カルノー図,論理回路の設計
第19,20回

テスト２解説

次回テスト３

カルノー図（Karnaugh map）

A \ B	0	1
0		1
1	1	

$\bar{A}B+A\bar{B}$を示す

枠内の意味

	A \ B	$\bar{B}$ 0	B 1
$\bar{A}$	0	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	1	$A\bar{B}$	AB

入力		出力
A	B	X
0	0	$\bar{A}\bar{B}$
0	1	$\bar{A}B$
1	0	$A\bar{B}$
1	1	AB

カルノー図の各区画は，主加法標準形の最小項に対応

カルノー図

真理値表

入力		出力
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

$\overline{A}B+A\overline{B}+AB$

カルノー図

A \ B	0	1
0		1
1	1	1

3変数のカルノー図 論理の順序に注意（ハミング距離の短い遷移）

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
A 1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

この順に書く

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$ 0		1		1
A 1	1			

$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$

入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

４変数のカルノー図

	CD	$\bar{C}\bar{D}$ 00	$\bar{C}D$ 01	CD 11	$C\bar{D}$ 10
	AB				
$\bar{A}\bar{B}$	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
$\bar{A}B$	01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
AB	11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
$A\bar{B}$	10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

CD / AB	00	01	11	10
00			1	
01				1
11	1			
10		1		

$\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}BC\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D$

加法標準形の論理式からの真理値表，カルノー図の作成

$A B C + A\overline{B} + \overline{B} C$

入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1になる組合せを考える

ABC
→ A=B=C=1のとき

$A\overline{B}$
→ A=1, B=0のとき
（Cは0/1どちらでもよい）

$\overline{B}C$
→ B=0, C=1のとき
（Aは0/1どちらでもよい）

A \ BC	00	01	11	10
0		1		
1	1	1	1	

$A\overline{B}$, $\overline{B}C$の両方

乗法標準形の論理式からの真理値表，カルノー図の作成

$(A+B)(\overline{B}+C)$

入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

0になる組合せを考える

$(A+B)$と$(\overline{B}+C)$のどちらかが，
0になれば，0

A+B
→ A=B=0のとき
（Cは0/1どちらでもよい）

$\overline{B}$+C
→ B=1, C=0のとき
（Aは0/1どちらでもよい）

0が入らなかったところが

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

カルノー図による論理式の簡略化

2 マスを囲む

B / A	0	1
0	1	1
1		

$$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}$$

B / A	0	1
0		1
1		1

$$\overline{A}B+AB=B$$

カルノー図による論理式の簡略化

2マスを囲む

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1				

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{A}\,\overline{B}$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			
1	1			

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}=\overline{B}\,\overline{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1				

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}=\overline{A}\,\overline{C}$$

4マスを囲む

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	

$$\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC=C$$

A \ BC	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

$$A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC+AB\overline{C}=A$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}=\overline{C}$$

カルノー図による論理式の簡略化

2マスを囲む

CD AB	00	01	11	10
00			1	1
01				
11		1		
10		1		

$\bar{A}\bar{B}C$

$A\bar{C}D$

4マスを囲む

CD AB	00	01	11	10
00	1			
01	1	1	1	
11	1	1	1	
10	1			

BD

$\bar{C}\bar{D}$

8マスを囲む

CD AB	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

B

カルノー図による論理式の簡略化

２マス，４マスを組み合わせることで簡略化を図る

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	

$A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC$

５項が２項に簡略化

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	

$A\bar{B}+C$

カルノー図による論理式の簡略化

２マス，４マスを組み合わせることで簡略化を図る

A \ BC	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	

$A\bar{B}+AC$

３項が2項に簡略化

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		1
1	1			1

$\bar{A}\bar{B}+\bar{C}$

５項が２項に簡略化

カルノー図による論理式の簡略化

（２マス），４マス，８マスを組み合わせることで簡略化を図る

AB＼CD	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10		1		

$B+\bar{C}D$

１０項が２項に簡略化

AB＼CD	00	01	11	10
00		1		
01	1	1		
11	1	1	1	
10		1	1	

$B\bar{C}+AD+\bar{C}D$

８項が３項に簡略化

カルノー図による論理式の簡略化

カルノー図を使うと，ブール代数の法則を使うよりも楽に変形できる

入力		出力
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1
$X=\bar{A}B+A\bar{B}+AB$		
OR		

