UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Departamento de Física

Grado en Física

Mecánica Cuántica

PREGUNTAS DE EXAMEN

(Hasta el curso 2023-24)

José Estepa Ruiz

Universidad de Córdoba, España

4 de noviembre de 2024

Índice general

Tema 1
Los Postulados de la Mecánica Cuántica

1.1. Cuestiones

Reducción del paquete de ondas

1. Tenemos una partícula en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle)$, donde los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal del espacio de estados. Queremos medir un observable $\hat{O}$, del que sabemos que uno de los autovalores es o y el proyector que proyecta sobre el subespacio donde se encuentran los autovectores de $\hat{O}$ con dicho autovalor vale:

$$\hat{P}_o = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1+2i \\ 1-2i & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcular la probabilidad de que si medimos el observable $\hat{O}$ obtengamos como resultado de la medida el valor o. Si medimos $\hat{O}$ y obtenemos el valor o, ¿cuál será el estado justo después de la medida? *(12-01-16)*

Evolución temporal de un sistema

1. Definir las frecuencias de Bohr de un sistema e indicar cómo depende de ellas el valor medio de un observable, $\langle\hat{A}\rangle(t)$, que no depende explícitamente del tiempo. *(07-02-23)*

Imagen de Schrödinger, de Heisenberg y de interacción

1. Explica la diferencia entre trabajar en la imagen de Schrödinger y la de Heisenberg. *(24-01-14)*

2. Enumerar las propiedades del operador evolución. *(09-04-14)*

3. Obtener la ecuación diferencial que satisface el operador evolución $U(t,0)$. *(05-09-14)*

4. Obtener la ecuación que nos da la evolución temporal de un operador en la imagen de interacción. *(15-12-14)*

5. El hamiltoniano de una partícula es $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, siendo todos estos operadores constantes. Si en $t = 0$ la partícula se encuentra en un estado $|\varphi\rangle$, que es autovector de $\hat{H}_0$ y $\hat{W}$, de modo que $\hat{H}_0\,|\varphi\rangle = E_0\,|\varphi\rangle$ y $\hat{W}\,|\varphi\rangle = E_1\,|\varphi\rangle$, escribir el estado de la partícula en la imagen de Heisenberg y en la de interacción. *(23-01-15)*

6. Deducir las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de un estado y de un operador en la imagen de interacción. *(12-01-16)*

7. Obtener ecuación que nos da la evolución temporal de un operador en la imagen de interacción. *(19-01-17)*

8. ¿Cuál es la expresión del operador $\hat{U}(t, t_0)$ para un hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo? Utilizar dicha expresión para demostrar que se verifican las propiedades del operador evolución. *(09-02-17)*

9. Escribir el operador evolución $\hat{U}(t, 0)$ para una partícula libre. A partir de la definición de $\hat{x}_H(t)$, utilizar la regla de conmutación de $\hat{U}(t, 0)$ con el operador $\hat{x}$ y obtener la evolución temporal de $\hat{x}_H(t)$. ¿Es razonable el resultado obtenido? *(15-01-19)*

10. El operador hamiltoniano que determina la evolución temporal de un sistema depende explícitamente del tiempo de la forma:

$$\hat{H} = \hat{A}t^2$$

siendo $\hat{A}$ un operador hermítico. Encontrar el operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$. *(08-01-21)*

11. Un sistema se encuentra inicialmente en un estado $|\varphi\rangle$, de modo que $|\varphi\rangle$ es autovector común de un operador $\hat{H}_0$, con autovalor E_0, y de un operador $\hat{W}$, con autovalor E_1. Escribir el estado en el instante t en la imagen de Schrödinger, en la de Heisenberg y en la de interacción, si el hamiltoniano es $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$. Comprobar que los estados anteriores satisfacen las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a cada una de las imágenes. *(21-01-22)*

12. El estado de un sistema en el instante t en la imagen de Schrödinger viene dado por $|\psi(t)\rangle$. Sabemos que una forma distinta de trabajar consiste en definir la imagen de Heisenberg en la que el estado no evoluciona y son los operadores que representan a las distintas magnitudes físicas los que evolucionan. ¿Cómo se puede definir un operador densidad en la imagen de Heisenberg? ¿Cómo se utilizaría dicho operador para calcular valores medios y probabilidades? *(11-02-22)*

13. Demostrar que el siguiente operador satisface todas las propiedades de un operador evolución:

$$\hat{U}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos\omega(t - t_0) & i\sin\omega(t - t_0) \\ i\sin\omega(t - t_0) & \cos\omega(t - t_0) \end{pmatrix}$$

¿Cómo se podría obtener el hamiltoniano del sistema? *(19-01-23)*

14. Demostrar la siguiente expresión:

$$\frac{d\hat{A}_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_S, \hat{H}_0\right]_I + \left(\frac{d\hat{A}_S}{dt}\right)_I$$

(07-02-23)

15. El estado de una partícula en $t = 0$ en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|u_2\rangle$$

Si el hamiltoniano es $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$ con:

$$\hat{H}_0 \equiv \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & 3\hbar\omega \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{W}(t) \equiv \begin{pmatrix} 2\hbar\omega^2 t & 0 \\ 0 & 5\hbar\omega^2 t \end{pmatrix}$$

encontrar el estado en el instante t en la imagen de Heisenberg y en la de interacción. *(05-09-2023)*

16. El hamiltoniano de un sistema es:

$$\hat{H} = \hat{A}t$$

siendo $\hat{A}$ un operador hermítico. Obtener el operador evolución $\hat{U}(t, 0)$. Si $|\psi(0)\rangle$ es autovector de $\hat{A}$ con autovalor a, utilizar el operador evolución para obtener el estado en el instante t. *(07-09-2023)*

17. Demostrar la ecuación que nos da la evolución temporal del operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$. Si tenemos un hamiltoniano que depende del tiempo de la forma:

$$\hat{H} = \hat{A}t^2$$

donde $\hat{A}$ es un operador que no depende del tiempo, obtener el operador evolución $\hat{U}(t_1, t_2)$. *(11-01-24)*

18. Tenemos un operador en la imagen de Schrödinger $\hat{A} = \hat{A}_S$, que no depende explícitamente del tiempo. Demostrar que la evolución temporal del operador en la imagen de Heisenberg $\hat{A}_H(t)$ viene dada por:

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H\right]$$

Aplicar esta ecuación a los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ de una partícula libre que se mueve en una sola dimensión. Resolver las ecuaciones para obtener $\hat{x}_H(t)$ y $\hat{p}_H(t)$ y, finalmente, expresar estos dos últimos operadores en la representación coordenadas. *(02-02-24)*

Matriz densidad

1. ¿Qué necesidad hay de introducir el formalismo de la matriz densidad si se puede trabajar con los vectores de estado? *(24-01-14)*

2. Obtener la ecuación que nos da la evolución temporal de la matriz de propagación para el caso de un estado puro. *(09-04-14)*

3. Indicar si la siguiente matriz densidad corresponde a un estado puro o a uno mezcla:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1+i \\ 1-i & 1/2 \end{pmatrix}$$

   (05-09-14)

4. Deducir si la siguiente matriz verifica las propiedades de una matriz densidad y si se trata de la correspondiente a un estado simple o uno mezcla:

$$\hat{\rho} \equiv \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix}$$

   (11-06-15)

5. Obtener la ecuación que determina la evolución temporal de la matriz densidad para el caso de un estado mezcla. *(01-09-16)*

6. Un conjunto de partículas se describe mediante la siguiente matriz densidad:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

   Comprobar si verifica las propiedades de una matriz densidad e indicar si se trata de una matriz que describe un estado simple o mezcla. *(12-01-16)*

