

V 355

## **gekoppelte Schwingkreise**

Felix Symma

felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch

joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 23.11.2021

Abgabe: 30.11.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Schwingungsgleichungen für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise . . . . .	3
2.2	Berechnung des Stromes in Abhängigkeit der Frequenz . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1	vorbereitende Maßnahmen . . . . .	6
3.2	Austausch der Schwingungsenergie . . . . .	6
3.3	Fundamentalschwingung . . . . .	6
3.4	Strömungsverlauf . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Vorbereitung . . . . .	7
4.2	Fundamentalschwingung . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Einleitung

Ziel des Versuches ist es gekoppelte Schwingkreise zu untersuchen. Obwohl im folgenden ein elektromagnetischer Schwingkreis betrachtet wird, lassen sich die Erkenntnisse leicht auf ein mechanisches Analogon übertragen (zum Beispiel ein gekoppeltes Schwingungssystem, bestehend aus 2 Fadenpendeln, die über eine elastische Feder miteinander verbunden sind [1]). Der Grund, dass am elektrischen Schwingkreis Untersuchungen vorgenommen werden, ist dass die Amplitude und die Frequenz einfacher und genauer bestimmt werden können. Bei der Beobachtung des Schwingkreises wird auf die Energieverteilung der Systeme und auf den Einfluss eines äußeren Erregers auf das schwingende System geachtet.

Die Erkenntnisse werden anschließend ausgewertet und mit der Theorie abgeglichen.

## 2 Theorie

### 2.1 Schwingungsgleichungen für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Es werden im Folgenden zwei baugleiche elektrische Schwingkreise, mit jeweils den gleichen Induktivitäten  $L$  und Kapazitäten  $C$  betrachtet. Die Schwingkreise werden mit einem Kondensator mit variabler Kapazität  $C_k$  gekoppelt. (siehe Abbildung 1)

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotenregel lässt sich für den Verzweigungspunkt A die Beziehung

$$I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

aufstellen.

Die Kirchhoffsche Maschenregel liefert zusätzlich jeweils für die beiden Leiterkreise 1 und 2 die Beziehung

$$U_C + U_L + U_k = 0 \quad (2)$$

Außerdem gilt

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (3)$$

und

$$U_L = L \dot{I} \quad (4)$$

Setzt man diese Beziehung in (1) ein erhält man

$$\frac{1}{C} \int I_1 dt + L \dot{I}_1 + \frac{1}{C_k} \int I_1 - I_2 dt = 0 \quad (5)$$

und

$$\frac{1}{C} \int I_2 dt + L \dot{I}_2 - \frac{1}{C_k} \int I_1 - I_2 dt = 0 \quad (6)$$

Wenn man diese Gleichungen nun ein mal nach der Zeit differenziert und anschließend addiert(3) und subtrahiert(4) erhält man

$$L \frac{d^2}{dt^2} (I_1 + I_2) + \frac{1}{C} (I_1 + I_2) = 0 \quad (7)$$

und

$$L \frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8)$$

Damit hat man zwei unabhängig voneinander lösbare Differentialgleichungen, die als neue Variablen die Summe und Differenz der Ströme  $I_1$  und  $I_2$  haben.

Aus den Lösungen der Differentialgleichungen (3) und (4) ergeben sich die Frequenzen

$$v^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (9)$$

und

$$v^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k}\right)^{-1}}} \quad (10)$$

Betrachtet man nun zwei Spezialfälle des Systems der gekoppelten Oszillatoren, so werden die Bedeutungen der Schwingungen (5) und (6) deutlich.

Nimmt man an, dass die Oszillation in beiden Schwingkreisen mit gleicher Amplitude und in Phase beginnt, also  $I_1 = I_2$  gilt, dann wird die Differenzschwingung  $v^-$  (6) Null und beide Oszillatoren schwingen gleichphasig mit der Frequenz  $v^+$  (5), die der des Einzeloszillators entspricht. Da sich die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  konsequent aufheben, liegt hierbei zu keinem Zeitpunkt Spannung am Kondensator  $C_k$  an.

Im zweiten Spezialfall wird angenommen, dass die Oszillatoren wieder mit gleicher Amplitude, jedoch entgegengesetzter Phase ( $I_1 = -I_2$ ) beginnen zu schwingen. In diesem Fall wird die Summenschwingung  $v^+$  (5) Null und die beiden Oszillatoren schwingen gegenphasig mit der höheren Frequenz  $v^-$ .

