VERSUCH 103

Biegung elastischer Stäbe

Felix Symma
felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch
joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.01.2022

Abgabe: 25.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es, den Elastizitätsmodul eines Metalles durch Biegen eines Metallstabes zu bestimmen.

2 Theorie

Der Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante, die die Verformung eines Körpers unter einer Normalpannung σ beschreibt. Aus der durch die Normalpannung resultierenden Längenänderung L folgt mit dem Hookschen Gesetz der Zusammenhang

$$\sigma = E \cdot \frac{\ L}{L}. \tag{1}$$

Um einen Metallstab zu verbiegen, muss an ihm ein äußeres Drehmoment wirken. Die Biegung bewirkt, dass sich die oberen Schichten im Metallstab außeinander strecken und die Unteren zusammen stauchen. Der Bereich in der Mitte des Stabes, der keine Veränderung seiner Länge erfährt, wird neutrale Faser genannt. Durch solch eine Deformation des Stabes entsteht ein inneres Drehmoment, dass dem Äußeren entgegengesetzt wirkt und den gleichen Betrag hat. Die Drehmomente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{F}} &= F(L-x) \\ M &= \int_Q y\sigma(y)\mathrm{dq}, \end{aligned}$$

wobei F dabei die von Außen wirkende Kraft, Q der Querschnitt des Stabes und y der Abstand des Flächenelements dq zur neutralen Faser ist. Für die Durchbiegung eines einseitig befestigten Stabes ergibt sich somit

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \tag{2}$$

Hierbei beschreibt I das Flächenträgheitsmoment, L die Länge des Stabes und x die Entfernung des Messpunktes zum Einspannpunkt. Ist der Stab beidseitig befestigt, sodass die Kraft auf ihn in seiner Mitte wirkt, ergibt sich für $0 \leq x \leq L/2$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(3L^2x - 4x^3 \right). \tag{3}$$

Demnach ergibt sich für $L/2 \leq x \leq L$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3 \right). \tag{4}$$

Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt und der Seitenlänge a ist das Flächenträgheitsmoment gegeben durch

$$I_{\square} = \frac{a^4}{12}. \tag{5}$$

Das Flächenträgheitsmoment eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt und Durchmesser d ist durch

$$I_{\bigcirc} = \frac{\pi d^4}{64} \tag{6}$$

gegeben.

3 Durchführung

3.1 Einseitige Einspannung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird eine Apparatur wie in Abbildung 1 verwendet. Es wird nacheinander ein Stab mit runder und quadratischer Grundfläche wie in der Abbildung gezeigt am Punkt A eingespannt. Ein Gewicht kann nun am losen Ende des Stabes befestigt werden, wobei dieses so zu wählen ist, dass die maximale Biegung des Stabes zwischen 3 und 7 mm liegt. Diese Biegung kann dann mit Hilfe der Messuhren und der Längenskala an jedem Punkt in Form des vertikalen Abstandes zum Auflagepunkt gemessen werden. Die Messungen werden in einem Intervall von jeweils 3 cm mit einem Gewicht von 750 g durgeführt. Die verwendeten Stäbe haben dabei eine Länge von 59,3 cm (rund) und 60,2 cm (quadratisch). Da nicht davon auszugehen ist, dass die Stäbe vor Versuchsbeginn perfekt gerade sind, werden zunächst Messungen ohne Gewicht vorgenommen.

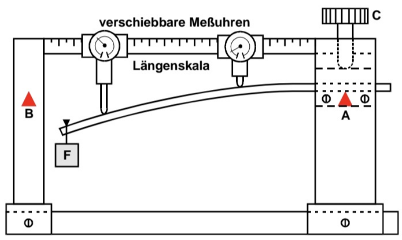


Abbildung 1: Aufbau der verwendeten Messapparatur [5].

3.2 Beidseitige Auflage

Im zweiten Teil der Messung werden die selben Stäbe nacheinander sowohl am Punkt A, als auch am Punkt B aufgelegt, jedoch ohne dabei eingespannt zu werden. Das Gewicht wird bei diesem Aufbau in der Mitte des Stabes platziert, wobei auch hier zuvor eine Nullmessung ohne Gewicht vorgenommen wird. Die Messung der Biegung findet hierbei mit zwei verschiedenen Messuhren statt, da durch das Gewicht in der Mitte eine durchgängige Messung mit einer Uhr nicht möglich ist.

