Forelesning 11: Opsjoner

- Redegjøre for max-funksjonene til kjøpsopsjoner og salgsopsjoner ved forfall.
- Konstruere kontantstrømsdiagram for kjøpsopsjoner og salgsopsjoner.
- Redegjøre for salg-kjøp-paritet og beregne verdien av ett element i pariteten ved hjelp av de øvrige elementene.
- Beregne verdien av en kjøpsopsjon med den binomiske opsjonsprismodellen.
- Beregne en kjøpsopsjonens verdi ved hjelp av Black-Scholes-modellen.
- Redegjøre for hvordan opsjonsprismodeller kan brukes til å verdsette fleksibilitet.

Oppdatert: 2022-11-02

Innledning

En *opsjon* er en kontrakt som gir opsjonseieren en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe eller selge en eiendel til en avtalt pris i løpet av en avtalt periode.

Opsjonsmodeller forsøker å prissette verdien av en slik kontrakt. Det mange grunner til at dette er nyttig, her er noen:

1. Benyttes i bedriftenes risikostyring.
2. Øke din avkastning i kapitalmarkedet
3. Utbredt finansielt instrument
4. Besvare spørsmål som tidligere ikke hadde noen presise svar.

Hovedvekten i dette kapitlet er å forklare intuisjonen bak slike opsjonsprisingsmodeller, samt vise egenskapene til enkle opsjonsprisingsmodeller.

Grunntrekk ved opsjoner

En *opsjon* har egenskaper i form av at den gir *kjøperen:*

1. Rett til å kjøpe (kjøpsopsjon) eller selge (salgsopsjon) en bestemt eiendel
2. For en bestemt pris (*innløsningskursen*)
3. På et forhåndsbestemt fremtidig tidspunkt (*forfallstidspunktet*)

Eksempler på opsjoner på forskjellige eiendeler

- **Aksjeopsjoner** (vi skal først se på verdsettingen av disse)
- Konvertible obligasjoner
- Valutakursopsjoner
- Kassakreditt har opsjonstrekk
- Private kontrakter
- **En rekke investerings- og finansieringsbeslutninger har direkte og indirekte opsjonstrekk** (vi skal til slutt se på prinsippene bak verdsettingen av disse)

Standardisert opsjonskontrakt

Standardisering og børsnotering av opsjonskontrakter fordelaktig fordi det øker den underliggende aksjens *likviditet*.

Aksjeopsjoner på Oslø børs er standardisert ved at

- Består av: *Aksjeopsjoner (amerikanske) og indeksopsjoner (europeiske)*
- Kontraktstørrelse: *Én opsjon gir rett til 100 aksjer*
- Minimumskrav til handel: *10 kontrakter*

For å forenkle den modelltekniske framstillingen, ser vi framover kun på *europeiske opsjoner* hvor det ikke er satt noe minimumskrav til handel. I tillegg ser vi også bort *beskatning*, *transaksjonskostnader* og *vanlig meglerkurtasje*.

Opsjonens kontantstrøm ved forfall (t=T)

Kjøpsopsjon

$$K_T = \max[0, (A_T - I)] \tag{80}$$

Salgsopsjon

$$S_T = \max[0, (I - A_T)] \tag{81}$$

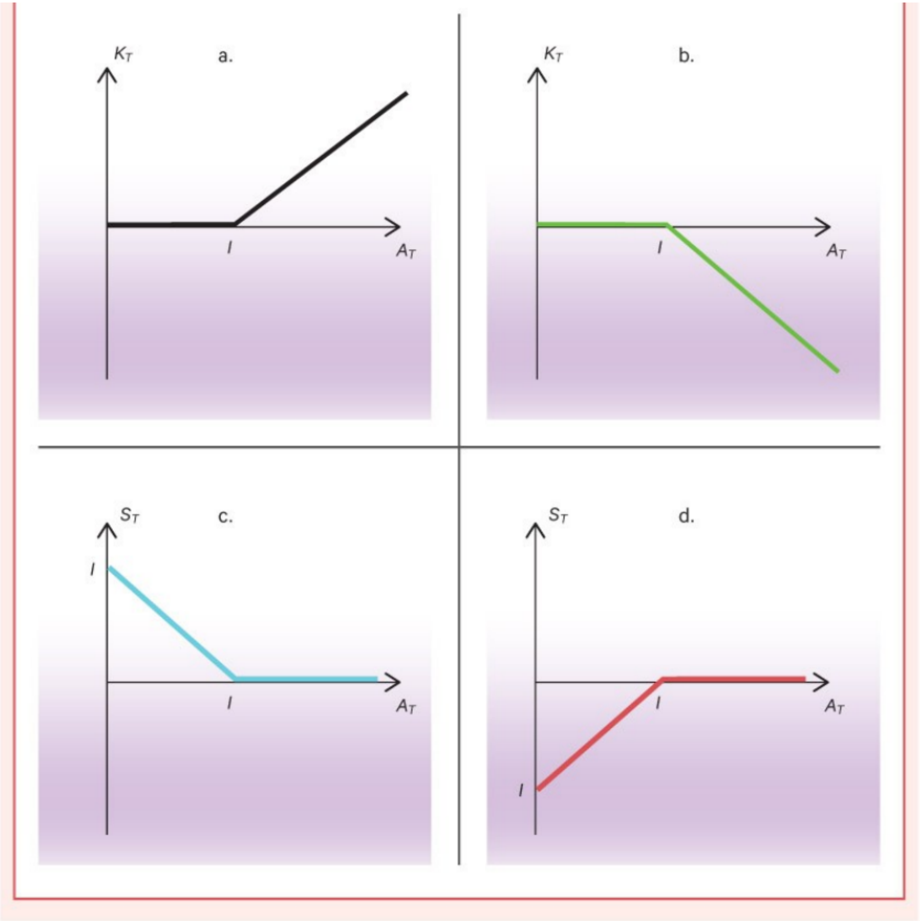
Talleksempel 12.2:

16 . november kjøpe du både en kjøps- og salgsopsjon på Telenor-aksjen med innløsningskurs 170,-. Aksjekursen var da 149.50,-, mens opsjonskursen var hhv. 0.35,- og 21,-. På forfallsdagoen var høyeste aksjekurs kr 151,50,-. Det gir oss

$$K_T = \max[0, (151.50 - 170)] = 0$$

$$S_T = \max[0, (170 - 151.50)] = 18.50$$

Kontantstrømdiagram for kjøps- og salgsopsjoner



a: Kontantstrøm for kjøpt kjøpsopsjon (K_T). b: Kontantstrøm for solgt kjøpsopsjon (K_T).

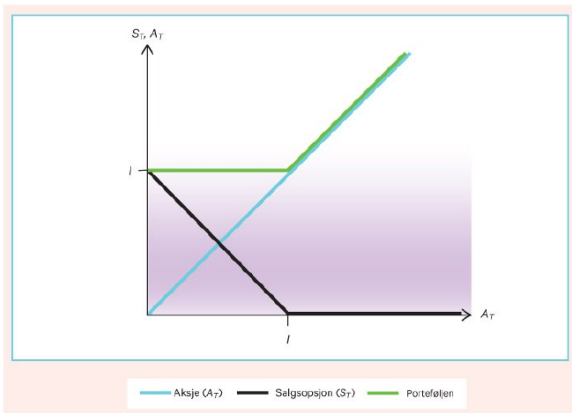
c: Kontantstrøm for kjøpt salgsopsjon (S_T). d: Kontantstrøm for solgt salgsopsjon (S_T).

FIGUR 12.1 Kontantstrømsdiagram ved forfall for kjøps- og salgsopsjoner. Aksjekursen er A_T og innløsningskursen I.

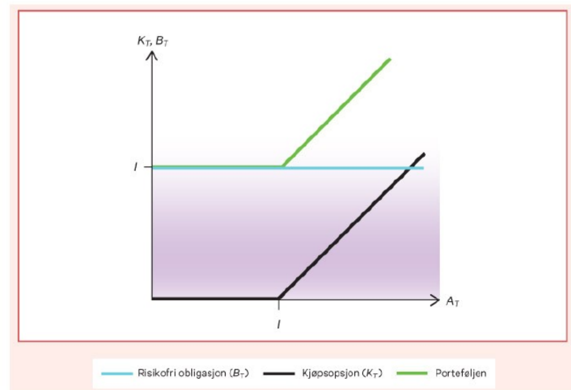
Opsjon, aksje og risikofritt prosjekt

Aksjer, obligasjoner, og kjøps- og salgsopsjoner kan kombineres parvis slik at den blir gitt den samme kontantstrømmen på innløsningstidspunktet.

$$A_T + S_T = B_T + K_T$$



a: Kontantstrøm for aksje og salgsopsjon.



b: Kontantstrøm for risikofri obligasjon og kjøpsopsjon.

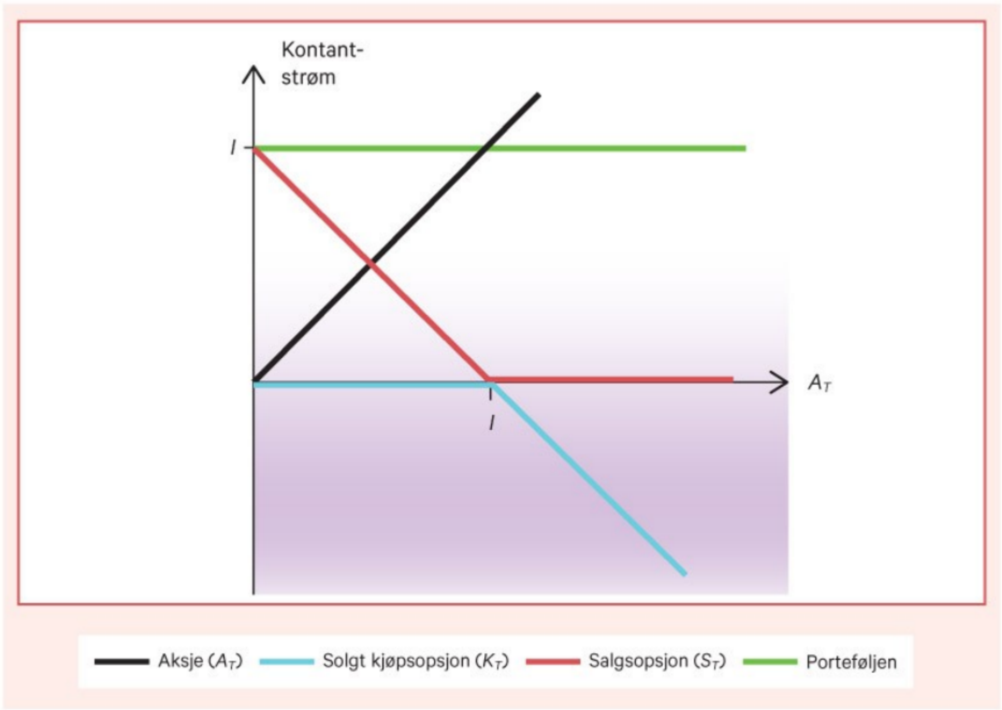
FIGUR 12.2 Kontantstrøm ved forfall for to porteføljer med hhv. en aksje og en salgsopsjon i a) og en risikofri obligasjon og en kjøpsopsjon i b). Innløsningskursen er *I*.