Diese beiden Spezialfälle und die zugehörigen Frequenzen bezeichnet man als Fundamentalschwingungen.

Regt man das System der gekoppelten Oszillatoren so an, dass nur ein Oszillator zu Beginn eine von Null verschiedene Amplitude besitzt, so ergeben sich vollkommen andere Ergebnisse.

Addiert man die Lösungen der Differentialgleichungen (3) und (4) zusammen und betrachtet sie unter den genannten Anfangsbedingungen  $I_1 = 0$  und  $I_2 \neq 0$  so erhält man

$$I_1(t) = \frac{1}{2}I_{1_0}(\cos v^+t + \cos v^-t) \quad (11)$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}I_{1_0}(\cos v^+t - \cos v^-t) \quad (12)$$

Mit Hilfe von Additionstheoremen kann man (7) und (8) umschreiben zu

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos \frac{1}{2}(v^+ + v^-)t \cos \frac{1}{2}(v^+ - v^-)t \quad (13)$$

und

$$I_2(t) = I_{1_0} \cos \frac{1}{2}(v^+ + v^-)t \sin \frac{1}{2}(v^+ - v^-)t \quad (14)$$

An (9) und (10) kann man ablesen, dass das System nun mit einer Frequenz von  $\frac{1}{2}(v^+ + v^-)$  oszilliert. Für diese Art von Oszillationen, die man Schwebungen nennt, nimmt man an, dass sich die Frequenzen  $v^+$  und  $v^-$  nur gering voneinander unterscheiden. Demnach sind die Frequenz  $\frac{1}{2}(v^+ + v^-)$  und die Frequenz des Einzeloszillators  $v^+$  ungefähr gleich.

Ebenso kann man an (9) und (10) ablesen, dass die Amplitude mit der Frequenz  $v^- - v^+$  zwischen Null und  $I_{1_0}$  oszilliert. Diese Frequenz nennt man Schwebungsfrequenz.

## 2.2 Berechnung des Stromes in Abhängigkeit der Frequenz

Regt man den in Abbildung 2 dargestellten Schwingkreis durch eine Sinusspannung zu einer erzwungenen Schwingung an, siehe Abbildung 4 so erhält man mit der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$U = I_1(z_C + z_L + z_{C_K} + z_R) - z_{C_K}I_2 \quad (15)$$

und

$$0 = I_2(z_C + z_L + z_{C_K} + z_R) - z_{C_K}I_1 \quad (16)$$

mit  $z_C = -j\frac{1}{\omega C}$ ,  $z_L = j\omega L$ ,  $z_{C_K} = -j\frac{1}{\omega C_K}$  und  $z_R = R$

Für  $I_2$  folgt nach Elimination von  $I_1$

$$I_2 = U \frac{-j\frac{1}{\omega C_K}}{(j\omega L - j(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_K}) + R)^2 + \frac{1}{\omega^2 C_K^2}} \quad (17)$$

$$\Rightarrow I_2 = U \frac{-2\omega C_K R Z(\omega) + j(-\frac{1}{\omega C_K} + \omega C_K Z^2(\omega) - \omega R^2 C_K)}{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z^2(\omega) + (\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z^2(\omega) + \omega R^2 C_K)^2} \quad (18)$$

mit

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega}(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K}) \quad (19)$$

Für den Betrag ergibt sich dann

$$|I_2| = |U| \frac{1}{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z^2(\omega) + (\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z^2(\omega) + \omega R^2 C_K)^2} \quad (20)$$

Bei den Fundamentalfrequenzen erreicht der Strom seine Maxima

$$|I(\omega^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (21)$$

und

$$|I(\omega^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}(1 + \frac{C}{C_K})}} \quad (22)$$

Diese Maxima können durch

$$|I(w^+)| \approx |I(w^-)| \approx \frac{1}{2R} \quad (23)$$

### 3 Durchführung

#### 3.1 vorbereitende Maßnahmen

Bevor der Versuch durchgeführt werden kann, müssen zunächst die Resonanzfrequenzen der Maschen, beziehungsweise der beiden Schwingkreise, herausgefunden werden. Bei der linken Maschen wird die Resonanzfrequenz mit fester Kapazität und variabler Spannungsfrequenz gemessen. Die Resonanzfrequenz der rechten Masche wird mit einer festen Spannungsfrequenz und variabler Kapazität gemessen. Die Schaltung wird gemäß Abbildung 6 aufgebaut.

