Forelesning 12: **Opsjoner**

- Redegjøre for max-funksjonene til kjøpsopsjoner og salgsopsjoner ved forfall.
- Konstruere kontantstrømsdiagram for kjøpsopsjoner og salgsopsjoner.
- Redegjøre for salg-kjøp-paritet og beregne verdien av ett element i pariteten ved hjelp av de øvrige elementene.
- Beregne verdien av en kjøpsopsjon med den binomiske opsjonsprismodellen.
- Beregne en kjøpsopsjons verdi ved hjelp av Black-Scholes-modellen.
- Redegjøre for hvordan opsjonsprismodeller kan brukes til å verdsette fleksibilitet.

Oppdatert: 2021-11-01

Innledning

En *opsjon* er en kontrakt som gir opsjonseieren en rett, men ikke plikt, til å kjøpe eller selge en eiendel.

Opsjonsmodeller forsøker å prissette verdien av en opsjon. Det mange grunner til at dette er nyttig. Her er noen::

1. Benyttes i bedriftenes risikostyring.
2. Øke din avkastning i kapitalmarkedet
3. Utbredt finansielt instrument
4. Besvare spørsmål som tidligere ikke hadde noen presise svar.

Hovedvekten i dette kapitlet er å forklare intuisjonen i slike opsjonsprisingmodeller, samt ha noe vekt på teori.

Grunnetrekk ved opsjoner

En *opsjon* har egenskaper i form av at den gir *kjøperen:*

- Rett til å kjøpe eller selge en eiendel
- For en bestemt pris (*innløsningskursen*)
- På et forhåndsbestemt fremtidig tidspunkt (*forfallstidspunktet*)

Opsjoner på ulike eiendeler

- **Akseopsjoner** (vi skal først se på verdsettingen av disse)
- Konvertible obligasjoner
- Valutakursopsjoner
- Kassakreditt har opsjonstrekk
- Private kontrakter
- **En rekke investerings- og finansieringsbeslutninger har direkte og indirekte opsjonstrekk** (vi skal til slutt se på prinsippingen bak verdsettinge av disse)

Standardisert opsjonskontrakt

Børsnotering og standardisering av opsjonskontrakter fordelaktig fordi det øker den underliggenes aksjen *likviditet*

Aksjeopsjoner på Oslø børs er standardisert ved at

- Består av: *Akseopsjoner (amerikanske) og indeksopsjoner (euroeiske)*
- Kontraktstørrelse: *En opsjon gir rett til 100 aksjer*
- Minimumskrav til handel: *10 kontrakter*

Merk: For å forenkle fremstillinge, studerer ser vi nå framover på kun europeiske opsjoner hvor det ikke er satt noe minumumskrav til handel.

Opsjonens kontantstrøm ved forfall (t=T)

Kjøpsopsjon

$$K_T = \max[0, (A_T - I)] \tag{1}$$

Salgsopsjon

$$S_T = \max[0, (I - A_T)] \tag{2}$$

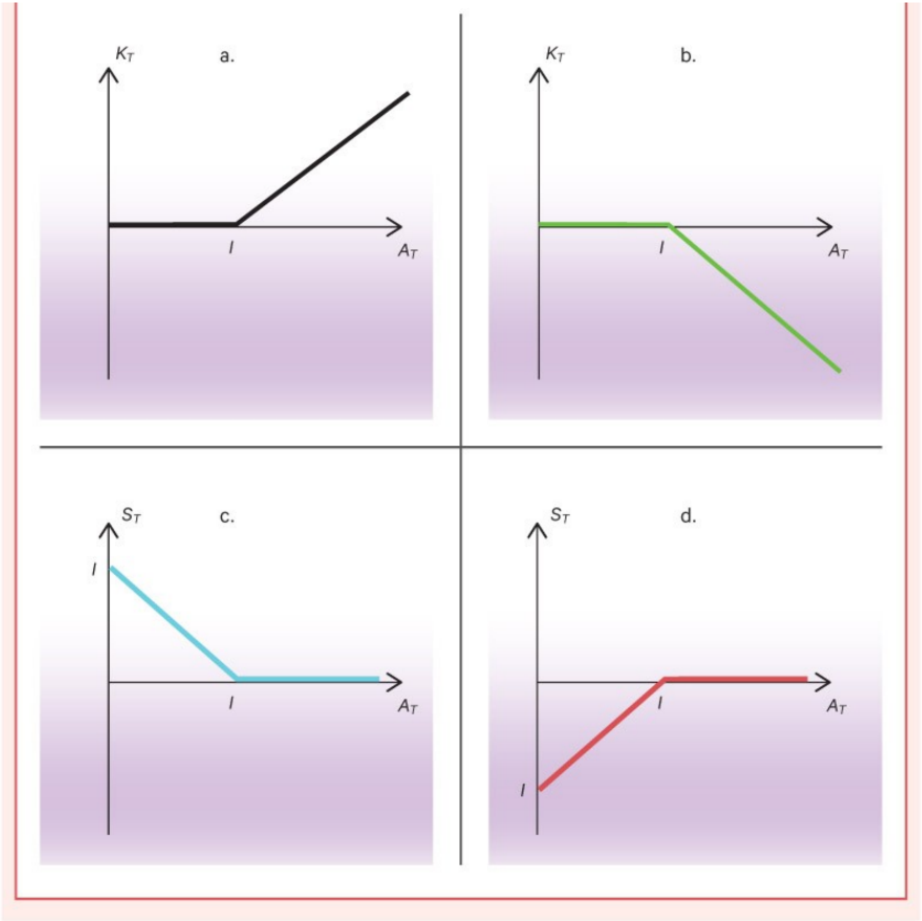
Talleksempel 12.2:

