

oh
B-S

V353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Felix Symma

felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch

joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.2021

Abgabe: 11.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel	3
2 Theorie	3
2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2 Entladekurve eines Kondensators	3
2.3 Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen	4
2.4 Integrationsverhalten des RC-Kreises	4
3 Durchführung	4
3.1 Messung der Zeitkonstanten	4
3.2 Messung der Amplitude der Kondensatorspannung	5
3.3 Messung der Phasenverschiebung	5
3.4 Messung zur Bestätigung der Integratorfunktion	5
4 Auswertung	6
4.1 Messung der Zeitkonstanten RC über die Entladekurve	6
4.2 Bestimmen der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude	8
4.3 Phasenverschiebung des RC-Kreises	10
4.4 RC-Kreis als Integrator	11
5 Diskussion	13
6 Anhang	15
Literatur	16

1 Ziel

Das Relaxationsverhalten des Entladevorgangs eines RC-Kreises soll untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Wenn ein System aus seinem Ausgangszustand ausgelenkt und ohne jegliche Oszillation in denselben zurückkehrt, treten Relaxationserscheinungen auf. Diese lassen sich durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)], \quad (1)$$

für die Änderungsgeschwindigkeit einer allgemeinen Größe A beschreiben. Durch Umformung folgt daraus

$$A(t) = A(\infty) + [A(t) - A(\infty)]e^{ct}. \quad (2)$$

2.2 Entladekurve eines Kondensators

Die Spannung U_C , die aufgrund der Ladung Q am Kondensator anliegt, ist durch die Kapazität C bestimmt als

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Der Strom I , der aufgrund der Ladungsdifferenz durch den Widerstand R fließt, ist nach dem Ohm'schen Gesetz gegeben als

$$I = \frac{U_C}{R}.$$

Dadurch ist die zeitliche Änderung der Ladung auf dem Kondensator bestimmt als

$$dQ = -Idt$$

Aus diesen Bezügen ergibt sich die DGL

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}, \quad (3)$$

die verglichen mit Gleichung (1) eine hohe Ähnlichkeit aufweist. Da der Grenzwert $Q(\infty)$ nicht zu erreichen ist, kann er vernachlässigt werden und die Lösung der DGL ist somit gegeben durch

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4)$$

2.3 Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen

Im Allgemeinen ist Wechselspannung definiert durch die Funktion

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t).$$

Da eine Phasenverschiebung zwischen der eingehenden Spannung des Sinusgenerators und der verzögerten Spannung des Kondensators entsteht, ist die ausgehende Spannung bestimmt als

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

Naja! Es funktioniert
das die Relais

wobei A die Kondensatorspannungsamplitude beschreibt. Des Weiteren gilt

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (5)$$

Durch die Kirchhoffischen Gesetze gilt für den RC-Kreis

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t). \quad (6)$$

Aus den vorherigen Formeln (3), (5) und (6) erhält man mit weiteren Umformungen

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

2.4 Integrationsverhalten des RC-Kreises

Ein RC-Kreis kann nur dann als Integrator funktionieren, wenn $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt. Hierzu lässt sich Gleichung (6) umschreiben zu

$$\begin{aligned} U(t) &= R \cdot I(t) + U_C(t) \\ &= RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung $\omega \gg \frac{1}{RC}$ wird die Gleichung gelöst zu

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (8)$$

3 Durchführung

3.1 Messung der Zeitkonstanten

Bei dieser Messung soll die Zeitkonstante des RC-Kreises bestimmt werden. Hierzu werden ein Kondensator der Kapazität C , ein Widerstand R , ein Spannungsgenerator und ein Oszilloskop benötigt. Die Bauteile werden wie in Abbildung 1 aufgebaut. Es kann nun

durch den Spannungsgenerator eine Rechteckspannung angelegt und die Entladekurve am Oszilloskop betrachtet werden.

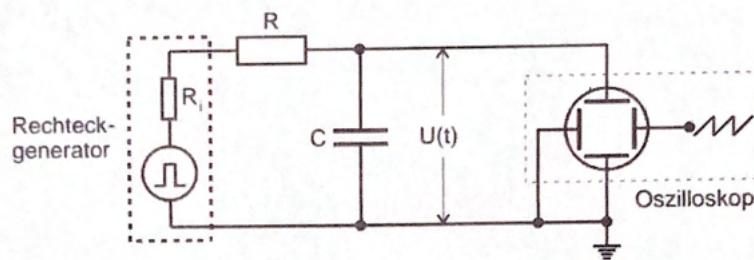


Abbildung 1: Schaltung zur Messung der Zeitkonstante [1].

