Formelsamling (SFB30820)

Source: `vignettes/formler.Rmd` (https://github.com/joernih/SFB30820Finansteori/blob/HEAD/vignettes/formler.Rmd)

Nåverdiberegninger med og uten usikkerhet

Uten usikkerhet

Nåverdikriteriet

$$NV = \sum_{t=0}^{T} \frac{X_t}{(1+k)^t} = X_0 + \frac{X_1}{(1+k)^1} + \frac{X_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{X_T}{(1+k)^T}$$

Med usikkerhet/risiko

Risikojustert-rente-metoden (RJ-metoden)

$$NV = \sum_{t=0}^{T} \frac{E(X_t)}{(1+k)^t} = E(X_0) + \frac{E(X_1)}{(1+k)^1} + \frac{E(X_2)}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{E(X_T)}{(1+k)^T}$$

$$\text{k} = \text{risikofri rente} + \text{risikopremie}$$

Forventet kontantstrøm

$$E(X) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)X(s) = Pr(1)X(1) + Pr(2)X(2) + \ldots + Pr(S)X(S)$$

Porteføljeavkastning

Selve porteføljeavkastningen (rp) uten skatt er gitt ved

$r_p = \frac{P_T + Div_{0,T} - P_0}{P_0}$

Metode 1: Forventet avkastning

$$E(r_p) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)X(s) = Pr(1)X(1) + Pr(2)X(2) + \ldots + Pr(S)X(S)$$

Metode 2: Forventet avkastning

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(X_i) = w_1 E(X_1) + w_2 E(X_2) + \ldots + w_N E(X_N)$$

Måling av risiko

Metode 1 for måling av risiko (1-n investeringsobjekter)

- Varians

$$Var(X) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[X(s) - E(X)]^2 =$$
$$Pr(1)[X(1) - E(X)]^2 + Pr(2)[X(2) - E(X)]^2 + \ldots +$$
$$Pr(S)[X(S) - E(X)]^2$$

- Standardavvik

$$Std(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Metode 2 for måling av risiko (2 investeringsobjekter)

- Varians

$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Kov(r_1, r_2)$$

Hvor samvariasjonen er gitt ved

$$Kov(r_1, r_2) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[r_1(s) - E(r_1)][r_2(s) - E(r_2)]$$
$$Pr(1)[r_1(1) - E(r_1)][r_2(1) - E(r_2)] +$$
$$Pr(2)[r_1(2) - E(r_1)][r_2(2) - E(r_2)] + \ldots +$$
$$Pr(S)[r_1(S) - E(r_1)][r_2(S) - E(r_2)]$$

- Standardavviket

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)}$$

Korrelasjonskoeffisienten (standardisert mål på samvariasjon)

$$Korr(r_a, r_b) = \frac{Kov(r_a, r_b)}{Std(r_a) Std(r_b)}$$

- $Korr(r_a, r_b) = 1$ (fullstendig avhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = 0$ (uavhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = -1$ (fullstendig motsatt avhengige)

$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Korr(r_a, r_b) Std(r_a) Std(r_b)$$

Måling av risiko (portefølje fra 3 til n fonds)

Metode 2 for måling av risiko (3 investeringsobjekter)

Porteføljens varians er gitt ved

$$\begin{gathered} Var(r_p) = w_a^2 Var(r_a) + w_b^2 Var(r_b) + w_c^2 Var(r_c) + \\ 2w_a w_b Std(a) Std(b) Korr(a,b) + \\ 2w_a w_c Std(a) Std(c) Korr(a,c) + \\ 2w_b w_c Std(b) Std(c) Korr(b,c) \end{gathered}$$

Mens standardavviket (som tidligere) framkommer som

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)}$$

Metode 2 for måling av risiko (generell metode med n investeringsobjekter)

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \ldots + w_N E(r_N)$$

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Kov(i,j) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Std(i) Std(j) Korr(i,j)$$

