V 355

Gekoppelte Schwingkreise

Felix Symma
felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch
joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 23.11.2021

Abgabe: 30.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Ziel des Versuches ist es gekoppelte Schwingkreise zu untersuchen. Bei der Beobachtung der Schwingkreise wird auf die Energieverteilung der Systeme und auf den Einfluss eines äußeren Erregers auf das schwingende System geachtet. Die Erkenntnisse werden anschließend ausgewertet und mit der Theorie abgeglichen.

2 Theorie

2.1 Schwingungsgleichungen für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Obwohl im Folgenden ein elektromagnetischer Schwingkreis betrachtet wird, lassen sich die Erkenntnisse leicht auf ein mechanisches Analogon übertragen (zum Beispiel ein gekoppeltes Schwingungssystem, bestehend aus 2 Fadenpendeln, die über eine elastische Feder miteinander verbunden sind [1]). Der Grund, dass am elektrischen Schwingkreis Untersuchungen vorgenommen werden, ist, dass die Amplitude und die Frequenz einfacher und genauer bestimmt werden können.
Mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotenregel lässt sich für den Verzweigungspunkt A die Beziehung

$$I_\mathrm{k} = I_1 - I_2 \tag{1}$$

aufstellen.
Die Kirchhoffsche Maschenregel liefert zusätzlich jeweils für die beiden Leiterkreise 1 und 2 die Beziehung

$$U_\mathrm{C} + U_\mathrm{L} + U_\mathrm{k} = 0 \quad . \tag{2}$$

Außerdem gilt

$$U_\mathrm{C} = \frac{1}{C}\int I \,\mathrm{d}t \tag{3}$$

und

$$U_\mathrm{L} = L\dot{I} \quad . \tag{4}$$

Es ergeben sich daraus Differentialgleichungen der Form

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{5}$$

und

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + (\frac{1}{C} + \frac{2}{C_\mathrm{K}})(I_1 - I_2) = 0 \quad . \tag{6}$$

Aus den Lösungen dieser Differentialgleichungen folgen die Frequenzen

$$v^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{7}$$

und

$$v^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_\mathrm{K}})^{-1}}} \quad . \tag{8}$$

Werden nun zwei Spezialfälle des Systems der gekoppelten Oszillatoren betrachtet, so wird die Bedeutung der Frequenzen (7) und (8) deutlich.
Wird angenommen, dass die Oszillation in beiden Schwingkreisen mit gleicher Amplitude und in Phase beginnt, also $I_1 = I_2$ gilt, dann wird die Differenzschwingung v^- (8) Null und beide Oszillatoren schwingen gleichphasig mit der Frequenz v^+ (7), die der des Einzeloszillators entspricht. Da sich die Ströme I_1 und I_2 konsequent aufheben, liegt hierbei zu keinem Zeitpunkt Spannung am Kondensator C_K an.
Im zweiten Spezialfall wird angenommen, dass die Oszillatoren wieder mit gleicher Amplitude, jedoch entgegengesetzter Phase ($I_1 = -I_2$) beginnen zu schwingen. In diesem Fall wird die Summenschwingung v^+ 7 Null und die beiden Oszillatoren schwingen gegenphasig mit der höheren Frequenz v^-.
Diese beiden Spezialfälle und die zugehörigen Frequenzen werden als Fundamentalschwingungen bezeichnet.
Wird das System der gekoppelten Oszillatoren so angeregt, dass nur ein Oszillator zu Beginn eine von Null verschiedene Amplitude besitzt, so ergeben sich vollkommen andere Ergebnisse.
Werden die Lösungen der Differentialgleichungen (5) und (6) zusammenaddiert und unter den gennanten Anfangsbedingungen $I_1 = 0$ und $I_2 \neq 0$ betrachtet, ergibt sich daraus

$$I_1(t) = \frac{1}{2} I_{1_0} (\cos v^+ t + \cos v^- t) \tag{9}$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2} I_{1_0} (\cos v^+ t - \cos v^- t)\,. \tag{10}$$