Mithilfe eines Generators wird eine Rechteckspannung angelegt, die für die Kreisfrequenz  $\omega$  im linken Schwingkreis sorgt. Indem Lissajous-Figuren erzeugt, die man über den XY-Betrieb am Oszilloskop erstellt, kann die Phasenverschiebung von dem Generator und dem Schwingkreis auf null gesetzt werden. Ist die Lissajous-Figur eine Gerade, dann sind die beiden eingehenden Signale, hier der Generator und der Schwingkreis, in Phase. Ein Beispiel dafür ist die Abbildung 3.

Es wird die Resonanzfrequenz der linken Masche festgehalten und die Resonanzfrequenz der rechten Masche ausgemessen. Dabei wird die verstellbare Kapazität an dem Schaltkasten so eingestellt, dass die Lissajous-Figur Phasengleichheit angibt.

#### 3.2 Austausch der Schwingungsenergie

Zunächst wird der Schaltplan gemäß Abbildung 7 aufgebaut. Nun werde in Abhängigkeit der verstellbaren Kapazität auf dem Schaltkasten die Kopplungskapazität  $C_K$  die Schwingungsmaxima einer Schwebung gezählt. Es wird außerdem die Zeit einer Schwebungsperiode gemessen. Der Vorgang wird für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

#### 3.3 Fundamentalschwingung

Das Oszilloskop wird wieder auf die XY-Funktion umgestellt, damit man mit Lissajous-Figuren die Frequenzen der Fundamentalschwingungen messen kann. Es wird eine Sinusfrequenz am Generator eingestellt. Im Anschluss werden die Frequenzen in Abhängigkeit der Kopplungskapazität gemessen, bei denen die Lissajous-Figuren auf eine gerade abgebildet werden. Der Vorgang wird, analog zum Aufgabenteil zuvor, für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

#### 3.4 Strömungsverlauf

Der Schaltplan bleibt, wie bei der Messung der Fundamentalschwingungen. Am Stromgenerator wird mithilfe des Wobbelgenerators ein Frequenzzähler eingeschaltet. Dieser

geht die Frequenzen von 20.00 kHz bis 50.00 kHz innerhalb von 0.02 Sekunden durch und bildet die Strömungsmaxima somit in Abhängigkeit der Frequenzen ab. Es werden die Position und der Wert der Strömungsmaxima aufgenommen. Die Messreihe wird wieder für alle möglichen Kopplungskapazitäten auf dem Schaltkasten wiederholt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Vorbereitung

Bei der Vorbereitung wurde beim linken Schwingkreis eine Eigenfrequenz von  $f_{\text{eigen}} = 30.61\text{kHz}$  bei einer Phasendifferenz von  $0^\circ$  gemessen. Der verstellbare Kondensator wird so eingestellt, dass der rechte Schwingkreis die gleiche Eigenfrequenz hat, wie der linke. Die Referenzwerte der Bauteile des benutzten Schltkastens sind in Tabelle 1 und Tabelle 2. Die Anzahl der Maxima, beziehungsweise Minima, sind in Tabelle 3 aufgeführt. Außerdem ist die Dauer einer Schwebung aufgetragen.

**Tabelle 1:** Werte des linken Schaltkreises.

$L / \text{mH}$	$C / \text{nF}$	$C_{\text{Spule}} / \text{nF}$
32.351	0.8015	0.037

**Tabelle 2:** Werte des rechten Schaltkreises.

$L / \text{mH}$	$C / \text{nF}$	$C_{\text{Spule}} / \text{nF}$
23.954	0.7932	0.028

