# Forelesning 2: Relevant risiko: Porteføljeteori to objekter

**Læringsmål:**

- Forklare gjennom et eksempel hvorfor et prosjekt som er risikabelt vurdert alene kan ha lav risiko når prosjektet inngår i en portefølje.
- Tallfeste risiko i en portefølje ved å beregne standardavvik.
- Forklare hvorfor porteføljens risiko avhenger av samvariasjonen mellom prosjektene som inngår i porteføljen og de andelene som er investert i hvert prosjekt.

Oppdatert: 2023-08-30

# Prosjektrisiko for eierne vs. bedriften

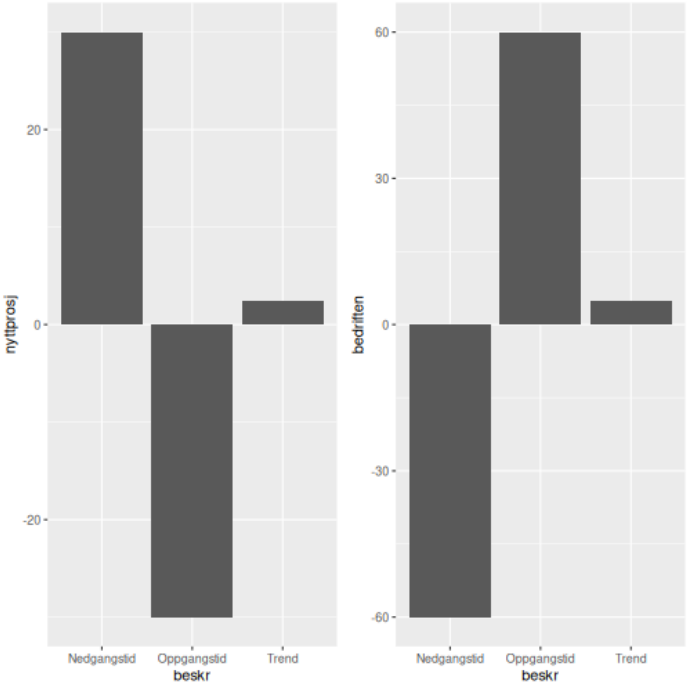
Grunnleggende forutsetning: Ledelsen i bedriften har som oppgave å treffe beslutninger som maksimerer verdien av egenkapitalen til eierne.

Vi tar utgangspunkt i følgende tabell

| | Sannsynl. | Tilstandsb. | Tilstand | Bedriftens portefølje | Nytt prosjekt | Eierens portefølje (ikke div.) | Eierens portefølje (div.) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | Nedgangstid | 1 | -60 | 30 | -60 | 10 |
| 2 | 0.3 | Trend | 2 | 5 | 2.5 | 5 | 5 |
| 3 | 0.5 | Oppgangstid | 3 | 60 | -30 | 60 | -10 |

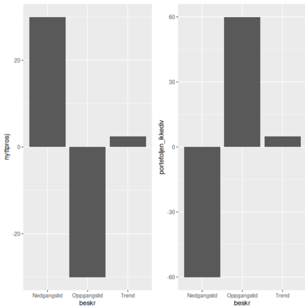
# Risiko for bedriften

De nye prosjektets bidrag til bedriftens kontantstrøm

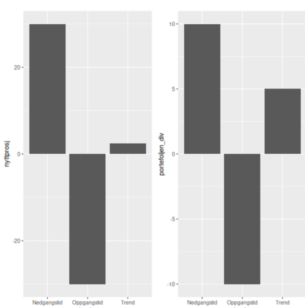


# Risiko for eierne

- Udeversifiserte eiere:
  - Ser forventet kontantstrøm fra det nye prosjektet i sammenheng med **bedriftens** allerede eksisterende kontantstrøm




- Veldiversifiserte eiere:
  - Ser forventet kontantstrøm fra det nye prosjektet i sammenheng med **porteføljens** eksisterende kontantstrøm



