Delta Nova

Analyse deel 1

5

6/8 lesuren

handleiding

N. Deloddere
N. De Wilde
R. Op de Beeck
Y. Paduwat
P. Tytgat

Plantyn

www.knooppunt.net

knoop punt

ISBN 978-90-301-3975-1

Plantyn ontwikkelt en verspreidt leermiddelen voor het basisonderwijs, het secundair onderwijs, het hoger en het wetenschappelijk onderwijs en het volwassenenonderwijs. Daarnaast geeft Plantyn ook publicaties uit over schoolmanagement, leerlingenbegeleiding, personeelsbeleid voor het onderwijs en didactische ondersteuning van leerkrachten en educatief materiaal voor de thuismarkt. De uitgeverij is zowel in het Nederlandstalige als in het Franstalige landsgedeelte actief.
Doorheen al onze activiteiten streven we ernaar om maximale kansen te bieden aan alle lerenden, rekening houdend met de individuele situatie en interesses, en willen we ertoe bijdragen dat leerkrachten in optimale omstandigheden kunnen werken. Het is immers onze overtuiging dat leren op een eigentijdse en aangename manier kan, wat tot uiting komt in onze slogan "'t leren is mooi".

Plantyn maakt deel uit van de educatieve uitgeefgroep "Infinitas learning".

Plantyn
Adres: Motstraat 32, 2800 Mechelen
Telefoon: 015 36 36 36
Fax: 015 36 36 37
E-mail: klantendienst@plantyn.com
Website: www.plantyn.com

Opmaak cover: Composition
Opmaak binnenwerk: Composition
Cartoons: Tom Goovaerts
Illustratieverantwoording cover: Imageselect
Illustratieverantwoording: © David Cloud - Fotolia.com, © drx - Fotolia.com, © GordonGrand - Fotolia.com, © Yurok Aleksandrovich - Fotolia.com, © David Watmough - Dreamstime.com, © South Tyrol Museum of Archaeology, iStockphoto, Reporters, Stock.XCHNG, Wikimedia

Auteursteam Delta Nova 5/6:

N. Deloddere, N. De Wilde, R. Op de Beeck, Y. Paduwat en P. Tytgat

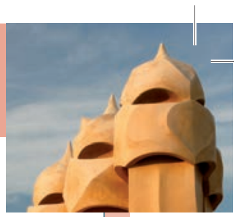
NUR 126

ISBN 978-90-301-3975-1 20457/0 D2013/0032/0736

Plantyn

Plantyn
Motstraat 32, 2800 Mechelen
T 015 36 36 36
F 015 36 36 37
klantendienst@plantyn.com
www.plantyn.com

Dit boek werd gedrukt op papier van verantwoorde herkomst.



Beste Delta Nova-gebruiker

In deze handleiding vind je het extra materiaal dat hoort bij het leerboek Delta Nova 5, Analyse deel 1 voor richtingen met 6/8 lesuren.

Het gevolgde leerplan is **D/2004/0279/019**. Dit is het leerplan A voor studierichtingen ASO met component wiskunde.

Het meest uitgebreide deel van de handleiding bevat de **uitgeschreven oplossingen** van alle opdrachten in het leerboek. Er is geprobeerd om steeds te kiezen voor de meest aangewezen oplossingsmethode.

Met de unieke code op de colofonpagina van deze handleiding kun je op **www.knooppunt.net** inloggen en daar vind je ook nog het volgende extra materiaal.

In detail zie je in welke hoofdstukken en paragrafen het leerboek de **leerplandoelstellingen** realiseert. Voor de betreffende eindtermen verwijzen we naar het leerplan zelf.

De **tijdsplanning** geeft een overzicht van het aantal te besteden lestijden per hoofdstuk en per paragraaf. Er zijn ongeveer 75 lestijden nodig om de leerstof uit dit boek te behandelen.
Het jaarplan van het vijfde jaar voor richtingen met 6 of 8 lesuren per week zal nog aangevuld worden met analyse deel 2 (afgeleiden) en matrices en stelsels of kansrekenen of ...

Je vindt er ook een aantal **werkbladen** bij het leerboek. Het gaat hier om figuren bij invulopdrachten die de leerlingen kunnen gebruiken.

De **wijzigingen bij een nieuwe druk** en een **erratalijst** zijn er ook beschikbaar.

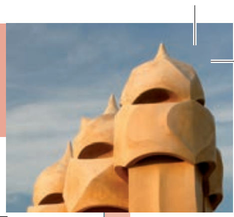
Op Knooppunt komt ook ondersteunend **ict-materiaal**.

We hopen dat dit materiaal een grote hulp kan zijn en wensen je veel plezier met Delta Nova,

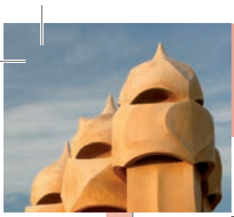
de auteurs,
augustus 2013

Het gevolgde leerplan is **D/2004/0279/019.**
In de onderstaande tabel vind je een overzicht van de doelstellingen en waar ze in Delta Nova 5 Analyse deel 1 (6/8 lesuren) terug te vinden zijn.
B = basisdoelstelling
V = verdiepingsdoelstelling
U = uitbreidingsdoelstelling
Uitbreidings- en verdiepingsdoelstellingen die niet in het leerboek aan bod komen, worden niet vermeld.

		Leerplandoelstelling	DN 5 hfdst. parag.	ET basis	ET spec.
		Kerndoelstellingen analyse			
AN1	B	Een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven.	h1-5		7
AN2	B	Met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen.	h1-5		10
AN3	B	Bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschriften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken.	h1-5		11
AN4	B	Bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en integralen en bij het oplossen van problemen die geformuleerd zijn met functies, op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen.	h1-5	31, 32	12
		I Basiseigenschappen van functies, veeltermfuncties, rationale en irrationale functies			
AN5	B	Op een grafiek van een functie — eventuele symmetrieën, — het stijgen, dalen of constant zijn, — het teken, — de eventuele nulpunten, — de eventuele extrema — aflezen.	1.2 1.3 1.5 1.6 1.7 2.1 3.4	14	
AN6	B	Bij concrete problemen die te herleiden zijn tot een aspect van een veeltermfunctie, rationale functie of irrationale functie de wiskundige vertaling maken en het probleem met ICT oplossen	1.7 2.1 2.2 2.3 3.4	3, 6, 9, 31, 32	12
AN7	B	Delingen van veeltermen uitvoeren.	2.3		1
AN8	B	Voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x)=x^2$ en $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^3$ en $g(x)=\sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x)=x^n$ en $g(x)=\sqrt[n]{x}$.	3.3	23	



		Leerplandoelstelling	DN 5 hfdst. parag.	ET basis	ET spec.
AN9	V	Uit de grafiek van een functie met voorschrift $f(x)$ de grafiek van de functies met voorschrift $f(x)+k$, $f(x+k)$, $k \cdot f(x)$ en $f(k \cdot x)$ grafisch opbouwen.	1.4		
AN10	V	Kenmerken van (eenvoudige) samengestelde functies afleiden uit de kenmerken van de functies waaruit de functie is samengesteld.	3.3		
AU2	U	Bewerkingen uitvoeren op voorschriften van rationale functies.	2.1		
AU3	U	Irrationale vergelijkingen oplossen die gevormd worden door een som van een eerstegraadsvorm en een elementaire irrationale vorm.	3.4		
		II Exponentiële en logaritmische functies			
AN11	B	De betekenis van de uitdrukking a^b, met $a>0$ en b rationaal, uitleggen.	3.1 3.2	21	
AN12	B	Exponentiële groeiprocessen onderzoeken en daarbij gebruik maken van de begrippen beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.	4.1	25	
AN13	B	De grafiek van de functie $f(x)=b \cdot a^x$ tekenen en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag van de grafiek aflezen en beschrijven.	4.2	22, 24	
AN14	B	Het verband tussen de functies $f(x)=a^x$ en $f(x)={}^a\log x$ bespreken aan de hand van grafieken en tabellen.	4.4	23	
AN15	B	Bij grafieken van functies van de vorm $f(x)=b \cdot a^x$ en $f(x)={}^a\log x$ het voorschrift bepalen.	4.2 4.4		
AN16	B	Basiseigenschappen van logaritmen bewijzen.	4.3		
AN17	B	Eigenschappen van exponenten en logaritmen gebruiken in berekeningen.	4.2 4.3		11
AN18	B	Vergelijkingen en ongelijkheden vanuit exponentiële en logaritmische functies oplossen.	4.5	24	11
AN19	B	Vraagstukken en problemen, die vertaald kunnen worden naar problemen i.v.m. exponentiële en logaritmische functies, oplossen en exponentiële en logaritmische functies gebruiken als modellen.	4.2 4.5	3, 6, 9, 31, 32	6, 10, 11, 12



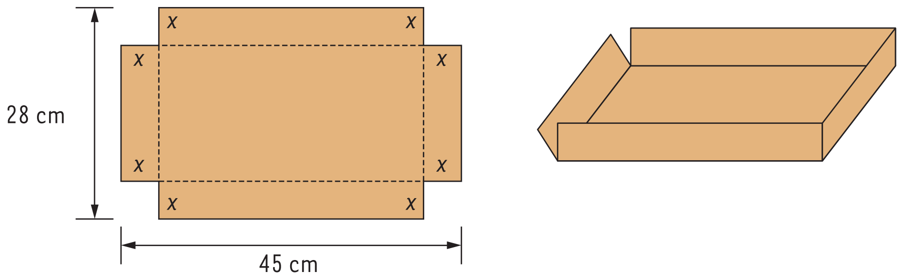
		Leerplandoelstelling	DN 5 hfdst. parag.	ET basis	ET spec.
		III Goniometrische functies			
AN20	B	Het verband leggen tussen graden en radialen.	5.3 5.4	26	
AN21	B	De grafieken van $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$ tekenen.	5.5	27	
AN22	B	Domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen, extrema van de functies $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$ aflezen van de grafieken en beschrijven.	5.5	28	
AN23	B	De grafiek van een functie met voorschrift $f(x)=a\cdot\sin\left[b(x+c)\right]+d$ schetsen en de invloed van de parameters uitleggen.	5.6	29	
AN24	B	Uit de grafiek van een algemene sinusfunctie het voorschrift afleiden en de algemene sinusfunctie gebruiken als model.	5.6	6	
AN25	B	De begrippen amplitude, evenwichtsstand, faseverschuiving en periode gebruiken bij een periodiek verschijnsel.	5.1 5.6	9	
AN26	B	Vergelijkingen van de vorm $a\cdot\sin\left[b(x+c)\right]+d=e$ oplossen.	5.8	30	11, 12
AN27	B	Ongelijkheden van de vorm $a\cdot\sin\left[b(x+c)\right]+d\leqslant e$ (of $>e$) oplossen.	5.8		11, 12
AN28	B	Problemen oplossen waarbij gebruik gemaakt wordt van een goniometrisch verband, o.m. over periodieke verschijnselen die beschreven worden met een algemene sinusfunctie.	5.6 5.8	3, 6, 31, 32	6, 11, 12
AN29	B	Som- en verschilformules, verdubbelingsformules en formules van Simpson gebruiken om goniometrische uitdrukkingen te vereenvoudigen, vergelijkingen op te lossen en eenvoudige identiteiten te bewijzen.	5.7 5.8		11
AN30	V	De grafieken van de standaard cyclometrische functies tekenen, het verloop beschrijven en het verband met $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ bespreken.	5.9		

Hoofdstuk 1

Veeltermfuncties

Opdracht 1 bladzijde 8

Uit een stuk karton met lengte 45 cm en breedte 28 cm knip je in de vier hoeken vierkantjes af met zijde *x* cm. Zo verkrijg je een open doos.



1 Hoe groot is het volume van de doos als je vierkantjes met zijde 5 cm wegsnijdt?

$V = (45 - 2 \cdot 5)(28 - 2 \cdot 5) \cdot 5$

$\Rightarrow V = 3150 \text{ cm}^3 = 3{,}15 \text{ dm}^3$

2 Bepaal het volume *V* (in cm^3) van de doos in functie van *x*.

$V = (45 - 2x)(28 - 2x) \cdot x$

3 Welke waarden van *x* zijn zinvol?

De zijde x moet positief zijn en kleiner dan de helft van de breedte 28 cm. Dus $0 < x < 14$. Anders genoteerd: $x \in \,]0{,}14[$.

Opdracht 2 bladzijde 10

Zonder water kan een mens niet overleven. Wereldwijd worden er dan ook al vele jaren inspanningen geleverd om het tekort aan drinkwater aan te pakken. Een oplossing daarvoor zou het gebruik van Zuidpoolijs kunnen zijn. Een ijsberg bevat immers miljoenen tonnen zoet water, potentieel drinkwater dus.

De Franse ingenieur Georges Mougin ijvert al sinds 1975 om het verslepen van ijsbergen mogelijk te maken, maar stuitte op tal van problemen (financiële, technische ...). Het is pas sinds 2002 dat men, dankzij o.a. simulatietechnieken, een beter zicht heeft op het verslepen van een ijsberg.

Hoeveel ijs er tijdens een dergelijke tocht smelt, is onder andere afhankelijk van de tijd die het kost om de ijsberg naar de eindbestemming te slepen.

Stel dat men als model een bolvormige ijsberg neemt met straal 150 m en dat er per dag een laag ijs van 2 m dikte smelt.

1 Bepaal het voorschrift van het volume V van de ijsberg (in m^3) als functie van de vaartijd t (in dagen). Je mag aannemen dat het transport van de ijsberg begint op $t = 0$.

$$V_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(150 - 2t)^3$$

2 Wat is het volume van de ijsberg na 20 dagen varen?

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(150 - 2 \cdot 20)^3 = 5\,575\,279{,}763$$

Het volume is ongeveer 5 575 280 m^3.

3 Na hoeveel dagen zou de ijsberg volledig gesmolten zijn?

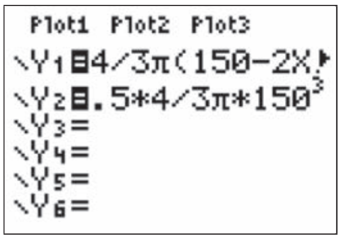
$$V = 0 \Leftrightarrow 150 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 75$$

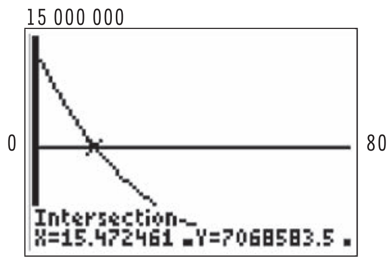
Na 75 dagen varen is het ijs gesmolten.

Opdracht 2(vervolg) bladzijde 11

4 Maak gebruik van de grafiek van V om na te gaan na hoeveel tijd het volume van de ijsberg gehalveerd is.

Grafisch:





Bereken dit tijdstip ook algebraïsch.

Algebraïsch:

$$\frac{4}{\cancel{3}}\pi(150 - 2t)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot 150^3$$

$$150 - 2t = \sqrt[3]{\frac{150^3}{2}}$$

$$t = \frac{150 - \sqrt[3]{\dfrac{150^3}{2}}}{2}$$

$$= 15{,}47246$$

Na ongeveer 16 dagen is het volume gehalveerd.

Opdracht 3 bladzijde 11

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$.

1 Welke nulpunten kun je aflezen uit de tabel van f?

Uit de tabel van f lezen we 3 nulpunten af: –3, 1 en 3.

2 Ontbind het voorschrift van f in factoren. Dit kan bijvoorbeeld door de termen twee aan twee samen te nemen.

$$\underbrace{x^3 - x^2} - \underbrace{9x + 9} = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

3 Hoe kun je uit die ontbinding de nulpunten van f algebraïsch bepalen?

$$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x - 3 = 0 \text{ of } x + 3 = 0$$

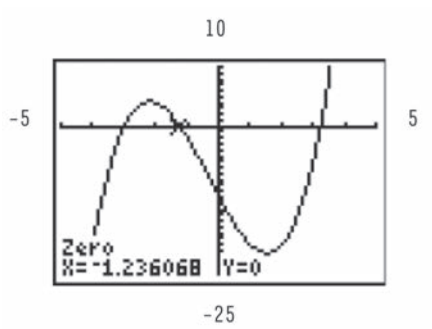
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = -3$$

Opdracht 4 bladzijde 11

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 12$. In een tabel kun je enkel het geheel nulpunt -3 aflezen.

1 Bepaal m.b.v. de grafiek de overige nulpunten op 0,001 nauwkeurig.

Op de grafiek lezen we de nulpunten
–1,236 en 3,236 af.



2 Als -3 een nulpunt is van f, dan is $x+3$ een deler van $f(x)$ en geldt $f(x)=(x+3)\cdot q(x)$.
Bepaal het quotiënt $q(x)$ en bereken de nulpunten van f exact.

M.b.v. de Hornerschema vinden we:

	1	1	-10	-12
-3		-3	6	12
	1	-2	-4	0

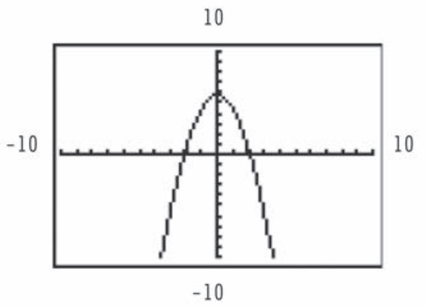
Het quotiënt is $q(x) = x^2 - 2x - 4$.
Dit betekent dat $f(x) = (x + 3)(x^2 - 2x - 4)$ en dus:
$(x + 3)(x^2 - 2x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ of $x^2 - 2x - 4 = 0$
$D = 4 + 16 = 20$

$\Leftrightarrow x = -3$ of $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

nulpunten : $-3,\ 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5}$

Opdracht 5 bladzijde 11
1 Plot de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\frac{1}{200}x^4-\frac{521}{400}x^2+\frac{144}{25}$.

Op basis van het standaardvenster vermoeden we twee nulpunten.



2 Bereken de nulpunten van f door de bikwadratische vergelijking $\frac{1}{200}x^4 - \frac{521}{400}x^2 + \frac{144}{25} = 0$ op te lossen.

$$\frac{1}{200}x^4 - \frac{521}{400}x^2 + \frac{144}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 521x^2 + 2304 = 0$$

$$D = 253\,009 = 503^2$$

$$x^2_{1,2} = \frac{521 \pm 503}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \text{ of } x^2 = 256 = 16^2$$

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ of } x = \pm 16$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{of} \quad x = \pm 16$$

nulpunten : $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, -16, 16

Opdracht 6 bladzijde 14

Bepaal exact de nulpunten van de veeltermfuncties.

1 $f(x) = 2x^3 - 2x$

$$2x^3 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\,(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = 1$$

nulpunten: 0, -1, 1

2 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

Via een tabel vinden we als nulpunten –5, –2 en 3.

Er kunnen niet meer nulpunten zijn.

Nulpunten: –5, –2, 3

3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 (x - 3) + 2 (x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ of } \underbrace{x^2 + 2 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = 3$

Nulpunt: 3

4 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

$4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$

In de tabel lezen we het nulpunt –2 af.

Regel van Horner:

	4	4	–7	2
–2		–8	8	–2
	4	–4	1	0

Er geldt: $f(x) = (x + 2)(4x^2 - 4x + 1)$

zodat: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ of } 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \text{ of } x = \frac{1}{2}$

Opmerkingen: 1) $\frac{1}{2}$ is een dubbel nulpunt.

2) Kies je voor de tabel stapgrootte $\frac{1}{2}$, dan vind je ook $\frac{1}{2}$ als nulpunt via de tabel.

5 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ bikwadratische vergelijking:

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$ stel $x^2 = t$

$\left.\begin{array}{l} S = 5 \\ P = 6 \end{array}\right\}$ 2 en 3

$\Leftrightarrow t = 2$ of $t = 3$

$\Leftrightarrow x^2 = 2$ of $x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ of $x = \pm\sqrt{3}$

Nulpunten: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

6 $f(x) = x^4 - 9$

$x^4 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$ of $\underbrace{x^2 + 3 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Nulpunten: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

7 $f(x) = x^3 - 6x - 4$

$x^3 - 6x - 4 = 0$

In de tabel lezen we het nulpunt −2 af.

	1	0	−6	−4
−2		−2	4	4
	1	−2	−2	0

$(x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ of $x^2 - 2x - 2 = 0$

$D = 12$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Nulpunten: -2, $1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$

8 $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

In de tabel lezen we de nulpunten -2 en 2 af.

	1	-1	-5	4	4
-2		-2	6	-2	-4
	1	-3	1	2	0
2		2	-2	-2	
	1	-1	-1	0	

$(x + 2)(x - 2)(x^2 - x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ of $x - 2 = 0$ of $x^2 - x - 1 = 0$

$D = 5$

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 2$ of $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Nulpunten: $-2, 2, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

9 $f(x) = 9x^3 + 39x^2 - 29x + 5$

In de tabel lezen we het nulpunt -5 af.

	9	39	-29	5
-5		-45	30	-5
	9	-6	1	0

$(x + 5)(9x^2 - 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5 = 0$ of $(3x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ of $x = \dfrac{1}{3}$

Nulpunten: $-5, \dfrac{1}{3}$

10 $f(x) = 4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9$

$4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 (4x^2 - 9) - (4x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 9)(x^4 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ of $2x + 3 = 0$ of $x - 1 = 0$ of $x + 1 = 0$ of $\underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{geen oplossing}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ of $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 1$ of $x = -1$

Nulpunten: $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, -1$

Opdracht 7 bladzijde 15

Een veeltermfunctie van de derde graad heeft een (enkelvoudig) nulpunt 3 en een dubbel nulpunt -2. De grafiek van deze functie gaat door het punt $P(-3, 3)$.
Het voorschrift is bijgevolg van de vorm $f(x) = a \cdot (x - 3)^m \cdot (x + 2)^n$, met $a \neq 0$.

1 Bepaal m en n.

$f(x) = a(x - 3)^m \cdot (x + 2)^n$

3 is een enkelvoudig nulpunt: $m = 1, 3...$

-2 is een dubbel nulpunt: $n = 2, 4...$

Omdat de veeltermfunctie van de derde graad is, is $m = 1$ en $n = 2$.

2 Bereken a.

Het punt P $(-3, 3)$ ligt op de grafiek van f:

$a(-3 - 3)(-3 + 2)^2 = 3$

$\Leftrightarrow -6a = 3$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

Opdracht 8 bladzijde 15

Bepaal het voorschrift van de vierdegraadsfunctie *f* met –1 en 1 als dubbele nulpunten en waarvan de grafiek door het punt $P(2, 3)$ gaat.

$f(x) = a\,(x + 1)^2\,(x - 1)^2$

De grafiek gaat door het punt P (2,3):

$a\,(2 + 1)^2\,(2 - 1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow 9a = 3$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

Voorschrift : $f(x) = \frac{1}{3}\,(x + 1)^2\,(x - 1)^2$

Opdracht 9 bladzijde 15

Geef een voorbeeld van een vierdegraadsfunctie met

1 geen nulpunten

$f(x) = x^4 + 1,\ g(x) = 2x^4 + 3$...

2 één nulpunt

$f(x) = (x - 1)^4,\ g(x) = (x - 1)^2\,(x^2 + 1)$...

3 twee nulpunten

$f(x) = x^4 - 1,\ g(x) = (x - 1)\,(x + 1)^3$...

4 drie nulpunten

$f(x) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)^2,\ g(x) = (x - 1)^2\,(x^2 - 4)$...

5 vier nulpunten

$f(x) = x(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2),\ g(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 - 4)$...

Opdracht 10 bladzijde 16

Het voorschrift $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x$ kan ontbonden worden als $f(x) = x(x + 2)(2x - 3)$.
In de tabel vind je de functiewaarden bij een aantal originelen.

x	f(x)
−3	−27
−2,5	−10
−2	0
−1,5	4,5
−1	5
−0,5	3
0	0
0,5	−2,5
1	−3
1,5	0
2	8
2,5	22,5
3	45

1 Leid uit deze gegevens af voor welke intervallen van x de grafiek van f boven, respectievelijk onder de x-as ligt.
Doe dit zonder een grafiek te maken.

De grafiek van f ligt boven de x-as voor $-2 < x < 0$ en voor $x > 1{,}5$ want daar zijn de functiewaarden positief.

De grafiek van f ligt onder de x-as voor $x < -2$ en voor $0 < x < 1{,}5$ want daar zijn de functiewaarden negatief.

Omdat de functie van de derde graad is kunnen er maximum 3 nulpunten zijn. Een andere mogelijkheid voor de grafiek is er niet.

2 Voor $x = -3$ en $x = 1$ zijn de functiewaarden negatief:
$f(-3) = -27$ en $f(1) = -3$. Bepaal voor $x = -3$ het teken van elk van de factoren in de ontbinding van f.
Doe dit ook voor $x = 1$.

$x = -3$: $\left.\begin{array}{l} -3 < 0 \\ -3 + 2 < 0 \\ 2(-3) - 3 < 0 \end{array}\right\}$ 3 negatieve factoren: $-3\,(-3 + 2)\,(2\,(-3) - 3) < 0$

$x = 1$: $\left.\begin{array}{l} 1 > 0 \\ 1 + 2 > 0 \\ 2 \cdot 1 - 3 < 0 \end{array}\right\}$ 2 positieve en 1 negatieve factor: $1 \cdot (1 + 2) \cdot (2 \cdot 1 - 3) < 0$

3 Voor $x = -1$ en $x = 2$ zijn de functiewaarden positief. Wat kun je voorspellen over het aantal positieve factoren voor deze twee x-waarden? Controleer je bewering.

$x = -1$: even aantal negatieve factoren

$\left.\begin{array}{l} -1 < 0 \\ -1 + 2 > 0 \\ 2(-1) - 3 < 0 \end{array}\right\}$ 2 negatieve factoren: $-1 \cdot (-1 + 2)\,(2 \cdot (-1) - 3) > 0$

$x = 2$: $\left.\begin{array}{l} 2 > 0 \\ 2 + 2 > 0 \\ 2 \cdot 2 - 3 > 0 \end{array}\right\}$ 3 positieve factoren: $2 \cdot (2 + 2)\,(2 \cdot 2 - 3) > 0$

Opdracht 11 bladzijde 18

Los de volgende ongelijkheden op met behulp van een tekentabel.

1 $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

* nulpunten:

$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

Tabel: 2

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

$(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ of $x^2 + x + 1 = 0$

$D = -3 < 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

* tekentabel:

x		2	
$x - 2$	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+
$f(x)$	-	0	+

* $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$ als $x > 2$

2 $-3x^4 - x^3 + 2x^2 \leqslant 0$

* nulpunten:

$-3x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2(3x^2 + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (2x) of $3x^2 + x - 2 = 0$

$D = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{cases} -1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

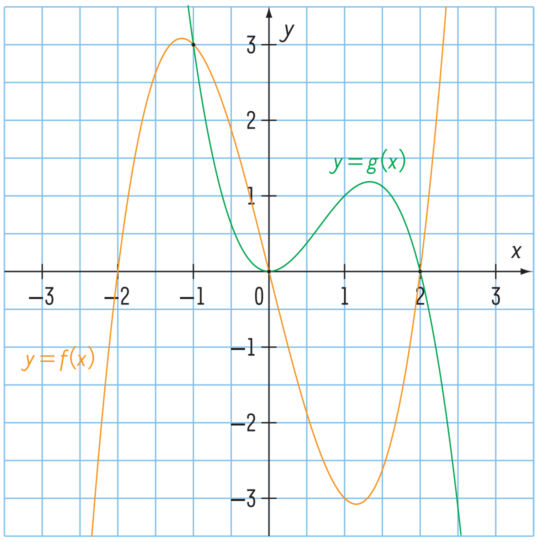
* tekentabel:

x		-1		0		$\frac{2}{3}$	
$-x^2$	-	-	-	0	-	-	-
$3x^2 + x - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+	0	-

* $-3x^4 - x^3 + 2x^2 \leqslant 0$ als $x \leqslant -1$ of $x = 0$ of $x \geqslant \frac{2}{3}$

Opdracht 12 bladzijde 18

Los grafisch op: $f(x) > g(x)$.



$f(x) > g(x)$ als $-1 < x < 0$ of $x > 2$

Opdracht 13 bladzijde 18

Voor welke waarden van x ligt de grafiek van $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4$ onder de grafiek van $g: x \mapsto -3x^2 - x + 2$?

De voorwaarde vertaalt zich in:

$x^2 + x^2 - 4 < -3x^2 - x + 2$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4 + 3x^2 + x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0$

* nulpunten: -3, -2, 1 (tabel)

$x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x + 2)(x - 1) < 0$

* tekentabel:

x		-3		-2		1	
$x + 3$	−	0	+	+	+	+	+
$x + 2$	−	−	−	0	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	−	−	0	+
$f(x) - g(x)$	−	0	+	0	−	0	+

* De grafiek van f ligt onder de grafiek van g als

$x < -3$ of $-2 < x < 1$

Opdracht 14 bladzijde 18

Los op.

1 $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant -x^2 + 4$

$$\underbrace{x^4 - 5x^2 + 4}_{f(x)} \geqslant \underbrace{-x^2 + 4}_{g(x)}$$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 + x^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 (x^2 - 4) \geqslant 0$

* nulpunten: 0, −2, 2
* tekentabel:

x		-2		0		2	
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x) - g(x)$	+	0	−	0	−	0	+

* $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant -x^2 + 4$

als $x \leqslant -2$ of $x = 0$ of $x \geqslant 2$

2 $2x^3 - x^2 - x < x - 1$

$$\underbrace{2x^3 - x^2 - x}_{f(x)} \quad < \quad \underbrace{x - 1}_{g(x)}$$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x - x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 < 0$

* nulpunten: $-1,\ 1,\ \frac{1}{2}$ (tabel)

$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x + 1\right)\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(2x - 1) = 0$

* tekentabel:

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) - g(x)$	$\underline{-}$	0	$+$	0	$\underline{-}$	0	$+$

* $2x^2 - x^2 - x < x - 1$ als $x < -1$ of $\frac{1}{2} < x < 1$

Opdracht 15 bladzijde 19

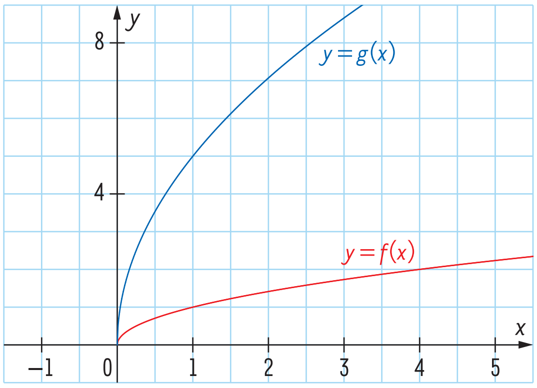
De functies f in deze opdracht hebben als voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ of $f(x) = \sqrt{x}$ of $f(x) = \sqrt[3]{x}$ of $f(x) = x^3$.

Op de grafiek van zo'n functie f wordt een transformatie (spiegeling, uitrekking, verschuiving) uitgevoerd. Zo ontstaat de grafiek van een functie g.

Bepaal telkens het voorschrift van f en g.

1

x	f(x)	g(x)
−1	/	/
0	0	0
1	1	5
2	1,4142	7,0711
3	1,7321	8,6603
4	2	10
5	2,2361	11,18

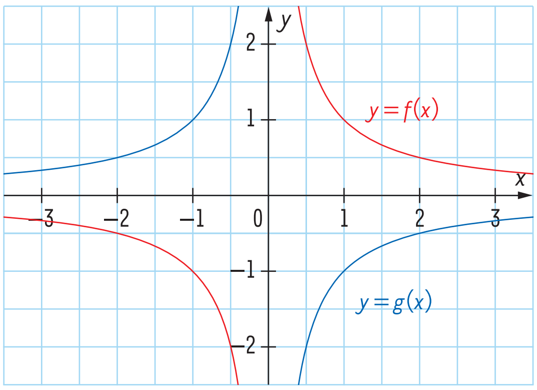


$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = 5\sqrt{x}$

2

x	f(x)	g(x)
−3	−0,3333	0,3333
−2	−0,5	0,5
−1	−1	1
0	/	/
1	1	−1
2	0,5	−0,5
3	0,3333	−0,3333

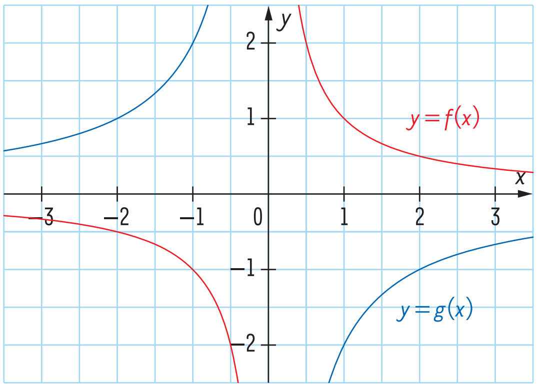


$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$

3

x	f(x)	g(x)
−3	−0,3333	0,6667
−2	−0,5	1
−1	−1	2
0	/	/
1	1	−2
2	0,5	−1
3	0,3333	−0,6667



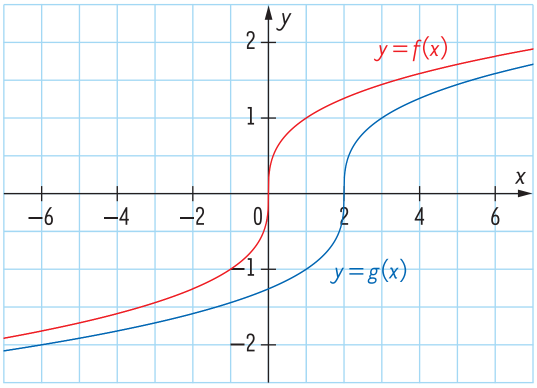
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = -\frac{2}{x}$$

Opdracht 15(vervolg) bladzijde 20

4

x	f(x)	g(x)
−4	−1,587	−1,817
−2	−1,26	−1,587
0	0	−1,26
2	1,2599	0
4	1,5874	1,2599
6	1,8171	1,5874
8	2	1,8171

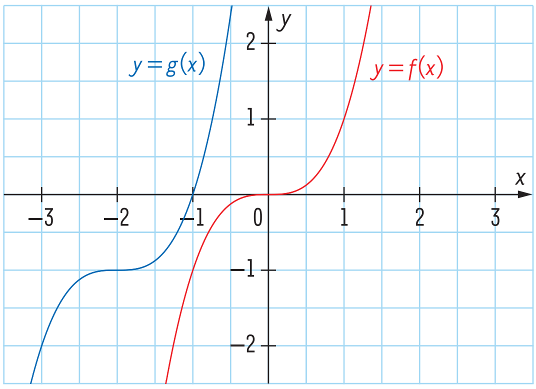


$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$$

5

x	f(x)	g(x)
−5	−125	−28
−3	−27	−2
−1	−1	0
1	1	26
3	27	124
5	125	342



$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = (x + 2)^3 - 1$$

Opdracht 16 bladzijde 22

1 Op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4$ past men, in de gegeven volgorde, de volgende transformaties toe:

- een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$
- een spiegeling om de x-as
- een verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-2,3)$

Je krijgt de grafiek van een functie g.

Bepaal het voorschrift van deze functie.

$$y = x^4$$

$\downarrow$ **verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$**

$$y = \frac{1}{2}x^4$$

$\downarrow$ **spiegeling om de x-as**

$$y = -\frac{1}{2}x^4$$

$\downarrow$ **verschuiving volgens $\vec{v}(-2, 3)$**

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$$

2 Je verandert nu de volgorde van de transformaties als volgt:

- eerst een verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-2,3)$
- daarna een spiegeling om de x-as
- tenslotte een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

Je krijgt de grafiek van een functie h.

Bepaal het voorschrift van deze functie.

$$y = x^4$$

$\downarrow$ **verschuiving volgens $\vec{v}(-2, 3)$**

$$y = (x+2)^4 + 3$$

$\downarrow$ **spiegeling om de x-as**

$$y = -(x+2)^4 - 3$$

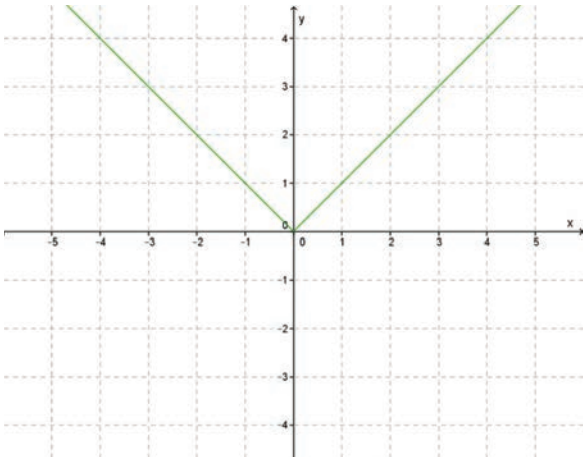
$\downarrow$ **verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$**

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - \frac{3}{2}$$

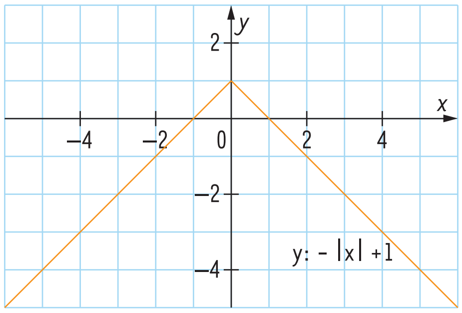
$$h(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^4 - \frac{3}{2}$$

Opdracht 17 bladzijde 22

1 Teken de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = |x|$.



2 Welke transformaties zijn er nodig om deze grafiek om te vormen tot de nevenstaande grafiek?



spiegeling om de x-as → $y = -|x|$

verschuiving volgens $\vec{v}(0,1)$ → $y = -|x| + 1$

3 Geef het voorschrift dat hoort bij die grafiek.

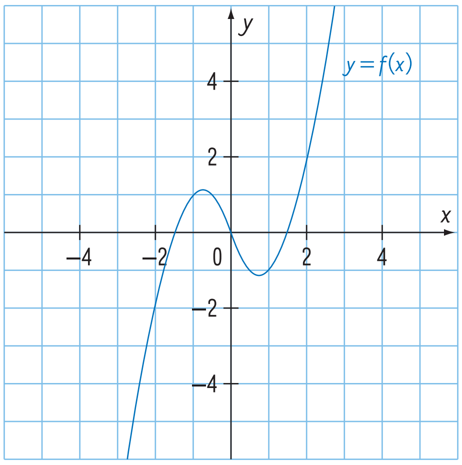
$y = -|x| + 1$

Opdracht 18 bladzijde 23

Gegeven zijn een aantal functiegrafieken.

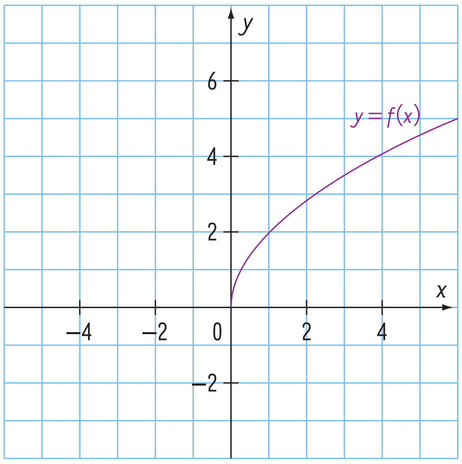
Bepaal de eventuele symmetrieassen en symmetriemiddelpunten van de grafieken.

1



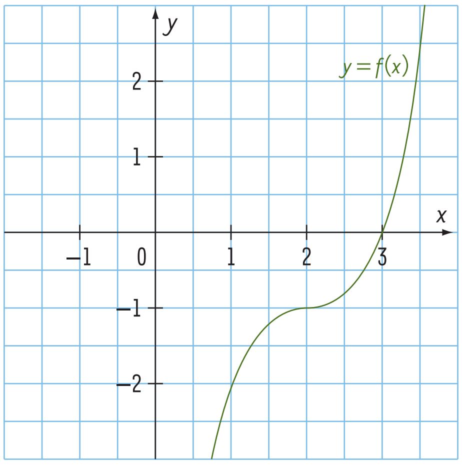
symmetriemiddelpunt: (0,0)

2



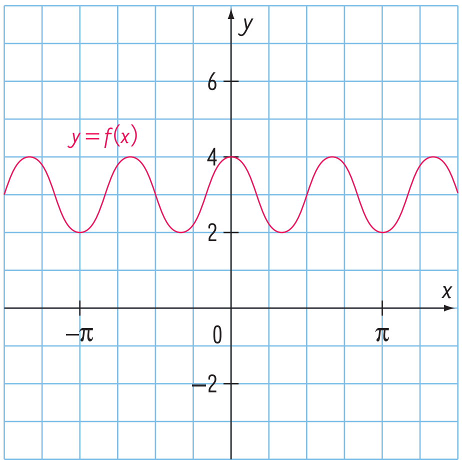
geen symmetrie

3



symmetriemiddelpunt (2, −1)

4



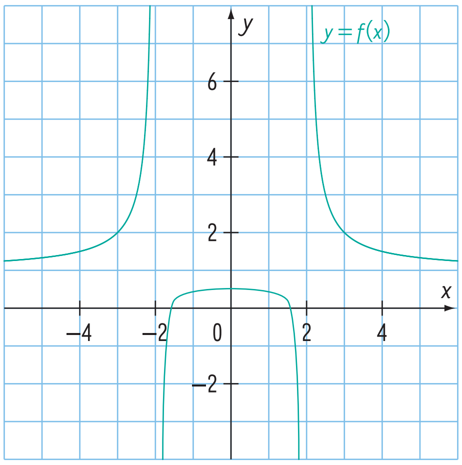
oneindig veel symmetrieassen

→ $[0, \pi]$ verdelen in 3 delen

→ $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$, $x = \frac{4\pi}{3}$, ...

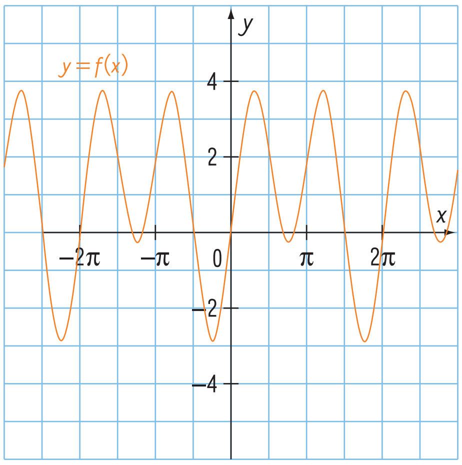
$x = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, ...

5



1 symmetrieas: $x = 0$

6



oneindig veel symmetrieassen: $x = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \ldots$

Opdracht 19 bladzijde 26

Onderzoek algebraïsch of de functies met gegeven voorschrift even, oneven of geen van beide zijn. Controleer daarna d.m.v. een grafiek.

1 $f(x) = x^4 + 5$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 5 \\ &= x^4 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

2 $f(x) = x^5 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 3(-x) + 2 \\ &= -x^5 + 3x + 2 \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

3 $f(x) = -2x^3 + 5x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -2(-x)^3 + 5(-x) \\ &= 2x^3 - 5x \\ &= -(-2x^3 + 5x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f is oneven

Opdracht 20 bladzijde 30

Hieronder zie je een aantal grafieken met voorschrift $f(x) = ax^n$.

Maak een classificatie van de vorm van de grafiek van deze functies op basis van de waarde van a en n.

$f(x) = ax^n$

	n even		n oneven	
$a > 0$	$f_5(x)$ $f_9(x)$		$f_1(x)$ $f_3(x)$ $f_7(x)$ $f_{11}(x)$	
$a < 0$	$f_2(x)$ $f_6(x)$ $f_{10}(x)$		$f_4(x)$ $f_8(x)$ $f_{12}(x)$	

Opdracht 21 bladzijde 32

In welke kwadranten liggen de grafieken van de volgende functies, voor zeer grote absolute waarden van x?

1 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x$

$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ n \text{ even} \end{array}\right\}$  eerste en tweede kwadrant

2 $f(x) = -x^3 + 1000x^2 + 10\ 000\ 000x + 1\ 000\ 000\ 000$

$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ n \text{ oneven} \end{array}\right\}$  tweede en vierde kwadrant

3 $f(x) = -0{,}8x^6 - 1{,}2x^4 + x^2 + 1$

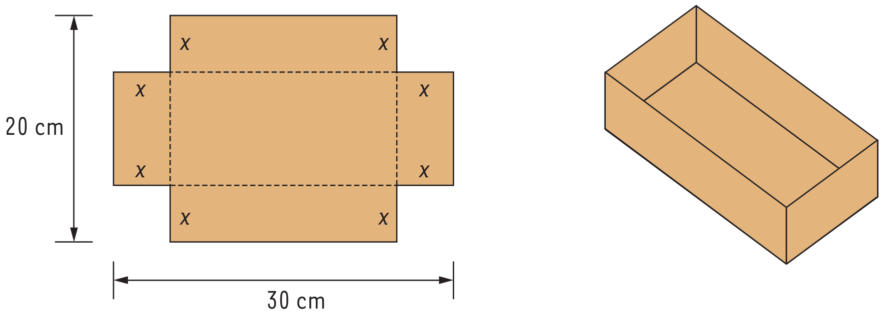
$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ n \text{ even} \end{array}\right\}$  derde en vierde kwadrant

4 $f(x) = 0{,}01x^5 + 100x^4 + x^3$

$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ n \text{ oneven} \end{array}\right\}$  eerste en derde kwadrant

Opdracht 22 bladzijde 33

Bij een rechthoekige metalen plaat van 30 cm bij 20 cm worden in de hoeken kleine vierkanten weggesneden. Daarna wordt van de plaat een bakje gebogen.
De hoogte van de rand is x (in cm).



De inhoud I van dit bakje kunnen we uitdrukken in functie van x:

$$I(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x$$

1 Welke inhoud heeft het bakje als $x = 3$? En als $x = 11$?

$x = 3$: $I(x) = (30 - 6)(20 - 6) \cdot 3 = 1008 \Rightarrow 1008 \text{ cm}^3$

$x = 11$: $I(x) = (30 - 22)\underbrace{(20 - 22)}_{< 0} \cdot 11$, geen oplossing want

de inhoud kan niet negatief zijn.

2 Welke zijn de zinvolle waarden voor x?

De zijde van het vierkantje moet positief zijn en moet kleiner zijn dan de helft van de kortste zijde van de rechthoek (20 cm), dus
$0 < x < 10$

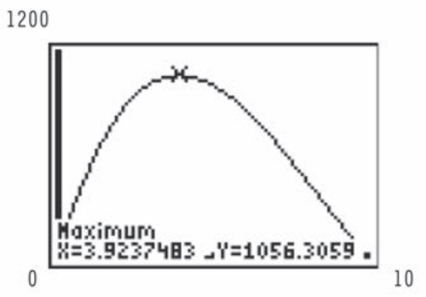
3 Stel een tabel op van I, waarbij x zinvolle gehele waarden aanneemt. Voor welke waarde van x, bij benadering, is de inhoud maximaal?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I(x)	504	832	1008	1056	1000	864	672	448	216

$x \approx 4$ cm

4 Kies vensterinstellingen op basis van de tweede en de derde vraag en plot de grafiek van *I*. Ga op deze grafiek na voor welke *x*-waarde de inhoud maximaal is. Geef het resultaat in mm.

$x \approx 3{,}9237$ cm ≈ 39 mm

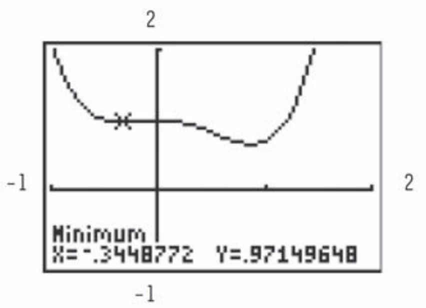


Opdracht 23 bladzijde 36

Bepaal grafisch de relatieve extrema van de veeltermfunctie met voorschrift

$f(x) = x^4 - 0{,}7x^3 - 0{,}6x^2 + 1.$

Via een tabel bepalen we de geschikte vensterinstelling

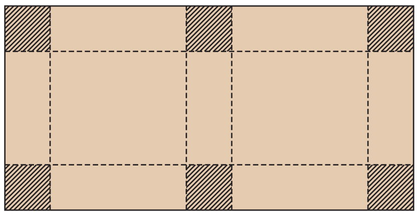


De functie bereikt een minimum voor $x = -0{,}345$ met waarde 0,971 en voor $x = 0{,}870$ met waarde 0,658.

De functie bereikt een maximum voor $x = 0$ met waarde 1.

Opdracht 24 bladzijde 36

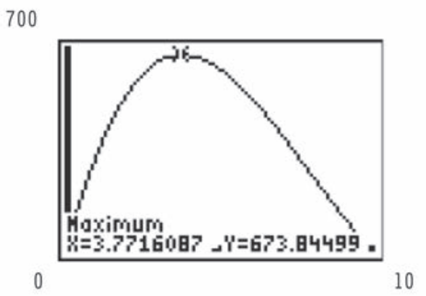
Uit een rechthoek van 40 cm lang en 20 cm breed snijden we zes gelijke vierkanten weg zoals aangegeven op de figuur.
Met het overblijvende deel maken we een taartdoosje.



Hoe groot moet de zijde van de vierkantjes zijn opdat de doos een maximale inhoud zou hebben?

De inhoud van de doos = $I(x) = \left(\dfrac{40 - 3x}{2}\right) \cdot (20 - 2x) \cdot x$

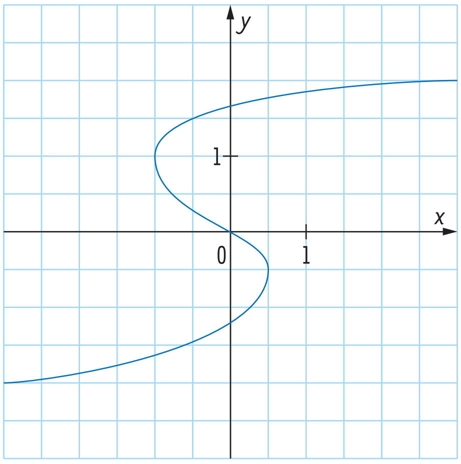
De zijde van het vierkantje moet ongeveer 3,77 cm zijn opdat de inhoud van de doos maximaal is (± 673,84 cm^3).



Opdracht 25 bladzijde 39

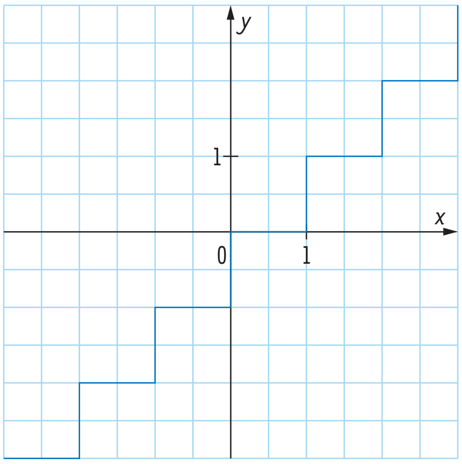
Welke van de onderstaande grafieken zijn functiegrafieken?
Bepaal in dit geval het domein en het bereik van de functie.

1



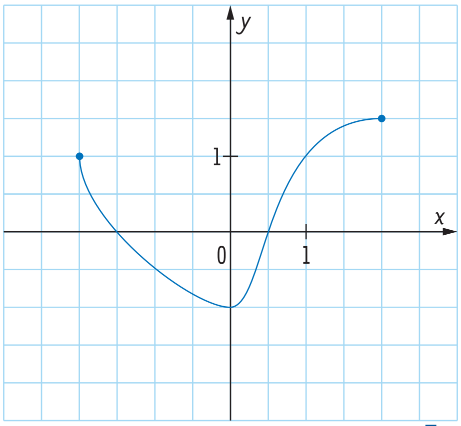
geen functie

2



geen functie

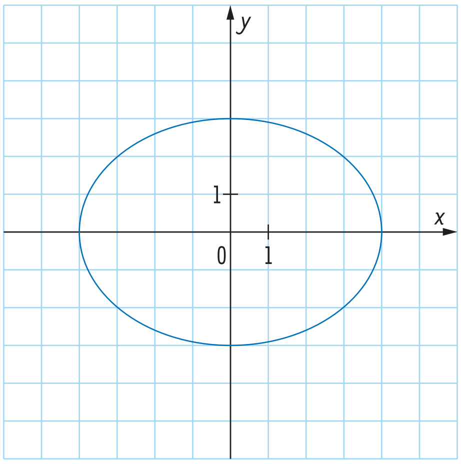
3



functie

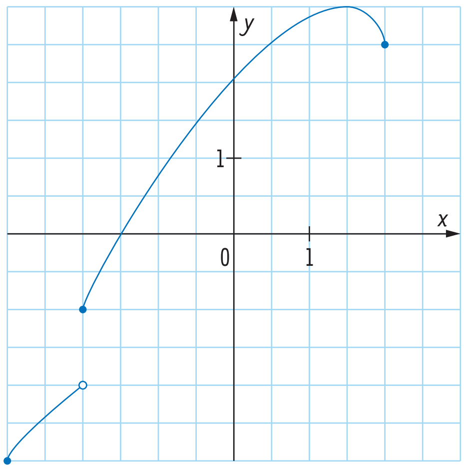
dom $f = [-2, 2]$ ber $f = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

4



geen functie

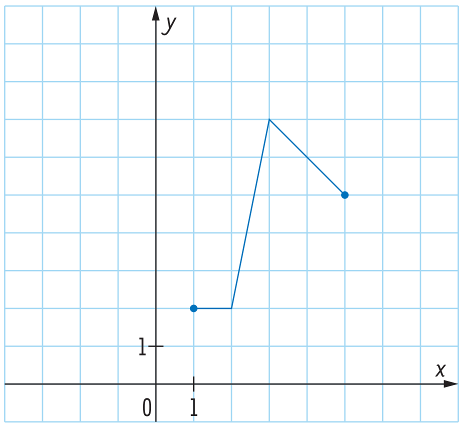
5



functie

dom f = [-3, 2]   ber f = [-3, -2[∪ [-1, 3]

6

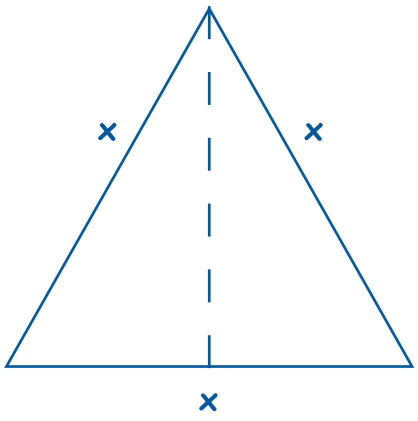


functie

dom f = [1, 5]   ber f = [2, 7]

Opdracht 26 bladzijde 40

Druk de oppervlakte *A* van een gelijkzijdige driehoek met zijde *x* uit in functie van *x*.



Oppervlakte driehoek

$$= \frac{\text{basis} \cdot \text{hoogte}}{2}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{\frac{3}{4}x^2}}{2}$$

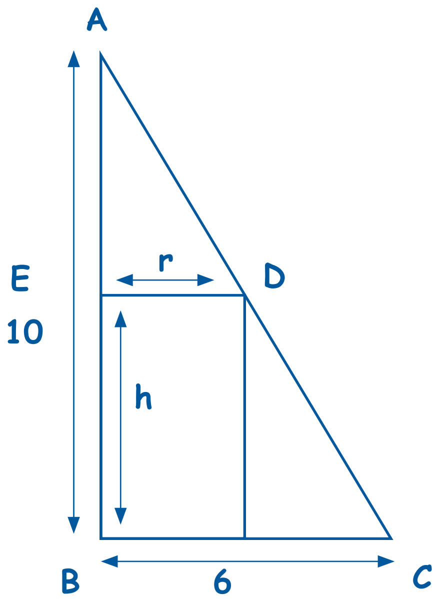
$$= \frac{x \cdot \sqrt{3}x}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\,x^2$$

Opdracht 27 bladzijde 40

Beschouw een kegel waarvan de straal van het grondvlak 6 cm is en de hoogte 10 cm.
In die kegel is een cilinder ingeschreven.

1 Druk de hoogte *h* van de cilinder uit in functie van de straal *r*.



$\Delta\ AED \sim \Delta\ ABC$:

$$\frac{r}{6} = \frac{10 - h}{10}$$

$$10\,r = 60 - 6\,h$$

$$6\,h = 60 - 10\,r$$

$$h = 10 - \frac{5}{3}\,r$$

2 Druk het volume V van de cilinder uit in functie van r.

$$V = \pi x^2 \cdot h$$

$$= \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3}r\right)$$

Opdracht 28 bladzijde 40

Beantwoord de volgende vraag zonder je rekentoestel te gebruiken.

Beschouw de functie $f: x \mapsto x^{17} + x^{16} + x^{15} + \ldots + x^2 + x$ met domein $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Welke van de volgende beweringen geldt dan?

1 f neemt alleen waarden aan in $[0,1[$

2 f neemt alle waarden aan in $[0,17]$

3 f wordt nooit groter dan $\frac{1}{2}$

4 f neemt alle reële waarden aan

5 f neemt alle positieve waarden aan

$$f(x) = x^{17} + x^{16} + x^{15} + \ldots + x^2 + x \qquad \text{dom } f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Tussen 0 en $\frac{1}{2}$ is de functie f stijgend.

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{18} - 1}{\frac{-1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \approx 1$$

MR, $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = u_n \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

→ *Antwoord 1*

Opdracht 29 bladzijde 41

Hieronder vind je een overzicht van de geziene ontbindingstechnieken.

Om een veelterm te ontbinden in factoren, kun je de volgende methodes volgen.

- Zonder alle gemeenschappelijke factoren af.
- Maak gebruik van de formules voor merkwaardige producten:

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$
$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

- Maak gebruik van de formule voor het ontbinden van een drieterm van de tweede graad:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{als} \quad D \geqslant 0 \quad \text{met} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

- Neem termen samen zodat een gemeenschappelijke factor voorop kan.
- Bepaal delers van de vorm $x - a$.

Ontbind met deze methodes $f(x)$ in factoren met een zo laag mogelijke graad.

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 + 4x + 3) \\ &= x(x+1)(x+3) \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} S &= -4 \\ P &= 3 \end{aligned}\right\} \ -1 \text{ en } -3$$

2 $f(x) = x^6 - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

3 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

stel $x^2 = t$, dan is

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} S &= 4 \\ P &= 3 \end{aligned}\right\} \ 1 \text{ en } 3$$

$t = 1$ of $t = 3$

$x = \pm 1$ of $x = \pm\sqrt{3}$

$f(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

4 $f(x) = 2x^4 - 32$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,(x^4 - 16) \\ &= 2\,(x^2 - 4)\,(x^2 + 4) \\ &= 2\,(x - 2)\,(x + 2)\,(x^2 + 4) \end{aligned}$$

5 $f(x) = 4x^6 - x^4 + 4x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4\,(4x^2 - 1) + (4x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 1)\,(x^4 + 1) \\ &= (2x - 1)\,(2x + 1)\,(x^4 + 1) \end{aligned}$$

6 $f(x) = 5x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 10x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x\,(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= 5x\,(x^2\,(x - 2) - (x - 2)) \\ &= 5x\,(x - 2)\,(x^2 - 1) \\ &= 5x\,(x - 2)\,(x - 1)\,(x + 1) \end{aligned}$$

7 $f(x) = 2x^2 + x - 6$

$$D = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,\left(x - \frac{3}{2}\right)\,(x + 2) \\ &= (2x - 3)\,(x + 2) \end{aligned}$$

8 $f(x) = 4x^6 - 9x^4 - 4x^2 + 9$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4\,(4x^2 - 9) - (4x^2 - 9) \\ &= (4x^2 - 9)\,(x^4 - 1) \\ &= (2x - 3)\,(2x + 3)\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1) \end{aligned}$$

9 $f(x) = -x^3 + x^2 + 14x - 24$

Tabel, nulpunten: -4, 2, 3

$$f(x) = -\,(x + 4)\,(x - 2)\,(x - 3)$$

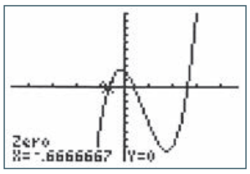
10 $f(x) = 27x^3 + 8$

$f(x) = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$

Opdracht 30 bladzijde 42

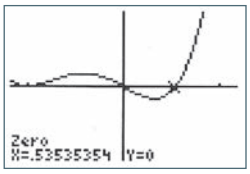
Als je er mag van uitgaan dat de nulpunten van de onderstaande functies geen irrationale getallen zijn, welke zijn dan naar alle waarschijnlijkheid de exacte waarden van de aangeduide nulpunten?

1



$-0{,}666... \Rightarrow -\dfrac{2}{3}$

2

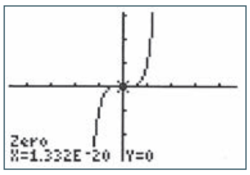


$0{,}535353...$

$$\begin{aligned} 100q &= 53{,}5353... \\ - \quad q &= 0{,}5353... \\ \hline 99q &= 53 \\ q &= \frac{53}{99} \end{aligned}$$

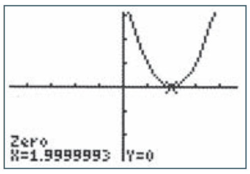
$\Rightarrow \dfrac{53}{99}$

3



0

4



2

DEN5A16H_H1.indd 40 14/08/13 13:19

Opdracht 31 bladzijde 42

Bepaal exact de nulpunten van de veeltermfuncties met gegeven voorschrift.

1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

$f(x) = x(x^2 - 2x - 8)$

$x = 0$ of $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} S = 2 \\ P = -8 \end{array}\right\} 4 \text{ en } -2$$

Nulpunten: 0, 4, -2

2 $f(x) = x^4 - 4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x^3 - 4x^2 + \sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\right) \\ &= x\left(x^2(x-4) + \sqrt{2}(x-4)\right) \\ &= x(x-4)\left(x^2 + \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Nulpunten: 0, 4

3 $f(x) = 20x^3 + 19x^2 - 2x - 1$

Tabel, nulpunt: -1

	20	19	-2	-1
-1		-20	1	1
	20	-1	-1	0

$(x + 1)(20x^2 - x - 1) = 0$

$x + 1 = 0$ of $20x^2 - x - 1 = 0$

$D = 81$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{40} \begin{cases} \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{8}{40} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Nulpunten: $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$

4 $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

Tabel, nulpunten: -5, -3, 1

Nulpunten: -5, -3, 1

5 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

$(x - 1)(x - 2)(2x + 1) = 0$

Nulpunten: $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$

Tabel, nulpunten: 1, 2

	2	-5	1	2
1		2	-3	-2
	2	-3	-2	0
2		4	2	
	2	1	0	

6 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 8$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x + 1) - 8(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - 8) \\ &= (x + 1)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Nulpunten: $-1,\ 2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$

7 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

$(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x + 1) = 0$

Nulpunten: $-3,\ -1,\ 2$

Tabel, nulpunten: −3, −1, 2

	1	3	-3	-11	-6
-3		-3	0	9	6
	1	0	-3	-2	0
-1		-1	1	2	
	1	-1	-2	0	
2		2	2		
	1	1	0		

8 $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24$

$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x^2 + 4) = 0$

Nulpunten: $-2,\ 1,\ 3$

Tabel, nulpunten: −2, 1, 3

	1	-2	-1	-2	-20	24
-2		-2	8	-14	32	-24
	1	-4	7	-16	12	0
1		1	-3	4	12	
	1	-3	4	-12	0	
3		3	0	12		
	1	0	4	0		

9 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 48x - 16$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(3x + 1) - 16(3x + 1) \\ &= (3x + 1)(x^2 - 16) \\ &= (3x + 1)(x - 4)(x + 4) \end{aligned}$$

Nulpunten: $-\frac{1}{3},\ 4,\ -4$

10 $f(x) = 15x^3 - x^2 - 114x + 72$

$15x^3 - x^2 - 114x + 72 = 0$

Tabel, nulpunt: -3

	15	-1	-114	72
-3		-45	138	-72
	15	-46	24	0

$(x + 3)(15x^2 - 46x + 24) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ of $15x^2 - 46x + 24 = 0$

$D = 676 = 26^2$

$$x_{1,2} = \frac{46 \pm 26}{30}$$

$\frac{12}{5}$

$\frac{2}{3}$

Nulpunten: $-3, \frac{12}{5}, \frac{2}{3}$

11 $f(x) = 9x^4 + 18x^3 + 29x^2 + 20x + 4$

$9x^4 + 18x^3 + 29x^2 + 20x + 4 = 0$

Via grafiek of tabel $\left(\text{stapgrootte } \frac{1}{3}\right)$: $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

	9	18	29	20	4
$-\frac{2}{3}$		-6	-8	-14	-4
	9	12	21	6	0
$-\frac{1}{3}$		-3	-3	-6	
	9	9	18	0	

$9(x^2 + x + 2) = 0$

$D < 0$

Nulpunten : $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

12 $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

$f(x) = 2x^2(3x - 2) + (3x - 2)$

$= (3x - 2)(2x^2 + 1)$

Nulpunt: $\frac{2}{3}$

13 $f(x) = 10x^4 + 9x^3 + 17x^2 - 4x - 4$

$10x^4 + 9x^3 + 17x^2 - 4x = 0$

Tabel, nulpunt: $\frac{1}{2}$

grafiek : $\frac{1}{2}$, $-0{,}4 = -\frac{2}{5}$

	10	9	17	-4	-4
$\frac{1}{2}$		5	7	12	4
	10	14	24	8	0
$-\frac{2}{5}$		-4	-4	-8	
	10	10	20	0	

$10\,(x^2 + x + 2) = 0$

$D < 0$

Nulpunt: $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$

14 $f(x) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

$f(x) = (3x + 1)^3$

Nulpunt: $-\frac{1}{3}$

15 $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 30x + 25$

$4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 30x + 25 = 0$

Tabel, nulpunt: 1

Grafiek : 1, $-\frac{5}{2}$

	4	12	-11	-30	25
1		4	16	5	-25
	4	16	5	-25	0
$-\frac{5}{2}$		-10	-15	25	
	4	6	-10	0	

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$D = 49$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$ — 1

$-\frac{5}{2}$

Nulpunten : 1, $-\frac{5}{2}$

Opdracht 32 bladzijde 42

Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en g.

1 $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x + 3$ en $g(x) = 3$

Voor de snijpunten geldt:

$3x^3 - 3x^2 - 6x + 3 = 3$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x\,(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 - x - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} S = 1 \\ P = -2 \end{array}\right\} \; 2 \text{ en } -1$$

De snijpunten zijn: $S_1\,(0, 3)$, $S_2\,(2, 3)$ en $S_3\,(-1, 3)$

2 $f(x) = x^5$ en $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

Voor de snijpunten geldt:

$x^5 = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

$\Leftrightarrow x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

Tabel, nulpunten: − 2, 1

	1	0	-2	2	-3	2
-2		-2	4	-4	4	-2
	1	-2	2	-2	1	0
1		1	-1	1	-1	
	1	-1	1	-1	0	

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2\,(x - 1) + (x - 1) = \underset{\displaystyle 1}{\underset{\downarrow}{(x - 1)}}\;\underset{\displaystyle /}{\underset{\downarrow}{(x^2 + 1)}}$$

De snijpunten zijn: $S_1\,(-2, -32)$ en $S_2\,(1, 1)$

Opdracht 33 bladzijde 42

Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie f van de derde graad met drie nulpunten 0, 5 en 8 en waarbij $f(10) = 17$.

$$f(x) = ax\,(x - 5)\,(x - 8)$$

$$f(10) = 17$$

$$\Rightarrow 17 = 10a \cdot 5 \cdot 2$$

$$17 = 100a$$

$$a = \frac{17}{100}$$

$$f(x) = \frac{17}{100}\,x\,(x - 5)\,(x - 8)$$

Opdracht 34 bladzijde 42

Bepaal een voorschrift van een derdegraadsfunctie die enkel -1 en 1 als nulpunten heeft.

Voorbeelden: $f(x) = (x + 1)^2\,(x - 1)$

$f(x) = (x + 1)\,(x - 1)^2$

Opdracht 35 bladzijde 42

Bepaal een voorschrift van een vijfdegraadsfunctie die enkel 2 als nulpunt heeft.

Voorbeelden: $f(x) = (x - 2)^5$

$f(x) = (x - 2)\,(x^4 + 1)$

Opdracht 36 bladzijde 42

Bepaal zonder rekentoestel welk functievoorschrift bij de grafiek kan horen.

A $f(x) = 2(x+1)(x-3)$

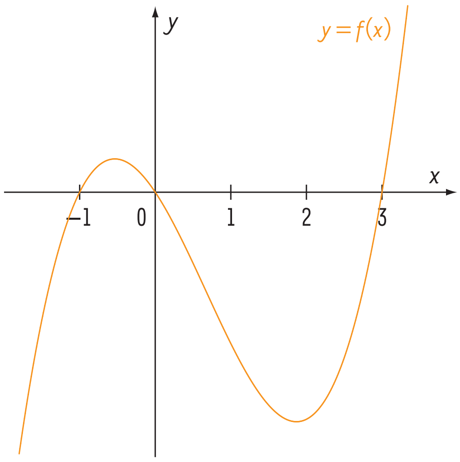
B $f(x) = x(x+1)(x-3)$

C $f(x) = x^2(x+1)(x-3)$

D $f(x) = 2(x-1)(x+3)$

E $f(x) = x(x-1)(x+3)$

F $f(x) = x^2(x-1)(x+3)$



Op de grafiek lezen we de nulpunten – 1, 0 en 3 af.

Het voorschrift bevat de factoren x + 1, x en x – 3.

De nulpunten zijn enkelvoudig want de grafiek snijdt de x-as in de punten (-1, 0) (0, 0) en (3, 0).

Antwoord B is het juiste.

Opdracht 37 bladzijde 42

Bepaal zonder rekentoestel welk functievoorschrift bij de grafiek kan horen.
Er kunnen meerdere oplossingen zijn.

A $f(x) = (x-2)(x-4)$

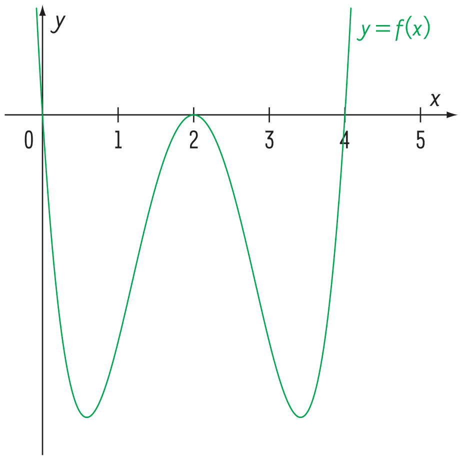
B $f(x) = x(x+2)(x+4)$

C $f(x) = 2x(x-2)(x-4)$

D $f(x) = 3x(x-2)^2(x-4)$

E $f(x) = x(x-2)^2(2x-8)$

F $f(x) = x(x-2)(4x-1)$



We lezen de nulpunten 0, 2 en 4 af. Het nulpunt 2 is een dubbel nulpunt.
Het voorschrift bevat de factoren x, $(x - 2)^2$ en $x - 4$.
Antwoord D en antwoord E zijn juist.

Opdracht 38 bladzijde 44

Bepaal algebraïsch de nulpunten van de volgende veeltermfuncties.

1 $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$$\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

Tabel: -3, 2

	1	-1	-8	12
-3		-3	12	-12
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nulpunten: -3, 2

2 $f(x) = x^4 - 2{,}5x^3 - 7{,}5x^2 + 7{,}5x + 9$

$$x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 15x + 18 = 0$$

Tabel: -2

Grafiek : $-2,\ \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -5 & -15 & 15 & 18 \\
-2 & & -4 & 18 & -6 & -18 \\
\hline
 & 2 & -9 & 3 & 9 & 0 \\
\frac{3}{2} & & 3 & -9 & -9 & \\
\hline
 & 2 & -6 & -6 & 0 &
\end{array}$$

$x^2 - 3x - 3 = 0$

$D = 21$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Nulpunten : $-2,\ \frac{3}{2},\ \frac{3 - \sqrt{21}}{2},\ \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

Opdracht 39 bladzijde 44

Het aantal oplossingen in $\mathbb{R}$ van de vergelijking $|1 - x^2| = 1 - x$ is gelijk aan

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO, eerste ronde 1999)

1) $1 - x^2 \geqslant 0$: $1 - x^2 = 1 - x$

$(1 - x)(1 + x) - (1 - x) = 0$

$(1 - x)(1 + x - 1) = 0$

$x(1 - x) = 0$

$x = 0$ of $x = 1$

2) $1 - x^2 \leqslant 0$: $-1 + x^2 = 1 - x$

$(x - 1)(x + 1) - (1 - x) = 0$

$(x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0$

$(x - 1)(x + 1 + 1) = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1$ of $x = -2$

3 oplossingen: 0, 1, −2, dus antwoord D is juist.

Opdracht 40 bladzijde 44

Los algebraïsch op.

1 $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3x^3}_{2x^3 + x^3} + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + (x + 1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^3 = -2x^3$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{-2}\, x$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt[3]{2}\, x$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt[3]{2}\, x = -1$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

2 $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^3 = -3$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-3}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{3}$$

Opdracht 41 bladzijde 44

Welke van de volgende beweringen over de veeltermfunctie $f(x) = 6acx^3 + 4bcx^2 + 9adx + 6bd$ is **niet** juist?

$$\begin{aligned} f(x) &= 6acx^3 + 4bcx^2 + 9adx + 6bd \\ &= 2cx^2\,(3ax + 2b) + 3d\,(3ax + 2b) \\ &= (3ax + 2b)\,(2cx^2 + 3d) \end{aligned}$$

A Als $a = 0$ en $bcd \neq 0$ dan heeft de veeltermfunctie hoogstens 2 nulpunten.

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = 2b\,(2cx^2 + 3d) = 0$$

$$\underset{bcd \neq 0}{\Rightarrow} x^2 = -\frac{3d}{c}$$

als $-\frac{3d}{c} > 0$, dan zijn er 2 nulpunten

en als $-\frac{3d}{c} < 0$ zijn er geen nulpunten.

Juiste uitspraak.

B Als $2c + 3d = 0$ dan heeft de veeltermfunctie -1 en 1 als nulpunten.

$$2c + 3d = 0 \Rightarrow 2c = -3d$$

$$\Rightarrow (3ax + 2b)\,\underbrace{(-3dx^2 + 3d)}_{3d\,(1 - x^2)} = 0$$

$\rightarrow$ -1 en 1 zijn nulpunten.

Juiste uitspraak.

C Als $cd > 0$ dan heeft de veeltermfunctie 2 tegengestelde nulpunten.

$cd > 0 \qquad 2cx^2 + 3d = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{3d}{2c} < 0 \quad \rightarrow \text{geen nulpunten.}$$

Antwoord C is een foutieve uitspraak.

D Als $a = 2$ dan heeft de veeltermfunctie $-\frac{b}{3}$ als nulpunt.

$a = 2 \quad \rightarrow \quad 6x + 2b = 0$

$$x = -\frac{1}{3}b$$

D is een juiste uitspraak.

$\Rightarrow$ uitspraak C is niet juist

Opdracht 42 bladzijde 44

Hoeveel uitspraken over de reële nulpunten van $x^7 + x + 1$ zijn juist?

1 Ze zijn alle positief.

2 Minstens één is positief.

3 Ze zijn alle negatief.

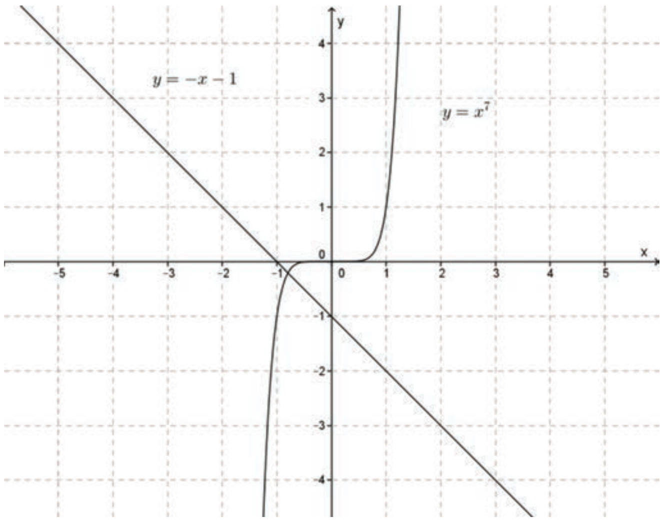
4 Ze zijn alle begrepen tussen -1 en 0.

5 Er zijn precies vier verschillende reële nulpunten.

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

$$x^7 + x + 1 = 0$$
$$x^7 = -x - 1$$

Grafiek:



Er is één nulpunt tussen -1 en 0.

Uitspraak 3 en uitspraak 4 zijn juist.

Dus B

Opdracht 43 bladzijde 45

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $(3x-4)(8x^2-22x+15)>0$

2 $(-7x^2+x)(7x^2-8x+1)<0$

3 $6x^3-5x^2-12x-4\leqslant 0$

4 $x^3-2x^2-5x+7\geqslant 2x-1$

5 $x^2(x+3)\geqslant 4$

6 $x^4+4x^3-x^2-16x-12\geqslant 0$

7 $x^4-6x^3+10x^2-6x+9\leqslant 0$

8 $36x^4-12x^3-11x^2+2x+1\geqslant 0$

9 $x^4+3x^2<7x^3$

10 $x^4-10x^2<-24-x(x^2-4)$

1) $(3x - 4)(8x^2 - 22x + 15) > 0$

* nulpunten: $3x - 4 = 0$ of $8x^2 - 22x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ $\qquad D = 4$

$x_{1,2} = \frac{22 \pm 2}{16}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ of $x = \frac{3}{2}$ of $x = \frac{5}{4}$

* tekentabel

x		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$3x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$8x^2 - 22x + 15$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(3x - 4)(8x^2 - 22x + 15)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $(3x - 4)(8x^2 - 22x + 15) > 0$ als $\frac{5}{4} < x < \frac{4}{3}$ of $x > \frac{3}{2}$

2) $(-7x^2 + x)(7x^2 - 8x + 1) < 0$

* nulpunten: $-7x^2 + x = 0$ of $7x^2 - 8x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x(-7x + 1) = 0$ $\qquad D = 36$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{14}$ $\quad 1$ $\quad \frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{1}{7}$ of $x = 1$

* tekentabel

x		0		$\frac{1}{7}$		1	
$-7x^2 + x$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$7x^2 - 8x + 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(-7x^2 + x)(7x^2 - 8x + 1)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

* $(-7x^2 + x)(7x^2 - 8x + 1) < 0$ als $x < 0$ of $x > 1$

3) $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \leqslant 0$

* nulpunten: $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 = 0$

Tabel: 2

	6	-5	-12	-4
2		12	14	4
	6	7	2	0

$x - 2 = 0$ of $6x^2 + 7x + 2 = 0$

$D = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{12} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{2}{3}$

* tekentabel

x		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		2	
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$6x^2 + 7x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 2)(6x^2 + 7x + 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \leqslant 0$ als $x \leqslant -\frac{2}{3}$ of $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$

4) $x^3 - 2x^2 - 5x + 7 \geqslant 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 7 - 2x + 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 7x + 8 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 - 2x^2 - 7x + 8 = 0$

Tabel 1:

	1	-2	-7	8
1		1	-1	-8
	1	-1	-8	0

$x - 1 = 0$ of $x^2 - x - 8 = 0$

$D = 33$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2} \approx -2{,}37 \\ \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2} \approx -3{,}37 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = \dfrac{1 - \sqrt{33}}{2}$ of $x = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2}$

* tekentabel

x		$\frac{1-\sqrt{33}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{33}}{2}$	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - x - 8$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x^2 - x - 8)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

* $x^3 - 2x^2 - 5x + 7 \geqslant 2x - 1$ als $\dfrac{1 - \sqrt{33}}{2} \leqslant x \leqslant 1$

of $x \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{33}}{2}$

5) $x^2 (x + 3) \geqslant 4$
$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Tabel: -2, 1

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 1$ of $x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 1$

* tekentabel

x		-2		1	
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x^3 + 3x^2 - 4$	-	$\underline{0}$	-	$\underline{0}$	$\underline{+}$

* $x^2 (x + 3) \geqslant 4$ als $x = -2$ of $x \geqslant 1$

6) $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geqslant 0$

* nulpunten:

$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$ Tabel: -3, -2, -1, 2
$\Leftrightarrow (x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 2) = 0$

* tekentabel

x		-3		-2		-1		2	
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x + 1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 2)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

* $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geqslant 0$
als $x \leqslant -3$ of $-2 \leqslant x \leqslant -1$ of $x \geqslant 2$

7) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

* nulpunten:

$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$ Tabel: 3

	1	-6	10	-6	9
3		3	-9	3	-9
	1	-3	1	-3	0

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 (x - 3) + (x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$

* tekentabel:

x		3	
$(x - 3)^2$	+	0	+
$x^2 + 1$	+	+	+
$(x - 3)^2 (x^2 + 1)$	+	0	+

* $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$ als $x = 3$

8) $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$

* nulpunten:

$36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 = 0$ grafiek : $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

	36	-12	-11	2	1
$\frac{1}{2}$		18	3	-4	-1
	36	6	-8	-2	0
$-\frac{1}{3}$		-12	2	2	
	36	-6	-6	0	

$6x^2 - x - 1 = 0$

$D = 25$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

* tekentabel:

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$x - \frac{1}{2}$	-	-	-	0	+
$x + \frac{1}{3}$	-	0	+	+	+
$36x^2 - 6x - 6$	+	0	-	0	+
$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(36x^2 - 6x - 6\right)$	+	0	+	0	+

* $36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$ als $-\infty < x < +\infty$

9) $x^4 + 3x^2 < 7x^3$

$\Leftrightarrow x^4 - 7x^3 + 3x^2 < 0$

* nulpunten:

$x^2 (x^2 - 7x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 - 7x + 3 = 0$

(dubbel) $\quad D = 37$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

* tekentabel:

x		0		$\frac{7-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{7+\sqrt{37}}{2}$	
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 7x + 3$	+	+	+	0	−	0	+
$x^2 (x^2 - 7x + 3)$	+	0	+	0	−	0	+

* $x^4 + 3x^2 < 7x^3$ als $\frac{7-\sqrt{37}}{2} < x < \frac{7+\sqrt{37}}{2}$

10) $x^4 - 10x^2 < -24 - x (x^2 - 4)$

$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 < -24 - x^3 + 4x$

$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 < 0$

* nulpunten:

$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24 = 0$ $\qquad$ Tabel: −3, −2, 2

	1	1	−10	−4	24
−3		−3	6	12	−24
	1	−2	−4	8	0
−2		−2	8	−8	
	1	−4	4	0	
2		2	−4		
	1	−2	0		

$\rightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

* tekentabel:

x		-3		-2		2	
$x + 3$	−	0	+	+	+	+	+
$x + 2$	−	−	−	0	+	+	+
$(x - 2)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$(x + 3)(x + 2)(x - 2)^2$	+	0	−	0	+	0	+

* $x^4 - 10x^2 < -24 - x (x^2 - 4)$ als $-3 < x < -2$

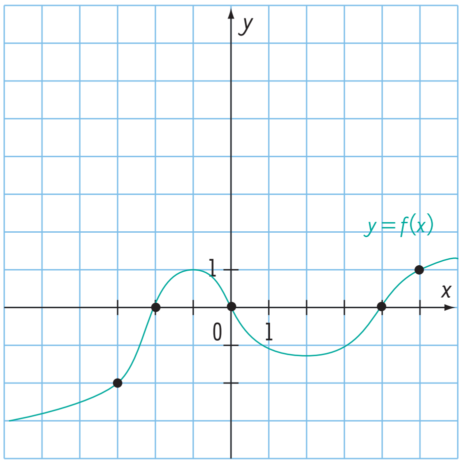
Opdracht 44 bladzijde 45

Teken de grafiek van een functie die voldoet aan de gegeven voorwaarden.

1 $f(5) = 1$, $f(-3) = -2$ en als tekentabel

x		-2		0		4	
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

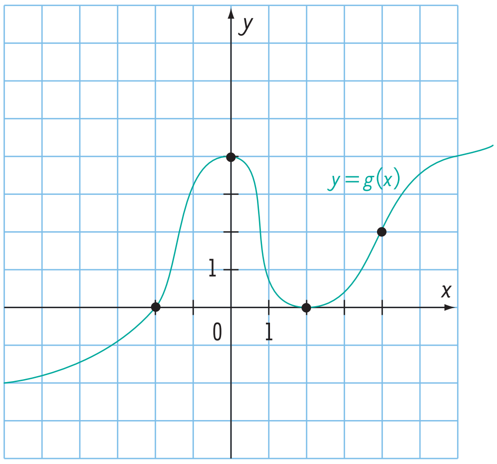
Voorbeeld:



2 $g(0) = 4$, $g(4) = 2$ en als tekentabel

x		-2		2	
y	$-$	0	$+$	0	$+$

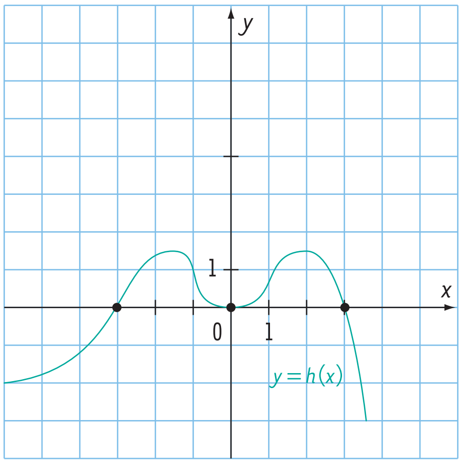
Voorbeeld:



3 Een functie h met als tekentabel

x		-3		0		3	
y	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Voorbeeld:



Opdracht 45 bladzijde 45

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $f(x) > g(x)$ met $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1$ en $g(x) = x + 3$

$f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1 > x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - x + 1 - x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 18x - 18 > 0$

* nulpunten:

$2\ (x^3 + x^2 - 9x - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x^2\ (x + 1) - 9\ (x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)\ (x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $x = -3$ of $x = 3$

* tekentabel:

x		-3		-1		3	
2	+	+	+	+	+	+	+
$x+1$	−	−	−	0	+	+	+
x^2-9	+	0	−	−	−	0	+
$2(x+1)(x^2-9)$	−	0	+	0	−	0	+

* $f(x) > g(x)$ als $-3 < x < -1$ of $x > 3$

2 $f(x) \leqslant g(x)$ met $f(x) = x^3 - x + 1$ en $g(x) = 2x - 1$

$f(x) \leqslant g(x)$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 1 \leqslant 2x - 1$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 1 - 2x + 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \leqslant 0$

* nulpunten:

$x^3 - 3x + 2 = 0$ Tabel: -2, 1

	1	0	−3	2
−2		−2	4	−2
	1	−2	1	0
1		1	−1	
	1	−1	0	

$(x+2)(x-1)(x-1) = 0$

$(x+2)(x-1)^2 = 0$

* tekentabel:

x		-2		1	
$x+2$	−	0	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+
$(x+2)(x-1)^2$	−	0	+	0	+

* $f(x) \leqslant g(x)$ als $x \leqslant -2$ of $x = 1$

Opdracht 46 bladzijde 45

Voor welke waarden van *x* ligt de grafiek van *f* boven die van *g*?

1 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$ met $g(x) = -2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3) > -2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3) + (x-1)(2x+5) > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+3+2x+5) > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+6x+8) > 0$

* nulpunten:

$x - 1 = 0$ of $x^2 + 6x + 8 = 0$

$\left.\begin{array}{l} S = -6 \\ P = 8 \end{array}\right\} -4 \text{ en } -2$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -4$ of $x = -2$

* tekentabel:

x		-4		-2		1	
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
$x^2 + 6x + 8$	+	0	-	0	+	+	+
$(x-1)(x^2+6x+8)$	-	0	+	0	-	0	+

* $f(x) > g(x)$ als $-4 < x < -2$ of $x > 1$

2 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$ en $g(x) = 3x^3 - 3x^2$

$f(x) > g(x)$

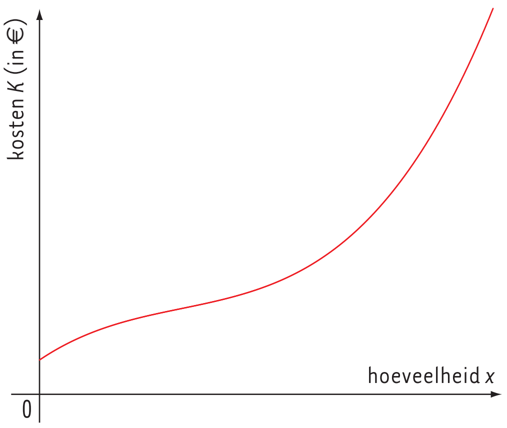
$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 > 3x^3 - 3x^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1 - 3x^3 + 3x^2 > 0$

$x^4 + x^2 + 1 > 0$: is waar voor elk reëel getal

$f(x) > g(x)$ als $-\infty < x < +\infty$

Opdracht 47 bladzijde 46
Kostenfuncties zijn vaak 'S-vormig'. Bij een kleine productie liggen de kosten relatief hoog omdat de productiecapaciteit niet ten volle benut wordt. Bij toenemende productie groeien de totale kosten eerst trager en daarna weer sneller, wegens o.a. hogere lonen voor overuren en nachtarbeid. 'S-vormige' krommen worden meestal benaderd door derdegraadsfuncties.

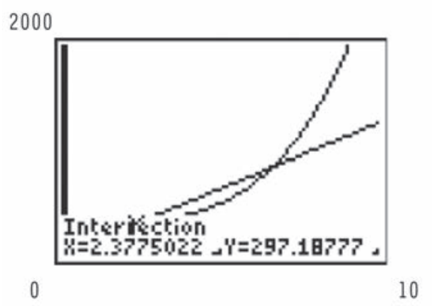


Een firma produceert potloden. De totale productiekosten $K(x)$ per tijdseenheid (in €) zijn een functie van de geproduceerde hoeveelheid x (per 1000 stuks).
Deze functie heeft als voorschrift $K(x) = 5x^3 - 37{,}5x^2 + 135x + 121$. De potloden worden verkocht aan € 125 per 1000 stuks. De omzet is dus $O(x) = 125x$.

1 Plot de kostenfunctie en de omzetfunctie in één venster.

$K(x) = 5x^3 - 37{,}5x^2 + 135x + 121$

$O(x) = 125x$



2 Bij welke productie wordt er winst gemaakt?

Er wordt winst gemaakt als $O(x) > K(x)$.

Grafisch: $O(x) = K(x)$

$\Rightarrow x \approx 2377{,}5$ en $x \approx 6652{,}6$

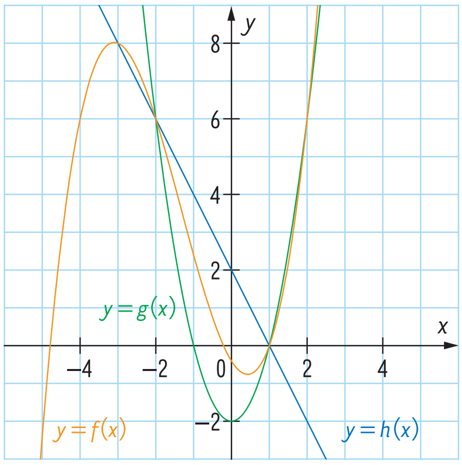
Er wordt winst gemaakt bij een productie tussen 2378 en 6652 stuks.

Opdracht 48 bladzijde 47

Voor welke waarden van x geldt: $h(x) \geqslant f(x) \geqslant g(x)$?

De bijbehorende functievoorschriften zijn:

$f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{8}{5}x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{2}{5}$, $g(x) = 2x^2 - 2$ en $h(x) = -2x + 2$



Grafisch aflezen:

$h(x) \geqslant f(x) \geqslant g(x)$ als $-2 \leqslant x \leqslant 1$

Opdracht 49 bladzijde 47

Bepaal een ongelijkheid van de derde graad met als oplossing

1 $x \leqslant -2$ of $1 \leqslant x \leqslant 3$

x		– 2		1		3	
f(x)	–	0	+	0	–	0	+
of f(x)	+	0	–	0	+	0	–

Voorbeeld: $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \geqslant 0$

of $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leqslant 0$

2 $0 < x < 2$ of $x > 5$

x		0		2		5	
f(x)	−	0	+	0	−	0	+
of f(x)	+	0	−	0	+	0	−

Voorbeeld: $x(x-2)(x-5) > 0$

of $x(x-2)(x-5) < 0$

3 $x \geqslant 1$

x		1	
f(x)	−	0	+
of f(x)	+	0	−

Voorbeeld: $(x-1)^3 \geqslant 0$

of $(x-1)^3 \leqslant 0$

Opdracht 50 bladzijde 47

De ongelijkheid $(x-a)(x-b)(x-c)^2 > 0$ heeft als oplossing $x < -2$ of $-2 < x < 2$ of $x > 3$.

Bepaal a, b en c.

$(x-a)(x-b)(x-c)^2 > 0$

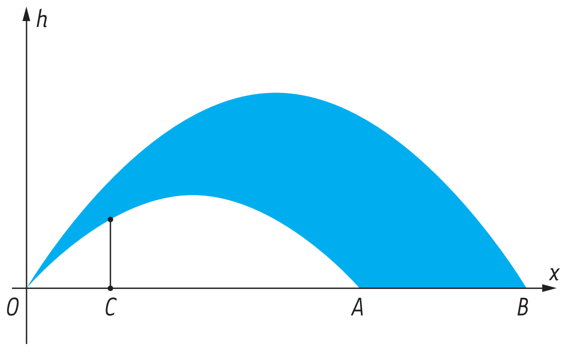
		c		b		a	
				a		b	
x		−2		2		3	
f(x)	+	0	+	0	−	0	+

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2$

of $a = 3,\ b = 2,\ c = -2$

Opdracht 51 bladzijde 48

In de volgende figuur staat een schets van een brandweeractie.



Het gedeelte tussen A en B staat in brand met $|AB| = 10$ m. A bevindt zich op 20 m van O. In C, gelegen op 5 m van O, staat een 4 m hoge muur. De waterstraal begint in O en is begrensd door twee parabolen.

1 Stel het functievoorschrift op voor de onderste parabool.

O (0,0), C (5,0), A (20,0), B (30,0)

De lage parabool gaat door de punten (0,0), (20,0) en (5,4):

$y = ax\,(x - 20)$

$4 = 5a\,(-15)$

$a = -\dfrac{4}{75}$

Het functievoorschrift is $y = -\dfrac{4}{75}x\,(x - 20)$

$= -\dfrac{4}{75}x^2 + \dfrac{16}{15}x$

2 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

dom f = [0,20]

3 Tussen welke grenzen liggen de zinvolle functiewaarden?

ber f $= \left[0, \dfrac{16}{3}\right]$

max: $f(10) = -\dfrac{4}{75} \cdot 100 + \dfrac{16}{15} \cdot 10 = \dfrac{16}{3}$

4 Op welke afstanden van *O* bevindt deze waterstraal zich minstens 4 m boven de grond? En 5 m boven de grond? Controleer dit met je rekentoestel.

$$f(x) \geqslant 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x \geqslant 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x - 4 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 80x - 300 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 \leqslant 0$$

x		5		15	
$x^2 - 20x + 75$	+	0	-	0	+

De waterstraal bevindt zich minstens 4 m boven de grond voor afstanden tussen 5 en 15 meter van 0.

$$f(x) \geqslant 5$$

$$-\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x - 5 \geqslant 0$$

$$-4x^2 + 80x - 375 \geqslant 0$$

x		7,5		12,5	
$-4x^2 + 80x - 375$	-	0	+	0	-

De waterstraal bevindt zich op minstens 5 m van de grond voor afstanden tussen 7,5 en 12,5 meter van 0.

5 Welke zijn mogelijke functievoorschriften voor de 'hoge' parabool? Controleer dit met je rekentoestel.

Voor de hoge parabool geldt:

$y = ax\,(x - 30)$

Deze parabool mag de kleine parabool enkel snijden in 0.

$$-\frac{4}{75}x^2 + \frac{16}{15}x = ax^2 - 30ax$$

$$\left(a + \frac{4}{75}\right)x^2 - \left(\frac{16}{15} + 30a\right)x = 0$$

$$x\;\underbrace{\left(\left(a + \frac{4}{75}\right)x - \left(\frac{16}{15} + 30a\right)\right)}_{} = 0$$

mag enkel 0 als oplossing hebben,

dus moet $\dfrac{16}{15} + 30a = 0$

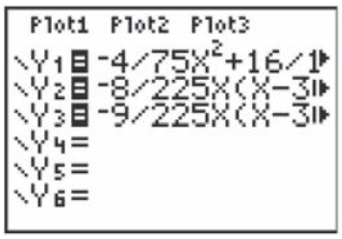
$$a = -\frac{16}{15 \cdot 30}$$

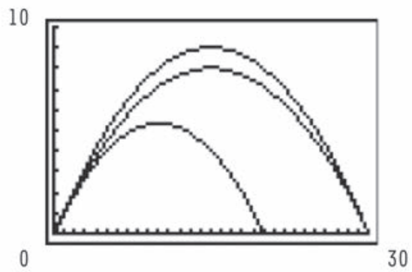
$$a = -\frac{8}{225}$$

Grafisch zien we dat de parabolen met voorschrift

$y = a\,x\,(x - 30)$ met $a \leqslant -\dfrac{8}{225}$

beantwoorden aan de opgave.





6 Wat is het zinvolle domein van deze functie?

dom $f = [0,30]$

7 Wat is het bijbehorend bereik van deze functie?

ber $f = [0, -225a]$ met $a \leqslant -\dfrac{8}{225}$

$y_{top} = f(15)$

$= a \cdot 15\ (-15)$

$= -225a$

Opdracht 52 bladzijde 48

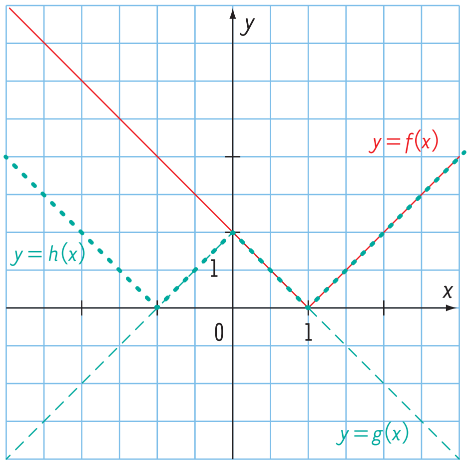
Beschouw de functies met voorschrift
$f(x) = |1 - x|$, $g(x) = 1 - |x|$ en $h(x) = |1 - |x||$.

