Forelesning 4: Effisiens

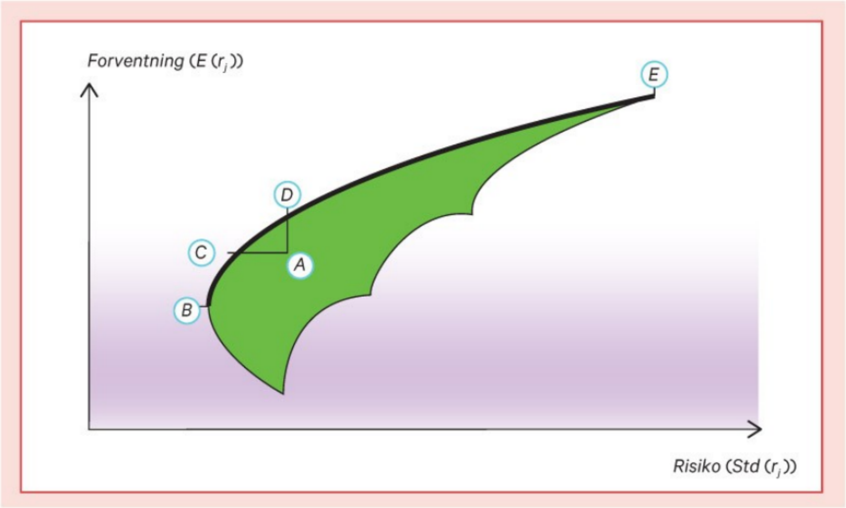
Læringsmål:

- Forklare begrepene effisiente og ineffisiente porteføljer og konstruere slike porteføljer ut fra data.

Oppdatert: 2023-09-13

Effisiente porteføljer

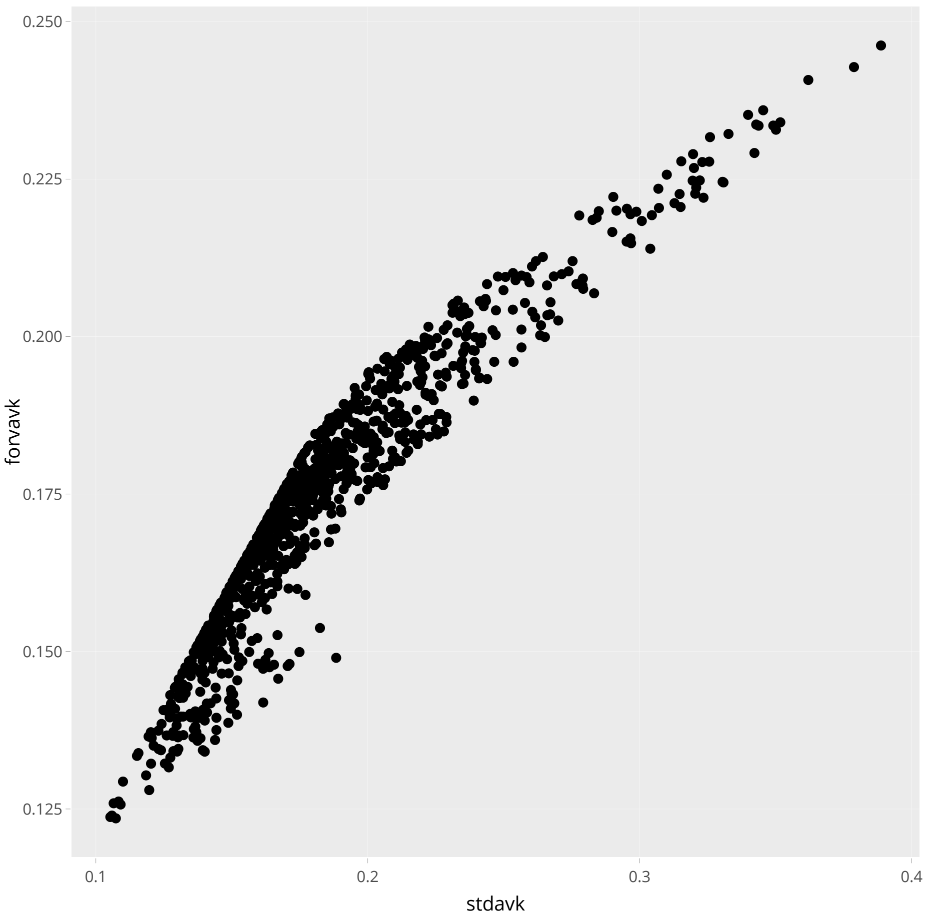
Effisienslinjen uten risikofritt alternativ