Mit Hilfe von Additionstheoremen können (9) und (10) umgeschrieben werden zu

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos \frac{1}{2}(v^+ + v^-)t \cos \frac{1}{2}(v^+ - v^-)t \tag{11}$$

und

$$I_2(t) = I_{1_0} \cos \frac{1}{2}(v^+ + v^-)t \cos \frac{1}{2}(v^+ - v^-)t\,. \tag{12}$$

An (11) und (12) kann abgelesen werden, dass das System nun mit einer Frequenz von $\frac{1}{2}(v^+ + v^-)$ oszilliert. Für diese Art von Oszillationen, die man Schwebungen nennt, wird angenommen, dass sich die Frequenzen v^+ und v^- nur gering voneinander unterscheiden. Demnach sind die Frequenz $\frac{1}{2}(v^+ + v^-)$ und die Frequenz des Einzeloszillators v^+ ungefähr gleich.
Ebenso kann an (11) und (12) abgelesen werden, dass die Amplitude mit der Frequenz $v^- - v^+$ zwischen Null und I_{1_0} oszilliert. Diese Frequenz wird Schwebungsfrequenz genannt.

Was passiert denn genau bei diesen Anfangsbedingungen?
Der eine Kreis wird ausgelenkt und überträgt die Energie an den ruhenden Kreis, der dann angeregt wird. Die Frequenz der Energieübertragung ist dann die Schwebungsfrequenz.

Abbildung der Schwebung?

2.2 Berechnung des Stromes in Abhängigkeit der Frequenz

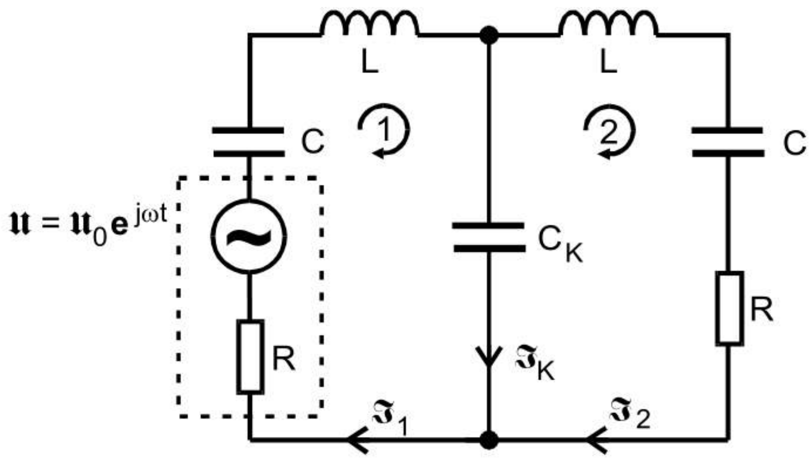


Abbildung 1: Schaltbild für gekoppelte Schwingkreise [1]

Wird der in Abbildung 1 dargestellte Schwingkreis durch eine Sinusspannung zu einer erzwungenen Schwingung angeregt so folgt durch die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U = I_1(z_C + z_L + z_{C_K} + z_R) - z_{C_K} I_2 \tag{13}$$

und

$$0 = I_2(z_C + z_L + z_{C_K} + z_R) - z_{C_K} I_1 \tag{14}$$

mit

$$z_C = -j\frac{1}{wC}, z_L = jwL,\ z_{C_K} = -j\frac{1}{wC_K} \text{ und } z_C = R\ .$$

Für den Betrag des Stromes gilt dann

$$|I_2| = |U| \frac{1}{4w^2 C_k^2 R^2 Z^2(w) + (\frac{1}{wC_k} - wC_k Z^2(w) + wR^2 C_k)^2} \tag{15}$$

Bei den Fundamentalfrequenzen erreicht der Strom seine Maxima

$$|I(w^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \tag{16}$$

und

$$|I(w^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}(1 + \frac{C}{C_k})}} \tag{17}$$

Diese Maxima können durch

$$|I(w^+)| \approx |I(w^-)| \approx \frac{1}{2R} \tag{18}$$

genähert werden.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitende Maßnahmen

Alle Versuche werden mit dem in abgebildeten Schaltkasten durchgeführt.

