$ –0,28 miljoen mensen per jaar

= –280 000 mensen per jaar.

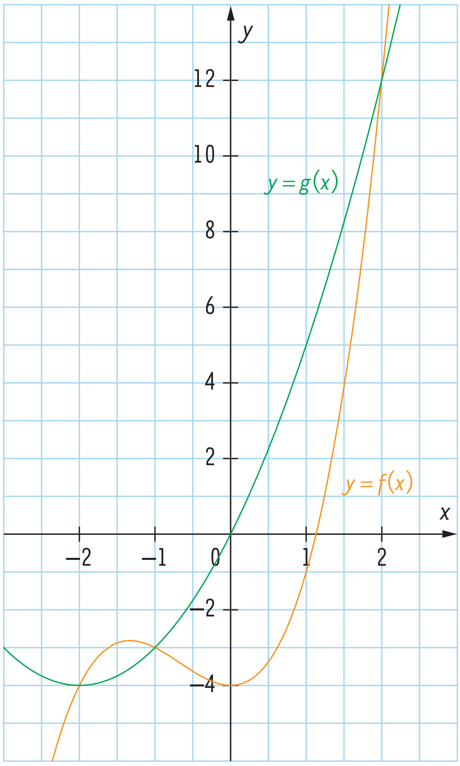
De bevolking daalt het snelst tussen 1300 en 1400.

Opdracht 33 bladzijde 46

Gegeven de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ en $g(x) = x^2 + 4x$.

1 Toon aan dat de differentiequotiënten van f en g over het interval $[-1, 2]$ gelijk zijn.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 5 \qquad \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = 5$



2 Geef nog een interval waarover f en g gelijke differentiequotiënten hebben.

$[-2, -1]$ of $[-2, 2]$

3 Bereken de helling van de grafiek van f in het punt $P(2,12)$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^3 + 2x^2 - 4 - 12}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 4x + 8)}{\cancel{x-2}}$$

$$= x^2 + 4x + 8$$

Als $x \to 2$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 20$.

De helling van de grafiek van f in P(2, 12) is 20.

4 Bereken de helling van de grafiek van g in het punt $P(2,12)$.

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} \frac{\cancel{(x-2)}(x + 6)}{\cancel{x-2}} = x + 6$$

Als $x \to 2$, dan $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to 8$.

De helling van de grafiek van g in P(2, 12) is 8.

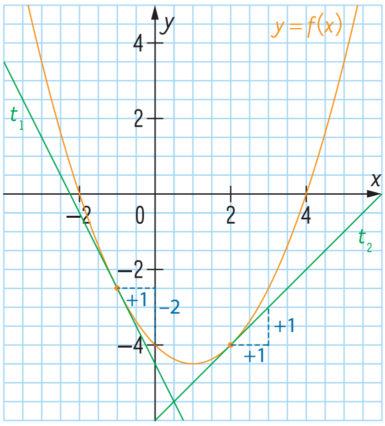
Opdracht 34 bladzijde 47

Aan de grafieken van de functies zijn een aantal raaklijnen getekend.

Bepaal telkens de gevraagde afgeleiden.

1 **a** $f'(-1) = -2$ zie figuur

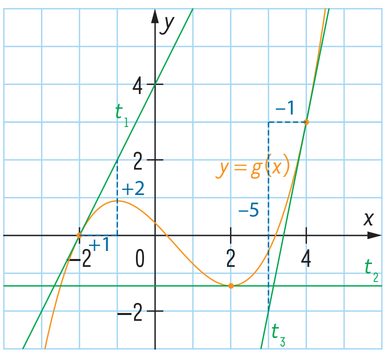
b $f'(2) = 1$ zie figuur



2 **a** $g'(-2) = 2$ zie figuur

b $g'(2) = 0$ (horizontale raaklijn)

c $g'(4) = 5$ zie figuur



Opdracht 35 bladzijde 47

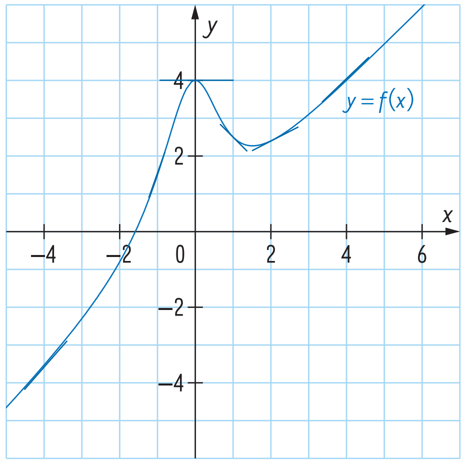
De grafiek van een functie f is getekend.

Rangschik van klein naar groot:

$f'(-4)$	$f'(1)$
$f'(-1)$	$f'(2)$
$f'(0)$	$f'(4)$

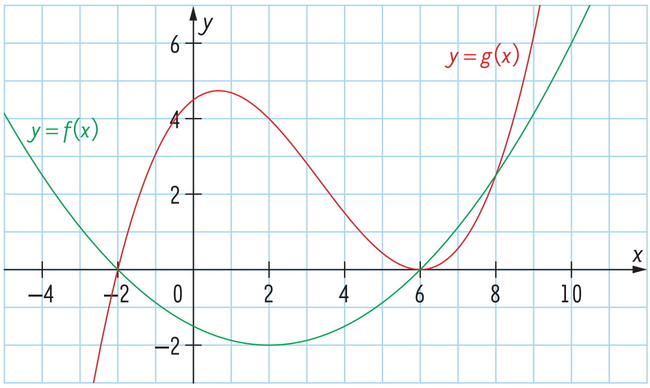
$f'(1) < f'(0) < f'(2) < f'(4) < f'(-4) < f'(-1)$

zie figuur



Opdracht 36 bladzijde 48

De grafieken van de functies f en g zijn gegeven. Kies telkens het juiste antwoord.



1	$f'(-2) < g'(-2)$	$f'(-2) = g'(-2)$	$f'(-2) > g'(-2)$
2	$f'(0) < g'(0)$	$f'(0) = g'(0)$	$f'(0) > g'(0)$
3	$f'(6) < g'(6)$	$f'(6) = g'(6)$	$f'(6) > g'(6)$
4	$f'(8) < g'(8)$	$f'(8) = g'(8)$	$f'(8) > g'(8)$

Opdracht 37 bladzijde 48

Is de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2$ stijgend, dalend of stijgend noch dalend in het punt $P(-1, y)$?

Verklaar met een berekening.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}}{x+1} = \frac{3x^3 + 5x^2 - 2}{15(x+1)} \underset{x \neq -1}{=} \frac{\cancel{(x+1)}(3x^2 + 2x - 2)}{15\cancel{(x+1)}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{15}$$

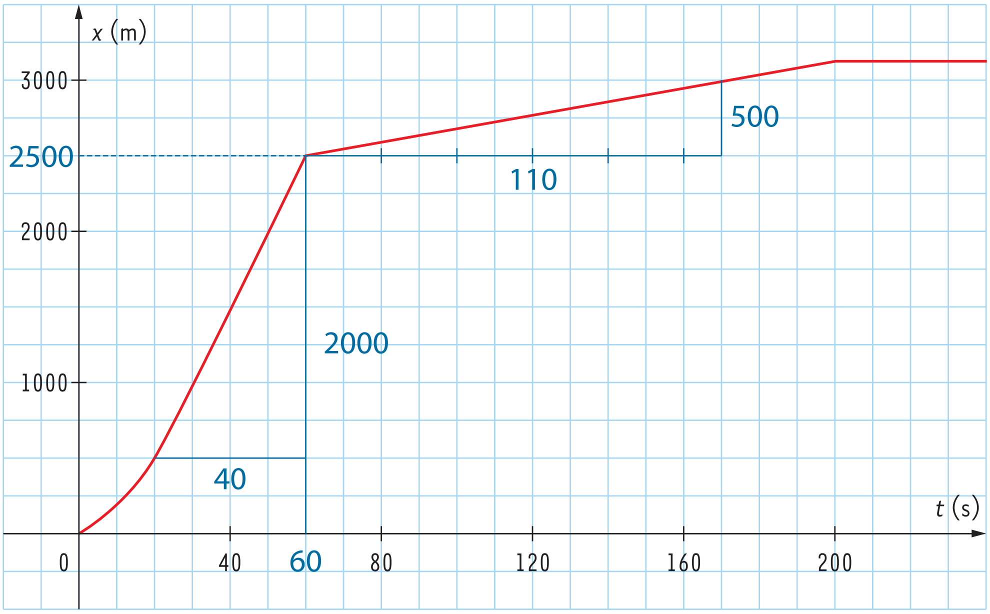
Als $x \to -1$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{15}$

$f'(-1) = -\frac{1}{15} < 0$

$\Rightarrow$ f is dalend in P.

Opdracht 38 bladzijde 48

De grafiek toont de valweg x (in meter) van een parachutist als functie van de tijd t (in seconden).
De parachutist is uit de helikopter gesprongen op een hoogte van 3200 meter. Gedurende 20 seconden is de beweging versneld, maar dan wordt de snelheid constant omwille van de luchtweerstand. Bij het openen van de parachute neemt de luchtweerstand plots toe, zodat de snelheid ineens afneemt. De parachutist valt nu terug met een constante snelheid, waarmee hij ook zal landen.



