

V 302

Elektrische Brückenschaltungen

Felix Symma
felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch
joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.12.2021

Abgabe: 21.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Bestanden.

A red handwritten signature, likely of the examiner, written in a stylized cursive script.

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Komplexe Widerstände	3
2.2	Brückenschaltungen	3
2.3	Wheatstone'sche Messbrücke	4
2.4	Kapazitätsmessbrücke	5
2.5	Induktivitätsmessbrücke	6
2.6	Maxwell'sche Messbrücke	7
2.7	Wien-Robinson Brückenschaltung	8
3	Durchführung	10
3.1	Wheatstone'sche Messbrücke	10
3.2	Kapazitätsmessbrücke	10
3.3	Induktivitätsmessbrücke	10
3.4	Maxwell-Brücke	10
3.5	Wien-Robinson-Brücke	11
4	Auswertung	11
4.1	Fehlerrechnung	11
4.2	Wheatstone'sche Messbrücke	11
4.3	Kapazitätsmessbrücke	12
4.4	Induktivitätsmessbrücke	12
4.5	Maxwellbrücke	13
4.6	Wien-Robinson-Brücke	14
5	Diskussion	15
6	Anhang	17
	Literatur	18

1 Ziel

Ziel des Versuches ist es Impedanzen durch verschiedene Messbrücken zu messen.

2 Theorie

2.1 Komplexe Widerstände

Neben dem ohmschen Widerstand R , gibt es auch Spannungsabfälle bei Spulen der Induktivität L und Kondensatoren der Kapazität C , sogenannte *Impedanzen*. Bei ohmschen Widerständen lässt sich der Spannungsabfall durch das *Ohm'sche Gesetz*

$$U = R \cdot I$$

quantifizieren.

Da an Induktivitäten L und Kapazitäten C jedoch eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung auftritt, werden diese Widerstände komplex dargestellt. Bei einem induktiven Widerstand wird der Wechselstrom durch eine Spule um 90° gegenüber der Wechselspannung verzögert. Man definiert unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung den induktiven Widerstand zu

$$R_L = e^{-i\pi/2} \cdot \frac{U_0}{I_0} = i \cdot \omega L.$$

Wobei i die imaginäre Einheit, ω die Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung und L der Induktivität der Spule entspricht. Bei einem kapazitiven Widerstand eilt der Strom der Spannung um 90° voraus. Woraus sich der kapazitive Widerstand durch

$$\begin{aligned} R_C &= \frac{U}{I} = e^{-i\pi/2} \frac{U_0}{I_0} \\ &= \frac{1}{i \cdot \omega C} \end{aligned}$$

beschreiben lässt. Dabei entsprechen i und ω analog zu oben der imaginären Einheit und der Kreisfrequenz der angelegten Wechselspannung und C der Kapazität des Kondensators. Somit hat die Impedanz Z der drei in reihe geschalteten Widerstände die Beziehung

$$Z = R + i \cdot \omega L + \frac{1}{i \cdot \omega C}. \quad (1)$$

2.2 Brückenschaltungen

Brückenschaltungen basieren auf den Kirchhoff'schen Gesetzen,

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0, \quad (3)$$

der Knoten- (2) und Maschenregel (3). In Brückenschaltungen werden Potentialdifferenzen zwischen zwei Punkten untersucht, die in Abhängigkeit zu ihren Widerstandsverhältnissen stehen. Aus Abbildung 1 lässt sich das Prinzip einer Brückenschaltung entnehmen.

