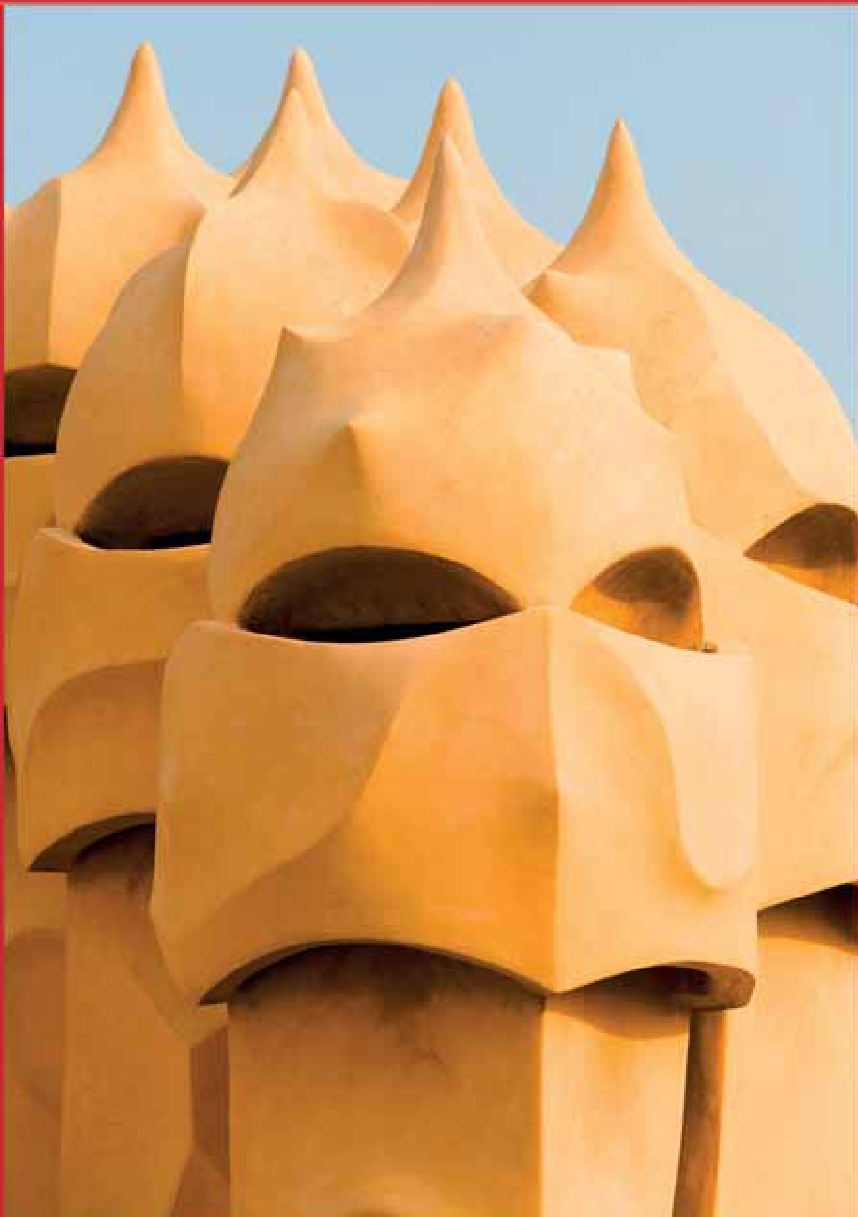
# Delta Nova

## Analyse deel 2

5

6/8 lesuren

handleiding



N. Deloddere
N. De Wilde
R. Op de Beeck
Y. Paduwat
P. Tytgat

Plantyn

www.knooppunt.net

knoop punt

ISBN 978-90-301-3976-8

9 789030 139768

De site www.knooppunt.net geeft je toegang tot het digitale lesmateriaal bij dit boek. Activeer jouw licentie aan de hand van de onderstaande code. Tijdens de activatie accepteer je de gebruiksvoorwaarden. Zo krijg je voor de duur van de licentie toegang tot het digitale lesmateriaal.

www.knooppunt.net

Ontwerp en opmaak cover: Composition
Opmaak binnenwerk: Composition
Illustratieverantwoording cover: Imageselect
Illustratieverantwoording: © David Cloud - Fotolia.com, © drx - Fotolia.com, © GordonGrand - Fotolia.com, © Yurok Aleksandrovich - Fotolia.com, © David Watmough - Dreamstime.com, © South Tyrol Museum of Archaeology, iStockphoto, Reporters, Stock.XCHNG, Wikimedia

Auteursteam Delta Nova 5/6:

N. Deloddere, N. De Wilde, R. Op de Beeck, Y. Paduwat en P. Tytgat

NUR 126



ISBN 978-90-301-3976-8 20724/0 D2014/0032/0006

Plantyn
Motstraat 32, 2800 Mechelen
T 015 36 36 36
F 015 36 36 37
klantendienst@plantyn.com
www.plantyn.com

*Dit boek werd gedrukt op papier van verantwoorde herkomst.*

Beste Delta Nova-gebruiker

In deze handleiding vind je het extra materiaal dat hoort bij het leerboek Delta Nova 5, Analyse deel 2 voor richtingen met 6/8 lesuren.

Het gevolgde leerplan is **D/2004/0279/019**. Dit is het leerplan A voor studierichtingen ASO met component wiskunde.

Het meest uitgebreide deel van de handleiding bevat de **uitgeschreven oplossingen** van alle opdrachten in het leerboek. Er is geprobeerd om steeds te kiezen voor de meest aangewezen oplossingsmethode.

Met de unieke code op de colofonpagina van deze handleiding kun je op **www.knooppunt.net** inloggen en daar vind je ook nog het volgende extra materiaal.

In detail zie je in welke hoofdstukken en paragrafen het leerboek de **leerplandoelstellingen** realiseert. Voor de betreffende eindtermen verwijzen we naar het leerplan zelf.

De **tijdsplanning** geeft een overzicht van het aantal te besteden lestijden per hoofdstuk en per paragraaf. Er zijn ongeveer 45 lestijden nodig om de leerstof uit dit boek te behandelen.
Het jaarplan van het vijfde jaar voor richtingen met 6 of 8 lesuren per week zal nog aangevuld worden met analyse deel 1 (precalculus) en matrices en stelsels of kansrekenen of …

**Extra ondersteunend materiaal** (presentaties van alle theoriekaders, errata …) zijn te vinden op de website bij dit boek: www.deltanova.be/dn5lw68analyse2/

Op Knooppunt en op deze website komt ook ondersteunend **ict-materiaal** en **extra oefenmateriaal** dat kan gebruikt worden voor remediëring of evaluatie.

We hopen dat dit materiaal een grote hulp kan zijn en wensen je veel plezier met Delta Nova,

de auteurs,
september 2014

Het gevolgde leerplan is **D/2004/0279/019**.
In de onderstaande tabel vind je een overzicht van de doelstellingen en waar ze in Delta Nova 5 Analyse deel 2 (6/8 lesuren) terug te vinden zijn.
B = basisdoelstelling
V = verdiepingsdoelstelling
U = uitbreidingsdoelstelling
Uitbreidings- en verdiepingsdoelstellingen die niet in het leerboek aan bod komen, worden niet vermeld.

| | | Leerplandoelstelling | DN 5 hfdst. parag. | ET basis | ET spec. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **Kerndoelstellingen analyse** | | | |
| AN1 | B | Een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven. | h6-10 | | 7 |
| AN2 | B | Met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen. | h6-10 | | 10 |
| AN3 | B | Bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschriften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken. | h6-10 | | 11 |
| AN4 | B | Bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en integralen en bij het oplossen van problemen die geformuleerd zijn met functies, op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen. | h6-10 | 31<br>32 | 12 |
| | | **II Afgeleiden en integralen** | | | |
| AN31 | B | De afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke verandering van een functie en met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek. | 6.1 | 15 | 7 |
| AN32 | B | Het begrip afgeleide herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde. | 6.1<br>6.4<br>7.2 | 19 | 7 |
| AN33 | B | De eerste en tweede afgeleide van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken. | 6.3<br>7.1-4<br>9.1<br>9.2<br>10.1-4 | 16<br>17 | 8<br>11<br>12 |
| AN34 | B | Extremumproblemen wiskundig modelleren en oplossen. | 7.2 | 20 | 10 |

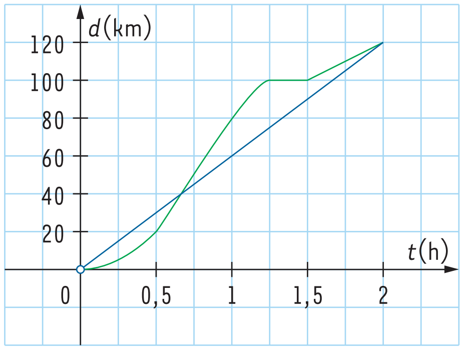
| | | Leerplandoelstelling | DN 5 hfdst. parag. | ET basis | ET spec. |
|---|---|---|---|---|---|
| AN35 | B | Het verloop van een functie onderzoeken, in het bijzonder voor veeltermfuncties en rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, met beperking van de moeilijkheidsgraad. | 7.1<br>7.3<br>7.4<br>10.1-4 | 18 | 6 |
| AN36 | B | De formule voor de afgeleide van enkele basisfuncties bewijzen. | 6.2<br>9.2 | | 7 |
| AN37 | B | Limieten van functies bepalen en het asymptotisch gedrag van een functie onderzoeken. | 8.1<br>8.2<br>8.3<br>8.4 | | |
| AN42 | V | Een aantal begrippen (zoals limiet, afgeleide) formeler definiëren en hun samenhang bespreken met eigenschappen. | 8.1<br>8.5 | | |
| AN43 | V | De middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange illustreren en toepassen. | 10.2 | | |

# Hoofdstuk 6

## Afgeleiden van veeltermfuncties



**Opdracht 1 bladzijde 8**




De familie Janssens rijdt naar de kust. De trip duurt 2 uur en in die tijd leggen ze 120 km af. De grafiek geeft de afstand *d* (in kilometer) tot hun vertrekpunt in functie van de tijd *t* (in uren).

**1** Wat is hun gemiddelde snelheid voor de hele reis?

De gemiddelde snelheid is 60 km/h.

**2** Hoe had de grafiek eruit gezien indien ze de hele reis aan die snelheid hadden gereden?

De grafiek is een rechte door de oorsprong en door het punt met coördinaat (2, 120).

**3** Leid uit de grafiek de gemiddelde snelheid af in de tijdsintervallen [0; 0,5], [0,5; 1], [1; 1,5] en [1,5; 2].

[0; 0,5]: 20 km/0,5 h = 40 km/h

[0,5; 1]: (80 – 20) km/0,5 h = 120 km/h

[1; 1,5]: (100 – 80) km/0,5 h = 40 km/h

[1,5; 2]: (120 – 100) km/0,5h = 40 km/h

**4** Hoe zie je op de grafiek, zonder berekeningen te maken, dat de gemiddelde snelheid het grootst is in het interval [0,5; 1]?

De grafiek is daar het steilst.

**5** Bereken nu ook de gemiddelde snelheid in de intervallen [1; 1,25] en [1,25; 1,5].

[1; 1,25]: (100 – 80) km/0,25h = 80 km/h

[1,25; 1,5]: (100 – 100) km/h = 0 km/h

**Opdracht 2 bladzijde 11**

Een van de lastigste beklimmingen uit de Tour de France is ongetwijfeld deze van de Mont Ventoux. In de tabel vind je een schema van deze beklimming wanneer je vertrekt vanuit Bédoin.

| plaats | Bédoin | Saint-Estève | Le Chalet Reynard | top Ventoux |
|---|---|---|---|---|
| horizontale afgelegde weg (in km) | 0 | 5,5 | 15 | 21 |
| hoogte (in m) | 275 | 500 | 1419 | 1909 |

**1** Bereken de gemiddelde verandering van de hoogte over de drie opeenvolgende trajecten in %.

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Bédoin – Saint-Estève:

$$\frac{500-275}{5{,}5}\text{ m/km} = 40{,}909\text{ m/km} = 0{,}040909\text{ km/km} = 4{,}09\ \%$$

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Saint-Estève – Le Chalet Reynard:

$$\frac{1419-500}{15-5{,}5}\text{ m/km} = 96{,}737\text{ m/km} = 0{,}096737\text{ km/km} = 9{,}67\ \%$$

Gemiddelde verandering van de hoogte over het traject Le Chalet Reynard – top Ventoux:

$\dfrac{1909 - 1419}{21 - 15}$ m/km = 81,667 m/km = 0,081667 km/km = 8,17 %

**2** Welk traject is gemiddeld het meest steile?

Van Saint-Estève tot Le Chalet Reynard.

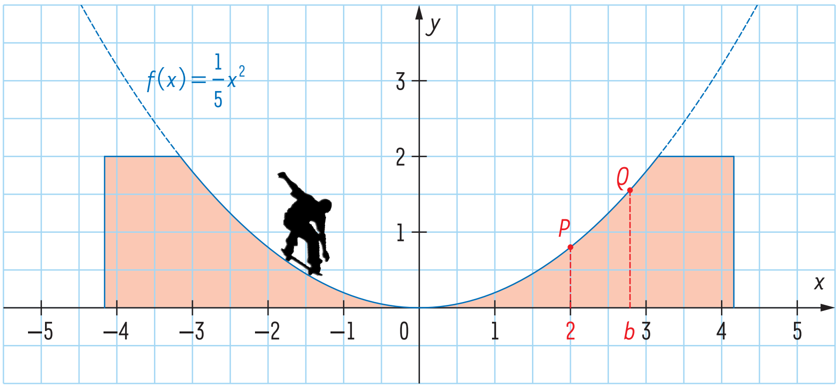
**3** Bepaal de gemiddelde verandering van de hoogte over de totale beklimming in %.

1634 m/21 km = 77,8 m/km
= 0,0778 km/km
= 7,78 %

**Opdracht 3 bladzijde 12**

De doorsnede van het hellende deel van een skate ramp is parabolisch. In het getekende assenstelsel is de parabool de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x) = \dfrac{1}{5}x^2$ (met $x$ en $f(x)$ in meter).

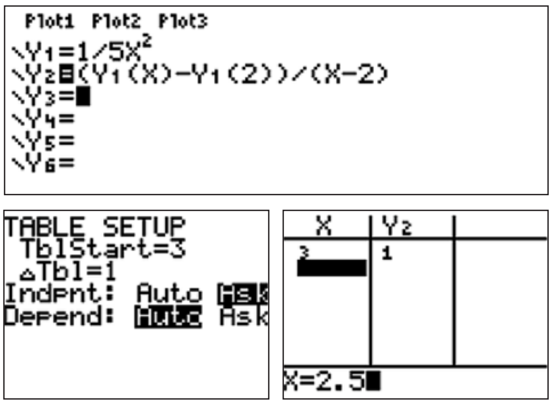



Om de helling te vinden *in* het punt $P\left(2, \dfrac{4}{5}\right)$, onderzoeken we de gemiddelde helling van de grafiek tussen $P$ en $Q$, waarbij we $Q$ steeds dichter bij $P$ kiezen.

**1** Kies $b = 3$. Dan is de coördinaat van $Q$ gelijk aan $\left(3, \dfrac{9}{5}\right)$. Bereken de gemiddelde helling over het interval [2, 3].

gemiddelde helling = $\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dfrac{9}{5} - \dfrac{4}{5} = 1$

**2** Herhaal deze berekening voor de waarden van $b$ in de tabel. Je rekentoestel kan al het rekenwerk uitvoeren.




| $b$ | $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(2)}{b - 2}$ |
|---|---|
| 2,5 | 0,9 |
| 2,1 | 0,82 |
| 2,01 | 0,802 |
| 2,001 | 0,8002 |

**3** Naar welke waarde zal de gemiddelde helling volgens jou naderen, wanneer we $b$ steeds dichter bij 2 kiezen?

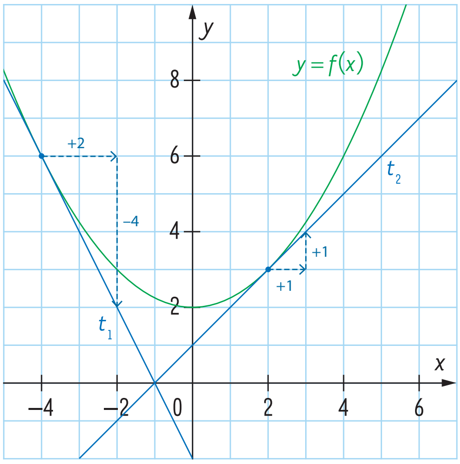
naar 0,8

**Opdracht 4 bladzijde 17**

Aan de grafieken van de functies zijn een aantal raaklijnen getekend.
Bepaal telkens de gevraagde afgeleiden.

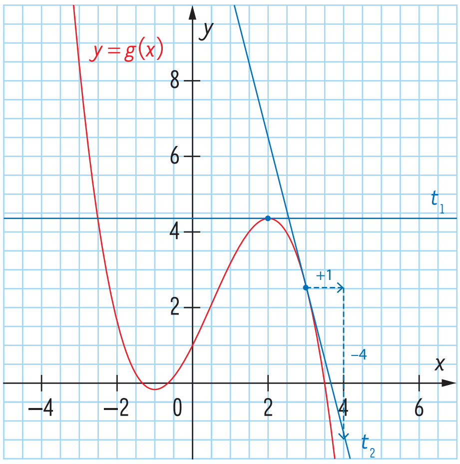
**1** **a** $f'(-4) = -2$ zie figuur

**b** $f'(2) = 1$ zie figuur



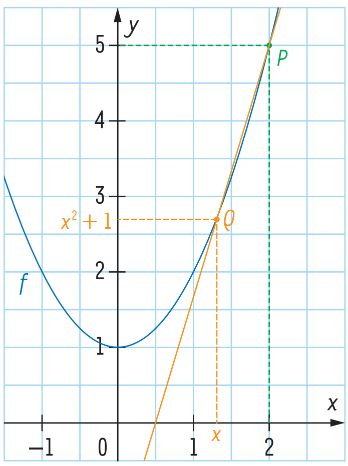

**2** **a** $g'(2) = 0$ $\Delta g = 0$

**b** $g'(3) = -4$ zie figuur




**Opdracht 5 bladzijde 17**

Beschouw de functie $f$: $x \longmapsto x^2 + 1$. We willen $f'(2)$ berekenen, m.a.w. de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f$ in $P(2, 5)$.
Beschouw daartoe een variabel punt $Q(x, x^2 + 1)$ op de grafiek van $f$, met $x \neq 2$.




**1** Toon aan dat $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, de richtingscoëfficiënt van $PQ$, altijd gelijk is aan $x + 2$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} x + 2$$

**2** Wanneer $Q \longrightarrow P$, zal $x \longrightarrow 2$ en $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \longrightarrow f'(2)$. Wat is de waarde van $f'(2)$?

$f'(2) = 2 + 2 = 4$

**Opdracht 6 bladzijde 18**

Bereken algebraïsch de afgeleide van de gegeven functies in de aangegeven $x$-waarden:

**1** $f(x) = -x^2 + 8x$ in 4

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$
$$= \frac{-x^2 + 8x - 16}{x - 4}$$
$$= -\frac{(x-4)^2}{x-4}$$
$$\underset{x \neq 4}{=} -(x-4)$$

Als $x \to 4$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 0$.

$\Rightarrow f'(4) = 0$

**2** $f(x) = x^3 + 4x$ in $-2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$
$$= \frac{x^3 + 4x + 16}{x + 2}$$
$$= \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 8)}{x + 2}$$
$$\underset{x \neq -2}{=} x^2 - 2x + 8$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 4 | 16 |
| −2 | | −2 | 4 | −16 |
| | 1 | −2 | 8 | 0 |

Als $x \to -2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 16$.

$\Rightarrow f'(-2) = 16$

**3** $f(x) = x^4$ in $-1$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$
$$= \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$
$$= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x + 1}$$
$$\underset{x \neq -1}{=} (x-1)(x^2+1)$$

Als $x \to -1$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -4$.

$\Rightarrow f'(-1) = -4$

**Opdracht 7 bladzijde 19**

Een bol rolt van een hellend vlak. Het verband tussen de tijd $t$ (in s) en de afgelegde weg $x$ (in m) wordt gegeven door het voorschrift $x(t) = 0{,}2t^2$.

**1** Bereken de gemiddelde snelheid (in m/s) over het tijdsinterval [1;1,5].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1{,}5) - x(1)}{1{,}5 - 1} = \frac{0{,}45 - 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}5$$

$\Rightarrow$ 0,5 m/s

**2** Bereken de gemiddelde snelheid (in m/s) over het tijdsinterval [1;1,1].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1{,}1) - x(1)}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}242 - 0{,}2}{0{,}1} = 0{,}42$$

$\Rightarrow$ 0,42 m/s

**3** Bereken de ogenblikkelijke snelheid (in m/s) voor $t = 1$.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(1)}{t - 1} = \frac{0{,}2t^2 - 0{,}2}{t - 1} = \frac{0{,}2(t-1)(t+1)}{t - 1} \underset{t \neq 1}{=} 0{,}2(t+1)$$

Als $t \to 1$, dan $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to 0{,}4$.

$\Rightarrow$ $x'(1) = 0{,}4$

$\Rightarrow$ 0,4 m/s

**Opdracht 8 bladzijde 20**

Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in de aangegeven punten.

**1** $f: x \mapsto -4x^3$ in $P(-1, f(-1))$

- $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-4x^3 - 4}{x + 1} = \dfrac{-4(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} \underset{x \neq -1}{=} -4(x^2 - x + 1)$

  Als $x \to -1$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -12$.

  $\Rightarrow\ f'(-1) = -12$

- $t \leftrightarrow y - 4 = -12(x + 1)$

  $t \leftrightarrow y = -12x - 8$

**2** $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ in $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ en $Q\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$

In $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

- $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x - 2} = \dfrac{2 - x}{2x(x - 2)} \underset{x \neq 2}{=} \dfrac{-1}{2x}$

  Als $x \to 2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{1}{4}$.

  $\Rightarrow\ f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

- $t \leftrightarrow y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$

  $t \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$

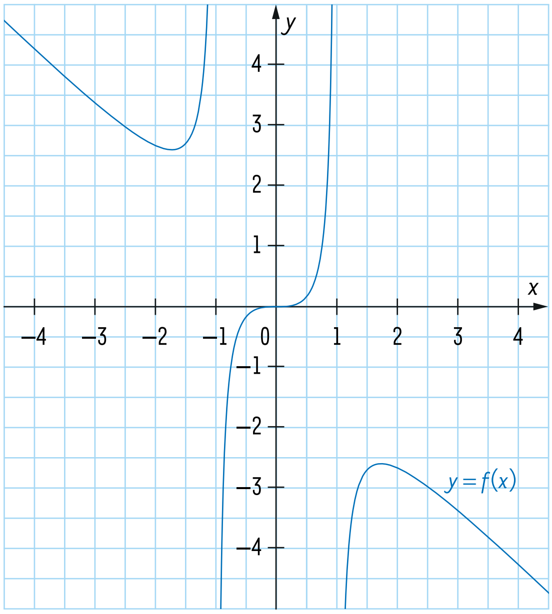
In $Q\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$

- $f'(-2) = -\dfrac{1}{4}$

- $t \leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - 1$

**Opdracht 9 bladzijde 20**

Gegeven is de grafiek van een functie $f$. Duid het juiste antwoord aan (slechts één antwoord is correct!) en motiveer.




**1** **a** $f'(-4) > 0$

**b** $f'(-4) = 0$

**c** $f'(-4) < 0$

f is dalend in $-4 \Leftrightarrow f'(-4) < 0$

Antwoord c is juist.

**2** **a** $f'(-1) = 0$ en $f'(1) = 0$

**b** $f'(-\sqrt{3}) = 0$ en $f'(\sqrt{3}) = 0$

**c** $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Antwoord a is niet juist, want in –1 en in 1 bestaat de afgeleide niet.

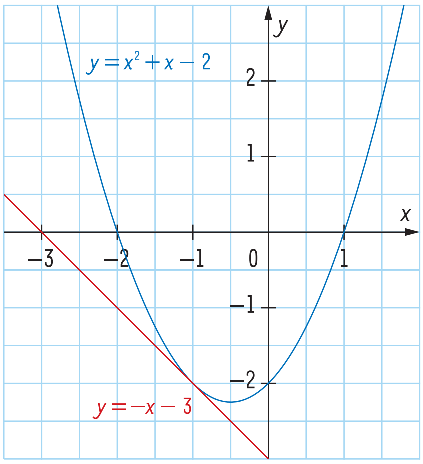
Antwoord c is ook niet juist want in $-\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$ is de afgeleide ook nul.

f is stijgend noch dalend in $-\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$, dus geldt dat $f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = 0$.

Antwoord b is juist.

**Opdracht 10 bladzijde 22**

Beschouw de functie $f: x \longmapsto x^2 + x - 2$. Voor een aantal $x$-waarden werd de afgeleide berekend, m.a.w. de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor die $x$-waarde. Je vindt die waarden in de tabel onder de grafiek. De grafiek toont de raaklijn voor $x = -1$.




| $a$ | $f'(a)$ | vergelijking raaklijn in $P(a, f(a))$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $-5$ | $y = -5x - 11$ |
| $-2$ | $-3$ | $y = -3x - 6$ |
| $-1$ | $-1$ | $y = -x - 3$ |
| $0$ | $1$ | $y = x - 2$ |
| $1$ | $3$ | $y = 3x - 3$ |
| $2$ | $5$ | $y = 5x - 6$ |
| $3$ | $7$ | $y = 7x - 11$ |

**1** Bepaal op basis van de eerste twee kolommen van de tabel een algemene formule voor $f'(a)$ in functie van $a$.

$f'(a) = 2a + 1$

**2** Wat zal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de top van de parabool zijn?

Gebruik je formule voor $f'(a)$ uit de vorige vraag om de bijbehorende waarde van $a$ te vinden.

Controleer vervolgens je antwoord met de formule voor de $x$-coördinaat van de top van een parabool die je kent uit het vierde jaar.

In de top van de parabool is de raaklijn horizontaal en dus is de richtingscoëfficiënt van die raaklijn 0.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

**3** Controleer je uitdrukking voor $f'(a)$ door de afgeleide algebraïsch te berekenen.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^2 + x - 2 - (a^2 + a - 2)}{x - a}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 - a^2 - a + 2}{x - a}$$

$$= \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a}$$

$$= \frac{(x - a)(x + a + 1)}{x - a}$$

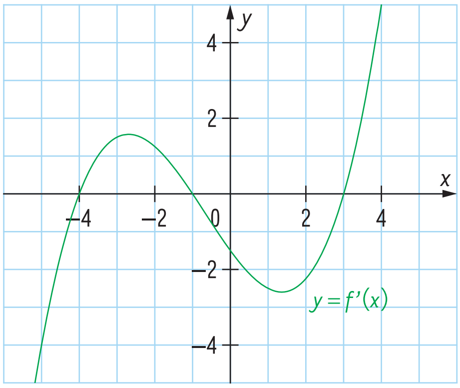
$$\underset{x \neq a}{=} x + a + 1$$

Als $x \rightarrow a$, zal $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow a + a + 1 = 2a + 1$.

$\rightarrow f'(a) = 2a + 1$

**Opdracht 11 bladzijde 24**

De hellinggrafiek van een functie $f$ is gegeven.




Welke van de volgende besluiten kun je maken op basis van deze grafiek?

**1** De grafiek van $f$ is dalend voor $x = 2$.

juist, want $f'(2) < 0$

**2** De grafiek van $f$ heeft een horizontale raaklijn voor $x = -1$.

juist, want $f'(-1) = 0$

**3** De grafiek van $f$ heeft juist twee punten met een horizontale raaklijn.

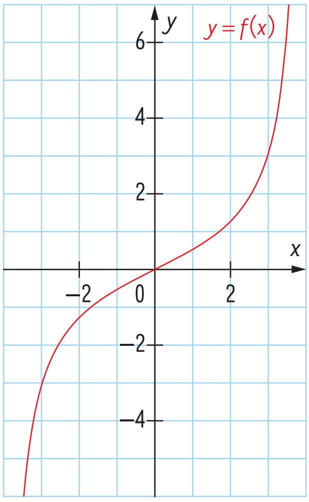
fout, f' heeft meer dan 2 nulpunten

**4** De grafiek van $f$ is stijgend voor $x = -2$.

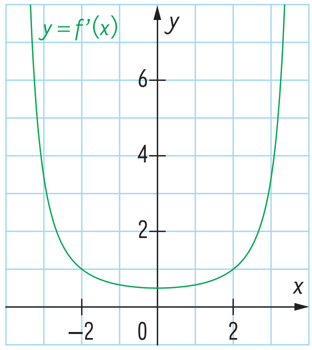
juist, want $f'(-2) > 0$

## Opdracht 12 bladzijde 25

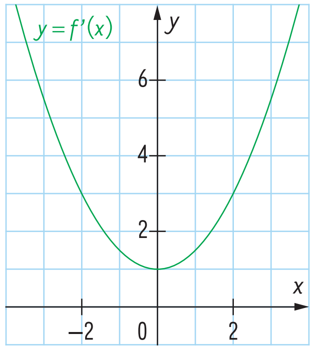
De grafiek van een functie $f$ is gegeven.




A




B




**1** Is grafiek A of grafiek B de hellinggrafiek van $f$? Verklaar je antwoord.

De helling van f in 0 is ongeveer gelijk aan 0,5. Enkel in A is $f'(0) = 0{,}5$.

**2** Voor welke waarden van $x$ is de helling van de grafiek van $f$ kleiner dan 1?

voor $-2 < x < 2$

**3** Voor welke waarden van $x$ neemt de helling van de grafiek van $f$ toe?

voor $x > 0$

## Opdracht 13 bladzijde 25

De veelterm $v(x) = x^3 - a^3$ is deelbaar door $x - a$, aangezien $v(a) = 0$.

Het quotiënt bepaal je met een Hornerschema, dat je hiernaast afgebeeld ziet. Je vindt: $v(x) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | $-a^3$ |
| $a$ | | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
| | 1 | $a$ | $a^2$ | 0 |

**1** Toon op dezelfde manier aan dat $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | $-a^4$ |
| a | | a | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ |
| | 1 | a | $a^2$ | $a^3$ | 0 |

$\Rightarrow x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$

**2** Maak gebruik van een Hornerschema om $q(x)$ te bepalen in $x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$, met $n$ een natuurlijk getal groter dan 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | $-a^n$ |
| a | | a | $a^2$ | | $a^{n-2}$ | $a^{n-1}$ | $a^n$ |
| | 1 | a | $a^2$ | | $a^{n-2}$ | $a^{n-1}$ | 0 |

$\Rightarrow x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$

**Opdracht 14 bladzijde 27**

Bepaal een vergelijking van de raaklijn $t$ aan de grafiek van $f: x \mapsto x^4$ in het punt $P(2, f(2))$.

- $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$

  $f'(2) = 32$
- $t \leftrightarrow y - 16 = 32(x - 2)$

  $t \leftrightarrow y = 32x - 48$

**Opdracht 15 bladzijde 27**

Bepaal de coördinaat van de punten op de grafiek van de functie $f: x \mapsto x^3$ waar de raaklijn evenwijdig is met de rechte $a \leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$.

- $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$
- $a \leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$
- $$t \,//\, a \Leftrightarrow \text{rico } t = \text{rico } a \Leftrightarrow 3x_0^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ In de punten $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ en $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.

**Opdracht 16 bladzijde 30**

Bereken.

**1** $\frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 - 6)$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 - 6) = 3x^2 + 10x$$

**2** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5x\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5x\right) = 2x^3 - 8x + 5$$

**3** $\dfrac{d}{dx}\left(-3x^6 + \sqrt{2}x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 145x + 2103\right)$

$$\frac{d}{dx}(-3x^6 + \sqrt{2}x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 145x + 2103)$$
$$= -18x^5 + 4\sqrt{2}x^3 - 36x^2 + 46x - 145$$

**4** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-6x^3 + 3x - 2}{3}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-6x^3 + 3x - 2}{3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-2x^3 + x - \frac{2}{3}\right)$$
$$= -6x^2 + 1$$

**Opdracht 17 bladzijde 30**

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + 4$.

**1** Bepaal het punt $P$ waar de raaklijn $t$ aan de grafiek van $f$ evenwijdig is met de rechte met vergelijking $y = x$.

- $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4) = 2x$

  $f'(a) = 2a$

- $t$ // rechte met vergelijking $y = x$

  $\Updownarrow$

  rico $t = 1$

  $\Updownarrow$

  $2a = 1$

  $\Updownarrow$

  $a = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ in $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{17}{4}\right)$

**2** Bepaal een vergelijking van $t$.

$t \leftrightarrow y - \frac{17}{4} = x - \frac{1}{2}$

$t \leftrightarrow y = x + \frac{15}{4}$

### Opdracht 18 bladzijde 30

De raaklijn $t$ aan de grafiek van de functie $f : x \longmapsto -x^3 + 2x^2 - 36$ gaat door de oorsprong.

Bepaal de coördinaat van het raakpunt $P$.

- $f'(x) = -3x^2 + 4x$
- Noem $P(a, f(a))$ het raakpunt, dan is

  $t \leftrightarrow y - (-a^3 + 2a^2 - 36) = (-3a^2 + 4a)(x - a)$
- De raaklijn gaat door de oorsprong:

  $a^3 - 2a^2 + 36 = 3a^3 - 4a^2$

  $\Leftrightarrow\ 2a^3 - 2a^2 - 36 = 0$

  $\Leftrightarrow\ a^3 - a^2 - 18 = 0$

  $\Leftrightarrow\ (a - 3)(a^2 + 2a + 6) = 0 \quad \rightarrow D < 0$

  $\Leftrightarrow\ a = 3$
- $P(3, -45)$

### Opdracht 19 bladzijde 31

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3$.

**1** Bereken $\frac{d}{dx}[f(x)]$.

$\frac{d}{dx}[f(x)] = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 1$

**2** Bereken $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right)$.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}[f(x)]\right) = 12x^2 - 12x + 10$

**Opdracht 20 bladzijde 32**

Bereken.

**1** $\dfrac{d^3}{dx^3}(x^6 - x^5 + x - 1)$

$= \dfrac{d^2}{dx^2}(6x^5 - 5x^4 + 1)$

$= \dfrac{d}{dx}(30x^4 - 20x^3)$

$= 120x^3 - 60x^2$

**2** $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n)$

$= \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(nx^{n-1})$

$= \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(n(n-1)x^{n-2})$

$\vdots$

$= n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$

$(= n!)$

**Opdracht 21 bladzijde 33**

Gegeven is de functie $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Bepaal de scherpe hoek, in zestigdelige graden, tussen de $x$-as en de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $P(1, 0)$.

- $f'(x) = x$
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P(1, 0) is dus 1, zodat de scherpe hoek tussen de raaklijn en de x-as gelijk is aan 45°.

**Opdracht 22 bladzijde 34**

Bepaal de hoek, in zestigdelige graden, tussen de grafieken van $f$ en $g$ in hun snijpunten.

**1** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ en $g(x) = x + 2$

- snijpunten:

  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 4 \text{ of } x = -2$

  Snijpunten: $S_1(-2,0)$, $S_2(4,6)$

- $f'(x) = x$

  $g'(x) = 1$

- In $S_1(-2, 0)$ is $f'(-2) = -2$ en $g'(-2) = 1$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\alpha_2 = 45°$

  $63°\,26'\,5{,}816'' + 45° = 108°\,26'5{,}816''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_1(-2, 0)$

  $= 180° - 108°\,26'\,5{,}816''$

  $\Rightarrow 71°\,33'\,54''$
- In $S_2(4, 6)$ is $f'(4) = 4$ en $g'(4) = 1$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = 75°\,57'\,49{,}524''$ $\alpha_2 = 45°$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_2(4, 6)$

  $= 75°\,57'\,49{,}524'' - 45°$

  $\Rightarrow 30°\,57'\,50''$

**2** $f(x) = x^3 - 9x$ en $g(x) = -x^2 + 9$

- snijpunten:

  $$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = -3 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

  Snijpunten: $S_1(-3, 0)$, $S_2(-1{,}8)$, $S_3(3, 0)$
- $f'(x) = 3x^2 - 9$

  $g'(x) = -2x$
- In $S_1(-3, 0)$ is $f'(-3) = 18$ en $g'(-3) = 6$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = 86°\,49'\,12{,}612''$ $\alpha_2 = 80°\,32'\,15{,}64''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_1(-3, 0)$

  $= 86°\,49'\,12{,}612'' - 80°\,32'\,15{,}64''$

  $\Rightarrow 6°\,16'\,57''$
- In $S_2(-1, 8)$ is $f'(-1) = -6$ en $g'(-1) = 2$

  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -80°\,32'\,15{,}64''$ $\alpha_2 = 63°\,26'\,5{,}816''$

  $80°\,32'\,15{,}64'' + 63°\,26'\,5{,}816'' = 143°\,58'\,21{,}456''$

  De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_2(-1, 8)$

  $= 180° - 143°\,58'\,21{,}456''$

  $\Rightarrow 36°\,1'\,39''$

- In $S_3(3, 0)$ is $f'(3) = 18$ en $g'(3) = -6$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha_1 = 86°\,49'\,12{,}612'' \quad \alpha_2 = -80°\,32'\,15{,}64''$$

$86°\,49'\,12{,}612'' + 80°\,32'\,15{,}64'' = 167°\,21'\,28{,}252''$

De hoek tussen de grafieken van f en g in $S_3(3, 0)$

$= 180° - 167°\,21'\,28{,}252''$

$\Rightarrow 12°\,38'\,32''$

**Opdracht 23 bladzijde 35**

Toon aan dat de parabool met vergelijking $y = x^2$ en de rechte met vergelijking $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ elkaar loodrecht snijden.

- Snijpunten:

  $x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

  $4x^2 - x - 18 = 0$

  $D = 289$

  $x = \frac{9}{4}$ of $x = -2$

  $S_1\left(\frac{9}{4}, \frac{81}{16}\right)$, $S_2(-2, 4)$

- $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

  $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{4}$

- In $S_1\left(\frac{9}{4}, \frac{81}{16}\right)$: $2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$ en $\frac{1}{4}$

  $\Rightarrow$ De parabool en de rechte snijden elkaar niet loodrecht in $S_1$ want $\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} \neq -1$.

- In $S_2(-2, 4)$: $2 \cdot (-2) = -4$ en $\frac{1}{4}$

  $\Rightarrow$ De parabool en de rechte snijden elkaar loodrecht in $S_2$ want $-4 \cdot \frac{1}{4} = -1$.

**Opdracht 24 bladzijde 35**

Bepaal $k$ zodat de parabolen met vergelijking $y = x^2 - 4$ en $y = kx^2 + \frac{21}{4}$ elkaar loodrecht snijden.

- $f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 2x$

  $g(x) = kx^2 + \frac{21}{4} \Rightarrow g'(x) = 2kx$

- Noem het snijpunt P met abscis $x_0$.

Dan geldt: $\begin{cases} x_0^2 - 4 = kx_0^2 + \dfrac{21}{4} & \text{(snijpunt)} \\ 2x_0 \cdot 2kx_0 = -1 & \text{(raaklijnen loodrecht)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ -\dfrac{1}{4k} - 4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ -\dfrac{1}{4k} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{1}{4k} \\ k = -\dfrac{1}{36} \end{cases}$$

$k = -\dfrac{1}{36}$

**Opdracht 25 bladzijde 36**

Toon aan dat de grafieken van de functies $f: x \longmapsto x^2 - 5x$ en $g: x \longmapsto x^3 - 4x^2 - 5x$ elkaar raken in de oorsprong.

Er moet gelden dat: $\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$

Nu is $f'(x) = 2x - 5$ en $g'(x) = 3x^2 - 8x - 5$,

zodat $\begin{cases} 0^2 - 5 \cdot 0 = 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 5 = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 5 \end{cases}$

De grafieken raken elkaar in de oorsprong.

**Opdracht 26 bladzijde 36**

Onderzoek of de krommen met vergelijking $y = x^3$ en $y = x^2 + 3x - 2$ elkaar raken.

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

  $g(x) = x^2 + 3x - 2 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$

- Snijpunten:

  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

  $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 2$ of $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ of $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

- voor $x = 2$: $3 \cdot 2^2 \neq 2 \cdot 2 + 3$
- voor $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$: $\underbrace{3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}_{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}} \neq \underbrace{2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)+3}_{2-\sqrt{5}}$
- voor $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: $\underbrace{3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}_{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}} \neq \underbrace{2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+3}_{2+\sqrt{5}}$

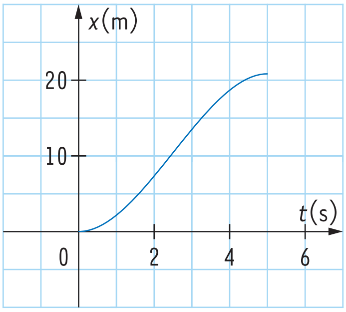
De krommen raken elkaar niet.

**Opdracht 27 bladzijde 37**

Een voorwerp beweegt op een rechte lijn.
De positie $x$ (in meter) in functie van de tijd $t$ (in seconden) wordt gegeven door de formule

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2$$

De beweging duurt van $t = 0$ s tot $t = 5$ s.




**1** Bereken de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1, 2].

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1} = \frac{22}{3} - \frac{13}{6} = \frac{31}{6}$$

De gemiddelde snelheid is $\frac{31}{6}$ m/s ($\approx$ 5,17 m/s).

**2** Bereken de ogenblikkelijke snelheid voor $t = 1$.

$x'(t) = -t^2 + 5t$

$x'(1) = -1 + 5 = 4$

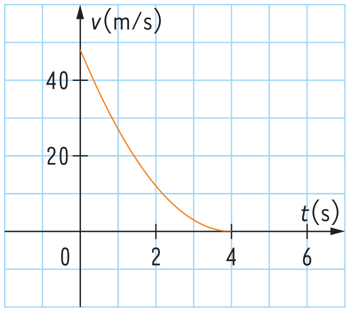
De ogenblikkelijke snelheid is 4 m/s.

**3** Op welk(e) tijdstip(pen) is de snelheid gelijk aan 6 m/s?

$-t^2 + 5t = 6 \iff t^2 - 5t + 6 = 0 \iff t = 2 \text{ of } t = 3$

Op de tijdstippen 2s en 3s is de snelheid 6 m/s.

**Opdracht 28 bladzijde 37**




De snelheid $v$ (in m/s) van een kanonskogel, die op het tijdstip $t = 0$ s is afgeschoten, evolueert volgens de formule $v(t) = 3t^2 - 24t + 48$. In het begin neemt de snelheid heel snel af, na een seconde of twee gebeurt dit trager.

**1** Wat is de gemiddelde verandering van de snelheid in het tijdsinterval [0, 2]?
En in het interval [2, 4]?

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(2) - v(0)}{2} = \frac{12 - 48}{2} = -18$$

Over het tijdsinterval [0, 2] is de gemiddelde snelheidsverandering –18 $m/s^2$.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(4) - v(2)}{4 - 2} = \frac{0 - 12}{2} = -6$$

De gemiddelde snelheidsverandering is dan –6 $m/s^2$.

**2** Bereken de ogenblikkelijke verandering van de snelheid voor $t = 1$ s. We noemen dit ook de ogenblikkelijke versnelling. De eenheid is $m/s^2$.

$v'(t) = 6t - 24$

$v'(1) = 6 - 24 = -18$

De ogenblikkelijke versnelling is –18 $m/s^2$ op het tijdstip 1 s.

**3** Op welk(e) tijdstip(pen) is de versnelling gelijk aan –6 $m/s^2$?

$6t - 24 = -6 \iff t = 3$

Op het tijdstip 3 s is de versnelling –6 $m/s^2$.

**Opdracht 29 bladzijde 40**

Een vuurwerkpijl wordt verticaal afgeschoten.
De hoogte $h$ (in m) in functie van de tijd $t$ (in s) wordt beschreven met het voorschrift $h(t) = 60t - 5t^2$.

**1** Bepaal het voorschrift van de snelheid $v$ in functie van $t$.

$v(t) = h'(t) = 60 - 10t$

**2** Bepaal de snelheid bij het afschieten van de pijl.

$v(0) = 60 \implies 60$ m/s

**3** Bepaal de snelheid na 2 seconden.

$v(2) = 40 \implies 40$ m/s

**4** De vuurwerkpijl ontploft op een hoogte van 120 meter.

**a** Na hoeveel seconden is dat?

$60t - 5t^2 = 120$

$5t^2 - 60t + 120 = 0$

$t^2 - 12t + 24 = 0$

$t = 2{,}535\ldots$ of $t = 9{,}464\ldots$

Na ongeveer 2,54 s ontploft de pijl.

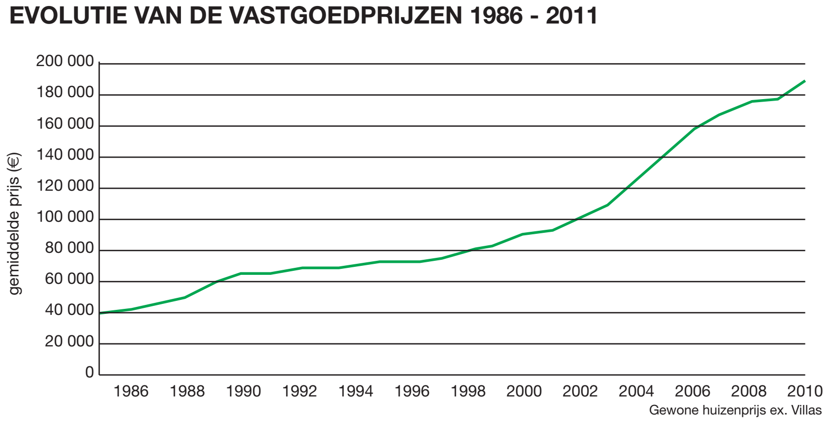
**b** Wat is de snelheid op dat moment?

v(2,54) = 34,6

De snelheid is dan 34,6 m/s.

**Opdracht 30 bladzijde 45**

De evolutie van de huizenprijzen (in euro) is weergegeven in de grafiek.




*Bron: FOD Economie - Kerncijfers vastgoed 2011*

Kies het juiste antwoord en verklaar met een berekening.

**1** De gemiddelde prijsstijging van een gewoon huis tussen 2001 en 2011 was ongeveer

**A** 10 000 euro per jaar
**B** 20 000 euro per jaar
**C** 50 000 euro per jaar
**D** 100 000 euro per jaar

De gemiddelde prijsstijging was ongeveer

$$\frac{190\,000 - 90\,000}{10} = 10\,000$$

$\Rightarrow$ antwoord A

**2** De gemiddelde prijsstijging van een gewoon huis tussen 1986 en 2011 was ongeveer

**A** 5000 euro per jaar
**B** 6000 euro per jaar
**C** 7000 euro per jaar
**D** 8000 euro per jaar

De gemiddelde prijsstijging was ongeveer

$$\frac{190\,000 - 40\,000}{25} = 6000$$

$\Rightarrow$ antwoord B

**Opdracht 31 bladzijde 45**

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f(x) = x^2 + 2$ en $g(x) = x^2 - 3$.

**1** Bereken voor elk van deze functies de gemiddelde verandering over het interval $[-1, 5]$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{27 - 3}{6} = 4$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(5) - g(-1)}{5 - (-1)} = \frac{22 + 2}{6} = 4$$

**2** Wat stel je vast? Is dit ook zo voor andere intervallen? Verklaar.

De gemiddelde veranderingen zijn gelijk.

- grafisch verklaring:

  de grafiek van g (parabool) ontstaat uit de grafiek van f (parabool) door een verschuiving over $\vec{v}$ (0, –5) zodat de gemiddelde verandering over [a, b] dezelfde blijft.

- algebraïsche verklaring:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 + 2 - a^2 - 2}{b - a} \underset{a \neq b}{=} b + a$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{b^2 - 3 - a^2 + 3}{b - a} \underset{a \neq b}{=} b + a$$

**Opdracht 32 bladzijde 46**

De tabel geeft een schatting van de bevolking in Europa tussen 400 v.C. en 1500 n.C.

| **jaar** | –400 | 0 | 200 | 700 | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **bevolking in miljoenen** | 23 | 37 | 67 | 27 | 42 | 48 | 61 | 73 | 45 | 69 |

De bevolking nam geleidelijk toe, behalve tijdens twee periodes:

– tussen 200 en 700: ondergang van het Romeinse Rijk, volksverhuizingen, oorlogen ten tijde van de Merovingers …

– tussen 1300 en 1400: in de zogenaamde waanzinnige 14de eeuw: pest, 100-jarige oorlog …

**1** Toon met een berekening aan dat de bevolking gemiddeld toenam met 50 000 mensen per jaar tussen 700 en 1000.

$$\frac{42 - 27}{300} = 0{,}05 \implies 0{,}05 \text{ miljoen mensen per jaar} = 50\,000 \text{ mensen per jaar.}$$

**2** Wat is de gemiddelde bevolkingstoename per jaar tussen 400 v.C. en 1500 n.C.?

$$\frac{69 - 23}{1900} = 0{,}0242... \implies 0{,}024211 \text{ miljoen mensen per jaar} = 24\,211 \text{ mensen per jaar.}$$

**3** In welke periode daalde de bevolking het snelst?

Tussen 200 en 700: $\frac{27 - 67}{500} = -0{,}28 \implies -0{,}08$ miljoen mensen per jaar

$= -80\,000$ mensen per jaar.

Tussen 1300 en 1400: $\frac{45 - 73}{100} = -0{,}28 \implies -0{,}28$ miljoen mensen per jaar

$= -280\,000$ mensen per jaar.

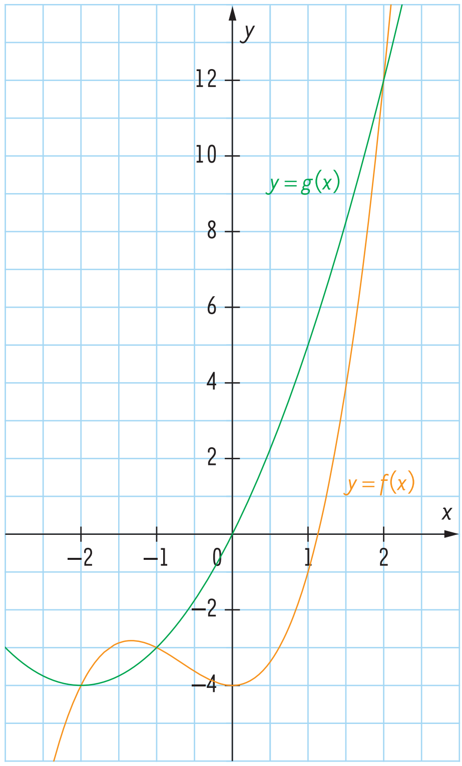
De bevolking daalt het snelst tussen 1300 en 1400.

## Opdracht 33 bladzijde 46

Gegeven de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ en $g(x) = x^2 + 4x$.

**1** Toon aan dat de differentiequotiënten van $f$ en $g$ over het interval $[-1, 2]$ gelijk zijn.

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 5 \qquad \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = 5$




**2** Geef nog een interval waarover $f$ en $g$ gelijke differentiequotiënten hebben.

$[-2, -1]$ of $[-2, 2]$

**3** Bereken de helling van de grafiek van $f$ in het punt $P(2,12)$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^3 + 2x^2 - 4 - 12}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 4x + 8)}{\cancel{x-2}}$$

$$= x^2 + 4x + 8$$

Als $x \to 2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 20$.

De helling van de grafiek van f in P(2, 12) is 20.

**4** Bereken de helling van de grafiek van $g$ in het punt $P(2,12)$.

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} \underset{x \neq 2}{=} \frac{\cancel{(x-2)}(x + 6)}{\cancel{x-2}} = x + 6$$

Als $x \to 2$, dan $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to 8$.

De helling van de grafiek van g in P(2, 12) is 8.

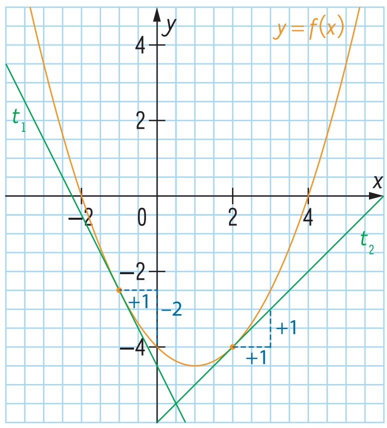
## Opdracht 34 bladzijde 47

Aan de grafieken van de functies zijn een aantal raaklijnen getekend.

Bepaal telkens de gevraagde afgeleiden.

**1** **a** $f'(-1) = -2$ zie figuur

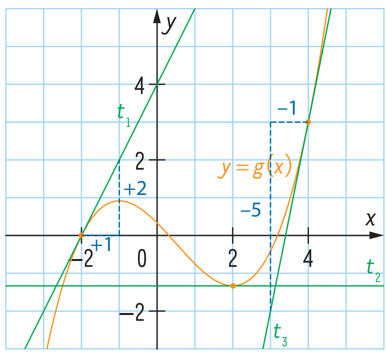
**b** $f'(2) = 1$ zie figuur




**2** **a** $g'(-2) = 2$ zie figuur

**b** $g'(2) = 0$ (horizontale raaklijn)

**c** $g'(4) = 5$ zie figuur



**Opdracht 35 bladzijde 47**

De grafiek van een functie $f$ is getekend.

Rangschik van klein naar groot:

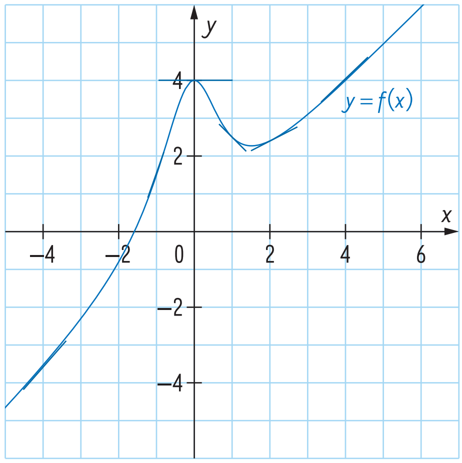
$f'(-4)$ $f'(1)$

$f'(-1)$ $f'(2)$

$f'(0)$ $f'(4)$

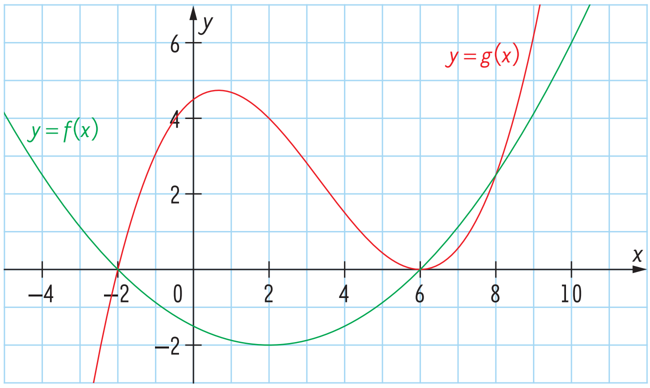
$f'(1) < f'(0) < f'(2) < f'(4) < f'(-4) < f'(-1)$

zie figuur




**Opdracht 36 bladzijde 48**

De grafieken van de functies $f$ en $g$ zijn gegeven. Kies telkens het juiste antwoord.




| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $f'(-2) < g'(-2)$ | $f'(-2) = g'(-2)$ | $f'(-2) > g'(-2)$ |
| **2** | $f'(0) < g'(0)$ | $f'(0) = g'(0)$ | $f'(0) > g'(0)$ |
| **3** | $f'(6) < g'(6)$ | $f'(6) = g'(6)$ | $f'(6) > g'(6)$ |
| **4** | $f'(8) < g'(8)$ | $f'(8) = g'(8)$ | $f'(8) > g'(8)$ |

**Opdracht 37 bladzijde 48**

Is de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2$ stijgend, dalend of stijgend noch dalend in het punt $P(-1, y)$?

Verklaar met een berekening.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}}{x+1} = \frac{3x^3 + 5x^2 - 2}{15(x+1)} \underset{x \neq -1}{=} \frac{\cancel{(x+1)}(3x^2 + 2x - 2)}{15\cancel{(x+1)}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{15}$$

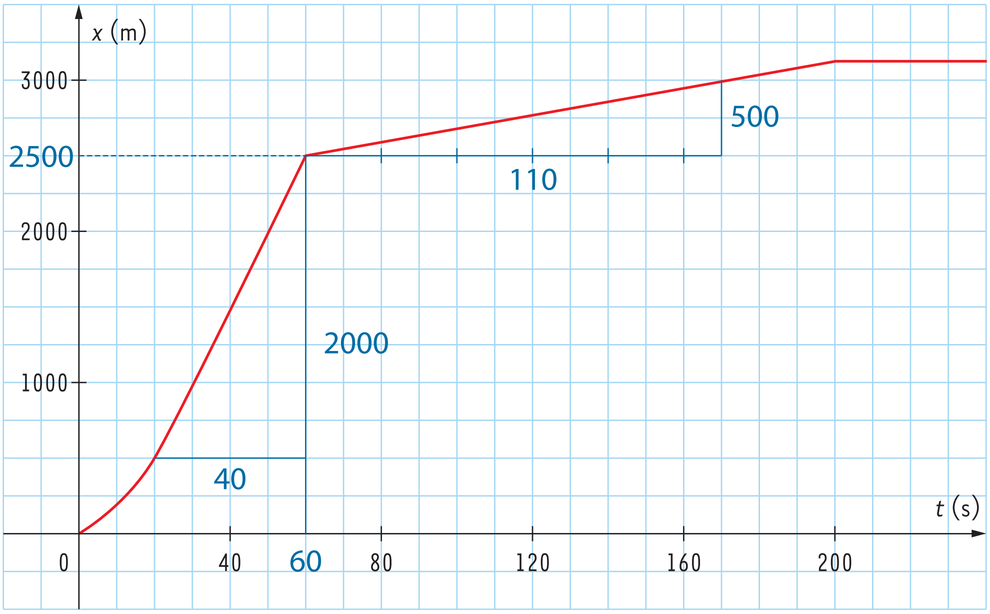
Als $x \to -1$, dan $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{15}$

$f'(-1) = -\frac{1}{15} < 0$

$\Rightarrow$ f is dalend in P.

**Opdracht 38 bladzijde 48**

De grafiek toont de valweg $x$ (in meter) van een parachutist als functie van de tijd $t$ (in seconden).
De parachutist is uit de helikopter gesprongen op een hoogte van 3200 meter. Gedurende 20 seconden is de beweging versneld, maar dan wordt de snelheid constant omwille van de luchtweerstand. Bij het openen van de parachute neemt de luchtweerstand plots toe, zodat de snelheid ineens afneemt. De parachutist valt nu terug met een constante snelheid, waarmee hij ook zal landen.




**1** Na hoeveel tijd opent de parachutist zijn valscherm?

Hij opent zijn valscherm na 60s. (zie figuur)

**2** Op welke hoogte bevindt de parachutist zich als hij zijn valscherm opent?

Hij bevindt zich op een hoogte van 700 m. (zie figuur; 3200 – 2500 = 700)

**3** Welke constante snelheid (in m/s en in km/h) heeft de parachutist tijdens de vrije val?

$\frac{2000}{40}$ m/s = 50 m/s (zie figuur)

De snelheid is 50 m/s = 180 km/h.

**4** Met welke snelheid (in km/h) komt de parachutist op de grond terecht?

$\frac{500}{110}$ m/s = 4,545... m/s

De snelheid is 16,4 km/h.

**Opdracht 39 bladzijde 49**

**1** Als $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, bepaal dan algebraïsch

**a** $f'(0)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{x}{x^2+1} - 0}{x} \underset{x \neq 0}{=} \frac{1}{x^2+1}$$

als $x \to 0$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 1$

$\Rightarrow\ f'(0) = 1$

**b** $f'(-2)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{5}}{x+2} = \frac{2x^2+5x+2}{5(x^2+1)(x+2)} = \frac{(x+2)(2x+1)}{5(x^2+1)(x+2)} \underset{x \neq -2}{=} \frac{2x+1}{5(x^2+1)}$$

als $x \to -2$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \dfrac{-3}{25}$

$\Rightarrow\ f'(-2) = \dfrac{-3}{25}$

**2** Als $f(x) = \sqrt{x} - x$, bepaal dan algebraïsch

**a** $f'(1)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - x - 0}{x-1} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \underset{x \neq 1}{=} \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

als $x \to 1$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

**b** $f'(4)$

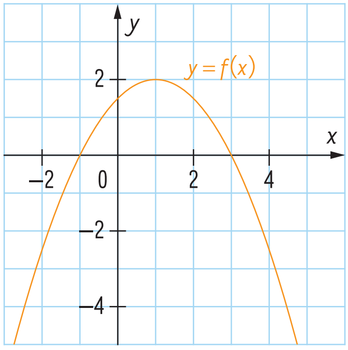
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - x + 2}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(-1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} \underset{x \neq 4}{=} \frac{-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

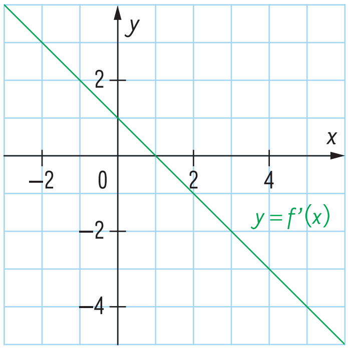
als $x \to 4$, dan $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow\ f'(4) = -\dfrac{3}{4}$

## Opdracht 40 bladzijde 50

Hiernaast zie je de grafiek van een functie $f$ en daaronder de grafiek van haar afgeleide functie $f'$.




**1** Bepaal

**a** $f'(-2) = 3$

**b** $f'(0) = 1$

**c** $f'(4) = -3$

**2** In het interval $]-\infty, 1[$ is de afgeleide functie $f'$ strikt positief.

Wat betekent dit voor de grafiek van $f$?

De functie is stijgend in $]-\infty, 1[$.

**3** **a** In welk punt van de grafiek van $f$ is de helling gelijk aan 2?

in P(–1, 0)

**b** In welk punt van de grafiek van $f$ is de helling gelijk aan –2?

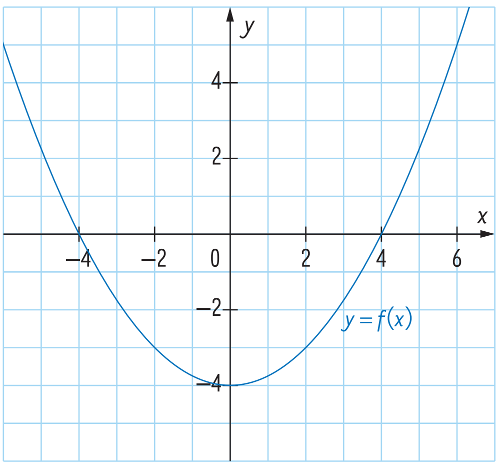
in Q(3, 0)

## Opdracht 41 bladzijde 50

Welke grafieken horen bij welke hellingfuncties?

1 B 2 F 3 A 4 D

**1**

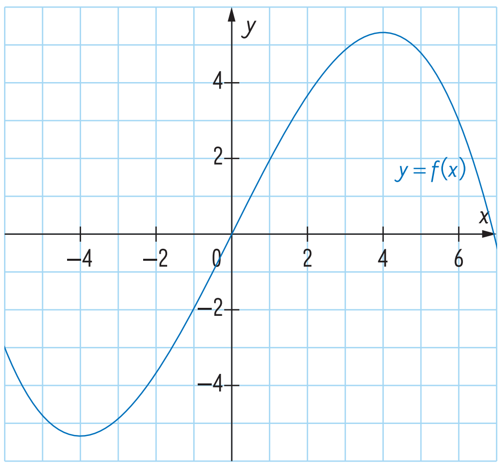



$\searrow$ 0 $\nearrow$

$f' < 0$ $f' > 0$

$\Rightarrow$ B

**2**

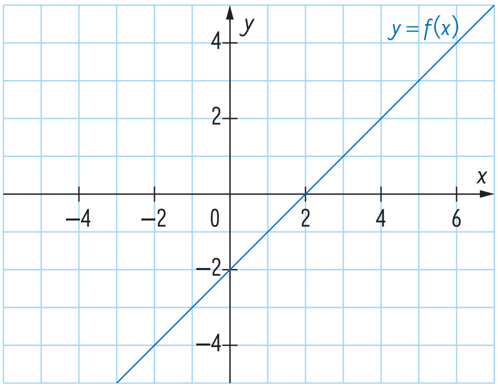



$\searrow$ –4 $\nearrow$ 4 $\searrow$

$f' < 0$ $f' > 0$ $f' < 0$

$\Rightarrow$ F

**3**

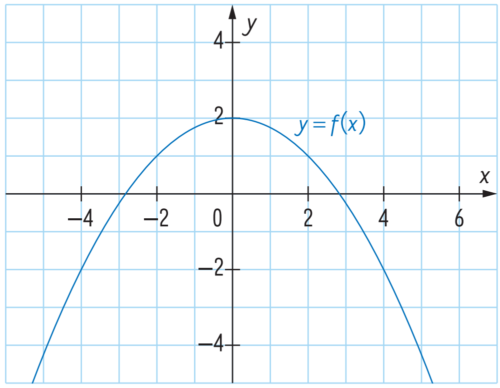



↗

$f' > 0$

$\Rightarrow$ A

**4**

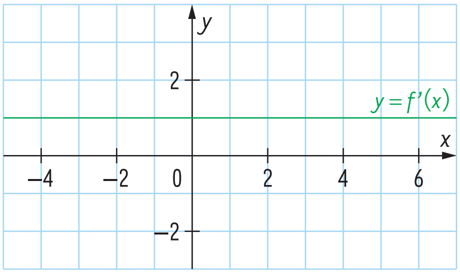



↗ 0 ↘

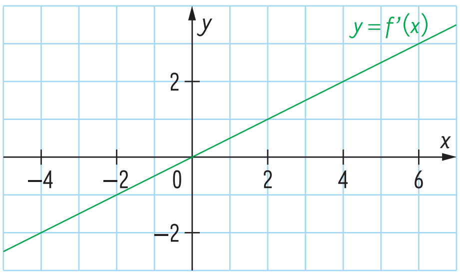
$f' > 0$ $f' < 0$

$\Rightarrow$ D

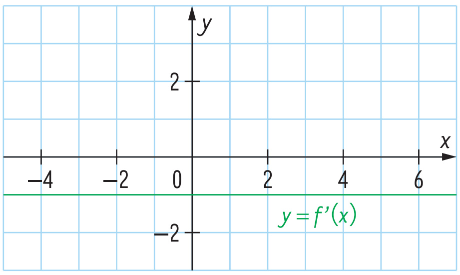
**A**



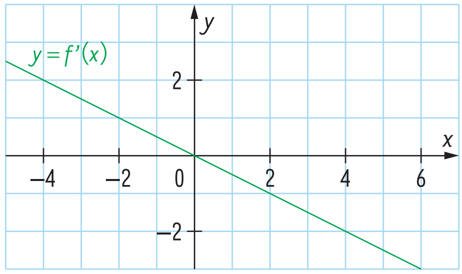

**B**



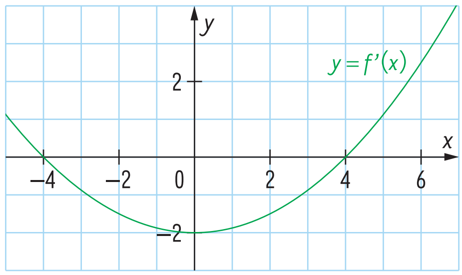

**C**



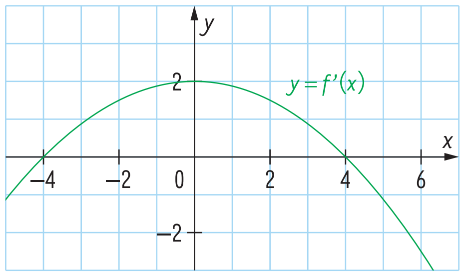

**D**




**E**




**F**



**Opdracht 42 bladzijde 52**

Verklaar telkens met een berekening.

**1** Is $t_1$ de raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $P(-1,1)$?

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

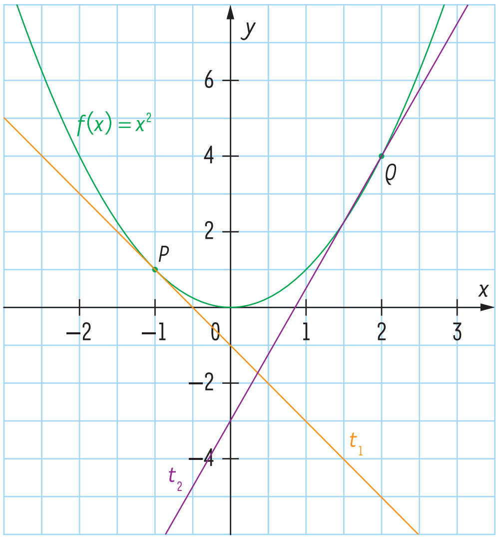
$f'(-1) = -2$

$t_1 \leftrightarrow y - 1 = -2(x + 1)$

$y = -2x - 2 + 1$

$y = -2x - 1$

$t_1$ is de raaklijn want $t_1$ gaat door $P(-1, 1)$ en $R(0, -1)$.




**2** Is $t_2$ de raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $Q(2,4)$?

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$

$t_2 \leftrightarrow y - 4 = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8 + 4$

$y = 4x - 4$

$t_2$ is niet de gevraagde raaklijn want $T(0, -4)$ ligt niet op $t_2$.

**Opdracht 43 bladzijde 52**

Bepaal

**1** $\dfrac{d}{dx}(x^{10}) = 10x^9$

**2** $\dfrac{d}{dt}(t^7) = 7t^6$

**3** $\dfrac{d}{da}(a^{n-5}) = (n-5)a^{n-6}$

**4** $\left.\dfrac{d}{dx}(x^5)\right|_{x=-1} = \left.(5x^4)\right|_{x=-1} = 5$

**5** $\left.\dfrac{d}{dr}(r^2)\right|_{r=8} = \left.(2r)\right|_{r=8} = 16$

**6** $\left.\dfrac{d}{dx}(a^b)\right|_{x=10} = 0$ ($a^b$ is een constante bij variabele x)

**Opdracht 44 bladzijde 52**

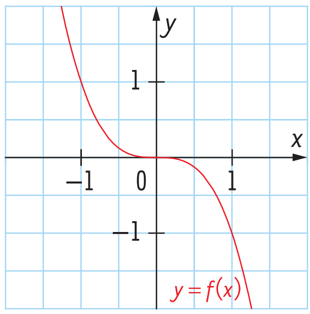
Welke grafiek hoort bij de gegeven voorwaarden voor de afgeleide functie?

**1** $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$ en $f'(-1) > 0$ C

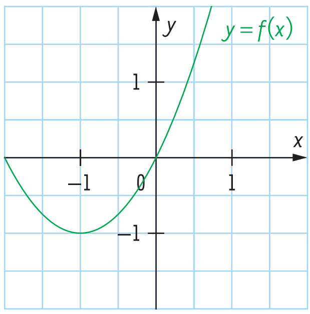
**2** $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$ en $f'(-1) < 0$ A

**3** $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$ en $f'(-1) = 0$ B

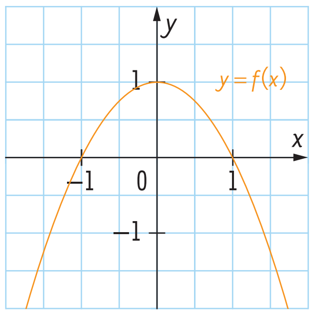
**A**



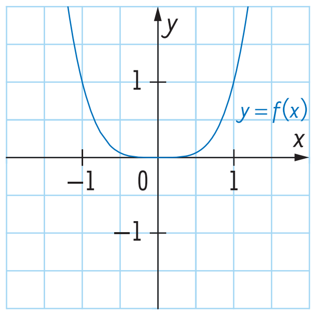

**B**




**C**

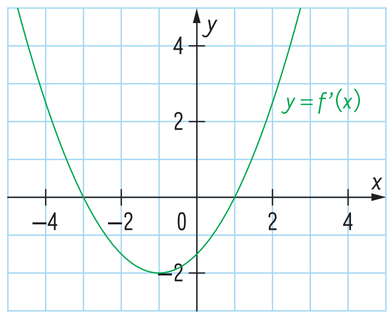



**D**




**Opdracht 45 bladzijde 53**

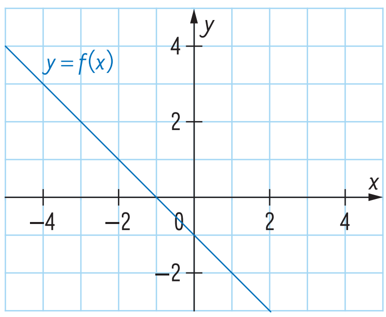
De hellinggrafiek van een functie $f$ is gegeven. Welke van de onderstaande grafieken kan die van $f$ zijn?