16 . november kjøpe du både en kjøps- og salgsopsjon på Telenor-aksjen med innløsningskurs 170,-. Aksjekursen var da 149.50,-, mens opsjonskursen var hhhv. 0.35,- og 21,-. På forfallsdagoen var høyeste aksjekurs kr 151,50,-. Deg gir oss

$$K_T = \max[0, (151.50 - 170)] = 0$$

$$S_T = \max[0, (170 - 151.50)] = 18.50$$

Kontantstrømdiagram for kjøps- og salgsopsjoner



a: Kontantstrøm for kjøpt kjøpsopsjon (K_T).

b: Kontantstrøm for solgt kjøpsopsjon (K_T).

c: Kontantstrøm for kjøpt salgsopsjon (S_T).

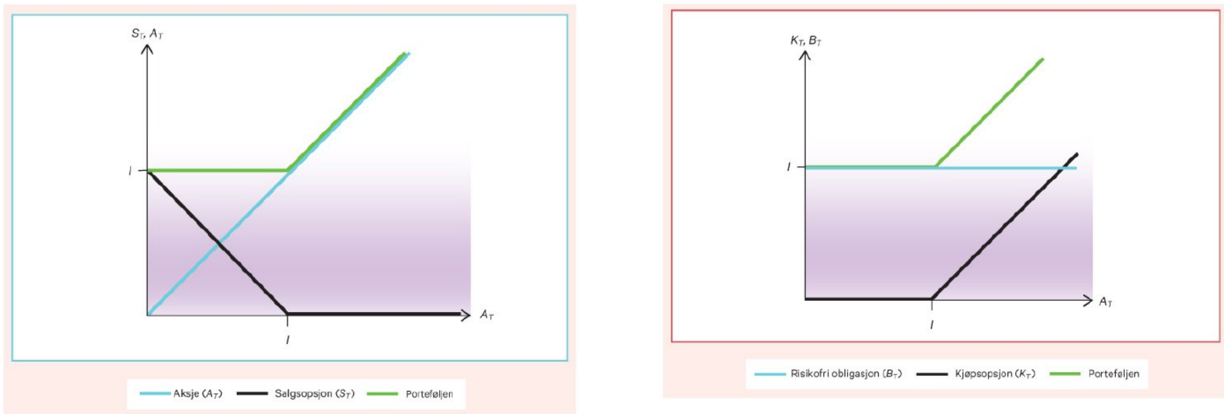
d: Kontantstrøm for solgt salgsopsjon (S_T).

FIGUR 12.1 Kontantstrømsdiagram ved forfall for kjøps- og salgsopsjoner. Aksjekursen er A_T og innløsningskursen I.

Opsjon, aksje og risikofritt prosjekt

Aksjer, obligasjoner, og kjøps- og salgsopsjoner kan kombineres parvis slik at den blir gitt den samme kontantstrømmen

$$A_T + S_T = B_T + K_T$$



b: Kontantstrøm for risikofri obligasjon og kjøpsopsjon.