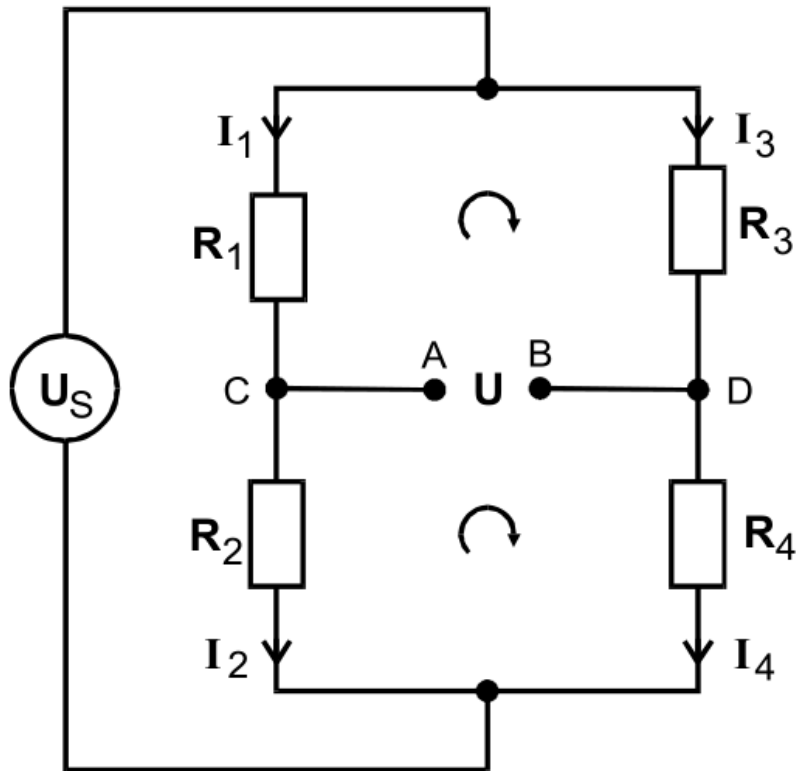


Abbildung 1: Schaltplan einer grundlegenden Brückenschaltung [1].

Werden die Kirchhoff'schen Gesetze auf die Schaltung in Abbildung 1 angewendet, so folgt ein Ausdruck für die Brückenspannung in Abhängigkeit von den Schaltungsparametern

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_s.$$

Der Ausdruck verschwindet, für den Fall einer abgeglichenen Brücke, unabhängig von der Höhe der Speisespannung, wenn der folgende Fall gegeben ist

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad (4)$$

2.3 Wheatstone'sche Messbrücke

Bei einer Wheatstone'schen Messbrücke werden ausschließlich ohmsche Widerstände verwendet, um einen unbekannten Widerstand R_x zu messen. Es wird der Widerstand

R_2 festgehalten und ein Widerstandsverhältnis zwischen R_3 und R_4 wird mithilfe eines Potentiometers eingestellt. Somit ergibt sich die Gleichung einer abgeglichenen Brücke 4 im Fall einer Wheatstone'schen Messbrücke zu

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}. \quad (5)$$

Aus Abbildung 2 ist das Schaltbild einer Wheatstone'schen Brücke abzulesen.

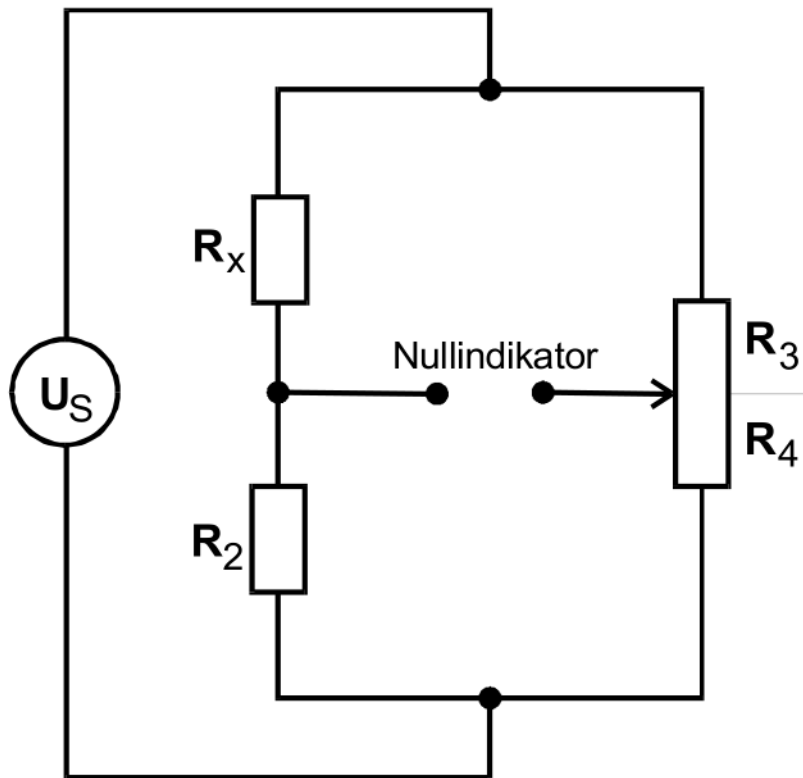


Abbildung 2: Schaltplan einer Wheatstone'schen Brücke [1].