# Måling av risiko

**Metode 1 for måling av risiko (1-n investeringsobjekter)**

- Varians

$$Var(X) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[X(s) - E(X)]^2 = \tag{10}$$
$$Pr(1)[X(1) - E(X)]^2 + Pr(2)[X(2) - E(X)]^2 + \ldots +$$
$$Pr(S)[X(S) - E(X)]^2$$

- Standardavvik

$$Std(X) = \sqrt{Var(X)} \tag{11}$$

Merk: Mens standardavviket gir oss samme benevning som forventet verdi, er benevningen til variansen vanskeligere å forholde seg til ("tolkning: Det kvadrerte til benevningen av standardavviket")

**Metode 2 for måling av risiko (2 investeringsobjekter)**

- Varians

$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Kov(r_1, r_2) \tag{12}$$

Hvor samvariasjonen er gitt ved

$$Kov(r_1, r_2) = \sum_{s=1}^{S} Pr(s)[r_1(s) - E(r_1)][r_2(s) - E(r_2)] \tag{13}$$

$$Pr(1)[r_1(1) - E(r_1)][r_2(1) - E(r_2)] +$$
$$Pr(2)[r_1(2) - E(r_1)][r_2(2) - E(r_2)] + \ldots +$$
$$Pr(S)[r_1(S) - E(r_1)][r_2(S) - E(r_2)]$$

- Standardavviket

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(r_p)} \tag{14}$$

# Enkeltobjekter

**Eksempel 2.1**

| | Tilstand | Sansynlighet | A | B |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.2 | 0.16 | 0.05 |
| 2 | 2 | 0.5 | 0.12 | 0.2 |
| 3 | 3 | 0.3 | 0.06 | 0.4 |

Fra Metode 1 oppgitt under første forelesning har vi at

$$E(r_a) = 0.2 \cdot 0.16 + 0.5 \cdot 0.12 + 0.3 \cdot 0.06 = 0.11$$

$$E(r_b) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.20 + 0.3 \cdot 0.40 = 0.23$$

Fond **A**

$$Var(r_a) = 0.2[0.16 - 0.11]^2 + 0.5[0.12 - 0.11]^2 + 0.3[0.06 - 0.11]^2 = 0.0013$$
$$Std(r_a) = \sqrt{0.0013} = 0.03605551$$

Fond **B**

$$Var(r_b) = 0.2[0.05 - 0.23]^2 + 0.5[0.20 - 0.23]^2 + 0.3[0.40 - 0.23]^2 = 0.0156$$
$$Std(r_b) = \sqrt{0.0156} = 0.1249$$

# Sammensatt fond

Vi antar nå at investeringsbeløpet er likt fordelt mellom de to fondene, dvs $w_1 = 1/2, w_2 = 1 - w_2 = 1/2$.

| | Tilstand | Sansynlighet | Avk. A | Avk. B | w_a | w_b | Avk. C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.2 | 0.16 | 0.05 | 0.5 | 0.5 | 0.105 |
| 2 | 2 | 0.5 | 0.12 | 0.2 | 0.5 | 0.5 | 0.16 |
| 3 | 3 | 0.3 | 0.06 | 0.4 | 0.5 | 0.5 | 0.23 |

Risikoen til det sammensatte fondet C kan måles ved bruk av både metode 1 og 2.

**Metode 1**

$$Var(r_c) = 0.2[0.105 - 0.17]^2 + 0.5[0.16 - 0.17]^2 + 0.3[0.23 - 0.17]^2 = 0.001975$$
$$Std(r_c) = \sqrt{0.001975} = 0.044$$

**Metode 2**

$$Var(r_c) = (1/2)^2(0.0013) + (1/2)^2(0.0156) - 2(1/2)(1/2)0.0045 = 0.001975$$
$$Std(r_c) = \sqrt{0.001975} = 0.044$$