1 Na hoeveel tijd opent de parachutist zijn valscherm?

Hij opent zijn valscherm na 60s. (zie figuur)

2 Op welke hoogte bevindt de parachutist zich als hij zijn valscherm opent?

Hij bevindt zich op een hoogte van 700 m. (zie figuur; 3200 – 2500 = 700)

3 Welke constante snelheid (in m/s en in km/h) heeft de parachutist tijdens de vrije val?

$\frac{2000}{40}$ m/s = 50 m/s (zie figuur)

De snelheid is 50 m/s = 180 km/h.

4 Met welke snelheid (in km/h) komt de parachutist op de grond terecht?

$\frac{500}{110}$ m/s = 4,545... m/s

De snelheid is 16,4 km/h.

Opdracht 39 bladzijde 49

1 Als $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, bepaal dan algebraïsch

a $f'(0)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{x}{x^2+1} - 0}{x} \underset{x \neq 0}{=} \frac{1}{x^2+1}$$

als $x \to 0$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 1$

$\Rightarrow f'(0) = 1$

b $f'(-2)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{5}}{x+2} = \frac{2x^2+5x+2}{5(x^2+1)(x+2)} = \frac{(x+2)(2x+1)}{5(x^2+1)(x+2)} \underset{x \neq -2}{=} \frac{2x+1}{5(x^2+1)}$$

als $x \to -2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \dfrac{-3}{25}$

$\Rightarrow f'(-2) = \dfrac{-3}{25}$

2 Als $f(x) = \sqrt{x} - x$, bepaal dan algebraïsch

a $f'(1)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - x - 0}{x-1} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \underset{x \neq 1}{=} \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

als $x \to 1$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

b $f'(4)$

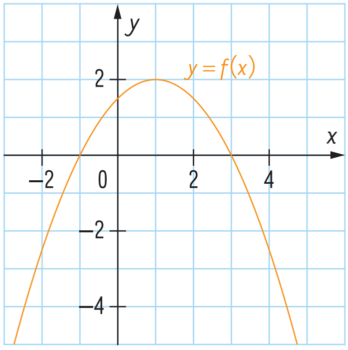
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - x + 2}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(-1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \underset{x \neq 4}{=} \frac{-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

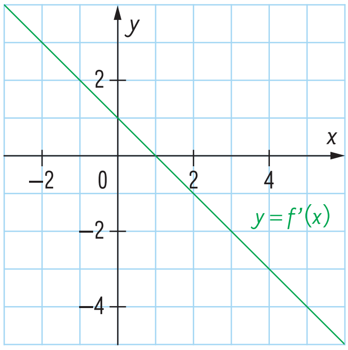
als $x \to 4$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow f'(4) = -\dfrac{3}{4}$

Opdracht 40 bladzijde 50

Hiernaast zie je de grafiek van een functie f en daaronder de grafiek van haar afgeleide functie f'.





1 Bepaal

a $f'(-2) = 3$

b $f'(0) = 1$

c $f'(4) = -3$

2 In het interval $]-\infty, 1[$ is de afgeleide functie f' strikt positief.

Wat betekent dit voor de grafiek van f?

De functie is stijgend in $]-\infty, 1[$.

3 **a** In welk punt van de grafiek van f is de helling gelijk aan 2?

in P(−1, 0)

b In welk punt van de grafiek van f is de helling gelijk aan −2?

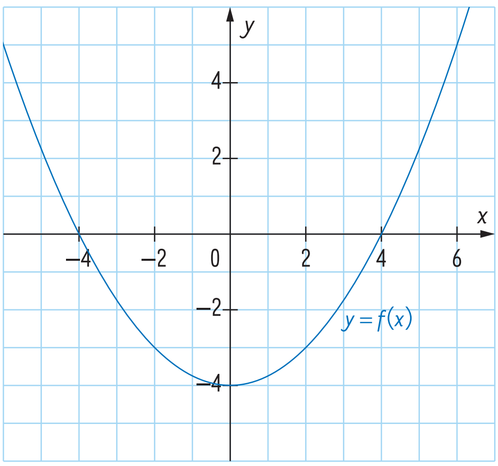
in Q(3, 0)

Opdracht 41 bladzijde 50

Welke grafieken horen bij welke hellingfuncties?

1 B   2 F   3 A   4 D

1

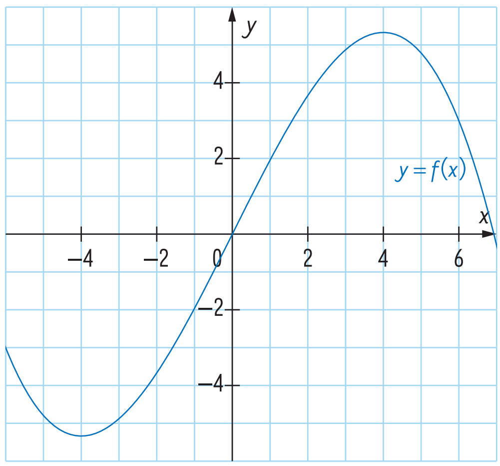


↘ 0 ↗

$f' < 0$ $f' > 0$

$\Rightarrow$ B

2

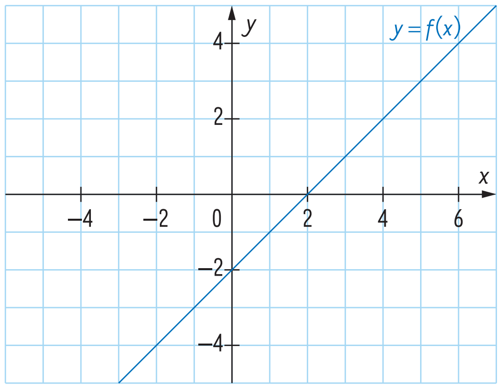


↘ −4 ↗ 4 ↘

$f' < 0$ $f' > 0$ $f' < 0$

$\Rightarrow$ F

3

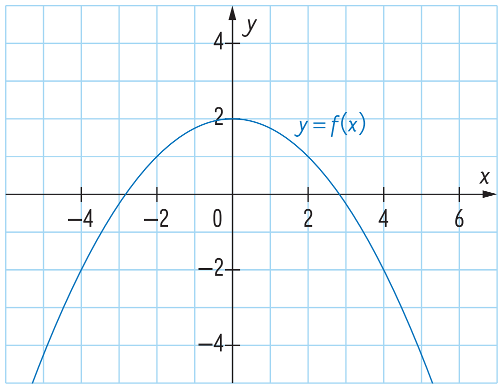


↗

$f' > 0$

$\Rightarrow$ A

4

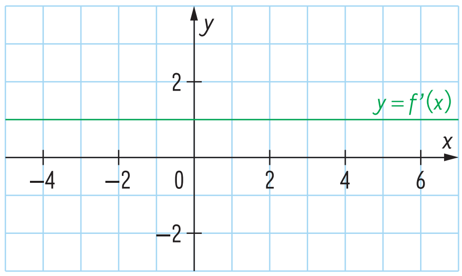


↗ 0 ↘

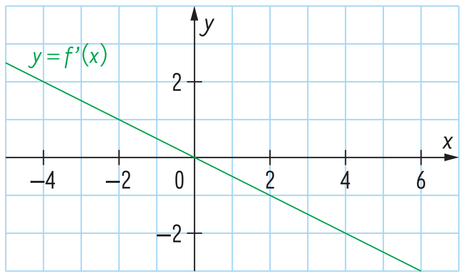
$f' > 0$ $f' < 0$

$\Rightarrow$ D

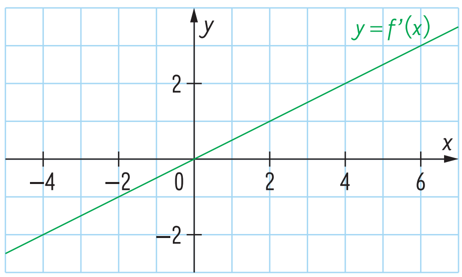
A



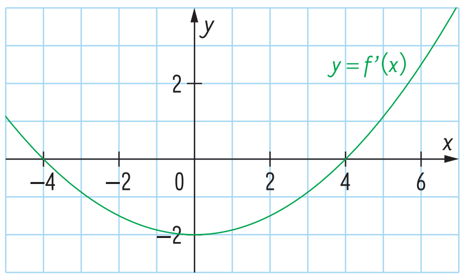
D



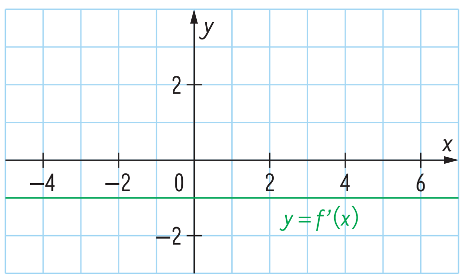
B



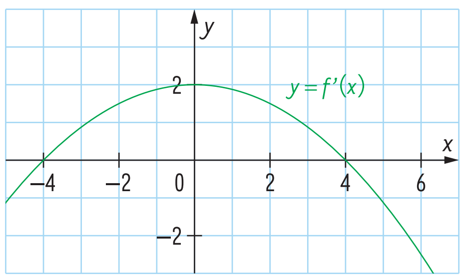
E



C

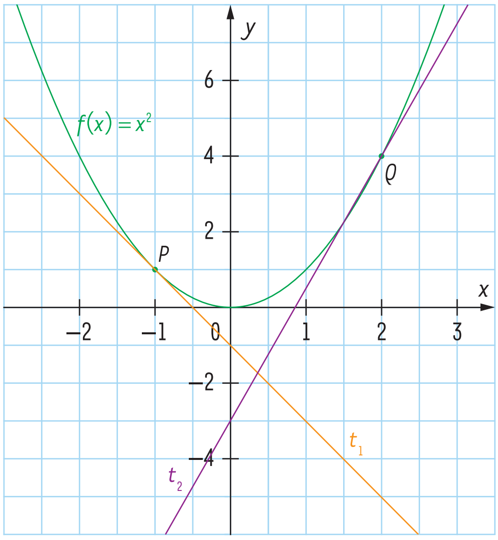


F



Opdracht 42 bladzijde 52

Verklaar telkens met een berekening.



