Forelesning 3: Relevant risiko: Porteføljeteori 3-n objekter

Læringsmål:

- Beskrive hvorfor risikoen i en portefølje reduseres når antall prosjekter i porteføljen øker.
- Beregne betaverdien til et prosjekt og forklare hva den fanger opp.
- Gi eksempler på kilder for systematisk og usystematisk risiko.

Oppdatert: 2021-08-30

Måling av risiko (portefølje fra 3 til n fonds)

Metode 2 for måling av risiko (3 investeringsobjekter) Porteføljens varians er gitt ved

$$\begin{aligned} Var(r_p) = w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + w_3^2 Var(r_3) + \\ 2w_a w_b Std(a) Std(b) Korr(a,b) + \\ 2w_a w_c Std(a) Std(c) Korr(a,c) + \\ 2w_b w_c Std(b) Std(c) Korr(b,c) \end{aligned} \tag{18}$$

Mens standardavviket (som tidligere) framkommer som

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)} \tag{19}$$

Eksempel 2.6

	Aksje	Forventet avkastning	Standardavvik	Korrelasjonskoeffisient
1	A	0.12	0.1	0.8
2	B	0.15	0.2	-0.1
3	C	0.25	0.4	0.5

Hvor investert beløp vektene er gitt ved w_a=0.3, w_b=0.4 og w_c=0.3

Ved innsetting av formelen gir dette oss

$$\begin{aligned} Var(r_p) = (0.30)^2 \cdot 0.10^2 + (0.40)^2 \cdot 0.20^2 + (0.3)^2 \cdot 0.40^2 \\ + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.40 \cdot 0.10 \cdot 0.20 \cdot 0.80 \\ + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.10 \cdot 0.40 \cdot 0.50 \\ - 2 \cdot 0.30 \cdot 0.40 \cdot 0.20 \cdot 0.40 \cdot 0.10 \\ = 0.02722 \end{aligned} \tag{20}$$

$$Std(r_p) = \sqrt{0.02722} = 0.1649848$$

```
## [1] 0.02722
```

```
## [1] 0.1649848
```

Metode 2 for måling av risiko (generell metode med n investeringsobjekter)

Porteføljens forventning er gitt ved

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \ldots + w_N E(r_N) \tag{21}$$

Porteføljens varians gitt ved

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Kov(i,j) = \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Std(i) Std(j) Korr(i,j)$$

Mens standardavviket (som tidligere) er gitt ved

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)} \tag{23}$$

- Merk: Det kan først være verdt å merke seg at første i variansuttrykket består av N leddd, mens siste av $N^2 - N$ ledd
- Dersom vi antar at en like stort andel $1/N$ blir investert i hvert av de n objektene, kan vi skrive

$$\begin{aligned} Var(r_p) &= (1/N)^2(Var(r_1) + Var(r_2) + \ldots + Var(r_N))) \\ &+ (1/N)^2(Cov(r_1, r_2) + Cov(r_1, r_2) + \ldots + Cov(r_1, r_2)))) \end{aligned} \tag{24}$$

Vi har at gjennomsnittlig varians ($\overline{Var}$) er gitt ved

$$\overline{Var} = \frac{1}{N}(Var(r_1) + Var(r_2) + \ldots + Var(r_N))$$

Mens gjennomsnittlig kovarians ($\overline{Kov}$) er gitt ved

$$\overline{Kov} = \frac{1}{N}(Cov(r_1, r_2) + Cov(r_1, r_2) + \ldots + Cov(r_1, r_2))$$

Uttrykket ovenfor kan derfor skrives som

$$Var(r_p) = N(1/N)^2(\overline{Var}) + (N^2 - N)(\frac{1}{N})^2(\overline{Cov}) \tag{25}$$

Vi kan forenkle dette, slik at vi står igjen med

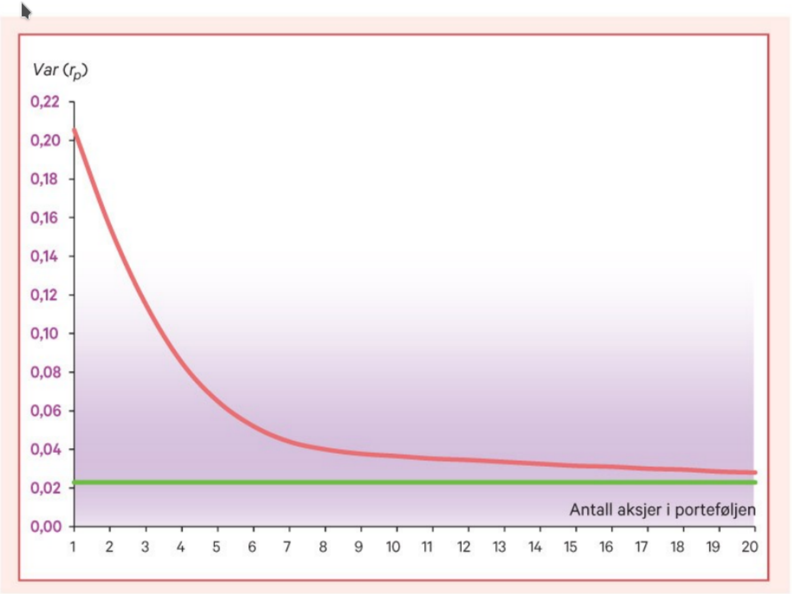
$$Var(r_p) = \frac{1}{N}(\overline{Var}) + (1 - \frac{1}{N})(\overline{Cov}) \tag{26}$$

Uttrykket forteller oss

- Økt N gir
- $ N \rightarrow $
- Forholdet mellom

Eks. Oslo Børs

Perioden 2011-2015 har vi at $\overline{Var} = 0.021$ og gjennomsnittlig $\overline{Kov} = 0.0229$



FIGUR 2.5 Porteføljens varians *Var*(r_p) som funksjon av antall aksjer i porteføljen på Oslo Børs. Porteføljen er likevektet, og data for gjennomsnittlig varians og kovarians er estimert for perioden januar 2011 til desember 2015.