7. Un sistema que se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, está descrito por la matriz densidad:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

   ¿Se trata de un estado puro o mezcla? Dado el observable $\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, utilizar la matriz densidad para calcular las probabilidades de los distintos resultados que se pueden obtener al medir $\hat{O}$. *(19-01-17)*

8. Un sistema de dos partículas de espín 1/2, de las que sólo describimos su espín, se encuentra en el estado $\frac{1}{\sqrt{3}}\left|{+}{+}\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\left|{+}{-}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|{-}{+}\right\rangle$. Obtener la matriz densidad reducida de la primera partícula (representarla matricialmente). *(19-01-17)*

9. Un sistema de dos partículas de espín 1/2, para las cuales sólo describimos el estado de su espín, se encuentra en el estado:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}\left|{+}{+}\right\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}\left|{+}{-}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|{-}{+}\right\rangle$$

Calcular la matriz densidad reducida de la primera partícula. ¿Corresponde a un estado puro? ¿Por qué? *(15-01-19)*

10. Tenemos un gran número de partículas que se pueden describir mediante un espacio de estados de dimensión 2. Si la matriz densidad que describe a las partículas es diagonal, indicar qué forma tendrá si corresponde a un estado puro y a uno mezcla. *(09-02-21)*

11. Tenemos dos sistemas de espacios de estados de dimensión 2 y 3 y de bases $\{\left|+\right\rangle, \left|-\right\rangle\}$ y $\{\left|a\right\rangle, \left|b\right\rangle, \left|c\right\rangle\}$, respectivamente. Si el estado que describe los dos sistemas es:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\left|+b\right\rangle - 2i\left|-a\right\rangle + 2\left|+c\right\rangle + i\left|-c\right\rangle\right)$$

calcular la matriz densidad reducida del primer sistema. Discutir si corresponde a un estado puro o mezcla. *(19-01-23)*

12. Dada la siguiente matriz:

$$\hat{\rho} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

Indicar de forma razonada si cumple todas las propiedades de una matriz densidad. *(05-09-2023)*

13. Analizar la siguiente matriz densidad para ver si proviene de un estado puro o mezcla. En caso de provenir de un estado puro encontrar dicho estado:

$$\hat{\rho} \equiv \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

(07-09-2023)

14. El estado de espín de dos partículas de espín 1/2 está descrito por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|-+\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\,|--\rangle$$

Calcular la matriz densidad reducida de la primera partícula. Utilizar dicha matriz densidad para calcular la probabilidad de que la primera partícula tenga $S_z = \hbar/2$. Calcular esta misma probabilidad a partir del estado $|\psi\rangle$ y ver si coinciden. *(11-01-24)*

15. Desconocemos el estado de una partícula de espín 1/2, pero conocemos su matriz densidad en la base $\{|\pm\rangle\}$:

$$\hat{\rho} \equiv \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor medio de S_x? Cambiar la expresión de $\hat{\rho}$ de la base actual $\{|\pm\rangle\}$ a la base $\{|\pm_x\rangle\}$ y calcular de nuevo la probabilidad anterior.

Nota.- La matriz de cambio de base es $\hat{C} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(02-02-24)*

El espín

1. ¿Para qué se coloca el factor giromagnético de espín 2? *(24-01-14)*

2. Dado el espinor $\begin{pmatrix} \psi_+(\vec{\mathbf{r}}) \\ \psi_-(\vec{\mathbf{r}}) \end{pmatrix}$, cuál es la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición $\vec{\mathbf{r}}$. *(05-09-14)*

3. Escribir la fuerza que sufre un electrón que se mueve en un campo magnético no uniforme de la forma $\vec{\mathbf{B}} = B(z)\hat{e}_z$. ¿Cómo deducen Ulenbeck y Goudsmit que el electrón debe tener un momento angular intrínseco $s = 1/2$? *(23-01-15)*

4. Escribir las matrices que representan a los operadores $\hat{S}_x$ y $\hat{S}_y$, los autovalores y los autovectores correspondientes para una partícula de espín $s = 1/2$. *(11-06-15)*

5. Escribir la expresión de la fuerza que sufre un electrón que se mueve en un campo magnético no uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B(z)\hat{e}_z$. ¿Por qué se introduce el factor giromagnético de espín? *(02-02-16)*

Sistemas de partículas idénticas

1. ¿En qué consiste la degeneración de intercambio? *(24-01-14)*

2. ¿Cómo se definen el Simetrizador y el Antisimetrizador para un sistema de dos partículas? ¿Qué propiedades tienen? *(09-04-14)*

3. Enunciar el postulado de simetrización. *(05-09-14)*

4. Enumerar las propiedades del Simetrizador y Antisimetrizador. Explicar brevemente en qué consiste el problema de la degeneración de intercambio. *(15-12-14)*

5. Tenemos tres fermiones idénticos, de modo que cada uno de ellos puede estar en cuatro estados individuales distintos y ortogonales entre sí: $|A\rangle$, $|B\rangle$, $|C\rangle$ o $|D\rangle$. Calcular cuántos estados distintos podemos formar con estas partículas. Para uno de estos estados calcular la forma del estado utilizando el determinante de Slater. *(11-06-15)*

6. Demostrar que el operador permutación de un sistema de dos partículas, $\hat{P}_{21}$, es hermítico. *(01-09-16)*

7. Demostrar que para un sistema formado por partículas idénticas, el carácter de simétrico o antisimétrico se conserva a lo largo de la evolución temporal del sistema. *(02-02-16)*

8. Demostrar que el operador permutación $\hat{P}_{21}$, para un sistema de dos partículas, es hermítico. *(09-02-17)*

9. Indicar, de forma razonada, qué afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

   - $\hat{P}_{3214}$ es una transposición.
   - $\hat{P}_{21}$ es un proyector.
   - $\hat{P}_{1243}\hat{P}_{3142} = \hat{P}_{3124}$.
   - $\hat{P}_{213}\,|1:u_i;2:u_j;3:u_k\rangle = |2:u_i;1:u_j;3:u_k\rangle$.

   (08-01-21)

10. Tenemos dos partículas idénticas que pueden estar en tres estados individuales distintos: $|A\rangle$, $|B\rangle$ y $|C\rangle$. ¿Cuántos estados distintos hay para el conjunto de las dos partículas: a) si se trata de fermiones idénticos y b) si se trata de bosones idénticos? *(09-02-21)*

11. Demostrar, basándose en su definición, que el operador permutación de un sistema de dos partículas $\hat{P}_{21}$ es un operador unitario. *(21-01-22)*

12. Indicar de forma razonada qué afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

    - $\hat{P}_{1423}^{-1} = \hat{P}_{3241}$.
    - $\hat{P}_{1324}$ es hermítico.
    - $\hat{P}_{2134}$ es un proyector.
    - $\hat{P}_{213}$ es una permutación impar.

- $(1 + \hat{P}_{132})/2$ es un proyector.

(11-02-22)

13. Indicar y justificar si las siguientes relaciones/afirmaciones son verdaderas o falsas:

    - $\hat{P}_{21}^2 = \hat{P}_{21}$
    - $\hat{P}_{2341}\hat{P}_{3412} = \hat{P}_{4132}$
    - $\hat{P}_{1243}^\dagger \hat{P}_{1243} = \hat{I}$
    - $\hat{P}_{321}$ es una permutación par
    - $\hat{P}_{123} = \hat{I}$

    (19-01-23)

14. Demostrar que el operador $\hat{P}_{21}$ es hermítico. *(07-02-23)*

Entrelazamiento cuántico

1. Tenemos un sistema de dos partículas de espín 1/2, que se encuentran en el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|+-\right\rangle + i\left|-+\right\rangle)$. ¿Es un estado entrelazado? ¿Por qué? Si medimos el valor de S_x de la primera partícula y obtenemos el valor $\hbar/2$, ¿cómo queda el estado de la segunda partícula? *(09-02-17)*

1.2. Problemas

1. Tenemos un conjunto de partículas, de modo que cada una de ellas se puede describir utilizando un espacio de estados de dimensión 2, y una base de dicho espacio de estados la constituyen los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Sabemos que un tercio de las partículas se encuentran en el estado $|a\rangle = |u_1\rangle$ y el resto en el estado $|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i|u_2\rangle)$.

   Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de partículas.
   Dado un observable:
   $$\hat{O} \equiv \begin{pmatrix} -7\alpha & -24\alpha i \\ 24\alpha i & 7\alpha \end{pmatrix},$$
   (siendo α una constante real) calcular: los valores que podemos obtener al medir el observable $\hat{O}$, las probabilidades correspondientes y el valor medio del observable. *(24-01-14)*

2. Tenemos un conjunto de partículas, de modo que cada una de ellas se puede describir utilizando un espacio de estados de dimensión 2, y una base de dicho espacio de estados la constituyen los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Sabemos que la mitad de las partículas se encuentran en el estado $|a\rangle = |u_2\rangle$ y el resto en el estado $|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|u_1\rangle + i2|u_2\rangle)$.

   Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de partículas.
   Dado un observable:
   $$\hat{O} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix},$$
   (siendo α una constante real) calcular: los valores que podemos obtener al medir el observable $\hat{O}$, las probabilidades correspondientes y el valor medio del observable. *(09-04-14)*

3. Tenemos un electrón descrito mediante el siguiente espinor:
   $$|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} 2ie^{-r} \\ e^{-2r} \end{pmatrix}$$
   Normalizar el espinor. Calcular el valor medio de la coordenada radial, de $\hat{S}_z$ y de $\hat{S}_y$. *(05-09-14)*

4. Tenemos un conjunto de partículas, de modo que cada una de ellas se puede describir utilizando un espacio de estados de dimensión 2, y una base de dicho espacio de estados la constituyen los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. Sabemos que la mitad de las partículas se encuentran en el estado $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$ y el resto en el estado $|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(|u_1\rangle + i2|u_2\rangle)$.

   Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de partículas.

Dado un observable:

$$\hat{O} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

(siendo α una constante real) calcular: los valores que podemos obtener al medir el observable $\hat{O}$, las probabilidades correspondientes y el valor medio del observable. *(15-12-14)*

5. Tenemos un electrón descrito mediante el siguiente espinor:

$$\langle \vec{\mathbf{r}}, \pm|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_{210}(\vec{\mathbf{r}}) + 2i\psi_{21-1}(\vec{\mathbf{r}}) + 3\psi_{320}(\vec{\mathbf{r}}) \\ (1+i)\psi_{21-1}(\vec{\mathbf{r}}) + \psi_{310}(\vec{\mathbf{r}}) \end{pmatrix}$$

Normalizar el espinor. Calcular los valores que podemos obtener y los valores medios de los operadores $\hat{H}$, $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}_z$ y $\hat{S}_y$. *(23-01-15)*

6. Tenemos muchos sistemas que se pueden describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, de modo que los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal de dicho espacio de estados. Sabemos que la mitad de los sistemas se encuentran en el estado $|a\rangle = (|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle)/\sqrt{2}$, y la otra mitad en el estado $|b\rangle = (|u_1\rangle - |u_2\rangle)/\sqrt{2}$. Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de los sistemas. Si medimos el observable $\hat{O}$ que está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{O} = \alpha \begin{pmatrix} 9 & 2i \\ -2i & 6 \end{pmatrix}$$

¿qué valores podemos obtener? Utilizar la matriz densidad para calcular las probabilidades correspondientes. Calcular el valor medio de $\hat{O}$. *(01-09-16)*

7. Tenemos un electrón descrito mediante el siguiente espinor:

$$\langle \vec{\mathbf{r}}, \pm|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_{210}(\vec{\mathbf{r}}) + i\psi_{21-1}(\vec{\mathbf{r}}) + 3\psi_{200}(\vec{\mathbf{r}}) \\ (1+2i)\psi_{21-1}(\vec{\mathbf{r}}) + 3\psi_{210}(\vec{\mathbf{r}}) \end{pmatrix}$$

Normalizar el espinor. ¿Está el electrón en un estado estacionario? ¿Por qué? Calcular los valores que podemos obtener y los valores medios de los operadores $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{S}_z$ y $\hat{S}_y$. *(12-01-16)*

8. Tenemos muchos sistemas que se pueden describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, de modo que los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal de dicho espacio de estados. Sabemos que un tercio de los sistemas se encuentran en el estado $|a\rangle = (|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle)/\sqrt{2}$, un tercio en el estado $|b\rangle = |u_1\rangle$ y el resto en el estado $|c\rangle = |u_3\rangle$.

Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de los sistemas. Si medimos el observable $\hat{O}$ que está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{O} = \alpha \begin{pmatrix} 34 & -12i \\ 12i & 41 \end{pmatrix}$$

¿qué valores podemos obtener y con qué probabilidad? Calcular el valor medio de $\hat{O}$. *(02-02-16)*

9. Una partícula se encuentra descrita mediante el siguiente espinor:

$$|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} e^{-r/2} \\ (1+i)e^{-r/2} \end{pmatrix}$$

Normalizar el espinor. Calcular el valor medio de la coordenada radial. ¿Qué valores podemos obtener al medir $\hat{S}_z$ y con qué probabilidad? ¿Y al medir $\hat{S}_y$? ¿Y al medir $\hat{L}_z$? *(19-01-17)*

10. Tenemos un conjunto formado por un gran número de sistemas, de modo que cada uno de ellos se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 2 y de modo que los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal de dicho espacio de estados. La mitad de los sistemas se encuentra en el estado $|a\rangle = (|u_1\rangle + |u_2\rangle)/\sqrt{2}$ y la otra mitad en el estado $|b\rangle = (|u_1\rangle - i\,|u_2\rangle)/\sqrt{2}$.

Encontrar la matriz densidad que describe al conjunto de los sistemas. El hamiltoniano de cada sistema está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} \equiv \alpha \begin{pmatrix} 9 & 2i \\ -2i & 6 \end{pmatrix}$$

¿Qué valores podemos obtener si medimos la energía de uno de los sistemas y con qué probabilidad podemos obtener cada uno de ellos? *(09-02-17)*

11. Tenemos un sistema que se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, de modo que los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal de dicho espacio de estados. El sistema se encuentra inicialmente en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle$$

El hamiltoniano del sistema está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} \equiv \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega \end{pmatrix}$$

El operador $\hat{O}$ está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{O} = \alpha \begin{pmatrix} 34 & -12i \\ 12i & 41 \end{pmatrix}$$

Encontrar el operador $\hat{O}$ en la imagen de Heisenberg. Usar la expresión obtenida para calcular el valor medio de $\hat{O}$ en el instante t. *(15-01-19)*

12. Tenemos una gran cantidad de sistemas que se pueden describir mediante un espacio de estados de dimensión 2, de modo que los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ constituyen una base ortonormal de dicho espacio de estados. Sabemos que los sistemas están en una mezcla de los estados $|a\rangle = |u_1\rangle$ y $|b\rangle = (|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle)/\sqrt{2}$.