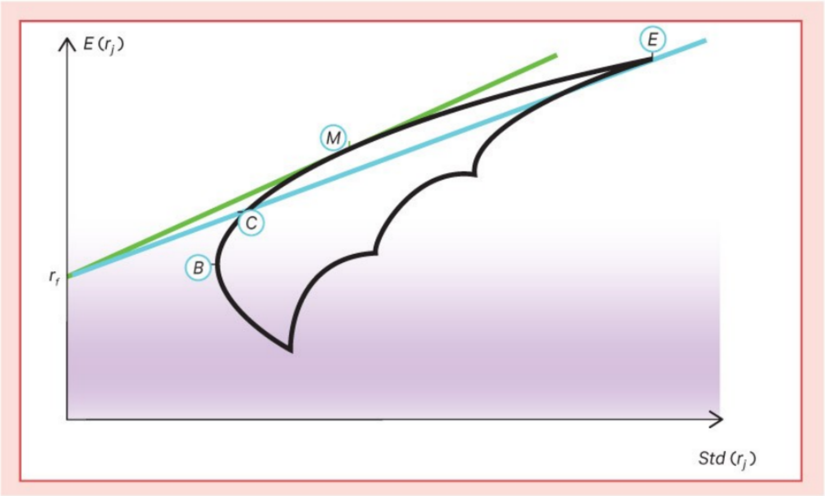
FIGUR 3.1 Mulighetsområde og effisiente porteføljer.

Øvelse:: Ta utgangspunkt i forventning-standardavvik-kriteriet, og forklar hvorfor kurven B-C-D-E utgjør et *effisient sett* av porteføljer.

Tabell | R-kode (ikke pensum) | **Plot av forskjellige porteføljesammensetninger**



Effisienslinjen med risikofritt alternativ



FIGUR 3.2 Mulighetsområde og effisiente porteføljer når investor både kan investere i aksjer og spare eller låne risikofritt.

- Den blå linjen viser kombinasjoner av investeringer i risikofritt alternativ og den effiseinte akjseporteføljen C
  - Til venstre for C, vil en andel av de oppsparte innvesteringsbeløpet plasseres i banken
  - Til høyre for C, ingen sparing så akjseporteføljen blir der finansiert ved bruk av banklån

- Den grønn linjen viser kombinasjoner av investeringer i risikofritt alternativ og den effisiente aksjeporteføljen M
  - Til venstre for M, vil en andel av de oppsparte innvesteringsbeløpet plasseres i banken
  - Til høyre for M, ingen sparing så aksjeporteføljen blir der finansiert ved bruk av banklån

Merk: Vi forutsetter her (1) ingen kredittrestriksjoner og at (2) sparerenten er lik utlånsrenten

Tofondsresultatet:

1. Uansett graden av risikoaversjon, setter alle investorer sammen sin aksjeportefølje på nøyaktig samme måte.
2. Den enkelte investors risikoaversjon avgjør bare hvor mye som totalt skal satses på den risikable komponenten framfor den risikofrie. Ikke sammensetningen av den risikable komponenten.

Øvelse: Hvilken antagelse ligger implisitt til grunn under punkt 1 om investorenes forventninger?

Utledning av kapitalmarkedslinjen (n=2, kombinasjon av risikofri investering og markedsporteføljen M