Dan geldt, voor alle x in $\mathbb{R}$:

A $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ **B** $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$ **C** $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

D $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ **E** $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$

(Bron © VWO, eerste ronde 1998)



Antwoord B

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{als } 1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{als } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{als } x \geqslant 0 \\ 1 + x & \text{als } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= |1 - x| && \text{als } x \geqslant 0 \\ &= 1 - x && \text{als } \underbrace{x \geqslant 0 \text{ en } 1 - x \geqslant 0}_{0 \leqslant x \leqslant 1} \\ &= x - 1 && \text{als } \underbrace{x \geqslant 0 \text{ en } 1 - x \leqslant 0}_{x \geqslant 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= |1 + x| && \text{als } x \leqslant 0 \\ &= 1 + x && \text{als } \underbrace{x \leqslant 0 \text{ en } 1 + x \geqslant 0}_{-1 \leqslant x \leqslant 0} \\ &= -1 - x && \text{als } \underbrace{x \leqslant 0 \text{ en } 1 + x \leqslant 0}_{x \leqslant -1} \end{aligned}$$

Opdracht 53 bladzijde 48

Hoeveel positieve natuurlijke getallen voldoen aan de ongelijkheid

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}\cdots\left(x-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0\,?$$

A 503 **B** 999 **C** 1005 **D** 1006 **E** 1995

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}\ldots\left(x-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0$$

x	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{11}{2}$ $\frac{13}{2}$ $\frac{15}{2}$ ...	pos. nat. getallen
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}$	- 0 +	0
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3}$	+ 0 - 0 +	1
...	- 0 + 0 - 0 +	1
...	+ 0 - 0 + 0 - 0 +	2
	- 0 + 0 - 0 + 0 - 0 +	2
	+ 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 +	3
	- 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 +	3
	+ 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 +	4
		...
		...

macht	pos. nat. getallen	
1	0	
3	1	$8 \cdot 1 \rightarrow 1$
5	1	
7	2	$16 = 8 \cdot 2 \rightarrow 2$
9	2	
11	3	$24 = 8 \cdot 3 \rightarrow 3$
13	3	
15	4	$32 = 8 \cdot 4 \rightarrow 4$
17	4	
19	5	
...	...	

$$\left.\begin{array}{l}4019\\4021\end{array}\right\}\ 8040 = 8 \cdot \boxed{1005}$$

4021

4023

Antwoord C

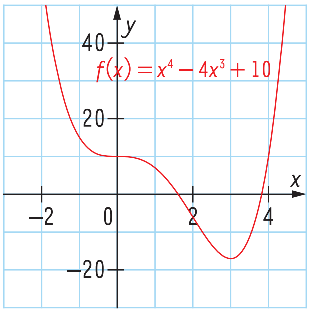
$\}$ 8044 niet deelbaar door 8

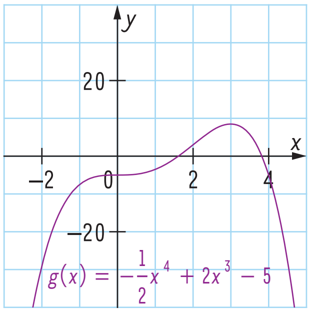
Opdracht 54 bladzijde 49

Gegeven is de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Op de grafiek van f passen we de volgende transformaties toe: een verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en een spiegeling om de x-as.

Ga na dat het voorschrift van de bijbehorende functie $g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5$ is.





$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5$

Opdracht 55 bladzijde 49
Op de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^3 - x$ passen we achtereenvolgens de volgende transformaties toe:

- een verticale uitrekking met factor 2,
- een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1,1)$.

Bepaal het voorschrift van de nieuwe functie g.

$y = x^3 - x$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2x^3 - 2x$

$\downarrow$ verschuiving volgens de vector $\vec{v}(-1,1)$

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^3 - 2(x+1) + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 - 2x - 2 + 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

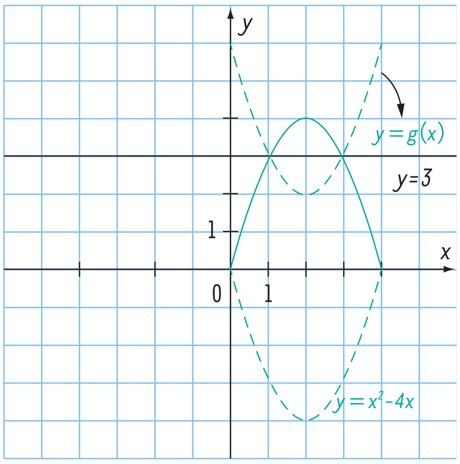
$g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

Opdracht 56 bladzijde 49
Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = -x^2 + 4x$.

Door spiegeling om de rechte met vergelijking $y = 3$ ontstaat de grafiek van een functie g.

Bepaal het voorschrift van g.

$f(x) = -x^2 + 4x$



$g(x) = x^2 - 4x + 6$

nulpunt: 0, 4
top (2, 4)

$y = -x^2 + 4x$

$\downarrow$ spiegelen om de x-as

$y = x^2 - 4x$

$\downarrow$ verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,6)

$y = x^2 - 4x + 6$

Opdracht 57 bladzijde 50
Elke parabool met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ kan door middel van verschuivingen en verticale uitrekkingen afgeleid worden uit de parabool met vergelijking $y = x^2$.

Kan men op dezelfde manier zeggen dat elke derdegraadskromme met vergelijking $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ook door dergelijke transformaties uit de kromme met vergelijking $y = x^3$ afgeleid kan worden?

Indien je antwoord 'ja' is, bewijs dit dan. Is je antwoord 'neen', geef dan een tegenvoorbeeld.

$y = x^3$ $\rightarrow$ 1 nulpunt : 0

$\downarrow$ uitrekking | verschuiving

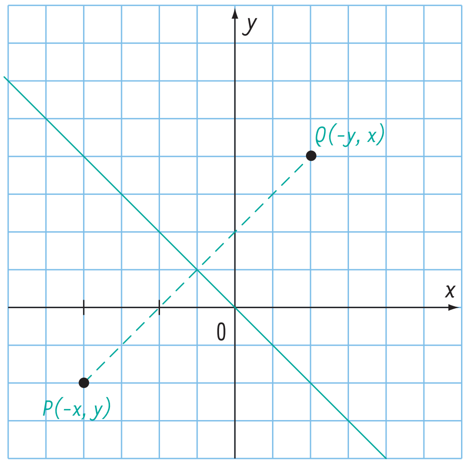
$y = a(x - p)^3 + q$ $\rightarrow$ 1 nulpunt: $\sqrt[3]{-\frac{q}{a}} + p$

maar bijvoorbeeld $y = x^3 - 2x^2 + x$ heeft 2 nulpunten 0 en 1 en kan dus niet afgeleid worden uit $y = x^3$ m.b.v. de transformaties.

Opdracht 58 bladzijde 50
Als P met coördinaat $(-x, y)$ in het derde kwadrant ligt, wat is dan de coördinaat van het spiegelbeeld van P ten opzichte van de bissectrice van het tweede en het vierde kwadrant?

A (x, y) **B** (y, x) **C** $(y, -x)$ **D** $(x, -y)$ **E** $(-y, x)$

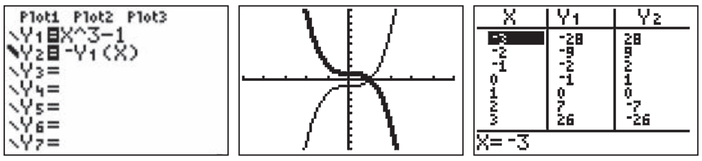
(Bron © VWO, tweede ronde 1997)



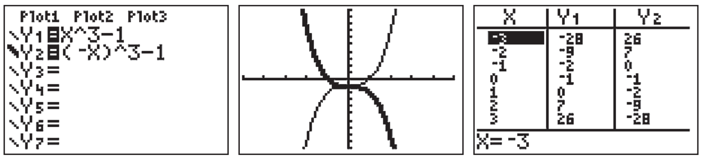
Antwoord: E $(-y, x)$

Opdracht 59 bladzijde 50
Spiegeling om de *y*-as en horizontale uitrekking

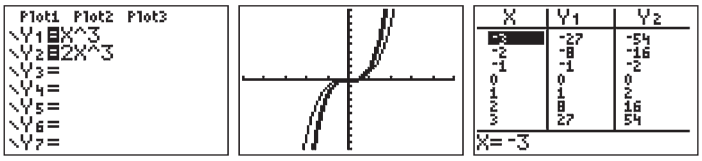
Als de grafiek van de functie $y = f(x)$ gespiegeld wordt om de x-as, verkrijg je de grafiek van de functie $y = -f(x)$.



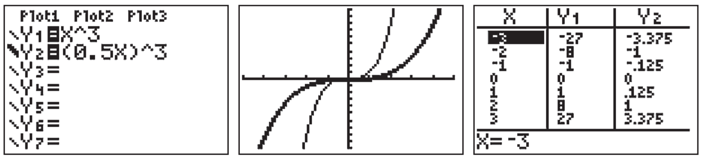
Als de grafiek van de functie $y = f(x)$ gespiegeld wordt om de y-as, verkrijg je de grafiek van de functie $y = f(-x)$.



Als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ verticaal uitrekt met factor k, verkrijg je de grafiek van de functie $y = kf(x)$.

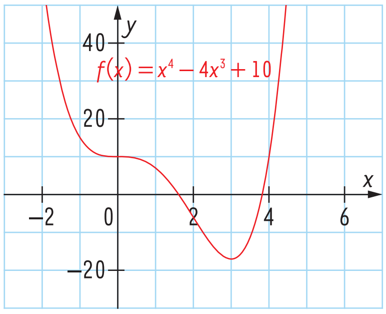


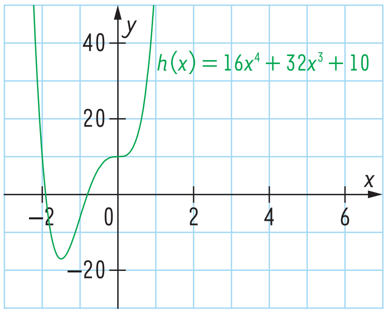
Als je de grafiek van de functie $y = f(x)$ horizontaal uitrekt met factor k, verkrijg je de grafiek van de functie $y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$.



Gegeven is de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Op de grafiek van f passen we de volgende transformaties toe: een horizontale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en een spiegeling om de y-as.
Ga na dat het voorschrift van de bijbehorende functie $h(x) = 16x^4 + 32x^3 + 10$ is.





$y = x^4 - 4x^3 + 10$

$\downarrow$ horizontale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

$y = (2x)^4 - 4(2x)^3 + 10$

$y = 16x^4 - 32x^3 + 10$

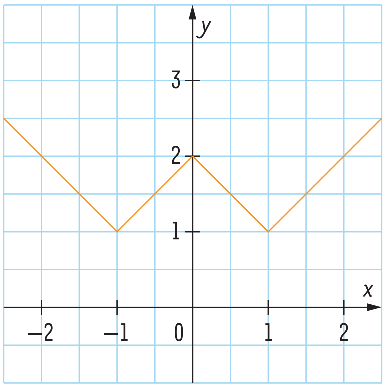
$\downarrow$ spiegeling om de y-as

$y = 16(-x)^4 - 32(-x)^3 + 10$

$y = 16x^4 + 32x^3 + 10$

Opdracht 60 bladzijde 51

Welk voorschrift hoort bij de volgende grafiek?



A $y = |x - 1| + 1$

B $y = ||x| - 1| + 1$

C $y = |x - 1| + |x + 1|$

D $y = ||x| + 1| + 1$

E $y = |x^2 - 1| + 1$

(Bron © VWO, eerste ronde 1995)

$(0,2) \rightarrow$ A, B, C, D, E

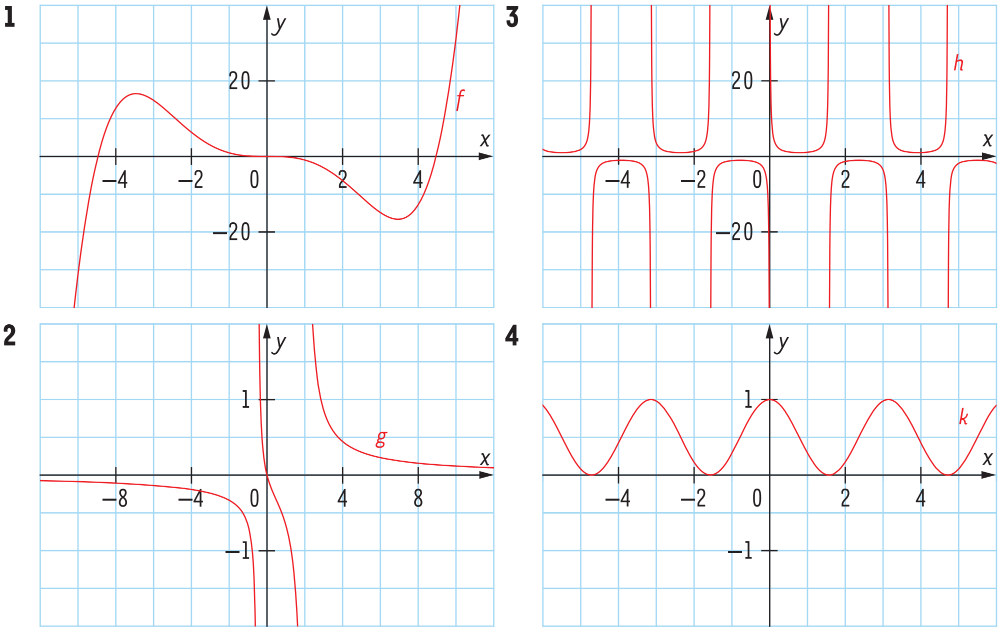
$(1,1) \rightarrow$ A, B, E

$(-1,1) \rightarrow$ B, E

$(2,2) \rightarrow$ B

$\Rightarrow$ B

Opdracht 61 bladzijde 52
De grafieken van f, g, h en k zijn gegeven.
Welke van deze functies zijn even? En welke oneven?



1: oneven **2:** ______ **3: oneven** **4: even**

Opdracht 62 bladzijde 52
Ga algebraïsch na of de volgende functies even, oneven of geen van beide zijn.

1 $f(x) = 3$

$$f(-x) = 3 = f(x)$$

f is even

2 $f(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + 1 \\ &= x^2 + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

3 $f(x) = x^3 + x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f is oneven

4 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 3(-x)^2 - 1 \\ &= x^4 + 3x^2 - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f is even

5 $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1 + 3(-x)^3 - (-x)^5 \\ &= 1 - 3x^3 + x^5 \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

6 $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f is even, noch oneven

Opdracht 63 bladzijde 52

1 Als het punt $A(5,3)$ op de grafiek van een even functie ligt, welk ander punt moet dan ook op de grafiek liggen?

Als A (5,3) op de grafiek ligt, ligt ook B (–5,3) op de grafiek.

2 Als het punt $A(5,3)$ op de grafiek van een oneven functie ligt, welk ander punt moet dan ook op de grafiek liggen?

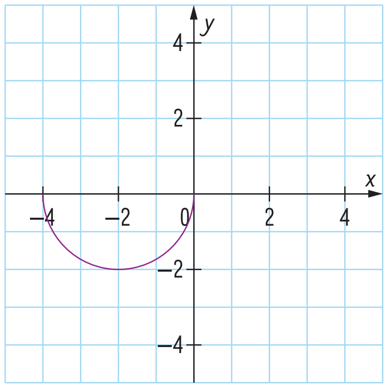
Als A (5,3) op de grafiek ligt, ligt ook B (–5, –3) op de grafiek.

Opdracht 64 bladzijde 53

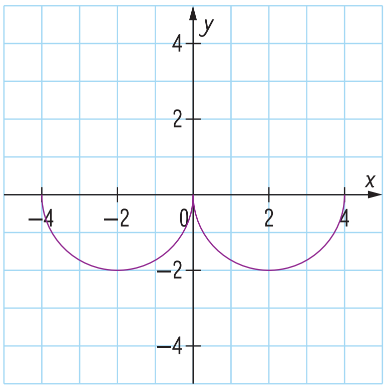
Een functie f heeft als domein $[-4,4]$ en een deel van haar grafiek is getekend.
Vervolledig de grafiek als

1 de functie even is;

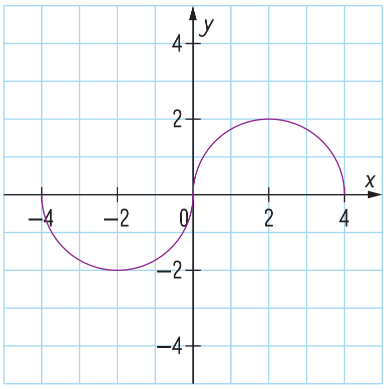
2 de functie oneven is.



1)



2)

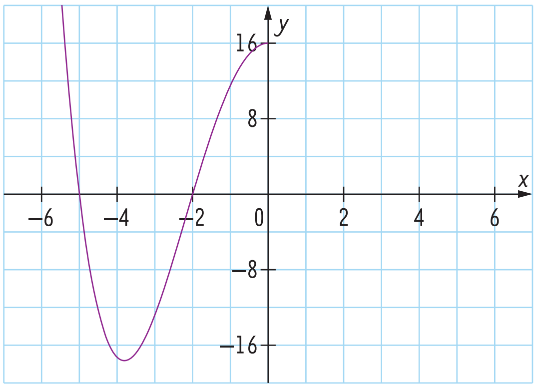


Opdracht 65 bladzijde 53

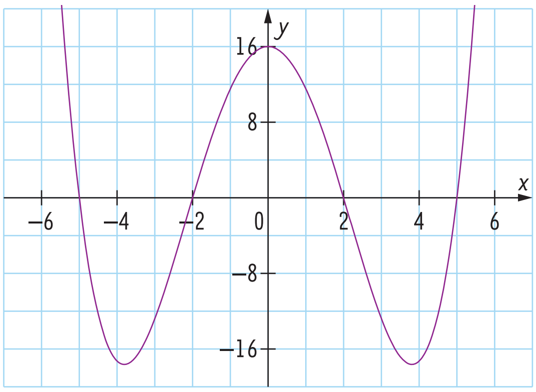
Hiernaast zie je de onvolledige grafiek van een even vierdegraadsfunctie.

1 Vervolledig deze grafiek.

2 Bepaal het voorschrift van deze functie.



1)



2)

$f(x) = a\,(x + 5)\,(x + 2)\,(x - 2)\,(x - 5)$

$16 = a \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-5)$

$16 = 100a$

$\frac{4}{25} = a$

$f(x) = \frac{4}{25}\,(x^2 - 4)\,(x^2 - 25)$

Opdracht 66 bladzijde 53

1 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ met $a \neq 0$ oneven is als en slechts als $b = d = 0$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d$

$\Leftrightarrow\ b = d = 0$

2 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ met $a \neq 0$ even is als en slechts als $b = d = 0$.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\Leftrightarrow \quad b = d = 0$

3 Verklaar nu vanwaar de benaming 'even' en 'oneven' functie vermoedelijk komt.

even $\rightarrow$ even exponenten

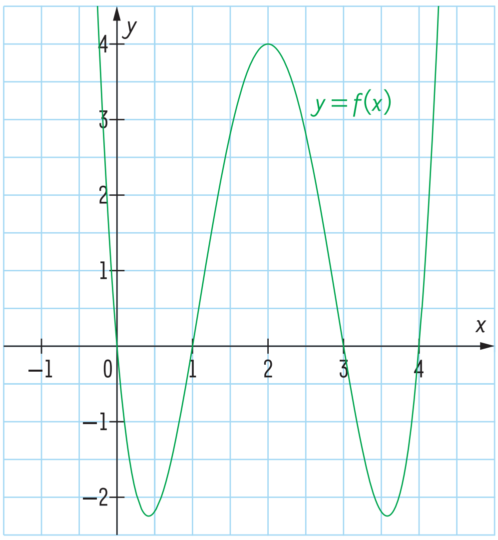
oneven $\rightarrow$ oneven exponenten

Opdracht 67 bladzijde 54

Gegeven is de grafiek van een functie met voorschrift
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x$.

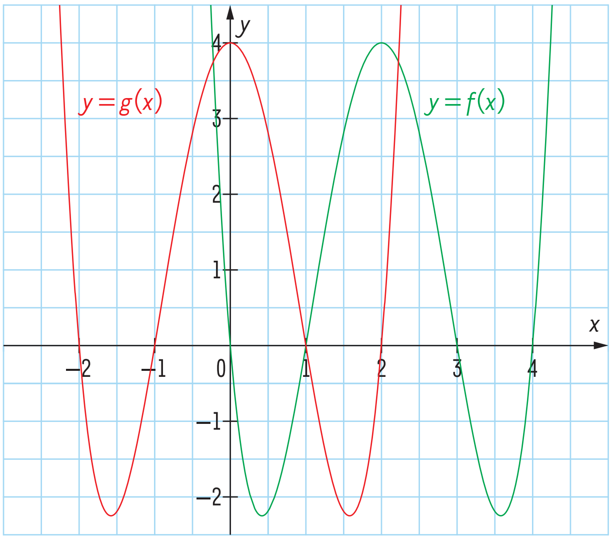
Deze functie is niet even, want de y-as is geen symmetrieas. We vermoeden echter dat de grafiek de verticale rechte met vergelijking $x = 2$ als symmetrieas heeft.

Om na te gaan of dit vermoeden correct is, kunnen we als volgt te werk gaan.



– We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}\,(-2{,}0)$. We verkrijgen dan de grafiek van de functie met voorschrift

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+2) \\ &= (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 19(x+2)^2 - 12(x+2) \\ &= (x+2)\left[(x+2)^3 - 8(x+2)^2 + 19(x+2) - 12\right] \\ &= (x+2)\left[x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 8x^2 - 32x - 32 + 19x + 38 - 12\right] \\ &= (x+2)\left[x^3 - 2x^2 - x + 2\right] \\ &= x^4 - 5x^2 + 4 \end{aligned}$$



– Vervolgens tonen we aan dat de verschoven grafiek de y-as als symmetrieas heeft en dat de functie g dus even is.

$g(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = g(x)$

Omdat deze gelijkheid geldt voor alle waarden van x, is g inderdaad een even functie en dus heeft de grafiek van de oorspronkelijke functie f de rechte met vergelijking $x = 2$ als symmetrieas.

Beschouw de functie met voorschrift $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$.

1 Bepaal de nulpunten van deze functie.

nulpunten

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\,(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = 0$$

→ tabel: -2, -1

	1	4	5	2
-2		-2	-4	-2
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	

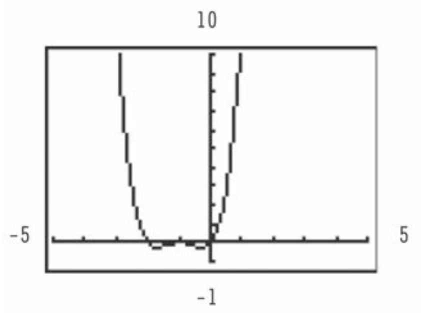
→ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

nulpunten: $0, -2, -1$

2 Stel een tabel op voor x gaande van -5 tot 5.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	240	72	12	0	0	0	12	72	240	600	1260

3 Plot de grafiek van deze functie.



4 Welke rechte is volgens jou een symmetrieas van de grafiek? Toon dit aan m.b.v. de hierboven geziene methode.

We vermoeden dat de rechte $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}\,(1,0)$.

We krijgen dan de grafiek van de functie

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) \\ &= (x-1)\left((x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 5(x-1) + 2\right) \\ &= (x-1)\left(x^3 - 3x^2 + \cancel{3x} - \cancel{1} + 4x^2 - \cancel{8x} + \cancel{4} + \cancel{5x} - \cancel{5} + \cancel{2}\right) \\ &= (x-1)(x^3 + x^2) \\ &= x^4 + x^3 - x^3 - x^2 \\ &= x^4 - x^2 \end{aligned}$$

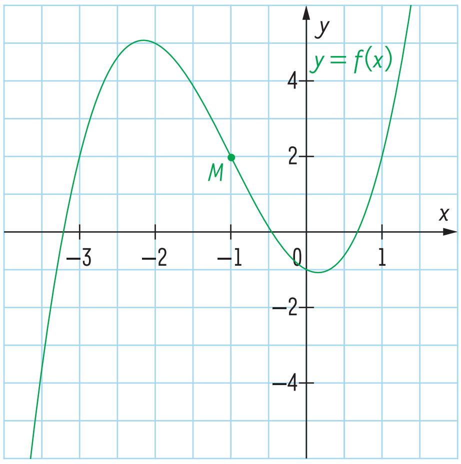
g is even want $g(-x) = x^4 - x^2 = g(x)$, dus heeft de grafiek van f de rechte $x = -1$ als symmetrieas.

Opdracht 68 bladzijde 55
Functiegrafieken met een symmetriemiddelpunt

Gegeven is de grafiek van een functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$.

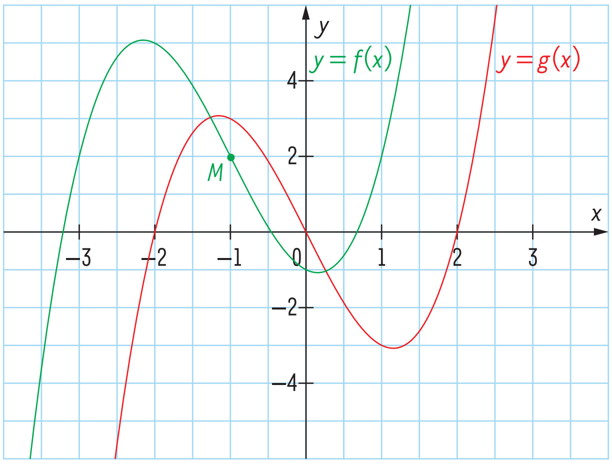
Deze functie is niet oneven, want de oorsprong is geen symmetriemiddelpunt. We vermoeden echter dat de grafiek het punt $M(-1,2)$ als symmetriemiddelpunt heeft.

Om na te gaan of dit vermoeden correct is, kunnen we als volgt te werk gaan.



– We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}\,(1,-2)$. We verkrijgen dan de grafiek van de functie met voorschrift

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) - 2 \\ &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) - 1 - 2 \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

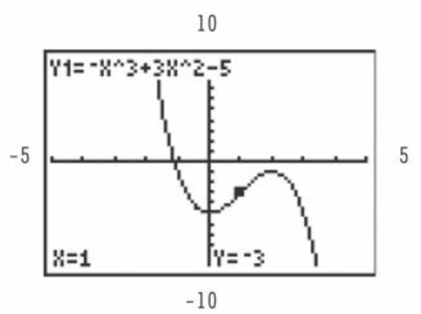


– Vervolgens tonen we aan dat de verschoven grafiek de oorsprong als symmetriemiddelpunt heeft en dat de functie g dus oneven is.

$$g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -(x^3 - 4x) = -g(x)$$

Omdat deze gelijkheid geldt voor alle waarden van x, is g inderdaad een oneven functie en dus heeft de grafiek van de oorspronkelijke functie f het punt $M(-1,2)$ als symmetriemiddelpunt.

Toon aan dat $M(1,-3)$ een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$.



We vermoeden dat M (1, –3) een symmetriemiddelpunt is en verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}(-1, 3)$.
We krijgen dan de functie

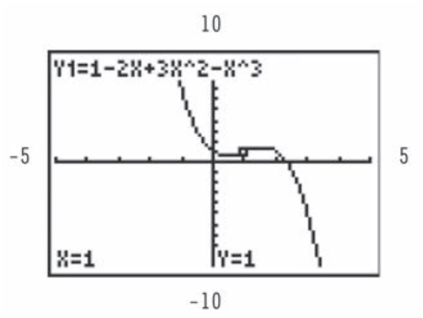
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) + 3 \\ &= -(x+1)^3 + 3(x+1)^2 - 5 + 3 \\ &= -x^3 - 3\cancel{x^2} - 3x - \cancel{1} + 3\cancel{x^2} + 6x + \cancel{3} - \cancel{2} \\ &= -x^3 + 3x \end{aligned}$$

g is oneven want $g(-x) = x^3 - 3x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van g het punt M (1, –3) als symmetriemiddelpunt.

Opdracht 69 bladzijde 56

Ga grafisch na of de grafieken van de volgende functies een symmetrieas of een symmetriemiddelpunt hebben. Bepaal die vervolgens en toon je bewering aan met behulp van de passende transformaties van de grafiek van *f*.

1 $f: x \mapsto 1 - 2x + 3x^2 - x^3$

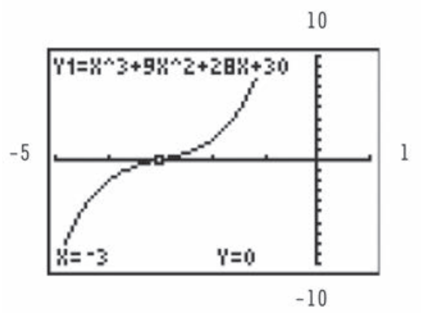


We vermoeden dat M (1, 1) een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f.
We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}(-1, -1)$ en krijgen de functie.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) - 1 \\ &= 1 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - (x+1)^3 - 1 \\ &= \cancel{1} - \underline{2x} - \cancel{2} + 3\cancel{x^2} + \underline{6x} + \cancel{3} - x^3 - \cancel{3x^2} - \underline{3x} - \cancel{1} - \cancel{1} \\ &= -x^3 + x \end{aligned}$$

g is oneven want $g(-x) = x^3 - x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van f het punt M (1, 1) als symmetriemiddelpunt.

2 $f\colon x \mapsto x^3 + 9x^2 + 28x + 30$



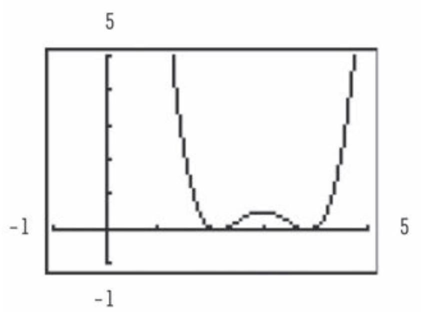
We vermoeden dat M (–3, 0) een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f en verschuiven de grafiek volgens de vector $\vec{v}$ (3, 0).

Zo verkrijgen we de functie

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) \\ &= (x-3)^3 + 9(x-3)^2 + 28(x-3) + 30 \\ &= x^3 - \cancel{9x^2} + \underline{27x} - \cancel{27} + \cancel{9x^2} - \underline{54x} + \cancel{81} + \underline{28x} - \cancel{84} + \cancel{30} \\ &= x^3 + x \end{aligned}$$

g is oneven want $g(-x) = -x^3 - x = -g(x)$ en dus heeft de grafiek van f het punt M (–3, 0) als symmetriemiddelpunt.

3 $f\colon x \mapsto x^4 - 12x^3 + \dfrac{105}{2}x^2 - 99x + 68$



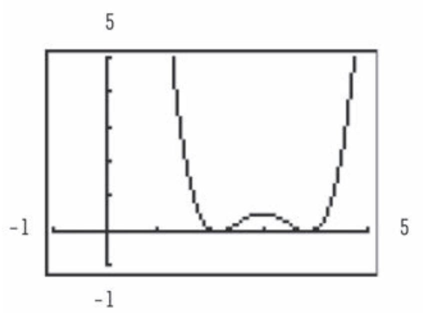
We vermoeden dat x = 3 een symmetrieas is van de grafiek van f.

We verschuiven de grafiek van f volgens de vector $\vec{v}$ (–3, 0) en krijgen dan de functie

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f(x+3)\\
&= (x+3)^4 - 12(x+3)^3 + \frac{105}{2}(x+3)^2 - 99(x+3) + 68\\
&= (x^2+6x+9)^2 - 12(x^3+9x^2+27x+27) + \frac{105}{2}(x^2+6x+9)\\
&\qquad - 99x - 297 + 68\\
&= x^4 + 36x^2 + 81 + \cancel{12x^3} + 18x^2 + 108x - \cancel{12x^3} - 108x^2\\
&\qquad - 324x - 324 + \frac{105}{2}x^2 + 315x + \frac{945}{2} - 99x - 297 + 68\\
&= x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

g is even want $g(-x) = g(x)$ en dus heeft de grafiek van f de rechte $x = 3$ als symmetrieas.

4 $f: x \mapsto 12x^4 + 97x^3 + 245x^2 + 196x + 94$



x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	614	94	64	98	58	94	644

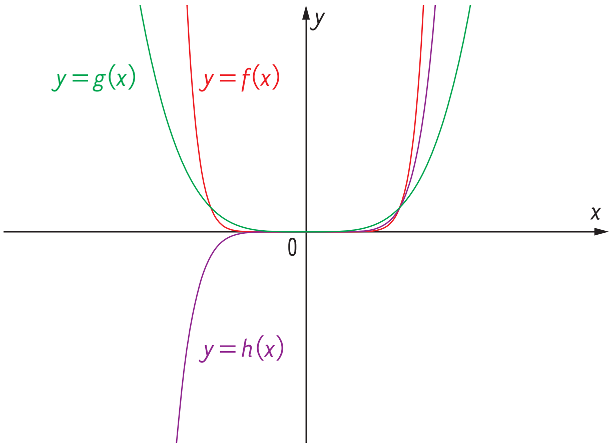
Grafisch vermoeden we $x = -2$ als symmetrieas maar dit klopt niet met de tabel.

$\rightarrow$ geen symmetrie

Opdracht 70 bladzijde 57

Welk voorschrift hoort thuis bij welke grafiek? Los op zonder rekentoestel.

1 $y = x^4$ **2** $y = x^7$ **3** $y = x^{10}$



$y = x^4$ $y = g(x)$

$y = x^7$ $y = h(x)$

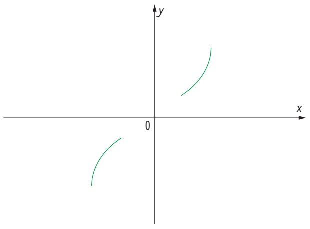
$y = x^{10}$ maar smaller dan $y = x^4$ $y = f(x)$

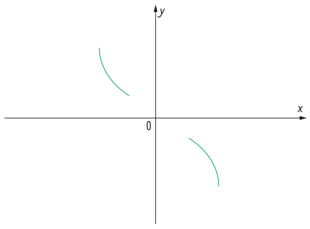
Opdracht 71 bladzijde 57

Verklaar aan de hand van de vorm van de grafiek: een derdegraadsfunctie heeft altijd minstens één nulpunt.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \sim y = ax^3$ voor $x \to \pm\infty$

$a > 0$ $a < 0$

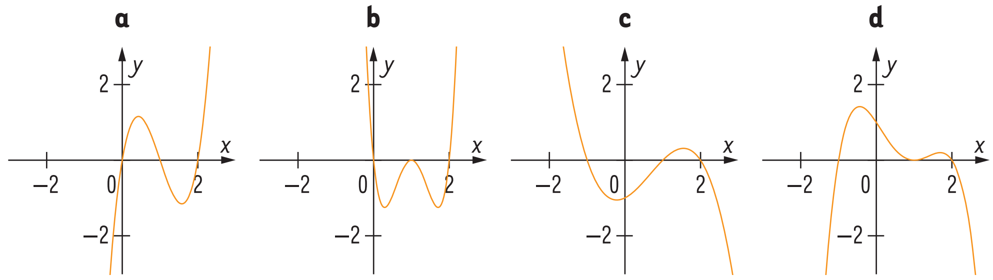




De grafiek moet minstens 1 keer de x-as snijden en dus heeft een derdegraadsfunctie minstens één nulpunt.

Opdracht 72 bladzijde 57

Hieronder vind je vier grafieken en vier voorschriften van veeltermfuncties. Zet bij elke grafiek het juiste voorschrift zonder je rekentoestel te gebruiken.



1 $f_1(x) = (x^2 - 1)\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

2 $f_2(x) = 3x(x - 1)(x - 2)$

3 $f_3(x) = 5x(x - 1)^2(x - 2)$

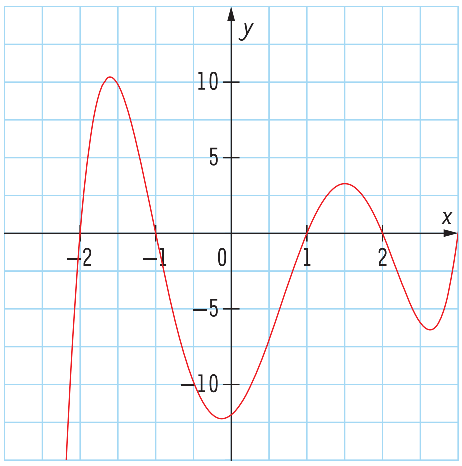
4 $f_4(x) = (x - 1)^2\,(x + 1)\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

a	b	c	d
$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_1(x)$	$f_4(x)$

Opdracht 73 bladzijde 58

Hieronder zie je drie grafieken van vijfdegraadsfuncties. De coëfficiënt van x^5 is 1 of −1. Bepaal het voorschrift van deze functies.

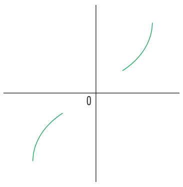
1



$y = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

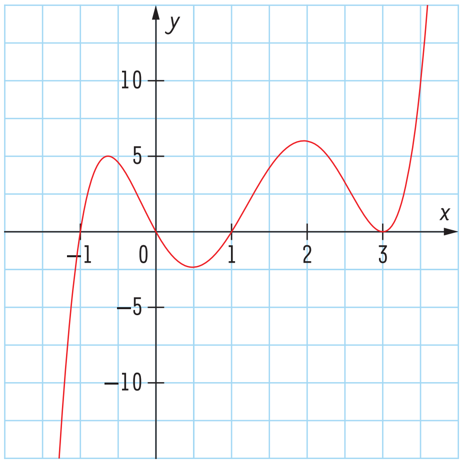
coëfficiënt = 1

want



dus $a > 0$

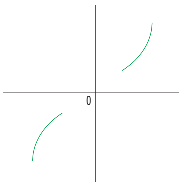
2



$y = x\,(x + 1)\,(x - 1)\,(x - 3)^2$

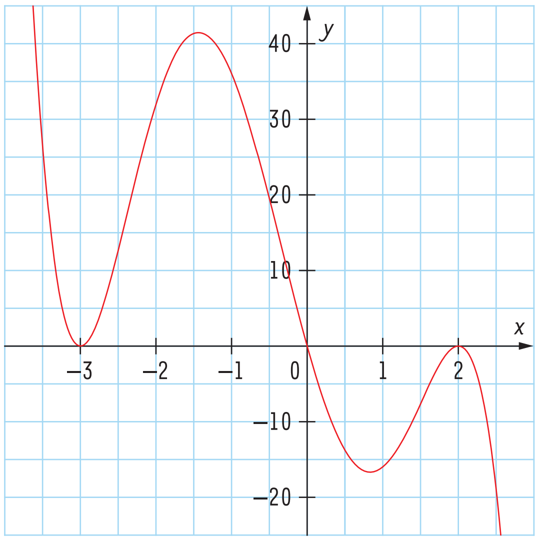
coëfficiënt = 1

want



dus $a > 0$

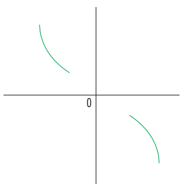
3



$y = -x\,(x + 3)^2\,(x - 2)^2$

coëfficient = −1

want



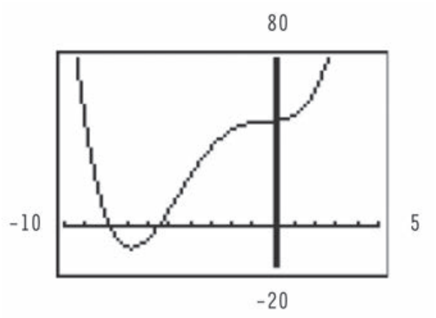
dus $a < 0$

Opdracht 74 bladzijde 59

Gegeven zijn de functies met voorschrift

1 $f(x) = 0{,}1x^4 + x^3 + x^2 + x + 50$ (twee nulpunten, één extremum)

a)



b) S_1 (-7,86; 0)

S_2 (-5,49, 0)

S_3 (0, 50)

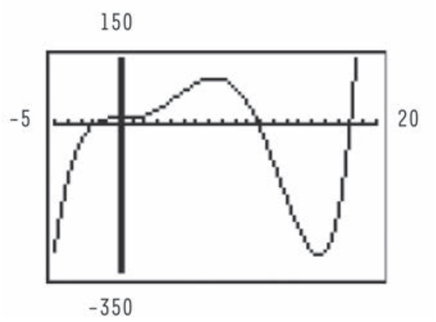
minimum voor x = -6,82 met waarde -11, 18

2 $f(x) = 0{,}007x^5 - 0{,}2x^4 + 1{,}332x^3 - 0{,}004x^2 + 10$ (drie nulpunten, twee extrema)

a Plot de grafiek van de gegeven functies zo dat de snijpunten met de assen en de extrema goed in beeld komen. Noteer je vensterinstellingen.

b Bepaal de snijpunten met de assen en de extrema m.b.v. je rekentoestel.

a)



b) S_1 (-1,80; 0)

S_2 (10,72; 0)

S_3 (17,97; 0)

S_4 (0, 10)

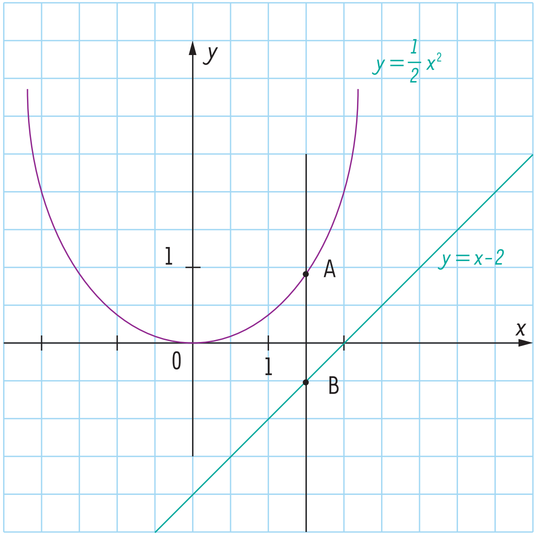
minimum voor x = 15,49 met waarde -312,15

maximum voor x = 7,37 met waarde 105,15

Opdracht 75 bladzijde 59

Een verticale rechte snijdt de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2$ in het punt A en de rechte met vergelijking $y = x - 2$ in het punt B.

Bepaal de coördinaten van A en B zodat de afstand tussen A en B minimaal is.



$A\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$

$B\ (x,\ x - 2)$

$|AB| = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ (\cup)$

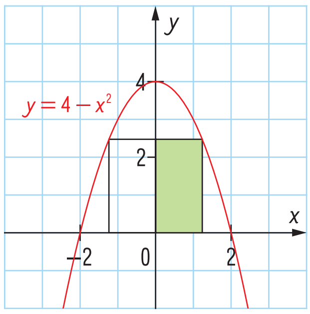
minimum voor $x = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

De coördinaten zijn $A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ en $B\ (1,\ -1)$.

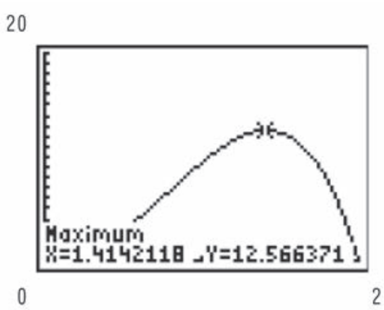
Opdracht 76 bladzijde 59

Een veranderlijke rechthoek heeft een deel van de x-as als basis en een deel van de y-as als hoogte.
Het vierde hoekpunt ligt op de parabool $y = 4 - x^2$.
Men laat deze rechthoek wentelen om de y-as.
Zo ontstaat een cilinder.

Bepaal de afmetingen van die cilinder met de grootste inhoud.
Rond je resultaten af op 2 cijfers na de komma.



We noemen x de basis van de rechthoek,
de hoogte is dan $4 - x^2$.
De inhoud van de cilinder is $I(x) = \pi \cdot x^2\,(4 - x^2)$

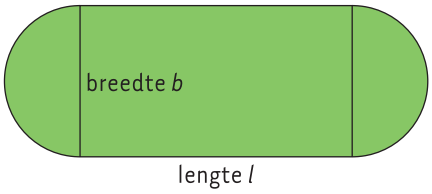


De inhoud is maximaal voor $x \approx 1{,}414$.
Dan is $h \approx 4 - (1{,}414)^2 = 2$.
De straal van het grondvlak is 1,41
en de hoogte 2.

Opdracht 77 bladzijde 59

Een sportstadion bestaat uit een rechthoek, begrensd door twee halve cirkelschijven. De omtrek van het stadion moet 400 m bedragen.

Hoe moeten de lengte *l* en de breedte *b* genomen worden, opdat de oppervlakte van het rechthoekig middenveld maximaal zou worden?



Stel y = oppervlakte middenveld = $l \cdot b$

Gegeven: omtrek = 400

omtrek cirkel + $2l$ = 400

$$2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{b}{2} = \pi b$$

$$\pi b + 2l = 400$$

$$2l = 400 - \pi b$$

$$l = 200 - \frac{1}{2}\pi b$$

Hieruit volgt:

$$y = \left(200 - \frac{1}{2}\pi b\right) \cdot b$$

$$= -\frac{1}{2}\pi b^2 + 200b$$

De oppervlakte is maximaal in de top van de parabool.

$$b = -\frac{200}{2\left(-\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}66$$

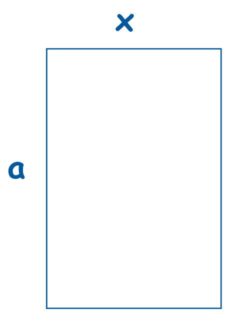
$$l = 200 - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{200}{\pi} = 200 - 100 = 100$$

Als we de lengte 100 m nemen en voor de breedte ≈ 63,66 m zal de oppervlakte maximaal zijn.

Opdracht 78 bladzijde 60

Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van € 100 per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van € 75 per cm lengte.

Wat is de grootst mogelijke oppervlakte die hij kan verkrijgen als de totale kostprijs € 1500 mag zijn?



$a \rightarrow$ € 75/cm

$x \rightarrow$ € 100/cm

Stel y = oppervlakte rechthoek

$= x \cdot a$

We weten dat $1500 = 2x \cdot 100 + 2a \cdot 75$

$$200x + 150a = 1500$$

$$4x + 3a = 30$$

$$a = \frac{30 - 4x}{3}$$

$$= 10 - \frac{4}{3}x$$

Zodat $y = x\left(10 - \frac{4}{3}x\right)$

$$= -\frac{4}{3}x^2 + 10x$$

y is maximaal in de top van de bergparabool:

$$x = \frac{-10}{\frac{-8}{3}} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

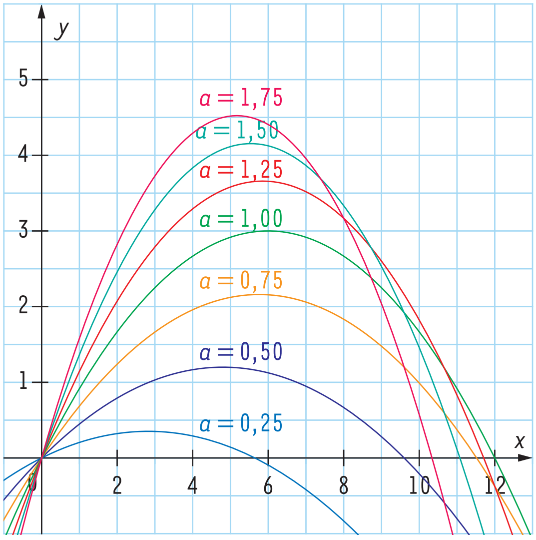
$$a = 10 - \frac{4}{3} \cdot \frac{15}{4} = 10 - 5 = 5$$

Kiezen we voor x een afstand van 3,75 cm en voor de andere zijde 5 cm, dan zal de oppervlakte een maximale waarde hebben, namelijk 18,75 cm^2.

Opdracht 79 bladzijde 60

Voor elke waarde van a stelt de functie met voorschrift $f(x)=ax-\dfrac{1+a^2}{24}x^2$ een andere parabool voor.

Hieronder zie je enkele van die parabolen. We beperken ons in deze oefening tot $a>0$.



1 Bepaal de nulpunten van f in functie van a.

$$f(x) = ax - \frac{1+a^2}{24}x^2 \qquad a > 0$$

$$ax - \frac{1+a^2}{24}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(a - \frac{1+a^2}{24}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ of } a = \frac{1+a^2}{24}x$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{24a}{1+a^2}$$

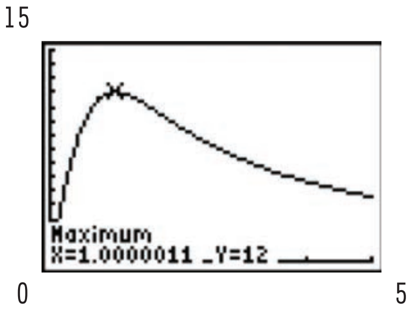
nulpunten: $0, \dfrac{24a}{1+a^2}$

2 Bepaal voor welke waarde van *a* het strikt positief nulpunt zo groot mogelijk is.
Wat is de waarde van dat nulpunt?

$\dfrac{24a}{1 + a^2}$ is maximaal

voor $a = 1$,

dan is $\dfrac{24a}{1 + a^2}$ gelijk aan 12.



3 Noem de twee snijpunten met de *x*-as *A* en *B*. Bepaal de coördinaat van de top *T*.
Voor welke waarde van *a* is de oppervlakte van de driehoek *ABT* maximaal?

A (0, 0)

$$B\left(\frac{24a}{1 + a^2}, 0\right)$$

$$x_T = \frac{-a}{2\left(-\dfrac{1 + a^2}{24}\right)} = \frac{12a}{1 + a^2} \text{ of via midden van [AB]}$$

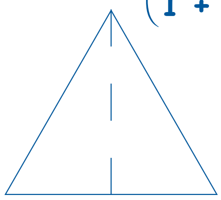
$$y_T = a \cdot \frac{12a}{1 + a^2} - \frac{1 + a^2}{24} \cdot \frac{144a^2}{\left(1 + a^2\right)^2}$$

$$= \frac{12a^2}{1 + a^2} - \frac{6a^2}{1 + a^2}$$

$$= \frac{6a^2}{1 + a^2}$$

$$T\left(\frac{12a}{1 + a^2}, \frac{6a^2}{1 + a^2}\right)$$

$T\left(\dfrac{12a}{1+a^2}, \dfrac{6a^2}{1+a^2}\right)$



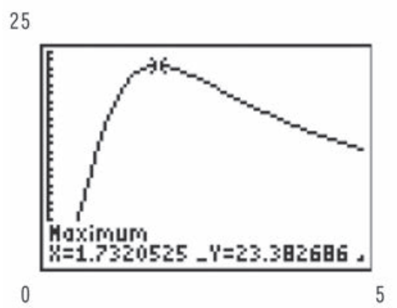
$A\ (0,\ 0)$ $\qquad B\left(\dfrac{24a}{1+a^2}, 0\right)$

y = oppervlakte ΔABT

$$= \frac{\dfrac{24a}{1+a^2} \cdot \dfrac{6a^2}{1+a^2}}{2}$$

$$= \frac{72 \cdot a^3}{\left(1+a^2\right)^2}$$

De oppervlakte is maximaal voor $a \approx 1{,}73$.



Opdracht 80 bladzijde 61

Gegeven is de functie $f\colon x \mapsto (x+4)(x^2-6)(x-1)^2(x-3)$.

1 Bepaal de graad van deze functie.

graad = 6

2 Bepaal de nulpunten van deze functie.

nulpunten: $-4,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 1,\ 3$

3 In welke punten snijdt de grafiek de x-as?

De grafiek snijdt de x-as in $(-4,\ 0)$, $(-\sqrt{6},\ 0)$, $(\sqrt{6},\ 0)$ en $(3{,}0)$.

4 In welke punten raakt de grafiek de x-as?

De grafiek raakt de x-as in $(1, 0)$.

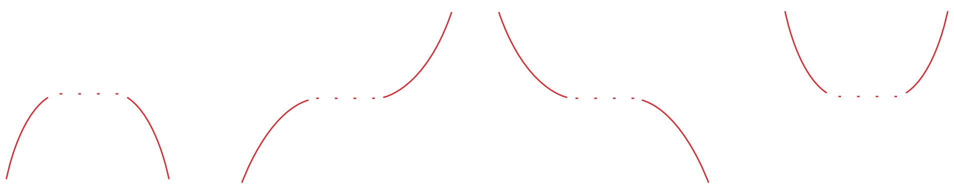
5 Los op: $f(x) \leqslant 0$.

x		-4		$-\sqrt{6}$		1		$\sqrt{6}$		3	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) \leqslant 0$ als $-4 \leqslant x \leqslant -\sqrt{6}$ of $x = 1$ of $\sqrt{6} \leqslant x \leqslant 3$

6 Tot welk van de volgende types behoort de grafiek van f?

a **b** **c** **d**



$\left.\begin{array}{l} n \text{ even} \\ a > 0 \end{array}\right\}$ type d

Opdracht 81 bladzijde 61

Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie f van de vierde graad met nulpunten $-3, -1$, 0 en 2 en waarbij $f(3) = 288$.

$f(x) = ax\,(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 2)$

$f(3) = 288$

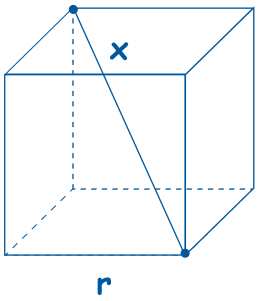
$\Leftrightarrow 3a \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 = 288$

$\Leftrightarrow a = 4$

$f(x) = 4x\,(x + 3)\,(x + 1)\,(x - 2)$

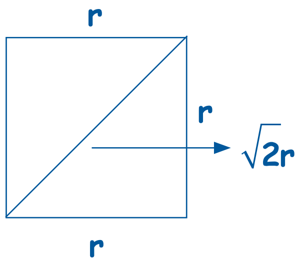
Opdracht 82 bladzijde 61

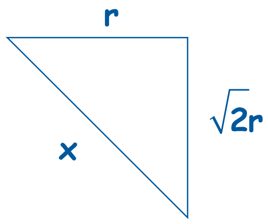
Beschouw een kubus waarvan de ruimtediagonaal lengte *x* heeft.



1 Druk het verband uit tussen *x* en de totale lengte *L* van alle ribben van de kubus.

Totale lengte van alle ribben = 12r





$$x^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\Rightarrow \quad 12r = \frac{12}{\sqrt{3}}x$$

$$= 4\sqrt{3}x$$

2 Schrijf nu ook het volume *V* van de kubus als functie van *x*.

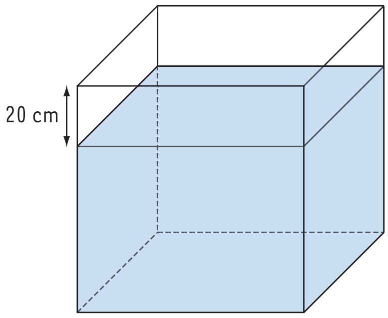
$$V = r^3$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^3$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}x^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$$

Opdracht 83 bladzijde 61
Een kubusvormig aquarium is gevuld tot op 20 cm van de bovenrand en bevat 1440 liter water.
Bereken de zijde van het aquarium.



Stel z = zijde aquarium

$I = z^2 \cdot (z - 2) = 1440$ $\qquad$ $1\ l = 1\ dm^3$

$20\ cm = 2\ dm$

$z^3 - 2z^2 = 1440$

$\Leftrightarrow\ z^3 - 2z^2 - 1440 = 0$

$\rightarrow$ Tabel: 12

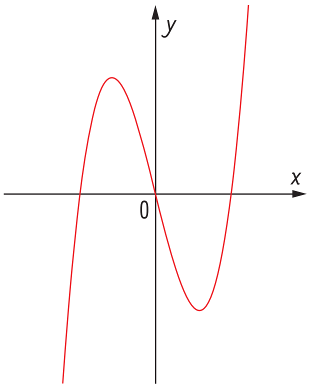
De zijde van het aquarium is 12 dm.

Opdracht 84 bladzijde 62

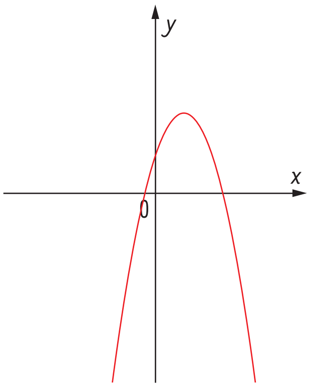
Hieronder zie je zes grafieken en zes voorschriften van veeltermfuncties.

Geef bij elke grafiek het juiste voorschrift zonder je rekentoestel te gebruiken.

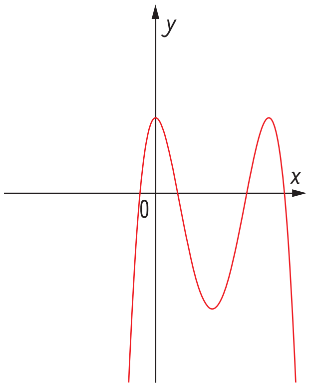
1



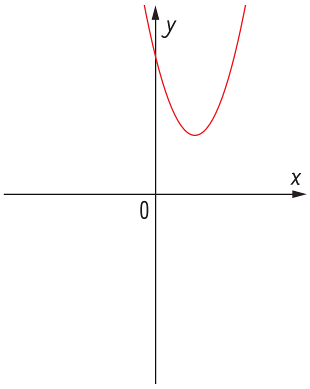
3



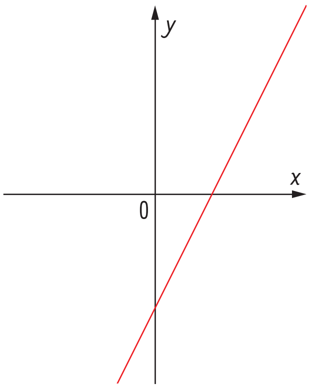
5



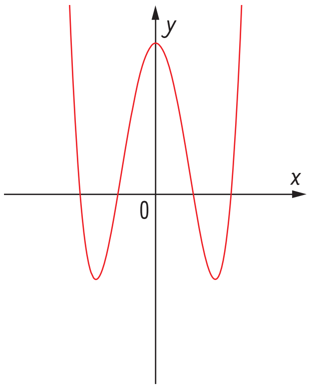
2



4



6



$f_1(x) = 2x - 3$

$f_2(x) = x^3 - 4x$

$f_3(x) = x^2 - 4x + 7$

$f_4(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$f_5(x) = -2x^2 + 3x + 1$

$f_6(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 2$

$f_1(x) = 2x - 3$: de grafiek is een stijgende rechte $\Rightarrow$ figuur 4

$f_2(x) = x^2 - 4x + 7$: de grafiek is een dalparabool $\Rightarrow$ figuur 2

$f_3(x) = -2x^2 + 3x + 1$: de grafiek is een bergparabool $\Rightarrow$ figuur 3

$f_4(x) = x^3 - 4x = x\,(x^2 - 4)$: nulpunten 0, -2, 2 $\Rightarrow$ figuur 1

$f_5(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: even functie $\Rightarrow$ figuur 6

$f_6(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 2$: type $\Rightarrow$ figuur 5

figuur	1	2	3	4	5	6
functie	f_4	f_2	f_3	f_1	f_6	f_5

Opdracht 85 bladzijde 62

Welke van de volgende combinatie van transformaties mag je van volgorde verwisselen, zonder dat het uiteindelijke voorschrift verandert?

1 verticale uitrekking met factor 2 en spiegeling om de x-as

$y = f(x)$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2f(x)$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -2f(x)$

$y = f(x)$

$\downarrow$ spiegeling om de x-as

$y = -f(x)$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2\,(-f(x)) = -2f(x)$

$\rightarrow$ volgorde mag verwisseld worden

2 verticale uitrekking met factor 2 en verticale verschuiving over 3 eenheden naar boven

$y = f(x)$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2f(x)$

$\downarrow$ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = 2f(x) + 3$

$y = f(x)$

$\downarrow$ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = f(x) + 3$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2\,[f(x) + 3]$

$= 2f(x) + 6$

$\rightarrow$ je mag de volgorde niet wisselen

3 verticale uitrekking met factor 2 en horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links

$y = f(x)$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2f(x)$

$\downarrow$ horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links

$y = 2f(x + 2)$

$y = f(x)$

$\downarrow$ horizontale verschuiving over 2 eenheden naar links

$y = f\,(x + 2)$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$y = 2f(x + 2)$

$\rightarrow$ de volgorde mag verwisseld worden

4 spiegeling om de x-as en verticale verschuiving over 3 eenheden naar boven

$y = f(x)$

↓ spiegeling om de x-as

$y = -f(x)$

↓ verticale verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = -f(x) + 3$

$y = f(x)$

↓ verschuiving volgens de vector $\vec{v}\,(0,3)$

$y = f(x) + 3$

↓ spiegeling om de x-as

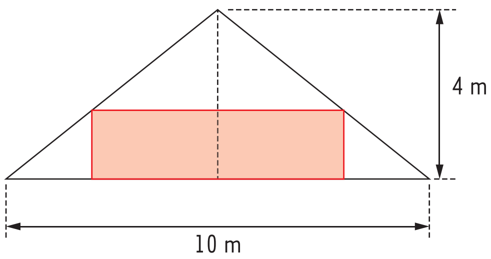
$y = -(f(x) + 3)$
$\;\;= -f(x) - 3$

→ de volgorde mag niet verwisseld worden

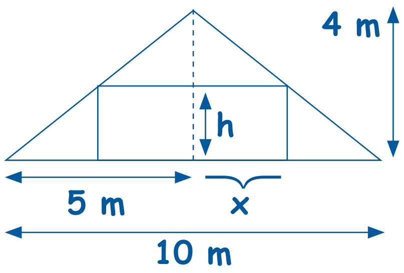
Opdracht 86 bladzijde 63

Een symmetrische puntgevel heeft bij de basis een breedte van 10 m en een hoogte van 4 m.
In deze puntgevel wil men een rechthoekig ateliervenster inbouwen zoals op de figuur is aangegeven.

Om zoveel mogelijk licht binnen te krijgen, wil men een zo groot mogelijk venster.



1 Kies een variabele x.

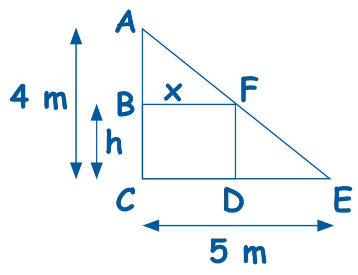


x = halve breedte ateliervenster

2 Druk de oppervlakte *A* van dit venster uit in functie van *x*.

$A = 2x \cdot h$

Om h uit te drukken in functie van x gebruiken we de eigenschap bij gelijkvormige driehoeken:



$\Delta ACE \sim \Delta ABF$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden zijn evenredig

$$\frac{4}{4-h} = \frac{5}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$4x = 20 - 5h$$

$$5h = 20 - 4x$$

$$h = 4 - \frac{4}{5}x$$

Dus $A = 2x\left(4 - \frac{4}{5}x\right)$

$$= -\frac{8}{5}x^2 + 8x$$

3 Bepaal grafisch de afmetingen van het venster zodat de oppervlakte ervan maximaal is.

De oppervlakte is maximaal in de top van de bergparabool:

$$x = \frac{-8}{\frac{-16}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$h = 4 - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = 2$$

Kiezen we voor de basis 5 m $\left(2 \times \frac{5}{2}\right)$ en voor de hoogte 2 m, dan zal de oppervlakte maximaal zijn.

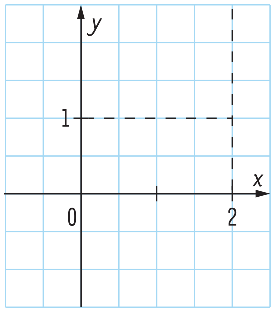
Opdracht 87 bladzijde 63

En functie $y = f(x)$ heeft als domein $[0,2]$ en als bereik $[0,1]$.

Bepaal het domein en het bereik van de volgende functies.

dom f = [0,2]

ber f = [0,1]



1 $y = f(x) + 2$

y = f(x) + 2: verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (0,2)

→ dom g = [0,2]

ber g = [2,3]

2 $y = 2\,f(x)$

y = 2f(x): verticale uitrekking met factor 2

→ dom g = [0,2]

→ ber g = [0,2]

3 $y = f(x + 2)$

y = f(x + 2): verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (–2,0)

→ dom g = [–2,0]

→ ber g = [0,1]

4 $y = -f(x)$

y = f(x): spiegeling om de x-as

→ dom g = [0,2]

→ ber g = [–1,0]

5 $y = -f(x + 1) + 1$

y = –f(x + 1) + 1: spiegeling om de x-as en verschuiving volgens de vector $\vec{v}$ (–1,1)

→ dom g = [–1,1]

→ ber g = [0,1]

6 $y = f(-x)$

y = f(-x): spiegeling om de y-as

$\rightarrow$ dom g = [-2,0]

$\rightarrow$ ber g = [0,1]

Opdracht 88 bladzijde 63

1 De ongelijkheid $(x+1)(x-a)(x-b) < 0$ heeft als oplossing $x < -1$ of $2 < x < 4$.

Bepaal a en b.

$(x + 1)(x - a)(x - b) < 0$

x		-1		2		4	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

a = 2 en b = 4
of
a = 4 en b = 2

2 De ongelijkheid $(x+a)(x-b)(x-2) \geqslant 0$ heeft als oplossing $-1 \leqslant x \leqslant 2$ of $x \geqslant 3$.

Bepaal a en b.

$(x + a)(x - b)(x - 2) \geqslant 0$

x		-1		2		3	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

a = 1 en b = 3
of
a = -3 en b = -1

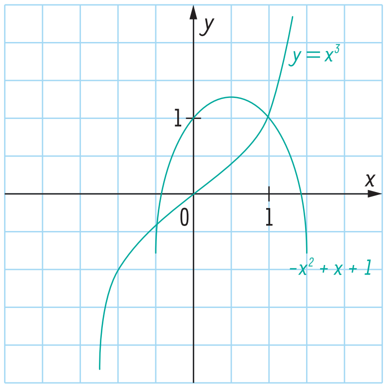
Opdracht 89 bladzijde 63

Hoeveel reële oplossingen heeft de vergelijking $1 + x - x^2 = |x^3|$?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO, eerste ronde 2011)

1) $x \geqslant 0$: $1 + x - x^2 = x^3$



één snijpunt

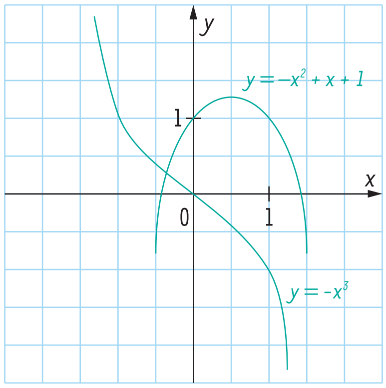
$y = -x^2 + x + 1$

de grafiek is een bergparabool

2 nulpunten: $= \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — 1 negatief, 1 positief

en door (0,1) en top $\left(\dfrac{1}{2}, \underbrace{\dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1}_{\frac{5}{4}}\right)$

2) $x \leqslant 0$: $1 + x - x^2 = -x^3$

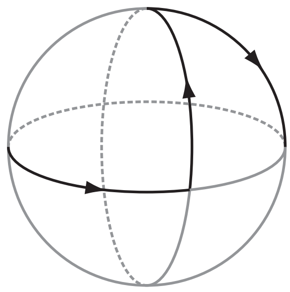


één snijpunt

$\Rightarrow$ 2 oplossingen $\Rightarrow$ antwoord C

Hersenbrekers

1 Drie cirkelvormige hoepels zijn aan elkaar gelijmd. Ze snijden elkaar onder rechte hoeken. Een lieveheersbeestje vliegt naar een snijpunt. Daar begint het een wandeling. Het wandelt een kwart hoepel en slaat daarna linksaf naar een andere hoepel. Het beestje wandelt weer een kwart hoepel en slaat dan rechtsaf. En zo gaat het door, telkens om en om links of rechts afslaand.



Na hoeveel kwart hoepels komt het lieveheersbeestje terug in het beginpunt?

A 6 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

(Bron © wizPROF 2009)

start op hoepel 1, links op hoepel 2, rechts op hoepel 3, links op hoepel 1, rechts op hoepel 2, links op hoepel 3: terug bij startpunt

antwoord A: 6

2 Een kikker zit op een waterlelie en ziet 3 meter verder een vlo. De kikker achtervolgt de vlo met sprongen van 20 cm en de vlo vlucht met sprongen van 10 cm.

Voor elke twee sprongen van de kikker doet de vlo er drie.

Waar pakt de kikker de vlo?

A op 3 m van de lelie
B op 6 m van de lelie
C op 12 m van de lelie
D op 30 m van de lelie
E op 60 m van de lelie

(Bron © JWO, eerste ronde 2006)

tijdstip	afstand kikker t.o.v. lelie	afstand vlo t.o.v. lelie
0	0	3
1	0,4	3,3
2	0,8	3,6
...		
t	0,4t	3+0,3t

$0{,}4t = 3 + 0{,}3t$

$0{,}1t = 3$

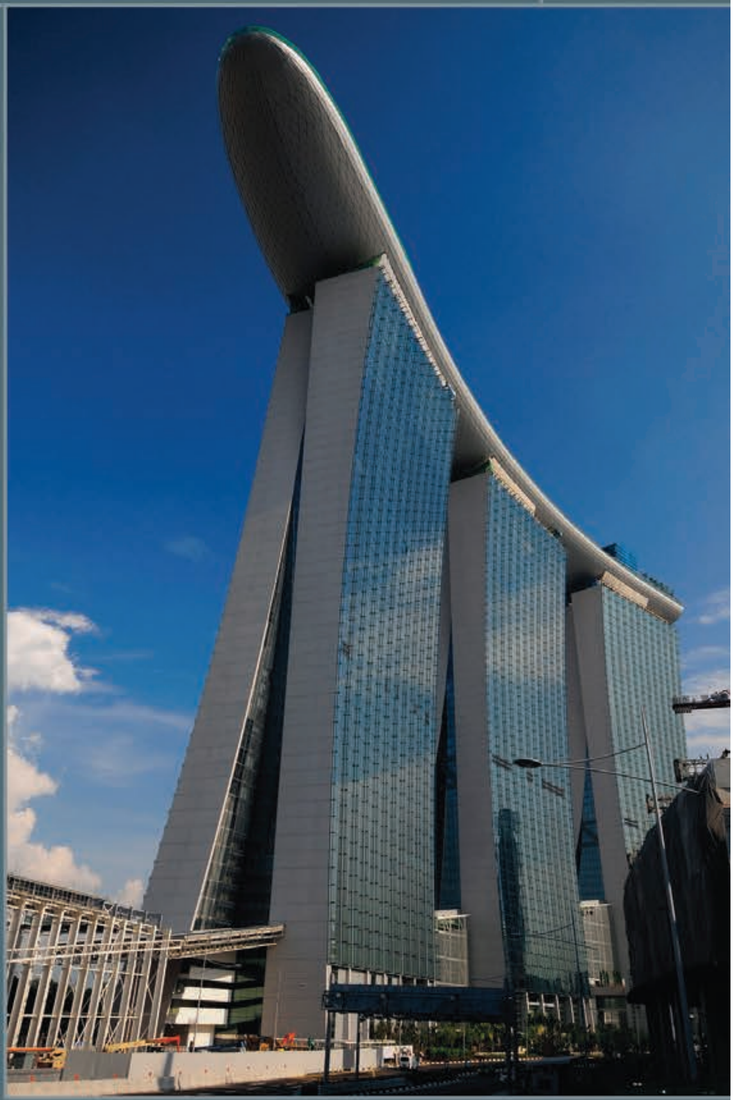
$t = 30$

$\Rightarrow$ afstand $= 0{,}4 \cdot 30 = 3 + 0{,}3 \cdot 30 = 12$

Antwoord C: op 12 m van de lelie

Hoofdstuk 2

Rationale functies



Opdracht 1 bladzijde 66

Gegeven zijn een aantal grafieken en een aantal functievoorschriften.
Welke grafiek hoort bij welk functievoorschrift? Los op zonder rekentoestel.

- grafiek A hoort bij 6 $f(x) = \dfrac{x}{x + 3}$
- grafiek B hoort bij 2 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$
- grafiek C hoort bij 4 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 9}$
- grafiek D hoort bij 1 $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 9}$

Opdracht 2 bladzijde 68

Bepaal het domein en de nulpunten van de functies met voorschrift

1 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

domf= $\mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}$
geen nulpunt

2 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$ — domf= $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$

  D = 1

- $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = -3$ — nulpunt : 2

3 $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

- Horner :

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0$ — domf= $\mathbb{R} \setminus \{1, 3, -2\}$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = 3$ of $x = -2$ — geen nulpunt

4 $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 3x^4}$

- $x^2 - 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ of $1 - 3x^2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ of $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

geen nulpunt

Opdracht 3 bladzijde 70

Los de ongelijkheden op m.b.v. een tekentabel.

1 $\dfrac{-4x+3}{2x+5} > 0$

- $-4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$
- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$

x		$\frac{-5}{2}$		$\frac{3}{4}$	
$-4x + 3$	+	+	+	0	−
$2x + 5$	−	0	+	+	+
y	−	|	+	0	−

$\dfrac{-4x+3}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{2} < x < \dfrac{3}{4}$

2 $\dfrac{3x^2 - x}{64 - x^3} \leqslant 0$

- $3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{3}$
- $64 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x		0		$\frac{1}{3}$		4	
$3x^2 - x$	+	0	−	0	+	+	+
$64 - x^3$	+	+	+	+	+	0	−
y	+	0	−	0	+	|	−

$\dfrac{3x^2 - x}{64 - x^3} \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$ of $x > 4$

3 $\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+2x+1} \geqslant 0$

-

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	0

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x^2 - 3x + 2 = 0$
$D = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \text{ of } x = 1 \text{ of } x = 2$

- $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (dubbel)

x		-1		1		2	
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$
$x^2 + 2x + 1$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$

$\dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 2x + 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \text{ of } x = 1$

Opdracht 4 bladzijde 70

1 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ boven die van $g(x) = 1$?

$\dfrac{x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-(1-x)}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{1-x} > 0$

- $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x		$\frac{1}{2}$		1	
$2x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f - g$	$-$	0	$\underline{+}$	|	$-$

De grafiek van f ligt boven de grafiek van $g \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 1$

2 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ onder die van $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$?

$$\frac{x}{1-x} < \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(1+x)-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x^2-1+2x-x^2}{1-x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{1-x^2} < 0$$

- $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$
- $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$

x		-1		$\frac{1}{3}$		1	
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f-g$	$+$	|	$\underline{-}$	0	$+$	|	$\underline{-}$

De grafiek van f ligt onder die van $g \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{3}$ of $x > 1$

Opdracht 5 bladzijde 71
Los de ongelijkheden op.

1 $\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x+1)^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x+1)^2}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2-2x-1}{(x+1)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-2}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

- $-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (dubbel nulpunt)

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$
y	$\underline{+}$	|	$-$

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x < -1$$

2 $\frac{x}{4x-2} \leqslant \frac{4x+2}{x}$

$$\frac{x}{4x-2} \leqslant \frac{4x+2}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{4x-2} - \frac{4x+2}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 16x^2 + 4}{(4x-2)\,x} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-15x^2 + 4}{(4x-2)\,x} \leqslant 0$$

- $-15x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ of $x = \frac{-2\sqrt{15}}{15}$
- $(4x-2)\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{1}{2}$

x		$\frac{-2\sqrt{15}}{15}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2\sqrt{15}}{15}$	
$-15x^2 + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(4x-2)\,x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	0	$+$	|	$-$	|	$+$	0	$-$

$$\frac{x}{4x-2} \leqslant \frac{4x+2}{x} \Leftrightarrow x \leqslant \frac{-2\sqrt{15}}{15} \text{ of } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ of } x \geqslant \frac{2\sqrt{15}}{15}$$

3 $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{-5}{x^2-9}$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{-5}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x^2-9} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3+x-3+5}{x^2-9} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x^2-9} > 0$$

- $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$
- $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = -3$

x		-3		$\frac{-5}{2}$		3	
$2x + 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 9$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} > \frac{-5}{x^2-9} \Leftrightarrow -3 < x < \frac{-5}{2} \text{ of } x > 3$$

Opdracht 6 bladzijde 72

Een breuk mag geen noemer gelijk aan nul hebben.
Maar wat wanneer de noemer *bijna* gelijk is aan nul? In de volgende twee situaties is dat het geval.

Bereken de quotiënten en voorspel wat er zou gebeuren mocht het gegeven patroon zich verderzetten.

1 $\frac{1,9}{0,1}; \frac{1,99}{0,01}; \frac{1,9999}{0,0001}; \frac{1,999999}{0,000001}$

$\frac{1,9}{0,1} = 19 \quad \frac{1,99}{0,01} = 199 \quad \frac{1,9999}{0,0001} = 19999 \quad \frac{1,999999}{0,000001} = 1999999$

Als het patroon zich verder zet nadert het quotiënt tot oneindig.

2 $\frac{0,3}{0,1}; \frac{0,039}{0,01}; \frac{0,0003999}{0,0001}; \frac{0,00000399999}{0,000001}$

$\frac{0,3}{0,1} = 3 \quad \frac{0,039}{0,01} = 3,9 \quad \frac{0,0003999}{0,0001} = 3,999 \quad \frac{0,00000399999}{0,000001} = 3,99999$

Als het patroon zich verder zet nadert het quotiënt tot 4.

Opdracht 7 bladzijde 75

Een grafiek van een rationale functie kan in de buurt van een verticale asymptoot op vier manieren liggen:

1 Onderzoek de ligging van de grafieken van de volgende functies in de buurt van $x = 1$.

a) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ type B

b) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$ type C

c) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ type B

d) $f(x) = \frac{-x^2}{(x - 1)^2}$ type A

e) $f(x) = \frac{-x}{x - 1}$ type D

2 Kun je een methode vinden om enkel op basis van het voorschrift te bepalen hoe de grafiek van een functie f ligt t.o.v. de verticale asymptoot met vergelijking $x = a$?

d.m.v. tekenonderzoek

a)

x		1	
1	+	+	+
$x - 1$	−	0	+
$f(x)$	−	||	+

↓ type B

b)

x		1	
1	+	+	+
$(x - 1)^2$	+	0	*+
$f(x)$	+	||	+

↓ type C

c)

x		0		1	
x	−	0	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	||	+

↓ type B

d)

x		0		1	
$-x^2$	−	0	−	−	−
$(x - 1)^2$	+	+	+	0	+
$f(x)$	−	0	−	||	−

↓ type A

e)

x		0		1	
$-x$	+	0	−	−	−
$x - 1$	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	||	−

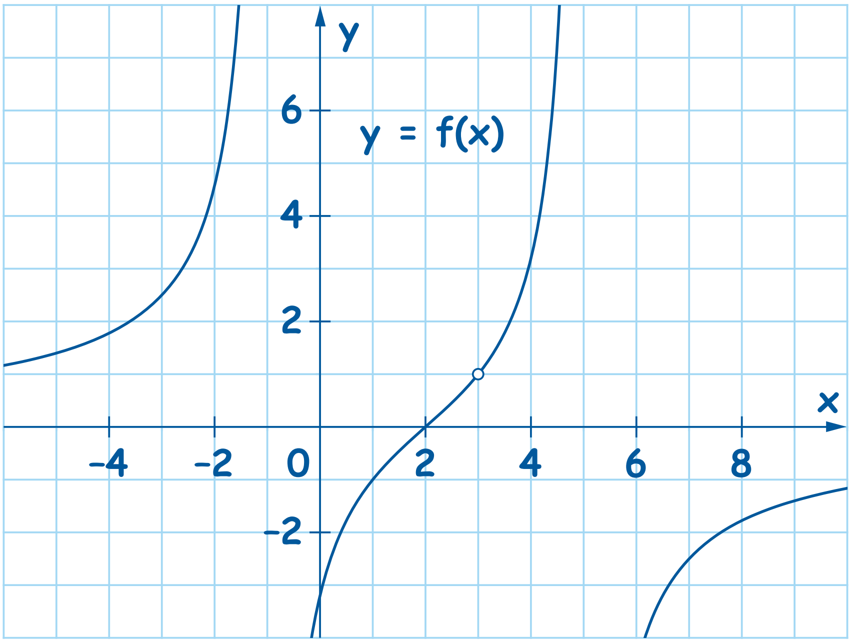
↓ type D

3 Stel een voorschrift op van een functie met een grafiek die zoals C ligt t.o.v. de verticale asymptoot met vergelijking $x = 3$ en waarvan de grafiek door de oorsprong gaat.

$$f(x) = \frac{x}{(x-3)^2} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

Opdracht 8 bladzijde 75

Schets de grafiek van een functie met een opening voor $x = 3$, twee verticale asymptoten met vergelijking $x = -1$ en $x = 5$ en een nulpunt voor $x = 2$.



Opdracht 9 bladzijde 76

Ga bij de onderstaande functies na of de grafiek een opening of een verticale asymptoot heeft voor $x = 2$.

Zie je een verband met het voorschrift?

1 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

verticale asymptoot, 2 is een nulpunt van de noemer en niet van de teller

2 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)}$

opening, 2 is een nulpunt van teller en noemer

3 $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)^2}$

verticale asymptoot, 2 is nulpunt van de teller en een dubbel nulpunt van de noemer

Opdracht 10 bladzijde 76

Voor $x=-2$ zijn de teller en de noemer van de functie met voorschrift

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ nul. Beide bevatten dus een factor $x+2$.

Na ontbinden vind je $f(x)=\dfrac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$.

Verklaar waarom f niet dezelfde functie is als de functie g met voorschrift

$g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

–2 behoort niet tot domf en wel tot domg. De grafiek van f ziet er hetzelfde uit als die van g, met dat verschil dat er een opening is voor x = –2 bij de grafiek van f.

Voor de functie f is –2 een nulpunt van de teller en van de noemer, bij de functie g van geen van beiden.

Opdracht 11 bladzijde 78

Plaats bij elke grafiek het juiste functievoorschrift. Los op zonder rekentoestel.

grafiek	1	2	3	4
functievoorschrift	B	D	F	E

Opdracht 12 bladzijde 78

Bepaal voor de volgende functies de eventuele verticale asymptoten en openingen van de grafiek.

1 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-16}$

D = 36

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -2$
- $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -4$

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)(x+4)}$$

VA $x = -4$

opening $\left(4, \dfrac{3}{4}\right)$ (vereenvoudigd functievoorschrijft : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$ mits $x \neq 4$)

2 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-8x+16}$

D = 36

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -2$
- $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (dubbel)

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)^2}$$

VA $x = 4$

(vereenvoudigd functievoorschrijft : $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$)

3 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (dubbel)

VA $x = -2$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

  D = 1

- $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ of $x = -3$

$f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)}$

VA $x = -3$

opening $(-2, -4)$ (vereenvoudigd functievoorschrijft :

$f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$ mits $x \neq -2$)

Opdracht 13 bladzijde 79

Welke van de volgende functies zijn gelijk aan elkaar?

De functies f, g en i zijn gelijk aan elkaar

Opdracht 14 bladzijde 79

Geef een mogelijk voorschrift van een rationale functie met 0 als nulpunt en waarvan de grafiek een opening in $(3,4)$ heeft en als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 1$ en $x = 2$.

$f(x) = \dfrac{ax(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

$g(x) = \dfrac{ax}{(x - 1)(x - 2)}$ (3, 4) is opening van f dus $g(3) = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{a \cdot 3}{(3 - 1)(3 - 2)} = 4 \Leftrightarrow a = \dfrac{8}{3}$

dus $f(x) = \dfrac{8x(x - 3)}{3(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

Opdracht 15 bladzijde 80

De volgende functies zijn gegeven.

$$f_1(x)=\frac{2x-3}{x^2+5} \qquad f_2(x)=\frac{-3x^2-x}{x^2+x-2} \qquad f_3(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$$

Wat gebeurt er met de functiewaarden voor zeer grote waarden van x?
Verklaar dit op basis van het voorschrift.

$$f_1(x) = \frac{2x-3}{x^2+5} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow +\infty$$

De graad van de noemer is hoger dan de graad van de teller, de noemer zal dus sneller stijgen voor grote waarden van x. Hierdoor zal de breuk tot 0 naderen.

$$f_2(x) = \frac{-3x^2-x}{x^2+x-2} \rightarrow -3 \text{ als } x \rightarrow +\infty$$

De graad van de teller en die van de noemer zijn gelijk, de teller en de noemer stijgen dus even snel voor grote waarden van x. Daardoor zal de breuk naderen tot –3 (het quotiënt van de coëfficiënten van de hoogstegraadstermen in teller en noemer).

$$f_3(x) = \frac{x^2+2x}{x-1} \rightarrow +\infty \text{ als } x \rightarrow +\infty$$

De graad van de teller is groter dan die van de noemer; de teller zal dus sneller stijgen voor grote waarden van x. Wanneer we de deling uitvoeren, kunnen we aantonen dat de breuk nadert tot de rechte y = x + 3.

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^2+2x & x-1 \\ \cline{3-3}
- & x^2-x & x+3 \\ \cline{2-2}
 & 3x & \\
- & 3x-3 & \\ \cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}$$

Opdracht 16 bladzijde 85

Bepaal de verticale, horizontale en schuine asymptoten van de grafiek van de volgende functies.

1 $f: x \mapsto \dfrac{2x-1}{4-3x}$ VA $x = \dfrac{4}{3}$ HA $y = \dfrac{-2}{3}$ geen SA

2 $f: x \mapsto \dfrac{-x^2+5}{x^2+2x+1}$ VA $x = -1$ HA $y = -1$ geen SA

3 $f: x \mapsto \dfrac{2x^2-1}{x+2}$ VA $x = -2$ geen HA SA $y = 2x - 4$

$$\begin{array}{rr|l} 2x^2 & -1 & x+2 \\ \cline{3-3} -\;2x^2+4x & & 2x-4 \\ \cline{1-1} & -4x-1 & \\ - & -4x-8 & \\ \cline{2-2} & 7 & \end{array}$$

4 $f: x \mapsto \dfrac{(x-3)(5-x)}{x^2+4}$ geen VA HA $y = -1$ geen SA

5 $f: x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x-1}$ VA $x = 1$ geen HA SA $y = x + 3$

$$\begin{array}{rr|l} x^2+2x & & x-1 \\ \cline{3-3} -\;x^2-x & & x+3 \\ \cline{1-1} & 3x & \\ - & 3x-3 & \\ \cline{2-2} & 3 & \end{array}$$

6 $f: x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+8}$ VA $x = -2$ HA $y = 0$ geen SA

7 $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ geen VA geen HA SA $y = x$

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - x & x^2 + 1 \\ \cline{3-3} - & x^3 + x & x \\ \cline{2-2} & -2x & \end{array}$$

8 $f: x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x}{x + 3}$ VA $x = -3$ geen HA geen SA

Opdracht 17 bladzijde 85

Geef het voorschrift van een functie met nulpunt 2 en waarvan de grafiek een verticale asymptoot met vergelijking $x = 4$ en een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$ heeft.

bijvoorbeeld $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x - 4)^2}$

Opdracht 18 bladzijde 85

Geef het functievoorschrift van een gebroken rationale functie waarvan de grafiek een schuine asymptoot met vergelijking $y = x$ heeft.

bijvoorbeeld $f(x) = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ want

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 + 1 & x \\ \cline{3-3} - & x^2 & x \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

Opdracht 19 bladzijde 88
Welke grafiek hoort bij welke functie? Los op zonder rekentoestel.

grafiek A hoort bij $f_1(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

grafiek B hoort bij $f_5(x) = \dfrac{5x - 25}{x^2}$

grafiek C hoort bij $f_3(x) = \dfrac{x - 2}{-x^3 + 9x}$

Opdracht 20 bladzijde 89
Geef van elke functie het domein, de nulpunten en de tekentabel.

1 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$

- $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

  $D = 16$
- nulpunten : $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

x		-3		-1		1	
$x^2 + 2x - 3$	+	0	−	−	−	0	+
$x + 1$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	$\vert$	−	0	+

2 $f(x)=\dfrac{-x^3+x^2-2}{x^2}$

- $\text{dom} f = \mathbb{R}_0$
- nulpunten : $-x^3 + x^2 - 2 = 0$

  $(x + 1)(-x^2 + 2x - 2) = 0$

  ↳ geen nulpunten

  $\Leftrightarrow x = -1$ $D = -4$

	-1	1	0	-2
-1		1	-2	2
	-1	2	-2	0

x		-1		0	
$-x^3 + x^2 - 2$	+	0	−	−	−
x^2	+	+	+	0	+
$f(x)$	+	0	−	$\vert$	−

3 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^4+2x^2+1}$

- $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 0$ geen opl.

  dom$f$ = $\mathbb{R}$
- nulpunten $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = -3$

x		-3		3	
$x^2 - 9$	+	0	−	0	+
$x^4 + 2x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+

4 $f(x)=\dfrac{15x^2-13x+2}{-15x^3-7x^2+2x}$

- $-15x^3 - 7x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $-15x^2 - 7x + 2 = 0$

  $D = 169$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{-2}{3}$ of $x = \dfrac{1}{5}$

  dom$f$ = $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-2}{3}, 0, \dfrac{1}{5}\right\}$

  $D = 49$
- nulpunten $15x^2 - 13x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ of $x = \dfrac{1}{5}$

x		$\frac{-2}{3}$		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{3}$	
$15x^2 - 13x + 2$	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$-15x^3 - 7x^2 + 2x$	+	0	−	0	+	0	−	−	−
$f(x)$	+	|	−	|	+	|	+	0	−

Opdracht 21 bladzijde 89

Bepaal de verticale asymptoten en de openingen van de grafieken van de functies met voorschrift

1 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

VA $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$

geen openingen

2 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+2}$

- $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 3$
- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

VA $x = -2$

geen openingen

3 $f(x) = \dfrac{3x}{x(x-1)}$

- $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x\,(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 1$

VA $x = 1$

opening $(0, -3)$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \text{ mits } x \neq 0$$

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

- $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (dubbel)

  $D = 16$
- $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} \text{ mits } x \neq 1$$

VA $x = -3$

opening $(1, 0)$

5 $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

- $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

vereenvoudigd functievoorschrift

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} \text{ mits } x \neq 2$$

VA $x = -2$

opening $(2, 3)$

6 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+2}$

$$= \frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+4x+4-x^2+2x-1}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{6x+3}{(x-1)(x+2)}$$

- $6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
- $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -2$ VA $x = 1$ en $x = -2$

geen openingen

Opdracht 22 bladzijde 89

Hoeveel reële nulpunten heeft de functie met voorschrift

$f(x)=\dfrac{x(x^2+1)(x^2-x-6)}{(x-3)^2(5-x)}$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

(Bron © VWO 1985-1986, eerste ronde)

$x(x^2 + 1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 + 1 = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0$

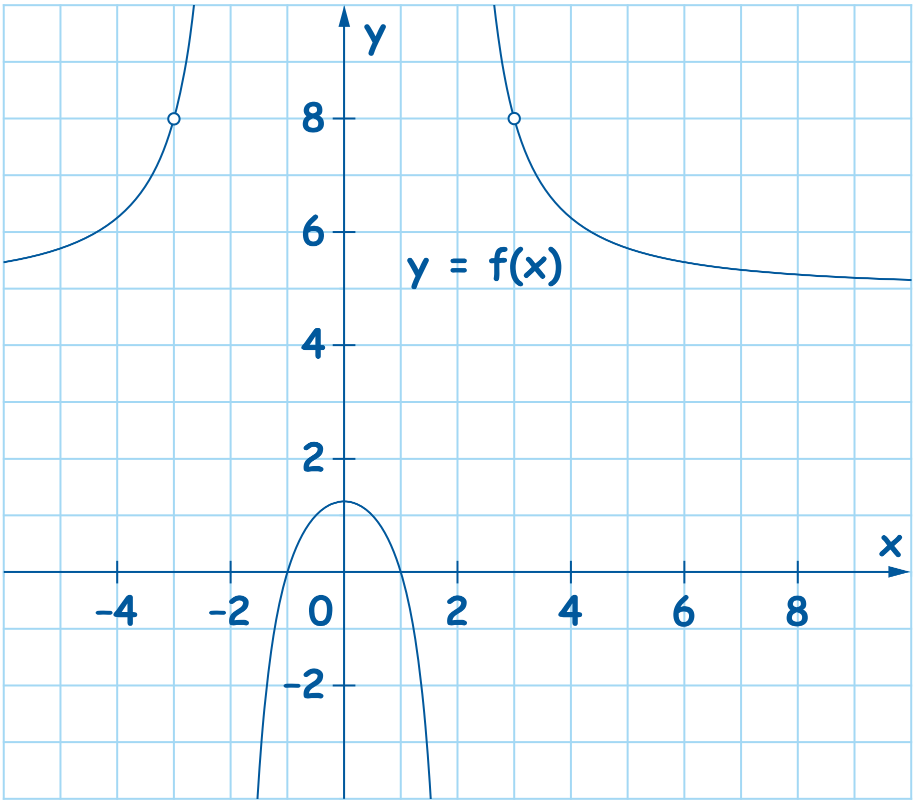
$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -2$ of $x = 3$

$(x - 3)^2 (5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (dubbel) of $x = 5$

3 is geen nulpunt van de functie, dus zijn er 2 nulpunten (0 en –2) → antwoord B

Opdracht 23 bladzijde 89

Schets de grafiek van een functie met nulpunten 1 en −1, waarvan de grafiek als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 2$ en $x = -2$ heeft en openingen voor $x = 3$ en voor $x = -3$ heeft.



Opdracht 24 bladzijde 89

Bepaal telkens het voorschrift van een rationale functie

1 met nulpunt 2 en waarvan de grafiek als verticale asymptoten de rechten met vergelijking $x = 4$ en $x = -3$ heeft;

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x - 4)(x + 3)}$$

2 waarvan de grafiek door de oorsprong gaat, de rechte met vergelijking $x = 1$ als verticale asymptoot heeft en voor $x = 3$ een opening heeft.

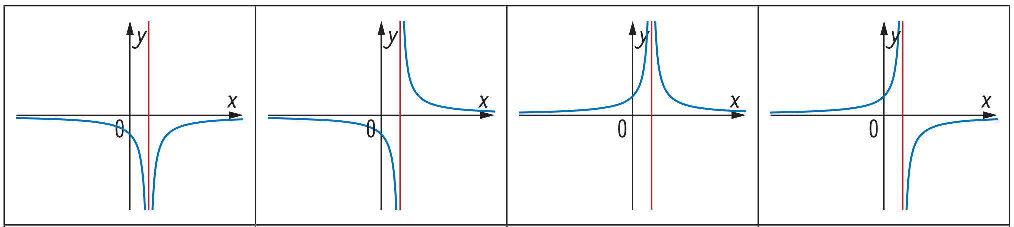
$$f(x) = \frac{x(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)}$$

Opdracht 25 bladzijde 90

Beantwoord de vragen voor de gegeven functies.

a Bepaal de eventuele verticale asymptoten en openingen van de grafiek van *f*.

b Voor de ligging van de grafiek t.o.v. de verticale asymptoot zijn er vier mogelijkheden:



A	B	C	D

Bepaal hoe de grafiek van *f* ligt t.o.v. elke verticale asymptoot.

c Geef, indien mogelijk, het vereenvoudigd functievoorschrift.

1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$

D = 1

a) • $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = 1$ VA $x = -2$

• $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ geen openingen

b)

x		-2		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	0	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
f(x)	-	|	+	0	-	0	+

type B : als $x \underset{<}{\to} -2$ dan $f(x) \to -\infty$

als $x \underset{>}{\to} -2$ dan $f(x) \to +\infty$

c) geen vereenvoudigd functievoorschrift want geen opening

2 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

a) • $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$ VA $x = 3$

D = 1

• $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = 3$ opening voor $x = 2$

b)

x		-2		2		3	
$x^2 - 4$	+	0	−	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	|	−	|	+

type D : als $x \underset{<}{\rightarrow} 3$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} 3$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

c) vereenvoudigd functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ mits $x \neq 2$ (opening is dus (2,−4))

3 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

a) • $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ VA $x = -1$

• $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$ opening voor $x = 1$

b)

x		-1		1	
$x^3 - 1$	−	−	−	0	+
$x^2 - 1$	+	0	−	0	+
$f(x)$	−	|	+	|	+

type B : als $x \underset{<}{\rightarrow} -1$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} -1$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

c) vereenvoudigd functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mits $x \neq 1$ (opening is dus $(1, \frac{3}{2})$)

4 $f(x)=\dfrac{3x^3+4x+1}{-x+1}$

a) • $3x^3 + 4x + 1 = \Leftrightarrow x \approx -0{,}2397$ (met rekentoestel) VA $x = 1$

• $- x + 1 = \Leftrightarrow x = 1$ geen openingen

b)

x		$-0{,}2397$		1	
$3x^3 + 4x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x + 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$

type D : als $x \underset{<}{\rightarrow} 1$ dan $f(x) \rightarrow +\infty$

als $x \underset{>}{\rightarrow} 1$ dan $f(x) \rightarrow -\infty$

c) geen openingen dus geen vereenvoudigd functievoorschrift

5 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

a) • $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ geen VA

• $x^2 + 1 = 0$ geen oplossingen geen openingen

b) geen VA dus geen type wat betreft de ligging

c) geen openingen dus geen vereenvoudigd functievoorschrift

6 $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}$

$D = 9$

a) • $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ of $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$ of $x = 1$ of $x = -1$

b) • $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$

geen VA

opening voor $x = 1$ en voor $x = -1$

geen VA dus geen type wat betreft de ligging

vereenvoudigd functievoorschrift

c) $f(x) = (x - 2)(x + 2)$ mits $x \neq -1$ en $x \neq 1$

(dus openingen $(1, -3)$ en $(-1, -3)$)

Opdracht 26 bladzijde 90

Stel $f(x)=\dfrac{x-a}{x-b}$ voor zekere constanten $a, b \in \mathbb{R}$.