Kontantstrøm for aksje og salgsopsjon (par 1) og risikofri obligasjon og kjøpsopsjonenen (par 2)

Den parvise porteføljekombinasjonen løst for B_T (risikofri kontantstrøm)

$$B_T = A_T + S_T - K_T$$

Viser oss at en risikofri kontantstrøm på innløsningstidspunktet kan skapes av en portefølje bestående av en aksje, salgsopsjon, og en solgt kjøpsopsjon.



FIGUR 12.3 Kontantstrøm ved forfall for en portefølje med en aksje, en salgsopsjon og en solgt kjøpsopsjon. Opsjonene har innløsningskurs *I*.

Salg-kjøp-paritet (SKP)

- Parvise porteføljekombinasjonen kan benyttes til å forklare såkalt salg-kjøp-paritet (SKP) ("put-call-parity").
- Dette fordi ved feilprising vil arbitrasjehandel sørge for at denne likevekten vil bli opprettholdt
- Vi har derfor mulighet til å verdsette en salgsopsjon dersom en kjenner verdien på en tilsvarende kjøpsopsjon.
- Det gjør at vi kun trenger å kunne å konstruere modeller for kjøpsopsjoner.

Diskret tid

Vi har at investeringsutlegget på $t = 0$ er en kjøp av en aksje, kjøp av salgsopsjon, og salg av en kjøpsopsjon. Dette må tilsvare den neddiskonterte verdien av den risikofrie kontantstrømmen ved forfall

$$A_0 + S_0 - K_0 = \frac{I}{1 + r_f}$$

Omskrevet gir dette oss salg-kjøp-paritet (SKP)

$$K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$$

Forskjellen mellom kjøps og salgsopsjonens verdi er lik differansen mellom aksjens verdi og nåverdi av innløsningskursen.

Kontinuerlig forrentning

I opsjonssammenheng er det vanlig å operer med *kontinuerlig tid*. For eks. kan en tre-måneders periode deles inn i uendelige mange underperioder. Den kontinuerlige diskonteringsrenten vil da være gitt ved $e^{-i_f \cdot T}$

$$K_0 - S_0 = A_0 - Ie^{-i_f \cdot T}$$

Bestemmelse av opsjonsverdi før forfall

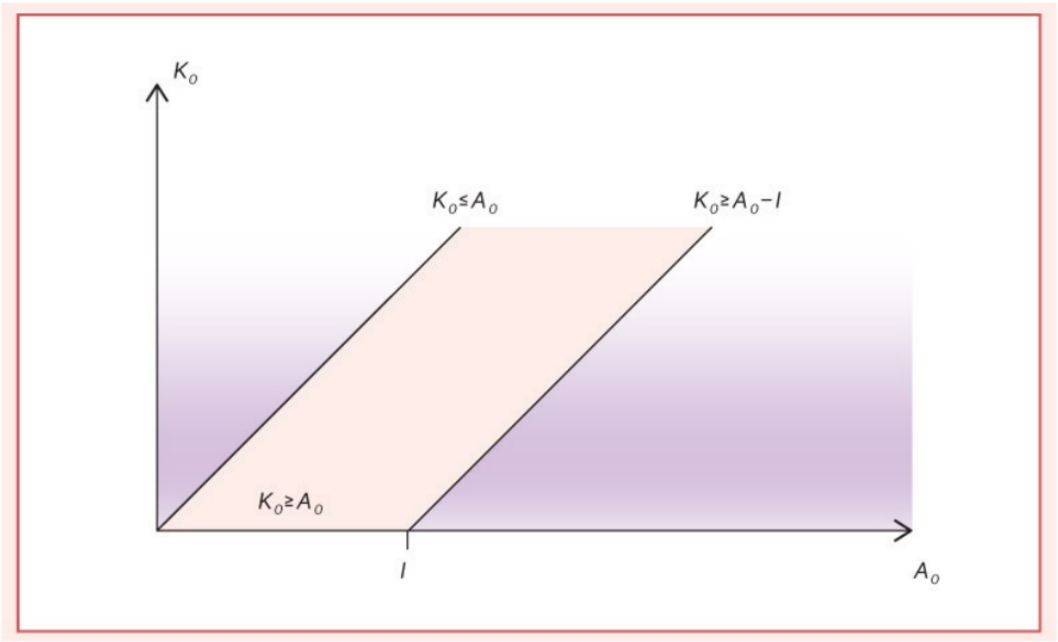
	Faktor	Kjøpsopsjon	Salgsopsjon
1	Verdi av underliggende aksje	?	?
2	Innløsningskurs	?	?
3	Tid til forfall (løpetid)	?	?
4	Underliggende eiendels volatilitet	?	?
5	Risikofri rente	?	?