1 Is t_1 de raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $P(-1,1)$?

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(-1) = -2$

$t_1 \leftrightarrow y - 1 = -2(x + 1)$

$y = -2x - 2 + 1$

$y = -2x - 1$

t_1 is de raaklijn want t_1 gaat door $P(-1, 1)$ en $R(0, -1)$.

2 Is t_2 de raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $Q(2,4)$?

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$

$t_2 \leftrightarrow y - 4 = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8 + 4$

$y = 4x - 4$

t_2 is niet de gevraagde raaklijn want $T(0, -4)$ ligt niet op t_2.

Opdracht 43 bladzijde 52

Bepaal

1 $\dfrac{d}{dx}(x^{10}) = 10x^9$

2 $\dfrac{d}{dt}(t^7) = 7t^6$

3 $\dfrac{d}{da}(a^{n-5}) = (n-5)a^{n-6}$

4 $\dfrac{d}{dx}(x^5)\Big|_{x=-1} = (5x^4)\big|_{x=-1} = 5$

5 $\dfrac{d}{dr}(r^2)\Big|_{r=8} = (2r)\big|_{r=8} = 16$

6 $\dfrac{d}{dx}(a^b)\Big|_{x=10} = 0$ (a^b is een constante bij variabele x)

Opdracht 44 bladzijde 52

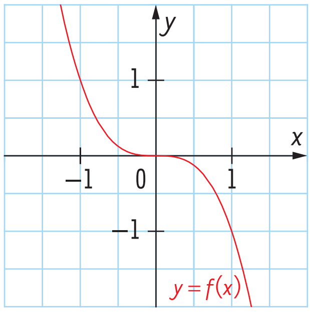
Welke grafiek hoort bij de gegeven voorwaarden voor de afgeleide functie?

1 $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$ en $f'(-1) > 0$ C

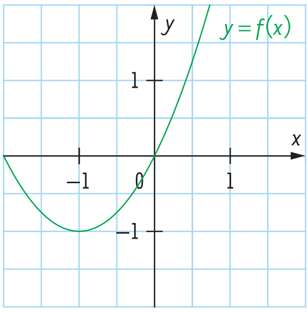
2 $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$ en $f'(-1) < 0$ A

3 $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$ en $f'(-1) = 0$ B

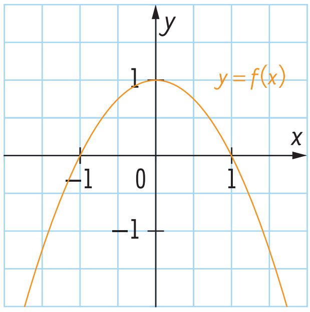
A



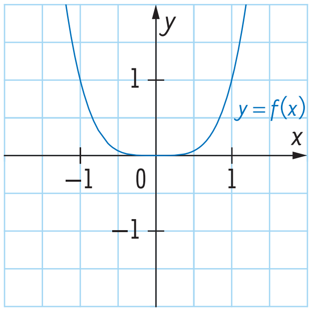
B



C

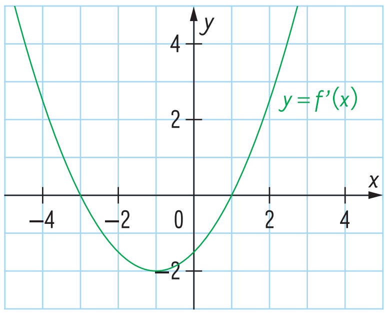


D



Opdracht 45 bladzijde 53

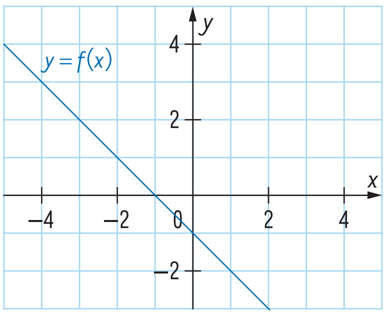
De hellinggrafiek van een functie f is gegeven. Welke van de onderstaande grafieken kan die van f zijn?



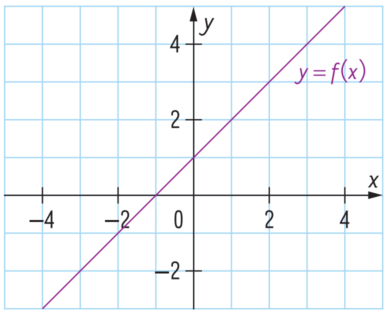
x		−3		1	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	max	↘	min	↗

⇒ grafiek B

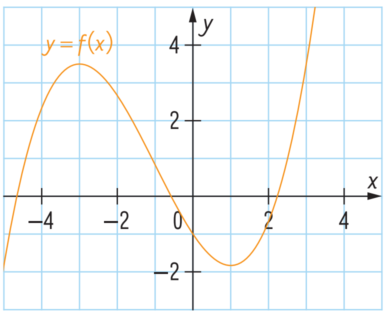
A



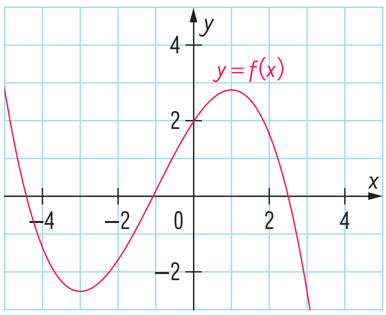
C



B



D



Opdracht 46 bladzijde 53

In welke punten heeft de grafiek van de functie $f : x \longmapsto x^3$

$f'(x) = 3x^2$

1 als helling 12?

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = -2$ of $x = 2$

in $P_1(2, 8)$ en $P_2(-2, -8)$

2 als helling $\frac{1}{3}$?

$3x^2 = \frac{1}{3}$

$x^2 = \frac{1}{9}$

$x = \pm\frac{1}{3}$

in $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$ en $P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right)$

3 als helling –4?

$3x^2 = -4$

De helling kan in geen enkel punt gelijk zijn aan –4.

4 als helling a?

$3x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{3}$

- $a < 0 \Rightarrow$ in geen enkel punt
- $a = 0 \Rightarrow$ in $P(0, 0)$
- $a > 0 \Rightarrow$ in $P_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ en $P_2\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

Opdracht 47 bladzijde 53

Bepaal de coördinaat van het punt P op de grafiek van de functie $f: x \longmapsto x^2$ waar de raaklijn evenwijdig is met de rechte die de grafiek van f snijdt in de punten met x-coördinaat -3 en 2.

- rico snijlijn $= \dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \dfrac{4-9}{5} = -1$

  rico raaklijn $= \dfrac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=x_0} = 2x_0$

- raaklijn // snijlijn

$$\Updownarrow$$

$$2x_0 = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

Opdracht 48 bladzijde 53

De rechte met vergelijking $y = 6x + b$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie $f: x \longmapsto x^2$.

Bepaal b.

- $f'(x) = 2x$
- $t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x-a)$

  $t \leftrightarrow y - a^2 = 2a(x-a)$

  $y = 2ax - a^2$

  Nu is $y = 6x + b$, dus

  $2a = 6$ en $b = -a^2$

  $\Rightarrow a = 3$ en $b = -9$

  $\Rightarrow b = -9$

Opdracht 49 bladzijde 54

De rechte $t \leftrightarrow y = ax - 6$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4$.

Bepaal a.

- $f'(x) = 4x^3$
- $t \leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

  $y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0)$

  $y = 4x_0^3x - 3x_0^4$

Nu is $y = ax - 6$, dus

$$4x_0^3 = a \quad \text{en} \quad -3x_0^4 = -6$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0^4 = 2$$

$$\Updownarrow$$

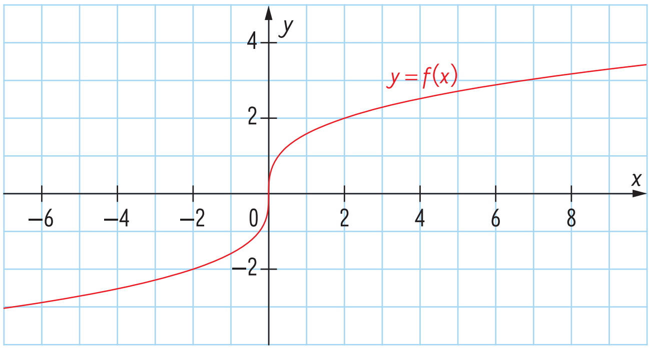
$$x_0 = \pm\sqrt[4]{2}$$

als $x_0 = \sqrt[4]{2}$ is $a = 4\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = 4\sqrt[4]{8}$

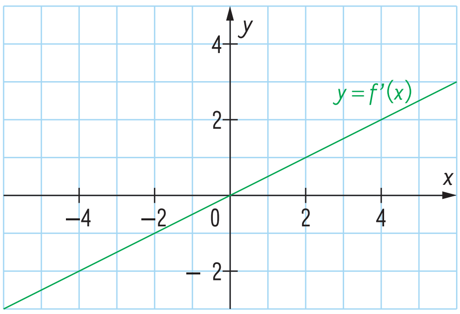
als $x_0 = -\sqrt[4]{2}$ is $a = -4\sqrt[4]{8}$

Opdracht 50 bladzijde 54

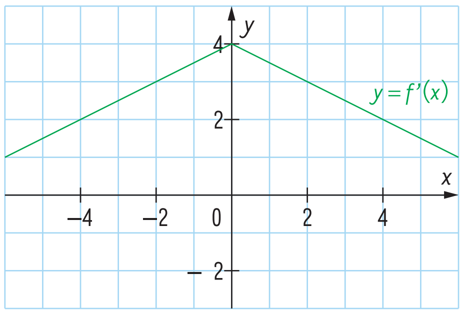
De grafiek van een functie *f* is gegeven. Welk is de grafiek van haar hellingfunctie?