4 Auswertung

4.1 Elastizitätsmodul des eckigen Stabes

4.1.1 Einseitige Einspannung

Es wird der Elastizitätsmodul E eines eckigen Stabes berechnet. Aus Gleichung (2) folgt ein Zusammenhang zwischen dem Drehmoment $D(x)$ und dem Elastizitätsmodul E. Um letzteres zu bestimmen wird eine Hilfsvariable $\eta(x)$ eingeführt, mit

$$\eta(x) = Lx^2 - \frac{1}{3}x^3. \tag{7}$$

Wird $\eta(x)$ in Gleichung (2) eingesetzt, folgt ein linearer Zusammenhang zwischen $D(x)$ und $\eta(x)$,

$$D(\eta) = \frac{F}{2EI}\eta. \tag{8}$$

Mithilfe einer linearen Regressionskurve wird ein Wert für die Steigung μ ermittelt, aus dem der Elastizitätsmodul bestimmt werden kann. Es wird Formel (8) umgestellt zu

$$E = \frac{F}{2I\mu}. \tag{9}$$

In Abbildung 2 ist der Plot zu den Messwerten aus Tabelle 1 zu entnehmen, wobei das Gewicht für die Messwerte von $D_\mathrm{G}(x)$ eine Masse von $m_\mathrm{Last} = 750\,\mathrm{g}$ hat und an der Position $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wurde.

Tabelle 1: Messung des eckigen Stabes bei einseitger Einspannung ($m_\mathrm{Last} = 750\,\mathrm{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_\mathrm{G}(x)$/mm
3	7,79	7,76
6	7,79	7,70
9	7,78	7,57
12	7,71	7,43
15	7,64	7,20
18	7,58	6,97
21	7,58	6,76
24	7,46	6,46
27	7,36	6,13
30	7,27	5,82
33	7,19	5,48
36	7,13	5,12
39	6,95	4,71
42	6,80	4,31
45	6,63	3,85
48	6,49	3,49

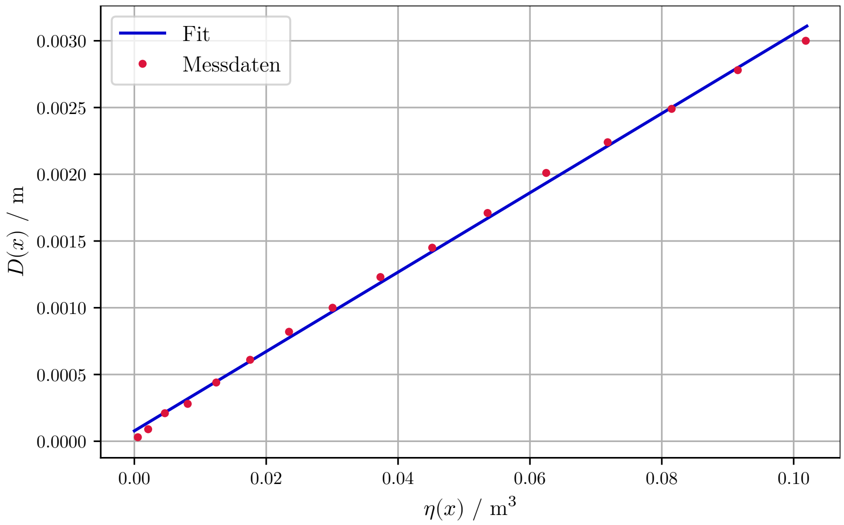


Abbildung 2: Messung eines quadratischen Stabes bei einseitger Einspannung ($m_{\text{Last}} = 750\,\text{g}$).

Tabelle 2: Abmaße des eckigen Stabes.

m / g	l / mm	a / mm
535.4	10.0	602.0
536.2	10.0	602.0
536.3	10.0	602.0
535.7	10.0	602.0
536.1	10.0	602.0

Aus Tabelle 2 sind die Abmaße des eckigen Stabes zu entnehmen. Das Gewicht des Stabes ergibt sich mit Tabelle 2 zu

$$\overline{m_{\text{quadr}}} = (535{,}7 \pm 0{,}7)\,\text{g},$$

woraus die Gewichtskraft zu

$$F_{\text{Last 1}} = 7{,}3575\,\text{N}$$

folgt. Die Dichte des eckigen Stabes ergibt sich mithilfe Tabelle 2 zu

$$\overline{\rho_{\square}} = (8902{,}66 \pm 5{,}62)\,\text{kg/m}^3.$$

Aus (5) wird das Flächenträgheitsmoment berechnet zu

$$I_{\square} = 0{,}83 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2.$$

In der Formel für das Flächenträgheitsmon

Die lineare Regression wird mithilfe der Python-Erweiterungen numpy [4] und scipy [3] durchgeführt, während der Plot mit matplotlib [2] erstellt wird. Die Erweiterungen liefern eine Ausgleichsgerade vom Typ $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ mit den Parametern

$$\mu = (0{,}0297 \pm 0{,}0004)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2},$$
$$b = (0{,}0001 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}.$$

Das Elastizitätsmodul berechnet sich mit (8) zu

$$E_1 = (149{,}2 \pm 2{,}0) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

4.1.2 Beidseitige Einspannung

Aus Tabelle 3 sind die Messwerte der Biegung eines eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung unter einem Gewicht von $m_{\mathrm{Last}} = 1550\,\mathrm{g}$, welches an der Position $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wird, zu entnehmen. Abbildung 3 ist Plot zu den Messwerten aus Tabelle 3 und die lineare Regression zu entnehmen.