    Tenemos un dispositivo que permite medir el observable $\hat{O}$ que viene representado por la siguiente matriz:

    $$\hat{O} \equiv a \begin{pmatrix} 2 & 3i \\ -3i & 5 \end{pmatrix}$$

    siendo a una constante real y positiva. ¿Cuál es el máximo y mínimo valor que podemos obtener para el valor medio de $\hat{O}$? *(08-01-21)*

13. Consideremos un sistema que se puede describir con un espacio de estados de dimensión 2 y una base de dicho espacio de estados la constituyen los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. El operador hamiltoniano del sistema está representado en dicha base por la siguiente matriz:

    $$\hat{H} \equiv \hbar\omega \begin{pmatrix} 7 & 6i \\ -6i & -2 \end{pmatrix}$$

    Obtener el operador evolución del sistema en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$. *(09-02-21)*

14. Tenemos dos partículas de espín $s_1 = s_2 = 1$, que se encuentran en el estado:

    $$|2,1\rangle + |1,1\rangle + |1,0\rangle$$

    Si medimos la componente z del espín de la primera partícula, ¿qué valores podemos obtener y con qué probabilidad? Calcular la matriz densidad reducida de la primera partícula. *(09-02-21)*

15. Se considera el espacio de estados de espín de dos electrones $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{S_1} \otimes \mathcal{E}_{S_2}$. En un instante dado se tiene que:
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(i\,|{+}{+}\rangle + 2\,|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle \right)$$
Se define la entropía de Von Neumann, como una extensión del concepto de entropía para un sistema cuántico y es una medida del "desconocimiento"que tenemos sobre el sistema, como:
$$S = -\operatorname{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$$
De la misma forma podemos definir una entropía para el sistema 1 y otra para el sistema 2, considerando la matriz densidad reducida $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ respectivamente.

    a) Calcular el valor máximo que puede tomar la entropía del sistema 1 ($S_{1\max}$) y el valor mínimo ($S_{1\min}$).

    b) Si definimos el grado de entrelazamiento del sistema 1 con el 2 de la forma:
    $$e = \frac{S_1 - S_{1\min}}{S_{1\max} - S_{1\min}},$$
    calcular este valor para el estado que nos dan.

    c) Calcular el grado de entrelazamiento del sistema 2 con el 1 e indicar si se obtiene un resultado coherente.

    (21-01-22)

16. Se tiene un sistema que se puede describir mediante un espacio de estados de dimensión 3. El sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle = (|u_1\rangle + i\,|u_3\rangle)/\sqrt{2}$. El hamiltoniano está representado por el siguiente operador:
$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
siendo ω una constante real y positiva.

    Calcular:

    a) Matriz densidad del sistema.

    b) Valores de energía del sistema (Autovalores).

    c) Vector correspondiente al estado fundamental, así como el proyector sobre dicho vector.

d) Probabilidad de que al medir la energía obtengamos el mínimo valor posible.

e) Valor medio de la energía utilizando el operador densidad.

(11-02-22)

17. Considere el espinor:

$$\langle \vec{\mathbf{r}}, \pm|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} e^{-r/2} \\ (1+i)e^{-r/2} \end{pmatrix}$$

a) Normalizar el espinor. ¿Qué valores podremos obtener al medir $\hat{S}_z$ y con qué probabilidad?

b) ¿Qué valores podremos obtener al medir $\hat{S}_y$? ¿Y $\hat{L}_z$?

c) Obtener el valor medio de la coordenada radial.

En $t = 0$ medimos el valor del spin en el eje z y obtenemos $+\hbar/2$. En ese mismo instante comienza a actuar sobre el sistema una perturbación con la forma:

$$\hat{W} = \omega \hat{S}_x$$

d) Calcular el estado del sistema en el instante t usando teoría de perturbaciones hasta primer orden.

(19-01-23)

18. Suponga que tenemos un sistema con momento angular 1. Se toma la base eligiendo los autovectores del momento angular J_z con autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$ respectivamente. El sistema está descrito por la siguiente matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es ρ una matriz densidad válida? ¿Describe un estado puro o un estado mezcla? Razona tus respuestas.

b) ¿Cuál es el valor medio de J_z en el sistema descrito por ρ?

c) ¿Cuál es la desviación estándar de las medidas de J_z?

(07-02-23)

Tema 2
Composición de Momentos Angulares

2.1. Cuestiones

Momento angular total

1. Demostrar que el producto escalar $\hat{L}\cdot\hat{S}$ conmutan con el momento angular total $\hat{J} = \hat{L}+\hat{S}$. ¿Cómo se puede interpretar este resultado? *(09-04-14)*

2. Para un espacio de estados de dos espines $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{S_1} \otimes \mathcal{E}_{S_2}$, demostrar que el producto escalar de los dos espines no conmute con $\hat{S}_{1x}$ ni con $\hat{S}_{2x}$, pero que sí conmute con $\hat{J}_x = \hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x}$. *(01-09-16)*

Composición de momentos angulares

1. Dada la composición de momentos angulares $j_1 = 2$ y $j_2 = 3$, aplicar el operador $\hat{J}_-$ para obtener los vectores $|5,4\rangle$ y $|5,3\rangle$. *(15-12-14)*

2. En la composición de momentos angulares $j_1 = 3, j_2 = 2$, ¿cuántos vectores de la forma $|J,M\rangle$ hay? ¿Para qué valores de J se produce un cambio de signo en los coeficientes de Clebsch-Gordan al intercambiar el papel que juegan j_1 y j_2? *(23-01-15)*

3. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 2, j_2 = 1$, el vector $|J,M\rangle = |1,1\rangle$ se puede escribir en función de vectores de la base $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ de la siguiente forma:

$$|1,1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|2,1;2,-1\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}\,|2,1;1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}\,|2,1;0,1\rangle$$

   Aplicar el operador $\hat{J}_-$ a este vector para obtener el vector $|1,0\rangle$. ¿Qué coeficientes de Clebsch-Gordan podemos deducir a partir de la expresión obtenida? *(11-06-15)*

4. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 3, j_2 = 3$, calcular cuántos vectores de la forma $|J,M\rangle$ tendremos. ¿Cuáles son los posibles valores de J? ¿Qué vectores $|J,M\rangle$ serán simétricos ante el intercambio del papel que juegan las dos partículas y qué vectores serán antisimétricos? *(12-01-16)*

5. En la composición de dos momentos angulares $j_1 = 3$ y $j_2 = 2$, aplicar el operador $\hat{J}_-$ para obtener los primeros coeficientes de Clebsch-Gordan. ¿Cuáles son y cuánto valen? *(02-02-16)*

6. Dada la composición de momentos angulares $j_1 = 3, j_2 = 2$, aplicar el operador $\hat{J}_-$ de forma adecuada para obtener los vectores $|5,4\rangle$ y $|5,3\rangle$. *(06-02-17)*

7. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 3, j_2 = 1$, ¿cuál será el vector $|4, -4\rangle$ en función de los vectores $|3, 1; m_1, m_2\rangle$? Calcular el vector $|4, -3\rangle$ a partir del anterior. *(11-02-22)*

8. En la composición de momentos angulares $j_1 = 4$, $j_2 = 2$, calcular cuántos vectores $|J, M\rangle$ hay y calcular el vector $|6, 5\rangle$ en función de los vectores $|4, 2; m_1, m_2\rangle$. *(19-01-23)*

9. Para obtener los vectores de la base $|J, M\rangle$ en función de los vectores $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ hemos estudiado un método sistemático que consiste en partir del vector $|J, J\rangle = |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = |j_1, j_2; j_1, j_2\rangle$ y aplicar sucesivamente el operador $\hat{J}_-$ para encontrar todos los vectores con $J = j_1 + j_2$. A continuación se obtenía el vector $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$ y se aplicaba de nuevo sucesivamente el operador $\hat{J}_- \dots$ Aplicar este método para la composición de momentos angulares $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$. *(07-02-23)*

10. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 4$, $j_2 = 3$, ¿cuál es el vector $|J, M\rangle$ que tiene máximo valor de J y de M? A partir de dicho vector obtener el vector $|J, M - 1\rangle$. ¿Qué coeficientes de Clebsch-Gordan podemos deducir? *(05-09-23)*

11. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 2$, $j_2 = 2$, escribir el vector $|2, 1\rangle$ en función de los vectores en la que los momentos angulares individuales son diagonales. ¿Tiene este vector un carácter bien definido ante el intercambio de los dos momentos angulares? ¿Cuál? ¿Hay algún motivo por el que sea así? *(07-09-23)*

12. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 3$, $j_2 = 3$, ¿cuántos vectores $|J, M\rangle$ hay? ¿Cuáles de ellos serán simétricos ante el intercambio de las dos partículas y cuáles antisimétricos? Obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes al vector $|6, 5\rangle$. *(11-01-24)*

Coeficientes de Clebsch-Gordan

1. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de C-G para que sean distintos de cero? *(24-01-14)*

2. Definir los coeficientes de Clebsch-Gordan. *(05-09-14)*

3. Indicar de cuáles de los siguientes coeficientes de Clebsch-Gordan se puede afirmar que son nulos e indicar por qué.

   - $\langle 2, 1; 1, 0|1, 1\rangle$
   - $\langle 3, 1; 2, 2|2, 4\rangle$
   - $\langle 2, -1; 1, 0|0, 1\rangle$
   - $\langle 4, 1; 3, 1|6, 4\rangle$
   - $\langle 2, 3; 1, 0|4, 2\rangle$

(05-09-14)

4. Para la composición de momentos angulares $j_1 = 2, j_2 = 3/2$, demostrar que los primeros coeficientes de Clebsch-Gordan coinciden con los de la tabla:

$$\langle 2, \frac{3}{2}; 1, \frac{3}{2} | \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \rangle = 1, \quad \langle 2, \frac{3}{2}; 2, \frac{1}{2} | \frac{7}{2}, \frac{5}{2} \rangle = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

(23-01-15)

5. Indicar de forma razonada qué coeficientes de Clebsch-Gordan son nulos y cuáles son distintos de cero:

   - $\langle 3, 1; 1, 1 | 4, 2 \rangle$
   - $\langle 3, 2; 2, 1 | 2, 3 \rangle$
   - $\langle 2, 3; 2, 2 | 6, 4 \rangle$
   - $\langle 2, 2; 0, 0 | 3, 0 \rangle$

(09-02-21)

6. Indicar de forma razonada qué coeficientes de Clebsch-Gordan son nulos y cuáles no:

   - $\langle 3, 1 | 2, 1; 2, 0 \rangle$
   - $\langle 4, 2 | 2, 1; -1, 1 \rangle$
   - $\langle 2, 3 | 1, 1; 0, 0 \rangle$
   - $\langle 3, 2 | 2, 1; -1, 0 \rangle$
   - $\langle 3, 3 | 2, 1; 1, 2 \rangle$

(21-01-22)

7. Los siguientes coeficientes de Clebsch-Gordan son nulos. Explicar el motivo. Si hay más de un motivo explicar cada uno.

   - $\langle 2, 1; 1, 1 | 1, 2 \rangle$
   - $\langle 0, 2; 0, 1 | 1, 1 \rangle$
   - $\langle 1, 1; 0, -1 | 1, 1 \rangle$
   - $\langle 2, 2; 1, 2 | 3, 2 \rangle$
   - $\langle 3, 1; 2, 2 | 0, 3 \rangle$

(02-02-24)

Propiedades de los coeficientes C-G

1. A partir de las relaciones de recurrencia de los coeficientes de Clebsch-Gordan, demostrar la siguiente expresión:
$$\langle j, j; m, -m|0, 0\rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}$$
(15-01-19)

2. Demostrar la primera relación de recurrencia de los coeficientes de Clebsch-Gordan. *(08-01-21)*

Operadores escalares, vectoriales y tensoriales

1. ¿Qué se entiende como operador escalar? *(24-01-14)*

2. ¿Qué se entiende por operador vectorial? Demostrar que si el vector $|\alpha, J, M\rangle$ es un autovector de $\hat{J}_z$ con autovalor $\hbar M$, el vector $\hat{V}_z\,|\alpha, J, M\rangle$ (donde $\hat{V}_z$ es la componente en la dirección z de un operador vectorial) también lo es y con el mismo autovalor. *(15-12-14)*

3. ¿Qué se entiende por operador escalar? Demostrar que los elementos de matriz de un operador escalar $\langle k', J', M'|\,\hat{A}\,|k, J, M\rangle$ son nulos, a menos que $J = J'$ y $M = M'$. *(19-01-17)*

2.2. Problemas

1. Tenemos dos bosones idénticos de espín $s_1 = s_2 = 2$, que interaccionan mediante el siguiente hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)^2 + \omega\left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right)$$

Encontrar los estados estacionarios en los que se pueden encontrar el conjunto de las dos partículas: su energía y su grado de degeneración.

En $t = 0$ el sistema formado por las dos partículas se encuentra en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = |2, 2; 1, 0\rangle + |2, 2; 0, 1\rangle$$

Encontrar el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos la componente del espín en la dirección del eje z de una de las partículas, ¿qué resultados podemos encontrar y con qué probabilidad? *(24-01-14)*

2. Tenemos dos partículas, que son fermiones idénticos de espín $s_1 = s_2 = 3/2$. Escribir los vectores de la forma $|J, M\rangle$ en los que se pueden encontrar el conjunto de las dos partículas. Si las partículas se encuentran en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0, 0\rangle + \frac{i}{\sqrt{25}}|2, 1\rangle$$

y medimos la componente z del espín de una de ellas, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(09-04-14)*

3. Tenemos dos partículas: una con espín $s_1 = 2$ y la otra con espín $s_2 = 1$. En el instante inicial se encuentran en el estado $|\psi(0)\rangle = |2, 1; 0, 1\rangle$. El operador hamiltoniano del conjunto de las dos partículas viene dado por la siguiente expresión:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right)$$

Calcular el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos la componente z del espín de la primera partícula, calcular la probabilidad de que obtengamos el valor $2\hbar$. *(05-09-14)*

4. Tenemos un sistema formado por dos partículas idénticas de espín $s = 1$. El operador hamiltoniano del sistema viene dado por el operador:

$$\hat{H} = \omega\hat{S}_{1z} + \omega\hat{S}_{2z} - \frac{\omega}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Encontrar los valores que puede tomar la energía del sistema, su grado de degeneración y los estados estacionarios. Si el sistema se encuentra en el segundo estado excitado y realizamos una medida de la componente z del espín de las dos partículas, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(15-12-14)*

5. Tenemos dos partículas con espín $s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = 1$, que se encuentran inicialmente con su momento angular acoplado en el estado $|\psi(0)\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$. A partir de dicho instante se desacoplan, de modo que el hamiltoniano que describe la evolución temporal de las dos partículas es de la forma:

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_{1z}$$

Calcular el estado de las dos partículas en el instante t. Si en dicho instante medimos la componente z del espín de una de las dos partículas, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? Y si medimos el valor de $\hat{J}^2$, ¿qué valores podemos obtener y con qué probabilidad? *(23-01-15)*

6. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 2$, cuyo hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \omega \left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right)$$

Encontrar los estados estacionarios. Si el sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |4, 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

y medimos la componente S_z de cada partícula, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(12-01-16)*

7. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 1$, cuyo hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \omega \left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right)$$