入力		出力
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0
$X=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}$		
NAND		

べき等則

$$X=\bar{A}B+A\bar{B}+AB$$

$$=\bar{A}B+A\bar{B}+\boxed{AB+AB}$$

相補則

$$=A(B+\bar{B})+(A+\bar{A})B$$

$$=A+B$$

相補則

A＼B	0	1
0		1
1	1	1

A+B

べき等則

$$X=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+A\bar{B}$$

$$=\boxed{\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{B}}+\bar{A}B+A\bar{B}$$

$$=\bar{A}(B+\bar{B})+(A+\bar{A})\bar{B}$$

$$=\bar{A}+\bar{B}$$

相補則

$$=\overline{AB}$$

ドモルガンの法則

A＼B	0	1
0	1	1
1	1	

$\bar{A}+\bar{B}=\overline{AB}$

カルノー図による論理式の簡略化

入力		出力
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1
$X=\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+AB$		

入力		出力
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
$X=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+AB$		

べき等則

$$X=\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+AB$$
$$=\bar{A}\bar{B}+\boxed{A\bar{B}+A\bar{B}}+AB$$
$$=A(B+\bar{B})+(A+\bar{A})\bar{B}$$
$$=A+\bar{B}$$

相補則

A \ B	0	1
0	1	
1	1	1

$A+\bar{B}$

べき等則

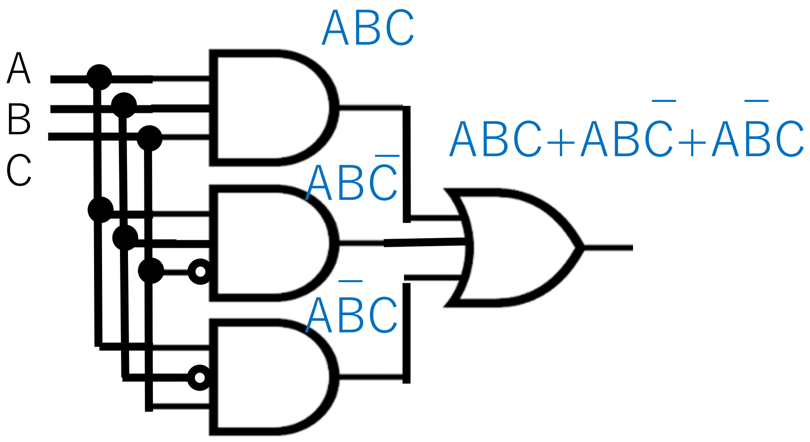
$$X=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}B+AB$$
$$=\bar{A}\bar{B}+\boxed{\bar{A}B+\bar{A}B}+AB$$
$$=\bar{A}(B+\bar{B})+(A+\bar{A})B$$
$$=\bar{A}+B$$

相補則

A \ B	0	1
0	1	1
1		1

$\bar{A}+B$

カルノー図による論理回路の簡略化



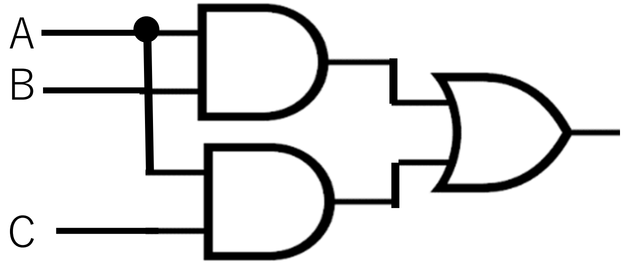
入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0				
1		1	1	1