Tabelle 3: Messung eines eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung ($m_{\mathrm{Last}} = 1550\,\mathrm{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_\mathrm{G}(x)$/mm
3	8,90	8,75
6	8,99	8,76
9	9,07	8,76
12	9,14	8,76
15	9,22	8,77
18	9,31	8,74
21	9,39	8,83
24	9,46	8,87
27	9,55	8,92
30	7,19	7,88
33	7,11	7,67
36	8,02	7,53
39	8,13	7,32
42	8,11	7,05
45	8,38	8,05
48	8,45	8,17
51	8,58	8,45
54	8,73	8,68

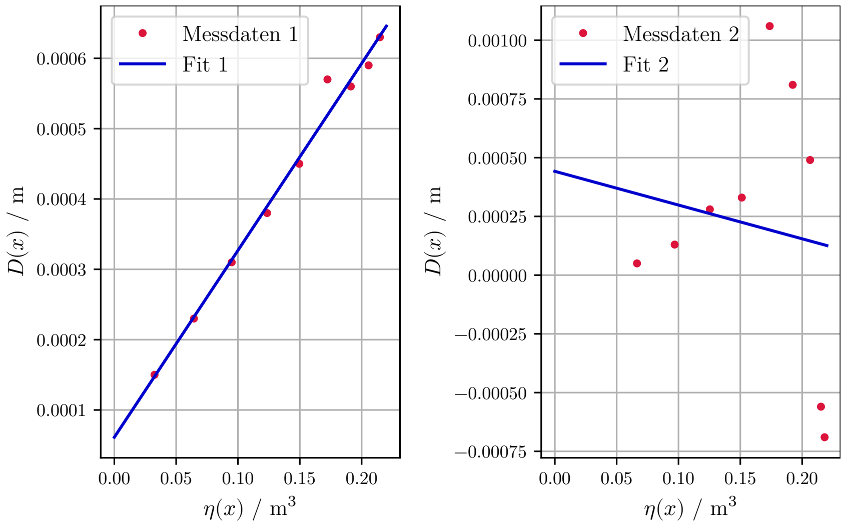


Abbildung 3: Messung eines quadratischen Stabes bei beidseiger Einspannung ($m_{\text{Last}} = 1550\,\text{g}$).

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Einspannung des eckigen Stabes wird analog der einseitigen Einspannung vorgegangen. Da allerdings der Stab in zwei Teilen beschrieben wird, werden auch die Werte unabhängig voneinander ausgewertet und geplottet. Für die erste Hälfte des Stabes, in der Gleichung (3) gültig ist, wird die Hilfsvariable $\eta(x)$ definiert zu

$$\eta(x) = 3L^2x - 4x^3. \tag{10}$$

Für die andere Hälfte für $x \in [L/2, L]$ wird $\eta(x)$ zu

$$\eta(x) = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3 \tag{11}$$

definiert. Werden die Formeln (10) und (11) analog zu (9) umgestellt und die Steigung μ mithilfe einer linearen Regression bestimmt, folgen zwei Werte für das Elastizitätsmodul

$$\mu_1 = (0{,}002\,66 \pm 0{,}000\,12)\,\frac{1}{\text{m}^2}, \qquad b_1 = (0{,}000\,06 \pm 0{,}000\,12)\,\text{m},$$
$$\mu_2 = (-0{,}001 \pm 0{,}004)\,\frac{1}{\text{m}^2}, \qquad b_2 = 0\,\text{m},$$
$$E_2 = (143{,}0 \pm 6{,}0) \cdot 10^9\,\text{Pa}, \qquad E_3 = (400 \pm 1500) \cdot 10^9\,\text{Pa}.$$

Der Mittelwert beträgt somit

$$\overline{E_\square} = (230 \pm 50) \cdot 10^9\,\text{Pa}.$$

4.2 Elastizitätsmodul eines runden Stabes

Mit dem runden Stab wird wie mit dem eckigen Stab verfahren. Aus den Maßen des runden Stabes, die aus Tabelle 4 zu entnehmen sind, folgen die Mittelwerte für die Länge

l, die Masse m und die Dichte ρ des Stabes

$$\bar{m} = (412{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g},$$
$$\bar{l} = (59{,}20 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm},$$
$$\overline{\rho_{\bigcirc}} = (8862{,}79 \pm 12{,}37)\,\mathrm{kg/m^3}$$

Tabelle 4: Abmaße des runden Stabes.

l / mm	d / mm	m / g
593	10	411.8
592	10	412.0
592	10	412.2
591	10	412.2
592	10	412.2

4.2.1 Einseitige Einspannung

Aus Tabelle 5 sind die Messwerte $D_0(x)$ und $D_\mathrm{G}(x)$ bei einseitiger Einspannung des runden Stabes mit einem Gewicht von $m_\mathrm{Last} = 750\,\mathrm{g}$, welches an der Stelle $x = 50\,\mathrm{cm}$ eingespannt wurde, zu entnehmen.