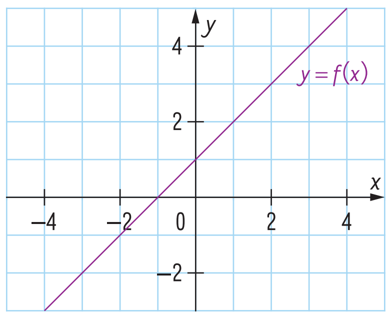

| x | | −3 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | max | ↘ | min | ↗ |

⇒ grafiek B

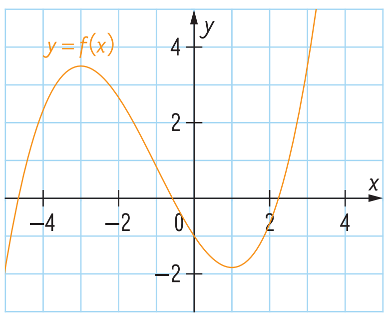
**A**



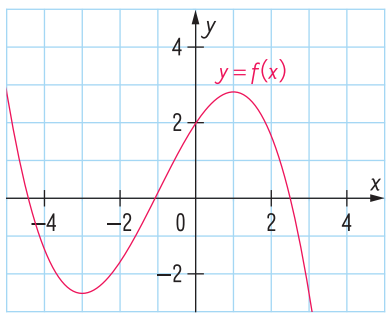

**C**




**B**




**D**



**Opdracht 46 bladzijde 53**

In welke punten heeft de grafiek van de functie $f : x \mapsto x^3$

$f'(x) = 3x^2$

**1** als helling 12?

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = -2$ of $x = 2$

in $P_1(2, 8)$ en $P_2(-2, -8)$

**2** als helling $\frac{1}{3}$?

$3x^2 = \frac{1}{3}$

$x^2 = \frac{1}{9}$

$x = \pm\frac{1}{3}$

in $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$ en $P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right)$

**3** als helling –4?

$3x^2 = -4$

De helling kan in geen enkel punt gelijk zijn aan –4.

**4** als helling $a$?

$3x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{3}$

- $a < 0 \Rightarrow$ in geen enkel punt
- $a = 0 \Rightarrow$ in $P(0, 0)$
- $a > 0 \Rightarrow$ in $P_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}, \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ en $P_2\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

**Opdracht 47 bladzijde 53**

Bepaal de coördinaat van het punt $P$ op de grafiek van de functie $f : x \longmapsto x^2$ waar de raaklijn evenwijdig is met de rechte die de grafiek van $f$ snijdt in de punten met $x$-coördinaat $-3$ en 2.

- rico snijlijn $= \dfrac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \dfrac{4 - 9}{5} = -1$

  rico raaklijn $= \dfrac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x = x_0} = 2x_0$

- raaklijn // snijlijn

$$\Updownarrow$$

$$2x_0 = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

**Opdracht 48 bladzijde 53**

De rechte met vergelijking $y = 6x + b$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie $f : x \longmapsto x^2$.

Bepaal $b$.

- $f'(x) = 2x$
- $t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

  $t \leftrightarrow y - a^2 = 2a(x - a)$

  $y = 2ax - a^2$

  Nu is $y = 6x + b$, dus

  $2a = 6$ en $b = -a^2$

  $\Rightarrow$ $a = 3$ en $b = -9$

  $\Rightarrow$ $b = -9$

**Opdracht 49 bladzijde 54**

De rechte $t \leftrightarrow y = ax - 6$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4$.

Bepaal $a$.

- $f'(x) = 4x^3$
- $t \leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

  $y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0)$

  $y = 4x_0^3 x - 3x_0^4$

Nu is $y = ax - 6$, dus

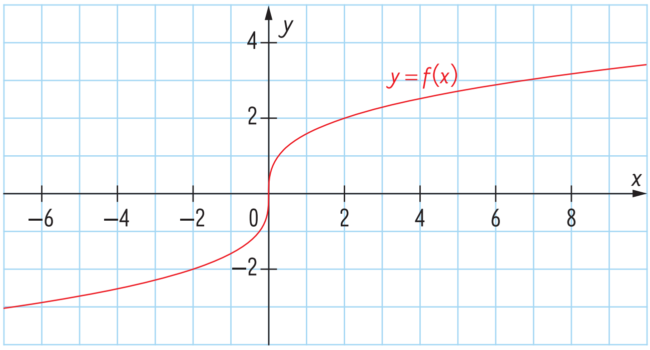
$$4x_0^3 = a \quad \text{en} \quad -3x_0^4 = -6$$
$$\Updownarrow$$
$$x_0^4 = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_0 = \pm\sqrt[4]{2}$$

als $x_0 = \sqrt[4]{2}$ is $a = 4\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = 4\sqrt[4]{8}$

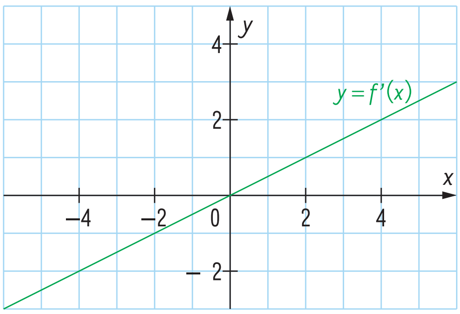
als $x_0 = -\sqrt[4]{2}$ is $a = -4\sqrt[4]{8}$

**Opdracht 50 bladzijde 54**

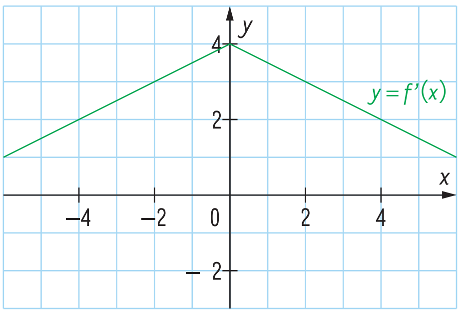
De grafiek van een functie $f$ is gegeven. Welk is de grafiek van haar hellingfunctie?



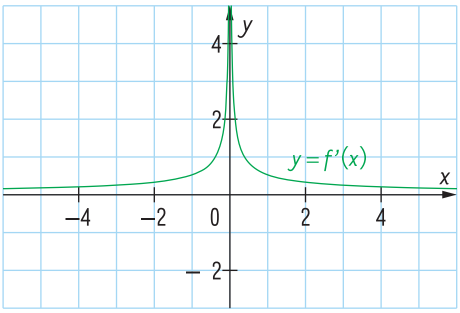

**A**



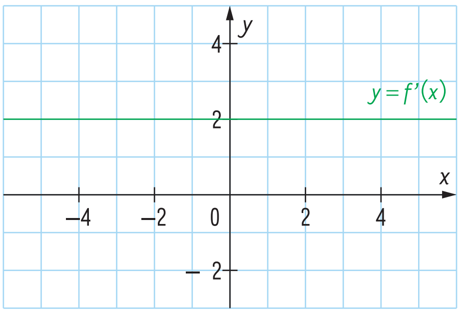

**C**




**B**




**D**




De grafiek is stijgend en heeft een verticale raaklijn voor $x = 0$.

Dit betekent dat $f'(0)$ niet bestaat en dat $f'(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

$\Rightarrow$ antwoord B

**Opdracht 51 bladzijde 54**

**1** Bepaal een vergelijking van de raaklijn $t$ aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ in het punt $P(a, a^2)$.

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$t \leftrightarrow y - a^2 = 2a(x - a)$

$y = 2ax - 2a^2 + a^2$

$t \leftrightarrow y = 2ax - a^2$

**2** Bepaal de coördinaat van het snijpunt $S$ van $t$ met de $x$-as.

$y = 0$

$2ax - a^2 = 0$

$x = \dfrac{a}{2}$

$S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$

**3** Bepaal de coördinaat van het snijpunt $T$ van $t$ met de $y$-as.

$x = 0 \Rightarrow y = -a^2$

$T(0, -a^2)$

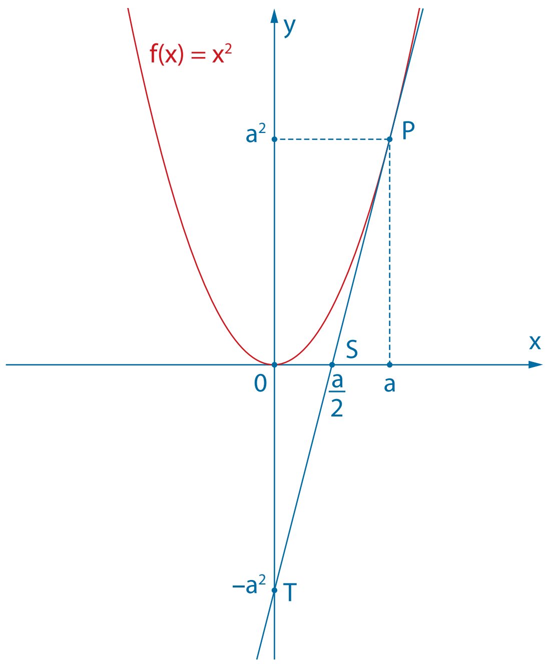
**4** Leid uit de vorige resultaten een constructie af van de raaklijn aan de parabool met vergelijking $y = x^2$ in een willekeurig punt.

Noem dit punt $P(a, a^2)$.

Duid op de x-as het punt $S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ aan en verbind P met S.

Of: duid op de y-as het punt $T(0, -a^2)$ aan en verbind P met T.

Of: duid de punten $S\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ en $T(0, -a^2)$ aan en verbind S met T.



**Opdracht 52 bladzijde 55**

Bereken

**1** $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{1}{2}$

**2** $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{9}x^2+3x\right) = -\frac{2}{9}x + 3$

**3** $\frac{d}{dx}(x^4-3x^3+8) = 4x^3 - 9x^2$

**4** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^6-x\right) = 3x^5 - 1$

**5** $\frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right) = -3x^3 + 2x^2$

**6** $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax + b$

**7** $\frac{d}{dx}(2ax^2+3ax+b) = 4ax + 3a$

**8** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4a}\right) = \frac{x^2}{a} + \frac{x}{2a}$

**9** $\frac{d}{dx}(-2x^3y+x^2y^2-xy^3) = -6x^2y + 2xy^2 - y^3$

**10** $\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2tx^3}{3}+\frac{u^2}{2}\right) = -x^3 + 2tx^2$

**Opdracht 53 bladzijde 55**

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 10$.

Bereken

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

**1** $f'(1) = -4$

**2** $f'(-2) = 23$

**3** $f'(0) = -1$

**Opdracht 54 bladzijde 55**

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Bepaal *a* als

$f'(x) = -4x + 3$

**1** $f'(a) = -5$

$-4a + 3 = -5$

$-4a = -8$

$a = 2$

**2** $f'(a) = 7$

$-4a + 3 = 7$

$-4a = 4$

$a = -1$

**3** $f'(a) = 0$

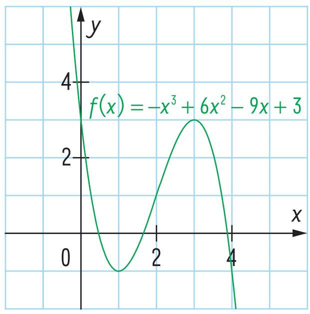
$-4a + 3 = 0$

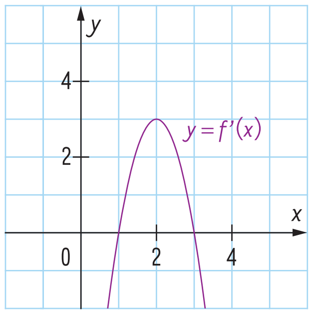
$-4a = -3$

$a = \dfrac{3}{4}$

**Opdracht 55 bladzijde 56**

De grafieken van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$ en haar afgeleide functie $f'$ zijn getekend.




**1** Bepaal het voorschrift van $f'$.

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

**2** Voor welke waarden van *x* heeft de grafiek van *f* een horizontale raaklijn?

$f'(x) = 0$

$x = 1$ of $x = 3$ (zie grafiek f')

$\Rightarrow$ voor $x = 1$ en voor $x = 3$

**3** Voor welke waarden van *x* heeft de grafiek van *f* een strikt positieve helling?

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 3$

$\Rightarrow$ voor $1 < x < 3$

**4** Voor welke waarde van *x* heeft de grafiek van *f* de grootste helling?

f' bereikt een maximum voor $x = 2$

$\Rightarrow$ voor $x = 2$

**Opdracht 56 bladzijde 56**

Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in het punt *P*.

**1** $f : x \mapsto 4x^2 + 5x + 2$ in $P(1, f(1))$

$f'(x) = 8x + 5$

$f'(1) = 13$

$t \leftrightarrow y - 11 = 13(x - 1)$

$t \leftrightarrow y = 13x - 2$

**2** $f: x \mapsto \dfrac{1-x^2}{5}$ in $P(-4, f(-4))$

$f'(x) = -\dfrac{2}{5}x$

$t \leftrightarrow y + 3 = \dfrac{8}{5}(x + 4)$

$t \leftrightarrow y = \dfrac{8}{5}x + \dfrac{17}{5}$

**Opdracht 57 bladzijde 56**

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - 4x$.

$f'(x) = 2x - 4$

**1** In welk punt van de grafiek van $f$ is de raaklijn evenwijdig met de $x$-as?

$f'(x) = 0$ als $x = 2 \implies$ in $P(2, -4)$

**2** In welk punt van de grafiek van $f$ is de raaklijn evenwijdig met de rechte $y = 4x$?

$f'(x) = 4$

$2x - 4 = 4$

$x = 4 \implies$ in $P(4, 0)$

**3** In welk punt van de grafiek van $f$ is de raaklijn evenwijdig met de rechte $y = -2x + 3$?

$f'(x) = -2$

$2x - 4 = -2$

$x = 1 \implies$ in $P(1, -3)$

**Opdracht 58 bladzijde 56**

Van de functie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + 1$ is gegeven dat $f(2) = 1$ en $f'(2) = -3$.

Bepaal $a$ en $b$.

- $f(x) = ax^2 + bx + 1$

  $f(2) = 1$

  $4a + 2b + 1 = 1$

  $2a + b = 0$ (1)

- $f'(x) = 2ax + b$

  $f'(2) = -3$

  $4a + b = -3$ (2)

- uit (1): $b = -2a$ (3)

  in (2): $4a - 2a = -3$

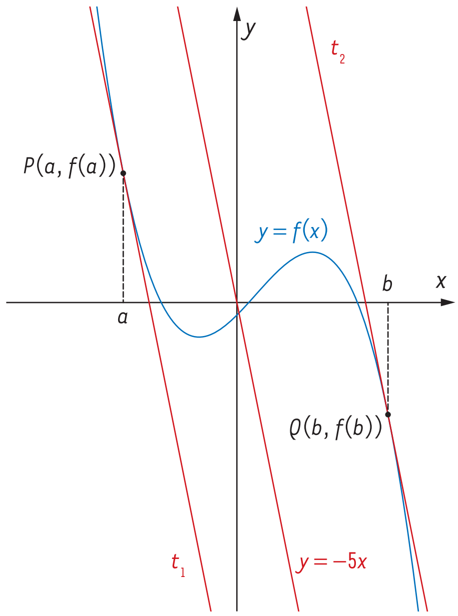
  $2a = -3$

  $a = \frac{-3}{2}$

  in (3): $b = -2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = 3$

  $a = \frac{-3}{2}$ en $b = 3$

**Opdracht 59 bladzijde 57**




$t_1$ en $t_2$ zijn de raaklijnen aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{3}$ in de punten $P(a, f(a))$ en $Q(b, f(b))$.

Bepaal $a$ en $b$ als je weet dat $t_1$ en $t_2$ evenwijdig zijn met de rechte met vergelijking $y = -5x$.

- $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

- rico $t_1 = -5$

  $\Updownarrow$

  $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + 1 = -5$

  $\Updownarrow$

  $-a^2 + a + 12 = 0$

  $\Updownarrow$

  $a = -3$ of $a = 4$

- $a = -3$ (figuur: $a < 0$)

  $b = 4$ (figuur: $b > 0$)

**Opdracht 60 bladzijde 57**

Toon aan dat

**1** $(\underbrace{f+g+h+\ldots}_{n\text{ termen}})' = \underbrace{f'+g'+h'+\ldots}_{n\text{ termen}}$

$$\begin{aligned}(f+g+h+\ldots)' &= f' + (\underbrace{g+h+\ldots}_{n-1\text{ termen}})' && \text{(somregel)}\\ &= f' + g' + (\underbrace{h+\ldots}_{n-2\text{ termen}})' && \text{(somregel)}\\ &\vdots\\ &= \underbrace{f'+g'+h'+\ldots}_{n\text{ termen}}\end{aligned}$$

**2** $(f-g)' = f' - g'$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(f-g)}{\Delta x} &= \frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a} && \text{(definitie somfunctie)}\\ &= \frac{\big(f(x)-f(a)\big)-\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\end{aligned}$$

als $x \to a$, zal $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$ en $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \to g'(a)$

zodat $\dfrac{\Delta(f-g)}{\Delta x} \to f'(a) - g'(a)$

$\Rightarrow\ (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

**3** $(r \cdot f)' = r \cdot f'$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(rf)}{\Delta x} &= \frac{(rf)(x)-(rf)(a)}{x-a}\\ &= \frac{rf(x)-rf(a)}{x-a} && \text{(definitie veelvoudfunctie)}\\ &= r\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

als $x \to a$, zal $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$

zodat $\dfrac{\Delta(rf)}{\Delta x} \to r \cdot f'(a)$

$\Rightarrow\ (rf)' = r \cdot f'$

**Opdracht 61 bladzijde 57**

De rechte met vergelijking $y = 2x + b$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2x^2 - 3$.

Bepaal $b$.

$f'(x) = 4x$

Stel P(a,f(a)) is het raakpunt, dan is

$f'(a) = 4a = 2$

$a = \frac{1}{2}$

$f(a) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{-5}{2}$

zodat $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$ het raakpunt is.

We stellen met deze gegevens een vergelijking van de raaklijn t op:

$t \leftrightarrow y + \frac{5}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = 2x - 1 - \frac{5}{2}$

$t \leftrightarrow y = 2x - \frac{7}{2}$

$b = \frac{-7}{2}$

**Opdracht 62 bladzijde 57**

De rechte met vergelijking $y = ax - 1$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie $f : x \longmapsto x^2 + 2$.

Bepaal $a$.

- Stel $P(x_0, x_0^2 + 2)$ het raakpunt
- $f'(x) = 2x$

$t \leftrightarrow y - x_0^2 - 2 = 2x_0(x - x_0)$

$y = 2x_0x - 2x_0^2 + x_0^2 + 2$

$y = 2x_0x - x_0^2 + 2$

- $\begin{cases} 2x_0 = a & (y = ax - 1) \\ -x_0^2 + 2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0^2 = 3 \\ a = 2x_0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{3} \\ a = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{3}$ of $a = -2\sqrt{3}$

OFWEL

Stel $P(x_0, x_0^2 + 2)$ en $Q(0, -1)$, dan is

$f'(x_0) = \text{rico } PQ$

$$2x_0 = \frac{-1 - x_0^2 - 2}{0 - x_0}$$

$$-2x_0^2 = -3 - x_0^2$$

$$3 = x_0^2$$

$$x_0 = \pm\sqrt{3}$$

zodat $a = 2x_0 = \pm 2\sqrt{3}$.

**Opdracht 63 bladzijde 57**

Gegeven is de parabool $p \leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$.

Toon aan dat de rechte $AB$, met $A(m, f(m))$ en $B(n, f(n))$, evenwijdig is met de raaklijn $t$ in het punt $C\left(\frac{m+n}{2}, f\left(\frac{m+n}{2}\right)\right)$ van $p$.

- $$\text{rico } AB = \frac{f(n) - f(m)}{n - m} = \frac{an^2 + bn + c - am^2 - bm - c}{n - m}$$
  $$= \frac{a(n-m)(n+m) + b(n-m)}{n - m}$$
  $$= a(n+m) + b$$
- $f'(x) = 2ax + b$

  $$\text{rico } t = 2a \cdot \frac{m+n}{2} + b$$

  $\text{rico } t = a(m+n) + b$

$\Rightarrow$ $AB \mathbin{/\!/} t$

**Opdracht 64 bladzijde 57**

Wat is de kleinste helling van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1$?

- $f'(x) = 6x^2 + 2x + 3$
- De hellinggrafiek is een dalparabool met top $\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right)$

  De kleinste helling is dus $\frac{17}{6}$.

**Opdracht 65 bladzijde 58**

Bepaal de hoek tussen de grafieken van $f$ en $g$ in hun snijpunten.

**1** $f : x \longmapsto 2x - 1$ $\qquad$ $g : x \longmapsto -\frac{1}{3}x + 2$

- Snijpunten

  $$\begin{aligned} f(x) = g(x) \;&\Leftrightarrow\; 2x - 1 = -\frac{1}{3}x + 2 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{7}{3}x = 3 \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

  Snijpunt: $S\left(\frac{9}{7}, \frac{11}{7}\right)$

- $f'(x) = 2$

  $g'(x) = -\frac{1}{3}$

- In $S\left(\frac{9}{7}, \frac{11}{7}\right)$ is $f'\left(\frac{9}{7}\right) = 2$ en $g'\left(\frac{9}{7}\right) = -\frac{1}{3}$

  $\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

  $\alpha_1 = 63°\,26'\,5{,}816''$ $\qquad$ $\alpha_2 = -18°\,26'\,5{,}816''$

  $63°\,26'\,5{,}816'' + 18°\,26'\,5{,}816'' = 81°\,52'\,11{,}632''$

  De hoek is $81°\,52'\,12''$.

**2** $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 10$ $\qquad$ $g : x \mapsto -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

- Snijpunten

  $f(x) = g(x)$

  $\Updownarrow$

  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

  $\Updownarrow$

  $x^2 - 2x - 3 = 0$

  $\Updownarrow$

  $x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$

  Snijpunten: $S_1\left(3, -\frac{49}{4}\right), S_2\left(-1, -\frac{33}{4}\right)$

- $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

  $g'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

- In $S_1\left(3, -\frac{49}{4}\right)$ is $f'(3) = 0$ en $g'(3) = -4$

  $\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = 0°$ $\qquad$ $\alpha_2 = -75°\,57'\,49{,}524''$

  De hoek is $75°\,57'\,50''$.

- In $S_2\left(-1, -\frac{33}{4}\right)$ is $f'(-1) = -2$ en $g'(-1) = 2$

  $\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\qquad$ $\alpha_2 = 63°\,26'\,5{,}816''$

  De hoek is $180° - 2 \cdot 63°\,26'\,5{,}816'' \Rightarrow 53°\,7'\,48''$.

**Opdracht 66 bladzijde 58**

De rechte met vergelijking $y = x$ en de parabool met vergelijking $y = -x^2 + k$ raken elkaar.

Bepaal $k$.

- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$; $g(x) = -x^2 + k \Rightarrow g'(x) = -2x$
- Voor het raakpunt $P(x_0, f(x_0))$ geldt:

$$\begin{cases} x_0 = -x_0^2 + k \\ 1 = -2x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ k = x_0^2 + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

**Opdracht 67 bladzijde 58**

Pallieter staat boven op de IJzertoren, die 84 m hoog is, en gooit een steen net over de rand van de muur verticaal naar boven, zodat deze rakelings langs die muur tot helemaal beneden valt, zoals op de figuur aangegeven.

Stellen we $t = 0$ op het ogenblik dat hij de steen loslaat, dan kan de hoogte $h$ (in m) goed benaderd worden door $h(t) = 84 + 13t - 5t^2$ met $t$ in seconden.

**1** Bereken de snelheid van de steen na 2 seconden.

$v(t) = h'(t) = 13 - 10t$

De snelheid na 2 seconden is $(13 - 10 \cdot 2)$ m/s $= -7$ m/s, dus 7 m/s naar beneden.

**2** Met welke snelheid raakt de steen de grond?

$h(t) = 0$

$-5t^2 + 13t + 84 = 0$

$t = 5{,}6$ of $t \neq -3 \quad (t > 0)$

$v(5{,}6) = 13 - 10 \cdot 5{,}6 = -43$

De steen raakt de grond met een snelheid van 43 m/s.

### Opdracht 68 bladzijde 58

Je laat een steen van een toren vallen. De hoogte $h$ van de steen (in m) na $t$ seconden wordt beschreven door het voorschrift $h(t) = -4,9t^2 + 95$.

**1** Hoe hoog is de toren?

$h(0) = 95$ De hoogte van de toren is 95 m.

**2** Bepaal de snelheid na 2 seconden.

$v(t) = h'(t) = -9,8\,t$

$v(2) = -9,8 \cdot 2 = -19,6 \Rightarrow -19,6$ m/s

**3** Met welke snelheid komt de steen op de grond terecht?

$-4,9t^2 + 95 = 0$

$t^2 = \dfrac{95}{4,9}$

$t = 4,4 \quad (t > 0)$

$v(4,4) = -9,8 \cdot 4,4$

$= -43,15 \Rightarrow -43,2$ m/s

**4** Verklaar met een berekening waarom de versnelling op elk moment dezelfde is.

$v(t) = -9,8t$

$\Rightarrow a(t) = -9,8$ De versnelling is constant (en gelijk aan de valversnelling).

### Opdracht 69 bladzijde 59

De **normaal** in een punt van een kromme is de rechte die loodrecht staat op de raaklijn in dat punt aan de kromme.

Bepaal een vergelijking van de normaal $n$ in het punt $P(-1, f(-1))$ van de grafiek van $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x$.

- $f'(x) = -x + 1$
- rico $t = f'(-1) = 2$

  $\Rightarrow$ rico $n = -\frac{1}{2}$
- $n \leftrightarrow y + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x + 1)$
- $n \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$

**Opdracht 70 bladzijde 59**

Gegeven de rechte $r \leftrightarrow y = -4x - 3$ en de functie $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 2x$.

**1** Toon aan dat $r$ een raaklijn is aan de grafiek van $f$ en bepaal de coördinaat van het raakpunt $T$.

- $f'(x) = \frac{2}{3}x - 2$
- $t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - \frac{1}{3}a^2 + 2a = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)(x - a)$$
$$y = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)x - \frac{2}{3}a^2 + 2a + \frac{1}{3}a^2 - 2a$$
$$y = \left(\frac{2}{3}a - 2\right)x - \frac{1}{3}a^2$$

Nu moet $y = -4x - 3$, zodat

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a - 2 = -4 \\ -\frac{1}{3}a^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a^2 = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ voor $a = -3$ is de rechte r een raaklijn aan de grafiek van f.

$\Rightarrow$ $T(-3, 9)$

**2** Bepaal een vergelijking van de normaal $n$ in $T$.

rico $t = -4 \Rightarrow$ rico $n = \frac{1}{4}$

$n \leftrightarrow y - 9 = \frac{1}{4}(x + 3)$

$n \leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{39}{4}$

**Opdracht 71 bladzijde 59**

Omdat de maan een kleinere massa heeft dan de aarde, val je op de maan 'zachter' dan op aarde.

De functie met voorschrift $x = 0{,}85t^2$ geeft bij benadering het verband tussen de valweg $x$ (in m) en de valtijd $t$ (in s) op de maan. Op aarde is dat verband bij benadering $x = 4{,}9t^2$.

**1** Een ruimtevaarder laat van 100 meter hoogte een maansteen vallen.

**a** Na hoeveel seconden ploft die neer op de maan?

$100 = 0{,}85t^2$

$t = \sqrt{\frac{100}{0{,}85}} = 10{,}846...\quad (t > 0)$

Na ongeveer 10,8 s ploft de steen neer.

**b** Met welke snelheid gebeurt dit?

$v(t) = x'(t) = 1{,}7t$ op de maan

$$v\left(\sqrt{\frac{100}{0{,}85}}\right) = x'\left(\sqrt{\frac{100}{0{,}85}}\right) = 1{,}7 \cdot \sqrt{\frac{100}{0{,}85}} = 18{,}439...$$

De snelheid is ongeveer 18,4 m/s.

**2** Met welke snelheid valt een steen, die van een 20 meter hoge toren op aarde valt, op de grond?

$4{,}9t^2 = 20$

$$t = \sqrt{\frac{20}{4{,}9}} \quad (t > 0)$$

$v(t) = x'(t) = 2 \cdot 4{,}9t = 9{,}8t$ op aarde

$$v\left(\sqrt{\frac{20}{4{,}9}}\right) = 9{,}8 \cdot \sqrt{\frac{20}{4{,}9}} = 19{,}798...$$

De snelheid is ongeveer 19,8 m/s.

**3** Hoe hoog moet een toren op de maan zijn opdat een steen, die van deze toren valt, met dezelfde snelheid zou neerkomen als die steen die van de 20 meter hoge toren op aarde neervalt?

$v(t) = 1{,}7t = 19{,}799$ op de maan als $t = \dfrac{19{,}799}{1{,}7} = 11{,}646...$

De valweg die bij deze tijd hoort is dan $x(11{,}646) = 0{,}85 \cdot 11{,}646^2 = 115{,}30$

De toren moet ongeveer 115,3 m hoog zijn.

### Opdracht 72 bladzijde 59

Bepaal $k$ zodat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + k$ de $x$-as onder een hoek van 45° snijdt.

- Noem het snijpunt van de grafiek met de x-as P: $P(x_0, 0)$
- $f'(x) = 2x$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 = \tan 45° = 1$

  $\Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

- $f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + k = 0$

  $\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{4}$

**Opdracht 73 bladzijde 59**

De grafieken van de functies $f$ en $g$ raken elkaar. Bepaal $m$.

**1** $f : x \mapsto x^2 + mx + 4$ en $g : x \mapsto -2x^2 + 4x + m$

Er geldt:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 4 = -2x_0^2 + 4x_0 + m \\ 2x_0 + m = -4x_0 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + (m-4)x_0 + 4 - m = 0 \\ 6x_0 = 4 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 6x_0^2 + 6x_0 = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2 + 6x_0 = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0(x_0 - 2) = 0 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{of} \quad x_0 = 2 \\ m = 4 - 6x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; m = 4 \quad \text{of} \quad m = -8$$

**2** $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + m$ en $g : x \mapsto x^2 + 9x + 1$

Er geldt:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 2x_0^2 + m = x_0^2 + 9x_0 + 1 \\ 3x_0^2 - 4x_0 = 2x_0 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + m - 1 = 0 \\ 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 + 1 = m \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \quad \text{of} \quad x_0 = -1 \\ m = -x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; m = 28 \quad \text{of} \quad m = -4$$

## Opdracht 74 bladzijde 60

Bepaal $k$ zodanig dat de grafieken van de functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}kx^2 - 3$ en $g : x \mapsto -\frac{1}{18}x^2 + 2$ elkaar loodrecht snijden.

- $f'(x) = kx$

  $g'(x) = -\frac{1}{9}x$

- $\text{rico } t_1 \cdot \text{rico } t_2 = -1$

  $\Leftrightarrow kx_0 \cdot \left(-\frac{1}{9}x_0\right) = -1$

  $\Leftrightarrow -\frac{1}{9}kx_0^2 = -1$

  $\Leftrightarrow k \cdot x_0^2 = 9$

- $f(x_0) = g(x_0)$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_0^2 - 3 = -\frac{1}{18} \cdot x_0^2 + 2$

  $\underset{x_0^2 = \frac{9}{k}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = -\frac{1}{18} \cdot \frac{9}{k} + 2$

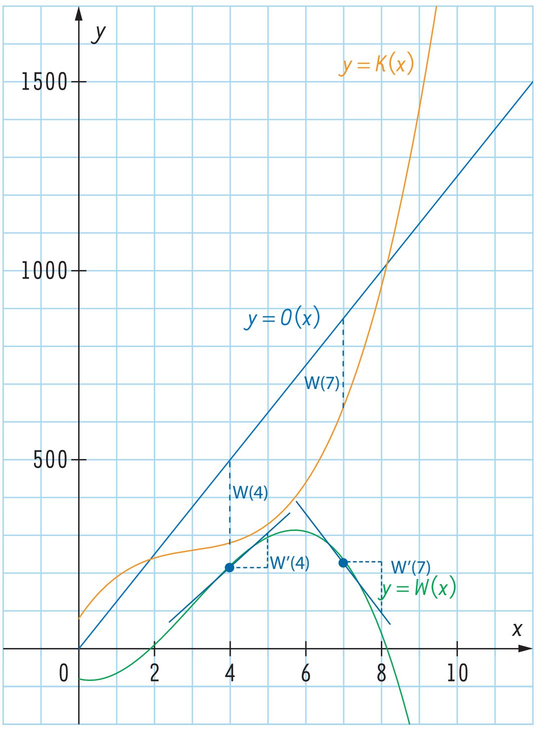
  $\Leftrightarrow \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow k = 1$

## Opdracht 75 bladzijde 60

Een firma produceert potloden. De totale kosten (in €) om $x$ keer 1000 potloden te produceren, zijn gelijk aan $K(x) = 5x^3 - 45x^2 + 150x + 80$. De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks zodat $O(x) = 125x$ de omzetfunctie is.

In deze opdracht vergelijken we de verandering van de kosten, van de omzet en van de winst bij een productie van 4000 en van 7000 eenheden.




**1** De verandering van de kosten bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de kostenfunctie. We noemen deze verandering de **marginale kosten**.

Bepaal de marginale kostenfunctie $K'(x)$.

$K'(x) = 15x^2 - 90x + 150$

**2** Bereken $K'(4)$ en $K'(7)$.

Wat betekent dit voor de toename van de kosten bij een productie van 4000 t.o.v. die bij een productie van 7000 eenheden?

$K'(4) = 30$

$K'(7) = 255$

Indien de productie wordt opgevoerd van 4000 stuks naar 7000 zullen de kosten met € 225 toenemen.

**3** De verandering van de omzet bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de omzetfunctie. We noemen deze verandering de **marginale omzet**.

Bepaal de marginale omzetfunctie $O'(x)$.

$O'(x) = 125$

**4** De verandering van de winst bij een bepaalde productie is gelijk aan de afgeleide van de winstfunctie. We noemen deze verandering de **marginale winst**.

Bepaal de winstfunctie $W(x)$ en de marginale winstfunctie $W'(x)$.

$$\begin{aligned} W(x) &= O(x) - K(x) \\ &= 125x - 5x^3 + 45x^2 - 150x - 80 \\ &= -5x^3 + 45x^2 - 25x - 80 \end{aligned}$$

$W'(x) = -15x^2 + 90x - 25$

**5** Bereken $W(4)$ en $W'(4)$. Hoe kun je deze aflezen op de grafiek?

$W(4) = 220$

$W'(4) = 95$

zie figuur

**6** Bereken $W(7)$ en $W'(7)$. Hoe kun je deze aflezen op de grafiek?

$W(7) = 235$

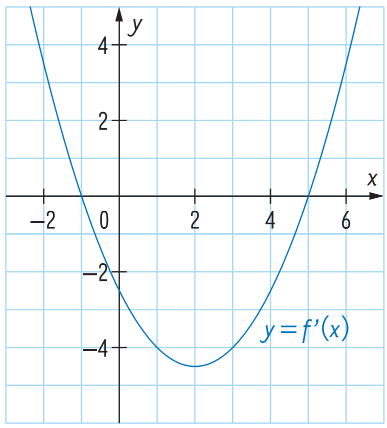
$W'(7) = -130$

zie figuur

**Opdracht 76 bladzijde 61**

De hellinggrafiek van een functie $f$ is gegeven.

Kies het juiste antwoord.




**1** De grafiek van $f$ heeft een horizontale raaklijn

**A** voor $x = -1$

**B** voor $x = 0$

**C** voor $x = 2$

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ of $x = 5$

$\Rightarrow$ antwoord A

**2** Voor $x = 3$ is de grafiek van $f$

**A** stijgend

**B** dalend

**C** stijgend noch dalend

$f'(3) < 0$

$\Rightarrow$ f is dalend voor $x = 3$

$\Rightarrow$ antwoord B

**3** Voor $x = 5$ is de grafiek van $f$

**A** stijgend

**B** dalend

**C** stijgend noch dalend

$f'(5) = 0$

$\Rightarrow$ f is stijgend noch dalend voor $x = 5$

$\Rightarrow$ antwoord C

**Opdracht 77 bladzijde 61**

Het volume water $V$ (in l) in een tank, $t$ minuten vanaf het moment dat het leeglopen start, wordt beschreven door de formule $V(t) = 40\,000 - 4000t + 100t^2$.

**1** Bepaal de gemiddelde snelheid waarmee het water uit de tank stroomt tijdens de eerste 10 minuten.

$\dfrac{v(10) - v(0)}{10} = -3000 \;\Rightarrow\;$ 3000 l/min

**2** Wat is de ogenblikkelijke snelheid waarmee het water uit de tank stroomt na 10 minuten?

$v'(t) = -4000 + 200t$

$v'(10) = -2000 \;\Rightarrow\;$ 2000 l/min

**3** Na hoeveel minuten is de tank leeg?

$V(t) = 0$

$100t^2 - 4000t + 40000 = 0$

$t = 20$ Na 20 minuten is de tank leeg.

**Opdracht 78 bladzijde 61**

Bepaal de hoek tussen de grafieken van $f : x \mapsto x^3 - 2x$ en $g : x \mapsto x^3$ in hun snijpunten.

- Snijpunten

  $f(x) = g(x)$

  $\Leftrightarrow\; x^3 - 2x = x^3$

  $\Leftrightarrow\; x = 0$

  Snijpunt P (0, 0)
- $f'(x) = 3x^2 - 2$

  $g'(x) = 3x^2$
- In P (0, 0) is $f'(0) = -2$ en $g'(0) = 0$

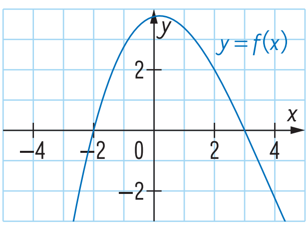
  $\Downarrow$ $\Downarrow$

  $\alpha_1 = -63°\,26'\,5{,}816''$ $\alpha_2 = 0°$
- De hoek is 63° 26′ 6″.

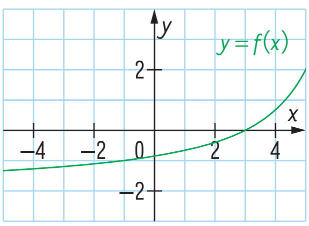
**Opdracht 79 bladzijde 62**

Welke grafieken horen bij welke hellingfuncties?

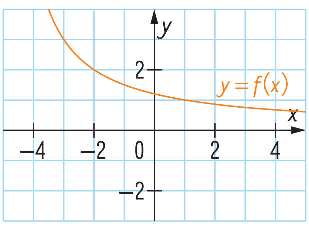
**1**



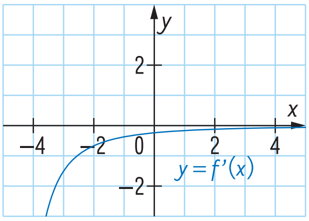

**2**



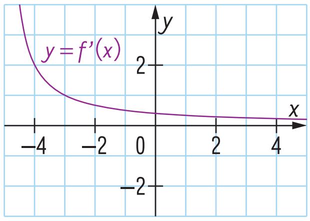

**3**



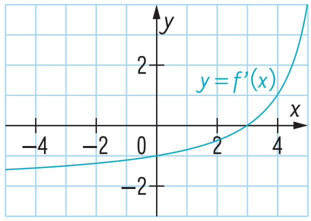
A



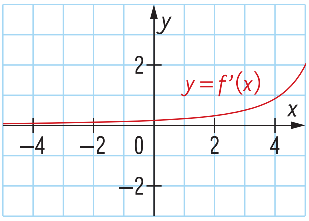

C



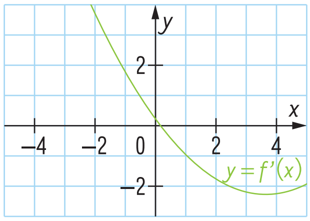

E



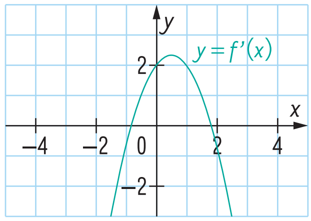

B




D




F




1 f is eerst stijgend, dus $f' > 0$

in de omgeving van 0 is $f'(a) = 0$ (maximum)

daarna is f dalend, dus $f' < 0$

$\Rightarrow$ hellingfunctie D

2 f is stijgend, dus $f' > 0$ en bovendien neemt $f'$ toe

$\Rightarrow$ hellingfunctie B

3 f is dalend, dus $f' < 0$ en bovendien neemt $f'$ toe

$\Rightarrow$ hellingfunctie A

**Opdracht 80 bladzijde 62**

Bepaal de $x$-coördinaten van de punten van de grafiek van de functie met voorschrift
$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6x^2$ waar de helling gelijk is aan 4.

$f'(x) = 3x^3 + x^2 - 12x$

$3x^3 + x^2 - 12x = 4$

$3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

$x^2(3x + 1) - 4(3x + 1) = 0$

$(3x + 1)(x^2 - 4) = 0$

$x = \frac{-1}{3}$ of $x = -2$ of $x = 2$

**Opdracht 81 bladzijde 62**

**1** Voor welke waarde(n) van $x$ heeft de functie met voorschrift

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$ een horizontale raaklijn?

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 0$

$x = -3$ of $x = 1$

De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn voor $x = -3$ en voor $x = 1$.

**2** Bepaal $c$ als de $x$-as een raaklijn is van de grafiek van $f$.

Er geldt dan dat $f(-3) = 0$ of $f(1) = 0$

$f(-3) = 0$

$-9 + 9 + 9 + c = 0$

$c = -9$

$f(1) = 0$

$\frac{1}{3} + 1 - 3 + c = 0$

$c = \frac{5}{3}$

$c = -9$ of $c = \frac{5}{3}$

**Opdracht 82 bladzijde 62**

Bepaal vergelijkingen van de raaklijnen $t_1$ en $t_2$ aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - x + 2$ die door het punt $P(3, -1)$ gaan.

- $f'x) = 2x - 1$
- Noem het raakpunt P (a,f(a)), dan is

  $t \leftrightarrow y - (a^2 - a + 2) = (2a - 1)(x - a)$

  $y = (2a - 1)x - 2a^2 + a + a^2 - a + 2$

  $y = (2a - 1)x - a^2 + 2$
- de raaklijn gaat door P (3, –1):

  $-1 = (2a - 1)3 - a^2 + 2$

  $\Leftrightarrow -1 = 6a - 3 - a^2 + 2$

  $\Leftrightarrow a^2 - 6a = 0$

  $\Leftrightarrow a = 0$ of $a = 6$

- raaklijn $t_1$ in $P(0, 2)$:

  $t_1 \leftrightarrow y - 2 = -1(x - 0)$

  $t_1 \leftrightarrow y = -x + 2$
- raaklijn $t_2$ in $Q(6, 32)$:

  $t_2 \leftrightarrow y - 32 = 11(x - 6)$

  $t_2 \leftrightarrow y = 11x - 34$

**Opdracht 83 bladzijde 62**

De grafieken van de functies $f : x \longmapsto x^2 + 2ax + b$ en $g : x \longmapsto x^3 + c$ raken elkaar in het punt $P(-1, 1)$.

Bepaal $a$, $b$ en $c$.

Er geldt :

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) = 1 \\ f'(-1) = g'(-1) \end{cases} \qquad \text{met } f'(x) = 2x + 2a \text{ en } g'(x) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a + b = 1 \\ -1 + c = 1 \\ -2 + 2a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ c = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ a = \frac{5}{2}, b = 5, c = 2$$

**Opdracht 84 bladzijde 63**

De afgelegde weg $x$ (in km) van een auto op de snelweg kan beschreven worden door het voorschrift $x(t) = -10t^3 + 60t^2$.

Hierbij is de tijd $t$ uitgedrukt in uur. De rit duurt 4 uur zodat $0 \leqslant t \leqslant 4$.

**1** Wat is de gemiddelde snelheid van de auto gedurende deze rit?

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(0)}{4} = 80$$

De gemiddelde snelheid is 80 km/h.

**2** Bepaal het voorschrift van de snelheid $v$ in functie van de tijd (in km/h).

$v(t) = x'(t) = -30t^2 + 120t$

**3** Hoe groot is de ogenblikkelijke snelheid na 1 uur?

$v(1) = -30 + 120 = 90$

De ogenblikkelijke snelheid na 1 uur is 90 km/h.

**4** Toon aan dat de auto de maximumsnelheid van 120 km/h nooit overschrijdt.

De grafiek van v is een bergparabool met top (2, 120). De maximumsnelheid wordt dus nooit overschreden.

OFWEL

De afgeleide van de snelheidsfunctie is $v'(t) = -60t + 120$.

zodat

| t | | 2 | |
|---|---|---|---|
| v′(t) | + | 0 | − |
| v(t) | ↗ | 120<br>max | ↘ |

De snelheid is maximaal 120 km/h.

### Opdracht 85 bladzijde 63

Een niet horizontale rechte gaat door het punt $P(2, 1)$ en heeft een raakpunt met de parabool met vergelijking $y = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$.

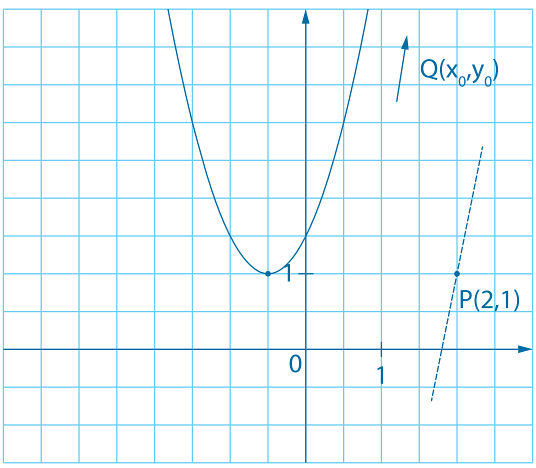
Hoeveel bedraagt de helling van deze raaklijn?

**A** 20 **B** 12 **C** 8 **D** 4

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

1^e methode: met behulp van afgeleiden

Schets:




$f(x) = 2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

De grafiek is een dalparabool ($a > 0$) met top $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

- Noem het raakpunt $Q(x_0, y_0)$ met $y_0 = 2x_0^2 + 2x_0 + \frac{3}{2}$.
- $\text{rico } PQ = \dfrac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{3}{2} - 1}{x_0 - 2} = \dfrac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{1}{2}}{x_0 - 2}$

- $f'(x) = 4x + 2 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 4x_0 + 2$
- rico PQ = rico t, dus

$$\frac{2x_0^2 + 2x_0 + \frac{1}{2}}{x_0 - 2} = 4x_0 + 2$$

$$2x_0^2 + \cancel{2x_0} + \frac{1}{2} = 4x_0^2 - 8x_0 + \cancel{2x_0} - 4$$

$$2x_0^2 - 8x_0 - \frac{9}{2} = 0$$

$$4x_0^2 - 16x_0 - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} D = (-16)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9 &= 256 + 144 \\ &= 400 \\ &= 20^2 \end{aligned}$$

$$x_{0_{1,2}} = \frac{16 \pm 20}{8} \quad \begin{cases} \cancel{-\frac{1}{2}} & \text{(dan zou PQ horizontaal zijn)} \\ \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{9}{2}, f\left(\frac{9}{2}\right)\right)$$

- De helling van de raaklijn is $4 \cdot \dfrac{9}{2} + 2 = 20.$

$\Rightarrow$ antwoord A is juist

2$^e$ methode: gebaseerd op leerstof 4$^e$ jaar

- vergelijking rechte door P met rico m:

$y = mx + q$

P (2, 1) ligt op de rechte: $1 = 2m + q$

$q = 1 - 2m$

$\Rightarrow\; y = mx + 1 - 2m$

- snijpunten rechte en parabool:

$$2x^2 + 2x + \frac{3}{2} = mx + 1 - 2m$$

$$2x^2 + (2 - m)x + \frac{1}{2} + 2m = 0$$

- Er mag maar één snijpunt zijn, dus moet D = 0:

$$D = (2-m)^2 - 8\left(\frac{1}{2} + 2m\right)$$
$$= \cancel{4} - 4m + m^2 \cancel{-4} - 16m$$
$$= m^2 - 20m$$
$$= m(m-20)$$
$$D = 0 \iff \cancel{m=0} \text{ of } m = 20$$

de rechte PQ is niet horizontaal

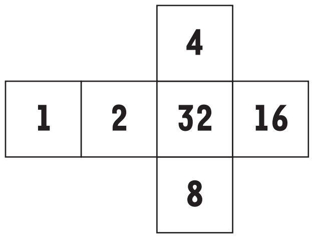
$y = 20x - 39$

- De helling is 20, antwoord A is dus juist.

**Hersenbrekers bladzijde 64**

**1** Drie kubussen worden gevormd op basis van de ontvouwing hiernaast. Vervolgens worden ze op een tafel de ene bovenop de andere geschikt, zodanig dat de 13 zichtbare getallen de grootst mogelijke som hebben.

Wat is deze som?




**A** 159 **B** 161 **C** 164 **D** 167 **E** 189

C

Bij de bovenste kubus is enkel het ondervlak onzichtbaar, we zorgen dat dit het vlak is met de 1.

De som van de 5 zichtbare zijvlakken van de bovenste kubus is 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.

Bij de twee onderste kubussen zijn 4 zichtbare zijvlakken, de 2 zijvlakken die tegenover elkaar liggen met de kleinste som zijn die met 4 en 8. We hebben dan nog 2 · (1 + 2 + 32 +16) = 102.

De maximale som is 164.

**2** Meneer Jansen vertrekt elke ochtend om 8u stipt naar zijn werk met de auto. Als hij (constant) 40 km/h rijdt, is hij drie minuten te laat op zijn werk. Als hij 60 km/h rijdt, is hij drie minuten te vroeg op zijn werk.

Hoe snel moet hij rijden om precies op tijd te komen?

(bron © Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009)

48 km/h

Stel *x* is de afstand (in km) die meneer Jansen elke morgen aflegt, dan is

$$\frac{x}{40} - \frac{1}{20} = \frac{x}{60} + \frac{1}{20}$$

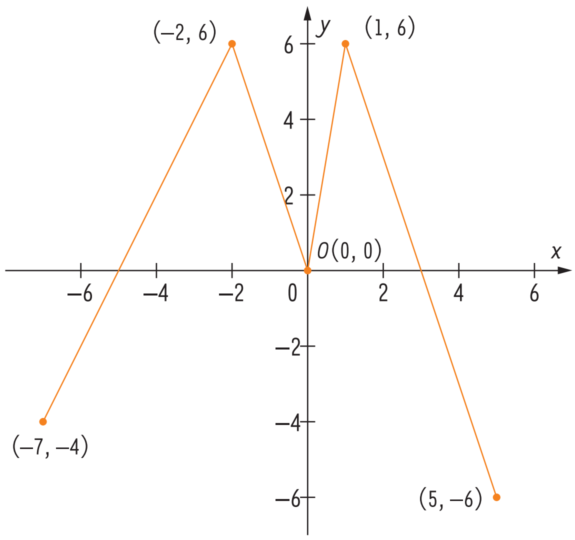
$\iff 3x - 6 = 2x + 6$

$\iff x = 12$

De tijd die hij nodig heeft om precies op tijd te zijn is $\left(\frac{12}{40} - \frac{1}{20}\right)$h = 15 min.

Hij moet 12 km afleggen in 15 minuten, dit is 48 km/h.

**3** De grafiek van de functie $f$ zie je hieronder.




Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $f(f(x)) = 6$?

**A** 2 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

D

f(f(x)) = 6

f(x) = 1 of f(x) = –2

De rechte met vergelijking y = 1 heeft 4 snijpunten met de grafiek.
De rechte met vergelijking y = –2 heeft 2 snijpunten met de grafiek.

In totaal zijn dit 6 snijpunten, dus 6 oplossingen van de vergelijking f(f(x)) = 6.

# Hoofdstuk 7

## Verloop van veeltermfuncties

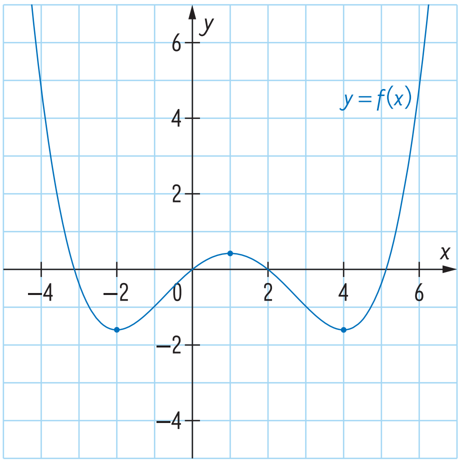


**Opdracht 1 bladzijde 66**

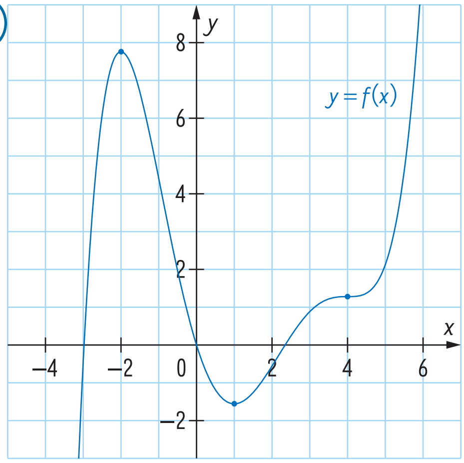
Welke functiegrafiek hoort bij de gegeven tekentabel van de afgeleide?

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |

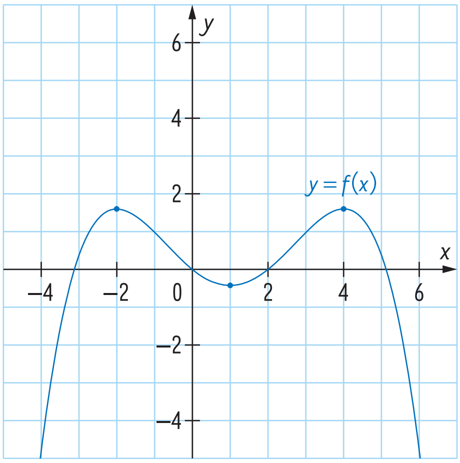
**a**



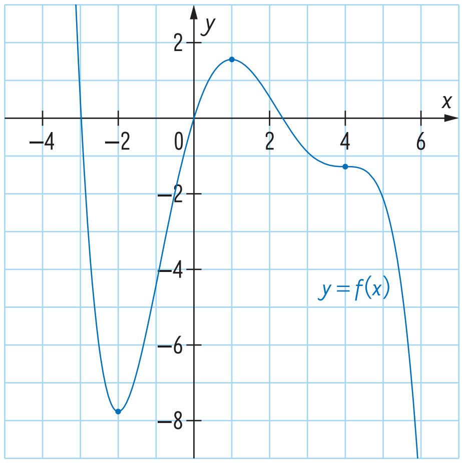

**c**




**b**




**d**




**Opdracht 2 bladzijde 69**

Stel voor de volgende functies een verloopschema op.

**1** $f: x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad (D = 144)$

$\Leftrightarrow \; x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | −1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 11 | ↘ | −21 | ↗ |
| | | max. | | min. | |

**2** $f: x \longmapsto -x^3 + 6x^2 - 1$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$

$-3x^2 + 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ of $\quad x = 4$

| x | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | –1 | ↗ | 31 | ↘ |
| | | min. | | max. | |

**3** $f: x \longmapsto 3x^4 + 11x^3 + 15x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 12x^3 + 33x^2 + 30x + 9$

$12x^3 + 33x^2 + 30x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(12x^2 + 21x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad$ of $\quad 12x^2 + 21x + 9 = 0 \quad (D = 9)$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad$ of $\quad x = -\frac{3}{4} \quad$ of $\quad x = -1$

| | 12 | 33 | 30 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| –1 | | –12 | –21 | –9 |
| | 12 | 21 | 9 | 0 |

| x | | –1 | | $-\frac{3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | –4 | ↘ | –4,004 | ↗ |
| | | | | min. | |

**4** $f: x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 7$

$f'(x) = x^3 - 12x^2 + 34x$

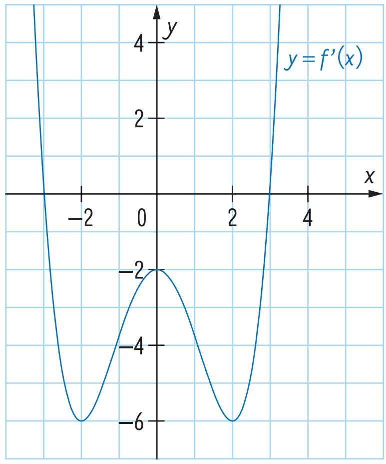
$x^3 - 12x^2 + 34x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 12x + 34) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ of $\quad x^2 - 12x + 34 = 0 \quad (D = 8)$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ of $\quad x = 6 + \sqrt{2} \quad$ of $\quad x = 6 - \sqrt{2}$

| x | | 0 | | $6 - \sqrt{2}$ | | $6 + \sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | –7 | ↗ | 75,314 | ↘ | 52,686 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

**Opdracht 3 bladzijde 69**




De hellinggrafiek van een veeltermfunctie $f$ is gegeven. Welke van de onderstaande uitspraken zijn waar voor de functie $f$?

**1** $f$ bereikt een relatief minimum voor $x = 2$.

niet juist want $f'(2) < 0$

**2** $f$ bereikt een relatief minimum voor $x = 3$.

juist want $f'(3) = 0$ en in 3 gaat $f'$ over van – naar +

**3** De grafiek van $f$ heeft een horizontale raaklijn voor $x = -3$.

juist want $f'(-3) = 0$

**4** De grafiek van $f$ is stijgend in $]-2, 0[$.

niet juist want $f'(x) < 0$ voor $x \in ]-2, 0[$

**5** De grafiek van $f$ is dalend in $]0, 3[$.

juist want $f'(x) < 0$ voor $x \in ]0, 3[$

**Opdracht 4 bladzijde 69**

De functie met voorschrift $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ bereikt voor $x = -1$ een extremum gelijk aan 3.

**1** Bepaal $a$ en $b$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f(-1) = 3 \iff -1 + a + b = 3 \iff a + b = 4 \qquad (1)$

$f'(1) = 0 \iff 3 - 2a = 0 \iff a = \frac{3}{2} \qquad (2)$

(2) invullen in (1) geeft: $b = 4 - a = \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

**2** Is dit extremum een minimum of een maximum?

$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$

$f'(x) = 3x^2 + 3x$

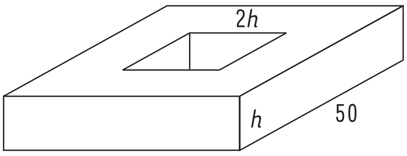
$3x^2 + 3x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | –1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 3<br>max. | ↘ | $\frac{5}{2}$<br>min. | ↗ |

Het extremum voor $x = -1$ is een maximum.

**Opdracht 5 bladzijde 71**

Een architect bouwt op een vierkant perceel van 50 m bij 50 m een gebouw.
Het zal bestaan uit appartementen rond een vierkante binnenplaats. De architect wil, omwille van de lichtinval, dat de zijde van de binnenplaats twee keer zo groot is als de hoogte.




**1** Druk het volume $V$ (in $m^3$) van het gebouw uit in functie van de hoogte $h$ (in m).

$V = 50^2h - (2h)^2h$

$= 2500h - 4h^3$

$= 4h(625 - h^2)$

**2** Voor welke waarden van $h$ is $V$ strikt positief?

| h | −25 | | 0 | | 25 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | | | 0 | + | 0 | − |

Beperken we ons tot de zinvolle waarden van h (h > 0), dan vinden we:

$V > 0$ als $h \in \,]0, 25[$.

**3** Voor welke waarde van $h$ is het volume $V$ van het gebouw maximaal?

$V'(h) = 2500 - 12h^2$

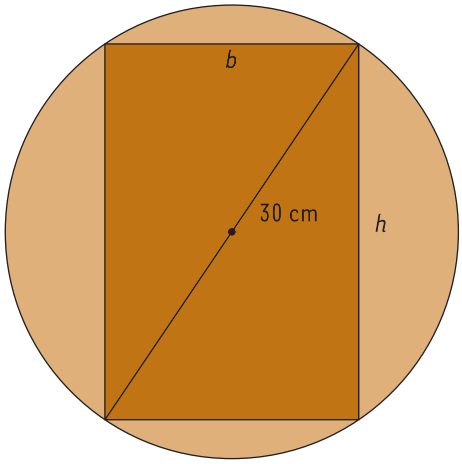
$V'(h) = 0 \iff h = -\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ of $h = \dfrac{25}{\sqrt{3}}$

| h | $-\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ | | 0 | | $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ | | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V'(h) | | | | + | 0 | − | |
| V(h) | | | | ↗ | max. | ↘ | |

Het volume van het gebouw is maximaal als $h = \dfrac{25}{\sqrt{3}}$ m ≈ 14,4 m.

**Opdracht 6 bladzijde 71**

Uit een cilindrische boomstam met diameter 30 cm moet een balk gezaagd worden met breedte *b* (in cm) en hoogte *h* (in cm). Het draagvermogen *D* van de balk is recht evenredig met de breedte en met het kwadraat van de hoogte.




Bepaal *b* en *h* zo dat de draagkracht maximaal wordt.

Er geldt $b^2 + h^2 = 900 \iff h^2 = 900 - b^2$.

$D = kbh^2$ (met k een positieve evenredigheidsconstante)

$D = kb(900 - b^2) = 900kb - kb^3$

$D' = 900k - 3kb^2$

$$D' = 0 \iff b^2 = \frac{900k}{3k} = 300 \iff b = \sqrt{300} \text{ of } b = -\sqrt{300}$$

$$\iff b = 10\sqrt{3} \text{ of } b = -10\sqrt{3}$$

| b | $-10\sqrt{3}$ | | 0 | | $10\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D′ | | | | + | 0 | − |
| D | | | | ↗ | max. | ↘ |

D is maximaal als $b = 10\sqrt{3}$ cm ≈ 17,3 cm.

De hoogte h is dan $h = \sqrt{900 - 300}$ cm $= 10\sqrt{6}$ cm ≈ 24,5 cm.

**Opdracht 7 bladzijde 72**

Hieronder vind je vier uitspraken en vier grafieken. Welke uitspraak hoort bij welke grafiek?

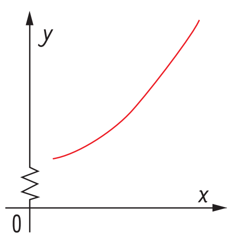
**1** In het afgelopen jaar is de economische groei in België afgenomen.

**2** In het eerste kwartaal van dit jaar was er een toenemende daling van het aantal werklozen.

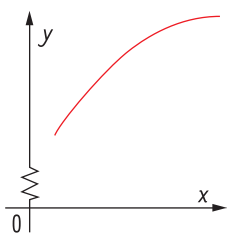
**3** Nadat die partij aan de macht kwam, was er een steeds toenemende escalatie van het geweld.

**4** Door het gewijzigd rookgedrag nam het aantal gevallen van longkanker steeds minder snel af.

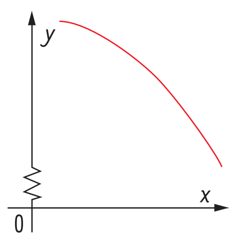
**a**



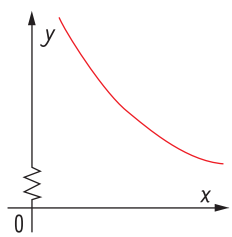

**b**




**c**




**d**

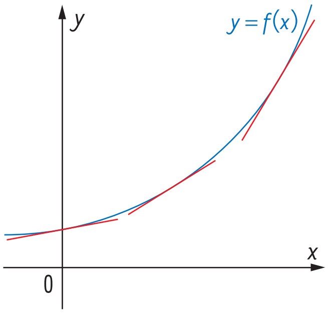



| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| b | c | a | d |

**Opdracht 8 bladzijde 72**

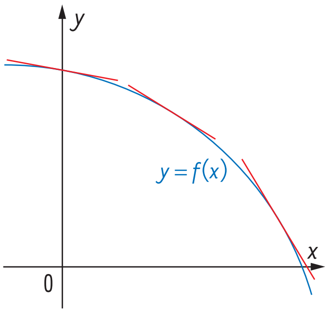
Kies bij elke grafiek van $f$ de omschrijving die ermee overeenstemt.

**1**



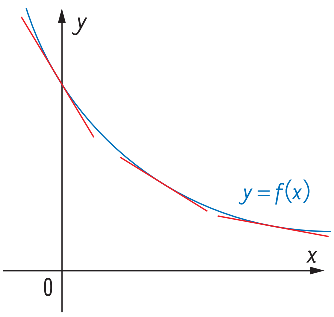

A $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
B $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
C $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
D $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**2**




A $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
B $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
C $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
D $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**3**




A $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
B $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
C $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
D $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

**Opdracht 9 bladzijde 76**

Geef in een schema een overzicht van het hol en bol verloop van de grafiek van $f$. Geef ook de coördinaten van de eventuele buigpunten.

**1** $f: x \longmapsto -x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = -3x^2 - 6x$

$f''(x) = -6x - 6$

$-6x - 6 = 0 \iff x = -1$

| x | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | – |
| $f(x)$ | $\cup$ | 0<br>bgpt. | $\cap$ |

buigpunt: $(-1, 0)$

**2** $f: x \mapsto x^4 - 18x^2 + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$12x^2 - 36 = 0 \iff x = -\sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = \sqrt{3}$

| x | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ∪ | –41<br>bgpt. | ∩ | –41<br>bgpt. | ∪ |

buigpunten: $(-\sqrt{3}, -41)$ en $(\sqrt{3}, -41)$

**Opdracht 10 bladzijde 76**

Voor welke waarde van $a$ heeft de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - ax^2$ een buigpunt voor $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 2ax$

$f''(x) = 6x - 2a$

$f''(2) = 0 \iff 12 - 2a = 0$

$\iff a = 6$

Aangezien f″ een eerstegraadsfunctie is, zal ze van teken veranderen bij x = 2, zodat er zeker sprake is van een buigpunt.

**Opdracht 11 bladzijde 76**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, extrema, hol en bol verloop, buigpunten).

**1** $f: x \mapsto 8x^3 - 3x^2 - 10$

$f'(x) = 24x^2 - 6x$

$24x^2 - 6x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{4}$

$f''(x) = 48x - 6$

$48x - 6 = 0 \iff x = \frac{1}{8}$

| x | | 0 | | $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
| f″(x) | – | – | – | 0 | + | + | + |
| f(x) | ↗ | –10<br>max. | ↘ | –10,031<br>bgpt. | ↘ | –10,063<br>min. | ↗ |

**2** $f\colon x \longmapsto -2x^3 + 6x$

$f'(x) = -6x^2 + 6$

$-6x^2 + 6 = 0 \iff x = -1 \quad \text{of} \quad x = 1$

$f''(x) = -12x$

$-12x = 0 \iff x = 0$

| x | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | |

**3** $f\colon x \longmapsto \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 0$

$\iff (x - 1)(2x^2 - 2x - 12) = 0$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x^2 - x - 6 = 0 \qquad (D = 25)$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x = 3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | $-4$ | $-10$ | 12 |
| 1 | | 2 | $-2$ | $-12$ |
| | 2 | $-2$ | $-12$ | 0 |

$f''(x) = 6x^2 - 8x - 10$

$6x^2 - 8x - 10 = 0 \iff 3x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad (D = 76)$

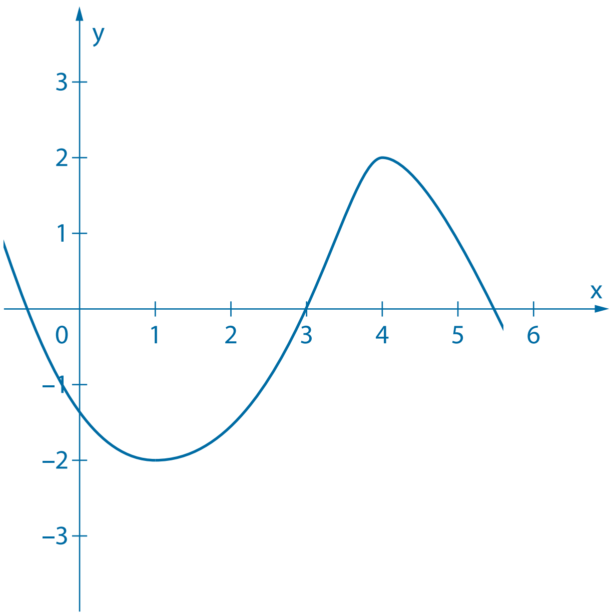
$\iff x = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{3} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{3}$

| x | | $-2$ | | $\frac{2-\sqrt{19}}{3}$ | | $1$ | | $\frac{2+\sqrt{19}}{3}$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-24{,}333$ | $\nearrow$ | $-10{,}688$ | $\nearrow$ | $7{,}167$ | $\searrow$ | $1{,}367$ | $\searrow$ | $-3{,}5$ | $\nearrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 12 bladzijde 76**

Gegeven is een deel van een samenvattende tabel van het verloop van een veeltermfunctie van de derde graad. Maak een schets van de grafiek van deze functie.

| $x$ | | 1 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $f''(x)$ | + | + | + | 0 | − | − | − |

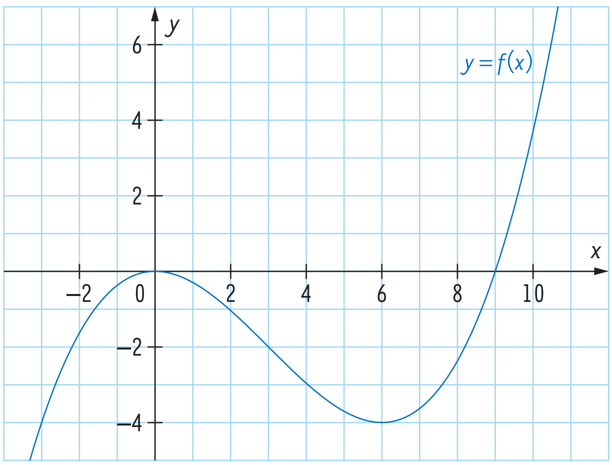



| x | | 1 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − |
| f(x) | | min. | | bgpt. | | max. | |

**Opdracht 13 bladzijde 82**

Gegeven is de grafiek van een veeltermfunctie.

Geef een samenvattende tabel die het verloop van deze functie beschrijft.




| x | | 0 | | 3 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | − | − | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | | 0<br>max. | | −2<br>bgpt. | | −4<br>min. | |

**Opdracht 14 bladzijde 82**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + mx^2$ varieert met de waarde van de parameter $m$.

**1** Bepaal $m$ zodat $f$ een relatief maximum heeft.
Bepaal ook de waarde van dit relatief maximum.

$f'(x) = 4x^3 + 2mx = 2x(2x^2 + m)$

- Als $m > 0$, dan heeft $2x^2 + m$ geen nulpunten. In 0 verandert $f'$ van negatief naar positief, zodat f een relatief minimum bereikt voor $x = 0$.
- Als $m = 0$ dan is $f'(x) = 4x^3$. Ook nu bereikt de functie een relatief minimum voor $x = 0$.
- Als $m < 0$ dan geldt $2x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{m}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\frac{m}{2}}$ of $x = +\sqrt{-\frac{m}{2}}$

| x | | $-\sqrt{-\frac{m}{2}}$ | | 0 | | $\sqrt{-\frac{m}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

Voor $m < 0$ bereikt de functie dus een relatief maximum. Het relatief maximum treedt op voor $x = 0$ en is gelijk aan 0.

**2** Voor welke waarden van $m$ heeft de grafiek van $f$ buigpunten?
Bepaal ook de coördinaten van deze buigpunten.

$f''(x) = 12x^2 + 2m$

- Als $m > 0$ heeft $f''$ geen nulpunten.
- Als $m = 0$ heeft $f''$ 0 als nulpunt, maar er is geen tekenwissel, dus geen buigpunt.
- Als $m < 0$ dan zijn de nulpunten $\sqrt{-\frac{m}{6}}$ en $-\sqrt{-\frac{m}{6}}$

| x | | $-\sqrt{-\frac{m}{6}}$ | | $\sqrt{-\frac{m}{6}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ∪ | bgpt. | ∩ | bgpt. | ∪ |

Voor $m < 0$ bereikt de functie 2 buigpunten. Deze buigpunten zijn

$P_1\left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}; -\frac{5m^2}{36}\right)$ en $P_2\left(\sqrt{-\frac{m}{6}}; -\frac{5m^2}{36}\right)$,

want $f\left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = f\left(\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = \frac{m^2}{36} + m\left(-\frac{m}{6}\right) = -\frac{5m^2}{36}$.