Encontrar los estados estacionarios, así como sus energías. El sistema se encuentra inicialmente en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = |1, 1; 1, 0\rangle + |1, 1; 0, 1\rangle + i\, |1, 1; 1, 0, 0\rangle$$

Encontrar el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos el valor de $\hat{J}^2$, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(02-02-16)*

8. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 1$, cuyo hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar} \left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 \right)^2 + \omega \left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right)$$

Encontrar los estados estacionarios, así como sus energías correspondientes. El sistema se encuentra inicialmente en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = |1,1;1,0\rangle + |1,1;0,1\rangle + 2i\,|1,1;0,-1\rangle + 2i\,|1,1;-1,0\rangle$$

Encontrar el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos el valor de $\hat{J}^2$, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(01-09-16)*

9. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 3/2$, cuyo hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}\right)$$

Encontrar los estados estacionarios, así como sus energías correspondientes. El sistema se encuentra inicialmente en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = |2,1\rangle$$

Encontrar el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos el valor de $\hat{S}_z$ de una de las partículas, ¿qué valores podemos obtener y con qué probabilidad? *(19-01-17)*

10. Tenemos un sistema formado por dos partículas idénticas de espín $s = 1$. El operador hamiltoniano del sistema viene dado por el operador:

$$\hat{H} = \omega\hat{S}_{1z} + \omega\hat{S}_{2z} - \frac{\omega}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Encontrar los valores que puede tomar la energía del sistema, su grado de degeneración y los estados estacionarios. Si el sistema se encuentra en el primer estado excitado y realizamos una medida de la componente z del espín de las dos partículas, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(09-02-17)*

11. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 1$, cuyo hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\hat{J}_+\hat{J}_-$$

Encontrar los estados estacionarios, así como sus energías. El sistema se encuentra inicialmente en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \hat{S}\left(|1,1;1,0\rangle + |1,1;0,0\rangle + i\,|1,1;-1,0\rangle\right)$$

siendo $\hat{S}$ el simetrizador. Encontrar el estado en el instante t. Si en dicho instante medimos el valor de $\hat{S}_z$ de una de las partículas, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad? *(15-01-19)*

12. Tenemos dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 1$, de modo que una de ellas se encuentra en el estado individual $|1,1\rangle$ y la otra en el estado individual $\left(|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)/\sqrt{2}$. Simetrizar convenientemente y escribir el estado en el que se encuentran las partículas. Si medimos el valor de S_z de una de las partículas, ¿qué resultados podemos obtener y con

qué probabilidad? ¿Qué valores se pueden obtener al medir J^2 y con qué probabilidad? *(08-01-21)*

13. Tenemos dos partículas de espín $s_1 = s_2 = 1$, que se encuentran en el estado:

$$|2,1\rangle + |1,1\rangle + |1,0\rangle$$

Si medimos la componente z del espín de la primera partícula, ¿qué valores podemos obtener y con qué probabilidad? Calcular la matriz densidad reducida de la primera partícula. *(09-02-21)*

14. Se considera el espacio de estados de espín de dos partículas $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{S_1} \otimes \mathcal{E}_{S_2}$, donde los dos espines tienen los valores $s_1 = 1$ y $s_2 = 2$. Se define el hamiltoniano de interacción entre los dos espines de la forma:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 - \omega(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})$$

Calcular los posibles valores de la energía y los autovectores correspondientes. Comprobar si existen valores degenerados e indicar uno de ellos así como su grado de degeneración.

Si en el instante inicial el estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = |1,2;0,-2\rangle$$

Calcular el estado del sistema en el instante t. Si medimos el valor de $\hat{S}_{1z}$ en dicho instante, calcular los valores que podemos encontrar y la probabilidad correspondiente. *(21-01-22)*

15. a) Aplicar el método estándar para obtener los coeficientes de Clebsch-Gordan correspondientes al acoplo entre dos momentos angulares $j = 1/2$, que permiten escribir los vectores $|J,M\rangle$ en función de los vectores $|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$.

    b) Obtener los vectores $|J,M_y\rangle$, autovectores de $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_y$, en función de los vectores $|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$.

    (11-02-22)

16. Dos partículas idénticas de espín $s_1 = s_2 = 1$ se encuentran en un estado en el que la proyección del spin en el eje x de una de ellas vale $\hbar$ y la proyección del espín de la otra en el mismo eje vale $-\hbar$

    a) Escribe el estado $|\psi\rangle$ en el que se encuentra el sistema. Puedes usar el sistema de referencia que prefieras.

    b) ¿Qué probabilidades hay de medir la proyección del momento total M en el eje x y obtener 0?

El Hamiltoniano de este sistema se puede escribir como:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)^2 + \omega\left(\hat{S}_{1x} + \hat{S}_{2x}\right)$$

c) ¿En qué estado se encontrará el sistema en el instante t?

(19-01-23)

17. Tenemos dos partículas de espín $s_1 = s_2 = 1/2$ cuyo Hamiltoniano vale:

$$\hat{H} = \frac{2\omega}{\hbar}\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + \omega\left(\hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}\right)$$

a) Encontrar los estados estacionarios, sus energías y el estado fundamental.

b) El estado del sistema se puede describir, en $t = 0$, como:

$$|\psi(t=0)\rangle = |1/2, 1/2; 1/2, 1/2\rangle$$

En ese mismo instante empieza a actuar una perturbación con la forma:

$$\hat{W} = \omega\hat{S}_y$$

Encontrar $|\psi(t)\rangle$ usando teoría de perturbaciones hasta primer orden.

(07-02-23)

18. Suponga que tenemos un sistema con momento angular 1. Se toma la base eligiendo los autovectores del momento angular J_z con autovalores $+\hbar$, 0 y $-\hbar$ respectivamente. El sistema está descrito por la siguiente matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es ρ una matriz densidad válida? ¿Describe un estado puro o un estado mezcla? Razona tus respuestas.

b) ¿Cuál es el valor medio de J_z en el sistema descrito por ρ?

c) ¿Cuál es la desviación estándar de las medidas de J_z?

(07-02-23)

Tema 3
Teoría de Perturbaciones Dependiente del Tiempo

3.1. Cuestiones

Sistemas de dos niveles

1. Para un sistema de dos niveles de energía, obtener las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$ para una perturbación sinusoidal de la forma

$$\hat{W} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2V\cos\omega t \\ 2V\cos\omega t & 0 \end{pmatrix}.$$

¿En qué consiste la aproximación secular? *(15-12-14)*

2. En el estudio de un sistema de dos niveles, cuando se introduce la perturbación y escribimos el estado de la forma

$$|\psi(t)\rangle = b_1(t)e^{-iE_1t/\hbar}|\varphi_1\rangle + b_2(t)e^{-iE_2t/\hbar}|\varphi_2\rangle\,,$$

los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_1(t)}{\mathrm{d}t} = V\big(e^{i(\omega-\omega_{21})t} + e^{-i(\omega+\omega_{12})t}\big)b_2(t),$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_2(t)}{\mathrm{d}t} = V\big(e^{i(\omega+\omega_{21})t} + e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\big)b_1(t).$$

Aplicar la aproximación secular y resolver estas ecuaciones en el caso de resonancia, con la condición inicial $b_1(0) = 1, b_2(0) = 0$. Interpretar la solución obtenida. *(11-06-15)*

3. Tenemos un sistema de dos niveles de energía $E_1 < E_2$, que se encuentra inicialmente en el estado $|\varphi_1\rangle$ correspondiente al valor de la energía E_1. Si introducimos una perturbación de frecuencia ω y amplitud V, los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_1(t)}{\mathrm{d}t} = V\left(e^{i(\omega-\omega_{21})t} + e^{-i(\omega+\omega_{21})t}\right)b_2(t),$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_2(t)}{\mathrm{d}t} = V\left(e^{i(\omega+\omega_{21})t} + e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\right)b_1(t).$$