Hvor vi har benyttet at

$$Kov(r_a, r_b) = 0.2[0.16 - 0.11][0.05 - 0.23] + 0.5[0.12 - 0.11][0.20 - 0.23] +$$
$$0.3[0.06 - 0.11][0.40 - 0.23] = -0.0045$$

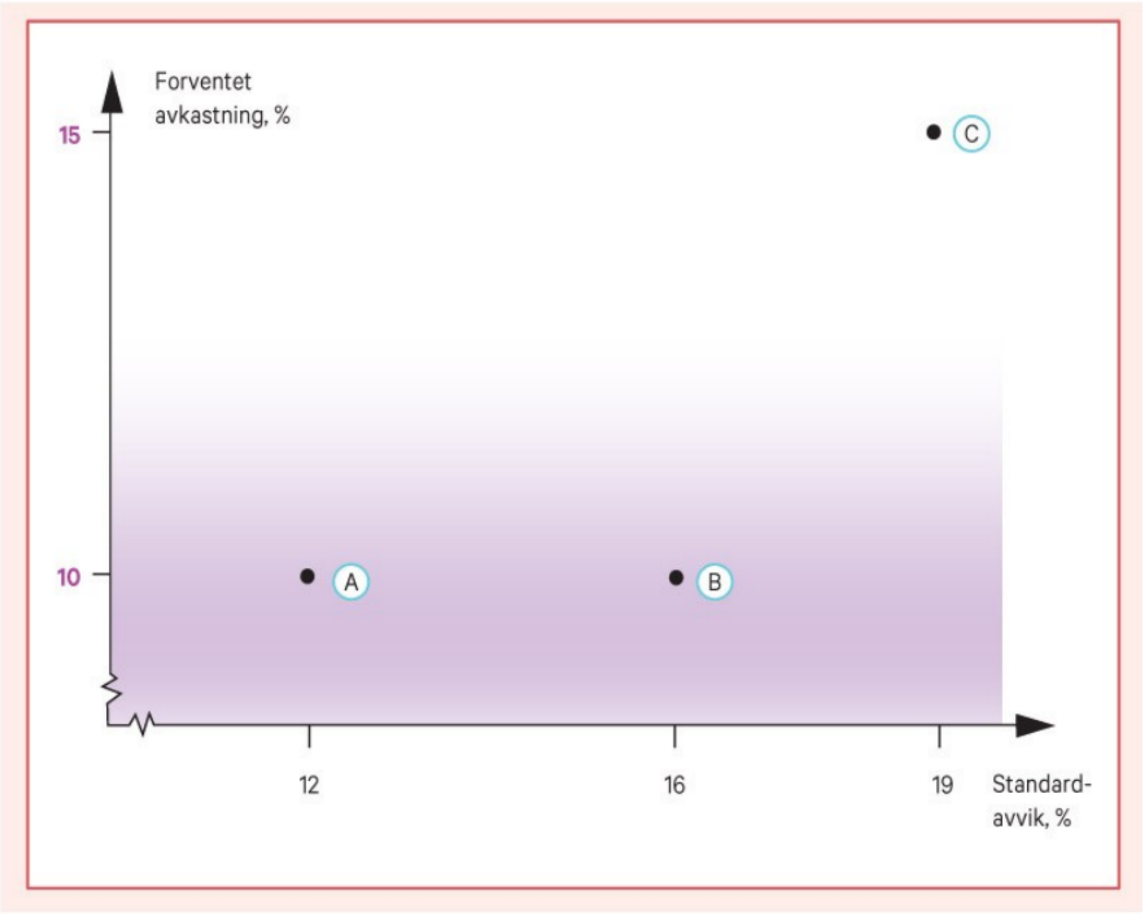
# Risikoholdning og risikokompensasjon

## Holdning

Vi kan skille mellom *risiknøytrale* og *risikoaversje* aktører

- Risikonøytral kun opptatt av forventet avkastning (+)
    - Bedre ut: *Nordover* et diagram med risiko på x-aksen og forventet avkastning på y-aksen
- Risikoaversj opptatt av forholdet mellom forventet avkastning (+) og risiko (-)
- Bedre ut: *Nordvestover* (*forventning-varians/standardavvik-kriteriet*) i et diagram (forventet avkastning varians/standardavvik kriteriet) med risiko på x-aksen og forventet avkastning på y-aksen

I dette kurset legger vi til grunn at *alle aktørene* er risikoaversje (ikke villig til å bære usikkerhet gratis), men at graden av risikoaversjon kan variere mellom de ulike aktørene.