2.4 Kapazitätsmessbrücke

Da ein realer Kondensator durch dielektrische Verluste ein Teil seiner elektrischen Energie verliert, berücksichtigt man diese Verluste dadurch, dass ein rein fiktiver Widerstand in Reihe mit dem Kondensator geschaltet wird. Somit benötigt eine zur Messung einer unbekannten Kapazität C_x einen weiteren Freiheitsgrad, um die durch R_x hervorgerufene Phasenverschiebung zu kompensieren. Aus Gleichung 4 folgt somit ein Zusammenhang für die Messung der unbekannten Größe C_x

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (6)$$

Weiterhin gilt (5) für R_x . Eine solche Schaltung, wie sie auch in Abbildung 3 abgebildet ist, wird *Kapazitätsmessbrücke* genannt.

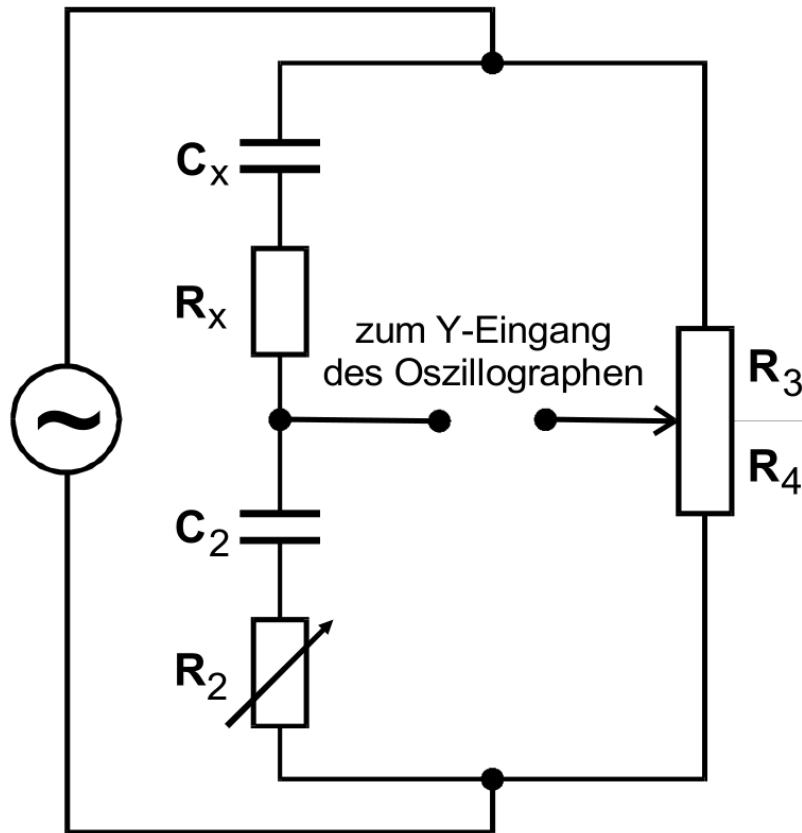


Abbildung 3: Schaltplan einer Kapazitätsmessbrücke [1].

2.5 Induktivitätsmessbrücke

Eine Induktivitätsmessbrücke verhält sich analog zu einer Kapazitätsmessbrücke und folglich ergibt sich Gleichung 4 zu

$$L_x = L_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (7)$$

Es gilt (5) auch hier für R_x . Ein Schaltbild für eine Induktivitätsmessbrücke ist Abbildung 4 zu entnehmen.