Resolver estas ecuaciones en el caso de resonancia y utilizando la aproximación secular, para obtener el estado en el instante t. ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en regresar al estado inicial? *(12-01-16)*

4. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles está representado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{W}(t) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Ve^{-t/\tau} \\ Ve^{-t/\tau} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si escribimos el estado en el instante t, de la forma $|\psi(t)\rangle = b_1(t)e^{-iE_1t/\hbar}|\varphi_1\rangle + b_2(t)e^{-iE_2t/\hbar}|\varphi_2\rangle$, donde $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ son los autovectores de $\hat{H}_0$, encontrar las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$. *(02-09-17)*

5. En la evolución temporal de un sistema de dos niveles, los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$ evolucionan de acuerdo con las ecuaciones:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_1(t)}{\mathrm{d}t} = V\left(e^{i(\omega-\omega_{21})t} + e^{-i(\omega+\omega_{21})t}\right)b_2(t)$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}b_2(t)}{\mathrm{d}t} = V\left(e^{i(\omega+\omega_{21})t} + e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\right)b_1(t)$$

Aplicar la aproximación secular y la aproximación de tiempos cortos, explicando en qué consisten, para obtener la probabilidad de transición y la frecuencia de transición al estado $|\varphi_2\rangle$ si partimos en $t = 0$ del estado $|\varphi_1\rangle$. *(21-01-22)*

6. La probabilidad de transición desde el estado $|\varphi_1\rangle$ al estado $|\varphi_2\rangle$ para un sistema de dos niveles viene dada, en la aproximación de tiempos cortos, por:

$$\mathcal{P}_{12}(t) = \left(\frac{2V}{\hbar}\right)^2 \frac{\sin^2[(\omega-\omega_{21})t/2]}{(\omega-\omega_{21})^2}$$

Se trata de una función sinc al cuadrado. Calcular la anchura y la altura de esta función, como función de la frecuencia ω. ¿Hasta cuándo será válido utilizar la aproximación de tiempos cortos? ¿Cuándo esperamos ver la resonancia del sistema? *(07-02-23)*

7. Las ecuaciones que nos dan la evolución temporal de los coeficientes $b_1(t)$ y $b_2(t)$ para un sistema de dos niveles una vez hecha la aproximación secular son:

$$i\hbar\,\frac{db_1(t)}{dt} = V\,e^{i(\omega-\omega_{21})t}\,b_2(t)$$

$$i\hbar\,\frac{db_2(t)}{dt} = V\,e^{-i(\omega-\omega_{21})t}\,b_1(t)$$

Encontrar la solución en la resonancia con la condición inicial $|\psi(0)\rangle = |\varphi_2\rangle$. Escribir el vector $|\psi(t)\rangle$. *(11-01-24)*

Probabilidad de transición

1. De acuerdo a la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden, la probabilidad de transición desde un estado inicial $|\varphi_i\rangle$ a un estado distinto $|\varphi_f\rangle$ viene

dada por:

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t'}\, \langle\varphi_f|\hat{W}(t')|\varphi_i\rangle\right|^2.$$

Comentar por qué es lógica esta expresión e indicar cuándo será significativa una probabilidad de transición. *(23-01-15)*

2. Definir el concepto de frecuencia de transición $\mathcal{W}_{21}$, para un sistema de dos niveles de energía. *(02-02-16)*

3. Calcular la probabilidad de transición $\mathcal{P}_{if}^{(1)}(t)$ (con $f \neq i$) para una perturbación $\hat{W}$ constante. Dibujar dicha probabilidad como una función de la frecuencia de Bohr ω_{fi} indicando cómo se comporta dicha función conforme transcurre el tiempo. *(02-02-16)*

4. Definir el concepto de frecuencia de transición $\mathcal{W}_{21}$, para un sistema de dos niveles de energía. *(01-09-16)*

5. De acuerdo a la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden, la probabilidad de transición desde un estado inicial $|\varphi_i\rangle$ a un estado distinto $|\varphi_f\rangle$ viene dada por:

$$\mathcal{P}_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t \mathrm{d}t'\, e^{i\omega_{fi}t'}\, \langle\varphi_f|\hat{W}(t')|\varphi_i\rangle\right|^2.$$

Aplicar esta expresión para el caso de una perturbación constante que comienza a actuar desde $t = 0$ y deducir para qué estados $|\varphi_f\rangle$ es más significativa esta probabilidad de transición. *(01-09-16)*

6. Definir el concepto de frecuencia de transición $\mathcal{W}_{21}$, para un sistema de dos niveles de energía. *(15-01-19)*

7. Definir el concepto de frecuencia de transición $\mathcal{W}_{21}$, explicando su significado. *(08-01-21)*

8. Explicar razonadamente el concepto de frecuencia de transición que aparece en la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo. *(05-09-23)*

9. Para el caso de una perturbación constante, la probabilidad de transición desde el estado $|\varphi_i\rangle$ al estado $|\varphi_f\rangle$, aplicando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden, vale:

$$\mathcal{P}_{if} = \frac{4}{\hbar^2}\left|\, \langle\varphi_f|\hat{W}|\varphi_i\rangle\right|^2 \frac{\sin^2(\omega_{fi}t/2)}{\omega_{fi}^2}$$

Dibujar esta expresión como función de la frecuencia, indicando los valores de la altura y anchura. *(07-09-23)*

Perturbación sinusoidal

1. Una partícula se encuentra en el tercer estado excitado de un oscilador armónico de frecuencia ω. Sometemos la partícula a una perturbación que depende del tiempo de la

forma

$$W(t) = \hat{W} \sin^3 \omega t.$$

A la vista de esta dependencia temporal, ¿qué transiciones pueden ocurrir? *(19-01-17)*

2. Una partícula está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω. En el instante $t = 0$ se encuentra en el estado $|\varphi_2\rangle$ y en dicho instante comienza a actuar una perturbación de la forma $\hat{W}(t) = \hat{W} \sin^3(2\omega t)$. ¿Para qué estados será significativa la probabilidad de transición? *(11-02-22)*

Regla de Oro de Fermi

1. En $t = 0$ un sistema se encuentra en el estado $|E_i\rangle$ de energía E_i, perteneciente al espectro discreto de un hamiltoniano $\hat{H}_0$. Sometemos el sistema a una perturbación sinusoidal de frecuencia ω, de modo que el estado $|E_i + \hbar\omega\rangle$ es autovector de $\hat{H}_0$ perteneciente al espectro continuo de $\hat{H}_0$. De acuerdo con la regla de oro de Fermi, la probabilidad de que el sistema se vaya al continuo depende del tiempo de la forma:

$$\mathcal{P}_{\text{continuo}}(t) = \Gamma t = \frac{2\pi}{\hbar} \Big| \langle E_i + \hbar\omega | \hat{W} | E_i \rangle \Big|^2 t.$$

Demostrar que la probabilidad $\mathcal{P}_{ii}(t)$ de que el sistema continúe en el estado inicial decae exponencialmente con el tiempo. *(15-01-19)*

Decaimiento de un estado discreto a un continuo de estados

1. En el decaimiento de un estado discreto a un continuo de estados debido a una perturbación sinusoidal, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado inicial decae exponencialmente con el tiempo de la forma:

$$\mathcal{P}_{ii}(t) = e^{-\Gamma t}$$

donde:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \alpha = G(E_i + \hbar\omega) | \, \hat{W} \, |\varphi_i\rangle \right|^2 \rho(E_i + \hbar\omega)$$