Tabelle 5: Messung des runden Stabes bei einseitger Einspannung ($m_\mathrm{Last} = 750\,\mathrm{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_\mathrm{G}(x)$/mm
3	8,13	8,07
6	8,21	8,00
9	8,27	7,98
12	8,34	7,87
15	8,41	7,72
18	8,45	7,44
21	8,57	7,32
24	8,63	7,11
27	8,74	6,84
30	8,81	6,60
33	8,92	6,32
36	9,01	5,99
39	9,09	5,65
42	9,10	5,37
45	9,10	4,93
48	9,14	4,64

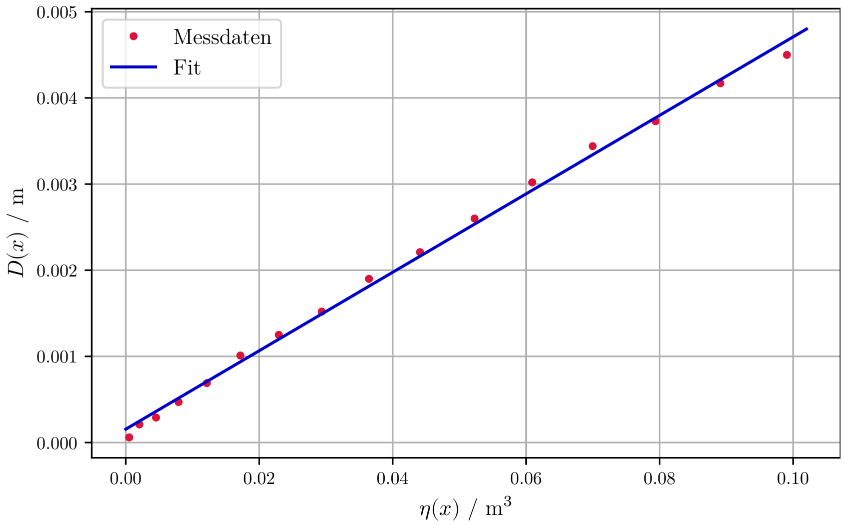


Abbildung 4: Messung eines runden Stabes bei einseitiger Einspannung ($G = 750\,\mathrm{g}$). Hier habt ihr das G noc

Die Hilfsvariable $\eta(x)$ ergibt sich nach Gleichung (2) wieder zu Formel (7). Nach Gleichung (8) ergibt sich analog zu dem eckigen Stab ein linearer Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der Variablen $\eta(x)$, wobei der runde Stab die folgenden Werte hat

$$
\begin{aligned}
I_{\bigcirc} &= (\frac{1}{64} \pm 0.0)\mathrm{kgm}^2, \\
F_{\bigcirc} &= (4{,}042 \pm 0{,}002)\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Da sollte keine Ma

Die lineare Regression des Types $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ liefert die Parameter

$$
\begin{aligned}
\mu &= (0{,}0455 \pm 0{,}0007)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}, \\
b &= (0{,}0002 \pm 0{,}0007)\,\mathrm{m},
\end{aligned}
$$

woraus mit Formel (9) ein Elastizitäsmodul von

$$E_1 = (164{,}0 \pm 2{,}5) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$$

Da kriege ich mit euren Werte aber was a

folgt.

4.2.2 Beidseitige Einspannung

Aus Tabelle 6 sind die Messwerte für die Auslenkungen $D_0(x)$ und $D_\mathrm{G}(x)$ zu entnehmen, wobei ein Gewicht von $m_\mathrm{Last} = 1550\,\mathrm{g}$ bei $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wird. Abbildung 5 ist die grapische Darstellung der Messwerte, die jeweils in Bereichen $x \in [0, L/2]$ und $x \in$

$[l/2, L]$ unterteilt werden. Es ist außerdem eine lineare Regression für beide Einteilungen aufzufinden.

Tabelle 6: Messung des runden Stabes bei beidseitiger Auflage ($m_{\text{Last}} = 1550\,\text{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_G(x)$/mm
3	9,93	8,67
6	9,95	8,59
9	9,97	8,44
12	9,86	8,30
15	9,82	8,12
18	9,67	7,85
21	9,60	7,74
24	9,52	7,63
27	9,36	7,51
30	7,50	6,63
33	7,38	6,56
36	7,26	6,54
39	7,17	6,51
42	7,04	6,49
45	6,95	6,49
48	6,68	6,48
51	6,72	6,53
54	6,51	6,60