Als $f(1)$ niet gedefinieerd is en $f(2)=0$, dan is $f(0{,}5)$ gelijk aan

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © VWO 2007–2008, tweede ronde)

- f(1) is niet gedefinieerd, dus 1 is een nulpunt van de noemer, dus b = 1
- f(2) = 0 dus a = 2
- $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$
- $f(0{,}5) = \dfrac{\frac{-3}{2}}{\frac{-1}{2}} = 3 \rightarrow$ antwoord D

Opdracht 27 bladzijde 90

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $\dfrac{-3x^2+4x-5}{2x-7} > 0$

D = -44

- $-3x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen
- $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

x		$\frac{7}{2}$	
$-3x^2+4x-5$	-	-	-
$2x-7$	-	0	+
$f(x)$	+	|	-

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{2}$

2 $\dfrac{x^3-1}{4x^3+4x^2+x} \leqslant 0$

- $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $4x^3 + 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $4x^2 + 4x + 1 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ of $(2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{-1}{2}$ (dubbel)

x		$\frac{-1}{2}$		0		1	
$x^3 - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x^3 + 4x^2 + x$	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	|	$+$	|	$-$	0	$+$

$fx) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$

3 $\dfrac{-x^2-3x+4}{x} \geqslant 0$

$D = 25$

- $-x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ of $x = 1$
- $x = 0$

x		-4		0		1	
$-x^2 - 3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -4$ of $0 < x \leqslant 1$

4 $\dfrac{x^6 - x^4 + x^3 - x}{5x^2 + 12x + 4} < 0$

• $x^6 - x^4 + x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x^4\,(x^2 - 1) + x\,(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x)\,(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$ of $x = -1$

• $5x^2 + 12x + 4 = 0 \overset{D\,=\,64}{\Leftrightarrow} x = -2$ of $x = \dfrac{-2}{5}$

x		-2		-1		$\frac{-2}{5}$		0		1	
$x^6 - x^4 + x^3 - x$	+	+	+	0	+	+	+	0	-	0	+
$5x^2 - 12x + 4$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	|	-	0	-	|	+	0	-	0	+

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ of $-1 < x < \dfrac{-2}{5}$ of $0 < x < 1$

5 $x - 7 + \dfrac{24x + 12}{x^2 + 3x + 2} \geqslant 0$

$\dfrac{(x - 7)\,(x^2 + 3x + 2) + 24x + 12}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x - 7x^2 - 21x - 14 + 24x + 12}{x^2 + 3x + 2}$

$= \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

• $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = 1$ of $x = 2$

	1	-4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	0

• $x^2 - 3x + 2 = 0 \overset{D\,=\,1}{\Leftrightarrow} x = -2$ of $x = -1$

x		-2		-1		1		2	
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	-	-	-	-	-	0	-	0	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	|	+	|	-	0	-	0	+

$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ of $x > 2$ of $x = 1$

Opdracht 28 bladzijde 91

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $\frac{x^2-12}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-12}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-12-x}{x} < 0$

$D = 49$

- $x^2 - 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -3$
- $x = 0$

x		-3		0		4	
$x^2 - x - 12$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\underline{-}$	0	$+$	$\vert$	$\underline{-}$	0	$+$

$\frac{x^2-12}{x} < 1 \Leftrightarrow x < -3$ of $0 < x < 4$

2 $\frac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} < 7 \Leftrightarrow \frac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} - 7 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{6x^2+5x+5-7(x^2+x+1)}{x^2+x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2x-2}{x^2+x+1} < 0$

$D = -4$

- $-x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen

$D = -3$

- $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ geen oplossingen

x	
$-x^2 - 2x - 2$	$-$
$x^2 + x + 1$	$+$
y	$\underline{-}$

$\frac{6x^2+5x+5}{x^2+x+1} < 7 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

3 $\dfrac{x}{1-x^2} \geqslant \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-(1-x)(1-x)}{1-x^2} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-(1-2x+x^2)}{1-x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+3x-1}{1-x^2} \geqslant 0$

$D = 5$

- $-x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ of $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
- $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1$ of $x=-1$

x		-1		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$-x^2+3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$+$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$-$	0	$+$

$\dfrac{x}{1-x^2} \geqslant \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow x < -1$ of $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 1$ of $x \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

4 $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-4} \leqslant \dfrac{-8}{x^2-16} \Leftrightarrow \dfrac{x-4+x+4-8}{x^2-16} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+8}{x^2-16} \leqslant 0$

- $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$
- $x^2-16=0 \Leftrightarrow x=4$ of $x=-4$

x		-4		4	
$2x+8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-16	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$+$

$\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x-4} \leqslant \dfrac{-8}{x^2-16} \Leftrightarrow x < -4$ of $-4 < x < 4$

5 $\dfrac{x}{x^2-5x+6} > \dfrac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x-3)} - \dfrac{2}{(x-2)(x+2)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x+2)-2(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-2x+6}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+6}{(x-2)(x-3)(x+2)} > 0$

- $x^2+6=0$ geen oplossingen
- $(x-2)(x-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=2$ of $x=3$ of $x=-2$

x		-2		2		3	
x^2+6	+	+	+	+	+	+	+
$(x-2)(x-3)(x+2)$	–	0	+	0	–	0	+
y	–	|	+	|	–	|	+

$\dfrac{x}{x^2-5x+6} > \dfrac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow -2 < x < 2$ of $x > 3$

6 $\dfrac{x}{x^2-6x+9} + \dfrac{2}{x^2-7x+12} < \dfrac{1}{x-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-3)^2} + \dfrac{2}{(x-3)(x-4)} - \dfrac{1}{x-3} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)+2(x-3)-(x-3)(x-4)}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+2x-6-x^2+4x+3x-12}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-18}{(x-3)^2(x-4)} < 0$

- $5x-18=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{18}{5}$
- $(x-3)^2(x-4)=0 \Leftrightarrow x=3$ (dubbel) of $x=4$

x		3		$\frac{18}{5}$		4	
$5x-18$	–	–	–	0	+	+	+
$(x-3)^2(x-4)$	–	0	–	–	–	0	+
y	+	|	+	0	–	|	+

$\dfrac{x}{x^2-6x+9} + \dfrac{2}{x^2-7x+12} < \dfrac{1}{x-3} \Leftrightarrow \dfrac{18}{5} < x < 4$

Opdracht 29 bladzijde 91

Bepaal het voorschrift van een rationale functie

1 die even is en waarvan de grafiek de rechte met vergelijking $x = 3$ als verticale asymptoot heeft;

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

2 die oneven is en waarvan de grafiek de rechte met vergelijking $x = -1$ als verticale asymptoot heeft;

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

3 waarvan de grafiek door de oorsprong gaat, de rechte met vergelijking $x = -1$ als verticale asymptoot heeft en een opening heeft in het punt met coördinaat $(6,3)$.

$$f(x) = \frac{a\,(x - 6)x}{(x + 1)\,(x - 6)}$$

stel $g(x) = \dfrac{ax}{x + 1}$ dan is $g(6) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{6a}{7} = 3 \Leftrightarrow a = \dfrac{7}{2}$

dus $f(x) = \dfrac{7x\,(x - 6)}{2(x + 1)\,(x - 6)}$ (bijvoorbeeld)

Opdracht 30 bladzijde 91

Bepaal c als je weet dat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^3 - cx^2 + x - 2}$ als verticale asymptoot de rechte met vergelijking $x = 2$ heeft.

2 is geen nulpunt van de teller, dus moet het een (minstens) enkelvoudig nulpunt van de noemer zijn als $x = 2$ een verticale asymptoot is, dus

$2^3 - c \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4c = 0$

$\Leftrightarrow c = 2$

Opdracht 31 bladzijde 92

Bepaal een mogelijk voorschrift van de functies waarvan de grafiek gegeven is. De verticale asymptoten zijn in het rood getekend.

1) $f(x) = \dfrac{a\,(x^2 - 16)}{x^2 - 9}$ $\quad f(0) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-16a}{-9} = -1 \Leftrightarrow a = \dfrac{-9}{16}$

dus $f(x) = \dfrac{-9\,(x^2 - 16)}{16\,(x^2 - 9)}$

2) $f(x) = \dfrac{x\,(x-2)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+2)}{(x-2)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+2)} = \dfrac{x\,(x^2-1)\,(x^2-4)}{(x^2-1)\,(x^2-4)}$

3) $f(x) = \dfrac{a}{(x^2-9)\,(x^2-16)}$ $\quad f(0) = 10 \Leftrightarrow \dfrac{a}{-9 \cdot (-16)} = 10 \Leftrightarrow a = 1440$

dus $f(x) = \dfrac{1440}{(x^2-9)\,(x^2-16)}$

4) $f(x) = \dfrac{(-x^2 + 4)\,(x-1)}{x-1}$

Opdracht 32 bladzijde 92

Een cilindervormig blikje frisdrank heeft een inhoud van 0,33 l. De oppervlakte van het materiaal dat nodig is om dit blikje te maken, hangt af van de hoogte *h* en van de straal *r* van het boven– en grondvlak.

1 Toon aan dat $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$ (met *h* en *r* in cm).

$0{,}33\ \text{l} = 0{,}33\ \text{dm}^2 = 330\ \text{cm}^2$

$V = \pi r^2 h$

$330 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{330}{\pi r^2}$

2 Noem *A* de totale oppervlakte van het blikje.

Toon aan dat $A = \dfrac{2\pi r^3 + 660}{r}$.

$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 + \dfrac{2\pi r \cdot 330}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3 + 660}{r}$

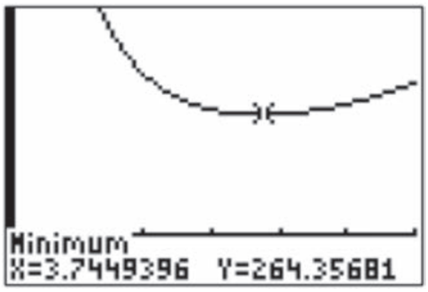
3 Hoe groot is de straal *r*, op 1 mm nauwkeurig, bij een minimale totale oppervlakte van het blikje?

Wat is de hoogte van zo'n blikje?

We plotten de grafiek van A met het grafisch rekentoestel, met bijvoorbeeld als vensterinstellingen: $x_{min} = 0$; $x_{max} = 6$ $y_{min} = -100$; $y_{max} = 500$.

We vinden een minimum voor $r \approx 3{,}75$ cm; nl. $A \approx 264$ cm^2

De hoogte is dan $h = \dfrac{330}{\pi \cdot 3{,}75^2} = 7{,}50$ cm



Opdracht 33 bladzijde 93

Thomas wil een rechthoekig gedeelte van een stuk grond omheinen. Het moet een oppervlakte van 1200 m^2 hebben. Het stuk grond grenst aan een gebouw dat aan één zijde als afsluiting dient. De afsluiting evenwijdig met het gebouw kost € 30 per meter en die aan de andere twee zijden € 20 per meter.

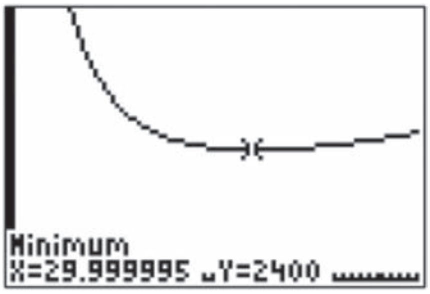
Voor welke afmetingen van het stuk grond is de kostprijs minimaal?

$xy = 1200 \Leftrightarrow y = \dfrac{1200}{x}$

kostprijs: $f(x) = 2x \cdot 20 + y \cdot 30$

$= 40x + \dfrac{36000}{x}$

We plotten de grafiek met bijvoorbeeld als vensterinstellingen $x_{min} = 0$; $x_{max} = 50$; $y_{min} = 0$; $y_{max} = 5000$

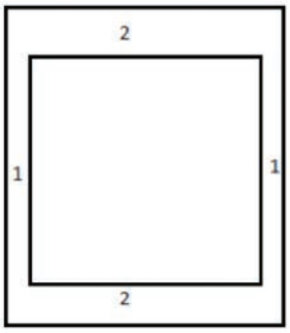


We vinden een minimum voor $x = 30$ m; dan is de kostprijs € 2400. De zijden loodrecht op het gebouw meten 30 m, de zijde parallel aan het gebouw meet 40 m.

Opdracht 34 bladzijde 93

Het bedrukte gedeelte van een rechthoekig blad is 200 cm².

Bepaal het voordeligste formaat (dit is het formaat met de kleinste oppervlakte) als er links en rechts 1 cm en onder en boven 2 cm wit moet blijven.



$h \cdot b = 200 \Leftrightarrow h = \dfrac{200}{b}$

oppervlakte blad : $A = (h + 4)(b + 2)$

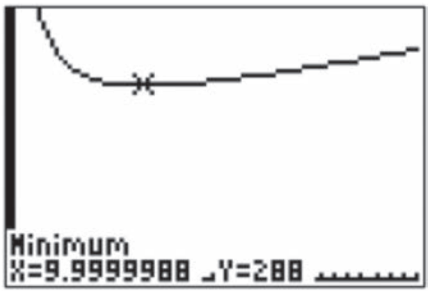
$= hb + 2h + 4b + 8$

$= 208 + 4b + \dfrac{400}{b}$

Plot de grafiek met mogelijke vensterinstellingen

$x_{min} = 0$; $x_{max} = 30$;

$y_{min} = 0$; $y_{max} = 400$



We vinden een minimum voor $x = 10$ cm. De oppervlakte van het blad is dan 288 cm². De breedte van het bedrukt gedeelte is 10 cm, de hoogte 20 cm.

Opdracht 35 bladzijde 93

Hoeveel gehele oplossingen heeft de ongelijkheid $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > \dfrac{1}{4}$?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

(Bron © VWO 2007–2008, tweede ronde)

$\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow |x - 1| < 4$ mits $x \neq 1$

x mag gelijk zijn aan 4, 3, 2, 0, –1, –2

dus antwoord B: 6

Opdracht 36 bladzijde 93

Bepaal alle horizontale, verticale en schuine asymptoten van de grafiek van de functies met voorschrift

1 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

VA $x = 2$

gr (t(x)) = gr(n(x)) dus HA $y = 1$

geen SA

2 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

VA $x = -1$

gr (t(x)) = gr(n(x))+1 dus SA $y = x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-\quad x^3 + 2x^2 + x & x - 2 \\ \cline{1-1}
-2x^2 - x & \\
-\quad -2x^2 - 4x - 2 & \\ \cline{1-1}
3x + 2 &
\end{array}
$$

geen HA

3 $f(x)=4+\dfrac{x}{x^2-1}$

$f(x) = 4 + \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{4x^2 - 4 + x}{x^2 - 1}$

VA $x = 1$ of $x = -1$

gr (t(x)) = gr(n(x)) dus HA $y = 4$

4 $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+x-6}$

D = 25

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -3$

VA $x = 2$; $x = -3$

gr (t(x)) < gr(n(x)) dus HA $y = 0$

5 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+1}$

D = 25

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 4$

geen VA want −1 is ook nulpunt van de teller

gr (t(x)) = gr(n(x)) +1 dus SA $y = x + 2$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 3x - 4 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\quad x^2 + x \phantom{{}-4} & x + 2 \\ \cline{1-1}
2x - 4 & \\
-\quad 2x + 2 & \\ \cline{1-1}
-6 &
\end{array}$$

Opdracht 37 bladzijde 93

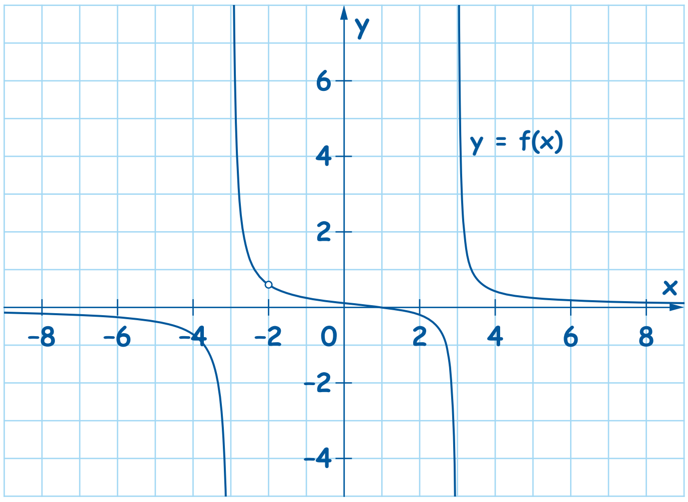
Toon aan dat de grafiek van de functie met voorschrift $g(x)=x^2-2x+7$ de asymptotische kromme is van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+3}$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 + x + 1 & x + 3 \\ \cline{2-2}
-\quad x^3 + 3x^2 \phantom{{}+x+1} & x^2 - 2x + 7 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + x + 1 & \\
-\quad -2x^2 - 6x \phantom{{}+1} & \\ \cline{1-1}
7x + 1 & \\
-\quad 7x + 21 & \\ \cline{1-1}
-20 &
\end{array}$$

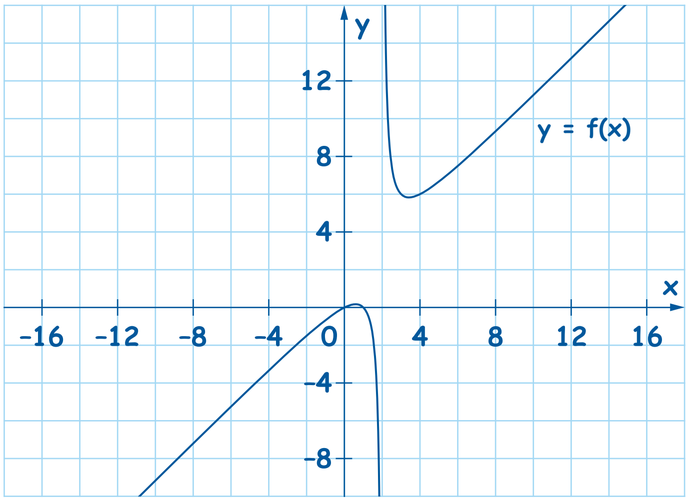
$y = x^2 - 2x + 7$ is de asymtotische kromme van de grafiek van f(x)

Opdracht 38 bladzijde 94
Maak een ruwe schets van de grafiek van de gegeven functies.
Gebruik geen rekentoestel.

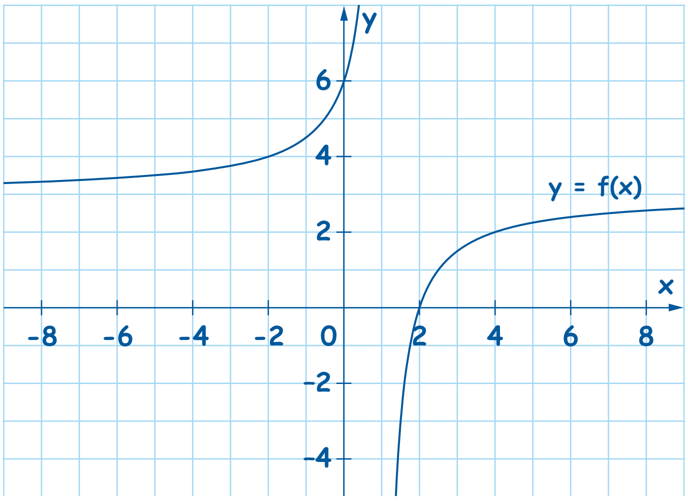
1 $f: x \mapsto \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2-9)}$



2 $f: x \mapsto \dfrac{x(x-1)}{(x-2)}$



3 $f: x \mapsto \dfrac{3(x-2)}{(x-1)}$



Opdracht 39 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + 27}{x - a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Bepaal a zodat de grafiek van f een verticale en een horizontale asymptoot heeft.

horizontale asymptoot: gr(t(x)) ⩽ gr(n(x)); dus a = 0

Dan is er ook een VA: x = 0

2 Bepaal a zodat de grafiek van f een rechte is met een opening voor $x = a$.

a moet nulpunt zijn van de teller (en van de noemer)

dus $a^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

3 Bepaal a zodat de grafiek van f een verticale en een schuine asymptoot heeft.

$a \neq 0$ en $a \neq -3$

Dan is gr(t(x)) = gr(n(x)) + 1 dus is er een schuine asymptoot.

a is dan geen nulpunt van de teller dus x = a is VA.

Opdracht 40 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 + x - a}{x + 2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Voor welke waarde van a is de grafiek van f een rechte met een opening?

-2 moet een nulpunt zijn van de teller, dus $4 - 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$

2 Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f voor de andere waarden van a.

VA $x = -2$

$\text{gr}(t(x)) = \text{gr}(n(x))$ dus SA $y = x - 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + x - a & x + 2 \\ \cline{3-3}
- & x^2 + 2x & x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -x - a & \\
- & -x - 2 & \\ \cline{2-2}
 & -a + 2 &
\end{array}
$$

Opdracht 41 bladzijde 94

Gegeven is de familie van functies met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^3 + x^2 - 9ax - 7}{x^2 - 9}$ $(a \in \mathbb{R})$.

1 Voor welke waarde van a heeft de grafiek van f een horizontale asymptoot?

$\text{gr}(t(x)) \leqslant \text{gr}(n(x))$ dus $a = 0$

2 Geef een vergelijking van deze horizontale asymptoot.

$y = 1$

3 Waarom heeft de grafiek van f geen opening voor $x = 3$ en ook niet voor $x = -3$, ongeacht de waarde van a?

3 en -3 zijn geen nulpunten van de teller, ongeacht de waarde van a:

$a \cdot 3^3 + 3^2 - 9a \cdot 3 - 7 = 2 \neq 0$

$a(-3)^3 + (-3)^2 - 9a(-3) - 7 = 2 \neq 0$

4 Bepaal een vergelijking van elke verticale asymptoot van de grafiek van f.

$x = 3;\ x = -3$

5 Bepaal een vergelijking van de schuine asymptoot van de grafiek van f, in functie van a.

$$\begin{array}{llll|l}
ax^3 & +\,x^2 & -\,9ax & -\,7 & x^2 - 9 \\ \cline{5-5}
ax^3 & & -\,9ax & & ax + 1 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & & -\,7 & \\
 & x^2 & & -\,9 & \\ \cline{2-4}
 & & & 2 &
\end{array}$$

SA $y = ax + 1$

6 Door welk punt gaan al deze schuine asymptoten?

door $(0,1)$

Opdracht 42 bladzijde 95

Bereken a en b zodat $y = 4x + 3$ een vergelijking is van de schuine asymptoot van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x - 2}$.

$$\begin{array}{r|l}
ax^2 + bx + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2}
ax^2 - 2ax & ax + b + 2a \\ \cline{1-1}
(b + 2a)x + 3 & \\
(b + 2a)x - 2b - 4a & \\ \cline{1-1}
3 + 2b + 4a &
\end{array}$$

$ax + b + 2a = 4x + 3$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 - 8 = -5 \end{cases}$$

Opdracht 43 bladzijde 95

Bepaal a, b en c als de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x+c}$ de rechten met vergelijking $x=2$ en $y=x+4$ als asymptoten heeft.

VA $x = 2$ dus $c = -2$

SA $y = x + 4$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & ax^2 + bx + 4 & x - 2 \\ \cline{3-3}
 & ax^2 - 2ax & ax + b + 2a \\ \cline{2-2}
- & (b + 2a)x + 4 & \\
 & (b + 2a)x - 2b - 4a & \\ \cline{2-2}
 & + 2b + 4a &
\end{array}
$$

$$x + 4 = ax + b + 2a \quad \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

Opdracht 44 bladzijde 95

Bepaal a en b als de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{ax^3+b}{x-b}$ de parabool met vergelijking $y=3x^2+6x+12$ als asymptotische kromme heeft.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & ax^3 + \qquad\qquad b & x - b \\ \cline{3-3}
 & ax^3 - abx^2 & ax^2 + abx + ab^2 \\ \cline{2-2}
- & abx^2 + \qquad b & \\
 & abx^2 - ab^2x & \\ \cline{2-2}
- & ab^2x + b & \\
 & ab^2x - ab^3 & \\ \cline{2-2}
- & b + ab^3 &
\end{array}
$$

$$ax^2 + abx + ab^2 = 3x^2 + 6x + 12$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ ab = 6 \\ ab^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{6}{3} = 2 \\ b^2 = \dfrac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

dus $a = 3$ en $b = 2$

Opdracht 45 bladzijde 95

Bepaal een gebroken rationale functie

1 met 3 en 4 als nulpunten en waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $x = 2$ en $y = 1$ heeft;

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)^2} \text{ (bijvoorbeeld)}$$

2 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $x = -3$ en $y = 2$ heeft;

$$f(x) = \frac{2x}{x + 3} \quad \text{(bijvoorbeeld)}$$

3 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $y = x + 2$ en $x = 4$ heeft;

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 4}$$

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + \; bx + c & x - 4 \\ \cline{2-2} ax^2 - 4ax & ax + (b + 4a) \\ \hline (b + 4a)x + c & \\ (b + 4a)x - 4b - 16a & \\ \hline \qquad\quad c + 4b + 16a & \end{array}$$

$$ax + b + 4a = x + 2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 4a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - 4 = -2 \end{cases} \qquad c \text{ is willekeurig, bijv. } c = 0$$

$$\text{Dus: } f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 4} \text{ (bijvoorbeeld)}$$

4 waarvan de grafiek als asymptoten de rechten met vergelijking $y = -x - 1$, $x = 1$ en $x = 3$ heeft.

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-1)(x-3)}$$

$$\begin{array}{r|l}
ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 - 4x + 3 \\ \cline{2-2}
-\quad ax^3 - 4ax^2 + 3ax & ax + (b + 4a) \\ \cline{1-1}
(b+4a)x^2 + (c-3a)x + d & \\
-\quad (b+4a)x^2 + (-4b - 16a)x + (3b + 12a) & \\ \hline
(c - 3a + 4b + 16a)x + (d - 3b - 12a) &
\end{array}$$

$ax + b + 4a = -x - 1$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b + 4a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

c en d zijn willekeurig, bijv. $c = d = 0$

Dus: $f(x) = \dfrac{-x^3 + 3x^2}{(x-1)(x-3)}$ (bijvoorbeeld)

Opdracht 46 bladzijde 95
Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$.

1) Bepaal de asymptoten van de grafiek van f.

VA $x = -1$

SA $y = x - 3$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 2x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\quad x^2 + x & x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x + 1 & \\
-\quad -3x - 3 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

2) Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van deze asymptoten.

snijpunt $S(-1, -4)$

3) Toon aan dat S een symmetriemiddelpunt is van deze grafiek.

Verschuif de grafiek van f over $\vec{v}$ (1, 4), zo ontstaat de grafiek van g:

$$g(x) = f(x - 1) + 4 = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1) + 1}{(x-1)+1} + 4$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 + 1}{x} + \frac{4x}{4}$$

$$= \frac{x^2 + 4}{x}$$

$g(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 4}{-x} = -g(x)$ dus g is oneven, dat betekent dat de grafiek van f het punt S(-1, -4) als symmetriemiddelpunt heeft.

Opdracht 47 bladzijde 95

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^4}$.

1) Bepaal het domein en de eventuele nulpunten van f.

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

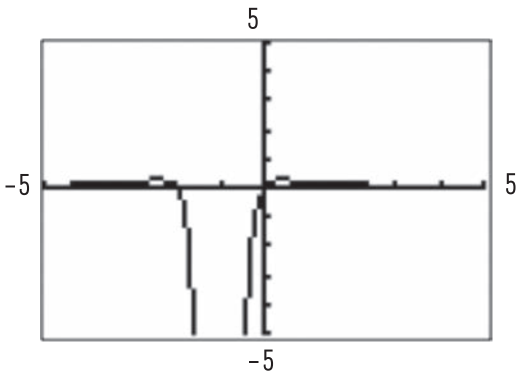
nulpunten: 0, -2

2) Geef een vergelijking van elke asymptoot van de grafiek van f.

HA y = 0

VA x = -1

3) Plot de grafiek van f.



4) Toon aan dat de rechte met vergelijking $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

We verschuiven de grafiek van f over $\vec{v}$ (1, 0), dan ontstaat de grafiek van g :

$$g(-x) = f(x-1) = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)}{(x-1+1)^4} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 2x - 2}{x^4} = \frac{x^2-1}{x^4}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4} = \frac{x^2-1}{x^4} = g(x)$$ dus g is een even functie, dat wil zeggen dat $x = -1$ een symmetrieas is van de grafiek van f.

Opdracht 48 bladzijde 96

De gegeven grafieken zijn die van de asymptotische krommen van de functies waarvan het voorschrift gegeven is. Bepaal zonder rekentoestel welke asymptotische kromme bij welk voorschrift hoort.

1) $f_1(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$

$= x^2 - x + 1 - \dfrac{2}{x+1}$ → grafiek B

2) $f_2(x) = \dfrac{-x^4 + 16}{x + 3}$ quotiënt is een dalende functie van de 3ᵉ graad → grafiek F

3) $f_3(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 9}$ quotiënt is een tweedegraadsfunctie met als grafiek een dalparabool → grafiek E

4) $f_4(x) = \dfrac{-2x^3}{x - 1}$ quotiënt is een tweedegraadsfunctie, de grafiek is de smalste bergparabool ($q(x) = \underline{-2}x^2$ ....) → grafiek D

5) $f_5(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x - 2}$ quotiënt is stijgende derdegraadsfunctie → grafiek C

6) $f_6(x) = \dfrac{-x^4}{x^2 - 1}$ quotiënt is tweedegraadsfunctie met grafiek de breedste bergparabool
($q(x) = \underline{-x^2}$ ....) $\rightarrow$ grafiek A

Opdracht 49 bladzijde 97
Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 4x}$.

1) Bepaal het domein en de eventuele nulpunten van f.

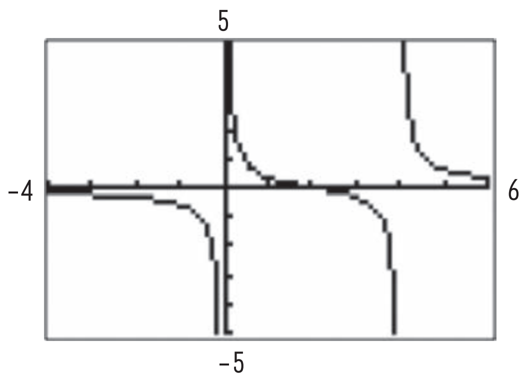
dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ nulpunt 2

2) Geef een vergelijking van elke asymptoot van de grafiek van f.

VA $x = 0$; $x = 4$

HA $y = 0$

3) Plot de grafiek van f.



4) Toon aan dat het punt $P(2,0)$ een symmetriemiddelpunt is van de grafiek van f.

Verschuif de grafiek van f over $\vec{v}$ (-2, 0), zo ontstaat de grafiek van g:

$$g(x) = f(x+2) = \frac{x + 2 - 2}{(x+2)^2 - 4(x+2)} = \frac{x}{x^2 + 4x + 4 - 4x - 8} = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2 - 4} = -g(x) \rightarrow$ g is een oneven functie, P(2,0) is dus een symmetriemiddelpunt van de grafiek van f.

Opdracht 50 bladzijde 97

1) a) Schrijf de functie $f(x)=\dfrac{-3x-10}{x+4}$ als $f(x)=q(x)+\dfrac{r(x)}{n(x)}$ m.b.v. de euclidische deling.

$$\begin{array}{rr|l} & -3x-10 & x+4 \\ \cline{3-3} - & -3x-12 & -3 \\ \cline{2-2} & 2 & \end{array}$$

$$f(x) = -3 + \frac{2}{x+4}$$

$$\left(\text{of } f(x) = \frac{-3x-12+2}{x+4} = \frac{-3(x+4)}{x+4} + \frac{2}{x+4}\right)$$

b) Toon aan dat de grafiek van de functie f ontstaat uit die van de functie met voorschrift $g(x)=\dfrac{1}{x}$ door een aantal transformaties.

$$y = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 2

$$y = \frac{2}{x}$$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (-4, -3)

$$y = \frac{2}{x+4} - 3$$

c) Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

VA $x = -4$

HA $y = -3$

2) Bepaal bij de volgende functies de asymptoten van de grafiek. Geef eveneens de transformaties waardoor de grafiek is ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{x}$.

a) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 4} = \frac{2x + 8 - 9}{x + 4} = 2 - \frac{9}{x + 4}$

VA $x = -4$

HA $y = 2$

$y = \frac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 9

$y = \frac{9}{x}$

$\downarrow$ spiegeling om de x - as

$y = \frac{-9}{x}$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\ (-4, 2)$

$y = 2 - \frac{9}{x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x-3} = \dfrac{1}{5}\,\dfrac{x - \frac{3}{5} + \frac{18}{5}}{x - \frac{3}{5}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\frac{18}{5}}{5x-3}$

VA $x = \dfrac{3}{5}$

HA $y = \dfrac{1}{5}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{18}{25}$

$y = \dfrac{\frac{18}{5}}{5x}$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$

$y = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\frac{18}{5}}{5x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{3x - 1} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{\frac{10}{3}}{3x - 1}$

VA $x = \dfrac{1}{3}$

HA $y = \dfrac{4}{3}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor $\dfrac{10}{9}$

$y = \dfrac{\frac{10}{3}}{3x}$

$\downarrow$ verschuiving over $\vec{v}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

$y = \dfrac{4}{3} + \dfrac{\frac{10}{3}}{3x - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3} = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$

VA $x = 3$

HA $y = 1$

$y = \dfrac{1}{x}$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$y = \dfrac{3}{x}$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (3, 1)

$y = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$

3) a) Schrijf de functie $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ als $f(x)=q(x)+\dfrac{r(x)}{n(x)}$ m.b.v. de euclidische deling.
Veronderstel hierbij dat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ en $ad-bc \neq 0$.

$$\begin{array}{rl|l} & ax + b & cx + d \\ \cline{3-3} - & ax + \dfrac{ad}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \cline{2-2} & b - \dfrac{ad}{c} & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$$

b) Geef vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f. Maak hierbij gebruik van de resultaten uit de vorige opdracht.

VA $x = \dfrac{-d}{c}$

HA $y = \dfrac{a}{c}$

c) Leg uit wat er gebeurt als $c=0$ en als $ad-bc=0$.

$c = 0$: f is eerstegraadsfunctie, dus geen gebroken rationale functie.
Er zijn dus geen VA en HA.

$bc - ad = 0$: de rest is dan nul, dus teller en noemer zijn veelvoud van elkaar.
De grafiek van f is dan een constante rechte $y = \dfrac{a}{c}$ met een opening $\left(\dfrac{-b}{a}, \dfrac{a}{c}\right) = \left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$

4) Geef een voorschrift van een homografische functie waarbij de grafiek als verticale asymptoot de rechte $x=-5$ heeft en als horizontale asymptoot de rechte $y=4$.

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x+5} = \frac{4x+21}{x+5}$$

5) Geef een voorschrift van een homografische functie waarvan de grafiek ontstaat uit de grafiek van $g(x)=\dfrac{1}{x}$ door een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1,2)$.

$$y = \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ verticale uitrekking met factor 3

$$y = \frac{3}{x}$$

$\downarrow$ verschuiving volgens $\vec{v}$ (-1, 2)

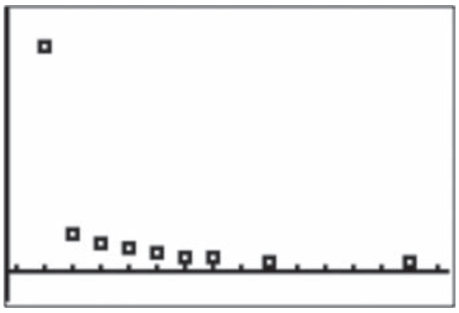
$$y = 2 + \frac{3}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$$

Opdracht 51 bladzijde 98

1) Voer deze data in in de lijsten L_1 en L_2 van je rekentoestel.

2) Plot de grafiek van deze punten met L_1 op de x–as.



3) $N = 1 + \dfrac{r}{H - H_0} \Leftrightarrow N - 1 = \dfrac{r}{H - H_0} \Leftrightarrow H - H_0 = \dfrac{r}{N - 1} \Leftrightarrow H = H_0 + \dfrac{r}{N - 1}$

4) De punten lijken op een kromme te liggen die nogal lijkt op de grafiek van $y = \frac{1}{x}$. Uit de context vermoeden we echter een horizontale asymptoot met

vergelijking $N = 1$: naarmate de valhoogte H toeneemt $(H \to +\infty)$ zal het benodigd gemiddeld aantal worpen afnemen, met als minimum $N = 1$ $(N \to 1)$.

Verder vermoeden we een verticale asymptoot: hoe lager de hoogte H, hoe groter het gemiddeld aantal worpen N en vanaf een bepaalde hoogte H_0 zal de schelp zelfs niet meer breken.
Wiskundig: als $H \to H_0$, zal $N \to +\infty$.
Een vergelijking van de verticale asymptoot is bijgevolg $H = H_0$.

Het eenvoudigste model voor N en H is dus

$$N = 1 + \frac{r}{H - H_0}$$

Toon aan dat je dit kunt herschrijven als

$$H = H_0 + r \cdot \frac{1}{N - 1}$$

m.b.v. LinReg (ax + b) L_1, L_2, y_1 vinden we $a \approx 19{,}704 = r$
$b \approx 1{,}047 = H_0$

5) Toon nu aan dat je de gemiddelde vereiste arbeid W om een schelp te breken kunt benaderen door $W = k \cdot H \cdot \left(1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}\right)$.

$$N = 1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}$$

$$W = k.H.N = k.H.\left(1 + \frac{19{,}7}{H - 1{,}05}\right)$$

6) Aangezien die k grafisch overeenkomt met een verticale uitrekking, heeft ze geen invloed op de waarde H waarvoor W een minimum bereikt en kunnen we voor dit probleem $k = 1$ stellen.
Bepaal nu de H–waarde waarvoor de vereiste arbeid voor de kraai minimaal wordt.

(Bron © Renée Gossez – T3 symposium, Oostende 2000)

W bereikt een minimum voor H ≈ 5,6 m.

Deze hoogte komt ongeveer overeen met de gemiddelde hoogte waarvan kraaien de schelp laten vallen.

Opdracht 52 bladzijde 100

1 $f_1(x)=\dfrac{-2x^2}{3x+3}$ hoort bij grafiek C

2 $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^2}$ hoort bij grafiek A

3 $f_3(x)=\dfrac{x^2-4}{-x^2}$ hoort bij grafiek D

4 $f_4(x)=\dfrac{x^3}{x^2+4}$ hoort bij grafiek F

5 $f_5(x)=\dfrac{x^3-8}{4x^2}$ hoort bij grafiek E

6 $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$ hoort bij grafiek B

Opdracht 53 bladzijde 101

Heeft de grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+4}$ voor $x=2$ een opening of is de rechte met vergelijking $x=2$ een verticale asymptoot?

Verklaar.

- $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 (x - 2) - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 2) = 0$
  $\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -1$ of $x = 2$
- $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (dubbel)

$x = 2$ is een VA want 2 is een dubbel nulpunt van de noemer en slechts een enkelvoudig nulpunt van de teller.

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Opdracht 54 bladzijde 101

Koppel elk voorschrift aan de bijbehorende grafiek zonder je rekentoestel te gebruiken.

1 $f_1(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$ = $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-3)}$ hoort bij grafiek A

2 $f_2(x)=\dfrac{x(x-1)^2}{(x+3)^2}$ hoort bij grafiek C

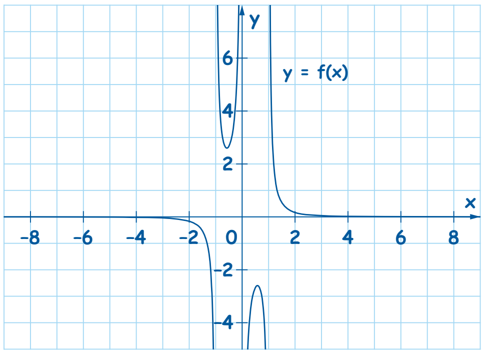
3 $f_3(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$ hoort bij grafiek B

4 $f_4(x)=\dfrac{x^4+4x^2}{x^2-4}$ hoort bij grafiek D

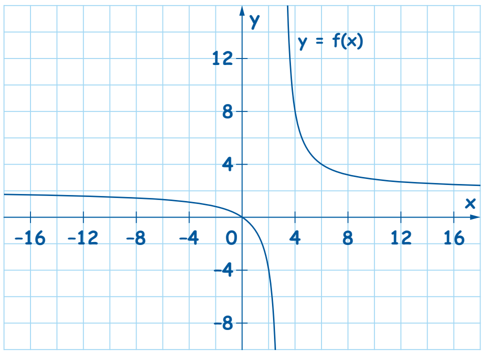
Opdracht 55 bladzijde 102

Maak een schets van de grafiek van volgende functies. Gebruik geen rekentoestel.

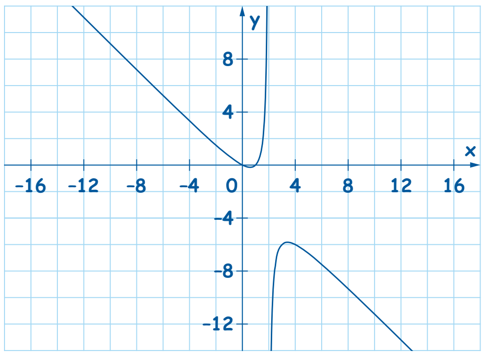
1 $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$



2 $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$



3 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x-2}$



Opdracht 56 bladzijde 102

Los op.

1 $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-2x-8}=0$

$D = 4$

- $x^2 + 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x -3 \text{ of } x = -5$

$D = 36$

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2 \text{ of } x = 4$

$\dfrac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 2x - 8} = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ of } x = -5$

2 $\dfrac{-3x^2-2x+1}{x^3-500} > 0$

$D = 16$

- $-3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \text{ of } x = -1$
- $x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{500}$

x		-1		$\frac{1}{3}$		$\sqrt[3]{500}$	
$-3x^2 - 2x + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x^3 - 500$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$-$

$\dfrac{-3x^2 - 2x + 1}{x^3 - 500} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ of } \dfrac{1}{3} < x < \sqrt[3]{500}$

3 $\dfrac{x^2+x-6}{x(x^3-8)}<0$

$D = 25$

- $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ of } x = 2$
- $x\,(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2$

x		-3		0		2	
$x^2 + x - 6$	+	0	−	−	−	0	+
$x(x^3 - 8)$	+	+	+	0	−	0	+
y	+	0	$\underline{-}$	|	+	|	+

$\dfrac{x^2 + x - 6}{x(x^3 - 8)} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$

4 $\dfrac{x(x+3)^2}{x^2+4x+3}=0$

- $x\,(x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = -3 \text{ (dubbel)}$

$D = 4$

- $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ of } x = -1$

$\dfrac{x(x + 3)^2}{x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Opdracht 57 bladzijde 102

Bepaal vergelijkingen van alle asymptoten van de grafiek van de functies met voorschrift

1 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$

VA $x = 3$; $x = -3$

HA $y = 0$ (gr(t(x)) < gr(n(x)))

2 $f(x)=\dfrac{5x^2-22}{3(x^2-4)}$

VA $x = 2$; $x = -2$

HA $y = \dfrac{5}{3}$ (gr(t(x)) = gr(n(x)))

3 $f(x)=\dfrac{9x^3}{3(x-1)}$

VA x = 1

geen HA en geen SA want gr(t(x)) = gr(n(x)) + 2

4 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$

VA x = 1

SA y = x − 1

$$\begin{array}{rr|l} & x^2-2 & x+1 \\ \cline{3-3} - & \underline{x^2+x} & x-1 \\ & -x-2 & \\ - & \underline{-x-1} & \\ & -1 & \end{array}$$

5 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4x}=\dfrac{(x+2)(x-4)}{x(x-4)}$

VA x = 0

HA y = 1

6 $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x}$

VA x = 0

geen HA en geen SA want gr(t(x)) = gr(n(x)) + 2

Opdracht 58 bladzijde 103

Bepaal een mogelijk voorschrift van de functies waarvan de grafiek gegeven is.
De asymptoten zijn in het rood getekend.

1) $f(x)=\dfrac{a\,(x-1)x}{(x+1)\,(x-1)}$ HA y = 4 dus a = 4

$f(x)=\dfrac{4x^2-x}{x^2-1}$

2) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)x} = \dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$

3) $f(x) = \dfrac{a(x+2)(x-2)}{x} = \dfrac{a(x^2-4)}{x}$

SA $y = -x$ dus $a = -1$

want dan

$$\begin{array}{rr|l} & -x^2 + 4 & x \\ \cline{3-3} - & -x^2 & -x \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{4-x^2}{x}$

Opdracht 59 bladzijde 103

De functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{(x-c)(x-d)}$ is even, heeft 0 als nulpunt en de grafiek van f heeft als asymptoten de rechte met vergelijking $x = 1$ en $y = 2$.
Bepaal a, b, c en d.

even functie met VA $x = 1$; dus ook $x = -1$ moet VA zijn

$\Rightarrow c = 1$ en $d = -1$ (of omgekeerd)

$f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$

HA $y = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Opdracht 60 bladzijde 103

Bepaal a en b zodat de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^2+bx}{x-a}$ als asymptoten de rechten met vergelijking $x = -2$ en $y = x + 1$ heeft.

VA $x = -2$ dus $a = -2$

SA $y = x + 1$ dus

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 + bx & x + 2 \\ \cline{3-3} - & x^2 + 2x & x + (b-2) \\ \cline{2-2} & (b-2)x & \\ - & (b-2)x + 2(b-2) & \\ \cline{2-2} & \qquad -2(b-2) & \end{array}$$

$b - 2 = 1 \Leftrightarrow b = 3$

Opdracht 61 bladzijde 104

Je wil een balkvormige kartonnen doos met een vierkant grond– en bovenvlak en een inhoud van 1 m^3 maken.

1) Wat is de minimale hoeveelheid (in m^2) karton die je nodig hebt om een dergelijke doos te maken? Geef ook de afmetingen van de doos.

inhoud balk $= z^2 \cdot h = 1\ m^3$

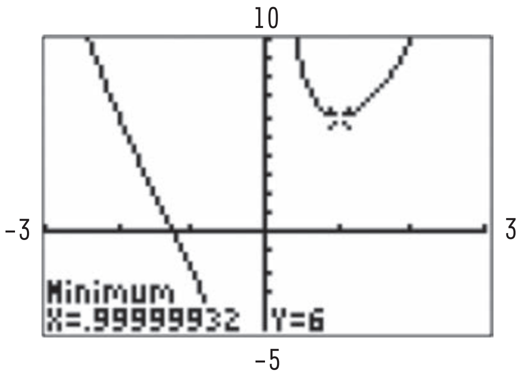
$\Leftrightarrow h = \dfrac{1}{z^2}$

Oppervlakte = hoeveelheid karton

$= 2z^2 + 4zh$

$= 2z^2 + \dfrac{4z}{z^2}$

$= \dfrac{2z^3 + 4}{z}$

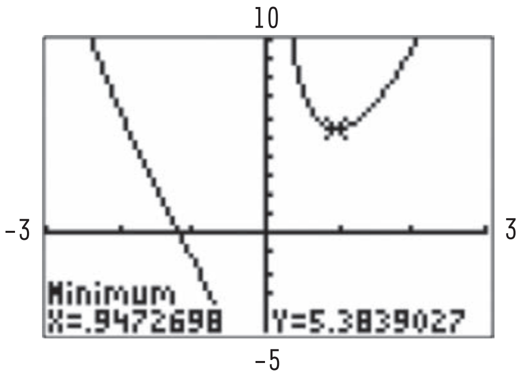


We vinden een minimum voor $z = 1$ en $h = 1$, de minimale hoeveelheid karten is dan 6 m^2.

2) In de rechthoek $OPQR$ is $|OP| = 1$ en $|OR| = 2$. De rechte r draait om het hoekpunt Q van de rechthoek en snijdt de assen in de punten $A(x, 0)$ en $B(0, y)$.

prijs $= 2z^2 + 0{,}85 \cdot \dfrac{4z}{z^2} = 2z^2 + \dfrac{3{,}4}{z}$

We vinden een minimum voor $z = 0{,}947$ m en $h = 1{,}115$ m. De minimale kostprijs is dan € 5,384.



Opdracht 62 bladzijde 104

In de rechthoek $OPQR$ is $|OP| = 1$ en $|OR| = 2$. De rechte r draait om het hoekpunt Q van de rechthoek en snijdt de assen in de punten $A(x,0)$ en $B(0,y)$.

1 Toon aan dat $y = \frac{2x}{x-1}$.

$$\Delta RBQ \sim \Delta RBQ \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} = \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x-1} + 2$$

$$= \frac{2 + 2x + -2}{x-1}$$

$$= \frac{2x}{x-1}$$

2 Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie $y = \frac{2x}{x-1}$?

Wat betekent dit voor de figuur?

VA $x = 1$;	HA $y = 2$
$\downarrow$	$\downarrow$
als $A \rightarrow P$	als A naar rechts
dan zal B	blijft bewegen dan
steeds hoger	zal $B \rightarrow R$
liggen	($x \rightarrow +\infty$ dan $y \rightarrow 2$)
($y \rightarrow +\infty$ want	
$x \overset{>}{\rightarrow} 1$)	

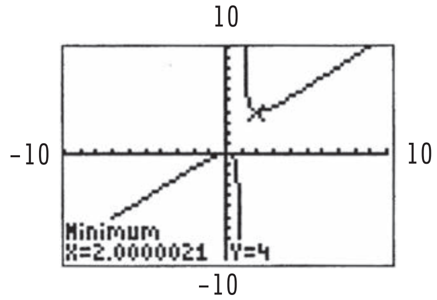
3 Stel de oppervlakte van de driehoek OAB gelijk aan S.

Toon aan dat $S(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

$$S(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

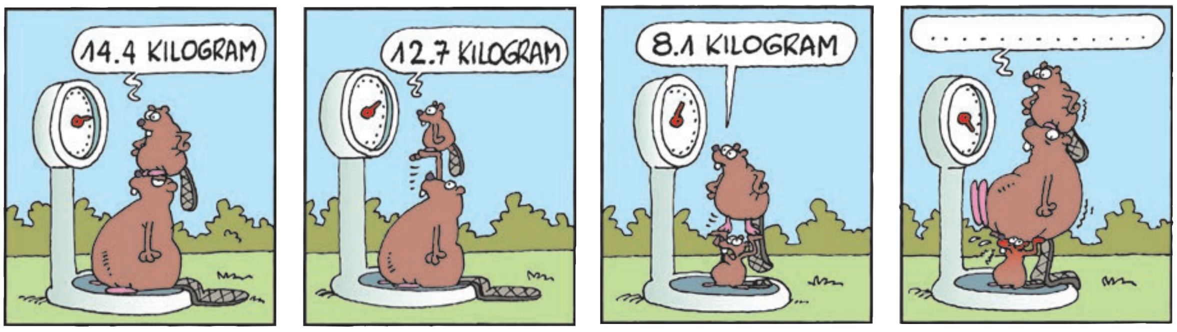
4 Bepaal de coördinaten van *A* en *B* in het geval dat de oppervlakte van de driehoek *OAB* minimaal is.

S(x) is minimaal voor x = 2 en y = 4



Hersenbrekers

1 Hoeveel wegen de drie bevers samen?



Stel x de massa van de grootste bever, y de massa van de middelste en z van de kleinste.

Dan geldt:

$$\begin{cases} x + y = 14{,}4 \\ x + z = 12{,}7 \\ y + z = 8{,}1 \end{cases}$$

Uit de eerste en de tweede vergelijking vinden we dat $y - z = 1{,}7$.

Uit de derde vergelijking vinden we dat $y = 8{,}1 - z$.

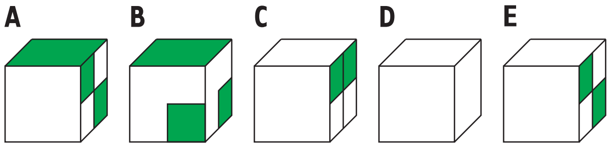
Uit bovenstaande kan je z berekenen: $z = 3{,}2$.

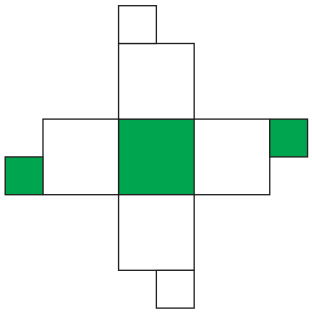
Dus $x + y + z = 14{,}4 + 3{,}2 = 17{,}6$.

De drie bevers wegen samen 17,6 kg.

(Wanneer je het stelsel verder oplost, vind je dat de grootste bever 9,5 kg weegt en de middelste 4,9 kg.)

2 Van de bouwplaat hiernaast wordt een kubus gevouwen.
Welke kubus kun je dan krijgen?



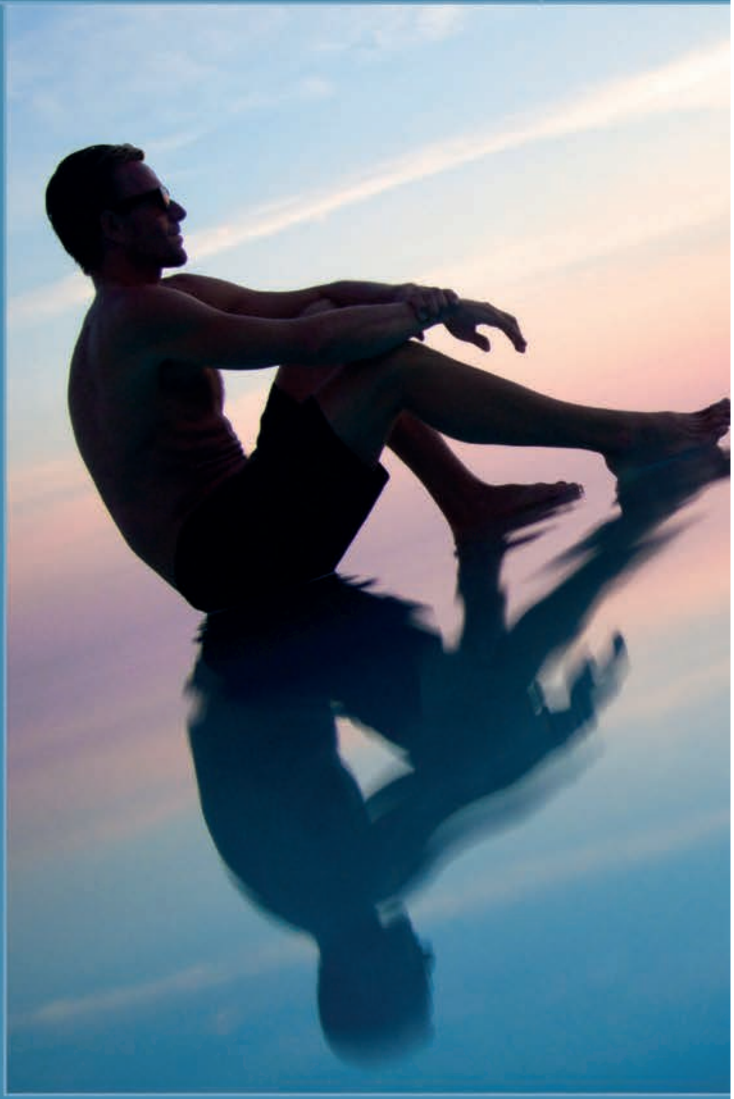


(Bron: WizBRAIN 2005)

- Antwoord E is correct.
  Verklaring: De vlakken grenzend aan het gekleurde vlak moeten allemaal wit zijn, dus A en B kunnen niet. De twee kleine groene vierkantjes kunnen niet naast elkaar liggen (dus C kan niet), maar moeten in eenzelfde vlak liggen (dus B kan alweer niet). D kan niet want er kunnen geen drie witte vlakken in deze positie staan, een van de vlakken moet groen zijn. Antwoord E is het enige mogelijke antwoord. Het linkervlak van E moet dan groen zijn (dat zien we niet).

Hoofdstuk 3

Irrationale functies



Opdracht 1 bladzijde 108

De stralen van 3 bollen verhouden zich als 1 : 2 : 3.
Ze hebben samen een inhoud van 250 cm^3.

Bereken de straal van de kleinste bol op 0,1 cm nauwkeurig.

Noem de straal van de kleinste bol r, dan is

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 + \frac{4}{3}\pi(3r)^3 = 250$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (1 + 8 + 27) = 250$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{250 \cdot 3}{4 \cdot \pi \cdot 36} = \frac{125}{24\pi}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{24\pi}} \approx 1{,}184$$

De straal van de kleinste bol is 1,18 cm.

Opdracht 2 bladzijde 108
Bepaal alle mogelijke waarden van x als

1 $x^5 = 32$

$\Leftrightarrow x = 2$

2 $x^5 = -32$

$\Leftrightarrow x = -2$

3 $x^4 = 16$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

4 $x^4 = -16$

heeft geen reële oplossingen.

Opdracht 3 bladzijde 110
Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sqrt[3]{64} = 4$

2 $\sqrt[4]{81} = 3$

3 $-\sqrt[4]{81} = -3$

4 $\sqrt[5]{100\ 000} = 10$

5 $\sqrt[19]{-1} = -1$

6 $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$

7 $\sqrt[3]{(-3)^9} = (-3)^3 = -27$

8 $\sqrt[4]{(-3)^{12}} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

9 $\left(\sqrt[3]{10}\right)^6 = \left[\left(\sqrt[3]{10}\right)^3\right]^2 = 10^2 = 100$

10 $\sqrt[6]{27^4} = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$

Opdracht 4 bladzijde 110

Bereken indien mogelijk. Rond, indien nodig, af op 3 cijfers na de komma.

1 $\sqrt[5]{-248\,832} = -12$

2 $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$

3 $\sqrt[6]{-100}$ bestaat niet in $\mathbb{R}$

4 $\sqrt[15]{15} = 1{,}198$

Opdracht 5 bladzijde 110

Los de volgende vergelijkingen op.

1 $x^5 = 10$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}585$

2 $x^6 = 102$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[6]{102} \approx 2{,}162$ of $x = -\sqrt[6]{102} \approx -2{,}162$

3 $2x^7 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^7 = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[7]{\frac{5}{2}} \approx 1{,}140$

4 $4x^8 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^8 = -2$

geen reële oplossingen

5 $4(x+1)^4 - 1 = 63$

$\Leftrightarrow (x+1)^4 = 16$

$\Leftrightarrow x + 1 = 2$ of $x + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 1$ of $x = -3$

6 $(2x^3 + 1)^6 = 64$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 1 = 2$ of $2x^3 + 1 = -2$

$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2}$ of $x^3 = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}794$ of $x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \approx -1{,}145$

7 $(x^4 - 1)^{-3} = 8$

$\Leftrightarrow (x^4 - 1)^3 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow x^4 - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^4 = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107$ of $x = -\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx -1{,}107$

8 $-2(x + 3)^{-5} + 1 = 12$

$\Leftrightarrow (x + 3)^{-5} = -\frac{11}{2}$

$\Leftrightarrow (x + 3)^5 = -\frac{2}{11}$

$\Leftrightarrow x + 3 = \sqrt[5]{\frac{-2}{11}}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{-2}{11}} - 3 \approx -3{,}711$

Opdracht 6 bladzijde 110

Bewijs de volgende eigenschappen als $m, n \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}^+$.

1 $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Te bewijzen: als $n \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}^+$,

dan is $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Bewijs

Aangezien $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n =$ rekenregel machten

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n =$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$a \cdot b$

is volgens de definitie

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Te bewijzen: als m, n $\in \mathbb{N}_0$ en a $\in \mathbb{R}^+$,
dan is $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Bewijs

Aangezien $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n}$ rekenregel machten

$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$

$= a$

is volgens de definitie
$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Opdracht 7 bladzijde 111
Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$.

1 $\sqrt[3]{x^6} = x^2$ want $(x^2)^3 = x^6$

2 $\sqrt[4]{x^{12}} = x^3$ want $(x^3)^4 = x^{12}$

3 $\sqrt[6]{x^{-42}} = x^{-7}$ want $(x^{-7})^6 = x^{-42}$

Opdracht 8 bladzijde 113
Bereken zonder rekentoestel.

1 $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

2 $81^{-0,25} = 81^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{1}{3}$

3 $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

of $27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

4 $49^{1,5} = (7^2)^{1,5} = 7^3 = 343$

Opdracht 9 bladzijde 113
Bepaal x op 0,001 nauwkeurig als

1 $x^{\frac{4}{5}} = 1000$

$\Leftrightarrow x = 1000^{\frac{5}{4}} \approx 5623{,}413$

2 $4x^{-6} = 5$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} = x^6$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{4}{5}} \approx 0{,}963 \quad \text{of} \quad x = -\sqrt[6]{\frac{4}{5}} \approx -0{,}963$

3 $x^{1{,}75} = 2$

$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{1{,}75}} \approx 1{,}486$

4 $3x^{-1{,}3} = 13$

$\Leftrightarrow \frac{3}{13} = x^{1{,}3}$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{13}\right)^{\frac{1}{1{,}3}} \approx 0{,}324$

Opdracht 10 bladzijde 113
Herleid de volgende formules tot de vorm $Q = a \cdot P^b$ en bereken a en b op 0,01 nauwkeurig.

1 $P = \frac{1}{2} \cdot Q^3 \Leftrightarrow 2P = Q^3$

$\Leftrightarrow Q = (2P)^{\frac{1}{3}} = a \cdot P^b$

met $a = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}26$ en $b = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

2 $P = 3 \cdot Q^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \frac{P}{3} = Q^{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow Q = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = a \cdot P^b$

met $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 0{,}42$ en $b = \frac{4}{5} = 0{,}80$

3 $P = 0{,}22 \cdot Q^{-0{,}33} \Leftrightarrow \dfrac{P}{0{,}22} = Q^{-0{,}33}$

$$\Leftrightarrow Q = \left(\frac{P}{0{,}22}\right)^{\frac{1}{-0{,}33}} = a \cdot P^b$$

$$\text{met } a = (0{,}22)^{\frac{1}{0{,}33}} \approx 0{,}01 \quad \text{en} \quad b = -\frac{1}{0{,}33} \approx -3{,}03$$

4 $\sqrt[7]{P^2Q^3} = 2 \Leftrightarrow P^2Q^3 = 2^7 = 128$

$$\Leftrightarrow Q^3 = 128 \cdot P^{-2}$$

$$\Leftrightarrow Q = (128 \cdot P^{-2})^{\frac{1}{3}} = a \cdot P^b$$

$$\text{met } a = 128^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}04 \quad \text{en} \quad b = -\frac{2}{3} \approx -0{,}67$$

Opdracht 11 bladzijde 114

De tienkamp is een sportwedstrijd waarbij de atleten in twee dagen tijd tien atletieknummers moeten afleggen. Bij elke discipline kunnen de atleten punten verdienen, volgens een systeem dat is vastgelegd door de wereld-atletiekbond (IAAF).

De looponderdelen zijn hardlopen over verschillende afstanden en hordelopen.
De prestatie (tijd) wordt gegeven in seconden.
De springonderdelen zijn verspringen, hoogspringen en polsstokspringen.
De prestatie (afstand of hoogte) wordt in centimeter gegeven.
De werponderdelen zijn kogelstoten, speerwerpen en discuswerpen. De prestatie (afstand) wordt in meter gegeven.

Om het aantal punten P voor een atleet bij een prestatie M te berekenen, gebruikt men de volgende formules:

$P = a(b - M)^c$ bij de looponderdelen
$P = a(M - b)^c$ bij de spring- en werponderdelen

In de formules staan a, b en c voor coëfficiënten die verschillen per discipline.
Je vindt ze in de tabel.

De punten worden altijd naar beneden afgerond op een geheel getal.

onderdeel	*a*	*b*	*c*
100 m	25,4347	18	1,81
verspringen	0,14354	220	1,4
kogelstoten	51,39	1,5	1,05
hoogspringen	0,8465	75	1,42
400 m	1,53775	82	1,81
110 m horden	5,74352	28,5	1,92
discuswerpen	12,91	4	1,1
polsstokhoogspringen	0,2797	100	1,35
speerwerpen	10,14	7	1,08
1500 m	0,03768	480	1,85

1 Waarom is de formule bij de looponderdelen van een andere vorm dan die bij de spring- en werponderdelen?

Bij lopen presteer je het best bij een zo klein mogelijke tijd.

Bij spring- of werponderdelen krijg je meer punten bij een zo groot mogelijke afstand.

2 Tijdens de Olympische spelen van 2012 behaalde de Belg Hans Van Alphen de volgende resultaten tijdens de eerste dag van de tienkamp:

100 m: 11,05 s
verspringen: 764 cm
kogelstoten: 15,48 m

Bereken zijn puntentotaal na deze drie onderdelen.

100 m: $P_1 = 25{,}4347\,(18 - 11{,}05)^{1{,}81} \approx 850$

verspringen: $P_2 = 0{,}14354\,(764 - 220)^{1{,}4} \approx 970$

kogelstoten: $P_3 = 51{,}39\,(15{,}48 - 1{,}5)^{1{,}05} \approx 819$

Totaal na 3 onderdelen: 2639 punten.

3 De Nederlander Ingmar Vos liep de 100 m in 10,98 s en haalde bij het verspringen 727 cm.

Hoe ver moest hij bij het kogelstoten gooien om in de voorlopige stand vóór Hans Van Alphen te eindigen?

100 m: $P_1 = 25{,}4347\,(18 - 10{,}98)^{1{,}81} \approx 865$

verspringen: $P_2 = 0{,}14354\,(727 - 220)^{1{,}4} \approx 878$

Hij moet minstens 2640 – 865 – 878 = 897 punten halen bij het kogelstoten.

$$51{,}39 \cdot (M - 1{,}5)^{1{,}05} \geqslant 897$$

$$\Leftrightarrow (M - 1{,}5)^{1{,}05} \geqslant \frac{897}{51{,}39}$$

$$\Leftrightarrow M - 1{,}5 \geqslant \left(\frac{897}{51{,}39}\right)^{\frac{1}{1{,}05}}$$

$$\Leftrightarrow M \geqslant 1{,}5 + \left(\frac{897}{51{,}39}\right)^{\frac{1}{1{,}05}} = 16{,}7326\ldots$$

Ingmar Vos moet bij het kogelstoten minstens 16,74 m halen.

Opdracht 12 bladzijde 116
Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = \frac{1}{x}$.

1 Bereken $f(2)$, $g(2)$, $g(f(2))$ en $f(g(2))$.

$f(2) = 3 \qquad g(f(2)) = g(3) = \frac{1}{3}$

$g(2) = \frac{1}{2} \qquad f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

2 Welke van de drie voorschriften is het juiste?

$g(f(x)) =$

a $\dfrac{x^2-1}{x}$ **b** $\dfrac{1}{x^2-1}$ **c** $\dfrac{1}{x^2}-1$

$$g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \frac{1}{x^2 - 1} \rightarrow \text{b}$$

3 Bepaal het voorschrift van de functie $y = f(g(x))$.

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$$

Opdracht 13 bladzijde 117

Als $f(x) = x - 1$ en $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, bepaal dan

1 $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

2 $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

3 $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{1-x-1}{x+1} = \dfrac{-x}{x+1}$

4 $g(f(x)) = g(x-1) = \dfrac{1}{x}$

5 $f(f(2)) = f(1) = 0$

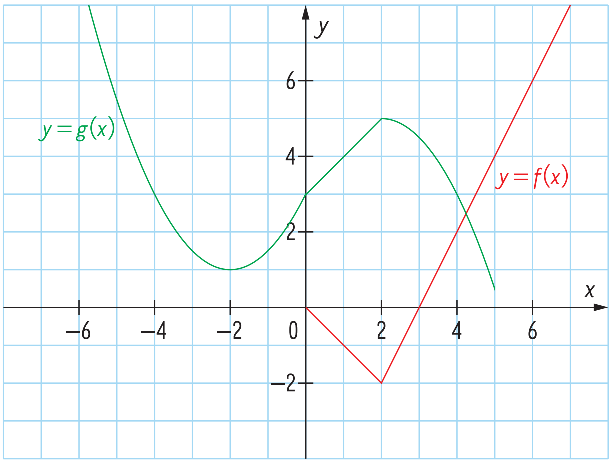
6 $g(g(2)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{4}$

7 $f(f(x)) = f(x-1) = x - 2$

8 $g(g(x)) = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{x+1}+1} = \dfrac{1}{\frac{1+x+1}{x+1}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

Opdracht 14 bladzijde 117
De grafieken van de functies f en g zijn gegeven.

Bepaal hiermee



1 $f(g(2))$ $= f(5) = 4$

2 $g(f(0))$ $= g(0) = 3$

3 $(f \circ g)(0)$ $= f\big(g(0)\big) = f(3) = 0$

4 $(g \circ f)(2)$ $= g\big(f(2)\big) = g(-2) = 1$

5 $(g \circ g)(-2)$ $= g\big(g(-2)\big) = g(1) = 4$

6 $(f \circ f)(4)$ $= f\big(f(4)\big) = f(2) = -2$

Opdracht 15 bladzijde 118
Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 6$.

1 Bepaal a als $f(a) = 70$.

$f(a) = a^3 + 6 = 70$

$\Leftrightarrow a^3 = 64$

$\Leftrightarrow a = 4$

2 Bepaal b als $f(b) = 2$.

$f(b) = b^3 + 6 = 2$

$\Leftrightarrow b^3 = -4$

$\Leftrightarrow b = \sqrt[3]{-4}$

3 Bepaal x als $f(x) = y$.

$f(x) = x^3 + 6 = y$

$\Leftrightarrow x^3 = y - 6$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y - 6}$

Opdracht 16 bladzijde 120

Welke van de volgende functies zijn elkaars inverse? Verklaar.

$f_1(x)=\dfrac{3}{x}$	$g_1(x)=\dfrac{x}{3}$
$f_2(x)=x+3$	$g_2(x)=x-3$
$f_3(x)=2x+1$	$g_3(x)=\dfrac{x}{2}-1$
$f_4(x)=\sqrt[5]{x-2}$	$g_4(x)=x^5+2$
$f_5(x)=\dfrac{x-2}{7}$	$g_5(x)=7x+2$

- f_2 en g_2 zijn elkaars inverse

  nl. $f_2\big(g_2(x)\big) = f_2(x-3) = x$

  en $g_2\big(f_2(x)\big) = g_2(x+3) = x$

- f_4 en g_4 zijn elkaars inverse

  nl. $f_4\big(g_4(x)\big) = f_4(x^5+2) = \sqrt[5]{x^5} = x$

  en $g_4\big(f_4(x)\big) = g_4\left(\sqrt[5]{x-2}\right) = x$

- f_5 en g_5 zijn elkaars inverse

  nl. $f_5\big(g_5(x)\big) = f_5(7x+2) = \dfrac{7x+2-2}{7} = x$

  en $g_5\big(f_5(x)\big) = g_5\left(\dfrac{x-2}{7}\right) = 7\cdot\dfrac{x-2}{7}+2 = x$

Opdracht 17 bladzijde 120

Bepaal algebraïsch het voorschrift van f^{-1}.

1 $f(x)=5x$

- $f\colon\ y = 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{5}$
- $x \leftrightarrow y\colon\quad y = \dfrac{x}{5}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5}$

2 $f(x) = \dfrac{-5}{3x+4}$

- $f:\ y = \dfrac{-5}{3x+4}$

$$\underset{x \neq -\frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} \quad y(3x+4) = -5$$

$$\underset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 3x + 4 = \frac{-5}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{-5}{y} - 4 = \frac{-5-4y}{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-5-4y}{3y}$$

- $x \leftrightarrow y:\quad y = \dfrac{-5-4x}{3x}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-5-4x}{3x}$

3 $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

- $f:\ y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$

$$\underset{x \neq -\frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} \quad 3xy + 2y = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x(3y-2) = -2y - 1$$

$$\underset{y \neq \frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{-2y-1}{3y-2}$$

- $x \leftrightarrow y:\quad y = \dfrac{-2x-1}{3x-2}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{3x-2}$

4 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$

- $f:\ y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}} \Leftrightarrow y^3=\dfrac{x}{x+1}$

$$\underset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} \quad y^3x+y^3=x$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y^3-1)=-y^3$$

$$\underset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x=\frac{y^3}{1-y^3}$$

- $x \leftrightarrow y:\quad y=\dfrac{x^3}{1-x^3}$
- $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3}{1-x^3}$

Opdracht 18 bladzijde 120

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x)=3x^3+x^2+x-1$.

Bepaal x als $f^{-1}(x)=-3$.

$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$

$\Rightarrow f(-3)=x$

$\Rightarrow x=3\cdot(-3)^3+(-3)^2-3-1=-76$

Opdracht 19 bladzijde 121

De functies met voorschrift $f(x)=x^3+6$ en $g(x)=\sqrt[3]{x-6}$ zijn inverse functies.

1 Het punt $P(2,a)$ ligt op de grafiek van f en het punt $Q(14,b)$ ligt op de grafiek van g.

Bepaal a en b.

$a=14$ en $b=2$

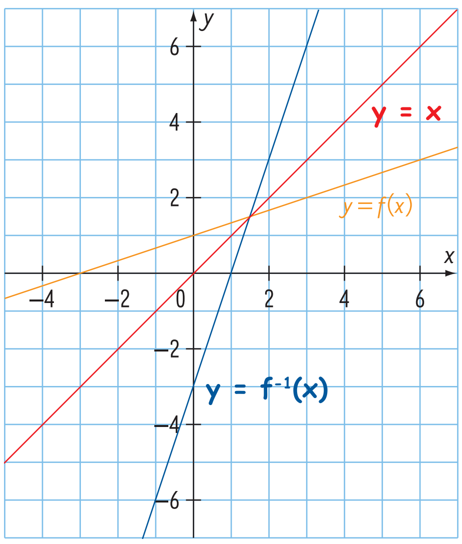
2 Als het punt $P(a,b)$ op de grafiek van f ligt, welk punt Q ligt dan zeker op de grafiek van g?

$Q(b,\ a)$

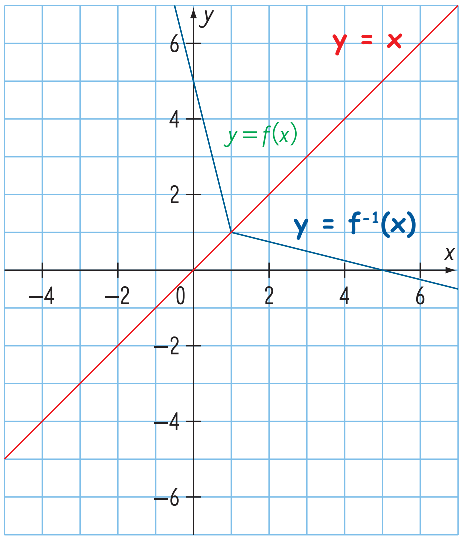
Opdracht 20 bladzijde 123

De grafiek van de functie f is gegeven. Teken de grafiek van haar inverse functie f^{-1}.

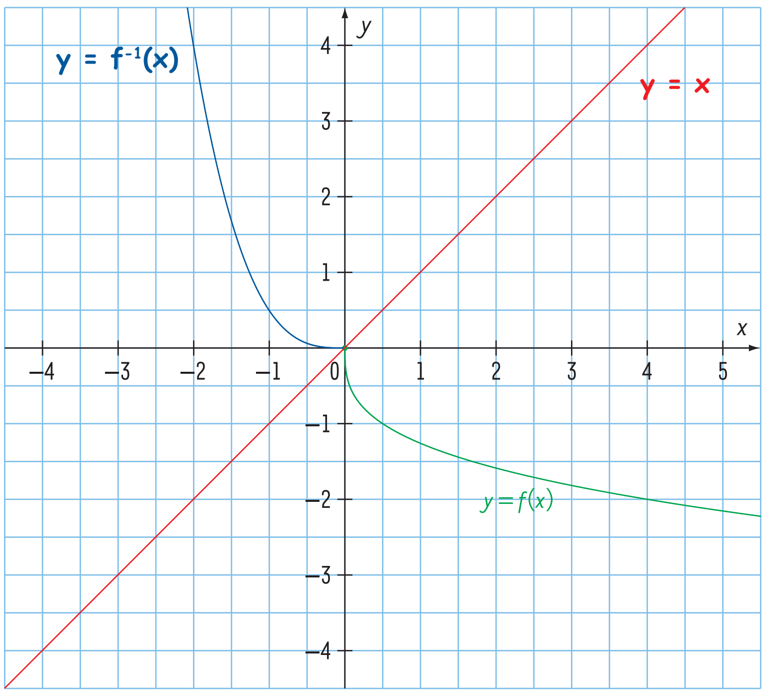
1



2



3



Opdracht 21 bladzijde 123

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 - 1$.

1 Bepaal a als $f(a) = 48$.

$$f(a) = a^2 - 1 = 48 \Leftrightarrow a^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow a = 7 \quad \text{of} \quad a = -7$$

2 Bepaal x als $f(x) = y$ en $y \geqslant -1$.

$$f(x) = x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1$$

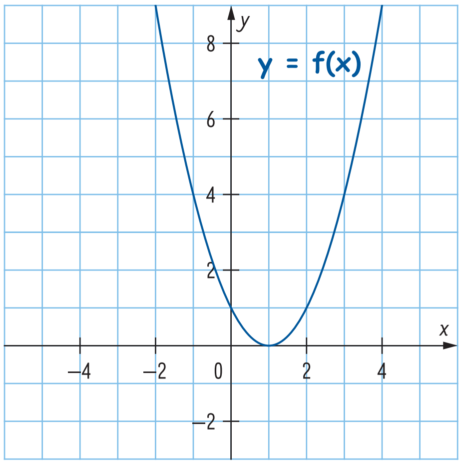
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{y+1} \quad \text{als } y \geqslant -1$$

Opdracht 22 bladzijde 126
Geef een mogelijke beperking van dom *f* zodat *f* inverteerbaar wordt.

1 $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Beperking: dom f: $[1, +\infty[$
of $]-\infty, 1]$
of $]-\infty, 0]$
of ...

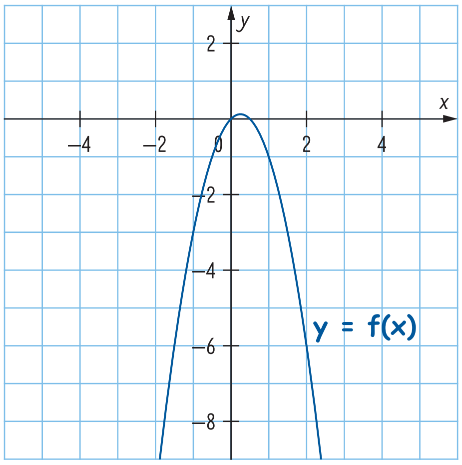


2 $f(x) = -2x^2 + x$

$f(x) = -2x^2 + x$

$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

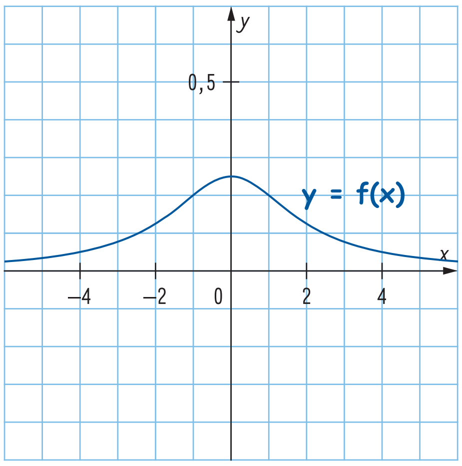
Beperking: dom f: $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$
of $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$
of $[1, +\infty[$
of ...



3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

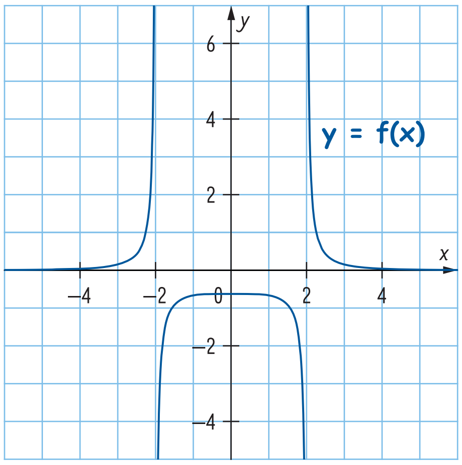
$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

Beperking: dom f: $]-\infty, 0]$
of $[0, +\infty[$
of ...



4 $f(x)=\dfrac{10}{x^4-16}$

$f(x) = \dfrac{10}{x^4 - 16}$



Beperking: dom f: [0, 2[∪]2, +∞[

of]-∞, -2[∪]-2, 0]

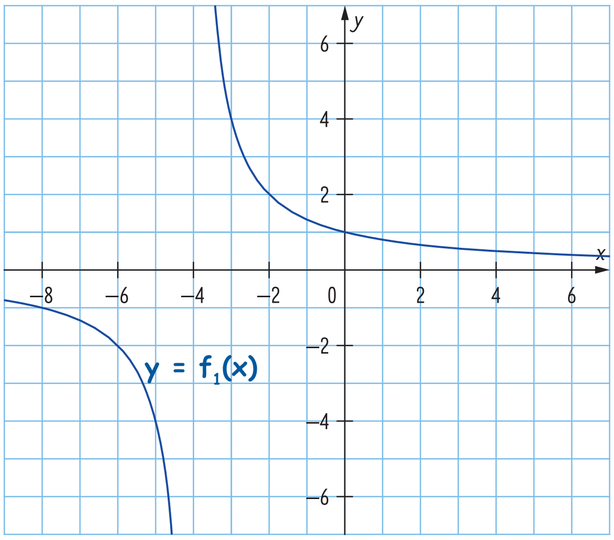
of ...

Opdracht 23 bladzijde 126

Ga grafisch na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn.

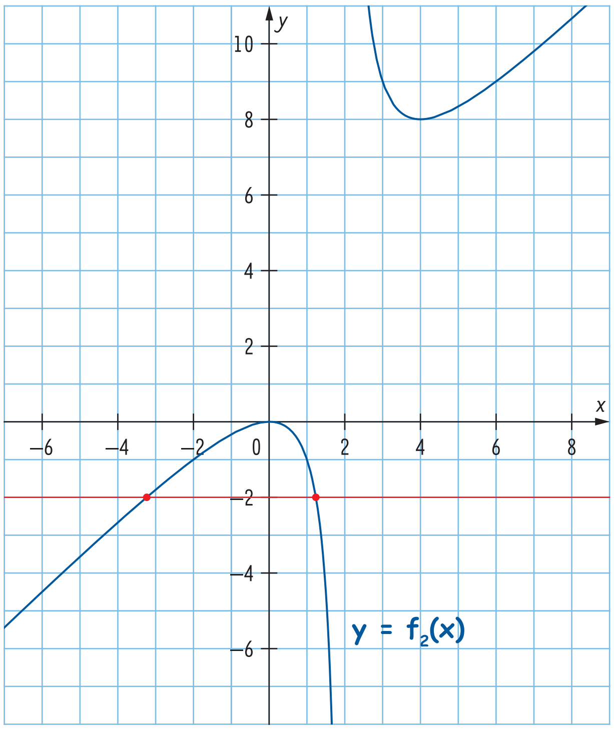
1 $f_1(x)=\dfrac{4}{x+4}$

f_1 is inverteerbaar.



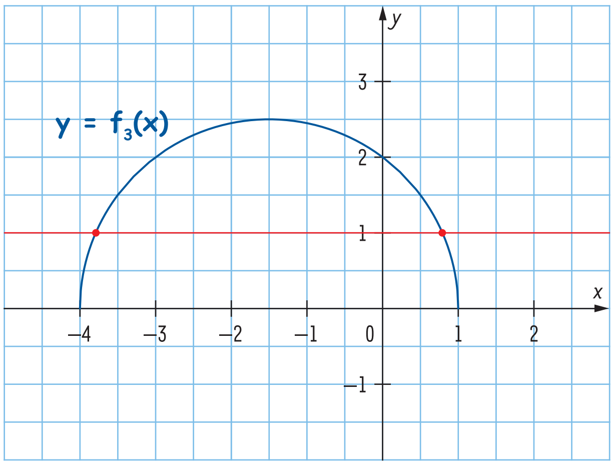
2 $f_2(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

f_2 is niet inverteerbaar.



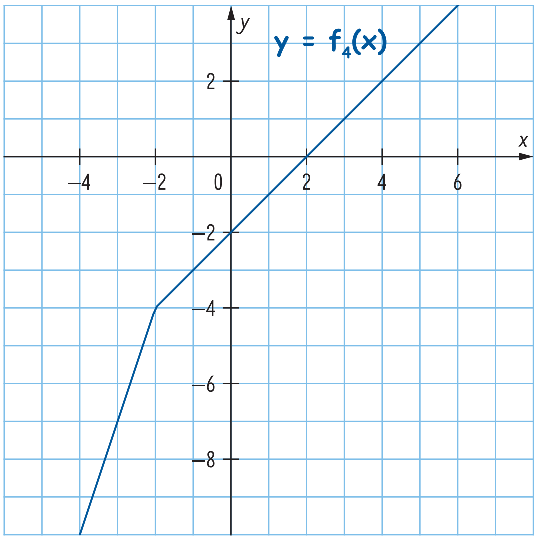
3 $f_3(x) = \sqrt{4 - 3x - x^2}$

f_3 is niet inverteerbaar.



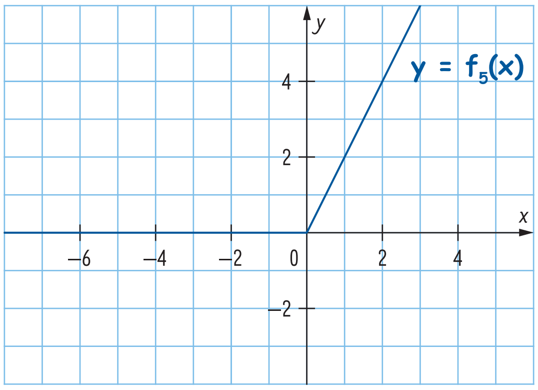
4 $f_4(x) = 2x - |x + 2|$

f_4 is inverteerbaar.



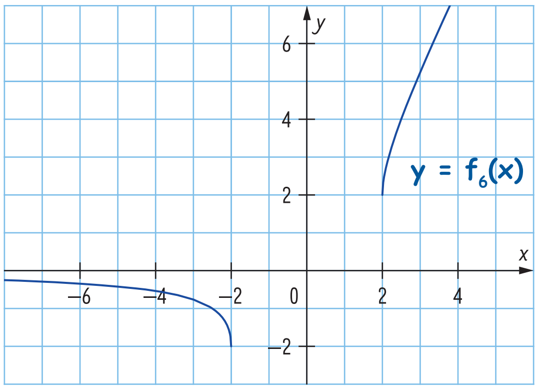
5 $f_5(x) = x + |x|$

f_5 is niet inverteerbaar want de rechte met vergelijking $y = 0$ heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van f.



6 $f_6(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

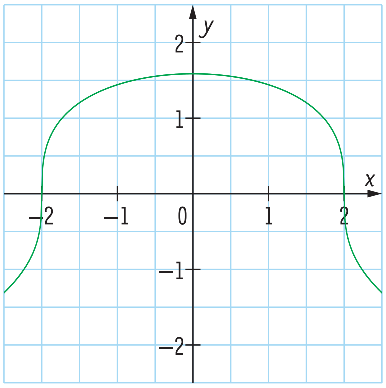
f_6 is inverteerbaar.



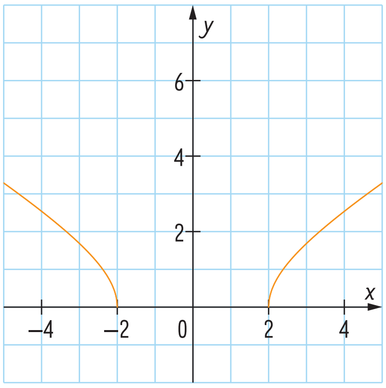
Opdracht 24 bladzijde 127

Kies de juiste grafiek bij elk van de voorschriften zonder een rekentoestel te gebruiken.

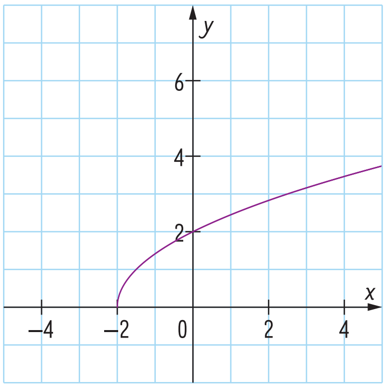
A



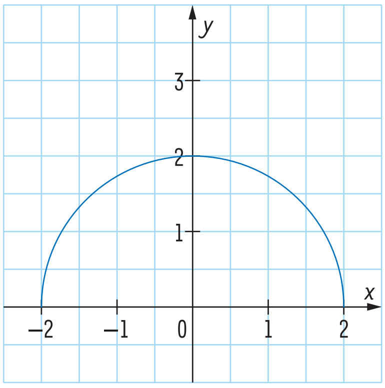
B



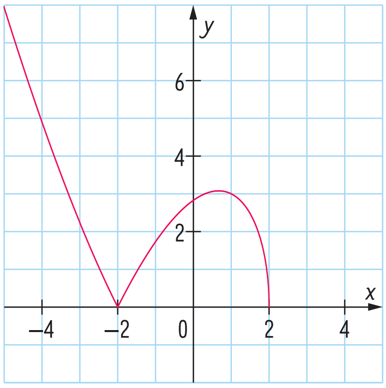
C



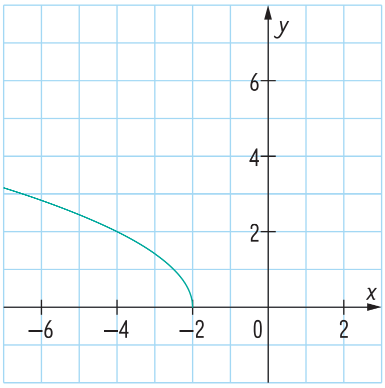
D



E



F



1 $f(x) = \sqrt{-2x - 4}$

$f(x) = \sqrt{-2x - 4}$ is enkel gedefinieerd als $-2x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant -2$

$\Rightarrow$ grafiek F

2 $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ is enkel gedefinieerd als $x^2 - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -2$ of $x \geqslant 2$

$\Rightarrow$ grafiek B

3 $h(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

$h(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$ is gedefinieerd voor elke x en heeft 2 en -2 als nulpunten.

$\Rightarrow$ grafiek A

Opdracht 25 bladzijde 130
Bepaal het domein en de nulpunten van de irrationale functies met voorschrift

1 $f(x)=\sqrt{x^2-8x+4}$

- f(x) bestaat

  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 \geqslant 0$

x		$4-2\sqrt{3}$		$4+2\sqrt{3}$	
$x^2 - 8x + 4$	+	0	-	0	+

  $\Leftrightarrow x \leqslant 4-2\sqrt{3}$ of $x \geqslant 4+2\sqrt{3}$

  dom f $= \left]-\infty, 4-2\sqrt{3}\right] \cup \left[4+2\sqrt{3}, +\infty\right[$

- f(x) = 0

  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 4-2\sqrt{3}$ of $x = 4+2\sqrt{3}$

  Nulpunten van f: $4-2\sqrt{3}$ en $4+2\sqrt{3}$.

2 $f(x)=\sqrt{x^3-5x^2+6x}$

- f(x) bestaat

  $\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x \geqslant 0$

x		0		2		3	
x	-	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	+	0	-	0	+
$x^3 - 5x^2 + 6x$	-	0	+	0	-	0	+

  $\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$ of $x \geqslant 3$

  dom f $= [0, 2] \cup [3, +\infty[$

- Nulpunten van f: 0, 2 en 3.

3 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-8}{x^4-7x^2+10}}$

- f(x) bestaat $\Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 10 \neq 0$

  Nu is $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 2$ of $x^2 = 5$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{5}$ of $x = -\sqrt{5}$

  dom f $= \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

- $f(x) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$ ($\in$ dom f)

  $\Rightarrow$ Nulpunt f: 8.

Opdracht 26 bladzijde 130

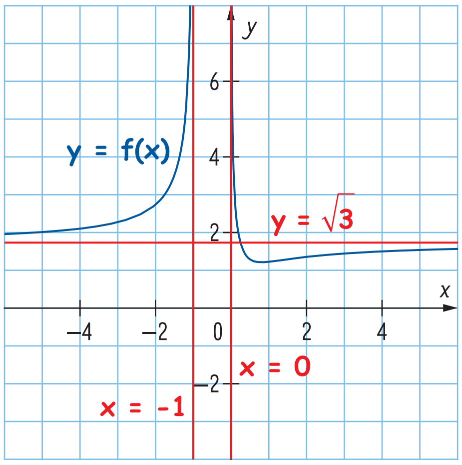
Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van de functie met voorschrift

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2-x+1}{x^2+x}}$.

- dom f

x		-1		0	
$3x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$x^2 + x$	+	0	-	0	+
$\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + x}$	+	|	-	|	+

  dom f $=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$



- Aangezien -1 en 0 nulpunten zijn van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn, zijn de V.A. $x = 0$ en $x = -1$.

- Als $x \to +\infty$, zal $\dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2 + x} \to 3$

  zodat $f(x) \to \sqrt{3}$.

  $y = \sqrt{3}$ is H.A. van de grafiek van f.

Opdracht 27 bladzijde 131

Zijn de functies met voorschrift $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ en $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ gelijk? Verklaar.

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

x		-1		1	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x-1}{x+1}$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ dom f = $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

- $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

is gedefinieerd als $x - 1 \geqslant 0$ én $x + 1 \geqslant 0$ dus enkel als $x \geqslant 1$

$\Rightarrow$ dom g = $[1, +\infty[$

- dom $f \neq$ dom g zodat f en g verschillende functies zijn.

Opdracht 28 bladzijde 131

Gegeven de cirkel $c(M,4)$ met $M(2,3)$.

1 Bepaal een vergelijking van c.

$c \leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

2 De cirkel kan opgevat worden als de unie van twee functiegrafieken.

Bepaal het voorschrift van de bijbehorende functies.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = 16 - (x-2)^2$$

$$= 16 - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= -x^2 + 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \quad \text{of} \quad y - 3 = -\sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 + \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \quad \text{of} \quad y = 3 - \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

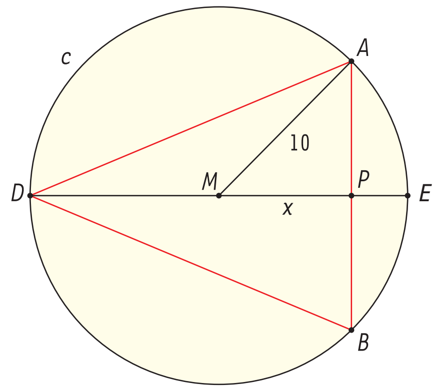
De twee bijbehorende functies zijn

$$f_1(x) = 3 + \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$

en $f_2(x) = 3 - \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$

Opdracht 29 bladzijde 131

In de cirkel $c(M,10)$ snijdt de verticale koorde $[AB]$ de horizontale koorde $[DE]$ in P. Stel $|MP| = x$.



1 Bereken de oppervlakte van de driehoek ABD als $x = 7$.

Als $x = |MP| = 7$,
dan is $|AP| = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$
en $|AB| = 2\sqrt{51}$.
De oppervlakte van ΔABD is dan

$$\frac{2\sqrt{51} \cdot 17}{2} = 17\sqrt{51}.$$

2 Toon aan dat voor de oppervlakte A van de driehoek ABD geldt:
$A(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$.

$$A(x) = \frac{|AB| \cdot |DP|}{2} = |AP| \cdot |DP|$$

met $|AP| = \sqrt{|AM|^2 - |MP|^2} = \sqrt{100 - x^2}$

en $|DP| = |DM| + |MP| = 10 + x$

zodat $A(x) = (10 + x) \cdot \sqrt{100 - x^2}$

3 Voor welke x is de oppervlakte van de driehoek ABD maximaal?

Bepaal voor die waarde van x de zijden van de driehoek ABD.

Met het rekentoestel vinden we dat de oppervlakte $A(x)$ maximaal is voor $x = 5$.

Dan is $|AB| = 2\sqrt{100 - 25} = 2\sqrt{75} = 10\sqrt{3}$,

$|AD| = \sqrt{15^2 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ en $|DB| = |DA|$

De driehoek is dan gelijkzijdig.

Opdracht 30 bladzijde 131

Om de vergelijking $-x+4=\sqrt{3x-2}$ op te lossen, gaan we beide leden kwadrateren.

Zijn de oplossingen van de vergelijking $(-x+4)^2=3x-2$ dezelfde als die van $-x+4=\sqrt{3x-2}$? Verklaar.

- $(-x+4)^2 = 3x-2$
  $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 3x - 2$
  $\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 9 \quad \text{of} \quad x = 2$
- $x = 2$ is een oplossing van $-x + 4 = \sqrt{3x-2}$
  want $\underbrace{-2+4}_{\substack{\shortparallel\\ 2}} = \underbrace{\sqrt{3\cdot 2-2}}_{\substack{\shortparallel\\ \sqrt{4}}}$
- $x = 9$ is geen oplossing van $-x + 4 = \sqrt{3x-2}$
  want $\underbrace{-9+4}_{\substack{\shortparallel\\ -5}} \neq \underbrace{\sqrt{3\cdot 9-2}}_{\substack{\shortparallel\\ 5}}$

  Voor $x = 9$ is de getalwaarde in het linkerlid tegensteld aan die in het rechterlid.
  Via kwadrateren worden deze tegenstelde waarden gelijk, zodat 9 wel een oplossing wordt van de 'gekwadrateerde' vergelijking.

De oplossingen van deze twee vergelijkingen zijn bijgevolg niet dezelfde.

Opdracht 31 bladzijde 135

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{5x-1}+2=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} = 3$

BVW: $5x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 5x - 1 = 9$

$\Leftrightarrow x = 2$

2 $\sqrt{3x-6}+x=-5$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-6} = -5 - x$

BVW: $3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

KWVW: $-5 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -5$

Uit de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarde is onmiddelijk duidelijk dat deze vergelijking geen oplossingen kan hebben.

3 $2\sqrt{3x^2 - x + 15} = 5x$

$\Updownarrow$

BVW: $3x^2 - x + 15 \geqslant 0$ is oké $\forall\, x \in \mathbb{R}$

KWVW: $5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

$4(3x^2 - x + 15) = 25x^2$

$\Updownarrow$

$-13x^2 - 4x + 60 = 0$

$\Updownarrow$

$x = 2$ of $\cancel{x = \frac{-30}{13}}$

$x = \frac{-30}{13}$ wordt geschrapt omdat $\frac{-30}{13}$ niet voldoet aan de KWVW.

