Forelesning 3: Relevant risiko: Porteføljeteori 3-n objekter

Læringsmål:

- Beskrive hvorfor risikoen i en portefølje reduseres når antall prosjekter i porteføljen øker.
- Gi eksempler på kilder for systematisk og usystematisk risiko.
- Beregne betaverdien til et prosjekt og forklare hva den fanger opp.

Oppdatert: 2021-08-30

Måling av risiko (portefølje fra 3 til n fonds)

Metode 2 for måling av risiko (3 investeringsobjekter)

Porteføljens varians er gitt ved

$$\begin{gathered} Var(r_p) = w_a^2 Var(r_a) + w_b^2 Var(r_b) + w_c^2 Var(r_c) + \\ 2w_a w_b Std(a) Std(b) Korr(a,b) + \\ 2w_a w_c Std(a) Std(c) Korr(a,c) + \\ 2w_b w_c Std(b) Std(c) Korr(b,c) \end{gathered} \tag{18}$$

Mens standardavviket (som tidligere) framkommer som

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)} \tag{19}$$

Eksempel 2.6

	Aksje	Forventet avkastning	Standardavvik	Korrelasjonskoeffisient
1	A	0.12	0.1	Mellom A og B: 0.8
2	B	0.15	0.2	Mellom A og C: 0.5
3	C	0.25	0.4	Mellom B og C: -0.10

Hvor investert beløp vektene er gitt ved w_a=0.3, w_b=0.4 og w_c=0.3

Ved innsetting av formelen gir dette oss

$$\begin{aligned} Var(r_p) = {} & (0.30)^2 \cdot 0.10^2 + (0.40)^2 \cdot 0.20^2 + (0.3)^2 \cdot 0.40^2 \\ & + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.40 \cdot 0.10 \cdot 0.20 \cdot 0.80 \\ & + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.30 \cdot 0.10 \cdot 0.40 \cdot 0.50 \\ & - 2 \cdot 0.40 \cdot 0.30 \cdot 0.20 \cdot 0.40 \cdot 0.10 \\ & = 0.02722 \end{aligned} \tag{20}$$

$$Std(r_p) = \sqrt{0.02722} = 0.1649848$$

Metode 2 for måling av risiko (generell metode med n investeringsobjekter)

Porteføljens forventning er gitt ved

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \ldots + w_N E(r_N) \tag{21}$$

Porteføljens varians gitt ved

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Kov(i,j) = \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j Std(i) Std(j) Korr(i,j)$$

Mens standardavviket (som tidligere) er gitt ved

$$Std(r_p) = \sqrt{Var(rp)} \tag{23}$$

Diversifisering og risikoreduksjon

- Legg merke til at første del av uttrykket for porteføljevariansbestår av N leddd, mens siste består av $N^2 - N$ ledd
- Dersom vi antar at en like stort andel $1/N$ blir investert i hvert av de n objektene, kan vi skrive

$$\begin{aligned} Var(r_p) = (1/N)^2(Var(r_1) + Var(r_2) + \ldots + Var(r_N))) \\ + (1/N)^2(Kov(r_1, r_2) + Kov(r_1, r_2) + \ldots + Kov(r_1, r_2)))) \end{aligned} \tag{24}$$

Vi har at gjennomsnittlig varians ($\overline{Var}$) er gitt ved

$$\overline{Var} = \frac{1}{N}(Var(r_1) + Var(r_2) + \ldots + Var(r_N))$$

Mens gjennomsnittlig kovarians ($\overline{Kov}$) er gitt ved

$$\overline{Kov} = \frac{1}{N}(Kov(r_1, r_2) + Kov(r_1, r_2) + \ldots + Kov(r_1, r_2))$$

Uttrykket ovenfor kan derfor skrives som

$$Var(r_p) = N(1/N)^2(\overline{Var}) + (N^2 - N)(\frac{1}{N})^2(\overline{Kov}) \tag{25}$$