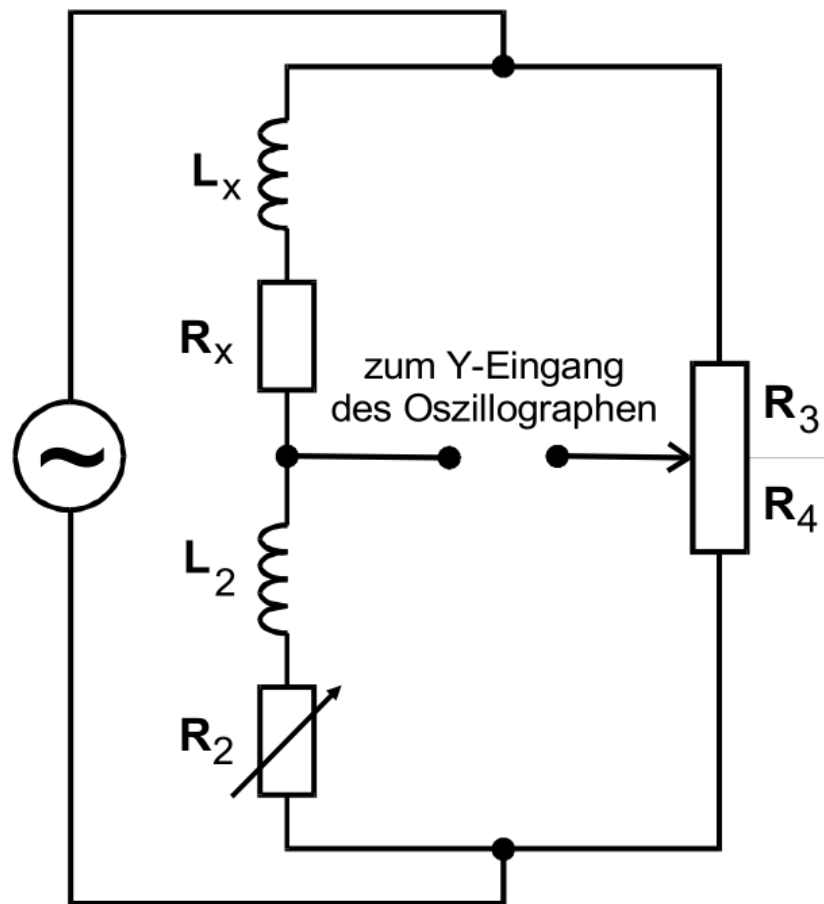


Abbildung 4: Schaltplan einer Messbrücke für verlustbehaftete Induktivitäten [1].

2.6 Maxwell'sche Messbrücke

Da der Wirkanteil im Brückenweig einer Induktivitätsmessbrücke möglichst geringe Verluste besitzen sollte, dies aber insbesondere bei niedrigen Frequenzen oft schwer zu realisieren ist, wird häufig auf eine Maxwell-Brücke ausgewichen, wie sie auch in Abbildung 5 abgebildet ist.

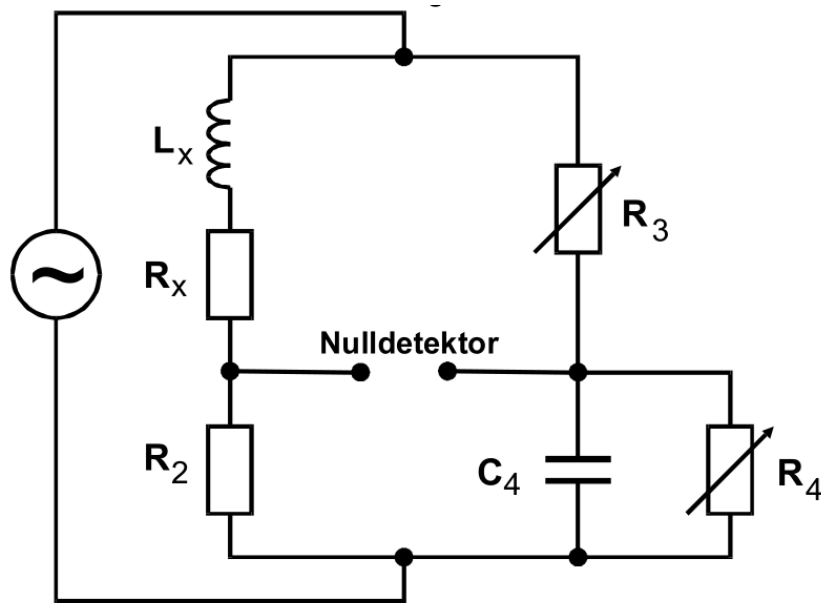


Abbildung 5: Schaltplan einer Maxwell-Brücke [1].

Da die Widerstandsoperatoren bei einer Maxwell-Brücke durch

$$Z_x = R_x + i \cdot \omega L_x$$

beschrieben werden, folgt aus Gleichung 4 eine Relation für die unbekannte Induktivität L_x zu

$$L_x = R_2 R_3 C_4. \quad (8)$$

Weiterhin gilt (5) für R_x .

2.7 Wien-Robinson Brückenschaltung

Eine Wien-Robinson-Brücke, wie sie auch Abbildung 6 zu entnehmen ist, ist eine frequenzabhängige Brückenschaltung, bei der der Abgleich nur unter einer bestimmten Frequenz möglich ist.