Opdracht 32 bladzijde 135

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} = 5$

$\Updownarrow$

BVW: $x - 4 \geqslant 0$ en $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

$x - 4 + x + 1 + 2\sqrt{(x-4)(x+1)} = 25$

$\Updownarrow$

$2\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 25 - 2x + 3$

$\Updownarrow$

$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 14 - x$

BVW: $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -1$ of $x \geqslant 4$

KWVW: $14 - x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 14$

$\Updownarrow$

$x^2 - 3x - 4 = 196 - 28x + x^2$

$\Updownarrow$

$25x = 200$

$\Updownarrow$

$x = 8$

2 $\sqrt{x+5}+3=\sqrt{12-x}$

$\Updownarrow$ BVW: $x + 5 \geqslant 0$ en $12 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 12$

$x + 5 + 6\sqrt{x+5} + 9 = 12 - x$

$\Updownarrow$

$6\sqrt{x+5} = -2 - 2x$

$\Updownarrow$

$3\sqrt{x+5} = -1 - x$

$\Updownarrow$ BVW: $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$
KWVW: $-1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ (*)

$9(x + 5) = x^2 + 2x + 1$

$\Updownarrow$

$0 = x^2 - 7x - 44$

$\Updownarrow$

$x = -4$ of $\cancel{x = 11}$ 11 voldoet niet aan (*)

3 $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$

$\Updownarrow$

$\sqrt{x+4} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}$

$\Updownarrow$ BVW: $x + 4 \geqslant 0$ en $x - 1 \geqslant 0$ en $x - 4 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \geqslant 4$ (*)

$x + 4 = x - 1 + x - 4 + 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$

$\Updownarrow$

$-x + 9 = 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

$\Updownarrow$ BVW: $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ of $x \geqslant 4$
KWVW: $-x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 9$

$x^2 - 18x + 81 = 4(x^2 - 5x + 4)$

$\Updownarrow$

$-3x^2 + 2x + 65 = 0$

$\Updownarrow$

$\cancel{x = \frac{-13}{3}}$ of $x = 5$ $\frac{-13}{3}$ voldoet niet aan (*)

Opdracht 33 bladzijde 135

Bepaal het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift

$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} - 5$.

- $f(x)$ bestaat

  $\Leftrightarrow 2x + 1 \geqslant 0 \quad \text{en} \quad x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x \geqslant 0$

  $\text{dom } f = [0, +\infty[$

- $f(x) = 0$

  $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$ BVW: $2x + 1 \geqslant 0$ en $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow 2x + 1 + x + 2\sqrt{(2x+1)x} = 25$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x} = 24 - 3x$ BVW: $2x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$ of $x \geqslant 0$

  KWVW: $24 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 8$ (*)

  $\Leftrightarrow 4(2x^2 + x) = 576 - 144x + 9x^2$

  $\Leftrightarrow -x^2 + 148x - 576 = 0$

  $\Leftrightarrow \cancel{x = 144}$ of $x = 4$ 144 voldoet niet aan (*)

  Nulpunt f : 4.

Opdracht 34 bladzijde 139

Bereken, indien mogelijk, zonder rekentoestel.

1 $\sqrt[4]{10\,000} = 10$

2 $\sqrt[3]{-27} = -3$

3 $\sqrt[7]{1} = 1$

4 $\sqrt[5]{-32} = -2$

5 $\sqrt[3]{125} = 5$

6 $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10$

7 $\sqrt[9]{-1} = -1$

8 $\sqrt[4]{-81}$ bestaat niet

9 $\sqrt[3]{216} = 6$

10 $-\sqrt[10]{1024} = -2$

Opdracht 35 bladzijde 139

Bereken zonder rekentoestel.

1 $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

2 $1000^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10}$

3 $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

4 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (4^2)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

5 $4^{\frac{1}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{6}} \cdot 64^{\frac{1}{6}} = (4 \cdot 16 \cdot 64)^{\frac{1}{6}} = (4 \cdot 4^2 \cdot 4^3)^{\frac{1}{6}} = (4^6)^{\frac{1}{6}} = 4$

6 $\dfrac{320^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}} = \left(\dfrac{320}{10}\right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

Opdracht 36 bladzijde 139

Schrijf als een macht van 3.

1 $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$

2 $\sqrt{\frac{1}{3}} = (3^{-1})^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

3 $9\sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$

4 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{81}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^4}} = 3^{-\frac{4}{5}}$

5 $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3} = 3^{\frac{1}{4} - 1} = 3^{-\frac{3}{4}}$

6 $\sqrt{\sqrt[5]{3}} = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{10}}$

Opdracht 37 bladzijde 140

Welke van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk?

A $4x^{\frac{1}{7}}$	**C** $x^{\frac{4}{7}}$	**E** $\frac{1}{4}x^{-7}$	**G** $7x^{-4}$	**I** $\frac{1}{4x^7}$
B $7\sqrt[4]{x}$	**D** $4\sqrt[7]{x}$	**F** $\frac{7}{x^4}$	**H** $\sqrt[4]{x^7}$	**J** $\sqrt[7]{x^4}$

A $4x^{\frac{1}{7}} = 4 \cdot \sqrt[7]{x}$ D

C $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$ J

E $\dfrac{1}{4}x^{-7} = \dfrac{1}{4x^7}$ I

F $\dfrac{7}{x^4} = 7x^{-4}$ G

Opdracht 38 bladzijde 140

Los de volgende vergelijkingen op. Rond af op 3 cijfers na de komma.

1 $\sqrt[5]{x^3} = -4$

$\Leftrightarrow x^3 = (-4)^5$

$\Leftrightarrow x = (-4)^{\frac{5}{3}} \approx -10{,}079$

2 $(x-2)^{\frac{5}{8}} = 20{,}13$

$\Leftrightarrow x - 2 = 20{,}13^{\frac{8}{5}}$

$\Leftrightarrow x = 2 + 20{,}13^{\frac{8}{5}} \approx 123{,}941$

3 $x^{5{,}25} = 4589$

$\Leftrightarrow x = 4589^{\frac{1}{5{,}25}} \approx 4{,}983$

4 $(x^3+1)^4 = 5$

$\Leftrightarrow x^3 + 1 = \sqrt[4]{5}$ of $x^3 + 1 = -\sqrt[4]{5}$

$\Leftrightarrow x^3 = -1 + \sqrt[4]{5}$ of $x^3 = -1 - \sqrt[4]{5}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt[4]{5}} \approx 0{,}791$ of $x = \sqrt[3]{-1 - \sqrt[4]{5}} \approx -1{,}356$

Opdracht 39 bladzijde 140

$\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$ is gelijk aan

A $x\sqrt{x}$ **B** $\sqrt{x^5}$ **C** $\sqrt[6]{x}$ **D** $\sqrt[8]{x}$ **E** $\sqrt[8]{x^7}$

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x \cdot \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(x \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{7}{8}}$$

$$= \sqrt[8]{x^7}$$

E

Opdracht 40 bladzijde 140

De formule $H = c \cdot M^{\frac{2}{3}}$ geeft, bij benadering, het verband aan tussen de massa M (in kg) en de huidoppervlakte H (in dm^2) van een diersoort. De constante c, de zogenaamde Meeh-coëfficiënt, verschilt per diersoort. Hiernaast vind je een tabel van c voor een aantal diersoorten.

diersoort	*c*
muis	9,0
rat	9,1
kat	10,0
konijn	9,8
schaap	8,4
varken	9,0
koe	9,0
paard	10,0
egel	7,5
vleermuis	57,5
slang	12,5
mens	11,2

1 Hoe groot is, volgens dit model, de huidoppervlakte van een mens met een massa van 75 kg?

$$H = 11{,}2 \cdot 75^{\frac{2}{3}}\ dm^2 = 199{,}2\ dm^2$$

2 Schrijf de massa van de mens als functie van de huidoppervlakte.

$$\left(\frac{H}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(M^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{H}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

3 Wat is de massa van een mens met een huidoppervlakte van 150 dm^2 volgens dit model?

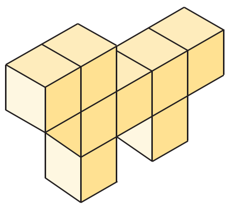
$$M = \left(\frac{150}{11{,}2}\right)^{\frac{3}{2}}\ kg \approx 49{,}0\ kg$$

4 Verklaar waarom in deze tabel de Meeh-coëfficiënt van een vleermuis de grootste is.

Een vleermuis heeft een kleine massa en een grote huidoppervlakte door de enorme vleugels.

Opdracht 41 bladzijde 141

De figuur hiernaast is opgebouwd uit kubussen met ribben van r cm.



1 Druk r uit in functie van de inhoud I.

$$I = 8r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{I}{8}} = \frac{\sqrt[3]{I}}{2}$$

2 Toon aan dat de oppervlakte A gelijk is aan $8{,}5I^{\frac{2}{3}}$.

$$A = 34r^2 \Leftrightarrow A = 34 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{I}}{2}\right)^2 = 8{,}5\ I^{\frac{2}{3}}$$

3 Bereken de inhoud van de figuur en de lengte van de ribben als de oppervlakte gelijk is aan 80 cm^2.

$$A = 80 = 8{,}5 \cdot I^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{80}{8{,}5}\right)^{\frac{3}{2}} = I$$

$$\Leftrightarrow I \approx 28{,}874$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{I}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{80}{8{,}5}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}534$$

De inhoud is 28,874 cm^3 en de lengte van de ribbe is 1,534 cm.

Opdracht 42 bladzijde 141

In de tabel staat voor een aantal planeten in ons zonnestelsel de afstand A tot de zon in miljoen kilometer en de omlooptijd T in dagen.

planeet	A	T
Jupiter	778	4329
Saturnus	1427	10 753
Uranus	2870	30 660
Neptunus	4497	60 150

Het verband tussen A en T wordt gegeven door de formule $T = c \cdot A^{1,5}$ waarbij c een constante is.

1 Uit de tabel kun je afleiden dat voor de planeet Jupiter geldt dat $4329 = c \cdot 778^{1,5}$.
Bereken c op twee cijfers na de komma nauwkeurig.

$$4329 = c \cdot 778^{1,5} \Leftrightarrow c = \frac{4329}{778^{1,5}} \approx 0{,}20$$

2 Ga na dat je voor de andere planeten dezelfde c krijgt.

Saturnus: $c = \dfrac{10\,753}{1427^{1,5}} \approx 0{,}20$

Uranus: $c = \dfrac{30\,660}{2870^{1,5}} \approx 0{,}20$

Neptunus: $c = \dfrac{60\,150}{4497^{1,5}} \approx 0{,}20$

3 De omwentelingstijd van Mercurius is 88 dagen.
Hoe ver ligt Mercurius van de zon?

$$T = 88 = 0{,}20 \cdot A^{1,5} \Leftrightarrow \left(\frac{88}{0{,}20}\right)^{\frac{1}{1,5}} = A$$

$$\Leftrightarrow A \approx 58$$ Mercurius ligt ongeveer 58 miljoen km van de zon.

4 Hoe ver ligt de aarde van de zon?

$$T = 365{,}25 = 0{,}20 \cdot A^{1,5} \Leftrightarrow \left(\frac{365{,}25}{0{,}20}\right)^{\frac{1}{1,5}} = A$$

$$\Leftrightarrow A \approx 149$$ De aarde ligt ongeveer 149 miljoen km van de zon.

Opdracht 43 bladzijde 142

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$ en $y > 0$.

Schrijf het resultaat zonder negatieve en zonder gebroken exponenten.

1 $$\left(\frac{4x^4}{9y^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}(x^4)^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}(y^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2}{3y^{-1}} = \frac{2}{3}x^2y$$

2 $$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}}{x^{-\frac{5}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2} - 2 - \left(-\frac{5}{2}\right)} \cdot y^{\frac{2}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= x^{\frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3}}$$
$$= x^1 \cdot y^0$$
$$= x$$

3 $$\frac{(x^{16} \cdot y^{-24})^{\frac{1}{8}}}{(x^{-4} \cdot y)^{-1}} = \frac{x^{16 \cdot \frac{1}{8}}\, y^{-24 \cdot \frac{1}{8}}}{x^{(-4) \cdot (-1)} \cdot y^{-1}}$$
$$= \frac{x^2 \cdot y^{-3}}{x^4 \cdot y^{-1}}$$
$$= x^{2-4} \cdot y^{-3-(-1)}$$
$$= x^{-2}y^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2y^2}$$

4 $(2x^6)^{\frac{1}{4}}\cdot(2x^{10})^{\frac{1}{12}}\cdot(2x)^{\frac{2}{3}}$ $= 2^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{4}\,2}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot x^{\frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{12}\,6}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}$

$= 2^1x^3 = 2x^3$

5 $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[9]{x^3}\cdot y}$ $= \dfrac{x^{\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{9}\,3}}\cdot y}$

$= x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{4}{3}-1}$

$= x^1\cdot y^{\frac{1}{3}} = x\cdot\sqrt[3]{y}$

6 $\dfrac{\sqrt[3]{x\cdot y^5}\cdot\sqrt[4]{y^2}}{\sqrt[3]{x^{-2}}\cdot\sqrt{y^{-1}}}$ $= \dfrac{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{5}{3}}\cdot y^{\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}}}{x^{-\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

$= x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$= x^1\cdot y^{\frac{8}{3}} = x\cdot\sqrt[3]{y^8}$

Opdracht 44 bladzijde 142

Als $f(x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)^{x-\frac{1}{2}}$, bepaal dan zonder rekentoestel welk van de volgende getallen het grootst is.

A $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **B** $f(0)$ **C** $f(-1)$

D $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ **E** $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

A $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1^{-1} = 1$

B $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

C $f(-1)=\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

D $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

E $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} = 6^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{6}$

B $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[6]{8}$ is het grootst.

Opdracht 45 bladzijde 143

Bewijzen van de rekenregels van machten met rationale exponenten

Als $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$, dan geldt:

1 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

2 $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

3 $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

4 $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

5 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Bewijs van **1**

Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen. (*)

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ definitie macht met rationale exponent

$$a^p \cdot a^q = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = \left(\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^s \cdot \left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = (a^m)^s \cdot (a^r)^n$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = a^{ms} \cdot a^{rn}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$(a^p \cdot a^q)^{ns} = a^{ms+rn}$$

$\Downarrow$ $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{ms+rn}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

2 **T.B.**: $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$

Bew.: Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ en $q = \dfrac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \left(\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \frac{\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^s}{\left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^n}$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = \frac{\left(a^m\right)^s}{\left(a^r\right)^n}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{ns} = a^{ms-rn}$$

$\Downarrow$ $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{\frac{ms-rn}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

3 T.B.: $\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$ met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $p, q \in \mathbb{Q}$

Bew.: Aangezien $p, q \in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \frac{m}{n}$ en $q = \frac{r}{s}$ met $m, r \in \mathbb{Z}$ en $n, s \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$\left(a^p\right)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$\left(a^p\right)^q = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left(\sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r}\right)^{ns}$$

$\Downarrow$ rekenregels machten met gehele exponenten

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left[\left[\sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r\right)}\right]^s\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolgen definitie n-de machtswortel

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = \left(\sqrt[n]{\left(a^m\right)^r}\right)^n$$

$\Downarrow$ gevolg def. n-de machtswortel en rekenregel machten met gehele exponenten

$$\left[\left(a^p\right)^q\right]^{ns} = a^{m \cdot r}$$

$\Downarrow$ $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\left(a^p\right)^q = a^{\frac{mr}{ns}}$$

$\Downarrow$ rekenen in $\mathbb{Q}$

$$\left(a^p\right)^q = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$$

4 <u>T.B.</u>: $\left(ab\right)^p = a^p \cdot b^p$ met a, b $\in \mathbb{R}_0^+$ en p $\in \mathbb{Q}$

<u>Bew.</u>: Aangezien p $\in \mathbb{Q}$, kunnen we $p = \dfrac{m}{n}$ met $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ stellen (*).

$$\left(ab\right)^p = \left(ab\right)^{\frac{m}{n}}$$

$\Downarrow$ def. macht met rationale exponent

$$\left(ab\right)^p = \sqrt[n]{\left(ab\right)^m}$$

$\Downarrow$ beide leden tot eenzelfde macht verheffen

$$\left(\left(ab\right)^p\right)^n = \left[\sqrt[n]{\left(ab\right)^m}\right]^n$$

$\Downarrow$ gevolg definitie n-de machtswortel

$$\left(\left(ab\right)^p\right)^n = \left(ab\right)^m$$

$\Downarrow$ rekenregel machten met gehele exponenten

$$\left(\left(ab\right)^p\right)^n = a^m \cdot b^m$$

$\Downarrow$ $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\left(ab\right)^p = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m}$$

$\Downarrow$ eigenschap n-de machtswortels (oefening 6/1)

$$\left(ab\right)^p = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$$

$\Downarrow$ definitie n-de machtswortel

$$\left(ab\right)^p = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$\Downarrow$ (*)

$$\left(ab\right)^p = a^p \cdot b^p$$

5 T.B.: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ = met $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $p \in \mathbb{Q}$

Bew.: $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^p$

$= a^p \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^p$ zie 4

$= a^p \cdot \left(b^{-1}\right)^p$

$= a^p \cdot b^{-p}$ zie 3

$= a^p \cdot \frac{1}{b^p}$ rekenen in $\mathbb{R}$

$= \frac{a^p}{b^p}$

Opdracht 46 bladzijde 144

Gegeven zijn de functies met voorschrift $f(x) = x^2 + 3x$ en $g(x) = -2x + 5$.

Bepaal

1 $(f \circ g)(0)$ $= f(g(0)) = f(5) = 40$

2 $(g \circ f)(1)$ $= g(f(1)) = g(4) = -3$

3 $(g \circ g)(3)$ $= g(g(3)) = g(-1) = 7$

4 $[f \circ (g \circ f)](1)$ $= f((g \circ f)(1)) \overset{2}{=} f(-3) = 0$

5 $(f \circ g)(x)$ $= f(g(x)) = f(-2x + 5)$

$= (-2x + 5)^2 + 3(-2x+5)$

$= 4x^2 - 26x + 40$

6 $(g \circ f)(x)$ $= g(f(x)) = g(x^2 + 3x)$

$= -2(x^2 + 3x) + 5$

$= -2x^2 - 6x + 5$

7 $(f \circ f)(x)$ $= f(f(x)) = f(x^2 + 3x)$

$= (x^2 + 3x)^2 + 3(x^2 + 3x)$

$= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x$

8 $[g \circ (g \circ g)](x)$ $= g(g(g(x))) = g(g(-2x + 5))$

$= g(-2(-2x + 5) + 5) = g(4x - 5)$

$= -2(4x - 5) + 5 = -8x + 15$

Opdracht 47 bladzijde 144

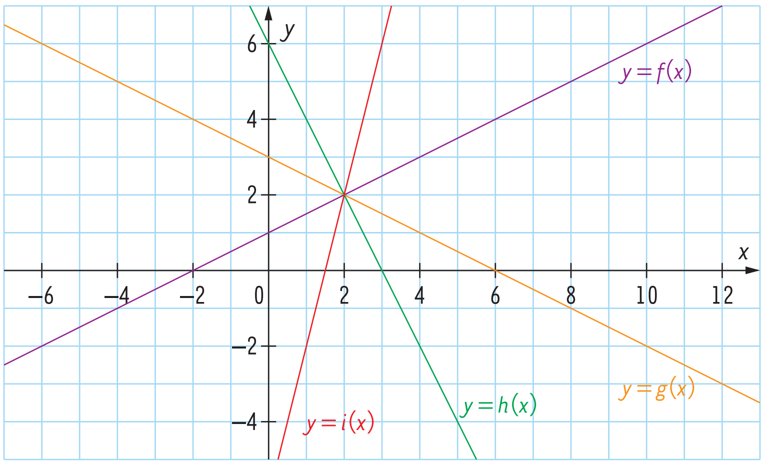
Vervolledig de volgende tabel.

x	$f(x)$	$g(x)$	$g(f(x))$
-1	3	1	8
1	-1	4	**1**
3	1	**8**	**4**

- $g(f(1)) = g(-1) = 1$
- $g(f(-1)) = 8$ en $f(-1) = 3 \Rightarrow g(3) = 8$
- $g(f(3)) = g(1) = 4$

Opdracht 48 bladzijde 144

Welk paar grafieken hoort bij inverse functies?



g en h zijn inverse functies want hun grafieken zijn elkaars spiegelbeeld om de rechte met vergelijking $y = x$

Opdracht 49 bladzijde 144

1 Verklaar waarom de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + 3x - 4$ niet inverteerbaar is.

Verwisselen we x en y in het voorschrift van f, dan vinden we

$x = y^2 + 3y - 4$

$\Leftrightarrow y^2 + 3y - x - 4 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-x - 4)$

$D = 4x + 25$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{4x + 25}}{2}$$

Dit is niet het voorschrift van een functie.

Ofwel

De grafiek van f is een parabool, zodat meerdere x-waarden een zelfde y-waarde hebben.

2 Hoe kun je het domein van f beperken zodanig dat functie met beperkt domein g wel inverteerbaar is?

$f(x) = x^2 + 3x - 4$

$x_T = \frac{-3}{2}$

zodat we het domein van f bv. kunnen beperken tot $\left]-\infty, \frac{-3}{2}\right]$ of $\left[\frac{-3}{2}, +\infty\right[$

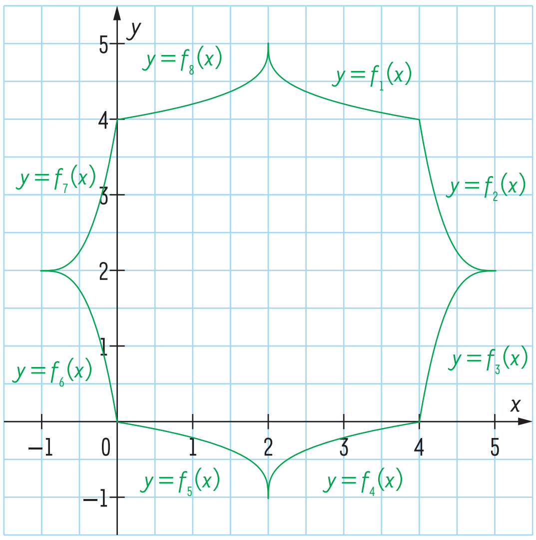
3 Bepaal het voorschrift van g^{-1}.

Nemen we als beperking $\left[\frac{-3}{2}, +\infty\right[$, dan is $g^{-1}(x) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{4x + 25}}{2}$.

Opdracht 50 bladzijde 145

De volgende figuur is opgebouwd uit acht functiegrafieken.

Welke paren grafieken horen bij inverse functies?



f_1 en f_2 zijn inverse functies.

f_3 en f_8 zijn inverse functies.

f_4 en f_7 zijn inverse functies.

f_5 en f_6 zijn inverse functies.

De grafieken van inverse functies zijn elkaars spiegelbeeld om de rechte met vergelijking $y = x$.

Opdracht 51 bladzijde 145

De grafiek van een functie f is gegeven.

Bepaal

1 $f^{-1}(3)$ = **-1**

want f(-1) = 3

2 $f^{-1}(0)$ = **1**

want f(1) = 0

3 $f^{-1}(-1)$ = **4**

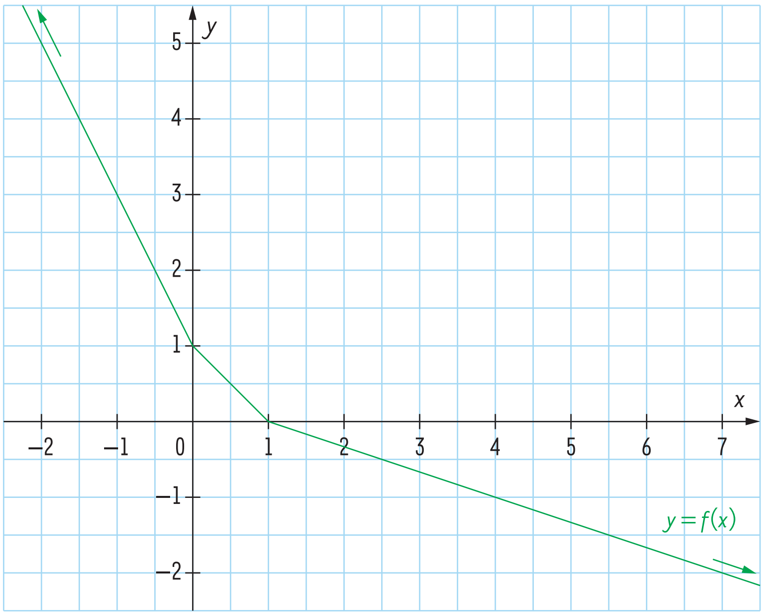
want f(4) = -1

4 $f^{-1}(-8)$ = **25**

want $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

voor $x \geqslant 1$

en $f(25) = -8$



Opdracht 52 bladzijde 146

Kies het juiste antwoord.

Het spiegelbeeld van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 4x^3 + 5$ om de rechte met vergelijking $y = x$ is de grafiek van de functie met voorschrift

A $g(x) = \dfrac{1}{4x^3 + 5}$ **B** $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{4}}$ **C** $g(x) = \dfrac{4}{x^3} + 5$

D $g(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x} + 5$ **E** $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{4} - 5$

f: $y = 4x^3 + 5$

f^{-1}: $x = 4y^3 + 5 \Leftrightarrow 4y^3 = x - 5$

$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\dfrac{x-5}{4}}$ ➜ **B**

Opdracht 53 bladzijde 146

Bepaal van de inverteerbare functies het voorschrift van de inverse functie.

1 $f(x) = 3x + 4$

- f: $y = 3x + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-4}{3}$
- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{x-4}{3}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$

2 $f(x) = 5$

$f(x) = 5$ is niet inverteerbaar.

3 $f(x) = 2x^5 - 32$

- $f\colon\ y = 2x^5 - 32 \Leftrightarrow x^5 = \dfrac{y + 32}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{y + 32}{2}}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \sqrt[5]{\dfrac{x + 32}{2}}$
- $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x + 32}{2}}$

4 $f(x) = -2\sqrt[3]{x - 1}$

- $f\colon\ y = -2 \cdot \sqrt[3]{x - 1} \Leftrightarrow y^3 = -8(x - 1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{y^3}{8} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y^3}{8} + 1$$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = -\dfrac{x^3}{8} + 1$
- $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{8}x^3 + 1$

5 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

- $f\colon\ y = \dfrac{1}{1 - x} \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} y - xy = 1$

$$\Leftrightarrow xy = y - 1$$

$$\overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y - 1}{y}$$

- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{x - 1}{x}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

6 $f(x) = \dfrac{4x}{x-3}$

- $f\colon y = \dfrac{4x}{x-3} \overset{x \neq 3}{\Leftrightarrow} xy - 3y = 4x$

$$\Leftrightarrow \quad x(y - 4) = 3y$$

$$\overset{y \neq 4}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{3y}{y-4}$$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \dfrac{3x}{x-4}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{x-4}$

7 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

- $f\colon y = \dfrac{x-1}{x+2} \overset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} xy + 2y = x - 1$

$$\Leftrightarrow \quad x(y - 1) = -2y - 1$$

$$\overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{2y+1}{1-y}$$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \dfrac{2x+1}{1-x}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$

8 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}}$

- $f\colon y = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \dfrac{x^2+2}{x^2}$

$$\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad x^2y^2 - x^2 = 2$$

$$\overset{x \neq \pm 1}{\Leftrightarrow} \quad x^2 = \frac{2}{y^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{y^2 - 1}}$$

f is niet inverteerbaar.

Opdracht 54 bladzijde 146

De functie met voorschrift $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ zet een temperatuur x in graden Celcius om in een temperatuur $f(x)$ in graden Fahrenheit.

Bepaal het voorschrift van de inverse functie g van f en geef de betekenis van dit voorschrift.

- f: $y = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x = y - 32 \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}(y - 32)$
- $x \leftrightarrow y$: $y = \frac{5}{9}(x - 32)$

Het voorschrift $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ zet een temperatuur x in graden Fahrenheit om in een temperatuur $g(x)$ in graden Celsius.

Opdracht 55 bladzijde 147

Bepaal het voorschrift van de inverse functie van

1 $f: x \mapsto \sqrt{x} - 2$

- f: $y = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x = (y + 2)^2$ met $y + 2 \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y$: $y = (x + 2)^2$ met $x \geqslant -2$
- $f^{-1}(x) = (x + 2)^2$ met $x \geqslant -2$

2 $f: x \mapsto \sqrt[4]{3x + 8}$

- f: $y = \sqrt[4]{3x + 8} \Leftrightarrow y^4 = 3x + 8$ met $y \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y^4 - 8}{3}$ met $y \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{x^4 - 8}{3}$ met $x \geqslant 0$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{x^4 - 8}{3}$ met $x \geqslant 0$

3 $f: x \mapsto 1 - \sqrt[6]{2-4x}$

- $f: y = 1 - \sqrt[6]{2 - 4x} \Leftrightarrow \sqrt[6]{2 - 4x} = 1 - y$

  $\Leftrightarrow 2 - 4x = (1 - y)^6$ met $1 - y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 1$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{2 - (1 - y)^6}{4}$ met $y \leqslant 1$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{2 - (1 - x)^6}{4}$ met $x \leqslant 1$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(1 - x)^6$ met $x \leqslant 1$

4 $f: x \mapsto x^2 + x$ met $x \geqslant 0$

- $f: y = x^2 + x$ met $x \geqslant 0$ (en dus ook $y \geqslant 0$ (*))

  $\Leftrightarrow x^2 + x - y = 0$ met $x \geqslant 0$ en $y \geqslant 0$ (*)

  $D = 1 + 4y > 0$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$ met $x \geqslant 0$ en $y \geqslant 0$

  Uit de voorwaarden volgt dat

  $x = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2}$ met $y \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ met $x \geqslant 0$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ met $x \geqslant 0$

5 $f\colon x \longmapsto 2x^2 - x \quad \text{met } x \leqslant 0$

- $f\colon y = 2x^2 - x \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en dus } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow 2x^2 - x - y = 0 \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0$

  $D = 1 + 8y > 0$

  $\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8y}}{4} \quad \text{met } x \leqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0$

  Uit de voorwaarden volgt:

  $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8y}}{4} \quad \text{met } y \geqslant 0$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{4} \quad \text{met } x \geqslant 0$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8x}}{4} \quad \text{met } x \geqslant 0$

Opdracht 56 bladzijde 147

Welke van de volgende functies zijn gelijk aan hun inverse? Verklaar.

$f_1\colon x \longmapsto \sqrt{4 - x^2} \text{ met } 0 \leqslant x \leqslant 2$

- $f_1\colon y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } 0 \leqslant x \leqslant 2 \ (*)$

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \quad \text{met } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2} \quad \text{aangezien } x \geqslant 0 \ (*)$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } x \geqslant 0 \text{ zodat } 0 \leqslant x \leqslant 2$

f_1 is gelijk aan haar inverse.

$f_2\colon x \longmapsto \sqrt{4 - x^2} \text{ met } -2 \leqslant x \leqslant 0$

- $f_2\colon y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } -2 \leqslant x \leqslant 0 \ (*)$

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \quad \text{met } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{4 - y^2} \quad \text{aangezien } x \leqslant 0 \ (*)$

- $x \leftrightarrow y\colon y = -\sqrt{4 - x^2} \quad \text{met } x \geqslant 0$

f_2 is niet gelijk aan haar inverse.

$f_3: x \mapsto -\sqrt{4 - x^2}$ met $0 \leqslant x \leqslant 2$

- f_3: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $0 \leqslant x \leqslant 2$ (*)

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$ met $y \leqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

  $\Leftrightarrow x = \sqrt{4 - y^2}$ aangezien $x \geqslant 0$ (*)

- $x \leftrightarrow y$: $y = \sqrt{4 - x^2}$ met $x \leqslant 0$

f_3 is niet gelijk aan haar inverse.

$f_4: x \mapsto -\sqrt{4 - x^2}$ met $-2 \leqslant x \leqslant 0$

- f_4: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $-2 \leqslant x \leqslant 0$ (*)

  $\Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$ met $y \leqslant 0$

  $\Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$

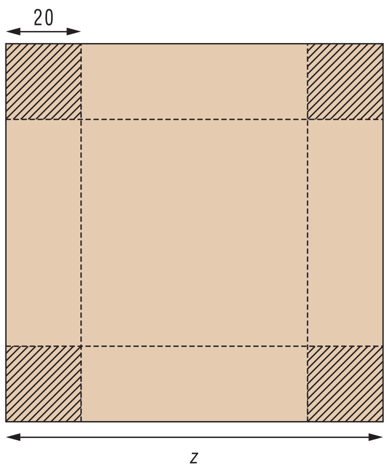
  $\Leftrightarrow x = -\sqrt{4 - y^2}$ aangezien $x \leqslant 0$ (*)

- $x \leftrightarrow y$: $y = -\sqrt{4 - x^2}$ met $x \leqslant 0$ zodat $-2 \leqslant x \leqslant 0$

f_4 is gelijk aan haar inverse.

Opdracht 57 bladzijde 147

In een kartonfabriek worden open dozen gemaakt uit vierkante stukken karton. Hiertoe worden aan de hoeken vierkanten met zijde 20 cm weggesneden.



Het voorschrift van de functie die het volume V (in cm^3) van een doos uitdrukt in functie van de zijde z (in cm) is $V(z) = 20 \cdot (z - 40)^2$.

1 Wat is de betekenis van $V^{-1}(1000)$?

$V^{-1}(1000)$ is de zijde die hoort bij een inhoud van 1000 cm^3.

2 Bepaal het voorschrift van de functie V^{-1}.

- $V = 20(z - 40)^2$ met $z > 40$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{20} = (z - 40)^2$$

$$\Leftrightarrow z - 40 = \sqrt{\frac{V}{20}} \quad \text{want } z > 40$$

$$\Leftrightarrow z = 40 + \sqrt{\frac{V}{20}}$$

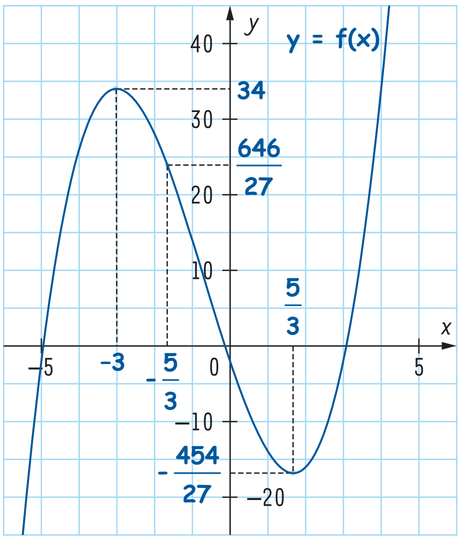
- De functie V^{-1} die de zijde in functie van het volume geeft, heeft als voorschrift

$$z = 40 + \sqrt{\frac{V}{20}}$$

(Omwille van de context is het niet aangewezen de letters z en V om te wisselen)

Opdracht 58 bladzijde 147

1 Bepaal grafisch de grootste waarde van a zodanig dat de functie met voorschrift $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 2$ inverteerbaar is over $[-a,a]$.



Uit de grafiek leiden we het verloopschema af:

x		-3		$\frac{5}{3}$	
f(x)	↗	max 34	↘	min $-\frac{454}{27}$	↗

f is inverteerbaar over $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

2 Bepaal voor de gevonden waarde van a het domein en het bereik van de inverse functie f^{-1} van f met $-a \leqslant x \leqslant a$.

- $\text{dom } f^{-1} = \text{ber } f \text{ over } \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

  Aangezien $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{646}{27}$ en $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{454}{27}$,

  is $\text{dom } f^{-1} = \left[-\frac{454}{27}, \frac{646}{27}\right]$

- $\text{ber } f^{-1} = \text{dom } f = \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$

Opdracht 59 bladzijde 147

Toon aan dat de grafiek van de functie $f\colon x \mapsto \sqrt{ax+b}$ met $a \neq 0$ een halve parabool is.

- $f\colon y = \sqrt{ax + b}$

  $\Leftrightarrow y^2 = ax + b \quad \text{met } y \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x = \frac{y^2 - b}{a} \quad \text{met } y \geqslant 0$

- Spiegelen we de grafiek van f om de rechte $y = x$, dan vinden we als spegelbeeld de grafiek van een functie g met voorschrift

  $y = \frac{x^2 - b}{a} \quad \text{met } x \geqslant 0.$

  Dit is een grafiek van een halve parabool zodat het spiegelbeeld om de eerste bissectrice ook een halve parabool is.

Opdracht 60 bladzijde 148

1 Toon aan dat de functie met voorschrift $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$ zichzelf als inverse heeft.

- $f\colon y = \frac{2x+1}{3x-2} \overset{x \neq 2/3}{\Leftrightarrow} 3xy - 2y = 2x + 1$

  $\Leftrightarrow x(3y - 2) = 2y + 1$

  $\overset{y \neq 2/3}{\Leftrightarrow} x = \frac{2y+1}{3y-2}$

- $x \leftrightarrow y\colon y = \frac{2x+1}{3x-2}$

Dit is opnieuw het voorschrift van f.

2 Aan welke voorwaarden moeten a, b, c en d voldoen opdat de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ met $c \neq 0$ gelijk zou zijn aan haar inverse?

- $f\colon\ y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \overset{x \neq -\frac{d}{c}}{\Leftrightarrow} cxy + dy = ax + b$

$$\Leftrightarrow \quad x(cy - a) = b - dy$$

$$\overset{y \neq \frac{a}{c}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

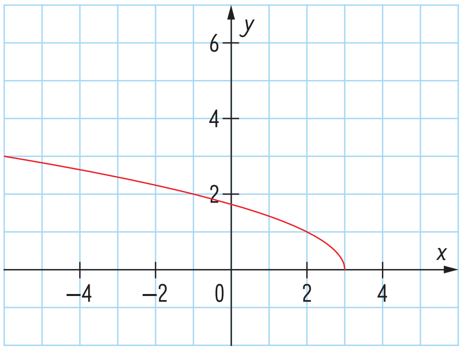
- $x \leftrightarrow y\colon\ y = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$
- $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a} = f(x) \Leftrightarrow a = -d$

Opdracht 61 bladzijde 148

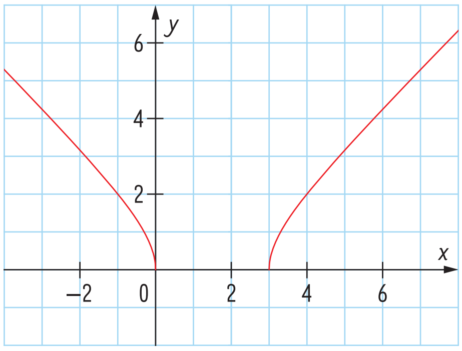
Kies de juiste grafiek nadat je het domein en de nulpunten van de functies hebt bepaald.
Los op zonder rekentoestel.

1 $f(x) = \sqrt{-x+3}$ **2** $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

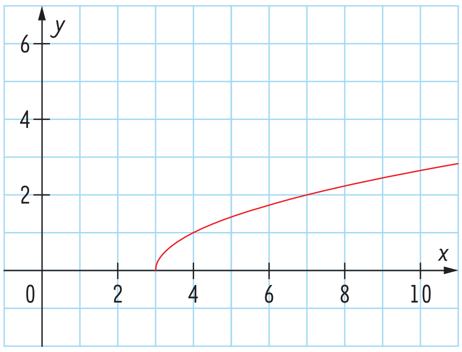
A



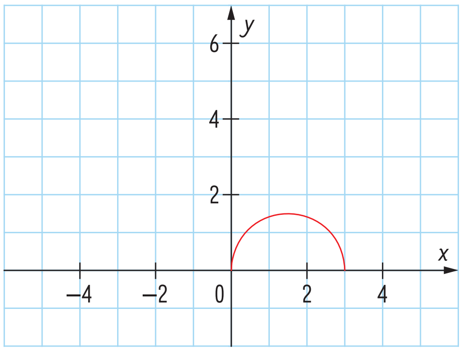
C



B



D



1 $f(x) = \sqrt{-x+3}$

- $f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow -x + 3 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow x \leqslant 3$$

- nulpunt f: 3

$\Rightarrow$ grafiek A

2 $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

- $g(x)$ bestaat $\Leftrightarrow x^2 - 3x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow x \leqslant 0$ of $x \geqslant 3$

- nulpunten g: 0 en 3

$\Rightarrow$ grafiek *C*

Opdracht 62 bladzijde 149

Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift

1 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$

- $f(x)$ bestaat

  $\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 5$

  dom $f = [-2, 5]$

x		-2		5	
$-x^2 + 3x + 10$	$-$	0	$+$	0	$-$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = 0$

  $\Leftrightarrow x = -2$ of $x = 5$

  nulpunten f: -2 en 5

2 $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x^3 - 1}}$

- $f(x)$ bestaat

  $\Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{x^3 - 1} \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 4$

  dom $f =]1, 4]$

x		1		4	
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x^3 - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{4 - x}{x^3 - 1}$	$-$	|	$+$	0	$-$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{x^3 - 1} = 0$

  $\Leftrightarrow x = 4$

  nulpunt f: 4

3 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-5x+5}}$

- f(x) bestaat niet

  $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$

  $\Leftrightarrow x^2(x - 1) - 5(x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{of} \quad x = -\sqrt{5}$

  dom f $= \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - 5x + 5} = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ en } x \in \text{dom } f$

  $\Leftrightarrow \cancel{x = 1} \quad \text{of} \quad x = 2$

  $\rightarrow 1 \notin \text{dom } f$

  nulpunt f: 2

4 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{2x^3+4x^2+2x}}$

- f(x) bestaat

  $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x} \geqslant 0$

x		-2		-1		0		2	
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	-	-	-	0	-	0	+	+	+
$\dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x}$	-	0	+	|	+	|	-	0	+

  $\Leftrightarrow -2 \leqslant x < -1 \quad \text{of} \quad -1 < x < 0 \quad \text{of} \quad x \geqslant 2$

  dom f $= [-2, -1[\cup]-1, 0[\cup [2, +\infty[$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{2x^3 + 4x^2 + 2x} = 0$

  $\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{of} \quad x = 2$

  nulpunten f: -2 en 2

Opdracht 63 bladzijde 149

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x^2+4}=7$

$$\sqrt{x^2+4}=7$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x^2+4 \geqslant 0 \text{ (overbodig)}$$
$$x^2+4=49$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2=45$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \quad \text{of} \quad x=-3\sqrt{5}$$

2 $\sqrt{2x+5}-x=1$

$$\sqrt{2x+5}-x=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{2x+5}=x+1$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } 2x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{5}{2}$$
$$\text{KWVW: } x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1 \ (*)$$
$$2x+5=x^2+2x+1$$
$$\Updownarrow$$
$$4=x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$x=2 \quad \text{of} \quad \cancel{x=-2}$$

voldoet niet aan (*)

3 $2\sqrt{2x+1}=x-2$

$$2\sqrt{2x+1}=x-2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } 2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$$
$$\text{KWVW: } x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \ (*)$$
$$4(2x+1)=x^2-4x+4$$
$$\Updownarrow$$
$$-x^2+12x=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\cancel{x=0} \quad \text{of} \quad x=12$$

voldoet niet aan (*)

4 $\sqrt{5x^2+2x+6}-4=x$

$$\sqrt{5x^2+2x+6}-4=x$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{5x^2+2x+6}=x+4$$

BVW: $5x^2+2x+6 \geqslant 0$ (overbodig)
KWVW: $x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -4$

$$\Updownarrow$$
$$5x^2+2x+6=x^2+8x+16$$
$$\Updownarrow$$
$$4x^2-6x-10=0$$
$$\Updownarrow$$
$$x=-1 \quad \text{of} \quad x=\frac{5}{2}$$

Opdracht 64 bladzijde 149

Stellen f en g dezelfde functies voor? Verklaar algebraïsch.

1 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ en $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$

- $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$ bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x+1} \geqslant 0$

x		-1		3	
$3-x$	+	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$\dfrac{3-x}{x+1}$	-	|	+	0	-

$\Leftrightarrow -1 < x \leqslant 3$

dom f =]-1, 3]

- $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$ bestaat

$\Leftrightarrow 3-x \geqslant 0$ én $x+1>0$

$\Leftrightarrow x \leqslant 3$ én $x>-1$

$\Leftrightarrow -1 < x \leqslant 3$

dom g =]-1, 3]

Aangezien dom f = dom g en $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ als $a \geqslant 0$ en $b>0$, is $f=g$.

2 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}}$ en $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-2x}}$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}}$ bestaat

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \geqslant 0$

x		-2		0		2	
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - 2x$	+	+	+	0	-	0	+
$\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$	+	0	-	|	+	|	+

$\Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $0 < x < 2$ of $x > 2$

dom f = $]-\infty, -2] \cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$

- $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ bestaat

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$ én $x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow (x \leqslant -2$ of $x \geqslant 2)$ én $(x < 0$ of $x > 2)$

$\Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $x > 2$

dom g = $]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[$

dom $f \neq$ dom g zodat $f \neq g$.

Opdracht 65 bladzijde 149

Bepaal exact de coördinaten van de eventuele snijpunten van de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = x + 6$ en $g(x) = \sqrt{-x^2 - 12x - 32}$.

$$f(x) = g(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 6 = \sqrt{-x^2 - 12x - 32}$$

BVW: $-x^2 - 12x - 32 \geqslant 0 \Leftrightarrow -8 \leqslant x \leqslant -4$
KWVW: $x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -6$ (*)

$$\Updownarrow$$
$$x^2 + 12x + 36 = -x^2 - 12x - 32$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 24x + 68 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 + 12x + 34 = 0$$
$$\Updownarrow$$

$D = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = 8$

$$x = \frac{-12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$-6 + \sqrt{2}$

$\cancel{-6 - \sqrt{2}}$ voldoet niet aan (*)

Het enige snijpunt van de grafieken van f en g is $S\left(-6 + \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Opdracht 66 bladzijde 149

Los de volgende irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

1 $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=-1$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=-1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+4}$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x-1 \geqslant 0 \text{ en } x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$
$$x-1+1+2\sqrt{x-1}=x+4$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-1}=2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$$
$$x-1=4$$
$$\Updownarrow$$
$$x=5$$

2 $\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}=1$

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x-2}=1+\sqrt{1-x}$$

BVW: $x-2 \geqslant 0$ en $1-x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow$ $x \geqslant 2$ en $x \leqslant 1$
onmogelijk

De vergelijking heeft geen oplossingen.

3 $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}=2$

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}=2$$
$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x+2 \geqslant 0 \text{ en } 2x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$$
$$x+2+2x+3+2\sqrt{(x+2)(2x+3)}=4$$
$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{2x^2+7x+6}=-1-3x$$

BVW: $2x^2+7x+6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ of $x \geqslant -\frac{3}{2}$

$\Updownarrow$

KWVW: $-1-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{3}$ (*)

$$4(2x^2+7x+6)=1+6x+9x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 22x + 23 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = 23} \quad \text{of} \quad x = -1$$

voldoet niet aan (*)

4 $\sqrt{2x+1} + 2 = 2\sqrt{x+9} - 3$

$$\sqrt{2x+1} + 2 = 2\sqrt{x+9} - 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{2x+1} + 5 = 2\sqrt{x+9}$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } 2x + 1 \geqslant 0 \text{ en } x + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$2x + 1 + 25 + 10\sqrt{2x+1} = 4(x + 9)$$

$$\Updownarrow$$

$$10\sqrt{2x+1} = 2x + 10$$

$$\Updownarrow$$

$$5\sqrt{2x+1} = x + 5$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$$

$$\text{KWVW: } x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$$

$$25(2x + 1) = x^2 + 10x + 25$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 40x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \quad \text{of} \quad x = 40$$

5 $\sqrt{3-4x}=\sqrt{x+5}-\sqrt{5x+2}$

$$\sqrt{3-4x} = \sqrt{x+5} - \sqrt{5x+2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{3-4x} + \sqrt{5x+2} = \sqrt{x+5}$$

BVW: $3-4x \geqslant 0$ en $5x+2 \geqslant 0$ en $x+5 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$

$$\Updownarrow$$

$$3 - 4x + 5x + 2 + 2\sqrt{(3-4x)(5x+2)} = x + 5$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{-20x^2 + 7x + 6} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{-20x^2 + 7x + 6} = 0$$

$$\Updownarrow$$

BVW: $-20x^2 + 7x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{5} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$

$$-20x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ of } x = \frac{-2}{5}$$

6 $\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}\sqrt{4x+6}-\sqrt{x}=0$

$$\sqrt{x+4} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+6} - \sqrt{x} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{x+4} = \sqrt{4x+6} + 2\sqrt{x}$$

BVW: $x + 4 \geqslant 0$ en $4x + 6 \geqslant 0$ en $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0$ (*)

$$\Updownarrow$$

$$4(x+4) = 4x + 6 + 4x + 4\sqrt{x(4x+6)}$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sqrt{4x^2 + 6x} = -4x + 10$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{4x^2 + 6x} = -2x + 5$$

BVW: $4x^2 + 6x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{2}$ of $x \geqslant 0$

$$\Updownarrow$$

KWVW: $-2x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{2}$

$$4(4x^2 + 6x) = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\Updownarrow$$

$$12x^2 + 44x - 25 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = -\frac{25}{6}} \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$$

→ voldoet niet aan (*)

Opdracht 67 bladzijde 149

Bepaal vergelijkingen van de eventuele horizontale en verticale asymptoten van de grafieken van de volgende irrationale functies.

1 $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-3x-4}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x-4}}$$

•

x		-2		-1		4	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-3x-4	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+2}{x^2-3x-4}$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

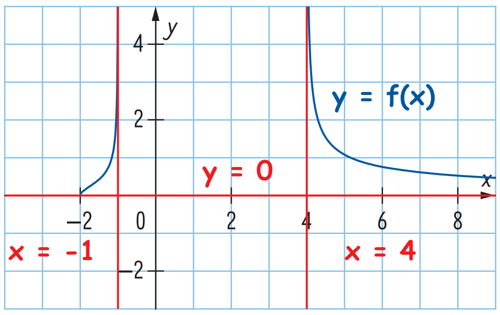
dom $f = [-2, -1[\cup]4, +\infty[$

• $x = -1$ en $x = 4$ zijn V.A.
want -1 en 4 zijn nulpunten van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn.

• Als $x \to +\infty$, dan $\dfrac{x+2}{x^2-3x-4} \to 0$

zodat ook $f(x) \to 0$.

$y = 0$ is H.A.



2 $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x^3+32}{x^3+3x^2+3x+1}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^3 + 32}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$$

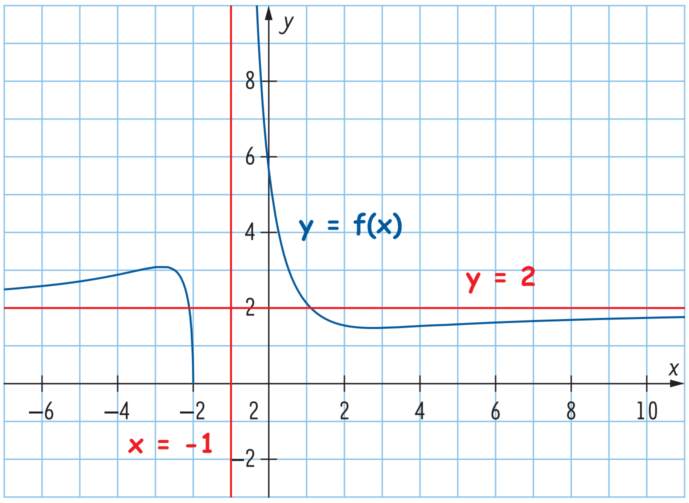
•

x		-2		-1	
$4x^3 + 32$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4x^3 + 32}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

dom $f = \,]-\infty, -2] \cup\,]-1, +\infty[$

• $x = -1$ is V.A.
want -1 is een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt van de teller is.

• Als $x \to \pm\infty$,
dan $\dfrac{4x^3 + 32}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \to 4$
zodat $f(x) \to 2$.
$y = 2$ is H.A. van de grafiek van f.



3 $f: x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{3x^2-x}{6x^2-5x+1}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2 - x}{6x^2 - 5x + 1}}$$

• $6x^2 - 5x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ of $x = \dfrac{1}{2}$

$3x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{3}$

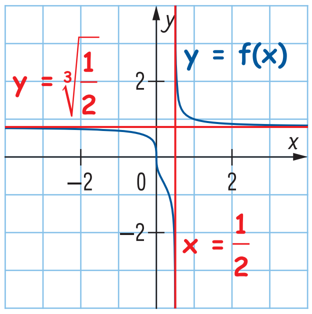
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{x(3x - 1)}{(3x - 1)(2x - 1)}} = \sqrt[3]{\frac{x}{2x - 1}}$$

met dom $f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$

- $x = \frac{1}{2}$ is V.A. want $\frac{1}{2}$ is een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt van de teller is.
- Als $x \to \pm\infty$, dan $\frac{3x^2 - x}{6x^2 - 5x + 1} \to \frac{1}{2}$

  zodat $f(x) \to \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ is H.A. van de grafiek van f.



Opdracht 68 bladzijde 150

Bepaal het voorschrift van een mogelijke irrationale functie *f* die voldoet aan de volgende voorwaarden:

– het nulpunt van *f* is -1

– $\text{dom } f =]-\infty,-1] \cup]3,+\infty[$

– de rechte $y = 2$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van *f*

x		-1		3	
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\mid$	$+$

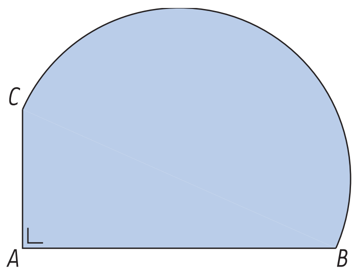
$\Rightarrow f(x) = a \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$

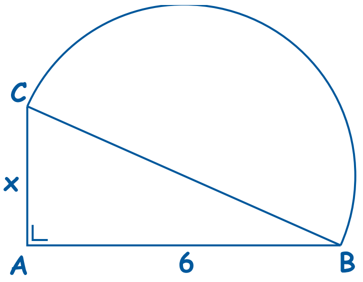
en $y = 2$ is H.A. zodat $f(x) = 2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ een mogelijk voorschrift is.

Opdracht 69 bladzijde 150

Op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek *ABC* wordt een halve cirkel geconstrueerd.
Zo ontstaat de plattegrond van een zwembad met $|AB| = 6$ m.

Bepaal $|AC|$ op 1 cm nauwkeurig als de omtrek van het zwembad gelijk moet zijn aan 18 m.





$|AB| = 6$ en $|AC| = x$

$\Rightarrow |BC| = \sqrt{36 + x^2}$

De omtrek van de halve cirkel is bijgevolg $\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2}$.

De totale omtrek is 18 m zodat

$x + 6 + \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2} = 18$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{36 + x^2} = 12 - x$ KWVW: $12 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 12$

$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} \cdot (36 + x^2) = 144 - 24x + x^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) x^2 + 24x + 9\pi^2 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow x = -18{,}40$ of $x = 2{,}043561722$

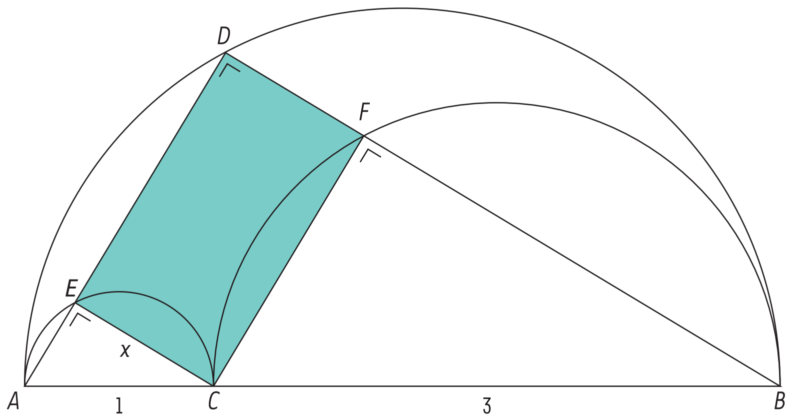
$|AC|$ heeft een lengte van 2,04 m.

Opdracht 70 bladzijde 150

Op een lijnstuk $[AB]$ met lengte 4 ligt het punt C zo dat $|AC| = 1$.
Op $[AC]$, $[CB]$ en $[AB]$ zijn halve cirkels getekend, alle drie aan dezelfde kant van $[AB]$.
D is een punt op de grootste halve cirkel, verschillend van A en B.
AD en BD snijden de andere halve cirkels in E en F.

$A\hat{D}B$, $A\hat{E}C$ en $C\hat{F}B$ zijn rechte hoeken want het zijn omtrekshoeken op een halve cirkel.
Bijgevolg is de vierhoek $ECFD$ een rechthoek.

We stellen $|EC| = x$.



1 Bepaal een formule voor de oppervlakte *A* van de rechthoek *ECFD* in functie van *x*.

$\Delta AEC \sim \Delta CFB$ (hh)

$\Rightarrow \dfrac{|FB|}{|EC|} = \dfrac{|CB|}{|AC|}$

$\Rightarrow |FB| = 3x$

In ΔCFB is dan $|CF| = \sqrt{9 - (3x)^2}$

$= 3\sqrt{1 - x^2}$.

De oppervlakte van ECFD is $A(x) = 3x\sqrt{1 - x^2}$.

2 Er zijn twee situaties waarin de oppervlakte van de rechthoek *ECFD* gelijk is aan $\sqrt{2}$.
Bereken de bijbehorende waarden van *x*.

$A(x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad 3x\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2}$

BVW: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$
en natuurlijk ook $x > 0$ (*)

$\Leftrightarrow \quad 9x^2(1 - x^2) = 2$

$\Leftrightarrow \quad -9x^4 + 9x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{2}{3}$ of $x^2 = \dfrac{1}{3}$

$\overset{x > 0\ (*)}{\Leftrightarrow} \quad x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ of $x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

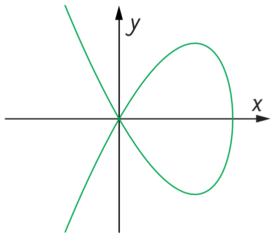
3 Gebruik je rekentoestel om de waarde van *x* te bepalen waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

(Bron © www.examenbundel.nl, examen VWO wiskunde B van 20 juni 2012)

$x = 0{,}707107\ldots$

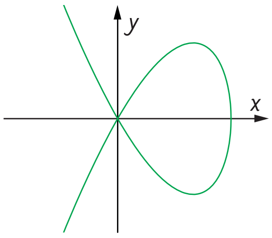
Opdracht 71 bladzijde 151

De kromme met vergelijking $y^2 = x^2(3-x)$ wordt weergegeven in de volgende figuur

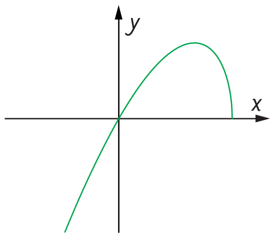


Welke grafiek heeft als voorschrift $y = x\sqrt{3-x}$?

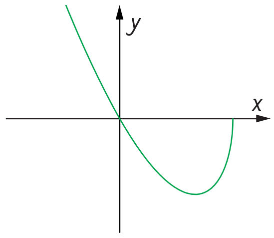
A



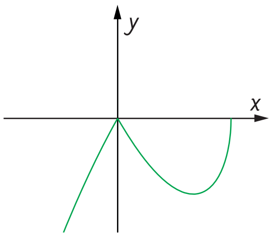
B



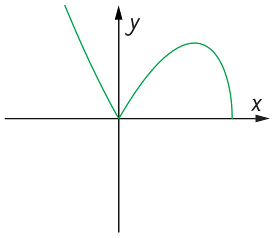
C



D



E



(Bron © VWO 2011, tweede ronde)

x		0		3	
x	-	0	+	+	+
$\sqrt{3-x}$	+	+	+	0	
$y = x\sqrt{3-x}$	-	0	+	0	

$y = x\sqrt{3-x}$ is het voorschrift van een functie, dus A is al uitgesloten.
Uit de tekentabel volgt dat voorschrift B het juiste is.

Opdracht 72 bladzijde 151

Heeft de functie met voorschrift $f(x)=\dfrac{5\sqrt{x^2-3x}+4x-6}{x+1-\sqrt{x^2+x}}$ nulpunten?

Verklaar algebraïsch.

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x^2 - 3x} + 4x - 6}{x + 1 - \sqrt{x^2 + x}}$$

- Nulpunten teller:

$$5\sqrt{x^2 - 3x} = 6 - 4x$$

BVW: $x^2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ of $x \geqslant 3$

KWVW: $6 - 4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ (*)

$$\Updownarrow$$

$$25(x^2 - 3x) = 36 - 48x + 16x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2 - 27x - 36 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -1 \text{ of } \cancel{x = 4}$$

voldoet niet aan (*)

- Noemer $n(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x}$

$$n(-1) = -1 + 1 - \sqrt{1 - 1} = 0$$

zodat -1 niet behoort tot dom f.

f heeft geen nulpunten.

Opdracht 73 bladzijde 151

Los op.

1 $\sqrt{x^2-3x+5}=|x|+1$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = |x| + 1$$

BVW: $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$ is overbodig

KWVW: $|x| + 1 \geqslant 0$ is ook overbodig

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x^2} - 3x + 5 = \cancel{x^2} + 2|x| + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-3x + 4 = 2|x|$$

$$\Updownarrow$$

KWVW: $-3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$ (*)

$$9x^2 - 24x + 16 = 4x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{4}{5} \quad \text{of} \quad \cancel{x = 4}$$

voldoet niet aan (*)

2 $\sqrt{2 - 3x + x^2} = |x| - 2$

$$\sqrt{2 - 3x + x^2} = |x| - 2$$

$$\Updownarrow$$

$$2 + \sqrt{2 - 3x + x^2} = |x|$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1 \text{ of } x \geqslant 2$$

$$4 + 4\sqrt{2 - 3x + x^2} = 2 - 3x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$4\sqrt{2 - 3x + x^2} = 3x - 6$$

$$\Updownarrow \qquad \text{KWVW: } 3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \ (*)$$

$$16(2 - 3x + x^2) = 9x^2 - 36x + 36$$

$$\Updownarrow$$

$$7x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x = -\frac{2}{7}} \quad \text{of} \quad x = 2$$

voldoet niet aan (*)

Opdracht 74 bladzijde 151

Los de volgende irrationale vergelijkingen op.

1 $\sqrt{x^2 - 5x + 20} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 4$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 20} + \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 4$$

$$\Updownarrow \qquad \text{stel } x^2 - 5x + 4 = y$$

$$\sqrt{y + 16} + \sqrt{y} = 4$$

$$\Updownarrow \qquad \text{BVW: } y + 16 \geqslant 0 \text{ en } y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant 0$$

$$y + 16 + y + 2\sqrt{y^2 + 16y} = 16$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{y^2 + 16y} = -y$$

$$\Updownarrow \qquad \text{KWVW: } -y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 0$$

$$y^2 + 16y = y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 1 \quad \text{of} \quad x = 4$$

2 $2x - x^2 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

$$2x - x^2 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x - x^2 = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$$

BVW: $6x^2 - 12x + 7 \geqslant 0$ (overbodig)

$$\Updownarrow$$

KWVW: $2x - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$ (*)

$$4x^2 - 4x^3 + x^4 = 6x^2 - 12x + 7$$

$$\Updownarrow$$

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7 = 0$$

	1	-4	-2	12	-7
1		1	-3	-5	7
	1	-3	-5	7	0
1		1	-2	-7	
	1	-2	-7	0	

$$\Updownarrow$$

$$x = 1 \quad \text{of} \quad x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad D = 4 + 4 \cdot 7 = 32$$

$$x = 1 \quad \text{of} \quad x = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{2} = \cancel{1 + 2\sqrt{2}} \quad \text{of} \quad x = \cancel{1 - 2\sqrt{2}}$$

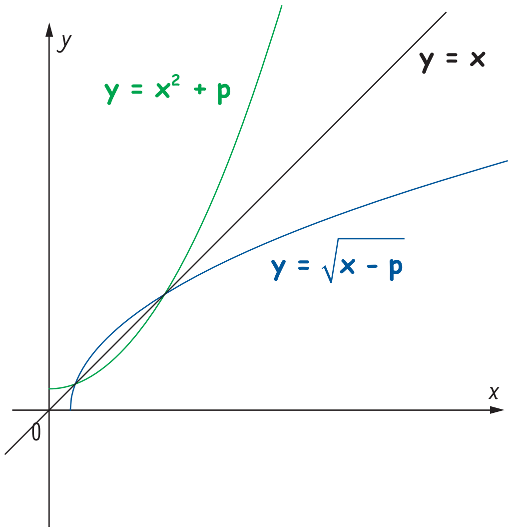
voldoet niet aan (*)

Opdracht 75 bladzijde 151

Voor welke waarden van p heeft de vergelijking $\sqrt{x-p} = x$ twee verschillende reële wortels?

Grafisch zoeken we de snijpunten van de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \sqrt{x - p}$ en $g(x) = x$.

Om het rekenwerk te vereenvoudigen, zoeken we de snijpunten van $f^{-1}(x) = x^2 + p$ met $x \geqslant 0$ en $g(x) = x$.



$$x^2 + p = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + p = 0$$

Er zijn enkel 2 oplossingen als

$D = 1 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < \dfrac{1}{4}$

Deze zijn dan $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2}$ of $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2}$.

Als $p < 0$, is $1 - 4p > 1$ zodat $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4p}}{2} < 0$.

Bijgevolg hebben de grafieken in dat geval ook maar 1 snijpunt.

Besluit: $\sqrt{x - p} = x$ heeft 2 verschillende reële wortels als $0 \leqslant p < \dfrac{1}{4}$.

Opdracht 76 bladzijde 152

Welke van de volgende uitdrukkingen, met $x > 0$, zijn gelijk?

	• x^{-1}
$\sqrt[6]{x^8}$ •	• $x^{\frac{1}{12}}$
$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$ •	• $x^{\frac{1}{7}}$
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ •	• $x^{\frac{3}{4}}$
	• $x^{\frac{4}{3}}$

$$\sqrt[6]{x^8} = x^{\frac{8}{6}} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}}$$

Opdracht 77 bladzijde 152

Vereenvoudig, met $x > 0$ en $y > 0$.

1 $\dfrac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[12]{\sqrt{x}}}$

$$\frac{\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[8]{x^3}}{\sqrt[12]{\sqrt{x}}} = \frac{x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{3}{8}}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{12}}} = x^{\frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{24}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

2 $\dfrac{\left(16x^{-6}y^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(36x^5y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27y^2\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\left(16x^{-6}y^{\frac{1}{9}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(36x^5y^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27y^2\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{16^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{9}{2}} \cdot y^{\frac{1}{12}} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}{27^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{8 \cdot 6}{3} \cdot x^{-\frac{9}{2} + \frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}}$$

$$= 16x^{-2}y^{\frac{1}{6}} = 16 \cdot \frac{\sqrt[6]{y}}{x^2}$$

Opdracht 78 bladzijde 152

Het draagvermogen van een vliegtuig is de maximale massa van het vliegtuig, inclusief passagiers en bagage. De grootte van het draagvermogen hangt onder andere af van de oppervlakte van de vleugels.

Het verband tussen de oppervlakte A van de vleugels (in m^2) en het draagvermogen D (in kg) wordt gegeven door de formule $A = 0,1 \cdot D^{0,67}$.

1 Bereken de vleugeloppervlakte van een Boeing 747, waarvan het draagvermogen 378 000 kg bedraagt.

$D = 0,1 \cdot 378\,000^{0,67} \approx 545,66$

De vleugeloppervlakte is 545,66 m^2.

2 Druk D uit in functie van A.

$A = 0,1 \cdot D^{0,67}$

$\Leftrightarrow 10A = D^{0,67}$

$\Leftrightarrow (10A)^{\frac{1}{0,67}} = D$

$\Leftrightarrow D = (10A)^{\frac{100}{67}}$

3 Bereken hoeveel kilogram vracht (passagiers en bagage) een vliegtuig met een vleugeloppervlakte van 510 m^2 en een massa van 174 000 kg maximaal mag meenemen.

$D = (10 \cdot 510)^{\frac{100}{67}} = 341\,733$ kg

$-\ 174\,000$ kg

$167\,733$ kg

Het vliegtuig kan maximaal 167 733 kg vracht meenemen.

Opdracht 79 bladzijde 153

Gegeven de functie met voorschrift $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{6x^3-11x^2+4x}}$.

1 Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van f.

- $f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow \dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{6x^3-11x^2+4x} \geqslant 0$

$2x^3-x^2-2x+1 = x^2(2x-1)-(2x-1) = (2x-1)(x^2-1)$

$6x^3-11x^2+4x = x(6x^2-11x+4)$

x		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$	
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$6x^2-11x+4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{6x^3-11x^2+4x}$	$+$	0	$-$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$+$

$$\text{dom } f =]-\infty, -1] \cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

- nulpunten f: -1 en 1

2 Bepaal vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f.

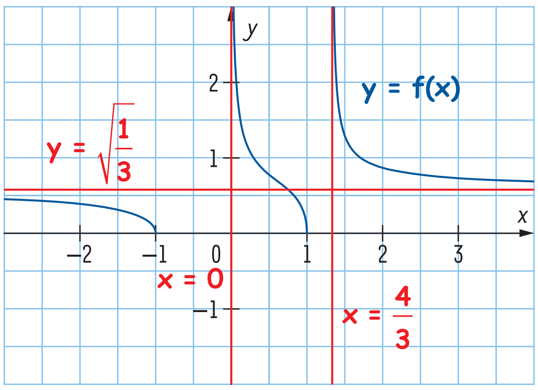
$f(x) = \sqrt{\dfrac{(2x-1)(x^2-1)}{x(2x-1)(3x-4)}} = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x(3x-4)}}$ als $x \neq \dfrac{1}{2}$

V.A.: $x = 0$ en $x = \dfrac{4}{3}$

nl. 0 en $\frac{4}{3}$ zijn nulpuntn van de noemer die geen nulpunten van de teller zijn.

H.A.: $y = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

nl. als $x \to \pm\infty$, dan $f(x) \to \sqrt{\dfrac{1}{3}}$



Opdracht 80 bladzijde 153

Bepaal de inverse functie indien f inverteerbaar is.

1 $f: x \mapsto \dfrac{4x+3}{3x-1}$

- $f\colon y = \dfrac{4x+3}{3x-1}$

$$\underset{x \neq \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} \quad 3xy - y = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x(3y - 4) = y + 3$$

$$\underset{y \neq \frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{y+3}{3y-4}$$

- $x \leftrightarrow y\colon \quad y = \dfrac{x+3}{3x-4}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{3x-4}$

2 $f: x \mapsto \dfrac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \leqslant 0$

- $f\colon y = \dfrac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^6 = 5y$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2 = \sqrt[6]{5y} \quad \text{of} \quad x + 2 = -\sqrt[6]{5y}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 + \sqrt[6]{5y} \quad \text{of} \quad x = -2 - \sqrt[6]{5y}$$

- $x \leqslant 0$ is mogelijk bij beide voorschriften.

  f is niet inverteerbaar.

3 $f: x \mapsto \frac{1}{5}(x+2)^6$ met $x \geqslant 0$

- $f: y = \frac{1}{5}(x + 2)^6$ met $x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow \quad x = -2 + \sqrt[6]{5y}$ of $x = -2 - \sqrt[6]{5y}$

- $x \geqslant 0$ is enkel mogelijk bij $x = -2 + \sqrt[6]{5y}$.
- $x \leftrightarrow y$: $y = -2 + \sqrt[6]{5x}$ met $y \geqslant 0$.

  Nu is $-2 + \sqrt[6]{5x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{5x} \geqslant 2$

  $\Leftrightarrow 5x \geqslant 64$

  $\Leftrightarrow x \geqslant \frac{64}{5}$

- $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt[6]{5x}$ met $x \geqslant \frac{64}{5}$

4 $f: x \mapsto 1 - \sqrt{2x+1}$

- $f: y = 1 - \sqrt{2x + 1}$

  $\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x + 1} = 1 - y$

  $\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = (1 - y)^2$ met $1 - y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant 1$

  $\Leftrightarrow \quad x = \frac{(1 - y)^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}y^2 - y$ met $y \leqslant 1$

- $x \leftrightarrow y$: $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ met $x \leqslant 1$

- $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ met $x \leqslant 1$

Opdracht 81 bladzijde 153

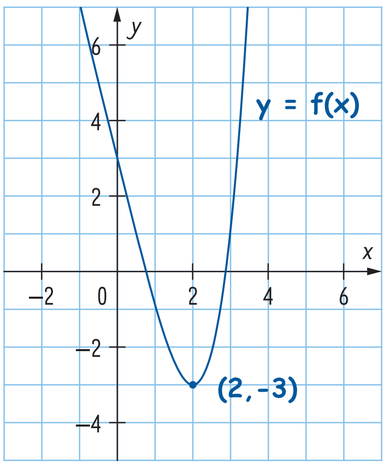
Bepaal grafisch de grootste waarde van *a* zodanig dat de functie met voorschrift

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x + 3$ inverteerbaar is over $]-\infty, a]$.

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 4x + 3$ heeft als verloopschema

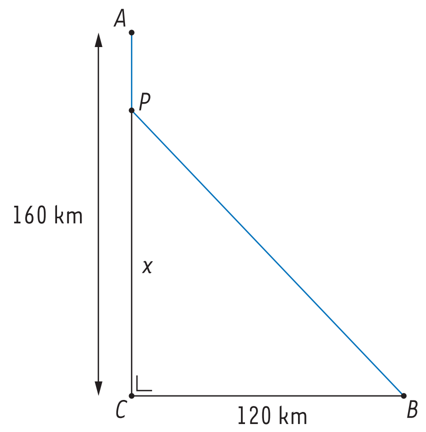
x		2	
$f(x)$	↘	-3	↗

f is inverteerbaar over $]-\infty, 2]$, dus $a = 2$.



Opdracht 82 bladzijde 153

Er moet een gasleiding aangelegd worden van A (aan de kust) naar B (120 km het binnenland in). Omdat de aanlegkosten in het binnenland € 300 000/km bedragen en langs de kustlijn € 200 000/km, is het interessant de leiding eerst een stukje $[AP]$ van de kustlijn AC te laten volgen met $|AC| = 160$ km.



1 Schrijf de kostprijs K (in €) van de leiding als functie van $x = |PC|$ (in km).

$$K(x) = (160 - x) \cdot 200\,000 + \sqrt{120^2 + x^2} \cdot 300\,000$$
$$= 32\,000\,000 - 200\,000x + 300\,000\sqrt{14\,400 + x^2}$$

2 Bepaal met je rekentoestel voor welke waarde van x (op 0,1 km nauwkeurig) de kostprijs K minimaal is.

Voor $x = 107{,}3$ km is de kostprijs minimaal.

Opdracht 83 bladzijde 153

Stel dat $f(x) = ax + b$ met a en b reële getallen.
Als $f(f(f(x))) = 8x + 21$, dan is $a + b$ gelijk aan

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2004)

$f(x) = ax + b$

$$\Rightarrow \quad f\big(f(x)\big) = f(ax + b) = a(ax + b) + b$$
$$= a^2x + ab + b$$
$$\Rightarrow \quad f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(a^2x + ab + b)$$
$$= a(a^2x + ab + b) + b$$
$$= a^3x + a^2b + ab + b$$

Nu is $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 8x + 21$

zodat $\begin{cases} a^3 = 8 \\ a^2b + ab + b = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4b + 2b + b = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

$a + b = 5 \;\rightarrow\;$ D

Opdracht 84 bladzijde 153

Bepaal algebraïsch het domein en de nulpunten van de functie met voorschrift

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}-\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}.$$

- $f(x)$ bestaat

$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x-1} \geqslant 0$ én $1-x \neq 0$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$2x+1$	-	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$\frac{2x+1}{2x-1}$	+	0	-	|	+

$\text{dom } f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

- $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} = \frac{1+x}{1-x}$

$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x-1} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ BVW: $\frac{2x+1}{2x-1} \geqslant 0$

KWVW: $\frac{1+x}{1-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(1-2x+x^2) = (2x-1)(1+2x+x^2)$

$\Leftrightarrow \cancel{2x^3} + x^2 - 4x^2 \cancel{-2x} + \cancel{2x} + 1 = \cancel{2x^3} - x^2 + 4x^2 \cancel{-2x} + \cancel{2x} - 1$

$\Leftrightarrow -6x^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

nulpunten f: $\sqrt{\frac{1}{3}}$ en $-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Hersenbrekers 1 bladzijde 154

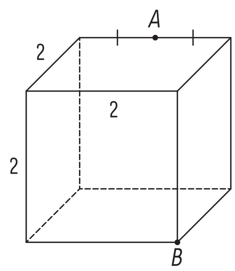
Vier heren staan achter elkaar: een Belg, een Nederlander, een Chinees en een Engelsman. Er zijn vijf hoeden waarvan iedereen weet dat er drie witte en twee zwarte zijn. Een dame neemt willekeurig vier hoeden en zet vervolgens één hoed op het hoofd van de Belg, de Nederlander, de Chinees en de Engelsman.
De Belg – die de Nederlander, de Chinees en de Engelsman kan zien – zegt: "Ik kan de kleur van mijn hoed niet bepalen". De Nederlander – die de Chinees en de Engelsman kan zien – zegt: "Nou, ik vind hem hartstikke leuk, maar heb je hem niet in het oranje?". De Chinees – die slechts de Engelsman kan zien – zegt: "Ik kan de kleur van mijn hoed niet bepalen."

Welke kleur van hoed draagt de Engelsman?

De Belg zou de kleur van zijn hoed kunnen bepalen als hij 3 witte ziet of 2 zwarte en 1 witte. Dit is niet het geval, dus ziet de Belg 1 zwarte en 2 witte.
De Chinees heeft de Belg gehoord en zou de kleur van zijn hoed kunnen bepalen als hij een zwarte zou zien op het hoofd van de Engelsman.
Dit is niet het geval, de Engelsman draagt bijgevolg een witte hoed.

Hersenbrekers 2 bladzijde 154

Een mier bevindt zich in *A*, het midden van een ribbe van een massieve houten kubus met ribbe 2 (zie figuur).
Ze loopt over het oppervlak langs de kortste weg naar het hoekpunt *B*.



Hoe lang is die weg?

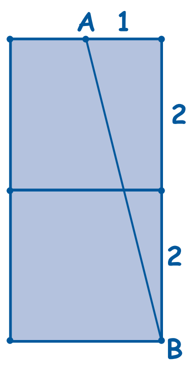
A $\sqrt{13}$ **B** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C** $1+2\sqrt{2}$

D $\sqrt{17}$ **E** $2+\sqrt{5}$

Op een (deel van) een ontwikkeling van de kubus, zien we de kortste weg als de schuine zijde van een rechthoekige driehoek:

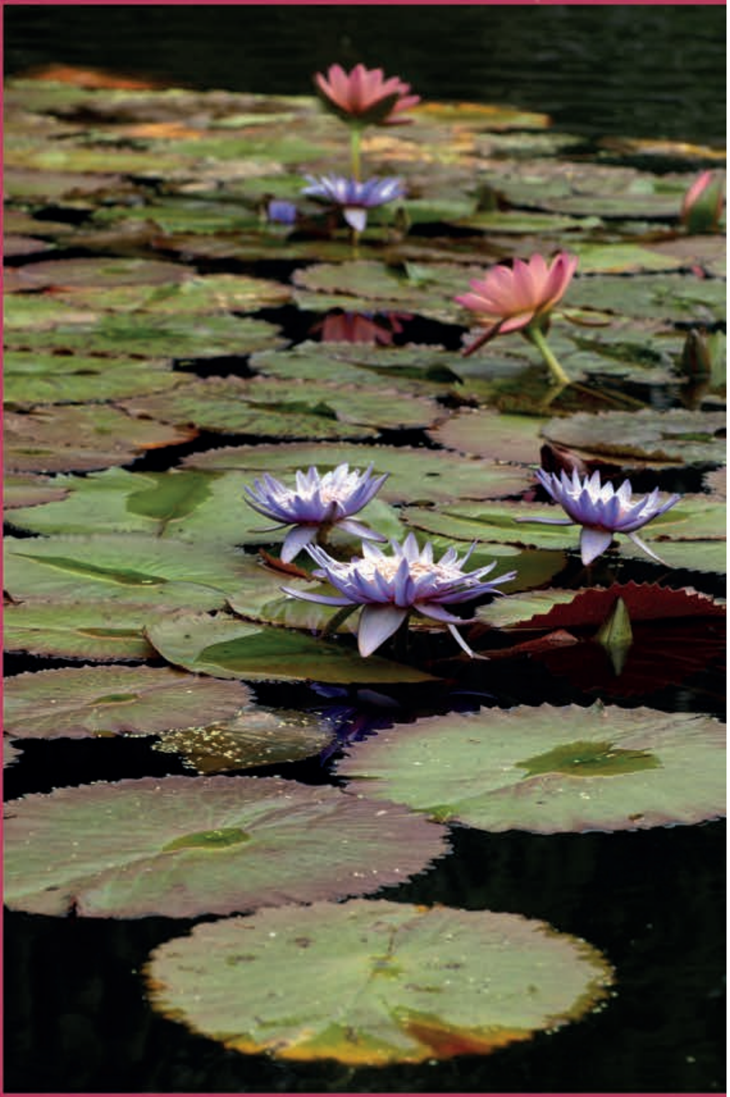
$$|AB| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Antwoord D.



Hoofdstuk 4

Exponentiële en logaritmische functies



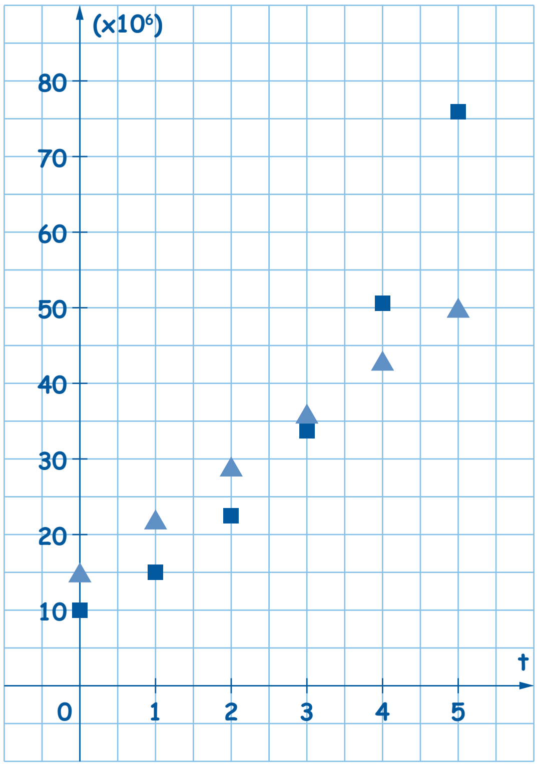
Opdracht 1 bladzijde 156

Eind 18e eeuw al waarschuwde Thomas Malthus ([1]) voor de onvermijdelijke catastrofen die de mensheid te wachten staan wanneer de bevolking met een vast percentage toeneemt, terwijl de voorzieningen van voedsel, energie, leefruimte ... met een vaste *hoeveelheid* toenemen in een zelfde periode. Stel dat de bevolking B in een bepaald gebied op een zeker ogenblik gelijk is aan 10 miljoen personen. We laten dit tijdstip overeenkomen met $t = 0$. Veronderstel verder dat in dat gebied, met de landbouw- en ontginningsmogelijkheden van dat ogenblik, eigenlijk voor 15 miljoen mensen voedsel, energie en bouwmaterialen zijn. We noemen dit de capaciteit C. Door deze overcapaciteit kan de populatie zeer snel groeien, stel met 50 % per decennium. Tegelijkertijd neemt ook de capaciteit toe, met zo'n 7 miljoen per decennium. We drukken t daarom ook uit in decennia.

1 Stel een tabel op waarin B en C worden berekend voor de eerste vijf decennia.

t	B ($\times 10^6$)	C ($\times 10^6$)
0	10	15
1	15	22
2	22,5	29
3	33,75	36
4	50,625	43
5	75,9375	50

2 Geef deze evolutie weer in een puntgrafiek met goedgekozen assen.
Beschrijf de belangrijkste verschillen tussen beide puntgrafieken.



De punten bij C (▲) liggen op een rechte.
De punten bij B (■) liggen op een kromme, die eerst langzamer toeneemt dan die van C, maar dan sneller.

3 Stel een formule op die B en C berekent op het einde van een willekeurig gekozen decennium na de starttijd $t = 0$.

$B = 10 \cdot 1{,}5^t$
$C = 15 + 7 \cdot t$ $\qquad t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4 Vanaf wanneer wordt de populatie groter dan de capaciteit en doet zich een zgn. 'malthusiaanse catastrofe' voor?

Voor t tussen 3 en 4 wordt de populatie B groter dan de capaciteit C, m.a.w. in de loop van het vierde decennium.

Opdracht 2 bladzijde 156

Het opblaasbaar zwembadje van Liam heeft een klein scheurtje, waardoor het water verliest. Na elke dag is het volume water met 2 % verminderd. Op een bepaald ogenblik, dat we laten overeenkomen met $t = 0$, is er 550 liter water in het zwembad.

Stel een formule op om het volume V, in liter, te berekenen in functie van de tijd t, in dagen.

$V = 550 \cdot 0{,}98^t$ $\qquad t = 0, 1, 2, \ldots$

Opdracht 3 bladzijde 160

Onderzoek welke van de onderstaande grootheden y lineair groeien, exponentieel of geen van beide. Geef bij lineaire of exponentiële groei telkens de algemene formule voor y in functie van t.

1

t	y
0	3
1	5,1
2	8,67
3	14,739
…	…

$$\frac{5{,}1}{3} = \frac{8{,}67}{5{,}1} = \frac{14{,}739}{8{,}67} = 1{,}7$$

$\Rightarrow$ exponentiële groei; $y = 3 \cdot 1{,}7^t$

2

t	y
0	$\frac{9}{2}$
1	3
2	$\frac{3}{2}$
3	0
…	…

$$3 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} - 3 = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ lineaire groei; $y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}t$

3

t	y
0	0
1	1
2	4
3	9
…	…

noch exponentieel, noch lineair

4

t	y
0	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
1	2
2	$2\sqrt{5}$
3	10
...	...

vaste verhouding tussen opeenvolgende waarden

$\Rightarrow$ exponentiële groei; $y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{5}^t$

Opdracht 4 bladzijde 160

Een populatie van 100 000 groeit aan met 4 % per jaar.

Hoe groot is ze na één decennium?

$N = 100\,000 \cdot 1{,}04^t$ met t in jaren

Na 10 jaar: $N = 100\,000 \cdot 1{,}04^{10} = 148\,024$.

Opdracht 5 bladzijde 160

Een nieuwe pc kost € 990. Elk jaar verliest hij 25 % van zijn waarde.

Voor de waarde W geldt: $W = 990 \cdot 0{,}75^t$ (W in € en t in jaren).

1 Bereken de waarde na 1 en 2 jaar.

Na 1 jaar: $W = 990 \cdot 0{,}75 = 742{,}5$

Na 2 jaar: $W = 990 \cdot 0{,}75^2 = 556{,}875$

2 Klopt het dat hij na 4 jaar 100 % van zijn aankoopwaarde kwijt is? Verklaar.

Neen, de waarde na 4 jaar is $990 \cdot 0{,}75^4$ euro $= 313{,}242$ euro.

(Hij is ongeveer 68 % van zijn waarde kwijt.)

3 Geef een formule voor de waarde *W* (in €) in functie van de tijd *t* (in jaren).

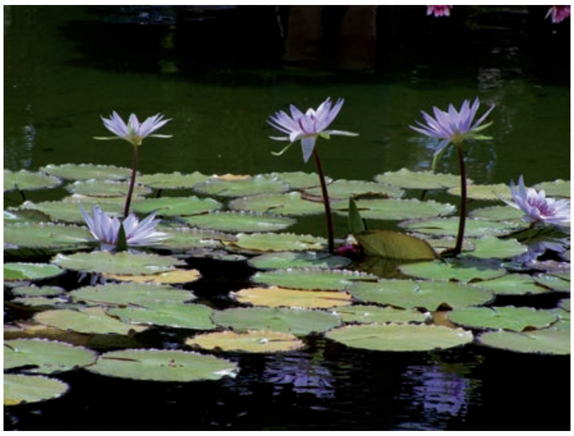
$W = 990 \cdot 0{,}75^t$

Opdracht 6 bladzijde 160

Een snel groeiende waterlelie verdubbelt elke dag in oppervlakte. Na 10 dagen bedekt zij een volledige vijver.

Na hoeveel dagen was de vijver half bedekt?

Na negen dagen.



Opdracht 7 bladzijde 160

Stel, je beschikt over een groot vel papier met een dikte van 0,1 mm. Je vouwt het in twee. Dit samengevouwen blad vouw je opnieuw in twee, zodat het resultaat nu 0,4 mm dik is. Je blijft telkens dubbelvouwen. Stel dat het je lukt om dat in totaal 25 keer te doen.

Hoe dik is je stapel papier dan?

Stel d de dikte in mm en n het aantal keer vouwen, dan geldt: $d = 0{,}1 \cdot 2^n$.

Na 25 keer is de dikte $d = 0{,}1 \cdot 2^{25} = 3{,}35544 \cdot 10^6$ (mm).

Dit komt overeen met ongeveer 3,355 km.

Opdracht 8 bladzijde 161

De bevolking van Senegal kent al jaren een tamelijk stabiele groei van 2,6 % per jaar, zodat we bij benadering kunnen stellen dat ze exponentieel toeneemt. In 2005 telde het land 11,281 miljoen inwoners.

Het aantal inwoners N (in miljoenen), in functie van de tijd t (in jaren vanaf 2005), kan dus berekend worden als

$$N = 11{,}281 \cdot 1{,}026^{\,t}$$

met $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Vóór 2005 groeide de bevolking ook al op die manier aan.

Bereken het aantal inwoners in 2004 en 2003.

In 2004 waren er $\dfrac{11{,}281}{1{,}026} = 10{,}995$ miljoen inwoners.

In 2003 waren er $\dfrac{10{,}995}{1{,}026} = 10{,}716$ miljoen inwoners.

Opdracht 9 bladzijde 161

De vader van Jens smeert 's ochtends om 7 uur de boterhammen van zoonlief en stopt ze in zijn brooddoos. Het is een warme dag, met andere woorden ideaal weer voor de bacteriën in de vleessla op een van de boterhammen. Om 7u bevat die boterham 300 bacteriën en hun aantal verdubbelt om het uur. Van zodra er 15 000 zijn, kan Jens die boterham best niet meer opeten ...

Bij een verdubbeling per uur komt een groeifactor 2 overeen. De beginwaarde is 300. Laten we $t = 0$ overeenkomen met 7u 's morgens, dan kunnen we het aantal bacteriën t uur na 7u 's morgens berekenen als $N = 300 \cdot 2^{t}$.

1 De groeifactor per uur is 2. Gebruik het schema hieronder om x, de groeifactor per drie uur, te berekenen.

t	N
0	300
1	600
2	1200
3	2400
4	4800
5	9600
6	19 200
…	…
t	$300 \cdot 2^t$

$x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2 Wat is de groeifactor per 2 uur?

Per 2 u is de groeifactor $2 \cdot 2 = 4$.

3 Noem de groeifactor per half uur q. Wat is de waarde van q?

Na 2 keer een half uur moet het aantal bacteriën verdubbeld zijn:

$q^2 = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt{2}\ (q > 0)$.

4 Bereken het aantal bacteriën N voor $t = \frac{1}{2}$ en $t = \frac{3}{2}$.

t	N
0	300
$\frac{1}{2}$	…
1	600
$\frac{3}{2}$	…
2	1200
…	…

Voor $t = \frac{1}{2}$: $N = 300\sqrt{2} \approx 424$

Voor $t = \frac{3}{2}$: $N = 600\sqrt{2} = 300\sqrt{2}^3 \approx 849$

5 Bepaal nu op dezelfde manier de groeifactor per kwartier.

Stel q' de groeifactor per kwartier, dan geldt

$(q')^4 = 2 \Leftrightarrow q' = \sqrt[4]{2}$ $(q' > 0)$.

6 Bereken tot slot het aantal bacteriën om 12u15, 12u30 en 12u45 en beslis tot wanneer Jens zijn boterham mag opeten.

Om 12u15: $N = 9600 \cdot \sqrt[4]{2} \approx 11\ 416$

Om 12u30: $N = 9600 \cdot \sqrt{2} \approx 13\ 576$

Om 12u45: $N = 9600 \cdot \sqrt[4]{2}^{\,3} \approx 16\ 145$

Na 12u30 kan hij die boterham best niet meer opeten.

Opdracht 10 bladzijde 164

De auto van de familie Peeters is een gammel bakje van 15 jaar oud. Elk jaar verminderde hij met 20 % in waarde. Nu is hij nog maar 350 euro waard.

Wat was zijn oorspronkelijke waarde?

Stel W de waarde, in €, en t de tijd, in jaren, sinds aankoop.

Dan geldt: $W = W_0 \cdot 0{,}8^t$ met W_0 de beginwaarde.

Uit het gegeven: $W_0 \cdot 0{,}8^{15} = 350$.

Daaruit volgt: $W_0 = 9948$ (afgerond op 1 euro).

Opdracht 11 bladzijde 164

Worden de uitgaven die je met een creditcard maakte niet tijdig terugbetaald, dan rekent de verstrekker van die kaart een fikse intrest aan. Van een bepaalde kaart is het jaarlijkse percentage 15,0 %.

Bereken de groeifactor en procentuele groei

1 per maand

Groeifactor per jaar: $a = 1{,}15$

$\Rightarrow$ per maand: groeifactor: $\sqrt[12]{1{,}15} \approx 1{,}0117$

$\Rightarrow$ procentuele groei: 1,17 %

2 per semester

Per semester: groeifactor: $\sqrt{1{,}15} \approx 1{,}0724$

$\Rightarrow$ procentuele groei: 7,24 %

Opdracht 12 bladzijde 164

Tussen januari 2009 en januari 2010 vertienvoudigde het aantal berichten dat via Twitter werd verzonden.

Bereken de groeifactor en de procentuele groei per half jaar.

Jaarlijkse groeifactor: 10

- halfjaarlijkse groeifactor: $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$
- procentuele groei: $1 + \dfrac{p}{100} = 3{,}1623 \Leftrightarrow p = 100 \cdot (3{,}1623 - 1) = 216{,}23$

  De procentuele groei is 216,23 %.

Opdracht 13 bladzijde 164

Een bacteriecultuur bevat om 7 u 's ochtends ($t = 0$) 300 bacteriën en hun aantal verdubbelt elk uur.

Hoeveel bacteriën zijn er om 10u23?

Groeifactor per minuut: $\sqrt[60]{2} = 2^{\frac{1}{60}}$.

Om 10u23 zijn er 203 minuten verstreken sinds 7u en bijgevolg is

$N = 300 \cdot \left(2^{\frac{1}{60}}\right)^{203} \approx 3130$. (N is aantal bacteriën.)

Opdracht 14 bladzijde 166

Uit een waterbassin lekt elke dag water weg. Het volume water V (in m^3) in het bassin neemt exponentieel af in functie van de tijd t (in dagen).
Het tijdstip $t = 0$ komt overeen met maandag 12u00.

Na 10 dagen is er nog 600 m^3 in het bassin en na 20 dagen nog slechts 216 m^3.

1 Stel een formule op voor V in functie van t.

$$V = b \cdot a^t \text{ met } \begin{cases} 600 = b \cdot a^{10} & (1) \\ 216 = b \cdot a^{20} & (2) \end{cases}$$

Deel (2) door (1): $\dfrac{216}{600} = \dfrac{b \cdot a^{20}}{b \cdot a^{10}} \Leftrightarrow a^{10} = \dfrac{9}{25}$

$$\Leftrightarrow a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (3)$$

(3) in (1): $600 = b \cdot \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow b = \dfrac{5000}{3}$

Besluit: $V = \dfrac{5000}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{t}{5}} \approx 1667 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{5}}$.

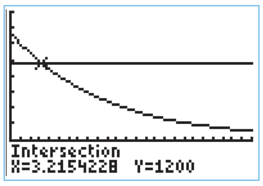
(Opmerking: $V \approx 1667 \cdot 0{,}9029^t$ kan ook, maar voor grote t zal dit steeds meer afwijken van de andere formule.)

2 Hoeveel water is er nog aanwezig op woensdag om 20u00 (tijdens dezelfde week)?

$$t = 2 + \frac{8}{24} = \frac{7}{3} \Rightarrow V \approx 1313.$$

3 Plot de grafiek van *V* voor *t* gaande van 0 tot 25.

4 Bepaal grafisch op welke dag en om welk uur er nog 1200 m^3 in het bassin aanwezig is.



Uit de afbeelding lezen we af:

$V = 1200$ voor $t \approx 3{,}2154$.

Dit komt overeen met donderdag rond 17u10.

Opdracht 15 bladzijde 166

Schrijf als één macht met geheel grondtal.

