1. $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & , n=1 \\ 0 & , n\neq 1 \end{cases}$

2. 小圆弧引理 ① $f(z)$在 C_ρ: $z=a+\rho e^{i\theta}$, $\alpha\le\theta\le\beta$ 上连续 $\Rightarrow \lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$

② $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$ —— 像一级极点.

2. 柯西积分 单连通 D, 在 C+D 上解析 $\Rightarrow \int_C f(z)dz=0$.

3. 长大不等式 $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds$

4. 柯西积分公式: C+D 内解析 $\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

5. 平均值公式: $|z-a|\le R$ 上解析 $f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(\zeta)ds$ $C: |z-a|=R$

6. 最大模原理: 有界域 D 内解析, C+D 上连续, $f(z)\neq const$ $\Rightarrow |f(z)|$ 在 C 上取到最大值.

(不一定单连通)

7. 柯西不等式: D 内解析 $|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M(R)}{R^n}$ ($M(R)$ 为 $|f(z)|$ 在 C 上最大值)

8. 刘维尔定理: 整函数 $|f(z)|\le M$, 则 $f(z)$ 必为常数.

↓

代数学基本定理.

9. 莫雷拉定理 在 D 中连续, $\int_C f(z)dz=0$ $\Rightarrow$ $f(z)$ 在 D 内解析.

C 为任意闭曲线

10. $f(z)$ 解析 则 $\begin{cases}\nabla^2 u=0 \\ \nabla^2 v=0\end{cases}$

11. $f(z)$ 解析 $\begin{matrix}u=c_1\\ v=c_2\end{matrix}$ 相互垂直.

12. ① $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \ +c_2$

② $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \overset{积分}{\Longrightarrow} f(z)$

13. 平均值定理 $u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C u(z)ds$

极值原理.

14. $u(z)$ 为 $|z-z_0|\le R$ 上的调和函数 泊松积分公式.

$\times$ $\Rightarrow u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$ 边界确定 $\Rightarrow$ 完全确定.

$\overset{\shortparallel}{u(z_0+re^{i\varphi})}$

15. u_1, u_2 在 D 内调和, C+D 上连续 若在 C 上 $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$ $\Rightarrow$ 在 C+D 上 $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$

1. $S_n=\sum z_k=\sum a_k+i\sum b_k$ $\quad$ S_n 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum a_k$，$\sum b_k$ 收敛

2. $\sum a_k=A$，$\sum b_k=B$ $\Rightarrow$ $\sum(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_kb_1)=AB$

3. 收敛半径． $R=\frac{1}{r}$ $\quad$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r\\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r\end{cases}$

4. $f(z)$在D内解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$在D内任一点 a 可展为 $z-a$ 的幂级数

例展开 $e^z\cos z$．

5. 零点孤立性． $f(z)$在z_0解析，$f(z_0)=0$ $\Rightarrow$ 存在邻域使 $\begin{cases}f(z)\equiv0\\ z_0\text{ 为唯一零点．}\end{cases}$

6. m阶零点 $\quad f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$(g(z_0)\neq0$，$g(z)$在$z_0$解析$)$．

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\qquad \sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7. a为$f(z)$可去奇点 $\Longleftrightarrow$ $\exists\rho$ 使 $f(z)$在 $0<|z-a|<\rho$ 内有界． $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$ (有限)

写 收敛半径!!

8. 罗朗级数 $\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$．

9. 极点 (m阶)． ① $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$
② a为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m级零点

$\Rightarrow$ a为极点 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$

10. 本性奇点 $\quad\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在．

∞点 $\rightarrow$ $\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$

11. $\int_c f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$

12. a为$f(z)$的 m级极点 $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$ $\quad(n\geq m)$．

$\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(a)\neq0$，a为$Q(z)$的一级零点 $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[\frac{P(z)}{Q(z)},a]=\frac{P(z)}{Q'(z)}$

13. $w_k=\sqrt[n]{z}$ $\Rightarrow$ $\frac{dw_k}{dz}=\frac{w_k}{nz}$

$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$

$z^a=e^{a\mathrm{Ln}z}$

1. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 型. $d\theta = \frac{dz}{iz}$ $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$

$\Rightarrow \int_{|z|=1} f(z)dz$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $Q(x)$至少比$P(x)$高两次.

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[R(z), a_k]$ 上半平面.

3. $f(z)$在$C_R: z = Re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \beta$上连续, 且$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ $\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$.

(小圆弧引理推论).

4. 约当引理. $C_R: |z| = R$, $Im z > -a$ $(a>0)$, $g(z)$在C_R上连续且$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ $\Rightarrow$

$\forall \lambda > 0$, 有 $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\,dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\,dx$. $R(x)$分母至少比分子高一次, 在实轴上除有限个单极点外处处解析. ~~(多极点证明方法繁杂)~~.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{imx}dx = 2\pi i \underbrace{\sum_{k=1}^{n} Res[R(z)e^{imz}, a_k]}_{\text{上半平面}} + \pi i \overbrace{\sum_{k=1}^{n'} Res[R(z)e^{imz}, x_k]}^{\text{实轴}}$$

例1. $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}dx$ 例2. $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ $(a>0)$

6. a — $f(z)$ m级零点 $\Rightarrow$ $Res[\frac{f'(z)}{f(z)}, a] = m$, $Res[\frac{f'(z)}{f(z)}, b] = -n$
b — $f(z)$ n级极点

$\Downarrow$

7. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$ (C上无零点)

8. 辐角原理 $N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$

9. 儒歇定理. $f(z)$和$\varphi(z)$在闭路C上解析, 且在C上有$|f(z)| > |\varphi(z)|$

在C内部$f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$零点个数相等.