AB

AC

X = AB+AC

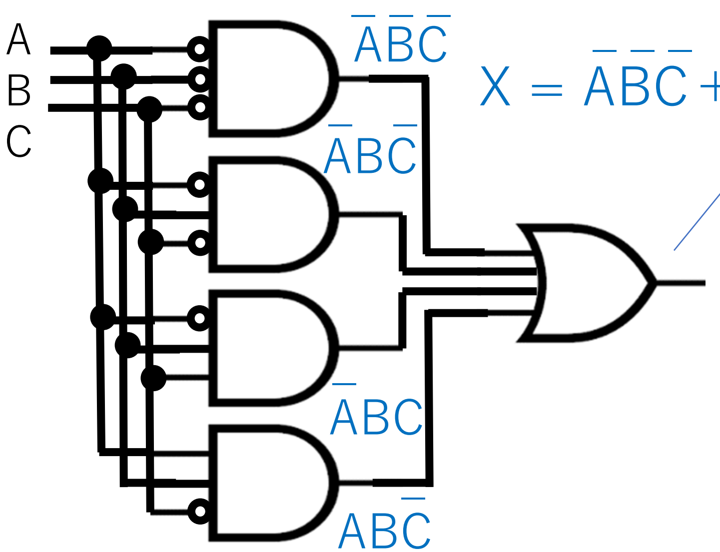


参考）論理式の展開

$$X = ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C = ABC+AB\overline{C}+ABC+A\overline{B}C = AB(C+\overline{C})+AC(B+\overline{B}) = AB+AC$$

べき等則　相補則　相補則

カルノー図による論理回路の簡略化



$$X=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+AB\bar{C}$$

A \ BC	00	01	11	10
0	1		1	1
1				1

$\bar{A}\bar{C}$　$\bar{A}B$　$B\bar{C}$

$$X=\bar{A}\bar{C}+\bar{A}B+B\bar{C}$$

入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

参考）論理式の展開

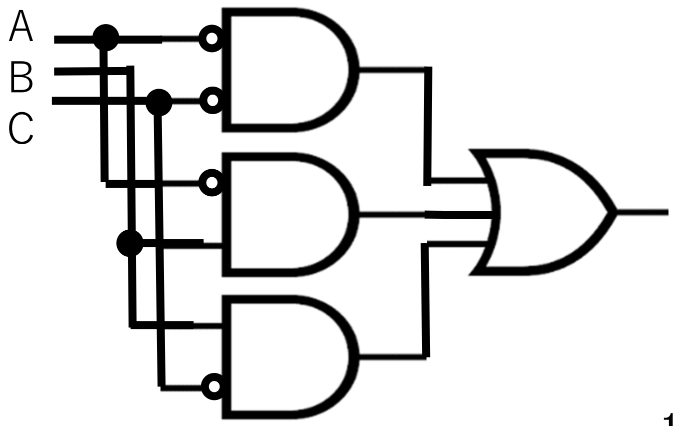
$$X=\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\boxed{\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}}+\bar{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}$$

$$=\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}+\boxed{\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}}+\bar{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\bar{C}$$

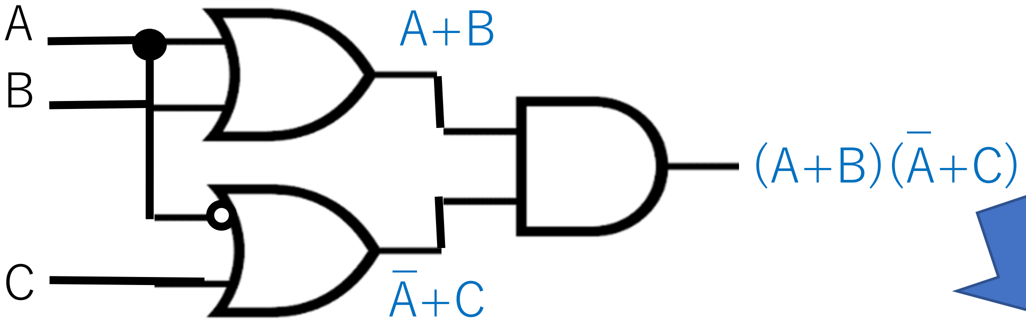
$$=\bar{A}\,(\bar{B}\cdot\bar{C}+B\cdot\bar{C})+\bar{A}\,(B\cdot C+B\cdot\bar{C})+(\bar{A}\cdot B+A\cdot B)\,\bar{C}$$