**Tabelle 3:** Anzahl Maxima der Schwebung.

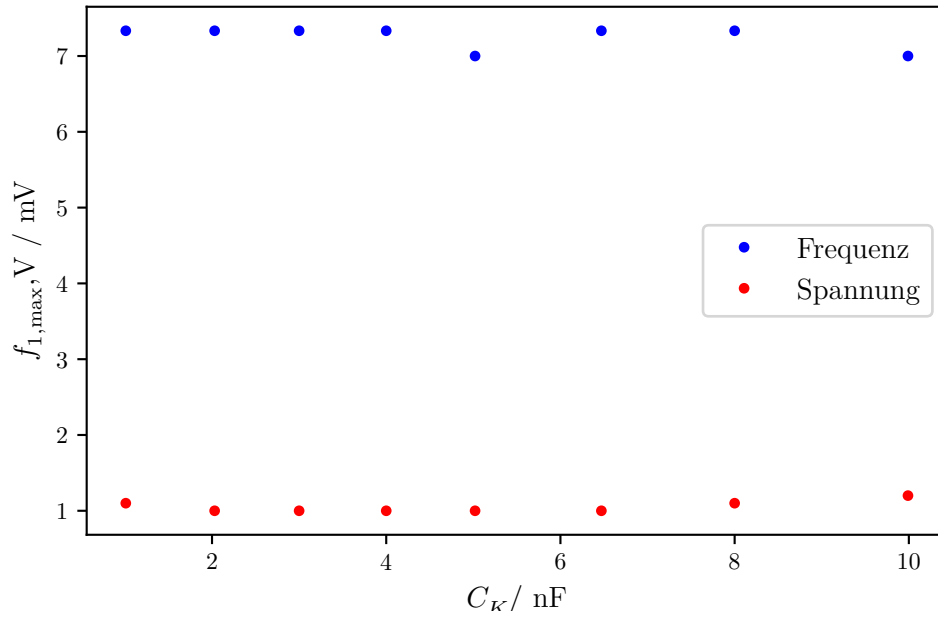
$C_K / \text{nF}$	Schwingungsmaxima	$\Delta t / \mu\text{s}$
9.99	13	235
8.00	11	195
6.47	10	155
5.02	8	125
4.00	7	100
3.00	6	75
2.03	4	50

### 4.2 Fundamentalschwingung

Im folgenden werden die beiden Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit der Kopplungskapazität  $C_K$  des Kopplungskondensators bestimmt.

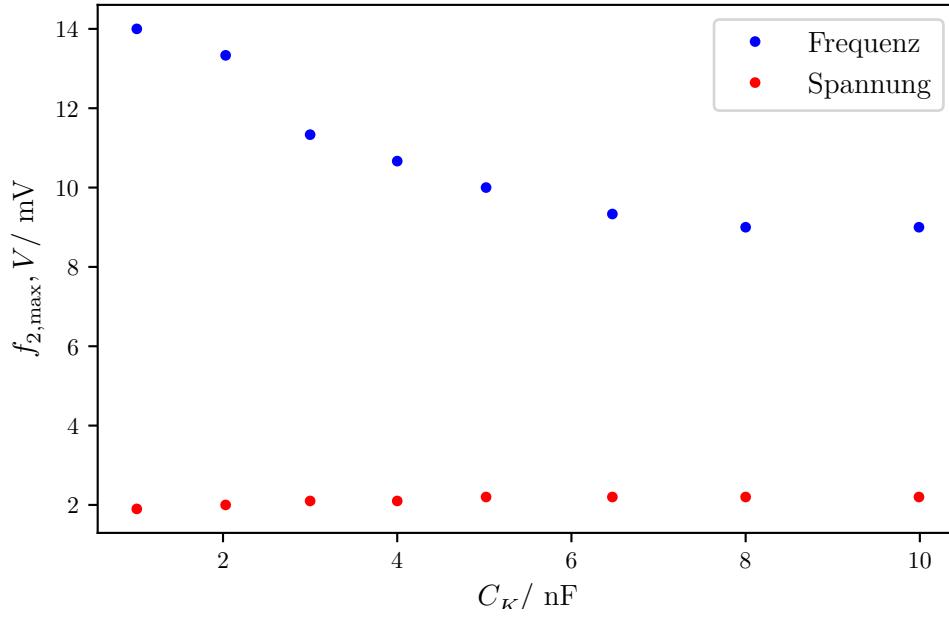
**Tabelle 4:** Fundamentalschwingungen

$f_+ / \text{kHz}$	$f_- / \text{kHz}$	$V_1 / \text{mV}$	$V_2 / \text{mV}$	$C_K / \text{nF}$	$I_2 / \text{mA}$
38	49	60	110	9.99	1.22
40	50	55	110	8.00	1.51
40	50	55	110	6.47	1.87
38	55	50	110	5.02	2.42
40	58	50	105	4.00	2.90
40	62	50	105	3.00	3.86
40	73	50	100	2.03	5.44
40	76	55	95	1.01	10.39



**Abbildung 1:** Die aufgenommenen Messwerte





**Abbildung 2:** Die aufgenommenen Messwerte

Der Strom  $I_2$  wird mithilfe des Widerstandes  $R = 48\Omega$  berechnet. Die Frequenz der ersten Fundamentalschwingung berechnet sich durch  $f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  und die der zweiten Fundamentalschwingung durch  $f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{CC_K}{2C+C_K}}}$ .

