VERSUCH 103

Biegung elastischer Stäbe

Felix Symma
felix.symma@tu-dortmund.de

Joel Koch
joel.koch@tu-dortmund.de

Durchführung: 18.01.2022

Abgabe: 25.01.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es, den Elastizitätsmodul eines Metalles durch Biegen eines Metallstabes zu bestimmen.

2 Theorie

Der Elastizitätsmodul E ist eine Materialkonstante, die die Verformung eines Körpers unter einer Normalpannung σ beschreibt. Aus der durch die Normalpannung resultierenden Längenänderung L folgt mit dem Hookschen Gesetz der Zusammenhang

$$\sigma = E \cdot \frac{L}{L}. \tag{1}$$

Um einen Metallstab zu verbiegen, muss an ihm ein äußeres Drehmoment wirken. Die Biegung bewirkt, dass sich die oberen Schichten im Metallstab außeinander strecken und die Unteren zusammen stauchen. Der Bereich in der Mitte des Stabes, der keine Veränderung seiner Länge erfährt, wird neutrale Faser genannt. Durch solch eine Deformation des Stabes entsteht ein inneres Drehmoment, dass dem Äußeren entgegengesetzt wirkt und den gleichen Betrag hat. Die Drehmomente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{F}} &= F(L - x) \\ M &= \int_Q y\sigma(y)\mathrm{dq}, \end{aligned}$$

Ihr habt F nicht d

wobei Q dabei der Querschnitt des Stabes und y der Abstand des Flächenelements dq zur neutralen Faser ist. Für die Durchbiegung eines einseitig befestigten Stabes ergibt sich somit

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{2}$$

Eine Abbildun

Hierbei beschreibt I das Flächenträgheitsmoment, L die Länge des Stabes und x die Entfernung des Messpunktes zum Einspannpunkt. Ist der Stab beidseitig befestigt, sodass die Kraft auf ihn in seiner Mitte wirkt, ergibt sich für $0 \leq x \leq L/2$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(3L^2x - 4x^3\right). \tag{3}$$

Demnach ergibt sich für $L/2 \leq x \leq L$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} \cdot \left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right). \tag{4}$$

Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt und der Seitenlänge a ist das Flächenträgheitsmoment gegeben durch

$$I_{\square} = \frac{a^4}{12}. \tag{5}$$

Das Flächenträgheitsmoment eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt und Durchmesser d ist durch

$$I = \frac{d^4}{64} \tag{6}$$

gegeben.

seid ihr euch da sicher? muss da nicht

3 Durchführung

3.1 Einseitige Einspannung

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird eine Apparatur wie in Abbildung 1 verwendet. Es wird nacheinander ein Stab mit runder und quadratischer Grunfläche wie in der Abbildung gezeigt am Punkt A eingespannt. Ein Gewicht kann nun am losen Ende des Stabes befestigt werden. Die Biegung des Stabes kann dann mit Hilfe der Messuhren und der Längenskala an jedem Punkt in Form des vertikalen Abstandes zum Auflagepunkt gemessen werden. Da nicht davon auszugehen ist, dass er Stab vor Versuchsbeginn perfekt gerade ist, wird zunächst eine Messung ohne Gewicht vorgenommen.

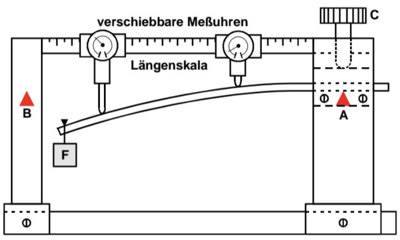


Abbildung 1: Aufbau der verwendeten Messapparatur [5].

3.2 Beidseitige Auflage

Im zweiten Teil der Messung werden die selben Stäbe nacheinander sowohl am Punkt A, als auch am Punkt B aufgelegt, jedoch ohne dabei eingespannt zu werden. Das Gewicht wird bei diesem Aufbau in der Mitte des Stabes platziert, wobei auch hier zuvor eine Nullmessung ohne Gewicht vorgenommen wird. Die Messung der Biegung findet hierbei mit zwei verschiedenen Messuhren statt, da durch das Gewicht in der Mitte eine durchgängige Messung mit einer Uhr nicht möglich ist.