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)}$$

Betaverdien til en aksje eller et prosjekt

$$\beta_j = \frac{Kov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$$

$$\beta_j = \frac{Korr(r_j, r_m) Std(r_j)}{Std(r_m)}$$

Utledning av kapitalmarkedslinjen (n=2, kombinasjon av risikofri investering og markedsporteføljen M

$$E(r_p) = wr_f + (1-w)E(r_m)$$

$$Var(r_p) = (1-w)^2 Var(r_m)$$

$$Std(r_p) = (1-w)Std(r_m)$$

Kapitalkostnad for egenkapital og gjeld

- Kapitalkostnad for egenkapital

$$k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$$

- Kapitalkostnad for gjeld

$$k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$$

- Totalkapitalkostnaden (gjennomsnittskostnaden) for egenkapital og gjeld

$$k_T = k_E \underbrace{\frac{E}{E+G}}_{=w_E} + k_G(1-s)\underbrace{\frac{G}{E+G}}_{=w_G}$$

$$k_T = k_E w_E + k_G(1-s)w_G$$

$$w_E = \frac{E}{E+G}$$
$$w_G = \frac{G}{E+G}$$

Beregning av obligasjonspris

- Ordinær obligasjon (dvs. med periodevise utbetalinger)

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^t} + \frac{M}{(1+r/n)^T} =$$
$$\frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^1} + \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^2} + \ldots + \frac{Mr_k/n}{(1+r/n)^T} + \frac{M}{(1+r/n)^T}$$

- Null-kupong obligasjoner (dvs. uten periodevise utbetalinger)

$$P_0 = \frac{M}{(1+r)^T}$$

Forventningshypotesen

Som forteller oss at termin-/forwardrenten for periode t er bestemt ved

$$
{}_{t-1}f_t = \frac{(1 +_0 r_t)^t}{(1 +_0 r_{t-1})^{t-1}} - 1
$$

- **Beregning av inflasjonsforventningene**

$$
{}_{t-1}f_t^R = \frac{{}_{t-1}f_t^N -_{t-1} j_t}{1 +_{t-i} j_t}
$$

Tegningsrettigheter

- **Beregning av tegningsrettigheter:**

Rights-on-kursen (P_0) og emisjonskursen (P_e)

$$
P_x = \frac{n}{n+m}P_0 + \frac{m}{n+m}P_e = \frac{nP_0 + mP_e}{n+m}
$$

$$
T_n = \left(\frac{nP_0 + mP_e}{n+m} - P_e\right)\frac{1}{1/N} = \frac{P_o - P_e}{N+1}
$$

Gjeldsgrad og risiko

1. Gjeldsandel: (mellom 0 og 1)

$$
G/(G+E)
$$

2. Gjeldsgrad (mellom 0 og ∞)

$$
G/E
$$

Formelt (uten skatt, men med konkursrisiko)

- Systematisk investeringsrisiko

$$
\beta_I = w_E\beta_E + w_G\beta_G
$$

Hvor $w_E = \frac{E}{E+G}$ og $w_G = \frac{G}{E+G}$.

$$
\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(\frac{G}{E})
$$

- Uten konkursrisiko ($\beta_G = 0$)

$$
\beta_E = \beta_I(1 + \frac{G}{E})
$$

Miller & Modigliani (M&M)

$$
k_G = \frac{r \cdot PG}{G}
$$

$$k_E = \frac{E(OER)}{E}$$

$$k_T = \frac{E(OFR)}{V}$$

- **M&M-1:**

$$V = \frac{E(OFR)}{k_T} = \frac{E(OFR)}{k_U}$$

- **M&M-2:**

$$k_E = k_T + (k_T - k_G)\frac{G}{E} = k_U + (k_U - k_G)\frac{G}{E}$$

Ettledsbeskatning

Selskapsskatt og kontantstrøm

$$\begin{gathered} KE + KK = O + rPG \\ KE + KK = (OFRS - rPG)(1-s) + rPG \\ KE + KK = (OFRS)(1-s) + rPGs \end{gathered}$$

Selskapsskatt og verdi

$$KE + KK = OFRS(1-s) + rPGs$$

$$V_U = \frac{E(OFRS)(1-s)}{k_U}$$

$$V(\text{Renteskattegevinst}) = \frac{srPG}{r} = sPG$$

$$\begin{aligned} V_M &= V_U + V(\text{Renteskattegevinst}) \\ &= V_U + sPG \\ &= \frac{E(OFRS)(1-s)}{k_U} + sPG \end{aligned}$$