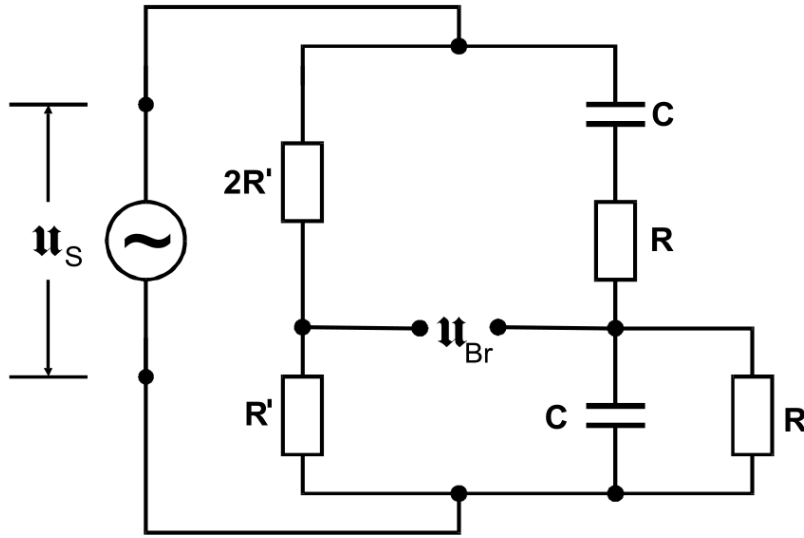


Abbildung 6: Schaltplan einer Wien-Robinson-Brücke [1].

Die Widerstandsoperatoren bei einer Wien-Robinson Brücke haben die Form

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2R', \\ Z_2 &= R', \\ Z_3 &= R + \frac{1}{i \cdot \omega C}, \\ Z_4 &= \frac{R}{1 + i \cdot \omega RC}. \end{aligned}$$

Dadurch folgt aus Gleichung 4 für eine Wien-Robinson-Brückenschaltung eine Relation für den Betrag des Verhältnisses zwischen Speise- und Brückenspannung

$$\left| \frac{U_S}{U_{Br}} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9 \left((1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9 \omega^2 R^2 C^2 \right)}. \quad (9)$$

Dabei steht ω für die Kreisfrequenz der Wechselspannung. Somit ist zu folgern, dass die Brückenspannung verschwindet, wenn

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

gilt. Wird nun das Frequenzverhältnis $\Omega = \omega/\omega_0$ eingeführt, so folgt für den Betrag

$$\left| \frac{U_S}{U_{Br}} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9 \Omega^2}. \quad (10)$$

Aus Gleichung 10 ist zu entnehmen, dass eine Wien-Robinson-Brücke die Funktion eines elektronischen Filters besitzt. So werden durch solch eine Brückenschaltung aus einem kontinuierlichen Frequenzspektrum Frequenzen der Form von ω_0 entfernt. Bei vielen Versuchen, so auch dem folgenden, wird eine Wien-Robinson Brücke genutzt, um eine *Klirrfaktor-Messung* durchzuführen. Dabei wird das Verhältnis einer Ober- zu einer Grundwelle einer Sinusschwingung ausgemessen. Der Klirrfaktor ist damit ein Indikator für die Qualität einer von einem Generator erzeugten Sinusschwingung

$$k := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1}. \quad (11)$$

Ist der Klirrfaktor (11) Null, so ist der Sinusspannungsgenerator ideal.

3 Durchführung

3.1 Wheatstone'sche Messbrücke

Der Versuch wird nach Abbildung 2 aufgebaut. Die Speisespannung wird an der Spannungsquelle eingestellt, darf aber, aufgrund technischer Begrenzung der Bauteile, 1 V nicht übersteigen. Es wird Wechselstrom mit einer Frequenz von 1 kHz verwendet. Die Brückenspannung wird mithilfe eines digitalen Oszilloskopes visualisiert. Das Widerstandsverhältnis R_3/R_4 wird durch ein Zehngang-Präzisionspotentiometer mit 1 k Ω Gesamtwiderstand so abgestimmt, dass die auf dem Oszilloskop angezeigte Spannung möglichst gering ist. Der Widerstand R_2 ist dabei fest, wird aber für eine Fehlermessung einmal variiert werden, sobald der unbekannte Widerstand R_x einmal gemessen wurde. Hochfrequente Störspannungen werden durch einen Tiefpass, der in die Schaltung mit eingebaut wird, weitgehend unterdrückt.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Der Versuch wird nach Abbildung 3 aufgebaut. Es werden nun zwei Potentiometer alternierend variiert, sodass Phase und Spannung auf dem Oszilloskop verschwinden.

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Der Versuch wird nach Abbildung 4 aufgebaut und die Messungen analog zur Messung der Kapazitätsmessbrücke durchgeführt.

3.4 Maxwell-Brücke

Der Versuch wird nach Abbildung 5 aufgebaut und die Spule mit derselben, unbekannten Induktivität, wie in Unterabschnitt 3.3, ein zweites Mal vermessen.