1 $2^{\sqrt{2}} \cdot 18^{\sqrt{2}} = 36^{\sqrt{2}}$

2 $\left(\sqrt[4]{10}\right)^{\sqrt{3}} = \left(10^{\frac{1}{4}}\right)^{\sqrt{3}} = 10^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

3 $\dfrac{15^{\sqrt{5}}}{3^{\sqrt{5}}} = 5^{\sqrt{5}}$

4 $\dfrac{4^{\sqrt{8}}}{4^{\sqrt{2}}} = 4^{\sqrt{8} - \sqrt{2}} = 4^{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$

5 $\left(6^{\sqrt{5}}\right)^{-3\sqrt{5}} = 6^{-15}$

6 $5^{-\sqrt{3}} \cdot 5^{2\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}}$

7 $\left(11^{-\sqrt{0{,}03}}\right)^{\sqrt{3}} = 11^{-\sqrt{0{,}09}} = 11^{-0{,}3}$

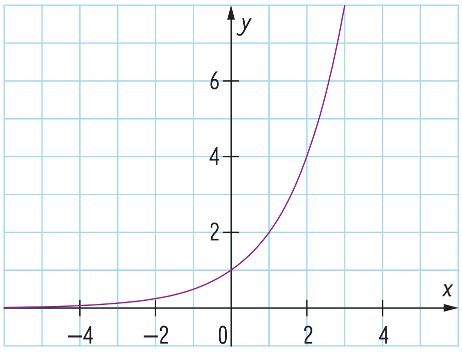
8 $\left(12^{\sqrt{2}} \cdot 12^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(12^{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(12^{3\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 12^{6}$

9 $\left(\dfrac{12^{\sqrt{6}}}{3^{\sqrt{6}}}\right) \cdot 4^{\sqrt{6}} = 4^{\sqrt{6}} \cdot 4^{\sqrt{6}} = \cdot\ 4^{2\sqrt{6}}$

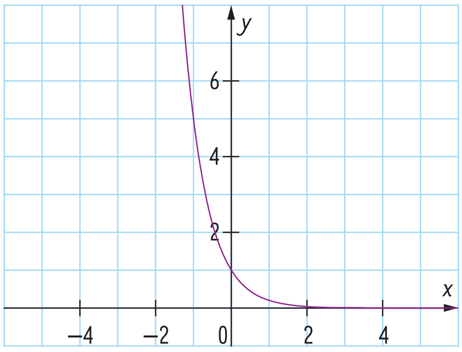
10 $100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}1^{\sqrt{28}} = 100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}1^{2\sqrt{7}} = 100^{\sqrt{7}} \cdot 0{,}01^{\sqrt{7}} = 1^{\sqrt{7}} = 1$

Opdracht 16 bladzijde 168

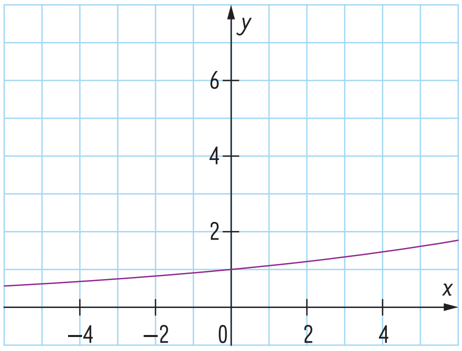
De onderstaande functies hebben een voorschrift van de vorm $f(x) = a^x$, met $a > 0$.



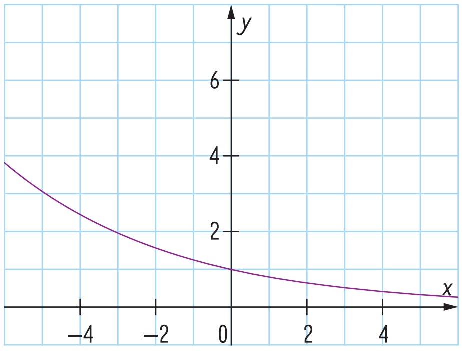
$f_1(x) = 2^x$



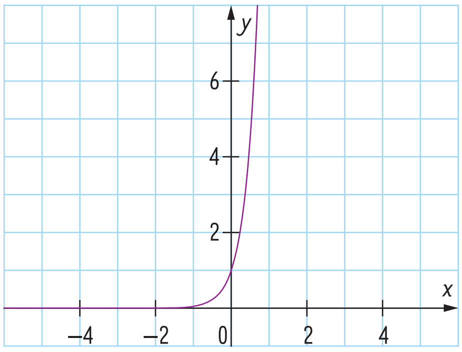
$f_2(x) = 0{,}2^x$



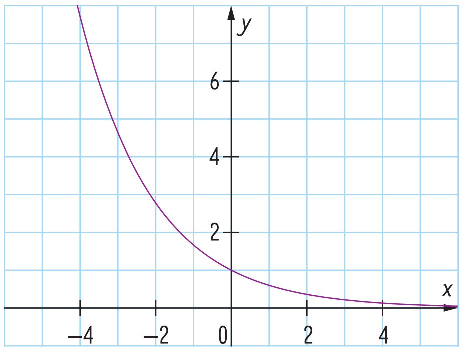
$f_3(x) = 1{,}1^x$



$f_4(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$



$f_5(x) = 20^x$



$f_6(x) = 0{,}6^x$

1 Voor welke waarden van a zullen functies met voorschrift $f(x) = a^x$ strikt stijgend zijn?

Stijgende functies: a > 1.

2 Bepaal het snijpunt van de grafieken met de y-as.

Aangezien $a^0 = 1$ voor alle $a \neq 0$, snijden de grafieken de y-as in (0,1).

3 Bepaal de eventuele nulpunten van de functies.

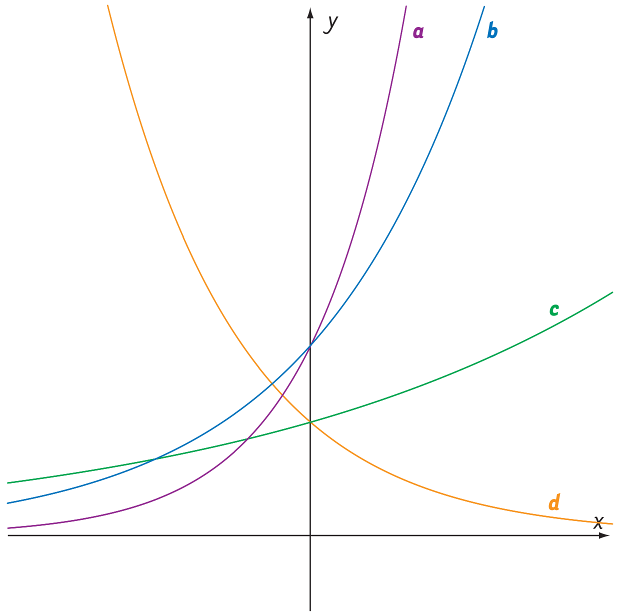
$a^x = 0$ heeft geen oplossingen voor $a \neq 0$, zodat de functies geen nulpunten hebben.

4 Beschouw de functies met $a < 1$. Tot welke waarde naderen de beeldwaarden voor $x \to +\infty$?

Voor $0 < a < 1$ zal $f(x) \to 0$ als $x \to +\infty$.

Opdracht 17 bladzijde 171

Beantwoord zonder je rekentoestel te gebruiken: welke functie komt met welke grafiek overeen?



1 $f_1 : x \longmapsto 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$

functie f_1 heeft grafiek d want 1) dalend ($a = \frac{3}{4} < 1$)

2) laagste snijpunt met y-as.

2 $f_2 : x \longmapsto 3 \cdot 1{,}1^x$

f_2 ➜ graf. c: 1) stijgend

2) laagste snijpunt met de y-as

3 $f_3 : x \longmapsto 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

f_3 ➜ graf. a: 1) stijgt sneller dan grafiek b, die met f_4 moet overeenkomen, wegens grotere groeifactor.

2) hoogste snijpunt met de y-as.

4 $f_4 : x \longmapsto 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$

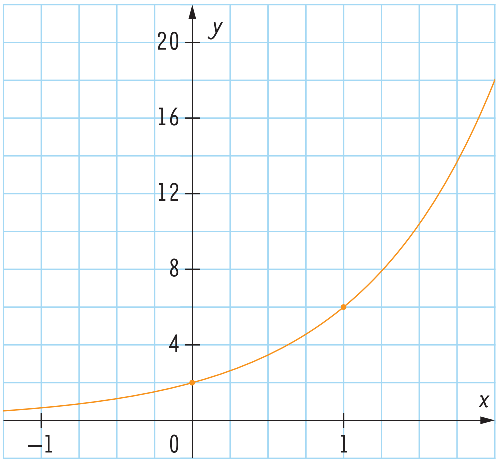
f_4 ➜ graf. b

Opdracht 18 bladzijde 171

De volgende grafieken zijn grafieken van functies met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$.

Bepaal a en b op basis van de gegeven punten.

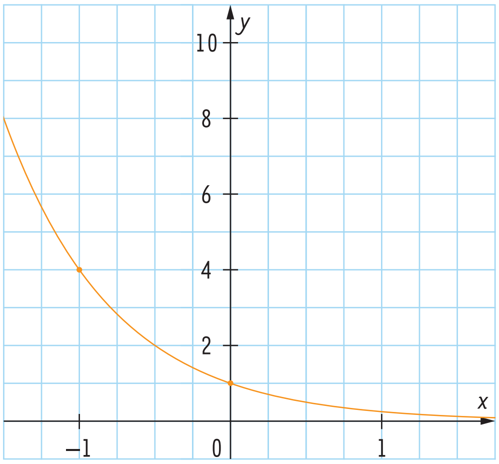
1



(0,2) en (1,6)

- algebraïsche oplossing: $f(x) = b \cdot a^x$
  1) $f(0) = 2 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 2 \Leftrightarrow \boxed{b = 2}$
  2) $f(1) = 6 \Leftrightarrow b \cdot a^1 = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot a = 6$
     $\Leftrightarrow \boxed{a = 3}$
- grafische/numerieke oplossing
  1) grafiek snijdt y-as in (0,2) $\Rightarrow \boxed{b = 2}$
  2) uit (0,2) en (1,6): als bij x
     1 eenheid wordt opgeteld, wordt de
     y-coördinaat met 3 vermenigvuldigd
     $\Rightarrow \boxed{a = 3}$

2

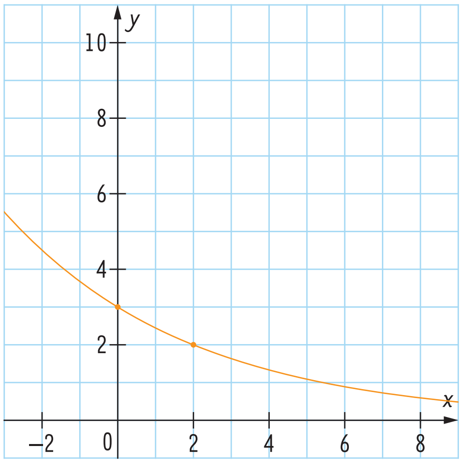


$f(-1) = 4 \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} = 4$ (1)

$f(0) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$ (2)

(2) invullen in (1): $a^{-1} = 4 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$

3

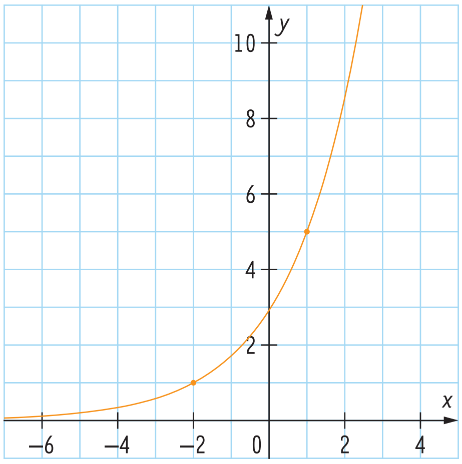


$f(0) = 3 \Leftrightarrow \boxed{b = 3}$

$f(2) = 2 \Leftrightarrow b \cdot a^2 = 2 \overset{b\,=\,3}{\Leftrightarrow} 3 \cdot a^2 = 2$

$\overset{a\,>\,0}{\Leftrightarrow} \boxed{a = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

4



$f(-2) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^{-2} = 1 \qquad (1)$

$f(1) = 5 \Leftrightarrow b \cdot a = 5 \qquad (2)$

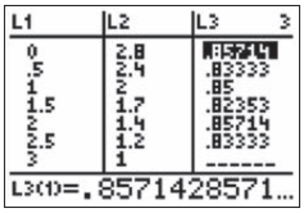
(2) delen door (1): $a^3 = 5 \Leftrightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{5}}$

Dit invullen in (1) (of (2)):

$b = \boxed{\sqrt[3]{5}^{\,2} = \sqrt[3]{25}}$

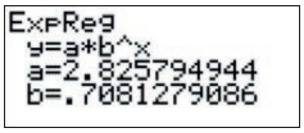
Opdracht 19 bladzijde 171

De hoogte van een schuimkraag op een vers getapt pintje verandert doorheen de tijd.



In de eerste kolom hiernaast staat de tijd t (in minuten) en in de tweede de hoogte h (in cm) van zo'n schuimkraag.

Door de verhouding te nemen van de opeenvolgende hoogten, kan nagegaan worden of deze afname min of meer exponentieel verloopt. In de derde kolom vind je deze verhouding. Ze blijkt tamelijk constant te zijn en gemiddeld gelijk aan ongeveer 0,84, wat de exponentiële afname bevestigt.



Deze verhouding wijkt echter af van de groeifactor van 0,7081 die we aflezen in de vergelijking van de exponentiële regressiekromme $h = 2{,}8258 \cdot 0{,}7081^t$.

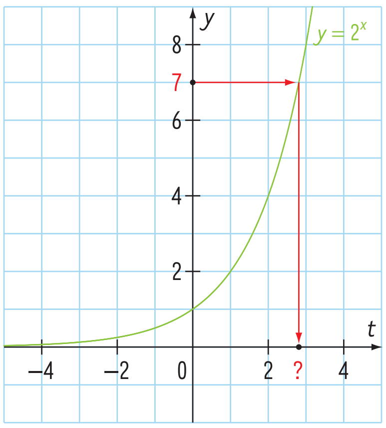
Verklaar dit verschil.

De groeifactor die uit de tabel wordt afgeleid, is die per halve minuut, terwijl die in het regressievoorschrift per minuut is.

(Er geldt inderdaad dat $\sqrt{0{,}7081} \approx 0{,}8415$.)

Opdracht 20 bladzijde 174

Beschouw een eenvoudig model voor de groei van het aantal bacteriën y, uitgedrukt in miljoenen, in functie van de tijd t in uren: $y = 2^t$.



We berekenen nu niet het aantal bacteriën y voor een gegeven tijd t, maar zoeken de tijd t nodig om een gegeven aantal y te bereiken.

1 Na hoeveel tijd bedraagt het aantal 8 miljoen?

$2^t = 8 \Leftrightarrow t = 3.$

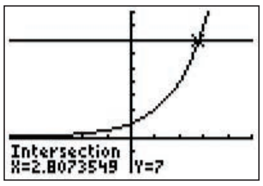
Na 3 u is het aantal 8 miljoen.

2 Na hoeveel uren is het aantal 1024 miljoen?

$2^t = 1024 \Leftrightarrow t = 10$ (trial and error).

Na 10 u is het aantal 1024 miljoen.

3 Na hoeveel uren heb je 7 miljoen bacteriën? Maak gebruik van je rekentoestel om de tijd tot twee cijfers na de komma te bepalen.



Na ongeveer 2,81 u is het aantal 7 miljoen.

Opdracht 21 bladzijde 174

Bepaal x zodanig dat

1 $4^x = 64 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$

2 $5^x = 25\sqrt{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

Opdracht 22 bladzijde 174

Los de volgende vergelijkingen op. Heb je een grafiek nodig, geef dan de oplossing op twee cijfers na de komma.

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 4$ Via grafiek: $x \approx -3{,}42$

2 $x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{3}{2}} = 8$ (zie hoofdstuk 3)

Opdracht 23 bladzijde 176

Bereken de volgende logaritmen, indien ze bestaan, zonder rekentoestel.

1 $\log 0{,}001 = -3$ (want $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$)

2 $\log(-10)$ bestaat niet (want 10^x kan niet -10 zijn)

3 ${}^{\frac{2}{3}}\log \frac{2}{3} = 1$ (want $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$)

4 ${}^{0,7}\log 1 = 0$ (want $0{,}7^0 = 1$)

5 ${}^{0,5}\log 8 = {}^{\frac{1}{2}}\log 8 = -3$ (want $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$)

6 ${}^{-4}\log 16$ **bestaat niet** **(want grondtal is negatief)**

7 ${}^{\sqrt{2}}\log 2$ $= 2$ (want $\sqrt{2}^2 = 2$)

8 ${}^{9}\log 27$ $= \frac{3}{2}$ (want $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$)

9 ${}^{\frac{1}{25}}\log 125$ $= -\frac{3}{2}$ (want $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$)

10 ${}^{2}\log 2^{13}$ $= 13$ (gevolg van de definitie: ${}^{a}\log a^x = x$)

Opdracht 24 bladzijde 176

Bereken, als $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

1 ${}^{a}\log a^{\sqrt{2}}$ $= \sqrt{2}$ (${}^{a}\log a^x = x$)

2 ${}^{a}\log \sqrt[3]{a}$ $= {}^{a}\log a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

3 ${}^{a}\log \frac{1}{a}$ $= {}^{a}\log a^{-1} = -1$

4 ${}^{a}\log a^{a}$ $= a$

5 ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a\right)$ $= {}^{a}\log(1) = 0$

6 ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a^{a^2}\right)$ $= {}^{a}\log(a^2) = 2$

Opdracht 25 bladzijde 176

1 Schrijf de oplossingen x van $3^x = 2$ en $3^x = 10$ als logaritmen.
x is de macht die je aan 3 moet geven om 2 te verkrijgen, dus $x = {}^{3}\log 2$
(of via de definitie)
Analoog: $3^x = 10 \Leftrightarrow x = {}^{3}\log 10$.

2 Geef een vergelijking waarvan $x = {}^{\frac{1}{2}}\log 5$ de oplossing is.
$x = {}^{\frac{1}{2}}\log 5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$ (Andere antwoorden zijn mogelijk.)

3 Los de vergelijking $10^x = 50$ m.b.v. een rekentoestel op.
$10^x = 50 \Leftrightarrow x = \log 50 \approx 1{,}699$

Opdracht 26 bladzijde 176

Schrijf als een macht van 10 en benader de exponent tot drie cijfers na de komma.

1 $500 = 10^{\log 500} \approx 10^{2,699}$

2 $7 = 10^{\log 7} \approx 10^{0,845}$

Opdracht 27 bladzijde 177

Aangezien $10^3 = 1000$, is $\log 1000 = 3$. We kunnen $\log 1000$ dus interpreteren als het aantal nullen van 1000. Op dezelfde manier kun je $\log 100$ interpreteren als het aantal nullen van 100: $\log 100 = 2$.

Gebruik deze interpretatie om te verklaren waarom

1 voor de logaritme van het product van 1000 en 100 geldt: $\log(1000 \cdot 100) = \log 1000 + \log 100$

$1000 \cdot 100 = 10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$

Bij het vermenigvuldigen van machten met eenzelfde grondtal, i.c. 10, moet je de exponenten optellen.

Die exponenten komen voor grondtal 10 overeen met het aantal nullen.

Bijgevolg: # nullen van $1000 \cdot 100$ = # nullen van 1000 + # nullen van 100.

$\Rightarrow \log(1000 \cdot 100) = \log(1000) + \log(100)$

2 voor de logaritme van de vijfde macht van 100 geldt: $\log(100^5) = 5 \cdot \log 100$

$100^5 = (10^2)^5 = 10^{2 \cdot 5} = 10^{10}$

Wegens de rekenregel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ geldt, voor $a = 10$:

nullen van 100^5 = 5 keer het aantal nullen van 100

$\Rightarrow \log(100^5) = 5 \cdot \log 100.$

Opdracht 28 bladzijde 179

Schrijf als één logaritme en bereken.

1 ${}^4\log 32 + {}^4\log 2 = {}^4\log 64 = 3$

2 ${}^{\sqrt{3}}\log 36 - {}^{\sqrt{3}}\log 4 = {}^{\sqrt{3}}\log 9 = 4$

3 ${}^2\log 12 + 2 \cdot {}^2\log 6 - 3 \cdot {}^2\log 3 = {}^2\log 12 + {}^2\log 36 - {}^2\log 27$

$$= {}^2\log \frac{12 \cdot 36}{27}$$

$$= {}^2\log 16$$

$$= 4$$

4 $-2 \cdot {}^{\sqrt[3]{2}}\log 6 + 2 \cdot {}^{\sqrt[3]{2}}\log 3 + {}^{\sqrt[3]{2}}\log 2 = {}^{\sqrt[3]{2}}\log \dfrac{3^2 \cdot 2}{6^2} = {}^{\sqrt[3]{2}}\log \dfrac{1}{2} = -3$

Opdracht 29 bladzijde 179

Aangezien $1000 = 10^3$ en $10\,000 = 10^4$, hebben alle getallen van 4 cijfers, van 1000 tot en met 9999, een Briggse logaritme in het interval [3, 4[. Eenzelfde redenering geldt voor getallen met 1, 2, 3, 5, 6 ... cijfers.

1 Gebruik dit inzicht om met behulp van logaritmen te bepalen hoeveel cijfers het getal 52^{73} bevat, wanneer je het zou uitschrijven.
(Je rekentoestel kan 52^{73} mogelijk niet rechtsreeks berekenen, maar dankzij de rekenregels van logaritmen kun je de vraag toch beantwoorden.)

$\log(52^{73}) = 73 \cdot \log 52 = 125{,}2682441$

$\Rightarrow$ 52^{73} **is een getal van 126 cijfers.**

2 Uit $\log(103^{365}) = 734{,}685587$ volgt per definitie dat $103^{365} = 10^{734{,}685587}$.

Leg uit hoe je hieruit tot de wetenschappelijke notatie $103^{365} = 4{,}848272 \cdot 10^{734}$ komt.

$$\begin{aligned} 103^{365} &= 10^{734{,}685587} \\ &= 10^{0{,}685587} \cdot 10^{734} \\ &= 4{,}848272 \cdot 10^{734} \end{aligned}$$

3 Geef de wetenschappelijke notatie van 52^{73}.

$$\begin{aligned} 52^{73} &= 10^{125{,}2682441} \qquad \text{(zie deelvraag 1)} \\ &= 10^{0{,}2682441} \cdot 10^{125} \\ &= 1{,}854574 \cdot 10^{125} \end{aligned}$$

4 Schrijf nu ook 13^{-205} in de wetenschappelijke notatie.

$$\begin{aligned} 13^{-205} &= 10^{\log(13^{-205})} \\ &= 10^{-228{,}3583872} \\ &= 10^{-229 + 0{,}6416128} \\ &= 10^{0{,}6416128} \cdot 10^{-229} \\ &= 4{,}381399 \cdot 10^{-229} \end{aligned}$$

Opmerking: **er zijn vele manieren om een getal** x **te schrijven als** $x = a \cdot 10^b$.
Het is echter gebruikelijk om a **en** b **zo te kiezen dat** $1 \leqslant |a| < 10$.
Daarom is de volgende aanpak niet wenselijk:

$$\begin{aligned} 13^{-205} &= 10^{-228{,}3583872} \\ &= 10^{-0{,}3583872} \cdot 10^{-228} \\ &= 0{,}438140 \cdot 10^{-228} \end{aligned}$$

Opdracht 30 bladzijde 180

Bereken met je rekentoestel en rond af op 3 cijfers na de komma indien het resultaat geen breuk is.

1 $^{0,75}\log \frac{243}{1024}$

5

2 $^{4}\log 8$

$\frac{3}{2}$

3 $^{5}\log 35$

$2,209$

Opdracht 31 bladzijde 181

Toon aan.

1 $^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d \cdot {}^{d}\log a = 1$

$$\begin{aligned} & {}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d \cdot {}^{d}\log a \\ &= \cancel{{}^{a}\log b} \cdot \frac{\cancel{{}^{a}\log c}}{\cancel{{}^{a}\log b}} \cdot \frac{\cancel{{}^{a}\log d}}{\cancel{{}^{a}\log c}} \cdot \frac{{}^{a}\log a}{\cancel{{}^{a}\log d}} \\ &= {}^{a}\log a \\ &= 1 \end{aligned}$$

(alles in Briggse logaritme leidt nog sneller tot een resultaat)

2 $\frac{1}{^{a}\log c} + \frac{1}{^{b}\log c} = \frac{1}{^{ab}\log c}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{^{a}\log c} + \frac{1}{^{b}\log c} \\ &= \frac{1}{\frac{^{ab}\log c}{^{ab}\log a}} + \frac{1}{\frac{^{ab}\log c}{^{ab}\log b}} \\ &= \frac{^{ab}\log a + {}^{ab}\log b}{^{ab}\log c} \\ &= \frac{^{ab}\log(ab)}{^{ab}\log c} \\ &= \frac{1}{^{ab}\log c} \end{aligned}$$

3 $\left({}^{a^n}\log x\right)^2 = {}^{a}\log x \cdot {}^{a^{n^2}}\log x$

$${}^{a}\log x \cdot {}^{a^{n^2}}\log x$$

$$= \frac{{}^{a^n}\log x}{{}^{a^n}\log a} \cdot \frac{{}^{a^n}\log x}{{}^{a^n}\log a^{n^2}}$$

$$= \frac{\left({}^{a^n}\log x\right)^2}{\frac{1}{n} \cdot n}$$

$$= \left({}^{a^n}\log x\right)^2$$

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}}$$
$$a^{n^2} = (a^n)^n$$

Opdracht 32 bladzijde 181

Hieronder vind je vijf beweringen.

a ${}^{a \cdot r}\log\,(b \cdot r) = {}^{a}\log b$

b ${}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b} = \frac{1}{{}^{a}\log b}$

c ${}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b} = {}^{a}\log b$

d ${}^{\sqrt{a}}\log \sqrt{b} = {}^{a}\log b$

e ${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

1 Welke van deze beweringen zijn waar voor alle waarden van a, b en r waarvoor de logaritmen gedefinieerd zijn? Bewijs de juistheid van de ware gelijkheden.

a → niet waar: ${}^{ar}\log(br) = \frac{{}^{a}\log b + {}^{a}\log r}{1 + {}^{a}\log r} \neq {}^{a}\log b$

b → niet waar: zie c

c → waar: ${}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b} = \frac{{}^{a}\log \frac{1}{b}}{{}^{a}\log \frac{1}{a}} = \frac{-{}^{a}\log b}{-1} = {}^{a}\log b$

d → waar: ${}^{\sqrt{a}}\log\sqrt{b} = \frac{{}^{a}\log \sqrt{b}}{{}^{a}\log \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\,{}^{a}\log b}{\frac{1}{2}} = {}^{a}\log b$

e → waar: ${}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$

2 Bedenk zelf minstens één ware gelijkheid van de vorm ${}^{f(a)}\log f(b) = {}^{a}\log b$, met f een functie, en bewijs ze.

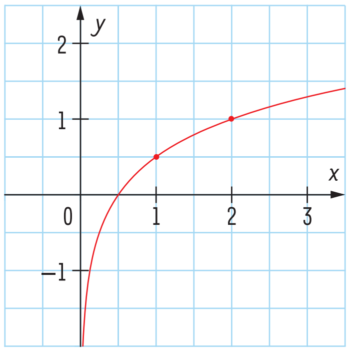
Uit b & c: ${}^{a^n}\log b^n = {}^{a}\log b$

Opdracht 33 bladzijde 183

1 Geef het voorschrift van de inverse functie f van de exponentiële functie met voorschrift $g(x) = b \cdot a^x$ ($b > 0$, $a > 0$ en $a \neq 1$).

$$y = b \cdot a^x \Leftrightarrow x = {}^a\log \frac{y}{b} \Rightarrow g^{-1}(x) = {}^a\log \frac{x}{b}$$

2 Hiernaast zie je de grafiek van zo'n functie f. Bepaal a en b.



$${}^a\log \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \ (1) \text{ en } {}^a\log \frac{2}{b} = 1 \ (2)$$

$$\text{Uit (1): } \sqrt{a} = \frac{1}{b} \quad (1')$$

$$\text{Uit (2): } a = \frac{2}{b} \quad (2')$$

$$(2') / (1'): \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

$$\text{Invullen in (1'): } 2 = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

3 Geef het voorschrift van zo'n functie f zodanig dat f dalend is en $f(3) = 0$.

f dalend ➜ kies a in]0, 1[

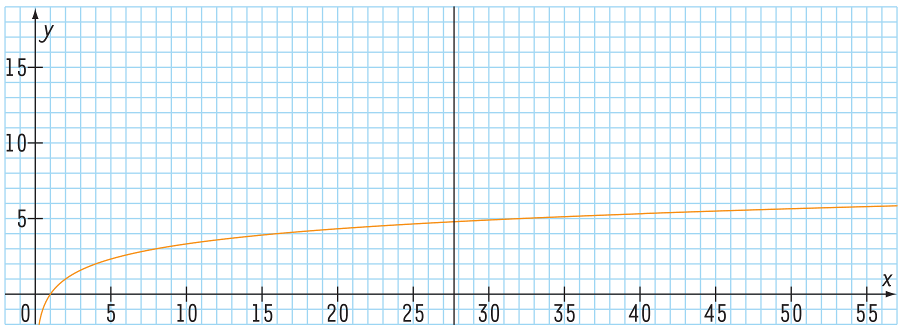
$$f(3) = 0 \Leftrightarrow {}^a\log \frac{3}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 3$$

Opdracht 34 bladzijde 183

Je legt een geruit blad van A4-formaat (21 cm × 29,7 cm) in de breedte. Op 2 cm van de onderkant teken je de x-as en op 2 cm van de linkerkant de y-as. Als eenheid op beide assen kies je 1 cm.

Je begint nu de functie met voorschrift $f(x) = {}^2\log x$ te tekenen. Wanneer je de rechterrand van het blad bereikt, plak je er een nieuw tegen en dat blijf je doen tot je aan de bovenrand komt. Deze komt overeen met $y = 19$.

Hoe breed zal je papierstrook zijn?



$^2\log x = 19 \Leftrightarrow x = 2^{19} = 524\ 288$

In totaal heb je dus minstens 524 288 + 1 = 524 289 cm papier nodig.

Aangezien 524 289 / 29,7 = 17 652,8, zijn er 17 653 vellen papier nodig.

De totale breedte van die papierstrook is 17 653 · 29,7 = 524 294,1 cm.

Opdracht 35 bladzijde 184

Bepaal de inverse functie van

1 $f_1: x \mapsto 2^x + 1$

$y = 2^x + 1 \Leftrightarrow x = {}^2\log(y - 1)$ $\qquad f_1^{-1}: x \mapsto {}^2\log(x - 1)$

2 $f_2: x \mapsto 3 \cdot 5^{x-2}$

$y = 3 \cdot 5^{x-2} \Leftrightarrow x = {}^5\log\left(\dfrac{y}{3}\right) + 2$ $\qquad f_2^{-1}: x \mapsto {}^5\log\left(\dfrac{x}{3}\right) + 2$

3 $f_3: x \mapsto 1 - 3^{\frac{x}{2}}$

$y = 1 - 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x = 2 \cdot {}^3\log(1 - y)$ $\qquad f_3^{-1}: x \mapsto 2 \cdot {}^3\log(1 - x)$

4 $f_4: x \mapsto 1 + {}^2\log(x - 3)$

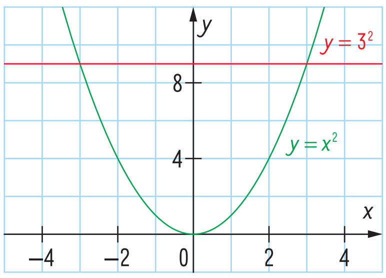
$y = 1 + {}^2\log(x - 3) \Leftrightarrow x = 2^{y-1} + 3$ $\qquad f_4^{-1}: x \mapsto 2^{x-1} + 3$

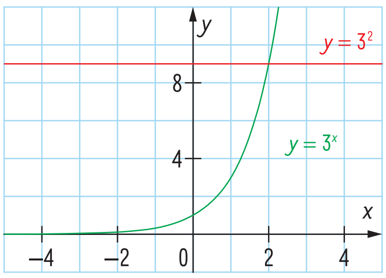
5 $f_5: x \mapsto 3 \cdot {}^3\log(2x)$

$y = 3 \cdot {}^3\log(2x) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{\frac{y}{3}}$ $\qquad f_5^{-1}: x \mapsto \dfrac{1}{2} \cdot 3^{\frac{x}{3}}$

Opdracht 36 bladzijde 185

1 Gebruik de grafische voorstellingen van de vierkantsvergelijking $x^2 = 3^2$ en de exponentiële vergelijking $3^x = 3^2$ om alle oplossingen van deze vergelijkingen te bepalen.





$x^2 = 3^2 \rightarrow$ 2 snijpunten $\Rightarrow$ 2 oplossingen: $x = \pm 3$

$3^x = 3^2 \rightarrow$ 1 snijpunt $\Rightarrow$ 1 oplossing: $x = 2$

2 Welke van de onderstaande beweringen zijn correct en waarom?
(Het grondtal a is positief en verschillend van 1.)

a $a^x = a^c \Leftrightarrow x = c$

b $x^2 = c^2 \Leftrightarrow x = c$

c $x^5 = c^5 \Leftrightarrow x = c$

d ${}^a\log x = {}^a\log c \Leftrightarrow x = c$

a. $a^x = a^c \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = a^x$ is strikt stijgend, zodat die de grafiek $y = a^c$ in één punt zal snijden.

b. $x^2 = c^2 \Leftrightarrow x = c$: fout, want de grafiek $y = x^2$ daalt en stijgt, symmetrisch t.o.v. de y-as, zodat die de grafiek $y = c^2$ in twee punten zal snijden als $c \neq 0$.
Dus heeft de vergelijking twee oplossingen, als $c \neq 0$.

c. $x^5 = c^5 \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = x^5$ is strikt stijgend en gaat van $-\infty$ naar $+\infty$.

d. ${}^a\log x = {}^a\log c \Leftrightarrow x = c$: correct, want de grafiek $y = {}^a\log x$ is strikt stijgend of strikt dalend en gaat van $-\infty$ naar $+\infty$ of omgekeerd

(Opmerking: het strikt stijgend of dalend zijn is een voldoende maar geen nodige voorwaarde.)

Opdracht 37 bladzijde 187

Los de volgende exponentiële vergelijkingen op.

1 $3^{5x} = 9^{x+1}$

$$\Leftrightarrow 3^{5x} = 3^{2x+2}$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2x + 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

2 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = 5\sqrt[3]{5}$

$$\Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^{\frac{4}{3}}$$
$$\Leftrightarrow -2x = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

3 $3 \cdot 5^{x+1} = 15^{2x} \Leftrightarrow \log(3 \cdot 5^{x+1}) = \log 15^{2x}$

$\Leftrightarrow \log 3 + (x + 1) \log 5 = 2x \log 15$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5 + \log 3}{2 \log 15 - \log 5} = \dfrac{\log 15}{\log 45} = {}^{45}\log 15$

4 $2^{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = {}^{2}\log 6$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\,{}^{2}\log 6$

of $2^{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x \log 2 = \log 6$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 6}{3 \log 2} = \dfrac{\log 6}{\log 8} = {}^{8}\log 6$

5 $3 \cdot 4^{x} = 144 \Leftrightarrow \log 3 + x \cdot \log 4 = \log 144$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 144 - \log 3}{\log 4} = \dfrac{\log 48}{\log 4} = {}^{4}\log 48$

6 $4^{x} = 2 \cdot 5^{x} \Leftrightarrow x \log 4 = \log 2 + x \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 4 - \log 5} = \dfrac{\log 2}{\log \frac{4}{5}} = {}^{\frac{4}{5}}\log 2$

7 $2^{3x} - 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} = 3^{x+1}$

$\Leftrightarrow 3x \log 2 = (x + 1) \log 3$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 3}{3 \log 2 - \log 3} = \dfrac{\log 3}{\log \frac{8}{3}} = {}^{\frac{8}{3}}\log 3$

8 $3^{x} - 5 \cdot 9^{x} = 0 \Leftrightarrow 3^{x} = 5 \cdot 9^{x}$

$\Leftrightarrow x \log 3 = \log 5 + x \log 9$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 3 - \log 9} = \dfrac{\log 5}{\log \frac{1}{3}} = {}^{\frac{1}{3}}\log 5 \left(= {}^{3}\log \dfrac{1}{5} \right)$

9 $2^{2x+5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x^2-2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x+5} = 2^{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow 2x + 5 = (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$

10 $10 \cdot 2^x - 8 \cdot 5^{x-2} = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^{x-2}$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^{x-2} \quad (*)$

$\Leftrightarrow \log 5 + x \log 2 = \log 4 + (x-2) \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \log 5 - \log 4}{\log 5 - \log 2} = \dfrac{\log \frac{125}{4}}{\log \frac{5}{2}} = {}^{\frac{5}{2}}\log \dfrac{125}{4}$

$\Big((*) \Leftrightarrow 2^{x-2} = 5^{x-3}$

$\Leftrightarrow (x-2) \log 2 = (x-3) \log 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3 \log 5 - 2 \log 2}{\log 5 - \log 2} = \dfrac{\log \frac{125}{4}}{\log \frac{5}{2}} = {}^{\frac{5}{2}}\log \dfrac{125}{4}\Big)$

Opdracht 38 bladzijde 187

Bepaal *x* zodanig dat

1 $9^x - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$ met $y = 3^x$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow 3^x = 2$ of $\cancel{3^x = -1}$

$\Leftrightarrow x = {}^3\log 2$

2 $4^{2x+1} - 10 \cdot 4^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (4^x)^2 - 10 \cdot 4^x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4^x = \dfrac{10 \pm 6}{8}$

$\Leftrightarrow 4^x = 2$ of $4^x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ of $x = -\dfrac{1}{2}$

3 $8^{x+1} - 4^x + 2^{x+3} - 1 = 0$ $\Leftrightarrow 8t^3 - t^2 + 8t - 1 = 0$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t^2(8t - 1) + (8t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (8t - 1)(t^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{8}$

$\Leftrightarrow x = -3$

4 $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 31 \Leftrightarrow 2^x\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}\right) = 31$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{31}{\frac{31}{16}}$

$\Leftrightarrow x = 4$

Opdracht 39 bladzijde 187

Waar zit de fout in de volgende redenering? Verklaar.

$^{2}\log(x^2 - 6x + 6) = {}^{2}\log(-x + 2)$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ x^2 - 6x + 6 = -x + 2$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\ x = 1$ of $x = 4$

De fout zit in stap (1): de vergelijkingen $^{a}\log b = {}^{a}\log c$ en $b = c$ zijn enkel gelijkwaardig wanneer b en c strikt positief zijn (en $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$).

Opdracht 40 bladzijde 189

Los de volgende logaritmische vergelijkingen op.

1 $^{\sqrt{2}}\log(x^2 + 1) - {}^{\sqrt{2}}\log(3x + 1) = 0$

BVW: $3x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{\sqrt{2}}\log(x^2 + 1) = {}^{\sqrt{2}}\log(3x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x + 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ of $x = 3$

2 ${}^{3}\log(x-3)+{}^{3}\log(x+1)={}^{3}\log(2x+2)$

BVW 1: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$
BVW 2: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
BVW 3: $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log(x-3) + \cancel{{}^{3}\log(x+1)} = {}^{3}\log 2 + \cancel{{}^{3}\log(x+1)}$

$\Leftrightarrow x - 3 = 2$

$\Leftrightarrow x = 5$

3 $2\log x + 1 = \log(19x+2)$

BVW 1: $x > 0$
BVW 2: $19x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{19}$

$\Leftrightarrow \log(10 \cdot x^2) = \log(19x + 2)$

$\Leftrightarrow 10x^2 - 19x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{19 \pm 21}{20}$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $\cancel{x = -\frac{1}{10}}$ zie BVW 1

4 ${}^{2}\log x = {}^{4}\log(6-x)$

BVW 1: $x > 0$
BVW 2: $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x = \frac{{}^{2}\log(6-x)}{{}^{2}\log 4}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log x^2 = {}^{2}\log(6-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = -3}$ of $x = 2$ zie BVW 1

5 ${}^{x^2-5}\log 9 = 2$

BVW: $x^2 - 5 > 0$ en $x^2 - 5 \neq 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - 5)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 5 = 3$ of $\cancel{x^2 - 5 = -3}$ zie BVW

$\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

6 ${}^{\log x}\log 10 = 3$

BVW: $\log x > 0$ en $\log x \neq 1$

$\Leftrightarrow (\log x)^3 = 10$

$\Leftrightarrow \log x = \sqrt[3]{10}$

$\Leftrightarrow x = 10^{\sqrt[3]{10}}$

7 $^{x+3}\log(2x-1)=1$ BVW 1: $x + 3 > 0$ en $x + 3 \neq 1$
BVW 2: $2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2x - 1$

$\Leftrightarrow x = 4$

8 $^{x-2}\log(2x-5)=2$ BVW 1: $x - 2 > 0$ en $x - 2 \neq 1$
BVW 2: $2x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 3}$ voldoet niet aan BVW1

Opdracht 41 bladzijde 189

Los op.

1 $^2\log x \cdot {}^4\log x \cdot {}^8\log x = \frac{4}{3}$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^2\log x \cdot \frac{^2\log x}{^2\log 4} \cdot \frac{^2\log x}{^2\log 8} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left({}^2\log x\right)^3 = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow {}^2\log x = 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

2 $^4\log(x+3) - {}^{\frac{1}{4}}\log(x+3) = 2$ BVW: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$\Leftrightarrow {}^4\log(x + 3) + {}^4\log(x + 3) = 2$

$\Leftrightarrow {}^4\log(x + 3) = 1$

$\Leftrightarrow x + 3 = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$

3 $x + {}^2\log(2^x - 7) = 3$ BVW: $2^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow {}^2\log 2^x + {}^2\log(2^x - 7) = {}^2\log 8$

$\Leftrightarrow {}^2\log(2^x \cdot (2^x - 7)) = {}^2\log 8$

$\Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t = 8$ of $t = -1$

$\Leftrightarrow 2^x = 8$ of $\cancel{2^x = -1}$

$\Leftrightarrow x = 3$

4 ${}^{2}\log(2^x - 1) + x = {}^{4}\log 144$ **BVW: $2^x - 1 > 0$**

$\Leftrightarrow {}^{2}\log(2^x - 1) + {}^{2}\log 2^x = \dfrac{{}^{2}\log 144}{{}^{2}\log 4}$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log((2^x - 1) \cdot 2^x) = {}^{2}\log\sqrt{144}$

$\Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0$ met $t = 2^x$

$\Leftrightarrow t = 4$ of $t = -3$

$\Leftrightarrow 2^x = 4$ of $\cancel{2^x = -3}$

$\Leftrightarrow x = 2$

Opdracht 42 bladzijde 190

Gebruik telkens een schets of redenering om na te gaan of de onderstaande beweringen geldige gelijkwaardigheden voorstellen en om eventuele foute beweringen te corrigeren.

1 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x > 4$ **fout**

Aangezien $f: x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ dalend is, geldt: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x < 4$.

2 $3^{-2x+1} > 81 \Leftrightarrow -2x + 1 > 4$ **correct**

3 ${}^{3}\log(-2x + 1) > {}^{3}\log 5 \Leftrightarrow -2x + 1 > 5$ **correct**

Aangezien $y = {}^{3}\log x$ strikt stijgend is, wordt de orde bewaard, maar er moet rekening gehouden worden met de bestaansvoorwaarde.
Als $-2x + 1 > 5$, dan geldt ook $-2x + 1 > 0$, zodat de gelijkwaardigheid waar is.

4 ${}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log(x + 3) \leqslant {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log 4 \Leftrightarrow x + 3 \leqslant 4$ **fout**

De grafiek $y = {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log x$ is dalend, zodat geldt ${}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log(x + 3) \leqslant {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log 4$

$\Leftrightarrow x + 3 \geqslant 4$.

Als $x + 3 \geqslant 4$, dan geldt ook dat $x + 3 \geqslant 0$, zodat er geen bestaansvoorwaarde toegevoegd moet worden.

Opdracht 43 bladzijde 192

Los de volgende ongelijkheden op.

1 $4^{2x+1} < \frac{1}{64}$ $\Leftrightarrow 4^{2x+1} < 4^{-3}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 < -3$

$\Leftrightarrow x < -2$

2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+1} > \left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$

$\Leftrightarrow x - 1 > 4x$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$

3 ${}^{\frac{1}{3}}\log(2x-3) < 1$ $\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{3}}\log(2x-3) < {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{3}$ BVW: $2x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3 > \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

4 ${}^{4}\log(5-x) > {}^{4}\log x + 1$ $\Leftrightarrow {}^{4}\log(5-x) > {}^{4}\log(4x)$ BVW 1: $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$
BVW 2: $x > 0$

$\Leftrightarrow 5 - x > 4x$

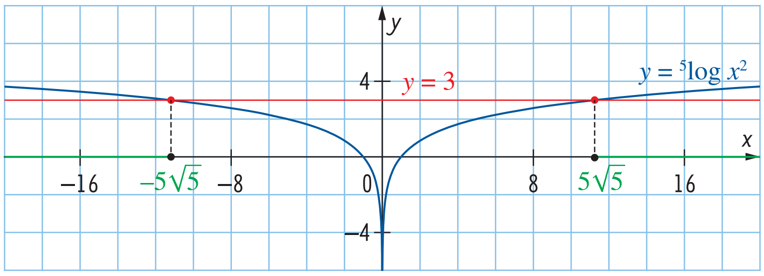
$\Leftrightarrow x < 1$

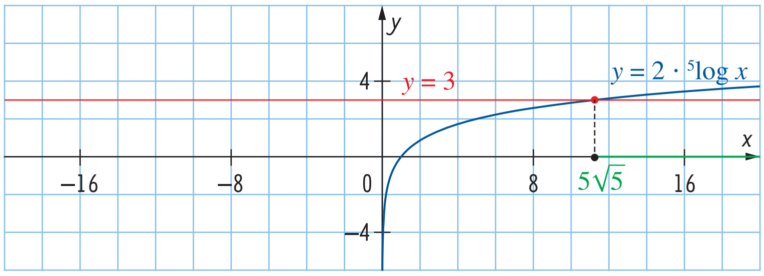
Rekening houdend met de bestaansvoorwaarden, is de oplossing: $0 < x < 1$.

Opdracht 44 bladzijde 192

1 Gebruik grafische voorstellingen om te verklaren waarom de ongelijkheid ${}^{5}\log x^2 > 3$ niet gelijkwaardig is met de ongelijkheid $2 \cdot {}^{5}\log x > 3$.

2 Los de ongelijkheid ${}^{5}\log x^2 > 3$ op.





De functies $f(x) = {}^5\log x^2$ en $g(x) = 2 \cdot {}^5\log x$ hebben een verschillend domein en dus een verschillende grafiek.

Uit de grafiek blijkt: ${}^5\log x^2 > 3 \Leftrightarrow x < -5\sqrt{5}$ of $x > 5\sqrt{5}$

en $2 \cdot {}^5\log x > 3 \Leftrightarrow x > 5\sqrt{5}$

Opdracht 45 bladzijde 193

1 Bereken uit het voorschrift $c(t) = b \cdot 0{,}99988^t$, met t uitgedrukt in jaren, de **halveringstijd** van ^{14}C. Dit is de tijd die nodig is om een gegeven concentratie tot de helft te reduceren.

2 Heb je in de vorige deelvraag aangetoond dat deze halveringstijd onafhankelijk is van de begintijd? Indien niet, doe dat nu.

Wanneer je de halveringstijd zoekt door de vergelijking $b \cdot 0{,}99988^t = \frac{b}{2}$ op te lossen, dan vertrek je van $t = 0$. Je vindt $t = 5776$ jaar.

Vertrek je van een willekeurig tijdstip t_0, dan geldt voor de halveringstijd Δt

$$\text{dat } c(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}\, c(t_0) \Leftrightarrow b \cdot 0{,}99988^{t_0 + \Delta t} = \frac{1}{2} b \cdot 0{,}99988^{t_0}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}99988^{\Delta t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 0{,}99988} = 5776$$

Bij exponentiële groei is de groeifactor gelijk voor gelijke tijdstoenames, onafhankelijk van de begintijd.

3 Na hoeveel jaar t.o.v. een willekeurige begintijd zal telkens 75 % van de ^{14}C verdwenen zijn?

Dit komt overeen met een groeifactor $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ en bijgevolg met een tijdstoename die het dubbele is van de halveringstijd, m.a.w. 11 552 jaar.

4 Hoe zal het voorschrift eruit zien voor de concentratie van een radioactieve atoomsoort met een halveringstijd van 500 jaar?

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ met } f(500) = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a^{500} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[500]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}998615$$

Dus: $f(t) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{500}} \approx b \cdot 0{,}998615^t$.

Opdracht 46 bladzijde 194

Men heeft in 1989 met de ^{14}C-methode de leeftijd van de lijkwade van Turijn (de zgn. lijkwade van Christus) trachten te achterhalen.

Men trof in het plantaardige weefsel van het doek 92,2 % van de natuurlijke concentratie ^{14}C aan.

Wijst dit erop dat die lijkwade daadwerkelijk uit de tijd van Christus stamt?

Maak gebruik van het voorschrift $c(t) = b \cdot 0{,}99988^t$.

$c(t) = 0{,}922 \cdot b$

$\Leftrightarrow 0{,}99988^t = 0{,}922 \Leftrightarrow t = \dfrac{\log 0{,}922}{\log 0{,}99988} \approx 677$

De lijkwade van Turijn zou volgens deze onderzoeksmethode maar ongeveer 7 eeuwen oud zijn en kan dus niet de lijkwade van Christus zijn.

Opdracht 47 bladzijde 206

Geef de groeifactor en de bijbehorende tijdseenheid bij de volgende exponentiële groeiprocessen.

1 De lengte van een zonnebloemstengel verdubbelt elke twee weken.

2 Op een spaarboekje krijg je 1,75 % intrest per jaar.

3 De waarde van een computer vermindert elk jaar met 30 %.

4 Het gasverlies in een luchtschip is 0,25 % per dag.

	groeifactor	tijdseenheid
1	2	2 weken
2	1,0175	1 jaar
3	0,7	1 jaar
4	0,9975	1 dag

Opdracht 48 bladzijde 206

De volgende tabel geeft de groei weer van een aantal grootheden tijdens vijf opeenvolgende tijdseenheden. In welke gevallen is er sprake van lineaire groei? In welke gevallen van exponentiële groei? Geef in dat geval ook de groeifactor.

t	0	1	2	3	4	5
y_1	1701	567	189	63	21	7
y_2	105	118	131	146	163	182
y_3	29,7	27,1	24,5	21,9	19,3	16,7

y_1: vaste verhouding van opeenvolgende waarden: $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ exponentiële groei met groeifactor $\frac{1}{3}$

y_2: geen vaste verhouding van of vast verschil tussen opeenvolgende waarden $\Rightarrow$ exponentiële noch lineaire groei.

y_3: vast verschil van $-2,6$ tussen opeenvolgende waarden $\Rightarrow$ lineaire groei

Opdracht 49 bladzijde 206

Wat verkies je: een spaarboekje met een intrest van 2 % per jaar of een waarbij de intrest 1 % per zes maand bedraagt? Verantwoord met een berekening.

1 % per 6 maand komt overeen met groeifactor 1,01.

Per jaar is de groeifactor dan $1,01^2 = 1,0201$, wat overeenkomt met een procentuele toename van 2,01 %.

Dit is iets voordeliger dan 2 % per jaar.

Opdracht 50 bladzijde 206

Stel dat je eerste (over^n)-grootvader met Belgische nationaliteit in 1830 precies één Belgische frank (de toenmalige munt, ongeveer € 0,025 waard) bij een bank zou hebben uitgezet tegen een samengestelde intrest van 5 %, hoeveel euro zou er dan nu op zijn rekening staan?

Bijv. in 2013: $1 \cdot 1,05^{2013 - 1830} \approx 7544,7$

Er zou € 7544,7 op zijn rekening staan.

Opdracht 51 bladzijde 206

Een herlaadbare batterij verliest per uur 2 % van haar lading.

Hoeveel % van haar lading verliest de batterij

1 per half uur?

2 per minuut?

3 per dag?

De groeifactor per uur is 0,98.

1 De groeifactor per half uur is $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}989949$, wat overeenkomt met een procentuele afname van 1,0051 %.

2 Per minuut is de groeifactor $\sqrt[60]{0{,}98} \approx 0{,}999663$.
Dit betekent een verlies van 0,0337 % per minuut.

3 Per dag: groeifactor $0{,}98^{24} \approx 0{,}61578$, of een afname van 38,422 %.

Opdracht 52 bladzijde 207

Schrijf als één macht met geheel grondtal.

1 $\dfrac{(7^3)^{\sqrt{5}}}{7^{\sqrt{5}}} = 7^{2\sqrt{5}}$

2 $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 3^{\sqrt{2}^2} = 3^{2\sqrt{2}} \cdot 3^2 = 3^{2+2\sqrt{2}}$

3 $\dfrac{4^{\sqrt{5}} \cdot 3^{2\sqrt{5}}}{72^{\sqrt{5}}} = \left(\dfrac{4 \cdot 9}{72}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{-\sqrt{5}}$

4 $3^{-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}}}{9^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3^{-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2\sqrt{3}}}{3^3} = 3^{-3\sqrt{3}-3}$

5 $\dfrac{\left((2\sqrt{3})^{\sqrt{5}}\right)^2}{9^{\frac{\sqrt{5}}{2}}} = \dfrac{\left((2\sqrt{3})^2\right)^{\sqrt{5}}}{3^{\sqrt{5}}} = \left(\dfrac{12}{3}\right)^{\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}}$

Opdracht 53 bladzijde 207

Om overstromingen te voorkomen, wordt een rivier met dijken omgeven. De aarde voor die dijken wordt uit een nabijgelegen vlakte aangevoerd; op die plaats ontstaat een meer.

Op een bepaald ogenblik heeft dit meer een oppervlakte van 1000 m^2 water. Door de werken wordt het elke week 600 m^2 groter. Na de werken wil men het meer zo vlug mogelijk voor waterrecreatie gebruiken. Daarom wordt de kwaliteit van het water regelmatig gecontroleerd. Bij het begin van de werken vindt men 10 m^2 van een bepaalde algensoort in het meer. Tijdens de volgende weken verdubbelt deze oppervlakte elke week. Iemand merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. Het meer zal anders vlug volledig bedekt zijn met algen. Maar de beambte van het ministerie van volksgezondheid ziet voorlopig geen gevaar: "Het meer wordt toch elke week 600 m^2 groter."

Stel de oppervlakte van het meer voor door M en die van de algen door A, beide in m^2. De tijd stellen we voor door t, in weken. Laat $t = 0$ overeenkomen met
$M = 1000$ en $A = 10$.

1 Geef een formule voor M en A in functie van de tijd.

$M = 1000 + 600t$

$A = 10 \cdot 2^t$

2 Plot op je rekentoestel in een passend venster de grafieken waarop de punten voor $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$ liggen. Gebruik een tabel op je rekentoestel om snel een juiste keuze te maken voor de instelling op de y-as.
Noteer de vensterinstellingen.

Kies bijv. $[x_{min}, x_{max}] = [0,12]$ en $[y_{min}, y_{max}] = [-2000, 8000]$.

3 Na hoeveel weken is het meer vol algen?

Via "intersect" vind je als x-coördinaat 9,3713...
Het meer is dus vol algen na ongeveer 9,4 weken.

Opdracht 54 bladzijde 208

Veronderstel dat de concentraties in het bloed van stof A en van stof B omgekeerd evenredig zijn en positief. Als de concentratie van stof A met p % toeneemt, dan zal de concentratie van stof B afnemen met

A p % **B** $\dfrac{p}{1+p}$ % **C** $\dfrac{100p}{100+p}$ % **D** $\dfrac{p}{100+p}$ %

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts)

Stel C_A en C_B de concentraties van A resp. B.
Noem het percentage waarmee C_B afneemt q:

C_B wordt dan $\left(1 - \dfrac{q}{100}\right) \cdot C_B$ wanneer C_A verandert in $\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) \cdot C_A$.

Aangezien de concentraties omgekeerd evenredig zijn, is hun product constant:

$$C_A \cdot C_B = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot C_A \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right) C_B$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{q}{100} = \frac{100}{100 + p}$$

$$\Leftrightarrow q = 100\left(1 - \frac{100}{100 + p}\right) = \frac{100\,p}{100 + p}$$

Dit is antwoord C.

Opdracht 55 bladzijde 208

In Nederland verachtvoudigde het mobiel dataverbruik tussen het eerste halfjaar van 2008 en het eerste halfjaar van 2010, waarin 3,2 petabyte werd verbruikt.
(1 petabyte = 1024 terabyte = 1024 × 1024 gigabyte)

We veronderstellen dat de groei exponentieel verliep.

1 Bereken de procentuele groei per jaar van dat dataverbruik.

Groeifactor per 2 jaar: 8.
Per jaar is de groeifactor $\sqrt{8} \approx 2{,}828$, wat overeenkomt met een procentuele groei van 182,8 %.

2 Stel een formule op voor het dataverbruik per halfjaar D in functie van de tijd t in jaren. Laat $t = 0$ overeenkomen met het eerste halfjaar van 2010, $t = 1$ met het eerste halfjaar van 2011 enzovoort.

$$D(t) = 3{,}2 \cdot \sqrt{8}^{\,t} \quad \text{met } t = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \ldots$$

3 Bereken wat het dataverbruik zou zijn in het eerste halfjaar van 2014, mocht deze trend zich verderzetten.

$D(4) = 3{,}2 \cdot 64 \approx 204{,}8$ ➜ ongeveer 205 PB

4 Hoe groot was het dataverbruik in het tweede halfjaar van 2009?

$D\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}90273$ ➜ ongeveer 1,9 PB

Opdracht 56 bladzijde 208

Na een reeks politieke, economische en monetaire blunders door de regering van Robert Mugabe vanaf het begin van de jaren 2000, zakte de economie van Zimbabwe in elkaar. Dit leidde omstreeks 2005 tot een periode van hyperinflatie, d.w.z. een periode waarin de *maandelijkse* inflatie meer dan 50 % bedroeg.

Dit betekent dat een product dat op een bepaald ogenblik 100 munteenheden kostte, de maand erop minstens 150 munteenheden kostte.

1 Stel dat de maandelijkse inflatie precies 50 % bedraagt. Wat is dan de jaarlijkse inflatie?

Groeifactor per jaar: $1{,}15^{12} = 129{,}75$.

Uit $1 + \dfrac{p}{100} = 129{,}75$ volgt $p = 12875$.

De jaarlijkse inflatie is dan 12875 %.

2 In juli 2008, de laatste maand waarin de regering van Zimbabwe de inflatiecijfers bekendmaakte, werd de jaarlijkse inflatie geschat op 231 150 890 %. Toon stap voor stap aan hoe je uit dat cijfer kunt berekenen dat dit overeenkomt met een wekelijkse inflatie van ongeveer 33 %. Je mag hierbij stellen dat 1 jaar overeenkomt met 52 weken.

Groeifactor per jaar: $a_j = 1 + \dfrac{p_j}{100} = 2311\ 509{,}9$.

Groeifactor per week: $a_w = \sqrt[52]{a_j} \approx 1{,}3255$.

Bijgevolg is de wekelijkse inflatie: $p_w = 100(a_w - 1)$

$= 32{,}55$

Afgerond is de wekelijkse inflatie ongeveer 33%.

3 Stel dat op 1 juli 2008 drie eieren 100 000 000 000 Zimbabwaanse dollars (afkorting Z$) kostten. Hoeveel Z$ zouden ze dan gekost hebben op 1 augustus 2008?

De uitkomst hangt af van hoe je te werk gaat.

a) Reken je in maanden, dan vind je (in Z$):

$10^{11} \cdot a_j^{\frac{1}{12}} \approx 10^{11} \cdot 2\ 311\ 509{,}9^{\frac{1}{12}} \approx 339\ 097\ 545\ 705$

b) Reken je in dagen, dan vind je (2008 was een schrikkeljaar):

$10^{11} \cdot a_j^{\frac{31}{366}} \approx 345\ 954\ 108\ 947$

c) In de financiële algebra wordt geen rekening gehouden met schrikkeljaren en dan vind je

$10^{11} \cdot a_j^{\frac{31}{365}} \approx 347\ 132\ 484\ 093$

Opdracht 57 bladzijde 209

Je tekent de grafiek van de functie met voorschrift $y = 2^x$ in een assenstelsel waarbij de eenheid op de x- en y-as overeenkomt met 1 cm.

Vanaf welke gehele x-waarde is y groter dan de afstand tussen het aard- en het maanoppervlak (ongeveer 376 341 km)?

Via trial and error, via een grafiek of via een tabel vind je:

$2^{35} \approx 3{,}436 \cdot 10^{10} < 3{,}76341 \cdot 10^{10}$ (cm)

$2^{36} \approx 6{,}872 \cdot 10^{10} > 3{,}76341 \cdot 10^{10}$ (cm)

Vanaf $x = 36$ is y groter dan de gegeven afstand.

Opdracht 58 bladzijde 209

Wat gebeurt er met de functiewaarde $f(x) = 2^x$ wanneer we:

1 x met 10 vermeerderen?

$2^x \rightarrow 2^{x+10} = 2^{10} \cdot 2^x = 1024 \cdot 2^x \rightarrow$ **de functiewaarde wordt met 1024 vermenigvuldigd**

2 x met 3 verminderen?

$$2^x \rightarrow 2^{x-3} = \frac{1}{8} \cdot 2^x \rightarrow \text{ze wordt door 8 gedeeld}$$

3 x verdubbelen?

$2^x \rightarrow 2^{2x} = (2^x)^2 \rightarrow$ **ze wordt gekwadrateerd**

4 x halveren?

$$2^x \rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2^x} \rightarrow \text{ze wordt verminderd tot haar vierkantswortel}$$

Opdracht 59 bladzijde 209

De grafiek van een exponentiële functie met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$ bevat de punten P en Q.

Bepaal a en b.

1 $P(0,1)$ en $Q\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$P(0,1)$ op grafiek $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^0 = 1 \Leftrightarrow b = 1$

$$Q\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ op grafiek} \Leftrightarrow f(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \cdot a^1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

2 $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ en $Q(0,3)$

Analoog: $f(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \cdot a^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 6$$

3 $P(-1,1)$ en $Q(2,27)$

$f(-1) = 1 \Leftrightarrow b \cdot a^{-1} = 1 \quad (1)$
$f(2) = 27 \Leftrightarrow b \cdot a^{2} = 27 \quad (2)$
Deel (2) door (1): $a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$
Dit invullen in (1) of (2): $b = 3$

4 $P(-2,48)$ en $Q(2,3)$

$f(-2) = 48 \Leftrightarrow b \cdot a^{-2} = 48 \; (1)$
$f(2) = 3 \Leftrightarrow b \cdot a^{2} = 3 \quad (2)$
(2)/(1): $a^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \; (a > 0)$
Invullen in (1) of (2): $b = 12$

Opdracht 60 bladzijde 209
Schrijf $f(x)$ in de vorm $b \cdot a^x$.

1 $f(x) = 2^{2x-1}$

$$f(x) = 2^{2x-1} = 2^{-1} \cdot (2^2)^x = \frac{1}{2} \cdot 4^x$$

2 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x+2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x+2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

3 $f(x) = 4^{1+\frac{x}{2}}$

$$f(x) = 4^{1+\frac{x}{2}} = 4 \cdot 2^x$$

4 $f(x) = \frac{24}{4^{-0,5x+1}}$

$$f(x) = \frac{24}{4^{-0,5x+1}} = \frac{24}{4 \cdot 4^{-0,5x}} = 6 \cdot 4^{0,5x} = 6 \cdot 2^x$$

Opdracht 61 bladzijde 209

Door welke transformaties (spiegelingen, verschuivingen, uitrekkingen) gaat de grafiek van $f: x \mapsto 2^x$ over in de grafiek van g?

1 $g: x \mapsto 2^{x-1}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x = \frac{1}{2} f(x)$ ➜ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

2 $g: x \mapsto 2^x + 1$

$g(x) = f(x) + 1$ ➜ verticale verschuiving volgens vector $(0,1)$

3 $g: x \mapsto \dfrac{1}{2^{1-x}}$

$g(x) = 2^{x-1}$ ➜ zie 1.

4 $g: x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2} f(-x)$ ➜ spiegeling om de y-as en verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$

5 $g: x \mapsto 3 \cdot 2^x - 1$

$g(x) = 3 \cdot f(x) - 1$ ➜ verticale uitrekking met factor 3, gevolgd door een verticale verschuiving volgens de vector $(0,-1)$.

6 $g: x \mapsto -2^{x-1}$

$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x)$ ➜ verticale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$ en spiegeling om de x-as

7 $g: x \mapsto 1 - 2^{\frac{x}{2}}$

$g(x) = -f\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1$ ➜ spiegeling om de x-as en horizontale uitrekking met factor 2, gevolgd door een verticale verschuiving volgens vector $(0,1)$

8 $g: x \mapsto 2^{-x}$

$g(x) = f(-x)$ ➜ spiegeling om de y-as

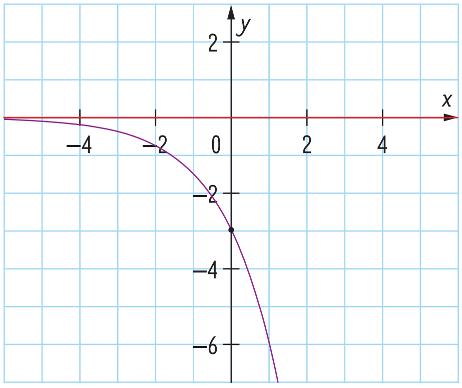
Opdracht 62 bladzijde 210

De grafieken hieronder zijn ontstaan door verticale verschuivingen of uitrekkingen en eventueel een spiegeling om de x- of y-as van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = 2^x$.

Geef telkens het voorschrift van de bijbehorende functie.

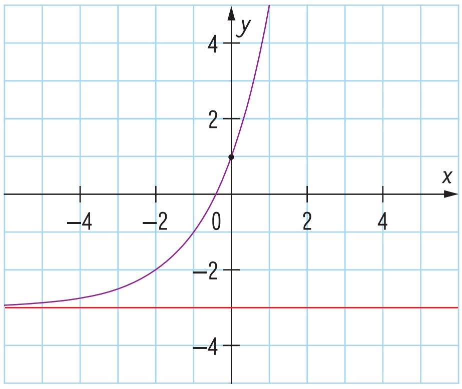
De asymptoten van de grafiek zijn in het rood getekend.

1



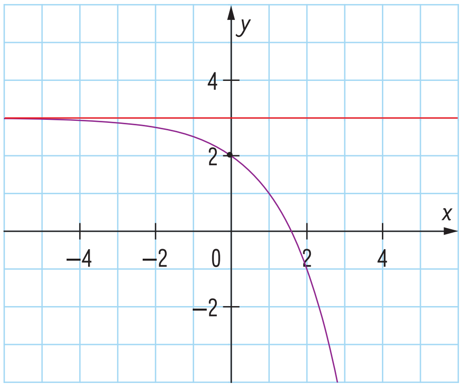
Verticale uitrekking met factor 3 en spiegeling om de x-as:
$\Rightarrow g(x) = -3 \cdot 2^x$

3



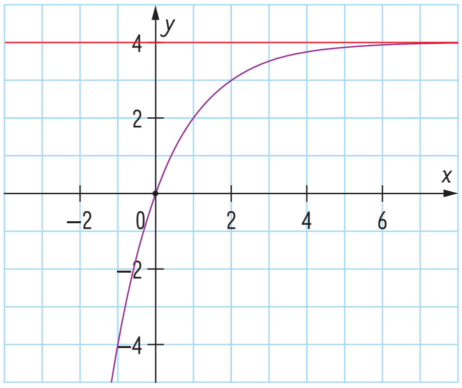
Verticale uitrekking met factor 4 en dan verschuiving volgens (0, -3) $\Rightarrow g(x) = 4 \cdot 2^x - 3$

2



Spiegeling om de x-as en dan verschuiving volgens de vector (0, 3) $\Rightarrow g(x) = -2^x + 3$

4



Verticale uitrekking met factor 4 en spiegeling om de x-as, gevolgd door een verticale verschuiving volgens (0,4) en spiegeling om de y-as

$$\Rightarrow g(x) = -4 \cdot 2^{-x} + 4 = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$$

Opdracht 63 bladzijde 210

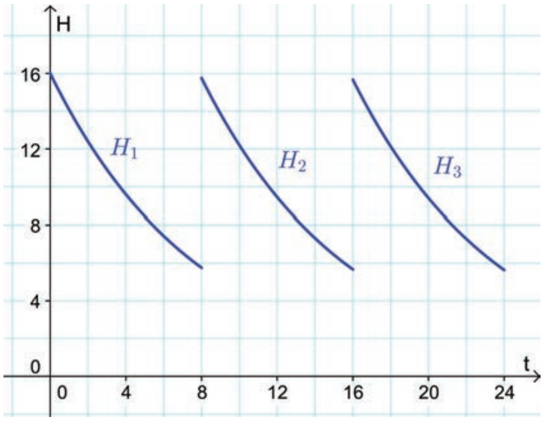
Toon aan dat een horizontale verschuiving van de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = a^x$ over een afstand d (naar rechts indien $d > 0$ en naar links indien $d < 0$) geïnterpreteerd kan worden als een verticale uitrekking en geef de factor van die uitrekking.

$$y = a^x \xrightarrow[\text{volgens } (d,\ 0)]{\text{verschuiving}} y = a^{x-d} = a^{-d} \cdot a^x$$

Een horizontale verschuiving volgens de vector (d, 0) komt overeen met een verticale uitrekking met de factor a^{-d}.

Opdracht 64 bladzijde 210

Een model dat de hoeveelheid H (in mg) van een geneesmiddel in de bloedsomloop t uren na toediening van een dosis D (in mg) geeft, wordt beschreven door de formule $H = D \cdot 0{,}88^t$.



1 De dokter geeft een eerste dosis van 16 mg.
Schets de grafiek van H in functie van t gedurende de eerste 8 uur.

$H_1(t) = 16 \cdot 0{,}88^t \ (0 \leqslant t \leqslant 8)$

2 Na 8 uur krijgt de patiënt een bijkomende dosis van 10 mg toegediend.
Vervolledig de grafiek voor $8 \leqslant t < 16$ en geef het bijbehorend functievoorschrift.

Op einde eerste 8u: $H_1(8) = 16 \cdot 0{,}88^8 = 5{,}75$.

$\Rightarrow$ volgende 8u: $H_2(t) = (5{,}75 + 10) \cdot 0{,}88^{t-8} = 15{,}75 \cdot 0{,}88^{t-8} \ (8 \leqslant t \leqslant 16)$

3 Na nogmaals 8 uur krijgt de patiënt een laatste dosis van 10 mg.
Vervolledig de grafiek voor $16 \leqslant t < 24$ en geef het bijbehorend functievoorschrift.

$H_3(t) = (15{,}75 \cdot 0{,}88^{16-8} + 10) \cdot 0{,}88^{t-16} = 15{,}67 \cdot 0{,}88^{t-16} \ (16 \leqslant t \leqslant 24)$

Opmerking: door 3 functies te gebruiken, doen er zich geen complicaties voor bij $t = 8$ en $t = 16$.

Opdracht 65 bladzijde 211

Iemand haalt een fles melk uit de koelkast en zet er een brik fruitsap voor in de plaats. De temperatuur van de fles melk neemt hierdoor langzaam toe tot de kamertemperatuur en de temperatuur van het fruitsap neemt af tot de koelkasttemperatuur. De temperatuur in °C van de flessen wordt weergegeven door de functievoorschriften $T_1(t) = 19 - 13 \cdot 0{,}8^t$ en $T_2(t) = 6 + 13 \cdot 0{,}8^t$ met t in uren.

Plot beide grafieken op je rekentoestel en beantwoord aan de hand van de grafieken de volgende vragen.

1 Welk voorschrift hoort bij de fles melk en welk bij het brik fruitsap?

T_2 is dalend en hoort dus bij het afkoelend fruitsap.

T_1 hoort bij de melk.

2 Bepaal een vergelijking van de asymptoot van de grafiek van de temperatuur van de fles melk.

Als $t \to +\infty$ zal $T_1(t) \to 19$ want $0{,}8^t \to 0$.

De vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 19$.

3 Wat is de kamertemperatuur?

De kamertemperatuur komt overeen met $T_2(0)$ of $\lim\limits_{t \to +\infty} T_1(t)$ en bedraagt 19°C.

4 Vanaf welk tijdstip is het fruitsap kouder dan de melk?

Op dit ogenblik moeten leerlingen grafisch tewerk gaan of een CAS inschakelen. Ze vinden een snijpunt voor $t \approx 3{,}11$. Vanaf dan is het fruitsap kouder.

Opdracht 66 bladzijde 211

Een dierenarts moet een hond opereren. Ze gebruikt een verdovingsmiddel dat direct in de bloedbaan wordt gespoten. Na het inspuiten neemt de concentratie exponentieel af.

De halveringstijd is 2 uur. Dit wil zeggen dat na 2 uur nog 50 % van de oorspronkelijke hoeveelheid in het lichaam aanwezig is. Om de verdoving op gang te houden, moet er per kg lichaamsgewicht tenminste 20 milligram van het middel aanwezig zijn. De hond weegt 20 kg en de arts schat dat de operatie 70 minuten gaat duren.

1 Hoeveel milligram van het verdovingsmiddel zou de arts minstens moeten toedienen?

Stel b de toe te dienen hoeveelheid (in mg) en t de tijd in minuten, dan

moet gelden: $$b \cdot \left(\sqrt[120]{\frac{1}{2}}\right)^{70} = 400$$

Hierbij is $\sqrt[120]{\frac{1}{2}}$ de groeifactor per minuut.

Voor b vinden we: $$b = \frac{400}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{70}{120}}} \approx 599{,}3$$

De arts moet dus ongeveer 600 mg toedienen.

2 De arts besluit om aan het begin van de operatie een kleinere hoeveelheid toe te dienen en tijdens de operatie nog een tweede spuitje te geven. Ze begint met een spuitje van 500 mg en geeft na 30 minuten nog een tweede spuitje van 100 mg. Geef een formule voor de hoeveelheid verdovingsmiddel (in mg) als functie van de tijd (in minuten) in de eerste 30 minuten.

De beginwaarde is 500 en de groeifactor $\sqrt[120]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}$.

Bijgevolg is $$y = 500 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}\right)^{t} = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{120}}$$

3 Idem voor de totale hoeveelheid in de periode van 30 tot 70 minuten.

Na 30 minuten is de hoeveelheid verdovingsmiddel

$$500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{120}} \approx 420{,}45$$

Voor de periode van 30 tot 70 minuten is de groeifactor nog steeds $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{120}}$, maar b moet nu zó gekozen worden dat

$$b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{120}} = 520{,}45$$

of dus $$b = \frac{520{,}45}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} = 618{,}92$$

Voor t tussen 30 en 70 minuten geldt dus:

$$y = 618{,}92 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{120}}$$

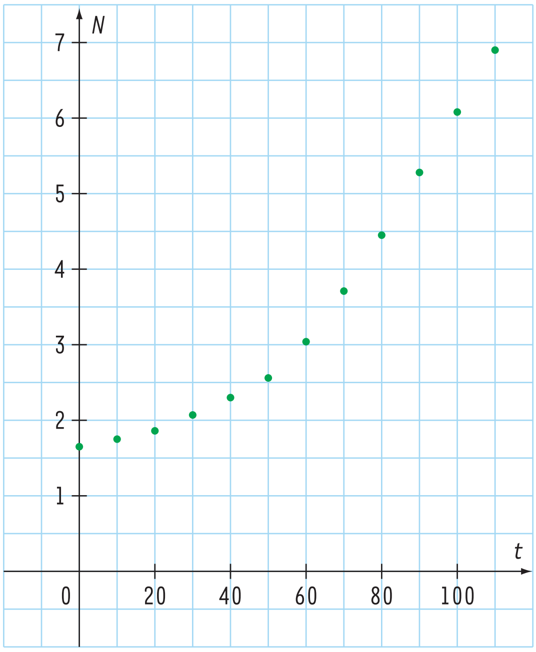
4 Toon aan dat er gedurende die 70 minuten steeds voldoende verdovingsmiddel in het lichaam van de hond aanwezig is om de verdoving op gang te houden.

Na 70 minuten is er nog $618{,}92 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{70}{120}} \approx 413$ mg verdovingsmiddel aanwezig, meer dan de 400 mg die vereist zijn.

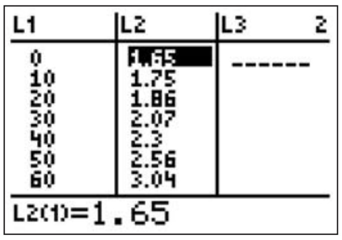
Opdracht 67 bladzijde 212

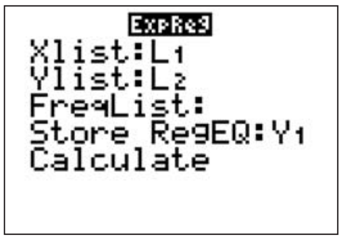
Stel je de wereldbevolking uit de tabel voor door punten, dan lijkt de groei exponentieel te verlopen.

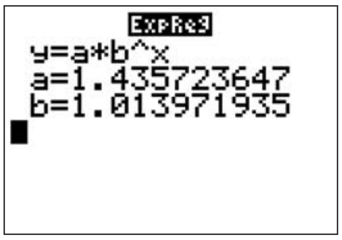
t (jaren t.o.v. 1900)	***N*** (in miljarden)
0	1,65
10	1,75
20	1,86
30	2,07
40	2,30
50	2,56
60	3,04
70	3,71
80	4,45
90	5,28
100	6,08
110	6,90



1 Gebruik software of je rekentoestel om bij deze gegevens een best passende exponentiële functie $N = b \cdot a^t$ te bepalen. Welk functievoorschrift krijg je?







Het voorschrift is $N = 1{,}4357 \cdot 1{,}0140^t$

(in berekeningen kan voor de groeifactor met meer cijfers na de komma gewerkt worden.)

2 Bereken hieruit voor deze periode de gemiddelde procentuele groei per jaar.

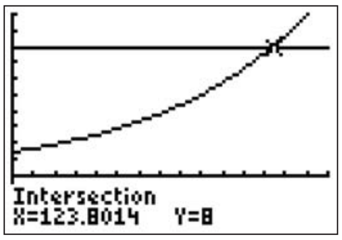
De jaarlijkse groei is ongeveer 1,40 %.

3 Op 31 oktober 2011 waren er officieel 7 miljard mensen op aarde. Is dit in overeenstemming met je model?

Deze datum komt overeen met $t = 111 + \dfrac{304}{365} \approx 111{,}83$.

Volgens ons model is $N(111{,}83) \approx 6{,}78$. Het model schat de wereldbevolking lager in dan in werkelijkheid het geval was.

4 Wanneer zullen we met 8 miljard zijn, indien deze best passende kromme ook voor de komende jaren gebruikt mag worden?



We zullen volgens dit model met 8 miljard zijn voor $t \approx 123{,}8$, m.a.w. eind 2023.

Opdracht 68 bladzijde 212

In paragraaf 4.1 aanvaardden we op basis van een voorbeeld dat de formule voor exponentiële groei ook voor negatieve en rationale waarden van de exponent geldig blijft. In de wiskunde volstaan voorbeelden niet om een bewering te bekrachtigen. In deze opdracht bewijzen we die bewering.

Van de functie f is gegeven:

- bij gelijke toenamen van de onafhankelijke variabele x worden de functiewaarden met eenzelfde getal vermenigvuldigd (dit is het kenmerk van exponentiële groei);
- $f(0) = 1$;
- $f(1) = a$.

1 Bewijs: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Stel b de factor waarmee de beeldwaarden vermenigvuldigd worden wanneer x met x_2 toeneemt.

Dan geldt: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot b$. $\quad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}$ $\quad$ (1)

Bovendien geldt: $f(x_2) = f(0 + x_2) = 1 \cdot b = b$. $\quad$ (2)

Uit (1) & (2) volgt: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

2 Bewijs: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $f(n) = a^n$.

Dit bewijzen we mbv. volledige inductie.

1. <u>Basisstap: n = 0</u>

   $f(0) = 1 = a^0$

2. <u>Inductiestap</u>

   Stel $f(k) = a^k$ met k een natuurlijk getal.

   Dan geldt: $f(k + 1) = f(k) \cdot f(1)$ (zie deelvraag 1)

   $= a^k \cdot a$ (inductiehypothese)

   $= a^{k+1}$

Uit 1 & 2 volgt dat $f(n) = a^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3 Bewijs dat voor elk strikt positief rationaal getal $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}_0)$ geldt: $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}$.

Stel $f\left(\frac{1}{n}\right) = b$.

Door volledige inductie op k is, op dezelfde manier als in 2, aan te tonen dat $f\left(\frac{k}{n}\right) = b^k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. (1)

Als gevolg hiervan is $f\left(\frac{n}{n}\right) = b^n$ en aangezien $f(1) = a$ vinden we $b^n = a$

$\Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{n}}$ (want $a, b > 0$). (2)

Uit (1) en (2) volgt: $f\left(\frac{k}{n}\right) = a^{\frac{k}{n}}$.

4 Bewijs dat voor elk strikt negatief rationaal getal q geldt: $f(q) = a^q$.

$q \in \mathbb{Q}_0^- \Rightarrow -q \in \mathbb{Q}_0^+$

$f(q + (-q)) = f(q) \cdot f(-q)$ (zie vraag 1)

$= f(q) \cdot a^{-q}$ (1) (zie vraag 3)

Bovendien: $f(q + (-q)) = f(0) = 1$ (2) (geg.)

Uit (1) en (2) volgt: $f(q) \cdot a^{-q} = 1$

$\Rightarrow f(q) = a^q$

Opdracht 69 bladzijde 213

Bereken de volgende logaritmen, als ze bestaan, zonder rekentoestel.

1 $^{3}\log 81 = 4$

2 $^{8}\log 8^3 = 3$

3 $^{5}\log 1 = 0$

4 $^{-1}\log 1$ bestaat niet

5 $^{4}\log 4 = 1$

6 $^{4}\log(-64)$ bestaat niet

7 $\log\left(10^{^{27}\log 3}\right) = {}^{27}\log 3 = \frac{1}{3}$

8 $^{5}\log(5\sqrt{5})^5 = {}^{5}\log\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^5 = {}^{5}\log 5^{\frac{15}{2}} = \frac{15}{2}$

9 $^{9}\log \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

10 $^{9}\log\left(27\sqrt[4]{3}\right) = {}^{9}\log\left(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{4}}\right) = {}^{9}\log 3^{\frac{13}{4}} = {}^{9}\log 9^{\frac{13}{8}} = \frac{13}{8}$

Opdracht 70 bladzijde 213

Welk antwoord is correct?

1 $\log(0{,}00001) =$

A -10000 **B** $10^{0,00001}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** -5 **E** $-\frac{1}{5}$

$\log(0{,}00001) = \log 10^{-5} = -5$ ➜ antwoord D

2 $^{4}\log x$ verdubbelt als men

A x verdubbelt **B** x kwadrateert **C** x halveert **D** x verviervoudigt

$2 \cdot {}^{4}\log x = {}^{4}\log x^2$ ➜ antwoord B

3 Welke uitdrukking verandert niet van waarde wanneer je x alle strikt positieve getallen laat aannemen?

A $\log 5x + \log x$ **B** $\log 5x - \log x$ **C** $\log 5x \cdot \log x$ **D** $\frac{\log 5x}{\log x}$

$\log 5x - \log x = \log \frac{5x}{x} = \log 5$ ➜ antwoord B

Opdracht 71 bladzijde 214

Bereken zonder rekentoestel.

1 $^3\log 36 - {}^3\log 4 \quad = {}^3\log \frac{36}{4} = {}^3\log 9 = 2$

2 $2 \cdot {}^3\log 5 - {}^3\log 50 + {}^3\log 2 \quad = {}^3\log \frac{5^2 \cdot 2}{50} = {}^3\log 1 = 0$

3 $^2\log 25 + {}^2\log 12 - {}^2\log 75 \quad = {}^2\log \frac{25 \cdot 12}{75} = {}^2\log 4 = 2$

4 $2 \cdot {}^4\log 6 - 3 \cdot {}^4\log 3 - {}^4\log \frac{2}{3} \quad = {}^4\log \frac{6^2 \cdot 3}{3^3 \cdot 2} = {}^4\log 2 = \frac{1}{2}$

5 $2 \cdot {}^8\log 6 - {}^8\log 90 + {}^8\log 5 \quad = {}^8\log \frac{6^2 \cdot 5}{90} = {}^8\log 2 = \frac{1}{3}$

6 $-{}^5\log(5\sqrt{5}) + 3 \cdot {}^5\log(2\sqrt{5}) - 2 \cdot {}^5\log(50\sqrt{2}) \quad = {}^5\log \frac{2^3 \cdot \sqrt{5}^3}{5\sqrt{5} \cdot 50^2 \cdot 2} = {}^5\log \frac{1}{5^4} = -4$

Opdracht 72 bladzijde 214

Schrijf elke uitdrukking als één logaritme.

1 $\log 7 + \log 4 + \log 5 \quad = \log(7 \cdot 4 \cdot 5) = \log 140$

2 $^3\log 10 - {}^3\log 5 \quad = {}^3\log \frac{10}{5} = {}^3\log 2$

3 $2 \cdot \log x - \frac{1}{2} \cdot \log(x-2) \quad = \log \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$

4 $^2\log 5 - {}^2\log 7 + {}^2\log 3 \quad = {}^2\log \frac{5 \cdot 3}{7} = {}^2\log \frac{15}{7}$

5 $3 \cdot ({}^3\log x + {}^3\log y - 2 \cdot {}^3\log z) \quad = {}^3\log\left(\left(\frac{x \cdot y}{z^2}\right)^3\right) = {}^3\log \frac{x^3 y^3}{z^6}$

6 $9 \cdot \log 7 + 5 \cdot \log 23 \quad = \log(7^9 \cdot 23^5)$

7 $2 + 4 \cdot {}^5\log 3 \quad = {}^5\log 5^2 + {}^5\log 3^4 = {}^5\log(5^2 \cdot 3^4) = {}^5\log 2025$

8 $^3\log(a-b) + {}^3\log(a^2+ab+b^2) \quad = {}^3\log((a-b)(a^2+ab+b^2)) = {}^3\log(a^3-b^3)$

Opdracht 73 bladzijde 214

Stel dat a een strikt positief getal is dat verschillend is van 1. Bereken dan de volgende uitdrukkingen.

1 $^{a}\log a^{a}$ $= a$

2 $^{\sqrt{a}}\log(^{a}\log a)$ $= {}^{\sqrt{a}}\log 1 = 0$

3 $^{a}\log(^{a}\log a^{a})$ $= {}^{a}\log(a) = 1$

4 $a^{\left(^{a}\log \frac{1}{a^{2}}\right)}$ $= a^{-2} = \dfrac{1}{a^{2}}$

5 $^{\sqrt[3]{a}}\log a$ $= 3$

6 $^{\sqrt{a}}\log a^{a}$ $= {}^{\sqrt{a}}\log \sqrt{a}^{2a} = 2a$

7 $^{a}\log a^{a^{3}}$ $= a^{3}$

8 $^{a}\log\left(^{a}\log a^{a^{a}}\right)$ $= {}^{a}\log a^{a} = a$

Opdracht 74 bladzijde 214

Bereken met je rekentoestel en rond af op twee cijfers na de komma.

1 $^{2}\log 3$

2 $^{3}\log 0{,}121$

3 $^{\frac{1}{2}}\log 1000$

4 $^{0,3}\log 8$

zie rekentoestel.

Opdracht 75 bladzijde 215

Bereken $u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$ zonder rekentoestel als $2^{u} = 3$, $3^{v} = 4$, $4^{w} = 5$, $5^{x} = 6$, $6^{y} = 7$ en $7^{z} = 8$.

$$u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot {}^{4}\log 5 \cdot {}^{5}\log 6 \cdot {}^{6}\log 7 \cdot {}^{7}\log 8$$

$$= \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 6}} \cdot \frac{\log 8}{\cancel{\log 7}}$$

$$= \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$= \frac{3 \log 2}{\log 2}$$

$$= 3$$

Opdracht 76 bladzijde 215

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\left(\sqrt{3}\right)^{^3\log 16} = 3^{\frac{1}{2}\cdot {}^3\log 16} = 3^{^3\log\sqrt{16}} = 3^{^3\log 4} = 4$

2 $\dfrac{^4\log 3 \cdot {}^8\log 4 \cdot {}^{16}\log 5}{^8\log 3 \cdot {}^{16}\log 4 \cdot {}^{32}\log 5} = \dfrac{\cancel{^4\log 3} \cdot \dfrac{\cancel{^4\log 4}}{\cancel{^4\log 8}} \cdot \dfrac{\cancel{^4\log 5}}{\cancel{^4\log 16}}}{\dfrac{\cancel{^4\log 3}}{\cancel{^4\log 8}} \cdot \dfrac{\cancel{^4\log 4}}{\cancel{^4\log 16}} \cdot \dfrac{\cancel{^4\log 5}}{^4\log 32}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{1}{^4\log 32}}$

$= {}^4\log 32$

$= \dfrac{5}{2}$

Opdracht 77 bladzijde 215

Toon aan (we veronderstellen dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn).

1 $^{ab}\log x = \dfrac{^a\log x}{1 + {}^a\log b}$

$^{ab}\log x = \dfrac{^a\log x}{^a\log (ab)} = \dfrac{^a\log x}{^a\log a + {}^a\log b} = \dfrac{^a\log x}{1 + {}^a\log b}$

2 $^c\log ax = (1 + {}^a\log x) \cdot {}^b\log a \cdot {}^c\log b$

$(1 + {}^a\log x) \cdot {}^b\log a \cdot {}^c\log b = ({}^a\log a + {}^a\log x) \cdot \dfrac{^a\log a}{\cancel{^a\log b}} \cdot \dfrac{\cancel{^a\log b}}{^a\log c}$

$= {}^a\log(ax) \cdot \dfrac{1}{^a\log c}$

$= {}^c\log(ax)$

3 $^a\log x \cdot {}^b\log x + {}^b\log x \cdot {}^c\log x + {}^c\log x \cdot {}^a\log x = \dfrac{^a\log x \cdot {}^b\log x \cdot {}^c\log x}{^{abc}\log x}$

$^a\log x \cdot {}^b\log x + {}^b\log x \cdot {}^c\log x + {}^c\log x \cdot {}^a\log x$

$= \dfrac{\log x}{\log a} \cdot \dfrac{\log x}{\log b} + \dfrac{\log x}{\log b} \cdot \dfrac{\log x}{\log c} + \dfrac{\log x}{\log c} \cdot \dfrac{\log x}{\log a}$

$= \dfrac{(\log x)^2\ (\log c + \log a + \log b)}{\log a\ \ \log b\ \ \log c}$

$= \dfrac{\log x\ \ \log x\ \ \log x\ \ \log (abc)}{\log a\ \ \log b\ \ \log c\ \ \log x}$

$$= \frac{{}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x}{\dfrac{\log x}{\log(abc)}}$$

$$= \frac{{}^{a}\log x \cdot {}^{b}\log x \cdot {}^{c}\log x}{{}^{abc}\log x}$$

4 ${}^{ab}\log cd = \dfrac{{}^{a}\log c + {}^{a}\log d + {}^{b}\log c + {}^{b}\log d}{2 + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a}$

$$\frac{{}^{a}\log c + {}^{a}\log d + {}^{b}\log c + {}^{b}\log d}{2 + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a} = \frac{{}^{a}\log(cd) + {}^{b}\log(cd)}{{}^{a}\log a + {}^{b}\log b + {}^{a}\log b + {}^{b}\log a}$$

$$= \frac{{}^{a}\log(cd) + {}^{b}\log(cd)}{{}^{a}\log(ab) + {}^{b}\log(ab)}$$

$$= \frac{\dfrac{{}^{ab}\log(cd)}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{{}^{ab}\log(cd)}{{}^{ab}\log b}}{\dfrac{{}^{ab}\log(ab)}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{{}^{ab}\log(ab)}{{}^{ab}\log b}}$$

$$= \frac{{}^{ab}\log(cd)\cancel{\left(\dfrac{1}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{1}{{}^{ab}\log b}\right)}}{\cancel{\dfrac{1}{{}^{ab}\log a} + \dfrac{1}{{}^{ab}\log b}}}$$

$$= {}^{ab}\log(cd)$$

5 $a^{\log b} = b^{\log a}$

$$a^{\log b} = b^{{}^{b}\log(a^{\log b})} = b^{\log b \cdot {}^{b}\log a} = b^{\log b \cdot \frac{\log a}{\log b}} = b^{\log a}$$

Opdracht 78 bladzijde 215

Vereenvoudig: ${}^{a^{b}}\log a^{b^{c}}$.

$${}^{a^{b}}\log a^{b^{c}} = \frac{{}^{a}\log a^{b^{c}}}{{}^{a}\log a^{b}} = \frac{b^{c}}{b} = b^{c-1}$$

Opdracht 79 bladzijde 215

Bewijs: $\frac{1}{2} \cdot \log 5 = \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right) - \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)$.

$$\log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right) - \log\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)$$

$$= \log \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$= \log \frac{\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \log \frac{6+2\sqrt{5} + 2\sqrt{6+2\sqrt{5}}\sqrt{6-2\sqrt{5}} + 6 - 2\sqrt{5}}{\left(6+2\sqrt{5}\right) - \left(6-2\sqrt{5}\right)}$$

$$= \log \frac{12 + 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}}{4\sqrt{5}}$$

$$= \log \frac{20}{4\sqrt{5}}$$

$$= \log \sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2} \log 5$$

Opdracht 80 bladzijde 215

1 Als ${}^{mn}\log m = 5$, bereken dan ${}^{mn}\log \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

$${}^{mn}\log \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = {}^{mn}\log \frac{m}{\sqrt{m \cdot n}} = {}^{mn}\log m - \frac{1}{2}\ {}^{mn}\log(mn) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

2 Als $a^2 + b^2 = 7ab$ $(a, b \in \mathbb{R}_0^+)$, bewijs dan dat $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} \log \frac{(a+b)^2}{9} = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} = \frac{1}{2} \log \frac{7ab + 2ab}{9}$$

$$= \frac{1}{2} \log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

Opdracht 81 bladzijde 215

Stel dat a en b twee positieve reële getallen zijn, waarvoor ${}^{a}\log b + {}^{b}\log a = 3$.

Wat is dan de waarde van $({}^{a}\log b)^2 + ({}^{b}\log a)^2$?

A 2 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2010)

$${}^{a}\log b + {}^{b}\log a = 3 \Rightarrow ({}^{a}\log b + {}^{b}\log a)^2 = 9$$

$$\Rightarrow ({}^{a}\log b)^2 + 2\ {}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log a + ({}^{b}\log a)^2 = 9$$

$$\Rightarrow ({}^{a}\log b)^2 + 2\ \cancel{{}^{a}\log b} \cdot \frac{{}^{a}\log a}{\cancel{{}^{a}\log b}} + ({}^{b}\log a)^2 = 9$$

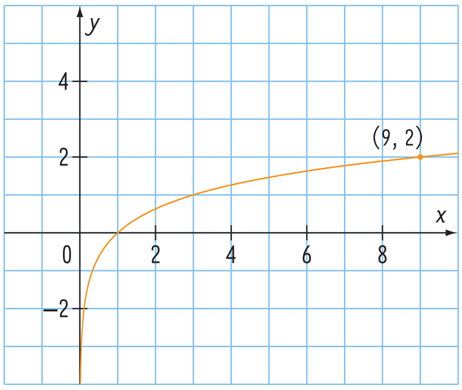
$$\Rightarrow ({}^{a}\log b)^2 + ({}^{b}\log a)^2 = 7 \rightarrow \text{antwoord } C$$

Opdracht 82 bladzijde 216

De onderstaande krommen zijn grafieken van functies met voorschrift $f(x) = {}^{a}\log x$.

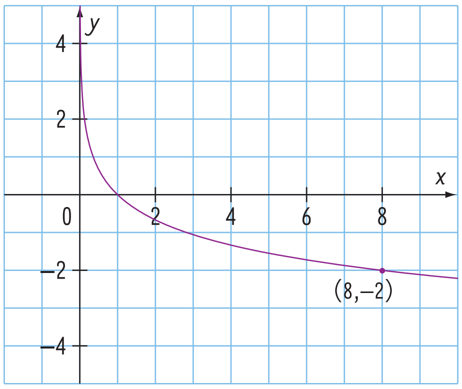
Bepaal a.

1



$${}^{a}\log 9 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 9 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 3$$

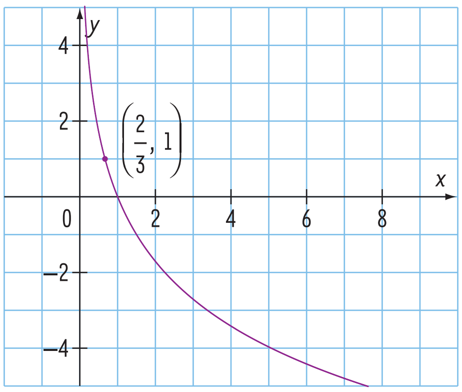
2



$${}^{a}\log 8 = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = 8$$

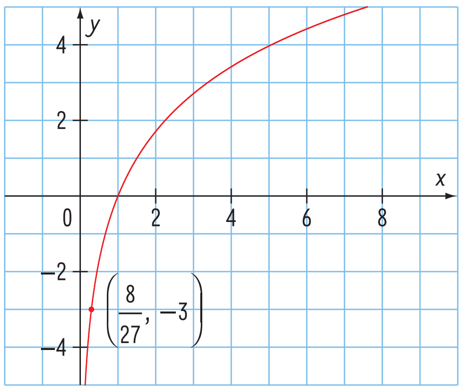
$$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 8^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3



$${}^{a}\log \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

4

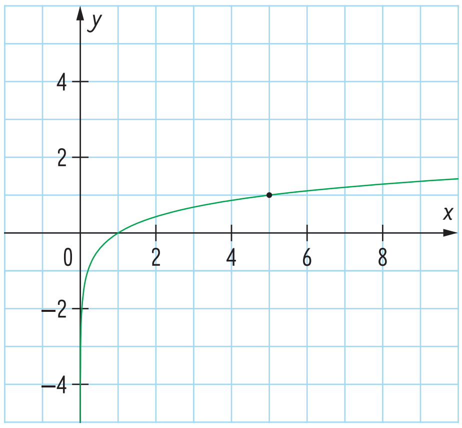


$${}^a\log \frac{8}{27} = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow a = \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Opdracht 83 bladzijde 216

De volgende zes grafieken stellen exponentiële functies met voorschrift van de vorm $f(x) = a^x$ voor of logaritmische functies met voorschrift van de vorm $f(x) = {}^a\log x$. Geef van elke grafiek het voorschrift.