**3** Voor welke waarde van *m* is de afstand tussen de buigpunten gelijk aan 5?

$$d(P_1, P_2) \underset{\uparrow}{=} \sqrt{-\frac{m}{6}} - \left(-\sqrt{-\frac{m}{6}}\right) = 2\sqrt{-\frac{m}{6}}$$

gelijke y-waarde

$$2\sqrt{-\frac{m}{6}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{m}{6}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{m}{6} = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{75}{2} = -37{,}5$$

**Opdracht 15 bladzijde 85**

Stel voor de volgende functies een verloopschema op. Bepaal ook de extrema.

**1** $f\colon x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 - x$

$f'(x) = -x - 1$

$-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| x | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{2}$<br>max. | ↘ |

De functie bereikt een maximum $\frac{1}{2}$ voor $x = -1$.

**2** $f\colon x \longmapsto x^3 + 6x^2 - 15x - 1$

$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

$3x^2 + 12x - 15 = 0$ $(D = 324)$

$\Leftrightarrow x = -5$ of $x = 1$

| x | | $-5$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 99<br>max. | ↘ | $-9$<br>min. | ↗ |

De functie bereikt een relatief maximum 99 voor $x = -5$ en een relatief minimum $-9$ voor $x = 1$.

**3** $f: x \mapsto x^4 - 18x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$

$4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 3$ of $x = -3$

| x | | −3 | | 0 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | −81 | ↗ | 0 | ↘ | −81 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

De functie bereikt een relatief maximum 0 voor x = 0 en een minimum −81 voor x = 3 en voor x = −3.

**4** $f: x \mapsto (x+1)^3(x-1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^3(x-1) \\ &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x-1) \\ &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$

$4x^3 + 6x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 + 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $2x^2 + x - 1 = 0$ $\quad$ $(D = 9)$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $x = -1$ of $x = \frac{1}{2}$

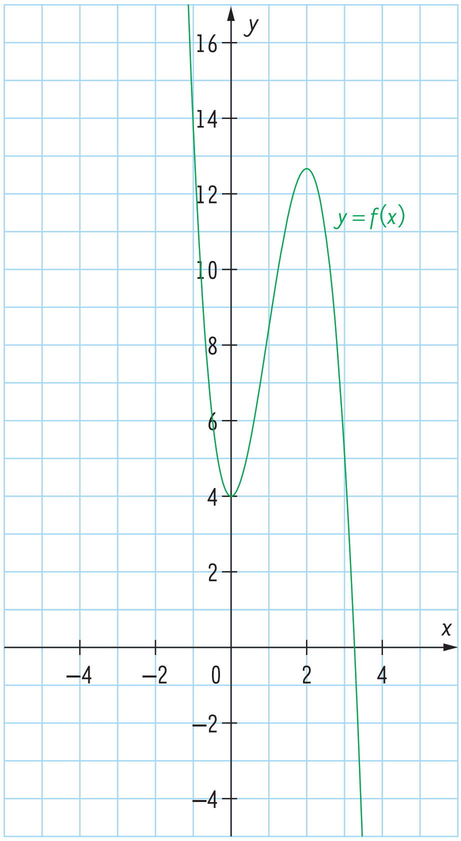
| | 4 | 6 | 0 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | | −4 | −2 | 2 |
| | 4 | 2 | −2 | 0 |

| x | | −1 | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↘ | −1,6875 | ↗ |
| | | | | min. | |

De functie bereikt een minimum $-\frac{27}{16} = -1{,}6875$ voor $x = \frac{1}{2}$.

**Opdracht 16 bladzijde 85**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 7x^2 + 4$ is getekend.




**1** Lees op de grafiek af voor welke waarden van $x$ de functie een extremum bereikt.

De functie bereikt een extremum voor x = 0 en voor x = 2.

**2** Bereken $f'(x)$ en ga na of $f$ nog extrema heeft die niet in beeld zijn.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 14x$

$\frac{1}{2}x^3 - 8x^2 + 14x = 0$

$\Leftrightarrow \; x = 0 \text{ of } \frac{1}{2}x^2 - 8x + 14 = 0 \quad (D = 36)$

$\Leftrightarrow \; x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } x = 14$

| x | | 0 | | 2 | | 14 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

De functie f bereikt ook nog een extremum voor x = 14.

**Opdracht 17 bladzijde 86**

Een school van 820 leerlingen werd getroffen door een griepgolf. Het aantal leerlingen $N$ dat aanwezig was $t$ schooldagen na het uitbreken van de epidemie kan beschreven worden met de formule $N(t) = -0{,}008t^4 + 0{,}38t^3 - 4{,}5t^2 + 798$.

Na 23 schooldagen was de griepgolf over, zodat deze formule geldt voor $0 \leqslant t \leqslant 23$.

**1** Bereken het tijdstip $t$ tussen 0 en 23 waarvoor $N'(t) = 0$.
Wat is de betekenis van dit tijdstip?

$N'(t) = -0{,}032t^3 + 1{,}14t^2 - 9t$

$-0{,}032t^3 + 1{,}14t^2 - 9t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \text{ of } -0{,}032t^2 + 1{,}14t - 9 = 0 \quad (D = 0{,}1476)$

$\Leftrightarrow\; t = 0 \text{ of } t = 23{,}815 \text{ of } t = 11{,}810$

| x | 0 | | 11,8 | | 23,8 |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | 0 | – | 0 | + | 0 |
| f(x) | | ↘ | min. | ↗ | |

Na 12 dagen is het aantal leerlingen dat aanwezig was, minimaal.

**2** Wat is het kleinste aantal leerlingen dat in deze periode aanwezig was?

Het kleinste aantal leerlingen is dan N(11, 8), ongeveer 641 leerlingen.

**3** Bereken $N'(10)$ en geef de betekenis van dit getal.

$N'(10) = -8$

10 dagen na het uitbreken van de griepgolf neemt het aantal aanwezigen af met 8 per dag.

**Opdracht 18 bladzijde 86**

De functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + 4x^2 + x - 7$ bereikt een extremum voor $x = 1$.

**1** Bepaal $a$.

$f'(x) = 3ax^2 + 8x + 1$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 8 + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

**2** Is dit extremum een maximum of een minimum?

$f'(x) = -9x^2 + 8x + 1$

$-9x^2 + 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{9}$

| x | | $-\frac{1}{9}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

Het extremum is een maximum.

**Opdracht 19 bladzijde 86**

De rechte met vergelijking $y = b$ heeft precies twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Bepaal $b$ exact. Geef alle mogelijkheden.

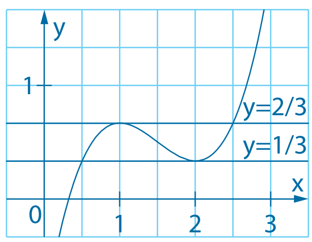
We bekijken het verloop van de functie f.

$f'(x) = 2x^2 - 6x + 4$

$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

| x | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{2}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Schets:




Voor $b = \frac{1}{3}$ en voor $b = \frac{2}{3}$ hebben beide krommen precies 2 punten gemeenschappelijk.

**Opdracht 20 bladzijde 86**

De afgeleide van de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx + c$ is $f'(x) = -3x^2 + 12$ en $f$ bereikt een maximum gelijk aan 3.

Bepaal $a$, $b$ en $c$.

Uit $f(x) = ax^3 + bx + c$ volgt dat $f'(x) = 3ax^2 + b$, dus geldt dat $3a = -3$ en $b = 12$, m.a.w. $a = -1$ en $b = 12$.

Er geldt ook dat f een maximum bereikt met waarde 3.

De nulpunten van f' zijn –2 en 2.

| x | | –2 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

Dus moet $f(2) = 3 \Leftrightarrow -8 + 24 + c = 3$

$\Leftrightarrow c = -13$

Besluit: $a = -1$, $b = 12$, $c = -13$.

**Opdracht 21 bladzijde 86**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + c$ bereikt links van de oorsprong een maximum dat op de $x$-as ligt.

Bepaal $c$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$

$3x^2 - 6x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{of} \quad x = 5$

| x | | –3 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

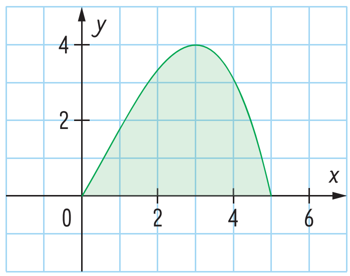
Het maximum ligt op de x-as, dus

$f(-3) = 0 \Leftrightarrow -27 - 27 + 135 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -81$

**Opdracht 22 bladzijde 86**

We willen een profiel dat de vorm heeft van de getekende kromme. De breedte is 5 cm en op een afstand van 3 cm van de linkerkant moet de hoogte 4 cm zijn. De kromme is geen parabool (niet symmetrisch), en kan dus niet door een kwadratische functie bepaald worden.




Is er een derdegraadsfunctie met nulpunten 0 en 5 die een maximum 4 bereikt voor $x = 3$?
Bepaal deze indien mogelijk.

De derdegraadsfunctie moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

$f(0) = 0$

$f(5) = 0$

$f(3) = 4$

$f'(3) = 0$

Uit de eerste twee voorwaarden volgt dat het voorschrift van f geschreven kan worden als:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-5)(ax+b) \\ &= (x^2-5x)(ax+b) \\ &= ax^3 + bx^2 - 5ax^2 - 5bx \\ &= ax^3 + (b-5a)x^2 - 5bx \end{aligned}$$

zodat $f(3) = 4 \Leftrightarrow 27a + (b-5a)9 - 15b = 4$

$\Leftrightarrow -9a - 3b = 2 \qquad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2(b-5a)x - 5b$

zodat $f'(3) = 0 \Leftrightarrow 3a9 + 2(b-5a)3 - 5b = 0$

$\Leftrightarrow -3a + b = 0$

$\Leftrightarrow b = 3a \qquad (2)$

Uit (1) en (2) volgt: $a = -\dfrac{1}{9}$

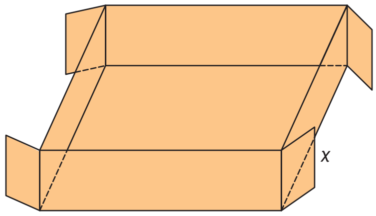
$b = -\dfrac{1}{3}$

Besluit: $f(x) = x(x-5)\left(-\dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{3}\right)$

**Opdracht 23 bladzijde 87**

In een kartonfabriek worden open dozen gemaakt uit vierkante stukken karton met een zijde van 40 cm. Aan de vier hoeken worden vierkantjes ingeknipt en gevouwen. Daarna wordt het geheel tot een doos geplakt.

Bij welke zijde *x* van de kleine vierkantjes is de inhoud maximaal?




Noemen we I de inhoud, dan geldt:

$I(x) = (40 - 2x)^2x = (1600 - 160x + 4x^2)x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

$I'(x) = 12x^2 - 320x + 1600$

$I'(x) = 0 \iff 3x^2 - 80x + 400 = 0 \qquad (D = 1600)$

$\iff x = 20 \quad \text{of} \quad x = \frac{20}{3}$

| x | | $\frac{20}{3}$ | | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 4740,7 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Als de zijde van de vierkantjes $\frac{20}{3}$ cm is, is de inhoud maximaal.

**Opdracht 24 bladzijde 87**

De eigenaar van een appartementencomplex van 100 appartementen weet dat hij al zijn appartementen kan verhuren als hij een maandelijkse huur van € 600 vraagt. Uit een enquête gehouden onder zijn huurders verwacht hij dat elke verhoging van de huurprijs met € 10 tot gevolg heeft dat er één appartement meer leegstaat.

Welke huurprijs zal de eigenaar vragen als hij zijn inkomsten wil maximaliseren? Hoe groot zijn dan de inkomsten?

x = aantal leegstaande appartementen

inkomsten: $f(x) = (100 - x)(600 + 10x)$

$= 60\,000 + 1000x - 600x - 10x^2$

$= -10x^2 + 400x + 60\,000$

$f'(x) = -20x + 400$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{400}{20} = 20$

| x | | 20 | |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | 64 000 | ↘ |
| | | max. | |

Als de eigenaar € 800 per appartement vraagt, zijn de inkomsten maximaal, nl. € 64 000.
Er staan dan 20 appartementen leeg.

**Opdracht 25 bladzijde 87**

Een firma produceert potloden. De totale kosten (in €) om $x$ keer 1000 potloden te produceren, zijn gelijk aan $K(x) = 5x^3 - 45x^2 + 150x + 80$.
De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks.

**1** Voor welk aantal verkochte potloden is de winst maximaal? Hoeveel is die maximale winst?

omzet: $O(x) = 125x$

winst: $W(x) = O(x) - K(x)$

$= 125x - (5x^3 - 45x^2 + 150x + 80)$

$= -5x^3 + 45x^2 - 25x - 80$

$W'(x) = -15x^2 + 90x - 25$

$-15x^2 + 90x - 25 = 0$ $\quad (D = 6600)$

$\iff x = 5{,}708 \quad \text{of} \quad x = 0{,}292$

| x | | 0,292 | | 5,708 | |
|---|---|---|---|---|---|
| W'(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| W(x) | ↘ | –83,59 | ↗ | 313,59 | ↘ |
| | | min. | | max. | |

De winst is maximaal (€ 313,6) als x = 5,708, dus als er 5708 potloden verkocht worden.

**2** Hoeveel is de marginale winst als de winst maximaal is?
(marginale winst: zie hoofdstuk 6, opdracht 75)

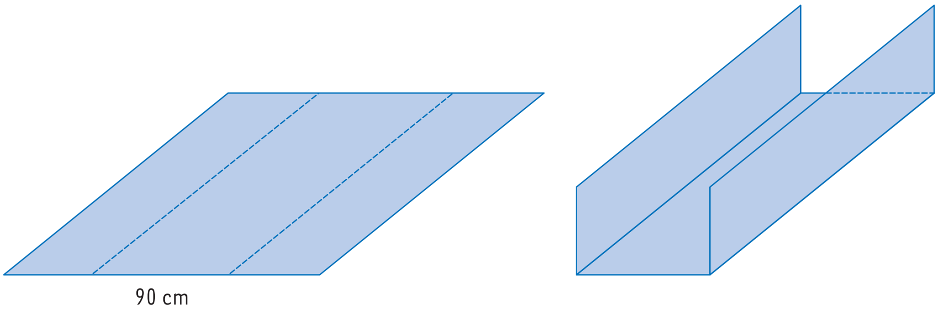
$W'(5{,}708) = 0$

De marginale winst is € 0.

**Opdracht 26 bladzijde 87**

Uit een aluminium plaat van 90 cm breed wil men goten maken voor een bevloeiingssysteem. Hiertoe worden de kanten 90° omgebogen.

Welke afmetingen moet de goot hebben zo dat de doorsnede maximaal is en er dus het meeste water kan doorstromen?




x = hoogte van de goot

opp. doorsnede: $f(x) = x(90 - 2x)$ (opp. doorsnede maximaal $\rightarrow$ meeste water)

$= 90x - 2x^2$

$f'(x) = 90 - 4x$

$90 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 22{,}5$

| x | | 22,5 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − |
| f(x) | ↗ | 1012,5<br>max. | ↘ |

De inhoud is maximaal als x = 22,5 cm.

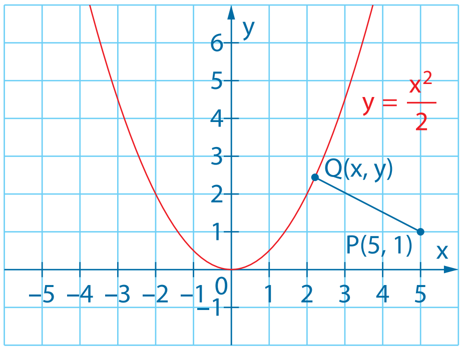
De afmetingen zijn dan: breedte 45 cm,

hoogte 22,5 cm.

**Opdracht 27 bladzijde 88**

Bepaal in een orthonormaal assenstelsel het punt $Q(x, y)$ op de parabool met vergelijking $y = \frac{x^2}{2}$ dat het dichtst bij $P(5, 1)$ ligt.

$Q(x, y)$ met $y = \frac{x^2}{2}$ en $P(5, 1)$




$$|PQ| = \sqrt{(x-5)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2}$$

Als $|PQ|$ minimaal is, is ook $|PQ|^2$ minimaal en omgekeerd.

$$|PQ|^2 = f(x) = (x-5)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2$$

$$= x^2 - 10x + 25 + \frac{x^4}{4} - x^2 + 1$$

$$= \frac{x^4}{4} - 10x + 26$$

$f'(x) = x^3 - 10$

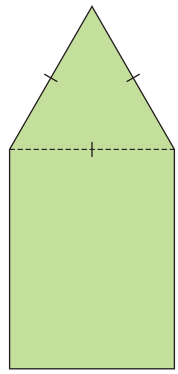
$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{10}$

| x | | $\sqrt[3]{10}$ | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 9,84 | ↗ |
| | | min. | |

$|PQ|^2$ heeft als minimale waarde ongeveer 9,84, dus $|PQ| = \sqrt{9{,}84} \approx 3{,}14$. Het punt Q heeft als x-coördinaat $\sqrt[3]{10}$ en als y-coördinaat $\frac{\sqrt[3]{100}}{2}$.

**Opdracht 28 bladzijde 88**

Een venster heeft de vorm van een rechthoek met daarboven een gelijkzijdige driehoek.
We zoeken de afmetingen van het venster met een omtrek van 5 meter waarbij er zoveel mogelijk licht doorgelaten wordt.



**1** Kies een veranderlijke *x*.

x = zijde gelijkzijdige driehoek = breedte rechthoek

**2** Bepaal een formule voor de oppervlakte *A* (in $m^2$) van het venster en druk deze uit in functie van *x*.
Hou hierbij rekening met de omtrek van 5 meter.

$$A(x) = x \cdot h + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}$$

$$3x + 2h = 5 \Leftrightarrow h = \frac{5-3x}{2}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{5-3x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ &= \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \\ &= \frac{5}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 \end{aligned}$$

**3** Voor welke waarde van *x* is de oppervlakte *A* maximaal?
Wat zijn dan de afmetingen van het venster op 1 cm nauwkeurig?

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{5}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x \\ &= \frac{5}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)x \end{aligned}$$

$$\text{nulpunt } A'\text{: } x = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} = 1{,}1715$$

| x | | 1,1715 | |
|---|---|---|---|
| A′(x) | + | 0 | − |
| A(x) | ↗ | max. | ↘ |

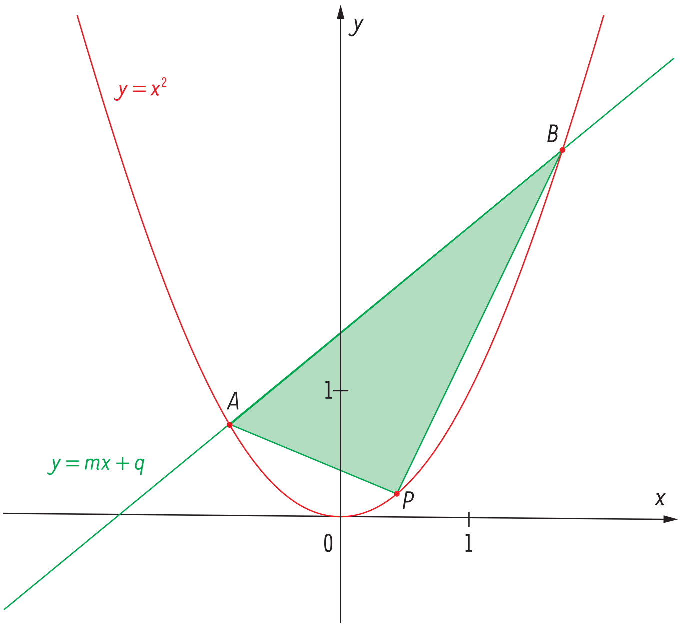
De oppervlakte is maximaal als x = 1,17 m.

De hoogte is dan $\frac{5 - 3 \cdot 1{,}1715}{2}$ m, dus ongeveer 0,74 m.

**Opdracht 29 bladzijde 88**

De rechte met vergelijking $y = mx + q$ snijdt de parabool met vergelijking $y = x^2$ in de punten $A$ en $B$.

Bepaal het punt $P$ op de parabool dat tussen $A$ en $B$ ligt waarvoor de oppervlakte van de driehoek $PAB$ maximaal is.




We bepalen de snijpunten van $y = mx + q$ en $y = x^2$.

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = mx + q \Leftrightarrow x^2 - mx - q = 0 \qquad (D = m^2 + 4q)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4q}}{2}$$

Aangezien $|AB|$ in $\Delta PAB$ constant is, maximaliseren we de hoogte $d(P, AB)$.

Normaalvergelijking van de rechte AB:

$$AB \leftrightarrow \frac{mx - y + q}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0$$

Stel $P(x, x^2)$, dan is $d(P, AB) = \dfrac{|mx - x^2 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Nu is $mx + q > x^2$ (want P ligt tussen A en B),

zodat $d(P, AB) = \dfrac{mx + q - x^2}{\sqrt{m^2 + 1}}$ (= functie van de tweede graad).

Deze functie heeft een maximum voor $x = \dfrac{-m}{-2} = \dfrac{m}{2}$ (x-coördinaat van de top van de parabool).

$$\Rightarrow P\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4}\right)$$

**Opdracht 30 bladzijde 89**

Geef in een schema een overzicht van het hol en bol verloop en de buigpunten van de grafiek van $f$.

**1** $f: x \longmapsto x^3 - 12x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \iff 6x = 0 \iff x = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ∩ | 4 | ∪ |
| | | bgpt. | |

**2** $f: x \longmapsto 6x^4 - 8x^3 + 1$

$f'(x) = 24x^3 - 24x^2$

$f''(x) = 72x^2 - 48x$

$f''(x) = 0 \iff 72x^2 - 48x = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{2}{3}$

| x | | 0 | | $\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ∪ | 1 | ∩ | −0,1852 | ∪ |
| | | bgpt. | | bgpt. | |

**3** $f: x \longmapsto 5x - x^5$

$f'(x) = 5 - 5x^4$

$f''(x) = -20x^3$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − |
| f(x) | ∪ | 0 | ∩ |
| | | bgpt. | |

**4** $f\colon x \longmapsto 6x^4 - 6x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 24x^3 - 18x^2 + 4x$

$f''(x) = 72x^2 - 36x + 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 36x + 4 = 0 \overset{D = 144}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{6}$

| $x$ | | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\cup$ | 0,0324<br>bgpt. | $\cap$ | 0,0741<br>bgpt. | $\cup$ |

**Opdracht 31 bladzijde 89**

Zoek de eventuele buigpunten en vergelijkingen van de bijbehorende buigraaklijnen van de grafiek van de gegeven functies.

**1** $f\colon x \longmapsto -x^3 + 6x^2 + 5$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$

$f''(x) = -6x + 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (buigpunt, want tekenwissel aangezien f" een eerstegraadsfunctie is)

$f(2) = 21 \longrightarrow$ buigpunt: (2, 21)

$f'(2) = 12$

$t \leftrightarrow y - 21 = 12(x - 2)$

$t \leftrightarrow y = 12x - 3$

**2** $f\colon x \longmapsto x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 12$

$f''(x) = 12x^2 - 24x - 36$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \overset{D = 16}{\Leftrightarrow} x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$ (beide buigpunten, want enkelvoudige nulpunten, dus tekenwissel)

$f(3) = -152 \longrightarrow$ buigpunt: (3, –152)

$f'(3) = -96$

$t_1 \leftrightarrow y + 152 = -96(x - 3)$

$t_1 \leftrightarrow y = -96x + 288 - 152$

$t_1 \leftrightarrow y = -96x + 136$

$f(-1) = = -24 \longrightarrow$ buigpunt: (–1, –24)

$f'(-1) = 32$

$t_2 \leftrightarrow y + 24 = 32(x + 1)$

$t_2 \leftrightarrow y = 32x + 32 - 24$

$t_2 \leftrightarrow y = 32x + 8$

**3** $f: x \mapsto x^6 + x^4$

$f'(x) = 6x^5 + 4x^3$

$f''(x) = 30x^4 + 12x^2$

$f''(x) = 0 \iff x^2(30x^2 + 12) = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 = -\frac{12}{30}$

→ geen oplossingen

→ geen buigpunt, want dubbel nulpunt, dus geen tekenwissel

**4** $f: x \mapsto -4x^4 + 7x^2 - 4x - 6$

$f'(x) = -16x^3 + 14x - 4$

$f''(x) = -48x^2 + 14$

$f''(x) = 0 \iff x^2 = \frac{14}{48} = \frac{7}{24} \iff x = -\sqrt{\frac{7}{24}} \approx -0{,}54 \quad \text{of} \quad x = \sqrt{\frac{7}{24}} \approx 0{,}54$ (beide buigpunten, want enkelvoudige nulpunten, dus tekenwissel)

$f\left(\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -6{,}46$

$f'\left(\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = 1{,}04$

buigpunt: (0,54; –6,46)

$t_1 \leftrightarrow y + 6{,}46 = 1{,}04\,(x - 0{,}54)$

$t_1 \leftrightarrow y = 1{,}04x - 7{,}02$

$f\left(-\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -2{,}14$

$f'\left(-\sqrt{\frac{7}{24}}\right) = -9{,}04$

buigpunt: (–0,54; –2,14)

$t_2 \leftrightarrow y + 2{,}14 = -9{,}04\,(x + 0{,}54)$

$t_2 \leftrightarrow y = -9{,}04x - 7{,}02$

**Opdracht 32 bladzijde 89**

Welke uitspraken zijn juist?

De functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{3}$

**A** heeft $P(2, 1)$ als buigpunt

**B** heeft een horizontale raaklijn in $P(2, 1)$

**C** bereikt een maximum voor $x = 1$

**D** bereikt een minimum voor $x = 3$

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 3$

| x | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{5}{3}$ | ↘ | $\frac{1}{3}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

Uitspraken C en D zijn juist.

$f''(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

| x | | 2 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | – | 0 | + |
| f(x) | ∩ | 1 | ∪ |
| | | bgpt. | |

Uitspraak A is juist.

B is niet juist want dan zou 2 een nulpunt van de eerste afgeleide moeten zijn.

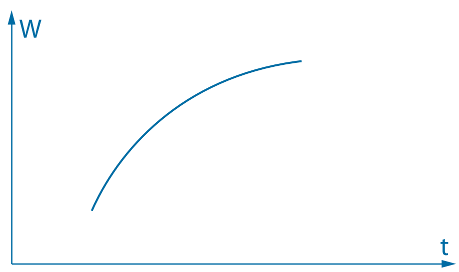
**Opdracht 33 bladzijde 89**

In de krant stond te lezen: ‘De werkloosheidsstijging neemt af’.

**1** Betekent dit dat het aantal werklozen vermindert?

Neen, het aantal werlozen stijgt nog, maar minder snel.

**2** Geef met een geschetste grafiek aan wat de journalist bedoelt.



**3** Veronderstel dat het aantal werklozen $W$ een functie van de tijd $t$ is waarvan de eerste en tweede afgeleide respectievelijk $W'$ en $W''$ zijn.
Wat weet je over $W'$ (positief, nul of negatief) op het tijdstip waarover de krant schrijft?

$W' > 0$ want W stijgt.

**4** Wat weet je over $W''$ op dat tijdstip?

$W'' < 0$ want de grafiek is bol (de toename neemt af).

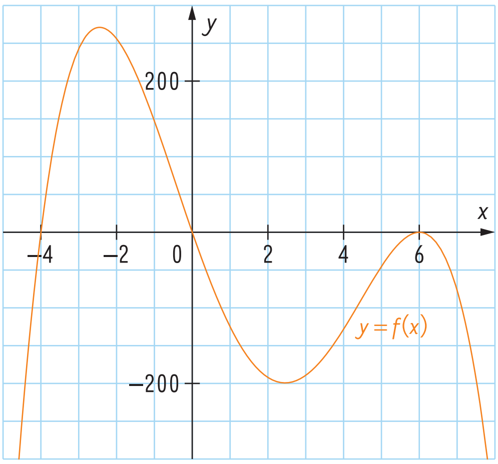
**5** Wat is de betekenis van een buigpunt van de grafiek van $W$?

Een buigpunt van de grafiek van W betekent de overgang tussen een afnemende stijging (daling) en een toenemende stijging (daling); of de overgang tussen een toenemende stijging (daling) en een afnemende stijging (daling). Het is een trendbreuk in de evolutie van de werkloosheid.

**Opdracht 34 bladzijde 90**

Gegeven de grafiek van de veeltermfunctie $f\colon x \longmapsto -x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 144x$.

Is $O(0, 0)$ een buigpunt van de grafiek van $f$?




$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 24x - 144$

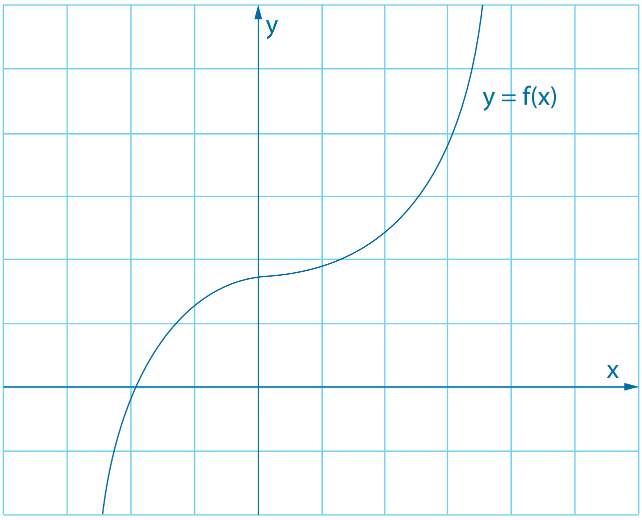
$f''(x) = -12x^2 + 48x + 24$

$f''(0) = 24 \neq 0$ dus $O(0, 0)$ is geen buigpunt.

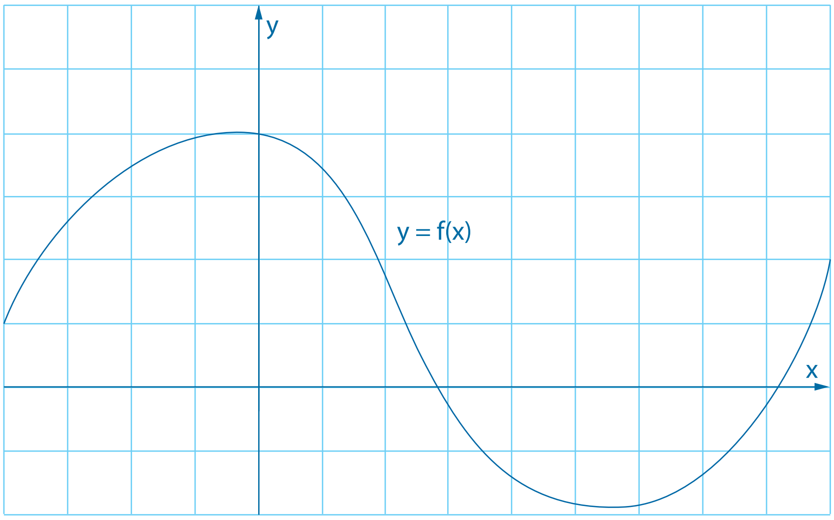
**Opdracht 35 bladzijde 90**

Schets een mogelijke grafiek van een functie met

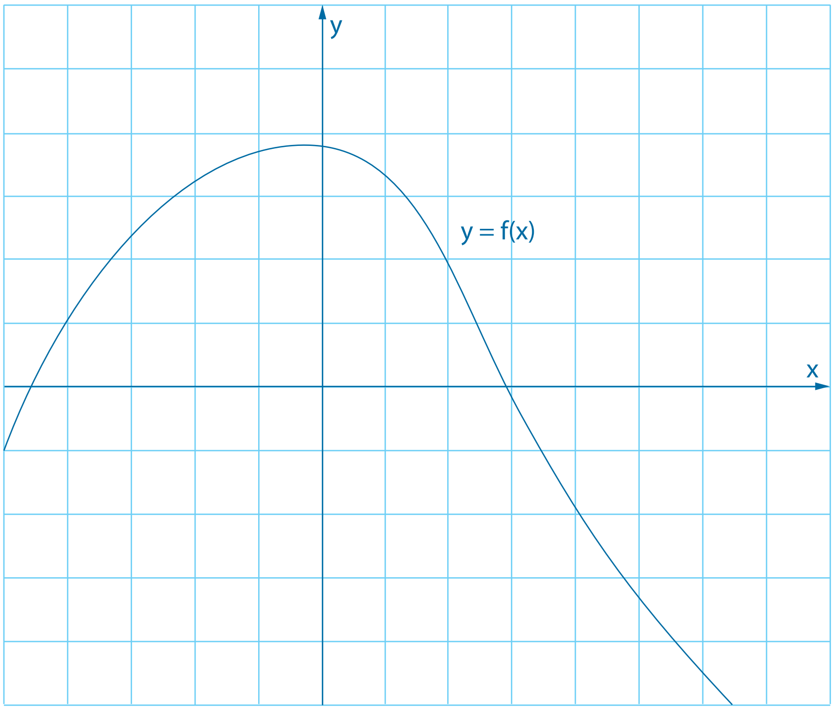
**1** juist één buigpunt en geen extrema



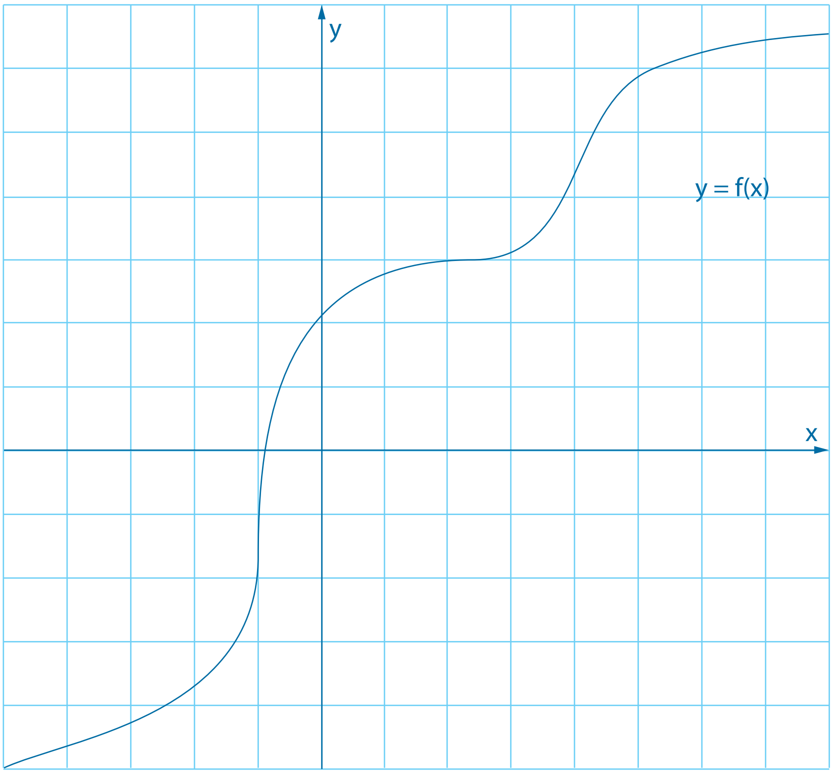

**2** juist één buigpunt, één maximum en één minimum



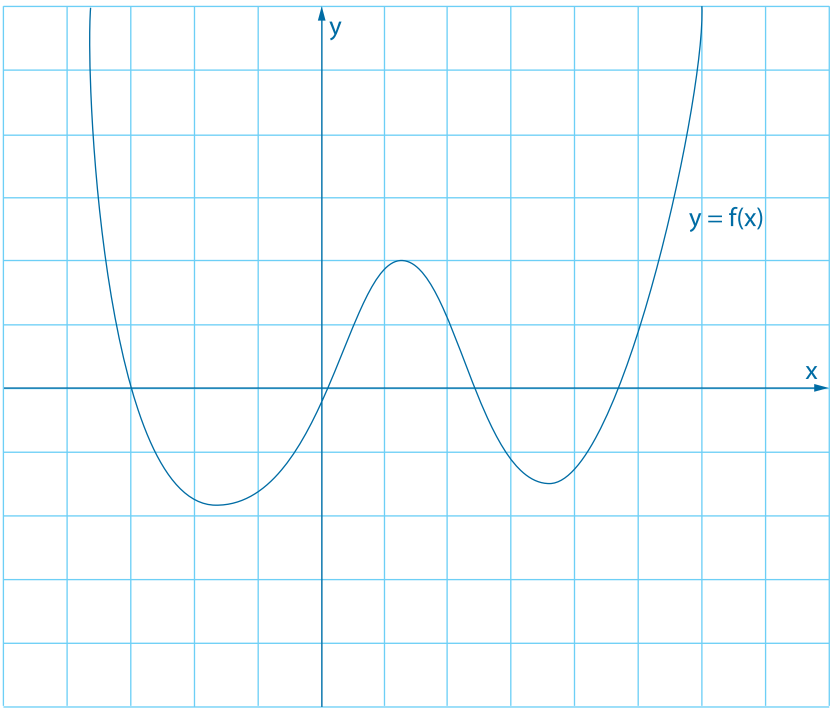

**3** juist één buigpunt, één maximum en geen minimum



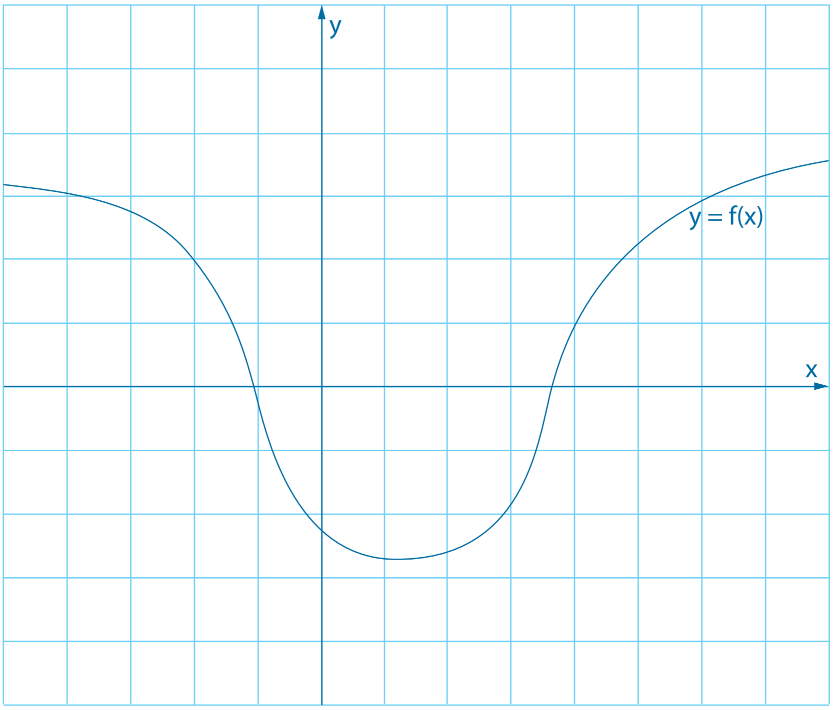
**4** drie buigpunten en geen extrema




**5** twee minima, één maximum en twee buigpunten



**6** twee buigpunten, één minimum en geen maxima




**Opdracht 36 bladzijde 90**

**1** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van een tweedegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ nooit buigpunten heeft.

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

f″ heeft geen tekenwissels, dus kan de grafiek van f geen buigpunten hebben.

**2** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van een derdegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ altijd juist één buigpunt heeft.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \iff x = -\dfrac{b}{3a}$ enkelvoudig nulpunt, dus tekenwissel, dus buigpunt

**3** Hoeveel buigpunten kan de grafiek van een vierdegraadsfunctie $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ hebben? Verklaar algebraïsch.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$D = 36b^2 - 4 \cdot 12a \cdot 2c = 36b^2 - 96ac$

- Als $D > 0$ dan heeft f″ twee enkelvoudige nulpunten, dus de grafiek van f heeft twee buigpunten (want tekenwissel).
- Als $D = 0$ dan heeft f″ een dubbel nulpunt, dus is er geen tekenwissel. De grafiek van f heeft geen buigpunt.
- Als $D < 0$ dan heeft f″ geen nulpunten, geen tekenwissels en dus heeft de grafiek van f geen buigpunten.

**Opdracht 37 bladzijde 90**

De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ heeft een punt $P(a, f(a))$ waarbij $f'(a) = f''(a) = 0$.

**1** Bepaal de coördinaat van dit punt $P$.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \iff 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff x = 0 \quad \text{of} \quad \boxed{x = 1}$

$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$

$f''(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0 \overset{D=4}{\iff} \boxed{x = 1} \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{3}$

$f(1) = 1$

Het gevraagde punt is P(1,1).

**2** Welke van de volgende uitspraken zijn waar? Verklaar.

**a** In $P$ bereikt $f$ een maximum.

Dit is fout want 1 is een dubbel nulpunt van f', dus is er geen tekenwissel en dus ook geen extremum.

**b** $P$ is een buigpunt van de grafiek van $f$.

Dit is juist want 1 is een enkelvoudig nulpunt van f'', dus is er een tekenwissel.
P is bijgevolg een buigpunt van de grafiek van f.

**c** De raaklijn aan de grafiek van $f$ in $P$ is horizontaal.

Dit is juist want $f'(1) = 0$.

**Opdracht 38 bladzijde 91**

**1** In welk punt van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 10$ is de helling maximaal?

De helling is maximaal als $f''(x) = 0$ en als f'' overgaat van + naar –.

$f'(x) = -3x^2 + 24x$

$f''(x) = -6x + 24$

$f''(x) = 0 \iff -6x = -24 \iff x = 4$

| x | | 4 | |
|---|---|---|---|
| f''(x) | + | 0 | – |
| f'(x) | ↗ | 48<br>max. | ↘ |

De helling is maximaal in P(4, 118).

**2** In welk punt van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^5 + 10x^2$ is de helling minimaal?

De helling is minimaal als f″(x) = 0 en als f″ overgaat van – naar +.

$f'(x) = 5x^4 + 20x$

$f''(x) = 20x^3 + 20$

$f''(x) = 0 \iff x = -1$

| x | | –1 | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | – | 0 | + |
| f′(x) | ↘ | –15<br>min. | ↗ |

De helling is minimaal in P(–1, 9).

**Opdracht 39 bladzijde 91**

De grafiek van $f$: $x \longmapsto ax^4 - 3x^3 - 12x^2 + 4x - 1$ heeft een buigpunt voor $x = 1$.

**1** Bepaal $a$.

$f'(x) = 4ax^3 - 9x^2 - 24x + 4$

$f''(x) = 12ax^2 - 18x - 24$

$f''(1) = 0 \iff 12a - 18 - 24 = 0$

$\iff 12a = 42$

$\iff a = \dfrac{7}{2}$

**2** Bereken de $x$-coördinaat van het tweede buigpunt van de grafiek van $f$.

$f''(x) = 42x^2 - 18x - 24$

$f''(x) = 0 \iff 42x^2 - 18x - 24 = 0$

$\iff 7x^2 - 3x - 4 = 0$ $\qquad D = 121$

$\iff x = 1$ of $x = -\dfrac{4}{7}$

→ x-coördinaat van het tweede buigpunt van de grafiek van f

**Opdracht 40 bladzijde 91**

Bepaal *a* en *b* zodanig dat $P(2, 0)$ een buigpunt is van de grafiek van $f: x \longmapsto x^3 + ax^2 + bx$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a \;\rightarrow\;$ 1 nulpunt met tekenwissel

P(2, 0) is buigpunt

$f''(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12 + 2a = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{a = -6}$

$f(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 8 + 4a + 2b = 0 \;\Leftrightarrow\; 2b = -4a - 8$

$\Leftrightarrow\; b = -2a - 4$

$\Leftrightarrow\; \boxed{b = 8}$

**Opdracht 41 bladzijde 91**

Aan welke voorwaarden moeten de parameters *p* en *q* voldoen opdat de grafiek van $f: x \longmapsto x^4 + px^3 + qx^2$ juist twee, juist één of geen buigpunt(en) zou hebben?

$f'(x) = 4x^3 + 3px^2 + 2qx$

$f''(x) = 12x^2 + 6px + 2q$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 + 6px + 2q = 0$

$\Leftrightarrow\; 6x^2 + 3px + q = 0$

$D = 9p^2 - 24q$

$= 3(3p^2 - 8q)$

De functie bereikt twee buigpunten als $3p^2 - 8q > 0$ en geen buigpunten als $3p^2 - 8q \leqslant 0$.

**Opdracht 42 bladzijde 91**

Bewijs dat het buigpunt van de veeltermfunctie van de derde graad $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ steeds een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van *f*.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

buigpunt: $\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d\right)$

We verschuiven de grafiek over $\vec{v}\left(\dfrac{b}{3a}, \dfrac{-2b^3}{27a^2} + \dfrac{bc}{3a} - d\right)$ en verkrijgen de functie g met

$$g(x) = a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d$$

$$= a\left(x^3 - \frac{3b}{3a}x^2 + \frac{3b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(x^2 - \frac{2b}{3a}x + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cx - \cancel{\frac{bc}{3a}} + \cancel{d} - \frac{2b^3}{27a^2} + \cancel{\frac{bc}{3a}} \cancel{-d}$$

$$= ax^3 \cancel{-bx^2} + \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + \cancel{bx^2} - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{2b^3}{27a^2}$$

$$= ax^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)x \underbrace{- \frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{2b^3}{27a^2}}_{=0}$$

$$= ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x$$ $\rightarrow$ g is een oneven functie $\Rightarrow$ de grafiek van g heeft de oorsprong als symmetriemiddelpunt

$\Rightarrow$ de grafiek van f heeft het buigpunt als symmetriemiddelpunt

**Opdracht 43 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema en buigpunten).

**1** $f\colon x \longmapsto -x^3 + 9x$

$f'(x) = -3x^2 + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{3}$

$f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| x | | $-\sqrt{3}$ | | 0 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − |
| f(x) | $\searrow$ | −10,392 | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 10,392 | $\searrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | |

**2** $f\colon x \longmapsto 32x - x^4$

$f'(x) = 32 - 4x^3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) = -12x^2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (dubbel)

| x | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | + | + | 0 | − |
| f″(x) | − | 0 | − | − | − |
| f(x) | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 48 | $\searrow$ |
| | | | | max. | |

**3** $f\colon x \longmapsto (x^2 - 4)^2$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

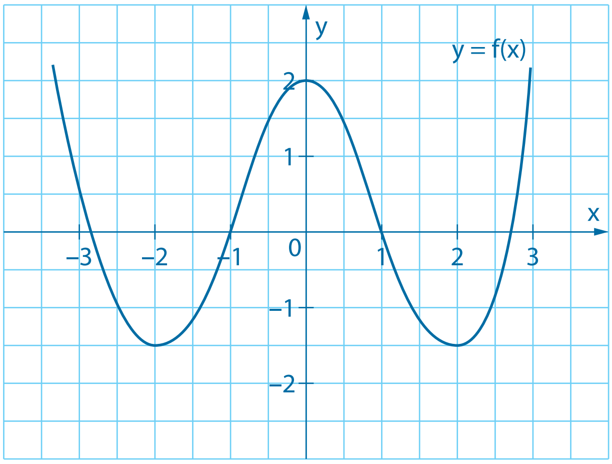
| x | | −2 | | $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ | | 0 | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 7,111 | $\nearrow$ | 16 | $\searrow$ | 7,111 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 44 bladzijde 92**

Maak telkens een schets van een mogelijke grafiek van een functie $f$ waarvan het tekenverloop van de eerste en de tweede afgeleide gegeven is.

**1**

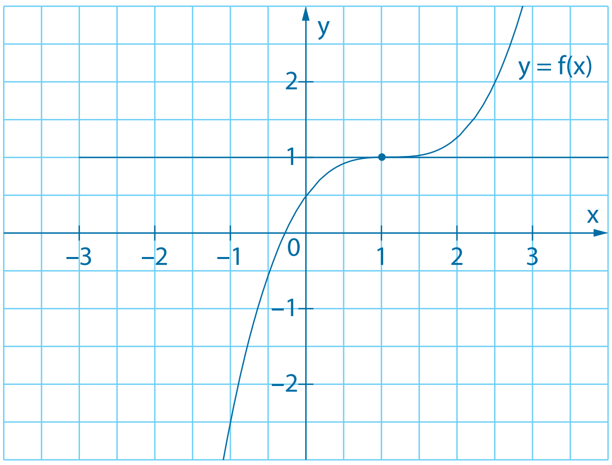
| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | + | + | + | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | + |
| $f''(x)$ | + | + | + | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | + | + | + |
| | | min. | | bgpt. | | max. | | bgpt. | | min. | |




**2**

| $x$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | + |
| | | bgpt. | |

horizontale buigraaklijn, want f′(x) = 0



**Opdracht 45 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de volgende veeltermfuncties (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema en buigpunten).

**1** $f: x \mapsto -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(-4x^2 - 2x + 2) = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-4$ | $-6$ | $0$ | $2$ |
| $-1$ | | $4$ | $2$ | $-2$ |
| | $-4$ | $-2$ | $2$ | $0$ |

$\overset{D = 36}{\Leftrightarrow} x = -1 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -12x^2 - 12x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad -x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1$

| x | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + | + | + | 0 | – |
| f″(x) | – | 0 | + | 0 | – | – | – |
| f(x) | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | 1,6875 | ↘ |
| | | bgpt. | | bgpt. | | max. | |

**2** $f: x \mapsto x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 80x - 80$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(5x^2 - 20x + 20) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{(dubbel)}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $5$ | $-20$ | $0$ | $80$ | $-80$ |
| $-2$ | | $-10$ | $60$ | $-120$ | $80$ |
| | $5$ | $-30$ | $60$ | $-40$ | $0$ |
| $2$ | | $10$ | $-40$ | $40$ | |
| | $5$ | $-20$ | $20$ | $0$ | |

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 80$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{(dubbel)}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-3$ | $0$ | $4$ |
| $-1$ | | $-1$ | $4$ | $-4$ |
| | $1$ | $-4$ | $4$ | $0$ |
| $2$ | | $2$ | $-4$ | |
| | $1$ | $-2$ | $0$ | |

| x | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | – | – | 0 | + |
| f″(x) | – | – | – | 0 | + | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 256 | ↘ | 162 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 46 bladzijde 92**

Bespreek het verloop van de veeltermfuncties in functie van de reële parameter *m*.

**1** $f: x \longmapsto -x^2 + mx - 8$

$f'(x) = -2x + m$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{2}$

$$f\left(\frac{m}{2}\right) = -\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} - 8 = \frac{m^2}{4} - 8$$

| x | | $\frac{m}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − |
| f(x) | ↗ | $\frac{m^2}{4} - 8$<br>max. | ↘ |

$f''(x) = -2$ geen nulpunten, de grafiek is altijd bol

| x | |
|---|---|
| f″(x) | − |
| f(x) | ∩ |

Samenvattende tabel

| x | | $\frac{m}{2}$ | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − |
| f″(x) | − | − | − |
| f(x) | ↗ | $\frac{m^2}{4} - 8$<br>max. | ↘ |

**2** $f\colon x \longmapsto x^3 + mx^2$

$f'(x) = 3x^2 + 2mx$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -\dfrac{2m}{3}$

- $m > 0$

| x | | $-\frac{2m}{3}$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{4m^3}{27}$ | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max. | | min. | |

$$f\left(-\frac{2m}{3}\right) = \left(-\frac{2m}{3}\right)^3 + m\left(-\frac{2m}{3}\right)^2$$
$$= -\frac{8m^3}{27} + \frac{4m^3}{9} = \frac{4m^3}{27}$$

$f(0) = 0$

- $m = 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 0 | ↗ |

- $m < 0$

| x | | 0 | | $-\frac{2m}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 0 | ↘ | $\frac{4m^3}{27}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

$f''(x) = 6x + 2m$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{m}{3}$

| x | | $-\frac{m}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| f″(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ∩ | $\frac{2m^3}{27}$ | ∪ |
| | | bgpt. | |

$$f\left(-\frac{m}{3}\right) = \left(-\frac{m}{3}\right)^3 + m\left(-\frac{m}{3}\right)^2$$
$$= -\frac{m^3}{27} + \frac{m^3}{9} = \frac{2m^3}{27}$$

## Samenvattende tabellen

- $m > 0$

| $x$ | | $-\frac{2m}{3}$ | | $-\frac{m}{3}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{4m^3}{27}$ | ↘ | $\frac{2m^3}{27}$ | ↘ | $0$ | ↗ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

- $m = 0$

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |
| | | bgpt. | |

- $m < 0$

| $x$ | | $0$ | | $-\frac{m}{3}$ | | $-\frac{2m}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↘ | $\frac{2m^3}{27}$ | ↘ | $\frac{4m^3}{27}$ | ↗ |
| | | max. | | bgpt. | | min. | |

**3** $f: x \mapsto x^3 - 4x^2 + mx - 4$

- $f'(x) = 3x^2 - 8x + m$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + m = 0 \qquad D = 64 - 12m$

  * $D > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{16}{3}$

  $$x = \frac{8 + \sqrt{64 - 12m}}{6} \quad \text{of} \quad x = \frac{8 - \sqrt{64 - 12m}}{6}$$

  $$\Leftrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}$$

| x | | $\frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}$ | | $\frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $f\left(\frac{4 - \sqrt{16 - 3m}}{3}\right)$ | ↘ | $f\left(\frac{4 + \sqrt{16 - 3m}}{3}\right)$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

  * $D = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{16}{3}$

  $x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

| x | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + |
| f(x) | ↗ | −1,630 | ↗ |
| | | bgpt. | |

  * $D < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{16}{3}$

  geen oplossing voor $f'(x) = 0$

| x | |
|---|---|
| f′(x) | + |
| f(x) | ↗ |

- $f''(x) = 6x - 8$

  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

| x | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | $\cap$ | $f\left(\frac{4}{3}\right)$<br>bgpt. | $\cup$ |

- Samenvattende tabellen

* $m < \frac{16}{3}$

| x | | $\frac{4-\sqrt{16-3m}}{3}$ | | $\frac{4}{3}$ | | $\frac{4+\sqrt{16-3m}}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $f(x)$ | ↗ | max. | ↘ | bgpt. | ↘ | min. | ↗ |

* $m = \frac{16}{3}$

| x | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f''(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | bgpt. | ↗ |

(horizontale buigraaklijn)

* $m > \frac{16}{3}$

| x | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | + |
| $f''(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | bgpt. | ↗ |

(schuine buigraaklijn)

**Opdracht 47 bladzijde 92**

Gegeven de familie functies met voorschrift $f(x) = x^3 + mx^2$ waarbij $m \neq 0$.
Elk van deze functies heeft twee relatieve extrema waarvan er één zich voordoet bij $x = 0$.

Bepaal een vergelijking van de kromme waarop alle andere extrema liggen.

$f'(x) = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

Daar $m \neq 0$ heeft f' twee verschillende nulpunten, nl. 0 en $-\frac{2}{3}m$, met tekenwissel.

De functie f heeft dus twee relatieve extrema, voor $x = 0$ en voor $x = -\frac{2}{3}m$.

Als $x = -\frac{2}{3}m$ dan is $f(x) = -\frac{8}{27}m^3 + \frac{4}{9}m^3 = \frac{4}{27}m^3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}m\right)^3$.

Als $x = 0$, dan is $f(x) = 0 = -\frac{1}{2}0^3$.

De relatieve extrema liggen op de kromme met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x^3$.

**Opdracht 48 bladzijde 93**

Gegeven de functie $f\colon x \longmapsto x^3 + x^2 - (2m - 1)x$ met $m$ een reële parameter.

**1** Voor welke waarde van $m$ geldt dat de raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $P(1, y)$ als richtingscoëfficiënt 1 heeft?

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2m + 1$

$f'(1) = 3 + 2 - 2m + 1 = 6 - 2m$

$6 - 2m = 1 \iff m = \frac{5}{2}$

**2** Voor welke waarden van $m$ heeft $f$ geen extrema?

De functie bereikt geen extrema als f'(x) geen tekenverandering ondergaat, m.a.w. de discriminant van $3x^2 + 2x - 2m + 1$ moet kleiner of gelijk zijn aan nul.

$D = 4 - 12(-2m + 1) = 8(3m - 1)$

Nu is $8(3m - 1) \leqslant 0$ als en slechts als $m \leqslant \frac{1}{3}$.

**3** Voor welke waarden van $m$ snijdt de grafiek van $f$ de $x$-as in drie verschillende punten?

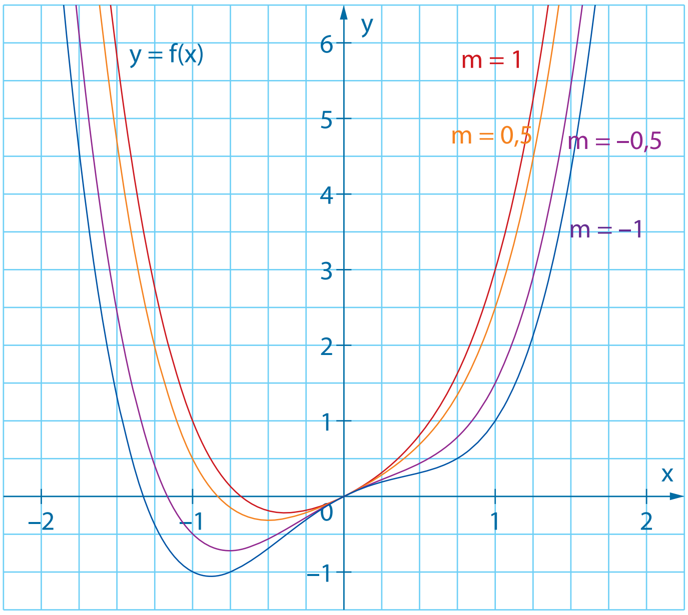
De functie $f(x) = x(x^2 + x - 2m + 1)$ heeft drie verschillende nulpunten als de discriminant van $x^2 + x - 2m + 1$ strikt positief is en $x = 0$ geen oplossing is van $x^2 + x - 2m + 1 = 0$.

Dus moet $1 - 4(1 - 2m) > 0$ en $-2m + 1 \neq 0$; m.a.w. $m > \frac{3}{8}$ en $m \neq \frac{1}{2}$.

**Opdracht 49 bladzijde 93**

Beschouw de familie van veeltermfuncties met voorschrift $f(x) = x^4 + mx^2 + x$ ($m$ is een reële parameter).

Plot enkele functies die behoren tot deze familie om na te gaan welke vormen mogelijk zijn.




**1** Bepaal de waarde van $m$ waarvoor het aantal buigpunten wijzigt.

$f'(x) = 4x^3 + 2mx + 1$

$f''(x) = 12x^2 + 2m = 2(6x^2 + m)$

$f''(x) = 0 \iff x^2 = -\frac{m}{6}$

Voor $m \geqslant 0$ zijn er geen buigpunten en voor $m < 0$ zijn er twee buigpunten.

Het aantal buigpunten wijzigt bij $m = 0$.

**2** Er is een andere waarde van $m$ waarvoor het aantal relatieve extrema wijzigt.

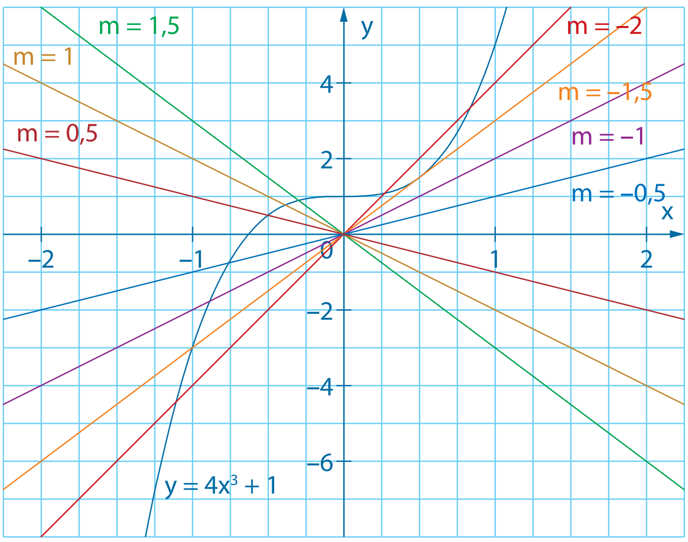
Bepaal deze waarde van $m$.

$f'(x) = 0 \iff 4x^3 + 2mx + 1 = 0$

$\iff 4x^3 + 1 = -2mx$

We onderzoeken het aantal snijpunten van $y = 4x^3 + 1$ en $y = -2mx$ in functie van m.

De raaklijn $y = -2mx$ aan $g(x) = 4x^3 + 1$ bepaalt de overgang van 1 naar 3 snijpunten.



Noem het raakpunt $P(x_0, y_0)$ en de raaklijn t, dan is rico $t = g'(x_0)$, dus $-2m = 12x_0^2$. (1)
Bovendien is:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= -2mx_0 \\ y_0 &= 4x_0^3 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2mx_0 = 4x_0^3 + 1 \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $12x_0^3 = 4x_0^3 + 1 \iff x_0 = \frac{1}{2}$,

zodat $m = -6x_0^2 = -6 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$.

Bij $m = -\frac{3}{2}$ wijzigt het aantal extrema.

**Opdracht 50 bladzijde 93**

Bespreek het verloop van de functie (stijgen, dalen, hol en bol verloop, extrema, buigpunten).

**1** $f: x \longmapsto x^5 + x^3$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ (dubbel) of $5x^2 + 3 = 0$
→ geen oplossingen

$f''(x) = 20x^3 + 6x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ of $20x^2 + 6 = 0$
→ geen oplossingen

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | + |
| f″(x) | − | 0 | + |
| f(x) | | 0 | |
| | | bgpt. | |

**2** $f: x \longmapsto 3x^4 - 4x^3 + 1$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ (dubbel) of $x = 1$

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ of $x = \frac{2}{3}$

| x | | 0 | | $\frac{2}{3}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f″(x) | + | 0 | − | 0 | + | + | + |
| f(x) | | 1 | | $\frac{11}{27}$ | | 0 | |
| | | bgpt. | | bgpt. | | min. | |

**Opdracht 51 bladzijde 93**

Gegeven zijn de grafieken van vier functies die elk aan één van de volgende reeks voorwaarden voldoen.
Welke voorwaarden horen bij welke grafiek?

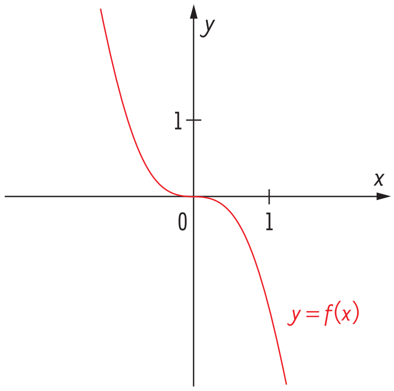
**a** $f'(0) = 0;\ f''(0) < 0$

**b** $f'(0) > 0;\ f''(0) > 0$

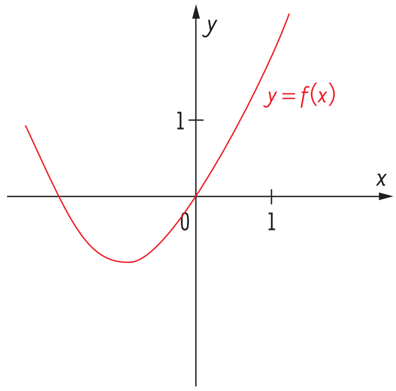
**c** $f'(0) > 0;\ f''(0) = 0$

**d** $f'(0) = 0;\ f''(0) = 0$

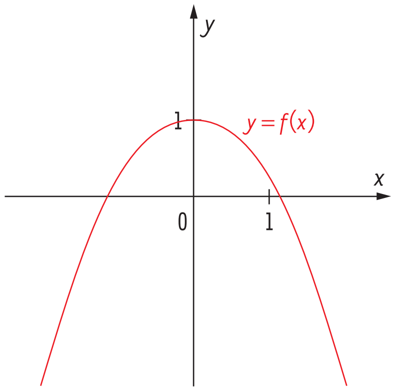
**1**



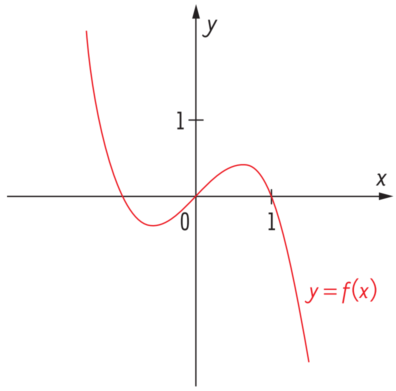

**2**



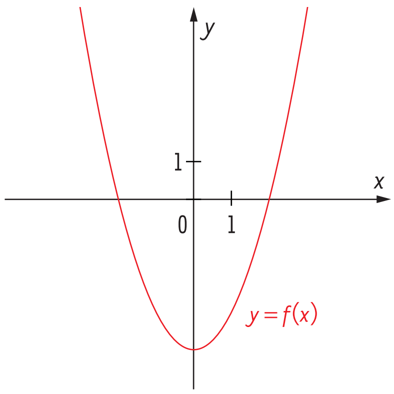

**3**



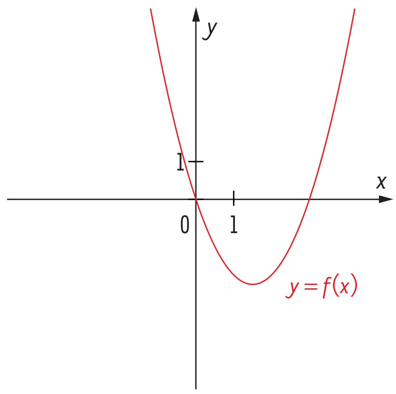

**4**




**5**




**6**




a $\rightarrow$ grafiek 3

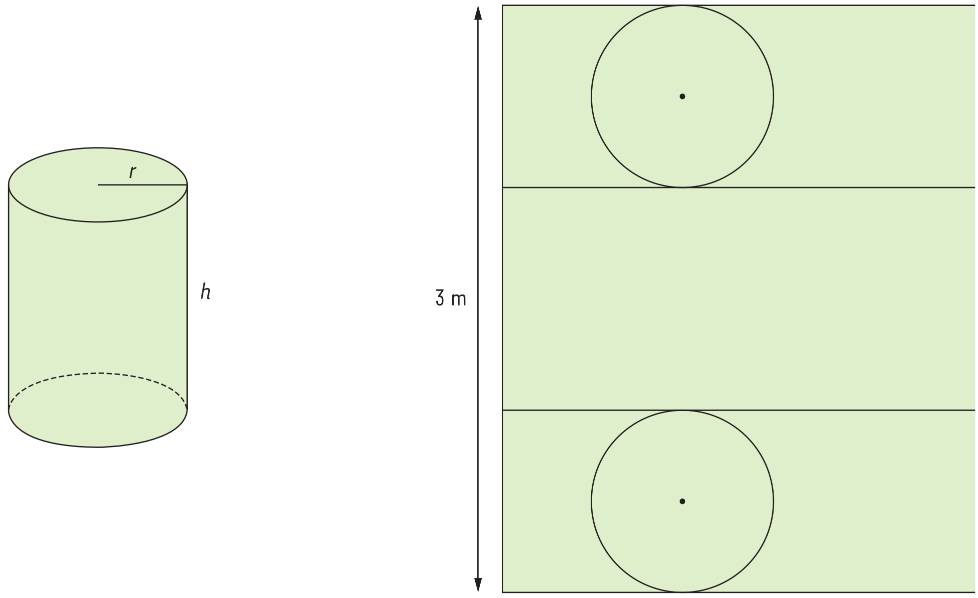
b $\rightarrow$ grafiek 2

c $\rightarrow$ grafiek 4

d $\rightarrow$ grafiek 1

**Opdracht 52 bladzijde 94**

Een cilindervormig blik met straal *r* (in m) en hoogte *h* (in m) wordt gesneden uit een plaat met hoogte 3 m zoals op de figuur is weergegeven.




**1** Geef de formule die de inhoud *I* van het blik weergeeft in functie van de straal *r*.

Verband tussen r en h:

$4r + h = 3$

$\Leftrightarrow\ h = 3 - 4r$

$I = \pi r^2 h = \pi r^2(3 - 4r) = 3\pi r^2 - 4\pi r^3$

**2** Voor welke waarde van de straal is de inhoud van het blik maximaal?

$I'(r) = 6\pi r - 12\pi r^2 = 6\pi r(1 - 2r)$

$I'(r) = 0 \ \Leftrightarrow\ r = 0 \quad \text{of} \quad r = \dfrac{1}{2}$

| r | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| I′(r) | – | 0 | + | 0 | – |
| I(r) | | | ↗ | max. | ↘ |

De inhoud van het blik is maximaal als de straal gelijk is aan 0,5 m.

**3** Wat is deze maximale inhoud?

De maximale inhoud is dan $3\pi \cdot \dfrac{1}{4} - 4\pi \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ dus $\dfrac{\pi}{4}\,m^3$ of ongeveer 0,79 $m^3$.

**Opdracht 53 bladzijde 94**

Bepaal een vergelijking van de rechte evenwijdig met de $x$-as die precies drie punten gemeenschappelijk heeft met de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$.

We bekijken het verloop van de functie f.

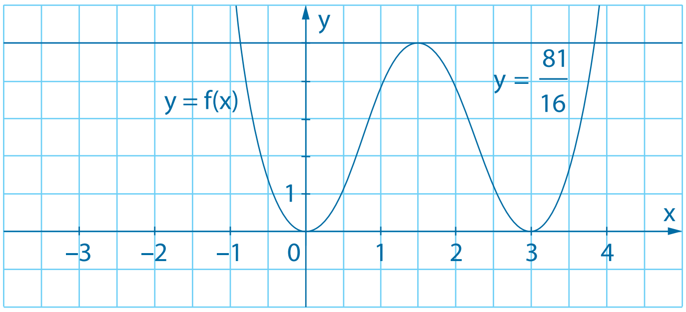
$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 18x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad 2x^2 - 9x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{of} \quad x = 3$

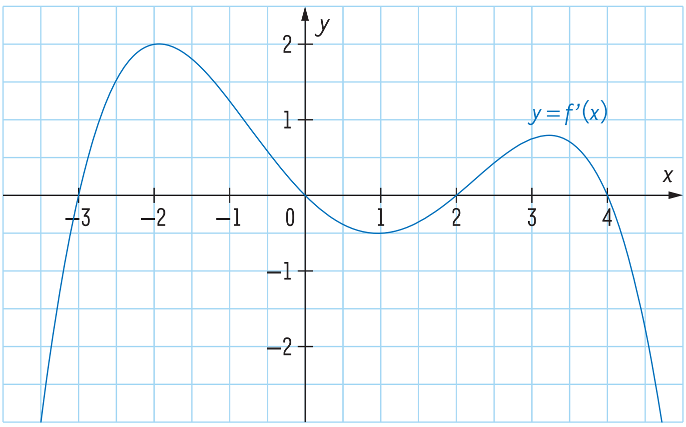
| x | | 0 | | $\frac{3}{2}$ | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{81}{16}$ | ↘ | 0 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

De rechte met vergelijking $y = \frac{81}{16}$ zal precies drie punten gemeen hebben met de grafiek van f.




**Opdracht 54 bladzijde 96**

De hellinggrafiek van een functie $f$ is gegeven.




**1** Bij $x = -3$ heeft de grafiek van $f$ een extremum. Is dit een maximum of een minimum? Verklaar.

Dit extremum is een relatief minimum want f′ gaat voor x = –3 over van negatieve naar positieve waarden en de functie f dus van dalen naar stijgen.

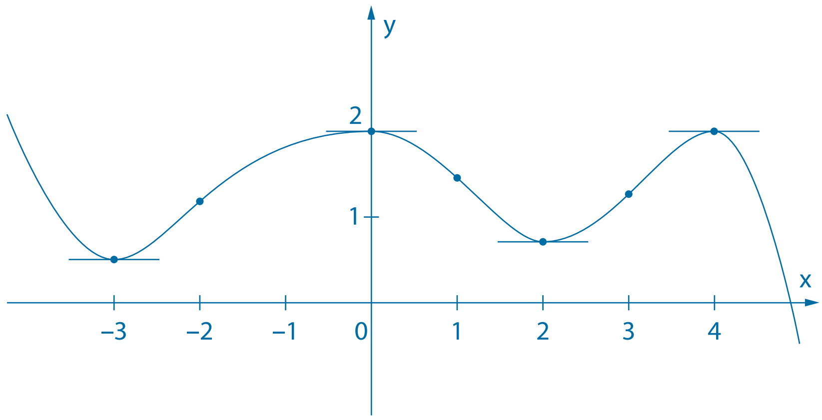
**2** Wat weet je van de grafiek van $f$ bij $x = 0$?