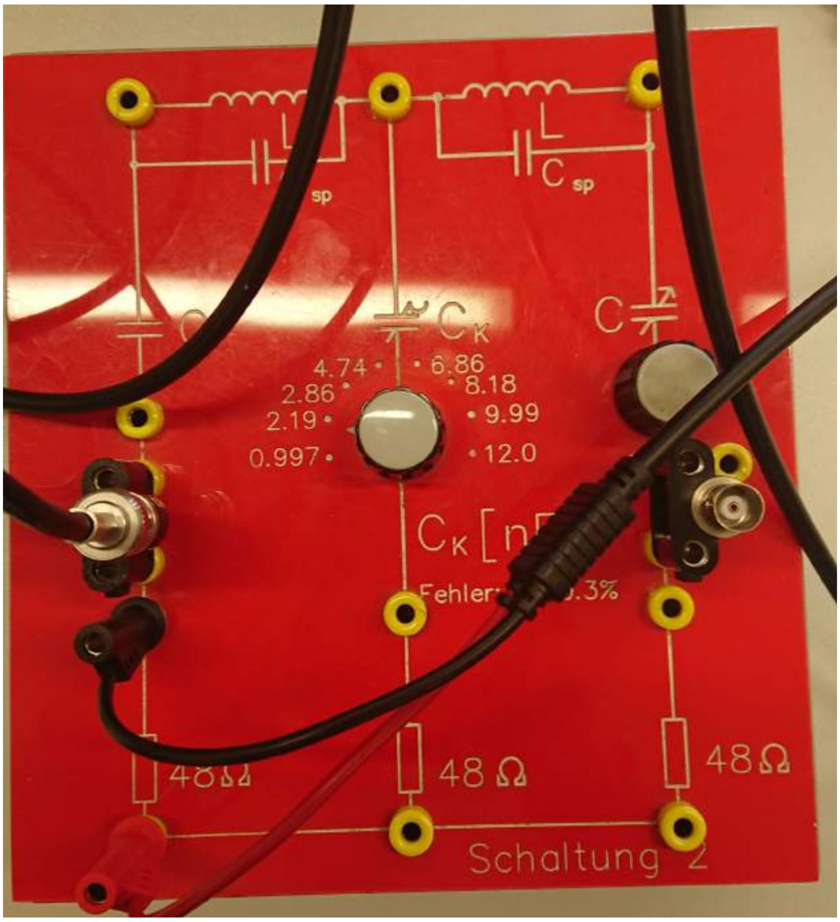


Abbildung 2: Verwendeter Schaltkasten .

Bevor der Versuch durchgeführt werden kann, müssen zunächst die Resonanzfrequenzen der Maschen, beziehungsweise der beiden Schwingkreise, herausgefunden werden. Bei der linken Maschen wird die Resonanzfrequenz mit fester Kapazität und variabler Spannungsfrequenz gemessen. Die Resonanzfrequenz der rechten Masche wird mit einer festen Spannungsfrequenz und variabler Kapazität gemessen. Die Schaltung wird gemäß Abbildung 3 aufgebaut.