**FIGUR 2.1** Forventet avkastning og standardavvik for tre porteføljer.

# Risikokompenasjon (litt empiri)

Finner man igjen dette i det observerte tallmateriale?

**Veldiversifisert portefølje**

| | | Gjennomsnitt | Standardavvik |
|---|---|---|---|
| 1 | Risikofri rente | 0.015 | 0.01 |
| 2 | Aksjeindeks | 0.068 | 0.127 |

**Udiversifisert portefølje**

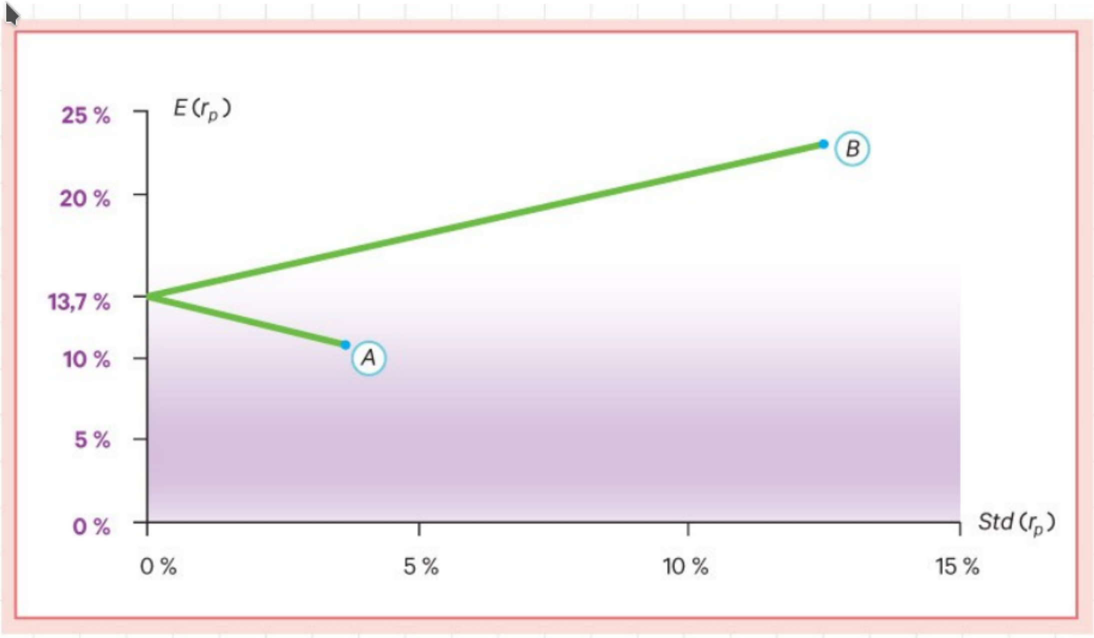
| | | Gjennomsnitt | Standardavvik |
|---|---|---|---|
| 1 | Yara | 0.07 | 0.29 |
| 2 | Itera | 0.07 | 0.27 |
| 3 | Aker Solutions | 0.08 | 0.31 |
| 4 | | | |
| 5 | Portefølje (3 aksjer) | 0.07 | 0.21 |

**Hovedresultater fra undersøkelsen**

1. Det er mye å hente ved diversifisering: Risikoen kan reduseres kraftig uten at du taper noe i form av lavere forventet avkastning
2. Risikokompensasjonen for en enkeltaksje er ikke knyttet til aksjens standardavvik (totalrisiko). Relevant risiko må derfor måles på andre måter.