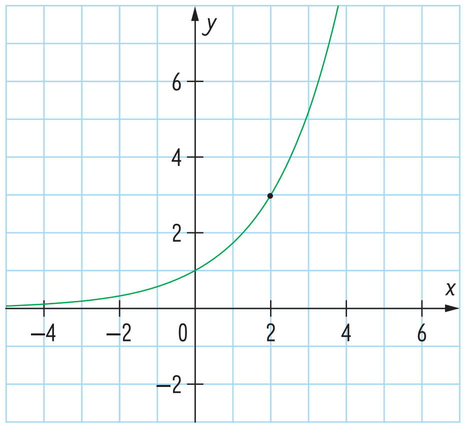
1



$${}^a\log 5 = 1 \Leftrightarrow a = 5$$

$$\rightarrow f(x) = {}^5\log x$$

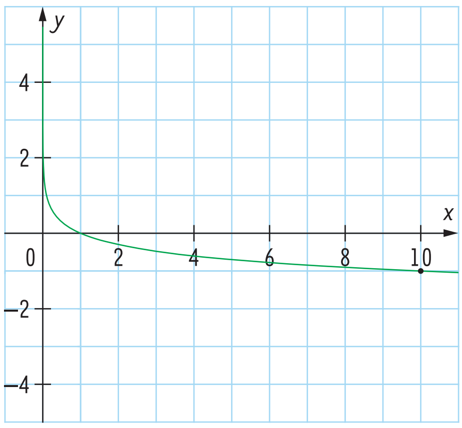
2



$$a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \qquad (a > 0)$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{3}^{\,x}$$

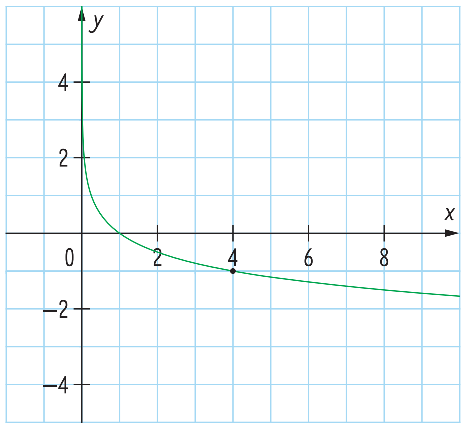
3



$${}^a\log 10 = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = 10 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{\frac{1}{10}}\log x$$

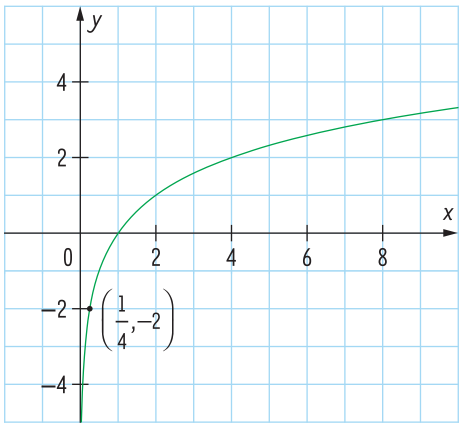
4



$${}^a\log 4 = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log x$$

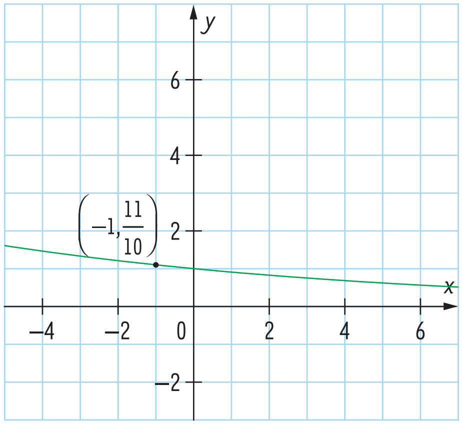
5



$$^{a}\log \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\rightarrow f(x) = {}^{2}\log x$$

6



$$a^{-1} = \frac{11}{10} \Leftrightarrow a = \frac{10}{11}$$

$$\rightarrow f(x) = \left(\frac{10}{11}\right)^{x}$$

Opdracht 84 bladzijde 217

Schets de grafiek van de functies, door minstens drie punten exact te bepalen.

1 $f: x \mapsto {}^{4}\log x$

2 $f: x \mapsto {}^{\frac{3}{4}}\log x$

3 $f: x \mapsto {}^{\sqrt{3}}\log x$

4 $f: x \mapsto {}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\log x$

Opdracht 85 bladzijde 217

Bepaal de inverse functie van

1 $f: x \mapsto 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right]$

$$y = 2\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 1 - \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

$$f^{-1}: x \mapsto {}^{\frac{1}{3}}\log\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

2 $f: x \mapsto 2 \cdot 10^{2x-3}$

$$y = 2 \cdot 10^{2x-3} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 10^{2x-3} \Leftrightarrow 2x - 3 = \log\frac{y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log\frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{2}\log\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

3 $f: x \mapsto \dfrac{5}{1+3 \cdot 2^{-x}}$

$$y = \frac{5}{1 + 3 \cdot 2^{-x}} \Leftrightarrow 1 + 3 \cdot 2^{-x} = \frac{5}{y} \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{y} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -x = {}^{2}\log \frac{5-y}{3y}$$

$$\Leftrightarrow x = {}^{2}\log \frac{3y}{5-y}$$

$$f^{-1}: x \mapsto {}^{2}\log \frac{3x}{5-x}$$

4 $f: x \mapsto \log(2x+6)$

$$y = \log(2x+6) \Leftrightarrow 2x + 6 = 10^{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 10^{y} - 3$$

$$f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot 10^{x} - 3$$

Opdracht 86 bladzijde 217

Gegeven is de functie met voorschrift $f(x) = {}^{\frac{1}{4}}\log(9x)$.

1 Het voorschrift van f kan ook geschreven worden in de vorm $f(x) = a + {}^{\frac{1}{4}}\log x$. Bepaal a.

$${}^{\frac{1}{4}}\log(9x) = {}^{\frac{1}{4}}\log 9 + {}^{\frac{1}{4}}\log x \Rightarrow a = {}^{\frac{1}{4}}\log 9$$

2 Het voorschrift van f kan ook geschreven worden als $f(x) = b \cdot {}^{2}\log(9x)$.

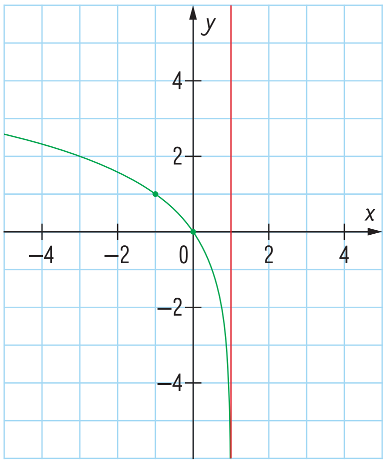
Bepaal b.

$${}^{\frac{1}{4}}\log(9x) = \frac{{}^{2}\log(9x)}{{}^{2}\log \frac{1}{4}} = \frac{1}{-2} \cdot {}^{2}\log(9x) \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

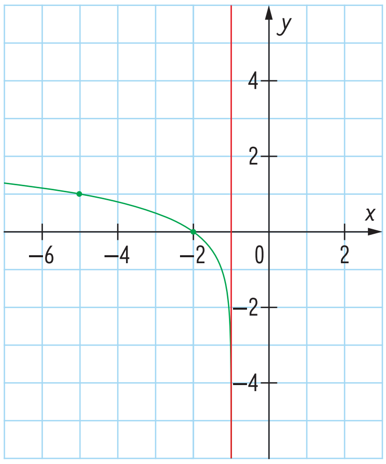
Opdracht 87 bladzijde 218

In de figuren hieronder is de grafiek van drie logaritmische functies getekend, evenals hun verticale asymptoot.

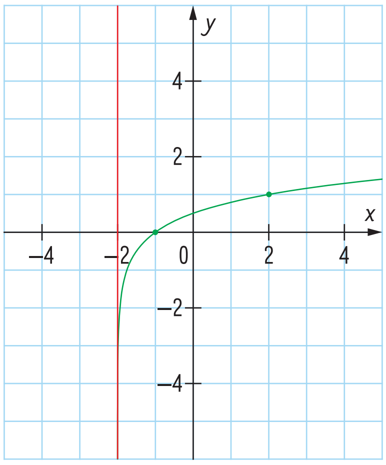
1



3



2



Bepaal voor elk van deze grafieken met welke functie hieronder ze overeenkomen.

$f: x \mapsto {}^{2}\log(x-1)$	$k: x \mapsto {}^{2}\log(1-x)$
$g: x \mapsto {}^{4}\log(x+2)$	$l: x \mapsto {}^{2}\log(x+2)$
$h: x \mapsto {}^{4}\log(1-x)$	$m: x \mapsto {}^{4}\log(-1-x)$

1. V.A. $x = 1 \Rightarrow {}^{a}\log(x - 1)$ of ${}^{a}\log(1 - x)$

   spiegeling om y-as $\Rightarrow y = {}^{a}\log(1 - x)$

   $y(-1) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$ ➜ functie k

2. $y = {}^{a}\log(x + 2)$ en $y(2) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 = 1 \Leftrightarrow a = 4$ ➜ functie g

3. $y = {}^{a}\log(-1-x)$ en $y(-5) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 = 1 \Leftrightarrow a = 4$ ➜ functie m

Opdracht 88 bladzijde 218

1 Geef het voorschrift van een stijgende logaritmische functie met domein $]5,+\infty[$.

Uit het domein volgt dat het voorschrift van de vorm $f(x) = {}^a\log(x - 5)$ is.

Kies $a > 1$ voor een stijgende functie.

2 Bedenk een mogelijk voorschrift voor een logaritmische functie f waarvoor geldt dat $f(0) = 0$ en $f(2) > 2$.

Begin met een functie g met voorschrift $g(x) = {}^a\log x$.

Er geldt $g(1) = 0$. Als a nu zo gekozen wordt dat $g(3) > 2$, dan voldoet $f(x) = g(x + 1)$ aan de gestelde eisen.

$$\begin{aligned} g(3) = 2 &\Leftrightarrow {}^a\log 3 = 2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{3} \qquad (a > 0) \end{aligned}$$

Kies $a < \sqrt{3}$ en $f(x) = {}^a\log(x + 1)$ voldoet aan $f(0) = 0$ en $f(2) > 2$.

(Er zijn verschillende andere manieren om een functie f te vinden.)

3 Bepaal een waarde voor a en b zodat voor de functie met voorschrift $f(x) = {}^a\log(bx)$ zou gelden dat $f(2) < 0$ en $f(3) > 1$.

Voor een functie $g(x) = {}^a\log x$ met $a > 1$ geldt:

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$g(x) > 1 \Leftrightarrow x > a$$

Voor $f(x) = {}^a\log(bx)$ moet dus gelden:

$$f(2) < 0 \Leftrightarrow 2b < 1$$

$$f(3) > 1 \Leftrightarrow 3b > a \quad (\text{met } a > 1)$$

Kies bijvoorbeeld $b = \frac{2}{5}$ en $a = \frac{11}{10}$.

Opdracht 89 bladzijde 219

De atmosferische druk is afhankelijk van de hoogte boven de zeespiegel. Hiervoor geldt de formule $h = -18\,400 \cdot \log \frac{p}{p_0}$ waarbij p_0 de atmosferische druk op zeeniveau en p die op een hoogte van h meter boven de zeespiegel voorstelt.

1 Druk p uit in functie van h.

$$h = -18400 \log \frac{p}{p_0} \Leftrightarrow p = p_0 \cdot 10^{-\frac{h}{18400}}$$

2 Tot welke fractie van de druk op zeeniveau daalt de druk op het hoogste punt van de Passo di Pordoi in de Dolomieten, op 2239 m hoogte?

$h = 2239 \Rightarrow p = p_0 \cdot 10^{-\frac{2239}{18400}} \approx p_0 \cdot 0{,}7556.$

De druk bedraagt daar nog 75,56 % van de druk op zeeniveau.

3 Op welke hoogte is de atmosferische druk tot één derde van de waarde op zeeniveau gedaald?

$p = \frac{1}{3}\, p_0 \Leftrightarrow h = -18400 \cdot \log \frac{1}{3} \approx 8779$

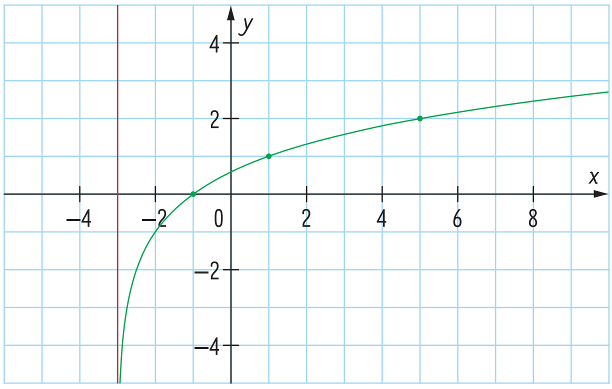
Op een hoogte van 8779 m bedraagt de druk nog één derde van die op zeeniveau.

Opdracht 90 bladzijde 219

De getekende grafieken en de asymptoten ervan horen bij functies met voorschrift $f(x) = {}^{a}\log(x+b) + c$.

Bepaal a, b en c.

1



V.A.: $x = -3 \Leftrightarrow b = 3$

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow {}^{a}\log 2 + c = 0 \quad (1)$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 + c = 1 \quad (2)$

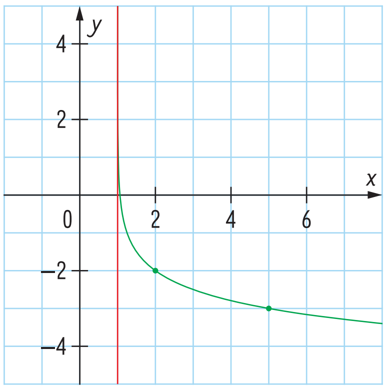
Uit (1): $c = -{}^{a}\log 2.$

In (2): $2 \cdot {}^{a}\log 2 + (-{}^{a}\log 2) = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 2 = 1 \Leftrightarrow a = 2$

Hieruit volgt $c = -{}^{2}\log 2 = -1.$

Besluit: $a = 2$, $b = 3$ en $c = -1$.

2



V.A.: $x = 1 \Rightarrow b = -1$

$f(2) = -2 \Leftrightarrow {}^{a}\log 1 + c = -2 \Leftrightarrow c = -2$

$f(5) = -3 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 - 2 = -3 \Leftrightarrow {}^{a}\log 4 = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

Besluit: $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$, $c = -2$.

Opdracht 91 bladzijde 219

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van $f: x \mapsto {}^{4}\log(x+2) - 1$ te spiegelen om de rechte met vergelijking $x = 1$.

Bepaal het voorschrift van g.

Verschuif de grafiek van f één eenheid naar links. Je krijgt een grafiek die bij een functie $h: x \mapsto f(x + 1) = {}^{4}\log(x + 3) - 1$ hoort.

Vervolgens spiegel je die grafiek om de y-as. Die grafiek hoort bij

$i: x \mapsto h(-x) = {}^{4}\log(-x + 3) - 1$.

Tot slot verschuiven we de grafiek één eenheid naar rechts:

$g: x \mapsto i(x - 1) = {}^{4}\log(-x + 4) - 1$.

Opdracht 92 bladzijde 219

Stel $f(x) = {}^{2}\log({}^{3}\log x) - {}^{3}\log({}^{2}\log x)$ voor alle reële getallen $x \geqslant 3$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

A $f(x) > 0$ voor alle $x \geqslant 3$

B $f(x) < 0$ voor alle $x \geqslant 3$

C $f(x) = 0$ voor alle $x \geqslant 3$

D $f(x) = 0$ voor exact één waarde $x \geqslant 3$

E geen van de vorige is waar

Los op zonder rekentoestel.

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 1998)

We herschrijven f(x) door alle logaritmen naar grondtal 2 te herleiden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= {}^{2}\log({}^{3}\log x) - {}^{3}\log({}^{2}\log x) \\
&= {}^{2}\log\left(\frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 3}\right) - \frac{{}^{2}\log({}^{2}\log x)}{{}^{2}\log 3} \\
&= {}^{2}\log({}^{2}\log x) - {}^{2}\log({}^{2}\log 3) - \frac{1}{{}^{2}\log 3}\;{}^{2}\log({}^{2}\log x) \\
&= \left(1 - \frac{1}{{}^{2}\log 3}\right) \cdot {}^{2}\log({}^{2}\log x) - {}^{2}\log({}^{2}\log 3)
\end{aligned}
$$

Er geldt:

- $^2\log 3 > 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{^2\log 3} > 0$ (1)
- $^2\log x$ neemt toe voor toenemende x en dus neemt ook $^2\log(^2\log x)$ voortdurend toe voor toenemende x. (2)
- Uit (1) & (2) volgt dat f stijgend is. (3)
- Op de rand van het domein geldt
  $f(3) = {}^2\log(^3\log 3) - {}^3\log(^2\log 3)$
  $= {}^2\log 1 - {}^3\log(^2\log 3)$
  $= -{}^3\log(^2\log 3) < 0$ (want $^2\log 3 > 1$) (4)
- Als $x \to +\infty$ zal $^2\log x \to +\infty$ en dus zal ook (5)
  $^2\log(^2\log x) \to +\infty$.

Besluit: uit (3), (4) en (5) volgt dat $f(x)$ toeneemt van $-{}^3\log(^2\log 3) < 0$ tot $+\infty$, zodat antwoord D het correcte antwoord is.

Opdracht 93 bladzijde 220

Los de volgende vergelijkingen op en rond af indien nodig op twee cijfers na de komma.

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 8 \quad \Leftrightarrow 3x = {}^{\frac{1}{2}}\log 8$
$\Leftrightarrow 3x = -3$
$\Leftrightarrow x = -1$

2 $10^{x-1} = 0{,}01 \quad \Leftrightarrow x - 1 = \log 0{,}01$
$\Leftrightarrow x - 1 = -2$
$\Leftrightarrow x = -1$

3 $3^x = 11 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^3\log 11 \ (\approx 2{,}18)$

4 $\left(\frac{1}{3}\right)^{t} = 5 \quad \Leftrightarrow t = {}^{\frac{1}{3}}\log 5 \ (\approx -1{,}46)$

5 $2^{x+3} = 16^{x-3} \quad \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^{4(x-3)}$
$\Leftrightarrow x + 3 = 4x - 12$
$\Leftrightarrow x = 5$

6 $2^{2x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} \quad \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{-\frac{1}{2}x}$
$\Leftrightarrow 2x - 2 = -\frac{1}{2}x$
$\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

7 $\left(\frac{12}{7}\right)^y - \frac{3}{25} = 0$ $\quad \Leftrightarrow \left(\frac{12}{7}\right)^y = \frac{3}{25}$

$$\Leftrightarrow y = {}^{\frac{12}{7}}\log \frac{3}{25} \; (\approx -3{,}93)$$

8 $27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{4x-1} = (\sqrt{3})^x$ $\quad \Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{-2(4x-1)} = 3^{\frac{1}{2}x}$

$$\Leftrightarrow 3 - 8x + 2 = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{17}$$

9 $9 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 3^x$ $\quad \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \frac{3^x}{9}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 3^{x-2}$$

$$(\Leftrightarrow (x-2)\log\frac{2}{5} = (x-2)\log 3)$$

$$(\Leftrightarrow (x-2)\left(\log\frac{2}{5} - \log 3\right) = 0)$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$a^x = b^x$ met $a \neq b$
$\Leftrightarrow x = 0$

10 $3^{4x+5} = 5^{x-1}$ $\quad \Leftrightarrow (4x+5)\log 3 = (x-1)\log 5$

$$\Leftrightarrow (4\log 3 - \log 5)\,x = -\log 5 - 5\log 3$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\log 5 + 5\log 3}{4\log 3 - \log 5} \; (\approx -2{,}55)$$

Opdracht 94 bladzijde 220

Bereken x als

1 ${}^5\log(2x-5) = 0$

$${}^5\log(2x-5) = 0 \qquad \text{BVW: } 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

2 $^{3}\log(x^2-1)=-1$

$^{3}\log(x^2 - 1) = -1$ BVW: $x^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3^{-1}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3 $\log(x^2-5)-\log(5x-11)=0$

$\log(x^2 - 5) - \log(5x - 11) = 0$ BVW: $x^2 - 5 > 0$
$5x - 11 > 0$

$\Leftrightarrow \log(x^2 - 5) = \log(5x - 11)$

$\Leftrightarrow x^2 - 5 = 5x - 11$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 2}$ of $x = 3$ (x = 2 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

4 $^{2}\log(2x+3)+{}^{2}\log(x-1)={}^{2}\log(x^2+9)$

$^{2}\log(2x + 3) + {}^{2}\log(x - 1) = {}^{2}\log(x^2 + 9)$ BVW: $2x + 3 > 0$
$x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log((2x + 3)(x - 1)) = {}^{2}\log(x^2 + 9)$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(x - 1) = x^2 + 9$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = -4}$ of $x = 3$ (x = -4 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

5 $^{3}\log(x+2)+{}^{3}\log(3x+14)=1$

$^{3}\log(x + 2) + {}^{3}\log(3x + 14) = 1$ BVW: $x + 2 > 0$
$3x + 14 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log((x + 2)(3x + 14)) = {}^{3}\log 3$

$\Leftrightarrow (x + 2)(3x + 14) = 3$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = -5}$ of $x = -\frac{5}{3}$ (x = -5 voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

6 ${}^{2}\log({}^{7}\log x) = -1$

$${}^{2}\log\ ({}^{7}\log\ x) = -1 \qquad \text{BVW: } x > 0$$
$$\Leftrightarrow {}^{7}\log\ x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

7 ${}^{16}\log({}^{5}\log x) = \frac{1}{4}$

$${}^{16}\log\ ({}^{5}\log\ x) = \frac{1}{4} \qquad \text{BVW: } x > 0$$
$$\Leftrightarrow {}^{5}\log\ x = 16^{\frac{1}{4}} = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 5^{2} = 25$$

8 ${}^{4}\log({}^{x}\log 5) = -1$

$${}^{4}\log\ ({}^{x}\log\ 5) = -1 \qquad \text{BVW: } x > 0 \text{ en } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow {}^{x}\log\ 5 = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} = 5$$
$$\Leftrightarrow x = 5^{4} = 625$$

9 ${}^{2}\log x = {}^{3}\log x$

$${}^{2}\log\ x = {}^{3}\log\ x \qquad \text{BVW: } x > 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

10 ${}^{4}\log x = {}^{x}\log 4$

$${}^{4}\log\ x = {}^{x}\log\ 4 \qquad \text{BVW: } x > 0 \text{ en } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow {}^{4}\log\ x = \frac{{}^{4}\log\ 4}{{}^{4}\log\ x}$$
$$\Leftrightarrow ({}^{4}\log\ x)^{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow {}^{4}\log\ x = 1 \quad \text{of} \quad {}^{4}\log\ x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{4}$$

Opdracht 95 bladzijde 221

Wat zijn de oplossingen van de vergelijking ${}^{6}\log(x-3)+{}^{6}\log(x+2)-{}^{6}\log 6=0$?

A er zijn geen oplossingen

B $x=4$

C $x=4$ en $x=-3$

D $x=-4$ en $x=3$

(Bron © toelatingsproef arts-tandarts)

${}^{6}\log(x-3)+{}^{6}\log(x+2)-{}^{6}\log 6=0$

BVW : $x-3>0$
$x+2>0$

$\Leftrightarrow {}^{6}\log((x-3)(x+2))={}^{6}\log 6$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)=6$

$\Leftrightarrow x^2-x-12=0$

$\Leftrightarrow x=4$ of $\cancel{x=-3}$

($x=-3$ voldoet niet aan de bestaansvoorwaarden)

Antwoord B is correct.

Opdracht 96 bladzijde 221

Los op.

1 $3^{x+1}<\frac{1}{81}$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}<3^{-4}$

$\Leftrightarrow x+1<-4$

$\Leftrightarrow x<-5$

2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2^{-\frac{x}{2}}\geqslant 2^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x\leqslant 3$

3 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x+1}>\left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}>\left(\frac{5}{2}\right)^{4x}$

$\Leftrightarrow x-1>4x$

$\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$

4 $4^{x+3}>\left(\frac{1}{16}\right)^{x}$

$\Leftrightarrow 4^{x+3}>4^{-2x}$

$\Leftrightarrow x+3>-2x$

$\Leftrightarrow x>-1$

5 $\sqrt{7^x} > \dfrac{1}{49}$ $\Leftrightarrow 7^{\frac{x}{2}} > 7^{-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} > -2$

$\Leftrightarrow x > -4$

6 ${}^4\log(x-1) < -3$ BVW: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\Leftrightarrow {}^4\log(x-1) < {}^4\log 4^{-3}$

$\Leftrightarrow x - 1 < \dfrac{1}{64}$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{65}{64}$

Rekening houdend met de bestaansvoorwaarde zijn de oplossingen:

$1 < x < \dfrac{65}{64}$

7 ${}^{\frac{1}{2}}\log(2x+1) > 1$ BVW: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log(2x+1) > {}^{\frac{1}{2}}\log\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 < \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{4}$

Rekening houdend met de bestaansvoorwaarde zijn de oplossingen:

$-\dfrac{1}{2} < x < -\dfrac{1}{4}$

8 ${}^5\log x^3 \leqslant 4$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^5\log x^3 \leqslant {}^5\log 5^4$

$\Leftrightarrow x^3 \leqslant 5^4$

$\Leftrightarrow x \leqslant 5^{\frac{4}{3}}$

De oplossingen zijn: $0 < x \leqslant 5^{\frac{4}{3}}$

9 $^{2}\log \frac{1}{x} \geqslant \frac{3}{4}$

BVW: $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log \frac{1}{x} \geqslant {}^{2}\log 2^{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant 2^{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$

De oplossingen zijn : $0 < x \leqslant 2^{-\frac{3}{4}}$

10 $^{0,99}\log (x^2 + 2) < {}^{0,99}\log (3x)$

BVW: $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2 > 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

x		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	−	0	+

$\Leftrightarrow x < 1$ of $x > 2$

De oplossingen zijn : $0 < x < 1$ of $x > 2$

Opdracht 97 bladzijde 221

Bij een kernramp is een hoeveelheid jodium 131 vrijgekomen. De radioactieve neerslag heeft een in de buurt gelegen weide besmet. Metingen wijzen uit dat de toegestane hoeveelheid becquerel 10 maal overschreden is (1 becquerel is 1 straling per seconde).

Hoeveel dagen moet men het vee uit de weide houden, als je weet dat de halveringstijd van jodium 131 gelijk is aan 8 dagen?

De groeifactor per 8 dagen is $\frac{1}{2} \Rightarrow$ per dag : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$

De evolutie van de hoeveelheid becquerel y in functie van de tijd t in dagen wordt beschreven door de formule $y = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, met b de beginhoeveelheid.

We zoeken t waarvoor $y = \frac{b}{10}$:

$$b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{b}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow t = 8 \cdot {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{10} \approx 26,6$$

Na 27 dagen zal de hoeveelheid becquerel opnieuw onder de toegestane waarde zitten.

Opdracht 98 bladzijde 221

De wereldwijde uitstoot van broeikasgassen uit fossiele brandstof nam van 2000 tot 2006 met 20 procent toe, tot een record van 8,38 miljard ton in 2006.

1 Bereken de jaarlijkse procentuele toename van de broeikasgassen.

Groeifactor per 6 jaar: 1,2

$\Rightarrow$ per jaar: $1{,}2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}0309$

De jaarlijkse procentuele groei bedraagt 3,09%.

2 Stel een formule op die de jaarlijkse uitstoot *y* (in miljard ton) berekent in functie van de tijd *t* (in jaren vanaf 2006), als je exponentiële groei veronderstelt.

$y = 8{,}38 \cdot 1{,}2^{\frac{t}{6}}$

3 Stel dat deze trend zich doorzet, in welk jaar zal de uitstoot dan 20 miljard ton bedragen?

$$y = 20 \Leftrightarrow 8{,}38 \cdot 1{,}2^{\frac{t}{6}} = 20$$
$$\Leftrightarrow t = 6 \cdot {}^{1,2}\log \frac{20}{8{,}38}$$
$$\Leftrightarrow t \approx 28{,}6$$

In 2035 zal de uitstoot minstens 20 miljard ton bedragen.

4 Bereken de verdubbelingstijd in jaren.

$b \cdot 1{,}2^{\frac{t}{6}} = 2b \Leftrightarrow 1{,}2^{\frac{t}{6}} = 2 \Leftrightarrow t = 6 \cdot {}^{1,2}\log 2 \approx 22{,}81$

De verdubbelingstijd is 22,81 jaar.

Opdracht 99 bladzijde 222

Het RIZIV (Rijksinstituut voor ziekte- en invaliditeitsverzekering) gaf in 2004 een bedrag van 91,7 miljoen euro uit voor geneesmiddelen van kinderen en jongeren onder de 20 jaar. In 2009 was dat 146,3 miljoen euro.

(Bron: Het Laatste Nieuws, 19 mei 2011)

1 Wat is de groeifactor en procentuele groei voor de periode 2004-2009?

Groeifactor: $\dfrac{146{,}3 \cdot 10^6}{91{,}7 \cdot 10^6} \approx 1{,}5954 \Rightarrow$ procentuele groei: 59,54%

2 Stel dat de procentuele jaarlijkse toename van de uitgaven nagenoeg constant is. Wat zou dan de procentuele toename per jaar zijn?

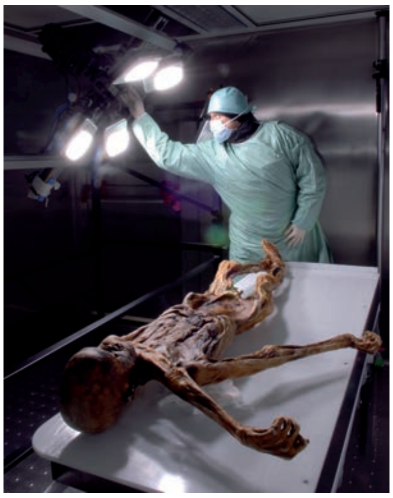
Per jaar: groeifactor: $1{,}5954^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}0979 \Rightarrow$ procentuele groei: 9,79%

3 Indien de jaarlijkse procentuele toename constant is, wanneer zal het RIZIV dan wellicht de kaap van de 200 miljoen euro bereiken?

$146{,}3 \cdot 1{,}0979^t = 200 \Leftrightarrow t = {}^{1,0979}\log \dfrac{200}{146{,}3} \approx 3{,}35$

Aangezien t = 0 overeenkomt met 2009, zal in 2013 de kaap van 200 miljoen euro voor het eerst overschreden worden.

Opdracht 100 bladzijde 222



In 1991 ontdekten enkele bergwandelaars in de Alpen een gemummificeerd lijk. Uit onderzoek bleek dat deze 'ijsman van de Alpen', die later Ötzi werd gedoopt, al duizenden jaren oud was.

Via de koolstof 14-methode ontdekte men dat de concentratie ^{14}C in het lichaam ongeveer 53% bedroeg van de concentratie in levende organismen.

De ^{14}C-concentratie c evolueert volgens het voorschrift $c(t) = c_0 \cdot 0{,}99988^t$ met c_0 de beginconcentratie, m.a.w. de concentratie in levende organismen en t in jaren vanaf het afsterven.

Gebruik deze gegevens om te schatten wanneer Ötzi ongeveer leefde.

$c(t) = 0{,}53 \cdot c_0 \Leftrightarrow c_0 \cdot 0{,}99988^t = 0{,}53\ c_0$

$\Leftrightarrow t = {}^{0{,}99988}\log 0{,}53 \approx 5290$

Ötzi leefde rond 3300 vóór Christus.

Opdracht 101 bladzijde 222

In een grot in Lascaux (Frankrijk), waar beroemde grotschilderingen zijn aangetroffen, vond men restanten van houtskool. Dit bevatte nog ongeveer 14 % van de koolstof 14 die men in levend hout aantreft.

Schat de ouderdom van de houtskool op honderd jaar nauwkeurig. Gebruik hiertoe de formule uit de vorige opdracht.

$c(t) = 0{,}14 \cdot c_0 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}99988}\log 0{,}14 \approx 16383$

De houtskool is ongeveer 16400 jaar oud.

Opdracht 102 bladzijde 223

Los de volgende exponentiële vergelijkingen op.

1 $3^{\sqrt{x}+1} = 3^{x-5}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = x - 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 6$

$\Leftrightarrow x = (x-6)^2$ KVW: $x - 6 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 4}$ of $x = 9$ (x = 4 voldoet niet aan de kwadrateringsvoorwaarde)

2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x^3-10x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x^3+10x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 12 = -x^3 + 10x$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 10x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ of $x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ of $x = 1 \pm \sqrt{5}$

3 $15 \cdot 3^{x+1} - 243 \cdot 5^{x-2} = 0$ $\Leftrightarrow 5 \cdot 3 \cdot 3^{x+1} = 3^5 \cdot 5^{x-2}$

$\Leftrightarrow 3^{x-3} = 5^{x-3}$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

4 $2 \cdot 10^{2x-1} - 3 \cdot 5^{3x+1} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 10^{2x-1} = 3 \cdot 5^{3x+1}$

$\Leftrightarrow \log 2 + 2x - 1 = \log 3 + (3x+1) \cdot \log 5$

$\Leftrightarrow (2 - 3\log 5)\,x = \log 3 + \log 5 - \log 2 + 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{2}}{\log \frac{100}{5^3}} = \frac{\log 75}{\log \frac{4}{5}} = {}^{\frac{4}{5}}\log 75$$

5 $7^{2x} - 9 \cdot 7^x + 14 = 0$ $\Leftrightarrow y^2 - 9 \cdot y + 14 = 0$ met $y = 7^x$

$\Leftrightarrow y = 2$ of $y = 7$

$\Leftrightarrow 7^x = 2$ of $7^x = 7$

$\Leftrightarrow x = {}^7\log 2$ of $x = 1$

6 $4^{x+1} = 6 + 10 \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x - 6 = 0$ vierkantsvergelijking in 2^x

$\Leftrightarrow 2^x = 3$ of $\cancel{2^x = -\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x = {}^2\log 3$

7 $5^{-2x+1} - 29 \cdot 5^{-x} + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 5 \cdot (5^{-x})^2 - 29 \cdot 5^{-x} + 20 = 0$ vierkantsvergelijking in 5^{-x}

$\Leftrightarrow 5^{-x} = 5$ of $5^{-x} = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow x = -1$ of $x = -{}^5\log \frac{4}{5} = {}^5\log \frac{5}{4}$

8 $8^x = 5 \cdot 4^x + 6 \cdot 2^{x+2}$ $\Leftrightarrow (2^x)^3 - 5 \cdot (2^x)^2 - 24 \cdot 2^x = 0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2^x = -3}$ of $2^x = 8$

$\Leftrightarrow x = 3$

9 $\frac{1}{25} \cdot 8^x + 125^x = 4^{1,5x} - 5^{3x+1}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{25} \cdot 2^{3x} + 5^{3x} = 2^{3x} - 5 \cdot 5^{3x}$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 5^{3x} = \frac{24}{25} \cdot 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 25 \cdot 5^{3x} = 4 \cdot 2^{3x}$

$\Leftrightarrow 5^{3x+2} = 2^{3x+2}$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

10 $11 \cdot 6^{1-x} - 8 \cdot 6^{x-1} = 18$ $\Leftrightarrow \frac{11}{y} - 8y = 18$ met $y = 6^{x-1}$

$\Leftrightarrow 8y^2 + 18y - 11 = 0$

$\Leftrightarrow y = -\frac{11}{4}$ of $y = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cancel{6^{x-1} = -\frac{11}{4}}$ of $6^{x-1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = {}^{6}\log \frac{1}{2} + 1 = {}^{6}\log 3$

Opdracht 103 bladzijde 223

Los de volgende logaritmische vergelijkingen op.

1 ${}^{3}\log x \cdot {}^{9}\log x \cdot {}^{81}\log x = 54$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log x \cdot \frac{{}^{3}\log x}{{}^{3}\log 9} \cdot \frac{{}^{3}\log x}{{}^{3}\log 81} = 54$

$\Leftrightarrow ({}^{3}\log x)^3 = 54 \cdot 2 \cdot 4$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log x = 6 \cdot \sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow x = 3^{6\sqrt[3]{2}}$

2 $^{\frac{1}{3}}\log\left(^{\frac{1}{x}}\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ BVW: $\frac{1}{x} > 0$ en $\frac{1}{x} \neq 1$

$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{x}}\log \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3$

$\Leftrightarrow x = 3^{\sqrt{3}}$

3 $^{5}\log(5^{x}-7)-{}^{25}\log 324=2-x$ BVW: $5^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{5}\log(5^x - 7) + {}^{5}\log 5^x = \frac{^{5}\log 324}{^{5}\log 25} + {}^{5}\log 5^2$

$\Leftrightarrow {}^{5}\log((5^x - 7)\cdot 5^x) = {}^{5}\log(18 \cdot 25)$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 7 \cdot 5^x - 450 = 0$

$\Leftrightarrow 5^x = 25$ of $\cancel{5^x = -18}$

$\Leftrightarrow x = 2$

4 $^{3}\log(x-3)=\frac{1}{2\cdot {}^{2}\log 3}+{}^{81}\log(3x-13)^2$ BVW: $x - 3 > 0$
$3x - 13 \neq 0$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log(x-3) = \frac{1}{2}\cdot {}^{3}\log 2 + \frac{1}{4}\, {}^{3}\log\left(\left(3x-13\right)^2\right)$

$\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3x-13}$ of $x - 3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13-3x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2(3x - 13)$ of $x^2 - 6x + 9 = 2(13 - 3x)$ KVW: $x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$ of $x^2 = 17$

$\Leftrightarrow x = 5$ of $x = 7$ of $\cancel{x = -\sqrt{17}}$ of $x = \sqrt{17}$

5 $x - 2 + {}^{2}\log(2^x - 3) = {}^{4}\log 49$ BVW: $2^x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{2}\log 2^x + {}^{2}\log(2^x - 3) = \frac{1}{2}\,{}^{2}\log 49 + {}^{2}\log 2^2$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 28 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2^x = -4}$ of $2^x = 7$

$\Leftrightarrow x = {}^{2}\log 7$

6 ${}^{x}\log(3x - 4) = 2$ BVW: $3x - 4 > 0$
$x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 3x - 4$

geen oplossingen ($D < 0$)

7 ${}^{x-1}\log(5x - 9) = 2$ BVW: $x - 1 > 0$ en $x - 1 \neq 1$
$5x - 9 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5x - 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5x - 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 2}$ of $x = 5$

8 ${}^{x}\log(x^2 - 2x + 2) = 1$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$
$x^2 - 2x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x = 1}$ of $x = 2$

9 ${}^{4}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 3 \cdot {}^{2}\log x + {}^{8}\log(x^3)$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 3 \cdot {}^{2}\log x + \frac{1}{3}\,{}^{2}\log x^3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x \cdot {}^{x}\log 7 = 4 \cdot {}^{2}\log x$

$\Leftrightarrow {}^{x}\log 7 = 8$

$\Leftrightarrow x^8 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[8]{7}$

10 $\frac{1}{{}^{x+6}\log x} + {}^{x}\log(x - 1) = 2 + \frac{1}{{}^{2}\log x}$ BVW: $x + 6 > 0$ en $x + 6 \neq 1$
$x > 0$ en $x \neq 1$
$x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow {}^{x}\log(x + 6) + {}^{x}\log(x - 1) = {}^{x}\log x^2 + {}^{x}\log 2$

$\Leftrightarrow (x + 6)(x - 1) = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ of $x = 3$

Opdracht 104 bladzijde 223

Los de volgende stelsels op.

1 $\begin{cases} 5^x \cdot {}^3\log y = 2 \\ 5^{x+1} + {}^3\log y = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x\,(11 - 5^{x+1}) = 2 \\ {}^3\log y = 11 - 5^{x+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot (5^x)^2 + 11 \cdot 5^x - 2 = 0 \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot 5^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = \dfrac{1}{5} \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot \dfrac{1}{5} \end{cases}$ of $\begin{cases} 5^x = 2 \\ {}^3\log y = 11 - 5 \cdot 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3^{10} \end{cases}$ of $\begin{cases} x = {}^5\log 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3\log x - \log y = \log 1024 \\ 2\log x - \log y^3 = 2\log 2 \end{cases}$ BVW: $x > 0$ en $y > 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ {}^2\log x - {}^2\log y = {}^2\log 1024 \\ 2 \cdot {}^2\log x - 3 \cdot {}^2\log y = {}^2\log 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v = 10 \\ 2u - 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^2\log x = 4 \\ {}^2\log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}$

Opdracht 105 bladzijde 224

Los op: $3^{{}^x\log(3x^3)} - 3^{{}^x\log 9x} = 9 - 9^{{}^x\log\sqrt{3}}$ BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow 3^{{}^x\log 3 + 3} - 3^{2 \cdot {}^x\log 3 + 1} = 3^2 - 3^{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^x\log 3}$

$\Leftrightarrow 27\,y - 3 \cdot y^2 = 9 - y$ met $y = 3^{{}^x\log 3}$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 28y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}$ of $y = 9$

$\Leftrightarrow 3^{{}^x\log 3} = \dfrac{1}{3}$ of $3^{{}^x\log 3} = 9$

$\Leftrightarrow {}^x\log 3 = -1$ of ${}^x\log 3 = 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ of $x = \sqrt{3}$

Opdracht 106 bladzijde 224

1 De oplossingen van de exponentiële vergelijking $\left[f(x)\right]^{g(x)} = 1$ vallen uiteen in drie categorieën. Leg uit.

$(f(x))^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$

of $g(x) = 0$ en $f(x) \neq 0$

of $f(x) = -1$ en $g(x)$ is even

2 Los nu de volgende vergelijkingen op.

a $(3x-2)^{2x+3} = 1$

① $3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

② $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ (en dan is $3x - 2 \neq 0$)

③ $3x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ maar dan is de exponent niet even

Oplossingen : $x = 1$ of $x = -\dfrac{3}{2}$

b $(2x-3)^{x^2+2x-15} = 1$

① $2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

② $x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ of $x = 3$ (hiervoor is $2x - 3 \neq 0$)

③ $2x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1$. Hiervoor is de exponent -12.

Oplossingen : $x = -5$ of $x = 1$ of $x = 2$ of $x = 3$

c $(3x^2-5x+1)^{2x^2-8x-10} = 1$

① $3x^2 - 5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{5}{3}$

② $2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x = 5$ ($3x^2 - 5x + 1 \neq 0$)

③ $3x^2 - 5x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = \dfrac{2}{3}$

Voor $x = 1$ is $2x^2 - 8x - 10$ gelijk aan -16

Voor $x = \dfrac{2}{3}$ is $2x^2 - 8x - 10$ gelijk aan $-\dfrac{130}{9}$ maar $(-1)^{-\frac{130}{9}}$ is niet gedefinieerd.

Oplossingen : $x = -1$ of $x = 0$ of $x = 1$ of $x = \dfrac{5}{3}$ of $x = 5$

Opdracht 107 bladzijde 224

1 Los de vergelijking $x^{{}^2\log x} = p\sqrt{2}$ op voor $p = 8$.

$x^{{}^2\log x} = 8\sqrt{2}$ BVW: $x > 0$

$\Leftrightarrow \left(2^{{}^2\log x}\right)^{{}^2\log x} = 2^{\frac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow \left({}^2\log x\right)^2 = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow {}^2\log x = \sqrt{\frac{7}{2}}$ of ${}^2\log x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow x = 2^{\sqrt{\frac{7}{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{14}}{2}}$ of $x = 2^{-\sqrt{\frac{7}{2}}} = 2^{-\frac{\sqrt{14}}{2}}$

2 Voor welke waarden van p heeft de bovenstaande vergelijking minstens één oplossing?

$x^{{}^2\log x} = p\sqrt{2} \Leftrightarrow ({}^2\log x)^2 = {}^2\log p + \frac{1}{2}$

Deze vergelijking heeft maar oplossingen wanneer

${}^2\log p + \frac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow {}^2\log p \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow {}^2\log p \geqslant {}^2\log \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

Opdracht 108 bladzijde 225

iPad knabbelt aan pc-verkoop

De wereldwijde pc-verkoop zal dit jaar stijgen, maar minder dan verwacht. De schuldigen zijn de iPad en andere tablet-pc's. Voor 2010 voorspelt analistenbureau Gartner dat er 352,4 miljoen computers verkocht zullen worden. Dat is een puik cijfer, dat 14,3 procent hoger ligt dan vorig jaar. Toch was de verwachting in september nog hoger, met een groei van 17,9 procent.

(Bron © ZDNet België, 30 november 2010)

1 Hoeveel computers werden er wereldwijd in 2009 verkocht?

$x \cdot 1{,}143 = 352{,}4 \Leftrightarrow x = 308{,}3$

In 2009 werden ongeveer 308,3 miljoen computers verkocht.

2 Stel dat de verwachte groei van 17,9 % ten opzichte van 2009 was uitgekomen. Hoeveel computers zouden er dan in 2010 verkocht zijn?

$308{,}3 \cdot 1{,}179 = 363{,}5$

Er zouden dan ongeveer 363,5 miljoen computers verkocht zijn.

3 Als de computerverkoop jaarlijks blijft groeien met 14,3 %, hoeveel computers zullen er dan dit jaar verkocht worden?

/

Opdracht 109 bladzijde 225

Bereken zonder rekentoestel.

1 $^{64}\log 16 = \frac{2}{3}$

2 $^{27}\log \frac{1}{9} = \frac{-2}{3}$

3 $^{2}\log(^{2}\log 256) = {}^{2}\log(8) = 3$

4 $\log(\log 10) = \log 1 = 0$

5 $^{125}\log 5^{33} = {}^{125}\log (5^{3})^{11} = 11$

6 $\frac{\log 49}{\log 7} = \frac{2\ \log 7}{\log 7} = 2$

7 $^{5}\log 36 \cdot {}^{6}\log 5 = \frac{\log 36}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\log 6} = \frac{2\ \cancel{\log 6}}{\cancel{\log 6}} = 2$

8 $^{5}\log 3 + {}^{\frac{1}{5}}\log 3 = {}^{5}\log 3 + \frac{^{5}\log 3}{^{5}\log \frac{1}{5}} = 0$

9 $\frac{\log(10\sqrt{10})}{\log 0{,}1} = \frac{\frac{3}{2}}{-1} = -\frac{3}{2}$

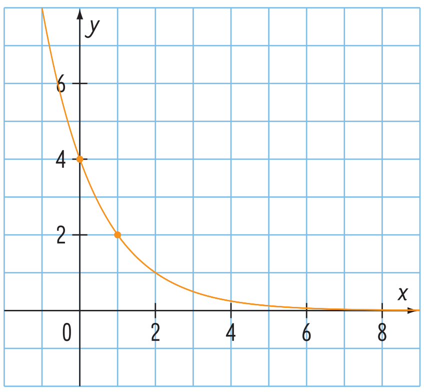
10 $^{2}\log\left[\left(^{9}\log 3\right)^{^{3}\log 9}\right] = {}^{2}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) = 2 \cdot {}^{2}\log 2^{-1} = -2$

Opdracht 110 bladzijde 226

De grafieken hieronder horen bij functies met voorschrift $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot a^{x}$ of $f(x) = {}^{a}\log x$.

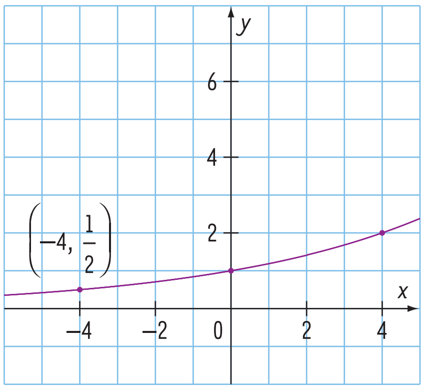
Bepaal het exacte voorschrift.

1



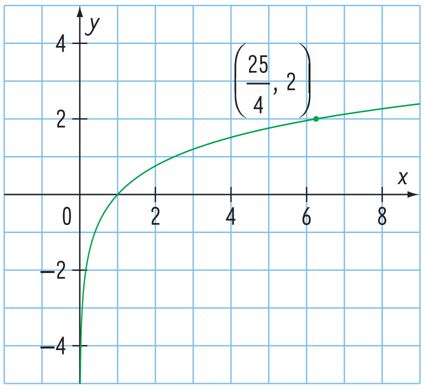
$b \cdot a^{0} = 4 \Leftrightarrow b = 4$ en $4 \cdot a^{1} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

2



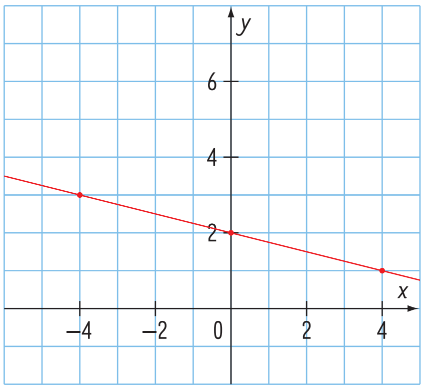
$$b \cdot a^0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \quad \text{en} \quad a^{-4} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[4]{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt[4]{2}^{\,x}$$

3



$$^{a}\log \frac{25}{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{25}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{2} \quad (a > 0) \quad \Rightarrow \quad f(x) = {}^{\frac{5}{2}}\log x$$

4



$$f(x) = 2 - \frac{1}{4}x$$

Opdracht 111 bladzijde 226

De temperatuur T (in °C) van een kop koffie t minuten na het inschenken wordt gegeven door de formule $T = 20 + 55 \cdot 0{,}85^t$.

1 Wat is de temperatuur van de koffie bij het inschenken?

$T(0) = 75$

Bij het inschenken is de temperatuur van de koffie 75°C.

2 Wat is de temperatuur van de koffie 5 minuten na inschenken?

$T(5) \approx 44$

Na vijf minuten is de temperatuur 44°C.

3 De koffie is pas drinkbaar als de temperatuur hoogstens 60 °C is.
Hoeveel minuten en seconden moet je na het inschenken wachten om van de koffie te kunnen drinken?

$$T(t) = 60 \Leftrightarrow 20 + 55 \cdot 0{,}85^t = 60$$
$$\Leftrightarrow t = {}^{0{,}85}\log \frac{40}{55} \approx 1{,}9595$$

Aangezien $0{,}9595 \cdot 60 \approx 58$, geldt dat de temperatuur 60°C bereikt vanaf 1 minuut en 58 seconden na het inschenken.

Opdracht 112 bladzijde 226

Als x, y en z strikt positieve getallen zijn verschillend van 1, toon dan aan dat ${}^{z^2}\log x \cdot {}^{x^2}\log y \cdot {}^{y^2}\log z$ gelijk is aan een constante en bepaal deze constante.

$${}^{z^2}\log x \cdot {}^{x^2}\log y \cdot {}^{y^2}\log z = \frac{\cancel{\log x}}{2\cancel{\log z}} \cdot \frac{\cancel{\log y}}{2\cancel{\log x}} \cdot \frac{\cancel{\log z}}{2\cancel{\log y}} = \frac{1}{8}$$

Opdracht 113 bladzijde 226

Toon aan (we veronderstellen dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn).

1 ${}^c\log a \cdot {}^d\log b = {}^c\log b \cdot {}^d\log a$

$${}^c\log a \cdot {}^d\log b = \frac{\log a}{\log c} \cdot \frac{\log b}{\log d} = \frac{\log b}{\log c} \cdot \frac{\log a}{\log d} = {}^c\log b \cdot {}^d\log a$$

2 $^{\frac{1}{p}}\log \frac{1}{q} \cdot {}^{q}\log p \cdot {}^{s}\log r = \dfrac{^{p}\log r + {}^{q}\log r}{^{p}\log s + {}^{q}\log s}$

$$\frac{^{p}\log r + {}^{q}\log r}{^{p}\log s + {}^{q}\log s} = \frac{\dfrac{\log r}{\log p} + \dfrac{\log r}{\log q}}{\dfrac{\log s}{\log p} + \dfrac{\log s}{\log q}}$$

$$= \frac{\log r\left(\dfrac{1}{\log p} + \dfrac{1}{\log q}\right)}{\log s\left(\dfrac{1}{\log p} + \dfrac{1}{\log q}\right)}$$

$$= \frac{\log r}{\log s}$$

$$= {}^{s}\log r$$

$$= {}^{s}\log r \cdot \frac{\log p}{\log q} \cdot \frac{\log q}{\log p}$$

$$= {}^{s}\log r \cdot {}^{q}\log p \cdot \frac{\log \frac{1}{q}}{\log \frac{1}{p}}$$

$$= {}^{s}\log r \cdot {}^{q}\log p \cdot {}^{\frac{1}{p}}\log \frac{1}{q}$$

Opdracht 114 bladzijde 227

De sterkte van het geluid dat we horen, noemen we het geluidsniveau N. Dit wordt uitgedrukt in decibel (dB). Om het geluidsniveau te bepalen, wordt de geluidsintensiteit I gemeten in Watt per vierkante meter (W/m^2).

Het geluidsniveau N kun je uit de intensiteit I berekenen met de formule:

$N = 10 \cdot \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ met $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

1 Van het geluid op een rustige dag buiten is de intensiteit I ongeveer $10^{-7}\ W/m^2$.
Bereken het bijbehorende geluidsniveau.

$$N = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50$$

Het geluidsniveau is dan 50 dB.

2 Op diezelfde rustige dag rijdt een bromfiets voorbij. Het geluidsniveau N neemt daardoor toe met 30 dB. Hoe groot is de geluidsintensiteit I op dat ogenblik?

$$N = 80 \quad \Leftrightarrow \quad I = 10^{-4} \text{ (want dan is } \frac{I}{I_0} = 10^{8}\text{)}$$

De geluidsintensiteit is dan $10^{-4}\ \dfrac{W}{m^2}$.

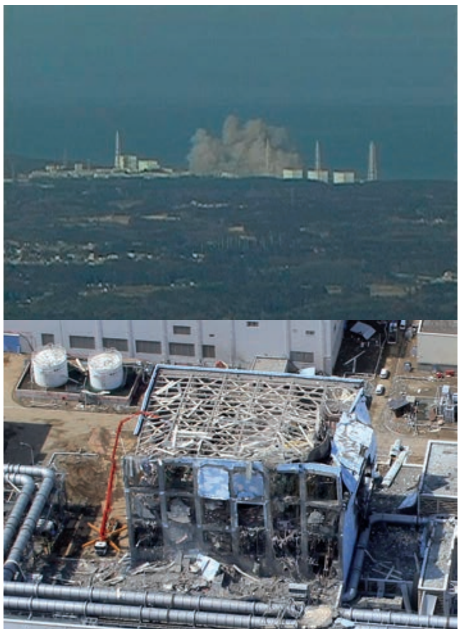
3 Reken na dat telkens wanneer de intensiteit verdubbelt het geluidsniveau met ongeveer 3 dB toeneemt.

$$\begin{aligned} 10 \log \frac{2I}{I_0} &= 10 \left(\log \frac{I}{I_0} + \log 2 \right) \\ &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} + 10 \cdot 0{,}301 \\ &\approx 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} + 3 \end{aligned}$$

4 Stel een formule op voor de geluidsintensiteit in functie van het geluidsniveau.

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{N}{10}}$$

Opdracht 115 bladzijde 227



Op 11 maart 2011 werd Japan getroffen door een hevige aardbeving, gevolgd door een verwoestende tsunami. Dit zorgde voor een hele reeks problemen in de kerncentrale van Fukushima. Op 12 maart werd daar een eerste ontploffing waargenomen en in de weken die daarop volgden, kwam heel wat radioactief materiaal in de lucht en in de zee terecht. Eén van die stoffen is plutonium 239, dat ook in atoombommen wordt gebruikt.

Beschouw een hoeveelheid plutonium 239 met beginmassa m_0. Ten gevolge van radioactieve straling is die massa op elk tijdstip t (in jaren) te berekenen met de formule $m(t) = m_0 \cdot 0{,}999971^t$.

1 Elke radioactieve stof heeft een bepaalde halveringstijd, dit is de tijd nodig opdat van een gegeven beginmassa van die stof slechts de helft zou overblijven. Voor elke radioactieve stof is die halveringstijd verschillend.
Bereken de halveringstijd voor plutonium 239.

$$\begin{aligned} m(t) = \frac{1}{2} m_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cancel{m_0} \cdot 0{,}999971^t = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m_0} \\ &\Leftrightarrow \quad t = {}^{0{,}999971}\log \frac{1}{2} \approx 23901 \end{aligned}$$

De halveringstijd is ongeveer 23900 jaar.

2 Hoe lang duurt het opdat 1 % van de beginmassa vervallen zou zijn?

$$m(t) = 0{,}99\, m_0 \quad \Leftrightarrow \quad t = {}^{0{,}999971}\log 0{,}99 \approx 347$$

Het duurt ongeveer 347 jaar.

Opdracht 116 bladzijde 227

Door welke transformaties kan de grafiek van de functie $f: x \longmapsto {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{x}{4}$ omgevormd worden tot die van $g: x \longmapsto 2^{x+2}$?

$$y = {}^{\frac{1}{2}}\log \frac{x}{4} \quad \left(\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^y \Leftrightarrow x = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 4 \cdot 2^{-y} \right)$$

$\downarrow$ spiegeling om de eerste deellijn

$y = 4 \cdot 2^{-x}$

$\downarrow$ spiegeling om de y-as

$y = 4 \cdot 2^{x} = 2^{x+2} = g(x)$

Opdracht 117 bladzijde 228

In een bosgebied lijden de konijnen aan myxomatose, een virale aandoening met een hoog sterftecijfer. De eerste twee weken van de epidemie sterft per dag 1 konijn op 10. Vanaf de derde week sterven er tot op het einde van de ziekte nog slechts 1 konijn op 20. Na de vijfde week is de epidemie over. Gedurende de epidemie sterven geen konijnen omwille van een andere oorzaak en worden er geen konijnen geboren.

Na een week van epidemie zijn er nog 1521 konijnen in leven.

1 Hoeveel konijnen waren er bij het begin van de ziekte?

Eerste twee weken : aantal konijnen N is $N(t) = b \cdot 0{,}9^t$ met t in dagen.

Uit $N(7) = 1521$ volgt $b \cdot 0{,}9^7 = 1521 \quad \Leftrightarrow \quad b \approx 3180$

Bij het begin van de ziekte waren er 3180 konijnen.

2 Hoeveel van deze konijnen zijn er nog in leven na 3 weken epidemie?

$N(14) = 3180 \cdot 0{,}9^{14}$

Voor $14 < t \leqslant 35$ geldt $N(t) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^{t-14}$ zodat na drie weken geldt : $N(21) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^7 \approx 508$.

Na drie weken zijn er nog 508 konijnen in leven.

3 Hoeveel overleven er de epidemie?

Op het einde is $N(35) = 3180 \cdot 0{,}9^{14} \cdot 0{,}95^{21} \approx 248$.

Zo'n 248 konijnen overleven de epidemie.

Opdracht 118 bladzijde 228

Los het volgende stelsel op: $\begin{cases} (\log x)^2 + \log(xy) = 4 \\ \log x + \log(y^2) = 5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} (\log x)^2 + \log(xy) = 4 \\ \log x + \log(y^2) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log x)^2 + \log x + \log y = 4 \\ \log x + 2\log y = 5 \end{cases} \qquad \text{BVW: } \begin{array}{r} x > 0 \\ y > 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log x)^2 + \log x + \log y = 4 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (25 - 20\log y + 4(\log y)^2) + (5 - 2\log y) + \log y = 4 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(\log y)^2 - 21 \cdot \log y + 26 = 0 \\ \log x = 5 - 2\log y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log y = \dfrac{13}{4} \\ \log x = 5 - 2 \cdot \dfrac{13}{4} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \log y = 2 \\ \log x = 5 - 2 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{-\frac{3}{2}} \\ y = 10^{\frac{13}{4}} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 100 \end{cases}$$

Opdracht 119 bladzijde 228

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op.

1 $3 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^x = 6$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 17 \cdot 3^x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3^x = 6 \quad \text{of} \quad \cancel{3^x = -\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x = {}^3\log 6$$

2 $16^x + 3 \cdot 4^{1-x} = 3 \cdot 2^{2x} + 4$

$$\Leftrightarrow 4^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} = 3 \cdot 4^x + 4$$
$$\Leftrightarrow 4^{3x} + 12 = 3 \cdot 4^{2x} + 4 \cdot 4^x$$
$$\Leftrightarrow y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0 \quad \text{met} \quad y = 4^x$$
$$\Leftrightarrow y^2(y - 3) - 4(y - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 3)(y^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 3 \quad \text{of} \quad y = 2 \quad \text{of} \quad y = -2$$
$$\Leftrightarrow 4^x = 3 \quad \text{of} \quad 4^x = 2 \quad \text{of} \quad \cancel{4^x = -2}$$
$$\Leftrightarrow x = {}^4\log 3 \quad \text{of} \quad x = \frac{1}{2}$$

3 ${}^{6}\log 5 \cdot {}^{5}\log 4 \cdot {}^{4}\log 3 \cdot {}^{3}\log x = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{\log 5}}{\log 6} \cdot \dfrac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}} \cdot \dfrac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}} \cdot \dfrac{\log x}{\cancel{\log 3}} = 2$

$\Leftrightarrow \log x = 2 \log 6$

$\Leftrightarrow x = 36$

4 $4 + {}^{3x}\log 27 + 3 \cdot {}^{27}\log 3x = 0$ — BVW: $3x > 0$ en $3x \neq 1$

$\Leftrightarrow 4 + \dfrac{{}^{27}\log 27}{{}^{27}\log 3x} + 3\ {}^{27}\log 3x = 0$

$\Leftrightarrow 4\ {}^{27}\log 3x + 1 + 3\ ({}^{27}\log 3x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 + 4y + 1 = 0 \quad \text{met} \quad y = {}^{27}\log 3x$

$\Leftrightarrow y = -1 \quad \text{of} \quad y = -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow {}^{27}\log 3x = -1 \quad \text{of} \quad {}^{27}\log 3x = -\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3x = 27^{-1} \quad \text{of} \quad 3x = 27^{-\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{81} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{1}{9}$

5 ${}^{4}\log\sqrt{x^3} = 7 - 3 \cdot {}^{x}\log 16x$ — BVW: $x > 0$ en $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \cdot {}^{4}\log x = 7 - 3 \cdot \dfrac{{}^{4}\log 16 + {}^{4}\log x}{{}^{4}\log x}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot y^2 = 14y - 12 - 6y \quad \text{met} \quad y = {}^{4}\log x$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 12 = 0 \rightarrow \text{geen oplossingen}$

6 ${}^{\sqrt{3}}\log(3^x - 7) + x = 2 - {}^{\frac{1}{3}}\log 4$ — BVW: $3^x - 7 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{{}^{3}\log\left(3^x - 7\right)}{{}^{3}\log\sqrt{3}} + x = 2 - \dfrac{{}^{3}\log 4}{{}^{3}\log \frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow {}^{3}\log(3^x - 7)^2 + {}^{3}\log 3^x = {}^{3}\log 9 + {}^{3}\log 4$

$\Leftrightarrow ((3^x)^2 - 14 \cdot 3^x + 49) \cdot 3^x = 36$

$\Leftrightarrow y^3 - 14y^2 + 49y - 36 = 0 \quad \text{en} \quad y = 3^x$

$\Leftrightarrow (y - 1)(y - 4)(y - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{3^x = 1} \quad \text{of} \quad \cancel{3^x = 4} \quad \text{of} \quad 3^x = 9$

$3^x = 1$ en $3^x = 4$ voldoen niet aan de bestaansvoorwaarde

$\Leftrightarrow x = 2$

7 $2^x - 5 < 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 1$

$\Leftrightarrow 2^x - 4 < 3 \cdot 2^{2-x}$
$\Leftrightarrow 2^x - 4 < 12 \cdot 2^{-x}$
$\Leftrightarrow y^2 - 4y < 12 \quad \text{met} \quad y = 2^x$
$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 12 < 0$
$\Leftrightarrow -2 < y < 6$
$\Leftrightarrow -2 < 2^x < 6$
$\Leftrightarrow 2^x < 6$
$\Leftrightarrow x < {}^2\log 6$

y		-2		6	
$y^2 - 4y - 12$	+	0	−	0	+

8 ${}^2\log x^2 > 8$

BVW: $x \neq 0$

$\Leftrightarrow {}^2\log x^2 > {}^2\log 2^8$
$\Leftrightarrow x^2 > 256$
$\Leftrightarrow x^2 - 256 > 0$
$\Leftrightarrow x < -16 \quad \text{of} \quad x > 16$

Opdracht 120 bladzijde 228

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x} = 1$?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2011)

$$\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x} = 1$$

(1) $\frac{2x^2-5}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2$

(2) $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = 2$

(3) $\frac{2x^2-5}{3} = -1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{of} \quad x = -1$

Als $x = 1$, is $x^2 - 2x$ gelijk aan -1: oneven

Als $x = -1$, is $x^2 - 2x$ gelijk aan 3: oneven

Er zijn 3 verschillende oplossingen: antwoord D

Opdracht 121 bladzijde 228

Als $f(n) = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot {}^{4}\log 5 \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\log n$, met n een natuurlijk getal groter dan 2, bereken dan $\sum_{k=3}^{100} f(2^k)$.

$$f(n) = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\log n$$

$$= \frac{\cancel{\log 3}}{\log 2} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\log n}{\cancel{\log(n-1)}}$$

$$= \frac{\log n}{\log 2}$$

$$\sum_{k=3}^{100} f\left(2^k\right) = \sum_{k=3}^{100} \frac{\log\left(2^k\right)}{\log 2} = \sum_{k=3}^{100} \frac{k \cdot \cancel{\log 2}}{\cancel{\log 2}} = 98 \cdot \frac{3+100}{2} = 5047$$

Hersenbrekers 1 bladzijde 229

Een draak met 99 koppen en 99 staarten bewaakt een prinses. Een prins wil haar heldhaftig bevrijden en daarbij kan hij bij elke slag kiezen of hij ofwel 1 kop, ofwel 2 koppen, ofwel 1 staart ofwel 2 staarten afhakt.
Wanneer hij echter 1 kop afsnijdt, dan groeit deze kop onmiddellijk terug. Wanneer er 1 staart wordt afgehakt, dan komen er 2 staarten in de plaats. Als hij 2 staarten ineens afsnijdt, dan groeit er terstond een extra kop. Als er 2 koppen ineens worden afgehakt, groeit er niets bij. De draak sterft als hij geen kop noch staart overhoudt.

Hoeveel bedraagt het minimaal aantal slagen dat de prins nodig heeft om de draak te doden?

(Bron © Wiskunnend Wiske 2012)

Een mogelijke manier om alle koppen en staarten af te hakken, is de volgende.

Aantal slagen	Welk type slag	Aantal koppen over	Aantal staarten over
49	2 koppen	1	99
48	2 staarten	49	3
24	2 koppen	1	3
3	1 staart	1	6
3	2 staarten	4	0
2	2 koppen	0	0
TOTAAL: 129			

Daarmee is echter nog niet aangetoond dat 129 het kleinste aantal hakbeurten is: misschien kan het op een meer vernuftige manier in minder beurten?

Het is duidelijk dat hoe dan ook alle staarten omgezet moeten worden in koppen, die dan per twee afgehakt moeten worden.

Aangezien dat omzetten van staarten moet resulteren in een totaal aantal koppen dat even is, moeten we een oneven aantal koppen, stel $2n + 1$, zien toe te voegen aan de 99 die we bij de start hebben.

Een kop bij maken, gebeurt door twee staarten af te hakken. Er zijn dus $4n + 2$ staarten nodig om die $2n + 1$ koppen bij te maken. Aangezien daarbij alle staarten omgezet moeten zijn, zoeken we de kleinste waarde $4n + 2$ waarvoor $4n + 2 \geqslant 99$. Dit is 102.

Voor een minimaal aantal hakbeurten moeten we bijgevolg eerst 3 staarten bij maken. Dit kan door er 3 keer één af te hakken. Dan zijn er dus 102 staarten. We hakken ze alle 102 in 51 hakbeurten van twee staarten af. Nu zijn er 99 + 51 koppen, die we in 75 hakbeurten van twee koppen weghakken.

Het minimum aantal hakbeurten is dus 3 + 51 + 75 = 129. Met minder lukt het echt niet.

Hersenbrekers 2 bladzijde 229

In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een rijsom is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde 3×3 -magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.

Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

		7
?		
	10	3

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 9

(Bron © NWO eerste ronde 2008)

We noemen de cellen a_{ij} met i het rij- en j het kolomnummer.

Stel $a_{31} = n$. Dan moet $a_{23} = 3 + n$. Om ook op de diagonaal als som $13 + n$ te krijgen, moet $a_{22} = 6$. Daaruit volgt dat $a_{21} = 4$.

Antwoord B is dus correct.

Hoofdstuk 5

Goniometrische functies

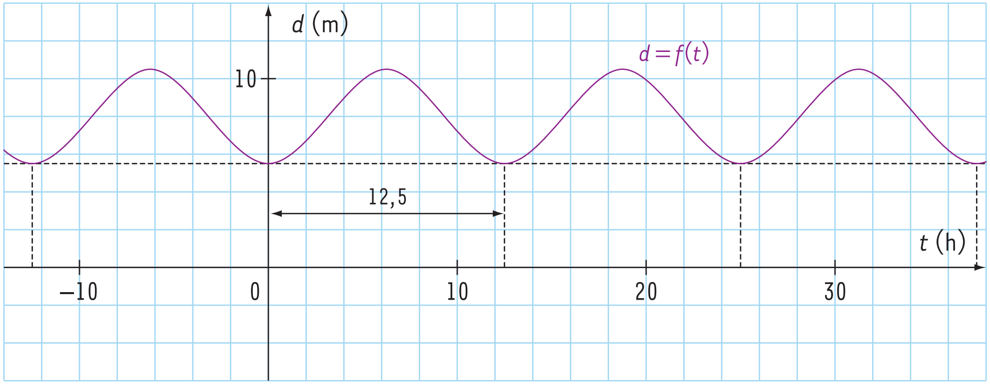
Opdracht 1 bladzijde 232

Een verschijnsel dat zich met vaste regelmaat herhaalt, noemen we een periodiek verschijnsel.
Gekende voorbeelden zijn: eb en vloed, terugkeer van de seizoenen …
Geef zelf enkele andere voorbeelden van periodieke verschijnselen.

dagtemperatuur, daglengte, hartslag, harmonische trilling …

Opdracht 2 bladzijde 232

De diepte van de vaargeul is voor de scheepvaart van groot belang. Door de werking van eb en vloed varieert deze diepte met de tijd. Stel dat de diepte *d* (in meter) van een vaargeul benaderend kan worden voorgesteld door de onderstaande grafiek, waarbij *t* de tijd voorstelt uitgedrukt in uren. De gemiddelde diepte is 8 m, bij vloed is de diepte 10,5 m en bij eb 5,5 m.



Eb en vloed komen meermaals per dag voor. De tijdsspanne tussen twee opeenvolgende tijdstippen van eb (of vloed) is 12,5 u.

1 Op het tijdstip t = 0 is het eb. Geef de andere tijdstippen waarop het eb is.

t = –12,5; 12,5; 25; 37,5; …

$t = k \cdot 12{,}5$ met $k \in \mathbb{Z}$

2 Kies een willekeurig tijdstip t op de horizontale as en kijk naar het bijbehorende punt op de grafiek.

Geef drie getallen a, b en c waarvoor geldt:

$f(t) = f(t+a) = f(t+b) = f(t+c)$

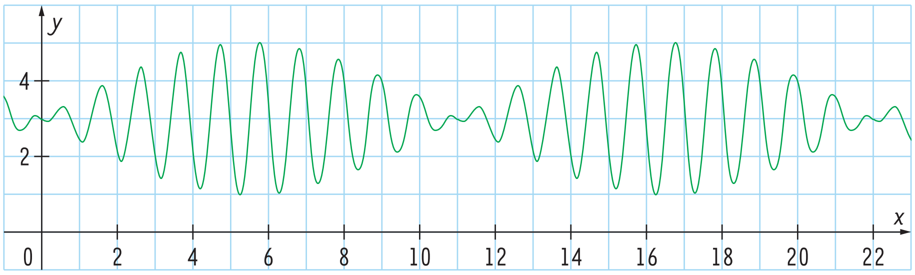
bv. a = 12,5

b = 25

c = 37,5

Opdracht 3 bladzijde 233

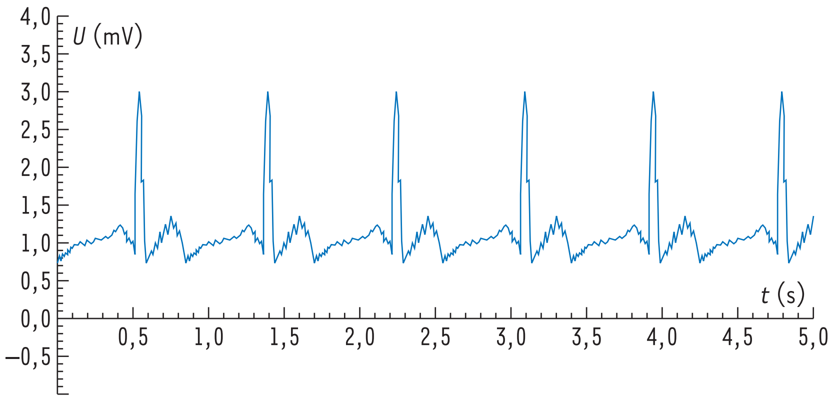
Bepaal de periode p van de volgende periodieke functie.



$p = 11$

Opdracht 4 bladzijde 234

Een elektrocardiogram (ECG) geeft de elektrische activiteit van de hartspier weer. Op de horizontale as staat de tijd t in seconden, op de verticale as de elektrische spanning U in millivolt.



Geef de periode van deze periodieke functie bij benadering.

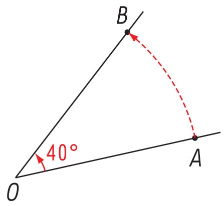
$5p \approx 4{,}3$ s dus $p \approx 0{,}86$ s

Opdracht 5 bladzijde 235

B ontstaat door A te draaien (roteren) om O over 40° in tegenwijzerzin. Dit noteren we als $B = r_{(O,40°)}(A)$.

Vul aan: $A = r_{(O,...)}(B)$.

Geef meerdere oplossingen.



$A = r_{(O,\,-40°)}(B) = r_{(O,320°)}(B) = r_{(O,680°)}(B)\ \ldots$

Opdracht 6 bladzijde 236

Geef drie hoeken die hetzelfde beeldpunt hebben als dat van 100°.

-260°, 460°, 820° ...

Opdracht 7 bladzijde 237

Welke ongelijkheid is fout? Los op zonder rekentoestel.

A $\sin 300° < \sin 350°$

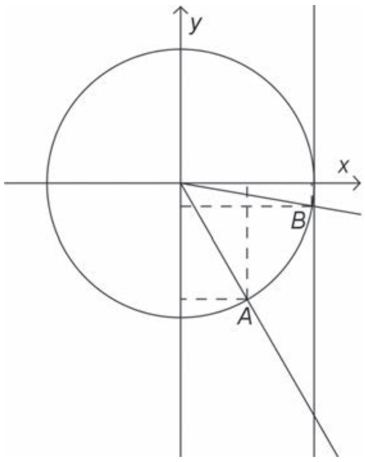
B $\cos 300° < \cos 350°$

C $\sin 300° < \cos 350°$

D $\tan 300° < \tan 350°$

E $\cot 300° < \cot 350°$

(Bron © VWO 1999, tweede ronde)



A is het beeldpunt van 300°

B is het beeldpunt van 350°

A. $\sin 300° < \sin 350°$: klopt

B. $\cos 300° < \cos 350°$: klopt

C. $\sin 300° < \cos 350°$: klopt

D. $\tan 300° < \tan 350°$: klopt

E. $\cot 300° < \cot 350°$: fout → E

Opdracht 8 bladzijde 238

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

2 $\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha$

3 $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

Dit soort gelijkheden noemen we ook **goniometrische identiteiten**.

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

2) $\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$$= \frac{2\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{2\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{1}$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

3) $\dfrac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$

$$= \frac{\cancel{(1-\sin^2\alpha)}\cdot(1+\sin^2\alpha)}{\cancel{\cos^2\alpha}} - 2\sin^2\alpha$$

$$= 1 - \sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha$$

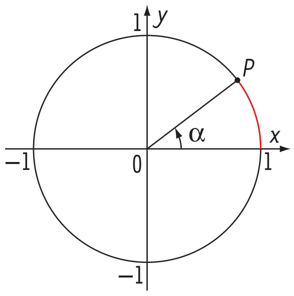
Opdracht 9 bladzijde 239

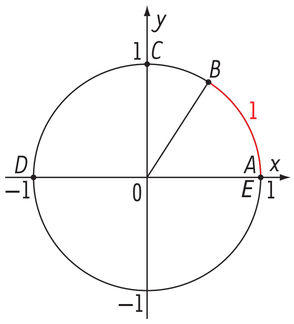
Een hoek α wordt voorgesteld door zijn beeldpunt P.

Met dit beeldpunt correspondeert een cirkelboog.
Cirkelbogen hebben een lengte.

We gaan nu hoeken berekenen op basis van de lengte van de corresponderende cirkelboog.

Vul de tabel aan.





cirkelboog	grootte middelpuntshoek	lengte cirkelboog
volledige cirkel $\overset{\frown}{AE}$	360°	
halve cirkel $\overset{\frown}{AD}$		
kwartcirkel $\overset{\frown}{AC}$		
$\overset{\frown}{AB}$		1

cirkelboog	grootte middelpuntshoek	lengte cirkelboog
volledige cirkel $\overset{\frown}{AE}$	360°	2π
halve cirkel $\overset{\frown}{AD}$	180°	π
kwartcirkel $\overset{\frown}{AC}$	90°	$\dfrac{\pi}{2}$
$\overset{\frown}{AB}$	$\dfrac{180°}{\pi}$	1

Opdracht 10 bladzijde 241

Zet de volgende hoeken om in radialen.

1 0°

0 rad

2 90°

$\frac{\pi}{2}$ rad

3 180°

π rad

4 270°

$\frac{3\pi}{2}$ rad

5 360°

2π rad

6 10°

$\frac{\pi}{180} \cdot 10$ rad $= \frac{\pi}{18}$ rad

7 –45°

$-\frac{\pi}{4}$ rad

8 60°

$\frac{\pi}{3}$ rad

9 –100°

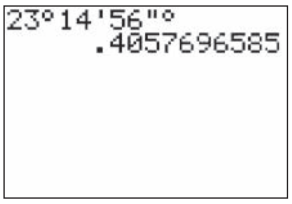
$-\frac{10\pi}{18}$ rad $= -\frac{5\pi}{9}$ rad

10 200°

$\frac{10\pi}{9}$ rad

Opdracht 11 bladzijde 241

Met een grafisch rekentoestel kun je zestigdelige graden rechtstreeks omzetten in radialen. Bekijk het voorbeeld hiernaast, waarbij het rekentoestel in de mode ‘radialen’ staat.



Zet de hoeken om in radialen. Rond af op drie cijfers na de komma.

1 12°34’56”

12°34’56” = 0,220 rad

2 –57°17’45”

–57°17’45” = –1,000 rad

3 400°10’5”

400°10’5” = 6,984 rad

Opdracht 12 bladzijde 242

Zet de volgende hoeken om in zestigdelige graden.

1 $\frac{\pi}{6}$ rad

30°

2 $-\frac{3\pi}{4}$ rad

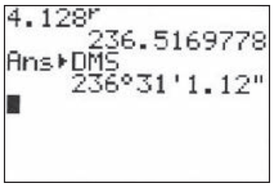
-135°

3 $\frac{5\pi}{3}$ rad

300°

Opdracht 13 bladzijde 242

Met een grafisch rekentoestel kun je radialen rechtstreeks omzetten in zestigdelige graden. Bekijk het voorbeeld hiernaast, waarbij het rekentoestel in de mode 'graden' staat.



Zet de hoeken om in zestigdelige graden.

1 1,5 rad

1,5 rad = 85°56'37"

2 9,425 rad

9,425 rad = 540°0'46"

3 3,1416 rad

3,1416 rad = 180°0'2"

Opdracht 14 bladzijde 242
Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

4 $\cos\frac{5\pi}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{2} = 0$

2 $90°$

$\sin 4\pi = 0$

5 $\tan\frac{\pi}{4}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

3 $\cos\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6 $\tan\frac{7\pi}{3}$

$\tan\frac{7\pi}{3} = \sqrt{3}$

Opdracht 15 bladzijde 242
De punten A en B liggen op de cirkel $c(M,5)$.

Bepaal de lengte van de boog $\overset{\frown}{AB}$ als de middelpuntshoek $A\hat{M}B$ gelijk is aan

1 $\frac{2\pi}{5}$ rad

De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{2\pi}{5} \cdot 5 = 2\pi$

2 2,25 rad

$|\overset{\frown}{AB}| = 2{,}25 \cdot 5 = 11{,}25$

3 $100°$

$A\hat{M}B = 100° = 1{,}7453...$ rad

dus $|\overset{\frown}{AB}| = 1{,}7453... \cdot 5 = 8{,}727$

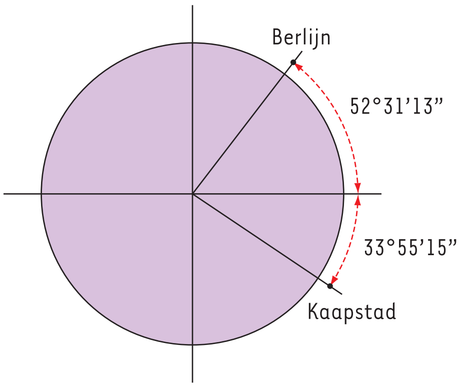
4 43°15'16"

$\widehat{AMB} = 43°15'16" = 0{,}7549...\ \text{rad}$

dus $|\overset{\frown}{AB}| = 0{,}7549... \cdot 5 = 3{,}775$

Opdracht 16 bladzijde 243

Een vliegtuig vliegt van Berlijn naar Kaapstad in vogelvlucht. Beide steden liggen op dezelfde meridiaan.
De noorderbreedte van Berlijn is 52°31'13", de zuiderbreedte van Kaapstad is 33°55'15".
Je mag ervan uitgaan dat de aarde een perfecte bol is met straal 6378 km.
Het vliegtuig vliegt op een hoogte van 10 km.



Hoeveel kilometer bedraagt de vlucht?

- 52°31'13" + 33°55'15" = 86°26'28"
- 86°26'28" = 1,5086... rad
- $1{,}5086... \cdot \underbrace{6388\ \text{km}}_{6378\,+\,10} = 9637{,}461\ \text{km}$

Besluit: De vlucht Berlijn – Kaapstad bedraagt 9637 km.

Opdracht 17 bladzijde 244

Bepaal een hoek a zo dat $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Onderzoek door middel van de goniometrische cirkel of dit de enige oplossing is.

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 18 bladzijde 245

Bepaal alle hoeken α, op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\sin \alpha = 0{,}25$.

$$\sin \alpha = 0{,}25$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = 0{,}253 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = 2{,}889 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 19 bladzijde 245

1 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\sin \alpha = -1$.

$$\sin \alpha = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 20 bladzijde 245

Bepaal een hoek α zo dat $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$. Onderzoek door middel van de goniometrische cirkel of dit de enige oplossing is.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 21 bladzijde 247

Bepaal alle hoeken α, op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\cos \alpha = -0{,}3$.

$$\cos \alpha = -0{,}3$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \pm 1{,}875 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 22 bladzijde 247

1 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\cos \alpha = 0$.

$$\cos \alpha = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 23 bladzijde 247

Gebruik de goniometrische cirkel om alle oplossingen te bepalen van $\tan \alpha = 1$.

$$\tan \alpha = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 24 bladzijde 248

Bepaal alle hoeken α, op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt dat $\tan \alpha = 14$.

$$\tan \alpha = 14$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha = 1{,}499 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 25 bladzijde 248
Bepaal exact alle hoeken α waarvoor geldt dat $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

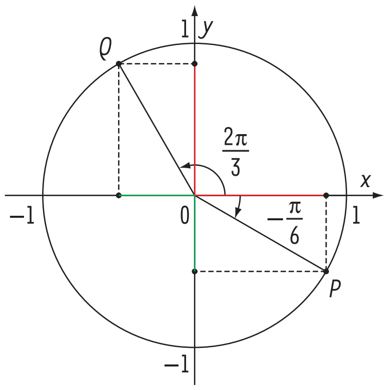
$$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 26 bladzijde 249

P en Q zijn de beeldpunten van $-\frac{\pi}{6}$ en $\frac{2\pi}{3}$.



1 Gebruik de goniometrische cirkel om verbanden te vinden tussen $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\frac{2\pi}{3}$ en $\sin\frac{2\pi}{3}$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

2 Maak gebruik van je rekentoestel om deze verbanden te controleren.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}866 = \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}5 = \cos\frac{2\pi}{3}$$

Opdracht 27 bladzijde 250
Vereenvoudig.

1 $\cos\alpha + \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)$

$$= \cos\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha - \cos\alpha$$

$$= 0$$

2 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)-\cos(5\pi+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)$

$= \sin\alpha\cdot\sin\alpha - (-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$= 1$

3 $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)}$

$= \dfrac{-\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)}$

$= -1$

4 $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cdot\tan(-\alpha)}{\tan\alpha\cdot\sin(3\pi-\alpha)}$

$= \dfrac{-\cos\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$

$= \cot\alpha$

Opdracht 28 bladzijde 250

De hoeken α en $\frac{\pi}{2}+\alpha$ worden **anticomplementaire hoeken** genoemd.

1 Toon aan dat $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$= \sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$= \cos\alpha$

2 Toon aan dat $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

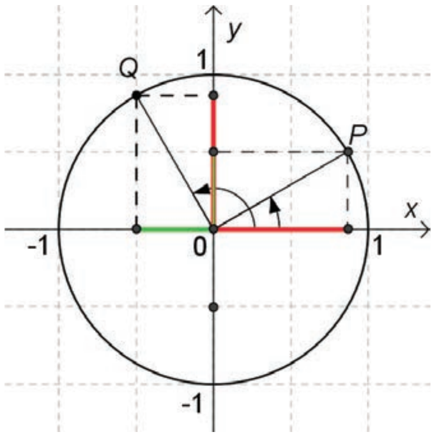
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= -\sin\alpha$$

3 Controleer de bovenstaande formules op de goniometrische cirkel.

P is het beeldpunt van α

Q is het beeldpunt van $\frac{\pi}{2} + \alpha$



Opdracht 29 bladzijde 250

Bepaal alle waarden van α, op 0,001 nauwkeurig, waarvoor geldt:

1 $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \pm 1{,}772 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = 0{,}340 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = 2{,}802 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $\tan\alpha = -2$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = -1{,}107 + k\cdot\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

4 $\cos\alpha = 1{,}3$

valse vergelijking; geen oplossingen

5 $\sin\alpha = -0{,}55$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = -0{,}582 + k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = 3{,}724 + k\cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

6 $\tan\alpha = 0{,}8$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = 0{,}675 + k\cdot\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 30 bladzijde 250

Welke van de volgende uitdrukkingen gelden in elke driehoek met hoeken α, β en γ?

Verklaar de juiste en corrigeer de foute uitdrukkingen.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

1 $\sin\alpha = \sin(2\alpha + \beta + \gamma)$

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha + \beta + \gamma) &= \sin(\pi + \alpha)\\ &= -\sin\alpha\end{aligned}$$

2 $\tan\beta = \tan(2\alpha + \beta + 2\gamma)$

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha + \beta + 2\gamma) &= \tan(2\pi - \beta)\\ &= \tan(-\beta)\\ &= -\tan\beta\end{aligned}$$

3 $\sin\gamma = \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta+3\gamma}{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+3\gamma}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi+2\gamma}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)$$

$$= -\sin\gamma$$

4 $\tan\gamma = \cot\left(\dfrac{3\alpha+3\beta+\gamma}{2}\right)$

$$\cot\left(\frac{3\alpha+3\beta+\gamma}{2}\right)$$

$$= \cot\left(\frac{3\pi-2\gamma}{2}\right)$$

$$= \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\gamma\right)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\gamma\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\gamma\right)}$$

$$= \frac{-\sin\gamma}{-\cos\gamma}$$

$$= \tan\gamma$$

Opdracht 31 bladzijde 255
Is de gegeven functie *f* even, oneven of geen van beide? Verklaar dit.

1 $f: x \mapsto \sin x$

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$: ONEVEN

2 $f: x \mapsto \cos x$

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$: EVEN

3 $f: x \mapsto \tan x$

$f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$: ONEVEN

Opdracht 32 bladzijde 255
Maak een tekentabel van de functie *f* over het gegeven interval.

1 $f: x \mapsto \sin x$ over $[0, 2\pi]$

x	0		π		2π
$\sin x$	0	+	0	−	0

2 $f: x \mapsto \cos x$ over $[0, 2\pi]$

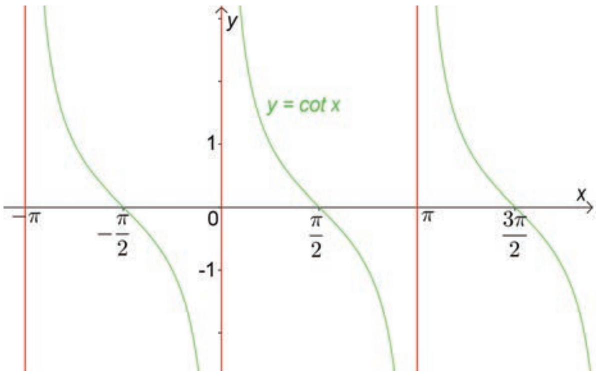
x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	+	+	0	−	0	+	+

3 $f: x \mapsto \tan x$ over $[0, \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\tan x$	0	+	|	−	0

Opdracht 33 bladzijde 255
Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

1 Plot de grafiek van de functie *f*.



2 Bepaal:

a dom f **b** ber f **c** de periode p

a) dom f = $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

b) ber f = $\mathbb{R}$

c) p = π

3 Wat zijn de nulpunten van f?

$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

4 Heeft deze functie asymptoten? Zo ja, geef de bijbehorende vergelijkingen.

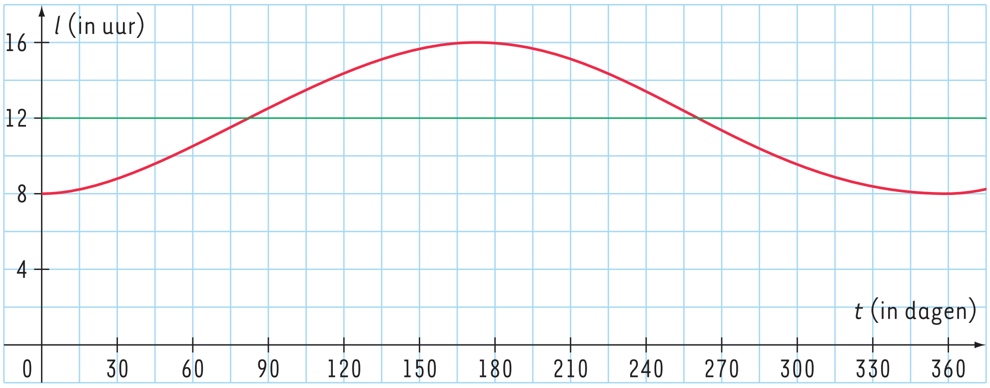
V.A.: $x = k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

5 Geef het verloopschema in $[0, \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cot x$	|	↘	0	↘	|

Opdracht 34 bladzijde 256

De daglengte l, dit is het aantal uren tussen zonsopgang en zonsondergang, varieert van dag tot dag. Voor Brussel is de daglengte bij het begin van de lente (21 maart) en de herfst (21 september) 12 uur. Op deze breedtegraad varieert de daglengte gedurende een jaar tussen 8 uur en 16 uur. In de onderstaande grafiek kun je de daglengte l (in uren) in functie van de tijd t (in dagen) aflezen gedurende één jaar. Het tijdstip $t = 0$ correspondeert met 1 januari.



1 De functie $l(t)$ is een periodieke functie. Wat is de periode?

p = 365 (of p = 365,25)

2 De grafiek beweegt zich om een evenwichtslijn, die hier de gemiddelde daglengte voorstelt. Geef een vergelijking van deze rechte.

$y = 12$

3 Geef de maximale uitwijking t.o.v. deze evenwichtslijn. Wat is hiervan de concrete betekenis?

4u

De langste dag heeft een lengte van 12u + 4u = 16u

en de kortste dag heeft een lengte van 12u – 4u = 8u.

4 De grafiek van *l* lijkt qua vorm op de grafiek van de sinusfunctie. Welke soorten transformaties moet je op de grafiek van de sinusfunctie uitvoeren om de bovenstaande grafiek te verkrijgen?

een horizontale en verticale verschuiving en

een horizontale en verticale uitrekking

Opdracht 35 bladzijde 256

Plot de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = 3 \sin x$ en $h(x) = -\frac{1}{2} \sin x$ voor $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

Vergelijk de periode en de maximale uitwijking t.o.v. de x-as bij deze drie functies.

	periode	max. uitwijking t.o.v. x-as
f	2π	1
g	2π	3
h	2π	$\frac{1}{2}$

Opdracht 36 bladzijde 258

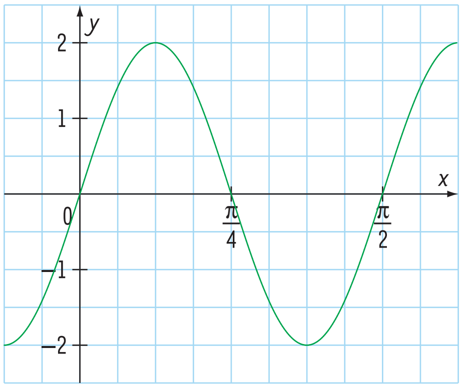
Plot de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 3x$ en $h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ voor $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$. Vergelijk de periode en de amplitude van deze drie functies.

	periode	amplitude
f	2π	1
g	$\frac{2\pi}{3}$	1
h	4π	1

Opdracht 37 bladzijde 259

Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = a \sin bx$.
Bepaal a en b en geef het bijbehorend voorschrift.

1



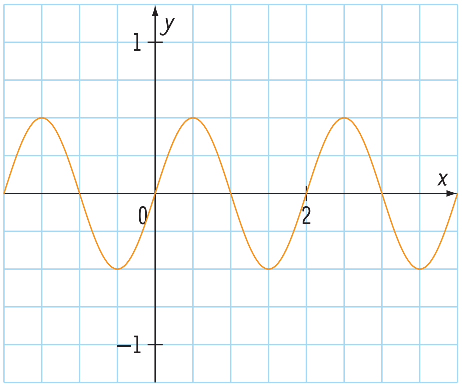
$a = 2$

$p = \frac{\pi}{2}$, dus $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$

$b = 4$

$y = 2 \sin 4x$

2



$a = \frac{1}{2}$

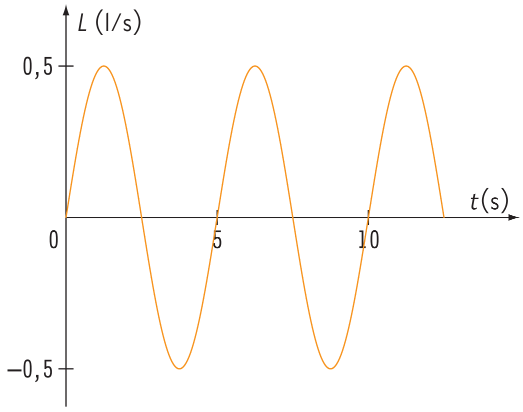
$p = 2$, dus $\frac{2\pi}{b} = 2$

$b = \pi$

$y = \frac{1}{2} \sin \pi x$

Opdracht 38 bladzijde 260

Een volwassene ademt gemiddeld twaalf keer per minuut.
De luchtstroomsnelheid L (in liter per seconde) wordt bij inademen positief en bij uitademen negatief gerekend. De luchtstroomsnelheid kan benaderd worden met een functie waarvan de grafiek hieronder gegeven is.



Bij hardlopen wordt de periode van de ademhalingscyclus gedeeld door drie en de luchtstroomsnelheid wordt vier keer zo groot.

Welke van de volgende antwoorden is de beste benadering van de luchtstroomsnelheid L bij hardlopen?

1 $0{,}125 \cdot \sin \dfrac{0{,}4\pi t}{3}$

2 $0{,}125 \cdot \sin 1{,}2\pi t$

3 $2 \cdot \sin \dfrac{0{,}4\pi t}{3}$

4 $2 \cdot \sin 1{,}2\pi t$

(Bron: toelatingsproef arts–tandarts)

- **bij gegeven grafiek:**
  - **amplitude = 0,5 dus** $a = \dfrac{1}{2}$
  - **periode = 5, dus** $\dfrac{2\pi}{b} = 5$

    $b = \dfrac{2\pi}{5}$

  voorschrift: $y = \dfrac{1}{2} \sin \dfrac{2\pi}{5} t$

- **bij nieuw voorschrift:**
  - **luchtstroomsnelheid vier keer zo groot,**

    dus $a = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$
  - **periode gedeeld door drie,**

    dus $p = \dfrac{5}{3}$

    $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{5}{3}$

    $b = \dfrac{6\pi}{5} = 1{,}2\pi$

  voorschrift: $y = 2 \sin 1{,}2\pi t \rightarrow$ **antwoord 4**

Opdracht 39 bladzijde 260

Plot de grafieken van de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + 1)$.

Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van f door een horizontale verschuiving over een afstand 1 naar links.

Opdracht 40 bladzijde 260

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$ en $h(x) = \sin(x - 2)$.

Hoe ontstaat de grafiek van h uit die van f? Controleer met je grafisch rekentoestel.

De grafiek van h ontstaat uit de grafiek van f door een horizontale verschuiving over een afstand 2 naar rechts.

Opdracht 41 bladzijde 262

Gegeven de functies met voorschrift $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x + 2$ en $h(x) = \sin x - 1$.

Hoe ontstaan de grafieken van g en h uit die van f? Controleer met je grafisch rekentoestel.

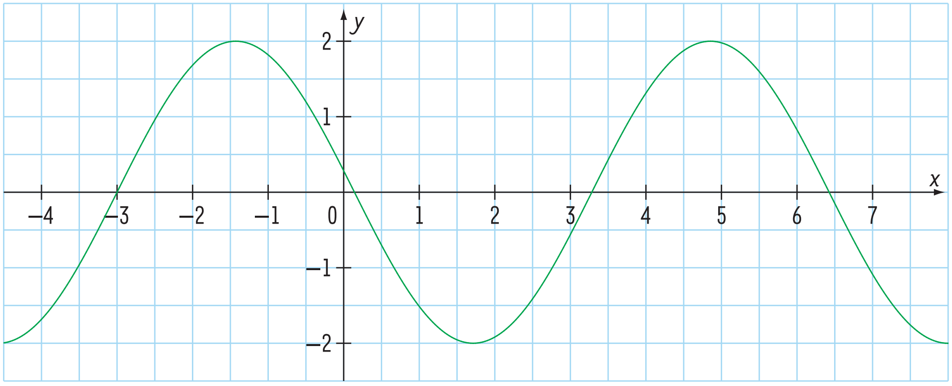
De grafiek van g (h) ontstaat uit de grafiek van f door een verticale verschuiving over een afstand 2 (1) naar boven (beneden).