Øvelse: Hva er dine a-priori oppfatninger om opsjonsverdien ved en isolert økning i disse fem faktorene, og har du en ide om hvorfor?

Opsjonsverdi og aksjekurs (#1)

Tre betingelser

1. Nedre betingelse: $K_0 \geq 0$
2. Øvre betingelse: $K_0 \leq A_0$ (ikke høyere enn aksjens verdi)
3. Verdibetingelse: $K_0 \geq A_0 - I$ (ikke lavere verdi enn øyeblikkelig innløsning)



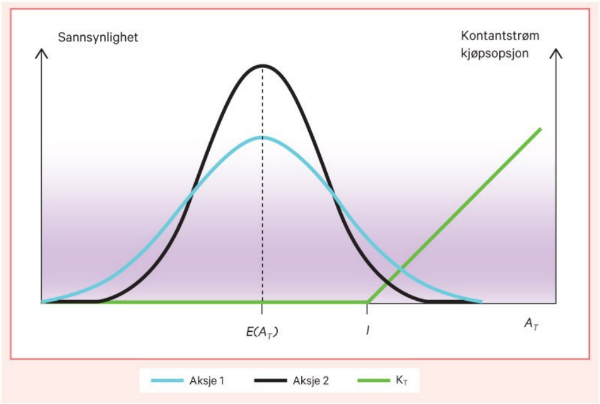
FIGUR 12.4 Kjøpsopsjonens grenseverdier. K_0 er opsjonskurs, A_0 er aksjekurs, og I er innløsningskurs.

Opsjonsverdi, innløsningskurs og kontraktstid (#2-3)

Fra Tabell 12.1 i lærebok finner vi at

- Verdien av kjøpsopsjon avtar med økende innløsningskurs (motsatt for salgsopsjoner)
- Verdien av kjøpsopsjon avhenger av kontraktstiden: Lengre kontraktstid økt verdi (lenke her for egenkskapene ved en random walk prosess modeller)

Opsjonsverdi og aksjens volatilitet (# 4)



FIGUR 12.5 Sannsynlighetsfordelinger for aksjepris ved forfall (A_T) og kontantstrøm for en kjøpt kjøpsopsjon på aksjen (K_T).

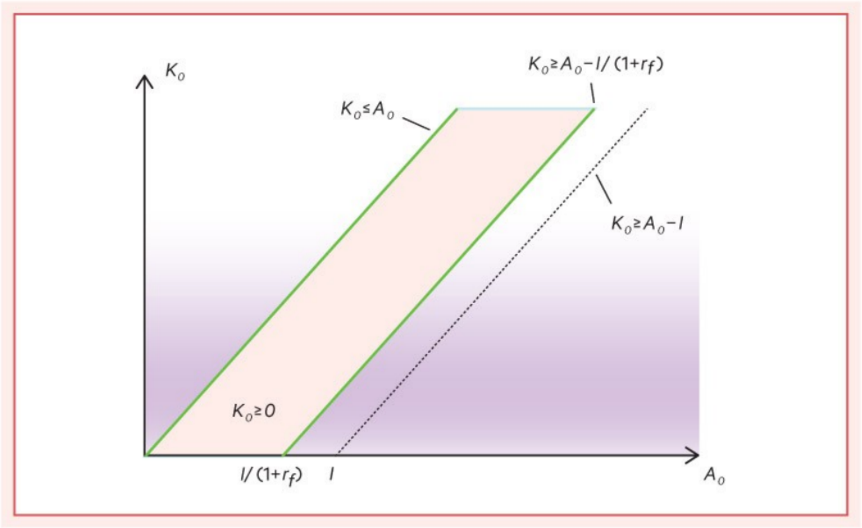
- Opsjonsverdien øker med aksjekursen *volatilitet* (standardavvik/varians)

Opsjonsverdi og rente (# 5)

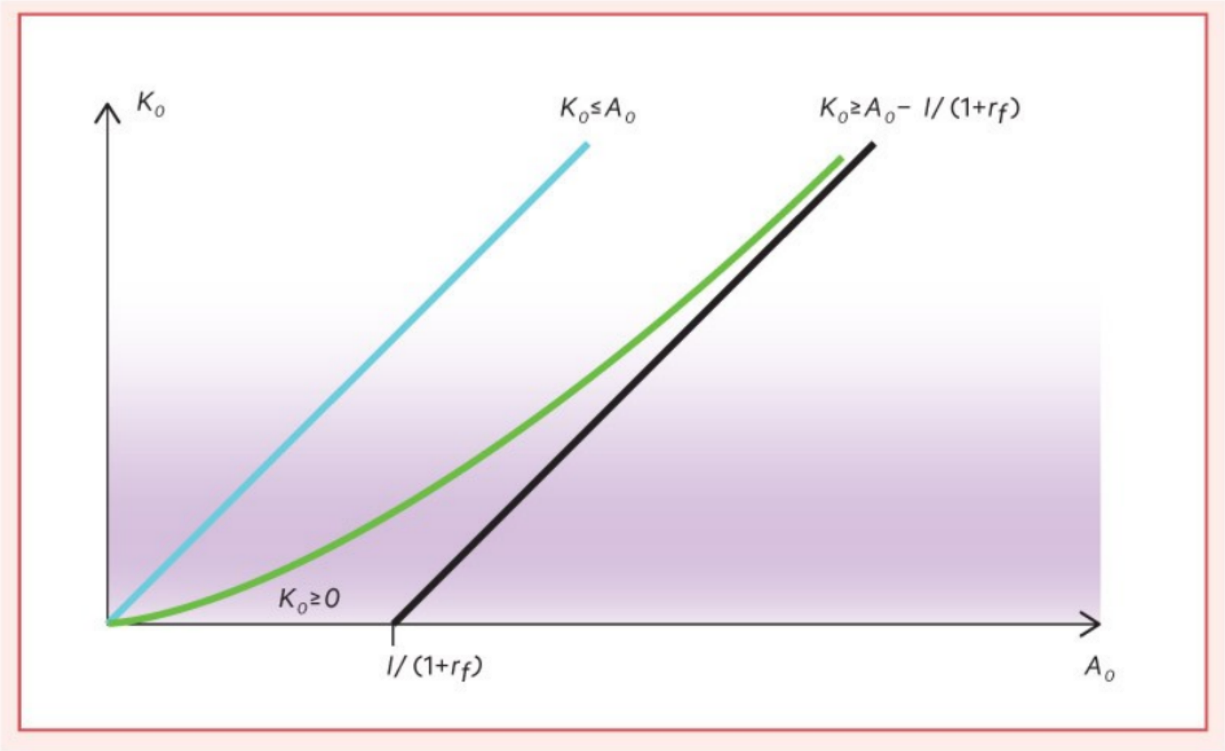
- Høyere rente fører til høyere opsjonsverdi. Dette fordi høyere rente reduserer nåverdien av innløsningskursen