3.2 Messung der Amplitude der Kondensatorspannung

Der Versuchsaufbau bleibt bei dieser Messung unverändert zur Vorherigen. Am Spannungsgenerator wird allerdings statt der Rechtecksspannung eine Sinusspannung, mit einer Frequenz zwischen 250 Hz und 60 kHz eingestellt. Die Amplitude der Kondensatorspannung kann erneut am Oszilloskop abgelesen werden.

*Besser wäre
50 Hz - 60 kHz
genug das
sagen Sie dann
aber späher*

3.3 Messung der Phasenverschiebung

Der Versuchsaufbau wird anschließend so geändert, dass er dem Schaltbild auf Abbildung 2 entspricht. Auf dem Oszilloskop kann jeweils der Spannungsverlauf des Kondensators $U_C(t)$ und des Generators $U_G(t)$ abgelesen werden. Es kann nun der Abstand der Nullstellen und die jeweilige Wellenlänge gemessen werden. Der Messbereich ist identisch zum Vorherigen.

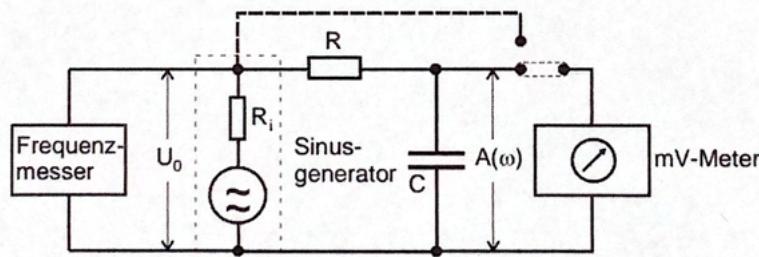


Abbildung 2: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung [1].

3.4 Messung zur Bestätigung der Integratorfunktion

Zuletzt wird die in Abbildung 3 dargestellte Schaltung aufgebaut. Auf dem Zweikanal-Oszillographen sind jetzt sowohl die generierte, als auch die integrierte Spannung abgebil-

det. Am Generator werden nun nacheinander Rechtecks-, Sinus- und Dreiecksspannung eingestellt und jeweils das Bild des Oszilloskopraphen abfotografiert.

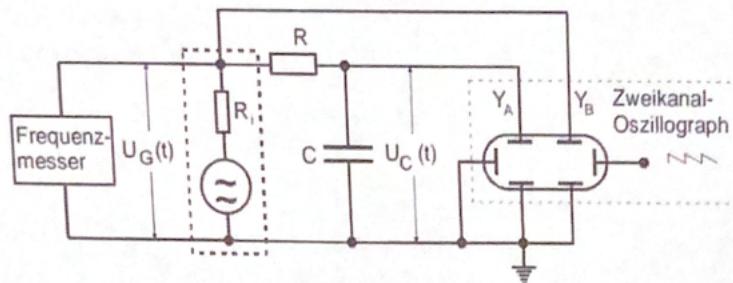


Abbildung 3: Schaltung zur Überprüfung des Integrators [1].

4 Auswertung *Welche Kärtchen haften Sie?*

4.1 Messung der Zeitkonstanten RC über die Entladekurve

Die in Aufgabenteil a) verwendete Frequenz beträgt 420 Hz. Aus dem Zusammenhang für den Entladevorgang eines Kondensators folgt

$$\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t. \quad (9)$$

Mithilfe von numpy [4] und matplotlib [2] werden die Messwerte, die Tabelle 1 zu entnehmen sind, halblogarithmisch in Abbildung 4 geplottet und es wird eine Regressionsgerade erstellt.

Tabelle 1: Messwerte zu Aufgabe a).