Opdracht 42 bladzijde 263

Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = a \sin(x - c)$.

Bepaal a en c en geef het bijbehorend voorschrift.

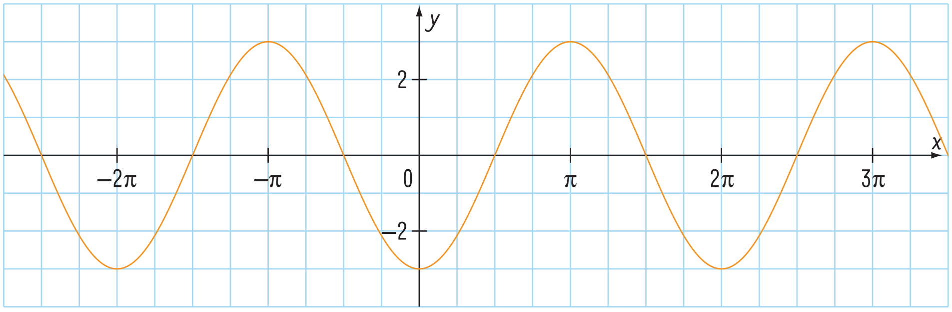
1



$a = 2$, $c = -3$

$y = 2 \sin(x + 3)$

2

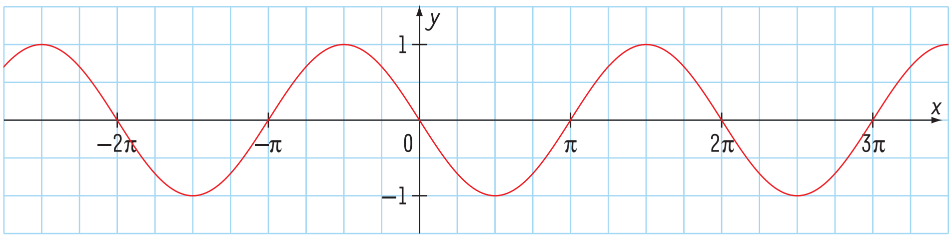


$a = 3,\ c = \frac{\pi}{2}$

$y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Opdracht 43 bladzijde 264

De grafiek van een functie met voorschrift $y = \sin(x - c)$ is gegeven.



1 Bepaal c en geef het bijbehorend voorschrift.

$c = \pi$

$y = \sin(x - \pi)$

2 Welke waarden van c zijn nog mogelijk? Verklaar.

$c = \ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$

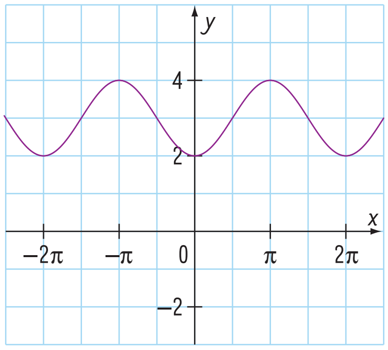
De grafiek is over een afstand π verschoven naar links of naar rechts.
Omdat de periode 2π is, kun je ook zeggen dat de grafiek over een afstand 3π (of 5π of 7π of...) naar links/rechts verschoven is.

Opdracht 44 bladzijde 264

Het voorschrift van de onderstaande functies is van de vorm $y = \sin(x - c) + d$.

Bepaal c en d en geef het bijbehorend voorschrift.

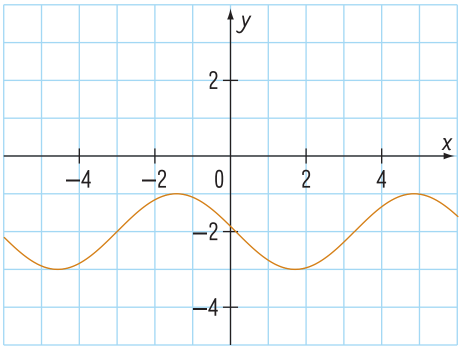
1



$c = \frac{\pi}{2}$, $d = 3$

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

2



$c = -3$, $d = -2$

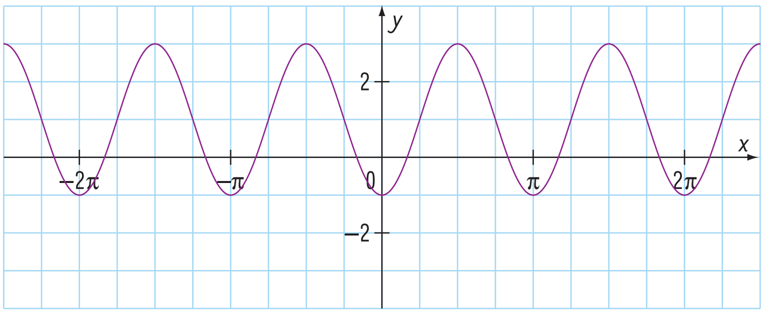
$y = \sin(x + 3) - 2$

Opdracht 45 bladzijde 267

De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.

Bepaal een mogelijk voorschrift.

1

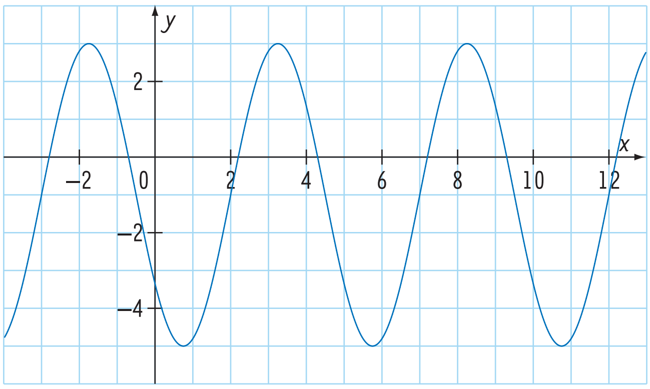


$a = 2,\ c = \dfrac{\pi}{4},\ d = 1$

$p = \pi$, dus $\dfrac{2\pi}{b} = \pi$, zodat $b = 2$

$y = 2\sin\left(2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) + 1$

2

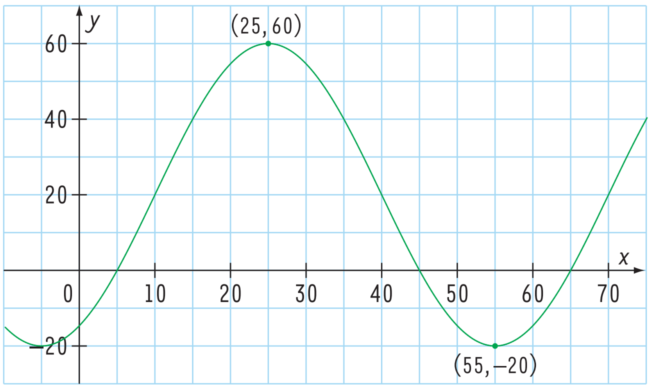


$a = 4,\ c = 2,\ d = -1$

$p = 5$, dus $\dfrac{2\pi}{b} = 5$, zodat $b = \dfrac{2\pi}{5}$

$y = 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}(x - 2)\right) - 1$

3



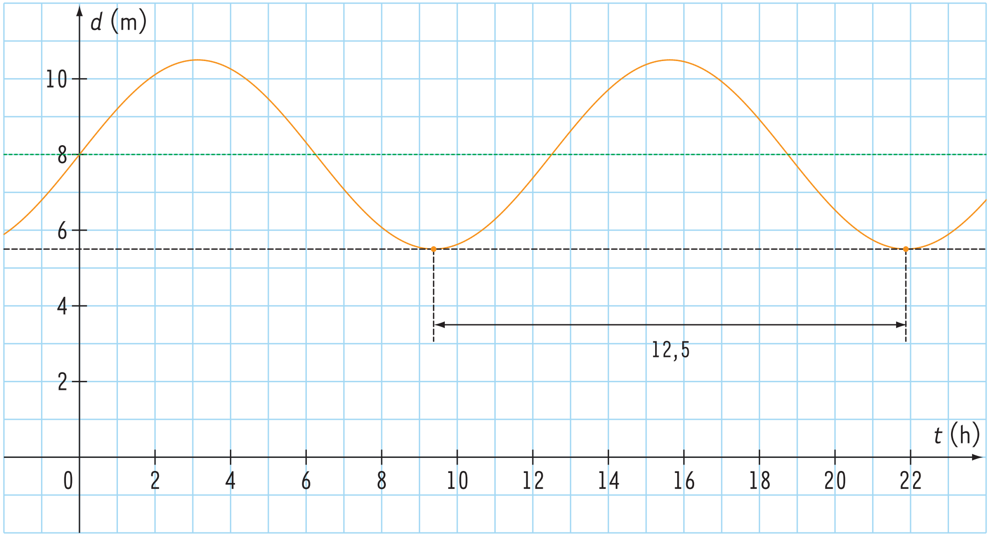
a= 40, c = 10, d = 20

p = 60, dus $\frac{2\pi}{b}$ = 60, zodat b = $\frac{\pi}{30}$

$$y = 40 \sin\left(\frac{\pi}{30}(x - 10)\right) + 20$$

Opdracht 46 bladzijde 268

Door de werking van eb en vloed varieert de diepte *d* van een vaargeul met de tijd. De grafiek geeft deze diepte *d* benaderend weer voor een bepaalde havenstad, waarbij *t* de tijd voorstelt uitgedrukt in uren. De gemiddelde diepte is 8 m, bij vloed is de diepte 10,5 m en bij eb 5,5 m. De tijdsspanne tussen twee opeenvolgende tijdstippen van eb is 12,5 u. Op tijdstip $t = 0$ is de diepte 8 m.



1 Bepaal een mogelijk voorschrift voor $d(t)$.

$$a = 2,5 = \frac{5}{2}, \; c = 0, \; d = 8$$

$$p = 12,5, \text{ dus } \frac{2\pi}{b} = 12,5 \text{ zodat } b = \frac{4\pi}{25}$$

$$d(t) = \frac{5}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{25} t\right) + 8$$

2 Bepaal de tijdstippen waarop de diepte 9 m is.

$$\frac{5}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{25} t\right) + 8 = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 0,819 + k \cdot 12,5 \quad \text{of} \quad t = 5,431 + k \cdot 12,5 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

0 u 49 min 7 sec   5 u 25 min 53 sec

Opdracht 47 bladzijde 270
Toon aan met voorbeelden dat:

1 $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$

bv. $\alpha = \pi$ **en** $\beta = 0$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\pi - 0) = \cos\pi = -1$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$

$-1 \neq -2$

2 $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$

bv. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **en** $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

$0 \neq 2$

Opdracht 48 bladzijde 272
Bewijs de volgende formules.

1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha - (-\beta))\\ &= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot (-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

formules tegengestelde hoeken

2 $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \tan(\alpha - (-\beta))\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan(-\beta)}{1 + \tan\alpha \cdot \tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha - (-\tan\beta)}{1 + \tan\alpha \cdot (-\tan\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}\end{aligned}$$

formules tegengestelde hoeken

Opdracht 49 bladzijde 272
Gebruik de som– en verschilformules om de volgende uitdrukkingen te berekenen zonder rekentoestel.

1 $\cos 20° \cos 70° - \sin 20° \sin 70°$

$= \cos(20° + 70°)$

$= \cos 90°$

$= 0$

2 $\cos 220° \cos 40° + \sin 220° \sin 40°$

$= \cos(220° - 40°)$

$= \cos 180°$

$= -1$

3 $\sin 40° \cos 50° + \cos 40° \sin 50°$

$= \sin(40° + 50°)$

$= \sin 90°$

$= 1$

4 $\sin 200° \cos 20° - \cos 200° \sin 20°$

$= \sin(200° - 20°)$

$= \sin 180°$

$= 0$

5 $\cos 70° \cos 25° + \cos 20° \cos 65°$

$= \cos 70° \cos 25° + \sin 70° \sin 25°$

$= \cos(70° - 25°)$

$= \cos 45°$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6 $\sin 20° \cos 40° + \sin 70° \cos 50°$

$= \sin 20° \cos 40° + \cos 20° \sin 40°$

$= \sin(20° + 40°)$

$= \sin 60°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Opdracht 50 bladzijde 273

Vereenvoudig.

1 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\cdot\sin\beta} + \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\cdot\sin\beta}}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cancel{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \cos\alpha\cdot\cos\beta + \cancel{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\,\cos\beta}{2\cos\alpha\,\cos\beta}$$

$$= \tan\alpha$$

2 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \cancel{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \cos\alpha\cdot\cos\beta + \cancel{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \sin\alpha\cdot\sin\beta - \cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\alpha\,\cos\beta}{-2\sin\alpha\,\sin\beta}$$

$$= -\cot\alpha\cdot\cot\beta$$

3 $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cdot\cos\gamma - \cos\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

$$+ \frac{\sin\gamma\cdot\cos\alpha - \cos\gamma\cdot\sin\alpha}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha - \tan\beta + \tan\beta - \tan\gamma + \tan\gamma - \tan\alpha$$

$$= 0$$

4 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}$

$= \dfrac{\cos 30° \cdot \sin\alpha - \sin 30° \cdot \cos\alpha}{\sin 30° \cdot \sin\alpha + \cos 30° \cdot \cos\alpha}$

$= \dfrac{\sin(\alpha - 30°)}{\cos(\alpha - 30°)}$

$= \tan(\alpha - 30°)$

Opdracht 51 bladzijde 273

Bewijs.

1 $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$

$= (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta)$

$= \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha \cdot (1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\alpha) \cdot \sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} - \sin^2\beta + \cancel{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

2 $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$

$= (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$= \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta$

$= (1 - \sin^2\alpha) \cdot \cos^2\beta - \sin^2\alpha\,(1 - \cos^2\beta)$

$= \cos^2\beta - \cancel{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta} - \sin^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}$

$= \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

3 $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha = \cos\beta$

$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha$

$= \cos((\alpha + \beta) - \alpha)$

$= \cos\beta$

4 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

5 $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$

$$\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\tan\alpha}\cdot\dfrac{1}{\tan\beta}-1}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}$$

$$= \frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\cancel{\tan\alpha\cdot\tan\beta}}\cdot\frac{\cancel{\tan\alpha\cdot\tan\beta}}{\tan\beta+\tan\alpha}$$

$$= \frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

$$= \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$$

$$= \cot(\alpha+\beta)$$

OFWEL

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}}$$

$$= \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

$$= \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

Opdracht 52 bladzijde 273

Toon aan.

1 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$$
$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

3 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha)$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha}$$
$$= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Opdracht 53 bladzijde 274
Toon aan. Start hiervoor met de formule uit de vorige opdracht.

1 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

2 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

Opdracht 54 bladzijde 274
Welke van de volgende uitdrukkingen zijn gelijk aan elkaar? Los op zonder rekentoestel.

A $2\cos^2 40° - 1$

B $2\sin 20° \cos 20°$

C $\cos^2 20° - \sin^2 20°$

D $1 - 2\sin^2 40°$

E $\sin 40°$

F $\cos 40°$

G $\sin 80°$

H $\cos 80°$

- $2\cos^2 40° - 1 = \cos(2 \cdot 40°) = \cos 80°$ dus $A = H$
- $2\sin 20° \cos 20° = \sin(2 \cdot 20°) = \sin 40°$ dus $B = E$
- $\cos^2 20° - \sin^2 20° = \cos(2 \cdot 20°) = \cos 40°$ dus $C = F$
- $1 - 2\sin^2 40° = \cos(2 \cdot 40°) = \cos 80°$ dus $D = H$

zodat $A = D = H$, $B = E$, $C = F$

Opdracht 55 bladzijde 274
Schrijf als één goniometrisch getal.

1 $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\end{aligned}$$

2 $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha - \cos^2\alpha &= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\ &= -\cos 2\alpha\end{aligned}$$

3 $4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$$4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 4\alpha$$

4 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$$\begin{aligned}\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha\\ &= \frac{1}{4} \sin 4\alpha\end{aligned}$$

5 $\cot\alpha - \tan\alpha$

$$\begin{aligned}\cot\alpha - \tan\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}\\ &= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\\ &= 2 \cot 2\alpha\end{aligned}$$

Opdracht 56 bladzijde 274

Bewijs.

1 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha} - \cos 2\alpha = 1$

$$\begin{aligned}&\frac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha} - \cos 2\alpha\\ &= \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \cos 2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)\\ &= 1\end{aligned}$$

2 $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

$$\begin{aligned}\cos^4\alpha - \sin^4\alpha &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\\ &= \cos 2\alpha \cdot 1\\ &= \cos 2\alpha\end{aligned}$$

3 $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2\alpha}{1-\tan^2\alpha} &= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}\\ &= \cancel{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}}\\ &= \cos^2\alpha\end{aligned}$$

4 $\sin 2\alpha - \tan\alpha \cdot \cos 2\alpha = \tan\alpha$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha - \tan\alpha\cdot\cos 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(2\cos^2\alpha - 1)\\ &= \frac{2\sin\alpha\cdot\cancel{\cos^2\alpha} - 2\sin\cancel{\alpha\cdot\cos^2\alpha} + \sin\alpha}{\cos\alpha}\\ &= \tan\alpha\end{aligned}$$

5 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{1-\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\\ &= \tan\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

Opdracht 57 bladzijde 276
Maak gebruik van de formules voor $\cos(\alpha \pm \beta)$ om de volgende formules van Simpson te bewijzen.

1 $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

2 $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (1)

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (2)

(1) + (2) geeft: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ (3)

(1) − (2) geeft: $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ (4)

$$\begin{cases}\alpha + \beta = x\\ \alpha - \beta = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha = x + y\\ 2\beta = x - y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \dfrac{x+y}{2}\\ \beta = \dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

Substitutie in (3) en (4) geeft:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Opdracht 58 bladzijde 276
Ontbind in factoren.

1 $\sin 7\alpha + \sin 5\alpha$

$$= 2\sin\frac{7\alpha + 5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha - 5\alpha}{2}$$

$$= 2\sin 6\alpha\cos\alpha$$

2 $\cos 3\alpha - \cos\alpha$

$$= -2\sin\frac{3\alpha + \alpha}{2}\sin\frac{3\alpha - \alpha}{2}$$

$$= -2\sin 2\alpha\sin\alpha$$

3 $\sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha$

$= (\sin 3\alpha + \sin \alpha) + \sin 2\alpha$

$= 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha$

$= \sin 2\alpha \cdot (2\cos \alpha + 1)$

4 $\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha$

$= (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha) + \cos 5\alpha$

$= 2 \cos 5\alpha \cos (-\alpha) + \cos 5\alpha$

$= \cos 5\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1)$

Opdracht 59 bladzijde 276

Vereenvoudig.

1 $\dfrac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$

$$= \frac{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$= -\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

2 $\dfrac{\cos 5\alpha + \cos \alpha}{\sin 5\alpha - \sin \alpha}$

$$= \frac{2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \cos 3\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$= \cot 2\alpha$$

3 $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$

$$= \frac{\cancel{2}\sin 2\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)} + \cancel{2}\sin 6\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)}}{\cancel{2}\cos 2\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)} + \cancel{2}\cos 6\alpha \cdot \cancel{\cos(-\alpha)}}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha}$$

$$= \frac{2\sin 4\alpha \cdot \cancel{\cos(-2\alpha)}}{2\cos 4\alpha \cdot \cancel{\cos(-2\alpha)}}$$

$$= \tan 4\alpha$$

Opdracht 60 bladzijde 276

In een driehoek ABC met hoeken α, β en γ geldt dat

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin(\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma)}.$$

Toon aan dat ΔABC gelijkbenig is.

- *Gegeven*: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ *
- $\tan 2\alpha = \dfrac{\sin(\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma)}$

$$\Updownarrow$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\cos\beta\,\sin(-\gamma)}{2\cos\beta\,\cos(-\gamma)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tan 2\alpha = \tan(-\gamma)$$

$$\Updownarrow$$

$$2\alpha = -\gamma + k\cdot\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Updownarrow *$$

$$2\alpha = \alpha + \beta - \pi + k\cdot\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \beta + k'\cdot\pi \qquad (k' \in \mathbb{Z})$$

Omdat α en β hoeken van een driehoek zijn, zal $0 < \alpha < \pi$ en $0 < \beta < \pi$.
Bijgevolg zal $k' = 0$, zodat $\alpha = \beta$, waardoor ΔABC gelijkbenig is.

Opdracht 61 bladzijde 280

Los exact op.

1 $2 \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

2 $\cos 2x = \cos x$

$\Leftrightarrow 2x = \pm x + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \dfrac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

3 $\tan x = \tan \dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{x}{2} + k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

4 $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \sin x + \tan \varphi \cdot \cos x = 2$ — stel $-\sqrt{3} = \tan \varphi$

$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x = 2 \cos \varphi$ — $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ (bv.)

$\Leftrightarrow \sin (x + \varphi) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$ — $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 62 bladzijde 280

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

1 $4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm\ 0{,}723 + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = 1{,}770 + + k \cdot 2\pi$ of $x = 0{,}324 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 $3\sin x + 4\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x + \frac{4}{3}\cos x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \sin x + \tan\varphi \cdot \cos x = \frac{1}{3}$ stel $\frac{4}{3} = \tan\varphi$

$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi$ $\varphi = 0{,}927$ (bv)

$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = 0{,}2$

$\Leftrightarrow x + 0{,}927 = 0{,}201 + k \cdot 2\pi$

of $x + 0{,}927 = 2{,}940 + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = -0{,}726 + k \cdot 2\pi$ of $x = 2{,}013 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 63 bladzijde 280

Gegeven is de functie $f: x \longmapsto 6\sin\frac{x}{2} - 3$.

1 Bepaal de nulpunten van f exact.

$f(x) = 6\sin\frac{x}{2} - 3$

$6\sin\frac{x}{2} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi$ of $x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 Bepaal de x–coördinaten waarvoor f een maximum of minimum bereikt.

- **maximum:**

$$\sin \frac{x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- **minimum:**

$$\sin \frac{x}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\pi + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 64 bladzijde 280

Los exact op: $\sin x = \sin x \cdot \tan x$.

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin x \cdot \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad 1 - \tan x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 65 bladzijde 281

Los exact op.

1 $\cos 3x = \cos 2x - \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \quad \text{of} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $\sin x - \sin^3 x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x \cdot (\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = -1$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 66 bladzijde 281

Bepaal de nulpunten van de volgende functies exact.

1 $f: x \mapsto \cos 5x + \sin 3x - \cos x$

$\cos 5x + \sin 3x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 5x - \cos x + \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow -2 \sin 3x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x \cdot (-2 \sin 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \quad \text{of} \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 3x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 $f: x \longmapsto \sin 6x + \sin 5x - \sin 3x - \sin 2x$

$\sin 6x + \sin 5x - \sin 3x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 6x - \sin 2x) + (\sin 5x - \sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{2} \cdot \cos 4x \cdot \sin 2x + \cancel{2} \cdot \cos 4x \cdot \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot (\sin 2x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot (2 \sin x \cdot \cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x \cdot \sin x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \cos x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k \cdot \dfrac{\pi}{4} \quad \text{of} \quad x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 67 bladzijde 282

Los op: $3 \cos^4 x - 5 \cos^2 x + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0$ stel $\cos^2 x = t$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3} \quad \text{of} \quad t = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{2}{3} \quad \text{of} \quad \cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \text{of} \quad \cos x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \text{of} \quad \cos x = 1 \quad \text{of} \quad \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \pm 0{,}615 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pm 2{,}526 + k \cdot 2\pi$

$\text{of} \quad x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pi + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm 0{,}615 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pm 2{,}526 + k \cdot 2\pi$

$\text{of} \quad x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 68 bladzijde 282

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

1 $9\cos^2 x + 6\sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -9\sin^2 x + 6\sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sin x = \frac{4}{3}} \text{ of } \sin x = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -0{,}730 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = 3{,}871 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $\tan 2x - 5\tan x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 5\tan x$$

$$\Leftrightarrow 2\tan x = 5\tan x \cdot (1 - \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan x - 5\tan x \cdot (1 - \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x \cdot (2 - 5 \cdot (1 - \tan^2 x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \quad \text{of} \quad 2 - 5 + 5\tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \quad \text{of} \quad \tan^2 x = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 0 \quad \text{of} \quad \tan x = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{of} \quad \tan x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = 0{,}659 + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = -0{,}659 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 69 bladzijde 282

Bepaal de nulpunten van de volgende functies exact.

1 $f\colon x \longmapsto \cos 2x - 4\cos x + 3$

$$\cos 2x - 4\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) - 4\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $f: x \longmapsto \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3$

$\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ stel $\tan^2 x = t$

$\Leftrightarrow t = 1$ of $t = 3$

$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$ of $\tan^2 x = 3$

$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1$ of $\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ of $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

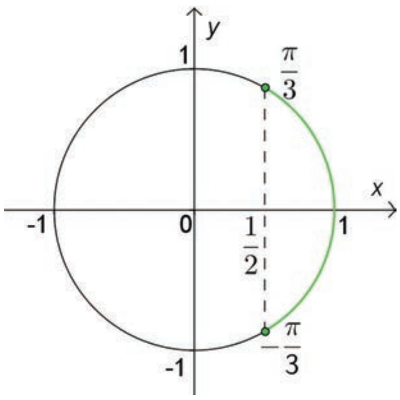
Opdracht 70 bladzijde 283

1 Los exact op: $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

2 Teken de goniometrische cirkel en duid hierop de beeldpunten van de hoeken aan waarvoor geldt: $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$.



3 Noteer nu alle oplossingen van de ongelijkheid: $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.

$$\cos x \geqslant \frac{1}{2}$$

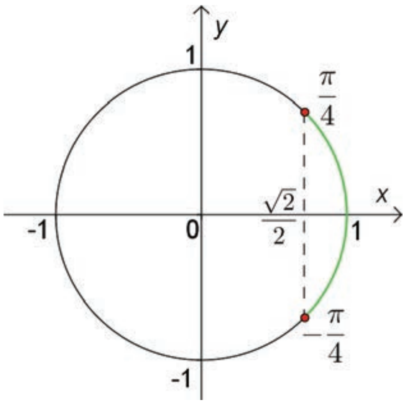
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 71 bladzijde 286

Los de volgende ongelijkheden exact op.

1 $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

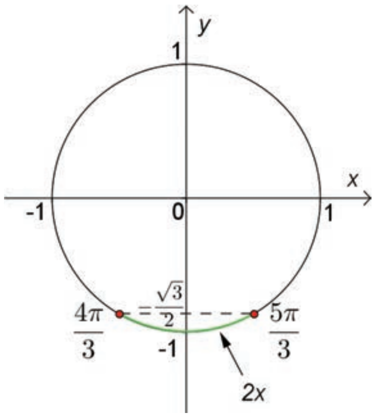


DEN5A16H_H5.indd 384 13/08/13 08:03

2 $\sin 2x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

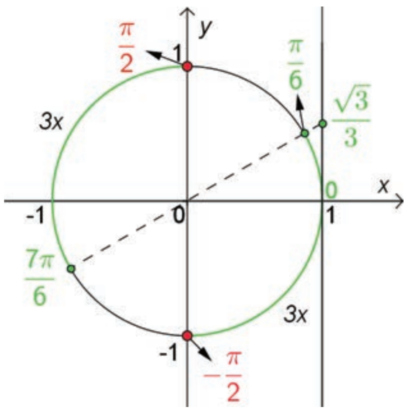
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



3 $\tan 3x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < 3x \leqslant \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} < x \leqslant \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

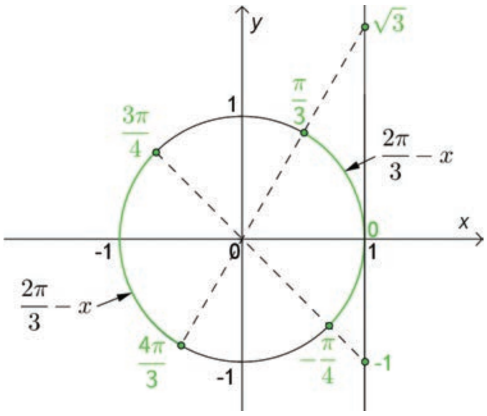


4 $-1 \leqslant \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \leqslant \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leqslant \frac{2\pi}{3} - x \leqslant \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} - k \cdot \pi \leqslant x - \frac{2\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{4} - k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



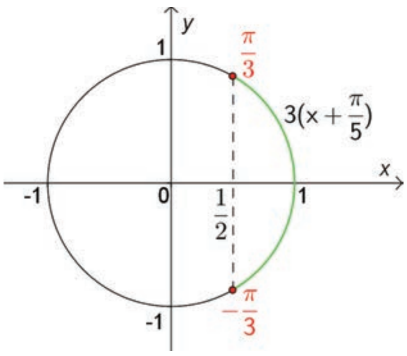
5 $4\cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\right) + 2 > 4$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\right) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < 3\left(x + \frac{\pi}{5}\right) < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < x + \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{14\pi}{45} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < x < -\frac{4\pi}{45} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



6 $3\sin\left(4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+5<0$

$\Leftrightarrow \sin\left(4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) < -\frac{5}{3}$

valse ongelijkheid $\left(-\frac{5}{3} < -1\right)$; geen oplossingen

Opdracht 72 bladzijde 286

Op de kermis staat een draaimolen die behalve een horizontale draaiende beweging ook een verticale beweging maakt. De houten vloer van deze kermisattractie bevindt zich na t seconden op een hoogte h (in cm) vanaf de grond volgens het verband

$$h(t) = 15\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)+65$$

Een kind op de draaimolen wil de kwast grijpen en zo een gratis ritje winnen.
De kwast is bereikbaar voor het kind van zodra de vloer zich 70 cm boven de grond bevindt.

Hoe lang bevindt de houten vloer van de attractie zich minstens 70 cm boven de grond tijdens één verticale beweging?

$h(t) = 15\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)+65$

- $15\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)+65 \geqslant 70$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \geqslant \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 0{,}340 + k\cdot 2\pi \leqslant \frac{\pi}{4}(t-1) \leqslant 2{,}802 + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow 0{,}433 + k\cdot 8 \leqslant t-1 \leqslant 3{,}567 + k\cdot 8$

$\Leftrightarrow 1{,}433 + k\cdot 8 \leqslant t \leqslant 4{,}567 + k\cdot 8 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$4{,}567 - 1{,}433 = 3{,}135$

De houten vloer bevindt zich 3,1 seconden minstens 70 cm boven de grond tijdens één verticale beweging.

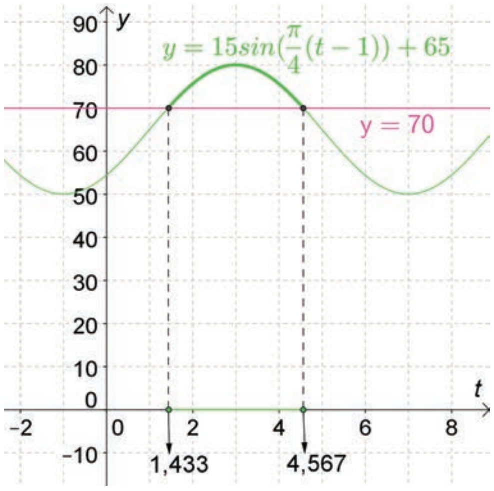
- OFWEL (grafische oplossing)

$y = 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) + 65$
$y = 70$
Grafieken plotten en snijpunten bepalen in [0,8].

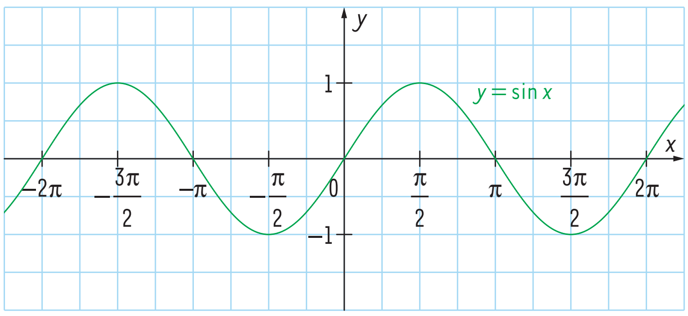
$\left(\text{periode} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8\right)$

$15 \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) + 65 \geqslant 70$

$\Leftrightarrow 1{,}433 + k \cdot 8 \leqslant t \leqslant 4{,}567 + k \cdot 8 \quad (k \in \mathbb{Z})$



Opdracht 73 bladzijde 287
Gegeven is de grafiek van de sinusfunctie.



1 Waarom is de functie niet inverteerbaar?

De functie is niet inverteerbaar, omdat er verschillende x-waarden zijn met dezelfde y-waarde.

2 Geef een beperking van het domein zodat de functie wel inverteerbaar wordt. Vermeld meerdere mogelijkheden.

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]...$

Opdracht 74 bladzijde 291

Bereken zonder rekentoestel.

1 Bgsin $\frac{1}{2}$

$\text{Bgsin}\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

2 Bgcos 0

$\text{Bgcos}\ 0 = \frac{\pi}{2}$

3 Bgtan (–1)

$\text{Bgtan}\ (-1) = -\frac{\pi}{4}$

4 Bgsin 1

$\text{Bgsin}\ 1 = \frac{\pi}{2}$

5 Bgcos $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\text{Bgcos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

6 Bgtan $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\text{Bgtan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Opdracht 75 bladzijde 291
Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin\left(\text{Bgcos}\,\frac{1}{2}\right)$

$$\sin\left(\text{Bgcos}\,\frac{1}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 $\tan\left(\text{Bgsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\tan\left(\text{Bgsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \tan\frac{\pi}{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

3 $\cos\,(\text{Bgtan}\,1)$

$$\cos\,(\text{Bgtan}\,1)$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

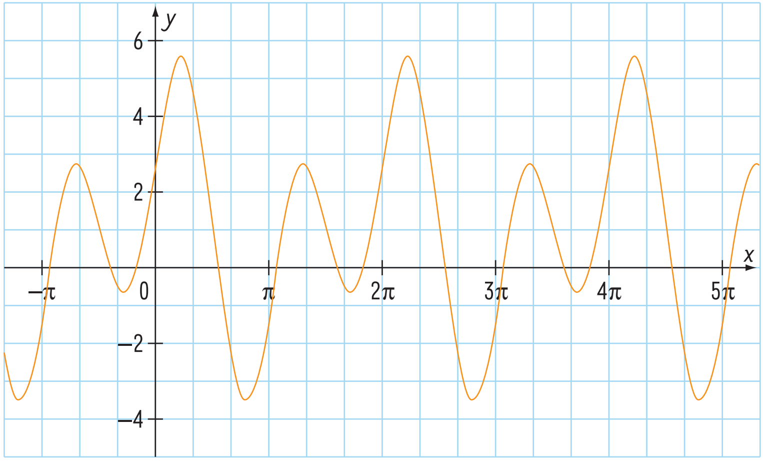
4 $\text{Bgsin}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\text{Bgsin}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= \text{Bgsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

Opdracht 76 bladzijde 301

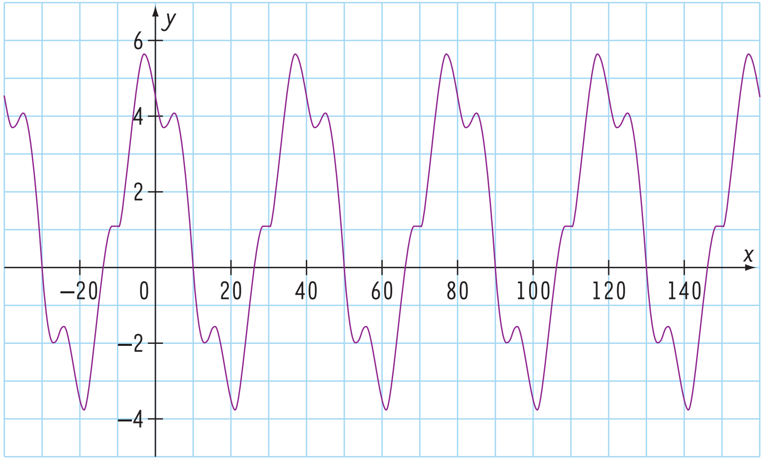
Bepaal de periode p van de volgende periodieke functies.

1



$p = 2\pi$

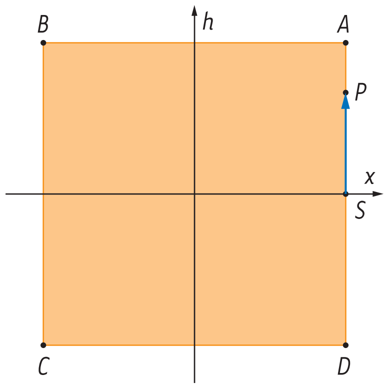
2



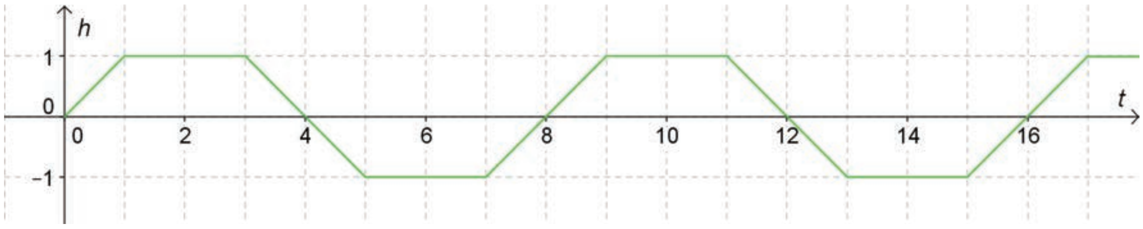
$p = 40$

Opdracht 77 bladzijde 301

Het vierkant $ABCD$ heeft zijde 2 m. Een punt P beweegt langs de omtrek met een constante snelheid van 1 m/s. P start in het punt S (met hoogte gelijk aan 0) en draait in tegenwijzerzin. We onderzoeken de hoogte h van het punt P in functie van de tijd t.



1 Maak een grafiek van deze functie.



2 De grafiek herhaalt zich met een vaste regelmaat. Om de hoeveel seconden gebeurt dit? Verklaar dit vanuit de opgave.

De grafiek herhaalt zich om de 8 seconden. Na 8 s is het punt P terug in het startpunt S en herhaalt alles zich.

Opdracht 78 bladzijde 302

De **frequentie** f van een periodiek verschijnsel is het aantal perioden p per tijdseenheid: $f = \frac{1}{p}$. De frequentie heeft als eenheid Hertz ($1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$).

1 Een stemvork brengt de '*A*' (la) voort door met een periode van 2,27 milliseconden te trillen.

Bepaal de frequentie in trillingen per seconde.

$$p = 2{,}27\ \text{ms} = 0{,}00227\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}00227}\ \text{Hz} = 441\ \text{Hz}$$

2 Een andere stemvork trilt 768 keer per seconde en brengt daardoor een '*G*' (sol) voort.

Bepaal de periode van die trilling.

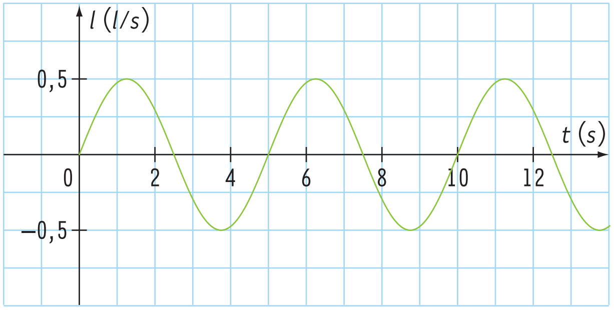
$$f = 768\ \text{Hz}$$

$$p = \frac{1}{f} = \frac{1}{768}\ \text{s} = 0{,}00130\ \text{s} = 1{,}30\ \text{ms}$$

Opdracht 79 bladzijde 302

De onderstaande grafiek toont de luchtstroomsnelheid l (in liter per seconde) in functie van de tijd t (in seconden) bij de ademhaling van een volwassene in rust.

Bij het inademen wordt de luchtstroomsnelheid positief gerekend en bij het uitademen negatief.



1 Bepaal de periode van de luchtstroomsnelheid.

$p = 5$ s

2 Hoeveel keer ademt deze volwassene in en uit per minuut?

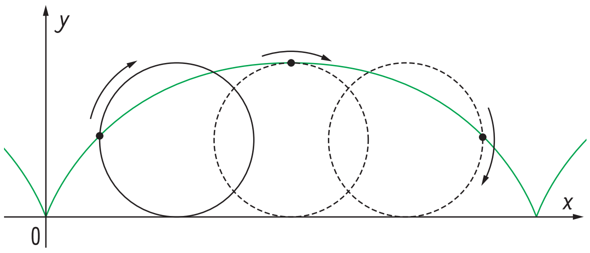
12 keer

3 Bepaal de frequentie van de luchtstroomsnelheid.

$f = \frac{1}{p} = \frac{1}{5}$ Hz $= 0{,}2$ Hz

Opdracht 80 bladzijde 302

Een cycloïde is een kromme die gevormd wordt door een punt (bv. reflector) op een rollende cirkel.



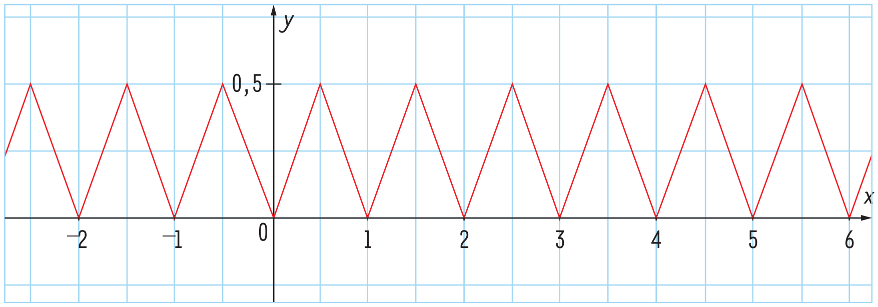
Druk de periode uit in functie van de straal van de cirkel.

$p = 2\pi r$

Opdracht 81 bladzijde 303

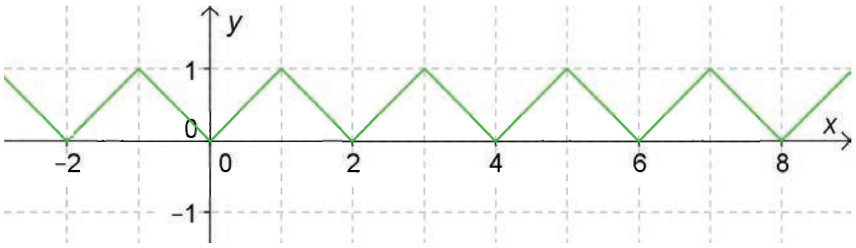
1 Hieronder is de grafiek gegeven van de functie g, waarbij $g(x)$ de afstand voorstelt van x tot het dichtsbijzijnde gehele getal.

Bepaal de periode.



p = 1

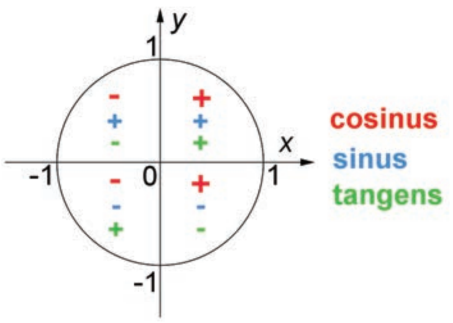
2



p = 2

Opdracht 82 bladzijde 303

In welk kwadrant is



1 $\cos\alpha > 0$ en $\sin\alpha < 0$?

$\cos\alpha > 0$ en $\sin\alpha < 0$: IV

2 $\cos\alpha < 0$ en $\sin\alpha < 0$?

$\cos\alpha < 0$ en $\sin\alpha < 0$: III

3 $\cos\alpha < 0$ en $\tan\alpha > 0$?

$\cos\alpha < 0$ en $\tan\alpha > 0$: III

4 $\sin\alpha > 0$ en $\tan\alpha < 0$?

$\sin\alpha > 0$ en $\tan\alpha < 0$: II

Opdracht 83 bladzijde 303

Maak gebruik van de goniometrische cirkel en van de hoofdformule van de goniometrie om de ontbrekende waarden in de tabel te bepalen. De tweede kolom vermeldt in welk kwadrant de hoek gelegen is.

	α	cos α	sin α	tan α
1	II	$-0,6$		
2	IV		$-0,25$	
3	I			$1,6$
4	III	$-0,5$		
5	II		$0,7$	
6	II			-4

	α	cos α	sin α	tan α
1	II	$-0,6$	$0,8$	$-\frac{4}{3}$
2	IV	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-0,25$	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$
3	I	$\frac{5}{\sqrt{89}}$	$\frac{8}{\sqrt{89}}$	$1,6$
4	III	$-0,5$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
5	II	$-\frac{\sqrt{51}}{10}$	$0,7$	$-\frac{7}{\sqrt{51}}$
6	II	$\frac{-1}{\sqrt{17}}$	$\frac{4}{\sqrt{17}}$	-4

1) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(-\frac{6}{10}\right)^2$$

$$= \frac{64}{100}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{8}{10} = \pm 0{,}8$$

$\alpha \in$ II, dus +

$$\tan\alpha = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$$

2) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{15}{16}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\alpha \in$ IV, dus +

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

3) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{16}{10}\right)^2} = \frac{100}{356}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{10}{\sqrt{356}} = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

$\alpha \in$ I, dus +

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{16}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{356}} = \frac{16}{\sqrt{356}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

4) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha \in$ III, dus −

$$\tan\alpha = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

5) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$= \frac{51}{100}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{51}}{10}$$

$\alpha \in$ II, dus −

$$\tan\alpha = \frac{\frac{7}{10}}{-\frac{\sqrt{51}}{10}} = -\frac{7}{\sqrt{51}}$$

6) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+(-4)^2} = \dfrac{1}{17}$

$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha \in$ II, dus $-$

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -4 \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{17}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

Opdracht 84 bladzijde 304

Vereenvoudig.

1 $1+\tan^2\alpha$

$= 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

2 $1+\cot^2\alpha$

$= 1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

3 $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$

$= 1^2$

$= 1$

4 $\sqrt{(\sin\alpha - 2)^2}$

$= |\sin\alpha - 2| = 2 - \sin\alpha$

Opdracht 85 bladzijde 304
Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$

$\tan\alpha + \cot\alpha$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$$

2 $(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha) = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

$(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha)$

$= \sin\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

$= \sin\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \cdot \cos\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)$

$= \cancel{\sin\alpha} - \cancel{\cos\alpha} + \cos^3\alpha + \cancel{\cos\alpha} - \cancel{\sin\alpha} + \sin^3\alpha$

$= \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

3 $\dfrac{\tan^2\alpha - 1}{\tan^2\alpha + 1} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$\dfrac{\tan^2\alpha - 1}{\tan^2\alpha + 1}$

$$= \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}_{1}$$

$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

Opdracht 86 bladzijde 304

Vereenvoudig.

1 $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - 1$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 1$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot 1 - 1$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$= \cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

$= -2\sin^2\alpha$

2 $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$

$= \sin^2\alpha\cdot(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \cos^2\alpha\cdot(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$= 1$

3 $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

$= \sin^2\alpha - \cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \cos^2\alpha$

$= 1 + 1$

$= 2$

Opdracht 87 bladzijde 304

Bepaal het reëel getal k in de volgende identiteiten.

1 $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=k\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1+\sin\alpha)^2-(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\cancel{1}+2\sin\alpha+\cancel{\sin^2\alpha}-\cancel{1}+2\sin\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=4\cdot\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\quad\text{dus } k=4$$

2 $\dfrac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha}+\dfrac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\alpha+\cot\alpha+k$

$$\frac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha}+\frac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}+\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$=\tan\alpha+\cot\alpha+1\quad\text{dus } k=1$$

Opdracht 88 bladzijde 304
Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\left(\frac{1}{\cos^4\alpha} - \tan^4\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^4\alpha} - \cot^4\alpha\right) = 1 + \frac{2}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$

$$\left(\frac{1}{\cos^4\alpha} - \tan^4\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^4\alpha} - \cot^4\alpha\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan^2\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \tan^2\alpha\right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \cot^2\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \cot^2\alpha\right)$$

$$= \frac{\cancel{1 - \sin^2\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cancel{1 - \cos^2\alpha}}{\cancel{\sin^2\alpha}} \cdot \frac{1 + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{(1 + \sin^2\alpha) \cdot (1 + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1 + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$

2 $(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$

$$(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 \cdot 1^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$$
$$= 1^2$$
$$= 1$$

3 $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha$$
$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^3 - 3\cos^4\alpha \cdot \sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha \cdot \sin^4\alpha$$
$$= 1^3 - 3\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= 1 - 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

4 $\dfrac{\tan^3\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^3\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$$\frac{\tan^3\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{\cot^3\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}}$$

$$=\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Opdracht 89 bladzijde 305

Als $\sin\alpha=3\cos\alpha$, wat is dan $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$?

A $\dfrac{1}{6}$ **B** $\dfrac{1}{5}$ **C** $\dfrac{2}{9}$ **D** $\dfrac{1}{4}$ **E** $\dfrac{3}{10}$

(Bron © VWO 1998, tweede ronde)

- $\sin\alpha=3\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=3$
- $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+9}=\frac{1}{10}$$

- $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\cos\alpha\cdot\cos\alpha=3\cdot\cos^2\alpha=\dfrac{3}{10}\rightarrow$ E

Opdracht 90 bladzijde 305
Cotangens, secans en cosecans van een hoek

We definieerden: $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (met $\sin\alpha \neq 0$). De cotangens van een hoek α is dus het omgekeerde van de tangens van α: $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Analoog definiëren we:

– de secans van een hoek α is het omgekeerde van de cosinus van α:
  $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ (met $\cos\alpha \neq 0$)
– de cosecans van een hoek α is het omgekeerde van de sinus van α:
  $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ (met $\sin\alpha \neq 0$)

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

$$\begin{aligned} &1 + \cot^2\alpha \\ &= 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin^2\alpha} \\ &= \csc^2\alpha \end{aligned}$$

2 $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha \cdot \csc\alpha$

$$\begin{aligned} &\tan\alpha + \cot\alpha \\ &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \\ &= \sec\alpha \cdot \csc\alpha \end{aligned}$$

3 $(\csc\alpha - \sin\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha}$

$(\csc\alpha - \sin\alpha)\cdot(\sec\alpha - \cos\alpha)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad (1)$$

$$\frac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$= \cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad (2)$$

(1) = (2) zodat $(\csc\alpha - \sin\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha)$

$$= \frac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha}$$

4 $(\cos\alpha - \sin\alpha)(\csc\alpha - \sec\alpha) = \sec\alpha\cdot\csc\alpha - 2$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot(\csc\alpha - \sec\alpha)$

$$= \cos\alpha\cdot\csc\alpha - \cos\alpha\cdot\sec\alpha - \sin\alpha\cdot\csc\alpha + \sin\alpha\cdot\sec\alpha$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 - 1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} - 2$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} - 2$$

$$= \sec\alpha\cdot\csc\alpha - 2$$

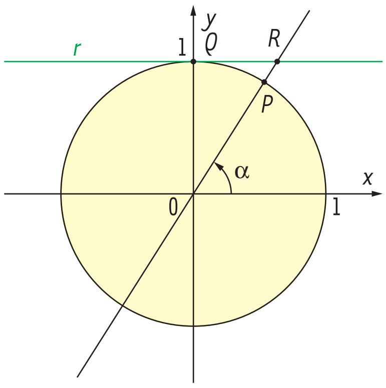
Opdracht 91 bladzijde 305

1 Meetkundige betekenis van cot α

$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ is het beeldpunt van de hoek α.

Noem R het snijpunt van de rechte OP met de raaklijn $r \leftrightarrow y = 1$ aan de goniometrische cirkel in het punt $Q(0,1)$.

Toon aan dat $\text{co}(R) = (\cot\alpha, 1)$.



- $OP \leftrightarrow y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x$

  $OP \leftrightarrow y = \tan\alpha \cdot x$

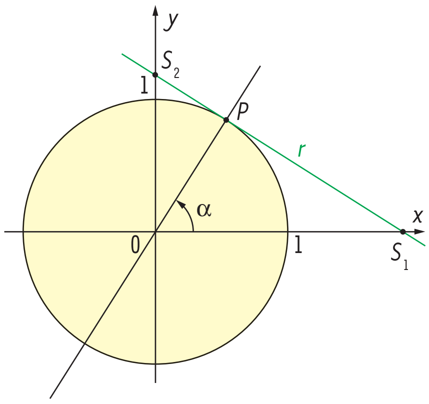
- snijpunt R van OP en $r \leftrightarrow y = 1$:

$$\tan\alpha \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$$

zodat $R(\cot\alpha, 1)$

2 Meetkundige betekenis van sec α en csc α



$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ is het beeldpunt van de hoek α.

r is de raaklijn aan de goniometrische cirkel in het punt P.

Noem S_1 het snijpunt van r met de x–as en S_2 het snijpunt van r met de y–as.

Toon aan dat $\text{co}(S_1) = (\sec\alpha, 0)$ en $\text{co}(S_2) = (0, \csc\alpha)$.

- $OP \leftrightarrow y = \tan\alpha \cdot x$
- $r \perp OP \Rightarrow \text{rico } r = \dfrac{-1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$
- $r \leftrightarrow y - \sin\alpha = -\cot\alpha \cdot (x - \cos\alpha)$

  $r \leftrightarrow y = -\cot\alpha \cdot x + \cot\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha$
- snijpunt S_1 van r en x – as $\leftrightarrow y = 0$:

$$-\cot\alpha \cdot x + \cot\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha = 0$$

$$x = \frac{-\cot\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha}{-\cot\alpha}$$

$$x = \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$x = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$x = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$x = \sec\alpha$$

zodat $S_1(\sec\alpha,\ 0)$

- snijpunt S_2 van r en y – as $\leftrightarrow x = 0$:

$$y = -\cot\alpha \cdot 0 + \cot\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha$$

$$y = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha$$

$$y = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$y = \csc\alpha$$

zodat $S_2(0,\ \csc\alpha)$

Opdracht 92 bladzijde 306

Vul de tabel aan. Gebruik je rekentoestel.

graden	15°12'13"		−63°54'18"	
radialen		0,77 rad		−9,3456 rad

graden	15°12'13"	44°7'4"	-63°54'18"	-535°27'48"
radialen	0,265 rad	0,77 rad	-1,115 rad	-9,3456 rad

Opdracht 93 bladzijde 306

De secondenwijzer van een klok is 6 cm lang.

Welke afstand legt het uiteinde van de wijzer af in 40 seconden?

De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

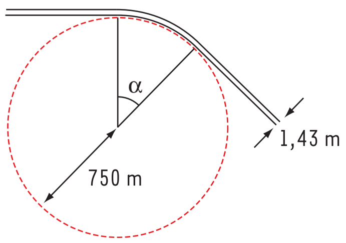
- $\frac{40}{60} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}$
- $\frac{4\pi}{3} \cdot 6 \text{ cm} = 8\pi \text{ cm} = 25{,}1 \text{ cm}$

Het uiteinde van de secondenwijzer legt in 40 s een afstand van 25,1 cm af.

Opdracht 94 bladzijde 306

Een spoorweg maakt een bocht. Deze bocht heeft de vorm van een cirkelboog met een middelpuntshoek $\alpha = 21°35'$. De straal van die cirkelboog is 750 m voor de binnenste rail. Beide rails liggen op een onderlinge afstand van 1,43 m.

Bereken het verschil in lengte tussen beide rails in de bocht tot op 1 cm nauwkeurig.

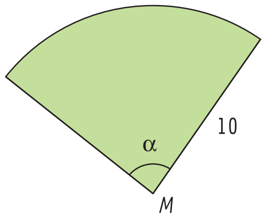


- $21°35' = 0{,}3767\ldots$ rad
- lengte korte rail $= 0{,}3767\ldots \cdot 750$ m $= 282{,}525$ m
- lengte lange rail $= 0{,}3767\ldots \cdot 751{,}43$ m $= 283{,}064$ m
- $283{,}064 - 282{,}525 = 0{,}539$

Het verschil in lengte tussen beide rails in de bocht bedraagt 0,54 m = 54 cm.

Opdracht 95 bladzijde 307

Bereken de oppervlakte van de cirkelsector met een middelpuntshoek van α rad en een straal 10 als



1 $\alpha = \pi$ rad

2 $\alpha = 1$ rad

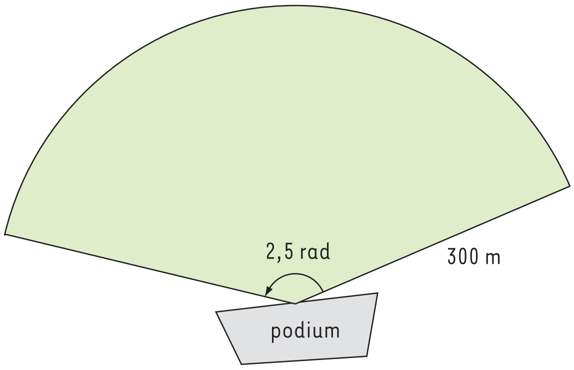
3 $\alpha = 5{,}223$ rad

Cirkel met straal 10

	middelpuntshoek	opp. cirkelsector
	2π rad	$\pi \cdot 10^2 = 100\pi$
1)	π rad	50π
2)	1 rad	50
3)	5,223 rad	$50 \cdot 5{,}223 = 261{,}15$

Opdracht 96 bladzijde 307

Het terrein voor een popconcert heeft de vorm van een cirkelsector met een middelpuntshoek van 2,5 rad en een straal van 300 m.



1 Bereken de omtrek van het terrein.

- omtrek = 300 + 300 + booglengte = 600 + booglengte
- booglengte = $2{,}5 \cdot 300 = 750$

De omtrek van het terrein is 1350 m.

2 Hoeveel concertgangers kunnen op het terrein als men voor de veiligheid 2 m^2 per persoon voorziet?

opp. cirkelsector (zie opdracht 95)

$$= \frac{\pi \cdot 300^2}{2\pi} \cdot 2{,}5 \text{ m}^2$$

$$= 112\,500 \text{ m}^2$$

- aantal concertgangers

$$= \frac{112\,500 \text{ m}^2}{2 \text{ m}^2}$$

$$= 56\,250$$

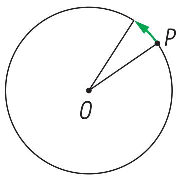
56 250 concertgangers kunnen op dit terrein.

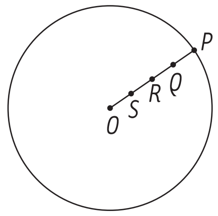
Opdracht 97 bladzijde 307

De snelheid van een punt op een cirkel kan op twee manieren worden gegeven:

– de **hoeksnelheid** (in rad/s) is het aantal radialen waarover *OP* per tijdseenheid draait

– de **baansnelheid** (in m/s) is de afstand die *P* per tijdseenheid aflegt langs de cirkel





Een draaimolen met een straal van 4 meter draait met een hoeksnelheid van 0,5 rad/s.

Bereken de baansnelheden van de punten *P*, *Q*, *R* en *S* die de straal in 4 gelijke stukken verdelen.

hoeksnelheid = 0,5 rad/s

- P: straal = 4 m $\Rightarrow$ baansnelheid = $4 \cdot 0{,}5$ m/s = 2 m/s
- Q: straal = 3 m $\Rightarrow$ baansnelheid = $3 \cdot 0{,}5$ m/s = 1,5 m/s
- R: straal = 2 m $\Rightarrow$ baansnelheid = $2 \cdot 0{,}5$ m/s = 1 m/s
- S: straal = 1 m $\Rightarrow$ baansnelheid = $1 \cdot 0{,}5$ m/s = 0,5 m/s

Opdracht 98 bladzijde 307

De gemiddelde afstand aarde–zon bedraagt 149,6 miljoen km. Als je veronderstelt dat de aarde rond de zon draait in een cirkelvormige baan en je weet dat één omwenteling 365,25 dagen duurt, bereken dan de baansnelheid van de aarde. Druk je resultaat uit in km/h.

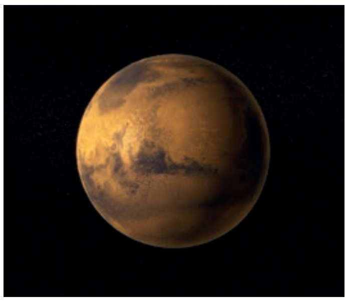
$$\text{baansnelheid} = \frac{149\,600\,000 \cdot 2\pi}{365{,}25 \cdot 24} \text{ km/h}$$

$$= 107\,228 \text{ km/h}$$

Opdracht 99 bladzijde 308

Mars draait rond zijn as met een hoeksnelheid van 0,2552 rad/h.

Hoeveel uren, minuten en seconden telt een dag op Mars?



$$\frac{2\pi \text{ rad}}{0{,}2552 \text{ rad/h}} = 24{,}6206 \text{ h} = 24 \text{ u } 37 \text{ min } 14 \text{ sec}$$

Opdracht 100 bladzijde 308

Een waterrad heeft een straal van 1,5 m. Als de stroom ervoor zorgt dat het rad 8 omwentelingen per minuut maakt, wat is dan de snelheid van de rivierstroom?

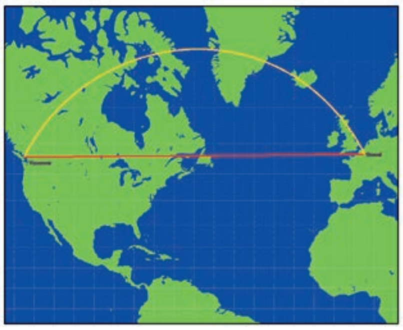
- 8 omwentelingen per minuut
  = 480 omwentelingen per uur

- bijbehorende booglengte
  $= 480 \cdot 2\pi \cdot 1{,}5$ m
  = 4524 m
  = 4,5 km

De snelheid van de rivierstroom is 4,5 km/h.

Opdracht 101 bladzijde 308

Hiernaast zie je twee mogelijke routes om van Brussel naar Vancouver (Canada) te vliegen. De onderste rechte lijn lijkt de kortste route te geven, maar in werkelijkheid wordt die gegeven door de bovenste gebogen lijn.



De vlakke kaart hiernaast geeft namelijk een vervormde weergave van de driedimensionele wereldbol.

Uit de tweede figuur – die het 3D–effect beter weergeeft – kun je afleiden dat de bovenste lijn inderdaad korter blijkt te zijn dan de onderste.

De kortste afstand tussen twee punten op een bol wordt gemeten via een 'grote cirkel', dit is een cirkel waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de bol. Je kunt zo'n cirkel bekijken als de doorsnede van de bol met een vlak door het middelpunt van de bol.

In wat volgt berekenen we de lengtes van de twee aangegeven routes Brussel – Vancouver.

Beide steden liggen op 50° noorderbreedte. Brussel ligt op de meridiaan met oosterlengte 4,3° en Vancouver heeft als westerlengte 123,1°.

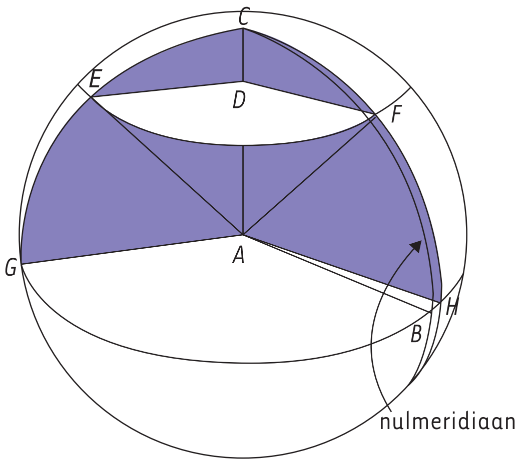
We berekenen eerst de afstand via een parallelcirkel, dit is een cirkel evenwijdig met de evenaar (de rode route).

1 Als Brussel op de figuur voorgesteld wordt door *F* en Vancouver door *E*, welke hoeken geven dan de noorderbreedte van Brussel, respectievelijk Vancouver weer?

noorderbreedte Brussel: $H\hat{A}F$

noorderbreedte Vancouver: $G\hat{A}E$

Om de gevraagde booglengte $|\overset{\frown}{FDE}|$ te berekenen, hebben we de straal $|DF|$ nodig en de hoek $E\hat{D}F$ in radialen.

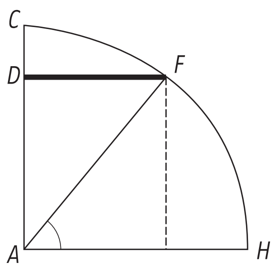


2 De hoek $E\hat{D}F$ kan rechtstreeks uit de gegevens berekend worden.

Geef deze hoek in zestigdelige graden en in radialen.

$E\hat{D}F = 123{,}1° + 4{,}3° = 127{,}4° = 127°24' = 2{,}2235\ldots$ rad

3 Bereken de straal $|DF|$ met behulp van de figuur hiernaast. De straal van de aarde is ongeveer 6378 km.



$$\cos H\hat{A}F = \frac{|DF|}{|AF|}$$
$$\Downarrow$$
$$\cos 50° = \frac{|DF|}{6378}$$
$$\Downarrow$$
$$|DF| = 6378 \cdot \cos 50° = 4099{,}699\ldots \text{ km}$$

4 Bereken nu de booglengte $|\overset{\frown}{FDE}|$ die de afstand Brussel – Vancouver weergeeft volgens de rode route.

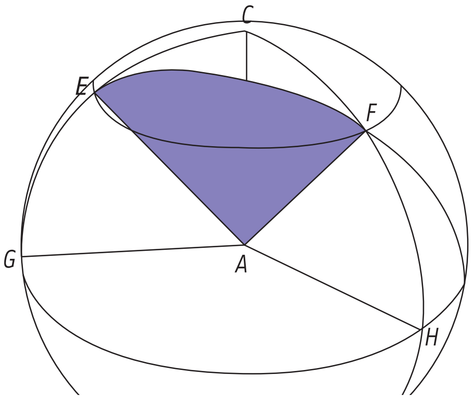
$|\overset{\frown}{FDE}| = 4099{,}699\ldots \cdot 2{,}2235\ldots = 9115{,}88 \text{ km} \approx 9116 \text{ km}$

We berekenen ook de gele route, dit is de afstand via een grote cirkel door de punten F en E.

De grote cirkel door F en E ligt boven de boog $\overset{\frown}{FDE}$ en heeft als middelpunt het middelpunt van de aardbol.

Om de booglengte $|\overset{\frown}{FAE}|$ te berekenen, hebben we de straal $|AF|$ nodig en de hoek $E\hat{A}F$ in radialen.

De straal $|AF|$ is de straal van de aarde en dus 6378 km.



5 De hoek $E\hat{A}F$ kunnen we berekenen via de cosinusregel in de driehoek FAE. Hiervoor hebben we ook $|EF|$ nodig, die we berekenen via een andere driehoek.

$$\begin{aligned}|EF|^2 &= |DE|^2 + |DF|^2 - 2 \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \cos E\hat{D}F \\ &= 4099{,}699\ldots^2 + 4099{,}699\ldots^2 \\ &\quad - 2 \cdot 4099{,}699\ldots \cdot 4099{,}699\ldots \cdot \cos 127{,}4° \\ &= 54032051{,}25\end{aligned}$$
$$\Downarrow$$
$$|EF| = 7350{,}6497\ldots \text{ km}$$

6 Bereken nu de hoek $E\hat{A}F$ (in rad) via de cosinusregel in de driehoek FAE.

$$|EF|^2 = |AE|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |AF| \cdot \cos E\hat{A}F$$

$$\Downarrow$$

$$\cos E\hat{A}F = \frac{|EF|^2 - |AE|^2 - |AF|^2}{-2 \cdot |AE| \cdot |AF|}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos E\hat{A}F = \frac{54032051{,}25 - 2 \cdot 6378^2}{-2 \cdot 6378^2} = 0{,}33587\ldots$$

$$\Downarrow$$

$$E\hat{A}F = 1{,}228\ldots \text{ rad}$$

7 Bereken tenslotte de booglengte $|\overset{\frown}{FAE}|$ die de afstand Brussel – Vancouver weergeeft volgens de gele route.

$$|\overset{\frown}{FAE}| = 6378 \cdot 1{,}228\ldots = 7833{,}88 \text{ km} \approx 7834 \text{ km}$$

8 Hoe groot is het verschil in afstand tussen beide routes?

$$9116 \text{ km} - 7834 \text{ km} = 1282 \text{ km}$$

Opdracht 102 bladzijde 310

Kies het juiste antwoord (er is slechts één juist antwoord per vraag).

1 $\frac{\pi}{3}$ rad en $\frac{4\pi}{3}$ rad zijn

A tegengestelde hoeken

B complementaire hoeken

C supplementaire hoeken

D antisupplementaire hoeken

D

2 De sinus van $\frac{\pi}{4}$ rad is dezelfde als de sinus van

A $\frac{3\pi}{4}$ rad

B $\frac{5\pi}{4}$ rad

C $-\frac{\pi}{4}$ rad

D $-\frac{3\pi}{4}$ rad

A

3 $\sin(\pi - \alpha)$ is gelijk aan

A $\sin(\pi + \alpha)$

B $\cos(\pi + \alpha)$

C $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

D $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

D

4 $\cos(5\pi + \alpha)$ is gelijk aan

A $\cos \alpha$

B $\sin \alpha$

C $-\cos \alpha$

D $-\sin \alpha$

C

Opdracht 103 bladzijde 311
Bepaal exact alle hoeken waarvoor geldt

1 $\cos^2 \alpha = 1$

$\Updownarrow$

$\cos \alpha = \pm 1$

$\Updownarrow$

$\alpha = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

2 $|\sin \alpha| = \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$\alpha = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

3 $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

$\Updownarrow$

$\tan^2 \alpha = 1$

$\Updownarrow$

$\tan \alpha = \pm 1$

$\Updownarrow$

$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 104 bladzijde 311
Bepaal alle hoeken waarvoor de volgende voorwaarde geldt. Rond af op 3 cijfers na de komma.

1 $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$

$\Updownarrow$

$\alpha = \pm 1{,}823 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

2 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

$\Updownarrow$

$\alpha = 0{,}848 + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = 2{,}294 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

3 $\tan \alpha = -2$

$\Updownarrow$

$\alpha = -1{,}107 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 105 bladzijde 311

Is $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ dan is

A $\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

B $\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$

C $0 \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

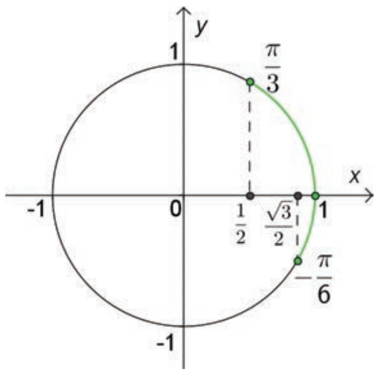
D $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

E $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$

(Bron © VWO 1997, eerste ronde)

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

zodat $\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \to$ B



Opdracht 106 bladzijde 311

Vereenvoudig.

1 $\sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$= \sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$= \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\alpha$

$= 1$

2 $\dfrac{\sin(\alpha + 4\pi) \cdot \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\alpha - 9\pi) \cdot \cos(-\alpha)}$

$= \dfrac{\sin\alpha \cdot (-\sin\alpha)}{\cos(\alpha - \pi) \cdot \cos\alpha}$

$= \dfrac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha}$

$= \tan^2\alpha$

3 $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\tan(7\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)}$

$= \dfrac{-\sin\alpha}{\tan\alpha \cdot (-\cos\alpha)}$

$= \dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha}$

$= 1$

Opdracht 107 bladzijde 312

Op de goniometrische cirkel is

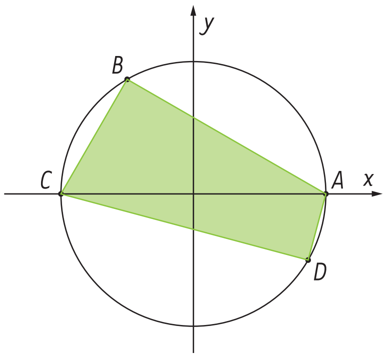
A het beeldpunt van 0°

B het beeldpunt van 120°

C het beeldpunt van 180°

D het beeldpunt van 330°

De oppervlakte van koordenvierhoek *ABCD* is dan gelijk aan



A $\sqrt{3}+1$ **B** $\sqrt{3}-1$ **C** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **E** $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$

(Bron © VWO 1993, eerste ronde

opp. koordenvierhoek *ABCD*

$$= \text{opp. } \Delta\, ABC + \text{opp. } \Delta\, ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \rightarrow C$$

Opdracht 108 bladzijde 312

Kies telkens het juiste antwoord.

1 $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos\alpha = a$ **B** $\sin\alpha = a$ **C** $\tan\alpha = a$

B want $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

2 $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{11\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos\alpha = a$ **B** $\sin\alpha = a$ **C** $\tan\alpha = a$

A want $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$

3 $\frac{\pi}{6}$ en $-\frac{7\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos\alpha = a$ **B** $\sin\alpha = a$ **C** $\tan\alpha = a$

B want $\frac{-7\pi}{6} = (\pi - \frac{\pi}{6}) - 2\pi$

4 $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{7\pi}{6}$ kunnen allebei oplossingen zijn van een vergelijking van de vorm

A $\cos\alpha = a$ **B** $\sin\alpha = a$ **C** $\tan\alpha = a$

C want $\frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi$

Opdracht 109 bladzijde 312

Welke van de volgende uitspraken gelden voor elke α? Verklaar je antwoord.

1 $\sin\alpha = \sin(4\pi + \alpha)$

$\sin(4\pi + \alpha) = \sin(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \sin\alpha \rightarrow$ wel

2 $\sin\alpha = \sin(3\pi - \alpha)$

$\sin(3\pi - \alpha) = \sin(2\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \rightarrow$ wel

3 $\cos\alpha = \cos(3\pi - \alpha)$

$\cos(3\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \rightarrow$ niet

4 $\tan\alpha = \tan(3\pi - \alpha)$

$\tan(3\pi - \alpha) = \tan(2\pi + \pi - \alpha) = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \rightarrow$ niet

5 $\tan\alpha = \tan(3\pi + \alpha)$

$\tan(3\pi + \alpha) = \tan(2\pi + \pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha \rightarrow$ wel

6 $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \rightarrow$ wel

7 $\sin\alpha = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$\cos(-\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(2\pi - \frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \rightarrow$ wel

8 $\sin\alpha = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$

$\cos(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \rightarrow$ wel

9 $\tan\alpha = \tan(4\pi - \alpha)$

$\tan(4\pi - \alpha) = \tan(2 \cdot 2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \rightarrow$ niet

10 $\cos\alpha = \cos(4\pi - \alpha)$

$\cos(4\pi - \alpha) = \cos(2 \cdot 2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \rightarrow$ wel

Opdracht 110 bladzijde 313

Bewijs de volgende formules.

1 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(-(\frac{\pi}{2} - \alpha))$$
$$= -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$
$$= -\cos\alpha$$

2 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(\pi + (\frac{\pi}{2} - \alpha))$$
$$= -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$
$$= -\sin\alpha$$

3 $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \pi) &= \sin(-(\pi - \alpha))\\ &= -\sin(\pi - \alpha)\\ &= -\sin\alpha\end{aligned}$$

4 $\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \pi) &= \cos(-(\pi - \alpha))\\ &= \cos(\pi - \alpha)\\ &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

5 $\tan(\alpha - 3\pi) = \tan\alpha$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - 3\pi) &= \tan(-(3\pi - \alpha))\\ &= -\tan(3\pi - \alpha)\\ &= -\tan(2\pi + \pi - \alpha)\\ &= -\tan(\pi - \alpha)\\ &= \tan\alpha\end{aligned}$$

Opdracht 111 bladzijde 313

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin\frac{7\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5}$

$$\begin{aligned}&= \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\left(2\pi - \frac{7\pi}{5}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{7\pi}{5} + \sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{7\pi}{5} - \sin\frac{7\pi}{5}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{9\pi}{7}-\cos\frac{11\pi}{7}-\cos\frac{13\pi}{7}$

$$= \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{13\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{9\pi}{7}$$

$$= \cos\frac{\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{\pi}{7}) + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{3\pi}{7})$$

$$+ \cos\frac{5\pi}{7} - \cos(2\pi - \frac{5\pi}{7})$$

$$= \cos\frac{\pi}{7} - \cos(-\frac{\pi}{7}) + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos(-\frac{3\pi}{7}) + \cos\frac{5\pi}{7} - \cos(-\frac{5\pi}{7})$$

$$= \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}$$

$$= 0$$

3 $\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{3\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{4}-\cot\frac{7\pi}{4}+\tan\frac{9\pi}{4}-\cot\frac{11\pi}{4}$

$$= 1 - (-1) + 1 - (-1) + 1 - (-1)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 6$$

4 $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{19\pi}{7}}$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\left(2\pi + \left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right)\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$\frac{3\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} - \frac{4\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

5 $\dfrac{\tan\frac{20\pi}{9}-\tan\frac{7\pi}{9}}{\cot\left(-\frac{23\pi}{18}\right)}$

$$= \frac{\tan\frac{20\pi}{9} - \tan\left(2\pi + \left(\pi - \frac{20\pi}{9}\right)\right)}{\cot\left(\frac{-23\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{\tan\frac{20\pi}{9} - \tan\left(\pi - \frac{20\pi}{9}\right)}{\cot\left(\frac{-23\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{\tan\frac{20\pi}{9} + \tan\frac{20\pi}{9}}{\cot\left(-\frac{23\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\frac{40\pi}{18}}{\cot\left(-\frac{23\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\left(2\pi + \frac{4\pi}{18}\right)}{\cot\left(-\pi - \frac{5\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{4\pi}{18}\right)}{-\cot\left(\pi + \frac{5\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{-2\tan\frac{4\pi}{18}}{\cot\frac{5\pi}{18}}$$

$$= \frac{-2\tan\frac{4\pi}{18}}{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{18}\right)}$$

$$= \frac{-2 \tan \frac{4\pi}{18}}{\tan \frac{4\pi}{18}}$$

$$= -2$$

Opdracht 112 bladzijde 313

Welke van de volgende vijf betrekkingen geldt **niet** in elke driehoek *ABC* met hoeken α, β en γ?

A $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$

B $\cos 2\alpha = \cos 2(\beta + \gamma)$

C $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\beta + \gamma}{2}$

D $\cos(\alpha - \beta + \gamma) = \cos(\beta - \alpha - \gamma)$

E $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$

(Bron © VWO 1995, eerste ronde)

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

A) $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha)$

$= \sin \alpha \rightarrow$ wel

B) $\cos 2(\beta + \gamma) = \cos 2(\pi - \alpha)$

$= \cos(2\pi - 2\alpha)$

$= \cos(-2\alpha)$

$= \cos 2\alpha \rightarrow$ wel

C) $\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \tan\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)$

$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$

$= \cot \frac{\alpha}{2} \rightarrow$ niet

D) $\cos(\beta - \alpha - \gamma) = \cos(-(\alpha - \beta + \gamma)$

$= \cos(\alpha - \beta + \gamma) \rightarrow$ wel

E) $\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$

$= \cos\frac{\alpha}{2} \to$ wel

Antwoord C is het juiste.

Opdracht 113 bladzijde 314

Bepaal alle hoeken α waarvoor de volgende gelijkheden gelden.

1 $\sin 4\alpha = \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Updownarrow$

$4\alpha = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ of $4\alpha = \pi - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + k\cdot 2\pi$

$\Updownarrow$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ of $6\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$

$\Updownarrow$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ of $\alpha = \frac{3\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{3}$

$\Updownarrow$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ of $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{18}\right)=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{9}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha + \frac{\pi}{18} = 2\alpha - \frac{\pi}{9} + k \cdot \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$-\alpha = -\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{18} + k \cdot \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$-\alpha = -\frac{3\pi}{18} + k \cdot \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $\sin\alpha=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \pm\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$-3\alpha = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \alpha = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{-7\pi}{12} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

OFWEL $\sin\alpha = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{12})$

$$\Updownarrow$$

$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - (2\alpha + \frac{\pi}{12}))$

$$\Updownarrow$$

$\sin\alpha = \sin(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha)$

$$\Updownarrow$$

$\alpha = \frac{5\pi}{12} - 2\alpha + k \cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - (\frac{5\pi}{12} - 2\alpha) + k \cdot 2\pi$

$$\Updownarrow$$

$3\alpha = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi$ of $-\alpha = \frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi$

$$\Updownarrow$$

$\alpha = \frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ of $\alpha = -\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

4 $\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{9} - 3\alpha\right)$

$$\Updownarrow$$

$\tan\alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{9} - 3\alpha))$

$$\Updownarrow$$

$\tan\alpha = \tan(\frac{7\pi}{18} + 3\alpha)$

$$\Updownarrow$$

$\alpha = \frac{7\pi}{18} + 3\alpha + k \cdot \pi$

$$\Updownarrow$$

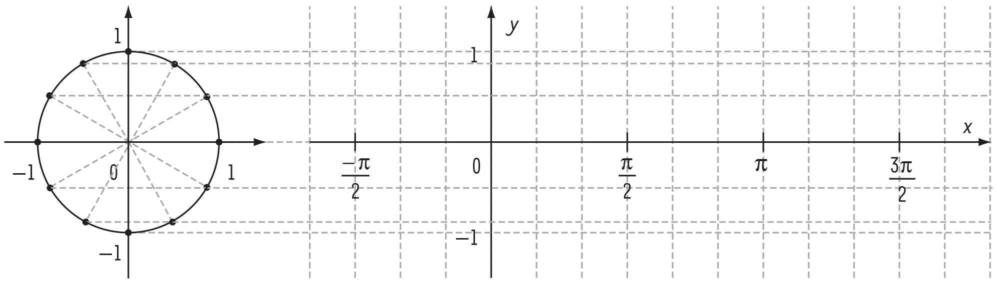
$-2\alpha = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \pi$

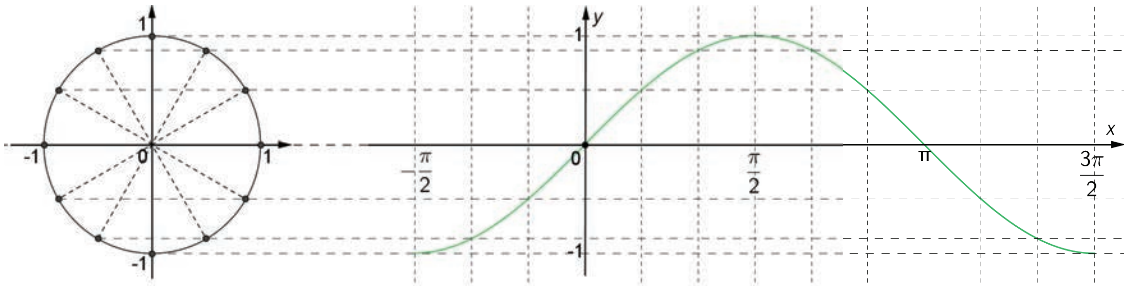
$$\Updownarrow$$

$\alpha = \frac{-7\pi}{36} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 114 bladzijde 314

Teken de sinusfunctie in het interval $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.





Opdracht 115 bladzijde 314

Hoeveel verschillende gehele waarden kan $3 - 3 \cdot |\cos x|$ aannemen?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 6 **E** 7

(Bron © VWO 1998, tweede ronde)

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1$

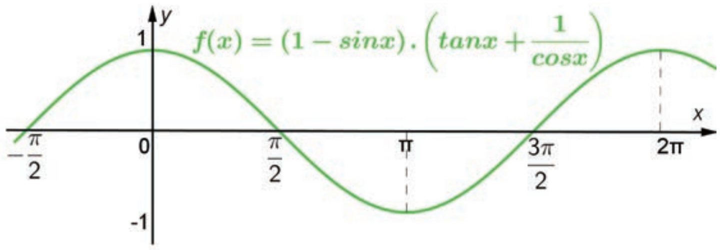
- als $|\cos x| = 0$, dan $3 - 3|\cos x| = 3$
- als $|\cos x| = \dfrac{1}{3}$, dan $3 - 3|\cos x| = 2$
- als $|\cos x| = \dfrac{2}{3}$, dan $3 - 3|\cos x| = 1$
- als $|\cos x| = 1$, dan $3 - 3|\cos x| = 0$

Antwoord C

Opdracht 116 bladzijde 314

Plot de volgende functiegrafieken en leid daaruit een goniometrische identiteit af. Bewijs daarna deze identiteit algebraïsch.

1 $f(x) = (1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \dfrac{1}{\cos x}\right)$



$$f(x) = (1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= (1 - \sin x) \cdot \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

$$= \frac{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{\cos x}$$

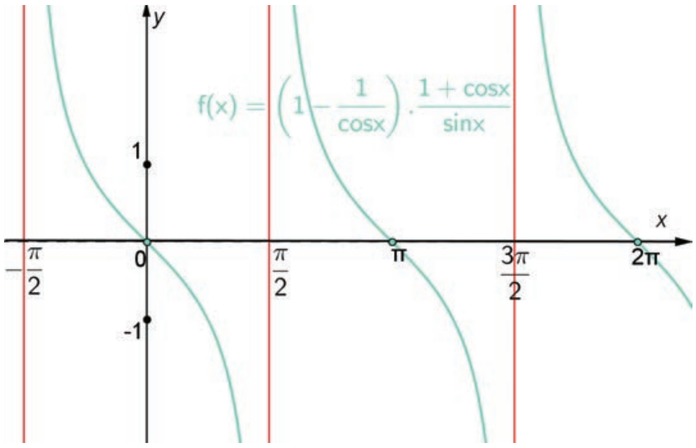
$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \cos x$$

De identiteit is $(1 - \sin x) \cdot \left(\tan x + \dfrac{1}{\cos x}\right) = \cos x$.

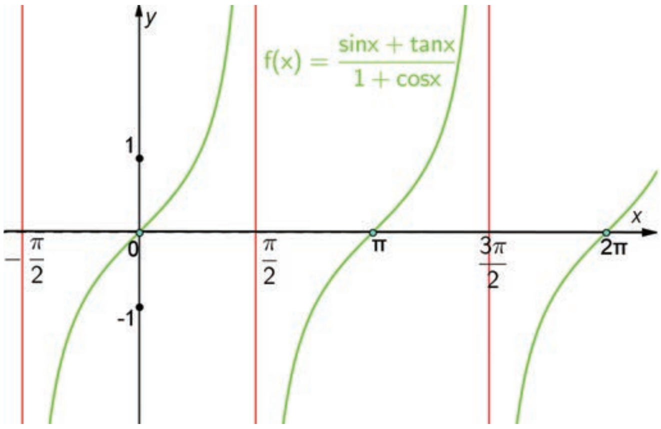
2 $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right) \cdot \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$



$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{\cos x - 1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\sin x}$$
$$= \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x \cdot \sin x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x}$$
$$= -\tan x$$

De identiteit is $\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right) \cdot \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = -\tan x$.

3 $f(x) = \dfrac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x}$



$$f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x}$$

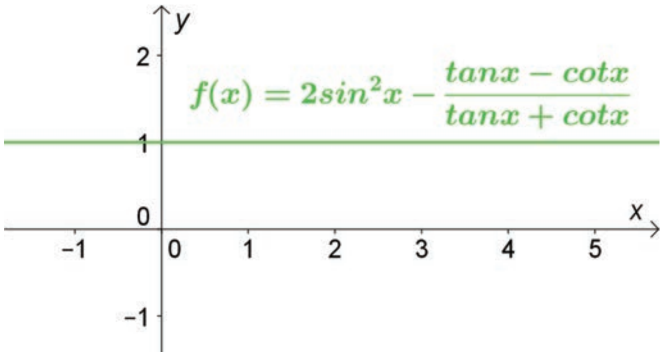
$$= \frac{\dfrac{\sin x \cdot \cos x + \sin x}{\cos x}}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cancel{(\cos x + 1)}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{1 + \cos x}}$$

$$= \tan x$$

De identiteit is $\dfrac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x} = \tan x$

4 $f(x) = 2\sin^2 x - \dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$



$$f(x) = 2\sin^2 x - \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$$

$$= 2\sin^2 x - \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= 2\sin^2 x - \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cancel{\cos x \cdot \sin x}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\cos x \cdot \sin x}}{\sin^2 x + \cos^2 x}}_{1}$$

$$= 2\sin^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

De identiteit is $2\sin^2 x - \dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1$

Opdracht 117 bladzijde 315

Stel dat f een functie is zodanig dat voor elk reëel getal x geldt dat

$f(x) + 2\,f(-x) = \sin x$, dan is $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ gelijk aan

A -1 **B** $-\dfrac{1}{2}$ **C** 0 **D** $\dfrac{1}{2}$ **E** 1

(Bron © University of South Carolina High School Math Contest, 2005)

- $f(x) + 2\,f(-x) = \sin x$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sin x - 2\,f(-x)$$

- $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} - 2\,f(-\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\,f(-\frac{\pi}{2})$ (1)

- $f(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) - 2\,f(\frac{\pi}{2}) = -1 - 2\,f(\frac{\pi}{2})$ (2)

- (1) & (2) : $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\cdot(-1 - 2\,f(\frac{\pi}{2}))$

$$= 1 + 2 + 4\,f(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\Downarrow$$

$$-3\,f(\tfrac{\pi}{2}) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = -1 \rightarrow A$$

Opdracht 118 bladzijde 315

Herleid de volgende functies tot algemene sinusfuncties.

1 $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin(\pi + (x + \frac{\pi}{3}))$

$= \sin(x + \frac{4\pi}{3})$

2 $y = \sin(-2(x-1))$

$= -\sin(2(x - 1))$

$= \sin(\pi + 2(x - 1))$

$= \sin(\pi + 2x - 2)$

$= \sin(2 \cdot (x + \frac{\pi - 2}{2}))$

3 $y = -\frac{1}{2}\sin\left(-3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5$

$= \frac{1}{2}\sin(3(x - \frac{\pi}{2})) + 5$

Opdracht 119 bladzijde 315

Tijdens een gehoortest krijgt een proefpersoon een aantal tonen te horen die variëren in frequentie en sterkte. Op een monitor worden de tonen zichtbaar gemaakt.
De proefpersoon krijgt vier tonen te horen met vergelijking:

1 $y = 5\sin(400\pi t)$

$a = 5 \text{ , } p = \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200} \rightarrow f_1$

2 $y = 5\sin(800\pi t)$

$a = 5 \text{ , } p = \frac{2\pi}{800\pi} = \frac{1}{400} \rightarrow f_4$

3 $y = 5\sin(1000\pi t)$

$a = 5 \text{ , } p = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500} \rightarrow f_3$

4 $y = 2\sin(1000\pi t)$

$a = 2$, $p = \dfrac{2\pi}{1000\pi} = \dfrac{1}{500} \rightarrow f_2$

Opdracht 120 bladzijde 316

De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.
Bepaal een mogelijk voorschrift.

1 • mogelijk startpunt: $(\frac{\pi}{2}, 1)$, dus $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$

• amplitude = 3, dus $a = 3$

• periode = 4π, dus $\dfrac{2\pi}{b} = 4\pi$

$b = \dfrac{1}{2}$

$y = 3\sin(\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})) + 1$

2 • mogelijk startpunt: $(-3, -2)$, dus $c = -3$, $d = -2$

• amplitude = 2, dus $a = 2$

• periode = 8, dus $\dfrac{2\pi}{b} = 8$

$b = \dfrac{\pi}{4}$

$y = 2\sin(\frac{\pi}{4}(x + 3)) - 2$

3 • mogelijk startpunt: $(-1, -\frac{7}{2})$, dus $c = -1$, $d = -\frac{7}{2}$

• amplitude = $\frac{5}{2}$, dus $a = \frac{5}{2}$

• periode = 4, dus $\dfrac{2\pi}{b} = 4$

$b = \dfrac{\pi}{2}$

$y = \frac{5}{2}\sin(\frac{\pi}{2}(x + 1)) - \frac{7}{2}$

4 • mogelijk startpunt: $(\frac{\pi}{4}, 1)$, dus $c = \frac{\pi}{4}$, $d = 1$

• amplitude $= \frac{5}{2}$, dus $a = \frac{5}{2}$

• periode $= \pi$, dus $\frac{2\pi}{b} = \pi$

$b = 2$

$y = \frac{5}{2}\sin(2(x - \frac{\pi}{4})) + 1$

Opdracht 121 bladzijde 317

Bepaal het voorschrift van een mogelijke periodieke functie met de volgende kenmerken.

1 amplitude: 3
periode: 10
faseverschuiving: 2

amplitude $= 3$, dus $a = 3$

periode $= 10$, dus $\frac{2\pi}{b} = 10$

$b = \frac{\pi}{5}$

faseverschuiving $= 2$, dus $c = 2$

mogelijk voorschrift: $y = 3\sin(\frac{\pi}{5}(x - 2))$

2 amplitude: 5
periode: $\frac{\pi}{2}$
faseverschuiving: π
verticale verschuiving: -4

amplitude $= 5$, dus $a = 5$

periode $= \frac{\pi}{2}$, dus $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$

$b = 4$

faseverschuiving $= \pi$, dus $c = \pi$

verticale verschuiving $= -4$, dus $d = -4$

mogelijk voorschrift: $y = 5\sin(4(x - \pi)) - 4$

3 amplitude: 2
periode: 3π
faseverschuiving: $-\frac{1}{2}$

amplitude = 2, dus a = 2

periode = 3π, dus $\frac{2\pi}{b} = 3\pi$

$b = \frac{2}{3}$

faseverschuiving = $-\frac{1}{2}$, dus c = $-\frac{1}{2}$

mogelijk voorschrift: $y = 2\sin\left(\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$

4 amplitude: $\frac{7}{2}$
periode: 3π
faseverschuiving: $-\frac{\pi}{3}$
verticale verschuiving: 5

amplitude = $\frac{7}{2}$, dus a = $\frac{7}{2}$

periode = 3π, dus $\frac{2\pi}{b} = 3\pi$

$b = \frac{2}{3}$

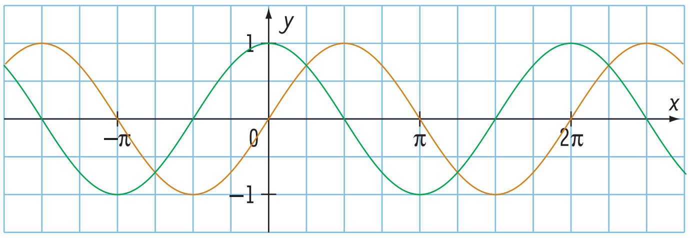
faseverschuiving = $-\frac{\pi}{3}$, dus c = $-\frac{\pi}{3}$

verticale verschuiving = 5, dus d = 5

mogelijk voorschrift: $y = \frac{7}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) + 5$

Opdracht 122 bladzijde 317

De grafiek van de cosinusfunctie is een verschuiving van de grafiek van de sinusfunctie.



1 Welke grafiek stelt de cosinusfunctie voor?

De groene grafiek stelt de cosinusfunctie voor.

2 Kijk naar de grafieken hierboven en vul aan: $\cos x = \sin(x$ .... $)$.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

3 Verklaar de bovenstaande gelijkheid door gebruik te maken van formules voor verwante hoeken.

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ complementaire hoeken

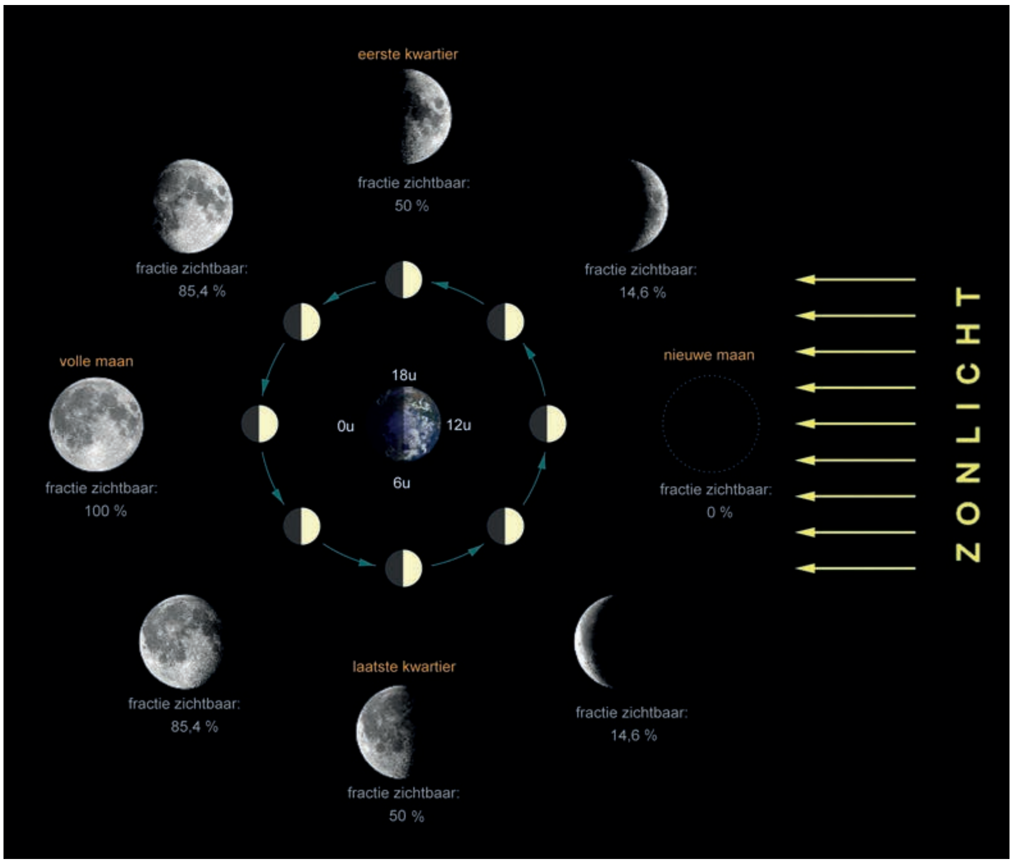
$= \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ supplementaire hoeken

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Opdracht 123 bladzijde 318

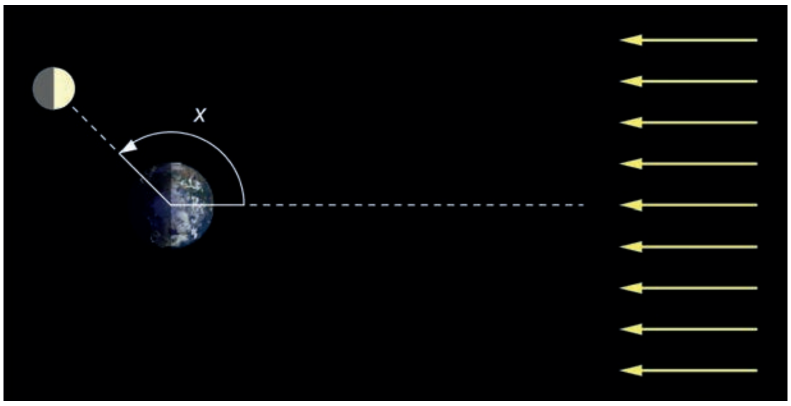
Terwijl de aarde rond de zon draait, draait de maan in tegenwijzerzin om de aarde. De zon verlicht steeds de helft van de maanbol, maar van op aarde zien we die verlichte helft zelden volledig. Zo ontstaan de schijngestalten van de maan: nieuwe maan, eerste kwartier, volle maan en laatste kwartier.