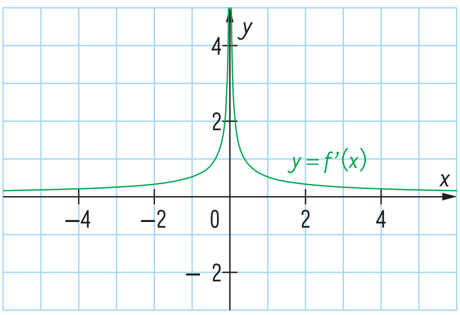
A



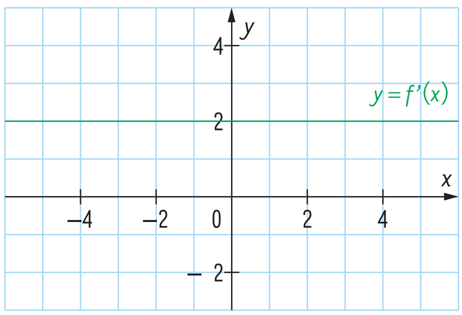
C



B



D



De grafiek is stijgend en heeft een verticale raaklijn voor $x = 0$.

Dit betekent dat $f'(0)$ niet bestaat en dat $f'(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

$\Rightarrow$ antwoord B

Opdracht 51 bladzijde 54

1 Bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $P(a, a^2)$.

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$t \leftrightarrow y - a^2 = 2a(x - a)$

$y = 2ax - 2a^2 + a^2$

$t \leftrightarrow y = 2ax - a^2$

2 Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van t met de x-as.

$y = 0$

$2ax - a^2 = 0$

$x = \dfrac{a}{2}$

$S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$

3 Bepaal de coördinaat van het snijpunt T van t met de y-as.

$x = 0 \Rightarrow y = -a^2$

$T(0, -a^2)$

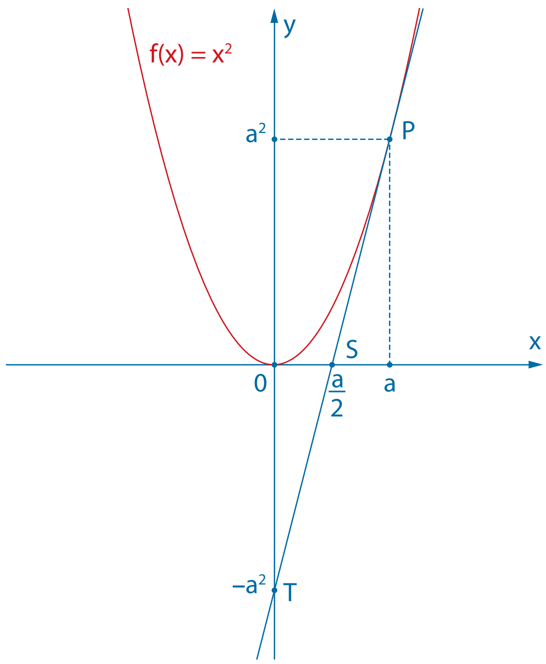
4 Leid uit de vorige resultaten een constructie af van de raaklijn aan de parabool met vergelijking $y = x^2$ in een willekeurig punt.

Noem dit punt $P(a, a^2)$.

Duid op de x-as het punt $S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ aan en verbind P met S.

Of: duid op de y-as het punt $T(0, -a^2)$ aan en verbind P met T.

Of: duid de punten $S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ en $T(0, -a^2)$ aan en verbind S met T.



Opdracht 52 bladzijde 55

Bereken

1 $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{1}{2}$

2 $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{9}x^2+3x\right) = -\frac{2}{9}x+3$

3 $\frac{d}{dx}(x^4-3x^3+8) = 4x^3 - 9x^2$

4 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6-x\right) = 3x^5 - 1$

5 $\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right) = -3x^3 + 2x^2$

6 $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax + b$

7 $\frac{d}{dx}(2ax^2+3ax+b) = 4ax + 3a$

8 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4a}\right) = \frac{x^2}{a} + \frac{x}{2a}$

9 $\frac{d}{dx}(-2x^3y+x^2y^2-xy^3) = -6x^2y + 2xy^2 - y^3$

10 $\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2tx^3}{3}+\frac{u^2}{2}\right) = -x^3 + 2tx^2$

Opdracht 53 bladzijde 55

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 10$.

Bereken

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

1 $f'(1) = -4$

2 $f'(-2) = 23$

3 $f'(0) = -1$

Opdracht 54 bladzijde 55

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Bepaal a als

$f'(x) = -4x + 3$

1 $f'(a) = -5$

$-4a + 3 = -5$

$-4a = -8$

$a = 2$

2 $f'(a) = 7$

$-4a + 3 = 7$

$-4a = 4$

$a = -1$

3 $f'(a) = 0$

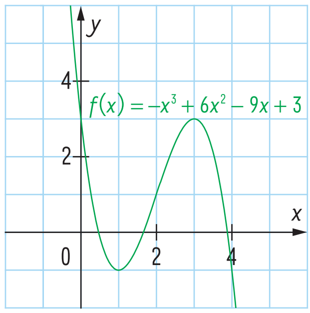
$-4a + 3 = 0$

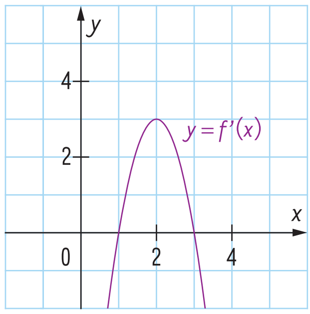
$-4a = -3$

$a = \dfrac{3}{4}$

Opdracht 55 bladzijde 56

De grafieken van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$ en haar afgeleide functie f' zijn getekend.





1 Bepaal het voorschrift van f'.

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

2 Voor welke waarden van x heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

$f'(x) = 0$

$x = 1$ of $x = 3$ (zie grafiek f')

$\Rightarrow$ voor $x = 1$ en voor $x = 3$

3 Voor welke waarden van x heeft de grafiek van f een strikt positieve helling?

$f'(x) > 0 \iff 1 < x < 3$

$\Rightarrow$ voor $1 < x < 3$

4 Voor welke waarde van x heeft de grafiek van f de grootste helling?

f' bereikt een maximum voor $x = 2$

$\Rightarrow$ voor $x = 2$

Opdracht 56 bladzijde 56

Bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan de grafiek van f in het punt P.

1 $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x + 2$ in $P(1, f(1))$

$f'(x) = 8x + 5$

$f'(1) = 13$

$t \leftrightarrow y - 11 = 13(x - 1)$

$t \leftrightarrow y = 13x - 2$

2 $f : x \mapsto \dfrac{1 - x^2}{5}$ in $P(-4, f(-4))$

$f'(x) = -\dfrac{2}{5}x$

$t \leftrightarrow y + 3 = \dfrac{8}{5}(x + 4)$

$t \leftrightarrow y = \dfrac{8}{5}x + \dfrac{17}{5}$

Opdracht 57 bladzijde 56

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

$f'(x) = 2x - 4$

1 In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de x-as?

$f'(x) = 0$ als $x = 2 \;\Rightarrow\;$ in $P(2, -4)$

2 In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de rechte $y = 4x$?

$f'(x) = 4$

$2x - 4 = 4$

$x = 4 \;\Rightarrow\;$ in $P(4, 0)$

3 In welk punt van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de rechte $y = -2x + 3$?

$f'(x) = -2$

$2x - 4 = -2$

$x = 1 \;\Rightarrow\;$ in $P(1, -3)$

Opdracht 58 bladzijde 56

Van de functie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + 1$ is gegeven dat $f(2) = 1$ en $f'(2) = -3$.

Bepaal a en b.