U / V	t / ms
0,55	0,00
0,50	0,02
0,44	0,04
0,40	0,05
0,36	0,06
0,32	0,08
0,26	0,10
0,24	0,12
0,18	0,14
0,12	0,16
0,10	0,18
0,04	0,20
0,00	0,22
-0,04	0,24
-0,06	0,26
-0,10	0,28
-0,14	0,30
-0,16	0,32
-0,18	0,34
-0,22	0,36
-0,24	0,38
-0,28	0,40
-0,30	0,42
-0,32	0,44
-0,34	0,46
-0,38	0,48
-0,40	0,5
-0,42	0,52
-0,44	0,54
-0,46	0,56
-0,48	0,58
-0,50	0,60

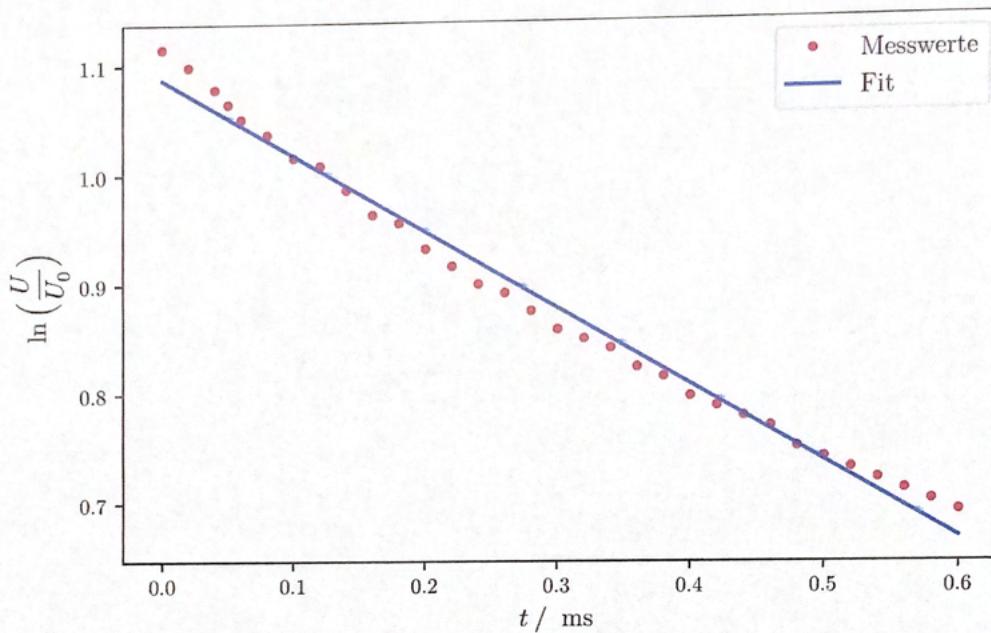


Abbildung 4: Halblogarithmischer Plot zu Aufgabenteil a) mit Ausgleichsgerade.

Die Parameter der Ausgleichsgeraden vom Typ $\ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = m \cdot t + b$ werden zu den folgenden Werten ermittelt

$$m = (-0,697 \pm 0,014) \frac{1}{\text{ms}},$$

$$b = 1.087 \pm 0.014.$$

Dadurch ergibt sich eine Zeitkonstante RC von

$$RC = (0,705 \pm 0,014) \frac{1}{\text{s}}.$$

4.2 Bestimmen der Zeitkonstanten RC über die Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Im folgenden Versuch wurden die Amplituden in einem Frequenzbereich von 3 kHz bis 60 kHz gemessen. Aus Tabelle 2 sind die Messwerte zu Aufgabenteil b) und c) zu entnehmen.

3,2 kHz
abu 250 kHz
- 60 kHz

Tabelle 2: Messwerte zu Aufgabe b) und c).

f / kHz	A_1 / V	A_2 / V	a / ms	b / ms
3,085	4,2	0,1100	0,0300	0,1800
6	4,2	0,0600	0,0240	0,0680
9	4,2	0,0480	0,0180	0,070
12	4,2	0,0360	0,0120	0,0460
15	4,2	0,0260	0,0100	0,0380
18	4,2	0,0220	0,0100	0,0240
21	4,2	0,0180	0,0080	0,0260
24	4,2	0,0150	0,0070	0,0230
27	4,2	0,0130	0,0060	0,0210
30	4,2	0,0110	0,0050	0,0190
33	4,2	0,0100	0,0050	0,0165
36	4,2	0,0085	0,0050	0,0150
39	4,2	0,0075	0,0045	0,0114
42	4,2	0,0070	0,0040	0,0135
45	4,2	0,0060	0,0040	0,0120
48	4,2	0,0060	0,0035	0,0115
51	4,2	0,0050	0,0030	0,0110
54	4,2	0,0050	0,0030	0,0100
57	4,2	0,0045	0,0030	0,0100
60	4,2	0,0040	0,0025	0,0095