$$=\bar{A}\,(\bar{B}+B)\,\bar{C}+\bar{A}\cdot B\,(C+\bar{C})+(\bar{A}+A)\,B\cdot\bar{C}$$

$$=\bar{A}\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot B+B\cdot\bar{C}$$



カルノー図による論理回路の簡略化



乗法標準形なので，
積の各項が0になる
条件を考える

$(A+B)$が0になる組合せは，
$A=B=0$のとき
$(\overline{A}+C)$が0になる組合せは，
$A=1$, $C=0$のとき

0になる組合せ	
A	BC
0	00
0	01
1	00
1	10

対応する箱に0を入れる．
残りが1となる

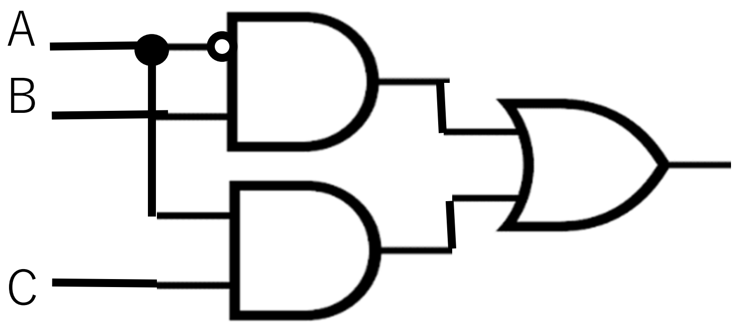
A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

$\overline{A}B$

AC

重複なので不要

$X = \overline{A}B+AC$



簡略になってないけど！？

参考）論理式の展開

$$X = (A+B)(\overline{A}+C)$$

相補則

$$= A\overline{A}+B\overline{A}+AC+BC$$
$$= \overline{A}B+AC+BC$$

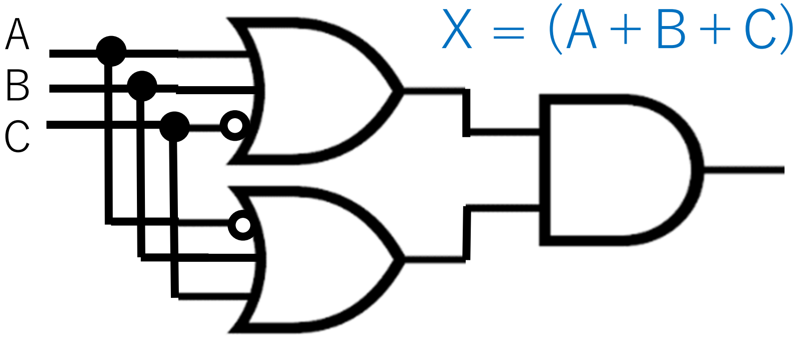
相補則

$$= \overline{A}B+AC+BC(\overline{A}+A)$$
$$= \overline{A}B+\overline{A}BC+AC+ABC$$

零原則　　零原則

$$= \overline{A}B(1+C)+AC(1+B)$$
$$= \overline{A}B+AC$$

カルノー図による論理回路の簡略化



$X = (A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)$

乗法標準形なので，
積の各項が0になる
条件を考える

入力			中間		出力
A	B	C	第1項	第2項	X
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