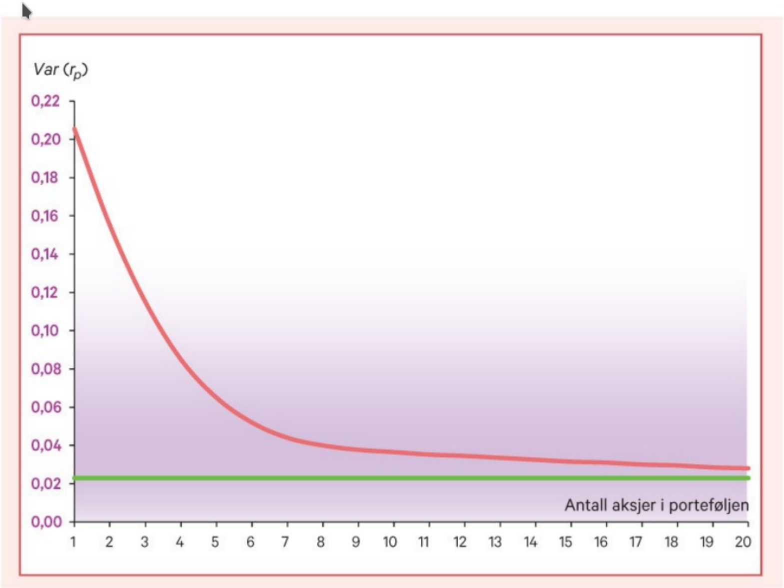
Vi kan forenkle dette, slik at vi til slutt står igjen med

$$Var(r_p) = \frac{1}{N}(\overline{Var}) + (1 - \frac{1}{N})(\overline{Kov}) \tag{26}$$

Dette uttrykket forteller oss:

- Større N (dvs. desto flere aksjer i porteføljen), desto mer dominerer porteføljevariansen av $(1 - \frac{1}{N})\overline{Kov}$ framfor $\frac{1}{N}\overline{Var}$
- Når $N \to \infty$, synker porteføljevariansen mot sin nedre grense gitt ved $\bar{(}Kov)$
- Desto lavere $\overline{Kov}$ er i forhold til $\overline{Var}$, desto rasker synker porteføljevariansen når antall aksjer i porteføljen stiger

Eks. Oslo Børs perioden 2011-2015.



FIGUR 2.5 Porteføljens varians *Var*(r_p) som funksjon av antall aksjer i porteføljen på Oslo Børs. Porteføljen er likevektet, og data for gjennomsnittlig varians og kovarians er estimert for perioden januar 2011 til desember 2015.

Her har vi at $\overline{Var} = 0.21$ og gjennomsnittlig $\overline{Kov} = 0.0229$.

$$Var(r_p) = \frac{1}{N}(0.21) + (1 - \frac{1}{N})(0.0229)$$

R-kode (ikke pensum)   Figur

```
varo <- 0.21
kovo <- 0.0229
tportvar <- '(1/N)*varo + (1-1/N)*kovo'
N <- 1:60
df_n <- data.frame(N=N,varp=eval(parse(text=tportvar),c(varo=varo,kovo=kovo,list(N=N))))
```

Øvelse: Se om du klarer å replikere figuren som er vist her ved bruk av et regneark.

Kilder til usystematisk og relevant risiko

Uttrykket for porteføljvariansen med N-objekter (**øvelse:** se om du klarer å finne ut av det på egenhånd) kan dekomponeres til å bestå av en komponent for *Systematisk* risiko og en annen komponent for *usystemtisk* risiko.

$$\begin{aligned} Var(r_p) = (\frac{1}{N})\overline{Var} + (1 - \frac{1}{N})\overline{Kov} = \\ \underbrace{\overline{Kov}}_{\text{Systematisk risiko}} + (\frac{1}{N})\underbrace{(\overline{Var} - \overline{Kov})}_{\text{Usystematisk riskiko}} \end{aligned} \tag{27}$$

Det første leddet er her et mål på porteføljens *systematiske* (ikke diversifiserbare) risiko, mens det siste leddet representerer den *usystematiske* risikoen.