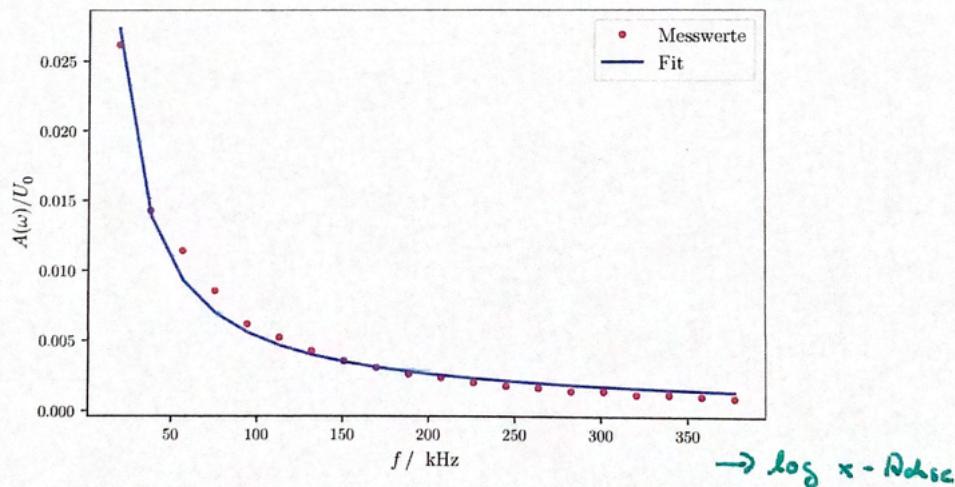
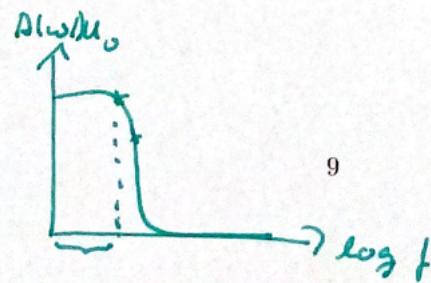


Abbildung 5: Frequenzabhängiges Amplitudenverhältnis.



Es wäre schön gewesen, wenn die Wirkung bei 250 Hz aufgehalten hätte, dann hätte man den Trippelschall besser gehört.

Aus (7) ergibt sich ein Zusammenhang für die Ausgleichsrechnung der Zeitkonstanten RC

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (10)$$

Aus Abbildung 5 ist die graphische Abbildung der Messwerte aus Tabelle 2 zu entnehmen, wodurch mithilfe der Python Erweiterungen matplotlib [2], numpy [4] und scipy [3] die Zeitkonstanten RC bestimmt wird. Es folgt eine Zeitkonstante von

$$RC = (1,8839 \pm 1,5492) \frac{1}{s}$$

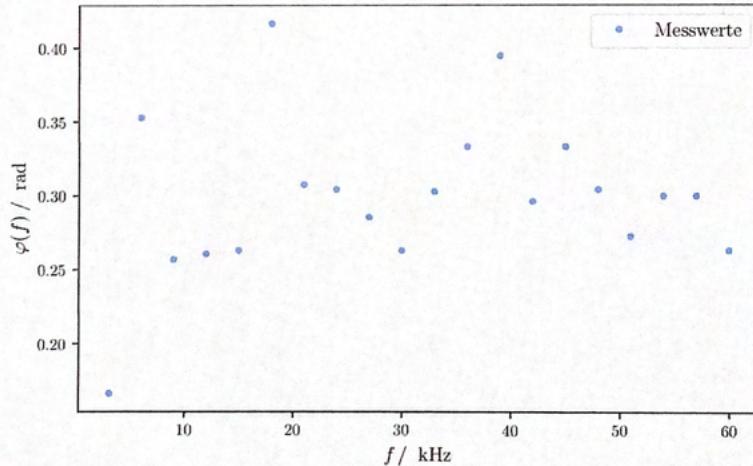
Gemessen

4.3 Phasenverschiebung des RC-Kreises

Ein Zusammenhang zwischen der Phasenverschiebung von U_C und U_0 und der Frequenz der Spannungsquelle wird durch die folgende Gleichung beschrieben

$$\varphi(\omega) = -\arctan -\omega \cdot RC. \quad (11)$$

Dabei wird die Phase über $\varphi = 2\pi \frac{a}{b}$ bestimmt. Die Messwerte sind Tabelle 2 zu entnehmen. Das Wertepaar $\{f[\text{Hz}], \varphi(\omega)[\text{rad}]\}$ wird in Abbildung 6 dargestellt.