- $f(x) = ax^2 + bx + 1$

  $f(2) = 1$

  $4a + 2b + 1 = 1$

  $2a + b = 0$ (1)

- $f'(x) = 2ax + b$

  $f'(2) = -3$

  $4a + b = -3$ (2)

- uit (1): $b = -2a$ (3)

  in (2): $4a - 2a = -3$

  $2a = -3$

  $a = \dfrac{-3}{2}$

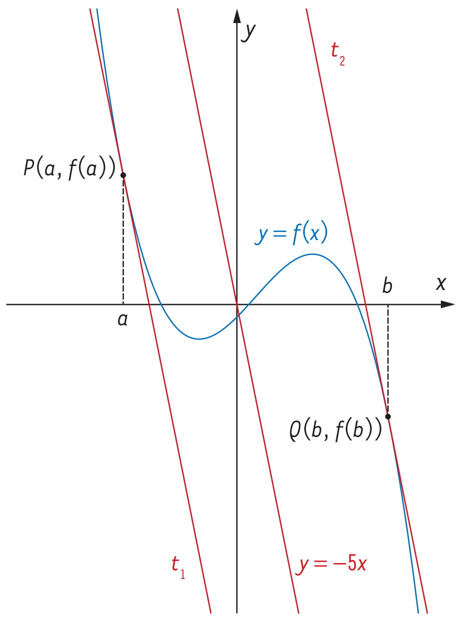
  in (3): $b = -2 \cdot \left(\dfrac{-3}{2}\right) = 3$

  $a = \dfrac{-3}{2}$ en $b = 3$

Opdracht 59 bladzijde 57

t_1 en t_2 zijn de raaklijnen aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{3}$ in de punten $P(a, f(a))$ en $Q(b, f(b))$.

Bepaal a en b als je weet dat t_1 en t_2 evenwijdig zijn met de rechte met vergelijking $y = -5x$.



- $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

- rico $t_1 = -5$

  $\Updownarrow$

  $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + 1 = -5$

  $\Updownarrow$

  $-a^2 + a + 12 = 0$

  $\Updownarrow$

  $a = -3$ of $a = 4$

- $a = -3$ (figuur: $a < 0$)

  $b = 4$ (figuur: $b > 0$)

Opdracht 60 bladzijde 57

Toon aan dat

1 $(\underbrace{f+g+h+\ldots}_{n \text{ termen}})' = \underbrace{f'+g'+h'+\ldots}_{n \text{ termen}}$

$$(f+g+h+\ldots)' = f' + (\underbrace{g+h+\ldots}_{n-1 \text{ termen}})' \qquad \text{(somregel)}$$

$$= f' + g' + (\underbrace{h+\ldots}_{n-2 \text{ termen}})' \qquad \text{(somregel)}$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{f'+g'+h'+\ldots}_{n \text{ termen}}$$

2 $(f-g)' = f' - g'$

$$\frac{\Delta(f-g)}{\Delta x} = \frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a}$$

$$= \frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a} \qquad \text{(definitie somfunctie)}$$

$$= \frac{\big(f(x)-f(a)\big)-\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

als $x \to a$, zal $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$ en $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to g'(a)$

zodat $\frac{\Delta(f-g)}{\Delta x} \to f'(a) - g'(a)$

$\Rightarrow (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

3 $(r \cdot f)' = r \cdot f'$

$$\frac{\Delta(rf)}{\Delta x} = \frac{(rf)(x)-(rf)(a)}{x-a}$$

$$= \frac{rf(x)-rf(a)}{x-a} \qquad \text{(definitie veelvoudfunctie)}$$

$$= r \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

als $x \to a$, zal $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$

zodat $\frac{\Delta(rf)}{\Delta x} \to r \cdot f'(a)$

$\Rightarrow (rf)' = r \cdot f'$

Opdracht 61 bladzijde 57

De rechte met vergelijking $y = 2x + b$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2x^2 - 3$.

Bepaal b.

$f'(x) = 4x$

Stel P(a,f(a)) is het raakpunt, dan is

$f'(a) = 4a = 2$

$a = \frac{1}{2}$

$f(a) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{-5}{2}$

zodat $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$ het raakpunt is.

We stellen met deze gegevens een vergelijking van de raaklijn t op:

$t \leftrightarrow y + \frac{5}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = 2x - 1 - \frac{5}{2}$

$t \leftrightarrow y = 2x - \frac{7}{2}$

$b = \frac{-7}{2}$

Opdracht 62 bladzijde 57

De rechte met vergelijking $y = ax - 1$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie $f : x \longmapsto x^2 + 2$.

Bepaal a.

- Stel $P(x_0, x_0^2 + 2)$ het raakpunt
- $f'(x) = 2x$

$t \leftrightarrow y - x_0^2 - 2 = 2x_0(x - x_0)$

$y = 2x_0x - 2x_0^2 + x_0^2 + 2$

$y = 2x_0x - x_0^2 + 2$

- $\begin{cases} 2x_0 = a & (y = ax - 1) \\ -x_0^2 + 2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0^2 = 3 \\ a = 2x_0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{3} \\ a = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \; a = 2\sqrt{3} \quad$ of $\quad a = -2\sqrt{3}$

OFWEL

Stel $P(x_0, x_0^2 + 2)$ en $Q(0, -1)$, dan is

$f'(x_0) = \text{rico } PQ$

$$2x_0 = \frac{-1 - x_0^2 - 2}{0 - x_0}$$

$$-2x_0^2 = -3 - x_0^2$$

$$3 = x_0^2$$

$$x_0 = \pm\sqrt{3}$$

zodat $a = 2x_0 = \pm 2\sqrt{3}$.

Opdracht 63 bladzijde 57

Gegeven is de parabool $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$.

Toon aan dat de rechte AB, met $A(m, f(m))$ en $B(n, f(n))$, evenwijdig is met de raaklijn t in het punt $C\left(\frac{m+n}{2}, f\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$ van p.

- $$\text{rico } AB = \frac{f(n) - f(m)}{n - m} = \frac{an^2 + bn + c - am^2 - bm - c}{n - m}$$
  $$= \frac{a(n-m)(n+m) + b(n-m)}{n - m}$$
  $$= a(n + m) + b$$
- $f'(x) = 2ax + b$
  $$\text{rico } t = 2a \cdot \frac{m+n}{2} + b$$
  $$\text{rico } t = a(m + n) + b$$

$\Rightarrow$ $AB \parallel t$

Opdracht 64 bladzijde 57

Wat is de kleinste helling van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1$?

- $f'(x) = 6x^2 + 2x + 3$
- De hellinggrafiek is een dalparabool met top $\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right)$

  De kleinste helling is dus $\frac{17}{6}$.

Opdracht 65 bladzijde 58

Bepaal de hoek tussen de grafieken van f en g in hun snijpunten.

1 $f : x \mapsto 2x - 1$ $\qquad$ $g : x \mapsto -\frac{1}{3}x + 2$

- Snijpunten

  $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 2x - 1 = -\frac{1}{3}x + 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

  Snijpunt: $S\left(\frac{9}{7}, \frac{11}{7}\right)$

- $f'(x) = 2$

  $g'(x) = -\frac{1}{3}$

- In $S\left(\frac{9}{7}, \frac{11}{7}\right)$ is $f'\left(\frac{9}{7}\right) = 2$ en $g'\left(\frac{9}{7}\right) = -\frac{1}{3}$

  $\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

  $\alpha_1 = 63° \, 26' \, 5{,}816''$ $\qquad$ $\alpha_2 = -18° \, 26' \, 5{,}816''$

  $63° \, 26' \, 5{,}816'' + 18° \, 26' \, 5{,}816'' = 81° \, 52' \, 11{,}632''$

  De hoek is $81° \, 52' \, 12''$.

2 $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 10$ $\qquad g : x \mapsto -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

- Snijpunten

  $f(x) = g(x)$

  $\Updownarrow$

  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

  $\Updownarrow$

  $x^2 - 2x - 3 = 0$

  $\Updownarrow$

  $x = 3$ of $x = -1$

  Snijpunten: $S_1\left(3, -\frac{49}{4}\right), S_2\left(-1, -\frac{33}{4}\right)$

- $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

  $g'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

- In $S_1\left(3, -\frac{49}{4}\right)$ is $f'(3) = 0$ en $g'(3) = -4$

  $\Downarrow \qquad \Downarrow$

  $\alpha_1 = 0°$ $\qquad \alpha_2 = -75°\,57'\,49{,}524''$

  De hoek is 75° 57′ 50″.

- In $S_2\left(-1, -\frac{33}{4}\right)$ is $f'(-1) = -2$ en $g'(-1) = 2$

  $\Downarrow \qquad \Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\qquad \alpha_2 = 63°\,26'\,5{,}816''$

  De hoek is $180° - 2 \cdot 63°\,26'\,5{,}816'' \Rightarrow 53°\,7'\,48''$.

Opdracht 66 bladzijde 58

De rechte met vergelijking $y = x$ en de parabool met vergelijking $y = -x^2 + k$ raken elkaar.

Bepaal k.

- $f(x) = x \;\Rightarrow\; f'(x) = 1$; $g(x) = -x^2 + k \;\Rightarrow\; g'(x) = -2x$
- Voor het raakpunt $P(x_0, f(x_0))$ geldt:

$$\begin{cases} x_0 = -x_0^2 + k \\ 1 = -2x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ k = x_0^2 + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\; k = -\frac{1}{4}$$

Opdracht 67 bladzijde 58

Pallieter staat boven op de IJzertoren, die 84 m hoog is, en gooit een steen net over de rand van de muur verticaal naar boven, zodat deze rakelings langs die muur tot helemaal beneden valt, zoals op de figuur aangegeven.

Stellen we $t = 0$ op het ogenblik dat hij de steen loslaat, dan kan de hoogte h (in m) goed benaderd worden door $h(t) = 84 + 13t - 5t^2$ met t in seconden.