# Endring av porteføljevekter og samvariasjon

## Porteføljevekter




**FIGUR 2.3** Porteføljens forventede avkastning og standardavvik ved varierende vekter.

**Øvelse:** Forsøk å repliker følgende resultater i Excel

Tabell    R-kode (ikke pensum)    Figur 2.3 (replikasjon)

| | Tilstand | Sannsynlighet | Avkastning a | Avkastning b |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.2 | 0.16 | 0.05 |
| 2 | 2 | 0.5 | 0.12 | 0.2 |
| 3 | 3 | 0.3 | 0.06 | 0.4 |

# Korrelasjonskoeffisienten (standardisert mål på samvariasjon)

$$Korr(r_a, r_b) = \frac{Kov(r_a, r_b)}{Std(r_a)Std(r_b)} \tag{15}$$

- $Korr(r_a, r_b) = 1$ (fullstendig avhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = 0$ (fullstendig uavhengige)
- $Korr(r_a, r_b) = -1$ (fullstendig motsatt avhengige)

Løser denne for $Kov(r_a, r_b) = Korr(r_a, r_b)Std(r_a)Std(r_b)$

Som gjør at vi kan skrive

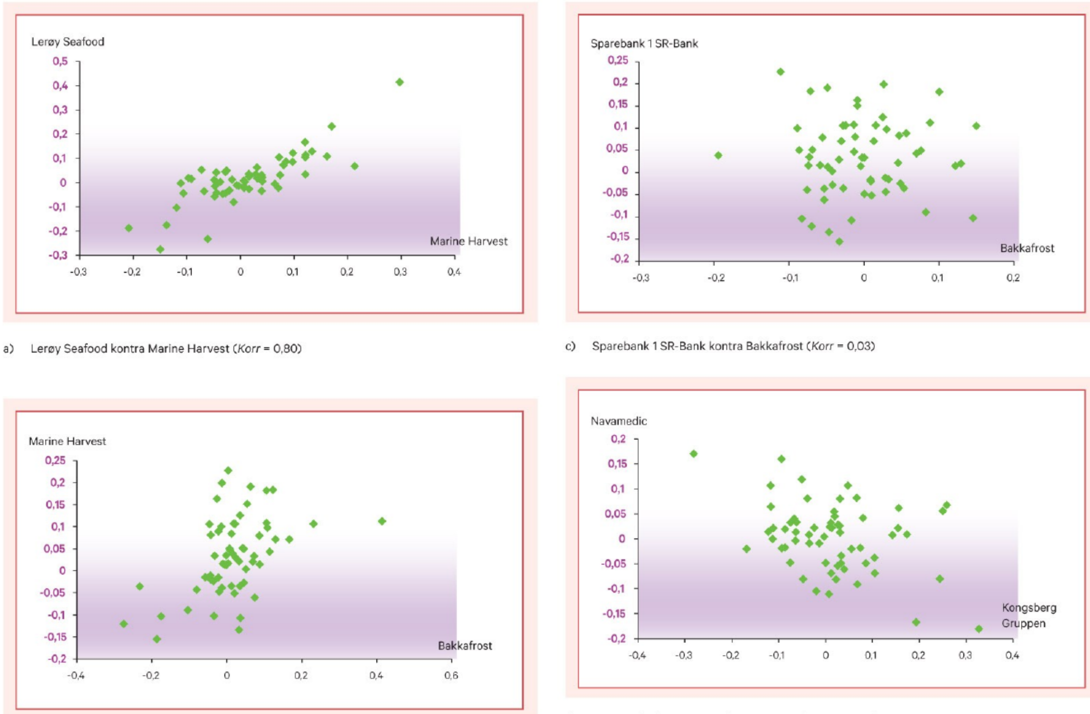
$$Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2w_1 w_2 Korr(r_a, r_b)Std(r_a)Std(r_b) \tag{16}$$