Vi kan få øye på dette ved å tilbakedatere verdien av kjøpsopsjon til investeringstidspunktet (t=0)

$$K_0 \geq \max[0, (A_0 - \frac{I}{1+r_f})] \tag{82}$$



FIGUR 12.6 Kjøpsopsjonens grenseverdier. K_0 er opsjonskurs, A_0 er aksjekurs.



FIGUR 12.7 Kjøpsopsjonens verdi (K_0); grønn linje som funksjon av aksjepris før forfall (A_0). Grenseverdiene er blå linje og svart linje.

Den figuren viser det typiske forholdet mellom opsjonskurs og aksjekurs før forfall med utgangspunktet i en modell (Black-Scholes) for prising av kjøpsopsjoner.

Opsjonens fem verdibestemmende faktorer

	Faktor	Kjøpsopsjon	Salgsopsjon
1	Verdi av underliggende aksje	+	-
2	Innløsningskurs	-	+
3	Tid til forfall (løpetid)	+	+
4	Underliggende eiendels volatilitet	+	+
5	Risikofri rente	+	-

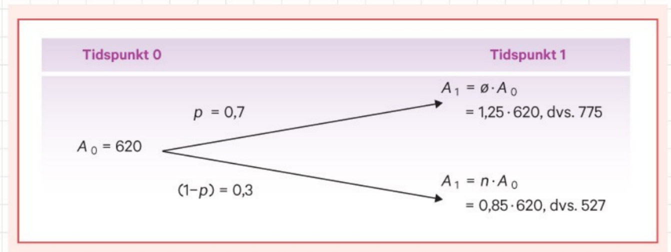
Binomisk opsjonsprismodell

For den binomiske opsjonsprismodellen (OPM-modellen) vil det gjelde at:

- Ved opsjonens forfallstidspunkt vil opsjonen ha en av to mulige verdier (binomisk)

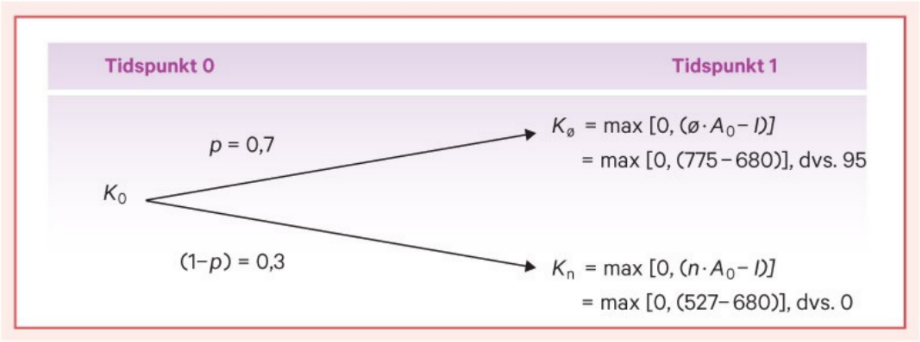
Kontantstrømfordelingen av en aksje

Eksempel 12.5: Dagens kurs på oljeselskapet Petro er 620,-. Et usikkert oljeboringsprosjekt vil enten føre til at kursen stiger 775,- (dvs. 25 prosent økning som har 70 prosent sannsynlighet), eller falle til 527 (dvs. falle med 15 prosent som har 30 prosent sannsynlighet). Tre-måneders risikofri rente er gitt ved 1 prosent. Innløsningskursen på en opsjon med forfall om 3 måneder er 680,-



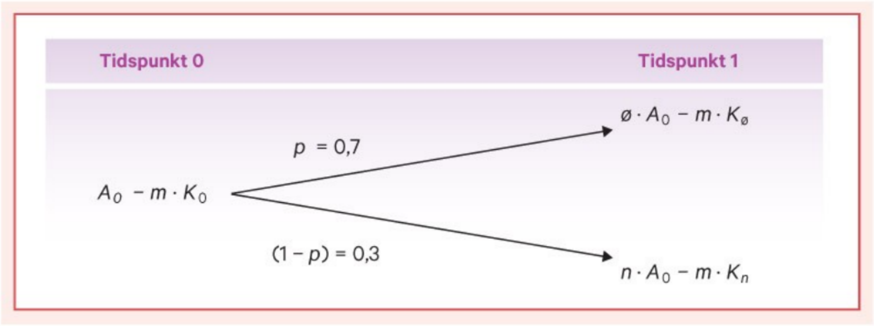
FIGUR 12.8 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en aksje.