1 Bereken de snelheid van de steen na 2 seconden.

$v(t) = h'(t) = 13 - 10t$

De snelheid na 2 seconden is $(13 - 10 \cdot 2)$ m/s $= -7$ m/s, dus 7 m/s naar beneden.

2 Met welke snelheid raakt de steen de grond?

$h(t) = 0$

$-5t^2 + 13t + 84 = 0$

$t = 5{,}6$ of $t \neq -3 \quad (t > 0)$

$v(5{,}6) = 13 - 10 \cdot 5{,}6 = -43$

De steen raakt de grond met een snelheid van 43 m/s.

Opdracht 68 bladzijde 58

Je laat een steen van een toren vallen. De hoogte h van de steen (in m) na t seconden wordt beschreven door het voorschrift $h(t) = -4{,}9t^2 + 95$.

1 Hoe hoog is de toren?

$h(0) = 95$ De hoogte van de toren is 95 m.

2 Bepaal de snelheid na 2 seconden.

$v(t) = h'(t) = -9{,}8\,t$

$v(2) = -9{,}8 \cdot 2 = -19{,}6 \;\Rightarrow\; -19{,}6$ m/s

3 Met welke snelheid komt de steen op de grond terecht?

$-4{,}9t^2 + 95 = 0$

$t^2 = \dfrac{95}{4{,}9}$

$t = 4{,}4 \qquad (t > 0)$

$v(4{,}4) = -9{,}8 \cdot 4{,}4$

$= -43{,}15 \;\Rightarrow\; -43{,}2$ m/s

4 Verklaar met een berekening waarom de versnelling op elk moment dezelfde is.

$v(t) = -9{,}8t$

$\Rightarrow a(t) = -9{,}8$ De versnelling is constant (en gelijk aan de valversnelling).

Opdracht 69 bladzijde 59

De **normaal** in een punt van een kromme is de rechte die loodrecht staat op de raaklijn in dat punt aan de kromme.

Bepaal een vergelijking van de normaal n in het punt $P(-1, f(-1))$ van de grafiek van $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + x$.

- $f'(x) = -x + 1$
- rico $t = f'(-1) = 2$

  $\Rightarrow$ rico $n = -\dfrac{1}{2}$
- $n \leftrightarrow y + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}(x + 1)$
- $n \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - 2$

Opdracht 70 bladzijde 59

Gegeven de rechte $r \leftrightarrow y = -4x - 3$ en de functie $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 2x$.

1 Toon aan dat r een raaklijn is aan de grafiek van f en bepaal de coördinaat van het raakpunt T.

- $f'(x) = \frac{2}{3}x - 2$
- $t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - \frac{1}{3}a^2 + 2a = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)(x - a)$$

$$y = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)x - \frac{2}{3}a^2 + 2a + \frac{1}{3}a^2 - 2a$$

$$y = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)x - \frac{1}{3}a^2$$

Nu moet $y = -4x - 3$, zodat

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a - 2 = -4 \\ -\frac{1}{3}a^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a^2 = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ voor $a = -3$ is de rechte r een raaklijn aan de grafiek van f.

$\Rightarrow T(-3, 9)$

2 Bepaal een vergelijking van de normaal n in T.

rico t $= -4 \Rightarrow$ rico n $= \frac{1}{4}$

$$n \leftrightarrow y - 9 = \frac{1}{4}(x + 3)$$

$$n \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{39}{4}$$

Opdracht 71 bladzijde 59

Omdat de maan een kleinere massa heeft dan de aarde, val je op de maan ‘zachter’ dan op aarde.

De functie met voorschrift $x = 0{,}85t^2$ geeft bij benadering het verband tussen de valweg x (in m) en de valtijd t (in s) op de maan. Op aarde is dat verband bij benadering $x = 4{,}9t^2$.

1 Een ruimtevaarder laat van 100 meter hoogte een maansteen vallen.

a Na hoeveel seconden ploft die neer op de maan?

$100 = 0{,}85t^2$

$t = \sqrt{\frac{100}{0{,}85}} = 10{,}846...\quad (t > 0)$

Na ongeveer 10,8 s ploft de steen neer.

b Met welke snelheid gebeurt dit?

$v(t) = x'(t) = 1{,}7t$ op de maan

$$v\left(\sqrt{\frac{100}{0{,}85}}\right) = x'\left(\sqrt{\frac{100}{0{,}85}}\right) = 1{,}7 \cdot \sqrt{\frac{100}{0{,}85}} = 18{,}439...$$

De snelheid is ongeveer 18,4 m/s.

2 Met welke snelheid valt een steen, die van een 20 meter hoge toren op aarde valt, op de grond?

$4{,}9t^2 = 20$

$$t = \sqrt{\frac{20}{4{,}9}} \quad (t > 0)$$

$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 4{,}9t = 9{,}8t$ op aarde

$$v\left(\sqrt{\frac{20}{4{,}9}}\right) = 9{,}8 \cdot \sqrt{\frac{20}{4{,}9}} = 19{,}798...$$

De snelheid is ongeveer 19,8 m/s.

3 Hoe hoog moet een toren op de maan zijn opdat een steen, die van deze toren valt, met dezelfde snelheid zou neerkomen als die steen die van de 20 meter hoge toren op aarde neervalt?

$v(t) = 1{,}7t = 19{,}799$ op de maan als $t = \dfrac{19{,}799}{1{,}7} = 11{,}646...$

De valweg die bij deze tijd hoort is dan $x(11{,}646) = 0{,}85 \cdot 11{,}646^2 = 115{,}30$

De toren moet ongeveer 115,3 m hoog zijn.

Opdracht 72 bladzijde 59

Bepaal k zodat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + k$ de x-as onder een hoek van 45° snijdt.

- Noem het snijpunt van de grafiek met de x-as P: $P(x_0, 0)$
- $f'(x) = 2x$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 = \tan 45° = 1$

  $\Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

- $f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + k = 0$

  $\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{4}$

Opdracht 73 bladzijde 59

De grafieken van de functies f en g raken elkaar. Bepaal m.

1 $f : x \mapsto x^2 + mx + 4$ en $g : x \mapsto -2x^2 + 4x + m$

Er geldt:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 4 = -2x_0^2 + 4x_0 + m \\ 2x_0 + m = -4x_0 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + (m-4)x_0 + 4 - m = 0 \\ 6x_0 = 4 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 6x_0^2 + 6x_0 = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2 + 6x_0 = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0(x_0 - 2) = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{of} \quad x_0 = 2 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ m = 4 \quad \text{of} \quad m = -8$$

2 $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + m$ en $g : x \mapsto x^2 + 9x + 1$

Er geldt:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 2x_0^2 + m = x_0^2 + 9x_0 + 1 \\ 3x_0^2 - 4x_0 = 2x_0 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + m - 1 = 0 \\ 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 + 1 = m \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \quad \text{of} \quad x_0 = -1 \\ m = -x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ m = 28 \quad \text{of} \quad m = -4$$

Opdracht 74 bladzijde 60

Bepaal k zodanig dat de grafieken van de functies $f : x \longmapsto \frac{1}{2}kx^2 - 3$ en $g : x \longmapsto -\frac{1}{18}x^2 + 2$ elkaar loodrecht snijden.

- $f'(x) = kx$

  $g'(x) = -\frac{1}{9}x$

- $\text{rico } t_1 \cdot \text{rico } t_2 = -1$

  $\Leftrightarrow kx_0 \cdot \left(-\frac{1}{9}x_0\right) = -1$

  $\Leftrightarrow -\frac{1}{9}kx_0^2 = -1$

  $\Leftrightarrow k \cdot x_0^2 = 9$

- $f(x_0) = g(x_0)$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_0^2 - 3 = -\frac{1}{18} \cdot x_0^2 + 2$

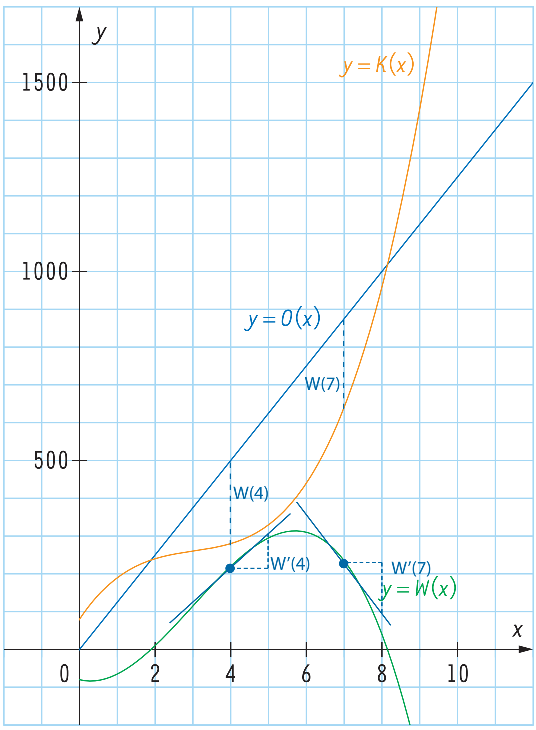
  $\underset{x_0^2 = \frac{9}{k}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = -\frac{1}{18} \cdot \frac{9}{k} + 2$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow k = 1$

Opdracht 75 bladzijde 60

Een firma produceert potloden. De totale kosten (in €) om x keer 1000 potloden te produceren, zijn gelijk aan $K(x) = 5x^3 - 45x^2 + 150x + 80$. De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks zodat $O(x) = 125x$ de omzetfunctie is.



