计算物理 A 第四题

杨旭鹏 PB17000234

2019 年秋季

1 题目描述

设 pdf 函数满足关系式：

$$p'(x) = p(x)\frac{x-d}{ax^2+bx+c}$$

请找到其中的一种函数，讨论性质并给出抽样方法。

2 推导过程

首先观察上式，由于 $p(x)$ 的导数中含有 $p(x)$，则设 $p(x) = exp(y(x))$，其中 $y(x)$ 满足：

$$y'(x) = \frac{x-d}{ax^2+bx+c} \tag{1}$$

我们首先假定 $a \neq 0$，则：

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{x-d}{ax^2+bx+c}dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{2(x+\frac{b}{2a})dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})} - \int \frac{(\frac{d}{a}+\frac{b}{2a^2})dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})} \end{aligned} \tag{2}$$

记 $t = x+\frac{b}{2a}$，$\alpha^2 = \frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ 则有：

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2a}\int \frac{2tdt}{t^2+\alpha^2} - (\frac{d}{a}+\frac{b}{2a^2})\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2a}ln(t^2+\alpha^2) - \frac{(\frac{d}{a}+\frac{b}{2a^2})}{\alpha}arctan(\frac{t}{\alpha}) + Const \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $Const$ 为积分常数。则：

$$p(x) = Const\ Exp\left\{\frac{1}{2a}ln(t^2+\alpha^2) - \frac{(\frac{d}{a}+\frac{b}{2a^2})}{\alpha}arctan(\frac{t}{\alpha})\right\} \tag{4}$$

取其中一种表达式，不妨取积分常数 $Const = 1$，我们有：

$$p(x) = (t^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\ Exp\left\{ -\frac{(\frac{d}{a} + \frac{b}{2a^2})}{\alpha} arctan(\frac{t}{\alpha}) \right\} \tag{5}$$

由于 $arctan(x)$ 在 $x \in (-\infty, \infty)$ 时 $\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则我们采用舍选法进行抽样。我们有：

$$p(x) < (t^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\ Exp\left\{ \frac{\pi}{2} \left| \frac{(\frac{d}{a} + \frac{b}{2a^2})}{\alpha} \right| \right\} \tag{6}$$

记 $\beta = Exp\left\{ \frac{\pi}{2} \left| \frac{(\frac{d}{a}+\frac{b}{2a^2})}{\alpha} \right| \right\}$ 则上式化为：

$$p(x) < \beta(t^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2\alpha}} \tag{7}$$

由于上式左端在 $x \to \infty$ 时也 $\to \infty$，无法进行抽样，所以我们在这里不妨假设参数 α 为 1，抽样区间为 $[m, n]$，则比较函数简化为 $\beta(t^2 + 0.25)$ 在 $[m, n]$ 上的抽样。其抽样可采用直接抽样法：

$$\xi(x) = \beta \left(\frac{t^3}{3} + \frac{n-m}{4} - \frac{m^3}{3} \right) \tag{8}$$

其反函数为:

$$t(\xi) = \sqrt[3]{3(\frac{\xi}{\beta} + \frac{m^3}{3} - \frac{n-m}{4})} \tag{9}$$

则我们可在 $\left(0, \beta\left(\frac{n^3-m^3}{3} + \frac{n-m}{4}\right)\right)$ 区间上均匀抽样得到 ξ，通过上式得到满足概率分布 $\beta(t^2 + 0.25)$ 的比较函数的 t 的抽样。后对每一个抽样的 t 值，生成在 $(0, \beta(t^2 + 0.25))$ 上的均匀抽样得到的数据点 η，若 $\eta \leq p(x)$，则取该 t 为抽样点，否则舍，则完成对 $p(x)$ 的舍选抽样。

对于使 $\frac{1}{2\alpha}$ 为正整数的情况与上面类似，不再讨论，但为其他值时比较复杂，在这里不讨论。

当参数 $a = 0$ 时，有:

$$p(x) = (c + bx)^{\frac{c+bd}{b^2}} e^{\frac{x}{b}} \tag{10}$$

其讨论与上面一种情况类似，不再详细讨论。