Kontantstrømfordelingen av en kjøpsopsjon



FIGUR 12.9 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en kjøpsopsjon med innløsningskurs 680.

Kontantstrømfordelingen av en sikringsportefølje



FIGUR 12.10 En-periodisk binomisk kontantstrømsfordeling for en sikringsportefølje.

Sikringsporteføljen

Gitt at sikringsporteføljen er risikofri, må de to mulige utfallene på tidspunkt 1 være identiske. Vi må derfor kunne kreve at:

$$\theta A_0 - mK_\theta = nA_0 - mK_n \tag{83}$$

Løser vi denne for m får vi *sikringsforholdet* (det antall kjøpsopsjoner som må skrives/selges pr. aksje for at porteføljen av aksjer og opsjoner skal være risikofri:

$$m = \frac{A_0(\theta - n)}{K_\theta - K_n} \tag{84}$$

Eksempel 12.5: gir oss

$$m = \frac{620(1.25 - 0.85)}{95} = 2.61 \text{ kjøpsopsjoner per kjøpte aksje}$$

Øvelse: Studer tabell 12.3 og forsikr deg om at $m = 2.61$ garanterer at du virkelig oppnår en risikofri porteføljekombinasjonen i begge utfallene lik 527,-

Opsjonsprisen

Kravet om null arbitrasjegevinst betyr derfor at følgende sammenheng må gjelde mellom investeringen ($t=0$) og kontantstrømmen ($t=1$)

$$A_0 - mK_0 = \frac{nA_0 - mK_n}{1+r_f} \tag{85}$$

Setter inn for m i uttrykket ovenfor og løser for K_0 gir etter en del utregninger

$$K_0 = \frac{1}{1+r_f}[qK_\theta + (1-q)K_n] \tag{86}$$

Hvor de to *sikringssannsynlighetene* (risikojusert sannsynligheter) for q og $1-q$ er definert som

$$q = \frac{1+r_f-n}{\theta-n} \text{ og } (1-q) = \frac{\theta-1-r_f}{\theta-n}$$

Verdien til kjøpsopsjonen er derfor bestemt som den neddiskonterte verdien av den sikkerhetsekvivalente kontantstrømmen i periode T (hakeparantesen omdanner en usikker kontantstrøm til dens *sikkerhetskivalente kontantstrømmen*, jmf. forelesning 1)

Eksempel 12.5: gir oss her

$$q = \frac{1 + 0.01 - 0.85}{1.25 - 0.85} = 0.4$$

$$(1 - q) = \frac{1.25 - 1 - 0.01}{1.25 - 0.85} = 0.6$$

$$K_0 = \frac{1}{1 + 0.01}[0.4 \cdot 95 + 0.6 \cdot 0] = 37.62$$

Kontroll 1: Nettoinvesteringen i sikringsporteføljen

$$A_0 - m \cdot K = 620 - 2.61 \cdot 37.62 = 521.80$$

Kontroll 2: Sikringsporteføljens avkastning

$$r = \frac{527}{521.80} - 1 = 0.01$$

Konklusjon: Kjøpsopsjonen må være riktig priset fordi den risikofrie sikringsporteføljen gir avkastning lik risikofri rente.

Til tross for dens enkle struktur, viser OPM-modellen å vise viktig innikt som holder generelt:

- Opsjonsverdien avhenger kun av de fem variablene: A_0, θ, n, r_f, I
- Opsjonsverdien er derfor uavhenig av investors risikoholdning
- Opsjonsverdien er derfor uavhenig av sannsynligheten for aksjekursendring
- Forventet aksjekurs er irrelevant for opsjonsverdien
- Kjøpsopsjonens verdi kan uttrykkes som den sikkerhetsekvivalente verdien av kjøpsopsjonen ved forfall diskontert med risikofri rente

Black-Scholes-modellen

Sentrale forutsetninger:

- Kontinuerlig tid
- Aksjekursen kan endres
- Short-salg er mulig
- Det er ingen skatt eller transaksjonskostnader
- Aksjen betaler ikke dividende (men det er enkelt å endre modellen slik at dette blir tatt hensyn til)
- Risikofri rente er konstant i løpet av kontraktsperioden

$$K_0 = A_0 N(d_1) - I e^{-i_f T} N(d_2) \tag{87}$$

- $N(d_1)$ har tolkning som antall kroner opsjonsverdien endrer seg med når aksjeprisen endres med en krone
- $N(d_2)$ har tolkning som sannsynligheten for at opsjonen er "in-the-money" ved forfall (dvs. $A_T \geq I$)

Vi har videre at

$$d_1 = \frac{ln(\frac{A_0}{I}) + i_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \tag{88}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

mens sikringsforholdet er bestemt av $m = \frac{1}{N(d_1)}$

Eksempel 12.7

OBX-indeksen ble 31.08.2015 notert til 532.26-. Samme dag kontinuerlig risikofri årsrente beregnes til 1.2 prosent. Kjøpsopsjoner med innløsningskurs 530,- og forfall 17.09.2015 ble omsatt til 15,25,-. OBX-indeksen årlige standardavvik er estimert til 30.4%.