- Usystematisk risiko
  - Ledelsen kompetanse eller helse
  - Forsinkelser, lokal streik, brann
  - Overgang til ny teknolog innen en bransje
- Systematisk risiko
  - Konjunkturbevegelser
  - Pandemi
  - Krig eller fred

Betaverdien til en aksje eller et prosjekt

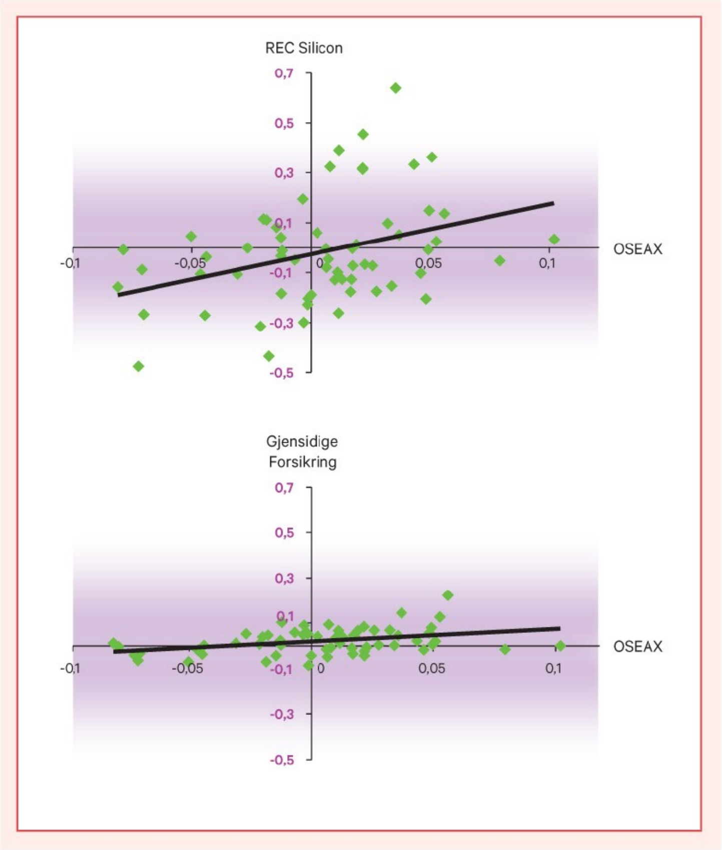
Relevant risiko til en enkelt aksje eller et prosjekt kan forstås som forholdet mellom aksjens eller prosjektets risiko i forhold til markedsporteføljen. Dette relativet risikomålet betegner vi som *beta* (β):

$$\beta_j = \frac{Kov(r_j, r_m)}{Var(r_m)} \tag{28}$$

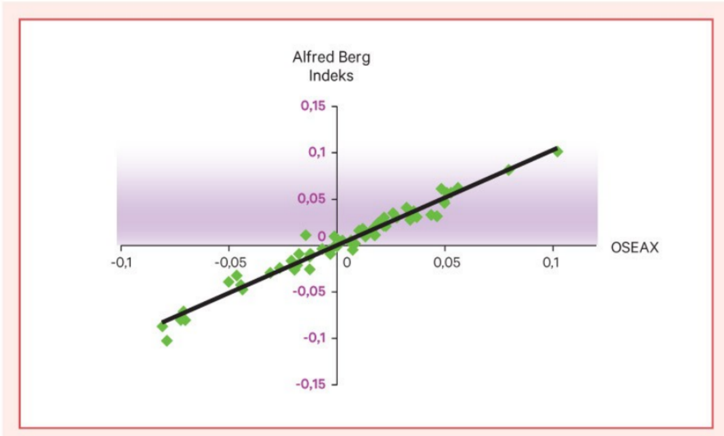
- $\beta_j > 1$ - Mer følsom enn markedsporteføljen
- $\beta_j = 1$ - Følsomhet lik markedsporteføljen
- $\beta_j < 1$ - Mindre følsom enn markedsporteføljen
- $\beta_j = 0$ - Risikofri aksje (null systematisk risiko, man kan innehold usystematisk risiko)

Ved å utnytte sammenhengen om at $Kor(j, m) = \frac{Kov(j,m)}{Std(j)Std(m)}$, kan vi også uttrykke beta som

$$\beta_j = \frac{Kor(r_j, r_m)Std(r_j)}{Std(r_m)} \tag{29}$$



FIGUR 2.6 Månedlig aksjeavkastning for REC Silicon og Gjensidige Forsikring kontra avkastningen til OSEAX i perioden januar 2011 – desember 2015.



FIGUR 2.7 Månedlig avkastning for aksjefondet Alfred Berg Indeks kontra avkastningen til OSEAX i perioden januar 2011 – desember 2015.