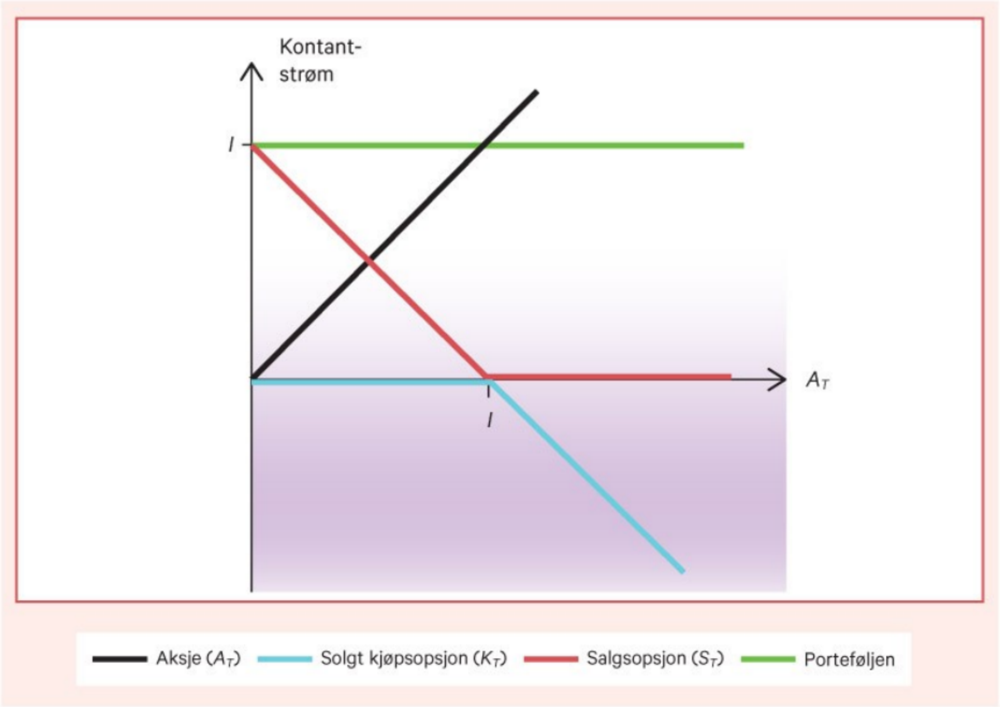
a: Kontantstrøm for aksje og salgsopsjon.

FIGUR 12.2 Kontantstrøm ved forfall for to porteføljer med hhv. en aksje og en salgsopsjon i a) og en risikofri obligasjon og en kjøpsopsjon i b). Innløsningskursen er *I*.

Kontantstrøm for aksje og salgsopsjon (par 1) og risikofri obligasjon og kjøpsobligasjon (par 2)

Den parvise porteføljekombinasjonen løst for B_T (risikofri kontantstrøm)

$$B_T = A_T + S_T - K_T$$



FIGUR 12.3 Kontantstrøm ved forfall for en portefølje med en aksje, en salgsopsjon og en solgt kjøpsopsjon. Opsjonene har innløsningskurs *I*.

Kontantstrømmmen ved forfall for en portefølje med en aksje, salgsopsjon, og en solgt kjøpsopsjon

Salg-kjøp-paritet (SKP)

- Parvise porteføljekombinasjonen kan benyttes til å forklare såkalt salg-kjøp-paritet (SKP) ("put-cal-parity").
- En slik sammenheng er nyttig siden en har mulighet til å verdsette en salgsopsjon dersom en kjenner verdien til en tilsvarende kjøpsopsjon.
- Ved feilprising vil arbitrasjehandel sørge for at denne likevekten vil bli opprettholdt
- Sistnevnte gjør at vi kun trenger å kunne å konstruere modeller for kjøpsopsjoner.

Investeringsutlegget på $t = 0$ er kjøp av en aksje, kjøp av salgsopsjon, og salg av en kjøpsopsjoner må tilsvare den neddiskonterte verdien av den risikofrie kontantstrømmen ved forfall

$$A_0 + S_0 - K_0 = \frac{I}{1 + r_f}$$

Omskrevet gir dette salg-kjøp-paritet (SKP)

$$K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$$

Kontinuerlig forrentning

I opsjonssammenheng er det vanlig å operer med *kontinuerlig tid*. For eks. kan en tre-måneders periode deles inn i uendelige mange underperioder. Den kontinuerlige diskonteringsrenten vil da være gitt ved $e^{-i_f \cdot T}$