Es werden die geringen Kapazitäten der beiden Spulen ebenfalls berücksichtigt, wodurch sich die Frequenzen ergeben zu  $f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_{\text{Sp}})}}$  und  $f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{CC_K}{2C+C_K}+C_{\text{Sp}}\right)}}$ .

Der theoretisch zu erwartende Wert für den Strom  $I_2$  berechnet sich durch EINE FORMEL.

**Tabelle 5:** Die erwarteten Theoriewerte.

$f_+ / \text{kHz}$	$f_{+, \text{theo}} / \text{kHz}$	$f_- / \text{kHz}$	$f_{-, \text{theo}} / \text{kHz}$	$C_K / \text{nF}$	$I_2 / \text{mA}$	$I_{2, \text{theo}} / \text{mA}$
33.1	30.5	81.3	47.6	1.0	38.125	38.124
33.1	30.5	61.1	39.5	2.2	40.833	40.830
33.1	30.5	57.1	38.0	2.7	39.229	39.225
33.1	30.5	48.7	35.1	4.7	42.708	42.696
33.1	30.5	44.7	33.7	6.8	45.000	44.974
33.1	30.5	42.8	33.2	8.2	38.125	38.093
33.1	30.5	41.4	32.8	10.0	42.291	42.241
33.1	30.5	40.2	32.4	12.0	41.666	41.595

## 5 Diskussion

## 6 Anhang

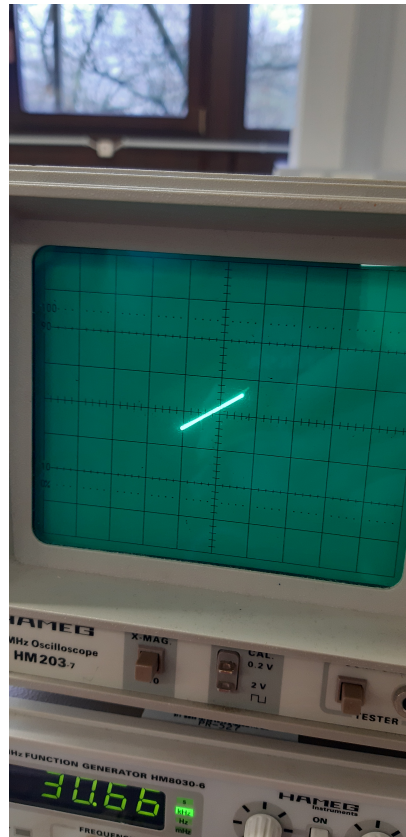


Abbildung 3: Lissajous-Figur der Justierung.

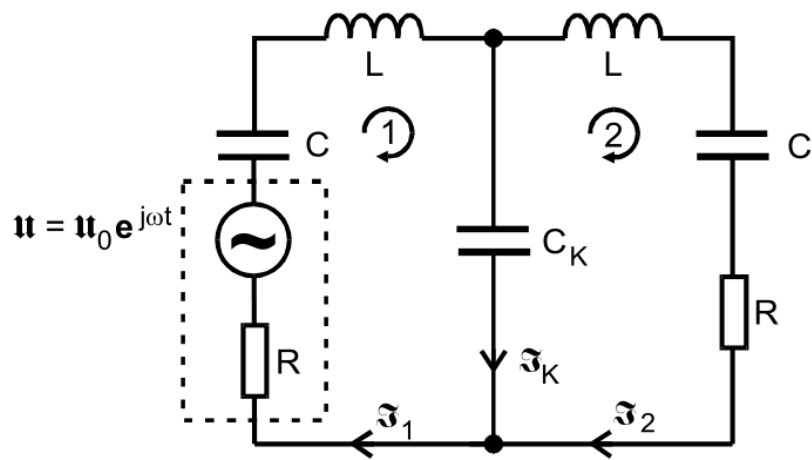


Abbildung 4: gekoppelte Schwingkreise [1]