Holder vi oss til eksempel 2.1, innebærer dette at beregningene av porteføljevariansen også kan uttrykkes som

$$Korr(r_a, r_b) = \frac{-0.0045}{0.036 \cdot 0.125} = -1$$

Mens variansen til porteføljen kan uttrykkes som

$$\begin{aligned} Var(r_p) &= (1/2)^2(0.0013) + (1/2)^2(0.0156) - 2(1/2)(1/2)0.036 \cdot 0.125 \\ &= 0.001975 \end{aligned}$$



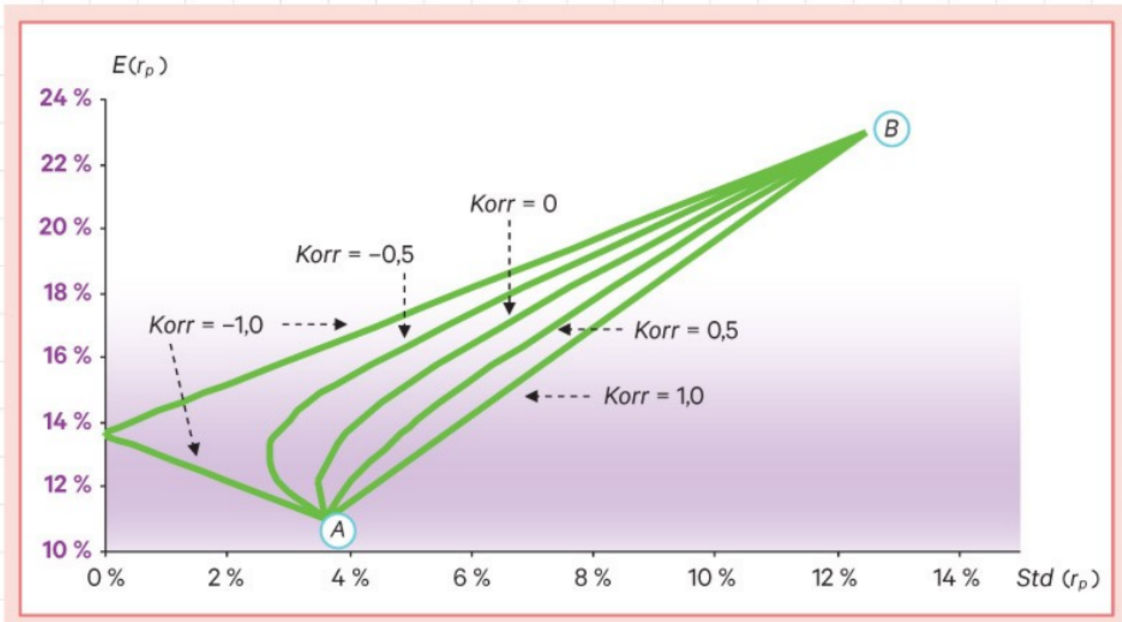

a) Lerøy Seafood kontra Marine Harvest (*Korr* = 0,80)

c) Sparebank 1 SR-Bank kontra Bakkafrost (*Korr* = 0,03)

b) Marine Harvest kontra Bakkafrost (*Korr* = 0,49)

d) Navamedic kontra Kongsberg Gruppen (*Korr* = −0,37)

**FIGUR 2.2** Punktsvermer for parvis, månedlig avkastning i perioden januar 2011 til desember 2015 for seks utvalgte aksjer.




**FIGUR 2.4** Forventet avkastning og standardavvik for en toaksjeportefølje ved varierende vekter og ulike korrelasjonskoeffisienter. Data fra tabell 2.3.

**Øvelse:** Forsøk å replikere følgende tabell i Excel

Tabell | R-kode (ikke pensum) | Figur 2.4 (replikasjon)

| | Tilstand | Sannsynlighet | Avkastning A | Avkastning B |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.2 | 0.16 | 0.05 |
| 2 | 2 | 0.5 | 0.12 | 0.2 |
| 3 | 3 | 0.3 | 0.06 | 0.4 |