3.5 Wien-Robinson-Brücke

Der Versuch wird nach Abbildung 6 aufgebaut. Im Bereich von 20 bis 30 000 Hz wird zunächst ein grobes Abbild der Brückenspannung abgemessen, bis dann auf den Tiefpunkt in der Messung besondere Rücksicht genommen wird. Um den Tiefpunkt werden weitere, genauere Messung vorgenommen. Die Speisespannung U_S wird nach derselben Vorgehensweise untersucht.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Durch die angegebenen relativen Fehler der Bauteile ist die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung für Größen der Form

$$z = x \cdot y$$

zu

$$\Delta z = \bar{z} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

zu bestimmen, wobei \bar{z} der Mittelwert und Δx und Δy die relativen Fehler sind.

4.2 Wheatstone'sche Messbrücke

In Tabelle 1 sind die Messwerte für die Wheatstone'sche Messbrücke aufgeführt.

Tabelle 1: Messwerte zur Wheatstone Messbrücke.

R_x	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert 10	500	327	673
Wert 10	1000	196	804
Wert 13	500	393,5	606,5
Wert 13	1000	245,5	754,5

Die baubedingten relativen Fehler der Widerstände lauten für R_2 0,2% und für das Verhältnis $\frac{R_3}{R_4}$ 0,5%. Mit den Werten aus Tabelle 1 und Formel Gleichung 5 lassen sich nun die Widerstände R_x mit Wert 10 und Wert 13 bestimmen.

$$R_{10} = 243,36 \pm 0,5940\Omega,$$

$$R_{13} = 324,89 \pm 0,6930\Omega.$$

Die relativen Fehler betragen somit

$$\Delta R_{10} = 1,31\Omega,$$

$$\Delta R_{13} = 1,75\Omega.$$

4.3 Kapazitätsmessbrücke

Aus Tabelle 2 sind die Messwerte zur Kapazitätsmessbrücke zu entnehmen.

Tabelle 2: Messwerte zur Kapazitätsmessbrücke.

R_x	C_x	R_2 / Ω	C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert 9	Wert 9	99	994	995	5
Wert 9	Wert 9	99	399	785	215

Der relative Fehler von R_2 ist hier als 3% und der von C_2 als 0,2% anzunehmen. Mit Hilfe von Gleichung 6 und Gleichung 5 und den Werten aus Tabelle 2 lassen sich nun R_x und C_x bestimmen zu

$$R_x = 361,47\Omega,$$

$$C_x = 109,28\text{nF}$$

mit relativen Fehlern

$$\Delta R_x = 10,87\Omega,$$

$$\Delta C_x = 3,29\text{nF}.$$

Für die Berechnung von R_x und C_x wurden hierbei nur die Werte von $C_2 = 399$ verwendet, da bei $C_2 = 994$ mit den verfügbaren Widerständen kein Brückenspannungsminimum gefunden werden konnte, sondern die Spannung mit steigendem Verhältnis $\frac{U_3}{U_4}$ immer kleiner wurde.

Hier meint ihr sicher
R_3/R_4

4.4 Induktivitätsmessbrücke

In Tabelle 3 sind die Messwerte zur Induktivitätsmessbrücke aufgetragen.

Tabelle 3: Gemessene Messwerte zur Induktivitätsmessbrücke.

R_x	L_x	R_2 / Ω	L_2 / mH	R_3 / Ω	R_4 / Ω
Wert 18	Wert 18	474	20,1	480	520
Wert 18	Wert 18	475	14,6	500	500

Die relativen Fehler für das Potentiometer und für R_2 sind identisch wie vorher, der für L_2 ist gegeben als 0,2%. Mit den Formeln Gleichung 5 und Gleichung 7 und den Messwerten aus Tabelle 3 werden nun R_x und L_x bestimmt.

$$R_x = 456,27 \pm 26,49\Omega,$$

$$L_x = 18,19 \pm 5,08\text{mH}.$$

Diese Größen besitzen die relativen Fehler

$$\Delta R_x = 0,045\Omega,$$

$$\Delta L_x = 0,0018\text{nF}.$$

Die Induktivität hat die Einheit Henry

4.5 Maxwellbrücke

Aus Tabelle 4 sind die Messwerte zur Maxwellbrücke zu entnehmen.

Tabelle 4: Gemessene Messwerte zur Maxwellbrücke.

R_x	L_x	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_4 / nF
Wert 18	Wert 18	1000	91	240	750
Wert 18	Wert 18	500	101	113	750

Die relativen Fehler für R_3 und R_4 sind angegeben als 3%, die für R_2 und C_2 als 0,2%. Mit Hilfe von Formel Gleichung 5 und Gleichung 8 und den Werten aus Tabelle 4 können R_x und L_x zu

$$R_x = 413,04\Omega,$$

$$L_x = 52.687,5\text{nF}.$$

mit relativen Fehlern

$$\Delta R_x = 12,42\Omega,$$

$$\Delta L_x = 1584,13\text{nF}.$$

bestimmt werden.