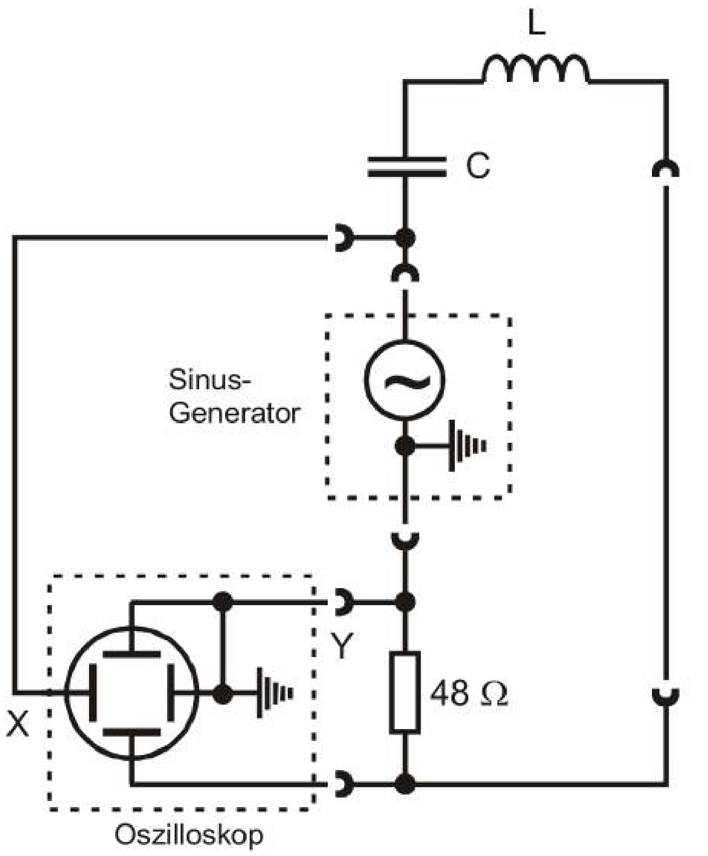
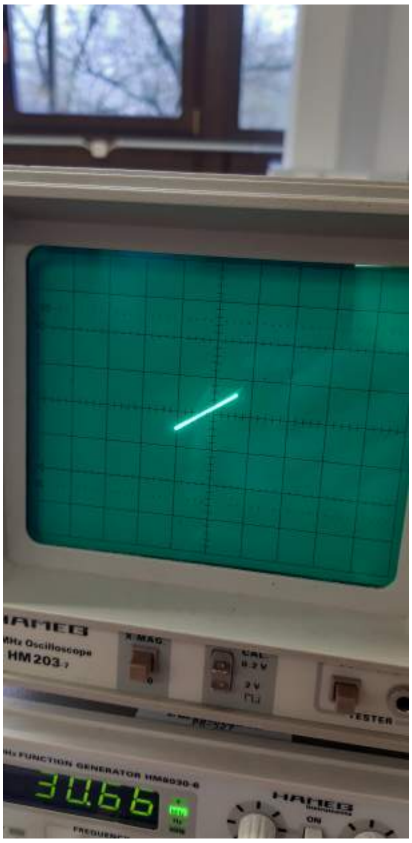


Abbildung 3: Schaltung zur Einstellung der Resonanzfrequenz [1] .

Sinus-

Mithilfe eines Generators wird eine Rechteckspannung angelegt, die für die Kreisfrequenz ω im linken Schwingkreis sorgt. Über Lissajous-Figuren, die man über den XY-Betrieb am Oszilloskop erstellt, kann die Phasenverschiebung von dem Generator und dem Schwingkreis auf null gesetzt werden. Ist die Lissajous-Figur eine Gerade, dann sind die beiden eingehenden Signale, hier der Generator und der Schwingkreis, in Phase. Ein Beispiel dafür ist die Abbildung 4.



Nein, ihr verstellt nicht die Koppelkapazität zwischen den Schwingkreisen, sondern die variable Kapazität im zweiten Schwingkreis!

Abbildung 4: Lissajous-Figur der Justierung.

Es wird die Resonanzfrequenz der linken Masche festgehalten und auch für die rechte Masche ingestellt, indem die Variable Kapazität C_{K} in dieser Masche verstellt wird. Dabei wird die verstellbare Kapazität an dem Schaltkasten so eingestellt, dass die Lissajous-Figur Phasengleichheit angibt.