¿Cómo depende del tiempo la perturbación $\hat{W}(t)$? ¿Qué significa α? ¿Qué significa G? ¿Qué significa ρ? *(02-02-24)*

Transiciones adiabáticas

1. Explicar en palabras en qué consisten las transiciones adiabáticas. *(19-01-23)*

Observación continua de un estado

1. Explicar con palabras (no con ecuaciones) en qué consiste el efecto Zenón cuántico. *(09-02-21)*

3.2. Problemas

1. Una partícula de masa m que está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω, se encuentra en $t = 0$ en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle$$

   A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha\hat{x}\delta(t-\tau)$$

   Aplicar la teoría de perturbaciones hasta primer orden para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $|\varphi_1\rangle$ para $t > \tau$. *(24-01-14)*

2. Una partícula de masa m que está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω, se encuentra en $t = 0$ en el estado $|\psi(0)\rangle = |\varphi_5\rangle$. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha\hat{x}e^{-t/\tau}$$

   Aplicar la teoría de perturbaciones hasta primer orden para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $|\varphi_4\rangle$ para $t \to \infty$. *(09-04-14)*

3. Una partícula de masa m que está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω, se encuentra en $t = 0$ en el estado fundamental. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha\hat{x}^2e^{-t/\tau}$$

   Aplicar la teoría de perturbaciones hasta primer orden para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el segundo estado excitado para $t \to \infty$. *(05-09-14)*

4. Una partícula de masa m que está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω, se encuentra en $t = 0$ en el estado $|\psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle$. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha\hat{x}^2e^{-t/\tau}$$

   Aplicar la teoría de perturbaciones hasta primer orden para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $|\varphi_2\rangle$ para $t \to \infty$. *(15-12-14)*

5. Una partícula de masa m se encuentra en $t = 0$ en el estado fundamental de un pozo infinito de potencial de anchura a, entre $-a/2$ y $a/2$. A partir de dicho instante, actúa una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha_1 a\hat{x}e^{-t/\tau_1} + \alpha_2\hat{x}^2e^{-t/\tau_2}$$

donde α_1, α_2, τ_1 y τ_2 son constantes reales. Aplicar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el primer estado excitado y en el segundo estado excitado para $t \to \infty$. *(23-01-15)*

6. Una partícula de masa m se encuentra en $t = 0$ en el primer estado excitado de un oscilador armónico simple de frecuencia ω. Si sometemos la partícula a una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha \hat{p} e^{-t/\tau}$$

Utilizar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo para calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado fundamental, para tiempos muy cortos y para $t \to \infty$. *(12-01-16)*

7. El hamiltoniano de una partícula es $\hat{H} = \hat{L}_z \omega$ y se encuentra en $t = 0$ en el estado $|l, m\rangle = |1, 0\rangle$. Si sometemos la partícula a una perturbación de la forma:

$$\hat{W} = \alpha \hat{L}_x e^{-t/\tau}$$

calcular la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado $|1, 1\rangle$ para $t \to \infty$, aplicando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden. *(02-02-16)*

8. Una partícula está sometida al potencial de un oscilador armónico simple con frecuencia ω y se encuentra en $t = 0$ en el estado fundamental. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W} = \alpha \left(a^3 + a t^3 \right) e^{-t/\tau}$$

Calcular la probabilidad de que en $t \to \infty$ la partícula se encuentre en el tercer estado excitado. *(01-09-16)*

9. Una partícula está sometida al potencial de un oscilador armónico simple con frecuencia ω y se encuentra en $t = 0$ en el estado fundamental. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha \hat{p} e^{-t/\tau}$$

Calcular la probabilidad de transición al primer estado excitado para tiempos muy muy cortos y para tiempos muy largos. *(19-01-17)*

10. Una partícula está sometida al potencial de un oscilador armónico simple con frecuencia ω y se encuentra en $t = 0$ en el estado fundamental. A partir de dicho instante, comienza a actuar una perturbación de la forma:

$$\hat{W}(t) = \alpha \hat{p} e^{-t/\tau}$$

Utilizar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden para calcular el estado en el instante t. ¿A qué tiende el estado para tiempos muy grandes? Calcular el valor medio de la posición para tiempos muy grandes. *(09-02-17)*

11. Una partícula se encuentra inicialmente en el segundo estado excitado de un oscilador armónico simple de frecuencia ω. Si sometemos la partícula a una perturbación de la forma:
$$\hat{W}(t) = \alpha \hat{p}^2 e^{-t/\tau}$$
aplicar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden para encontrar las transiciones posibles para $t \to \infty$, así como la probabilidad de transición correspondiente. *(15-01-19)*

12. Una partícula se encuentra inicialmente en el segundo estado excitado de un oscilador armónico simple de frecuencia ω. Si sometemos la partícula a una perturbación de la forma:
$$\hat{W}(t) = \alpha \hat{x}^2 e^{-t/\tau}$$
aplicar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo hasta primer orden para encontrar las transiciones posibles para $t \to \infty$, así como la probabilidad de transición correspondiente. *(08-01-19)*

13. Tenemos una partícula inicialmente en el estado fundamental de un oscilador armónico simple de frecuencia ω. A partir del instante inicial, sometemos la partícula a la siguiente perturbación:
$$\hat{W}(t) = \alpha e^{-t^2/\tau^2} \hat{x}$$
Calcular, hasta primer orden en teoría de perturbaciones, la probabilidad de encontrar la partícula en el primer estado excitado para tiempos muy muy cortos. *(09-02-21)*

14. Una partícula de masa m está sometida al potencial de un oscilador armónico simple de frecuencia ω y se encuentra inicialmente en el estado $|\varphi_2\rangle$. A partir de dicho instante, se le aplica una perturbación de la siguiente forma:
$$\hat{W}(t) = \alpha \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) e^{-t/\tau}$$
siendo α una constante real. Calcular, hasta primer orden en teoría de perturbaciones:

    a) Los estados en los que podemos encontrar la partícula en el instante t.

    b) Los estados en los que podemos encontrar la partícula para $t \to \infty$, así como las probabilidades correspondientes.

    (21-01-22)

15. Se tiene un oscilador armónico de masa m y frecuencia ω inicialmente en el estado $|\varphi_0\rangle$. A partir de dicho instante, se le aplica una perturbación al sistema de la siguiente manera:

$$\hat{W}(t) = \alpha\hat{x}\hat{p}\hat{x}e^{-t/\tau}$$

Calcular:

a) Los estados en los que podemos encontrar al sistema en el instante t

b) Los estados en los que podemos encontrar al sistema en $t \to \infty$ así como las probabilidades correspondientes.

(11-02-22)

Tema 4
Teoría Cuántica de la Dispersión

4.1. Cuestiones

1. Define la sección eficaz de dispersión.

   (24-01-14) (09-04-14) (05-09-14) (15-15-14) (11-06-15) (02-02-16) (09-02-21) (11-02-22)

2. Deducir la expresión clásica de la sección eficaz de dispersión para un potencial de esfera dura *(23-01-15)*

3. La aproximación de Born para la sección eficaz de dispersión es:

$$\sigma(\theta,\varphi) = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int d^3r\, e^{i(\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{i}-\vec{\mathbf{p}}_\mathbf{f})\cdot\vec{\mathbf{r}}/\hbar}V(\vec{\mathbf{r}})\right|^2$$

   Deducir una expresión más sencilla para el caso en que el potencial sea central $V(\vec{\mathbf{r}}) = V(r)$. *(12-01-16) (21-01-22)*

4. ¿Qué es la sección eficaz total? ¿Cuánto vale para un potencial de esfera dura? *(08-01-21)*