Forventet avkastning for porteføljen er gitt ved

$$E(r_p) = wr_f + (1-w)E(r_m) \tag{31}$$

Mens variansen fremkommer som

$$Var(r_p) = (1-w)^2 Var(r_m) \tag{32}$$

Tar vi kvadratroten av denne på begge sider får vi

$$\frac{Std(r_p)}{Std(r_m)} = (1-w) \tag{33}$$

Porteføljeavkastningen kan dekomponeres til å bestå av

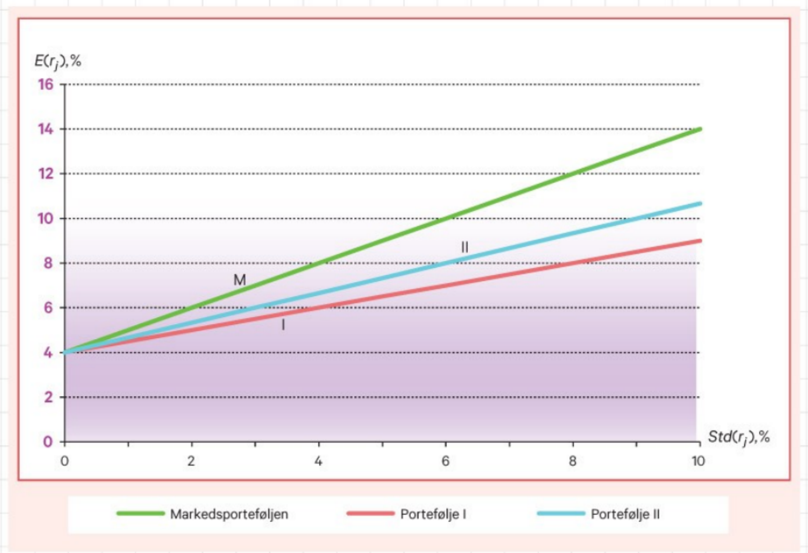
$$E(r_p) = wr_f + (1-w)E(r_m) + (r_f - r_f)$$

$$E(r_p) = r_f + (1-w)(E(r_m) - r_f)$$

Kombinerer uttrykket for forventet avkastning og standardavvik ved å sette inn for $1 - w$, gjør at vi kan skrive

$$E(r_p) = r_f + \frac{Std(r_p)}{Std(r_m)}(E(r_m) - r_f) \Leftrightarrow \tag{34}$$

- Gitt at $0 < w < 1 \Rightarrow E(r_p) < E(r_m)$
- Gitt at $w = 1 \Rightarrow E(r_p) = E(r_m)$
- Gitt at $w < 0 \Rightarrow E(r_p) > E(r_m)$



FIGUR 3.3 Mulighetsområde og effisiente porteføljer.

Fra eksempel 3.1-3.2 har vi følgende opplysninger

		Forventet avkastning	Standardavik
1	Markedsporteføljen	0.07	0.03
2	Portefølje I	0.05	0.02
3	Portefølje II	0.08	0.06
4	Risikofri rente	0.04	0

- Vi har at investor A (stor grad av risikoaversjon) ønsker å plassere 80 prosent av formuen risikofritt
  - $E(r_p) = 0.8 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.07 = 0.046$
  - $Var(r_p) = 0.8^2 \cdot 0 + 0.2^2 \cdot 0.03^2 + 2 \cdot 0.0 \cdot 0.3 \cdot 0 = 0.00004$
  - $Std(r_p) = \sqrt{0.00004} = 0.006$
- Vi har at investor B (liten grad av risikoaversjon) ønsker at forventet avkastning i porteføljen skal være på 8.5%
  - $0.085 = w \cdot 0.04 + (1 - w) \cdot 0.07 \Leftrightarrow w = -0.5$ og $1 - w = 1.5$
  - $Var(r_p) = -0.5^2 \cdot 0 + 1.5^2 \cdot 0.03^2 \cdot 0.07 + 2 \cdot 0.0 \cdot 0.03 \cdot 0 = 0.02$
  - $Std(r_p) = \sqrt{.02} = 0.045$

Appendiks: Regneregler for forventninger og varians

Forventninger

Forventningsverdi er lineær, noe som betyr at den følger egenskapene til lineær transformasjon for tilfeldige variabler:

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{for alle konstanter } a \text{ og } b$$

Dette betyr at du kan trekke konstanter ut av forventningsverdien og fordele dem over tilfeldige variabler.

Forventningsverdien av en konstant er konstanten selv:

$$E[c] = c \quad \text{for alle konstanter } c$$

Forventningsverdien av summen av to tilfeldige variabler er lik summen av deres individuelle forventningsverdier:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Forventningsverdien av summen av to tilfeldige variabler er lik summen av deres individuelle forventningsverdier:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Dette er en spesiell tilfelle av lineariteten av forventningsverdi.

Varians

Variansen er ikke lineær, men den følger likevel noen regler for lineære transformasjoner av tilfeldige variabler:

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X) \quad \text{for alle konstanter } a \text{ og } b$$

Dette betyr at variansen av en konstant multiplisert med en tilfeldig variabel X er lik kvadratet av konstanten multiplisert med variansen til X.

Variansen av summen av to tilfeldige variabler X og Y er lik summen av deres individuelle varianser, pluss to ganger kovariansen mellom dem (hvis de er avhengige):

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Her representerer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ kovariansen mellom X og Y. Hvis X og Y er uavhengige, er kovariansen null, og du får tilbake den enkle regelen at variansen av summen er lik summen av variansene.

Hvis a er en konstant, er variansen av produktet aX lik a^2 ganger variansen til X:

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$$