Bij x = 0 gaat de functie f' over van positieve naar negatieve waarden en de functie f gaat er over van stijgen naar dalen. De functie f bereikt een relatief maximum voor x = 0.

**3** Bij $x = 1$ bereikt de grafiek van $f'$ een relatief minimum. Wat betekent dat voor de grafiek van $f$?

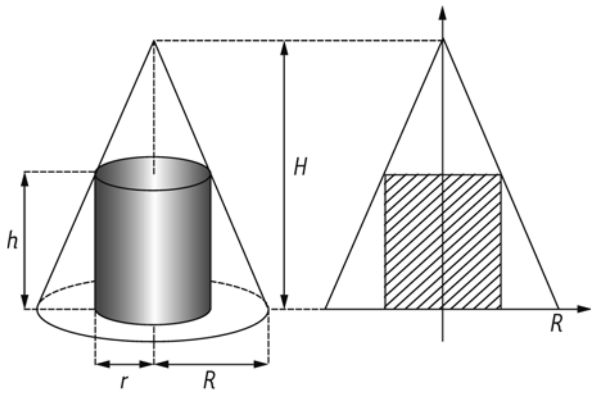
Dit betekent dat f" overgaat van negatieve naar positieve waarden en dat dus de grafiek van f overgaat van bol naar hol. De funcie f bereikt een buigpunt in P(1, f(1)).

**4** Schets een mogelijke grafiek van $f$ als je weet dat $f(0) = f(4) = 2$.

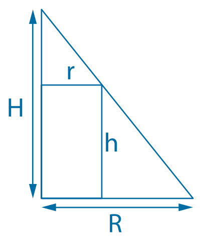



**Opdracht 55 bladzijde 96**

Een cilinder met straal $r$ en hoogte $h$ is beschreven in een kegel met hoogte $H$ en straal $R$.
In de figuur is een ruimtelijke voorstelling en een doorsnede getekend.




**1** Toon aan dat het volume van de cilinder gelijk is aan $V = \pi r^2 H - \dfrac{\pi r^3 H}{R}$.




$$\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{R - r}{R} \cdot H$$

$$\begin{aligned} V_{cilinder} &= \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 \frac{R - r}{R} \cdot H \\ &= \frac{\pi r^2 RH}{R} - \frac{\pi r^3 H}{R} \\ &= \pi r^2 H - \frac{\pi r^3 H}{R} \end{aligned}$$

**2** Wat is de verhouding van het volume van de kegel en het volume van de cilinder als het volume van de cilinder maximaal is?

$$V'(r) = \pi 2rH - \frac{\pi 3r^2H}{R}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\pi}2r\cancel{H} - \frac{\cancel{\pi}3r^2\cancel{H}}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left(2 - \frac{3r}{R}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \text{of} \quad r = \frac{2R}{3}$$

$$V_{\text{cilinder maximaal}} = \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2 \frac{\left(R - \frac{2R}{3}\right)H}{R}$$

$$= \pi \frac{4R^2}{9} \frac{\frac{1}{3}\cancel{R}H}{\cancel{R}}$$

$$= \frac{4}{9}\frac{\pi R^2H}{3}$$

$$V_{\text{kegel}} = \frac{\pi R^2H}{3}$$

$$\frac{V_{\text{kegel}}}{V_{\text{cilinder maximaal}}} = \frac{\frac{\pi R^2H}{3}}{\frac{4}{9}\frac{\pi R^2H}{3}} = \frac{9}{4}$$

**Opdracht 56 bladzijde 96**

Bespreek het verloop van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2$ in functie van de reële parameter $m$.

- $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx$
  $= 2x(2x^2 + 6x + m)$
  $\downarrow$
  $D = 36 - 8m$

  – $D < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{2}$

    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 0<br>min. | ↗ |

  – $D = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$

    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = -\frac{3}{2}$ (dubbel)

| $x$ | | $-\frac{3}{2}$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ | ↘ | 0<br>min. | ↗ |

  – $D > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}$

    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{-3 - \sqrt{9 - 2m}}{2}$ of $x = \frac{-3 + \sqrt{9 - 2m}}{2}$

    $m < 0$

| $x$ | | $\frac{-3 - \sqrt{9 - 2m}}{2}$ | | 0 | | $\frac{-3 + \sqrt{9 - 2m}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ |

$m = 0$

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

$0 < m < \dfrac{9}{2}$

| $x$ | | $\dfrac{-3-\sqrt{9-2m}}{2}$ | | $\dfrac{-3+\sqrt{9-2m}}{2}$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

- $f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m \rightarrow D = 576 - 96\,m = 96(6 - m)$

– $D < 0 \Leftrightarrow m > 6$

| $x$ | |
|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ |

– $D = 0 \Leftrightarrow m = 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $3$ | $\cup$ |

– $D > 0 \Leftrightarrow m < 6$

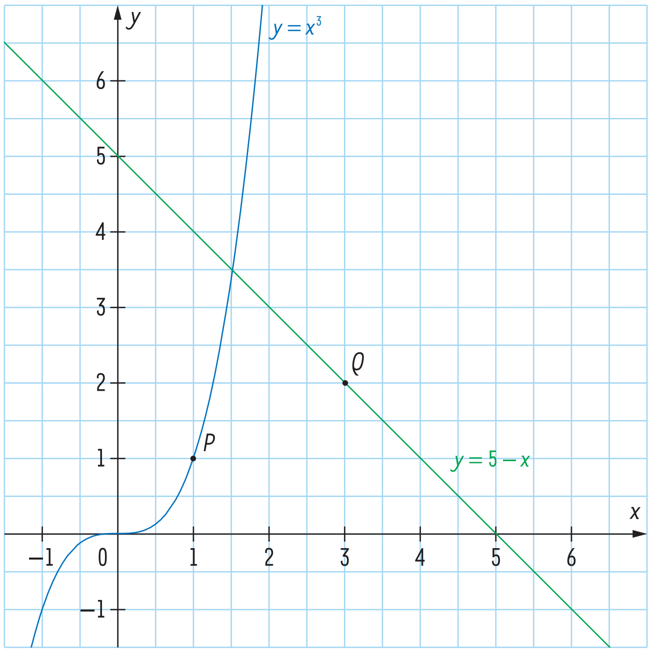
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-6-\sqrt{36-6m}}{6}$ of $x = \dfrac{-6+\sqrt{36-6m}}{6}$

| $x$ | | $\dfrac{-6-\sqrt{36-6m}}{6}$ | | $\dfrac{-6+\sqrt{36-6m}}{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | bgpt. | $\cap$ | min. | $\cup$ |

**Opdracht 57 bladzijde 97**

De krommen met vergelijking $y = x^3$ en $y = 5 - x$ stellen twee wegen voor, die verbonden moeten worden door een derde weg tussen de punten $P$ en $Q$.
De verbindingsweg is een veeltermfunctie van de derde graad die raakt aan de krommen in de verbindingspunten.

Bepaal het voorschrift van deze functie.




$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(1) = 1 \iff a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3 \iff 3a + 2b + c = 3$

$f(3) = 2 \iff 27a + 9b + 3c + d = 2$

$f'(3) = -1 \iff 27a + 6b + c = -1$

$a = \frac{1}{4}$

$b = -\frac{5}{2}$

$c = \frac{29}{4}$

$d = -4$

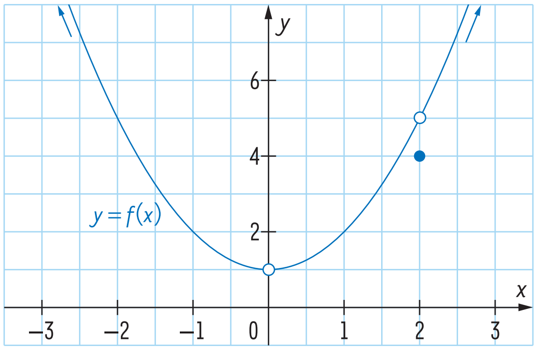
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{29}{4}x - 4$

# Hoofdstuk 8

## Limieten en continuïteit

**Opdracht 1 bladzijde 109**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek. De pijltjes suggereren het verdere verloop.




Bepaal de volgende limieten, indien ze bestaan.

**1** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

**2** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

**3** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

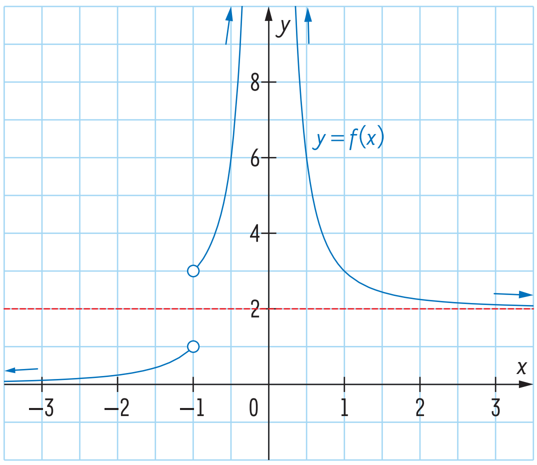
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

**5** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**Opdracht 2 bladzijde 109**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.




Bepaal de volgende limieten, indien ze bestaan.

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1$

**2** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ bestaat niet

**3** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

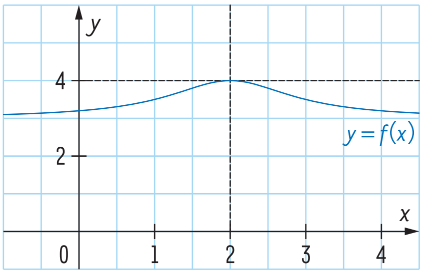
**5** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

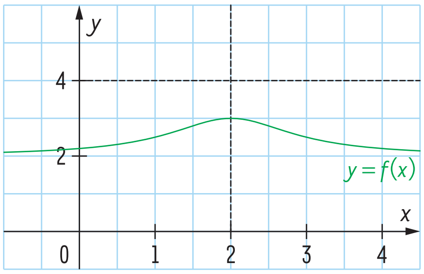
**Opdracht 3 bladzijde 110**

Geef voor elk van de uitspraken aan met welke van de grafieken ze in overeenstemming is.

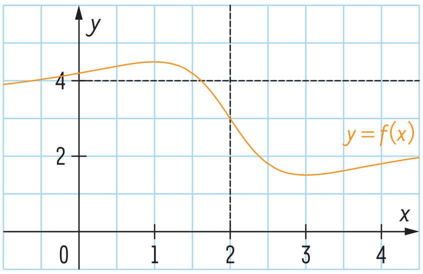
**a**



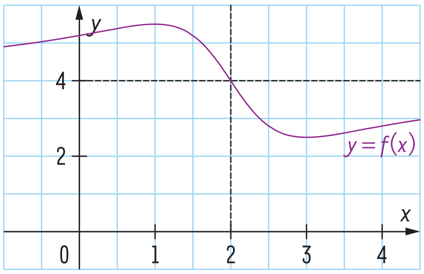

**c**




**b**




**d**




**1** De beeldwaarden $f(x)$ liggen steeds dichter bij 4, naarmate de originelen $x$ dichter liggen bij 2.

Bij grafiek a, c en d zien we dat de beeldwaarden f(x) steeds dichter bij 4 liggen, naarmate de originelen x dichter bij 2 liggen.

**2** De beeldwaarden $f(x)$ kunnen willekeurig dicht bij 4 gebracht worden, indien de originelen $x$ maar dicht genoeg bij 2 gekozen worden.

Bij grafiek a en d kunnen de beeldwaarden f(x) willekeurig dicht bij 4 gebracht worden als de originelen x dicht genoeg bij 2 gekozen worden. Bij grafiek c is dit niet het geval, daar kunnen de beeldwaarden willekeurig dicht bij 3 worden gebracht.

**Opdracht 4 bladzijde 110**

Er zijn verschillende manieren om een interval van $x$-waarden te noteren.

**1** Welke notaties komen met dezelfde intervallen overeen?

**a** $4 < x < 10$


**b** $x \in \,]-2, 6[$


**c** $0 < |x - 2| < 1$


$\rightarrow$ de afstand van x tot 2 ligt tussen 0 en 1 (0 en 1 niet inbegrepen).

**d** $|x - 2| < 4$


$\rightarrow$ de afstand van x tot 2 is kleiner dan 4.

**e** $1 < x < 3$ met $x \neq 2$


**f** $|x - 7| < 3$


$\rightarrow$ de afstand van x tot 7 is kleiner dan 3.

$\Rightarrow$ a en f komen overeen, ook b en d, alsook c en e

**2** Aan welke dubbele ongelijkheid moet $x$ voldoen?

**a** $\underbrace{|x+3|}_{x-(-3)} < 5$


$\Rightarrow\ -8 < x < 2$

**b** $0 < |x-1| < 1$


$\Rightarrow\ 0 < x < 2$ met $x \neq 1$

**3** Herschrijf $x \in\ ]a-\delta, a+\delta[$ als een enkele ongelijkheid, m.b.v. een absolute waarde.


$\rightarrow$ de afstand tussen x en a is kleiner dan $\delta$

$\Rightarrow\ |x-a| < \delta$

**Opdracht 5 bladzijde 114**

Bewijs met behulp van de ε-δ-definitie:

**1** $\lim\limits_{x\to 3}(5x-8)=7$

TB: $\lim\limits_{x\to 3}(5x-8)=7$

We moeten aantonen:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \ \Rightarrow\ |(5x-8)-7| < \varepsilon$

of:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-3| < \delta \ \Rightarrow\ |5x-15| < \varepsilon$

Kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$|5x-15| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|5(x-3)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$5|x-3| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{5}$$
$$\Uparrow$$
$$0 < |x-3| < \frac{\varepsilon}{5}$$
$$\Uparrow \quad \text{kies } \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$$
$$0 < |x-3| < \delta$$

**2** $\lim\limits_{x \to -5} (6x + 30) = 0$

TB: $\lim\limits_{x \to -5} (6x + 30) = 0$

We moeten aantonen:

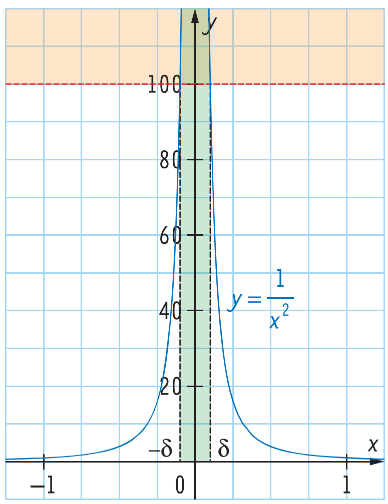
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x+5| < \delta \;\Rightarrow\; |6x+30| < \varepsilon$

Kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$
\begin{array}{c}
|6x+30| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
|6(x+5)| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
6|x+5| < \varepsilon \\
\Uparrow \\
|x+5| < \dfrac{\varepsilon}{6} \\
\Uparrow \\
0 < |x+5| < \dfrac{\varepsilon}{6} \\
\Uparrow \quad \text{kies } \delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{6} \\
0 < |x+5| < \delta
\end{array}
$$

**Opdracht 6 bladzijde 114**

Gegeven is de functie $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.




**1** Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $-\delta < x < \delta$ (met $x \neq 0$) dan is $f(x) > 100$?

$$
\begin{array}{cl}
f(x) > 100 & \\
\Updownarrow & \\
\dfrac{1}{x^2} > 100 & \text{met } x \neq 0 \\
\Updownarrow & \\
x^2 < \dfrac{1}{100} & \text{met } x \neq 0 \\
\Updownarrow & \\
-\dfrac{1}{10} < x < \dfrac{1}{10} & \text{met } x \neq 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow\; 0 < \delta < \dfrac{1}{10}$

**2** Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $0 < |x| < \delta$ dan is $f(x) > 100\ 000\ 000$?

$$f(x) > 100\ 000\ 000$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x^2} > 10^8 \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 < \frac{1}{10^8} \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{10^4} < x < \frac{1}{10^4} \qquad \text{met } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \ 0 < \delta < \frac{1}{10\ 000}$$

**3** Voor welke $\delta > 0$ geldt:
als $0 < |x| < \delta$ dan is $f(x) > r$ (met $r > 0$)?

$$f(x) > r \qquad \text{met } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x^2} > r \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 < \frac{1}{r} \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r}} < x < \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \text{met } x \neq 0 \text{ en } r > 0$$

$$\Rightarrow \ 0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{r}}$$

**Opdracht 7 bladzijde 116**

Welke uitspraken uit B stemmen overeen met de notaties uit A?

**A** **a₁** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

**a₂** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$

**a₃** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**a₄** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

**a₅** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

**a₆** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

**B** **b₁** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0 : x < -s \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

**b₂** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

**b₃** $\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -r$

**b₄** $\forall\, r > 0, \exists\, s > 0 : x > s \Rightarrow f(x) < -r$

**b₅** $\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > r$

**b₆** $\forall\, r > 0, \exists\, s > 0 : x > s \Rightarrow f(x) > r$

A $a_1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, r > 0, \exists\, s > 0 : x > s \Rightarrow f(x) < -r$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_4$

$a_2$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_2$

$a_3$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, r > 0, \exists\, s > 0 : x > s \Rightarrow f(x) > r$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_6$

$a_4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0 : x < -s \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_1$

$a_5$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

$$\Updownarrow$$

$\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -r$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_3$

$a_6$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$

$\Updownarrow$

$\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : a - \delta < x < a \;\Rightarrow\; f(x) > r$

$\Rightarrow$ uitspraak $b_5$

Samenvatting

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_4$ | $b_2$ | $b_6$ | $b_1$ | $b_3$ | $b_5$ |

**Opdracht 8 bladzijde 116**

Bewijs met behulp van de gepaste definitie.

**1** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

TB: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

m.a.w.

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0 : x > s \;\Rightarrow\; |f(x)| < \varepsilon$

Bewijs

kies $\varepsilon > 0$, dan geldt:

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Uparrow$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Uparrow \quad \text{kies } s \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$x > s$$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^2\log x = -\infty$

TB: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} {}^2\log x = -\infty$

m.a.w.

$\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < x < \delta \;\Rightarrow\; {}^2\log x < -r$

Bewijs

kies $r > 0$, dan geldt:

$${}^2\log x < -r$$

$\Uparrow$ f: $x \mapsto {}^2\log x$ is een stijgende functie, dus ongelijkheid blijft bewaard

$$0 < x < 2^{-r} = \frac{1}{2^r}$$

$\Uparrow$ kies $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2^r}$

$$0 < x < \delta$$

**Opdracht 9 bladzijde 120**

Gegeven zijn twee functies $f$ en $g$.

Er geldt: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ en $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$.

De tabel toont enkele beeldwaarden voor $x \underset{<}{\to} 3$.

We beschouwen vervolgens de som- en product-functie $s(x)$ en $p(x)$.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| 2,9 | 6,7 | 4,5 |
| 2,99 | 6,95 | 4,9 |
| 2,999 | 6,995 | 4,99 |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | 7 | 5 |

| $x$ | $s(x)$ | $p(x)$ |
|---|---|---|
| 2,9 | 11,2 | 30,15 |
| 2,99 | 11,85 | 34,055 |
| 2,999 | 11,985 | 34,90505 |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | 12 | 35 |

**1** Bereken $s(x)$ en $p(x)$ voor de gegeven waarden van $x$ en leid hieruit $\lim\limits_{x \to 3} s(x) = \lim\limits_{x \to 3} \big(f(x) + g(x)\big)$ en $\lim\limits_{x \to 3} p(x) = \lim\limits_{x \to 3} \big(f(x) \cdot g(x)\big)$ af

**2** Wat zal je vinden voor $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$?

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{7}{5}$$

**Opdracht 10 bladzijde 124**

Bereken met de rekenregels van limieten als gegeven is dat $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ en $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -2$.

**1** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} f(x)}{\lim\limits_{x \to 2} g(x)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

**2** $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - x - 3 \cdot f(x)\right)$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x - 3 \cdot f(x)) = 2^2 - 2 - 3 \cdot \lim_{x \to 2} f(x) = 2 - 3 \cdot 3 = -7$$

**3** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 4}{g(x)}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4}{g(x)} = \frac{2 \cdot 2^2 - 4}{\lim\limits_{x \to 2} g(x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

**4** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) \cdot g(x)}{x^2 + x}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) \cdot g(x)}{x^2 + x} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} g(x)}{2^2 + 2} = \frac{3 \cdot (-2)}{6} = -1$$

**5** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}}$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{f(x) + 1}{f(x) - 1}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 2} f(x) + 1}{\lim\limits_{x \to 2} f(x) - 1}} = \sqrt{\frac{3 + 1}{3 - 1}} = \sqrt{2}$$

**Opdracht 11 bladzijde 125**

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f_1(x) = \dfrac{2x-7}{x-3}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$, $f_3(x) = \dfrac{3x-8}{x-3}$ en $f_4(x) = 2x+1$.

Er geldt: $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_1(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_2(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_3(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_4(x) = 7$.

De tabel toont enkele beeldwaarden voor $x \underset{<}{\to} 3$. Je kunt gemakkelijk nagaan dat de trends die je in de tabel waarneemt, zich verder doorzetten naarmate $x$ dichter bij 3 komt, met $x < 3$.

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2,8 | 7 | 25 | −2 | 6,6 |
| 2,9 | 12 | 100 | −7 | 6,8 |
| 2,99 | 102 | 10000 | −97 | 6,98 |
| 2,999 | 1002 | 1000000 | −997 | 6,998 |
| 2,9999 | 10002 | 100000000 | −9997 | 6,9998 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 3 | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 7 |

Maak gebruik van de waarden in de tabel om de gevraagde limieten te bepalen.

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_2(x)\right)$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)-f_2(x)\right)$

**3** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_2(x)-f_1(x)\right)$

**4** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_3(x)\right)$

**5** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_2(x)+f_3(x)\right)$

**6** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)+f_4(x)\right)$

**7** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_1(x)\cdot f_3(x)\right)$

**8** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \left(f_3(x)\cdot f_4(x)\right)$

**9** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

**10** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_3(x)}$

**11** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_1(x)}{f_4(x)}$

**12** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 5 | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 | −1 | $+\infty$ | $+\infty$ |

**Opdracht 12 bladzijde 128**

Bereken de volgende limieten.

**1** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-3x^6 + x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} (-3x^6 + x) = -3(-\infty)^6 + (-\infty)$$
$$= -\infty + (-\infty)$$
$$= -\infty$$

**2** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[-5x^3 \cdot (500 - x^2)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-5x^3 \cdot (500 - x^2)\right) = -5(+\infty)^3 \cdot \left(500 - (+\infty)^2\right)$$
$$= -\infty \cdot \left(500 - \infty\right)$$
$$= -\infty \cdot (-\infty)$$
$$= +\infty$$

**3** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3 - x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^3 - x^2} = \frac{5}{(-\infty)^3 - (-\infty)^2}$$
$$= \frac{5}{-\infty - \infty}$$
$$= \frac{5}{-\infty}$$
$$= 0$$

**4** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 10}{3}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x - 10}{3}} = \sqrt{\frac{(+\infty)^2 + (+\infty) - 10}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{+\infty + (+\infty) - 10}{3}}$$
$$= \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty$$

**Opdracht 13 bladzijde 132**

Enkele limietsituaties zijn symbolisch gegeven. Bepaal waaraan ze gelijk zijn, indien ze gedefinieerd zijn.

1 $+\infty - 100000 = +\infty$

2 $-\infty - (+\infty) = -\infty$

3 $3 - (-\infty) = 3 + (+\infty) = +\infty$

4 $-\infty + (+\infty)$ : onbepaalheid

5 $(-\infty) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\infty$

6 $0 \cdot (+\infty)$ : onbepaalheid

7 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

8 $\frac{-\infty}{-3} = +\infty$

9 $\frac{-3}{-\infty} = 0$

10 $\frac{0}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

**Opdracht 14 bladzijde 132**

Bereken de volgende limieten.

1 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 2x^2 + 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(-x^3 + 2x - 1)(2x^2 - x - 3)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3)(2x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^5) = -\infty$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1 - 3x + 3x^2 - x^3)^5\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^{15}) = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x-2)^3(x^3+1)(5-3x)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^3 \cdot x^3(-3x)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^7) = +\infty$

**Opdracht 15 bladzijde 132**

Illustreer aan de hand van twee concrete functies *f* en *g* dat $0 \cdot (\pm\infty)$ een onbepaaldheid is.

Voorbeeld:

| $x$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $g(x) = x$ | $f(x) \cdot g(x)$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $g(x) = x^2$ | $f(x) \cdot g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,1 | 10 | 1 | 0,1 | 100 | 10 |
| 100 | 0,01 | 100 | 1 | 0,01 | 10 000 | 100 |
| 10 000 | 0,0001 | 10 000 | 1 | 0,0001 | $10^8$ | 10 000 |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | $\boxed{1}$ | 0 | $+\infty$ | $\boxed{+\infty}$ |

**Opdracht 16 bladzijde 134**

Bereken de volgende limieten of geef de linker- en rechterlimiet indien ze niet bestaan.

**1** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{{}^2\log x}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{{}^2\log x} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{{}^2\log x} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{{}^2\log x} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{{}^2\log x} \text{ bestaat niet}$$

**2** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+2}}{-x^2+10x-25}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}}{-x^2+10x-25} \overset{\frac{\sqrt{7}}{0}}{=} \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+2}}{-(x-5)^2} \overset{\frac{\sqrt{7}}{0^-}}{=} -\infty$$

**Opdracht 17 bladzijde 136**

Bereken, indien mogelijk, de volgende limieten. Indien de limiet niet bestaat, verklaar waarom.

**1** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{x-4} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{x-4} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} \text{ bestaat niet}$$

**2** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-x^2+4x}{2x^3-5x^2}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{-x^2+4x}{2x^3-5x^2} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

**3** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

**4** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2\\<}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2\\>}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} \text{ bestaat niet}$$

**5** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{-x^2+6x-9}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{-x^2+6x-9} \overset{\frac{1}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{1}{-(x-3)^2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

**6** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{5}{2}$$

**7** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = 3$$

**Opdracht 18 bladzijde 138**

Bereken de volgende limieten.

**1** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+5}{3x^3-8x^2+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3x^2} = 0$

**2** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8-x^3}{x^3-8x+8} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} (-1) = -1$

**3** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+1)(1-x^2)}{(2x+1)(5x^2-6x+1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^5}{10x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{10}x^2\right) = -\infty$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-1)^5}{(-3x+4)^4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{32x^5}{81x^4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{32}{81}x = -\infty$

**Opdracht 19 bladzijde 138**

Beschouw de functies met voorschrift $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ en $g(x)=x\sqrt{x^2-1}$.

Zijn ze gelijk? Verklaar.

dom f = $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$

$x^4 - x^2 \geqslant 0$

$x^2(x^2-1) \geqslant 0$

| x | | −1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2(x^2-1)$ | + | 0 | − | 0 | − | 0 | + |

dom g = $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$x^2 - 1 \geqslant 0$

| x | | −1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | + | 0 | − | 0 | + |

De functies zijn niet gelijk want dom f ≠ dom g.

**Opdracht 20 bladzijde 141**

Bereken.

**1** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-2}} = 4$

**2** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\cancel{(x-3)}(\sqrt{x-2}+1)}{\underbrace{x-2-1}_{\cancel{x-3}}} = 6$

**3** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{4x+3}{x-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{4} = 2$

**4** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-6x+3}{\sqrt{4x^2-x+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-6\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{3}{6x}}^{\to 0}\right)}{2\cancel{x}\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{4x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{4x^2}}_{\to 0}}} = -3$

**5** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{4}{+\infty} = 0$

**6** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+1}+4x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cancel{16x^2}+x+1\cancel{-16x^2}}{\sqrt{16x^2+x+1}-4x}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{-4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{16x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{16x^2}}_{\to 0}}+1\right)} = -\dfrac{1}{8}$

**Opdracht 21 bladzijde 141**

Bepaal $a$ en $b$ als je weet dat $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=\frac{\sqrt{b}-3}{0}$$

Deze limiet moet eindig zijn, dus moet $\sqrt{b}-3=0$, m.a.w. $b=9$.

Hieruit volgt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ax+9-9}{x\left(\sqrt{ax+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+9}+3}=\frac{a}{6}$$

Nu moet $\frac{a}{6}=-1$, dus $a=-6$.

$\Rightarrow$ $a=-6$ en $b=9$

**Opdracht 22 bladzijde 143**

Welke van de volgende functies hebben een grafiek met de rechte $r\leftrightarrow x=2$ als verticale asymptoot?

$$f_1: x\mapsto\frac{x^2+x+3}{2x^2-8}$$

$$\lim_{x\to 2}f_1(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+3}{2x^2-8}\overset{\frac{9}{0}}{=}\pm\infty$$

$\Rightarrow$ V.A.: $x=2$

$$f_2: x\mapsto\frac{x^2-4x+4}{8-2x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}f_2(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{8-2x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{2(2-x)(2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{-2\cancel{(x-2)}(2+x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{-2(2+x)}=0$$

$\Rightarrow$ r is geen V.A.

$$f_3: x\mapsto\sqrt[3]{\frac{x+2}{3x^3-7x^2+2x}}$$

$$\lim_{x\to 2}f_3(x)=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x+2}{3x^3-7x^2+2x}}=\sqrt[3]{\frac{4}{0}}=\pm\infty$$

$\Rightarrow$ V.A.: $x=2$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{\frac{x-3}{2-x}}$$

$$\lim_{x \to 2} f_4(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \sqrt{\frac{x-3}{2-x}} = \sqrt{\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x-3}{2-x}} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$\downarrow$

dom $f_4 = ]2, 3]$

$\Rightarrow$ V.A.: $x = 2$

De functies $f_1$, $f_3$ en $f_4$ hebben een grafiek met de rechte $r \leftrightarrow x = 2$ als verticale asymptoot.

**Opdracht 23 bladzijde 147**

Bepaal alle asymptoten van de grafieken van de gegeven functies.

**1** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x - 1}$$

V.A.: $x = 1$
H.A.: /
S.A. $y = x + 4$

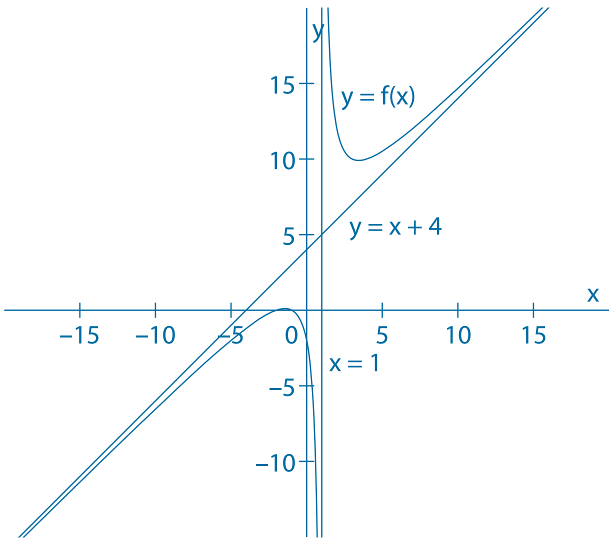
$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{\frac{6}{0}}{=} \pm\infty \Rightarrow \text{V.A.: } x = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \end{aligned}\right\} \text{geen H.A.}$$

Opmerking: f is een rationale functie waarvan de graad van de teller één meer is dan de graad van de noemer. Deze functie heeft dus geen H.A. maar wel een S.A.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} - x\right] \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 + x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x + 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x} \\ &= 4 \end{aligned}$$




$\Rightarrow$ $y = x + 4$

Opmerking: dit kan ook via de euclidische deling

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+\phantom{3}x\phantom{+2}} & x+4 \\ 4x+2 & \Downarrow \\ \underline{-4x+4} & y=x+4 \\ 6 & \end{array}$$

**2** $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}$

$$f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}=\frac{(x+1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) \overset{\frac{3}{0}}{=} \pm\infty \Rightarrow \text{V.A.: } x=\frac{1}{2}$$

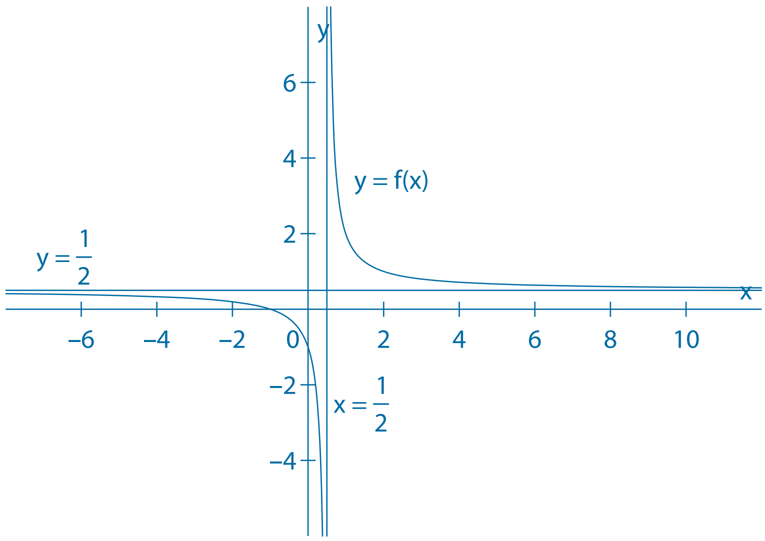
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x-1} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{geen V.A.}$$

$$\left(\text{opening in } \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{H.A.: } y=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{V.A.: } x=\frac{1}{2} \\ \text{H.A.: } y=\frac{1}{2} \\ \text{S.A. /} \end{array}}$$

Deze rationale functie kan geen schuine asymptoot hebben.



**3** $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+4}$

Grafisch vermoeden we 2 schuine asymptoten.

- dom $f = \mathbb{R}$: er zijn geen verticale asymptoten.
- $a_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overbrace{\frac{4}{3x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$

$= \sqrt{3}$

$a_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4}}{x}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{3}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overbrace{\frac{4}{3x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$

$= -\sqrt{3}$

$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{3}x\right)$

$\overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{3x^2}+4-\cancel{3x^2}}{\sqrt{3x^2+4}+\sqrt{3}x}$

$= \dfrac{4}{+\infty}$

$= 0$

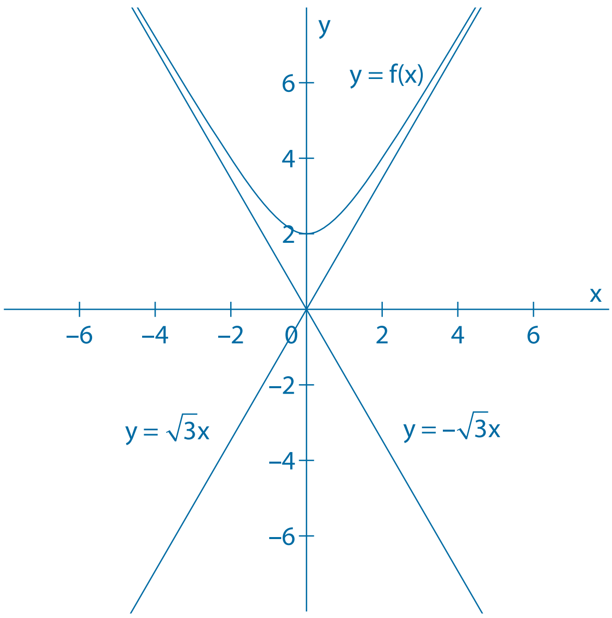
$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x^2+4} + \sqrt{3}x\right)$

$\overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{3x^2}+4-\cancel{3x^2}}{\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{3}x}$

$= \dfrac{4}{+\infty}$

$= 0$

$\Rightarrow$ SA: $y = \sqrt{3}x$ en $y = -\sqrt{3}x$



**4** $f: x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 9}$

Grafisch vermoeden we een horizontale en een schuine asymptoot.

- dom f = ]−∞, −3] ∪ [3, +∞[, dus berekenen van schuine en horizontale asymptoten is zinvol.

  De functie heeft geen verticale asymptoot want er zijn geen nulpunten in de noemer.

- We vermoeden een horizontale asymptoot voor x → +∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-9)}{x+\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x+\sqrt{x^2-9}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{H.A.:}\quad y = 0}$$

- We vermoeden een schuine asymptoot voor x → −∞.

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^{\,1}}{\cancel{x}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}-2x\right)$$

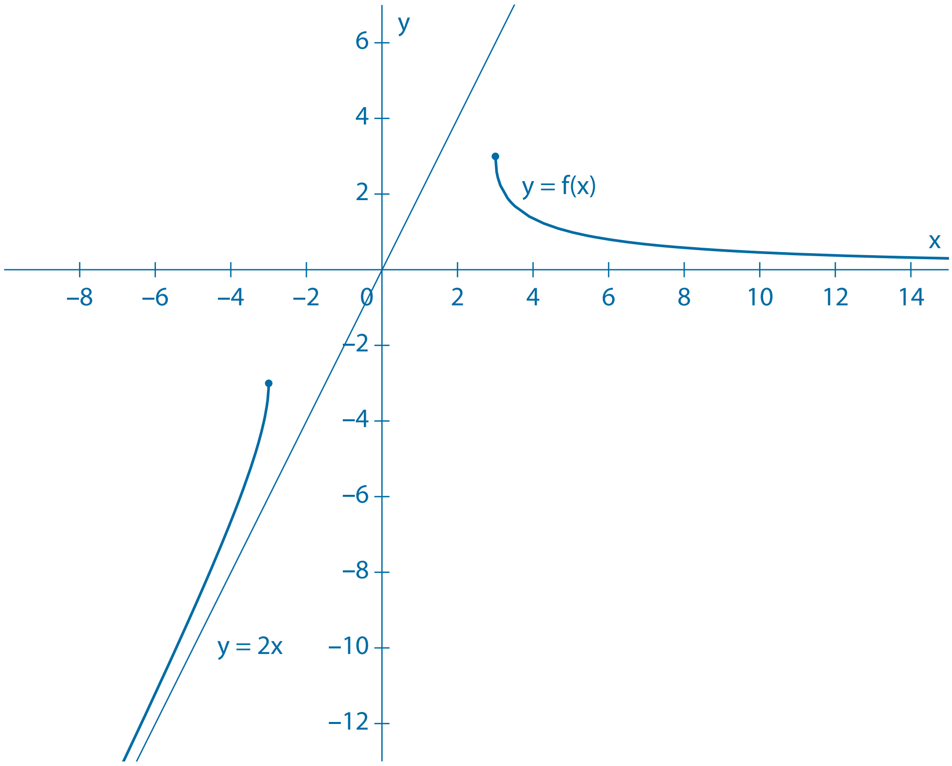
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-9}-x\right)$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x}$$

$$\overset{\frac{-9}{+\infty}}{=} 0$$

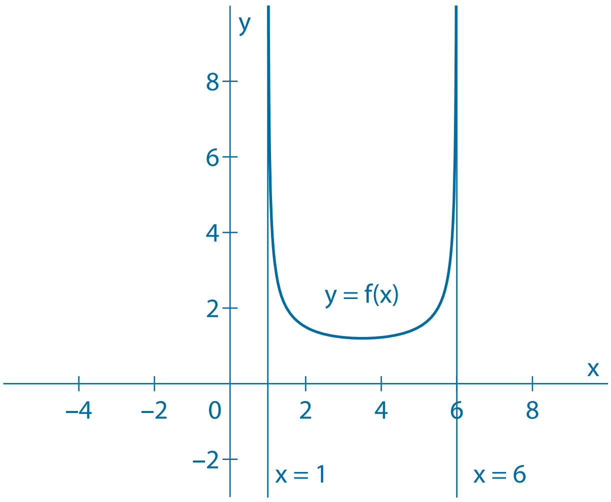
$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.:}\quad y = 2x}$$




**5** $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{(x-1)(6-x)}}$

Grafisch vermoeden we twee verticale asymptoten.

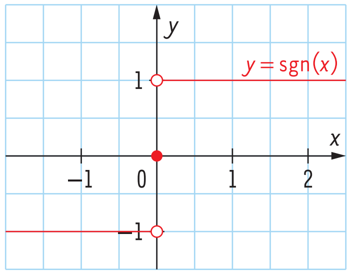
- dom f = ]1, 6[: het berekenen van horizontale en schuine asymptoten is zinloos.
- 1 en 6 zijn nulpunten van de noemer en niet van de teller, dus heeft de grafiek van f als verticale asymptoten de rechten met vergelijking x = 1 en x = 6.



**Opdracht 24 bladzijde 149**

Beschouw de functie sgn : $x \longmapsto \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x = 0. \\ -1 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

We noemen ze de *signum*-functie, omdat ze elke $x$ afbeeldt op het 'teken' van $x$.




**1** Bereken, indien mogelijk, $\lim\limits_{x \to 0} \big(\text{sgn}(x)\big)$ en vergelijk met sgn(0).

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \big(\text{sgn}(x)\big) = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \big(\text{sgn}(x)\big) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \big(\text{sgn}(x)\big) \text{ bestaat niet.}$$

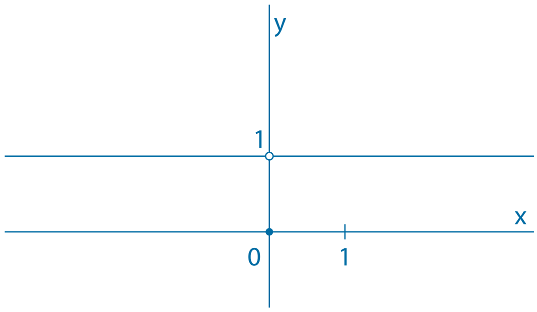
Zowel de linker- als de rechterlimiet zijn verschillend van sgn(0) = 0.

**2** Beschouw de functie $f : x \longmapsto |\text{sgn}(x)|$.

Maak een schets van $f$ en bereken,

indien mogelijk, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Vergelijk met $f(0)$.

$$|\text{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$




$$\lim_{x \to 0} |\text{sgn}(x)| = 1 \neq |\text{sgn}(0)| \; (= 0)$$

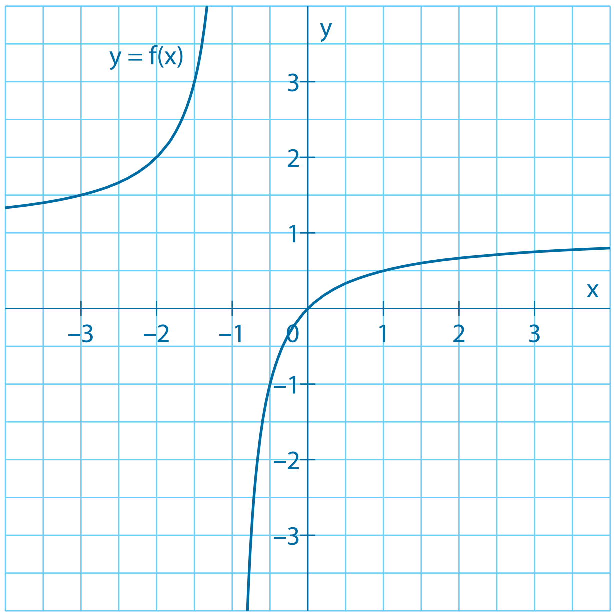
**Opdracht 25 bladzijde 152**

In welke intervallen zijn de volgende functies continu?

**1** $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ bestaat niet

f is continu in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$



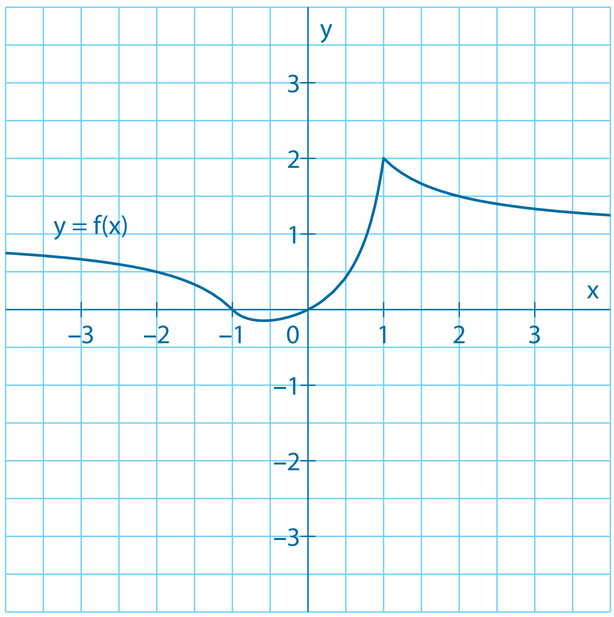

**2** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$

$$f(x) \begin{cases} = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1 + 1} = \dfrac{x^2 + x}{x^2} & \text{als } x \leqslant -1 \text{ of } x \geqslant 1 \\ = \dfrac{x^2 + x}{2 - x^2} & \text{als } -1 < x < 1 \end{cases}$$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

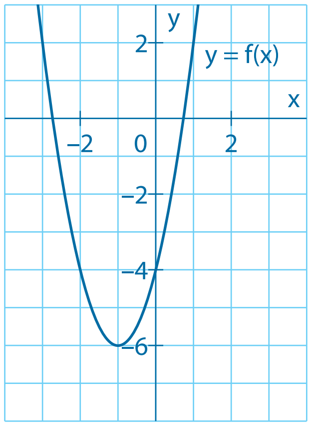
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 0$




f is continu in $\mathbb{R}$.

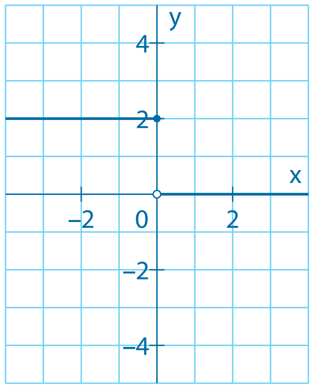
**3** $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^3+6x^2-4}{x+1} & \text{als } x \neq -1 \\ -6 & \text{als } x = -1 \end{cases}$




$$\lim_{x \to -1} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x^2+4x-4)}{x+1} = -6$$

f is continu in $\mathbb{R}$.

**4** $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 2 & \text{als } x = 0 \end{cases}$




$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x > 0 \\ 2 & \text{als } x < 0 \\ 2 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$

f is continu in $\mathbb{R}_0$.

**Opdracht 26 bladzijde 152**

De functie $f : x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{als } x \leqslant a \\ -x^2+x+4 & \text{als } x > a \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal $a$.

De functie is continu in $\mathbb{R}$, dus moet ze ook continu zijn in a.

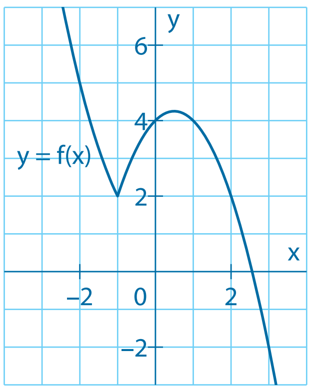
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = a^2 + 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -a^2 + a + 4$

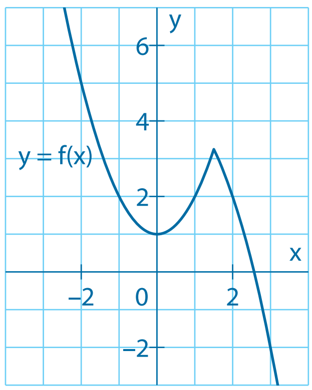
Dus moet $a^2 + 1 = -a^2 + a + 4$

$\Leftrightarrow 2a^2 - a - 3 = 0$

$\Leftrightarrow a = -1 \quad \text{of} \quad a = \dfrac{3}{2}$




$a = -1$




$a = \dfrac{3}{2}$

**Opdracht 27 bladzijde 153**

Bewijs dat als $f$ en $g$ continu zijn in $a$, dan ook de productfunctie $f \cdot g$ continu is in $a$.

Aangezien f en g continu zijn in a, geldt:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ en $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Hieruit volgt:

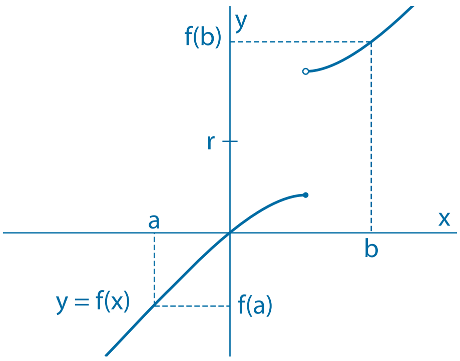
| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$ | definitie productfunctie |
| $= \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ | rekenregel limieten |
| $= f(a) \cdot g(a)$ | f en g continu in a |
| $= (f \cdot g)(a)$ | definitie productfunctie |

Hieruit besluiten we dat $f \cdot g$ continu is in a.

**Opdracht 28 bladzijde 159**

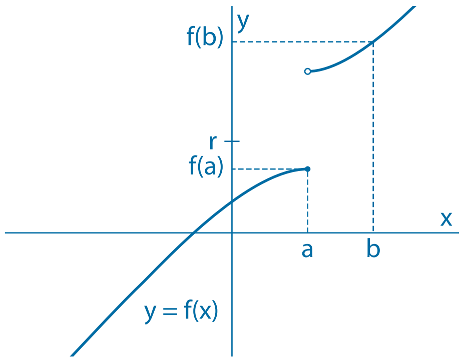
De tussenwaardestelling geldt enkel wanneer de functie continu is in een gesloten interval. Toon aan de hand van enkele voorbeelden aan waarom de continuïteit vereist is en waarom het interval gesloten moet zijn.

Voorbeelden




f is niet continu in [a, b]:

er bestaat geen c ∈ ]a, b[ waarvoor f(c) = r




f is continu in ]a, b[, maar niet in [a, b]:

er bestaat geen c ∈ ]a, b[ waarvoor f(c) = r

**Opdracht 29 bladzijde 159**

Een bergwandelaar wandelt op een dag van zijn verblijfplaats in de vallei naar een berghut boven op een berg. Hij vertrekt om 8u ’s morgens en komt om 8u ’s avonds aan.

De dag erop vertrekt hij om 8u ’s morgens van de berghut en wandelt via dezelfde weg terug naar zijn logies in de vallei, waar hij om 8u ’s avonds aankomt.

Bewijs dat er een tijdstip is overdag waarop de wandelaar precies op dezelfde plaats was bij het naar boven wandelen en het naar beneden wandelen.

- Stel f(t) = de afstand van de verblijfplaats in de vallei, richting de berghut en g(t) = de afstand naar de verblijfplaats in de vallei (vanaf de berghut), met t de tijd in uren.

  f en g zijn te beschouwen als continue functies.
- Stel d = afstand van de verblijfplaats naar de berghut.

  Er geldt: $\begin{cases} f(0) = g(12) = 0 \\ f(12) = g(0) = d \end{cases}$
- Stel h(t) = g(t) – f(t), dan geldt:

  $\begin{cases} h(0) = g(0) - f(0) = d \\ h(12) = g(12) - f(12) = -d \end{cases}$

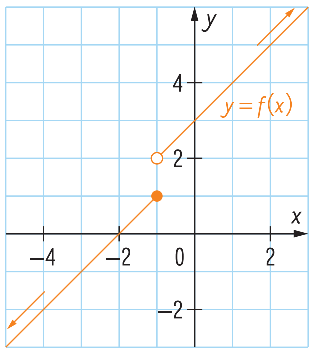
  Uit de stelling van Bolzano volgt dat er een tijdstip $t^*$ bestaat tussen 0 en 12 uur waarvoor $h(t^*) = 0$, m.a.w. $g(t^*) - f(t^*) = 0$ en dus:

  $g(t^*) = f(t^*)$

**Opdracht 30 bladzijde 166**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.




1. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -1$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 2$
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 4$
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 4$
6. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**Opdracht 31 bladzijde 166**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.

**1** $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 3$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 0$

**3** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 0$

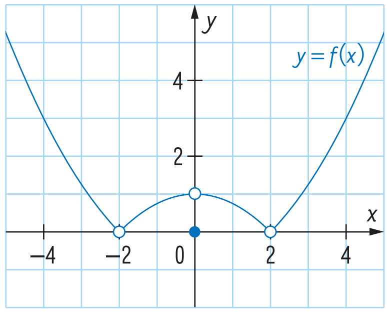
**4** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$

**5** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$

**6** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$

**7** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

**8** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$




**Opdracht 32 bladzijde 166**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.

**1** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet

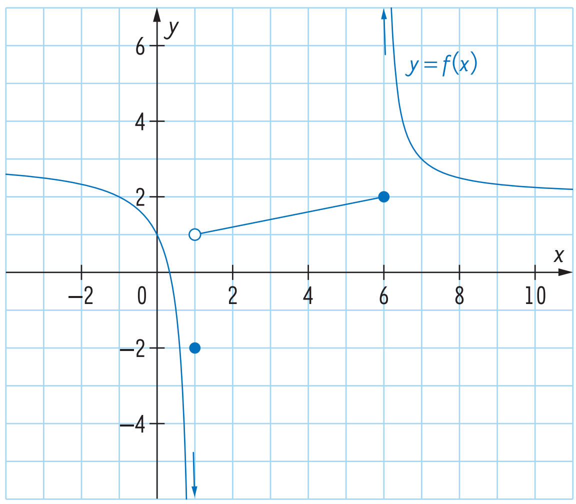
**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

**3** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 1$

**4** $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$ bestaat niet

**5** $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ <}} f(x) = 2$

**6** $\lim\limits_{\substack{x \to 6 \\ >}} f(x) = +\infty$




**Opdracht 33 bladzijde 166**

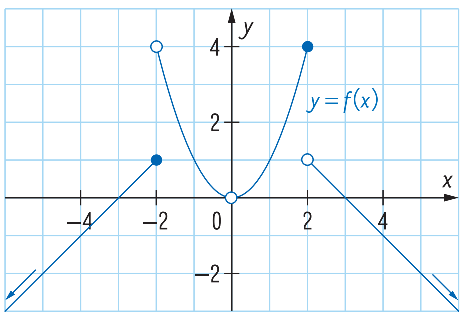
De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.

Voor welke $a \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ niet?

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat niet als $a = -2$ of $a = 2$.

Immers: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = 4$

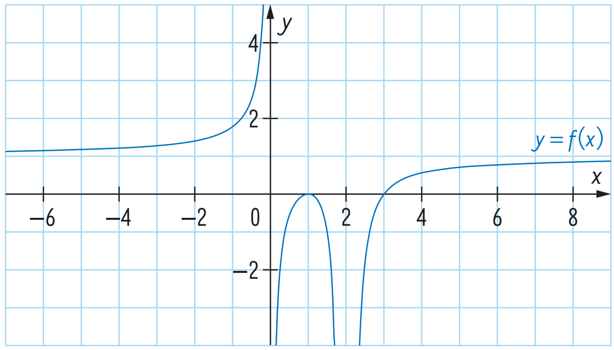
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 4$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$



**Opdracht 34 bladzijde 166**

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x(x-2)^2}$ is getekend.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.




**1** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

**3** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

**4** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

**5** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

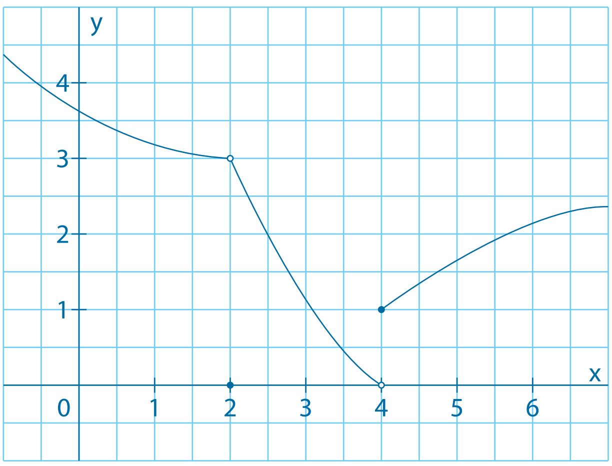
**6** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

**Opdracht 35 bladzijde 166**

Teken de grafiek van een functie $f$ die voldoet aan de volgende voorwaarden.

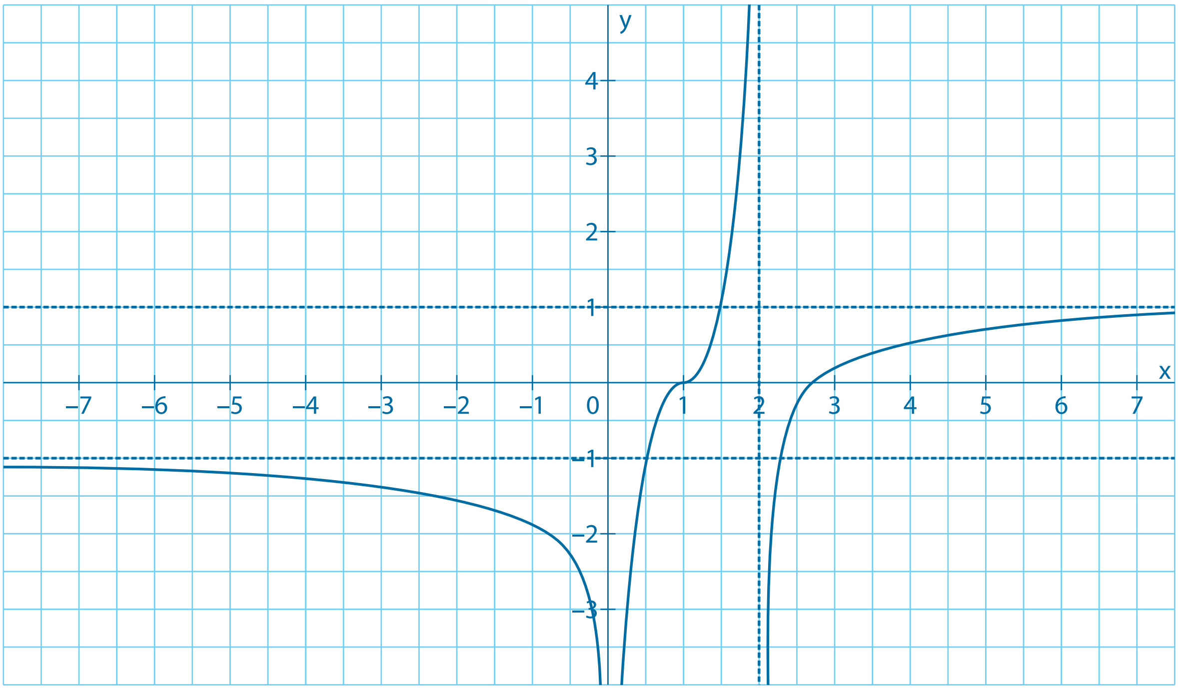
**1** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = 1$, $f(2) = 0$ en $f(4) = 1$

Voorbeeld



**2** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ en $f(1) = 0$

Voorbeeld




**Opdracht 36 bladzijde 167**

Geef de (linker- of rechter-) limiet die hoort bij de volgende definities.

**1** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: 5 - \delta < x < 5 + \delta \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -2$

**2** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3$

**3** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, s > 0: x > s \Rightarrow |f(x) + 5| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$

**4** $\forall\, r > 0, \exists\, \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > r$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

**5** $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0: -2 - \delta < x < -2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 0$

**6** $\forall\, r > 0, \exists\, s < 0: x < s \Rightarrow f(x) > r$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

**Opdracht 37 bladzijde 167**

Geef een formele definitie die hoort bij de volgende limieten.

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -6$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -2 - \delta < x < -2 \Rightarrow |f(x) + 6| < \varepsilon$

**2** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\forall r > 0, \exists s > 0 : x > s \Rightarrow f(x) < -r$

**3** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$

$\forall r > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x + 2| < \delta \Rightarrow f(x) < -r$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists s > 0 : x < -s \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

**Opdracht 38 bladzijde 167**

Er is gegeven dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Voor welke waarden van $\delta$ geldt dat $|f(x) - b| < \varepsilon$ als $0 < |x - a| < \delta$?

**1** $\lim\limits_{x \to -1} (2 - 7x) = 9$

$$|2 - 7x - 9| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|-7x - 7| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|-7|\,|x + 1| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x + 1| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Voor $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{7}$ geldt dat $|f(x) - 9| < \varepsilon$ als $0 < |x + 1| < \delta$.

**2** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4-x^2}{2+x} = 4$

$$\left|\frac{4-x^2}{2+x} - 4\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{4-x^2-8-4x}{2+x}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{-x^2-4x-4}{x+2}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$\left|\frac{(x+2)^2}{x+2}\right| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x+2| < \varepsilon$$

Voor $\delta \leqslant \varepsilon$ geldt dat $|f(x) - 4| < \varepsilon$ als $0 < |x+2| < \delta$ .

**Opdracht 39 bladzijde 167**

Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 1} (3x-6) = -3$ met de $\varepsilon$-$\delta$-definitie.

We moeten aantonen dat:

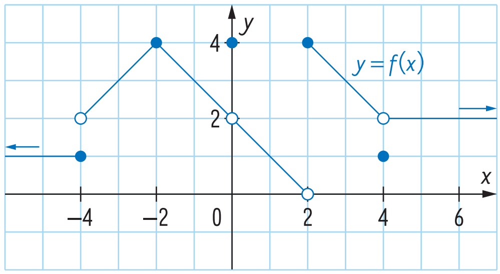
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |3x-6+3| < \varepsilon$

Kies $\varepsilon > 0$: $\quad |3x-3| < \varepsilon$
$$\Uparrow$$
$$|3(x-1)| < \varepsilon$$
$$\Uparrow$$
$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\Uparrow$$
$$0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Kies $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$, dan volgt uit $0 < |x-1| < \delta$ dat $|f(x)+3| < \varepsilon$.

**Opdracht 40 bladzijde 167**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.




**1** Voor welke $a \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ niet?

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat niet als $a = -4$ of $a = 2$

**2** Voor welke waarde(n) van $a$ is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2$ als $a = 0$ of $a \geqslant 4$

**3** Voor welke waarde(n) van $a$ is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ als $a = -2$

**4** Voor welke waarde(n) van $a$ is $\lim\limits_{x \to a} f(x) = |a|$?

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = |a|$ als $a = -3$ of $a = 1$ of $a = 3$

**Opdracht 41 bladzijde 168**

Enkele limietsituaties zijn symbolisch weergegeven.

Bereken, indien mogelijk.

**1** $\dfrac{1000}{(-\infty)^2} = 0$

**2** $\dfrac{1}{5} \cdot (+\infty) \cdot (-\infty) - 4 \cdot (+\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty$

**3** $3 \cdot (+\infty)^3 + 5 \cdot (-\infty) = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

**4** $3 \cdot (+\infty)^2 - (+\infty) + 4 = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

**5** $3 \cdot (-\infty)^2 - (-\infty) + 4 = +\infty + (+\infty) = +\infty$

**6** $\sqrt{10^{99} - (-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

**7** $5 \cdot (+\infty)^3 - 7 \cdot (+\infty) = +\infty + (-\infty)$: onbepaaldheid

**8** $-5 \cdot (-\infty)^3 - 7 \cdot (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

**9** $\dfrac{(+\infty)^5}{(+\infty)^4} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$: onbepaaldheid

**10** $\sqrt{(-\infty)^4 + \dfrac{3}{(-\infty)^3} - \dfrac{2}{(-\infty)^2}} = \sqrt{+\infty + 0 + 0} = +\infty$

**Opdracht 42 bladzijde 168**

Als $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{x^2} = 2$, bereken dan

**1** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2}{f(x)}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

**2** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 18$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3} x^2} = 2$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{9} = 2$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 18$$

**3** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3} x} = \frac{18}{3} = 6$$

**4** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-1}{f(x)}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-1}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} (x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3} f(x)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

**Opdracht 43 bladzijde 168**

Bereken indien mogelijk.

**1** $\lim\limits_{x\to 5} (5x-2) = 23$

**2** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6} = \frac{5}{8}$

**3** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -2} \frac{-2\cancel{(x+2)}}{x^2\cancel{(x+2)}} = -\frac{1}{2}$

**4** $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2+t}{t^5+t^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cancel{t}(t+1)}{t^{\cancel{3}^{\,2}}(t^2+1)}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$

**5** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{x^2-4x+4}\overset{\frac{-1}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{(x-2)^2}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty$

**6** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}\overset{\frac{3}{0}}{\Rightarrow}$ bestaat niet

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}}\dfrac{x}{x^2-9}\overset{\frac{3}{0^-}}{=}-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}}\dfrac{x}{x^2-9}\overset{\frac{3}{0^+}}{=}+\infty$

**7** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(\cancel{x+5})(x-2)}{\cancel{x+5}}=-7$

**8** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(\cancel{x+3})(x-1)}{\cancel{x+3}}=-4$

**9** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=3$

**10** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^3+4x^2+x-4}{x^2+x-20}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\cancel{x-4})(1-x^2)}{(\cancel{x-4})(x+5)}=-\dfrac{5}{3}$

**Opdracht 44 bladzijde 169**

Bereken $a$ en daarna de limiet als je weet dat deze eindig is.

**1** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+4}{2x^2+x-1}=\dfrac{-a+4}{0}$

De limiet moet eindig zijn, dus moet $-a+4=0 \Leftrightarrow a=4$.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x+4}{2x^2+x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(2x-1)}=-\dfrac{4}{3}$

**2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+2a}{4-x^2}=\dfrac{4+4a}{0}$

De limiet moet eindig zijn, dus moet $4+4a=0 \Leftrightarrow a=-1$.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{4-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\cancel{x-2})(x+1)}{-(\cancel{x-2})(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

**Opdracht 45 bladzijde 169**

Gegeven de functie $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+6x+7}{x+1} & \text{als } x \neq -1 \\ k & \text{als } x = -1 \end{cases}$.

Bepaal $k$ als $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

Uit $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ volgt dat

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1) = k$$

Nu is $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x^3+6x+7}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+7)}{\cancel{x+1}} = 9$

Uit $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = k$, volgt dus dat $k = 9$.

**Opdracht 46 bladzijde 169**

Gegeven de functie $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{als } x < 0 \\ 2x+8 & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{als } x > 2 \end{cases}$.

Bepaal, indien mogelijk.

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sqrt{4-x} = 2$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2x+8) = 8$

**3** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ : bestaat niet (linkerlimiet $\neq$ rechterlimiet)

**4** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (2x+8) = 12$

**5** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{x^3-8}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = 12$

**6** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 12$ (linkerlimiet = rechterlimiet)

**Opdracht 47 bladzijde 169**

Bereken de volgende limieten.

**1** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-5x^3 - 7x^2 - 8x - 9\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^3) = -5(+\infty)^3 = -\infty$

**2** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - 5x + 2\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

**3** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-4x^4 + 6x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^4) = -4(-\infty)^4 = -\infty$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5x^4 + x^2 + 4} = \sqrt{5(-\infty)^4} = +\infty$

**5** $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1+t}{1-t} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\cancel{t}}{-\cancel{t}} = -1$

**6** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 - 5x^2 - x + 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

**7** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{-x^2 + 4x - 10}{-4x^2 + x - 1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{-4x^2}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

**8** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

**9** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^3 + 5x^2 + 6x + 1}{-x - 3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^3}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2) = +\infty$

**10** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 2x - 1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9\,\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 9$

**Opdracht 48 bladzijde 170**

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Bereken

**1** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{x-1})(3x^2 - 7x + 2)}{(\cancel{x-1})(x^2 + x - 6)} = \frac{1}{2}$$

**2** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(\cancel{x-1})(\cancel{x-2})(3x - 1)}{(\cancel{x-1})(\cancel{x-2})(x + 3)} = 1$$

**3** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 3$$

**4** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}{x^3 - 7x + 6} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 3$$

## Opdracht 49 bladzijde 170

Kies telkens het juiste antwoord.

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{x^2 - 9} =$

**A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** $+\infty$ **E** $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{3-x}}{-(3-x)(3+x)} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{-\sqrt{3-x}\,(3+x)} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$\Rightarrow$ antwoord E

**2** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} - 2} =$

**A** 0 **B** 2 **C** 4 **D** $+\infty$ **E** $-\infty$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\underbrace{x^2+3-4}_{x^2-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = 2$$

$\Rightarrow$ antwoord B

**Opdracht 50 bladzijde 170**

Bereken.

**1** $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{4x-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{\overbrace{x^2-7-9}^{x^2-16}}{x(4-x)\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{(\cancel{x-4})(x+4)}{-x(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x^2-7}+3\right)} = -\dfrac{1}{3}$

**2** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$

**3** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-3}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{4x^2-(4x^2-3)}^{3}}{2x+\sqrt{4x^2-3}} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

**4** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-\sqrt{9x^2-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-3\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{\to 0}}\right)} = -\dfrac{1}{2}$

**5** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-2}{2x-\sqrt{9x^2-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{2}{4x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(2+3\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{\to 0}}\right)} = \dfrac{4}{5}$

**6** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0}}{\Rightarrow}$ bestaat niet

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0^-}}{=} -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \overset{\frac{4}{0^+}}{=} +\infty$

**7** $\lim\limits_{\substack{x\to -5\\ <}} \dfrac{2x+3}{1-\sqrt{x+6}} \overset{\frac{-7}{0^+}}{=} -\infty$

**8** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{\sqrt{4x+1}-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-(\cancel{x-2})(x+2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\underbrace{4x+1-9}_{4(\cancel{x-2})}} = -6$

**9** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x+5}{\sqrt{4x^4+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{5}{x^2}}^{\to 0}\right)}{2\cancel{x^2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{4x^4}}_{\to 0}}} = \dfrac{1}{2}$

**10** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x+5}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\overset{-1}{(\cancel{x-4})}\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\underbrace{(9-x-5)}_{\cancel{4-x}}} = -\dfrac{3}{2}$

**Opdracht 51 bladzijde 171**

Bereken

**1** $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \left( \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{15+x}{x^2-16} \right)$

$$= \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x+4-15-x}{x^2-16} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{-11}{x^2-16} \overset{\frac{-11}{0^+}}{=} -\infty$$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \left( \dfrac{9}{x^2-9} - \dfrac{1}{x+3} \right)$

$$= \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{9-(x-3)}{x^2-9} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{12-x}{x^2-9} \overset{\frac{15}{0^+}}{=} +\infty$$

**3** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3\sqrt{x+1}-2x}{x-3}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{9(x+1)-4x^2}{(x-3)\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{-4x^2+9x+9}{(x-3)\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{(\cancel{x-3})(-4x-3)}{(\cancel{x-3})\left(3\sqrt{x+1}+2x\right)} = -\frac{5}{4}$$

**4** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{1-\sqrt{x-3}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 4} \frac{(x+5-9)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)(1-(x-3))} = \lim_{x \to 4} \frac{\overset{-1}{(\cancel{x-4})}\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)(\cancel{4-x})} = -\frac{1}{3}$$

**Opdracht 52 bladzijde 171**

Gegeven de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^3 - bx^2 + 4x + c}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

**1** Bereken $a$, $b$ en $c$ als je weet dat $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ en $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ eindig is.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3}{x^3} = a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{c}{-1} = -c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{a-b+4+c}{0}$, deze limiet moet eindig zijn,

dus moet $a - b + 4 + c = 0 \underset{a=1,\, c=-2}{\Leftrightarrow} 1 - b + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 3$

Besluit: $a = 1, b = 3, c = -2$

**2** Bereken $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ voor de gevonden waarden van $a$, $b$ en $c$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 - 2x + 2)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{4}$$

**Opdracht 53 bladzijde 171**

Bepaal de strikt positieve getallen $a$ en $b$ als $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + ax - b}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} = 1$.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 + ax - b}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} = \frac{2a^2 - b}{0} \qquad (a > 0)$$

Deze limiet is eindig, dus moet $b = 2a^2$.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 + ax - 2a^2}{\sqrt{2x^2 - ax} - a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+2a)\left(\sqrt{2x^2 - ax} + a\right)}{\underbrace{2x^2 - ax - a^2}_{\cancel{(x-a)}(2x+a)}} = 2a$$

Nu moet $2a = 1$, dus $a = \dfrac{1}{2}$.

$b = 2a^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Besluit: $a = \dfrac{1}{2}$ en $b = \dfrac{1}{2}$

**Opdracht 54 bladzijde 171**

Beschouw de functie $f$ met een voorschrift van de vorm
$f(x) = c \cdot |x+1| + d \cdot |x-1|$.

Bepaal $c$ en $d$ zodanig dat $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

(bron © toelatingsproef Burg. Ir. KU Leuven 2001)

$f(x) = c \cdot |x+1| + d \cdot |x-1|$

Omdat $x \to +\infty$, zal $|x+1| = x+1$ en $|x-1| = x-1$

zodat voor $x \to +\infty$, $f(x) = c(x+1) + d(x-1)$

$= cx + c + dx - d$

$= (c+d)x + c - d$

Nu moet $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$, dus moet $c + d = 0$ en $c - d = 4$, zodat $c = 2$ en $d = -2$.

**Opdracht 55 bladzijde 171**

Als $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3$, geef dan een mogelijk voorschrift van $f$ als je weet dat $f$ een tweedegraadsfunctie is.

Uit $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}\overset{\frac{f(2)-5}{0}}{=}3$, volgt dat $f(2)=5$.