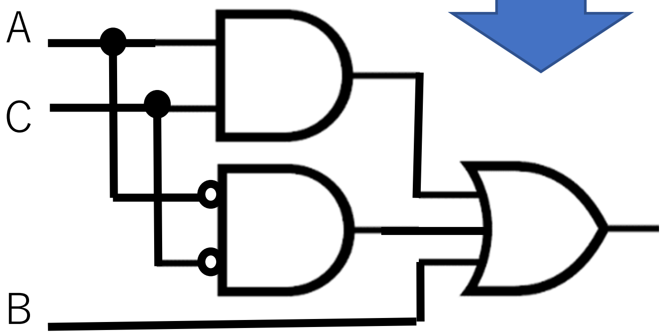
$\overline{A}\,\overline{C}$　B　AC

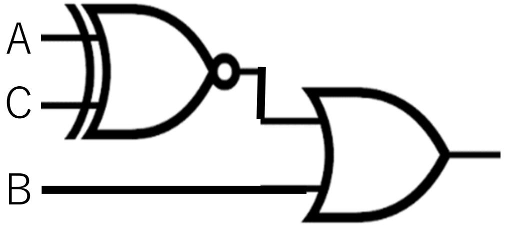
A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1

$X = AC+\overline{A}\,\overline{C}+B$

↓

$\overline{A \oplus C}$





参考）論理式の展開

相補則

$$
\begin{aligned}
X &= (A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\\
&= A\overline{A}+AB+AC+\overline{A}B+BB+BC+\overline{A}\,\overline{C}+B\overline{C}+C\overline{C}\\
&= AB+AC+\overline{A}B+B+BC+\overline{A}\,\overline{C}+B\overline{C}\\
&= AC+\overline{A}\,\overline{C}+B(A+1+C+\overline{C})\\
&= AC+\overline{A}\,\overline{C}+B
\end{aligned}
$$