3.2 Austausch der Schwingungsenergie

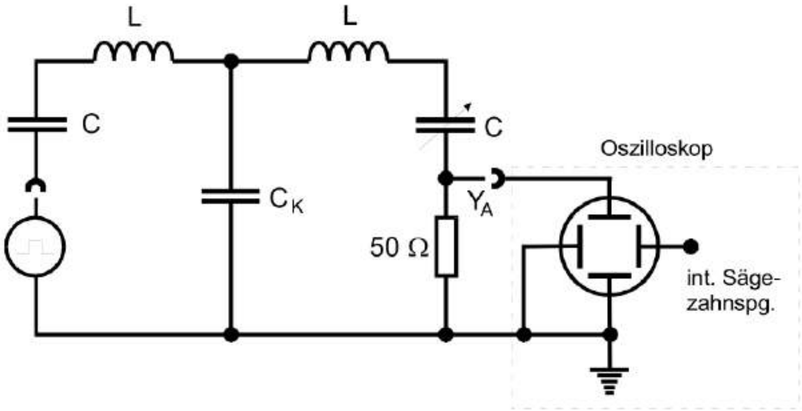


Abbildung 5: Schaltung für den Austausch der Schwingungsenergie [1]

Der Versuch wird mit einem Rechtecksignal mitt 300 bis 500Hz am Signalgenerator durchgeführt. Zunächst wird der Schaltplan gemäß Abbildung 5 aufgebaut. Nun werden in Abhängigkeit der verstellbaren Kopplungskapazität C_K die Schwingungsmaxima einer Schwebung gezählt. Es wird außerdem die Zeit einer Schwebungsperiode gemessen. Der Vorgang wird für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

3.3 Fundamentalschwingung

Das Oszilloskop wird wieder auf die XY-Funktion umgestellt, damit man mit Lissajous-Figuren die Frequenzen der Fundamentalschwingungen messen kann. Es wird ein Sinussignal mit der Resonanzfrequenz am Generator eingestellt. Im Anschluss werden die Frequenzen in Abhängigkeit der Kopplungskapazität gemessen, bei denen die Lissajous-Figuren auf eine Gerade abgebildet werden. Der Vorgang wird, analog zum Aufgabenteil zuvor, für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

3.4 Strömungsverlauf

Der Schaltplan bleibt wie bei der Messung der Fundamentalschwingungen. Am Spannungsgenerator wird mithilfe des Wobbelgenerators ein Frequenzzähler eingeschaltet. Dieser geht die Freqenzen von 20.00 kHz bis 50.00 kHz innerhalb von 0.02 Sekunden durch und bildet die Strömungsmaxima somit in Abhängigkeit der Frequenzen ab. Es werden die Position und der Wert der Strömungsmaxima aufgenommen. Die Messreihe wird wieder für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

wir können am Oszilloskop nur Spannungen anzeigen lassen

4 Auswertung

4.1 Vorbereitung

Bei der Vorbereitung wurde beim linken Schwingkreis eine Eigenfrequenz von $f_{\text{eigen}} = 30.61\text{kHz}$ bei einer Phasendifferenz von $0°$ gemessen. Der verstellbare Kondensator wird so eingestellt, dass der rechte Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz hat, wie der linke. Die Referenzwerte der Bauteile des benutzten Schaltkastens sind in Tabelle 1.

Tabelle 1: Werte des Schaltkastens.

L / mH	C / nF	C_{Spule} / nF
32.351	0.8015	0.037

Das sind die Werte für Schaltung 1, ihr habt nach Abbildung 2 mit Schaltung 2 gemessen. Hätte euch auch auffallen können, durch die große Abweichung der Resonanzfrequenz

4.2 Schwebungsfrequenz

In Tabelle 2 ist die Anzahl der Schwingungsaxima innerhalb einer Schwebungsperiode aufgelistet. Das geforderte Frequenzverhältnis ist ebenfalls in Tabelle 2 aufgelistet und durch $V_M = 1/(2A)$, wobei A die Anzahl der Schwingungen innerhalb einer Frequenz ist.

Tabelle 2: Anzahl Maxima der Schwebung.