$f(x)-5$ is dan te schrijven als $(x-2)(ax+b)$ met $a\neq 0$ want f is een tweedegraadsfunctie.

Omdat $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(ax+b)=2a+b$ gelijk moet zijn aan 3, is $2a+b=3$ of $b=3-2a$.

Hieruit volgt dat $f(x)-5=(x-2)(ax+3-2a)=ax^2+(3-4a)x+4a-6$,

zodat $f(x)=ax^2+(3-4a)x+4a-1$ met $a\neq 0$.

**Opdracht 56 bladzijde 171**

Is $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ en is $f(x)<0$ in een basisomgeving van $a$, dan is $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Bewijs deze eigenschap voor $a\in\mathbb{R}$.

Gegeven: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

$\exists\,\delta'>0: 0<|x-a|<\delta' \Rightarrow f(x)<0$

Te bewijzen: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

Bewijs:

Uit het gegeven volgt: $\forall\,\varepsilon_1>0, \exists\,\delta_1>0: 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon_1$. (1)

Te bewijzen is: $\forall\, r>0, \exists\,\delta>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}<-r$ (2)

Kies een r en stel dan $\varepsilon_1=\dfrac{1}{r}$. (3)

Wegens (1) bestaat er dan een $\delta_1$ waarvoor geldt: $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)|<\dfrac{1}{r}$. (4)

Kies nu $\delta=\min\{\delta_1,\delta'\}$. (5)

In de basisomgeving $B(a,\delta)$ is $f(x)<0$, zodat $|f(x)|=-f(x)$.

Dan volgt uit (4): $0<|x-a|<\delta \Rightarrow -f(x)<\dfrac{1}{r}$. (6)

Er geldt: $-f(x)<\dfrac{1}{r} \Leftrightarrow f(x)>-\dfrac{1}{r} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}<-r$. (7)

Combineren we nu (3), (5), (6) en (7), dan hebben we (2) aangetoond.

**Opdracht 57 bladzijde 171**

Maak gebruik van geziene stellingen en rekenregels om de volgende eigenschap te bewijzen.

Indien in een open interval $I$ dat $a$ bevat geldt: $\forall\, x \in I \setminus \{a\} : f(x) < g(x)$ en indien bovendien $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, dan geldt $b \leqslant c$.

Gegeven: I is een open interval dat a bevat

$\forall\, x \in I \setminus \{a\} : f(x) < g(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$

Te bewijzen: $b \leqslant c$

Bewijs:

- Uit $f(x) < g(x)$ volgt dat $f(x) - g(x) < 0$.
- Eigenschap: Stel I een open interval dat a bevat.

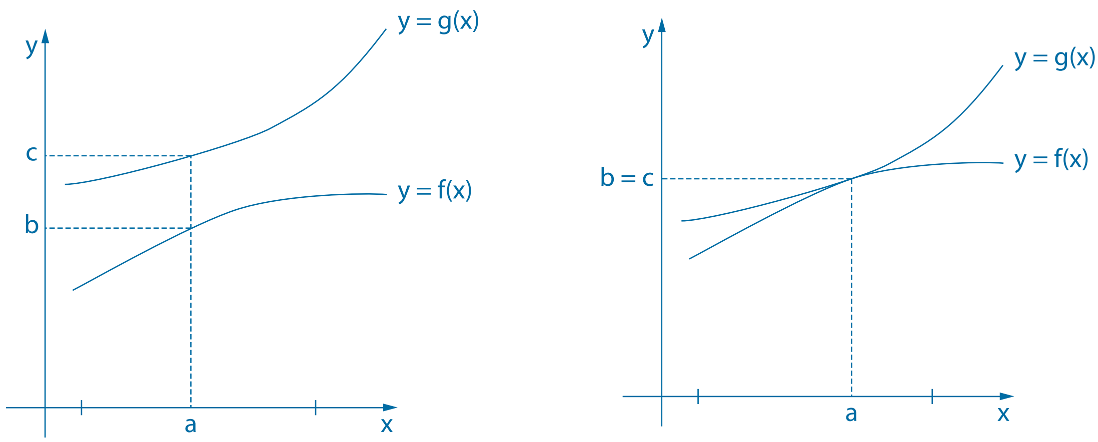
  Indien $\forall\, x \in I \setminus \{a\}$ geldt dat $h(x) < 0$ en

  indien $\lim\limits_{x \to a} h(x) = d$, dan geldt: $d \leqslant 0$.

  Nu is $f(x) - g(x) < 0$ en $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) \underset{\substack{\text{rekenregel} \\ \text{limieten}}}{=} \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = b - c$.

  Dus moet $b - c \leqslant 0$, m.a.w. $b \leqslant c$.

Grafische illustratie



**Opdracht 58 bladzijde 172**

Kies telkens het juiste antwoord en verklaar.

**1** De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{-x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 3}$ heeft

**A** geen horizontale en geen verticale asymptoten

**B** 1 horizontale en 1 verticale asymptoot

**C** 1 horizontale en 2 verticale asymptoten

**D** 1 horizontale en 3 verticale asymptoten

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 3x + 3} = \frac{(x-2)(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2-3)}$$

nulpunten teller: $-1, 1, 2$

nulpunten noemer: $1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ de grafiek van de functie f heeft 2 verticale asymptoten

Omdat de graad van de teller gelijk is aan de graad van de noemer, heeft de grafiek van f een horizontale asymptoot.

Antwoord C is juist.

**2** De grafiek van de functie $f : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$ heeft

**A** geen horizontale en geen schuine asymptoten

**B** 1 horizontale en geen schuine asymptoot

**C** 1 horizontale en 1 schuine asymptoot

**D** 2 schuine asymptoten

- $\text{dom } f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

  Het is dus zinvol om horizontale en schuine asymptoten te bepalen.

- De grafiek van de functie f heeft geen verticale asymptoten, de noemer = 1.

- $$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 1}}{x} = 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x}\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}}}{\cancel{x}} = 4$$

  $$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - 1} - 4x\right)$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 1 \cancel{-4x^2}}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

  $\Rightarrow$ SA: $y = 4x$

- $$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 1}}{x} = 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{-2\cancel{x}\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}}}{\cancel{x}} = 0$$

  $$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{4x^2 - (4x^2 - 1)}^{1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

  $\Rightarrow$ HA: $y = 0$

De grafiek van de functie heeft een schuine en een horizontale asymptoot.
Antwoord C is juist.

**Opdracht 59 bladzijde 172**

Gegeven de irrationale functie $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

**1** Bepaal het domein van $f$.

dom f = $]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$

$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$:

| $x$ | | $-1$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 3x - 4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**2** Waarom heeft het zin om schuine en horizontale asymptoten te zoeken?

Het is zinvol om horizontale en schuine asymptoten te bepalen omdat het domein van f gelijk is aan $]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$ en het dus zinvol is om x te laten naderen tot $\pm\infty$.

**3** Bepaal alle schuine en horizontale asymptoten van de grafiek van $f$.

Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$.

- $$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}\right)$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 3x - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 4}{x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x}\left(1 + \overbrace{\frac{4}{3x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{H.A.:} \quad y = \frac{3}{2}}$$

- $$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$$

$$= 2$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 3x - 4} - 2x\right)$$

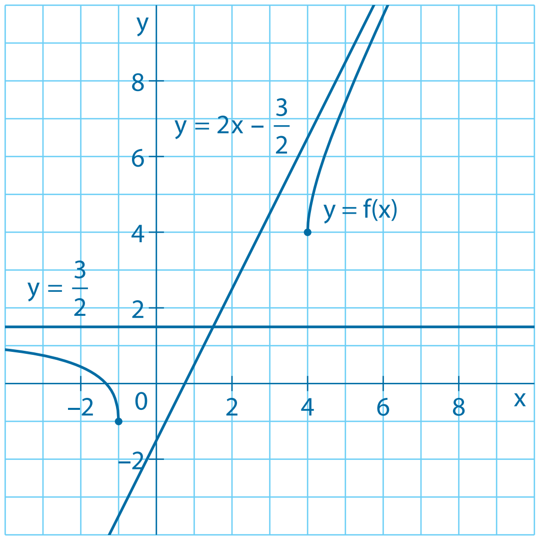
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x - 4} - x\right)$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 3x - 4 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4} + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-3\cancel{x}\left(1 + \overbrace{\frac{4}{3x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.:} \quad y = 2x - \frac{3}{2}}$$




**Opdracht 60 bladzijde 172**

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

**1** $f : x \mapsto \dfrac{2}{27x^3 + 8}$

$$f(x) = \frac{2}{27x^3 + 8}$$

rationale functie:

nulpunt noemer: $-\dfrac{2}{3}$

graad teller < graad noemer

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{V.A.:} \quad x = -\dfrac{2}{3} \\ \text{H.A.:} \quad y = 0 \\ \text{S.A.:} \quad / \end{array}}$$

**2** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

rationale functie:

nulpunten teller: $-1, 1$

nulpunten noemer: $1, -2$

graad teller < graad noemer

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{V.A.:} \quad x = -2 \\ \text{H.A.:} \quad y = 0 \\ \text{S.A.:} \quad / \end{array}}$$

**3** $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2}{-2x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{-2x^2 + 1}$$

rationale functie:

nulpunten teller: $0, -3$

nulpunten noemer: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

graad teller = graad noemer + 1

$$\begin{array}{rr|l} x^3 + 3x^2 & & -2x^2 + 1 \\ \cline{3-3} -x^3 \quad\quad + \frac{1}{2}x & & -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ \cline{1-1} 3x^2 + \frac{1}{2}x & & \\ -3x^2 \quad\quad + \frac{3}{2} & & \\ \cline{1-1} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & & \end{array}$$

V.A.: $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

H.A.: /

S.A.: $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

**4** $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x - 7}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 7}$$

- geen V.A. want geen nulpunten noemer
- grafisch vermoeden we 2 schuine asymptoten
- $a_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 7}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1 + \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{7}{x^2}}_{\to 0}}}{\cancel{x}} = 1$

$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 7} - x\right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + 4x - 7 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 4x - 7} + x}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4\cancel{x}\left(1 - \underbrace{\frac{7}{4x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{7}{x^2}}_{\to 0}} + 1\right)} = 2$

$\Rightarrow y = x + 2$

V.A.: /

H.A.: /

S.A.: $y = x + 2$

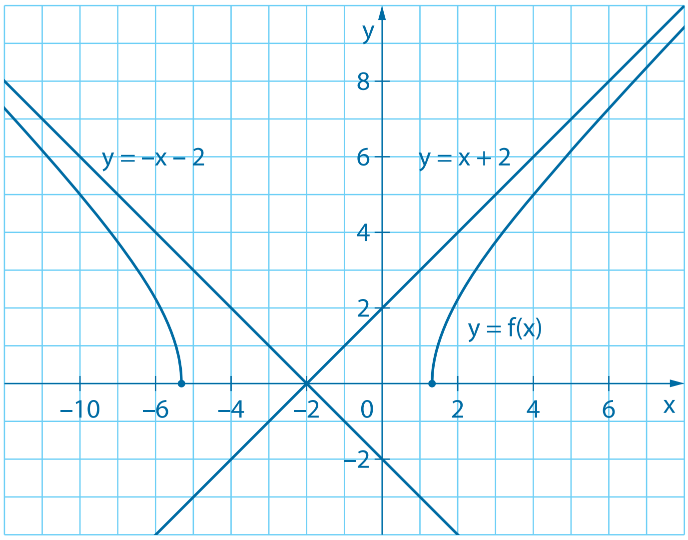
$y = -x - 2$

- $a_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x-7}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{4}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{7}{x^2}}}}{\cancel{x}} = -1$

$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-7}+x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+4x-7-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x-7}-x}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\cancel{x}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{7}{4x}}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{4}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{7}{x^2}}}+1\right)} = -2$

$\Rightarrow\ y = -x-2$




**5** $f: x \mapsto \sqrt{x^2-6x+3}+x-1$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+3}+x-1$

| |
|---|
| V.A.: / |
| H.A.: $y = 2$ |
| S.A.: $y = 2x-4$ |

- geen V.A. want geen nulpunt noemer
- grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+3}+x-1\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-6x+3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-6x+3}-(x-1)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-6x+3}-x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4\cancel{x}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{2}{4x}}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\underset{\to 0}{\frac{6}{x}}+\underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}+1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)} = 2$

$\Rightarrow\ y = 2$

- $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+3}+x-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+3}}{x} + 1 - 0$

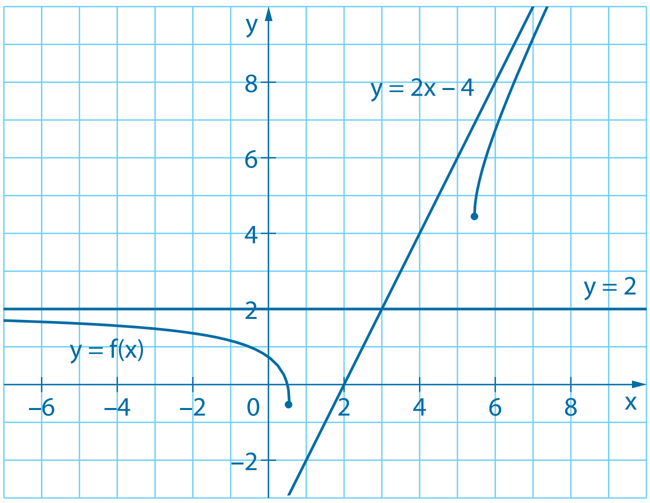
$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1-\overset{\to 0}{\dfrac{6}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^2}}}}{\cancel{x}} + 1 = 2$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+3}+x-1-2x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-6x+3}-(x+1)\right)$

$\overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-6x+3-(x+1)^2}{\sqrt{x^2-6x+3}+x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8x+2}{\sqrt{x^2-6x+3}+x+1}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-8\cancel{x}\left(1-\overset{\to 0}{\dfrac{2}{8x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\underset{\to 0}{\dfrac{6}{x}}+\underset{\to 0}{\dfrac{3}{x^2}}}+1+\underset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}\right)} = -4$

$\Rightarrow\ y = 2x - 4$




**6** $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}}$

| V.A.: $x = -1, x = 1$ |
|---|
| H.A.: $y = 1$ |
| S.A.: / |

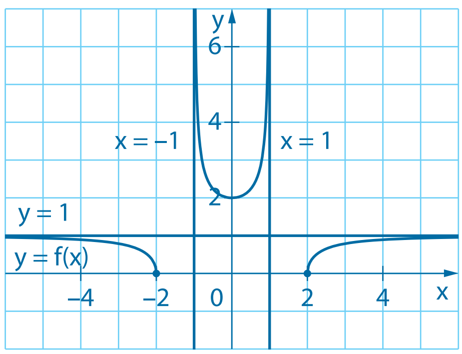
- dom $f = \,]-\infty, -2] \cup \,]-1, 1[\, \cup [2, +\infty[$

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}} \overset{\frac{-3}{0^-}}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}} \overset{\frac{-3}{0^-}}{=} +\infty$ V.A.: $x = -1, x = 1$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}}} = 1$ H.A.: $y = 1$



**Opdracht 61 bladzijde 173**

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+1}{cx^2+2x}$ heeft de rechte met vergelijking $y = 3x - 2$ als schuine asymptoot.

Bepaal *a*, *b* en *c*.

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{cx^2+2x}$$

De grafiek van de functie heeft een schuine asymptoot, dus moet bij deze rationale functie de graad van de teller 1 meer zijn dan de graad van de noemer: $a \neq 0$ en $\boxed{c = 0}$.

We voeren de euclidische deling uit:

$$\begin{array}{r|l} ax^2 + bx + 1 & 2x \\ \cline{2-2} -ax^2 \phantom{+ bx + 1} & \frac{a}{2}x + \frac{b}{2} \\ \cline{1-1} bx + 1 & \\ -bx \phantom{+ 1} & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Nu moet $\frac{a}{2}x + \frac{b}{2} = 3x - 2$, zodat $\frac{a}{2} = 3$ en $\frac{b}{2} = -2$, dus $\boxed{a = 6}$ en $\boxed{b = -4}$.

Besluit: $a = 6$, $b = -4$, $c = 0$.

**Opdracht 62 bladzijde 173**

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \sqrt{cx^2 + dx}$ heeft als schuine asymptoten de rechten met vergelijking $y = 4x + \frac{1}{2}$ en $y = -4x - \frac{1}{2}$.

Bepaal *c* en *d*.

$$f(x) = \sqrt{cx^2 + dx}$$

Schuine asymptoten:

- $$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{cx^2+dx}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{c}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{d}{cx}}}}{\cancel{x}}$$

  $$= \sqrt{c}$$

  Er geldt: $\sqrt{c} = 4$, dus $\boxed{c = 16}$.

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+dx}-\sqrt{16}x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{16x^2}+dx\cancel{-16x^2}}{\sqrt{16x^2+dx}+4x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{d\cancel{x}}{4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{d}{16x}}_{\to 0}}+1\right)}=\frac{d}{8}$$

Er geldt: $\frac{d}{8}=\frac{1}{2}$, dus $\boxed{d=4}$.

- $$a_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{cx^2+dx}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{c}\,\cancel{x}\sqrt{1+\overbrace{\frac{d}{cx}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$$

$$=-\sqrt{c}$$

Er geldt: $-\sqrt{c}=-4$, dus $\boxed{c=16}$.

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+dx}+\sqrt{16}x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{16x^2}+dx\cancel{-16x^2}}{\sqrt{16x^2+dx}-4x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{d\cancel{x}}{-4\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{d}{16x}}+1\right)}=-\frac{d}{8}$$

Er geldt: $-\frac{d}{8}=-\frac{1}{2}$, dus $\boxed{d=4}$.

Besluit: $c=16$, $d=4$.

**Opdracht 63 bladzijde 173**

De functie $f: x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+(d+1)x+d}$ heeft als enige nulpunt 1, als enige verticale asymptoot de rechte met vergelijking $x=-2$ en als horizontale asymptoot de rechte met vergelijking $y=2$.

Bepaal $a$, $b$, $c$ en $d$.

(bron © toelatingsproef Burg. Ir. KU Leuven 2001)

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+(d+1)x+d}$$

- H.A.: $y=2$, dus moet $\boxed{a=2}$.
- $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x-c)}{(x+2)\left(x+\frac{d}{2}\right)}$ want 1 is een nulpunt en V.A.: $x=-2$.

  Maar enkel 1 mag nulpunt zijn, dus moet $\frac{c}{2}=-\frac{d}{2}$, m.a.w. $c=-d$.

  Bovendien moet $-c-2=b$ (coëfficiënt van x in de teller) en $\frac{d}{2}+2=d+1$ (coëfficiënt van x in de noemer), zodat $\boxed{d=2}$, $\boxed{c=-2}$ en $\boxed{b=0}$.
- Besluit: $a=2$, $b=0$, $c=-2$, $d=2$.

**Opdracht 64 bladzijde 173**

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

**1** $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

- $\text{dom } f = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$

| x | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | + | 0 | – | 0 | + |

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{V.A.: } x = 1, x = 2}$

- Grafisch vermoeden we twee schuine asymptoten.

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-3x+2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-3x+2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-3x+2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2-3x+2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-3x+2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^3}\left(1-\overbrace{\frac{2}{3x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}} \cdot \cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = x + \frac{3}{2}}$

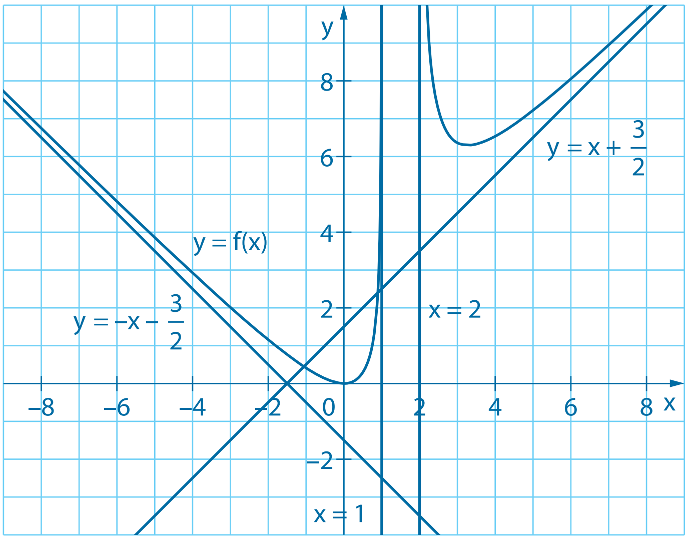
$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{-\cancel{x^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x+2}}+x\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x^3}\left(1-\overbrace{\frac{2}{3x}}^{\to 0}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\cdot\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = -x-\frac{3}{2}}$$



**2** $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

- dom $f = \mathbb{R}$
- Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$.
- $$\lim_{x \to -\infty} \left( x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x^2+9} + x^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)(-x)\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} + x^2}{-x\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^{\cancel{2}}\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \overbrace{\frac{9}{x^2}}^{\to 0}} - 1\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\cancel{1} + \frac{1}{x} \cancel{-1}\right)}{-\sqrt{1 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-1}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{H.A.: } y = 1}$

- $$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right)$$

$$= 1 + 0 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}} = 1 + 1 = 2$$

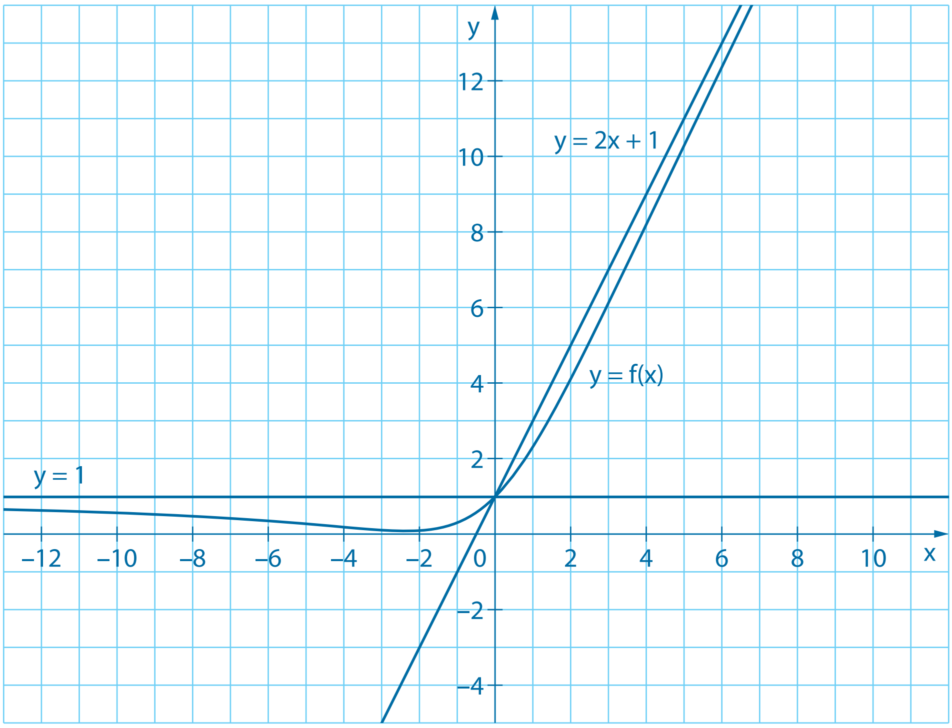
$$b = \lim_{x \to +\infty} \left( x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - 2x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - x \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2+9}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2+9}\right)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2 + x\sqrt{x^2+9}\right)}$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2+9)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2 + x\sqrt{x^2+9}\right)} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{-9\cancel{x^2}}{x\sqrt{1 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}} \cdot \cancel{x^2}\left(1 + \sqrt{1 + \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 2x + 1}$




**3** $f : x \mapsto \dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x-1}$$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{V.A.: } x = 1}$

- Grafisch vermoeden we een horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$ en een schuine asymptoot voor $x \to +\infty$ .

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

  $$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{-1}{-\infty}}{=} 0$$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{H.A.: } y = 0}$

- $$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\cancel{x}(x-1)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)} = 2$$

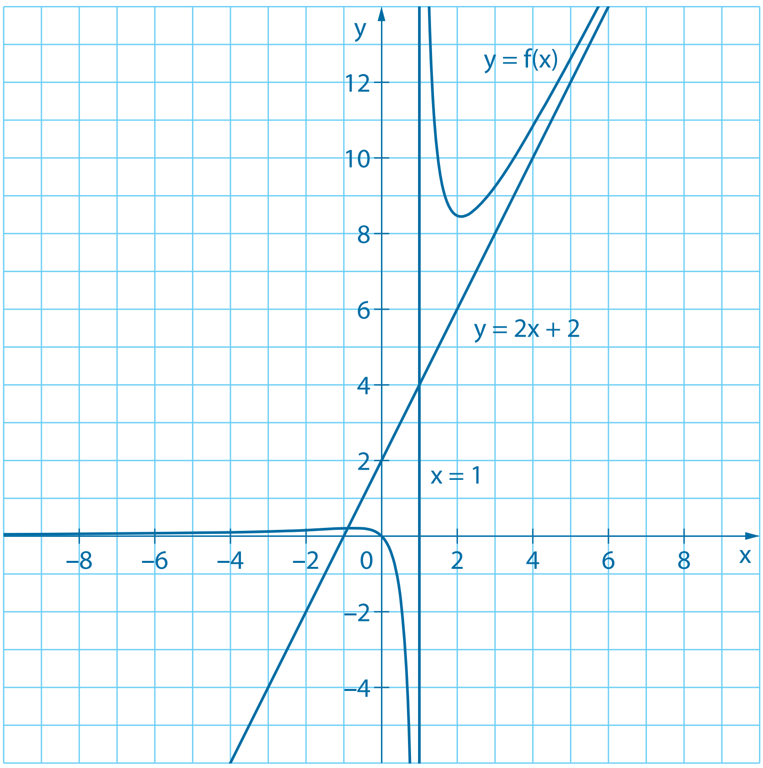
$$b = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{(x-1)} - 2x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+1} - 2x^2 + 2x}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x - x^2}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+1} + 2 - x\right)}{\cancel{x}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}$$

$$\overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - (2-x)^2}{\sqrt{x^2+1} - 2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{\sqrt{x^2+1} - 2 + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(4 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + 1\right)} = 2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 2x + 2}$



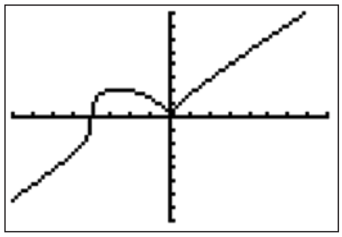
**Opdracht 65 bladzijde 174**

**Schuine asymptoten bij derdemachtswortelfuncties**

*Voorbeeld*

Bereken de asymptoten van de grafiek van de functie $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$.

– Het domein van $f$ is $\mathbb{R}$.
  De grafiek heeft dus geen verticale asymptoten.
– Na het plotten van de grafiek, vermoeden we een schuine asymptoot met vergelijking $y = ax + b$ met




$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}}{x} \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+4x^2} - x\right]$$

Dit is een limiet van de vorm '$\infty - \infty$'.

We vermenigvuldigen teller en noemer met het toegevoegde van de wortelvorm om het merkwaardig product $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ te kunnen gebruiken.

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2} - x\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+4x^2} + x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+4x^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x^2-x^3}{\sqrt[3]{x^6+8x^5+16x^4} + x\sqrt[3]{x^3+4x^2} + x^2}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} + 1} = \frac{4}{3}$$

De schuine asymptoot van de grafiek van $f$ heeft als vergelijking $y = x + \frac{4}{3}$.

Bereken op dezelfde manier de asymptoten van de grafiek van de functie

**1** $f : x \mapsto \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1}$

$$f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1}$$

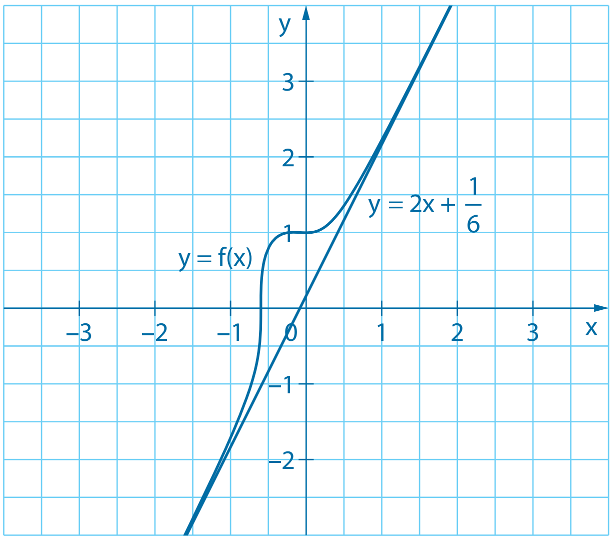
Grafisch vermoeden we een schuine asymptoot.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2\cancel{x}\sqrt[3]{1 + \underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}}}{\cancel{x}} = 2$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1} - 2x\right) \cdot \left(\left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1}\right)^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1} + 4x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1}\right)^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 + 1} + 4x^2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{8x^3} + \overbrace{2x^2 + 1}^{2\cancel{x^2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\to 0}\right)} \cancel{-8x^3}}{4\cancel{x^2}\left(\left(\sqrt[3]{1 + \underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \underbrace{\frac{2}{8x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{8x^3}}_{\to 0}} + 1\right)} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = 2x + \frac{1}{6}}$$



**2** $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}$

$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}$

Grafisch vermoeden we een schuine asymptoot.

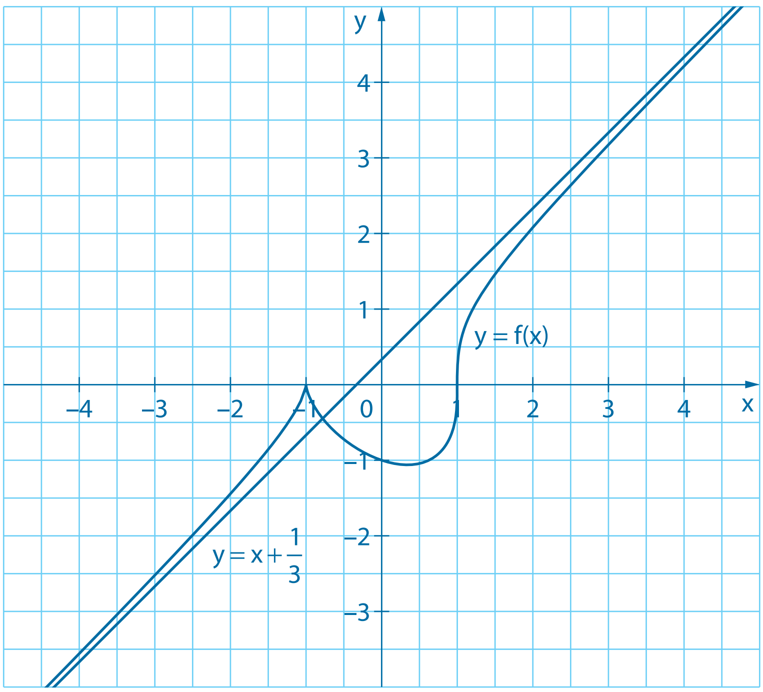
$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{\Big(1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\Big)\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}\Big)^2}}{\cancel{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2} - x\right)\left(\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2} + x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overbrace{(x-1)(x+1)^2}^{x^2-x-1} - x^3}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + 1\right)}$$

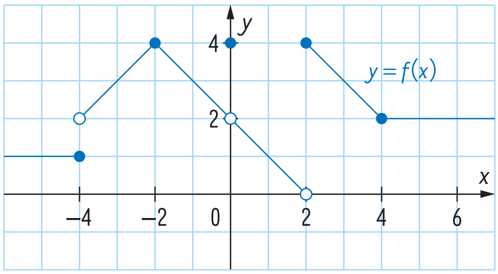
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(\left(\sqrt[3]{\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)^2} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = x + \frac{1}{3}}$$



**Opdracht 66 bladzijde 175**

De functie $f$ is gegeven door haar grafiek.




Is $f$ continu in

**1** 0?

f is niet continu in 0.

**2** 4?

f is continu in 4.

**3** [–4, 0]?

f is niet continu in [–4, 0].

**4** [–2, 1]?

f is niet continu in [–2, 1].

**5** [2, 4]?

f is continu in [2,4].

**Opdracht 67 bladzijde 175**

Voor welke $x$-waarden zijn de volgende functies continu?

**1** $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R}_0$.

**2** $f : x \mapsto \text{sgn}(x + 4)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < -4 \\ 0 & \text{als } x = -4 \\ 1 & \text{als } x > -4 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

**3** $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{als } x \neq 3 \\ 6 & \text{als } x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 & \text{als } x \neq 3 \\ 6 & \text{als } x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6 = f(3)$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R}$.

**4** $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$

| x | | −2 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 4$ | + | 0 | − | 0 | + |

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{als } x = -2 \text{ of } x = 2 \\ 1 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \end{cases}$$

f is continu voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

**Opdracht 68 bladzijde 175**

De functie $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{als } x \geqslant -2 \\ ax + 2 & \text{als } x < -2 \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal $a$.

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -2a + 2$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = 4$$

Nu moet f continu zijn in $\mathbb{R}$, dus ook in −2, zodat

$-2a + 2 = 4$

$\boxed{a = -1}$

**Opdracht 69 bladzijde 175**

De functie $f$ is continu in 3 en $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ als $x \neq 3$.

Bepaal $f(3)$.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} \quad \text{als } x \neq 3$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{9}{2} = f(3), \text{ want f is continu in 3.}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(3) = \frac{9}{2}}$$

**Opdracht 70 bladzijde 176**

De functie $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+9x+13} & \text{als } x \geqslant a \\ 3x-2 & \text{als } x < a \end{cases}$ is continu in $\mathbb{R}$.

Bepaal $a$.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = 3a - 2$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \sqrt{a^2 + 9a + 13}$$

f is continu in $\mathbb{R}$, dus ook in a.

We houden rekening met de bestaansvoorwaarde dat

$a^2 + 9a + 13 \geqslant 0$

$D = 29$

| a | | $a_1$ | | $a_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^2 + 9a + 13$ | + | 0 | − | 0 | + |

$$a_1 = \frac{-9 - \sqrt{29}}{2} \approx -7{,}19$$

$$a_2 = \frac{-9 + \sqrt{29}}{2} \approx -1{,}81$$

$\sqrt{a^2 + 9a + 13} = 3a - 2$

KV: $3a - 2 \geqslant 0$

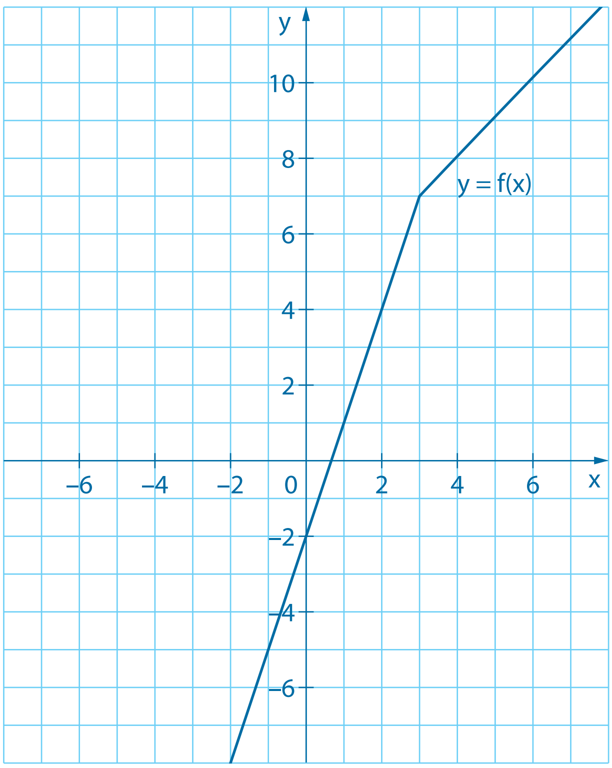
$a \geqslant \frac{2}{3}$

$a^2 + 9a + 13 = 9a^2 - 12a + 4$

$8a^2 - 21a - 9 = 0$

$a = 3$ of $\cancel{a = -\frac{3}{8}}$ (KV)

$\Rightarrow a = 3$



**Opdracht 71 bladzijde 176**

Onderzoek de continuïteit van de functie $f : x \mapsto \begin{cases} |x-1| & \text{als } x < 2 \\ 1-x+\frac{1}{2}x^2 & \text{als } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{26}{5x-15} & \text{als } x > 4 \end{cases}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{als } x < 1 \\ x-1 & \text{als } 1 \leqslant x < 2 \\ 1-x+\frac{1}{2}x^2 & \text{als } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{26}{5x-15} & \text{als } x > 4 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \frac{26}{5} \neq 5$

$\Rightarrow$ f is continu in $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

**Opdracht 72 bladzijde 176**

De functie $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ beeldt elk reëel getal $x$ af op het grootste geheel getal dat kleiner of gelijk is aan $x$.

Zo is $\lfloor 3,75 \rfloor = 3$, $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$ en $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Zijn de volgende functies continu, linkscontinu of rechtscontinu in 0?

**1** $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \lfloor x \rfloor = -1 \neq f(0)$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \lfloor x \rfloor = 0 = f(0)$$

f is niet linkscontinu in 0.

f is rechtscontinu in 0.

f is niet continu in 0.

**2** $f : x \mapsto \lfloor \cos x \rfloor$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ < \\ >}} \lfloor \underbrace{\cos x}_{\text{positief getal dicht bij 1 maar kleiner dan 1}} \rfloor = 0 \neq f(0) = 1$$

f is niet linkscontinu, niet rechtscontinu, niet continu in 0.

**3** $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

$f(0) = 0$

f is linkscontinu, rechtscontinu en continu in 0.

**4** $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor \cdot \operatorname{sgn}(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{\lfloor x \rfloor} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{-1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\lfloor x \rfloor} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{+1} = 0 = f(0)$$

f is niet linkcontinu, wel rechtscontinu en dus niet continu in 0.

**Opdracht 73 bladzijde 176**

De functie $f$ is continu in $\mathbb{R}$ en $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$ als $x \neq -3$ en $x \neq 3$.

Bepaal $f(-3)$ en $f(3)$.

$$\lim_{x \to -3} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{-x - 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{-\cancel{(x+3)}} = 6$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 6$$

f is continu in $\mathbb{R}$, dus geldt dat $f(-3) = f(3) = 6$.

**Opdracht 74 bladzijde 176**

De functie $f$ heeft als voorschrift $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7}$ als $x \neq 1$.

Bepaal $f(1)$ als je weet dat de functie met voorschrift $g(x) = x + f(x)$ continu is in 1.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(2x^2 + 2x + 7)} \underset{x \neq 1}{=} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x + 7}$$

Als g continu is in 1 moet ook f continu zijn in 1, dus moet $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$,

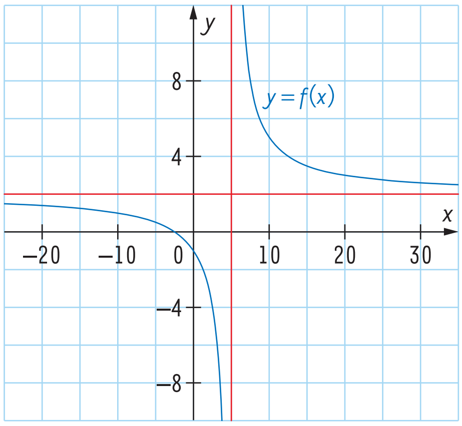
m.a.w. $f(1) = \frac{0}{11} = 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$

**Opdracht 75 bladzijde 177**

De grafiek van de functie $f$ en de asymptoten ervan zijn getekend.

Bepaal de volgende limieten als ze bestaan.




**1** $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x)$ $= -\infty$

**2** $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x)$ $= +\infty$

**3** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ bestaat niet

**4** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $= 2$

**5** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $= 2$

**Opdracht 76 bladzijde 177**

Bepaal $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ als $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{als } x \neq 3 \\ 2 & \text{als } x = 3 \end{cases}$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{(\cancel{x-3})(x-4)}{\cancel{x-3}} = -1$$

**Opdracht 77 bladzijde 177**

Bereken de volgende limieten.

**1** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^3+3x^2-6x+2}{2x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^{\cancel{3}^2}}{2\cancel{x}}=-\infty$

**2** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2-(9x^2-5x+1)}{3x-\sqrt{9x^2-5x+1}}$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5\cancel{x}\left(1-\overbrace{\frac{1}{5x}}^{\to 0}\right)}{3\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{5}{9x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$=\frac{5}{6}$$

**3** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{4-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\cancel{x-4})(x+3)}{-(\cancel{x-4})}=-7$

**4** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(\cancel{x+2})(x-1)}{(x+2)^{\cancel{2}}}\overset{\frac{-3}{0}}{\Rightarrow}$ bestaat niet

$$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}}\frac{x-1}{x+2}\overset{\frac{-3}{0^-}}{=}+\infty$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}}\frac{x-1}{x+2}\overset{\frac{-3}{0^+}}{=}-\infty$$

**5** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty$

**6** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{x^3+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{9-(x^2+8)}{(x+1)(x^2-x+1)\left(3+\sqrt{x^2+8}\right)}$

$$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-(x-1)(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)\left(3+\sqrt{x^2+8}\right)}$$

$$=\frac{1}{9}$$

**Opdracht 78 bladzijde 178**

Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafieken van de volgende functies.

**1** $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)}$$

De grafiek van deze functie heeft één verticale asymptoot met vergelijking $x = -2$.

Omdat de graad van de teller 1 meer is dan de graad van de noemer, is er ook een schuine asymptoot.

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -8 & x^2 - 4 \\ \cline{3-3} -x^3 + 4x & & x \\ \cline{1-2} & 4x - 8 & \end{array}$$

De vergelijking van de schuine asymptoot is $y = x$.

Besluit: V.A.: $x = -2$

H.A.: /

S.A.: $y = x$

**2** $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x - 7}$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 6x - 7} = \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-7)}$$

De grafiek van f heeft dus één verticale asymptoot met vergelijking $x = 7$.

Omdat de graad van de teller gelijk is aan de graad van de noemer is er een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 3$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3$.

Besluit: V.A.: $x = 7$

H.A.: $y = 3$

S.A.: /

**3** $f : x \longmapsto 5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$f(x) = 5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

- dom f = ]−∞, 1] ∪ [3, +∞[
- De grafiek van f heeft geen verticale asymptoot, want er is geen noemer.
- Grafisch vermoeden we twee schuine astymptoten.

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 5 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \overset{\to 0}{\frac{4}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}}{\cancel{x}}$$

$$= 5 + 1 = 6$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(5x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 6x\right)$$

$$= 2 + \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x\right)$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x + 3 \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{-4\cancel{x}\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{4x}}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}} + 1\right)}$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\text{S.A.: } y = 6x}$

$$a_2 = 5 + \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1 - \overset{\to 0}{\frac{4}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}}{\cancel{x}} = 5 - 1 = 4$$

$$b_2 = 2 + \lim_{x \to -\infty} \left(5x + \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 4x\right)$$

$$= 2 + \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x\right)$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x + 3 \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 2 + \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{-}4\cancel{x}\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{4x}}\right)}{\cancel{-x}\left(\sqrt{1 - \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}} + 1\right)}$$

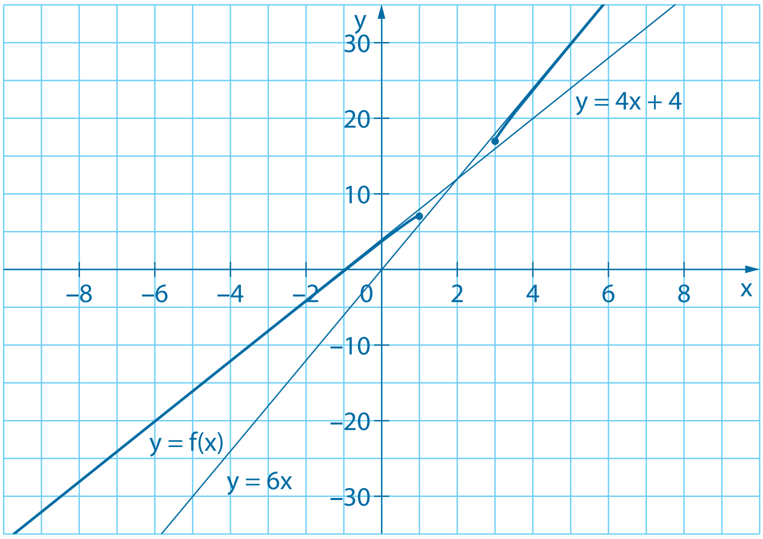
$$= 2 + 2 = 4$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{S.A.: } y = 4x + 4}$

Besluit: V.A.: /

H.A.: /

S.A.: $y = 6x$ en $y = 4x + 4$




**4** $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}}$

- dom f = $]-\infty, -2] \cup ]-1, 1[ \cup [3, +\infty[$

| x | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$ | + | 0 | – | \| | + | \| | – | 0 | + |

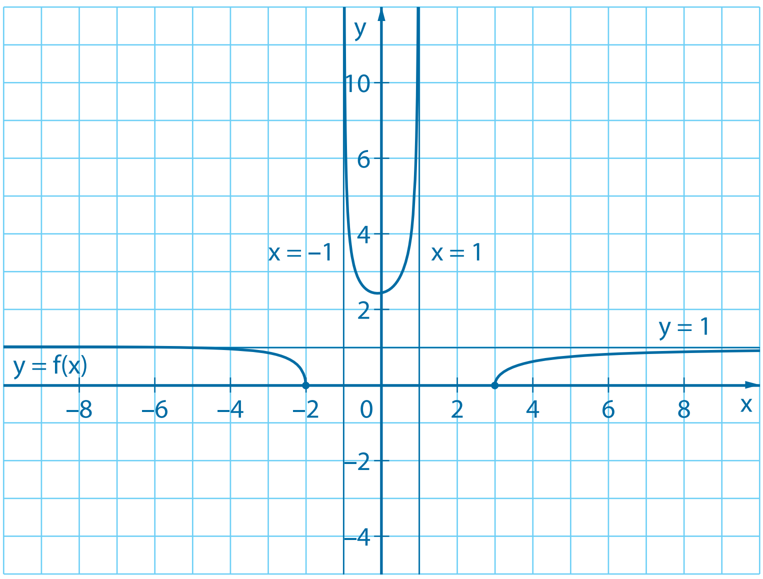
- De grafiek heeft twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -1$ en $x = 1$.
- De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 1$,

want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}}} = 1.$

Besluit: V.A.: $x = -1$, $x = 1$

H.A.: $y = 1$

S.A.: /



**Opdracht 79 bladzijde 178**

Stel een mogelijk voorschrift op van een functie $f$ die slechts één nulpunt heeft en waarbij $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$ en $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Voorbeeld: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2(x-4)}$

**Opdracht 80 bladzijde 178**

Gegeven de functie $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x+2|} & \text{als } x \neq -2 \\ 4 & \text{als } x = -2 \end{cases}$.

**1** Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x)$ en $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x^2-4}{-(x+2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{-(\cancel{x+2})} = 4$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x^2-4}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} = -4$$

**2** Is $f$ continu, linkscontinu en/of rechtscontinu in $-2$? Verklaar.

$f$ is enkel linkscontinu in $-2$, want $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 4 = f(-2)$.

**Opdracht 81 bladzijde 178**

**1** Bepaal $k$ als $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+kx^2+3x+9}$ een reëel getal verschillend van 0 is.

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+kx^2+3x+9} = \frac{0}{k+5}$$

Deze limiet moet een reëel getal verschillend van 0 zijn, dus moet $k = -5$.

**2** Bereken de limiet voor de gevonden waarde van $k$.

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -1} \frac{(\cancel{x+1})(2x^2-7x+3)}{(\cancel{x+1})(x-3)^2} = \frac{3}{4}$$

**Opdracht 82 bladzijde 178**

De grafiek van de functie $f : x \mapsto \dfrac{ax^3 + bx^2 - 4}{cx^2 + dx + 4}$ heeft als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = -\dfrac{1}{2}$ en $x = 4$ en als schuine asymptoot de rechte met vergelijking $y = -3x$.

Bepaal $a$, $b$, $c$ en $d$.

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 4}{cx^2 + dx + 4}$$

De grafiek heeft als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = -\dfrac{1}{2}$ en $x = 4$, dus moet $cx^2 + dx + 4 = c\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 4)$.

De grafiek heeft als schuine asymptoot de rechte met vergelijking $y = -3x$, dus is $\dfrac{a}{c} = -3$.

$cx^2 + dx + 4 = c\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x - 4) = cx^2 - \dfrac{7}{2}cx - 2c$, hieruit volgt dat $-2c = 4$, dus $c = -2$.

Uit $\dfrac{a}{c} = -3$ volgt dan dat $a = 6$.

Uit $d = -\dfrac{7}{2}c$ en $c = -2$ volgt dan dat $d = 7$.

Om b te bepalen voeren we de euclidische deling uit van $6x^3 + bx^2 - 4$ door $-2x^2 + 7x + 4$.

$$\begin{array}{lll|l}
6x^3 + bx^2 & & -4 & -2x^2 + 7x + 4 \\ \cline{4-4}
-6x^3 + 21x^2 & +12x & & -3x + \dfrac{b+21}{-2} \\ \cline{1-3}
(b+21)x^2 & +12x & -4 & \\
-(b+21)x^2 & -\dfrac{7(b+21)}{-2}x & -\dfrac{4(b+21)}{-2} & \\ \cline{1-3}
 & \dfrac{7b+171}{2}x & +2b+38 &
\end{array}$$

Omdat de schuine asymptoot als vergelijking $y = -3x$ heeft, moet $\dfrac{b+21}{-2} = 0$, dus $b = -21$.

Besluit: $a = 6$, $b = -21$, $c = -2$, $d = 7$.

# Hoofdstuk 9

## Afgeleiden II



**Opdracht 1 bladzijde 182**

Stel een formule op voor de volgende afgeleiden m.b.v. de limietdefinitie.

**1** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{a^2 - x^2}{x^2a^2(x - a)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{-\cancel{(x-a)}(x + a)}{x^2a^2\cancel{(x-a)}} = -\frac{2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$$

**2** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

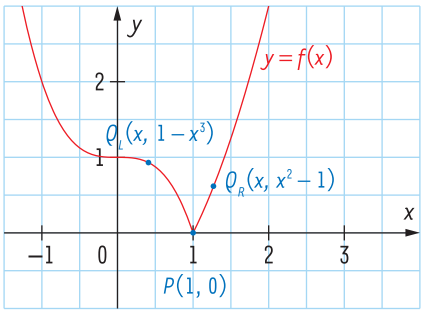
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{a}}}{\cancel{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Opdracht 2 bladzijde 183**

De functie $f$ wordt bepaald door een meervoudig voorschrift:

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1 - x^3 & \text{als } x < 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \\ x^2 - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$




Met de rekenregels voor afgeleiden kan $f'$ snel bepaald worden voor $x < 1$ en $x > 1$:

$$f': x \mapsto \begin{cases} -3x^2 & \text{als } x < 1 \\ 2x & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

We onderzoeken nu waaraan $f'(1)$ gelijk is.

**1** Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. We noemen dit de linkerafgeleide van $f$ in 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1 - x^3}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -(x^2 + x + 1) = -3$$

**2** De linkerraaklijn $t_L$ is de rechte door $P$ met de linkerafgeleide als richtingscoëfficiënt. Het is de limietstand van de rechten $Q_L P$ met $Q_L \to P$ en $Q_L$ links van $P$ op de grafiek van $f$.

Geef een vergelijking van $t_L$.

$t_L \leftrightarrow y - f(1) = -3(x - 1)$

$\leftrightarrow y = -3x + 3$

**3** Bereken de rechterafgeleide $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ en geef een vergelijking van de rechterraaklijn $t_R$ aan de grafiek van $f$ in $P$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x + 1) = 2$$

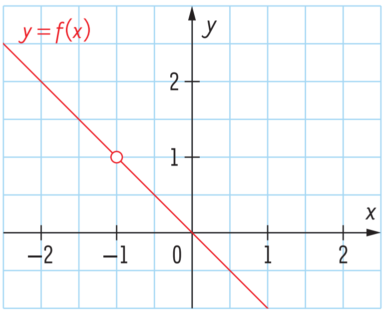
$t_R \leftrightarrow y = 2(x - 1)$

$\leftrightarrow y = 2x - 2$

**Opdracht 3 bladzijde 188**

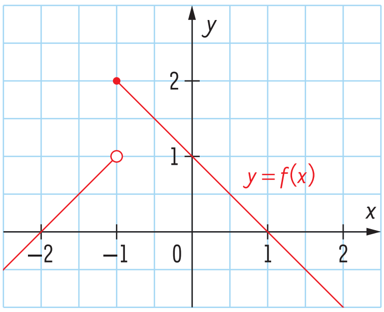
De functie $f$ is gegeven door haar grafiek. Bepaal grafisch de (linker-, rechter-) afgeleide van $f$ in $-1$, indien $f$ daar afleidbaar is.

**1**




$-1 \notin$ dom f, f is dus noch links-, noch rechtsafleidbaar in $-1$ en dus ook niet afleidbaar in $-1$.

**2**

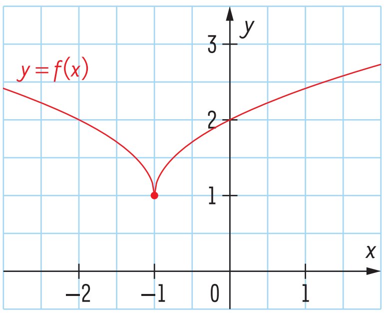



De functie f is niet continu in $-1$, wel rechtscontinu.

De functie f is niet afleidbaar in $-1$.

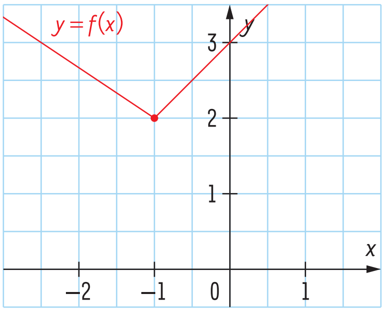
De linkerafgeleide bestaat niet en de rechterafgeleide is $-1$ (rico rechte).

**3**




De functie f is continu voor $x = -1$ en $t \leftrightarrow x = -1$ is de verticale raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(-1, 1)$. Dit betekent dat f niet afleidbaar is in $-1$. Zowel de linkerafgeleide als de rechterafgeleide bestaan niet.

**4**




De functie f is continu voor x = –1. Ze vertoont een 'knik' in (–1, 2). De functie is niet afleidbaar in dat punt. De rechterafgeleide is 1 en de linkerafgeleide is $-\frac{2}{3}$ (rico rechte)

**Opdracht 4 bladzijde 188**

Beschouw de functie $f: x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{als } x < -3 \\ 2x - 1 & \text{als } x \geqslant -3 \end{cases}$.

Teken de hellinggrafiek van $f$. Gebruik daartoe de limietdefinitie om te onderzoeken wat er gebeurt voor $x = -3$.

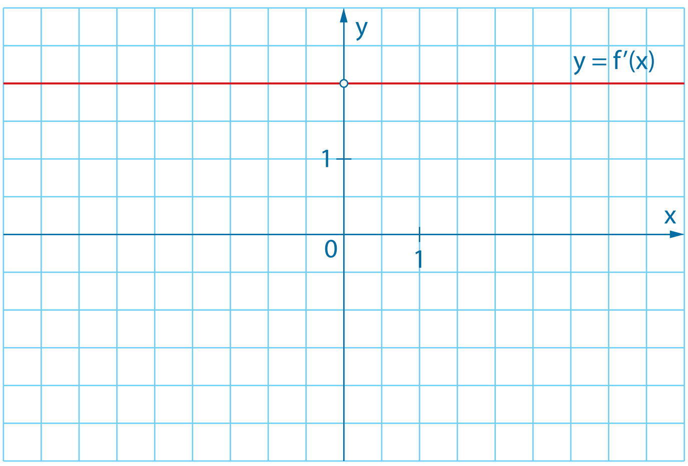
- $f'(x) = 2$ voor $x < -3$

  $f'(x) = 2$ voor $x > -3$
- Voor $x = -3$ geldt:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{2x + 7}{x + 3} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{2x - 1 + 7}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{2(x + 3)}{x + 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} 2 = 2$$

  f is niet afleidbaar in –3.
- Hellinggrafiek:



**Opdracht 5 bladzijde 189**

Onderzoek de afleidbaarheid van de volgende functies in de gegeven $x$-waarde.

**1** $f: x \mapsto \begin{cases} 1-x^2 & \text{als } x \leqslant 1 \\ x^2-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$ in 1

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1-x^2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (-(x+1)) = -2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+1) = 2$
- Daar de linkerafgeleide van f in 1 verschillend is van de rechterafgeleide van f in 1, bestaat de afgeleide van f in 1 niet en is f dus niet afleidbaar in 1.

**2** $f: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ in 1

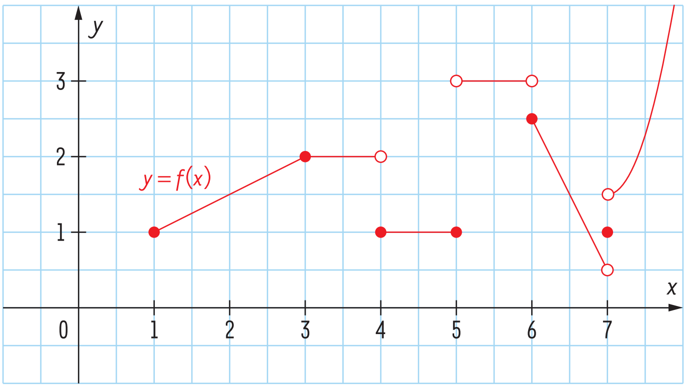
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{4}(x-1)(x+1)}{x-1}$

  $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\dfrac{1}{4}(x+1)\right] = \dfrac{1}{2}$
- De linkerafgeleide van f in 1 is gelijk aan de rechterafgeleide van f in 1, dus is f afleidbaar in 1 en $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

**Opdracht 6 bladzijde 191**

De functie *f* is gegeven door haar grafiek.

Is *f* afleidbaar, links afleidbaar of rechts afleidbaar in 1, 2, 3, ..., 7?




| x | afleidbaar | links afleidbaar | rechts afleidbaar |
|---|---|---|---|
| 1 | ✔ | | ✔ |
| 2 | ✔ | ✔ | ✔ |
| 3 | | ✔ | ✔ |
| 4 | | | ✔ |
| 5 | | ✔ | |
| 6 | | | ✔ |
| 7 | | | |

**Opdracht 7 bladzijde 192**

Beschouw twee functies $f$ en $g$.

**1** Maak gebruik van de limietdefinitie $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$

om formeel aan te tonen dat $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ voor alle inwendige punten $x$ van het domein van $f$ en $g$ waarvoor $f$ en $g$ afleidbaar zijn (somregel voor afgeleiden).

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$$ definitie afgeleide

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$$ definitie somfunctie

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$ rekenregels limieten

$$= f'(a) + g'(a)$$ f en g afleidbaar in a

$$\Rightarrow \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

**2** Toon op dezelfde manier aan dat voor een willekeurige $r \in \mathbb{R}$ geldt: $(r \cdot f)' = r \cdot f'$ (veelvoudregel voor afgeleiden).

$$(r \cdot f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(r \cdot f)(x)-(r \cdot f)(a)}{x-a}$$ definitie afgeleide

$$= \lim_{x \to a} \frac{r \cdot f(x) - r \cdot f(a)}{x-a}$$ definitie veelvoudfunctie

$$= \lim_{x \to a} r \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= r \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ rekenregels limieten

$$= r \cdot f'(a)$$ f is afleidbaar in a

$$\Rightarrow \quad (r \cdot f)'(x) = r \cdot f'(x)$$

Dit bevestigt de rekenregels die we in hoofdstuk 6 al aantoonden via een meer intuïtieve interpretatie van ‘naderen tot’.

**Opdracht 8 bladzijde 194**

Stel $f$, $g$, $h$ en $i$ functies die afleidbaar zijn in een bepaald open interval.
Toon aan dat in dat interval geldt:

**1** $(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' && \text{productregel} \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') && \text{productregel} \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

**2** $(f \cdot g \cdot h \cdot i)' = f' \cdot g \cdot h \cdot i + f \cdot g' \cdot h \cdot i + f \cdot g \cdot h' \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i'$

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h \cdot i)' &= ((f \cdot g \cdot h) \cdot i)' \\ &= (f \cdot g \cdot h)' \cdot i + (f \cdot g \cdot h) \cdot i' && \text{productregel} \\ &= (f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h') \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i' && \text{oef 1} \\ &= f' \cdot g \cdot h \cdot i + f \cdot g' \cdot h \cdot i + f \cdot g \cdot h' \cdot i + f \cdot g \cdot h \cdot i'\end{aligned}$$

**Opdracht 9 bladzijde 194**

Bereken.

**1** $\dfrac{d}{dx}\left((2x^2 + 3) \cdot (3x + 5)\right)$

$= 4x(3x + 5) + (2x^2 + 3) \cdot 3$

$= 12x^2 + 20x + 6x^2 + 9$

$= 18x^2 + 20x + 9$

**2** $\dfrac{d}{dx}\left((x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)\right)$

$= x^2 + 2x + 4 + (x - 2)(2x + 2)$

$= x^2 + 2x + 4 + 2x^2 - 2x - 4$

$= 3x^2$

of

$\dfrac{d}{dx}\left((x - 2)(x^2 + 2x + 4)\right)$

$= \dfrac{d}{dx}(x^3 - 8)$

$= 3x^2$

**3** $\frac{d}{dx}\left(x \cdot (2x^3 + 3x + 1) \cdot (x - 3)\right)$

$= (2x^3 + 3x + 1)(x - 3) + x(6x^2 + 3)(x - 3) + x(2x^3 + 3x + 1)$

$x^2 - 3x$

$= 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 9x + x - 3 + 6x^4 - 18x^3 + 3x^2 - 9x + 2x^4 + 3x^2 + x$

$= 10x^4 - 24x^3 + 9x^2 - 16x - 3$

**4** $\frac{d}{dx}\left((1 + x) \cdot (2 - 3x) \cdot (4 + 2x)\right)$

$= (2 - 3x)(4 + 2x) - 3(1 + x)(4 + 2x) + 2(1 + x)(2 - 3x)$

$= 8 + 4x - 12x - 6x^2 - 12 - 6x - 12x - 6x^2 + 4 - 6x + 4x - 6x^2$

$= -18x^2 - 28x$

**Opdracht 10 bladzijde 194**

Bereken.

**1** $\frac{d}{dx}\left((-4x + 1)^2\right)$

$= 2(-4x + 1) \cdot (-4)$

$= -8(-4x + 1)$

$= 8(4x - 1)$

**2** $\frac{d}{dx}\left((2x^3 + 3x - 1)^4\right)$

$= 4(2x^3 + 3x - 1)^3(6x^2 + 3)$

$= 12(2x^2 + 1)(2x^3 + 3x - 1)^3$

**3** $\frac{d}{dx}\left((2x + 3) \cdot (2 - 3x)^2\right)$

$= \underline{2(2 - 3x)}^2 + (2x + 3) \cdot \underline{2(2 - 3x)}(-3)$

$= 2(2 - 3x)(2 - 3x - 6x - 9)$

$= 2(2 - 3x)(-9x - 7)$

$= -2(2 - 3x)\ (9x + 7)$

$= 2(3x - 2)(9x + 7)$

**4** $\frac{d}{dx}\left[\left((-2x-1)\cdot(x^3+4)\right)^3\right]$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-2(x^3 + 4) + (-2x - 1) \cdot 3x^2)$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-2x^3 - 8 - 6x^3 - 3x^2)$

$= 3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(-8x^3 - 3x^2 - 8)$

$= -3((-2x - 1)(x^3 + 4))^2(8x^3 + 3x^2 + 8)$

**5** $\frac{d}{dx}\left(2x+3\cdot(x^2-1)^5\right)$

$= 2 + 3 \cdot 5(x^2 - 1)^4 \cdot 2x$

$= 2 + 30x(x^2 - 1)^4$

**6** $\frac{d}{dx}\left((x^2-2)^5(x^2+2)^5\right)$

$= \frac{d}{dx}(x^4 - 4)^5$

$= 5(x^4 - 4)^4 \cdot 4x^3$

$= 20x^3(x^4 - 4)^4$

**Opdracht 11 bladzijde 197**

Bereken.

**1** $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2}{2-x}\right)$

$= \frac{3(2 - x) + (3x - 2)}{(2 - x)^2}$

$= \frac{6 - 3x + 3x - 2}{(2 - x)^2}$

$= \frac{4}{(2 - x)^2}$

**2** $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^7}\right)$

$= 4\frac{d}{dx}(x^{-7})$

$= -28x^{-8}$

$= -\frac{28}{x^8}$

**3** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)$

$$= \frac{3x^2(x^3+1)-(x^3-1)3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

**4** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$

$$= \frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$$

**5** $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-2}{5}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{8}{5}x$$

**6** $\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-2}{5x+1}\right)$

$$= \frac{8x(5x+1)-(4x^2-2)5}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{40x^2+8x-20x^2+10}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{20x^2+8x+10}{(5x+1)^2}$$

**Opdracht 12 bladzijde 198**

Bereken.

**1** $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{(2x-1)^2}{x^3}\right)^2\right)$

$= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(2x-1)^4}{x^6}\right)$

$= \dfrac{4(2x-1)^3 \cdot 2 \cdot x^6 - (2x-1)^4 \cdot 6x^5}{x^{12}}$

$= \dfrac{2(2x-1)^3x^5 \cdot (4x - 3(2x-1))}{x^{12}}$

$= \dfrac{2(2x-1)^3(-2x+3)}{x^7}$

**2** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x-2}{(-2x+5)^3}\right)$

$= \dfrac{3(-2x+5)^3 - (3x-2) \cdot 3(-2x+5)^2(-2)}{(-2x+5)^6}$

$= \dfrac{3(-2x+5)^2(-2x+5+2(3x-2))}{(-2x+5)^6}$

$= \dfrac{3(4x+1)}{(-2x+5)^4}$

**3** $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{3-7x^2}{2}\right)^5\right)$

$= 5\left(\dfrac{3-7x^2}{2}\right)^4 \cdot \left(-\dfrac{7}{2} \cdot 2x\right)$

$= \dfrac{5}{16}(3-7x^2)^4 \cdot (-7x)$

$= -\dfrac{35}{16}x(3-7x^2)^4$

**4** $\dfrac{d}{dx}\left((x^2-1)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$= 2x\left(x+\dfrac{1}{x}\right) + (x^2-1)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= 2x^2 + 2 + x^2 - 1 - 1 + \dfrac{1}{x^2}$

$= 3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{3x^4+1}{x^2}$

**Opdracht 13 bladzijde 198**

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$.

**1** Stel een vergelijking op van de raaklijn $t$ aan de grafiek van $f$ in het punt $P(a, f(a))$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$t \leftrightarrow y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$t \leftrightarrow y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

**2** Bepaal de snijpunten $S$ en $T$ van $t$ met de $x$-as en met de $y$-as.

Snijpunt met de x-as:

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a$ $\qquad S(2a, 0)$

Snijpunt met de y-as:

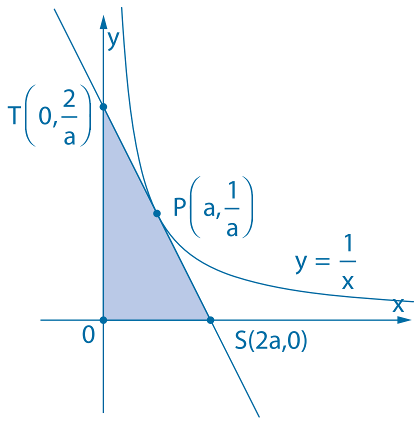
$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{a}$ $\qquad T\left(0, \frac{2}{a}\right)$

**3** Toon aan dat $P$ het midden is van $[TS]$.

$$\text{Midden } [TS]: \quad M\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right)$$

$$= M\left(a, \frac{1}{a}\right)$$

$$= P(a, f(a))$$




**4** Toon aan dat de oppervlakte van de driehoek $OST$ onafhankelijk is van $a$.

$$\text{Oppervlakte } \Delta\, OST = \frac{|OS| \cdot |OT|}{2}$$

$$= \frac{2|a| \cdot \frac{2}{|a|}}{2}$$

$$= 2$$

$\Rightarrow$ de oppervlakte is onafhankelijk van a.

**Opdracht 14 bladzijde 200**

Bereken.

**1** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{4x-1}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$$

**2** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{7x^2-13x+2}\right)$

$$= \frac{14x-13}{2\sqrt{7x^2-13x+2}}$$

**3** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{(2x-3)^3}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left((2x-3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 3\sqrt{2x-3}$$

**4** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$$

**5** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{(x^2-4)^2}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left((x^2-4)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$$

**6** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{\dfrac{4x}{2x-1}}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{4x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4x}{2x-1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{4(2x-1)-4x \cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2x-1}{4x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{-4}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{2x-1}{4x}\right)^3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{2^6x^3(2x-1)^5}} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{4x^3(2x-1)^5}}$$

**Opdracht 15 bladzijde 200**

De rechte $t \leftrightarrow y = mx + 1$ is een raaklijn aan de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Bepaal $m$.

- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
- $t \leftrightarrow y - \sqrt[3]{x_0} = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x - x_0)$ met raakpunt $P\left(x_0, \sqrt[3]{x_0}\right)$

$$y = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}x - \frac{1}{3}x_0^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}x + \frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}}$$

- Nu is $y = mx + 1$, dus moet

$$m = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} \quad \text{en} \quad \frac{2}{3}x_0^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow x_0^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{3}\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

**Opdracht 16 bladzijde 203**

Is de functie $f$ afleidbaar, links afleidbaar en/of rechts afleidbaar in $a$?

**1** $f: x \mapsto \sqrt{(x^2-1)^2}$ $\qquad a = -1$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2} - 0}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2-1}{x+1}$$

$\sqrt{(x^2-1)^2} = x^2 - 1$ voor $x < -1$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x-1) = -2$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x^2-1)}{x+1}$$

$\sqrt{(x^2-1)^2} = -(x^2-1)$ voor $-1 < x < 1$

$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{-(x-1)(x+1)}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} -(x-1) = 2$$

f is niet afleidbaar in –1, wel links afleidbaar (linkerafgeleide is –2) en rechts afleidbaar (rechterafgeleide is 2).

**2** $f: x \mapsto |x^3|$ $\qquad a = 0$

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{als } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$$

f is afleidbaar in 0, want de linkerafgeleide in 0 is gelijk aan de rechterafgeleide in 0.

$f'(0) = 0$

**3** $f: x \mapsto \sqrt[3]{x-5}$ $\qquad a = 5$

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

f is niet afleidbaar in 5, ook niet links afleidbaar en rechts afleidbaar.

Er is een verticale raaklijn aan de grafiek van f in (5, 0).

**4** $f: x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{als } x \leqslant 2 \\ 3 & \text{als } x > 2 \end{cases}$ $\qquad a = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{2-2}{x-2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{3-2}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{x-2} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

f is niet afleidbaar in 2, enkel links afleidbaar in 2.

**5** $f: x \mapsto \begin{cases} 1-2x & \text{als } x < -2 \\ -2x & \text{als } x \geqslant -2 \end{cases}$ $\qquad a = -2$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1-2x-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-2x-3}{x+2} \overset{\frac{1}{0^-}}{=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-2x-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-2(x+2)}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (-2) = -2$$

f is niet afleidbaar in – 2, enkel rechts afleidbaar in –2.

**6** $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4 & \text{als } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 12x - 22 & \text{als } x > 3 \end{cases}$ $\qquad a = 3$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2 - 4 - 5}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} (x+3) = 6$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-x^2 + 12x - 22 - 5}{x^2 - 9} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-x^2 + 12x - 27}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{-(x-9)(x-3)}{x-3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \big(-(x-9)\big) = 6$$

f is afleidbaar in 3, de linkerafgeleide en de rechterafgeleide zijn gelijk aan 6.