相補則

論理回路設計:不一致回路

２入力の不一致を見る

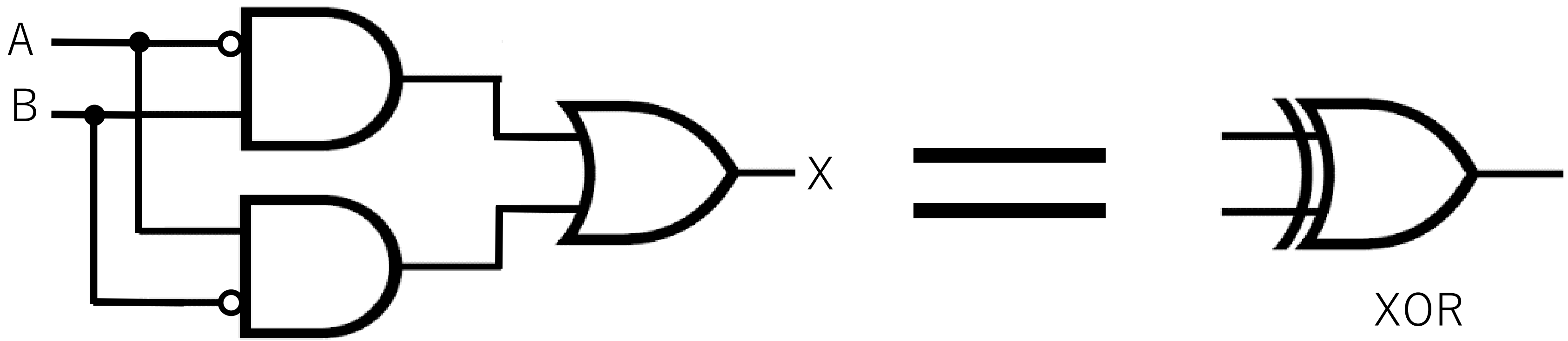
真理値表

入力		出力
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

カルノー図

A \ B	0	1
0		1
1	1	

$$X = \overline{A}B + A\overline{B}$$
$$= A \oplus B$$



論理回路設計：一致回路

２入力の一致を見る

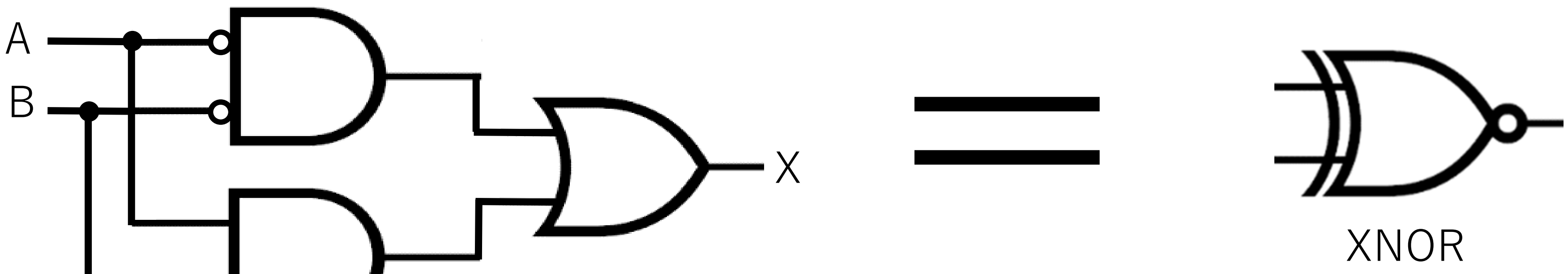
真理値表

入力		出力
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

カルノー図

A＼B	0	1
0	1	
1		1

$$X = \overline{A}\,\overline{B} + AB$$
$$= \overline{A \oplus B}$$



論理回路設計：比較回路

- 2入力を比較しフラッグを立てる
- A>Bのとき，Pフラッグを立て，
A=Bのとき，Eフラッグを立て，
A<Bのとき，Mフラッグを立てる．

真理値表

入力		出力			説明
A	B	P	E	M	
0	0	0	1	0	A=B
0	1	0	0	1	A<B
1	0	1	0	0	A>B
1	1	0	1	0	A=B

P: A>B

A \ B	0	1
0		
1	1	

$P = A\overline{B}$

E: A=B

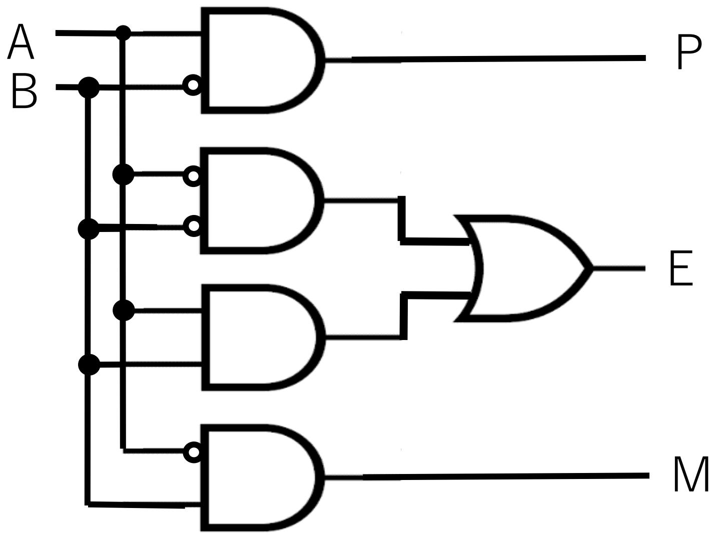
A \ B	0	1
0	1	
1		1

$E = \overline{A}\,\overline{B} + AB$

M: A<B

A \ B	0	1
0		1
1		

$M = \overline{A}B$



論理回路設計：多数決回路

入力の半数を超える場合（3入力なので2以上のとき）にフラッグを立てる

入力			出力
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$$X = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$
$$= AB + BC + AC$$