C_{K} / nF	Schwingungsmaxima	Δt / µs	V_M
9.99	13	235	0.039
8.00	11	195	0.046
6.47	10	155	0.050
5.02	8	125	0.063
4.00	7	100	0.071
3.00	6	75	0.083
2.03	4	50	0.125

4.3 Fundamentalschwingung

Im folgenden sind die Messwerte der beiden Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit der Kopplungskapazität C_{K} des Kopplungskondensators aufgelistet. Der Strom I_2 berechnet sich über

$$I_2 = \frac{U}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_{\text{K}}^2}{LC}(1 + \frac{C}{C_{\text{K}}})}}. \tag{19}$$

Tabelle 3: Fundamentalschwingungen .

C_K / nF	f_+ /kHz	f_- /kHz	V_1 / mV	V_2 / mV	I_2 / mA
9.99	38	49	60	110	1.22
8.00	40	50	55	110	1.51
6.47	40	50	55	110	1.87
5.02	38	55	50	110	2.42
4.00	40	58	50	105	2.90
3.00	40	62	50	105	3.86
2.03	40	73	50	100	5.44
1.01	40	76	55	95	10.39

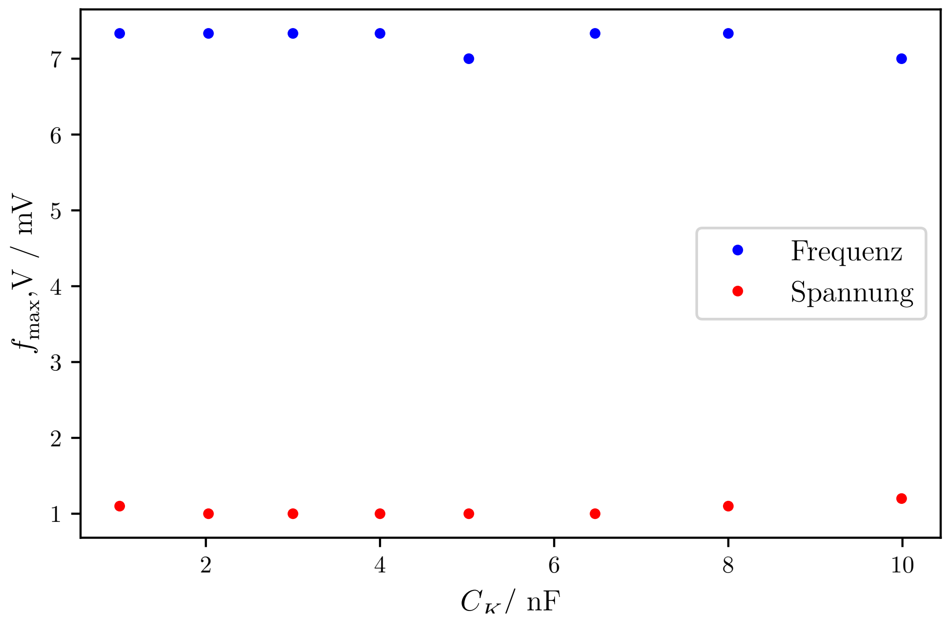


Abbildung 6: Die aufgenommenen Messwerte.