10 唯一性定理 区域D内解析函数$f(z)$和$g(z)$在一串互不相同点列$\alpha_1, \cdots \alpha_k$上值相等.

且$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = a \in D$ 则$f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

1. 导数几何意义. $w=f(z(t))$ $\qquad \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$

旋转角

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$ "伸缩系数"

2. 设 $f(z)$ 为 D 内单叶函数，则 $\forall z\in D$, $f'(z)\neq 0$

3. D是一个边界至少包含 2个点 的单连通区域 $\Longrightarrow$ 存在 变换 $D \longrightarrow |w|<1$.

4. 黎曼定理. D为↓ 若还要求 $f(z_0)=w_0$, $\arg f'(z_0)=\alpha_0$, 则变换唯一确定.

5. $$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

6. 若 $w(z_1)=0$, $w(z_2)=\infty$ 则 $w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

7. 注意 $z^{\frac{1}{n}}$ 变换时，说明哪一支 (e.g. $\sqrt{1}=1$ 的一支).

8. e^z: $a<\mathrm{Im}\,z<b \longrightarrow a<\arg w<b$.

$\mathrm{Ln}\,z$: $a<\arg w<b \longrightarrow a+2n\pi i<\mathrm{Im}\,z<b+2n\pi i$. 特别 $\ln z \longrightarrow a<\mathrm{Im}\,z<b$

9. 柯西-黎曼方程 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ $\qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

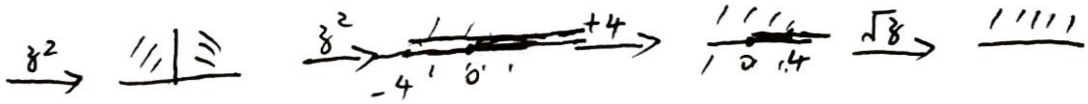
10. $w_k=\sqrt[n]{z}$ $\qquad \frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw_k}} = \frac{1}{n w_k^{n-1}} = \frac{w_k}{nz}$

例. 第一象限 $\longrightarrow$ 上半平面 $\quad z=\sqrt{2}i, 0, 1 \longrightarrow w=-1, 1, \infty$

① $\xrightarrow{z^2}$ $\sqrt{2}i, 0, 1 \to -2, 0, 1$ $\xrightarrow{\text{分式变换}}$ $\frac{w+1}{w-1} = \frac{z^2+2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+2} = \frac{z^2+2}{3z^2}$

$w=\frac{2z^2+1}{1-z^2}$ + 验证 ....

例. 沿 $[0,1+i]$ 割开的第一象限 $\longrightarrow$ 上半平面.



11. 判断极限是否存在，从实轴和虚轴分别逼近

例1. $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{A}{x+2} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-A-\frac{1}{8}}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+3)^3}$

(左右 $+\frac{1}{(x+2)^2}$)$(x+2)$ 取极限.
$A=2$

(余项多 次数少)

2. $\frac{1}{x^8(x-1)^7}$ 罗朗展开 2008-2009 复变A .9.

求特解

3. (1) $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=1 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ $(D^2+D)y=1$ $y=\frac{1}{D(D+1)}(1) = \frac{1}{D+1}(x) = (1-D+D^2-D^3\cdots)(x)$
$= x-1$

def // $P(D)$

(2) $y''(t)-y'(t)=e^{at}$ $(D^2-D)y=e^{at}$ ① $y=\frac{1}{D(D-1)}(e^{at}) = P(D)(e^{at}) = P(a)e^{at}$

② $P(D)(e^{at}f(t)) = e^{at}P(a+D)(f(t))$

$y''(t)-y'(t)=e^t \Rightarrow y=\frac{1}{D^2-D}e^t = \frac{(e^t)}{D-1}$ ≡ 遇到问题(少数)
$= \frac{1}{D-1}(e^t\cdot 1) = e^t\left(\frac{1}{D+1-1}\right)(1) = te^t$

③ $P(D^2)(\sin\omega t) = P(-\omega^2)\sin\omega t$
$P(D^2)(\cos\omega t) = P(-\omega^2)\cos\omega t$

4. $f(z)=\frac{a}{z}+bz$ $\Rightarrow$ $f(z)=a\bar{z}+bz = (a+b)x+i(b-a)y$ 伸缩变换 圆→椭圆

保角性: 解析区域保角 ⇒ 分式线性变换除一点外全保角

5. 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}dx$

构造 $f(z)=\frac{3e^{iz}-e^{3iz}-2-3z^2}{4z^3}$ 则 $I=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz$

$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$ (单极点)

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz + \int_{C_R}f(z)dz = 0$ $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz = \int_{C_R}\frac{-3z^2}{4z^3}dz = -\frac{3i\pi}{4}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(z)dz = \frac{3i\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $I=\frac{3\pi}{4}$