Miller og Modigliani med skatt

- **M&MSkatt-1**

$$\begin{aligned} V_M &= V_U + V(\text{Renteskattegevinst}) \\ &= \frac{(OFRS)(1-s)}{k_U} + PGs \\ &= V_u + PGs \end{aligned}$$

- **M&MSkatt-2**

$$k_E = k_U + (k_U - k_G)(1-s)\frac{G}{E}$$

Toleddsbeskatning

$$n^* = (1-s_K) - (1-s_S)(1-s_E)$$

Kapitalverdimodellen med beskatning

Ingen skatt

1. $k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$
2. $k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)\frac{G}{E}$

Ettledsskatt

1. $k_E = r_f + \beta_E[E(r_m) - r_f]$
2. $k_G = r_f + \beta_G[E(r_m) - r_f]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G(1-s)$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(1-s)\frac{G}{E}$

Toleddsskatt med Miller-likevekt

1. $k_E = r_f(1-s) + \beta_E[E(r_m) - r_f(1-s)]$
2. $k_G = r_f(1-s) + \beta_G[E(r_m) - r_f(1-s)]$
3. $k_T = w_E k_E + w_G k_G(1-s)$
4. $\beta_E = \beta_I + (\beta_I - \beta_G)(1-s)\frac{G}{E}$

Lintner-modellen

$$DPA_t = DPA_{t-1} + a[b(OPA_t) - DPA_{t-1}]$$

Hvor både a (justeringsfaktor) og b (målsatt utdelingsforhold) kan variere mellom 0 og 1.

Opsjonens kontantstrøm ved forfall (t=T)

Kjøpsopsjon

$$K_T = \max[0, (A_T - I)]$$

Salgsopsjon

$$S_T = \max[0, (I - A_T)]$$

Opsjon, aksje og risikofritt prosjekt

Aksjer, obligasjoner, og kjøps- og salgsopsjoner kan kombineres parvis slik at den blir gitt den samme kontantstrømmen på innløsningstidspunktet.

$$A_T + S_T = B_T + K_T$$

Salg-kjøp-paritet (SKP)

- Diskret tid

Vi har at investeringsutlegget på $t = 0$ er en kjøp av en aksje, kjøp av salgsopsjon, og salg av en kjøpsopsjon. Dette må tilsvare den neddiskonterte verdien av den risikofrie kontantstrømmen ved forfall

$$A_0 + S_0 - K_0 = \frac{I}{1 + r_f}$$

Omskrevet gir dette oss salg-kjøp-paritet (SKP)

$$K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$$

- Kontinuerlig forrentning

I opsjonssammenheng er det vanlig å operer med *kontinuerlig tid*. For eks. kan en tre-måneders periode deles inn i uendelige mange underperioder. Den kontinuerlige diskonteringsrenten vil da være gitt ved $e^{-i_f \cdot T}$

$$K_0 - S_0 = A_0 - Ie^{-i_f \cdot T}$$

Bestemmelse av sikringsverdi før forfall

$$\theta A_0 - mK_\theta = nA_0 - mK_n$$

Løser vi denne for m får vi *sikringsforholdet* (det antall kjøpsopsjoner som må skrives/selges pr. aksje for at porteføljen av aksjer og opsjoner skal være risikofri:

$$m = \frac{A_0(\theta - n)}{K_\theta - K_n}$$

Bestemmelse av opsjonsverdi før forfall

$$K_0 = \frac{1}{1 + r_f}[qK_\theta + (1 - q)K_n]$$

Hvor de to *sikringssannsynlighetene* (risikojusert sannsynligheter) for q og $1-q$ er definert som

$$q = \frac{1+r_f-n}{\theta-n} \text{ og } (1-q) = \frac{\theta-1-r_f}{\theta-n}$$

Black-Scholes-modellen

$$K_0 = A_0N(d_1) - Ie^{-i_fT}N(d_2)$$

- $N(d_1)$ har tolkning som antall kroner opsjonsverdien endrer seg med når aksjeprisen endres med en krone
- $N(d_2)$ har tolkning som sannsynligheten for at opsjonen er "in-the-money" ved forfall (dvs. $A_T \geq I$)

Vi har videre at

$$d_1 = \frac{ln(\frac{A_0}{I}) + i_fT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

mens sikringsforholdet er bestemt av $m = \frac{1}{N(d_1)}$