$f'(3) = 6$

**Opdracht 17 bladzijde 203**

Gegeven de functie $f: x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x < 0 \\ x^2 & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Toon aan dat $f'(0)$ bestaat maar $f''(0)$ niet.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} x^2 = 0$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$

  $\Rightarrow f'(0) = 0$

- $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 2x & \text{als } x > 0 \end{cases}$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{3x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (3x) = 0$

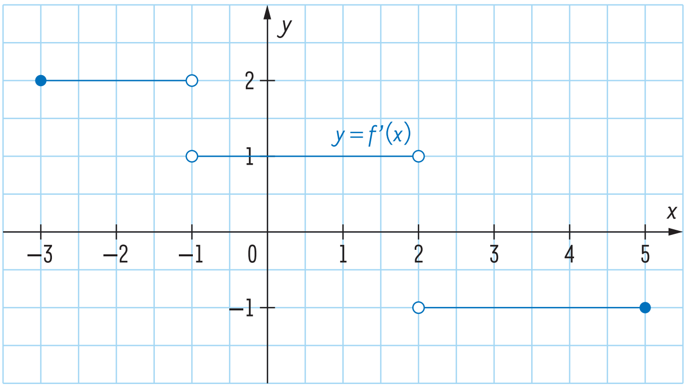
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2 = 2$

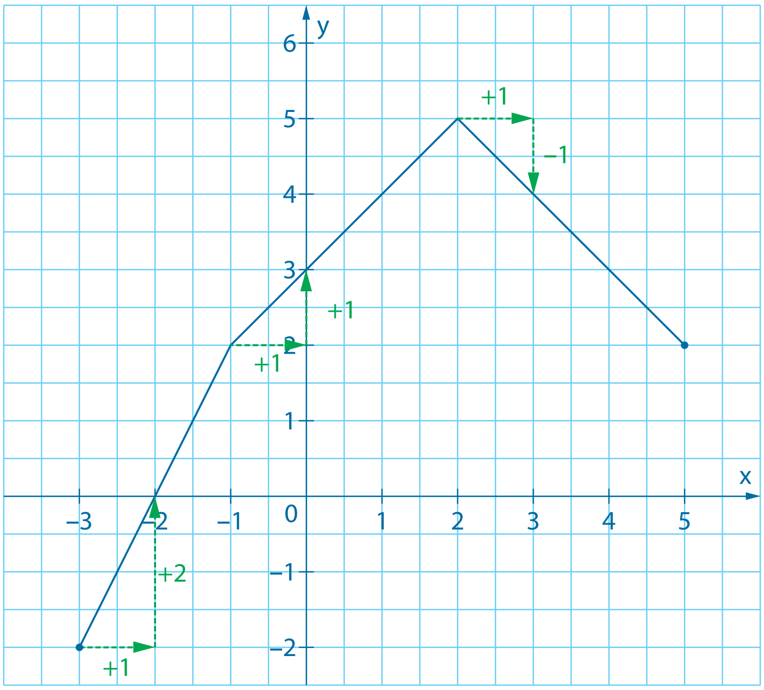
  $\Rightarrow f''(0)$ bestaat niet want de linkerafgeleide is verschillend van de rechterafgeleide.

**Opdracht 18 bladzijde 203**

De hellinggrafiek van de functie $f$ is getekend. $f$ is continu in haar domein $[-3, 5]$ en $f(-3) = -2$.

Teken de grafiek van $f$.



**Opdracht 19 bladzijde 204**

Geef telkens het voorschrift van een functie $f$ waarvoor geldt:

**1** $f$ is afleidbaar in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Voorbeeld: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

**2** $f$ is continu in $\mathbb{R}$ en de linker- en rechterafgeleide van $f$ in 2 zijn verschillend

Voorbeeld: $f(x) = |x-2|$

**3** $f$ is continu in $\mathbb{R}$, niet afleidbaar in $-1$ en er is een verticale raaklijn aan de grafiek van $f$ voor $x = -1$

Voorbeeld: $f(x) = \sqrt{|x+1|}$

**4** $f$ is afleidbaar in $\mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, links afleidbaar in $-4$ en rechts afleidbaar in 2

Voorbeeld: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leqslant -4 \\ 1 & \text{als } -4 < x < 2 \\ 2 & \text{als } x \geqslant 2 \end{cases}$

**Opdracht 20 bladzijde 204**

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \begin{cases} ax+2 & \text{als } x < -2 \\ x^2 & \text{als } x \geqslant -2 \end{cases}$.

Voor welke waarde(n) van $a$ is $f$ afleidbaar in $-2$? Verklaar.

- f moet continu zijn in $-2$ om er afleidbaar te zijn.

  $\Rightarrow$ $a \cdot (-2) + 2 = (-2)^2$

  $\Rightarrow$ $a = -1$

- Voor $a = -1$ is

  $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-x+2-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-(x+2)}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} -1$$

  en $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} -4$$

$\Rightarrow$ Linker- en rechterafgeleide zijn verschillend.

Voor geen enkele waarde van a is f afleidbaar in $-2$.

**Opdracht 21 bladzijde 204**

Voor welke waarde(n) van $a$ en $b$ is de functie $f\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 + ax & \text{als } x < 1 \\ -x^3 + ax^2 + b & \text{als } x \geqslant 1 \end{cases}$ afleidbaar voor alle waarden van $x$?

- f moet continu zijn in 1 dus
  $1^2 + a \cdot 1 = -1^3 + a + b$
  $\Rightarrow\ b = 2$
- Voor b = 2 is

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)} + a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2 + a$$

$$\text{en } \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{-x^3 + ax^2 + 2 - 1 - a}{x - 1}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\cancel{(x-1)}(-x^2 + (a-1)x + a - 1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= -1 + a - 1 + a - 1 = 2a - 3$$

| | $-1$ | $a$ | $0$ | $1-a$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $-1$ | $a-1$ | $a-1$ |
| | $-1$ | $a-1$ | $a-1$ | $0$ |

Linker- en rechterafgeleide zijn gelijk als $2 + a = 2a - 3 \iff a = 5$.
Voor $a = 5$ en $b = 2$ is f afleidbaar voor alle $x \in \mathbb{R}$.

**Opdracht 22 bladzijde 204**

Is de functie $f$ afleidbaar, links afleidbaar en/of rechts afleidbaar in 0?

**1** $f\colon x \mapsto 4x - x \cdot |x|$

$$f(x) = 4x - x \cdot |x| = \begin{cases} 4x + x^2 & \text{als } x < 0 \\ 4x - x^2 & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{4x + x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x(4 + x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (4 + x) = 4$
- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{4x - x^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x(4 - x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (4 - x) = 4$

De functie is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

**2** $f: x \mapsto \left(1-|x|\right)^2 + \left(1+|x|\right)^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-|x|\right)^2 + \left(1+|x|\right)^2 \\ &= 1 - 2|x| + |x|^2 + 1 + 2|x| + |x|^2 \\ &= 2 + 2|x|^2 \\ &= 2 + 2x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 4x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

De functie is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

**3** $f: x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{als } x \geqslant 0 \\ \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{-x}{x^2+1}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-1}{x^2+1} = -1$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2+1} = 1$

f is links afleidbaar in 0, de linkerafgeleide is $-1$.

f is rechts afleidbaar in 0, de rechterafgeleide is 1.

f is niet afleidbaar in 0.

**4** $f: x \mapsto \big||x-2| + |x+2|\big|$

Voor $x \to 0$ is $|x-2| = -x+2$ en $|x+2| = x+2$,

zodat $f(x) = |-x+2+x+2| = 4$.

f is afleidbaar in 0 en $f'(0) = 0$.

**5** $f: x \mapsto x + \sqrt{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{-x} & \text{als } x < 0 \\ x + \sqrt{x} & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x+\sqrt{-x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty$

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+\sqrt{x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$

f is niet afleidbaar in 0, ook niet links afleidbaar in 0 en niet rechts afleidbaar in 0.

**Opdracht 23 bladzijde 205**

Als $f(1)=4$, $g(1)=-2$, $f'(1)=\frac{1}{2}$ en $g'(1)=-1$, bepaal dan $h'(1)$ als

**1** $h(x)=(f\cdot g)(x)$

$$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(1)\cdot g(1)+f(1)\cdot g'(1)\\&=\frac{1}{2}\cdot(-2)+4\cdot(-1)\\&=-5\end{aligned}$$

**2** $h(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

$$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

$$\begin{aligned}h'(1)&=\frac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{\big(g(1)\big)^2}\\&=\frac{\frac{1}{2}\cdot(-2)-4\cdot(-1)}{(-2)^2}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

**3** $h(x)=\left(\dfrac{g}{f-g}\right)(x)$

$$h'(x)=\frac{g'(x)\big(f(x)-g(x)\big)-g(x)\big(f'(x)-g'(x)\big)}{\big(f(x)-g(x)\big)^2}$$

$$\begin{aligned}h'(1)&=\frac{g'(1)\big(f(1)-g(1)\big)-g(1)\big(f'(1)-g'(1)\big)}{\big(f(1)-g(1)\big)^2}\\&=\frac{-1(4+2)+2\left(\frac{1}{2}+1\right)}{(4+2)^2}\\&=\frac{-6+3}{36}\\&=\frac{-3}{36}\\&=-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

**4** $h(x)=[g(x)]^3$

$$h'(x)=3\big(g(x)\big)^2\cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned}h'(1)&=3\big(g(1)\big)^2\cdot g'(1)\\&=3\cdot(-2)^2\cdot(-1)\\&=-12\end{aligned}$$

**5** $h(x)=\sqrt{f(x)}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} \cdot f'(1)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$

**6** $h(x)=\dfrac{2x}{f(x)}$

$$h'(x) = \frac{2 \cdot f(x) - 2x \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$h'(1) = \frac{2 \cdot f(1) - 2\, f'(1)}{(f(1))^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{4^2}$$

$$= \frac{7}{16}$$

**Opdracht 24 bladzijde 205**

Druk $h'(x)$ uit in functie van $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ en $g'(x)$ als

**1** $h(x)=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}$

$$h'(x) = \frac{\big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big) - f(x)\cdot g(x)\big(f'(x)+g'(x)\big)}{(f(x)+g(x))^2}$$

$$= \frac{\cancel{f'(x)\cdot g(x)\cdot f(x)} + f'(x)\cdot (g(x))^2 + (f(x))^2\cdot g'(x) \cancel{+ f(x)\cdot g'(x)\cdot g(x)} \cancel{- f(x)\cdot g(x)\cdot f'(x)} \cancel{- f(x)\cdot g(x)\cdot g'(x)}}{(f(x)+g(x))^2}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot (g(x))^2 + g'(x)\cdot (f(x))^2}{(f(x)+g(x))^2}$$

**2** $h(x)=\dfrac{g(x)}{[f(x)]^2}$

$$h'(x) = \frac{g'(x)\cdot (f(x))^2 - g(x)\cdot 2f(x)\cdot f'(x)}{(f(x))^4}$$

$$= \frac{g'(x)\cdot f(x) - 2g(x)\cdot f'(x)}{(f(x))^3}$$

## Opdracht 25 bladzijde 205

Bereken

**1** $\frac{d}{dx}\left((1-3x)\cdot(2x-5)\right) = -3(2x-5) + (1-3x)\cdot 2$

$= -6x + 15 + 2 - 6x$

$= -12x + 17$

**2** $\frac{d}{dx}\left((x^2-4)\cdot(x^2+x)\right) = 2x(x^2+x) + (x^2-4)(2x+1)$

$= 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + x^2 - 8x - 4$

$= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4$

**3** $\frac{d}{dx}\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\right) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+x+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 + x + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3} + x - \cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3}$

$= 1 + 2x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

**4** $\frac{d}{dx}\left(\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(1-x)\right) = \left(1+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(1-x) + \left(x+x^{\frac{1}{3}}\right)(-1)$

$= 1 - x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} - x - x^{\frac{1}{3}}$

$= 1 - 2x - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

**5** $\frac{d}{dx}\left((x^{-2}-x^{-1})\cdot(x^3+9)\right) = (-2x^{-3} + x^{-2})(x^3+9) + (x^{-2} - x^{-1})3x^2$

$= -2 - 18x^{-3} + x + 9x^{-2} + 3 - 3x$

$= 1 - 2x + \frac{9}{x^2} - \frac{18}{x^3}$

## Opdracht 26 bladzijde 205

Bereken

**1** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2-5x}\right) = -\frac{-5}{(2-5x)^2} = \frac{5}{(2-5x)^2}$

**2** $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{1-\sqrt{x}}\right) = -\frac{4}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

**3** $\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{1-6x}\right) = \frac{-2(1-6x) + 2x\cdot(-6)}{(1-6x)^2} = \frac{-2+12x-12x}{(1-6x)^2} = \frac{-2}{(1-6x)^2}$

**4** $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2}{x^4-2}\right) = \frac{2x(x^4-2) - (x^2+2)\cdot 4x^3}{(x^4-2)^2} = \frac{2x^5 - 4x - 4x^5 - 8x^3}{(x^4-2)^2}$

$= \frac{-2x^5 - 8x^3 - 4x}{(x^4-2)^2} = \frac{-2x(x^4 + 4x^2 + 2)}{(x^4-2)^2}$

**5** $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+1}\right) = \frac{(2x-3)(-x^2+x+1)-(x^2-3x+2)(-2x+1)}{(-x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{-2x^3+2x^2+2x+3x^2-3x-3+2x^3-x^2-6x^2+3x+4x-2}{(-x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+6x-5}{(-x^2+x+1)^2}$$

**Opdracht 27 bladzijde 206**

Bereken

**1** $$\frac{d}{dx}\left((-4x^3+x)^6\right) = 6(-4x^3+x)^5(-12x^2+1)$$

**2** $$\frac{d}{dx}\left((x^3+1)^2\cdot(x^2-4)^3\right) = 2(x^3+1)\cdot 3x^2(x^2-4)^3+(x^3+1)^2\cdot 3(x^2-4)^2\cdot 2x$$
$$= 6x(x^3+1)(x^2-4)^2\left(x(x^2-4)+x^3+1\right)$$
$$= 6x(x^3+1)(x^2-4)^2(2x^3-4x+1)$$

**3** $$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2+x}{4}\right)^{-3}\right) = -3\left(\frac{x^2+x}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{4}(2x+1)\right)$$
$$= \frac{-3(2x+1)\cdot 4^4}{4(x^2+x)^4}$$
$$= \frac{-192(2x+1)}{(x^2+x)^4}$$

**4** $$\frac{d}{dx}\left[\left((-2x+3)\cdot(x^3+4)\right)^3\right]$$
$$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2\cdot\left(-2(x^3+4)+(-2x+3)\cdot 3x^2\right)$$
$$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2(-2x^3-8-6x^3+9x^2)$$
$$= 3\left((-2x+3)(x^3+4)\right)^2(-8x^3+9x^2-8)$$

**5** $$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^3\right] = 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{3(1-x)^2(-1)(2x-1)^2-(1-x)^3\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}$$
$$= 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{-(1-x)^2(2x-1)\left(3(2x-1)+4(1-x)\right)}{(2x-1)^4}$$
$$= 3\left(\frac{(1-x)^3}{(2x-1)^2}\right)^2\cdot\frac{-(1-x)^2(2x+1)}{(2x-1)^3}$$
$$= \frac{-3(1-x)^8(2x+1)}{(2x-1)^7}$$

**Opdracht 28 bladzijde 206**

Bereken

**1** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-6x-x^2}\right) = \frac{-6-2x}{2\sqrt{1-6x-x^2}} = \frac{-3-x}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

**2** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{3x^2-4x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left((3x^2-4x^3)^{\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{1}{3}(3x^2-4x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (6x-12x^2)$

$= \frac{2x-4x^2}{\sqrt[3]{(3x^2-4x^3)^2}}$

**3** $\frac{d}{dx}\left(\frac{-4}{\sqrt{7x-1}}\right) = -4\frac{d}{dx}\left((7x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(7x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 7$

$= \frac{14}{\sqrt{(7x-1)^3}}$

**4** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2-5x^2}{2+5x^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2-5x^2}{2+5x^2}}} \cdot \frac{-10x(2+5x^2)-(2-5x^2)\cdot 10x}{(2+5x^2)^2}$

$= \frac{-10x(2+5x^2+2-5x^2)}{2\sqrt{(2-5x^2)(2+5x^2)^3}}$

$= \frac{-20x}{\sqrt{(2-5x^2)(2+5x^2)^3}}$

**5** $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{\frac{2-5x}{2x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-5\cdot x-(2-5x)}{x^2}$

$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{x^2}$

$= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-5x}{2x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{x^2}$

$= -\frac{1}{5x^2}\sqrt[5]{\left(\frac{2x}{2-5x}\right)^4} = -\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{16}{x^6(2-5x)^4}}$

**Opdracht 29 bladzijde 206**

Bepaal een vergelijking van de raaklijn *t* aan de grafiek van *f* in het punt *P*.

**1** $f: x \mapsto \dfrac{6}{x-1}$ in $P(3, f(3))$

$f(x) = \dfrac{6}{x-1}$ $f(3) = 3$

$f'(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

$t \leftrightarrow y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 3)$

$t \leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$

**2** $f: x \mapsto \dfrac{4x+5}{x^2}$ in $P(-1, f(-1))$

$f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2}$ $f(-1) = 1$

$f'(x) = \dfrac{4x^2 - (4x+5)2x}{x^4} = \dfrac{2x(2x-4x-5)}{x^4} = \dfrac{2(-2x-5)}{x^3}$

$f'(-1) = 6$

$t \leftrightarrow y - 1 = 6(x + 1)$

$t \leftrightarrow y = 6x + 7$

**3** $f: x \mapsto \sqrt{-x^2 + 4x}$ in $P(2, f(2))$

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ $f(2) = 2$

$f'(x) = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x}}$

$= \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}$

$f'(2) = 0$

$t \leftrightarrow y - 2 = 0$

$t \leftrightarrow y = 2$

**Opdracht 30 bladzijde 206**

Beschouw de kromme met vergelijking $x^2y + 3y - 4 = 0$.

De waarde van de afgeleide $y'$ in het punt van de kromme met $x = 3$ is

**A** $\frac{-1}{6}$ **B** $0$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $1$

(bron © toelatingsproef arts-tandarts)

$$\begin{aligned} & x^2y + 3y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y(x^2+3) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & y = 4(x^2+3)^{-1} \\ \Rightarrow\ & y' = -4(x^2+3)^{-2} \cdot 2x \\ & \quad = \frac{-8x}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

Als $x = 3$, dan is $y' = \frac{-24}{144} = -\frac{1}{6}$.

Antwoord A is juist.

**Opdracht 31 bladzijde 206**

De raaklijn $t$ aan de grafiek van de functie $f: x \mapsto \frac{\sqrt{3} \cdot x}{4 - x}$ snijdt de positieve $x$-as onder een hoek van 30°.

Bepaal de coördinaat van het raakpunt $T$. Geef alle oplossingen.

- Stel $T(a, f(a))$
- rico $t = \tan 30°$

  $f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $f'(x) = \frac{\sqrt{3}(4-x) - \sqrt{3}x(-1)}{(4-x)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{(4-x)^2}$
- $\frac{4\sqrt{3}}{(4-a)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  $$\begin{aligned} &\overset{a \neq 4}{\Leftrightarrow}\ 12 = (4-a)^2 \\ &\Leftrightarrow\ 4 - a = \pm 2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow\ a = 4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_1\left(4 + 2\sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow T_2\left(4 - 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\right)$

$$f\left(4+2\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\left(4+2\sqrt{3}\right)}{4-4-2\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

$$f\left(4-2\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\left(4-2\sqrt{3}\right)}{4-4+2\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

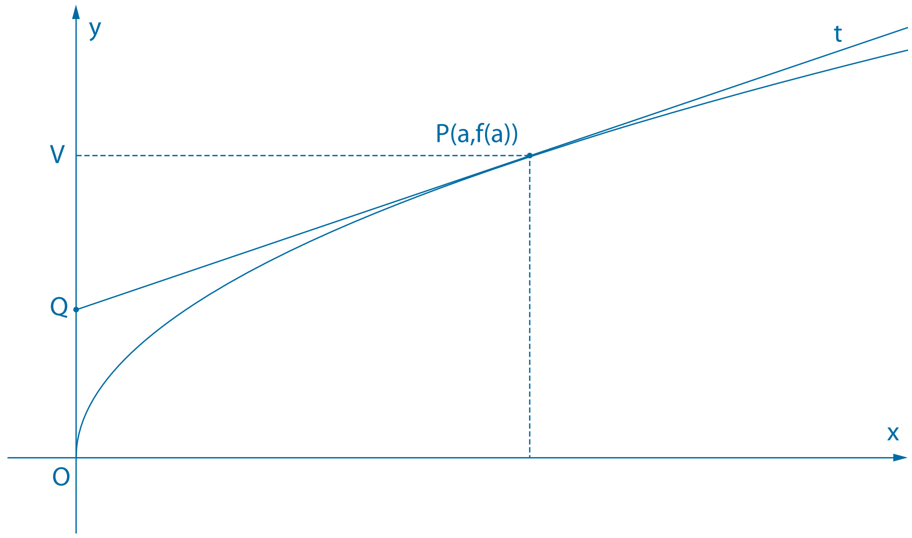
**Opdracht 32 bladzijde 207**

Het punt $P(a, f(a))$ ligt op de grafiek van de functie $f: x \mapsto k \cdot \sqrt{x}$ met $k \neq 0$.

$V$ is het voetpunt van de loodlijn uit $P$ op de $y$-as.

De raaklijn in $P$ aan de grafiek van $f$ snijdt de $y$-as in het punt $Q$.

Bepaal de verhouding $\dfrac{|OQ|}{|OV|}$.




- $V(0, f(a)) = V\left(0, k\sqrt{a}\right)$
- $f'(x) = \dfrac{k}{2\sqrt{x}}$

  $t \leftrightarrow y - k\sqrt{a} = \dfrac{k}{2\sqrt{a}}(x - a)$

  $t \leftrightarrow y = \dfrac{k}{2\sqrt{a}}x - \dfrac{1}{2}k\sqrt{a} + k\sqrt{a}$

  $t \leftrightarrow y = \dfrac{k}{2\sqrt{a}}x + \dfrac{1}{2}k\sqrt{a}$

  $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}k\sqrt{a}$

  $\Rightarrow Q\left(0, \dfrac{1}{2}k\sqrt{a}\right)$
- $\dfrac{|OQ|}{|OV|} = \dfrac{\left|\frac{1}{2}k\sqrt{a}\right|}{\left|k\sqrt{a}\right|} = \dfrac{1}{2}$

**Opdracht 33 bladzijde 207**

Gegeven is de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$.

Bepaal $a$ en $b$ als de raaklijn in het punt $P(0, -1)$ van de grafiek van $f$ horizontaal is.

- De raaklijn in P(0,–1) is horizontaal $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$.
- $f'(x) = \dfrac{(2x+a)(x-2)-(x^2+ax+b)}{(x-2)^2}$

  $f'(0) = \dfrac{-2a-b}{4} = 0 \iff 2a+b=0 \qquad (1)$
- $f(0) = -1 \iff \dfrac{b}{-2} = -1 \iff b = 2 \qquad (2)$

  (2) in (1): $a = -\dfrac{b}{2} = -1$

$\Rightarrow$ $a = -1$ en $b = 2$

**Opdracht 34 bladzijde 207**

Toon aan dat de grafieken van de functies $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$ en $g\colon x \mapsto ax^2$ met $a \neq 0$ elkaar raken in de oorsprong.

- $f(0) = g(0) = 0$ $\Rightarrow$ de grafieken snijden elkaar in de oorsprong.
- $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

  $g'(x) = 2ax \Rightarrow g'(0) = 0$

$\Rightarrow$ de grafieken raken elkaar in de oorsprong

**Opdracht 35 bladzijde 207**

De grafieken van de functies $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $g: x \mapsto \dfrac{4}{x-2}$ raken elkaar in de punten $P(0, -2)$ en $Q(4, 2)$.

Bepaal $a$, $b$, $c$ en $d$.

- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

  $g'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

- Er geldt:

  1) $f(0) = g(0) \Rightarrow d = -2$ (1)

  2) $f'(0) = g'(0) \Rightarrow c = -1$ (2)

  3) $f(4) = g(4) \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 2$

     $\overset{(1)\text{ en }(2)}{\Longrightarrow} 64a + 16b = 8$ (3)

  4) $f'(4) = g'(4) \Rightarrow 48a + 8b + c = -1$

     $\overset{(2)}{\Longrightarrow} 48a + 8b = 0$ (4)

  Uit (3) en (4) volgt: $a = -\dfrac{1}{4}$ en $b = \dfrac{3}{2}$

  Besluit: $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = -1$ en $d = -2$

**Opdracht 36 bladzijde 207**

Van de functies $f$ en $g$ zijn de functiewaarden en de afgeleiden in $-2$ en in 2 gegeven.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 2 | 7 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | $-1$ | $-3$ |

**1** Bereken $F'(2)$ als $F(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$.

$$F'(x) = \frac{f'(x)(x+1) - f(x)}{(x+1)^2}$$

$$F'(2) = \frac{-1 \cdot 3 - 3}{9} = -\frac{2}{3}$$

**2** Bereken $G'(-2)$ als $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$.

$$G'(x) = -\frac{1}{2}(g(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{2(g(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$G'(-2) = -\frac{2}{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**3** Bereken $H'(2)$ als $H(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x \cdot g(x)}\right)^3$.

$$H'(x) = 3\left(\frac{f(x)}{x \cdot g(x)}\right)^2 \cdot \frac{f'(x) \cdot x \cdot g(x) - f(x)\big(g(x) + x \cdot g'(x)\big)}{(x \cdot g(x))^2}$$

$$H'(2) = 3\left(\frac{3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{-1 \cdot 2 \cdot 4 - 3(4 + 2 \cdot (-3))}{(2 \cdot 4)^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{-8 + 6}{64}$$

$$= 3 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{-1}{32}$$

$$= -\frac{27}{2048}$$

**Opdracht 37 bladzijde 207**

Van de afleidbare functies $f$ en $g$ weet je dat $g(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot f(x)$, $f(0) = 5$ en $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 5}{x} = 4$.

Bepaal $g'(0)$.

$$g'(x) = (2x + 2)f(x) + (x^2 + 2x + 3)f'(x)$$

$$g'(0) = 2 \cdot f(0) + 3 \cdot f'(0)$$

$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \qquad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$$

$$= 22$$

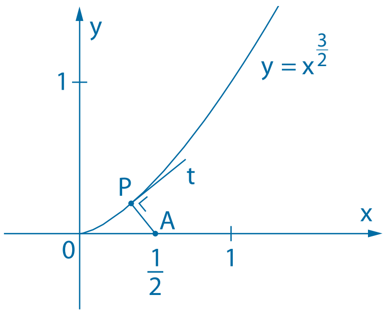
**Opdracht 38 bladzijde 207**

Beschouw de kromme $K$ bepaald door de vergelijking $y=x^{\frac{3}{2}}$.

Welk punt van deze kromme ligt het dichtst bij het punt met coördinaat $\left(\frac{1}{2},0\right)$?

**A** $(0,0)$ **B** $\left(\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **C** $\left(\frac{1}{3},\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **D** $\left(\frac{1}{4},\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ **E** $(1,1)$

(bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur)




Noem het punt op de kromme P(a, f(a)).

Voor dit punt moet gelden dat $t \perp PA$ en dus rico t $\cdot$ rico PA $= -1$.

- $y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

  $\Rightarrow$ rico t $= \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

- rico PA $= \dfrac{-a^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - a}$ met $P\left(a, a^{\frac{3}{2}}\right)$ en $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

- rico t $\cdot$ rico PA $= -1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-a^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} - a} = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \cdot \frac{-a^2}{\frac{1}{2} - a} = -1$$

$$\overset{a \neq \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 3a^2 = 1 - 2a$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \quad \text{of} \quad \cancel{a = -1} \qquad a > 0$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$\Rightarrow$ antwoord C is juist

**Opdracht 39 bladzijde 207**

Stel $V(x)$ is het voorschrift van een veeltermfunctie met graad groter of gelijk aan 2.

**1** Toon aan: als $V(x)$ deelbaar is door $(x-a)^2$, dan is $V(a) = V'(a) = 0$.

Als V(x) deelbaar is door $(x-a)^2$, dan is

$V(x) = (x-a)^2 Q(x)$ met Q(x) een veelterm met graad $\geqslant 0$.

$V'(x) = 2(x-a)\,Q(x) + (x-a)^2\,Q'(x)$.

$\Rightarrow\; V(a) = V'(a) = 0$

**2** De veelterm $V(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + ax + b$ is deelbaar door $(x+2)^2$.

Bepaal $a$ en $b$.

Er geldt dat $V(-2) = V'(-2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - 16 + 16 - 2a + b = 0 \\ -32 + 24 - 16 + a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 2a - 16 = 32 \end{cases}$$

$\Rightarrow\; a = 24$ en $b = 32$

**Opdracht 40 bladzijde 207**

Welk punt van de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{16}{x^4}$, getekend in een orthonormaal assenstelsel, ligt het dichtst bij de oorsprong in het eerste kwadrant?

- We noemen het gevraagde punt P: $P\left(x_0, \dfrac{16}{x_0^4}\right)$ en de raaklijn in P aan de grafiek van f noemen we t.

- $f'(x) = -\dfrac{64}{x^5} \;\Rightarrow\;$ rico $t = f'(x_0) = -\dfrac{64}{x_0^5}$

- Nu geldt: rico $OP = \dfrac{\dfrac{16}{x_0^4}}{x_0} = \dfrac{16}{x_0^5}$

- $OP \perp t \;\Leftrightarrow\;$ rico OP · rico t = –1

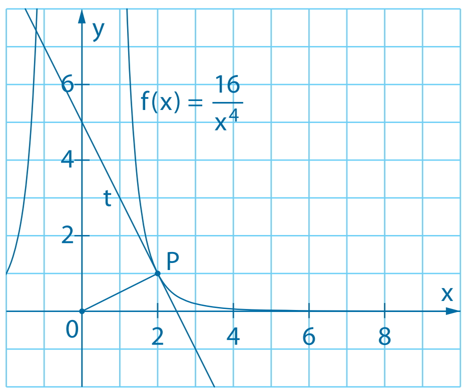
  $\Rightarrow\; \dfrac{16}{x_0^5} \cdot \left(\dfrac{-64}{x_0^5}\right) = -1$

  $\Leftrightarrow\; x_0^{10} = 16 \cdot 64 = 1024 = 2^{10}$

  $\Leftrightarrow\; x_0 = 2$ of $x_0 = -2$

- P ligt in het eerste kwadraat, dus $x_0 = 2$

  $\Rightarrow\; P(2,1)$



**Opdracht 41 bladzijde 207**

Een kogel met een straal van 5 cm valt in een paraboolvormige schotel met vergelijking $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ met $x$ en $f(x)$ in cm.

Is er onder de kogel nog plaats voor een vlieg?

- Daar de y-as een symmetrias is van de paraboolvormige schotel, ligt het middelpunt van de bol (kogel met straal 5 cm) op de y-as.

  Een dwarsdoorsnede met een vlak door de y-as zal de bol snijden volgens een cirkel c en de schotel volgens de parabool p $\leftrightarrow$ $y = \frac{1}{8}x^2$. Het middelpunt van de cirkel ligt dan op de y-as.

- Stel M(0,h) het middelpunt van de cirkel en T het gemeenschappelijk raakpunt in het kwadrant van de cirkel en de parabool.

- $T \in p : T\left(x_0, \frac{1}{8}x_0^2\right)$

  $T \in c \Leftrightarrow |TM| = 5$

  $\Leftrightarrow (x_0 - 0)^2 + \left(\frac{1}{8}x_0^2 - h\right)^2 = 25 \qquad (1)$

- Noem t de raaklijn aan p in T:

  $\text{rico } t = f'(x_0) = \frac{1}{4}x_0$

- $\text{rico } MT = \dfrac{\frac{1}{8}x_0^2 - h}{x_0}$

  $t \perp MT \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{8}x_0^2 - h}{x_0} = \dfrac{-4}{x_0}$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{8}x_0^2 - h = -4 \qquad (2)$

- Uit (1) en (2) berekenen we h.

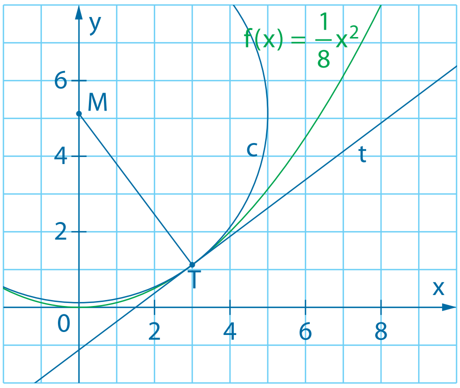
  Uit (2): $x_0^2 = 8h - 32$

  In (1): $8h - 32 + (h - 4 - h)^2 = 25$

  $\Leftrightarrow h = \frac{41}{8}$

- Onder de kogel blijft dus nog een ruimte over waarvan de maximale hoogte $\left(\frac{41}{8} - 5\right)$ cm $= \frac{1}{8}$ cm $= 0{,}125$ cm $= 1{,}25$ mm is.

$\Rightarrow$ Nee, de maximale hoogte tussen de kogel en de schotel is maar 1,25 mm.




**Opdracht 42 bladzijde 208**

Stel $V(x)$ is het voorschrift van een veeltermfunctie met graad groter dan of gelijk aan 2.

Toon aan: als $V(a) = V'(a) = 0$, dan is $V(x)$ deelbaar door $(x - a)^2$.

- Uit $V(a) = 0$ volgt dat $V(x) = (x - a)q(x)$ met $gr(q(x)) \geqslant 1$.
- $V'(x) = q(x) + (x - a) \cdot q'(x)$ met $gr(q'(x)) \geqslant 0$.
- Nu is $V'(a) = 0$, dus $q(a) = 0$.

  Hieruit volgt dat $q(x) = (x - a) \cdot q^*(x)$ met $gr(q^*(x)) \geqslant 0$.
- Er geldt dus dat $V(x) = (x - a) \cdot (x - a) \cdot q^*(x)$

  $= (x - a)^2 \,.\, q^*(x)$

  $\Rightarrow$ $V(x)$ is deelbaar door $(x - a)^2$.

**Opdracht 43 bladzijde 208**

Bewijs de quotiëntregel voor afgeleiden met behulp van de limietdefinitie van de afgeleide, in plaats van door terug te vallen op de productregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a}$$

Stel dat f en g afleidbaar zijn in a en $g(a) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a}$$ definitie afgeleide

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a}$$ definitie quotiëntfunctie

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(a) - g(x) \cdot f(a) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a)}{g(x)g(a)}$$ eigenschap breuken

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to a} g(a) - \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim\limits_{x \to a} f(a)}{\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(a)}$$ rekenregels limieten

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}$$ f en g afleidbaar in a, $g(a) \neq 0$, g afleidbaar in a en dus continu in a, dus is $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Hieruit volgt de rekenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

**Opdracht 44 bladzijde 209**

Voor welke $x$-waarden van het domein zijn de volgende functies niet afleidbaar?

**1** $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 4}$

dom f = $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{3(x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

f is niet afleidbaar in –2 en in 2. In die punten is er een verticale raaklijn.

**2** $f: x \mapsto |9 - 4x^2|$

dom f = $\mathbb{R}$

$$f(x) = |9 - 4x^2| = \begin{cases} 9 - 4x^2 & \text{als } -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 9 & \text{als } x < -\frac{3}{2} \text{ of } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

- $$\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{4x^2 - 9}{x + \frac{3}{2}} = \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{\frac{2x + 3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ <}} 2(2x - 3) = -12$$

- $$\lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{9 - 4x^2}{x + \frac{3}{2}} = \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} \frac{(3 - 2x)(3 + 2x)}{\frac{2x + 3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ >}} 2(3 - 2x) = 12$$

- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{9-4x^2}{x-\frac{3}{2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{(3-2x)(3+2x)}{\frac{2x-3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{3}{2}} -2(3+2x) = -12$

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{4x^2-9}{x-\frac{3}{2}} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{\frac{2x-3}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} \frac{3}{2}} 2(2x+3) = 12$

f is niet afleidbaar in $-\frac{3}{2}$ en $\frac{3}{2}$ (linkerafgeleide ≠ rechterafgeleide).

**3** $f: x \mapsto \sqrt{2x^4-7x^2+5}$

- $\text{dom } f = \left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right] \cup [-1,1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

- $f'(x) = \dfrac{8x^3-14x}{2\sqrt{2x^4-7x^2+5}} = \dfrac{4x^3-7x}{\sqrt{2x^4-7x^2+5}}$

  $2x^4-7x^2+5=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad \text{of} \quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

  $-1, 1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ zijn geen nulpunten teller.

$\Rightarrow$ f is niet afleidbaar in $-1, 1, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ (verticale raaklijn)

**4** $f: x \mapsto \sqrt[4]{(x^3-8)^2}$

- dom f = $\mathbb{R}$

- $f(x) = \sqrt{|x^3-8|} = \begin{cases} \sqrt{x^3-8} & \text{als } x \geqslant 2 \\ \sqrt{8-x^3} & \text{als } x < 2 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{8-x^3}-0}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{4+2x+x^2}}{-\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}}{-\sqrt{2-x}} \overset{\frac{\sqrt{12}}{0^-}}{=} -\infty$

  $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{x^3-8}-0}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{4+2x+x^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}}{\sqrt{x-2}} \overset{\frac{\sqrt{12}}{0^+}}{=} +\infty$

f is niet afleidbaar in 2 (verticale raaklijn).

**Opdracht 45 bladzijde 209**

Bereken

**1** $\dfrac{d}{dx}\big((x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+6)\big)$

$= (x+4)(x+6) + (x+2)(x+6) + (x+2)(x+4)$

$= x^2+10x+24+x^2+8x+12+x^2+6x+8$

$= 3x^2+24x+44$

**2** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{(3x^2-x+2)^3}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left[(3x^2-x+2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}(3x^2-x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x-1)$$

$$= \frac{3}{2}(6x-1)\sqrt{3x^2-x+2}$$

**3** $\dfrac{d}{dx}\left(\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^4-1}{x^3}\right)\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^6-x^2+3x^4-3}{x^4}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2-x^{-2}+3-3x^{-4})$$

$$= 2x+2x^{-3}+12x^{-5}$$

$$= 2x+\frac{2}{x^3}+\frac{12}{x^5}$$

$$\left(= \frac{2x^6+2x^2+12}{x^5}\right)$$

**4** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(2x^2+x-1)^3}{3x^4}\right)$

$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x^2+x-1)^3}{x^4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3(2x^2+x-1)^2\cdot(4x+1)x^4-(2x^2+x-1)^3\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3(2x^2+x-1)^2\big(3x(4x+1)-4(2x^2+x-1)\big)}{x^8}$$

$$= \frac{(2x^2+x-1)^2(4x^2-x+4)}{3x^5}$$

**Opdracht 46 bladzijde 209**

De grafieken van de functies $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + b$ en $g: x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ raken elkaar in het punt $P(3,4)$.

Bepaal $a$ en $b$.

- $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax$

  $g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

- Er geldt:

  1) $f(3) = g(3) \Rightarrow \frac{27}{4} + 9a + b = 4 \Leftrightarrow 9a + b = -\frac{11}{4}$ (1)

  2) $f'(3) = g'(3) \Rightarrow \frac{27}{4} + 6a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$ (2)

  (2) in (1) geeft $b = -\frac{11}{4} + 9 \cdot \frac{5}{4} = \frac{17}{2}$

  Besluit: $a = -\frac{5}{4}$ en $b = \frac{17}{2}$

**Opdracht 47 bladzijde 209**

Gegeven de functie $f: x \mapsto 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en de punten $P(-6, f(-6))$ en $Q(3, f(3))$.

**1** Is $f$ afleidbaar in 2?

$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

f is niet afleidbaar in 2 want 2 is een nulpunt van de noemer van de eerste afgeleide (verticale raaklijn).

**2** Is $PQ$ een raaklijn aan de grafiek van $f$? Toon aan.

$\left.\begin{array}{l} P(-6,0) \\ Q(3,9) \end{array}\right\}$ rico PQ $= \frac{9}{9} = 1$

rico t $= 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} = -1$

$\overset{x \neq 2}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{x-2} = -2$

$\Leftrightarrow x - 2 = -8$

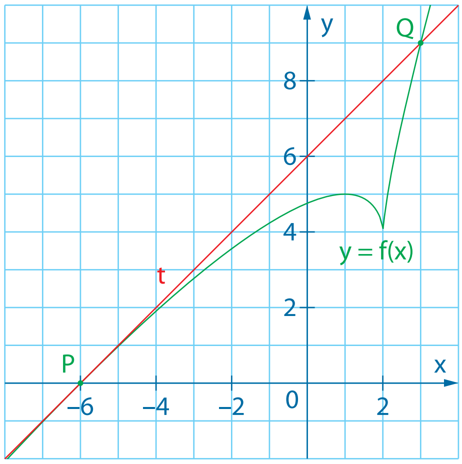
$\Leftrightarrow x = -6$

$\Rightarrow$ Het raakpunt is P(−6,0).

De raaklijn is bijgevolg $t \leftrightarrow y = x + 6$.

$Q(3,9) \in t$ want $9 = 3 + 6$

$\Rightarrow$ PQ is een raaklijn aan de grafiek van f.




**Opdracht 48 bladzijde 209**

Bepaal $a$ en $b$ zodat de functie $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & \text{als } x \leqslant 2 \\ ax + b & \text{als } x > 2 \end{cases}$ afleidbaar is in 2.

- f is afleidbaar, dus continu in 2

  $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 2a + b \Leftrightarrow b = 4 - 2a \qquad (1)$

- Voor $b = 4 - 2a$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\frac{1}{2}x^3 - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\frac{1}{2}\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x-2}} = 6$$

$$\text{en } \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{ax + 4 - 2a - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{a\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = a$$

f is afleidbaar in 2 $\Leftrightarrow a = 6$

Uit (1) volgt dan: $b = -8$

Besluit: $a = 6$ en $b = -8$

**Opdracht 49 bladzijde 210**

Van de functies $f$ en $g$ zijn de functiewaarden en de afgeleiden in 2 en 3 gegeven.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 8 | −4 |
| 3 | 2 | −5 | 6 | 1 |

**1** Bereken $F'(2)$ als $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$F'(2) = 8 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = 8$

**2** Bereken $G'(3)$ als $G(x) = \dfrac{2x+1}{f(x)}$.

$$G'(x) = \frac{2f(x) - (2x+1)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$G'(3) = \frac{2 \cdot 2 - 7 \cdot 6}{2^2} = \frac{-38}{4} = -\frac{19}{2}$$

**3** Bereken $H'(2)$ als $H(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$.

$$H'(x) = \frac{2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)}{2\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}}$$

$$= \frac{f(x) \cdot f'(x) + g(x) \cdot g'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}}$$

$$H'(2) = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{16+9}} = 4$$

**Opdracht 50 bladzijde 210**

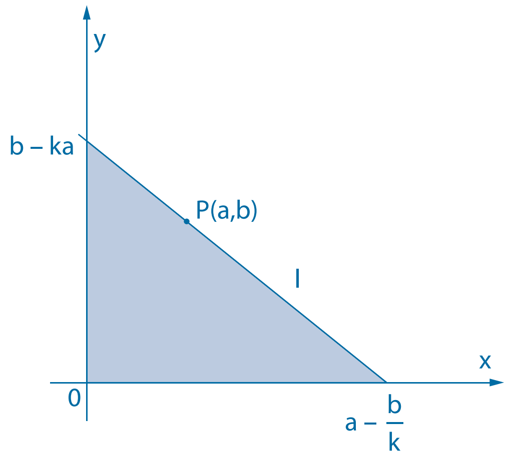
Beschouw het cartesiaans vlak met het punt met coördinaat $(a, b)$ waarbij $a > 0$ en $b > 0$.

Beschouw verder een variabele rechte met richtingscoëfficiënt $k$ door dit punt.

De oppervlakte van het gebied ingesloten door deze rechte, de positieve $x$-as en de positieve $y$-as, bereikt een minimale waarde

**A** als $k = \dfrac{b}{a}$ **B** als $k = -\dfrac{b}{a}$ **C** als $k = \dfrac{a}{b}$ **D** als $k = -\dfrac{a}{b}$ **E** nooit

(bron © ijkingstoets burgerlijk ingenieur)




- De rechte l heeft een vergelijking $y = kx + q$ met $k < 0$.

  P(a,b) ligt op de rechte, dus:

  $$b = ka + q \;\Rightarrow\; q = b - ka$$

  Dus geldt: $l \leftrightarrow y = kx + b - ka$

  Snijpunt l met de y-as: $(0, b - ka)$

  Snijpunt l met de x-as:

  $0 = kx + b - ka$

  $kx = ka - b$

  $x = a - \dfrac{b}{k} \;\Rightarrow\; \left(a - \dfrac{b}{k}, 0\right)$

- Oppervlakte $A(k) = \dfrac{\left(a - \dfrac{b}{k}\right)(b - ka)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(ab - ka^2 - \frac{b^2}{k} + ab\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2ab - ka^2 - \frac{b^2}{k}\right)$$

$$A'(k) = \frac{1}{2}\left(-a^2 + \frac{b^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2k^2}{2k^2}$$

| $k$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $0$ | | $\frac{b}{a}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'(k)$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ |
| $A(k)$ | ↘ | min | ↗ | | ↗ | | ↘ |

$k < 0$

De oppervlakte bereikt een minimum voor $k = -\dfrac{b}{a}$.

Antwoord B is het juiste.

**Opdracht 51 bladzijde 210**

Bepaal $m > 0$ zodat de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{8}{x}\left(\sqrt{x} - m\right)$ raakt aan de rechte $t \leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}x$.

- $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{8}{x^2}\left(\sqrt{x} - m\right) + \frac{8}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{8}{x^2}\sqrt{x} + \frac{8m}{x^2} + \frac{4\sqrt{x}}{x^2} \\ &= \frac{8m - 4\sqrt{x}}{x^2} \end{aligned}$$

- Voor het raakpunt $P\left(x_0, f(x_0)\right)$ geldt:

  $$f'(x_0) = \frac{8m - 4\sqrt{x_0}}{x_0^2} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

  $$t \leftrightarrow y - \frac{8}{x_0}\left(\sqrt{x_0} - m\right) = \frac{1}{4}(x - x_0)$$

- t gaat door de oorsprong

  $$\Rightarrow\ -\frac{8}{x_0}\left(\sqrt{x_0} - m\right) = -\frac{1}{4}x_0$$

  $$\Leftrightarrow\ 32\left(\sqrt{x_0} - m\right) = x_0^2 \qquad (2)$$

- (1) en (2): $$\begin{cases} 32m - 16\sqrt{x_0} = x_0^2 & (3) \\ 32\sqrt{x_0} - 32m = x_0^2 \end{cases}$$

  $$\Rightarrow\ 32m - 16\sqrt{x_0} = 32\sqrt{x_0} - 32m$$

  $$\Leftrightarrow\ 48\sqrt{x_0} = 64m$$

  $$\Leftrightarrow\ \sqrt{x_0} = \frac{4}{3}m$$

  In (3): $$32m - 16 \cdot \frac{4}{3}m = \left(\frac{4}{3}m\right)^4$$

  $$32m - \frac{64}{3}m = \frac{256}{81}m^4$$

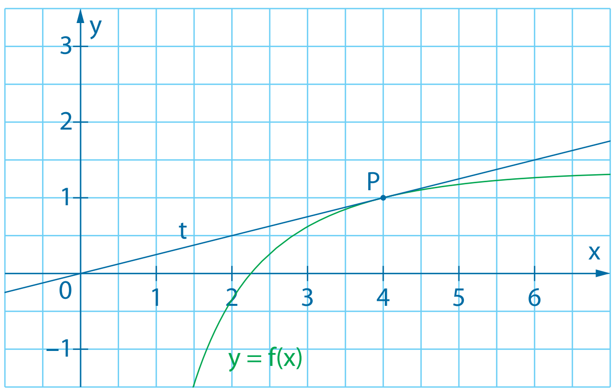
  $$m - \frac{2}{3}m = \frac{8}{81}m^4$$

  $$\frac{1}{3}m = \frac{8}{21}m^4$$

  $$\frac{1}{3}m\left(1 - \frac{8}{27}m^3\right) = 0$$

  $$\overset{m>0}{\Rightarrow}\ m^3 = \frac{27}{8}$$

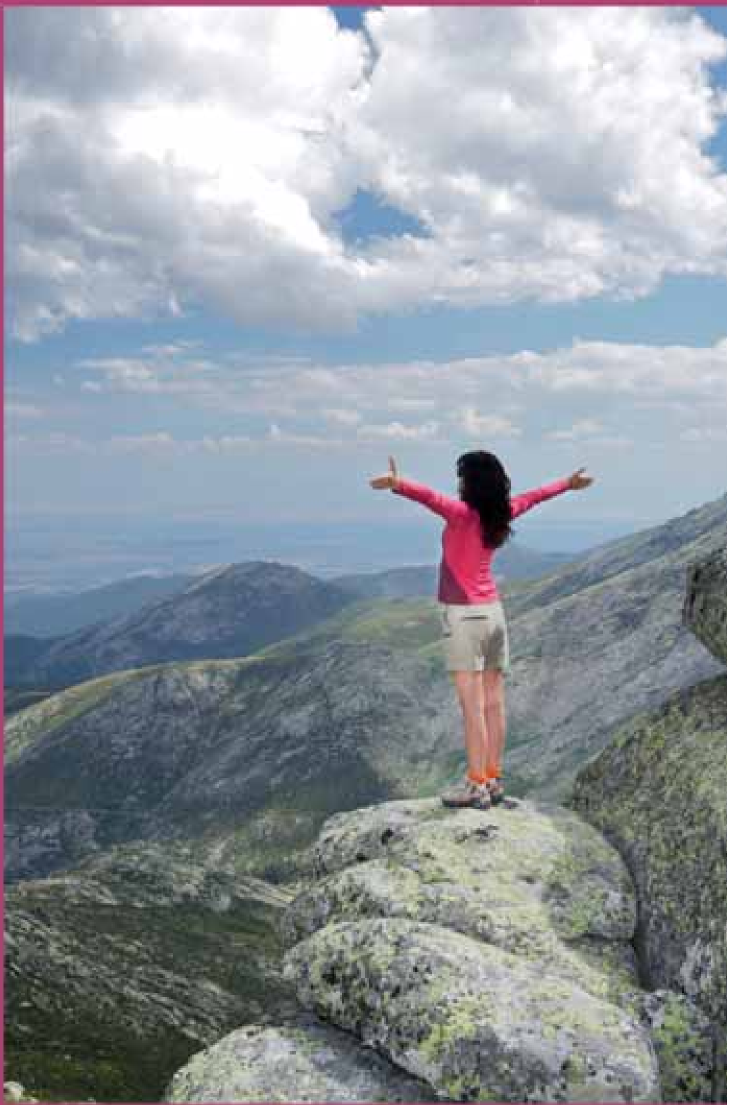
  $$m = \frac{3}{2}$$



# Hoofdstuk 10

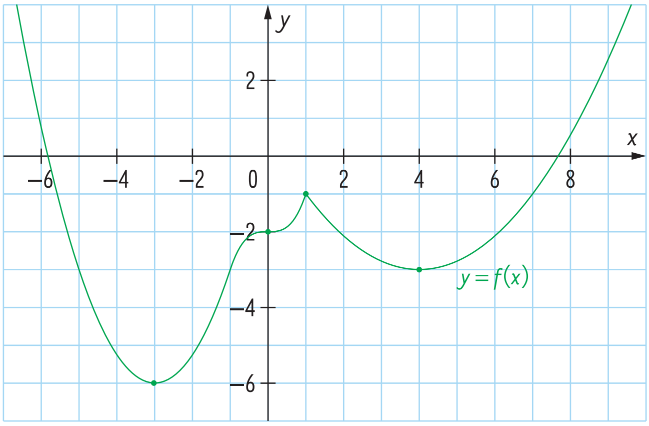
## Verloop van functies





**Opdracht 1 bladzijde 212**

Hieronder zie je de grafiek van een continue functie $f$.




**1** Lees op de grafiek af voor welke $x$-waarden $f$ een extremum bereikt.

f bereikt een relatief minimum voor x = –3 en voor x = 4.

f bereikt een relatief maximum voor x = 1.

**2** Welke van de volgende uitspraken is waar?

**A** Indien $f$ voor $x = a$ een relatief extremum bereikt, dan is $f'(a) = 0$.

**B** Indien $f'(a) = 0$, dan bereikt $f$ een relatief extremum voor $x = a$.

**C** Indien $f$ voor $x = a$ een relatief extremum bereikt en $f$ is afleidbaar in $a$, dan is $f'(a) = 0$.

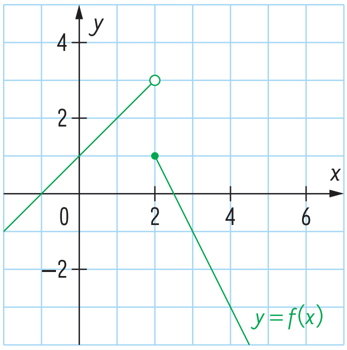
C

**Opdracht 2 bladzijde 217**

**1** $f$ bereikt geen absoluut maximum in $[0, 4]$.

Verklaar waarom dit niet in tegenspraak is met de stelling van Weierstrass.

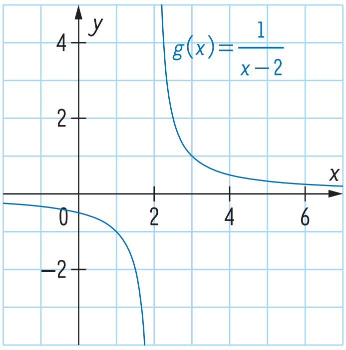
f is niet continu in [0, 4].




**2** $g: x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ bereikt geen absoluut maximum in $]2, 4]$.

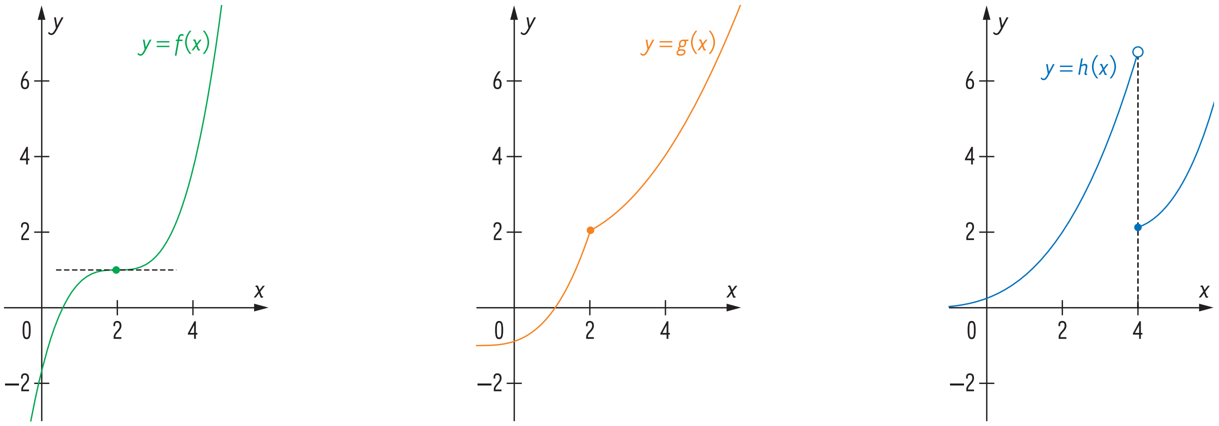
Verklaar waarom dit niet in tegenspraak is met de stelling van Weierstrass.

f is niet continu in [2, 4].



**Opdracht 3 bladzijde 219**

Welke van de volgende functies zijn stijgend in [0, 4]?




f en g zijn stijgend in [0, 4], want

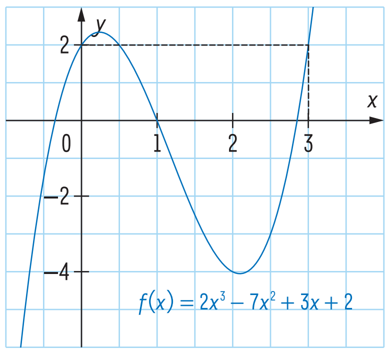
$\forall\, x_1, x_2 \in [0, 4] : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ en $g(x_1) < g(x_2)$.

Dit geldt niet voor h want bv. h(3) > h(4).

**Opdracht 4 bladzijde 219**

**1** Bij de functie met voorschrift $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 2$ is $f(0) = f(3)$.

Verklaar waarom er een waarde $c \in\, ]0, 3[$ bestaat zodanig dat $f'(c) = 0$.




$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 2$

$f'(x) = 6x^2 - 14x + 3$

$f'(x) = 0 \iff 6x^2 - 14x + 3 = 0$

$\iff x = \dfrac{7 + \sqrt{31}}{6} \approx 2{,}09 \in\, ]0, 3[$

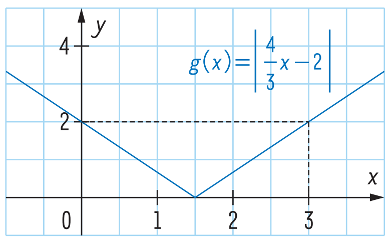
of $x = \dfrac{7 - \sqrt{31}}{6} \approx 0{,}24 \in\, ]0, 3[$

$c = \dfrac{7 + \sqrt{31}}{6}$ of $c = \dfrac{7 - \sqrt{31}}{6}$

**2** Ook bij de functie met voorschrift $g(x) = \left|\dfrac{4}{3}x - 2\right|$ is $g(0) = g(3)$.

Toch bestaat er geen waarde $c \in\, ]0, 3[$ zodanig dat $g'(c) = 0$.

Kun je dit verklaren?




g is niet afleidbaar in $\dfrac{3}{2}$.

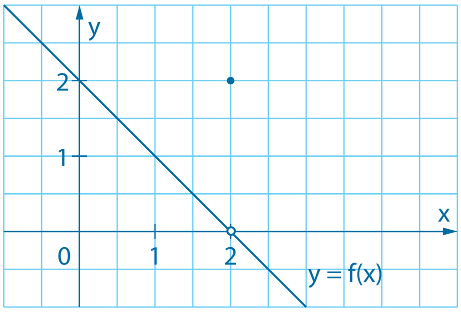
**Opdracht 5 bladzijde 221**

Illustreer met een voorbeeld dat continuïteit in een gesloten interval vereist is opdat de stelling van Rolle geldt.

De functie $f: x \mapsto \begin{cases} 2 - x & \text{als } x \neq 2 \\ 2 & \text{als } x = 2 \end{cases}$

is afleidbaar in $]0, 2[$, continu in $[0, 2[$ en $f(0) = f(2) = 2$.

Er is echter geen $c \in \,]0, 2[$ met $f'(c) = 0$.




Continuïteit in een gesloten interval is vereist.

**Opdracht 6 bladzijde 221**

Ga telkens na dat voor de functie *f* aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan is in het gegeven interval en bepaal alle waarden van *c* waarvoor
$f'(c) = 0$.

**1** $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ in $[0, 2]$

- f is continu in $[0, 2]$
- f is afleidbaar in $]0, 2[$ met $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
- $f(0) = f(2) = 0$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 2 = 0$$
$$\iff x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58 \in \,]0, 2[$$
$$\text{of } x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42 \in \,]0, 2[$$

zodat $c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ of $c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**2** $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ in $[0, 4]$

$$\begin{cases} \bullet \ \text{f is continu in } [0, 4] \\ \bullet \ \text{f is afleidbaar in } ]0, 4[ \text{ met } f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \bullet \ f(0) = f(4) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ x = 1 \in \ ]0, 4[ \end{aligned}$$

zodat $c = 1$.

**Opdracht 7 bladzijde 224**

Onderzoek of de volgende functies voldoen aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange.
Indien dit het geval is, bepaal dan alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

**1** $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ in $[-1, 1]$

f is niet continu in $[-1, 1]$ dus er is niet voldaan aan de voorwaarden.

**2** $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3$ in $[0, 4]$

$$\begin{cases} \bullet \ \text{f is continu in } [0, 4] \\ \bullet \ \text{f is afleidbaar in } ]0, 4[ \text{ met } f'(x) = \dfrac{-3}{2}x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{3}{2}c^2 = \frac{-32}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ c^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ c = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{of} \quad c = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Aangezien $-\frac{4}{\sqrt{3}} \notin \ ]0, 4[$ is $c = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

**3** $f: x \longmapsto px^2 + qx + r$ in $[x_1, x_2]$

$$\begin{cases} \bullet \ f \text{ is continu in } [x_1, x_2] \\ \bullet \ f \text{ is afleidbaar in } ]x_1, x_2[ \text{ met } f'(x) = 2px + q \end{cases}$$

$\Rightarrow$ er is voldaan aan de voorwaarden

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \ 2pc + q = \frac{px_2^2 + qx_2 \cancel{+r} - px_1^2 - qx_1 \cancel{-r}}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \ 2pc + q = \frac{p(x_2 + x_1)(\cancel{x_2 - x_1}) + q(\cancel{x_2 - x_1})}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

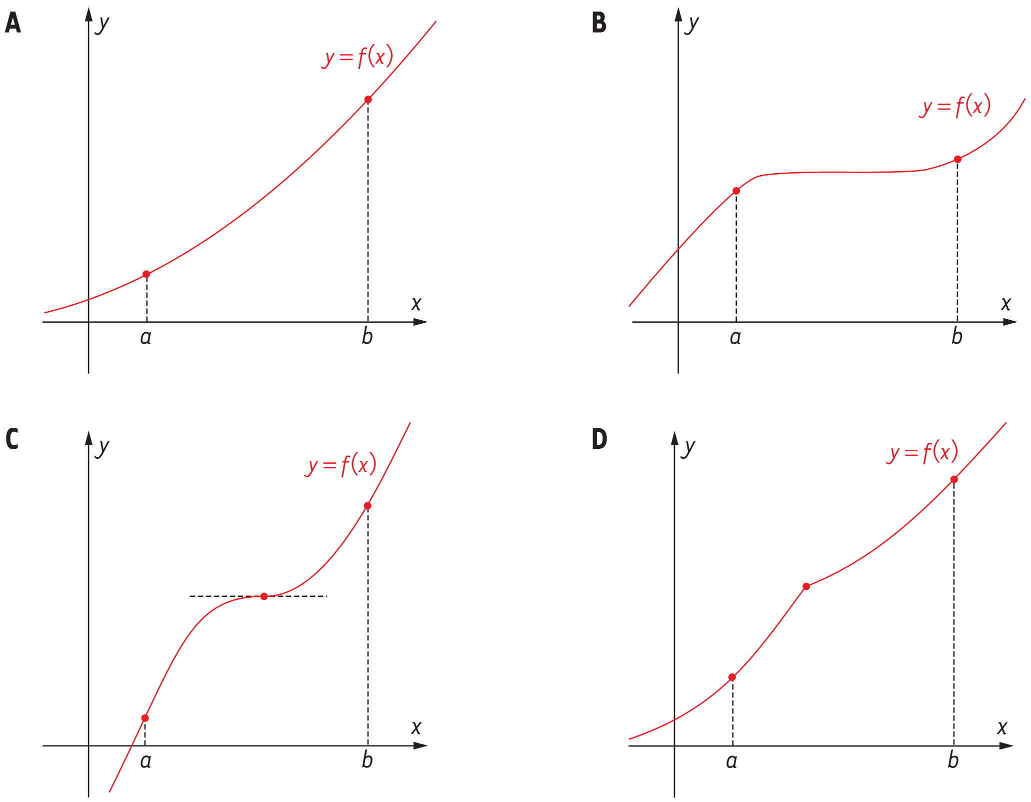
$$\Leftrightarrow \ 2pc \cancel{+q} = p(x_2 + x_1) \cancel{+q}$$

$$\Leftrightarrow \ c = \frac{\cancel{p}(x_2 + x_1)}{2\cancel{p}}$$

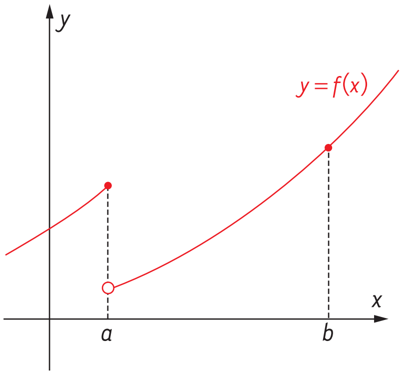
$$\Leftrightarrow \ c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

**Opdracht 8 bladzijde 224**

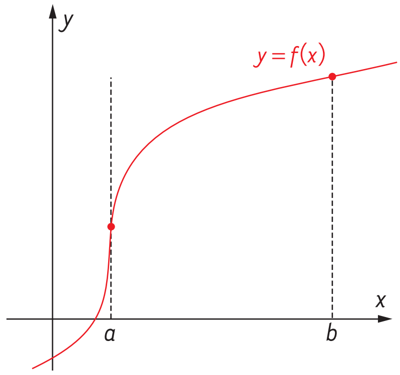
Onderzoek of de onderstaande uitspraken algemeen geldig zijn. Als de uitspraken niet algemeen geldig zijn, gebruik dan één van de getekende grafieken als tegenvoorbeeld.



E




F




**a** Als $f$ stijgend is in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$.

Niet waar: in C is f stijgend in [a, b] maar er is een $c \in \, ]a, b[$ waarbij $f'(c) = 0$.

**b** Als $f$ stijgend is in $[a, b]$ en $f$ is afleidbaar in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$.

Niet waar: in C is f stijgend in [a, b] en afleidbaar in [a, b] en toch is er een $c \in \, ]a, b[$ met $f'(c) = 0$.

**c** Als $f$ stijgend is in $[a, b]$ en $f$ is afleidbaar in $[a, b]$, dan is $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$.

Waar.

**d** Als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$, dan is $f$ stijgend in $[a, b]$.

Niet waar: in E is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$, toch is f niet stijgend in [a, b].

**e** Als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$ en $f$ is continu in $[a, b]$, dan is $f$ stijgend in $[a, b]$.

Waar.

**f** Als $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$, dan is $f$ stijgend in $[a, b]$.

Niet waar: in E is $f'(x) \geqslant 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$, toch is f niet stijgend in [a, b].

## Opdracht 9 bladzijde 230

Bepaal het verloop en de relatieve extrema van de functie $f$.

**1** $f: x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$

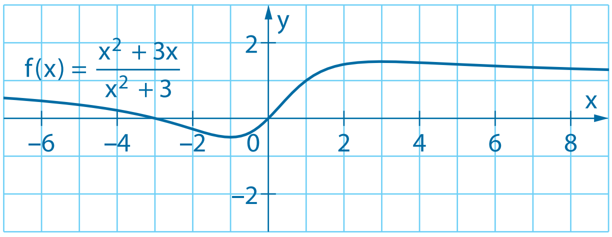
$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3) \cdot (2x + 3) - (x^2 + 3x) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 - 2x^3 - 6x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 6x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

| x | | −1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + | 0 | − |
| f(x) | ↘ | −0,5<br>min. | ↗ | 1,5<br>max. | ↘ |

f stijgt in [–1, 3], daalt in ]–∞, –1] en in [3, +∞[, heeft een relatief minimum $-\frac{1}{2}$ voor x = –1 en een relatief maximum $\frac{3}{2}$ voor x = 3.




**2** $f: x \mapsto \sqrt[3]{-x^4+2x^3-x^2}$

$f(x) = (-x^4 + 2x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(-x^4+2x^3-x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-4x^3+6x^2-2x)$$

$$= \frac{-4x^3+6x^2-2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(-x^4+2x^3-x^2)^2}}$$

$$= \frac{-2x(x-1)(2x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot (x-1)^2}}$$

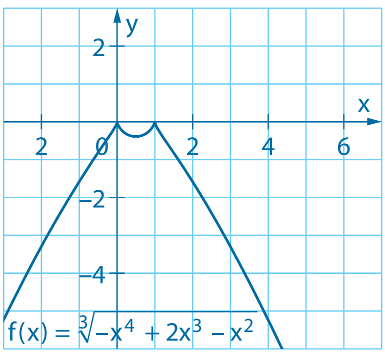
f is niet afleidbaar in 0 en 1.

| x | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | \| | – | 0 | + | \| | – |
| f(x) | ↗ | 0 max. | ↘ | $\sqrt[3]{\frac{-1}{16}}$ min. | ↗ | 0 max. | ↘ |

f stijgt in ]–∞, 0] en in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

f daalt in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en in [1, +∞[,

f bereikt een relatief maximum 0 voor x = 0 en voor x = 1 en f bereikt een relatief minimum $\sqrt[3]{\frac{-1}{16}} = \frac{-1}{2\sqrt[3]{2}}$ voor $x = \frac{1}{2}$.



**Opdracht 10 bladzijde 230**

**1** Bepaal $m$ zodanig dat de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2}{x+m}$ een relatief extremum bereikt voor $x = 4$.

$f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x+m}$ is afleidbaar binnen haar domein, als f een extremum bereikt voor $x = 4$ is $f'(4) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(x+m)\cdot 2x - x^2}{(x+m)^2} = \frac{x^2 + 2mx}{(x+m)^2}$$

$$\Rightarrow\ f'(4) = \frac{16 + 8m}{(4+m)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{m = -2}$$

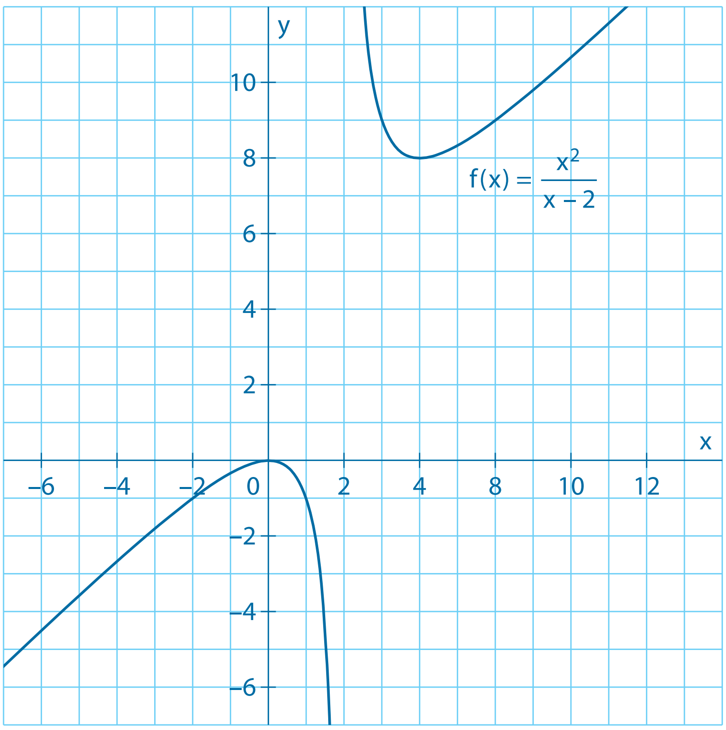
**2** Bepaal voor de gevonden waarde van $m$ of het gaat om een relatief maximum of om een relatief minimum.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

| x | | 0 | | 2 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | \| | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | max. | ↘ | \| | ↘ | min. | ↗ |

f bereikt een relatief minimum voor $x = 4$.

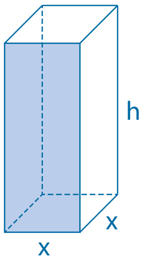
Dat is ook op de grafiek te zien.



**Opdracht 11 bladzijde 230**

Een doos heeft de vorm van een balk. Ze heeft een vierkant als grondvlak, is vooraan open en heeft een oppervlakte van 3 $dm^2$.

Bepaal de afmetingen van de doos als de inhoud maximaal is.




Stel x is de zijde van het vierkant grondvlak, en de hoogte is h (x en h in dm).

Dan is $2x^2 + 3 \cdot hx = 3$

$$\Leftrightarrow \; h = \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

Inhoud: $I = x^2h$

$$\Rightarrow \; I(x) = x^2 \cdot \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

$$\text{of } \; I(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

$I'(x) = 1 - 2x^2$

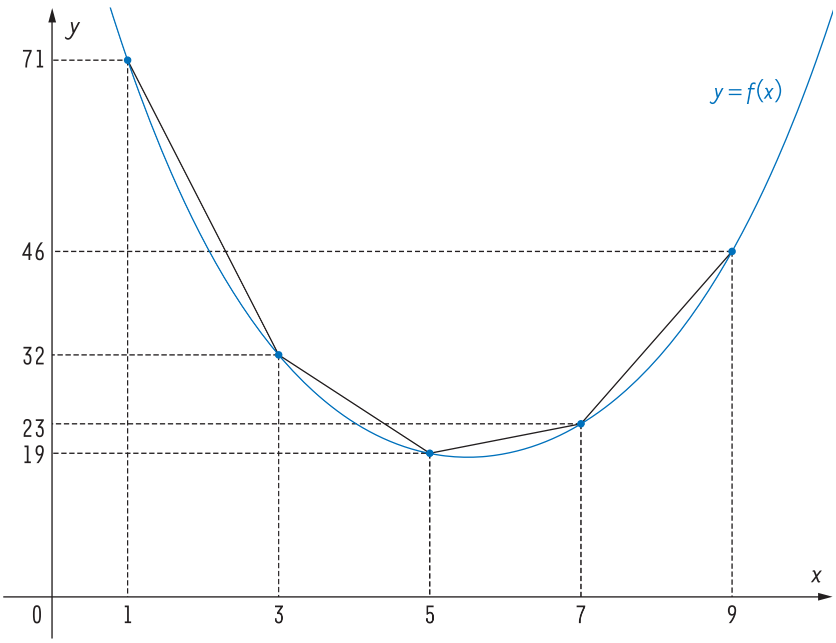
$I'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

| $x$ | | $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{1}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $I(x)$ | $\searrow$ | | | | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{3}$ | $\searrow$ |
| | | min. | | | | max. | |

De doos heeft een maximale inhoud als de zijde van het grondvlak $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dm is.