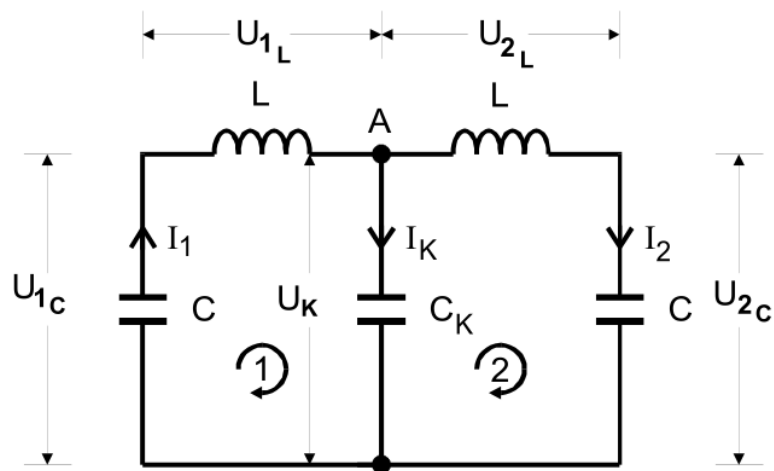


Abbildung 5: Schaltung zweier gekoppelter Schwingkreise [1]

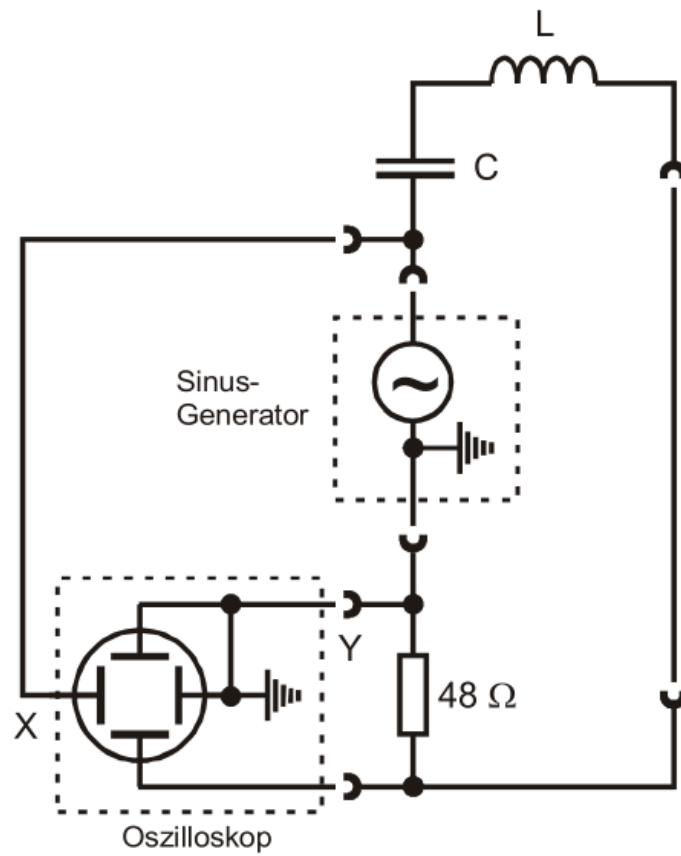


Abbildung 6: Schaltung zur Einstellung der Resonanzfrequenz [1]

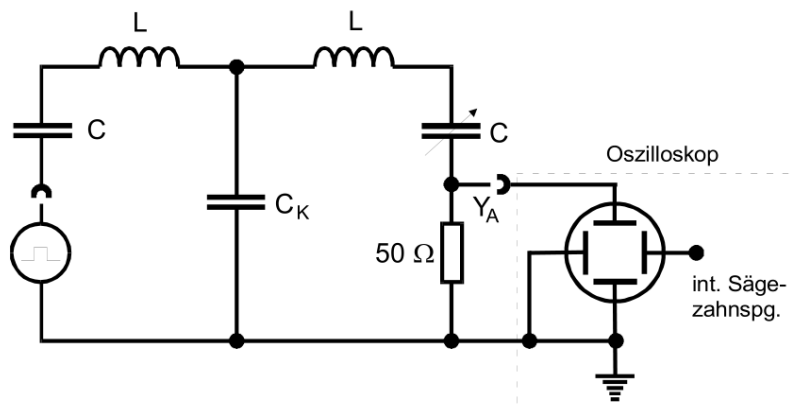


Abbildung 7: Schaltung für den Austausch der Schwingungsenergie [1]

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr. 355: Gekoppelte Schwingkreise*. 2021.