$$K_0 - S_0 = A_0 - Ie^{-i_f \cdot T}$$

Bestemmelse av opsjonsverdi før forfall

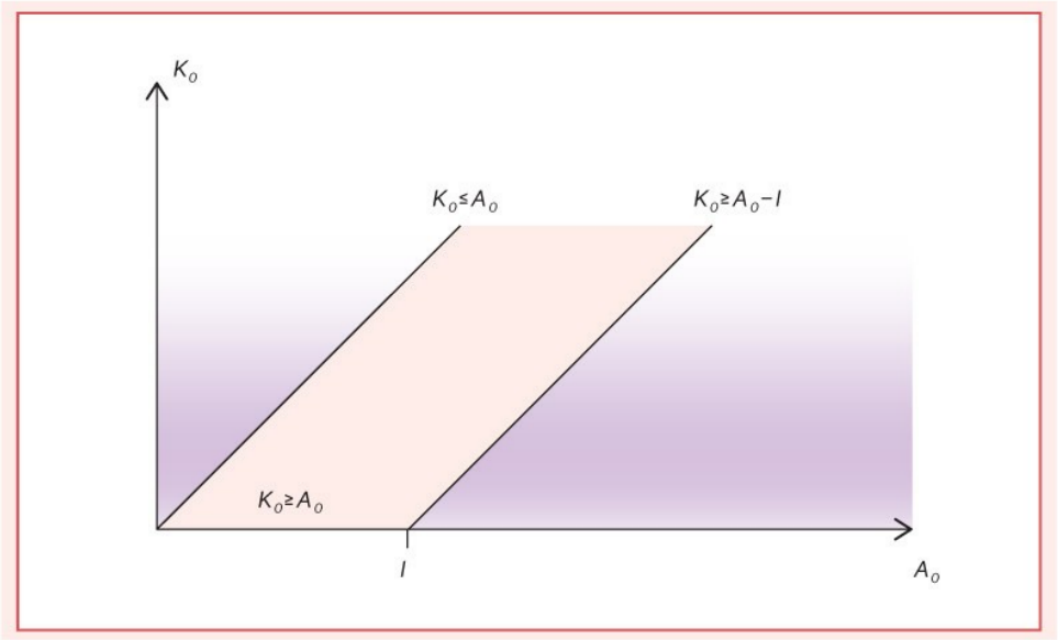
	Faktor	Kjøpsopsjon	Salgsopsjon
1	Verdi av underliggende aksje	?	?
2	Innløsningskurs	?	?
3	Tid til forfall (løpetid)	?	?
4	Underliggende eiendels volatilitet	?	?
5	Risikofri rente	?	?

Øvelse: Hva er dine a-priori oppfatninger om oppsjonsverdien ved en isolert økning i disse fem faktorene?

Opsjonsverdi og aksjekurs (#1)

Tre betingelser

1. Nedre betingelse: $K_0 \geq 0$
2. Øvre betingelse: $K_0 \leq A_0$
3. Verdibetingelse: $K_0 \geq A_0 - I$ (ikke lavere verdi enn øyeblikkelig innløsning)



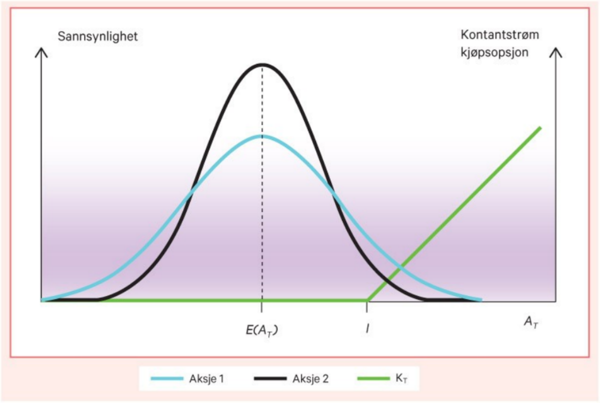
FIGUR 12.4 Kjøpsopsjonens grenseverdier. K_0 er opsjonskurs, A_0 er aksjekurs, og I er innløsningskurs.

Opsjonsverdi, innløsningskurs og kontraktstid (#2-3)

Fra Tabell 12.1 i lærebok finner vi at

- Verdien av kjøpsopsjon avtar med økende innløsningskurs (motsatt for salgsopsjoner)
- Verdien av kjøpsopsjon avhenger av kontraktstiden: Lengre kontraktstid økt verdi

Opsjonsverdi og aksjens volatilitet (# 4)



FIGUR 12.5 Sannsynlighetsfordelinger for aksjepris ved forfall (A_T) og kontantstrøm for en kjøpt kjøpsopsjon på aksjen (K_T).

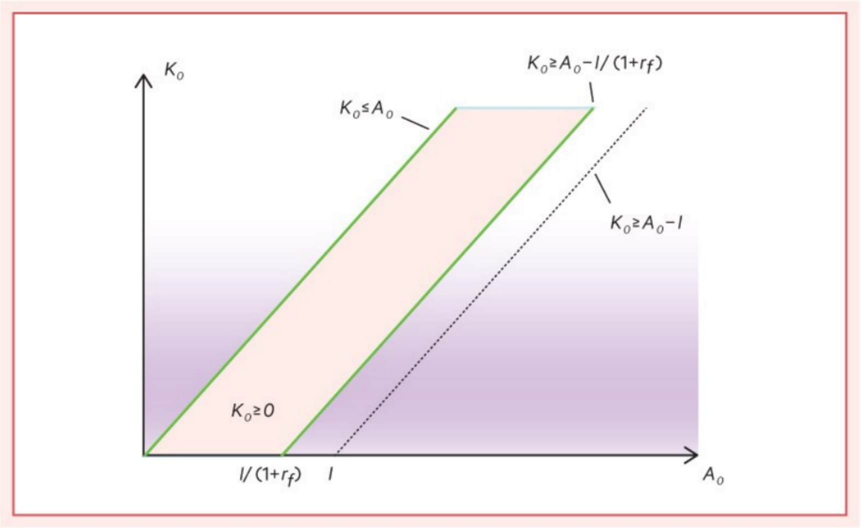
- Opsjonsverdien øker med aksjekursen *volatilitet* (standaravvik/varians)