Starter med å regne ut de to d-verdiene:

- $d_1 = \frac{ln(\frac{532.26}{530}) + 0.01217/365}{\sigma\sqrt{17/365}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{17/365} = 0.10618$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{17/365} = 0.04057$

Som ved bruk av standardnormalfordelingstabellen (interpolering) gir oss de to sannsynlighetene:

$$N(d_1) = 1 - 0.45772 = 0.542280 \tag{89}$$
$$N(d_2) = 1 - 0.483818 = 0.516182$$

Vi kan nå finne opsjonsprisen som er gitt ved

$$K_0 = 532.26 \cdot 0.542280 - 530e^{-0.012(17/365)}0.516182 = 15.21 \tag{90}$$

På bakgrunn av SPK kan salgsopsjonen beregnes som

$$S_0 = K_0 - A_0 + Ie^{-r_F T} = \tag{91}$$
$$15.212 - 532.26 + 530^{-0.012(17li365/)} = 12.65$$

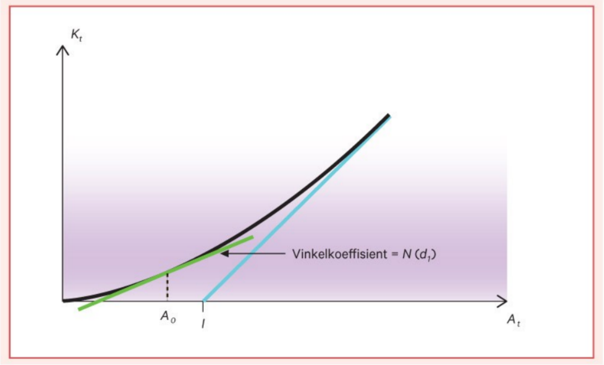
mens sikringsforholdet er gitt ved

$$m = \frac{1}{0.54228} = 1.84 \tag{92}$$

Binomiske modellen og Black-Scholes modellen

$$K_0 = \max[0, (A_0 - Ie^{-i_f \cdot T})] \tag{93}$$

$$K_0 = A_0 N(d_1) - Ie^{-i_f T} N(d_2) \tag{94}$$



FIGUR 12.11 Kjøpsopsjonens verdi før forfall (K_t) som funksjon av aksjepris (A_t).

Opsjonstankegang i finansfaget

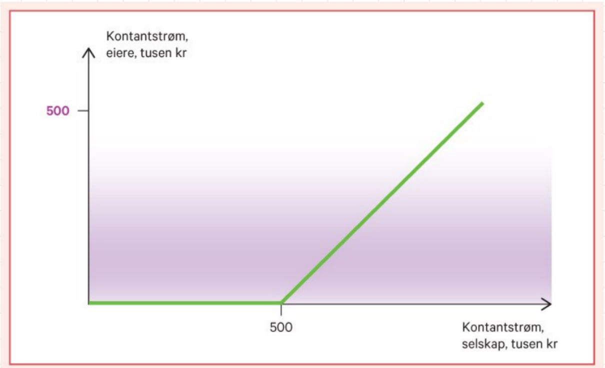
Som nevnt innledningsvis finnes det både direkte og indirekte (implisitte) opsjonstrekk i en rekke:

- Finansieringsprosjekter
- Investeringsprosjekter

Vi skal se nærmere på prinsippet for verdsettingen av disse nå

Kapitalstruktur og opsjonsverdi

Eksempel 12.10 Mopsjon ASA er et lite selskap med en enkel kapitalstruktur Selskapet er finansiert med egenkapital og et lån. Lån er på 500.000,- (inklusive renter) og skal tilbakebetales om ett år. Vi antar også at selskapet skal avvikles om ett år, og at kontantstrømmen inkluderer salgsverdien av selskapet. Kontantstrømmen til eierne er vist i figuren nedenfor.



FIGUR 12.12 Kontantstrøm til eierne av Mopsjon ASA som funksjon av selskapets kontantstrøm.

Formelt kan vi derfor skrive den som en kjøpsopsjon på formen

$$E_T = \max[0, V_T - G_T] \tag{95}$$

siden $V_T = A_T$ og $E_T = K_T$ kan vi skrive SKP som

$$V_T + S_T = B_T + E_T \tag{96}$$

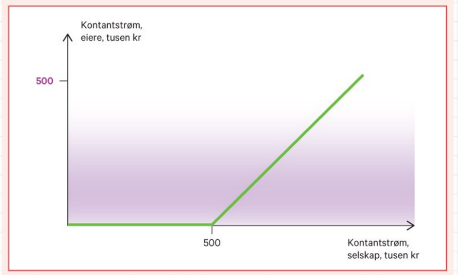
Vi har videre at

$$V_T = E_T + G_T \tag{97}$$

Som gir oss

$$(E_T + G_T) + S_T = B_T + E_T \tag{98}$$
$$G_T = B_T - S_T$$

$$B_T - S_T = \min[V_T, B_T] \tag{99}$$



FIGUR 12.12 Kontantstrøm til eierne av Mopsjon ASA som funksjon av selskapets kontantstrøm.

