V 101

Das Trägheitsmoment

Felix Symma
felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch
joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021

Abgabe: 07.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ein Trägheitsmoment ist immer bezüglich einer Achse definiert, um die sich das zu beobachtende Objekt dreht. Dreht sich ein ausgedehnter Körper um eine feste Achse, so dreht sich jedes einzelne Massenelement m_i des Körpers und es folgt das Gesamtträgheitsmoment des Körpers zu

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i. \tag{1}$$

Dabei ist r_i der Abstand des i-ten Massenelements m_i senkrecht zur Drehachse.

Für unendlich viele infinitesimal kleine Massenelemente geht die Gleichung Gleichung 1 in die folgende Relation über.

$$I = \int r_\perp^2 \, dm \tag{2}$$

Für die Beschreibung komplexerer Körper, wird der beschriebene Körper in einzelne Teilkörper aufgeteilt. Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich dann als die Summe der Trägheitsmomente der Teilkörper. Dabei ist darauf zu achten, dass alle aufsummierten Körper sich auf die gleiche Achse beziehen. Ist die Drehachse nicht gleich der Schwerpunktsache des Körpers, so liefert der *Steiner'sche Satz* einen Weg zur Berechnung des Trägheitsmomentes I, sofern die beiden Achsen parallel zueinander sind.

$$I = I_\mathrm{S} + ma^2 \tag{3}$$

Dabei ist I_S das Trägheitsmoment des Körpers bei Drehung um die Schwerpunktsache, m die Masse des Körpers und a der Abstand der Schwerpunktsache zur Drehachse.

Wirkt auf einen Körper im Abstand $\vec{r}$ eine Kraft $\vec{F}$, so wirkt auf ihn ein *Drehmoment*, was wie folgt defieniert ist.

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{4}$$

Eine Spiralfeder, wie sie auch an der Apparatur in dem Versuch angebracht ist, verrichtet ein Drehmoment, das der Auslenkung entgegengerichtet ist. Es folgt damit der Zusammenhang.

$$\vec{M} = -D\vec{\varphi} \tag{5}$$

Dabei ist D die Winkelrichtgröße, beziehungsweise der Proportionalitätsfaktor und $\vec{\varphi}$ der Auslenkwinkel ([2]). Unter einer solchen Voraussetzung führt der Körper eine harmonische Schwingung aus, dessen Periodendauer wie folgt lautet.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6}$$

2 Durchführung

3 Auswertung

Im folgenden werden die Mittelwerte mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} x_i \tag{7}$$

und die Standardabweichung mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{8}$$

berechnet. Aus Werten mit Unsicherheiten lassen sich mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, die daraus abgeleiteten Größen berechnen, die folgendermaßen definiert ist:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i \right)^2} \tag{9}$$

3.1 Apparatekonstante

Die Berechnung der Winkelrichtgröße D berechnet sich über (Gleichung 5) mit dem konstanten Abstand $a = 10$cm zu den folgenden Werten.

Tabelle 1: Winkelrichtgröße D

Auslenkung φ / DEG	F / N	D / mN m
70	0.20	0.286
80	0,24	0.300
90	0,28	0.311
100	0,33	0.330
110	0,35	0.318
120	0,39	0.325
130	0,41	0.315
140	0,47	0.336
150	0,49	0.327
160	0,52	0.325
170	0,55	0.324

Woraus sich der Mittelwert für die Winkelrichtgröße ergibt.

$$\bar{D} = (0.288 \pm)\,\mathrm{mN\,m} \tag{10}$$

Tabelle 2: Messwerte zum Eigenträgheitsmoment I_D

Schwingungsdauer T / s	Abstand a / mm
3,08	60
3,40	80
4,32	100
4,83	120
4,32	140
4,83	160
5,37	180
5,76	200
6,28	220
7,36	240

Das Trägheitsmoment der Drillachse ergibt sich mit zwei Gewichten. Sie haben ein zylinderförmiges Gewicht von $m_1 = (223.2 \pm 0.1)$g und $m_2 = (222.8 \pm 0.1)$g und jeweils eine Höhe $h = 30$mm und einen Durchmesser $d = 35$mm.

Die Trägheitsmomente der beiden Gewichte lassen sich mithilfe (Gleichung 3) vereinfachen. Zur Berechnung des Trägheitsmomentes der Drillachse I_D, wird eine lineare Regression verwendet.

$$T^2 = ba^2 + c \tag{11}$$

Die Messwerte und die Regression sind in Abbildung (HIER ABBILDUNG EINFÜGEN) aufgetragen. Die Trägheitsmomente werden mit

$$I_{\text{Stab}} = \tfrac{1}{12} m l^2$$
$$I_{\text{Zylinder}} = m\left(\tfrac{r^2}{4} + \tfrac{h^2}{12}\right)$$

berechnet ([1]).