Opsjonsverdi og rente (# 5)

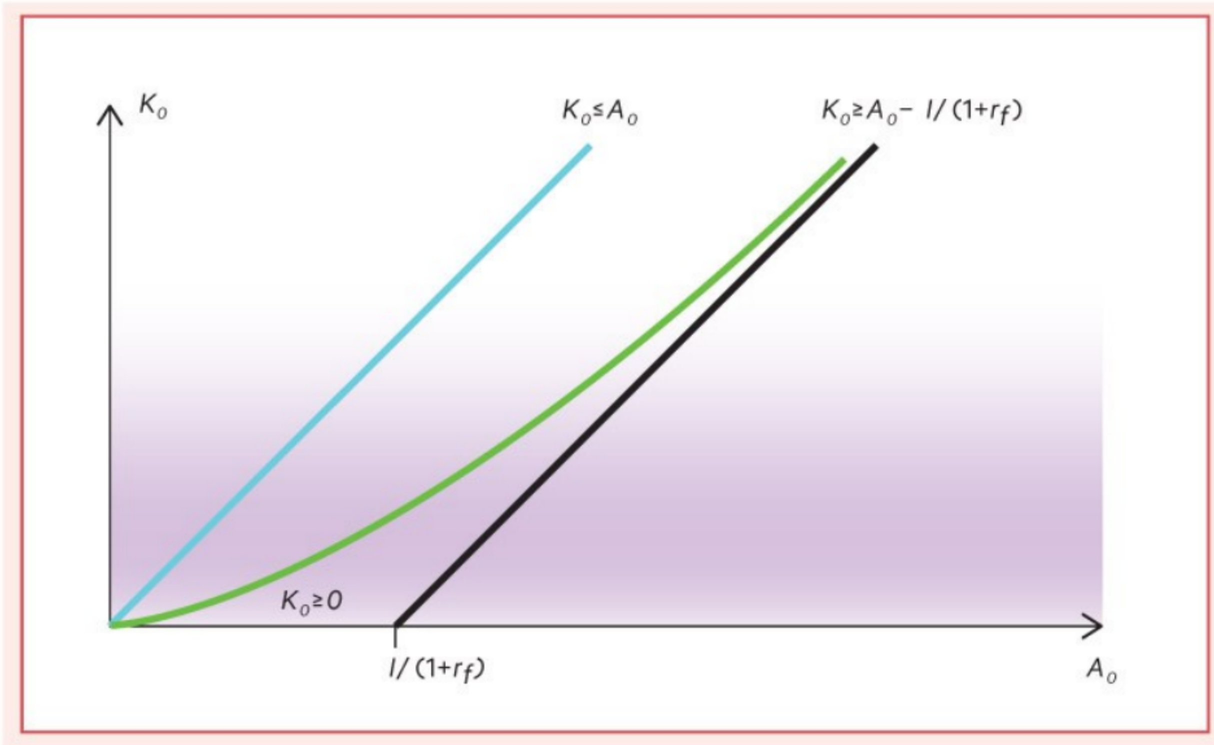
- Høyere rente fører til høyere opsjonsverdi. Dette fordi høyere rente reduserer nåverdien av innløsningskursen

Vi kan få øye på dette ved å tilbakedatere verdien av kjøpsopsjon til investeringstidspunktet (t=0)

$$K_0 \geq \max[0, (A_T - \frac{I}{1+r_f})] \tag{3}$$



FIGUR 12.6 Kjøpsopsjonens grenseverdier. K_0 er opsjonskurs, A_0 er aksjekurs.



FIGUR 12.7 Kjøpsopsjonens verdi (K_0); grønn linje som funksjon av aksjepris før forfall (A_0). Grenseverdiene er blå linje og svart linje.