Sie hätten die
Genauigkeit erhöhen
können, indem Sie
für $b = T = \frac{1}{f}$ nehmen,
wenn Sie nur example
z.B. die Welle bei 21kHz
auswählen, dann würde
b (gemessen) stark von
 $T = \frac{1}{f}$ ab.

Abbildung 6: Graphische Darstellung der Phasenverschiebung.

Es ist jedoch nicht möglich aus den gemessenen Werten eine Zeitkonstante RC zu bestimmen, worauf näher in Abschnitt 5 eingegangen wird.

Die Werte werden zusätzlich in einem Polarplot in Abbildung 7 visualisiert, aus dem sich aus denselben Gründen keine Informationen entnehmen lassen.

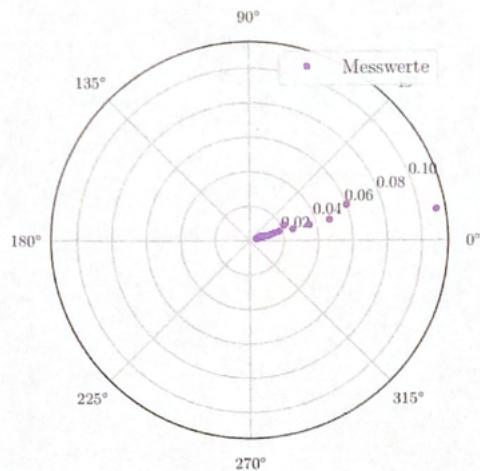


Abbildung 7: Polarplot zu der Phasenverschiebung φ .

4.4 RC-Kreis als Integrator

Aus Unterabschnitt 2.4 folgt, dass ein RC-Kreis auch als Integrator dienen kann. Für eine Rechteckspannung mit konstanten Spannungsabschnitten ist eine Stammfunktion mit einem linearen Spannungsbild zu erwarten. In Abbildung 8 ist ebendies dargestellt. Bei einer angelegten Dreiecksspannung mit linearem Verlauf ist ein quadratischer Spannungsverlauf zu erwarten. Durch den zeitlichen Verlauf ergibt sich somit eine sinusförmiger Spannungsverlauf, wie er in Abbildung 9 dargestellt ist. Durch Integration einer Sinusspannung der Form

$$f(\omega) = \sin \omega t,$$

ist eine Cosinusspannung der Form

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega} \cos \omega t$$

zu erwarten, was in Abbildung 10 abgebildet wird.



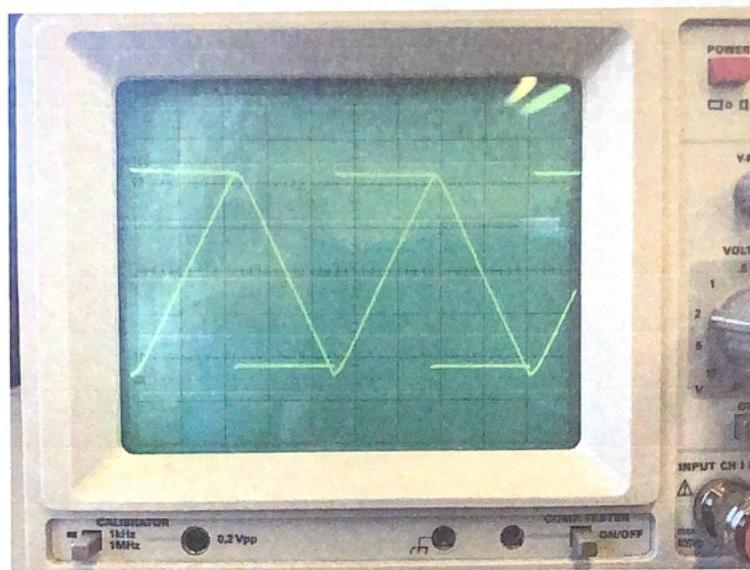


Abbildung 8: Angelegte Rechtecksspannung am RC-Kreis.