In deze opdracht vergelijken we de verandering van de kosten, van de omzet en van de winst bij een productie van 4000 en van 7000 eenheden.

1 De verandering van de kosten bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de kostenfunctie. We noemen deze verandering de **marginale kosten**.

Bepaal de marginale kostenfunctie $K'(x)$.

$K'(x) = 15x^2 - 90x + 150$

2 Bereken $K'(4)$ en $K'(7)$.

Wat betekent dit voor de toename van de kosten bij een productie van 4000 t.o.v. die bij een productie van 7000 eenheden?

$K'(4) = 30$

$K'(7) = 255$

Indien de productie wordt opgevoerd van 4000 stuks naar 7000 zullen de kosten met € 225 toenemen.

3 De verandering van de omzet bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de omzetfunctie. We noemen deze verandering de **marginale omzet**.

Bepaal de marginale omzetfunctie $O'(x)$.

$O'(x) = 125$

4 De verandering van de winst bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de winstfunctie. We noemen deze verandering de **marginale winst**.

Bepaal de winstfunctie $W(x)$ en de marginale winstfunctie $W'(x)$.

$$\begin{aligned} W(x) &= O(x) - K(x) \\ &= 125x - 5x^3 + 45x^2 - 150x - 80 \\ &= -5x^3 + 45x^2 - 25x - 80 \end{aligned}$$

$W'(x) = -15x^2 + 90x - 25$

5 Bereken $W(4)$ en $W'(4)$. Hoe kun je deze aflezen op de grafiek?

$W(4) = 220$

$W'(4) = 95$

zie figuur

6 Bereken $W(7)$ en $W'(7)$. Hoe kun je deze aflezen op de grafiek?

$W(7) = 235$

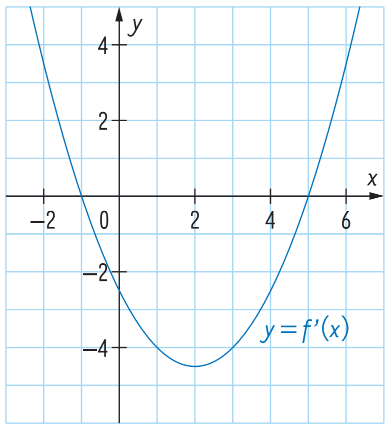
$W'(7) = -130$

zie figuur

Opdracht 76 bladzijde 61

De hellinggrafiek van een functie f is gegeven.

Kies het juiste antwoord.



1 De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn

A voor $x = -1$

B voor $x = 0$

C voor $x = 2$

$f'(x) = 0 \iff x = -1 \quad \text{of} \quad x = 5$

$\Rightarrow$ antwoord A

2 Voor $x = 3$ is de grafiek van f

A stijgend

B dalend

C stijgend noch dalend

$f'(3) < 0$

$\Rightarrow$ f is dalend voor $x = 3$

$\Rightarrow$ antwoord B

3 Voor $x = 5$ is de grafiek van f

A stijgend

B dalend

C stijgend noch dalend

$f'(5) = 0$

$\Rightarrow$ f is stijgend noch dalend voor $x = 5$

$\Rightarrow$ antwoord C

Opdracht 77 bladzijde 61

Het volume water V (in l) in een tank, t minuten vanaf het moment dat het leeglopen start, wordt beschreven door de formule $V(t) = 40\,000 - 4000t + 100t^2$.

1 Bepaal de gemiddelde snelheid waarmee het water uit de tank stroomt tijdens de eerste 10 minuten.

$$\frac{v(10) - v(0)}{10} = -3000 \;\Rightarrow\; 3000 \text{ l/min}$$

2 Wat is de ogenblikkelijke snelheid waarmee het water uit de tank stroomt na 10 minuten?

$v'(t) = -4000 + 200t$

$v'(10) = -2000 \;\Rightarrow\; 2000$ l/min

3 Na hoeveel minuten is de tank leeg?

$V(t) = 0$

$100t^2 - 4000t + 40000 = 0$

$t = 20$ Na 20 minuten is de tank leeg.

Opdracht 78 bladzijde 61

Bepaal de hoek tussen de grafieken van $f : x \mapsto x^3 - 2x$ en $g : x \mapsto x^3$ in hun snijpunten.

- Snijpunten

  $f(x) = g(x)$

  $\Leftrightarrow\; x^3 - 2x = x^3$

  $\Leftrightarrow\; x = 0$

  Snijpunt P (0, 0)
- $f'(x) = 3x^2 - 2$

  $g'(x) = 3x^2$
- In P (0, 0) is $f'(0) = -2$ en $g'(0) = 0$

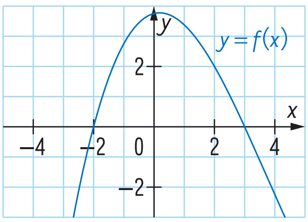
  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\alpha_2 = 0°$
- De hoek is $63°\,26'\,6''$.

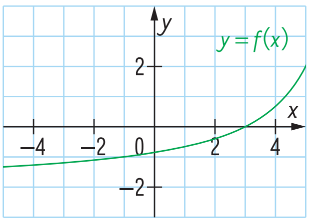
Opdracht 79 bladzijde 62

Welke grafieken horen bij welke hellingfuncties?

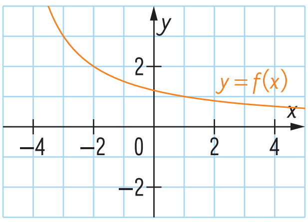
1



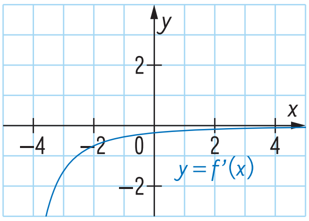
2



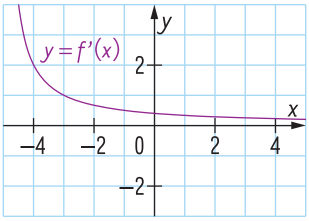
3



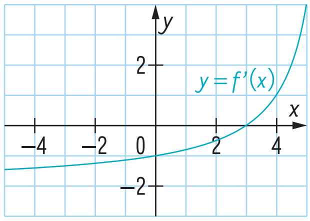
A



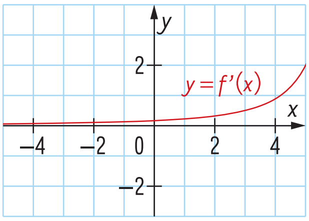
C



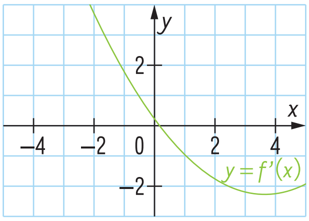
E



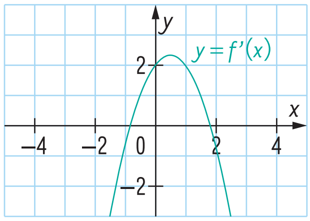
B



D



F



1 f is eerst stijgend, dus $f' > 0$

in de omgeving van 0 is $f'(a) = 0$ (maximum)

daarna is f dalend, dus $f' < 0$

$\Rightarrow$ hellingfunctie D

2 f is stijgend, dus $f' > 0$ en bovendien neemt f' toe

$\Rightarrow$ hellingfunctie B

3 f is dalend, dus $f' < 0$ en bovendien neemt f' toe

$\Rightarrow$ hellingfunctie A

Opdracht 80 bladzijde 62

Bepaal de x-coördinaten van de punten van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6x^2$ waar de helling gelijk is aan 4.

$f'(x) = 3x^3 + x^2 - 12x$

$3x^3 + x^2 - 12x = 4$

$3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

$x^2(3x + 1) - 4(3x + 1) = 0$

$(3x + 1)(x^2 - 4) = 0$

$x = \frac{-1}{3}$ of $x = -2$ of $x = 2$

Opdracht 81 bladzijde 62

1 Voor welke waarde(n) van x heeft de functie met voorschrift $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$ een horizontale raaklijn?

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 0$

$x = -3 \quad \text{of} \quad x = 1$

De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn voor $x = -3$ en voor $x = 1$.

2 Bepaal c als de x-as een raaklijn is van de grafiek van f.

Er geldt dan dat $f(-3) = 0$ of $f(1) = 0$

$f(-3) = 0$

$-9 + 9 + 9 + c = 0$

$c = -9$

$f(1) = 0$

$\frac{1}{3} + 1 - 3 + c = 0$

$c = \frac{5}{3}$

$c = -9 \quad \text{of} \quad c = \frac{5}{3}$

Opdracht 82 bladzijde 62

Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen t_1 en t_2 aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - x + 2$ die door het punt $P(3, -1)$ gaan.