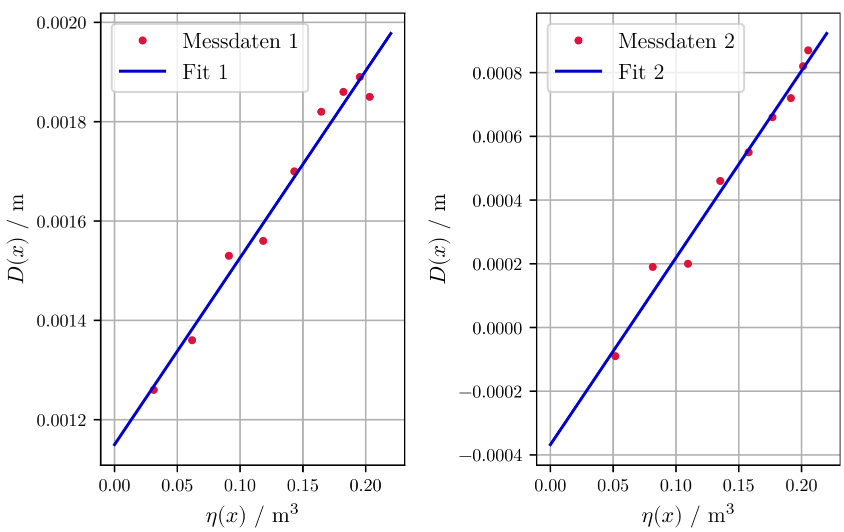


Abbildung 5: Messung eines runden Stabes bei beidseitiger Einspannung ($G = 1550\,\text{g}$).

Analog der Berechnung der Elastizitätsmodule des eckigen Stabes bei einseitiger Auflage werden für die lineare Regression die Hilfsvariablen mit Gleichung (10) und Gleichung (11) definiert. Aus der linearen Regression der Form $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ folgen die Elastizitätsmodule

$$\mu_1 = (0{,}003\,76 \pm 0{,}000\,23)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}, \qquad b_1 = (0{,}001\,15 \pm 0{,}000\,23)\,\mathrm{m},$$
$$\mu_2 = (0{,}005\,87 \pm 0{,}000\,31)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}, \qquad b_2 = (-0{,}000\,37 \pm 0{,}000\,31)\,\mathrm{m},$$
$$E_2 = (172 \pm 10) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}, \qquad E_3 = (110 \pm 6) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Seid ihr euch bei der Berechnung dieser beiden W

Der Mittelwert beträgt somit

$$\overline{E_\bigcirc} = (149 \pm 4) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

5 Diskussion

Aus den Werten der Dichten ρ der beiden Stäbe

$$\overline{\rho_\square} = (8902{,}66 \pm 5{,}62)\,\mathrm{kg/m^3},$$
$$\overline{\rho_\bigcirc} = (8862{,}79 \pm 12{,}37)\,\mathrm{kg/m^3},$$

wird darauf geschlossen, dass das Material des Stabes Kupfer ist ($\rho_{\mathrm{lit}} = 8920\,\mathrm{kg/m^3}$). Der Literaturwert für das Elastizitätsmodul von Kupfer lautet nach [1]

$$E_{\mathrm{lit}} = 125 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Aus dem Versuch wurden zwei Elastizitätsmodule, das eines eckigen und das eines runden Stabes bestimmt,

$$\overline{E_\square} = (230 \pm 50) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa},$$
$$\overline{E_\bigcirc} = (149 \pm 4) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Die Abweichungen der gemessenen Elastizitätsmodule betragen $\Delta_\square = 84\%$ und $\Delta_\bigcirc = 16.11\%$. Wird der zweite Wert für den Elastizitätsmodul des eckigen Stabes bei beidseitiger Auflage ($(400 \pm 1500) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$) aus dem Mittelwert gestrichen, da der Wert viel zu ungenau ist, so kommt ein neuer Mittelwert von

$$\overline{E_\square} = (146{,}0 \pm 3{,}4) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$$

heraus. Dieser Wert hat somit nur noch eine Abweichung von $\Delta_\square = 14.38\%$. Für diesen Mittelwert und den des runden Stabes $\Delta_\bigcirc$, lässt sich der Literaturwert des Elastizitätsmoduls für Kupfer verifizieren.

Grund für diese Ungenauigkeiten werden mitunter die Messuhren sein, die große Ungenauigkeiten verursachen können. So schlugen die Zeiger bereits nach den kleinsten Erschütterungen aus, was das Messen erschwerte. Ein weiterer Grund für Abweichungen sind die Zustände der benutzten Kupferstäbe. So war der eckige Kupferstab laut der Messuhr von großen Verbiegungen durchzogen, weshalb die Messwerte nicht linear erfolgten. Bei der Messung der Auslenkungen bei beidseitigen Einspannungen wurden zwei Messuhren benutzt, eine rechts und eine links des Gewichtes. Die linke Messuhr hat dabei keine den Werten der rechten Uhr kongruenten Werte gemessen, auch wenn dieselben Positionen vermessen wurden. Auch die vergleichsweise nur geringen Auslenkungen der beiden Stäbe verursachen hohe Ungenauigkeiten, da nur in einem kleinen Messbereich mit geringem Gewicht gemessen wird. Eine andere mögliche Fehlerquelle könnte ein falscher Versuchsaufbau sein. So durfte bei beidseitiger Messung der Stabe nicht eingespannt werden, wenn dies allerdings doch getan wurde, so sind die Werte ungenau.