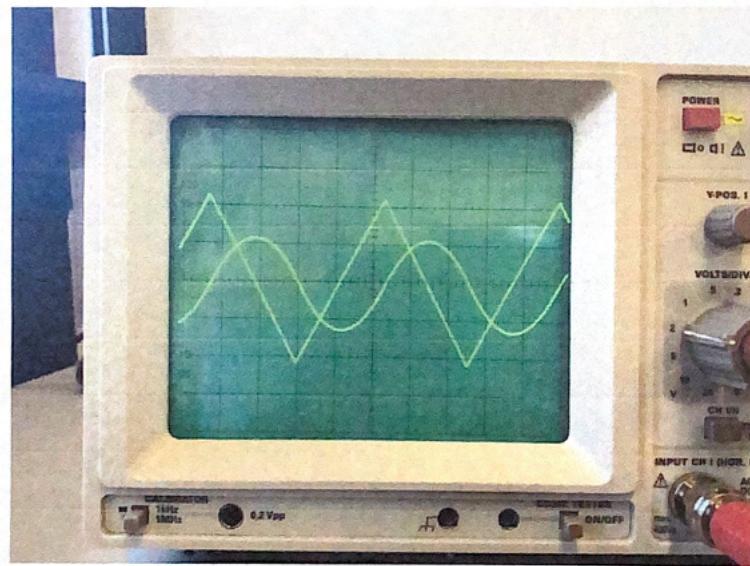


Abbildung 9: Angelegte Dreiecksspannung am RC-Kreis.

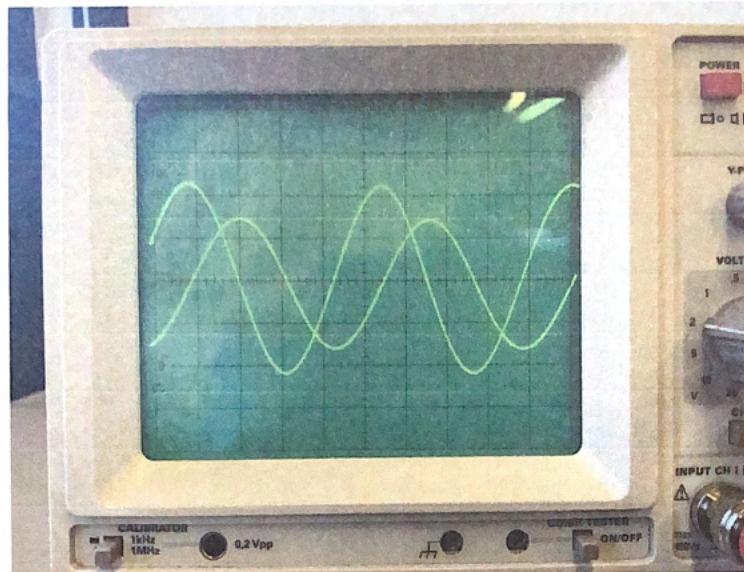


Abbildung 10: Angelegte Sinusspannung am RC-Kreis.

5 Diskussion

Es ist anzumerken, dass der erste Messwert aus Abbildung 13 nicht übernommen wurde, da er zu sehr von den anderen Messwerten anweicht, als dass angenommen werden könnte er sei korrekt gemessen worden. Mit den unterschiedlichen Messverfahren ergibt sich die Zeitkonstante RC jeweils zu

$$RC_1 = (0,705 \pm 0,014) \frac{1}{\text{s}}$$

$$RC_2 = (1,8839 \pm 1,5492) \frac{1}{\text{s}}$$

Die beiden Zeitkonstanten weichen dabei nur um 37,42 % voneinander ab, was für solch ungenaue Messmethoden sehr gut ist. Grund für die Abweichung ist die Messapparatur, welche keine konstante Amplitude anzeigen, oder erzeugen konnte. Ein weiterer Grund für die Abweichung ist, dass jeder Wert manuell von einem analogen Oszilloskop abgelesen wird. Durch ein digitales Oszilloskop, welches automatisch die Amplituden ablesen kann, würde die Messwerte verbessern. Qualitativ ist die Theorie des Tiefpasses als teilweise verifiziert anzusehen, da der Verlauf der Spannung, wie in der Theorie beschrieben, durch die Abbildung 4 und Abbildung 5 dargestellt werden.