R-kode (ikke pensum) Figur

```
varo <- 0.21
kovo <- 0.0229
tportvar <- '(1/N)*varo + (1-1/N)*kovo'
N <- 1:60
df_n <- data.frame(N=N,varp=eval(parse(text=tportvar),c(varo=varo,kovo=kovo,list(N=N))))
```

Kilder til usystematisk og relevant risiko

Vi kan videre dekomponere (øvelse: se om du klarer å finne ut av det på egenhånd) uttrykket for porteføljevariansen for n finansobjekter.

$$
\begin{aligned}
Var(r_p) = (\frac{1}{N})\overline{Var} + (1 - \frac{1}{N})\overline{Cov} = \\
\underbrace{\overline{Cov}}_{\text{Systematisk risiko}} + (\frac{1}{N})\underbrace{(\overline{Var} - \overline{Cov})}_{\text{Usystematisk riskiko}}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Det første leddet er her et mål på porteføljens *systematiske* (ikke diversifiserbare) risiko, mens det siste leddet representerer den *usystematiske* risikoen.

Øvelse:...

Betaverdien til et prosjekt

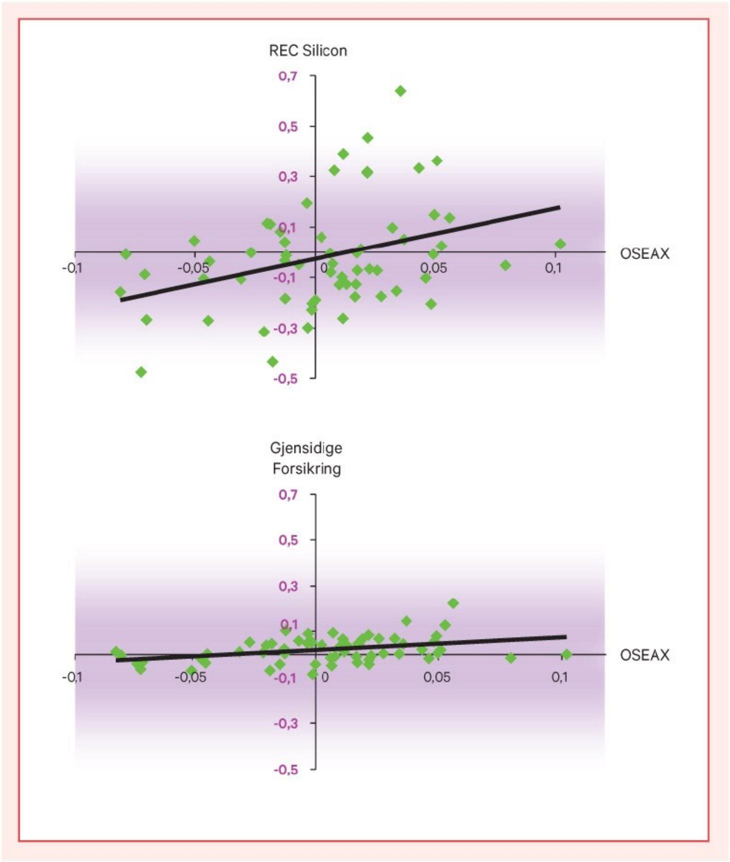
Forholdet mellom porteføljerisiko og risiko til en enkelt aksje

$$\beta_j = \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)} \tag{28}$$

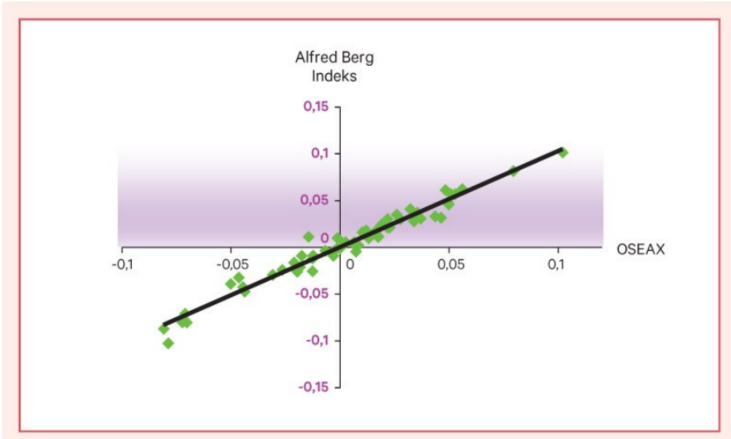
- $\beta_j > 1$
- $\beta_j < 1$
- $\beta_j = 0$

Ved å utnytte sammenhengen om at $Kor() = \frac{Cov()}{Std()Std()}$, kan vi også skrive dette som

$$\beta_j = \frac{Kor(r_j, r_m)Std(r_j)}{Std(r_m)} \tag{29}$$



FIGUR 2.6 Månedlig aksjeavkastning for REC Silicon og Gjensidige Forsikring kontra avkastningen til OSEAX i perioden januar 2011 – desember 2015.



FIGUR 2.7 Månedlig avkastning for aksjefondet Alfred Berg Indeks kontra avkastningen til OSEAX i perioden januar 2011 – desember 2015.