6 Anhang

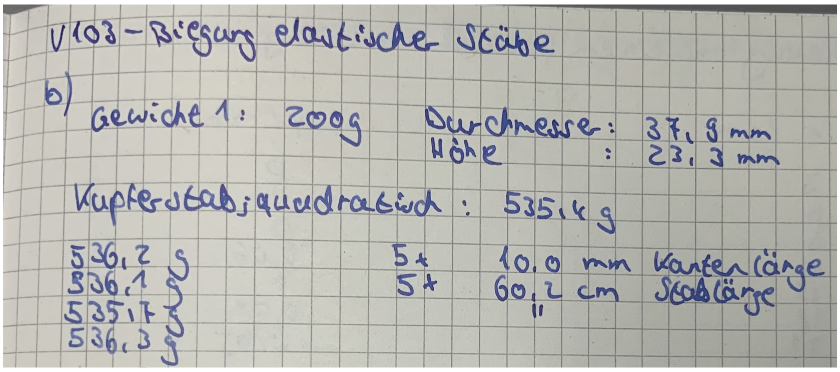


Abbildung 6: Originale Messdaten.

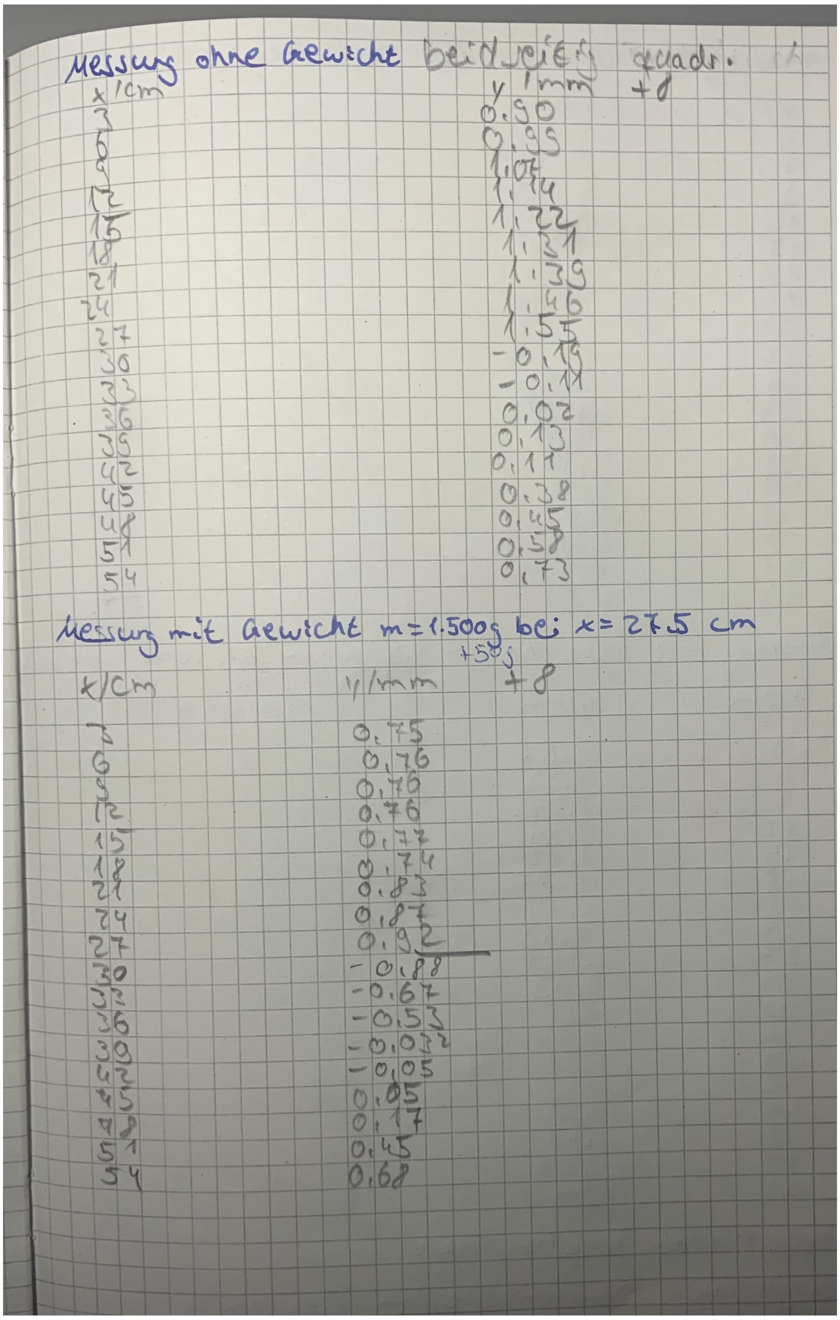
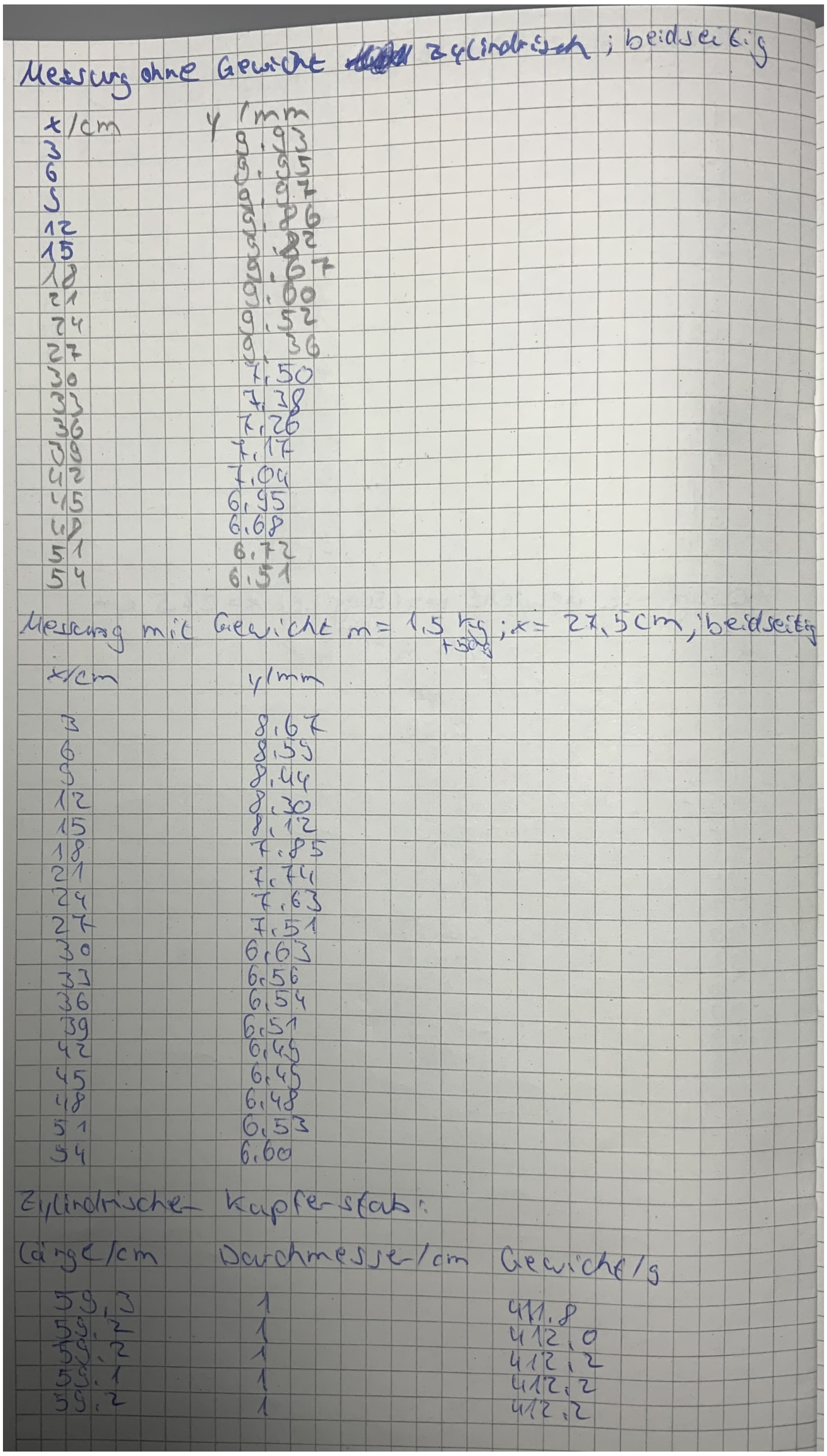


Abbildung 7: Originale Messdaten.


Messung ohne Gewicht zylindrisch ; beidseitig

x/cm	y/mm
3	9,93
6	9,95
9	9,97
12	9,86
15	9,82
18	9,67
21	9,60
24	9,52
27	9,36
30	7,50
33	7,38
36	7,26
39	7,17
42	7,04
45	6,95
48	6,68
51	6,72
54	6,51