Opsjonens fem verdibestemmende faktorer

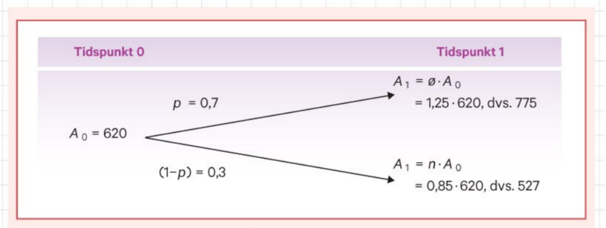
	Faktor	Kjøpsopsjon	Salgsopsjon
1	Verdi av underliggende aksje	?	?
2	Innløsningskurs	?	?
3	Tid til forfall (løpetid)	?	?
4	Underliggende eiendels volatilitet	?	?
5	Risikofri rente	?	?

Binomisk opsjonsprismodell

Ved opsjonens forfallstidspunkt vil opsjonen ha en av to mulige verdier (binomisk)

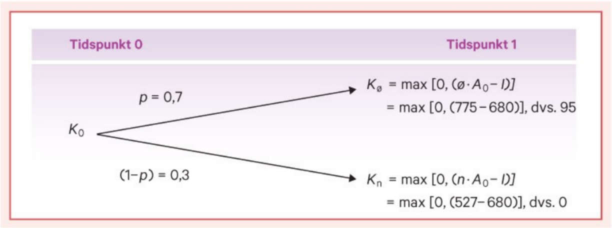
Eksempel 12.5: Dagens kurs på oljeselskapet Petro er 620,-. Et usikkert oljeboringsprosjekt vil enten føre til at kursn stiger 775,- (dvs. 20 prosent økning som har 75 prosent sannsynlighet), eller falle til 527 (dvs. falle med 15 prosent som har 30 prosent sannsynlighet). Tre-måneders risikofri rente er git ved 0.01.

Kontantstrømfordelingen av en akjse



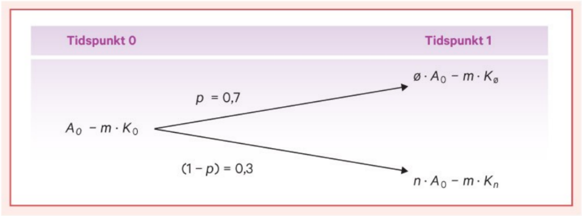
FIGUR 12.8 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en aksje.

Kontantstrømfordelingen av en kjøpsopsjon



FIGUR 12.9 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en kjøpsopsjon med innløsningskurs 680.

Kontantstrømfordelingen av en sikringsportefølje



FIGUR 12.10 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en sikringsportefølje.

Gitt at sikringsporteføljen er risikofri, må de to mulige utfallene på tidspunkt 1 være identiske.

$$\theta A_0 - mK_0 = nA_0 - mK_n \tag{4}$$

Løser vi denne for m får vi *sikringsforholdet* (det antall kjøpsopsjoner som må skrives/selges pr. aksje for at porteføljen av aksjer og opsjoner skal være risikofri:

$$m = \frac{A(\theta - n)}{K_\theta - K_n}$$

Eksempel 12.5: gir oss

$$m = \frac{620(1.25 - 0.85)}{95} = 2.61 \text{ kjøpsopsjoner per kjøpte aksje}$$

Kravet om null arbitrasjegevinst betyr derfor at følgende sammenheng må gjelde mellom investeringen ($t = 0$) og kontantstrømmen ($t = 2$).

$$A_0 - mK_0 = \frac{nA_0 - mK_n}{1 + r_f} \tag{5}$$

Løser vi dette for K_o ved først å sette inn for m får vi

$$K_0 = \frac{1}{1 + r_f}[qK_\theta + (1 - q)K_n] \tag{6}$$

Hvor de to sikringssannsynlighetene q og $(1 - q)$ er definert som

$$q = \frac{1 + r_f - n}{\theta - n}$$
$$(1 - q) = \frac{\theta - 1 - r_f}{\theta - n}$$

Verdien til kjøpsopsjonen er derfor bestemt som den nedisikonterte verdien av *sikringssannsynligheten* (hakeparantesen omdanner en usikker kontantstrøm til dens sikkerhetskivalente kontantstrømmen, jmf. forelesning 1)

Eksempel 12.5: gir oss her

$$q = \frac{1 + 0.01 - 0.85}{1.25 - 0.85} = 0.4$$

$$(1 - q) = \frac{1.25 - 1 - 0.01}{1.25 - 0.85} = 0.6$$

$$K_0 = \frac{1}{1 + 0.01}[0.4 \cdot 95 + 0.6 \cdot 0] = 521.80$$

Øvelse: Kontrollregninger

- Opsjonsverdien er uavhenig av investors risikoholdning
- Opsjonsverdien er uavhenig av sannsynligheten for aksjekursendring
- Forventet aksjekurs er irrelevant for opsjonsverdien
- Kjøpsopsjonens verdi kan uttrykkes som den sikkerhetsekvivalente verdien verdien av kjøpsopsjonen ved forfall diskontert med risikofri rente
- Opsjonsverdien avhanger kun av de fem variablen: A_o, θ, n, r_f, I