De hoogte is dan $\dfrac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ dm $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ dm.

**Opdracht 12 bladzijde 230**




**1** De grafiek van de functie *f* is hol.

Bereken de gemiddelde helling van de grafiek van *f* in de intervallen [1, 3], [3, 5], [5, 7] en [7, 9].

in [1, 3] is $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{32 - 71}{2} = -\dfrac{39}{2}$

in [3, 5] is $\dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{19 - 32}{2} = -\dfrac{13}{2}$

in [5, 7] is $\dfrac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \dfrac{23 - 19}{2} = 2$

in [7, 9] is $\dfrac{f(9) - f(7)}{9 - 7} = \dfrac{46 - 23}{2} = \dfrac{23}{2}$

**2** Hoe verandert deze gemiddelde helling als je de grafiek van *f* van links naar rechts doorloopt?

De gemiddelde helling neemt toe.

**3** Hoe zal de gemiddelde helling van een functie *g* met een bolle grafiek veranderen als je deze van links naar rechts doorloopt?

Die zal afnemen.

**Opdracht 13 bladzijde 237**

Bepaal het hol en bol verloop en de eventuele buigpunten van de grafiek van de functie

**1** $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+12}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+12)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+12)^2}$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+12-x^2+1)}{(x^2+12)^2}$$

$$= \frac{26x}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x) = 26\cdot\frac{(x^2+12)^{\cancel{2}}\cdot 1 - x\cdot 2(\cancel{x^2+12})\cdot 2x}{(x^2+12)^{\cancel{4}\,3}}$$

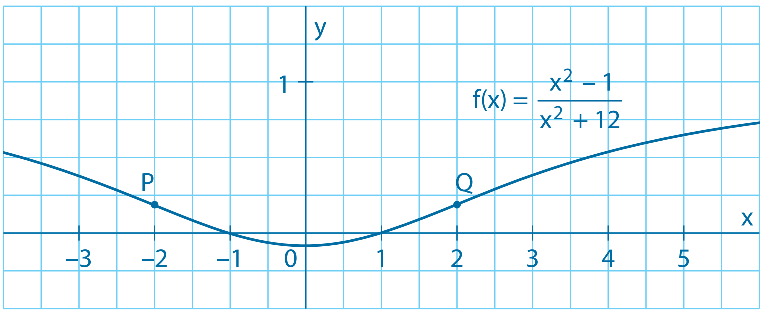
$$= 26\cdot\frac{x^2+12-4x^2}{(x^2+12)^3}$$

$$= 26\cdot\frac{-3x^2+12}{(x^2+12)^3} = \frac{78(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$$

| x | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ |
| f(x) | $\frown$ | $\frac{3}{16}$ bgpt. | $\smile$ | $\frac{3}{16}$ bgpt. | $\frown$ |

De grafiek van f is hol in $[-2, 2]$, bol in $]-\infty, -2]$ en in $[2, +\infty[$,

de buigpunten zijn $P\left(-2, \dfrac{3}{16}\right)$ en $Q\left(2, \dfrac{3}{16}\right)$.



**2** $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 9}$

$f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - 9} = (x^2 - 9)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 9)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^2 - 9)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x \cdot \frac{-2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \left[(x^2 - 9) - \frac{4}{3}x^2\right]$$

$$= \frac{2}{3}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 - 9\right)$$

$$= -\frac{2}{9}(x^2 - 9)^{-\frac{5}{3}} (x^2 + 27)$$

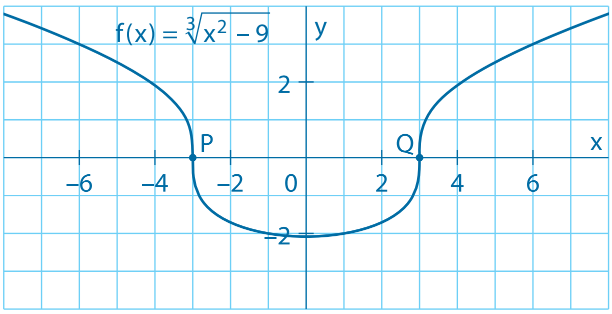
$$= \frac{-2(x^2 + 27)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 9)^5}}$$

f is niet afleidbaar in 3 en in –3.

| x | | –3 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | – | \| | + | \| | – |
| f(x) | ⌒ | 0 | ⌣ | 0 | ⌒ |
| | | bgpt. | | bgpt. | |

De grafiek van f is hol in [–3 ,3], bol in ]–∞, –3] en in [3, +∞[,

de buigpunten zijn P(–3, 0) en Q(3, 0).



**Opdracht 14 bladzijde 237**

Bepaal $a$ en $b$ zodanig dat $P(1\,,1)$ een buigpunt is van de grafiek van

$$f\colon x \longmapsto \frac{a}{x^2+b}.$$

$f\colon x \longmapsto \dfrac{a}{x^2+b}$ is twee keer afleidbaar binnen haar domein.

Als P(1, 1) een buigpunt is, dan is $f''(1) = 0$.

Bovendien is $f(1) = 1$.

1) $f(1) = 1 \iff \dfrac{a}{1+b} = 1$

$\iff a = 1 + b \qquad (1)$

2) $f'(x) = \dfrac{-2ax}{(x^2+b)^2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+b)^{\cancel{2}} \cdot (-2a) + 2ax \cdot 2\,\cancel{(x^2+b)} \cdot 2x}{(x^2+b)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2a \cdot (-x^2 - b + 4x^2)}{(x^2+b)^3}$$

$$= \frac{2a \cdot (3x^2 - b)}{(x^2+b)^3}$$

$f''(1) = 0 \iff 2a \cdot (3 - b) = 0$

$\overset{a \neq 0}{\iff} \boxed{b = 3}$

Uit (1) volgt dan $\boxed{a = 4}$

**Opdracht 15 bladzijde 239**

Bepaal de relatieve extrema van $f\colon x \longmapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x$ gebruik makend van de tweede afgeleide-test.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f'(x) = 0$

$\iff x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

$f''(x) = 12x - 18$

$f''(1) = -6 < 0$

$\Rightarrow$ relatief maximum voor $x = 1$ gelijk aan $f(1) = 5$.

$f''(2) = 6 > 0$

$\Rightarrow$ relatief minimum voor $x = 2$ gelijk aan $f(2) = 4$.

**Opdracht 16 bladzijde 243**

Beschouw de rationale functie $f$: $x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

**1** Maak een tekentabel van $f$ en bepaal de asymptoten van de grafiek van $f$.

nulpunten teller: 1, 2

nulpunten noemer: 0

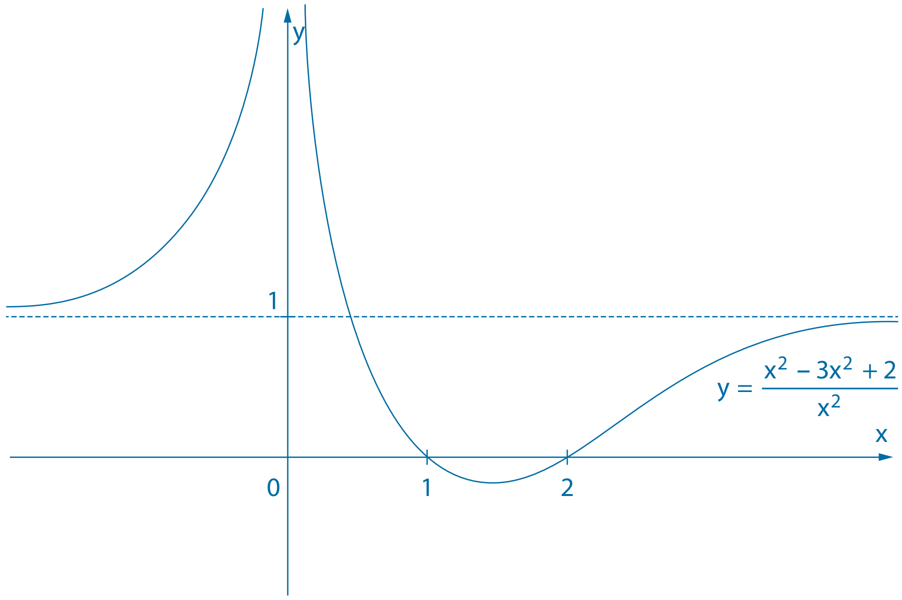
tekentabel:

| x | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | \| | + | 0 | − | 0 | + |

H.A.: y = 1

V.A.: x = 0

**2** Maak op basis van de informatie uit **1** een schets van de grafiek van $f$.
Waar vermoed je relatieve extrema en buigpunten?




Vermoeden: minimum voor x =1,5 en een buigpunt voor x = 2,5.

**3** Bepaal de relatieve extrema en de buigpunten van $f$ m.b.v. afgeleiden.

- $f'(x) = \dfrac{(2x - 3)x^2 - 2x(x^2 - 3x + 2)}{x^4}$

$= \dfrac{2x^2 - 3x - 2x^2 + 6x - 4}{x^3}$

$= \dfrac{3x - 4}{x^3}$

| x | | 0 | | $\frac{4}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | \| | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | \| | ↘ | $-\frac{1}{8}$ | ↗ |
| | | | | min. | |

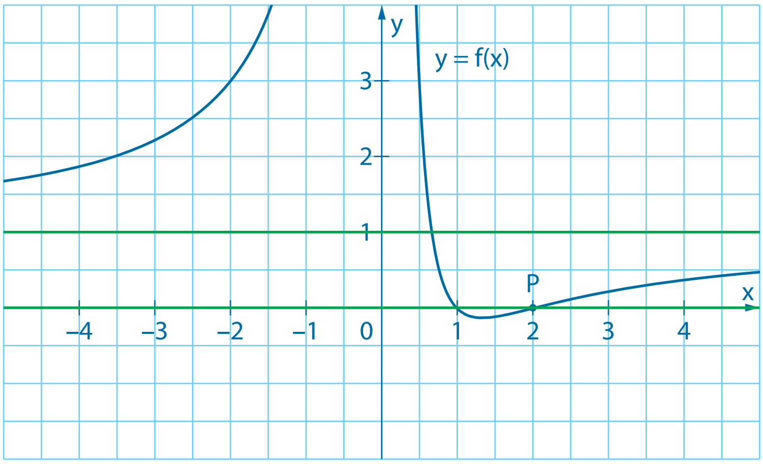
De functie bereikt een relatief minimum voor $x = \frac{4}{3}$, namelijk $-\frac{1}{8}$.

- $$f''(x) = \frac{3x^3 - 3x^2(3x-4)}{x^6}$$
  $$= \frac{3x - 9x + 12}{x^4}$$
  $$= \frac{-6x + 12}{x^4}$$

| x | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | \| | + | 0 | − |
| f(x) | ∪ | \| | ∪ | 0 | ∩ |
| | | | | bgpt. | |

De functie heeft P(2, 0) als buigpunt.

**4** Plot de grafiek van *f* en kies je vensterinstellingen zodanig dat alle belangrijke informatie over de grafiek te zien is.



**Opdracht 17 bladzijde 244**

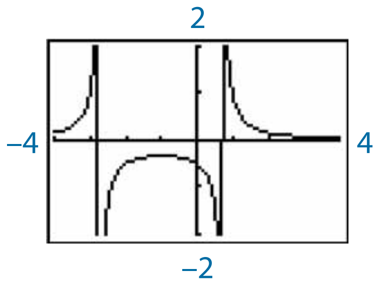
$f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$ stelt een familie van rationale functies voor.

**1** Plot enkele grafieken van deze familie.

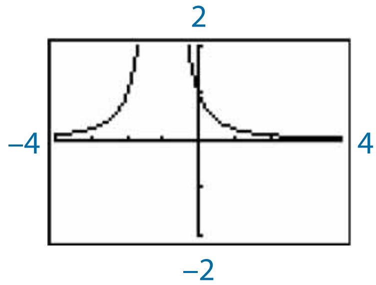
We plotten $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$ voor enkele waarden van m.

Aangezien de noemer een dubbel nulpunt heeft voor m = 1, kiezen we deze waarde van m, en ook een waarde die groter is dan 1 en een waarde die kleiner is dan 1.

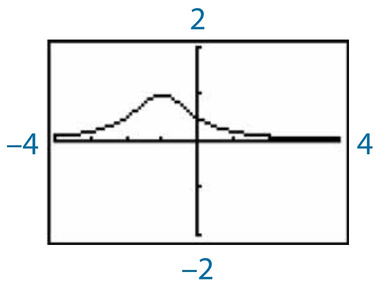
m = –2




m = 1




m = 2




We zien dat de grafiek van f voor m = –2 en voor m = 1 verticale asymptoten heeft, terwijl dat voor m = 2 niet het geval is. Deze laatste grafiek heeft twee buigpunten, terwijl de eerste twee geen buigpunten hebben. Bij m = –2 en m = 2 is een relatief maximum, bij m = 1 waarschijnlijk niet.

Vermoedelijk hebben alle grafieken een horizontale asymptoot.

**2** Onderzoek hoe het domein van *f* en de asymptoten van de grafiek van *f* wijzigen in functie van *m*.

We bestuderen de asymptoten van de grafiek van $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+m}$.

Omdat de graad van de teller steeds kleiner is dan de graad van de noemer, zal $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

De grafiek van f heeft dus steeds de rechte met vergelijking y = 0 (de x-as) als horizontale asymptoot.

De grafiek van f heeft verticale asymptoten als de noemer nulpunten heeft (die hier nooit nulpunten van de teller kunnen zijn).

$x^2 + 2x + m = 0$ heeft reële oplossingen als $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \geqslant 0$

dus als $4 - 4m \geqslant 0 \iff m \leqslant 1$.

1) Indien $m > 1$ heeft de grafiek geen verticale asymptoten en is het domein van f gelijk aan $\mathbb{R}$.
De grafiek vertoont dan geen onderbrekingen.

2) Indien $m = 1$ is er één verticale asymptoot met vergelijking $x = -1$.
Het domein is dan $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3) Indien $m < 1$ heeft de grafiek van f twee verticale asymptoten met vergelijking
$x = \dfrac{-2 + \sqrt{4 - 4m}}{2} = -1 + \sqrt{1 - m}$ en $x = = -1 - \sqrt{1 - m}$.
Het domein is dan $\mathbb{R} \setminus \left\{-1 + \sqrt{1 - m}, -1 - \sqrt{1 - m}\right\}$.

**3** Onderzoek hoe de extrema wijzigen in functie van *m*.

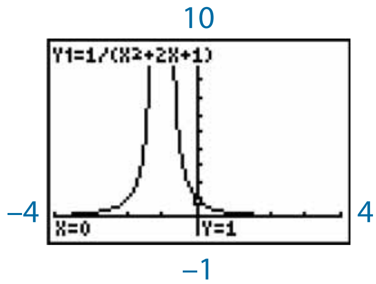
Om de extrema en het stijgen en dalen te onderzoeken, maken we een tekenonderzoek van de eerste afgeleide.

$$f'(x) = -(x^2 + 2x + m)^{-2} \cdot (2x + 2) = \frac{-2(x + 1)}{(x^2 + 2x + m)^2}$$

f′ gaat steeds van positief naar negatief in $-1$.

1) Indien $m \neq 1$, hebben we een maximum voor $x = -1$, met als waarde
$f(-1) = \dfrac{1}{1 - 2 + m} = \dfrac{1}{m - 1}$.
Dit maximum ligt boven de x-as als $m > 1$ en onder de x-as als $m < 1$.

2) Indien $m = 1$, dan behoort $-1$ niet tot het domein.
Er is dan een verticale asymptoot met vergelijking $x = -1$ en de functie heeft geen relatieve extrema:
$f'(x) = \dfrac{-2(x + 1)}{(x + 1)^4} = \dfrac{-2}{(x + 1)^3}$.




**4** Onderzoek hoe de buigpunten wijzigen in functie van *m*.

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 2x + m)^2 \cdot (-2) + 2(x + 1) \cdot 2\,(x^2 + 2x + m)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + m)^4}$$

$$= \frac{2(-x^2 - 2x - m + 4x^2 + 8x + 4)}{(x^2 + 2x + m)^3} = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - m)}{(x^2 + 2x + m)^3}$$

Opdat er buigpunten zouden zijn, moet de teller twee nulpunten hebben die geen nulpunten zijn van de noemer.

De voorwaarde voor twee nulpunten in de teller is

$6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4 - m) > 0 \Leftrightarrow 36 - 48 + 12m > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

1) Indien $m < 1$ heeft f″ geen nulpunten, dus de grafiek van f heeft geen buigpunten.

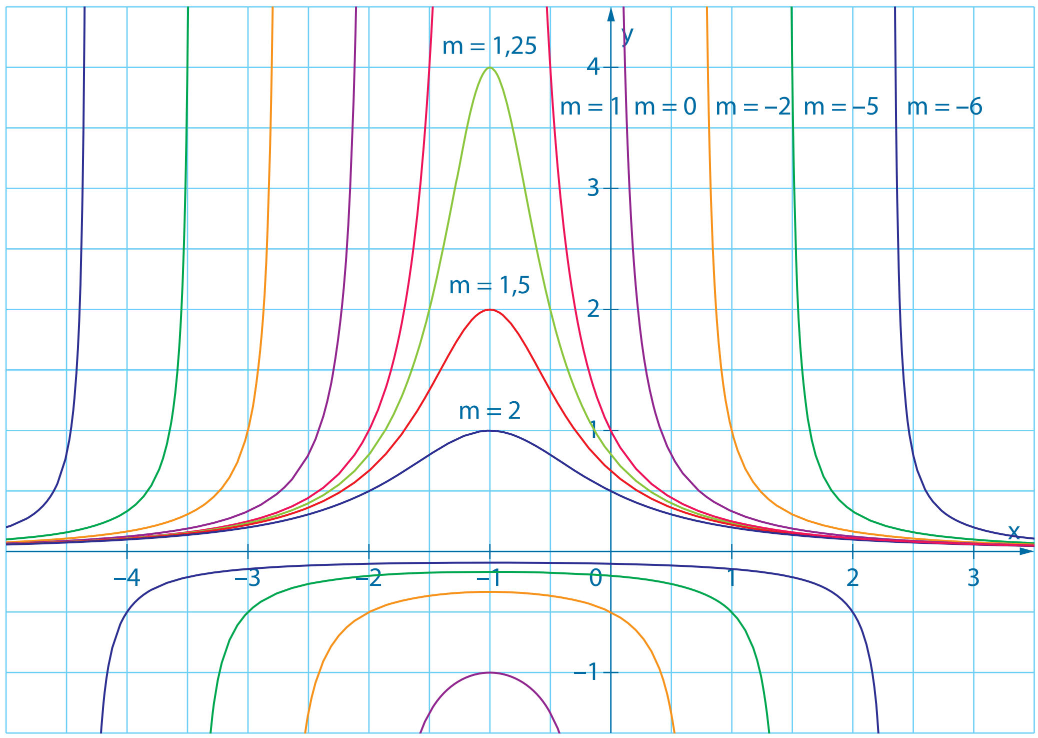
2) Indien $m = 1$ is $f''(x) = \dfrac{6(x + 1)^2}{(x + 1)^6} = \dfrac{6}{(x + 1)^4}$. Ook nu zijn er geen buigpunten.

3) Indien $m > 1$ heeft de teller twee nulpunten en heeft de grafiek van f twee buigpunten met x-coördinaten $\dfrac{-6 \pm\sqrt{12m-12}}{6} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{3m-3}}{3}$.
De buigpunten liggen dus symmetrisch t.o.v. de rechte met vergelijking $x = -1$.

Overzicht: grafiek van $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + m}$

| | asymptoten | relatieve extrema | buigpunten |
|---|---|---|---|
| $m < 1$ | V.A. $x = -1 - \sqrt{1-m}$<br>$x = -1 + \sqrt{1-m}$<br>H.A. $x = 0$ | rel. max. $\dfrac{1}{m-1}$<br>bij $x = -1$ | geen |
| $m = 1$ | V.A. $x = -1$<br>H.A. $y = 0$ | geen | geen |
| $m > 1$ | H.A. $y = 0$ | rel. max. $\dfrac{1}{m-1}$<br>bij $x = -1$ | voor $x = -1 - \dfrac{\sqrt{3m-3}}{3}$<br>en voor $x = -1 + \dfrac{\sqrt{3m-3}}{3}$ |

Tenslotte plotten we enkele grafieken die tot deze familie functies behoren, waarbij veel van bovenstaande onderzochte kenmerken terug te vinden zijn.



**Opdracht 18 bladzijde 248**

Bepaal het stijgen en dalen, de relatieve en absolute extrema van de functie *f*.

**1** $f: x \mapsto \dfrac{3x-4}{x^2}$

- dom f = $\mathbb{R}_0$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot 3 - (3x-4)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-3x^2+8x}{x^4}$

  $= \dfrac{-3x+8}{x^3}$
- nulpunt f': $\dfrac{8}{3}$
- verloopschema f:

| x | | 0 | | $\frac{8}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+8$ | + | + | + | 0 | − |
| $x^3$ | − | 0 | + | + | + |
| $f'(x)$ | − | \| | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | \| | ↗ | $\frac{9}{16}$ max. | ↘ |

- Omdat $f(x) < 0$ als $x < 0$, is het relatief maximum $\dfrac{9}{16}$ ook het absoluut maximum.

**2** $f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot 2x - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$
- nulpunt f': 0
- verloopschema f:

| x | | −1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | \| | + | 0 | − | \| | − |
| $f(x)$ | ↗ | \| | ↗ | 0 max. | ↘ | \| | ↘ |

- Er is een relatief maximum 0 voor $x = 0$. Dit is geen absoluut maximum.

**3** $f\colon x \mapsto x\sqrt{x+1}$

- dom f = [−1, +∞[
- $f'(x) = x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \dfrac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}$

$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

- nulpunt f′: $-\dfrac{2}{3}$
- verloopschema f:

| x | | $-1$ | | $-\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | ǀ | − | 0 | + |
| f(x) | | 0 | ↘ | $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$<br>min. | ↗ |

- f bereikt een relatief minimum $\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$ voor $x = -\dfrac{2}{3}$. Dit is ook een absoluut minimum.

**4** $f\colon x \mapsto \sqrt[3]{x^3+4x^2} = (x^3+4x^2)^{\frac{1}{3}}$

- dom f = ℝ
- $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x^3+4x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2+8x)$

$$= \frac{3x^2+8x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}}$$

$$= \frac{x(3x+8)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4(x+4)^2}}$$

$$= \frac{\cancel{x}(3x+8)}{3\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{x(x+4)^2}}$$

$$= \frac{3x+8}{3\cdot\sqrt[3]{x(x+4)^2}}$$

- nulpunt f′: $-\dfrac{8}{3}$
- verloopschema van f:

| x | | $-4$ | | $-\frac{8}{3}$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+8$ | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $3\cdot\sqrt[3]{x(x+4)^2}$ | − | 0 | − | − | − | 0 | + |
| f′(x) | + | ǀ | + | 0 | − | ǀ | + |
| f(x) | ↗ | | ↗ | $\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$<br>max. | ↘ | 0<br>min. | ↗ |

- f bereikt een relatief maximum $\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ voor $x = -\frac{8}{3}$ en een relatief minimum 0 voor $x = 0$.

**Opdracht 19 bladzijde 248**

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2}$ geen extrema bereikt.

- dom $f = \mathbb{R}_0$
- $$f'(x) = \frac{x^2 \cdot 2x - (x^2-4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$$
- verloopschema van f:

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | − | \| | + |
| f(x) | ↘ | \| | ↗ |

f bereikt geen extrema.

**Opdracht 20 bladzijde 248**

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$ dalend is over haar domein.

- dom f: $\dfrac{5-x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 5 \Rightarrow$ dom $f = ]0, 5]$
- $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5-x}{x}}} \cdot \frac{x\cdot(-1)-(5-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{5-x}} \cdot \frac{-5}{x^2} = \frac{-5}{2\sqrt{x^3(5-x)}}$$

Aangezien $f'(x) < 0$ voor $x \in ]0, 5]$ is f dalend over haar hele domein.

**Opdracht 21 bladzijde 248**

Bepaal de punten met horizontale raaklijn van de functie

$f\colon x \mapsto \dfrac{x^3+5x^2+12x+8}{3x^2}$.

In welke van deze punten bereikt $f$ een relatief extremum?

- dom $f = \mathbb{R}_0$
- $$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (3x^2 + 10x + 12) - 6x \cdot (x^3 + 5x^2 + 12x + 8)}{9x^4}$$

$$= \frac{3x^3 + 10x^2 + 12x - 2x^3 - 10x^2 - 24x - 16}{3x^3}$$

$$= \frac{x^3 - 12x - 16}{3x^3}$$

$$= \frac{(x+2)^2 \cdot (x-4)}{3x^3}$$

Er is een horizontale raaklijn in $P\left(-2, -\dfrac{1}{3}\right)$ en in $Q\left(4, \dfrac{25}{6}\right)$.

$f'$ verandert van teken in 4, maar niet in –2, er is dus enkel een extremum voor $x = 4$.

**Opdracht 22 bladzijde 248**

Bepaal $a$ als de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+a}$ voor $x = 2{,}5$ een extremum bereikt.

$$f'(x) = \frac{(x^2+a) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2+a)^2} = \frac{-5x^2 + 5a}{(x^2+a)^2}$$

Nodige voorwaarde voor een extremum voor $x = 2{,}5$:

$$f'(2{,}5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 \cdot 2{,}5^2 + 5a}{(2{,}5^2+a)^2} = 0$$

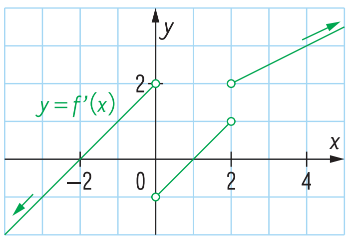
$$\Leftrightarrow -2{,}5^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 6{,}25$$

**Opdracht 23 bladzijde 248**

Van een continue functie $f$ is de hellinggrafiek gegeven.

Voor welke $x$-waarde(n) bereikt $f$ een relatief extremum?




Uit de grafiek van $f'$ kunnen we de tekentabel van $f'$ en het verloopschema van $f$ halen:

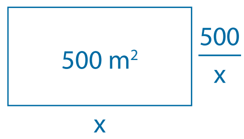
| x | | –2 | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | \| | – | 0 | + | \| | + |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ | min. | ↗ | | ↗ |

$f$ bereikt een relatief extremum voor $x = -2$, $x = 0$ en $x = 1$.

**Opdracht 24 bladzijde 248**

Welke rechthoek met een oppervlakte van 500 $m^2$ heeft de kleinste omtrek?

Hoeveel bedraagt deze minimale omtrek?




- Omtrek rechthoek $= P(x) = 2 \cdot \left( x + \dfrac{500}{x} \right)$

- $P'(x) = 2 \cdot \left( 1 - \dfrac{500}{x^2} \right)$

  $= 2 \cdot \dfrac{x^2 - 500}{x^2}$

  Nulpunten P′: $\quad -10\sqrt{5} \quad$ en $\quad 10\sqrt{5}$

- verloopschema:

| x | | $-10\sqrt{5}$ | | 0 | | $10\sqrt{5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P′(x) | + | 0 | − | \| | − | 0 | + |
| P(x) | | | | \| | ↘ | min. | ↗ |

  minimum voor $x = 10\sqrt{5}$ gelijk aan $2 \cdot \left( 10\sqrt{5} + \dfrac{500}{10\sqrt{5}} \right) = 40\sqrt{5}$

Een vierkant met zijde $10\sqrt{5}$ m $\approx$ 22,36 m heeft de kleinste omtrek.

Deze minimale omtrek is $40\sqrt{5}$ m $\approx$ 89,44 m.

**Opdracht 25 bladzijde 249**

Bepaal de minimale afstand van het punt $P(2,0)$ tot de grafiek van $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

$Q\left(x\,,\sqrt{x}\right)$ ligt op de grafiek van $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

De afstand van P(2 ,0) tot Q is $|PQ| = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2}$

$= \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

$|PQ|$ is minimaal als slechts $|PQ|^2$ minimaal is.

Stel $|PQ|^2 = f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad$ (met $x \geqslant 0$).

$f'(x) = 2x - 3$ met nulpunt $\dfrac{3}{2}$

Aangezien $f''(x) = 2 > 0$, is dit een minimum.

$Q\left(\dfrac{3}{2}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ en de minimale afstand is $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

**Opdracht 26 bladzijde 249**

Gegeven is de rationale functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$.

Welke informatie over de nulpunten en de extrema is geldig voor deze functie?

**A** Deze functie heeft een relatief minimum tussen de twee nulpunten.

**B** Deze functie heeft een relatief maximum tussen de twee nulpunten.

**C** Deze functie heeft een relatief minimum buiten de twee nulpunten.

**D** Deze functie heeft een relatief maximum buiten de twee nulpunten.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 \cdot (2x-4) - (x^2 - 4x)2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{(x+2) \cdot (2x-4) - 2(x^2 - 4x)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} \cancel{+4x} \cancel{-4x} - 8 \cancel{-2x^2} + 8x}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{8x - 8}{(x+2)^3}$$

verloopschema f:

| x | | −2 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | \| | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | \| | ↘ | min. | ↗ |

De nulpunten van f zijn 0 en 4.

Bijgevolg is A het juiste antwoord.

**Opdracht 27 bladzijde 249**

Ga telkens na of voor de gegeven functie aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan is in het gegeven interval. Indien dit zo is, bepaal dan alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

**1** $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^4 - 4x^2}$ in $[-1, 1]$

- f is continu in $[-1, 1]$.
- f is echter niet afleidbaar in $]-1, 1[$ want $f'(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 4x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x^3 - 8x)$

$$= \frac{4x^3 - 8x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4 - 4x^2)^2}}$$

f is niet afleidbaar in $0 \in\, ]-1, 1[$.

Bijgevolg is niet aan de voorwaarden voor de stelling van Rolle voldaan.

**2** $f: x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-2}$ in $[-1, 1]$

- f is continu in $[-1, 1]$
- f is afleidbaar in $]-1, 1[$
- $f(-1) = f(1) = 0$

  $\Rightarrow\ \exists\, c \in\, ]-1, 1[\, : f'(c) = 0 \quad$ met $\ f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$

  $f'(x) = 0 \underset{D = 12}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

  $\overset{c \in\, ]-1,\, 1[}{\Rightarrow} c = 2 - \sqrt{3}$

**3** $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3}$ in $[1, 3]$

- f is continu in $[1, 3]$
- f is afleidbaar in $]1, 3[$
- $f(1) = f(3) = 0$

  $\Rightarrow\ \exists\, c \in\, ]1, 3[\, : f'(c) = 0 \quad$ met $\ f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{4}{3x^2} = \dfrac{4x-6}{3x^3}$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

  $\Rightarrow c = \dfrac{3}{2}$

**Opdracht 28 bladzijde 249**

Ga telkens na of voor de gegeven functie aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange voldaan is in het gegeven interval. Indien dit zo is, bepaal alle waarden van *c* waarvan deze stelling het bestaan aantoont.

**1** $f: x \mapsto x^2 + x$ in $[-4, 6]$

- f is continu in $[-4, 6]$
- f is afleidbaar in $]-4, 6[$

  $\Rightarrow\ \exists\, c \in\, ]-4, 6[\, : f'(c) = \dfrac{f(6) - f(-4)}{6 - (-4)} = \dfrac{42 - 12}{10} = 3$

- $f'(x) = 2x + 1$

  $2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$

  $\Rightarrow c = 1$

**2** $f: x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ in $[2, 5]$

- f is continu in [2 ,5]
- f is afleidbaar in ]2 ,5[

$$\Rightarrow \exists c \in ]2, 5[ : f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{3} = -\frac{1}{4}$$

- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \quad \text{of} \quad x - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{of} \quad x = -1$$

$$\overset{c \in ]2, 5[}{\Rightarrow} \quad c = 3$$

**3** $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x}$ in $[2, 5]$

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

f is bijgevolg niet continu in [2, 5].

Er is niet voldaan aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange.

**Opdracht 29 bladzijde 249**

Voor welke waarden van $a$, $m$ en $b$ voldoet de functie

$$f: x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{als } x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & \text{als } 0 < x < 1 \\ mx + b & \text{als } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

aan de voorwaarden voor de middelwaardestelling van Lagrange in $[0, 2]$?

- f moet continu zijn in [0, 2]

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = a = f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -1 + 3 + 3 = 5 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = m + b \end{array}\right\} \Rightarrow m + b = 5$$

- f moet afleidbaar zijn in ]0, 2[

$$\begin{array}{ll} f'(x) = -2x + 3 & \text{als } 0 < x < 1 \\ f'(x) = m & \text{als } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f'(x) = -2 + 3 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f'(x) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1$$

Uit m + b = 5 en m = 1 volgt dan dat b = 4.

**Opdracht 30 bladzijde 250**

Toon aan dat de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ een absoluut maximum $M$ en een absoluut minimum $m$ heeft en dat $M + m = 1$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)-(x^2-x)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1 - 2x^3 + 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\iff x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

| x | | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1+\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ max. | ↘ | $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ min. | ↗ |

Nu is $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ zodat $M = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} > 1$ een absoluut maximum is en $m = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 1$ een absoluut minimum is met $M + m = \dfrac{\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}}{2} = 1$.

**Opdracht 31 bladzijde 250**

Voor welke waarden van $a$ is de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x-2}{1-ax}$ stijgend over het domein?

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{1-2a}{(ax-1)^2}$$

$f'(x) > 0$ voor alle $x \in \text{dom } f$

$$\iff 1 - 2a > 0$$

$$\iff a < \frac{1}{2}$$

Voor alle waarden van $a < \dfrac{1}{2}$ is f stijgend over het hele domein.

**Opdracht 32 bladzijde 250**

Bepaal $a$ en $b$ als je weet dat de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x^2+bx+5}$ voor $x=2$ en voor $x=3$ een extremum bereikt.

$$f(x)=\frac{x^2+ax-3}{x^2+bx+5}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+bx+5)(2x+a)-(x^2+ax-3)(2x+b)}{(x^2+bx+5)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+2bx^2+10x+ax^2+\cancel{abx}+5a\cancel{-2x^3}-2ax^2+6x-bx^2\cancel{-abx}+3b}{(x^2+bx+5)^2}$$

$$=\frac{(b-a)x^2+16x+5a+3b}{(x^2+bx+5)^2}$$

$f'(2)=0 \;\Rightarrow\; (b-a)\cdot 4+32+5a+3b=0 \qquad (1)$

$f'(3)=0 \;\Rightarrow\; (b-a)\cdot 9+48+5a+3b=0 \qquad (2)$

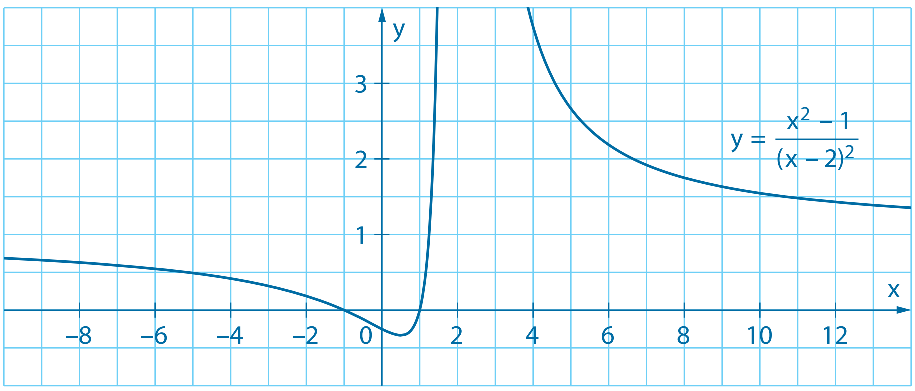
$$\left.\begin{array}{l}(1)\;\Rightarrow\; a+7b=-32\\(2)\;\Rightarrow\; a-3b=12\end{array}\right\}\;\Leftrightarrow\;\left\{\begin{array}{l}a=-1{,}2\\b=-4{,}4\end{array}\right.$$

**Opdracht 33 bladzijde 250**

Voor welke waarde(n) van $p$ hebben de rechte met vergelijking $y=p$ en de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$ precies twee snijpunten?

- $f'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{(2-x)^3} \;\Rightarrow\;$ minimum voor f bij $x=\dfrac{1}{2}$, nl. $-\dfrac{1}{3}$
- asymptoten: V.A.: $x=2$
  H.A.: $y=1$

Er zullen twee verschillende snijpunten zijn voor $p\in\left]-\dfrac{1}{3},1\right[$ en voor $p\in\,]1,+\infty[$, dit is ook op de grafiek te zien.

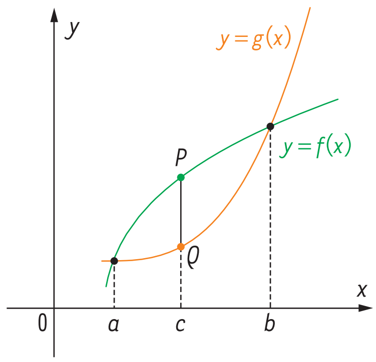


### Opdracht 34 bladzijde 250

De functies $f$ en $g$ zijn afleidbaar in $[a, b]$.
De verticale afstand tussen de grafiek van $f$ en die van $g$ is maximaal in $[a, b]$ voor $x = c$.

Wat weet je over de raaklijnen $t_1$ en $t_2$ aan de grafieken van $f$ en $g$ in $P(c, f(c))$ en $Q(c, g(c))$?

Toon aan.




f en g zijn afleidbaar in [a, b]

$\Rightarrow$ als de verticale afstand tussen de grafiek van f en die van g maximaal is voor x = c is

$(f - g)'(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $f'(c) - g'(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ $f'(c) = g'(c)$

$\Leftrightarrow$ de raaklijnen $t_1$ en $t_2$ aan de grafieken van f en g in P(c, f(c)) en Q(c, g(c)) zijn evenwijdig.

### Opdracht 35 bladzijde 250

Bepaal het stijgen en dalen, de relatieve en absolute extrema van de functie $f$.

**1** $f: x \mapsto \left|x^2 - 5x + 4\right|$

of $\quad f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{als } x \leqslant 1 \text{ of } x \geqslant 4 \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{als } 1 < x < 4 \end{cases}$

f is niet afleidbaar in 1 en in 4.

- $f'(x) = 2x - 5 \quad$ als $x < 1$ of $x > 4$

  $f'(x) = -2x + 5 \quad$ als $1 < x < 4$

  nulpunt f': $\frac{5}{2}$

- verloopschema van f:

| x | | 1 | | $\frac{5}{2}$ | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | \| | + | 0 | – | \| | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | 0 | ↗ |
| | | min. | | max. | | min. | |

f bereikt een relatief maximum $\frac{9}{4}$ voor $x = \frac{5}{2}$ en relatieve minima 0 voor x = 1 en x = 4 die ook absolute minima zijn.

**2** $f: x \mapsto \left|\dfrac{x-3}{x^2+2x+2}\right|$

of $\quad f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2+2x+2} & \text{als } x \geqslant 3 \\ \dfrac{-x+3}{x^2+2x+2} & \text{als } x < 3 \end{cases}$ $\qquad$ (dom f = ℝ)

f is niet afleidbaar in 3.

- $f'(x) = \dfrac{-x^2+6x+8}{(x^2+2x+2)^2}$ $\quad$ als $x > 3$

  $f'(x) = \dfrac{x^2-6x-8}{(x^2+2x+2)^2}$ $\quad$ als $x < 3$

  nulpunten f′: $3 \pm \sqrt{17}$

- verloopschema van f:

| x | | $3-\sqrt{17}$ | | 3 | | $3+\sqrt{17}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | \| | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | 4,061... max. | ↘ | 0 min. | ↗ | 0,0615... max. | ↘ |

f bereikt een relatief minimum 0 dat ook een absoluut minimum is voor x = 3.

f bereikt twee relatieve maxima: $f\left(3-\sqrt{17}\right) = 4{,}061...$ voor $x = 3-\sqrt{17}$ en $f\left(3+\sqrt{17}\right) = 0{,}0615...$ voor $x = 3+\sqrt{17}$.
Dit eerste is ook een absoluut maximum.

**3** $f: x \mapsto \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{als } x \leqslant 3 \\ -2x^2+16x-24 & \text{als } x > 3 \end{cases}$

f is afleidbaar in 3 met f′(3) = 4

- $f'(x) = 2x - 2$ als $x \leqslant 3$

  nulpunt f′: 1

  en $f'(x) = -4x + 16$ als $x > 3$

  nulpunt f′: 4

- verloopschema van f:

| x | | 1 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | 2 min. | ↗ | 8 max. | ↘ |

f bereikt een relatief maximum 8 voor x = 4 en een relatief minimum 2 voor x = 1.

f bereikt geen absolute extrema.

**4** $f: x \mapsto \begin{cases} -x^2+5 & \text{als } x \leqslant 2 \\ -x^2+8x-11 & \text{als } x > 2 \end{cases}$

f is niet afleidbaar in 2.

- $f'(x) = -2x$ als $x < 2$

  nulpunt f': 0

  en $f'(x) = -2x + 8$ als $x > 2$

  nulpunt f': 4

- verloopschema van f:

| x |  | 0 |  | 2 |  | 4 |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | \| | + | 0 | − |
| f(x) | ↗ | 5<br>max. | ↘ | 1<br>min. | ↗ | 5<br>max. | ↘ |

f bereikt een relatief minimum 1 voor x = 2.

f bereikt een relatief maximum 5 voor x = 0 en x = 4. Dit is ook een absoluut maximum.

**Opdracht 36 bladzijde 250**

Bewijs dat $\frac{a}{a^2+4} > \frac{b}{b^2+4}$ als $2 \leqslant a < b$.

Beschouw de functie met voorschrift

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{x^2+4-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

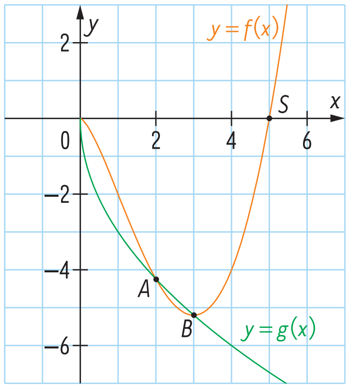
| x |  | −2 |  | 2 |  |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | − | 0 | + | 0 | − |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

Als $2 \leqslant a < b$ dan is $f(a) > f(b)$ want f is dalend in $[2, +\infty[$.

Bijgevolg is $\frac{a}{a^2+4} > \frac{b}{b^2+4}$.

**Opdracht 37 bladzijde 251**

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 5x)\sqrt{x}$ en $g: x \mapsto -3\sqrt{x}$.




**1** De snijpunten van de grafieken van $f$ en $g$ zijn $O$, $A$ en $B$.

Bereken de coördinaten van $A$ en $B$.

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 5x)\sqrt{x} = -3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2 \quad \text{of} \quad x = 3$

Snijpunten: $O(0, 0)$, $A\left(2, -3\sqrt{2}\right)$, $B\left(3, -3\sqrt{3}\right)$

**2** We noemen $S$ het snijpunt van de grafiek van $f$ met de positieve $x$-as. Een punt $P$ doorloopt de grafiek van $g$.

Bereken de minimale lengte van $[PS]$.

$S(5, 0)$

$P\left(x, -3\sqrt{x}\right)$

$|PS| = \sqrt{(x-5)^2 + \left(-3\sqrt{x}\right)^2}$

$= \sqrt{x^2 - x + 25}$

$|PS|$ is minimaal als $|PS|^2$ minimaal is:

Stel $f(x) = |PS|^2 = x^2 - x + 25$

$f'(x) = 2x - 1$

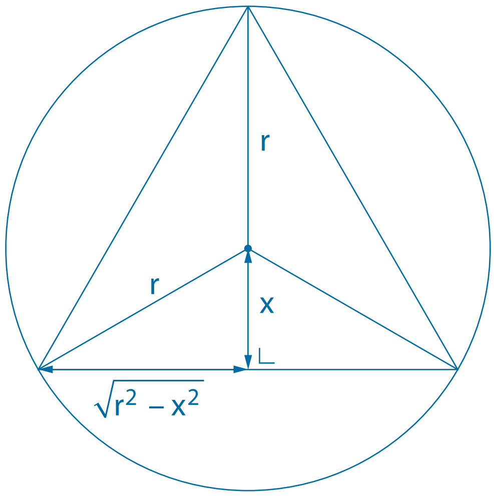
$f'$ gaat over van negatief naar positief in $\frac{1}{2}$, dus $f$ bereikt een minimum voor $x = \frac{1}{2}$.

De minimale lengte van [PS] is $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 25} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$.

**Opdracht 38 bladzijde 251**

In een cirkel met straal *r* beschrijven we een gelijkbenige driehoek.

Bepaal de basis en de hoogte van de driehoek zodat de oppervlakte maximaal is.




- Oppervlakte driehoek $= \dfrac{2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot (r + x)}{2}$
- Om de vierkantswortel te vermijden beschouwen we het kwadraat van de oppervlakte.

  $A(x) = (r^2 - x^2)(r + x)^2$

  $A'(x) = -2x(r + x)^2 + (r^2 - x^2)\ 2\ (r + x) = 2(r + x)^2[-x + r - x]$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2(r + x)^2(-2x + r)$

| x | $-r$ | $0$ | | $\frac{r}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | | + | 0 | − |
| $A(x)$ | | | ↗ | max. | ↘ |

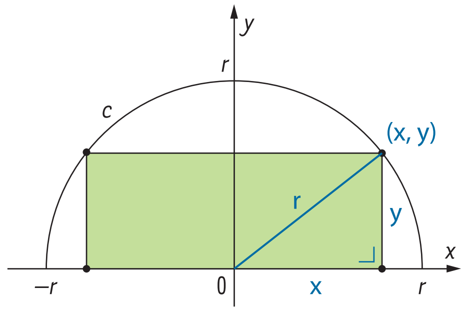
- Basis $= 2\sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{4}} = 2\sqrt{\dfrac{3}{4}r^2} = \sqrt{3}\,r$

  Hoogte $= r + \dfrac{r}{2} = \dfrac{3}{2}r$

  $\Rightarrow$ De oppervlakte is maximaal als we voor de basis $r\sqrt{3}$ nemen en als hoogte $\dfrac{3}{2}r$.

**Opdracht 39 bladzijde 251**

Bereken de oppervlakte van de grootst mogelijke rechthoek die kan ingeschreven worden in een halve cirkel *c* met straal *r*.




- Een vergelijking van de cirkel met middelpunt O en straal r is.

  $x^2 + y^2 = r^2$

  $\Rightarrow\; y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (bovenste helft cirkel)

  Oppervlakte rechthoek $= A(x)$

  $= 2x \cdot y$

  $= 2x\sqrt{r^2 - x^2}$

- $A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{-4x^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

  Nulpunten teller: $\pm\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

  Nulpunten noemer: $\pm r$

| x | $-r$ | $-\frac{r}{\sqrt{2}}$ | 0 | | $\frac{r}{\sqrt{2}}$ | | $r$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | | | + | 0 | − | \| | + |
| $A(x)$ | | | | ↗ | max. | ↘ | | |

- De oppervlakte van de grootst mogelijk ingeschreven rechthoek is:

  $2 \cdot \dfrac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}} = \sqrt{2}r \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}r = r^2$

**Opdracht 40 bladzijde 251**

De energie die een vis per tijdseenheid verbruikt als hij zwemt met een snelheid $v$, is evenredig met $v^3$. Vissen die migreren proberen de energie die ze nodig hebben om een bepaalde afstand af te leggen, te minimaliseren.

Als een vis tegen een stroming met snelheid $u$ $(u < v)$ zwemt, is de tijd die hij nodig heeft om zich te verplaatsen over een afstand $d$ gelijk aan $\dfrac{d}{v-u}$.

Hieruit volgt de uitdrukking voor de verbruikte energie $E(v) = k \cdot v^3 \cdot \dfrac{d}{v-u}$ waarbij $k$ een evenredigheidsconstante is.

Uit experimenten blijkt dat vissen die migreren tegenstroom zwemmen met een snelheid die 50 % hoger ligt dan de stromingssnelheid.

Toon aan dat je deze snelheid met het bovenstaande model vindt bij minimaal energieverbruik.

- Verbruikte energie $= E(v) = k \cdot v^3 \cdot \dfrac{d}{v-u}$
- $E'(v) = kd\left(\dfrac{3v^2(v-u) - v^3}{(v-u)^2}\right)$

$$= \frac{kdv^2(3v - 3u - v)}{(v-u)^2}$$

$$= \frac{kdv^2(2v - 3u)}{(v-u)^2}$$

| $v$ | $0$ | $u$ | | $\frac{3u}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'(v)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $E(v)$ | | | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

$\Rightarrow$ Optimale snelheid is $v = \dfrac{3u}{2} = 1{,}5\ u$; m.a.w. een snelheid die 50% hoger ligt dan de stromingssnelheid u.

**Opdracht 41 bladzijde 252**

**1** Toon aan dat de vergelijking $3ax^2 + 2bx = a + b$ minstens één oplossing heeft in $]0, 1[$.

Beschouw hiervoor de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 - (a + b)x$ en gebruik de stelling van Rolle.

$f: x \mapsto ax^3 + bx^2 - (a + b)x$

- f is continu in [0, 1]
- f is afleidbaar in ]0, 1[
- $f(0) = f(1) = 0$

$$\overset{\text{Stelling van Rolle}}{\Rightarrow} \quad \exists\, c \in\, ]0, 1[\, : f'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3ac^2 + 2bc - (a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3ac^2 + 2bc = a + b$$

Bijgevolg heeft de vergelijking $3ax^2 + 2bx = a + b$ minstens één oplossing in ]0, 1[.

**2** Toon aan dat de vergelijking $6x^5 - 4x + 1 = 0$ minstens één oplossing heeft in $]0, 1[$.

$f: x \mapsto x^6 - 2x^2 + x$

- f is continu in [0, 1]
- f is afleidbaar in ]0, 1[
- $f(0) = f(1) = 0$

$$\overset{\text{Stelling van Rolle}}{\Rightarrow} \quad \exists\, c \in\, ]0, 1[\, : f'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6c^5 - 4c + 1 = 0$$

Bijgevolg heeft de vergelijking $6x^5 - 4x + 1 = 0$ minstens één oplossing in ]0, 1[.

**Opdracht 42 bladzijde 252**

**1** Voor de functie $f$ geldt: $1 \leqslant f'(x) \leqslant 2$ voor elke $x \in [3, 5]$.

Tussen welke grenzen ligt $f(5) - f(3)$?

$1 \leqslant f'(x) \leqslant 2, \forall\, x \in [3, 5]$

Uit het gegeven volgt dat f afleidbaar is over het beschouwde interval en dus ook continu.

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt:

$\exists\, c \in ]3, 5[ : f'(c) = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$

$\Rightarrow\ 1 \leqslant \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \leqslant 2$

$\Rightarrow\ 2 \leqslant f(5) - f(3) \leqslant 4$

$\Rightarrow$ f(5) – f(3) ligt tussen 2 en 4

**2** Als voor elke $x \in [x_1, x_2]$ geldt: $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, dan geldt $m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1)$.

Bewijs.

$m \leqslant f'(x) \leqslant M, \forall\, x \in ]x_1, x_2[$

Uit het gegeven volgt dat f afleidbaar is over het beschouwde interval en dus ook continu.

Uit de middelwaardestelling van Lagrange volgt dat:

$\exists\, c \in ]x_1, x_2[ : f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\Rightarrow\ m \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant M$

$\overset{x_2 - x_1 > 0}{\Rightarrow}\ m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1)$

**Opdracht 43 bladzijde 252**

Beschouw de familie functies met voorschrift $f(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$ met $m$ als reële parameter.

dom f = $\mathbb{R}$, geen V.A., H.A.: $y = 0$

**1** Toon aan dat elk van deze functies een relatief maximum en een relatief minimum heeft.

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2mx - 1}{(x^2+1)^2}$$

Nulpunten teller:

nulpunten noemer: /

$$D = 4(m^2 + 1) > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2m \pm 2\sqrt{m^2+1}}{2} = -m \pm \sqrt{m^2+1}$$

f′ heeft dus 2 nulpunten.

| x | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | min. | ↗ | max. | ↘ |

De coördinaten van de extrema zijn:

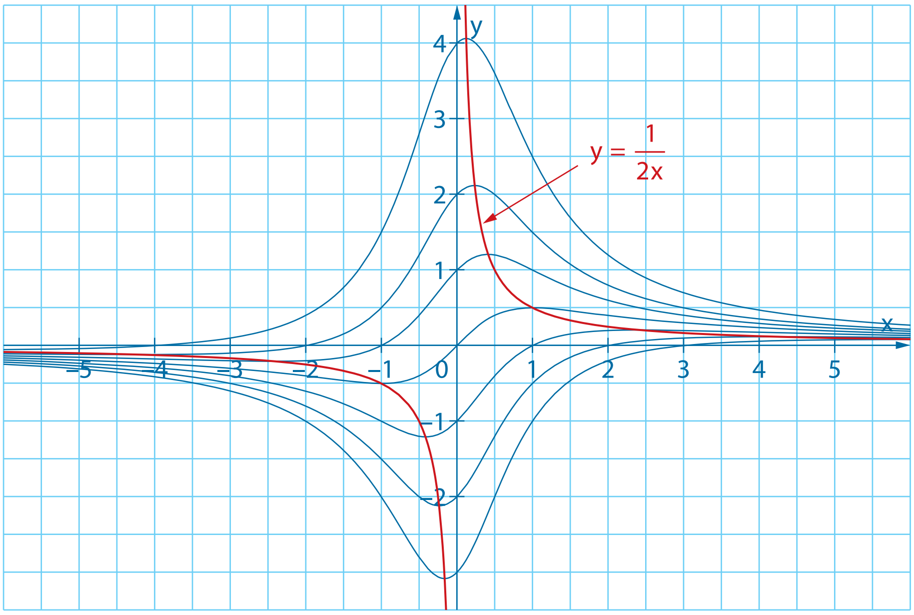
$$\left(-m - \sqrt{m^2+1};\ \frac{m - \sqrt{m^2+1}}{2}\right) \text{ en } \left(-m + \sqrt{m^2+1};\ \frac{m + \sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$

**2** Op welke kromme liggen al deze extrema?

$$x_1 \cdot y_1 = \left(-m - \sqrt{m^2+1}\right) \cdot \left(\frac{m - \sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(m^2 + 1 - m^2)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$x_2 \cdot y_2 = \left(-m + \sqrt{m^2+1}\right) \cdot \left(\frac{m + \sqrt{m^2+1}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(m^2 + 1 - m^2)$$
$$= \frac{1}{2}$$

Deze extrema liggen op de hyperbool met vergelijking $y = \dfrac{1}{2x}$.

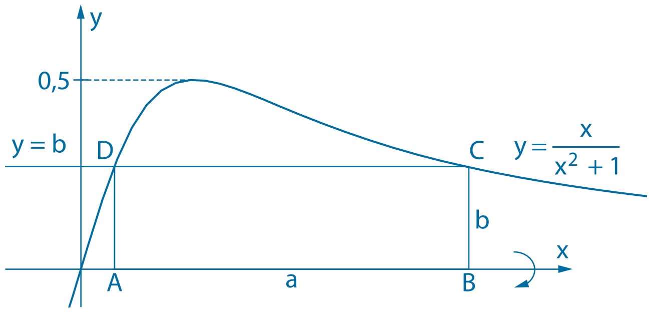


**Opdracht 44 bladzijde 252**

Van een rechthoek met twee hoekpunten op de positieve $x$-as, liggen de andere hoekpunten op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Door wentelen van deze rechthoek rond de $x$-as onstaat een cilinder.

Bepaal de afmetingen en de ligging van de rechthoek waarvoor de inhoud van deze cilinder maximaal is.




- Er geldt: $b = \dfrac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow bx^2 + b = x$

$$\Leftrightarrow bx^2 - x + b = 0$$

$$\underset{D = 1-4b^2}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4b^2}}{2b}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1-\sqrt{1-4b^2}}{2b}, 0\right), B\left(\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2b}, 0\right) \text{ zodat } |AB| = \frac{\sqrt{1-4b^2}}{b}$$

- Inhoud cilinder

$$I(b) = \pi \cdot b^2 \cdot \frac{\sqrt{1-4b^2}}{b}$$

$$= \pi \cdot b \cdot \sqrt{1-4b^2}$$

$$I'(b) = \pi \cdot \left(\sqrt{1-4b^2} + b\frac{-4b}{\sqrt{1-4b^2}}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{1-4b^2-4b^2}{\sqrt{1-4b^2}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1-8b^2}{\sqrt{1-4b^2}}$$

Nulpunten teller: $\pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Nulpunten noemer: $\pm\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | | | | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| $A(x)$ | | | | | | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | | |

$\Rightarrow$ de hoogte (b) van de rechthoek is $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

de basis ($|AB|$) van de rechthoek is $\dfrac{\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{8}}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2$

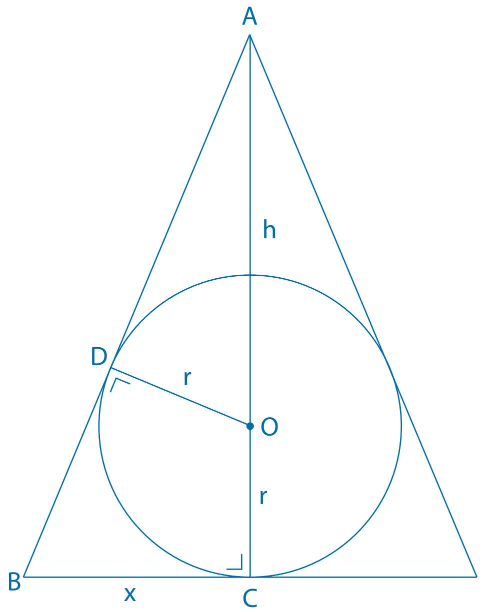
$$A\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0\right) = A\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, 0\right) = A\left(\sqrt{2}-1, 0\right)$$

$$B\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0\right) = B\left(\sqrt{2}+1, 0\right)$$

**Opdracht 45 bladzijde 252**

Een kegel is beschreven om een bol met straal *r*.

Bereken de verhouding van het volume van de kegel en het volume van de bol als het volume van de kegel minimaal is.




- We tekenen een doorsnede van de bol en de kegel met een vlak door de top van de kegel en loodrecht op het grondvlak. We stellen x gelijk aan de straal van het grondvlak van de kegel.

  Trek $OD \perp AB$

- Nu is $\Delta ABC$ gelijkvormig met $\Delta AOD$
  ($\hat{A}$ gemeenschappelijk en $\hat{C} = \hat{D} = 90°$)

$$\Rightarrow \quad \frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{r} = \frac{h}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}} \qquad \left(|AD| = \sqrt{|AO|^2 - |OD|^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{h^2}{h^2 - 2hr}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{h}{h-2r}$$

$$\Downarrow$$

$$hx^2 - 2rx^2 = hr^2$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$$

Het volume van de kegel is dus $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x^2 \cdot \dfrac{2rx^2}{x^2-r^2} = \dfrac{2}{3}\pi r \cdot \dfrac{x^4}{x^2-r^2}$.

- $V'(x) = \frac{2}{3}\pi r\left(\frac{4x^3(x^2 - r^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - r^2)^2}\right)$

  $= \frac{2}{3}\pi r \cdot 2x^3 \frac{2x^2 - 2r^2 - x^2}{(x^2 - r^2)^2}$

  $= \frac{4}{3}\pi r \cdot x^3 \cdot \frac{x^2 - 2r^2}{(x^2 - r^2)^2}$

  Nulpunten teller: $\pm\sqrt{2}r$

  Nulpunten noemer: $\pm r$

| $x$ | $-\sqrt{2}r$ | $-r$ | $0$ | $r$ | | $\sqrt{2}r$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | | | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $V(x)$ | | | | | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ |

$\Rightarrow$ De straal van het grondvlak van de kegel is $x = \sqrt{2}r$ en het volume is dan

$\frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{4r^4}{r^2} = \frac{8}{3}\pi r^3$.

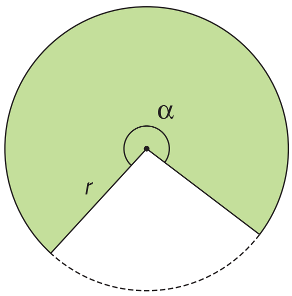
Het volume van de bol is $\frac{4}{3}\pi r^3$.

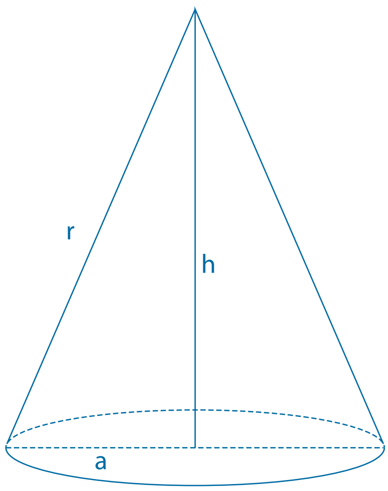
De gevraagde verhouding is $\frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2$.

**Opdracht 46 bladzijde 252**

Uit een cirkelvormig blad papier met straal *r* snijden we een sector uit met middelpunthoek $\alpha$. Met deze sector maken we een kegel.

Hoe groot moeten we $\alpha$ nemen opdat het volume van de kegel zo groot mogelijk zou zijn?




- Met een middelpuntshoek van 360° correspondeert een lengte van $2\pi r$.
- Met een middelpuntshoek van $\alpha°$ correspondeert een lengte van $\frac{2\pi r \cdot \alpha}{360}$

  Als a de straal is van het grondvlak van de kegel is $2\pi a$ de omtrek van het grondvlak.

  Dus $2\pi a = \frac{2\pi r\alpha}{360}$

  $\Downarrow$

  $a = \frac{r\alpha}{360}$

  De hoogte h van de kegel is dan

  $\sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2\alpha^2}{360^2}}$

- Het volume van de kegel is bijgevolg:

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\, a^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^2\alpha^2}{360^2}\sqrt{r^2 - \frac{r^2\alpha^2}{360^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3 \alpha^2}{360^3} \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}$$

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\left(2\alpha\sqrt{360^2 - \alpha^2} - \alpha^2 \frac{\alpha}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\frac{\alpha(2(360^2 - \alpha^2) - \alpha^2)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi r^3}{360^3}\frac{\alpha(2 \cdot 360^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

Nulpunten teller: $\pm 360\sqrt{\frac{2}{3}}$

Nulpunten noemer: $\pm 360$

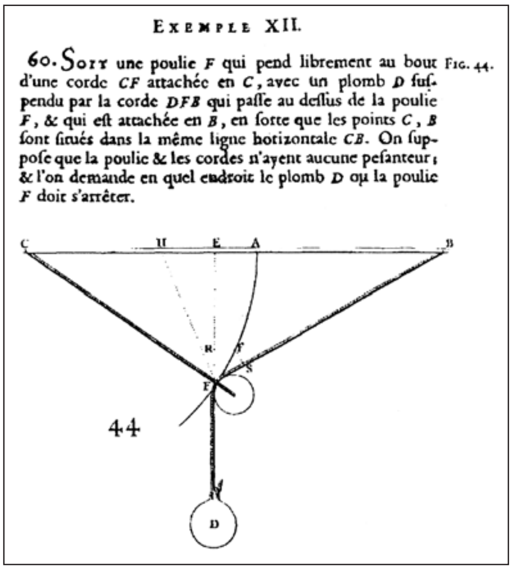
| $\alpha$ | $-360$ | | $-360\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $0$ | | $360\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $360$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V'(\alpha)$ | | | | | | $+$ | $0$ | $-$ | $\mid$ | $+$ |
| $V(\alpha)$ | | | | | | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | | |

$$\Rightarrow \quad \alpha = 360°\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\approx 294°$$

**Opdracht 47 bladzijde 253**

In 1696 publiceerde Guillaume de L'Hôpital[3] het eerste franstalige boek over analyse.
Daarin loste hij het volgende probleem op.


EXEMPLE XII.

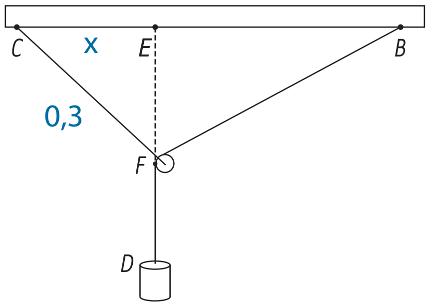
60. Soit une poulie $F$ qui pend librement au bout d'une corde $CF$ attachée en $C$, avec un plomb $D$ suſpendu par la corde $DFB$ qui paſſe au deſſus de la poulie $F$, & qui eſt attachée en $B$, en ſorte que les points $C$, $B$ ſont ſitués dans la même ligne horizontale $CB$. On ſuppoſe que la poulie & les cordes n'ayent aucune peſanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb $D$ ou la poulie $F$ doit s'arrêter. FIG. 44.



Aan een horizontale balk worden twee touwtjes van ongelijke lengte bevestigd. Aan het uiteinde van het linkertouwtje (het kortste touwtje) wordt een katrol bevestigd en door deze katrol wordt het rechtertouwtje gehaald, waarna aan het uiteinde van dit touwtje een gewicht wordt bevestigd. Hierna wordt het geheel losgelaten, waarop het gewicht verschuift totdat een evenwicht bereikt wordt.

De vraag is waar de rustpositie van het gewicht zich bevindt en hoe dit berekend kan worden.

Ter vereenvoudiging nemen we aan dat de straal van de katrol zeer klein is en dus buiten beschouwing mag worden gelaten. Alhoewel de L'Hôpital het probleem algemeen oploste, voeren we de volgende afmetingen in: het linkertouwtje is
0,3 m lang, het rechtertouw is 1,5 m lang en $|CB| = 1$ m.




- Bij het bereiken van een evenwicht zal het gewichtje zo laag mogelijk hangen, m.a.w. de afstand tussen E en D moet zo groot mogelijk zijn.
- Stellen we nu $|CE| = x$, dan is $|EB| = 1 - x$.

  Verder is gegeven dat $|CF| = 0{,}3$, zodat

  $|EF| = \sqrt{0{,}09 - x^2}$.
- In de rechthoekige driehoek BEF is $|EB|$ gelijk aan $1 - x$ en $|EF|$ gelijk aan $\sqrt{0{,}09 - x^2}$ zodat

  $|FB| = \sqrt{(1-x)^2 + 0{,}09 - x^2} = \sqrt{1{,}09 - 2x}$.
- Uit $|BD| = 1{,}5$ volgt dan dat $|FD| = 1{,}5 - \sqrt{1{,}09 - 2x}$.
- Voor $|ED|$ verkrijgen we dan als lengte: $f(x) = 1{,}5 - \sqrt{1{,}09 - 2x} + \sqrt{0{,}09 - x^2}$.
- $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}09 - 2x}} - \dfrac{x}{\sqrt{0{,}09 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{0{,}09 - x^2} - x\sqrt{1{,}09 - 2x}}{\sqrt{(1{,}09 - 2x)(0{,}09 - x^2)}}$

| x | −0,3 | −0,191 | 0 | | 0,236 | | 0,3 | 0,545 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | \| | 0 | | + | 0 | − | \| | \| | 0 |
| f(x) | | | | ↗ | max. | ↘ | | | |

De afstand $|CE|$ is ongeveer 0,236 m.

**Opdracht 48 bladzijde 253**

Onderzoek het hol en bol verloop van de volgende functies. Bepaal ook de eventuele buigpunten van de grafiek van *f*.

**1** $f: x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2) - x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+2)^{\cancel{2}} \cdot (-2x) - (-x^2+2) \cdot 2\cancel{(x^2+2)} \cdot 2x}{(x^2+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

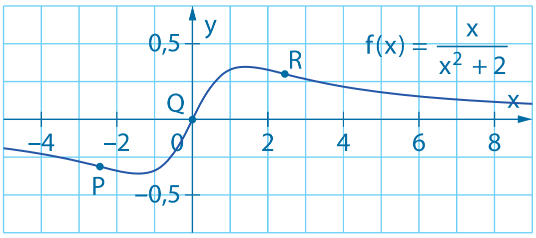
$$= \frac{2x(-x^2-2+2x^2-4)}{(x^2+2)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$$

| x | | $-\sqrt{6}$ | | 0 | | $\sqrt{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ⌒ | $-\frac{\sqrt{6}}{8}$ bgpt. | ◡ | 0 bgpt. | ⌒ | $\frac{\sqrt{6}}{8}$ bgpt. | ◡ |

De grafiek van f is hol in $\left[-\sqrt{6}, 0\right]$ en in $\left[\sqrt{6}, +\infty\right[$ en bol in $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right]$ en $\left[0, \sqrt{6}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$, $Q(0, 0)$ en $R\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$.



**2** $f: x \mapsto \dfrac{(x+3)^2}{x^2+2x+5}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+5)2(x+3)-(x+3)^2(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$= \frac{2(x+3)(x^2+2x+5-x^2-4x-3)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$= \frac{2(x+3)(-2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{4(x+3)(1-x)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f''(x) = 4\cdot\frac{(x^2+2x+5)(-2x-2)-(x+3)(1-x)\cdot 2(2x+2)}{(x^2+2x+5)^3}$$
$$= \frac{4\cdot(2x+2)\cdot(-x^2-2x-5+2x^2+4x-6)}{(x^2+2x+5)^3}$$
$$= \frac{8(x+1)(x^2+2x-11)}{(x^2+2x+5)^3}$$

$f''(x)=0 \iff x=-1 \quad \text{of} \quad x^2+2x-11=0$

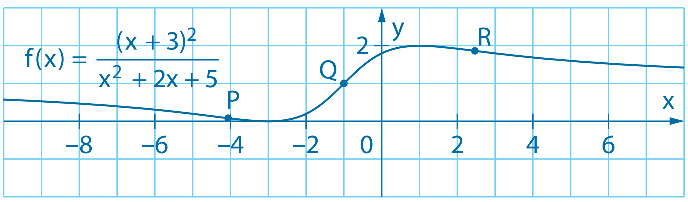
$D = 4+4\cdot 1\cdot 11$
$= 48$

$\iff x=-1 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{-2\pm 4\sqrt{3}}{2} = -1\pm 2\sqrt{3}$

| x | | $-1-2\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $-1+2\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | $\frown$ | $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bgpt. | $\smile$ | 1 bgpt. | $\frown$ | $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bgpt. | $\smile$ |

De grafiek van f is hol in $\left[-1-2\sqrt{3}, -1\right]$ en in $\left[-1+2\sqrt{3}, +\infty\right[$ en bol in $\left]-\infty, -1-2\sqrt{3}\right]$ en in $\left[-1, -1+2\sqrt{3}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(-1-2\sqrt{3},\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, Q(−1, 1) en $R\left(-1+2\sqrt{3},\ 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



**3** $f\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}$

dom f = ]–4, 4]

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}} \cdot \frac{(4+x)(-1)-(4-x)1}{(4+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}} \cdot \frac{-4}{(4+x)^2}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{(4-x)(4+x)^3}} = -4\left[(4-x)(4+x)^3\right]^{-\frac{1}{2}}$$

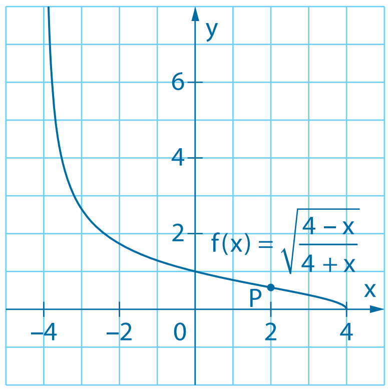
$$f''(x) = -4 \cdot \frac{-1}{2}\left[(4-x)(4+x)^3\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \left[-(4+x)^3 + (4-x)\cdot 3(4+x)^2\right]$$

$$= \frac{2(4+x)^2 \cdot (-4-x+12-3x)}{\sqrt{(4-x)^3(4+x)^9}}$$

$$= \frac{8(2-x)}{\sqrt{(4-x)^3(4+x)^5}}$$

| x | –4 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | \| | + | 0 | – | \| |
| f(x) | \| | ∪ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ bgpt. | ∩ | 0 |

De grafiek van f is hol in ]–4, 2], bol in [2, 4] en heeft een buigpunt $P\left(2, \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.