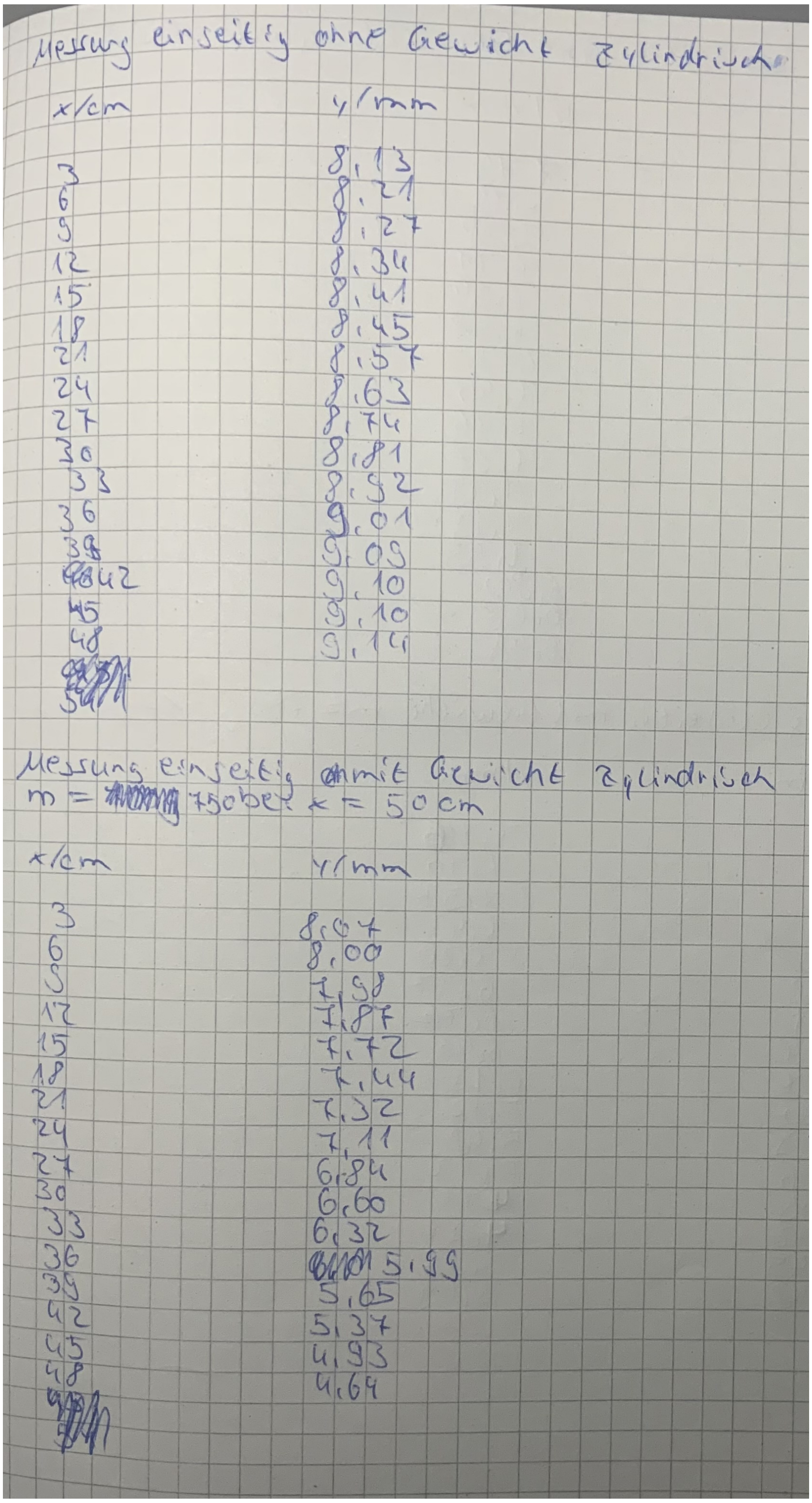
Messung mit Gewicht m = 1,5 kg + 50 g ; x = 27,5 cm, beidseitig

x/cm	y/mm
3	8,67
6	8,59
9	8,44
12	8,30
15	8,12
18	7,85
21	7,74
24	7,63
27	7,51
30	6,63
33	6,56
36	6,54
39	6,51
42	6,49
45	6,45
48	6,48
51	6,53
54	6,60

Zylindrische Kupferstab:

Länge/cm	Durchmesser/cm	Gewicht/g
59,3	1	411,8
59,2	1	412,0
59,2	1	412,2
59,1	1	412,2
59,2	1	412,2

Abbildung 8: Originale Messdaten.



Messung einseitig ohne Gewicht zylindrisch

x/cm	y/mm
3	8,13
6	8,21
9	8,27
12	8,34
15	8,41
18	8,45
21	8,57
24	8,63
27	8,74
30	8,81
33	8,92
36	9,01
39	9,09
42	9,10
45	9,10
48	9,14

Messung einseitig ~~oh~~mit Gewicht zylindrisch
m = 750 bei x = 50 cm

x/cm	y/mm
3	8,07
6	8,00
9	7,98
12	7,87
15	7,72
18	7,44
21	7,32
24	7,11
27	6,84
30	6,60
33	6,32
36	5,99
39	5,65
42	5,37
45	4,93
48	4,64

Abbildung 9: Originale Messdaten.

Literatur

[1] Horst Czichos und Manfred Hennecke. *HÜTTE - Das Ingenieurwissen*. Springer, 2008. ISBN: 9783540718512.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.

[5] *Versuch 103 - Biegung elastischer Stäbe*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.