3.2 Trägheitsmomente einfacher Körper

Untersucht werden ein Zylinder und eine Kugel, dessen Rotationsachse je die Schwerpunktsachse der beiden Körper ist. Die Trägheitsmomente des Zylinders berechnet sich, analog zu oben, durch

$$I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} m R^2 \tag{12}$$

und das der Kugel durch

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m R^2 \,. \tag{13}$$

Dabei ist R der Radius und m die Gesamtmasse der jeweiligen Körper.

Die Werte der beiden Körper sind:

$$m_{\text{Kugel}} = (810.9 \pm 0.1)\text{g}$$
$$d_{\text{Kugel}} = 12.7\text{cm}$$
$$m_{\text{Zylinder}} = (367.8 \pm 0.1)\text{g}$$
$$h = 9.00\text{cm}$$
$$d_{\text{Zylinder}} = 8.72\text{cm}$$

Damit ergeben sich die Theoriewerte der Trägheitsmomente für den Zylinder und für die Kugel.

$$I_{\text{Kugel,Theorie}} = 1.306 * 10^(-3)\text{kgm}^2$$
$$I_{\text{Zylinder,Theorie}} = 0.349 * 10^(-3)\text{kgm}^2$$

Die gemessenen Schwingungsdauern wurden in ... aufgeführt. Die gemittelten Periodendauern wurden dazu benutzt durch die Gleichung (Gleichung 6) die Trägheitsmomente der Körper zu berechnen.

Tabelle 3: gemessene Periodendauer

T_{Zylinder} / s	T_{Kugel} / s
0,876	1,706
0,856	1,724
0,828	1,708
0,848	1,692
0,843	1,691
0,847	1,699
0,804	1,684
0,822	1,677
0,862	1,697
0,828	1,687

Damit ergeben sich die Mittelwerte zu HIER MITTELWERTE EINFÜGEN.

Und damit die Trägheitsmomente zu HIER WERTE EINFÜGEN.

Die Abweichung der Messwerte von den Theoriewerten entspricht HIER WERTE EINFÜGEN.

3.3 Trägheitsmoment einer Modellpuppe

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der Modellpuppe wird die Puppe in einzelne Teile unterteilt. Dabei wird angenommen, dass sich die einzelnen Gliedmaßen durch Zylinder approximieren lassen können und eine homogene Massenverteilung besitzt. Die Volumina der Einzelteile werden durch

$$V = \pi r^2 h \tag{14}$$

bestimmt. Danach werden die Massenanteile der Einzelteile bestimmt. Die Gesamtmasse der Puppe beträgt

$$m_{ges} = (166.8 \pm 0.1)\text{g}.$$

Die Abmaße der Körperteile werden jeweils, über die gesamte Länge verteilt, fünf mal gemessen. Somit wird auf die unterschiedlichen Radien der Glieder Rücksicht genommen (zum Beispiel ist beim Arm der Oberarm dicker, als der Unterarm). Die Mittelwerte werden dazu genutzt die Trägheitsmomente auszurechnen.

Tabelle 4: Durchmesser der Körperteile

D_{Arm} / cm	D_{Kopf} / cm	D_{Bein} / cm	D_{Torso} / cm
13,3	17,6	13,4	40,0
16,1	19,0	16,5	33,4
14,0	21,7	17,2	28,1
16,8	30,6	16,0	36,4
11,2	32,2	20,9	36,5

Es werden die Trägheitsmomente für zwei unterschiedliche Stellungen der Puppe berechnet. Abbilder der Stellungen der Puppe sind im folgenden dargestellt unter Abbildung 1 und unter Abbildung 2. Als erster wurde das Trägheitsmoment in der Stellung 1 und danach in der Stellung2 gemessen.

Die Abstände der Körperteile zur Drehachse sind im folgenden aufgelistet.

HIER HÄTTEN DIE ABSTÄNDE ZUR DREHACHSE HINGEMUSST

Damit ergeben sich die Trägheitsmomente folgendermaßen.

HIER TRÄGHEITSMOMENTE EINTRAGEN

Die Trägheitsmomente wurden analog zu denen der Kugel und des Zylinders berechnet. Dabei sind die Schwingungsdauern im folgenden aufgelistet:

T_1 entspricht der Stellung 1 unter Auslenkung um 90°, T_2 der Stellung 1 unter Auslenkung um 120°. Analog dazu sind T_3 und T_4 für die Stellung 2. Gemäß Gleichung (Gleichung 6) folgt für die Puppe

$$I_{\text{Puppe}} = \frac{T^2 D}{4\pi} - I_D \tag{15}$$

Als Mittelwert ergeben sich

HIER MITTELWERTE FÜR SCHWINGUNGSDAUERN EINTRAGEN

woraus die Trägheitsmomente folgen

HIER TRÄGHEITSMOMENTE EINTRAGEN

Das entspricht einer Abwertung des experimentellen Wertes von dem Theoriewert um:

HIER ABWEICHUNGEN EINTRAGEN

Tabelle 5: Schwingungsdauer

T_1 / s	T_2 / s	T_3 / s	T_4 / s
0,792	0,790	1,094	1,070
0,816	0,906	1,148	1,098
0,840	0,784	1,096	1,096
0,798	0,784	1,058	1,084
0,816	0,812	1,144	1,198

4 Diskussion

5 Daten

5.1 Tabellen

Tabelle 6: Winkelrichtgröße D

Auslenkwinkel φ / DEG°	F / N
70	0.20
80	0,24
90	0,28
100	0,33
110	0,35
120	0,39
130	0,41
140	0,47
150	0,49
160	0,52
170	0,55

T_1 entspricht der Stellung 1 unter Auslenkum um 90°. T_2 entspricht der Stellung 1 unter Auslenkum um 120°. T_3 entspricht der Stellung 2 unter Auslenkum um 90°. T_4 entspricht der Stellung 2 unter Auslenkum um 120°.

Tabelle 7: Eigenträgheitsmoment I_D

Schwingungsdauer T / s	Abstand a / mm
3,08	60
3,40	80
4,32	100
4,83	120
4,32	140
4,83	160
5,37	180
5,76	200
6,28	220
7,36	240

Tabelle 8: Trägheitsmomente der Körper

T_{Zylinder} / s	T_{Kugel} / s
0,876	1,706
0,856	1,724
0,828	1,708
0,848	1,692
0,843	1,691
0,847	1,699
0,804	1,684
0,822	1,677
0,862	1,697
0,828	1,687

Tabelle 9: Durchmesser Körperteile

D_{Arm} / cm	D_{Kopf} / cm	D_{Bein} / cm	D_{Torso} / cm
13,3	17,6	13,4	40,0
16,1	19,0	16,5	33,4
14,0	21,7	17,2	28,1
16,8	30,6	16,0	36,4
11,2	32,2	20,9	36,5

Tabelle 10: Schwingungsdauer

T_1 / s	T_2 / s	T_3 / s	T_4 / s
0,792	0,790	1,094	1,070
0,816	0,906	1,148	1,098
0,840	0,784	1,096	1,096
0,798	0,784	1,058	1,084
0,816	0,812	1,144	1,198

6 Anhang

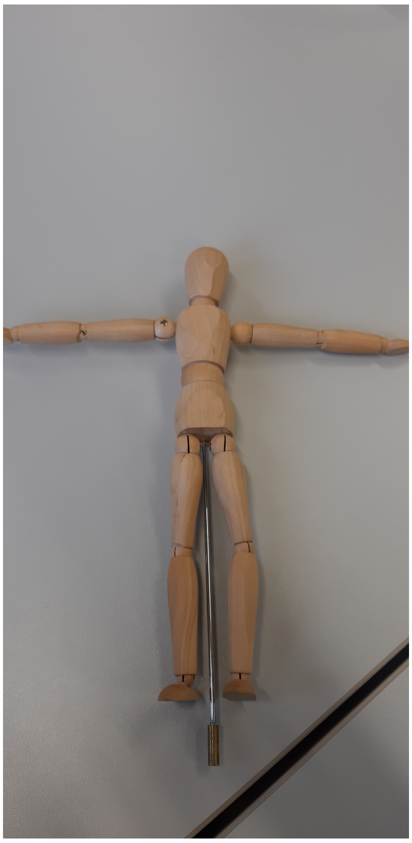

Abbildung 1: Erste Stellung der Puppe

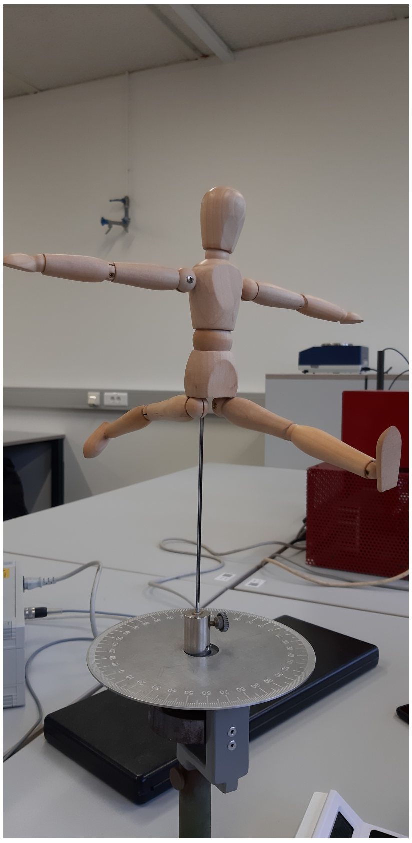

Abbildung 2: Zweite Stellung der Puppe

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 101: Das Trägheitsmoment*. 2021.

[2] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. 25. Aufl. Springer, 2015.