**4** $f: x \mapsto 2\cdot\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^4}$

$$f(x) = 2\cdot x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(1+x)$$

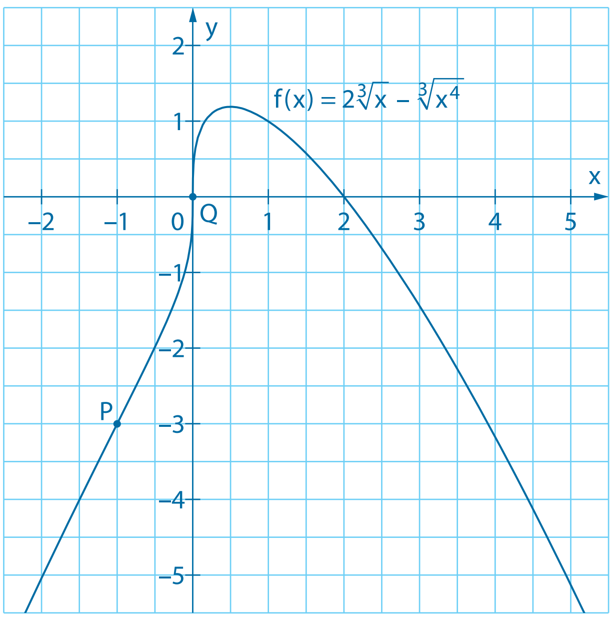
$$= \frac{-4(1+x)}{9\cdot\sqrt[3]{x^5}}$$

f is niet afleidbaar in 0.

| x | | −1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4(1+x)$ | + | 0 | − | − | − |
| $9\cdot\sqrt[3]{x^5}$ | − | − | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | − | 0 | + | \| | − |
| $f(x)$ | ⌒ | −3<br>bgpt. | ◡ | 0<br>bgpt. | ⌒ |

De grafiek van f is hol in [−1, 0] en bol in ]−∞, −1] en in [0, +∞[.

De buigpunten zijn P(−1, −3) en Q(0, 0).



**Opdracht 49 bladzijde 254**

Bepaal de relatieve extrema van $f: x \mapsto -x^3 + 5x^2 - 3x + 9$ gebruik makend van de tweede afgeleide-test.

$f'(x) = -3x^2 + 10x - 3$

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 + 10x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{3}$$

$f''(x) = -6x + 10$

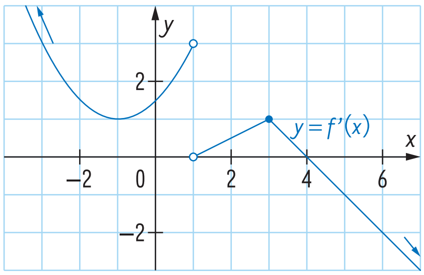
$$f''(3) = -8 < 0 \;\Rightarrow\; \text{f bereikt een rel. max. voor } x = 3 \text{ gelijk aan } f(3) = 18.$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \text{f bereikt een rel. min. voor } x = \frac{1}{3} \text{ gelijk aan } \frac{230}{27}.$$

**Opdracht 50 bladzijde 254**

Van een continue functie $f$ is de hellinggrafiek gegeven.

Voor welke $x$-waarde(n) heeft de grafiek van $f$ een buigpunt?




f′ bereikt een relatief extremum voor $x = -1$ en voor $x = 3$, zodat de grafiek van f daar een buigpunt heeft.

Voor $x = 1$ is er geen unieke raaklijn, dus ook geen buigpunt.

**Opdracht 51 bladzijde 254**

Gegeven is de rationale functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-2)^2}$.

Welke informatie over extrema, buigpunten en asymptoten is geldig voor deze functie?

**A** Deze functie heeft een verticale en een horizontale asymptoot, een minimum voor $x = \frac{1}{2}$ en een buigpunt voor $x = -\frac{1}{4}$.

**B** Deze functie heeft alleen een verticale asymptoot, een minimum voor $x = \frac{1}{2}$ en meer dan 1 buigpunt.

**C** Deze functie heeft een verticale en een horizontale asymptoot, een maximum voor $x = \frac{1}{2}$ en meer dan 1 buigpunt.

**D** Geen van de drie bovenstaande mogelijkheden is correct.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

- V.A.: $x = 2$ en H.A.: $y = -1$ nl. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$

  $\Rightarrow$ B is fout

- $f'(x) = \dfrac{(x-2)\cdot(-2x) - (1-x^2)\cdot 2}{(x-2)^3}$

  $= \dfrac{-2x^2 + 4x - 2 + 2x^2}{(x-2)^3}$

  $= \dfrac{4x-2}{(x-2)^3}$

| x | | $\frac{1}{2}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − | \| | + |
| f(x) | ↗ | max. | ↘ | \| | ↗ |

f bereikt een maximum voor $x = \frac{1}{2}$ zodat ook A fout is.

- $f''(x) = \dfrac{(x-2)^3 \cdot 4 - (4x-2)\cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$

  $= \dfrac{4x - 8 - 12x + 6}{(x-2)^4}$

  $= \dfrac{-8x-2}{(x-2)^4}$

| x | | $-\frac{1}{4}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − | \| | − |
| f(x) | ∪ | bgpt. | ∩ | \| | ∩ |

De grafiek van f heeft juist 1 buigpunt voor $x = -\frac{1}{4}$ zodat ook C fout is.

Antwoord D is het juiste.

**Opdracht 52 bladzijde 254**

Gegeven is de familie van rationale functies $f\colon x \mapsto \dfrac{mx}{x^2 - m^2}$ met parameter $m$.

**1** Toon aan dat $f'(x) = \dfrac{-m(x^2+m^2)}{(x^2-m^2)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{(x^2 - m^2)\cdot m - mx \cdot 2x}{(x^2-m^2)^2}$

$= \dfrac{mx^2 - m^3 - 2mx^2}{(x^2-m^2)^2}$

$= \dfrac{-m(x^2+m^2)}{(x^2-m^2)^2}$

**2** Voor welke waarde van *m* is de helling in het buigpunt gelijk aan 4?

$$f''(x) = \frac{(x^2 - m^2)\cdot(-2mx) + m(x^2 + m^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{2mx(-x^2 + m^2 + 2x^2 + 2m^2)}{(x^2 - m^2)^3}$$

$$= \frac{2mx(x^2 + 3m^2)}{(x^2 - m^2)^3}$$

f″ heeft maar één nulpunt met tekenwissel: 0.

Het buigpunt is P(0, 0).

De helling in het buigpunt is f′(0).

$$f'(0) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m^3}{m^4} = 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{m} = 4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{4}}$$

**Opdracht 53 bladzijde 254**

Gegeven is de familie van irrationale functies $f\colon x \mapsto \sqrt{x^2+1} - mx$ met parameter *m*.

**1** Voor welke waarden van *m* heeft *f* een extremum?

Gebruik de tweede afgeleide-test om na te gaan of dit extremum een maximum of een minimun is.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x - m = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$$

- Opdat f′ een nulpunt met tekenwissel zou hebben, moeten de grafieken van $f_1\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ en $f_2\colon x \mapsto m$ een snijpunt hebben (geen raakpunt).
- We onderzoeken het verloop van $f_1\colon x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

    $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$

    y = 1 en y = –1 zijn vergelijkingen van de H.A.

- $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

  $f_1'(x) > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ zodat $f_1$ overal stijgend is.

  We besluiten: $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

  $\Rightarrow$ $f_1$ snijdt $f_2$ enkel als $\boxed{-1 < m < 1}$.

$f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Bijgevolg heeft f steeds een relatief minimum als $-1 < m < 1$.

**2** Toon aan dat de grafiek van *f* voor geen enkele waarde van *m* een buigpunt heeft.

$f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$

De grafiek van f heeft nooit buigpunten.

### Opdracht 54 bladzijde 255

Bepaal de coördinaten van de eventuele hoekpunten van de volgende functies.

**1** $f: x \mapsto (x^2+1) \cdot |x-3|$

$f(x) = \begin{cases} (x^2+1)(x-3) & \text{als } x \geqslant 3 \\ (x^2+1)(3-x) & \text{als } x < 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 & \text{als } x > 3 \\ -3x^2 + 6x - 1 & \text{als } x < 3 \end{cases}$

$f'(3)$ bestaat niet

$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{als } x > 3 \\ -6x + 6 & \text{als } x < 3 \end{cases}$

$f''(3)$ bestaat niet,
maar als $x \underset{>}{\to} 3$, dan is $f''(x) > 0$

als $x \underset{<}{\to} 3$, dan is $f''(x) < 0$

Het hol en bol verloop van f wijzigt in 3.

Bij een hoekpunt is de linker- en rechterafgeleide verschillend.

linkerafgeleide in 3:

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{(x^2+1)\cancel{(3-x)}}{\cancel{x-3}_{\,-1}}$

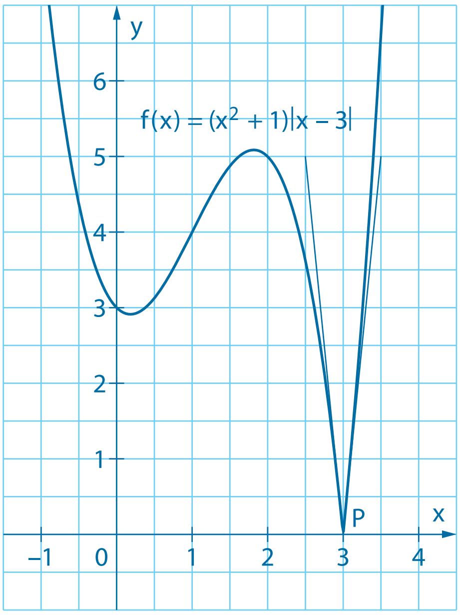
$= \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} (-(x^2+1)) = -10$

rechterafgeleide in 3:

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{(x^2 + 1)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = 10$$

$\Rightarrow$ P(3, 0) is een hoekpunt van de grafiek van f.




**2** $f: x \mapsto |x^3 - 9x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{als } -3 \leqslant x \leqslant 0 \text{ of } x \geqslant 3 \\ -x^3 + 9x & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9 & \text{als } -3 < x < 0 \text{ of } x > 3 \\ -3x^2 + 9 & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

f is niet afleidbaar in –3, 0 en in 3.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{als } -3 < x < 0 \text{ of } x > 3 \\ -6x & \text{als } x < -3 \text{ of } 0 < x < 3 \end{cases}$$

- Als $x \underset{<}{\to} -3$, dan is $f''(x) > 0$ en

  als $x \underset{>}{\to} -3$, dan is $f''(x) < 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in –3.

  linkerafgeleide in –3:

  $$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{-x(\cancel{x + 3})(x - 3)}{\cancel{x + 3}} = -18$$

  rechterafgeleide in –3:

  $$\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{x(\cancel{x + 3})(x - 3)}{\cancel{x + 3}} = 18$$

  $\Rightarrow$ P(–3, 0) is een hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\to} 0$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\to} 0$, dan is $f''(x) < 0$

  zodat het hol en bol verloop niet wijzigt in 0, bijgevolg is (0,0) geen hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\to} 3$, dan is $f''(x) > 0$ en

  als $x \underset{>}{\to} 3$, dan is $f''(x) < 0$

  Het hol en bol verloop van f wijzigt in 3.

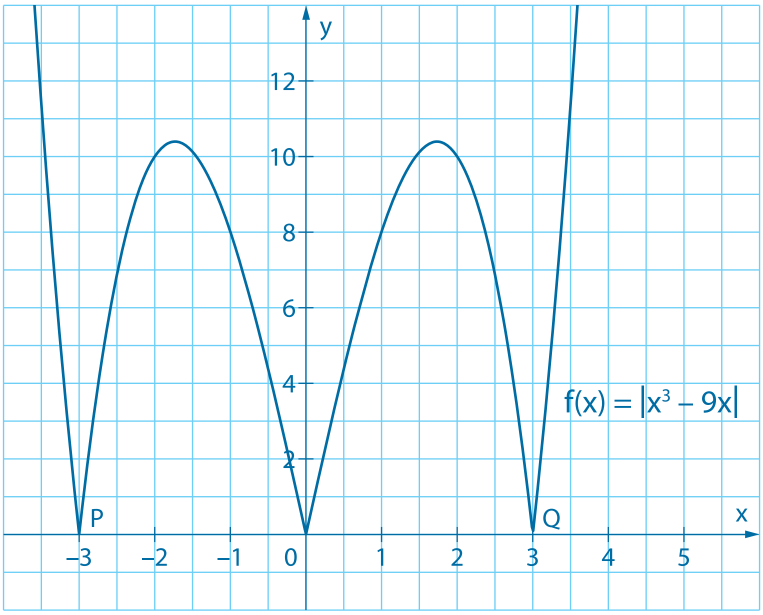
  linkerafgeleide in 3:

  $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}} = -18$$

  rechterafgeleide in 3:

  $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}} = 18$$

  $\Rightarrow$ Q(3, 0) is een hoekpunt.




**3** $f: x \mapsto (x-2) \cdot |x^2 - 4|$

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)(x^2-4) & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ (x-2)(4-x^2) & \text{als } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ -3x^2 + 4x + 4 & \text{als } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 4 & \text{als } x < -2 \text{ of } x > 2 \\ -6x + 4 & \text{als } -2 < x < 2 \end{cases}$$

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} -2$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} -2$, dan is $f''(x) > 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in –2.

  linkerafgeleide in –2:

  $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{(x-2)^2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 16$$

  rechterafgeleide in –2:

  $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-(x-2)^2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = -16$$

  $\Rightarrow$ P(–2, 0) is een hoekpunt.

- Als $x \underset{<}{\rightarrow} 2$, dan is $f''(x) < 0$ en

  als $x \underset{>}{\rightarrow} 2$, dan is $f''(x) > 0$

  zodat het hol en bol verloop van f wijzigt in 2.

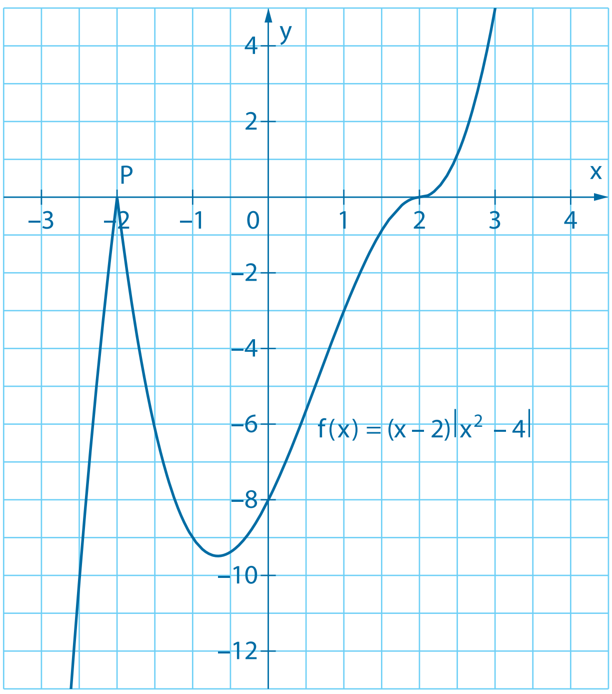
  linkerafgeleide in 2:

  $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{\cancel{(x-2)}(4 - x^2)}{\cancel{x-2}} = 0$$

  rechterafgeleide in 2:

  $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 - 4)}{\cancel{x-2}} = 0$$

  f is afleidbaar in 2, er is een unieke raaklijn en het hol en bol verloop wijzigt. Bijgevolg is Q(2, 0) een buigpunt en geen hoekpunt.



**Opdracht 55 bladzijde 255**

Onderzoek het verloop van de volgende rationale functies (asymptoten, relatieve extrema, stijgen en dalen, buigpunten, hol en bol verloop).

**1** $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3+4x}{2x^2-10}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- V.A.: $x = -\sqrt{5}$

  $x = \sqrt{5}$

  S.A.: $y = ax + b$

  $$\text{met } a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x}{x(2x^2-10)} = \frac{1}{2}$$

  $$\text{en } b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4x}{2x^2-10} - \frac{1}{2}x\right)$$

  $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4x-x^3+5x}{2x^2-10}$$

  $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x}{2x^2-10} = 0$$

  De S.A. heeft als vergelijking $y = \dfrac{1}{2}x$.

- $f'(x) = \dfrac{2x^4-38x^2-40}{(2x^2-10)^2} = \dfrac{x^4-19x^2-20}{2(x^2-5)^2}$

  $f'(x) = 0 \iff x^4 - 19x^2 - 20 = 0$

  $\iff x^2 = 20$ of $x^2 = -1$ → geen oplossing

  $\iff x = 2\sqrt{5}$ of $x = -2\sqrt{5}$

| $x$ | | $-2\sqrt{5}$ | | $-\sqrt{5}$ | | $\sqrt{5}$ | | $2\sqrt{5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | \| | − | \| | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $\dfrac{-8\sqrt{5}}{5}$ max. | ↘ | \| | ↘ | \| | ↘ | $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ min. | ↗ |

f is stijgend in $\left]-\infty, -2\sqrt{5}\right]$ en in $\left[2\sqrt{5}, +\infty\right[$.

f is dalend in $\left[-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right[$, in $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$ en in $\left]\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right]$.

f bereikt een relatief maximum $\dfrac{-8\sqrt{5}}{5}$ voor $x = -2\sqrt{5}$ en een relatief minimum $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ voor $x = 2\sqrt{5}$.

- $f''(x) = \dfrac{9x(x^2 + 15)}{(x^2 - 5)^3}$

| $x$ | | $-\sqrt{5}$ | | $0$ | | $\sqrt{5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | \| | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | \| | $\smile$ |
| | | | | bgpt. | | | |

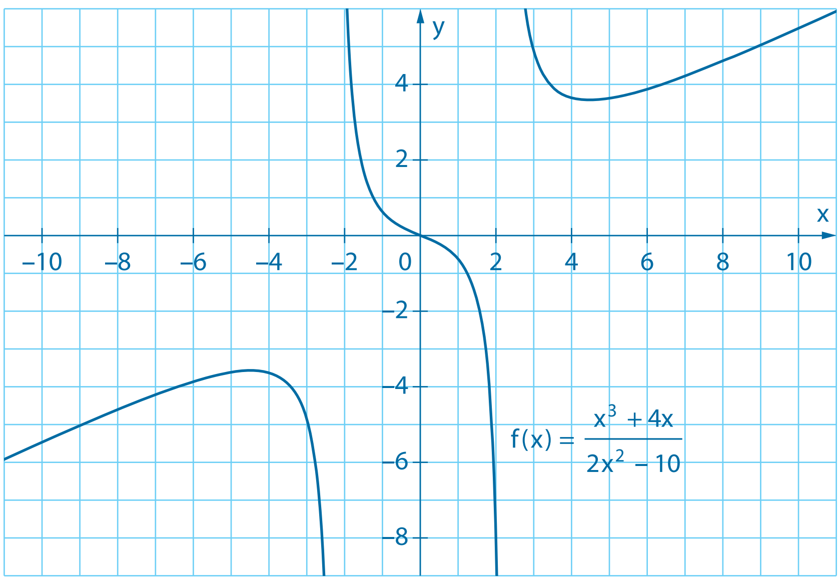
De grafiek van f is hol in $\left]-\sqrt{5}, 0\right]$ en in $\left]\sqrt{5}, +\infty\right[$.

De grafiek van f is bol in $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right[$ en in $\left[0, \sqrt{5}\right[$.

P(0, 0) is het buigpunt van de grafiek van f.

- Samenvattende tabel

| $x$ | | $-2\sqrt{5}$ | | $-\sqrt{5}$ | | $0$ | | $\sqrt{5}$ | | $2\sqrt{5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $-$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{-8\sqrt{5}}{5}$ | $\searrow$ | \| | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | \| | $\searrow$ | $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ | $\nearrow$ |
| | | max. | | | | bgpt. | | | | min. | |



**2** $f: x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- V.A.: $x = -1$

  H.A.: $y = 1$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

- $f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^3}$

| x | | −1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | \| | + | 0 | + |
| f(x) | ↗ | \| | ↗ | | ↗ |

f bereikt geen relatieve extrema en is stijgend binnen haar domein.

- $f''(x) = \dfrac{12x(1-2x^3)}{(x^3+1)^3}$

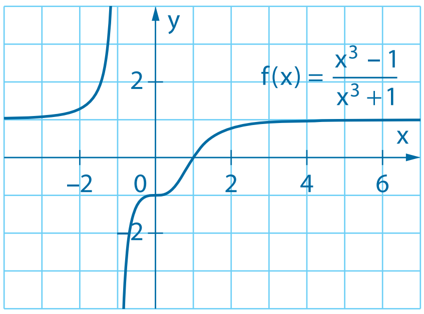
| x | | −1 | | 0 | | $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | \| | − | 0 | + | 0 | − |
| f(x) | ∪ | \| | ∩ | −1 | ∪ | $\frac{-1}{3}$ | ∩ |
| | | | | bgpt. | | bgpt. | |

De grafiek van f is hol in $]-\infty, -1[$ en in $\left[0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$ en bol in $]-1, 0]$ en in $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.

De buigpunten zijn P(0, −1) en $Q\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{3}\right)$.

- Samenvattende tabel

| x | | −1 | | 0 | | $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ↗ | \| | ↗ | −1 | ↗ | $\frac{-1}{3}$ | ↗ |
| | | | | bgpt. | | bgpt. | |



**3** $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$
- V.A.: $x = 0$ en $x = 6$

  H.A.: $y = 1$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

- $$f'(x) = \frac{(x^2 - 6x)\,2x - (x^2 - 4)(2x - 6)}{(x^2 - 6x)^2}$$
  $$= \frac{2x^3 - 12x^2 - 2x^3 + 8x + 6x^2 - 24}{(x^2 - 6x)^2}$$
  $$= \frac{-6x^2 + 8x - 24}{(x^2 - 6x)^2}$$

  f′ heeft geen nulpunten, $f'(x) < 0$ binnen het domein, f is overal dalend.

- $$f''(x) = \frac{(x^2 - 6x)(-12x + 8) + (6x^2 - 8x + 24)2(2x - 6)}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{-12x^3 + 72x^2 - 48x + 8x^2 + 24x^3 - 72x^2 - 32x^2 + 96x + 96x - 288}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{12x^3 - 24x^2 + 144x - 288}{(x^2 - 6x)^3}$$
  $$= \frac{12(x - 2)(x^2 + 12)}{(x^2 - 6x)^3}$$

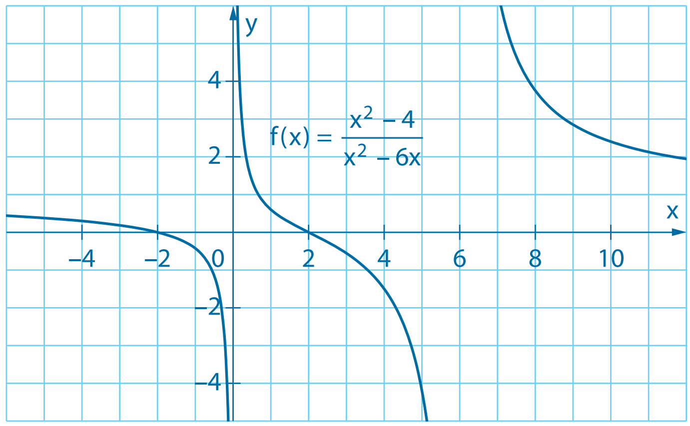
| x | | 0 | | 2 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | – | \| | + | 0 | – | \| | + |
| f(x) | ⌒ | \| | ⌣ | 0<br>bgpt. | ⌒ | \| | ⌣ |

De grafiek van f is hol in ]0, 2] en in ]6, +∞[ en bol in ]−∞, 0[ en in [2, 6[.

Het buigpunt is P(2, 0).

- Samenvattende tabel

| x | | 0 | | 2 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ↘ | \| | ↘ | 0<br>bgpt. | ↘ | \|<br>bgpt. | ↘ |




**4** $f: x \mapsto \dfrac{-x^2+2x}{(x+1)^2}$

- dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- V.A.: $x = -1$

  H.A.: $y = -1$
- $f'(x) = \dfrac{(x+1)(-2x+2)+(x^2-2x)\cdot 2}{(x+1)^3}$

  $= \dfrac{\cancel{-2x^2}\ \cancel{-2x}\ \cancel{+2x} + 2\ \cancel{+2x^2} - 4x}{(x+1)^3}$

  $= \dfrac{2-4x}{(x+1)^3}$

| x | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | $-$ | \| | $+$ | 0 | $-$ |
| f(x) | ↘ | \| | ↗ | $\frac{1}{3}$<br>max. | ↘ |

f is stijgend in $\left]-1, \dfrac{1}{2}\right]$ en dalend in $]-\infty, -1[$ en in $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

f bereikt een relatief maximum $\dfrac{1}{3}$ voor $x = \dfrac{1}{2}$.

- $f''(x) = \dfrac{(x+1)\cdot(-4)-(2-4x)\cdot 3}{(x+1)^4}$

  $= \dfrac{-4x-4-6+12x}{(x+1)^4}$

  $= \dfrac{8x-10}{(x+1)^4}$

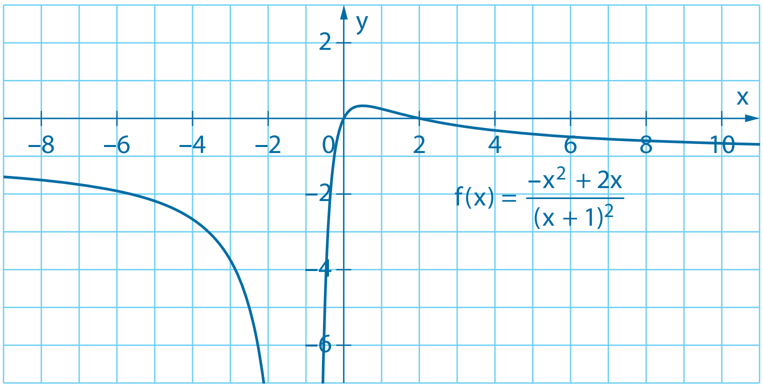
| $x$ | | $-1$ | | $\frac{5}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | \| | $\frown$ | $\frac{5}{27}$ bgpt. | $\smile$ |

De grafiek van f is hol in $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ en bol in $]-\infty, -1[$ en in $\left]-1, \frac{5}{4}\right]$.

Het buigpunt is $P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{27}\right)$.

- Samenvattende tabel

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{5}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | \| | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ max. | $\searrow$ | $\frac{5}{27}$ bgpt. | $\searrow$ |

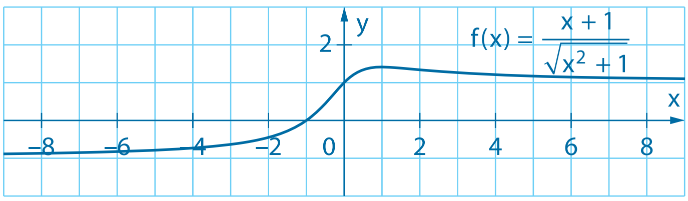



**Opdracht 56 bladzijde 255**

Onderzoek het verloop van de volgende irrationale functies (asymptoten, relatieve extrema, stijgen en dalen, buigpunten, hol en bol verloop).

**1** $f: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

- We plotten eerst de grafiek van f.



- Aangezien $x^2 + 1 > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ is dom $f = \mathbb{R}$.
- Op basis van de grafiek vermoeden we twee horizontale asymptoten.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

$y = 1$ en $y = -1$ zijn vergelijkingen van de H.A. van de grafiek van f.

- $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^2+1-x^2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

| x | | 1 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | − |
| f(x) | ↗ | $\sqrt{2}$<br>max. | ↘ |

f stijgt in $]-\infty, 1]$, daalt in $[1, +\infty[$ en bereikt een absoluut maximum $\sqrt{2}$ voor $x = 1$.

- $$f''(x) = \frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1-x)\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{2x^2-3x-1}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$$

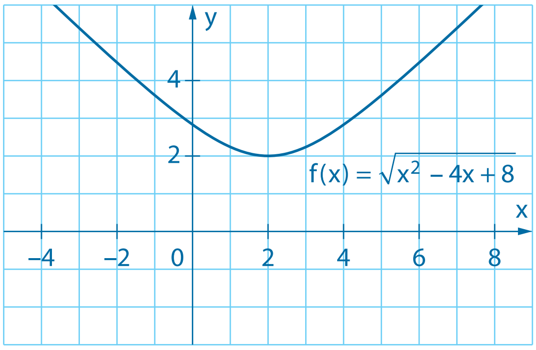
| x | | $\frac{3-\sqrt{17}}{4}$ | | $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ∪ | 0,692<br>bgpt. | ∩ | 1,362<br>bgpt. | ∪ |

De grafiek van f is hol in $\left]-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right]$ en in $\left[\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[$ en bol in $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right]$.

De buigpunten zijn $P\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; 0{,}692\right)$ en $Q\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}; 1{,}362\right)$.

**2** $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

- We plotten eerst de grafiek van f.




- $x^2 - 4x + 8 > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ zodat dom $f = \mathbb{R}$.
- We vermoeden 2 schuine asymptoten:

Voor $x \to +\infty$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-4 + \frac{8}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = -2$$

$y = x - 2$ is een vergelijking van de eerste S.A.

Voor $x \to -\infty$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}}}{\cancel{x}} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-4 + \frac{8}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = 2$$

$y = -x + 2$ is een vergelijking van de tweede S.A.

- $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

| x | | 2 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 2<br>min. | ↗ |

f daalt in $]-\infty, 2]$, stijgt in $[2,+\infty[$ en bereikt een absoluut minimum 2 voor $x = 2$.

- $$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+8} - (x-2)\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}}{x^2-4x+8}$$
$$= \frac{x^2-4x+8-x^2+4x-4}{(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{(x^2-4x+8)^3}}$$

$f''(x) > 0$ voor elke x.

De grafiek van f is overal hol.

**Opdracht 57 bladzijde 255**

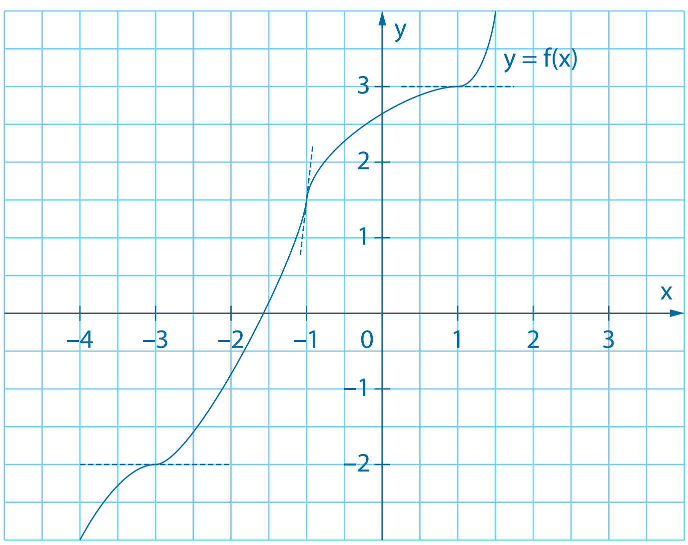
Maak telkens een schets van een mogelijke grafiek van een rationale functie *f* op basis van de gegeven tabel.

**1**

| *x* | | −3 | | −1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f*′(*x*) | + | 0 | + | + | + | 0 | + |
| *f*′′(*x*) | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |

| x | | −3 | | −1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ↗ | bgpt.<br>+ hor.<br>rkl. | ↗ | bgpt. | ↗ | bgpt.<br>+ hor.<br>rkl. | ↗ |

Schets:

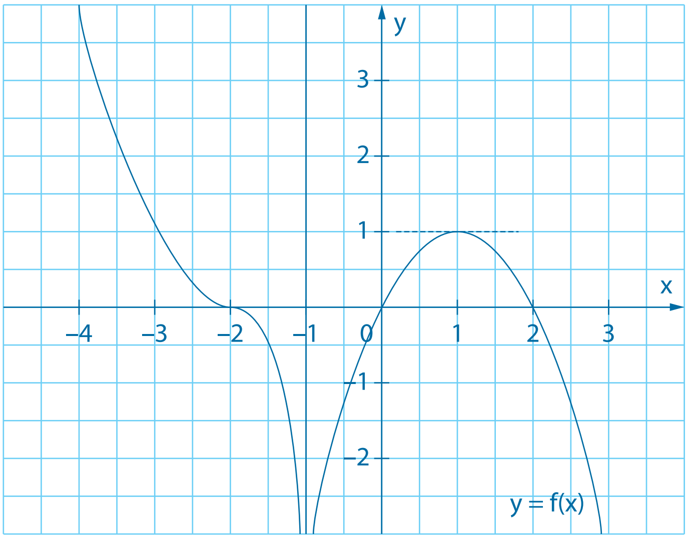


**2**

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $-$ | $-$ |

| x | | –2 | | –1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | bgpt. + hor. rkl. | | \| V.A. | | max. | |

Schets:



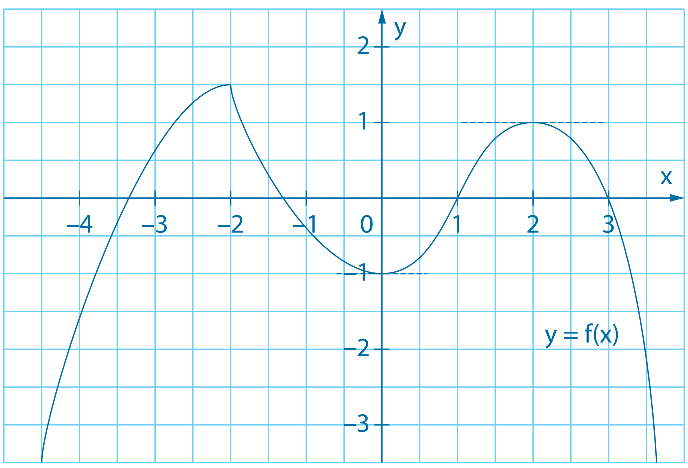

**Opdracht 58 bladzijde 256**

Maak een schets van een mogelijke grafiek van een functie $f$ die continu is in $\mathbb{R}$ op basis van de tabel.

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | \| | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |

| x | | –2 | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | max. | | min. | | bgpt. | | max. | |

Schets:



**Opdracht 59 bladzijde 256**

Bespreek hoe de grafiek van de volgende functies verandert als de parameter *m* wijzigt.

**1** $f: x \mapsto 2+\frac{m}{x}+\frac{m}{x^2}$

$f(x) = \frac{2x^2 + mx + m}{x^2}$

- dom f = $\mathbb{R}_0$
- nulpunten

  1) $2x + mx + m = 0$

  $D = m^2 - 8m = m(m - 8)$

  | m | | 0 | | 8 | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | $m^2 - 8m$ | + | 0 | − | 0 | + |

  2) $m = 0$: $y = 2$, de grafiek van f is een horizontale rechte met perforatie in (0, 2)

  3) $m = 8$: $f(x) = \frac{2(x+2)^2}{x^2}$, de grafiek van f raakt de x-as in (−2, 0)

  4) $D < 0$ voor $0 < m < 8$: f heeft geen nulpunten

  5) $D > 0$ voor $m < 0$ en voor $m > 8$: f heeft twee nulpunten

- Asymptoten

  Voor $m \neq 0$: V.A.: $x = 0$
  H.A.: $y = 2$

- Relatieve extrema

  $f'(x) = \frac{-mx - 2m}{x^3} = \frac{-m(x+2)}{x^3}$

  Nulpunten f′: −2 met tekenwissel.

  $m > 0$

  | x | | −2 | | 0 | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | f′(x) | − | 0 | + | \| | − |
  | f(x) | ↘ | $2 - \frac{m}{4}$ min. | ↗ | \| | ↘ |

  $m < 0$

  | x | | −2 | | 0 | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | f′(x) | + | 0 | − | \| | + |
  | f(x) | ↗ | $2 - \frac{m}{4}$ max. | ↘ | \| | ↗ |

- Buigpunten

  $f''(x) = \frac{2mx + 6m}{x^4} = \frac{2m(x+3)}{x^4}$

  Nulpunten f″: −3

$m > 0$

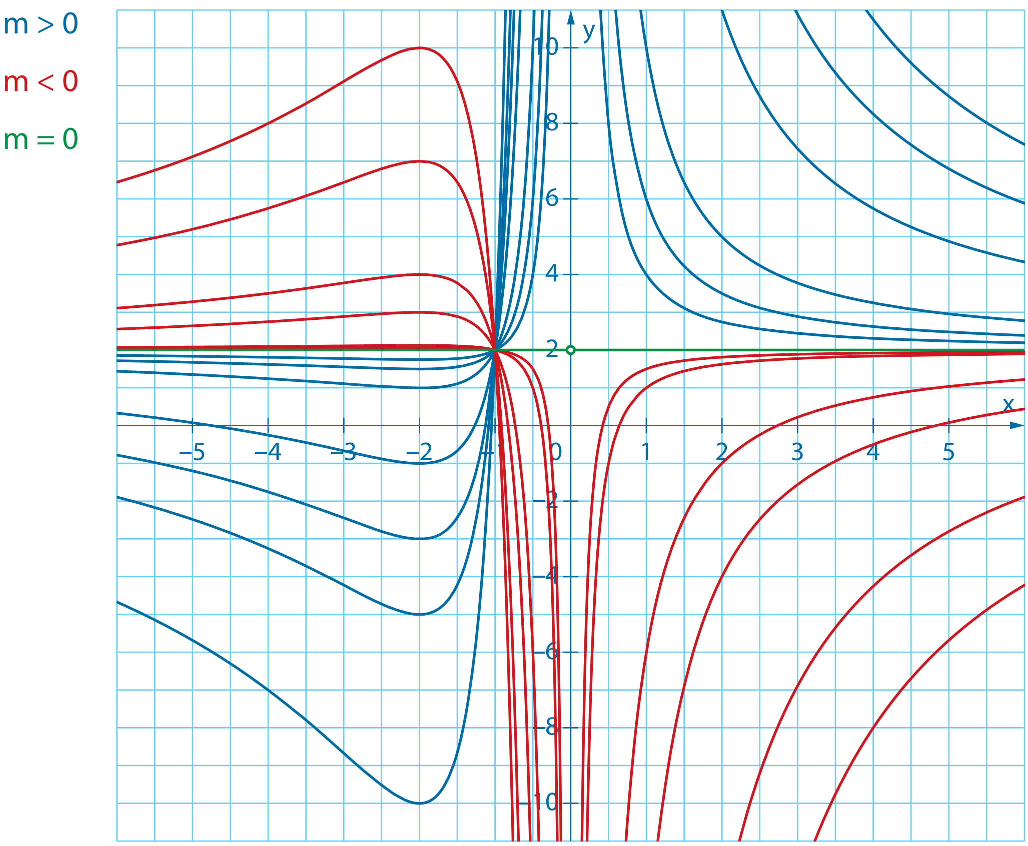
| $x$ | | $-3$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $2-\frac{2m}{9}$ | $\smile$ | $\vert$ | $\smile$ |
| | | bgpt. | | | |

$m < 0$

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | $2-\frac{2m}{9}$ | $\frown$ | $\vert$ | $\frown$ |
| | | bgpt. | | | |

## Samenvatting

| $m = 0$ | De grafiek is de rechte $y = 2$ met perforatie in $(0, 2)$ | | |
|---|---|---|---|
| | Asymptoten | Relatieve extrema | Buigpunt |
| $m > 0$ | V.A.: $x = 0$<br>H.A.: $y = 2$ | rel. min. $2-\frac{m}{4}$<br>voor $x = -2$ | $P\left(-3, 2-\frac{2m}{9}\right)$ |
| $m < 0$ | V.A.: $x = 0$<br>H.A.: $y = 2$ | rel. max. $2-\frac{m}{4}$<br>voor $x = -2$ | $P\left(-3, 2-\frac{2m}{9}\right)$ |



**2** $f: x \mapsto \dfrac{x^2+m}{x^2-m}$

- Domein en nulpunten

1) $m = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ met $x \neq 0$

De grafiek van f is de rechte $y = 1$ met perforatie in (0, 1), dom $f = \mathbb{R}_0$.

2) $m < 0 \Rightarrow$ de noemer heeft geen nulpunten, de teller twee nulpunten

$\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}$, twee nulpunten, H.A.: $y = 1$

3) $m > 0 \Rightarrow$ de noemer heeft twee nulpunten, de teller geen nulpunten

$\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{m}, \sqrt{m}\}$, V.A.: $x = -\sqrt{m}$, $x = \sqrt{m}$; H.A.: $y = 1$

- Relatieve extrema

$f'(x) = -\dfrac{4mx}{(x^2-m)^2}$

$m > 0$

| x | | $-\sqrt{m}$ | | 0 | | $\sqrt{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | \| | + | 0 | − | \| | − |
| f(x) | ↗ | \| | ↗ | −1<br>max. | ↘ | \| | ↘ |

$m < 0$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | − | 0 | + |
| f(x) | ↘ | −1<br>min. | ↗ |

- Buigpunten

$f''(x) = \dfrac{4m(3x^2+m)}{(x^2-m)^3}$

$m > 0$

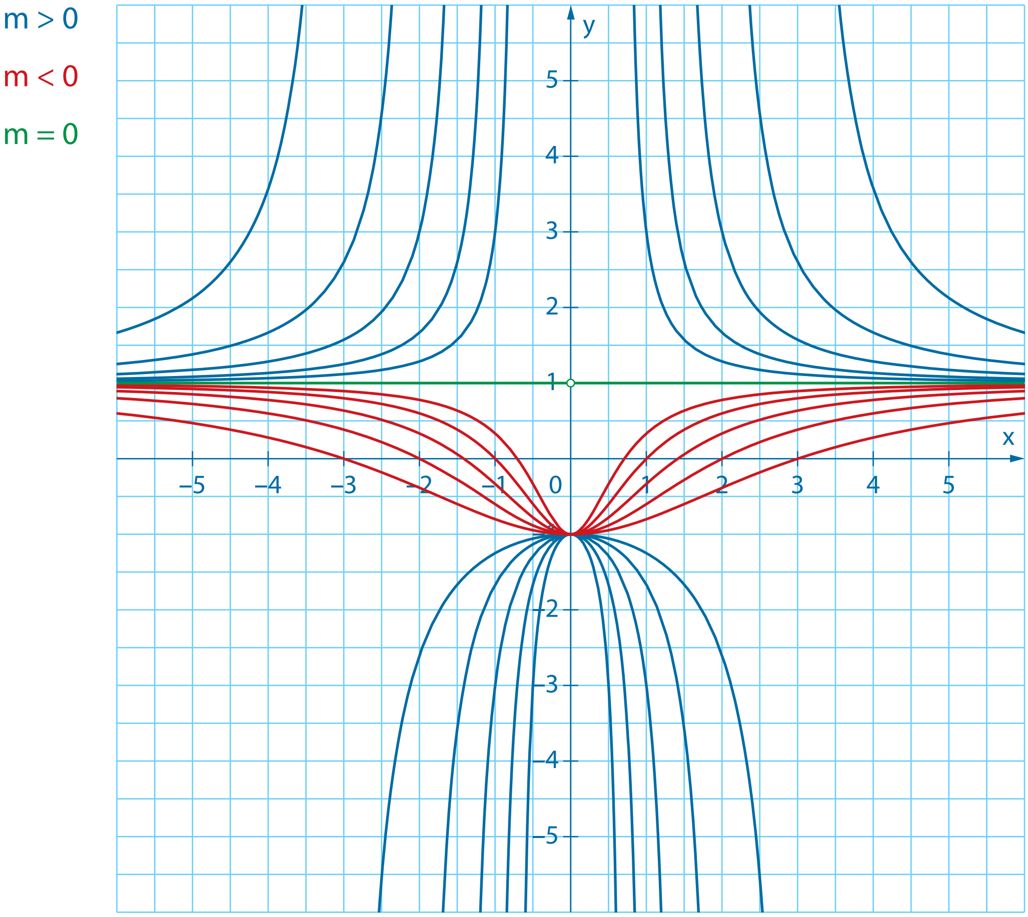
| x | | $-\sqrt{m}$ | | $\sqrt{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | − | \| | + |
| f(x) | ∪ | \| | ∩ | \| | ∪ |

$m < 0$

| x | | $-\sqrt{-\frac{m}{3}}$ | | $\sqrt{-\frac{m}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | − | 0 | + | 0 | + |
| f(x) | ∩ | $-\frac{1}{2}$<br>bgpt. | ∪ | $-\frac{1}{2}$<br>bgpt. | ∩ |

Samenvatting

| $m = 0$ | De grafiek is de rechte $y = 1$ met perforatie in (0, 1) | | |
|---|---|---|---|
| | Asymptoten | Relatieve extrema | Buigpunten |
| $m > 0$ | V.A.: $x = -\sqrt{m}$, $x = \sqrt{m}$<br>H.A.: $y = 1$ | rel. max. −1<br>voor $x = 0$ | geen |
| $m < 0$ | H.A.: $y = 1$ | rel. min. −1<br>voor $x = 0$ | $P\left(-\sqrt{-\frac{m}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ en $Q\left(\sqrt{-\frac{m}{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ |




**3** $f: x \longmapsto \dfrac{mx}{1+m^2x^2}$

- dom f = ℝ

  Als m = 0 is f(x) = 0, dan is de grafiek van f de x-as.
- Nulpunt f: (0, 0)
- H.A.: y = 0
- Relatieve extrema

  $f'(x) = \dfrac{m(1 - m^2x^2)}{(m^2x^2 + 1)^2}$

m > 0

| x | | $-\frac{1}{m}$ | | $\frac{1}{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ |
| | | min. | | max. | |

m < 0

| x | | $\frac{1}{m}$ | | $-\frac{1}{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ |
| | | max. | | min. | |

- Buigpunten

$$f''(x) = \frac{2m^3x(m^2x^2 - 3)}{(m^2x^2 + 1)^3}$$

$m > 0$

| $x$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{m}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\smile$ |
| | | bgpt. | | bgpt. | | bgpt. | |

$m < 0$

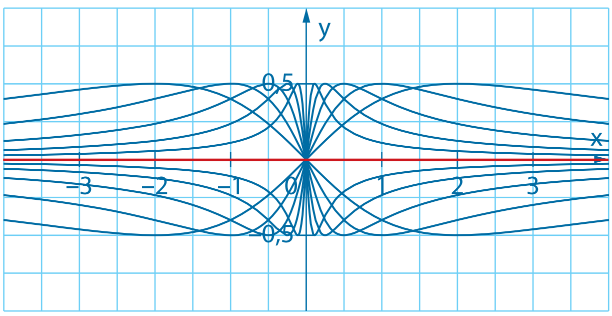
| $x$ | | $\frac{\sqrt{3}}{m}$ | | $0$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ | $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frown$ |
| | | bgpt. | | bgpt. | | bgpt. | |

Samenvatting

| | |
|---|---|
| $m = 0$ | De grafiek is de rechte $y = 0$ (x-as) |
| $m \neq 0$ | H.A.: $y = 0$<br>Maximum voor $x = \frac{1}{m}$, nl. $\frac{1}{2}$<br>Minimum voor $x = -\frac{1}{m}$, nl. $-\frac{1}{2}$<br>Buigpunten: $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{m}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $P_2(0, 0)$, $P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{m}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ |

$m \neq 0$

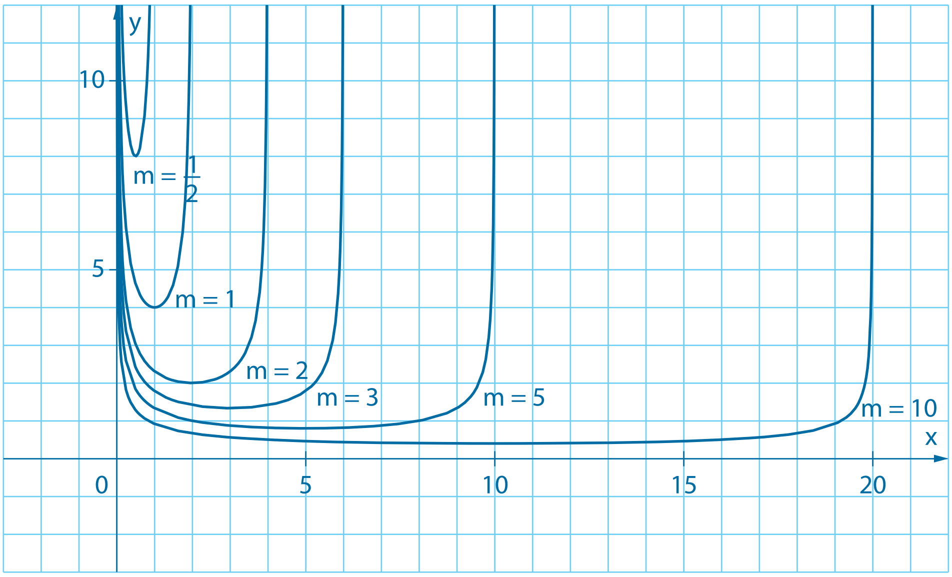
$m = 0$



**Opdracht 60 bladzijde 256**

$f\colon x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{2mx - x^2}}$ met $m > 0$ stelt een familie van irrationale functies voor.

**1** Plot enkele grafieken van deze familie.




**2** Onderzoek van $f$ het domein, de asymptoten en de extrema.

- Om het domein van f te bepalen, lossen we de ongelijkheid $2mx - x^2 > 0$ op.
  Rekening houdend met $m > 0$ krijgen we de volgende tekentabel:

| x | | 0 | | 2m | |
|---|---|---|---|---|---|
| x(2m – x) | – | 0 | + | 0 | – |

  Hieruit volgt: dom f = ]0, 2m[.

- Aangezien 0 en 2m nulpunten zijn van de noemer van f die geen nulpunten van de teller zijn, heeft de grafiek van f als verticale asymptoten de rechten met vergelijking x = 0 en x = 2m.
  Het domein van f is steeds begrensd, zodat er geen horizontale of schuine asymptoten zijn.

- $f'(x) = \dfrac{4(x-m)}{\sqrt{(2mx - x^2)^3}}$ heeft binnen het domein het teken van x – m zodat f dalend is voor x < m en stijgend voor x > m.

  Voor x = m bereikt f een minimum aan $f(m) = \dfrac{4}{\sqrt{2m^2 - m^2}} = \dfrac{4}{m}$.

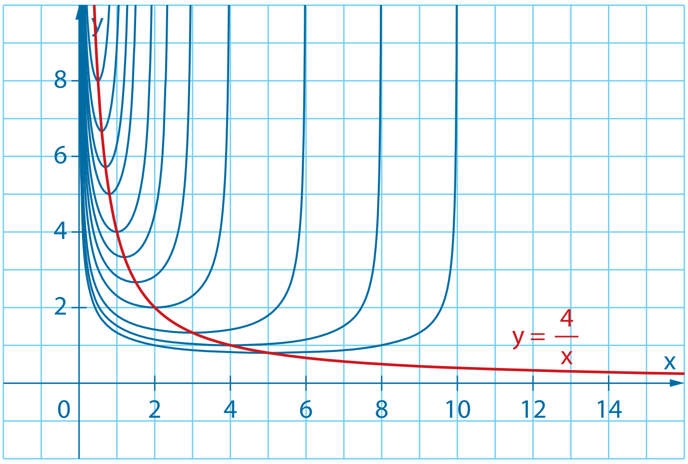
| x | 0 | | m | | 2m |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | \| | – | 0 | + | \| |
| f(x) | \| | ↘ | $\frac{4}{m}$ min. | ↗ | \| |

**3** Op welke kromme liggen de extrema van alle grafieken van $f$?

Alle extrema hebben als coördinaten $\begin{cases} x = m \\ y = \dfrac{4}{m} \end{cases}$.

Eliminatie van de parameter m kan op zicht. We vinden $y = \dfrac{4}{m}$ $(x > 0)$.

Alle minima liggen dus op de rechtertak van de hyperbool met vergelijking $y = \dfrac{4}{x}$.



**Opdracht 61 bladzijde 257**

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?
Geef bij de foute uitspraken een tegenvoorbeeld.

**1** Als een veeltermfunctie $f$ stijgend is in $[a, b]$, dan is $f'(x) > 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$.

Niet waar, $f : x \mapsto x^3$ is stijgend in $[-2, 2]$ maar $f'(0) = 0$.

**2** Als $P(c, f(c))$ een buigpunt is van de grafiek van een rationale functie $f$, dan is $f''(c) = 0$.

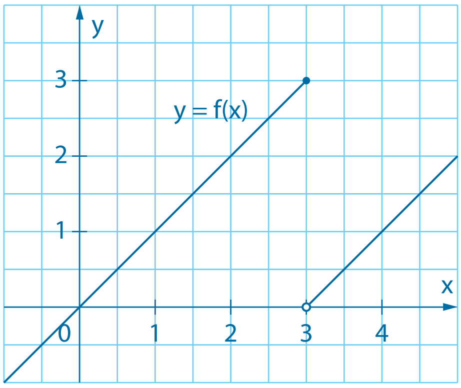
Waar.

**3** Als $f'(c) = 0$ voor een veeltermfunctie $f$, dan bereikt $f$ een extremum voor $x = c$ of heeft de grafiek van $f$ een buigpunt voor $x = c$.

Waar.

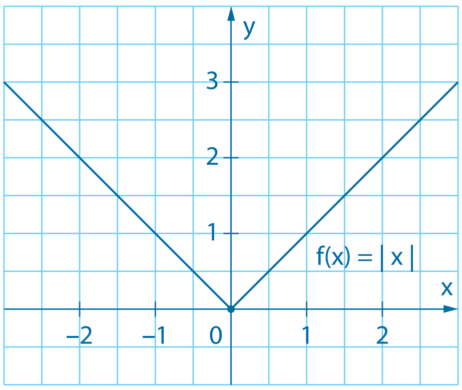
**4** Een functie $f$ die niet continu is in $[a, b]$, bereikt geen absoluut maximum in $[a, b]$.

Niet waar, $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \leqslant 3 \\ x - 3 & \text{als } x > 3 \end{cases}$ is niet continu in $[0, 4]$, maar bereikt er toch een absoluut maximum 3 voor $x = 3$.




**5** Als een functie $f$ een relatief extremum bereikt voor $x = c$, dan is $f'(c) = 0$.

Niet waar, $f : x \mapsto |x|$ bereikt in 0 een relatief minimum maar $f'(0) \neq 0$.

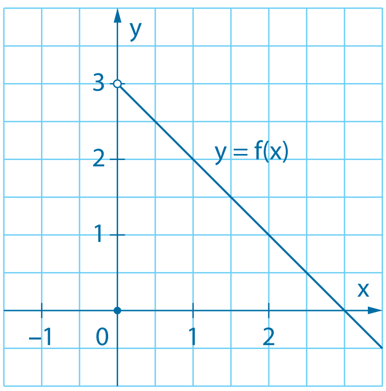



**6** Als voor een functie $f$ geldt dat $f'(x) \leqslant 0$ voor elke $x \in \, ]a, b[$, dan is $f$ dalend in $[a, b]$.

Niet waar.

Voor de functie $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \\ 3 - x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ geldt:

$f'(x) \leqslant 0$ voor $x \in \, ]0, 3[$ maar $f$ is niet dalend in $[0, 3]$.



**Opdracht 62 bladzijde 257**

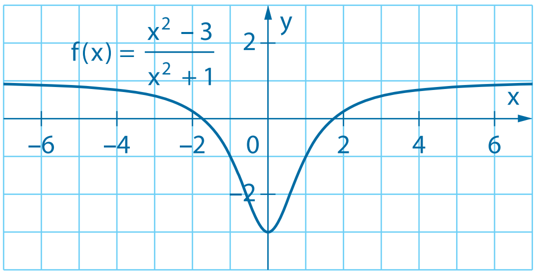
Bepaal het verloop, de relatieve en absolute extrema van de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)2x-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | –3<br>min. | ↗ |

f stijgt in [0, +∞[ en daalt in ]–∞, 0] .

f bereikt een relatief minimum –3 voor x = 0 dat ook een absoluut minimum is.



**Opdracht 63 bladzijde 257**

Bepaal de relatieve extrema en de buigpunten van de grafiek van $f\colon x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 - 3x^3}$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x^3} = (x^2 - 3x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 9x^2)$$

$$= \frac{2x - 9x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x^3)^2}}$$

f is niet afleidbaar in 0 en in $\frac{1}{3}$

| $x$ | | $0$ | | $\frac{2}{9}$ | | $\frac{1}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ |
| | | min. | | max. | | | |

f bereikt een relatief minimum 0 voor $x = 0$ en een relatief maximum $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ voor $x = \frac{2}{9}$.

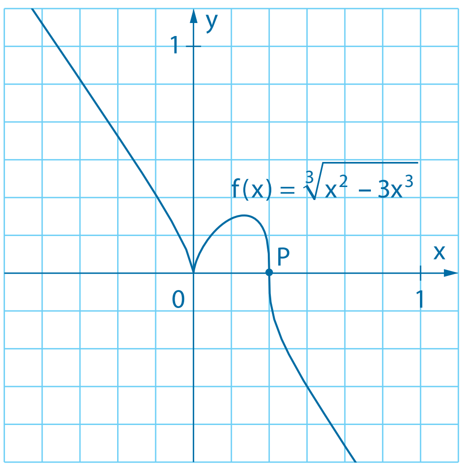
$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}(2x - 9x^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{2}{3}}(2 - 18x)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}\left[-2(2x - 9x^2)^2 + 3(x^2 - 3x^3)(2 - 18x)\right]$$

$$= \frac{1}{9}(x^2 - 3x^3)^{-\frac{5}{3}}(-8x^2 + \cancel{72x^3} \cancel{-162x^4} + 6x^2 \cancel{-54x^3} \cancel{-18x^3} + \cancel{162x^4})$$

$$= \frac{-2x^2}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 3x^3)^5}}$$

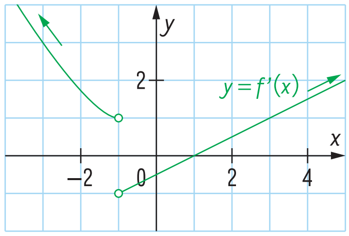
| $x$ | | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | \| | $-$ | \| | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\frown$ | $0$ | $\smile$ |
| | | | | bgpt. | |




De grafiek van f heeft 1 buigpunt: $P\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

**Opdracht 64 bladzijde 257**

Van een continue functie $f$ is de hellinggrafiek gegeven.




**1** Voor welke $x$-waarde(n) bereikt $f$ een relatief extremum?

Voor $x = -1$ gaat f' over van positief naar negatief, f bereikt er een relatief maximum.

Voor $x = 1$ gaat f' over van negatief naar positief, f bereikt er een relatief minimum.

**2** Heeft de grafiek van $f$ buigpunten?
Verklaar.

f' bereikt geen extremum met een unieke raaklijn zodat de grafiek van f geen buigpunt heeft.

**Opdracht 65 bladzijde 258**

Gegeven de irrationale functie $f\colon x \mapsto -\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$.

Welke van de volgende beweringen is niet juist?

**A** Zij heeft een buigpunt voor $x = 2$.

**B** Zij heeft een minimum voor $x = -1$.

**C** Zij is alleen gedefinieerd in het interval $[-4, 2]$.

**D** Zij heeft twee snijpunten met de rechte $r \leftrightarrow y = -2$.

(bron © toelatingsproef geneeskunde)

$f : x \mapsto -\sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

- $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$ voor $x \in [-4, 2]$

  C is juist.

- $f'(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$

  f gaat over van negatief naar positief in –1 en bereikt er bijgevolg een minimum.

  B is juist.

- $f(-4) = f(2) = 0$ en $f(-1) = -3$.

  De grafiek van f heeft dus 2 snijpunten met de rechte $r \leftrightarrow y = -2$.

  D is juist.

- $$f''(x) = \frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 8} - (x + 1)\dfrac{-x - 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}}{-x^2 - 2x + 8}$$

  $$= \frac{-x^2 - 2x + 8 + x^2 + 2x + 1}{(-x^2 - 2x + 8)\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$$

  $$= \frac{9}{(-x^2 - 2x + 8)\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$$

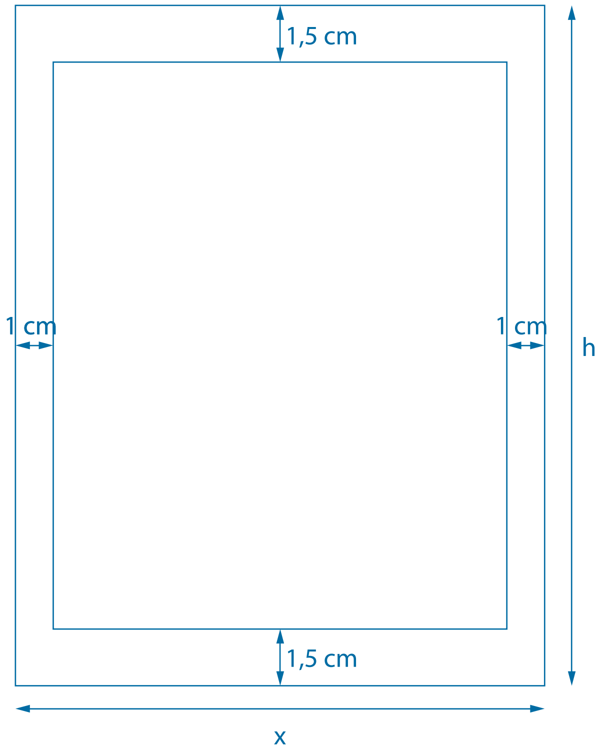
  $f''(x) > 0$ voor $x \in \,]-4, 2[$

  De grafiek van f heeft geen buigpunt: A is fout.

**Opdracht 66 bladzijde 258**

Een rechthoekig blad heeft een totale oppervlakte van 600 $cm^2$. Voor het bedrukken ervan moet er boven en onder 1,5 cm en links en rechts 1 cm wit blijven.

Bepaal de afmetingen van het blad als de bedrukte oppervlakte maximaal is.




Stel $x$ = basis van de rechthoek en $h$ de hoogte (allebei in cm)

Dan is $x \cdot h = 600$

$$\Rightarrow h = \frac{600}{x}$$

De bedrukte oppervlakte is

$$B = (x - 2)(h - 3)$$

$$\Rightarrow B(x) = (x-2)\left(\frac{600}{x} - 3\right)$$

$$\Rightarrow B'(x) = \frac{600}{x} - 3 + (x-2) \cdot \frac{-600}{x^2}$$

$$= \frac{600x - 3x^2 - 600x + 1200}{x^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 1200}{x^2}$$

| $x$ | | $-20$ | | $0$ | | $20$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ |
| $B(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | \| | $\nearrow$ | 486 max | $\searrow$ |

De afmetingen van het blad bij een maximale bedrukte oppervlakte zijn 20 cm $\times$ 30 cm.

**Opdracht 67 bladzijde 258**

**1** De functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+dx+e}$ heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y=\dfrac{1}{2}$, twee verticale asymptoten met vergelijking $x=-2$ en $x=1$ en twee nulpunten $-3$ en 2.

Bepaal de parameters $a$, $b$, $c$, $d$ en $e$.

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{cx^2+dx+e}$$

- $$\left.\begin{array}{l}\text{H.A.: } y=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{1}{c}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{c=2}$$

- V.A.: $x=-2$ en $x=1$

  $\Rightarrow$ $-2$ en 1 zijn nulpunten van de noemer.

  $$\begin{aligned}\Rightarrow n(x)&=2(x+2)(x-1)\\&=2(x^2+x-2)\\&=2x^2+2x-4\end{aligned}$$

  $$\Rightarrow \boxed{d=2} \text{ en } \boxed{e=-4}$$

  $$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+ax+b}{2x^2+2x-4}$$

- nulpunten f: $-3$ en 2

  $$\begin{aligned}\Rightarrow t(x)&=(x+3)(x-2)\\&=x^2+x-6\end{aligned}$$

  $$\Rightarrow \boxed{a=1} \text{ en } \boxed{b=-6}$$

**2** De functie bereikt een relatief minimum voor $x=q$ met $q\in\,]-2,1[$.

Bereken $q$.

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{2x^2+2x-4}$$

$$f'(x)=\frac{4x+2}{(x^2+x-2)^2}$$

$f'$ gaat over van negatief naar positief voor $x=-\dfrac{1}{2}$.

f bereikt een relatief minimum in $-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{q=-\dfrac{1}{2}}$

**Opdracht 68 bladzijde 258**

Bepaal een mogelijk voorschrift van een functie $f$ zodanig dat $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ of toon aan dat het onmogelijk is dat zo'n functie bestaat.

Als $f''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, is f afleidbaar, dus continu in $\mathbb{R}$.

Bovendien zal, aangezien $(f')'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, de afgeleide overal stijgend zijn zodat $f'(-1) < f(0)$.

Het is dus onmogelijk dat $f'(-1) = \frac{1}{2}$ en $f'(0) = 0$.

Zo'n functie bestaat niet.

**Opdracht 69 bladzijde 258**

Gegeven de functie $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2 - mx - 12}{x^2 + 2x - 3}$ met $m$ een reële parameter.

**1** Voor welke waarde(n) van $m$ is $f$ dalend over elk interval van het domein?

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2(m+2) + 18x + 3(m+8)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff (m+2)x^2 + 18x + 3m + 24 = 0$$

$$D = 324 - 4(m+2)(3m+24)$$

$$= -12(m+11)(m-1)$$

Opdat f binnen dom f dalend zou zijn, moet $f'(x) < 0$ voor alle $x \in$ dom f, dus $D \leqslant 0$ én $m + 2 < 0$

$\iff (m \geqslant 1 \text{ of } m \leqslant -11)$ én $m < -2$

$\iff \boxed{m \leqslant -11}$

**2** Voor welke waarde(n) van $m$ heeft $f$ zowel een relatief maximum als een relatief minimum?

f heeft een relatief maximum en een relatief minimum als f′ twee verschillende nulpunten (met tekenwissel) heeft.

Dit is zo als $D > 0$ én $m \neq -2$

$\iff \boxed{-11 < m < 1 \text{ én } m \neq -2}$

**3** Bepaal de eventuele waarde(n) van $m$ waarvoor $f$ slechts één relatief extremum bereikt.

f heeft slechts één extremum als $m + 2 = 0$

$\iff \boxed{m = -2}$

f′ verandert dan juist 1 keer van teken.

**Opdracht 70 bladzijde 258**

Beschouw de familie functies met voorschrift $f(x) = \frac{8}{x}\left(\sqrt{x} - m\right)$ met $m > 0$.

Op welke kromme liggen de extrema van elke functie $f$?

$f(x) = \frac{8}{x}(\sqrt{x} - m)$ met $m > 0$ of $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{8m}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{8m}{x^2} \\ &= \frac{-4}{x\sqrt{x}} + \frac{8m}{x^2} \\ &= \frac{8m - 4\sqrt{x}}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \iff 8m = 4\sqrt{x} \overset{m>0}{\iff} x = 4m^2$

De eerste afgeleide gaat voor $x = 4m^2$ over van positief naar negatief zodat f er een relatief maximum heeft gelijk aan

$$\begin{aligned} f(4m^2) &= \frac{8}{4m^2}\left(\sqrt{4m^2} - m\right) \\ &= \frac{2}{m^2} \cdot m \\ &= \frac{2}{m} \end{aligned}$$

Eliminatie van m uit

$$\begin{cases} x = 4m^2 \\ y = \dfrac{2}{m} \end{cases} \qquad \text{met } m > 0 \text{ (en dus } y > 0)$$

geeft $x = 4 \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^2$ of $\boxed{y = \frac{4}{\sqrt{x}}}$

De extrema liggen op de kromme met vergelijking $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

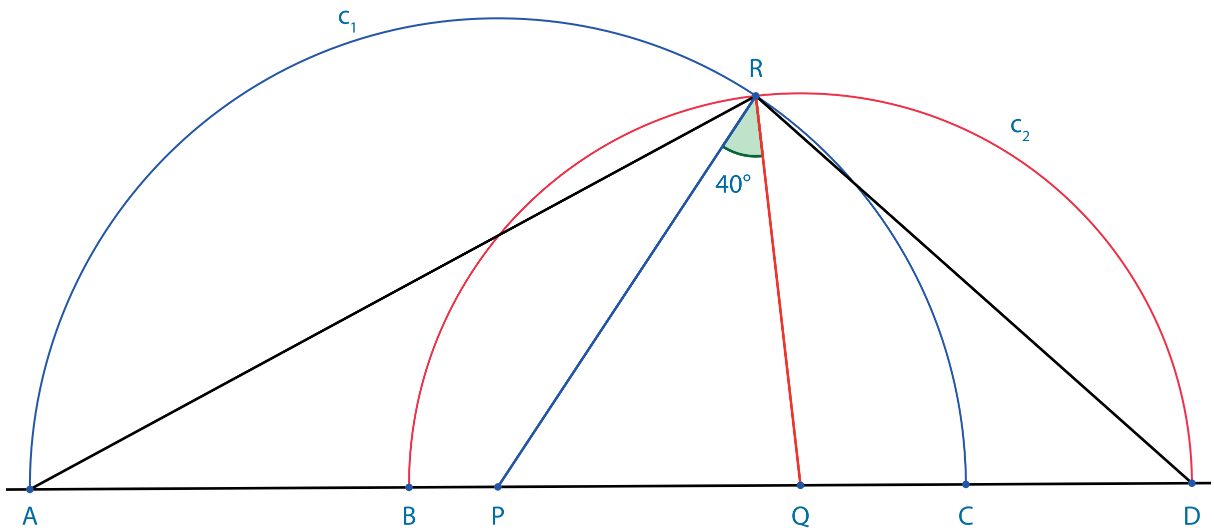
## Hersenbrekers

### Opdracht 1 bladzijde 259

De punten $B$, $P$, $Q$ en $C$ liggen op het lijnstuk $[AD]$.

De halfcirkel met diameter $[AC]$ heeft als middelpunt $P$ en de halfcirkel met diameter $[BD]$ heeft middelpunt $Q$. De twee halfcirkels snijden elkaar in $R$.

Indien $\widehat{PRQ} = 40°$, hoe groot is $\widehat{ARD}$ dan?




110°

Omdat een omtrekshoek de helft is van de middelpuntshoek op dezelfde boog, geldt:

$\widehat{RAD} = \frac{1}{2}\widehat{RPD}$ (in $c_1$) en $\widehat{RDA} = \frac{1}{2}\widehat{RQA}$ (in $c_2$).

Uit de hoekensom in de driehoek PQR volgt dat $\widehat{RPD} + \widehat{RQA} = 140°$ zodat

$\widehat{RAD} + \widehat{RDA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{RPD} + \widehat{RQA}\right) = 70°$ (1)

In de driehoek ARD geldt $\widehat{RAD} + \widehat{ARD} + \widehat{RDA} = 180°$.

Met (1) geeft dit $\widehat{ARD} = 110°$.

### Opdracht 2 bladzijde 259

In $\Delta ABC$ geldt $\cos(2\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\hat{A} + \hat{B}) = 2$ en $|AB| = 4$.

Waaraan is $|BC|$ gelijk?

**A** $\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{3}$ **C** $2$ **D** $2\sqrt{2}$ **E** $2\sqrt{3}$

C

Uit de opgave volgt dat $\cos(2\hat{A} - \hat{B}) = 1$ en $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = 1$.

In een driehoek betekent dit dat $2\hat{A} - \hat{B} = 0$ en $\hat{A} + \hat{B} = 90°$ zodat $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 60°$ en dus

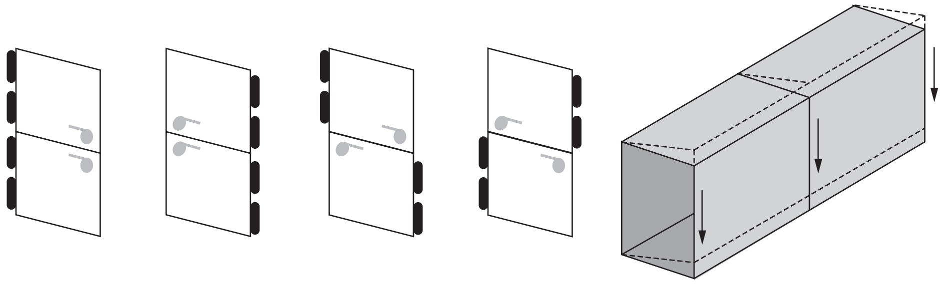
$\hat{C} = 90°$.

$|BC| = |AB| \cdot \sin\hat{A}$ zodat $|BC| = 2$.

**Opdracht 3 bladzijde 259**

Een gang is aan de rechterkant verzakt. Als gevolg daarvan is de doorsnede niet rechthoekig, maar een parallellogram.
Halverwege de gang wordt een deur gemaakt. De deur heeft twee helften die apart open moeten kunnen.

Waar moeten de scharnieren komen?



**A** beide links

**B** beide rechts

**C** boven links, onder rechts

**D** boven rechts, onder links

**E** de helften kunnen nooit goed open

(bron © Europese kangoeroewedstrijd wizPROF 2007)

C

Als de scharnieren boven rechts komen, dan draait de hogere kant linksboven naar rechts, maar daar is geen ruimte. Dus moeten de scharnieren boven links komen. Net zo moeten de scharnieren onder rechts komen.