Vurder som kjøpsopsjon

- Kreditorene
    1. Eier selskapet
    2. Har solgt en kjøpsopsjon på selskapet til aksjonærene
- Aksjonærene
    1. Eier en kjøpsopsjon på selskapet

Vurder som salgsopsjon

- Kreditorene
    1. Har en risikofri fordring
    2. Har solgt en salgsopsjon til aksjonærene
- Aksjonærene
    1. Eier selskapet
    2. Skylder renter og avdrag til kreditorene
    3. Eier en salgsopsjon på selskapet

Endret investeringsrisiko

Anta at selskapet gjennomfører investeringer som har nåverdi lik null men som øker selskapets investeringsrisiko (kun usystematisk)

- Egenkapitalen vurdert som kjøpsopsjon vil øke
- Siden KVM forteller oss at dette ikke vil øke selskapsverdien, vil gjeldsverdien måtte avta

I praksis vil kreditorene forsøke å forsikre seg mot slik adferd ved å ha strenge betingelser om selskapets investeringsadferd.

Realopsjoner

- Mange realinvsteringsprosjekt innehar opsjonstrekk, slike prosjektegenskaper kan kalles *realopsjoner*
- Det sentrale her er at det dreier seg om en rett, uten samtidig en plikt, til å gjennomføre en realinvestering
- Disse opsjonene gir *fleksibilitet* som kan være verdifull (selskapet trenger ikke å bestemme i dag om produksjonskapasiteten skal øke, men på et senere tidspunkt når usikkerheten er redusert)
- Denne verdien av fleksibilitet tas ikke hensyn til når forventet kontantstrøm skal diskonteres med risikojustert rente
- Beslutningstre (se forelesning nr. 5) gir en nyttig oversikt gjennom en grafisk fremstilling av tidsfordelte beslutningspunkter

Øvelser: Kan du komme på noen realinvesteringsprosjekter med opsjonstrekk?

Verdidriverne

1. Dagens aksjekurs
2. Innløsningskursen tilsvarer investeringene som trengs for å produsere prosjektets innbetalinger
3. Standardavviket til kontantstrømmen som gir opsjonens verdi
4. Tid til forfall (lang tid for realopsjoner)
5. Risikofri rente

Tre betingelser må være oppfylt for at realopsjonsmodell vil avvike fra diskontering av forventet kontantstrøm

1. Usikkerhet om fremtidig kontantstrøm
2. Rett, men ikke en plikt, til å gjennomføre framtidige investeringer
3. Investeringene er irreversible

Typer

Vi kan skille mellom tre typer realopsjoner

1. *Utsettelsesopsjon*
2. *Læringsopsjon*
3. *Vekstopsjon*

	Egenskap	Oljeselskapet Gasse	Farmasi	Mobiltelefonlisens
1	Kontantstrøm	Innhenting fra salgs av gass	Inntjening fra salg av medikament	Inntjening fra mobiltelefonbrukere
2	Innløsningspris	Kostnaden ved å klargjøre for utvinning	Forskning og utvikling for å bringe medikamentet til markedet	Utviklingskostnader for programvare og utbygging
3	Usikkerhet	Markedspris for gass	Suksess/fiasko i kliniske prøver	Etterspørsel etter mobile tjenester, spesielt internettbaserte
4	Tid til forfall	Tid til forfall	Patentets levetid	Lisensens varighet

Verdien av fleksibilitet

$$\text{NV} = \text{Tradisjonell NV} + \text{Opsjonsverdi} \tag{100}$$

Tradisjonell NV er verdien av den kontantstrømmen som ikke tar hensyn til prosjektets fleksibilitet. Opsjonsverdien kan bli bestemt av opsjonsprismodellene i dette kapitlet, men i praksis krever verdsettelse av realopsjoner krever ofte inngående kunnskap om opsjonsprisingsmodeller som går langt utover det som blir undervist i dette kurset.

Øvelse: Se nærmere på eksempel 12.13 dersom du ønsker en tallfasting av disse sammenhengende.

Risiko i KVM kontral OPM

- For investorer med risikoaversjon, har vi tidligere vist under KVM at økt risiko har vært til ulempe
- Det motsatt viser seg i være tilfelle i OPM
- Dette betyr allikevel ikke investorene skifter fra risikoaverse til risikosøkende
- I KVM baserer risikomålet β seg på hele sannsynlighetsfordelingens
- I OPM baserer opsjonsprisen seg kun på sannsynlighetsfordelingens haler:
  - På kjøpsopsjoner høyrehalen
  - På salgsopsjoner venstrehalen

Opsjonens systematiske risiko

Selv om vi har vist til nå at det er kun sannsynlighetsfordelingens haler som betyr noe, er det viktig å være klar over at opsjoner er risikofylte og vanligvis består av både usystematisk og systematisk risiko. For aksjeopsjoner det mulig å vise at sammenhengen mellom opsjonsbeta og en (europeisk) kjøpsopsjon er gitt ved:

$$\beta_K = N(d_1)\frac{A_0}{K_0}\beta_E \tag{101}$$

Eksempel: 12.14 Fra DN finner du at aksjebeta for OBX var 1.04. OBX-indeksen er notert til 532.26. Kjøpsopsjonen 15.25, mens $N(d_1)$ er beregnet til 0.54227.

$$\beta_K = 0.54227\frac{532.26}{15.25}1.04 = 19.68 \tag{102}$$

Den systematiske risikoen for kjøpsopsjoner var derfor nesten 20 ganger høyere enn den systematiske aksjerisikoen.