1. 指数分布 $\Longleftrightarrow$ $P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$

2. 独立性. $\Longleftrightarrow$ ① $f(x_1, \cdots x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$.

② $F(x_1, \cdots x_n) = F_1(x_1)\cdots F_n(x_n)$

③ $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

④ $P(Y\le y \mid X=x)P(X=x) = P(Y\le y, X=x)$ (X离散).

例 产卵 $X\sim Poi(\lambda)$，每只卵孵出概率为 p， Y: 孵出个数 $Z = X-Y$ 则 Y与Z是否独立？

3. $\begin{matrix} X\sim B(n,p) \\ Y\sim B(m,p)\end{matrix} \overset{独立}{\Longrightarrow} (X+Y)\sim B(m+n, p)$

4. $\begin{matrix} X_1\sim Poi(\lambda_1) \\ X_2\sim Poi(\lambda_2)\end{matrix} \overset{独立}{\Longrightarrow} \underline{(X_1+X_2)\sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)}$

例 $X\sim Exp(\lambda)$ $Y=[X]$ 求 $Z=X-Y$ 分布律.

5. ~~$p(y_1,y_2)$~~ $p(y_z) = f(h(y))|h'(y)|$ → 单调

6. $p(y_1,y_2) = f(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))\,|J|$ $\qquad J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}$

7. $(X,Y)\sim f(x,y)$，$Z=X+Y \Rightarrow l(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy$.

8. $\begin{matrix} X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\end{matrix} \overset{独立}{\Longrightarrow} X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ $\qquad aX\sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$

X_i iid $\sim(\mu_i,\sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_iX_i \sim N(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$

"再生性" — $(X_1+X_2)\sim N$ 无论是否独立

9.

X分布	$B(n,p)$	$Poi(\lambda)$	$Exp(\lambda)$
EX	np	λ	$\frac{1}{\lambda}$

10. $Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$. $\qquad E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy$

11. $EX = E\{E[X|Y]\} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n E(X|Y=i)P(Y=i) & Y离散 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y]\,p(y)\,dy & Y连续.\end{cases}$

例. n双鞋分n堆，平均恰好成几双？

12.

X分布	$Be(p)$	$B(n,p)$	$Poi(\lambda)$	$Exp(\lambda)$	$U(a,b)$
$Var(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

$\frac{n}{2n-1}$

13. $cov(X,Y) = E(XY) - EXEY$ $\qquad cov=0 \overset{N分布}{\Longrightarrow}$ 独立 $\Longleftarrow$

☆ $Var(X\pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2cov(X,Y)$

1. 相关系数 $\operatorname{corr}(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$

2. 契比雪夫不等式 $P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2}$，$\forall \varepsilon > 0$.

3. 中心极限定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}(X_1+\cdots+X_n - n\mu) \sim N(0,1)$.

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

4. χ^2 分布 $X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ $X=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$ ① $E(X)=n$，$\operatorname{Var}(X)=2n$

② $Z_1 \sim \chi^2_{n_1}$，$Z_2 \sim \chi^2_{n_2}$ $Z_1+Z_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$

5. t分布 $X \sim N(0,1)$ 独立，$Y \sim \chi^2_n$ $T=\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$

① $n\geq 2$时，$E(T)=0$ $n\geq 3$时 $\operatorname{Var}(T) = \dfrac{n}{n-2}$

② $n\to\infty$，$t_n \to N(0,1)$

6. F分布 $X \sim \chi^2_m$，独立 $Y \sim \chi^2_n$ $F = \dfrac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}$.

① $Z \sim F_{m,n}$，$\dfrac{1}{Z} \sim F_{n,m}$

② $T \sim t_n$，$T^2 \sim F_{1,n}$

③ $F_{m,n}(1-\alpha) = \dfrac{1}{F_{n,m}(\alpha)}$

7. $\overline{X} \sim N(a, \frac{1}{n}\sigma^2)$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ $\overline{X}$ 与 S^2 独立.

8. ① $X_i \overset{iid}{\sim} N(a,\sigma^2)$ $T=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-a)}{S} \sim t_{n-1}$

② $X_i \overset{iid}{\underset{m}{\sim}} N(a_1,\sigma_1^2)$，$Y_i \overset{iid}{\underset{n}{\sim}} N(a_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

$T = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(a_1-a_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{n+m-2}$ $(n+m-2)S_w^2 = (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2$

③ $X_i \overset{iid}{\sim} N(a_1,\sigma_1^2)$，$Y_i \overset{iid}{\sim} N(a_2,\sigma_2^2)$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1}$$

9. S^2 为 σ^2 的无偏估计量，S 比 σ 系统偏小

置信系数.区间 p178.

$$\operatorname{Var}(X) = E(X-EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

二维正态 $\rho = \operatorname{corr}(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$.

参数检验:

一样本.

μ:
- σ^2已知: $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
- σ^2未知: $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$

	H_0 ✓	H_0 ✗
接受H_0	✓	II类错误
拒绝H_0	I类错误	✓

σ^2:
- μ已知: $\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$
- μ未知: $\dfrac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

二样本.

均值:
- σ^2已知: $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$
- σ^2未知: $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$

方差:
- 均值已知: $\dfrac{\sum_i^m (X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_i^n (Y_i-\mu_2)^2/n} \sim F_{m,n}$
- 均值未知: $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{m-1,n-1}$

0-1分布: $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sim N(0,1)$

拟合优度检验.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \sim \chi^2_{k-1-r}$$

列联表 〈独立性, 齐一性〉

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{(n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)} \sim \chi^2_{(a-1)(b-1)}$$

↓连续

$n \geq 50$

$n\hat{p}_j \geq 5$

参数估计.

1. 无偏性　　2. 有效性（方差更小）　　3. 相合性（依概率收敛）

置信区间. 参数. — 针对方法 $\Rightarrow$ 平均 100次中 95次包含所估计值

$\not\Rightarrow$ 95% 机会包含所估计值.

	E	Var
Poi	λ	λ
exp	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
χ^2	n	$2n$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$.