Black-Scholes-modellen

Sentrale forutsetninger:

- Kontinuerlig tid
- Short-salg er mulig
- Det er ingen skatt eller transaksjonskostnader
- Aksjen betaler ikke dividende (footnote)
- Risikofri rent er konstant

$$K_0 = A_0 N(d_1) - I e^{-i_f T} N(d_2) \tag{7}$$

hvor

$$d_1 = \frac{ln(\frac{A_0}{I}) + i_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \tag{8}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

mens sikringsforholdet blir bestemt ved

$$m = \frac{1}{N(d_1)} \tag{9}$$

Eksempel 12.7 OBX-indeksen ble 31.08.2015 notert til 532.26-. Samme dag kontinuerlig risikofri årsrente beregnes til 1.2 prosent. Kjøpsopsjoner med Innløsningskurs 530,- og forfall 17.09.2015 ble omsatt til 15,25,-. OBX-indeksen årlige standardavvik er estimert til 30.4%.

Starter med

$$d_1 = \frac{ln(\frac{532.26}{530}) + 0.01217/365}{\sigma\sqrt{17/365}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{17/365} = 0.10618 \tag{10}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{17/365} = 0.04057$$

Som ved bruk av standardnormalfordelingstabellen (interpolering) gir oss

$$N(d_1) = 1 - 0.45772 = 0.542280 \tag{11}$$

$$N(d_2) = 1 - 0.483818 = 0.516182$$

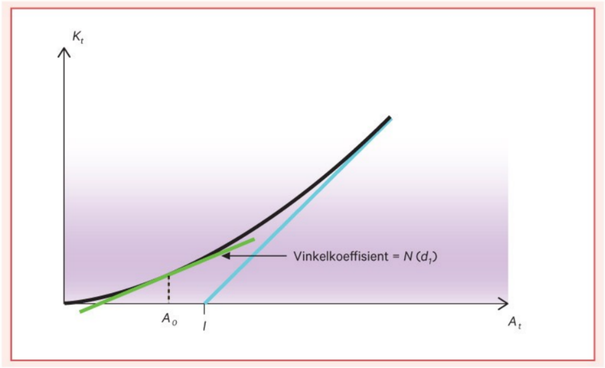
Vi kan nå finne opsjonsprisen som er gitt ved

$$K_0 = 532.26 \cdot 0.542280 - 530e^{-0.012(17/365)}0.516182 = 15.21 \tag{12}$$

Sammenligning Binomisk modell og Black-Scholes modellen

$$K_0 = \max[0, (A_0 - Ie^{-i_f \cdot T})] \tag{13}$$

$$K_0 = A_0 N(d_1) - Ie^{-i_f T} N(d_2) \tag{14}$$



FIGUR 12.11 Kjøpsopsjonens verdi før forfall (K_t) som funksjon av aksjepris (A_t).

Opsjonstankegang i finansfaget

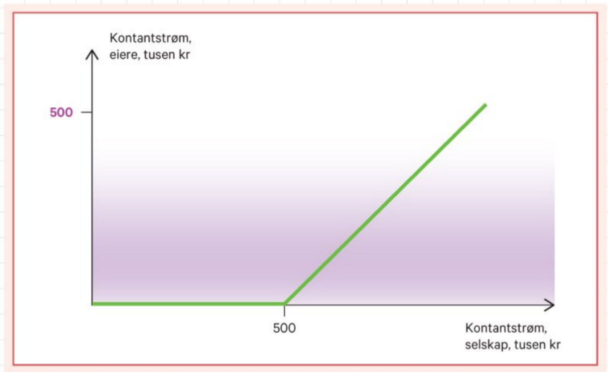
Som nevnt innledningsvis finnes det både direkte og indirekte (implisitte) opsjonstrekk i en rekke:

- Finansieringsprosjekter (**F**)
- Investeringsprosjekter (**I**)

Vi ser nærmere på disse nå

Kapitalstruktur og opsjonsverdi (F)

Eksempel 12.10 Mopsjon ASA er et lite selskap med en enkel kapitalstruktur Selskapet er finansert med egenkapital og et lån. Lån er på 500.000,- (inklusive renter) og skal tilbakebatales om ett år. Vi antar også at selskapet skal avvikles om ett år, og at kontantstrømmen inkluderer salgsverdien av selskapet. Kontantstrømmen til eierne er vist i figuren nedenfor.



FIGUR 12.12 Kontantstrøm til eierne av Mopsjon ASA som funksjon av selskapets kontantstrøm.