Aus den vorhandenen Messwerten war es nicht möglich die Zeitkonstante RC_3 zu bestimmen. Grund dafür ist wahrscheinlich ein Defekt beim Messgerät. Dies macht es unmöglich

Nein! Keine Übung beim Ablesen 😊

*Das ist ein
sehr gutes
Referenzwerk
← NEIN!!
Sie müssen die
Curves einkreisen
und das ist
garantiert
ungenau!!!*

Informationen aus den Messwerten zu ziehen. So ist aus der Phasenverschiebung kein deutliches Bild abzulesen, sollte nach der Theorie ähnlich Abbildung 11 herauskommen.

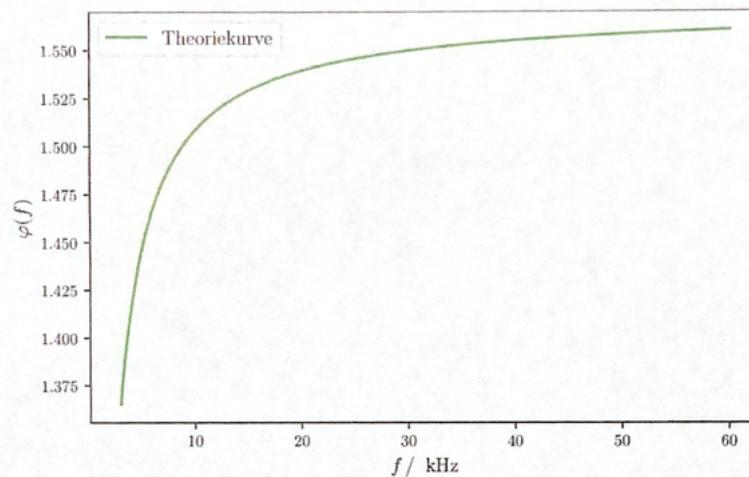


Abbildung 11: Theoriekurve nach (11) mit $RC = 1,6 \text{ l/s}$.

Die Theorie des RC-Kreises als Integrator wird durch Unterabschnitt 4.4 ebenfalls verifiziert. ✓

6 Anhang

V-353	
<i>Aufgabe a)</i>	
$u \text{ in } V^{+1}$	$t \text{ in } ms^{+2}$
2,75	0
2,5	0,2
2,2	0,4
2,0	0,6
1,8	0,8
1,6	1
1,3	1,2
1,2	1,4
0,9	1,6
0,6	1,8
0,5	2
0,2	2,2
0	2,4
-0,2	2,6
-0,3	2,8
-0,5	3
-0,7	3,2
-0,8	3,4
-1,2	3,6
-1,2	3,8
-1,4	4
-1,5	4,2
-1,6	4,4
-1,7	4,6
-1,9	4,8
-2	5
-2,1	5,2
-2,2	5,4
-2,3	5,6
-2,4	5,8
-2,5	6

Abbildung 12: Originale Messdaten zu Aufgabenteil a).

Aufgabe b/c)		Frequenz in Hz	Amplitude 1/V	Amplitude 2/V	Wms W/m²
262,5	4,4		2,4	0,35	2,50
3085	4,2		0,11	0,030	0,10
6,000 kHz	"		0,06	0,024	0,069
5,000 kHz	"		0,049	0,019	0,047
12 kHz	"		0,036	0,012	0,016
15 kHz	"		0,026	0,010	0,023
18 kHz	"		0,022	0,010	0,024
21 kHz	"		0,018	0,007	0,026
24 kHz	"		0,015	0,007	0,023
27 kHz	"		0,013	0,006	0,024
30 kHz	"		0,011	0,005	0,019
33 kHz	"		0,010	0,005	0,018
36 kHz	"		0,0085	"	0,015
39 kHz	"		0,0075	0,0045	0,014
42 kHz	"		0,007	0,004	0,015
45 kHz	"		0,006	0,004	0,012
48 kHz	"		0,006	0,0035	0,0115
51 kHz	"		0,005	0,003	0,011
54 kHz	"		"	"	0,010
57 kHz	"		0,0045	"	"
60 kHz	"		0,004	0,0025	0,0035

1schL

Abbildung 13: Originale Messdaten zu Aufgabenteil b) und c).

Literatur

- [1] *Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.