Bij 'nieuwe maan' is de verlichte helft vanaf de aarde niet te zien. Het verlichte deel dat zichtbaar is, neemt vanaf dan toe. Is de maan 45° verder gedraaid, dan is een smalle sikkel zichtbaar, die overeenkomt met 14,6 % van de totale vanaf de aarde zichtbare maanoppervlakte. Bij het 'eerste kwartier' is precies de helft van dit deel zichtbaar, waarna het toeneemt tot 100 %, bij 'volle maan', om vervolgens opnieuw af te nemen tot 0 %.

Het percentage F van het vanaf de aarde zichtbare maanoppervlak dat verlicht is, hangt af van de hoek x in radialen tussen de verbindingslijn aarde-zon en aarde-maan, met $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. De formule is:

$$F(x) = 50\,(1 - \cos x)$$



1 Bepaal x en $F(x)$ bij volle maan.

$x = \pi$

$F(\pi) = 50 \cdot (1 - \cos \pi) = 100$

2 Bepaal x en $F(x)$ bij nieuwe maan.

$x = 0$

$F(0) = 50 \cdot (1 - \cos 0) = 0$

3 Bepaal x en $F(x)$ bij het eerste of het laatste kwartier.

- **eerste kwartier:**

  $x = \frac{\pi}{2}$

  $F(\frac{\pi}{2}) = 50 \cdot (1 - \cos \frac{\pi}{2}) = 50$

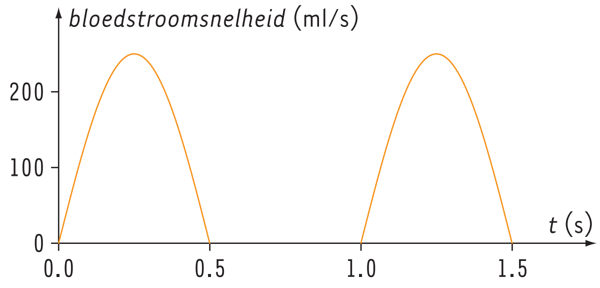
- **laatste kwartier:**

  $x = \frac{3\pi}{2}$

  $F(\frac{3\pi}{2}) = 50 \cdot (1 - \cos \frac{3\pi}{2}) = 50$

Opdracht 124 bladzijde 319

Bij een volwassene in rust pompt het hart bloed in de grote bloedsomloop.
De bloedstroomsnelheid kan benaderd worden door het positieve deel van een algemene sinusfunctie waarvan de grafiek gegeven is.



Bij inspanning verdubbelt de frequentie van de cyclus en wordt de bloedstroomsnelheid vier keer zo groot.

Bij welke van de volgende voorschriften is het positieve deel de beste benadering van de bloedstroomsnelheid bij inspanning?

A $1000 \sin(2\pi t)$

B $1000 \sin(4\pi t)$

C $1000 \sin(8\pi t)$

D $2000 \sin(\pi t)$

(Bron: toelatingsproef arts-tandarts)

bij gegeven grafiek:

– amplitude = 250, dus a = 250

– periode = 1, dus $\frac{2\pi}{b} = 1$, zodat frequentie = $\frac{1}{1} = 1$

$b = 2\pi$

voorschrift: $y = 250 \sin(2\pi\, t)$

bij nieuw voorschrift:

– bloedstroomsnelheid vier keer zo groot, dus a = $4 \cdot 250 = 1000$

– frequentie verdubbelt, dus frequentie = $2 \cdot 1 = 2$

zodat periode = $\frac{1}{2}$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{2}$$

$$b = 4\pi$$

voorschrift: $y = 1000 \sin(4\pi\, t) \rightarrow$ B

Opdracht 125 bladzijde 320

Onder de astronomische daglengte verstaan we de tijd die verloopt tussen zonsopgang en zonsondergang. Voor Ukkel bedraagt deze daglengte ongeveer:

21.01	21.02	21.03	21.04	21.05	21.06	21.07	21.08	21.09	21.10	21.11	21.12
8,7	10,5	12,3	14,2	15,8	16,5	15,8	14,2	12,3	10,4	8,7	8,0

1 Gebruik een grafisch rekentoestel (of computer) om de best passende algemene sinusfunctie te vinden die de astronomische daglengte uitdrukt in functie van het dagnummer. Laat hiervoor 21 januari corresponderen met het dagnummer 21.

L1	L2
21	8,7
52	10,5
80	12,3
111	14,2
141	15,8
172	16,5
202	15,8
233	14,2
264	12,3
294	10,4
325	8,7
355	8,0

via sinusregressie :

$y = 4{,}1654 \cdot \sin(0{,}0167\,x - 1{,}3034) + 12{,}1613$

2 Bepaal de daglengte op 31 mei met deze algemene sinusfunctie.

31 mei heeft dagnummer 151

$y = 16{,}0704$ u $\approx 16{,}1$ u $= 16$ u 4 min

3 De leg van kippen is sterk afhankelijk van de lengte van de dag. Als het minder dan 13 uren per dag licht is, stoppen kippen met het leggen van eieren.
Wanneer is het legseizoen in Ukkel?

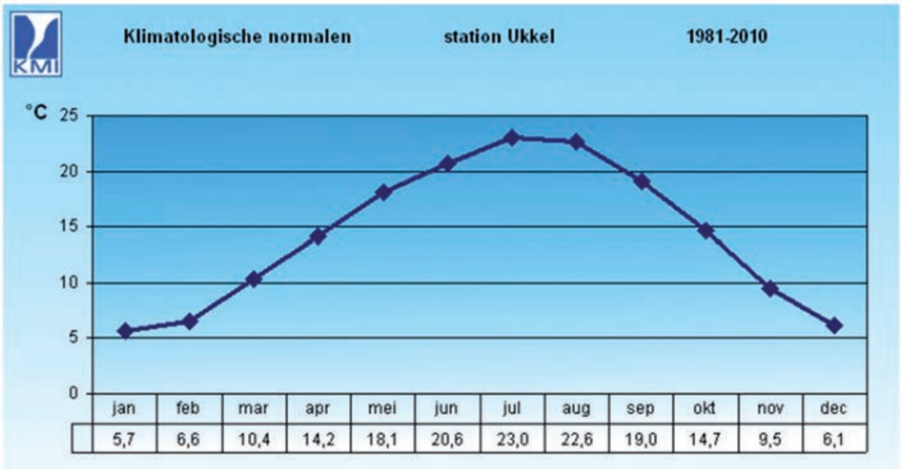
Snijpunten zoeken met rechte met vgl $y = 13$:

$x_1 = 90{,}19$ en $x_2 = 254{,}04$

Het legseizoen in Ukkel is van 31 maart tot 11 september.

Opdracht 126 bladzijde 320

De gemiddeldes van de maximumtemperaturen in Ukkel over de periode 1981–2010 zijn gegeven.



1 Bepaal met de gegevens van januari en juli een voorschrift van de vorm $T(t) = a\sin(b(t-c)) + d$ met de temperatuur T in °C en t het nummer van de maand. Neem hierbij januari als maand 1, februari als maand 2 …

- $a = \dfrac{23{,}0 - 5{,}7}{2} = 8{,}65$
- periode = 12, dus $\dfrac{2\pi}{b} = 12$

  $b = \dfrac{\pi}{6}$
- maximum bij $t = 7$ i.p.v. bij $t = \dfrac{12}{4} = 3$ (maximum wordt bereikt als $\dfrac{1}{4}$ van de periode verstreken is), dus $c = 4$
- maximum is 23,0 i.p.v. 8,65,

  dus $d = 23{,}0 - 8{,}65 = 14{,}35$

  $T(t) = 8{,}65\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(t - 4)\right) + 14{,}35$

2 Bereken met de gevonden formule de temperatuur voor elke maand.
Voor welke maand is de afwijking tussen je model en de werkelijkheid het grootst?

(Bron: *www.meteo.be*)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T(t)	5,7	6,9	10,0	14,4	18,7	21,8	23	21,8	18,7	14,4	10,0	6,9
A	0	+0,3	−0,4	+0,2	+0,6	+1,2	0	−0,8	−0,3	−0,3	+0,5	+0,8

A = afwijking tussen model en werkelijkheid

Voor t = 6 (maand juni) is de afwijking het grootst.

Opdracht 127 bladzijde 321

Een automobilist ziet de reflecterende pedalen van een fietser voor hem in een rechte lijn op en neer gaan. Die op– en neergaande beweging kan voor het rechterpedaal beschreven worden met de functie met voorschrift

$$h(t) = 17 \sin 2\pi t + 28$$

waarbij h de hoogte van het pedaal t.o.v. het wegdek (in cm) en t de tijd (in s) voorstelt.

1 Wat betekenen de getallen 17 en 28 in deze situatie?

maximale hoogte van het pedaal = (28 + 17) cm
= 45 cm

minimale hoogte van het pedaal = (28 – 17) cm
= 11 cm

28 geeft de gemiddelde hoogte van het pedaal weer, 17 geeft de maximale afwijking t.o.v. deze gemiddelde hoogte weer.

2 Hoe lang duurt één omwenteling?

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Eén omwenteling duurt 1 seconde.

3 Bepaal het voorschrift dat de op– en neergaande beweging van het linkerpedaal beschrijft.

Het linkerpedaal ligt een halve periode voor (of achter) bij het rechterpedaal, dus $c = \frac{1}{2}$.

$$h(t) = 17 \cdot \sin(2\pi(t - \tfrac{1}{2})) + 28$$

4 Eenmaal ronddraaien van de trappers brengt de fiets 5 meter vooruit.
Bereken de snelheid van de fietser in km/h.

Eén omwenteling duurt 1 seconde (zie 2).
Dus:

per seconde: 5 m
per minuut: $60 \cdot 5$ m = 300 m
per uur: $60 \cdot 300$ m = 18000 m = 18 km
gevraagde snelheid = 18 km/h

Opdracht 128 bladzijde 321
Aan welke van de rechtse uitdrukkingen zijn de linkse gelijk?

1 $\cos 3\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha)\\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \to B\end{aligned}$$

2 $\cos 4\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha &= \cos(2 \cdot 2\alpha)\\ &= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \to C\end{aligned}$$

3 $\sin 3\alpha$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha)\\ &= \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha \to A\end{aligned}$$

4 $\sin 4\alpha$

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha &= \sin(2 \cdot 2\alpha)\\ &= 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \to D\end{aligned}$$

Opdracht 129 bladzijde 322

Gegeven: $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ met $\alpha \in$ III en $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ met $\beta \in$ II.

- $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ en $\alpha \in$ III

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

- $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ en $\beta \in$ II

$$\Downarrow$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Bereken de volgende goniometrische getallen, zonder gebruik te maken van je rekentoestel.

1 $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= \frac{25}{169} - \frac{144}{169}$$
$$= -\frac{119}{169}$$

2 $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$= 2\cdot\frac{-12}{13}\cdot\frac{-5}{13}$$
$$= \frac{120}{169}$$

3 $\cos(\alpha - \beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= \frac{-5}{13} \cdot \frac{-4}{5} + \frac{-12}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{20 - 36}{65}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

4 $\cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= \frac{-5}{13} \cdot \frac{-4}{5} - \frac{-12}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{20 + 36}{65}$$

$$= \frac{56}{65}$$

5 $\sin(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= \frac{-12}{13} \cdot \frac{-4}{5} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{48 + 15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

6 $\sin(\alpha + \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$= \frac{-12}{13} \cdot \frac{-4}{5} + \frac{-5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{48 - 15}{65}$$

$$= \frac{33}{65}$$

Opdracht 130 bladzijde 322

Vereenvoudig.

1 $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha}$

$$= \frac{\cancel{2}\cos \cancel{2\alpha} \cdot \sin \alpha}{\cancel{2}\sin 2\alpha \cdot \cancel{\cos 2\alpha}}$$

$$= \frac{\cancel{\sin}\ \alpha}{2\ \cancel{\sin}\ \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{2 \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \sec \alpha$$

2 $\dfrac{\cos 4\alpha - 1}{\sin \alpha - \sin 3\alpha}$

$$= \frac{1 - 2\sin^2 2\alpha - 1}{2 \cos 2\alpha \cdot \sin(-\alpha)}$$

$$= \frac{-\cancel{2}\sin^2 2\alpha}{-\cancel{2}\cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cdot 2\ \cancel{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha}{\cos 2\alpha \cdot \cancel{\sin \alpha}}$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \tan 2\alpha$$

3 $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 2\alpha}$$

$$= \frac{2\sin 2\alpha\cdot\cos(-\alpha) + \sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\cos(-\alpha) + \cos 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\cdot\cancel{(2\cos\alpha + 1)}}{\cos 2\alpha\cdot\cancel{(2\cos\alpha + 1)}}$$

$$= \tan 2\alpha$$

4 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

$$= \frac{\cancel{2}\,\cancel{\sin\alpha}\cdot\cos\beta}{-\cancel{2}\,\cancel{\sin\alpha}\cdot\sin\beta}$$

$$= -\cot\beta$$

Opdracht 131 bladzijde 322

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$= \tan\alpha + \tan\beta$$

2 $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

3 $1+\cos 2\alpha = 2-\tan\alpha\cdot\sin 2\alpha$

$$2-\tan\alpha\cdot\sin 2\alpha$$

$$= 2-\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos}\ \alpha}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cancel{\cos}\ \alpha$$

$$= 2-2\sin^2\alpha$$

$$= 1+1-2\sin^2\alpha$$

$$= 1+\cos 2\alpha$$

4 $\sin 2\alpha = \dfrac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

$$\frac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha \rightarrow 1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}$$

$$= 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$

$$= \sin 2\alpha$$

5 $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

$$\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}_{1}$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha$$

Opdracht 132 bladzijde 322

Bereken $\sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$ zonder rekentoestel.

$$\sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{96}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{96} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{32}$$

Opdracht 133 bladzijde 322

Kies telkens het juiste antwoord.

1 $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\tan\alpha =$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$= (\cos\alpha + 1)\cdot\tan\alpha$

$= \sin\alpha + \tan\alpha \rightarrow A$

2 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{2}{1+\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$= -1 \rightarrow B$

3 $\tan\dfrac{\alpha}{2} - \cot\dfrac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{-\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha}$$

$= -2\cot\alpha \rightarrow D$

Opdracht 134 bladzijde 323

Als $\tan\alpha = 3$ en $\cot\beta = 2$, bereken dan $\cos^2(\alpha+\beta)$ zonder rekentoestel.

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

  $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

  $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+9} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

- $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = 3 \cdot \dfrac{\pm 1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\pm 3}{\sqrt{10}}$

- $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

  $\cot^2\beta + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\beta}$

  $\sin^2\beta = \dfrac{1}{\cot^2\beta + 1} = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \sin\beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

- $\cos\beta = \cot\beta \cdot \sin\beta = 2 \cdot \dfrac{\pm 1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{5}}$

- $\cos^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{50}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

OFWEL $\cos^2(\alpha+\beta) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{-3}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

$$\text{OFWEL } \cos^2(\alpha + \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

$$\text{OFWEL } \cos^2(\alpha + \beta) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} - \frac{-3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{50}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{50}$$

Opdracht 135 bladzijde 323

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin\frac{\alpha}{2}$ als $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ en $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$\cos\alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \text{ dus } \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

$$\text{dus } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

2 $\cos\frac{\alpha}{2}$ als $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ en $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

· $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

$$\Downarrow \qquad \alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

· $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2} = \frac{-\frac{4}{5} + 1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \text{ dus } \frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

dus $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

3 $\sin\frac{\alpha}{2}$ als $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ en $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dus +

- $\cos\alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dus $\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

dus $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Opdracht 136 bladzijde 323

Als $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{4}$, dan is $\cos 2\alpha$ gelijk aan

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$1^3 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{1} = \frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{4} = 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2 2\alpha = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos 2\alpha = 0 \rightarrow A$$

Opdracht 137 bladzijde 323

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}$

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin(\alpha+\beta)\cdot\cancel{\cos(\alpha-\beta)}}{\cancel{2}\cos(\alpha+\beta)\cdot\cancel{\cos(\alpha-\beta)}}$$

$$= \tan(\alpha+\beta)$$

2 $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$= \frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

DEN5A16H_H5.indd 461 13/08/13 08:03

3 $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}+\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}-\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

$$=\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)+(\tan\alpha-\tan\beta)\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)}{1-\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta}$$

$$\cdot\frac{1-\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta}{(\tan\alpha+\tan\beta)(1+\tan\alpha\cdot\tan\beta)-(\tan\alpha-\tan\beta)\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\cancel{\tan\beta}+\cancel{\tan^2\alpha\cdot\tan\beta}+\tan\alpha\cdot\tan^2\beta+\tan\alpha-\cancel{\tan\beta}-\cancel{\tan^2\alpha\cdot\tan\beta}+\tan\alpha\cdot\tan^2\beta}{\cancel{\tan\alpha}+\tan\beta+\tan^2\alpha\cdot\tan\beta+\cancel{\tan\alpha\cdot\tan^2\beta}-\cancel{\tan\alpha}+\tan\beta+\tan^2\alpha\cdot\tan\beta-\cancel{\tan\alpha\cdot\tan^2\beta}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\tan\alpha\,(1+\tan^2\beta)}{\cancel{2}\tan\beta\,(1+\tan^2\alpha)}$$

$$=\frac{\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}}{\tan\beta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{1}{\cos^{\cancel{2}}\beta}\cdot\frac{\cancel{\cos\beta}}{\sin\beta}\cdot\cos^{\cancel{2}}\alpha$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\beta\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\beta\cdot\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

4 $\tan 2\alpha = \tan\alpha \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos 2\alpha}\right)$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{2}{1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{2}{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha}$$

$$= \tan\alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}\right)$$

5 $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 4\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

6 $\sin 2\alpha = \dfrac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha}$

$$\frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha}{\dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} - \tan \alpha}$$

$$= \frac{2 \tan^2 \alpha}{\cancel{1 - \tan^2 \alpha}} \cdot \frac{\cancel{1 - \tan^2 \alpha}}{2 \tan \alpha - \tan \alpha \cdot (1 - \tan^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2 \tan^{\cancel{2}} \alpha}{\cancel{\tan} \alpha \, (1 + \tan^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2 \, \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

$$= 2 \, \frac{\sin \alpha}{\cancel{\cos} \alpha} \cdot \cos^{\cancel{2}} \alpha$$

$$= \sin 2\alpha$$

7 $\dfrac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

$$\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cancel{\cos} \alpha} \cdot \frac{\cancel{\cos} \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

$$= \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

8 $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1 + \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}$$

9 $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

$$\begin{aligned}
\cos 4\alpha &= \cos(2 \cdot 2\alpha)\\
&= 2\cos^2 2\alpha - 1\\
&= 2 \cdot (2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1\\
&= 2 \cdot (4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1\\
&= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1
\end{aligned}$$

10 $\cot 2\alpha + \tan \alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$

$\cot 2\alpha + \tan \alpha$

$$= \frac{1}{\tan 2\alpha} + \tan\alpha$$

$$= \frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha} + \tan\alpha$$

$$= \frac{1 - \tan^2\alpha + 2\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

$$= \frac{1 + \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^{\cancel{2}}\alpha} \cdot \frac{\cancel{\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

Opdracht 138 bladzijde 324

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\sin 3\alpha$

$$= \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

2 $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha)\\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha\\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

3 $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

$$\begin{aligned}\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha + \alpha)\\ &= \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha\cdot\tan\alpha}\\ &= \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}\\ &= \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha\cdot(1-\tan^2\alpha)}{\cancel{1-\tan^2\alpha}}\cdot\frac{\cancel{1-\tan^2\alpha}}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}\\ &= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

4 $3 \sin \alpha - \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha)$

$3 \sin \alpha - \sin 3\alpha$

$= 3 \sin \alpha - \sin (2\alpha + \alpha)$

$= 3 \sin \alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$

$= 3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - (1 - 2 \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha$

$= 3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha\ (1 - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 2 \sin^3 \alpha$

$= 4 \sin^3 \alpha$

$= 2 \sin \alpha \cdot 2 \sin^2 \alpha$ $\qquad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$= 2 \sin \alpha \cdot (1 - \cos 2\alpha)$

5 $\cos^2 2\alpha - \cos^2 \alpha = -\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$

$\cos^2 2\alpha - \cos^2 \alpha$

$= (\cos 2\alpha - \cos \alpha) \cdot (\cos 2\alpha + \cos \alpha)$

$$= -2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= -2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$= -\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha$

6 $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin 3\alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin (3\alpha - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$= 2$

Opdracht 139 bladzijde 324

Vereenvoudig

1 $\dfrac{\cos n\alpha - \cos(n+2)\alpha}{\sin(n+2)\alpha - \sin n\alpha}$

$$= \frac{-\cancel{2}\sin(n+1)\alpha \cdot \sin(-\alpha)}{\cancel{2}\cos(n+1)\alpha \cdot \sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\alpha \cdot \cancel{\sin\alpha}}{\cos(n+1)\alpha \cdot \cancel{\sin\alpha}}$$

$$= \tan(n+1)\alpha$$

2 $\cos^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + \sin^3\alpha \cdot \sin 3\alpha$

$$= \cos^3\alpha \cdot \cos(2\alpha + \alpha) + \sin^3\alpha \cdot \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$= \cos^3\alpha \cdot (\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha)$$
$$+ \sin^3\alpha \cdot (\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha)$$

$$= \cos^4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos^3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \sin^3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$+ \sin^4\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$= \cos 2\alpha \cdot (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha\ \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha}$$

$$= \cos 2\alpha \cdot (\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha)$$

$$= \cos 2\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2$$

$$= \cos 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha$$

$$= \cos^3 2\alpha$$

Opdracht 140 bladzijde 324

1 Bewijs de **omgekeerde formules van Simpson**, die toelaten een product te vervangen door een som of een verschil.

a $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

$$\frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{(x+y)+(x-y)}{2} \cdot \cos\frac{(x+y)-(x-y)}{2}$$
$$= \sin x \cdot \cos y$$

b $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$$\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{(x+y)+(x-y)}{2} \cdot \cos\frac{(x+y)-(x-y)}{2}$$
$$= \cos x \cdot \cos y$$

c $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

$$\frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2 \cdot \sin\frac{(x-y)+(x+y)}{2} \cdot \sin\frac{(x-y)-(x+y)}{2}\right)$$
$$= -\sin x \cdot \sin(-y)$$
$$= \sin x \cdot \sin y \qquad \sin(-y) = -\sin y$$

2 Zet om naar een som of een verschil.

a $\sin 3x \cdot \cos y$

$$= \frac{1}{2}(\sin(3x + y) + \sin(3x - y))$$

b $\cos 5x \cdot \cos 3y$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(5x + 3y) + \cos(5x - 3y))$$

c $\sin 4x \cdot \sin 5x$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(4x - 5x) - \cos(4x + 5x))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(-x) - \cos 9x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x - \cos 9x)$$

Opdracht 141 bladzijde 324

Als je de grafiek van $f: x \mapsto \sin^2 x$ bekijkt, dan kun je vermoeden dat deze functie een algemene sinusfunctie voorstelt.

1 Toon aan dat $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 x\right)}{2} = \frac{2\sin^2 x}{2} = \sin^2 x$$

2 Vertrek van de bovenstaande formule en gebruik formules van verwante hoeken om aan te tonen dat *f* een algemene sinusfunctie is.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Opdracht 142 bladzijde 325

In een driehoek *ABC* met hoeken α, β en γ geldt dat $\dfrac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma} = \sin\alpha$.
Toon aan dat ΔABC rechthoekig is in *A*.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \qquad (*)$$

$$\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cancel{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}}{\cancel{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cancel{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}}$$

$$= \tan\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) \qquad (*)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\text{zodat } \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma} = \sin\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{of} \quad \cos\alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\alpha = \pi + k\cdot 2\pi}_{} \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

onmogelijk $\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

in een driehoek: $\qquad$ k = 0, want $0 < \alpha < \pi$

$$0 < \alpha < \pi$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Updownarrow$$

ΔABC is rechthoekig in A

Opdracht 143 bladzijde 325

α, β en γ zijn de hoeken van een driehoek. Eén van de hoeken heeft als grootte het gemiddelde van de andere twee hoekgroottes.

Toon aan dat $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\sqrt{3}$.

- $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- stel $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \gamma$

  dan $\alpha + \beta = 2\gamma$

  $2\gamma + \gamma = \pi$

  $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$

- $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cancel{\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}}{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1\right)}}$$

$$= \sqrt{3}$$

Opdracht 144 bladzijde 325

Bewijs dat de volgende gelijkheden gelden in elke driehoek *ABC* met hoeken α, β en γ.

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

1 $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(\pi - \left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(\alpha+\beta\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

2 $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$

$$\begin{aligned}
&\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \\
&= \tan(\alpha+\beta)\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta) + \tan\gamma \\
&= \tan(\pi-\gamma)\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta) + \tan\gamma \\
&= -\tan\gamma\cdot(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta) + \tan\gamma \\
&= \tan\gamma\cdot(-1+\tan\alpha\cdot\tan\beta+1) \\
&= \tan\gamma\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta \\
&= \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma
\end{aligned}$$

3 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

$$\begin{aligned}
&\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos(2\pi - 2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos(2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + (2\cos^2(\alpha+\beta)-1) \\
&= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) - 1 \\
&= 2\cos(\pi-\gamma)\cdot(2\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)) - 1 \\
&= -2\cos\gamma\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos\beta - 1 \\
&= -1 - 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma
\end{aligned}$$

4 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ $\qquad\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2(\pi - (\alpha+\beta)) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) \\
&= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \\
&= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cdot(2\cdot\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)) \\
&= 1 + \cos(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos\beta \\
&= 1 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma
\end{aligned}$$

5 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\alpha=\cos\left(2\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1-\cos\beta}{2}-\sin^2\left(\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=1-\cos\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\cdot\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{-\beta}{2}\right)$$

$$=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}$$

$$=1-2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

Opdracht 145 bladzijde 325

Bepaal a en b als

1 $\left(\cos\frac{x}{2}+\cos 2x+\cos\frac{7x}{2}+\cos 5x\right)\cdot\sin\frac{3x}{4}=\sin ax\cdot\cos bx$

$$\Leftrightarrow \left(2\cdot\cos\frac{5x}{4}\cdot\cos\left(\frac{-3x}{4}\right)+2\cdot\cos\frac{17x}{4}\cdot\cos\left(\frac{-3x}{4}\right)\right)\cdot\sin\frac{3x}{4}$$
$$=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{4}\cdot\sin\frac{3x}{4}\left(\cos\frac{5x}{4}+\cos\frac{17x}{4}\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2}\cdot 2\cos\frac{22x}{8}\cdot\cos\left(\frac{-12x}{8}\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{11x}{4}=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x\cdot\cos\frac{11x}{4}=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow a=3 \text{ en } b=\pm\frac{11}{4}$$

2 $2\sin x\cdot(2-\sin^2 x-\sin^2 2x-\sin^2 3x-\sin^2 4x)=\sin ax\cdot\cos bx$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow$$
$$2\sin x\cdot\left(2-\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}\right)$$
$$=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cdot\left(\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x+\cos 8x\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cdot\left(2\cos 4x\cdot\cos(-2x)+2\cos 6x\cdot\cos(-2x)\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos 2x\cdot\left(\cos 4x+\cos 6x\right)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos 2x\cdot 2\cos 5x\cdot\cos(-x)=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x\cdot 2\cos 2x\cdot\cos 5x=\sin ax\cdot\cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot 2\cos 2x \cdot \cos 5x = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos 5x = \sin ax \cdot \cos bx$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \text{ en } b = \pm 5$$

Opdracht 146 bladzijde 325

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) = 1 + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta)$ $\qquad\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta)$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cdot\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)$$

$$= 1 + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

2 $\sin\alpha \cdot \cos^4\alpha = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha + 3\sin 3\alpha + 2\sin\alpha)$

$$\frac{1}{16}\cdot\left(\sin 5\alpha + 3\sin 3\alpha + 2\sin\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin 5\alpha + \sin 3\alpha + 2\cdot\left(\sin 3\alpha + \sin\alpha\right)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cdot\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 2\cos\alpha\cdot\left(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos\alpha\cdot\left(2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos\alpha\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\left(\cos 2\alpha + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$= \sin\alpha\cdot\cos^4\alpha$$

Opdracht 147 bladzijde 326

Welke van de volgende vergelijkingen heeft als oplossing precies alle gehele veelvouden van $\frac{\pi}{2}$?

A $\sin x = 0$

$\Updownarrow$

$x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \rightarrow$ **niet**

B $\cos x = 0$

$\Updownarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \rightarrow$ **niet**

C $\sin 2x = 0$

$\Updownarrow$

$2x = k \cdot \pi$

$\Updownarrow$

$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \rightarrow$ **wel**

D $\cos 2x = 0$

$\Updownarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$\Updownarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \rightarrow$ **niet**

E $\sin 3x = 0$

$\Updownarrow$

$3x = k \cdot \pi$

$\Updownarrow$

$x = k \cdot \frac{\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \rightarrow$ **niet**

Antwoord C

Opdracht 148 bladzijde 326

Los exact op.

1 $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x=-\frac{2\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x=-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

2 $\sin 3x=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow 3x=2x+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x=\pi-2x+k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 5x=\pi+k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x=\frac{\pi}{5}+k\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

3 $\cos 6x=\cos 2x$

$$\Leftrightarrow 6x=\pm 2x+k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x=k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 8x=k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x=k\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=k\cdot\frac{\pi}{4} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

4 $\tan x = \tan(-3x)$

$$\Leftrightarrow x = -3x + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

5 $\sin \frac{5x}{3} = -\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{5x}{3} = \sin(-3x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{3} = -3x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \frac{5x}{3} = \pi + 3x + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{14x}{3} = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad -\frac{4x}{3} = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{3\pi}{7} \quad \text{of} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot \frac{3\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

6 $\cos 3x = -\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = -\pi + 2x + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 5x = \pi + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \quad \text{of} \quad x = -\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

7 $\sin^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \,.\, (\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

8 $\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

9 $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 3$

$\Leftrightarrow \sin x + \dfrac{3}{\sqrt{3}}\cos x = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin x + \tan\varphi \cdot \cos x = \sqrt{3}$ stel $\sqrt{3} = \tan\varphi$

$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \cos\varphi$ $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ (bv.)

$\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

10 $\cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \tan\varphi \cdot \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{stel } \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos\varphi \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}\ (\text{bv})$$

$$\Leftrightarrow \sin(4x + \varphi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{4\pi}{12} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 149 bladzijde 326

Los op, op 0,001 nauwkeurig.

1 $5\sin(2(x-1)) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(2(x-1)) = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) = 0{,}927 + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2(x-1) = 2{,}214 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0{,}464 + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x - 1 = 1{,}107 + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = 1{,}464 + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = 2{,}107 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

DEN5A16H_H5.indd 487 13/08/13 08:04

2 $\sin^2 2x = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{\dfrac{1}{5}}$ of $\sin 2x = -\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

$\Leftrightarrow 2x = 0{,}464 + k \cdot 2\pi$ of $2x = 2{,}678 + k \cdot 2\pi$

of $2x = -0{,}464 + k \cdot 2\pi$ of $2x = 3{,}605 + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = 0{,}232 + k \cdot \pi$ of $x = 1{,}339 + k \cdot \pi$

of $x = -0{,}232 + k \cdot \pi$ of $x = 1{,}803 + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

ofwel

$\sin^2 2x = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = \dfrac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 4x = \pm 0{,}927 + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm 0{,}232 + k \cdot \dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

3 $\tan x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x - (1 - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $D = 5$

$\Leftrightarrow \sin x = \cancel{\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$ of $\sin x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$

$\Leftrightarrow x = 0{,}666 + k \cdot 2\pi$ of $x = 2{,}475 + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

4 $\tan^4 x - \tan^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{\tan^2 x = -1}$ of $\tan^2 x = 2$

$\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{2}$ of $\tan x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = 0{,}955 + k \cdot \pi$ of $x = -0{,}955 + k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow x = \pm 0{,}955 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Opdracht 150 bladzijde 326

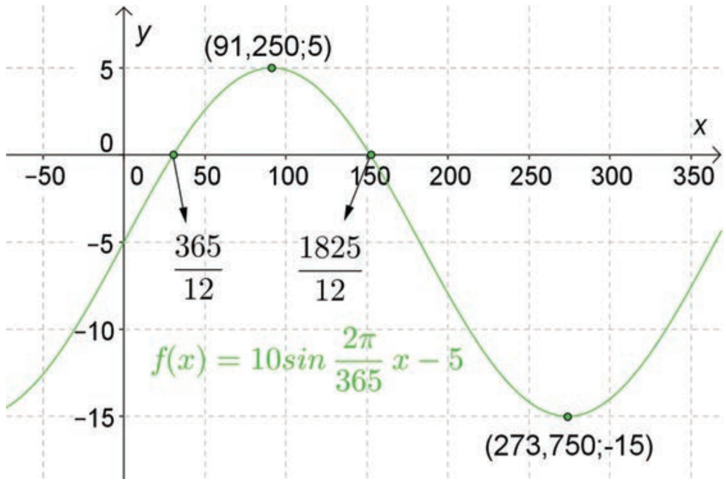
Gegeven is de functie $f: x \longmapsto 10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5$.

1 Bepaal grafisch de nulpunten en de coördinaten van de toppen van f.

· nulpunten voor $x = \frac{365}{12} + k \cdot 365$ of $x = \frac{1825}{12} + k \cdot 365$

· maxima: $\left(91{,}250 + k \cdot 365 \ ; \ 5\right)$

· minima: $\left(273{,}750 + k \cdot 365 \ ; \ -15\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$



2 Bepaal algebraïsch de nulpunten en de x–coördinaten waarvoor f een maximum of een minimum bereikt. Bereken deze waarden exact.

· nulpunten via $f\left(x\right) = 0$

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \frac{2\pi}{365} x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{365}{12} + k \cdot 365 \quad \text{of} \quad x = \frac{1825}{12} + k \cdot 365 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

· maxima via $f(x) = 5$ (of rechtstreeks via $\sin \frac{2\pi}{365} x = 1$)

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = 5$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{365}{4} + k \cdot 365 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

· minima via $f(x) = -15$ (of rechtstreeks via $\sin \frac{2\pi}{365} = -1$)

$$10 \sin \frac{2\pi}{365} x - 5 = -15$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{365} x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{365}{4} + k \cdot 365 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

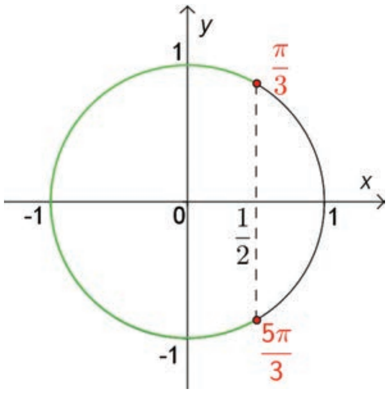
Merk op dat $273{,}75 = -\frac{365}{4} + 365$.

Opdracht 151 bladzijde 327

Los exact op.

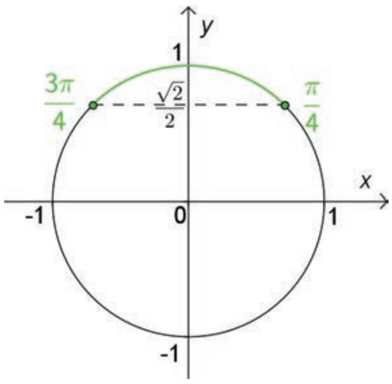
1 $\cos x < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



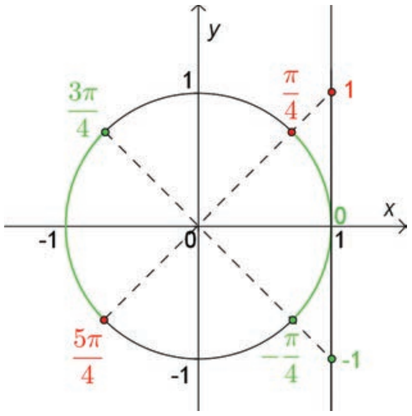
2 $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



3 $-1 \leqslant \tan x < 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



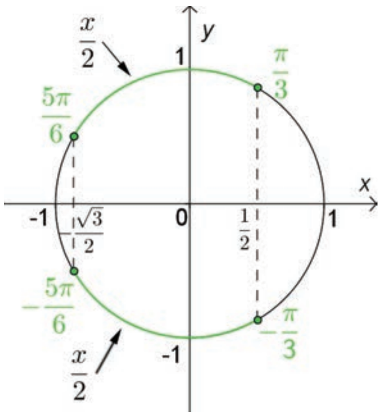
4 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant \frac{x}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi$$

$$\text{of } -\frac{5\pi}{3} + k \cdot 4\pi \leqslant x \leqslant -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



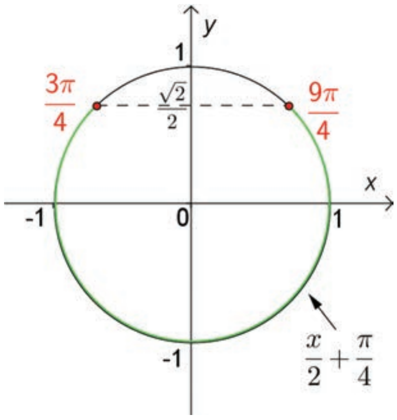
5 $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} < 2\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi + k \cdot 4\pi < x < 4\pi + k \cdot 4\pi$$

$$\Leftrightarrow -3\pi + k \cdot 4\pi < x < k \cdot 4\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



6 $4\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1>3$

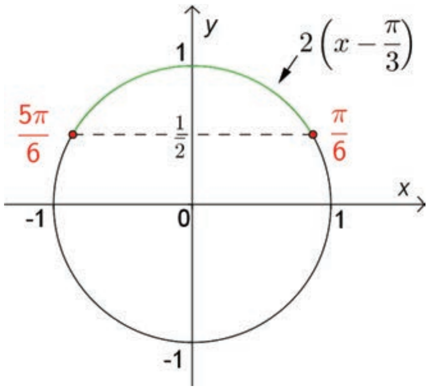
$$\Leftrightarrow \sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi < 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\cdot\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} + k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + k\cdot\pi < x < \frac{9\pi}{12} + k\cdot\pi$$

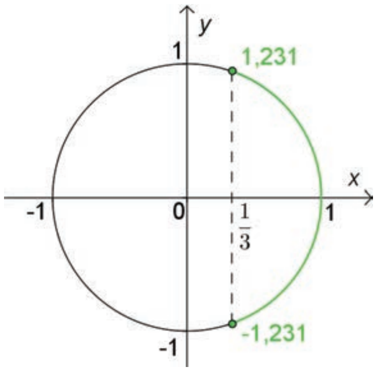
$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + k\cdot\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 152 bladzijde 327
Los op, op 0,001 nauwkeurig.

1 $\cos x \geqslant \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -1{,}231 + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant 1{,}231 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$



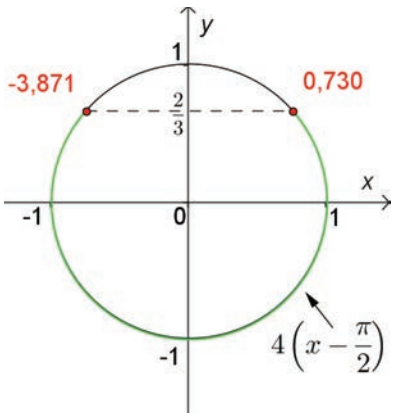
2 $3\sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) < \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow -3{,}871 + k \cdot 2\pi < 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < 0{,}730 + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow -0{,}968 + k \cdot \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{2} < 0{,}182 + k \cdot \frac{\pi}{2}$

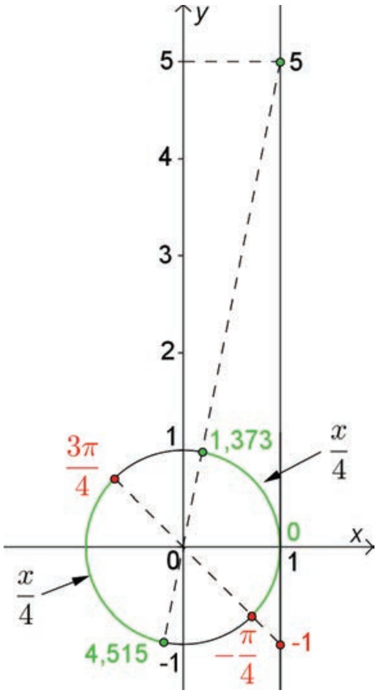
$\Leftrightarrow 0{,}603 + k \cdot \frac{\pi}{2} < x < 1{,}753 + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$



3 $-1 < \tan \frac{x}{4} \leqslant 5$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < \frac{x}{4} \leqslant 1{,}373 + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi + k \cdot 4\pi < x \leqslant 5{,}494 + k \cdot 4\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 153 bladzijde 327

De daglengte l, dit is het aantal uren van zonsopgang tot zonsondergang, kan voor een Antwerpse boerderij beschreven worden door de functie met voorschrift

$$l(t) = \frac{13}{3}\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right] + 12$$

Hierbij stelt t het dagnummer voor, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 1 januari.
Om eieren te leggen, heeft een kip minimaal 13 uur daglicht nodig.

Hoeveel dagen per jaar mag je eieren verwachten?

$$\cdot\ \frac{13}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right) + 12 \geqslant 13$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right) \geqslant \frac{3}{13}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}233 + k\cdot 2\pi \leqslant \frac{2\pi}{365}(t-79) \leqslant 2{,}909 + k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 13{,}528 + k\cdot 365 \leqslant t - 79 \leqslant 168{,}972 + k\cdot 365$$

$$\Leftrightarrow 92{,}528 + k\cdot 365 \leqslant t \leqslant 247{,}972 + k\cdot 365 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cdot\ 247{,}972 - 92{,}528 = 155{,}445$$

Je mag gedurende 155 dagen eieren verwachten.

OFWEL (grafische oplossing)

$$\cdot\ y = \frac{13}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right) + 12$$

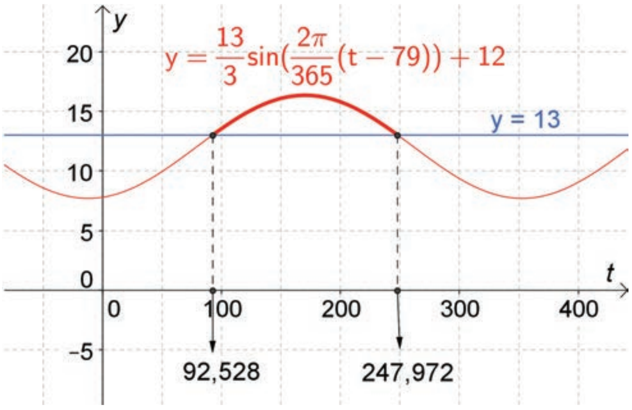
$$y = 13$$

Grafieken plotten en snijpunten bepalen in $[0, 365]$.

$$\left(\text{periode} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365\right)$$

$$\cdot\ \frac{13}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right) + 12 \geqslant 13$$

$$\Leftrightarrow 92{,}528 + k\cdot 365 \leqslant t \leqslant 247{,}972 + k\cdot 365 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 154 bladzijde 328

Door de werking van eb en vloed varieert de diepte *d* van een vaargeul met de tijd. Voor een bepaalde havenstad wordt deze diepte benaderend beschreven met behulp van het voorschrift

$$d(t) = 2{,}5 \sin\frac{t}{2} + 8.$$

Hierbij is *d* uitgedrukt in meter en *t* in uur.

1 Hoelang mag een schip met een diepgang van 7 meter erover doen om de haven binnen te varen? Een schip heeft onder de kiel nog 20 % van zijn diepgang aan water nodig om veilig te kunnen varen.

$$2{,}5 \sin\frac{t}{2} + 8 \geqslant 7 + \frac{1}{5} \cdot 7$$

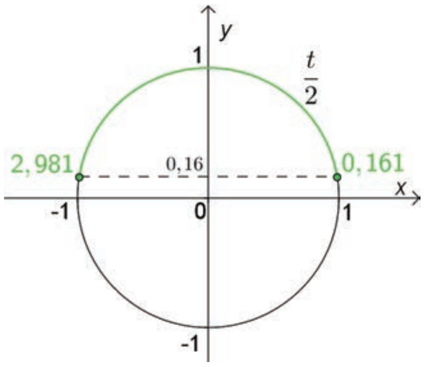
$$\Leftrightarrow 2{,}5 \sin\frac{t}{2} \geqslant 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} \geqslant 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow 0{,}161 + k \cdot 2\pi \leqslant \frac{t}{2} \leqslant 2{,}981 + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 0{,}321 + k \cdot 4\pi \leqslant t \leqslant 5{,}962 + k \cdot 4\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Gevraagde tijdsduur = 5,962 − 0,321 = 5,640 ≈ 5 u 38 min 25 sec



2 Bereken de maximale diepgang die een schip mag hebben om veilig de haven te kunnen binnenvaren als je weet dat de reis van de ingang van de haven tot de aanlegsteiger anderhalf uur duurt.

- Het waterpeil is het hoogst als $t = \pi$.

  Het schip kan de haven binnenvaren vanaf $\frac{3}{4}$ u voor $t = \pi$ en buitenvaren tot $\frac{3}{4}$ u na $t = \pi$.

- Diepte bij $t = \pi - \frac{3}{4}$ $\left(\text{of } t = \pi + \frac{3}{4}\right)$

  $= 2{,}5 \cdot \sin \dfrac{\pi - \frac{3}{4}}{2} + 8$

  $= 10{,}326$ m

- Stel gevraagde maximale diepgang = x, dan :

  $x + \frac{1}{5}x = 10{,}326$

  $x = 8{,}605$

  De gevraagde maximale diepgang is 8,60 m.

Opdracht 155 bladzijde 328
Los exact op.

1 $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2 $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{3}$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) \text{ of } \sin\frac{x}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) \text{ of } \sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } \frac{x}{2} = \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{2} = \pi - \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{5x}{6} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5} \text{ of } x = 3\pi + k \cdot 12\pi$$

$$\text{of } x = -3\pi + k \cdot 12\pi \text{ of } x = \frac{9\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{12\pi}{5} \quad \text{of} \quad x = \pm 3\pi + k \cdot 12\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} + k \cdot \frac{6\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

3 $\sin x + \sin 3x - \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 3x) - (\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos(-x) - 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot (\sin 2x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot (2 \sin x \cos x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{of} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4 $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \text{of} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

5 $7\sin^2 2x = \sin^2 4x + 1$

$\Leftrightarrow 7\sin^2 2x - \left(2\sin 2x \cdot \cos 2x\right)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 7\sin^2 2x - 4\sin^2 2x \cdot \cos^2 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 7\sin^2 2x - 4\sin^2 2x \cdot \left(1 - \sin^2 2x\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^4 2x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$ $\qquad D = 25$

$\Leftrightarrow \cancel{\sin^2 2x = -1}$ of $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$ of $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ of $x = \pm\frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

6 $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ of $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ of $x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

7 $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \qquad\qquad D = 9$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sin 2x = -2} \text{ of } \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad\qquad (k \in \mathbb{Z})$$

8 $\sin x + \cos\dfrac{2x}{3} = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ of } \cos\left(\frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \text{ of } \frac{5x}{6} - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{6}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } \frac{2x}{3} = k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + k \cdot 6\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = k \cdot 3\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 156 bladzijde 328

Los exact op.

1 $\cos^2 x < \dfrac{1}{2}$

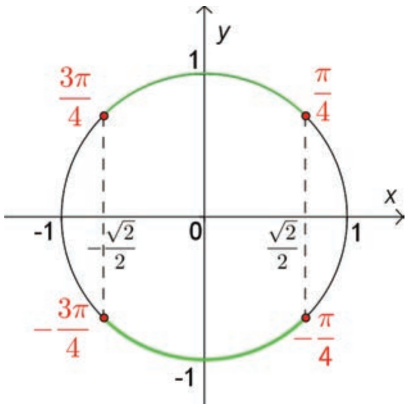
$\cos x$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos^2 x - \dfrac{1}{2}$	+	0	–	0	+

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of } -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



2 $\tan^2 x \geqslant 3$

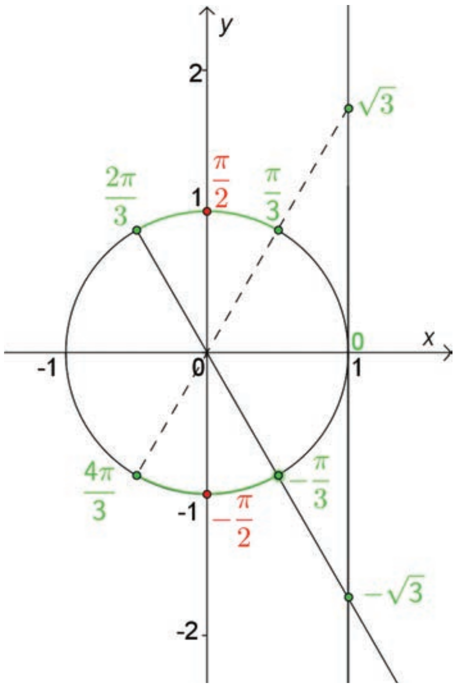
$\Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \geq 0$

$\tan x$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$\tan^2 x - 3$	+	0	–	0	+

$\Leftrightarrow \tan x \leqslant -\sqrt{3}$ of $\sqrt{3} \leqslant \tan x$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

of $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



3 $4\sin^2 3x - 1 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{of} \quad \frac{1}{2} \leqslant \sin 3x$$

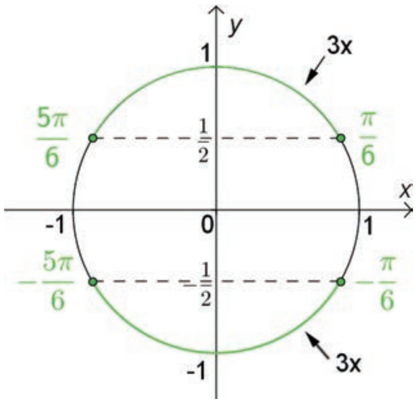
$\sin 3x$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$4\sin^2 3x - 1$	+	0	–	0	+

$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant 3x \leqslant -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of} \quad \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{of} \quad \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



4 $2\sin^2 x - \sin x < 0$

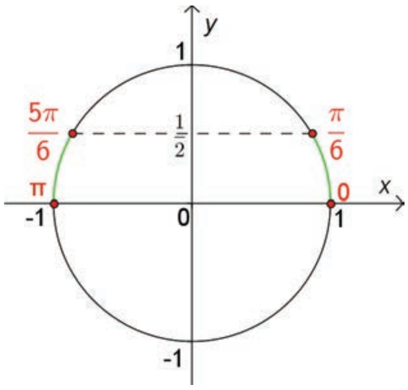
$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2\sin x - 1) < 0$

sin x		0		$\frac{1}{2}$	
sin x	–	0	+	+	+
2 sin x – 1	–	–	–	0	+
y	+	0	–	0	+

$\Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

of $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$



Opdracht 157 bladzijde 328
Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $\cos 15\theta = \cos 3\theta$ met $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$?

$\cos 15\theta = \cos 3\theta$ met $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$

$\Leftrightarrow 15\theta = \pm 3\theta + k \cdot 360°$ met $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$

$\Leftrightarrow 12\theta = k \cdot 360°$ of $18\theta = k \cdot 360°$ met $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$

$\Leftrightarrow \theta = k \cdot 30°$ of $\theta = k \cdot 20°$ met $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$ en $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = 0°, 20°, 30°, 40°, 60°, 80°, 90°,$
$100°, 120°, 140°, 150°, 160°, 180°$

$\downarrow$

13 oplossingen

$\downarrow$

antwoord C

Opdracht 158 bladzijde 329
Maak gebruik van de omgekeerde formules van Simpson (zie opdracht 140) om de volgende vergelijkingen exact op te lossen.

1 $\sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$

$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos 6x - \cos 8x\right) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos 2x - \cos 8x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \cdot \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0$ of $\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = k \cdot \pi$ of $2x = k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ of $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 $\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x + \cos 2x\right) = \cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos 5x + \cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x - \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x \cdot \sin\left(-x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \text{ of } \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = k\cdot\pi \text{ of } x = k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{4} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Opdracht 159 bladzijde 329

Bepaal exact de nulpunten van de functie

$f\colon x \mapsto \cos x\cdot\sin 2x + \sin 2x\cdot\cos 3x + \cos 3x\cdot\sin 4x + \sin 4x\cdot\cos 5x$.

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cdot(\cos x + \cos 3x) + \sin 4x\cdot(\cos 3x + \cos 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cdot 2\cos 2x\cdot\cos(-x) + \sin 4x\cdot 2\cos 4x\cdot\cos(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\cdot\cos x + \sin 4x\cdot\cos x\cdot 2\cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\cdot\cos x\cdot(1 + 2\cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \text{ of } \cos x = 0 \text{ of } \cos 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = k\cdot\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \text{ of } 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

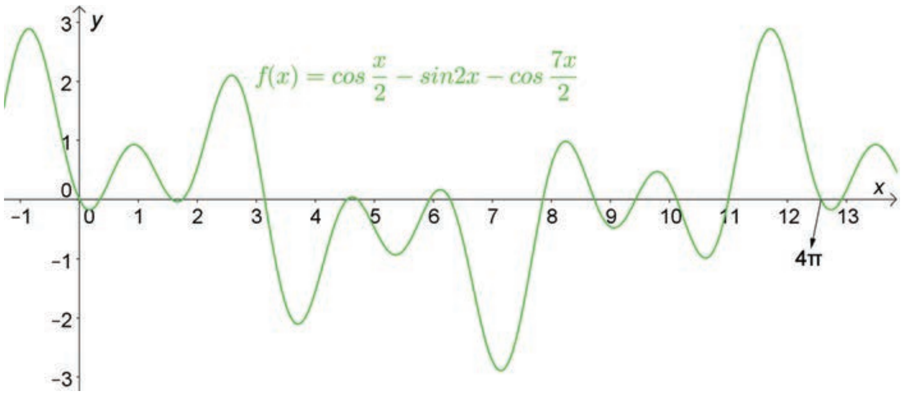
$$\Leftrightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{4} \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \text{ of } x = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{4} \text{ of } x = \pm\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Opdracht 160 bladzijde 329

Gegeven de functie $f: x \mapsto \cos\frac{x}{2} - \sin 2x - \cos\frac{7x}{2}$ over $[0,4\pi]$.

1 Plot de grafiek van f over $[0,4\pi]$. Hoeveel nulpunten heeft f in dit interval?



f heeft 15 mulpunten in $[0,4\pi]$

2 Bereken deze nulpunten in $[0,4\pi]$ exact.

$$\cos\frac{x}{2} - \sin 2x - \cos\frac{7x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{7x}{2} - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x \cdot \sin\left(\frac{-3x}{2}\right) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \left(2\sin\frac{3x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \quad \text{of} \quad \sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\cdot\pi \quad \text{of} \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x = \frac{\pi}{9} + k\cdot\frac{4\pi}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{9} + k\cdot\frac{4\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

nulpunten in $[0, 4\pi]$:

- $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi$
- $\frac{\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{25\pi}{9}$
- $\frac{5\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}, \frac{29\pi}{9}$

3 Maak gebruik van de grafiek van f en de oplossingen uit de vorige vraag om de ongelijkheid $\cos\frac{x}{2} - \sin 2x - \cos\frac{7x}{2} < 0$ op te lossen in $[0, 4\pi]$.

$$\cos\frac{x}{2} - \sin 2x - \cos\frac{7x}{2} < 0 \text{ in } \left[0, 4\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{9}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}\right[\cup \left]\pi, \frac{13\pi}{9}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{9}\right[$$

$$\cup \left]2\pi, \frac{5\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{25\pi}{9}, 3\pi\right[\cup \left]\frac{29\pi}{9}, \frac{7\pi}{2}\right[$$

Opdracht 161 bladzijde 330

Bereken zonder rekentoestel.

1 **a** $\sin\left(\text{Bgsin}\ \frac{1}{2}\right)$

$$\sin\left(\text{Bgsin}\ \frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

b $\sin(\text{Bgsin}(-1))$

$$\sin\left(\text{Bgsin}\left(-1\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

2 **a** $\text{Bgsin}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{Bgsin}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \text{Bgsin}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

b $\text{Bgsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\text{Bgsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \text{Bgsin}\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

3 **a** $\cos\left(\text{Bgcos}\ \frac{1}{2}\right)$

$$\cos\left(\text{Bgcos}\ \frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

b $\cos\left(\text{Bgcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$$\cos\left(\text{Bgcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4 **a** Bgcos (cos 2π)

$$\text{Bgcos}(\cos 2\pi) = \text{Bgcos}\,1 = 0$$

b $\text{Bgcos}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$$\text{Bgcos}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \text{Bgcos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

5 **a** tan (Bgtan $(-\sqrt{3})$)

$$\tan\left(\text{Bgtan}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

b tan (Bgtan 1)

$$\tan\left(\text{Bgtan}\,1\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

6 **a** Bgtan (tan π)

$$\text{Bgtan}(\tan \pi) = \text{Bgtan}\,0 = 0$$

b $\text{Bgtan}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$\text{Bgtan}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \text{Bgtan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Opdracht 162 bladzijde 330

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \text{Bgsin}(\sin x)$.

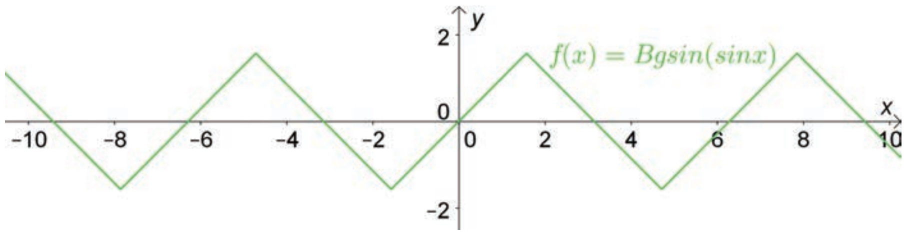
1 Het domein van f is gelijk aan $\mathbb{R}$. Verklaar dit.

dom Bgsin = [–1,1] en $\forall x \in \mathbb{R}$: sin x $\in$ [–1,1] zodat dom f = $\mathbb{R}$

2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

ber f = $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3 Plot de grafiek van de functie f over het interval $[-3\pi, 3\pi]$.
Wat stel je vast?



De grafiek is een aaneenschakeling van 2 aan 2 evenwijdige lijnstukken.
De functie f is periodiek.

4 Toon aan, met behulp van de definitie van de boogsinusfunctie, dat $f(x) = x + k \cdot 2\pi$ of $f(x) = \pi - x + k \cdot 2\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

$$y = \text{Bgsin } x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ met } x \in [-1,\ 1] \text{ en } y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{zodat } f(x) = \text{Bgsin}(\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sin f(x) = \sin x \text{ met } f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad f(x) = \pi - x + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{met } f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Opdracht 163 bladzijde 330

Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \sin(\text{Bgcos } x)$.

1 Het domein van f is gelijk aan $[-1,1]$. Verklaar dit.

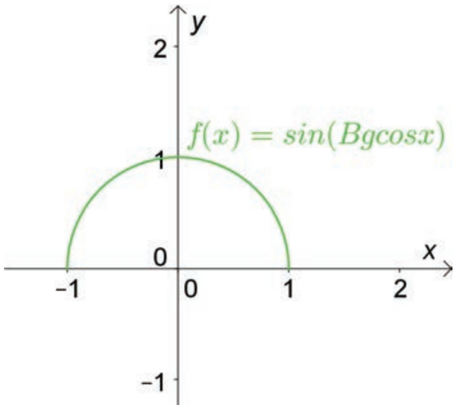
dom Bgcos = $[-1,1]$, zodat dom f = $[-1,1]$

2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

ber f = $[0,1]$, want Bgcos $x \in [0,\pi]$,

zodat $\sin(\text{Bgcos } x) \in [0,1]$

3 Plot de grafiek van de functie f.
Wat stel je vast?



De grafiek is de bovenste helft van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

4 Toon aan, met behulp van de definitie van de boogcosinusfunctie, dat $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$y = \text{Bgcos}\,x \Leftrightarrow \cos y = x$ en $y \in [0,\pi]$

zodat $f(x) = \sin(\text{Bgcos}\,x)$

$= \sin y$ met $y \in [0,\pi]$

$= \sqrt{1 - \cos^2 y}$

$= \sqrt{1 - x^2}$

Opdracht 164 bladzijde 331
Gegeven de functie met voorschrift $f(x) = \tan(2 \text{ Bgtan } x)$.

1 Wat is het domein van f?

- tan (2 Bgtan x) is niet gedefinieerd als

$$2 \text{ Bgtan } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,$$

dus als $\text{Bgtan } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $\text{Bgtan } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Tesamen: $\text{Bgtan } x \neq \frac{\pi}{4}$ en $\text{Bgtan } x \neq -\frac{\pi}{4}$

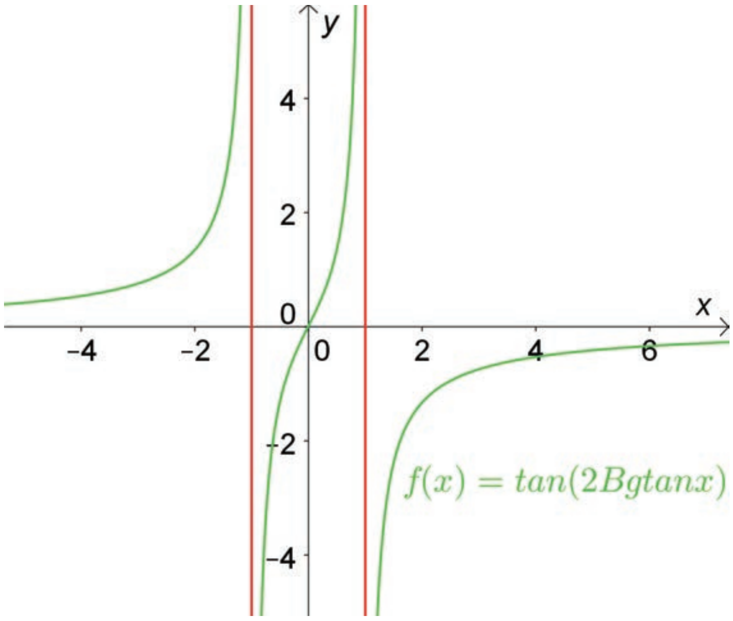
zodat $x \neq 1$ en $x \neq -1$.

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

2 Welke functiewaarden bereikt $f(x)$?

$\text{ber } f = \mathbb{R}$

3 Plot de grafiek van de functie f.
Wat stel je vast in verband met de symmetrie?



Dit is een oneven functie; de oorsprong is symmetriemiddelpunt.

4 Welke zijn de asymptoten van de grafiek van f?

V.A.: $x = 1$ en $x = -1$

H.A.: $y = 0$

5 Toon aan dat $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

$$f(x) = \tan(2\ \text{Bgtan}\,x)$$

$$= \frac{2\tan\left(\text{Bgtan}\,x\right)}{1 - \tan^2 \text{Bgtan}\,x}$$

$$= \frac{2x}{1 - x^2}$$

Opdracht 165 bladzijde 331

Bereken zonder rekentoestel.

1 $\sin\left(2\ \text{Bgtan}\,\dfrac{1}{2}\right)$

- Stel $\text{Bgtan}\,\dfrac{1}{2} = x$,

  dan $\tan x = \dfrac{1}{2}$ en $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

- $\sin\left(2\ \text{Bgtan}\,\dfrac{1}{2}\right)$

$$= \sin 2x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x$$
$$= 2\tan x \cdot \cos^2 x$$
$$= 2\tan x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

2 $\cos\left(2\,\text{Bgcos}\,\frac{3}{5}\right)$

$= 2\cos^2\left(\text{Bgcos}\,\frac{3}{5}\right) - 1$

$= 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$

$= 2\cdot\frac{9}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \text{Bgcos}\,\frac{2}{3}\right)$

$= -\sin\left(\text{Bgcos}\,\frac{2}{3}\right)$

anticomplementaire hoeken

$= -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

(zie opdracht 163)

$= -\sqrt{1 - \frac{4}{9}}$

$= \frac{-\sqrt{5}}{3}$

4 $\sin(\pi + 2\ \text{Bgtan}\ 3)$

$= -\sin(2\ \text{Bgtan}\ 3)$

$= -\sin 2x$

$= -2\sin x \cdot \cos x$

$= -2\tan x \cdot \cos^2 x$

$$= -2\tan x \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$= -2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1+3^2}$$

$$= \frac{-6}{10}$$

$$= \frac{-3}{5}$$

stel $\text{Bgtan}\ 3 = x$,

dan $\tan x = 3$ en

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

5 $\cos\left(\text{Bgsin}\dfrac{4}{5} + \text{Bgtan}\dfrac{5}{12}\right)$

$$= \cos\left(\text{Bgsin}\frac{4}{5}\right) \cdot \cos\left(\text{Bgtan}\frac{5}{12}\right) - \sin\left(\text{Bgsin}\frac{4}{5}\right) \cdot \sin\left(\text{Bgtan}\frac{5}{12}\right)$$

stel $\text{Bgsin}\dfrac{4}{5} = x$ en $\text{Bgtan}\dfrac{5}{12} = y$

dan $\sin x = \dfrac{4}{5}$ en $\tan y = \dfrac{5}{12}$

met $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

zodat $\cos \geqslant 0$ en $\cos y \geqslant 0$ en $\sin y \geqslant 0$

$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$$= \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 y}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$= \sqrt{1-\frac{16}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{25}{144}}} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1-\cos^2 y}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{144}{169}}$$

$$= \frac{36}{65} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$$

$$= \frac{16}{65}$$

6 $\tan\left(\text{Bgsin}\,\frac{4}{5} - \text{Bgcos}\,\frac{12}{13}\right)$

$$= \frac{\tan\left(\text{Bgsin}\,\frac{4}{5}\right) - \tan\left(\text{Bgcos}\,\frac{12}{13}\right)}{1 + \tan\left(\text{Bgsin}\,\frac{4}{5}\right) \cdot \tan\left(\text{Bgcos}\,\frac{12}{13}\right)}$$

stel $\text{Bgsin}\,\frac{4}{5} = x$ en $\text{Bgcos}\,\frac{12}{13} = y$

dan $\sin x = \frac{4}{5}$ en $\cos y = \frac{12}{13}$

met $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y}}{1 + \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} - \frac{\sqrt{1 - \cos^2 y}}{\cos y}}{\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y}}$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} - \frac{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}}\right) \cdot \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}}$$

$$= \left(\frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} - \frac{5}{\cancel{13}} \cdot \frac{\cancel{13}}{12}\right) \cdot \frac{36}{56}$$

$$= \frac{11}{12} \cdot \frac{36}{56}$$

$$= \frac{33}{56}$$

Opdracht 166 bladzijde 331

Bereken $\text{Bgtan}\,\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \text{Bgtan}\,\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}$.

Stel $\text{Bgtan}\,\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \text{Bgtan}\,\frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \alpha$

dan:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}{1 - \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} \cdot \frac{2b-a}{a\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2a^2\sqrt{3} - ab\sqrt{3} + 2b^2\sqrt{3} - ab\sqrt{3}}{\cancel{3ab}} \cdot \frac{\cancel{3ab}}{3ab - 4ab + 2a^2 + 2b^2 - ab}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\,\cancel{\left(a^2 - ab + b^2\right)}}{2\,\cancel{\left(a^2 - ab + b^2\right)}}$$

$$= \sqrt{3}$$

zodat $\alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \; (k \in \mathbb{Z})$

Stel $\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} = x$ en $\frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = y$

dan: $\text{Bgtan}\,x + \text{Bgtan}\,y = \alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$ (1)

met $-\frac{\pi}{2} < \text{Bgtan}\,x < \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Bgtan } y < \frac{\pi}{2}$$

zodat $-\pi < \text{Bgtan}\,x + \text{Bgtan}\,y < \pi$ (2)

(1) & (2): $\text{Bgtan}\,x + \text{Bgtan}\,y = \frac{\pi}{3}$

of $\text{Bgtan } x + \text{Bgtan } y = -\frac{2\pi}{3}$

Besluit: $\text{Bgtan}\,\frac{2a - b}{b\sqrt{3}} + \text{Bgtan}\,\frac{2b - a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$

of $\text{Bgtan}\,\frac{2a - b}{b\sqrt{3}} + \text{Bgtan}\,\frac{2b - a}{a\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3}$

Opdracht 167 bladzijde 331

Los de volgende cyclometrische vergelijkingen op.

1 $\text{Bgtan}\,(2x) + \text{Bgtan}\,(3x) = \dfrac{3\pi}{4}$

Stel $\text{Bgtan}\,(2x) = \alpha$ en $\text{Bgtan}\,(3x) = \beta$

dan: $\alpha, \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$

zodat:

$$\tan(\alpha + \beta) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 3x}{1 - 2x \cdot 3x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{1 - 6x^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 5x = -1 + 6x^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 1 = 0 \qquad D = 49$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x = -\frac{1}{6}} \text{ of } x = 1$$

$$\text{Bgtan}\left(-\frac{1}{3}\right) + \text{Bgtan}\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

en $\dfrac{3\pi}{4} > 0$

2 $\operatorname{Bgsin} x + \operatorname{Bgsin}\left(x\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Bgsin}\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Bgsin} x$$

$$\Rightarrow \sin\left(\operatorname{Bgsin}\left(x\sqrt{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Bgsin} x\right)$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = \cos\left(\operatorname{Bgsin} x\right)$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = +\sqrt{1 - \sin^2\left(\operatorname{Bgsin} x\right)}$$

$\operatorname{Bgsin} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en hier is cosinus positief

$$\Rightarrow x\sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ of } \cancel{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{3} \neq \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (*)$$

3 $\text{Bgsin}\, x + 2\,\text{Bgcos}\, x = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \text{Bgsin}x = \frac{\pi}{2} - 2\,\text{Bgcos}\,x$$

$$\Rightarrow \sin(\text{Bgsin}\,x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\text{Bgcos}\,x\right)$$

$$\Rightarrow x = \cos(2\text{Bgcos}\,x)$$

$$\Rightarrow x = 2\cos^2(\text{Bgcos}\,x) - 1$$

$$\Rightarrow x = 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \qquad D = 9$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ of } \cancel{x = -\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\,\text{Bgcos}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2}$$

OFWEL

$$\text{Bgsin}\,x + \text{Bgcos}\,x = \frac{\pi}{2}$$

zodat $\text{Bgsin}\,x + 2\,\text{Bgcos}\,x = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \text{Bgcos}\,x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Bgcos}\,x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

4 $\sin(3\,\text{Bgsin}\,x) = \cos(2\,\text{Bgcos}\,x)$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(\text{Bgsin}\,x) - 4\sin^3(\text{Bgsin}\,x) = 2\cos^2(\text{Bgcos}\,x) - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x^3 = 2x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(4x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} \text{ of } \frac{2 + 2\sqrt{5}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ of } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ of } \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

5 $\text{Bgtan}\,\frac{x}{4} + \text{Bgtan}\,\frac{1}{13} + \text{Bgtan}\,\frac{1}{21} + \text{Bgtan}\,x = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan\left(\left(\text{Bgtan}\,\frac{x}{4} + \text{Bgtan}\,\frac{1}{13}\right) + \left(\text{Bgtan}\,\frac{1}{21} + \text{Bgtan}\,x\right)\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\frac{x}{4} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{13}} + \dfrac{\frac{1}{21} + x}{1 - \frac{1}{21}\cdot x}}{1 - \dfrac{\frac{x}{4} + \frac{1}{13}}{1 - \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{13}} \cdot \dfrac{\frac{1}{21} + x}{1 - \frac{1}{21}\cdot x}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{13x + 4}{52}\cdot\frac{21 - x}{21} + \frac{52 - x}{52}\cdot\frac{1 + 21x}{21}\right)}{\frac{52 - x}{52}\cdot\frac{21 - x}{21} - \frac{13x + 4}{52}\cdot\frac{1 + 21x}{21}} = 1$$

$\Rightarrow (13x + 4)(21 - x) + (52 - x) \cdot (1 + 21x)$

$= (52 - x) \cdot (21 - x) - (13x + 4)(1 + 21x)$

$\Rightarrow (13x + 4)(21 - x + 1 + 21x) + (52 - x)(1 + 21x - 21 + x) = 0$

$\Rightarrow (13x + 4)(22 + 20x) + (52 - x)(22x - 20) = 0$

$\Rightarrow 238x^2 + 1530x - 952 = 0$

$\Rightarrow \cancel{x = -7}$ of $x = \dfrac{4}{7}$

$\downarrow$

invullen in linkerlid van opgave geeft $-2{,}356 \neq \dfrac{\pi}{4}$

Opdracht 168 bladzijde 332

Kies telkens het juiste antwoord.

1 $\dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} =$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\cancel{\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cancel{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}}$$

$= \cot\alpha \cdot \cot\beta \to$ B

2 $k^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + (2k\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$

$= k^2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 2 \cdot \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$

$= k^2 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)$

$= k^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$

$= k^2 \cdot 1^2$

$= k^2 \to$ B

Opdracht 169 bladzijde 332
Kies 6 hoeken uit de volgende reeks waarvan de beeldpunten de hoekpunten van een regelmatige zeshoek vormen.

- onderling verschil tussen opeenvolgende middelpuntshoeken van een regelmatige zeshoek

  $= \frac{2\pi}{6}$ rad $= \frac{4\pi}{12}$ rad

- hoeken met een zelfde beeldpunt:

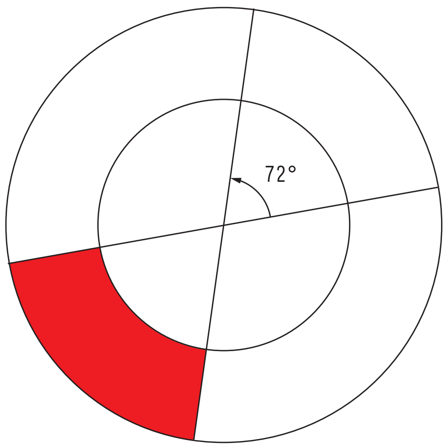
  - $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{3\pi}{12}$ rad
  - $\frac{\pi}{2}$ rad $= \frac{6\pi}{12}$ rad
  - $\frac{7\pi}{12}$ rad
  - $-\frac{7\pi}{12}$ rad
  - $-\frac{2\pi}{3}$ rad $= -\frac{8\pi}{12}$ rad
  - $\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{9\pi}{12}$ rad
  - $\frac{5\pi}{12}$ rad
  - $\frac{13\pi}{12}$ rad, $-\frac{11\pi}{12}$ rad
  - $-\frac{23\pi}{12}$ rad, $\frac{\pi}{12}$ rad
  - $-\frac{\pi}{4}$ rad $= -\frac{3\pi}{12}$ rad

– hoeken waarvan de beeldpunten de hoekpunten vormen van een regelmatige zeshoek:

$$-\frac{11\pi}{12} \text{ rad},\ -\frac{7\pi}{12} \text{ rad},\ -\frac{3\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{5\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{9\pi}{12} \text{ rad},$$

$$\text{of } \frac{13\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{-7\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{-\pi}{4} \text{ rad},\ \frac{-23\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{5\pi}{12} \text{ rad},\ \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Opdracht 170 bladzijde 332
Bereken de omtrek van het ingekleurde vlakdeel.
De stralen van de cirkels zijn 4 cm en 7 cm.



De lengte van een cirkelboog is gelijk aan de straal van de cirkel vermenigvuldigd met de bijbehorende middelpuntshoek in radialen.

- gevraagde omtrek

$$= \left(7 \cdot \frac{2\pi}{5} + 3 + 4 \cdot \frac{2\pi}{5} + 3\right) \text{ cm}$$

$$= \left(\frac{22\pi}{5} + 6\right) \text{ cm} \qquad (= 19{,}823\ldots \text{ cm})$$

Opdracht 171 bladzijde 333
De volgende grafieken stellen algemene sinusfuncties voor.
Bepaal een mogelijk voorschrift.

1 • mogelijk startpunt: $\left(-\frac{3\pi}{2}, 2\right)$, dus $c = -\frac{3\pi}{2}$, $d = 2$

• amplitude = 2, dus $a = 2$

• periode = 4π, dus $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) + 2$$

2 • mogelijk startpunt: $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, dus $c = -\frac{3}{2}$, $d = -2$

• amplitude = $\frac{3}{2}$, dus $a = \frac{3}{2}$

• periode = 4, dus $\frac{2\pi}{b} = 4$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) - 2$$

3 • mogelijk startpunt: $(-1,4)$, dus $c = -1$, $d = 4$

• amplitude = 1, dus $a = 1$

• periode = 4, dus $\frac{2\pi}{b} = 4$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right) + 4$$

Opdracht 172 bladzijde 333

Hoeveel van de volgende vijf uitdrukkingen in een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken $\hat{B}$ en $\hat{C}$ zijn gelijk aan 1?

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

- $\sin^2(\hat{B} + \hat{C}) = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1^2 = 1$ $\longrightarrow$ **wel**

- $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{B} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right)$
  $= \sin^2\hat{B} + \cos^2\hat{B}$
  $= 1$ $\longrightarrow$ **wel**

- $(\sin\hat{B} + \sin\hat{C})^2 = \sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} + 2\sin\hat{B}\sin\hat{C}$
  $= 1 + \underbrace{2\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}}_{\neq 0}$ $\longrightarrow$ **niet**

- $\cos^2\left(\hat{B} + \hat{C}\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0^2 = 0$ $\longrightarrow$ **niet**

- $\cos^2\hat{B} + \cos^2\hat{C} = \cos^2\hat{B} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right)$
  $= \cos^2\hat{B} + \sin^2\hat{B}$
  $= 1$ $\longrightarrow$ **wel**

$\longrightarrow$ **antwoord *C***

Opdracht 173 bladzijde 334

Het London Eye bestaat uit 32 capsules die met een constante snelheid ronddraaien. De hoogte h (in meter) van een gondel is een functie van de tijd t (in minuten) en wordt bepaald door het voorschrift

$$h(t) = 65 \sin\left(\frac{\pi}{15}(t-8)\right) + 70.$$

1 Hoe lang duurt één omwenteling van een bepaalde gondel?

periode $= \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{15}} = 30$, dus één omwenteling duurt 30 minuten

2 Wat is de maximale hoogte die de gondel bereikt en op welke tijdstippen gebeurt dit?

- maximale hoogte = $(65 \cdot 1 + 70)$ m = 135 m
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{15}(t-8)\right) = 1$

$$\frac{\pi}{15}(t-8) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$t - 8 = \frac{15}{2} + k \cdot 30$$

$$t = 15{,}5 + k \cdot 30 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

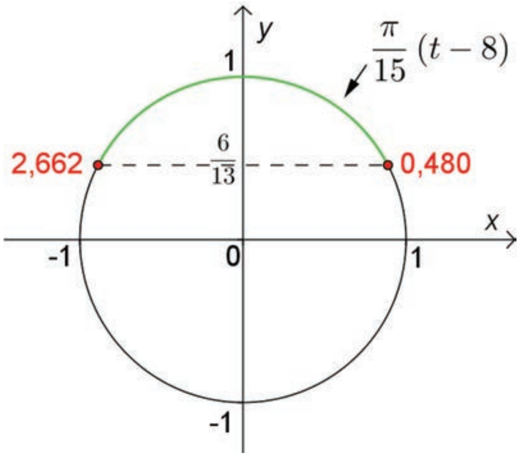
De maximale hoogte wordt bereikt na 15,5 min en dan telkens 30 min later.

3 Hoe lang bevindt een bepaalde gondel zich boven 100 m gedurende één omwenteling?

- $65 \sin\left(\dfrac{\pi}{15}(t-8)\right) + 70 > 100$

  $\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{15}(t-8)\right) > \dfrac{30}{65} = \dfrac{6}{13}$

  $\Leftrightarrow 0{,}480 + k \cdot 2\pi < \dfrac{\pi}{15}(t-8) < 2{,}662 + k \cdot 2\pi$



  $\Leftrightarrow 2{,}291 + k \cdot 30 < t - 8 < 12{,}709 + k \cdot 30$

  $\Leftrightarrow 10{,}291 + k \cdot 30 < t < 20{,}709 + k \cdot 30$

- $20{,}709 - 10{,}291 = 10{,}419 = 10$ min 25 sec

Een bepaalde gondel bevindt zich 10 min 25 sec boven 100 m gedurende één omwenteling.

Opdracht 174 bladzijde 334

Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\dfrac{2\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \cot^2\alpha - 1$

$$\frac{2\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{1-\left(1-2\sin^2\alpha\right)}$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$= \cot^2\alpha - 1$$

2 $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = \dfrac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$= 1+\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$$

3 $\cos 2\alpha = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$

$$\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{1}$$

$$= \cos 2\alpha$$

4 $\cos^2\alpha \cdot \sin^3\alpha = \frac{1}{16}(2\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha)$

$$\frac{1}{16}\cdot\left(2\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\left(2\sin\alpha + 2\cos 4\alpha \cdot \sin\left(-\alpha\right)\right)$$

$$= \frac{2}{16}\cdot\sin\alpha\cdot\left(1 - \cos 4\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\left(1 - \left(1 - 2\sin^2 2\alpha\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\sin\alpha\cdot 2\sin^2 2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sin\alpha\cdot\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha\cdot\sin^3\alpha$$

Opdracht 175 bladzijde 334

Los exact op.

1 $\tan^2 2x + \tan 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \tan 2x \cdot (\tan 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x = 0 \quad \text{of} \quad \tan 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\cdot\pi \quad \text{of} \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{of} \quad x = -\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

2 $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ of } \tan x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ of } x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

3 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ of } \sin x = 1$ $\qquad D = 9$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

4 $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ of } \cos x = -\frac{1}{2}$ $\qquad D = 1$

$\Leftrightarrow x = \pi + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

5 $\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + 2x + k \cdot 2\pi \text{ of } 4x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ of } 6x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6 $\sin x + \sin 3x = 1 + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos(-x) = \cancel{1} + 2\cos^2 x - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot (\sin 2x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ of } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

7 $\sqrt{3}\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2 \cdot \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ of } 2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ of } x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

8 $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \tan\varphi \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \text{stel } -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\varphi$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \cos\varphi \qquad \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ (bv)}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \varphi\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ of } x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi \text{ of } x = \frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Opdracht 176 bladzijde 335

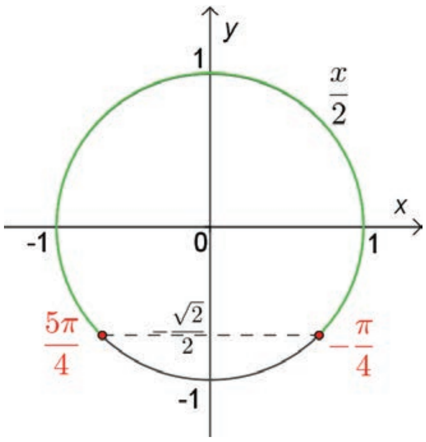
Los exact op.

1 $2\sin\frac{x}{2} > -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi < x < \frac{5\pi}{2} + k \cdot 4\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$



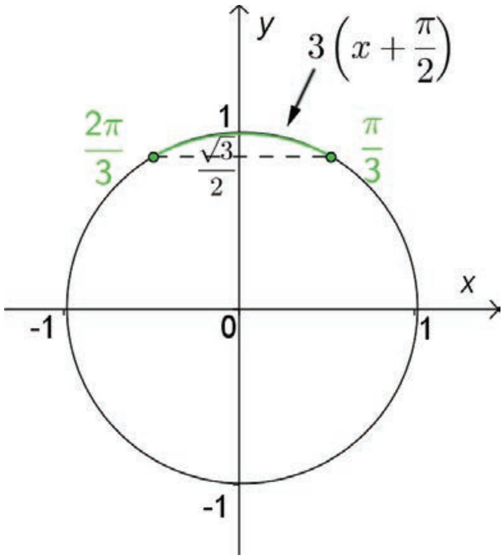
2 $2\sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \geqslant \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant 3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x + \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{-5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



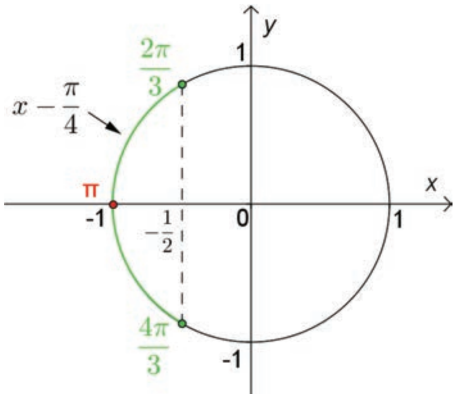
3 $-1 < \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x - \frac{\pi}{4} < \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of} \quad \pi + k \cdot 2\pi < x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\text{of} \quad \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \frac{19\pi}{12} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



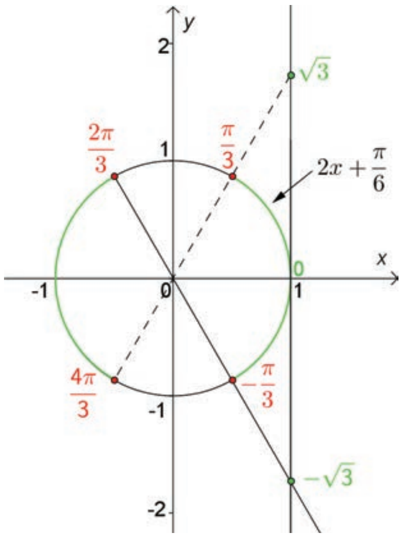
4 $\left|\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right| < \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \ -\sqrt{3} < \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{\pi}{3} + k\cdot\pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$$

$$\Leftrightarrow \ -\frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Opdracht 177 bladzijde 335
Bewijs de volgende gelijkheden.

1 $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) = 4 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x+z}{2} \cdot \sin\dfrac{y+z}{2}$

$$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\left(-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y+2z}{2}\right)$$

$$= -4\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x+z}{2}\cdot\sin\left(-\frac{y+z}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x+z}{2}\cdot\sin\frac{y+z}{2}$$

2 $\dfrac{1-\sin 2x}{1-4\sin^2 x+4\sin^4 x} = \dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$

$$\frac{1-\sin 2x}{1-4\sin^2 x+4\sin^4 x}$$

$$= \frac{1-\sin 2x}{\left(1-2\sin^2 x\right)^2}$$

$$= \frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$= \frac{\left(1-\sin 2x\right)\left(1+\sin 2x\right)}{\cos^2 2x\cdot\left(1+\sin 2x\right)}$$

$$= \frac{\cancel{1-\sin^2 2x}}{\cancel{\cos^2 2x}\cdot\left(1+\sin 2x\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{1}{\left(\cos x+\sin x\right)^2}$$

OFWEL

$$\frac{1 - \sin 2x}{1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x)\cdot(\cos x + \sin x)^2 = (1 - 2\sin^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x)\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x) = \cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin 2x)\cdot(1 + \sin 2x) = \cos^2 2x$$

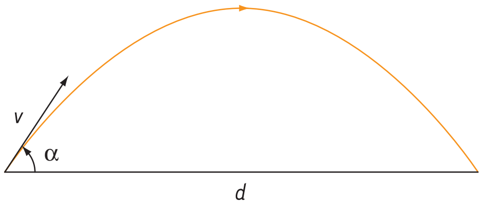
$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x = \cos^2 2x$$

Opdracht 178 bladzijde 335

Als een projectiel gelanceerd wordt met een snelheid v onder een hoek α, dan wordt de horizontale afstand d die het aflegt gegeven door de formule

$$d = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81}$$

met d in m en v in m/s.



1 Een kogel wordt afgevuurd met een snelheid van 250 m/s.

Onder welke hoek moet die afgeschoten worden om een doel te raken dat 1750 m verwijderd is?

$$d = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81}$$

$$\frac{250^2 \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81} = 1750$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1750 \cdot 9{,}81}{250^2} = 0{,}27468$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 15{,}943° + k\cdot 360° \quad \text{of} \quad 2\alpha = 164{,}057° + k\cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 7°58'17'' + k\cdot 180° \quad \text{of} \quad \alpha = 82°1'43'' + k\cdot 180° \ (k \in \mathbb{Z})$$

De kogel moet onder een hoek van 7°58'17" of 82°1'43" afgeschoten worden.

2 Een voetbal wordt weggetrapt met een snelheid van 22 m/s en komt 41 m verder op de grond terecht.

Onder welke hoek is de voetbal weggetrapt?

$$\frac{22^2 \cdot \sin 2\alpha}{9{,}81} = 41$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{41 \cdot 9{,}81}{22^2} = 0{,}831$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 56{,}203° + k \cdot 360° \text{ of } 2\alpha = 123{,}797° + k \cdot 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 28°6'5'' + k \cdot 180° \quad \text{of} \quad \alpha = 61°53'55'' + k \cdot 180°$$

De voetbal is weggetrapt onder een hoek van 28°6'5" of 61°53'55".

3 Onder welke hoek kun je met een gegeven lanceersnelheid het verst geraken? Verklaar.

Als v constant is, dan zal d maximaal zijn, als $\sin 2\alpha$ maximaal is, dus:

$\sin 2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha = 90° + k \cdot 360°$

$\Leftrightarrow \alpha = 45° + k \cdot 180° \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Met een gegeven lanceersnelheid geraak je het verst onder een hoek van 45°.

Opdracht 179 bladzijde 336

Een verkiezingsaffiche van 2 m hoogte wordt opgehangen aan de muur van een leegstaand gebouw. De onderrand van de affiche bevindt zich op 1 m boven de ooghoogte van een voorbijganger die zich op een afstand van
x meter van de muur bevindt.

1 Toon aan dat de hoek γ, waaronder de voorbijganger de affiche ziet, voldoet aan

- $\tan \alpha = \dfrac{3}{x}$

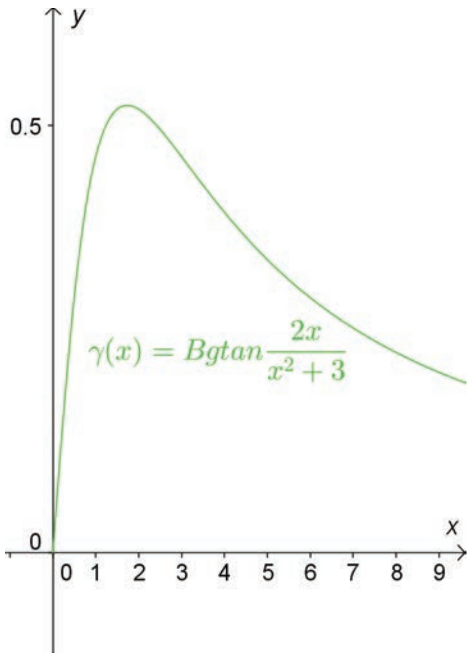
  $\tan \beta = \dfrac{1}{x}$

  $\gamma = \alpha - \beta$

- $$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + 3} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

zodat $\gamma(x) = \text{Bgtan}\, \dfrac{2x}{x^2 + 3}$

2 Plot de grafiek van de functie γ.



3 Hoe ver moet de voorbijganger zich van de muur verwijderen om de affiche onder een maximale hoek te zien?

Maximum via grafisch rekentoestel bij x = 1,732 m

Opdracht 180 bladzijde 336
Op welke tekening zijn de punten (x, y) voorgesteld waarvoor geldt dat $\cos x = \cos y$?

$\cos x = \cos y$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm y + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad y = \pm x + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

D

DEN5A16H_H5.indd 549 13/08/13 08:04

Opdracht 181 bladzijde 337

Als je de grafiek van $f: x \longmapsto \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin x$ bekijkt, dan kun je vermoeden dat deze functie een algemene sinusfunctie voorstelt.

1 Gebruik som– en verschilformules om het voorschrift van deze algemene sinusfunctie exact te bepalen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \sin x \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x \\ &= \frac{1}{8} \sin 8x \end{aligned}$$

2 Bereken, met behulp van het voorschrift uit de vorige vraag, de exacte oplossingen van $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$.

$$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 8x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{32} + k \cdot \frac{\pi}{4} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Opdracht 182 bladzijde 337

Bewijs dat de volgende gelijkheid geldt in elke driehoek *ABC* met hoeken α, β en γ.

1 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \\
&= \cos\alpha + \cos\beta + \cos(\pi - (\alpha + \beta) \\
&= 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\alpha+\beta\right) \\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) \\
&= 1 + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cdot\left(-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{-\beta}{2}\right) \\
&= 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} \\
&= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

2 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$

$$\begin{aligned}
&\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) - \sin(2\pi - 2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \sin(2(\alpha+\beta)) \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \\
&= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos(-\beta) \\
&= 2\sin(\pi-\gamma)\cdot 2\cos\alpha\cdot\cos\beta \\
&= 4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma
\end{aligned}$$

Opdracht 183 bladzijde 337

In een driehoek ABC, waarvan α, β en γ de hoeken zijn, geldt dat
$\sin(2\beta - 4\alpha) - \sin 6\beta + \sin(2\beta - 4\gamma) - \sin 2\beta = 0$ en $\cos 2\beta \neq 0$.

Toon aan dat ΔABC rechthoekig is.

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ **en** $\cos 2\beta \neq 0$ (*)

$\sin(2\beta - 4\alpha) - \sin 6\beta + \sin(2\beta - 4\gamma) - \sin 2\beta = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos(4\beta - 2\alpha) \cdot \sin(-2\beta - 2\alpha) + 2\cos(2\beta - 2\gamma)\sin(-2\gamma) = 0$

$-2\beta - 2\alpha = -2\pi + 2\gamma$

$\Leftrightarrow\ 2\cos(4\beta - 2\alpha) \cdot \sin 2\gamma - 2\cos(2\beta - 2\gamma) \cdot \sin 2\gamma = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 2\gamma \cdot (\cos(4\beta - 2\alpha) - \cos(2\beta - 2\gamma)) = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 2\gamma \cdot (-2\sin(3\beta - \alpha - \gamma) \cdot \sin(\beta - \alpha + \gamma)) = 0$

$\Leftrightarrow\ \sin 2\gamma \cdot \sin(3\beta + \beta - \pi) \cdot \sin(\pi - \alpha - \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow\ -\sin 2\gamma \cdot \sin 4\beta \cdot \sin 2\alpha = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \sin 2\gamma = 0$

$\Leftrightarrow\ \sin 2\alpha = 0$ **of** $\sin 2\beta = 0$ **of** $\sin 2\gamma = 0$ **of** $\cancel{\cos 2\beta} = 0$

(*)

$\Leftrightarrow\ 2\alpha = k \cdot \pi$ **of** $2\beta = k\,\pi$ **of** $2\gamma = k \cdot \pi$

$\Leftrightarrow\ \alpha = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$ **of** $\beta = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$ **of** $\gamma = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

en $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

Besluit: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ **of** $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ **of** $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

zodat Δ *ABC* rechthoekig is

Hersenbreker 1 bladzijde 338
Alle katten met blauwe ogen zijn sloom. Een slome kat kan geen muizen vangen.
Alle witte katten hebben blauwe ogen. Ik zag mijn kat Bourbaki een muis vangen.

Wat kan je zeker besluiten?

A Bourbaki had voordien nog nooit een muis gevangen.

B Boubaki is sloom.

C Bourbaki is niet wit.

D Bourbaki heeft blauwe ogen.

E Bourbaki heeft bruine ogen.

Antwoord C: Bourbaki is niet wit.

Verklaring: Als Bourbaki wel wit zou zijn, dan heeft hij blauwe ogen. Maar alle katten met blauwe ogen zijn sloom en een slome kat kan geen muizen vangen. Dit is in tegenstrijd met het feit dat ik Bourbaki een muis zag vangen. Dus Bourbaki is niet wit.

Hersenbreker 2 bladzijde 338
De rechthoek $ABCD$ heeft als zijden $|AB| = 15$ en $|BC| = 9$.
Een grote cirkel gaat door A en raakt in C aan CD.
Een kleine cirkel raakt aan AB, aan BC en aan de grote cirkel.

1 Wat is de straal van de grote cirkel?

Noem middelpunt grote cirkel M en straal grote cirkel R en stel $|BM| = x$,

dan geldt $|MA| = |MC| = R$,

zodat $|MA|^2 = |MC|^2$

$15^2 + x^2 = (9 + x)^2$

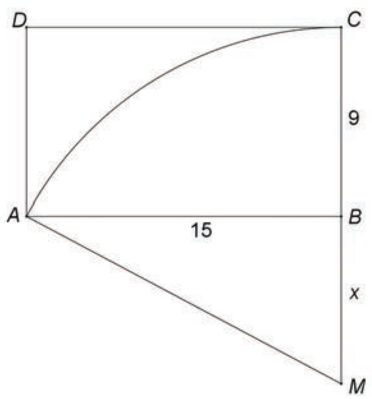
$225 + x^2 = 81 + 18x + x^2$

$18x = 144$

$x = 8$

$R = 9 + x = 9 + 8 = 17$

De straal van de grote cirkel is 17.



2 Wat is de straal van de kleine cirkel?

Noem straal kleine cirkel r.

Dan geldt in △ MEF:

$(8 + r)^2 + r^2 = (17 - r)^2$

$64 + 16r + r^2 + r^2 = 289 - 34r + r^2$

$r^2 + 50r - 225 = 0$

$D = 3400$

$r = \dfrac{-50 + \sqrt{3400}}{2}$ of $r = \dfrac{-50 - \sqrt{3400}}{2}$

$r = 4{,}155$ of $r = -54{,}155$

De straal van de kleine cirkel is 4,2.