4.6 Wien-Robinson-Brücke

Zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung wird der Quotient der effektive Brückenspannung U_{Br} und der Speisespannung U_{S} gegen $\frac{f}{f_0}$ aufgetragen (Abbildung 7). Zusätzlich wird eine Theoriekurve eingefügt, die sich aus Formel (9) ergibt.

In Tabelle 5 sind die Messwerte zur Wien-Robinson-Brücke aufgetragen. Die Bauteile der Schaltung haben die Werte

$$\begin{aligned} C &= 660 \text{ nF}, \\ R &= 1000 \, \Omega, \\ R' &= 332 \, \Omega, \\ U_{\text{S}} &= 1 \text{ V}. \end{aligned}$$

Tabelle 5: Messwerte der Brückenspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Frequenz / Hz	$U_{\text{Br}} / \text{mV}$
20	300
40	280
80	210
160	75
180	50
200	34
220	16
230	7
235	5
240	0
245	5
250	7
260	15
280	30
300	45
320	60
340	65
640	175
1280	250
2560	250
5120	250
10240	250
20480	200
30000	140

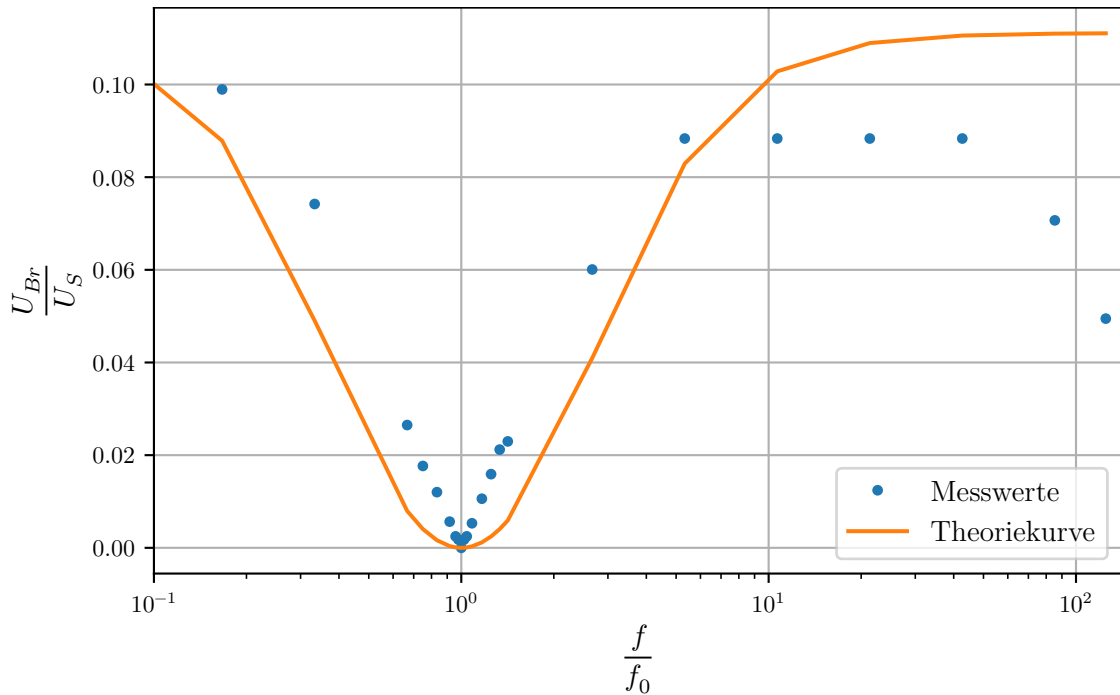


Abbildung 7: Messdaten und Theoriekurve zur Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung.

Zur Bestimmung des Klirrfaktors, mithilfe von (11), werden nun U_2 und U_1 benötigt. Da U_1 als U_S bei f_0 gegeben ist, muss lediglich U_2 durch

$$\begin{aligned}
 U_2 &= 0,32\text{V} \sqrt{\frac{(2^2 - 1)^2}{9((1 - 2^2)^2 + 9 \cdot 2^2)}} \\
 &= 2,1466 \text{ V}
 \end{aligned}$$

berechnet werden. Der Klirrfaktor ergibt sich somit nach (11) zu

$$k = \frac{U_2}{U_1} = 2,1466.$$

5 Diskussion

Es fällt allgemein auf, dass die Fehler der Messwerte und die baubedingten Fehler oft stark auseinander liegen.