- $f'x) = 2x - 1$
- Noem het raakpunt P (a,f(a)), dan is

  $t \leftrightarrow y - (a^2 - a + 2) = (2a - 1)(x - a)$

  $y = (2a - 1)x - 2a^2 + a + a^2 - a + 2$

  $y = (2a - 1)x - a^2 + 2$
- de raaklijn gaat door P (3, –1):

  $-1 = (2a - 1)3 - a^2 + 2$

  $\Leftrightarrow -1 = 6a - 3 - a^2 + 2$

  $\Leftrightarrow a^2 - 6a = 0$

  $\Leftrightarrow a = 0 \quad \text{of} \quad a = 6$

- raaklijn t_1 in P (0, 2):

  $t_1 \leftrightarrow y - 2 = -1(x - 0)$

  $t_1 \leftrightarrow y = -x + 2$
- raaklijn t_2 in Q (6, 32):

  $t_2 \leftrightarrow y - 32 = 11(x - 6)$

  $t_2 \leftrightarrow y = 11x - 34$

Opdracht 83 bladzijde 62

De grafieken van de functies $f : x \longmapsto x^2 + 2ax + b$ en $g : x \longmapsto x^3 + c$ raken elkaar in het punt $P(-1, 1)$.

Bepaal a, b en c.

Er geldt :

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) = 1 \\ f'(-1) = g'(-1) \end{cases} \qquad \text{met } f'(x) = 2x + 2a \text{ en } g'(x) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a + b = 1 \\ -1 + c = 1 \\ -2 + 2a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ c = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; a = \frac{5}{2}, b = 5, c = 2$$

Opdracht 84 bladzijde 63

De afgelegde weg x (in km) van een auto op de snelweg kan beschreven worden door het voorschrift $x(t) = -10t^3 + 60t^2$.

Hierbij is de tijd t uitgedrukt in uur. De rit duurt 4 uur zodat $0 \leqslant t \leqslant 4$.

1 Wat is de gemiddelde snelheid van de auto gedurende deze rit?

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(0)}{4} = 80$$

De gemiddelde snelheid is 80 km/h.

2 Bepaal het voorschrift van de snelheid v in functie van de tijd (in km/h).

$v(t) = x'(t) = -30t^2 + 120t$

3 Hoe groot is de ogenblikkelijke snelheid na 1 uur?

$v(1) = -30 + 120 = 90$

De ogenblikkelijke snelheid na 1 uur is 90 km/h.

4 Toon aan dat de auto de maximumsnelheid van 120 km/h nooit overschrijdt.

De grafiek van v is een bergparabool met top (2, 120). De maximumsnelheid wordt dus nooit overschreden.

OFWEL

De afgeleide van de snelheidsfunctie is $v'(t) = -60t + 120$.

zodat

t		2	
v′(t)	+	0	−
v(t)	↗	120 max	↘

De snelheid is maximaal 120 km/h.

Opdracht 85 bladzijde 63

Een niet horizontale rechte gaat door het punt $P(2, 1)$ en heeft een raakpunt met de parabool met vergelijking $y = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$.

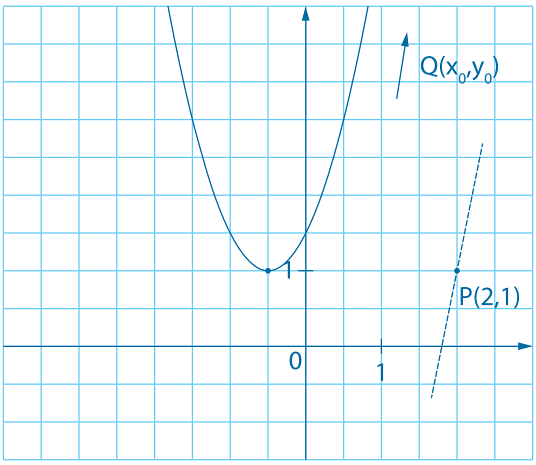
Hoeveel bedraagt de helling van deze raaklijn?

A 20 **B** 12 **C** 8 **D** 4

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

1^e methode: met behulp van afgeleiden

Schets:



$f(x) = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

De grafiek is een dalparabool ($a > 0$) met top $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

- Noem het raakpunt $Q(x_0, y_0)$ met $y_0 = 2x_0^2 + 2x_0 + \frac{3}{2}$.
- $\text{rico } PQ = \dfrac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{3}{2} - 1}{x_0 - 2} = \dfrac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{1}{2}}{x_0 - 2}$

- $f'(x) = 4x + 2 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 4x_0 + 2$
- rico PQ = rico t, dus

$$\frac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{1}{2}}{x_0 - 2} = 4x_0 + 2$$

$$2x_0^2 + \cancel{2x_0} + \frac{1}{2} = 4x_0^2 - 8x_0 + \cancel{2x_0} - 4$$

$$2x_0^2 - 8x_0 - \frac{9}{2} = 0$$

$$4x_0^2 - 16x_0 - 9 = 0$$

$$D = (-16)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 256 + 144 = 400 = 20^2$$

$$x_{0_{1,2}} = \frac{16 \pm 20}{8} \quad \begin{cases} \cancel{-\frac{1}{2}} & \text{(dan zou PQ horizontaal zijn)} \\ \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{9}{2}, f\left(\frac{9}{2}\right)\right)$$

- De helling van de raaklijn is $4 \cdot \frac{9}{2} + 2 = 20$.

$\Rightarrow$ antwoord A is juist

2^e methode: gebaseerd op leerstof 4^e jaar

- vergelijking rechte door P met rico m:

$y = mx + q$

P (2, 1) ligt op de rechte: $1 = 2m + q$

$q = 1 - 2m$

$\Rightarrow y = mx + 1 - 2m$

- snijpunten rechte en parabool:

$$2x^2 + 2x + \frac{3}{2} = mx + 1 - 2m$$

$$2x^2 + (2 - m)x + \frac{1}{2} + 2m = 0$$

- Er mag maar één snijpunt zijn, dus moet D = 0:

$$D = (2 - m)^2 - 8\left(\frac{1}{2} + 2m\right)$$
$$= \cancel{4} - 4m + m^2 \cancel{-4} - 16m$$
$$= m^2 - 20m$$
$$= m(m - 20)$$
$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{m = 0} \quad \text{of} \quad m = 20$$

de rechte PQ is niet horizontaal

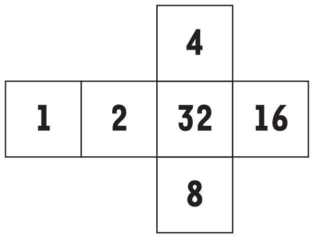
$y = 20x - 39$

- De helling is 20, antwoord A is dus juist.

Hersenbrekers bladzijde 64

1 Drie kubussen worden gevormd op basis van de ontvouwing hiernaast. Vervolgens worden ze op een tafel de ene bovenop de andere geschikt, zodanig dat de 13 zichtbare getallen de grootst mogelijke som hebben.

Wat is deze som?



A 159 **B** 161 **C** 164 **D** 167 **E** 189

C

Bij de bovenste kubus is enkel het ondervlak onzichtbaar, we zorgen dat dit het vlak is met de 1.

De som van de 5 zichtbare zijvlakken van de bovenste kubus is 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.

Bij de twee onderste kubussen zijn 4 zichtbare zijvlakken, de 2 zijvlakken die tegenover elkaar liggen met de kleinste som zijn die met 4 en 8. We hebben dan nog 2 · (1 + 2 + 32 +16) = 102.

De maximale som is 164.

2 Meneer Jansen vertrekt elke ochtend om 8u stipt naar zijn werk met de auto. Als hij (constant) 40 km/h rijdt, is hij drie minuten te laat op zijn werk. Als hij 60 km/h rijdt, is hij drie minuten te vroeg op zijn werk.

Hoe snel moet hij rijden om precies op tijd te komen?

(bron © Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009)

48 km/h

Stel *x* is de afstand (in km) die meneer Jansen elke morgen aflegt, dan is

$$\frac{x}{40} - \frac{1}{20} = \frac{x}{60} + \frac{1}{20}$$

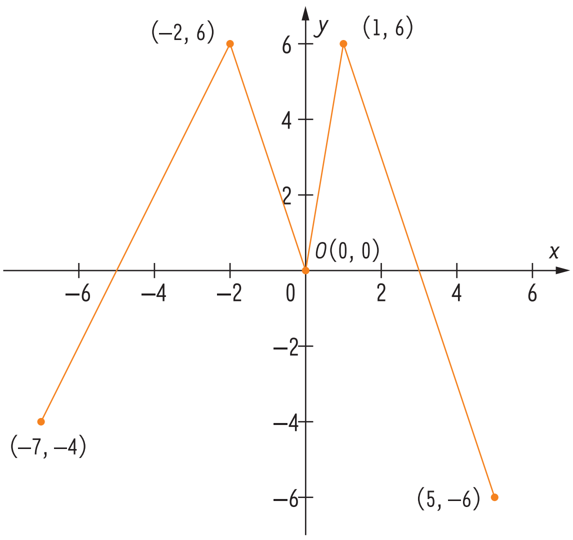
$\Leftrightarrow \ 3x - 6 = 2x + 6$

$\Leftrightarrow \ x = 12$

De tijd die hij nodig heeft om precies op tijd te zijn is $\left(\frac{12}{40} - \frac{1}{20}\right)$h = 15 min.

Hij moet 12 km afleggen in 15 minuten, dit is 48 km/h.

3 De grafiek van de functie f zie je hieronder.



Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(f(x)) = 6$?

A 2 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

D

f(f(x)) = 6

f(x) = 1 of f(x) = –2

De rechte met vergelijking y = 1 heeft 4 snijpunten met de grafiek.
De rechte met vergelijking y = –2 heeft 2 snijpunten met de grafiek.

In totaal zijn dit 6 snijpunten, dus 6 oplossingen van de vergelijking f(f(x)) = 6.