Formelt kan vi derfor skrive den som en kjøpsopsjon på formen

$$E_T = \max[0, V_T - G_T] \tag{15}$$

siden $V_T = A_T$ og $E_T = K_T$ kan vi skrive SKP som

$$V_T + S_T = B_T + E_T \tag{16}$$

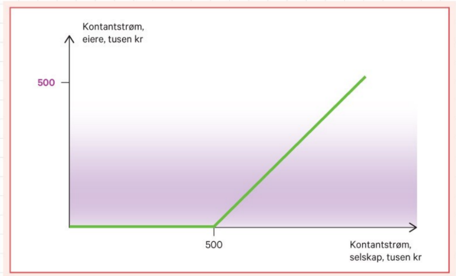
Vi har videre at

$$V_T = E_T + G_T \tag{17}$$

Som gir oss

$$(E_T + G_T) + S_T = B_T + E_T \tag{18}$$
$$G_T = B_T - S_T$$

$$B_T - S_T = \min[V_T, B_T] \tag{19}$$



FIGUR 12.12 Kontantstrøm til eierne av Mopsjon ASA som funksjon av selskapets kontantstrøm.

Vurder som kjøpsopsjon

- Kreditorene
  1. Eier selskapet
  2. Har solgt en kjøpsopsjon på selskapet til aksjonærene
- Aksjonærene
  1. Eier en kjøpsopsjon på selskapet

Vurder som salgsopsjon

- Kreditorene
  1. Har en risikofri fordring
  2. Har solgt en salgsopsjon til aksjonærene
- Aksjonærene
  1. Eier selskapet
  2. Skylder renter og avdrag til kreditorene
  3. Eier en salgsopsjon på selskapet

Endret investeringsrisiko (F)

Anta at selskapet gjennomfører investeringer som har nåverdi lik null men som øker selskapets investeringsrisiko (kun usystematisk)

- Egenkapitalen vurdert som kjøpsopsjon vil øke
- Siden KVM forteller oss at dette ikke vil øke selskapsverdien, vil gjeldsverdien måtte avta

I praksis vil kreditorene forsøke å forsikre seg mot slik adferd ved å ha strenge betingelser om selskapets investeringsadferd.

Realopsjoner (I)

- Mange realinvsteringsprosjekt innehar opsjonstrekk, slike prosjektegenskaper kan kalles *realopsjoner*
- Det sentrale her er at det dreier seg om en rett, uten samtidig en plikt, til å gjennomføre en realinvstering
- Disse opsjonene gir *fleksibilitiet* som kan være verdifull (selskapet trenger ikke å bestemme i dag om produksjonskapasiteten skal øke, men på et senere tidspunkt når usikkerheten er redusert)
- Denne verdien av fleksbilitet tas ikke hensyn til når forventet kontantstrøm skal diskonteres med risikojustert rente
- Beslutningstre (se forelesning nr. 5) gir en nyttig oversikt gjennom en grafisk fremstilling av tidsfordelte beslutningspunkter

Øvelser: Kan du komme på noen realinvesteringsprosjekter med opsjonstrekk?

Verdidriverne

1. Dagens aksjekurs
2. Innløsningskursen tilsvarer investeringene som trengs for å produsere prosjektets innbetalinger
3. Standardavviket til kontantstrømmen som gir opsjonens verdi
4. Tid til forfall (lang tid for realopsjoner)
5. Risikofri rente

Tre betingelser må være oppfylt for at realopsjonsmodell vil avvike fra diskontering av forventet kontantstrøm

1. Usikkerhet om fremtidig kontantstrøm
2. Rett, men ikke en plikt, til å gjennomføre framtidige investeringer
3. Investeringene er irreversible

Typer

Vi kan skille mellom tre typer realopsjoner

1. *Utsettelsesopsjon*
2. *Læringsopsjon*
3. *Vekstopsjon*

	Egenskap	Oljeselskapet Gasse	Farmasi	Mobiltelefonlisens
1	Kontantstrøm	Innhenting fra salgs av gass	Inntjening fra salg av medikament	Inntjening fra mobiltelefonbrukere
2	Innløsningspris	Kostnaden ved å klargjørefor utvinning	Forskning og utvikling for å bringe medikamentet til markedet	Utviklingskostnader for programvare og utbygging
3	Usikkerhet	Markespris for gass	Suksess/fiasko i kliniske prøver	Etterspørsel etter mobile tjenester, spesielt internettbaserte
4	Tid til forfall	Tid til forfall	Patentets levetid	Lisensens varighet

Verdien av fleksibilitet

$$\text{NV} = \text{Tradisjonell NV} + \text{Opsjonsverdi} \tag{20}$$

Verdsettelse av realopsjoner krever ofte inngående kunnskap om opsjonsprisingsmodeller som går langt utover det som blir undervist i dette kurset.