Die Messwerte der Wheatstone'schen Messbrücke waren dabei die besten. Die Messwerte weichen um lediglich 0,3% ab.

Bei der Kapazitätsmessbrücke hingegen konnte nur ein realistischer Messwert aufgenommen werden. Dies lag daran, dass die Brückenspannung für kein Verhältnis $\frac{U_3}{U_4}$ ein Minimum hatte, sondern diese immer tiefer wurde, je größer $\frac{U_3}{U_4}$ wurde.

Bei der Induktivitätsmessbrücke weichen die Werte für den Widerstand um 7% und die für die Induktivität um 49% ab.

Auch bei der Maxwellbrücke weichen die Werte um ähnliche Anteile ab. Der Widerstand um 15% und die Induktivität um 43%

Auch der Klirrfaktor erscheint mit $k = 2,1466$ äußerst hoch. Ein Grund für die hohe Abweichung könnte der Sinusgenerator sein, der eine unsaubere Sinusschwingung erzeugt.

6 Anhang

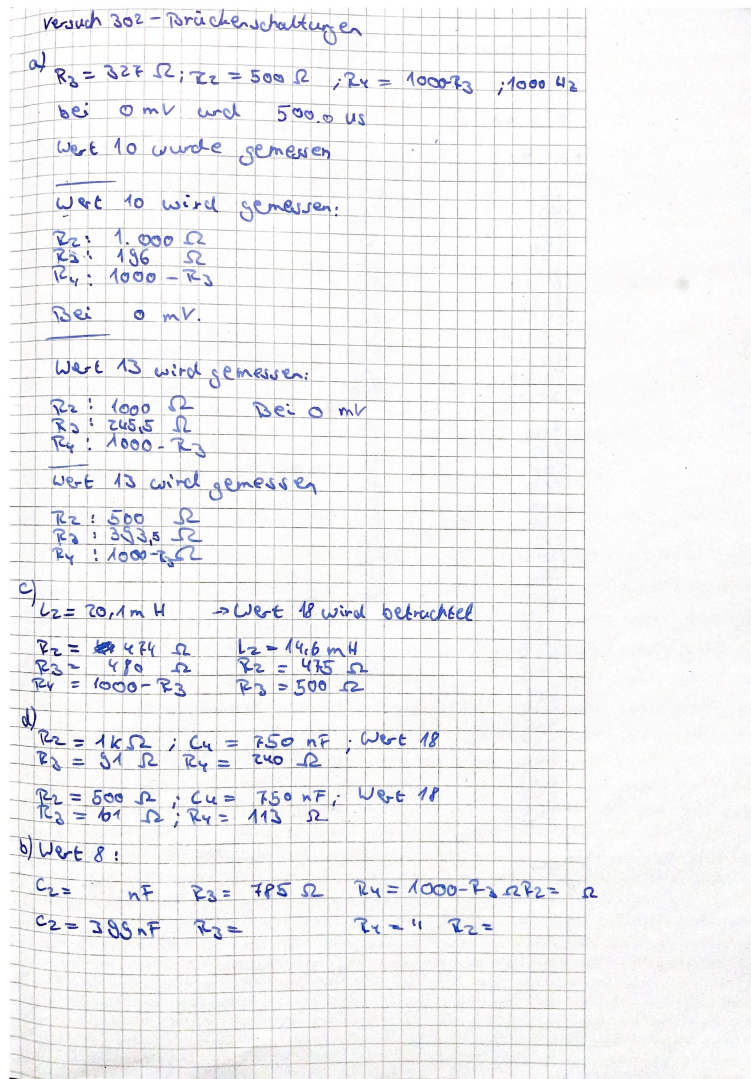


Abbildung 8: Originale Messdaten.

e)

$C = 660 \text{ nF}$ $R = 1000 \Omega$

$U_0 = 1 \text{ V}$

$R' = 232 \Omega$

$f \text{ in Hz}$	$U \text{ in mV}$	Speisegramm $U \text{ in mV}$
20	300	1680
40	280	1650
80	270	
100	75	
320	60	
640	175	
1280	250	
2560	250	
5120	250	
10240	250	1700
20480	200	1550
30.000	140	1100
160	75	
180	50	
200	24	220 7
220	16	
240	0	250 7
260	15	
280	30	
300	45	
320	60	
340	65	
235	5	
236	4	
237	4	
238		
239		
240		
241		
242		
243		
244		
245	8	

nicht erkennbar, da eine einhüllende Schwingung vorlag

K. Popp

Abbildung 9: Originale Messdaten.

Literatur

- [1] Versuch 302 - Elektrische Brückenschaltung. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.