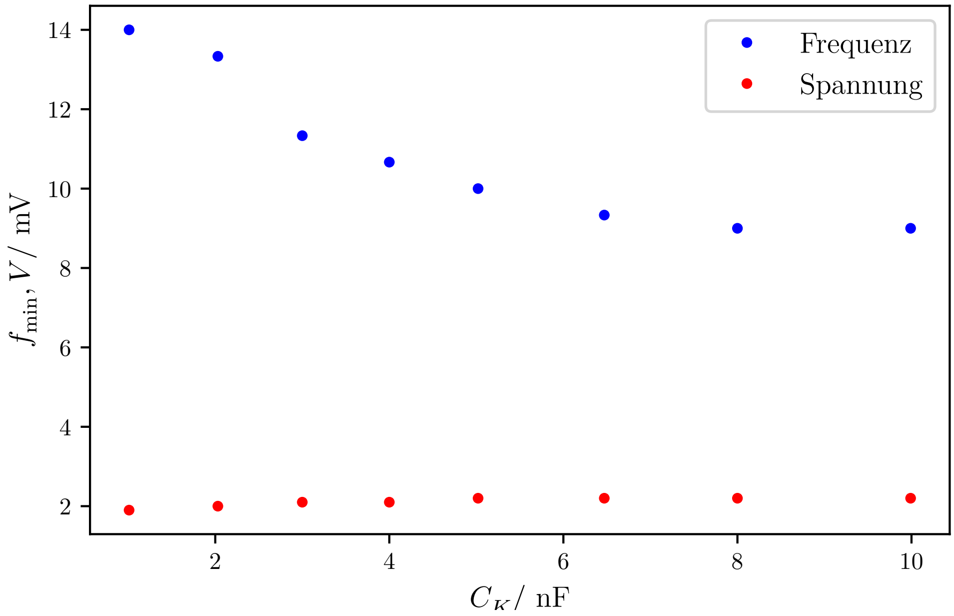


Abbildung 7: Messwerte zu c).

Der Strom I_2 wird mithilfe des Widerstandes $R = 48\,\Omega$ durch die Formel $U = RI$ berechnet.Die Frequenzen der beiden Fundamentalschwingungen berechnen sich durch folgende Relationen, wobei die geringen Kapazitäten der beiden Spulen ebenfalls berücksichtigt werden

$$f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{\text{Sp}})}} \tag{20}$$

und

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{CC_{\text{K}}}{2C + C_{\text{K}}} + C_{\text{Sp}}\right)}} \tag{21}$$

Habt ihr I_2 jetzt über (19) oder U = RI berechnet?

Tabelle 4: Die erwarteten Theoriewerte.

C_K / nF	f_+ / kHz	$f_{+,\mathrm{theo}}$ / kHz	f_- / kHz	$f_{-,\mathrm{theo}}$ / kHz	I_2 / mA	$I_{2,\mathrm{theo}}$ / mA
9.99	38	35.32	49	32.80	1.22	2.292
8.00	40	35.32	50	33.33	1.51	2.292
6.47	40	35.32	50	33.95	1.87	2.292
5.02	38	35.32	55	34.85	2.42	2.292
4.00	40	35.32	58	35.85	2.90	2.188
3.00	40	35.32	62	37.41	3.86	2.188
2.03	40	35.32	73	40.19	5.44	2.083
1.01	40	35.32	76	47.52	10.39	1.979

5 Diskussion

Abschließend muss festgestellt werden, dass sich die Messwerte teilweise deutlich von den errechneten Theoriewerten unterscheiden. Dies ist zu großen Teilen darauf zurückzuführen, dass bei dem im Versuch verwendeten Oszilloskop während des Versuches ein Wackelkontakt entdeckt wurde. Dieser äußerte sich in Form von plötzlichen Phasenverschiebungen, die ohne äußerliche Einwirkung auf eines der Eingangssignale einwirkten. Dies machte die vorhergegangene Justierung der Kapazität des zweiten Schwingkreises teilweise zunichte und wirkte sich auf alle folgenden Messungen aus.
Als Wert für die Summenfrequenz v^+ wurde der Wert

$$v^+ = 38.0\text{kHz}$$

gemessen, der errechnete Theoriewert beläuft sich auf

$$v^+ = 35.32\text{kHz}$$

Dies entspricht einer Abweichung von ungefähr 7.05%.
Für die Differenzfrequenz entspricht der beste Messwert, der bei einer Kapazität von $C_\text{K} = 12\text{nF}$ gemessen wurde

$$v^- = 49\text{kHz}$$

Der zugehörige Theoriewert ist

$$v^- = 32.80\text{kHz}$$

was einer Abweichung von etwa 49.39% entspricht.
Der Messwert mit der größten Abweichung wurde bei einer Kapazität von $C_\text{K} = 1\text{nF}$ gemessen und beträgt

$$v^- = 76\text{kHz}$$

wobei sich der Theoriewert auf

$$v^- = 47.52\text{kHz}$$

beläuft. Die Abweichung beträgt somit ungefähr 59.93%.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch Nr. 355: Gekoppelte Schwingkreise*. 2021.