Durchführung an sich in ordnung aber ziemlich kurz. Ein paar Eckdater

4 Auswertung

4.1 Elastizitätsmodul des eckigen Stabes

Ihr dürft die Zahlen zur Gleichungsrefer

4.1.1 Einseitige Einspannung

Es wird das Elastizitätsmodul E eines eckigen Stabes berechnet. Aus (2) folgt ein Zusammenhang zwischen dem Drehmoment $D(x)$ und dem Elastizitätsmodul E. Um letzteres zu bestimmen wird eine Hilfsvariable $\eta(x)$ eingeführt, mit

$$\eta(x) = Lx^2 - \frac{1}{3}x^3. \tag{7}$$

Wird $\eta(x)$ in (2) eingesetzt, folgt ein linearer Zusammenhang zwischen $D(x)$ und $\eta(x)$,

$$D(\eta) = \frac{F}{2EI}\eta. \tag{8}$$

Mithilfe einer linearen Regressionskurve wird ein Wert für die Steigung μ ermittelt, aus dem das Elastizitätsmodul bestimmt werden kann. Es wird (8) umgestellt zu

$$E = \frac{F}{2I\mu}. \tag{9}$$

In Abbildung 2 ist der Plot zu den Messwerten aus Tabelle 1 zu entnehmen, wobei das Gewicht für die Messwerte von $D_\mathrm{G}(x)$ eine Masse von $m_\mathrm{Last} = 750\,\mathrm{g}$ hat und an der Position $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wurde.

Tabelle 1: Messung des eckigen Stabes bei einseitger Einspannung ($\mathrm{G} = 750\,\mathrm{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_\mathrm{G}(x)$/mm
3	7,79	7,76
6	7,79	7,70
9	7,78	7,57
12	7,71	7,43
15	7,64	7,20
18	7,58	6,97
21	7,58	6,76
24	7,46	6,46
27	7,36	6,13
30	7,27	5,82
33	7,19	5,48
36	7,13	5,12
39	6,95	4,71
42	6,80	4,31
45	6,63	3,85
48	6,49	3,49

Im Text habt ihr das Gewicht als m_Last

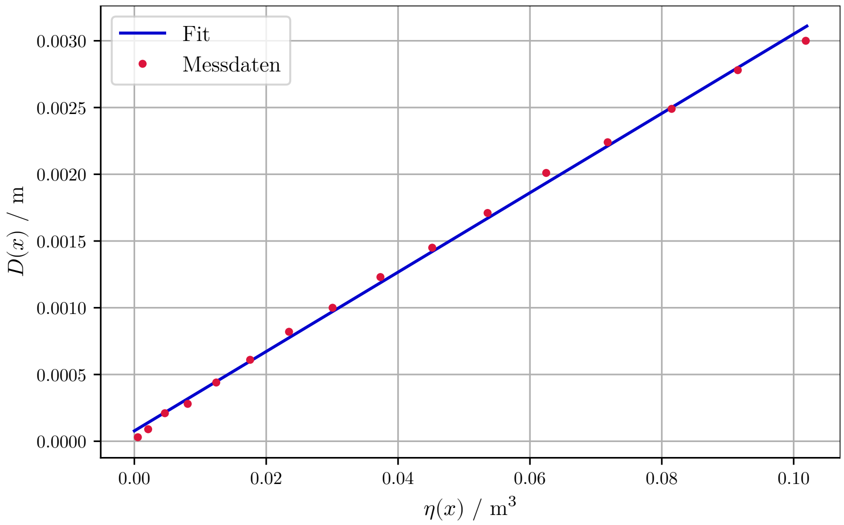


Abbildung 2: Messung eines quadratischen Stabes bei einseitger Einspannung (G = 750 g).

Tabelle 2: Abmaße des eckigen Stabes.

m / g	l / mm	a / mm
535.4	10.0	602.0
536.2	10.0	602.0
536.3	10.0	602.0
535.7	10.0	602.0
536.1	10.0	602.0

Aus den Maßen des Stabes solltet ihr d

Aus Tabelle 2 sind die Abmaße des eckigen Stabes zu entnehmen. Das Gewicht des Stabes ergibt sich mit Tabelle 2 zu

$$\overline{m_{\text{quadr}}} = (535{,}7 \pm 0{,}7)\,\text{g},$$

Habt ihr hier die Gewichtskraft berechnet die auf

woraus die Gewichtskraft zu

$$F_{\square} = (5{,}255 \pm 0{,}007)\,\text{N}$$

folgt. Aus (5) wird das Flächenträgheitsmoment berechnet zu

$$I_{\square} = 0{,}83 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2.$$

Die lineare Regression wird mithilfe der Python-Erweiterungen numpy [4] und scipy [3] durchgeführt, während der Plot mit matplotlib [2] erstellt wird. Die Erweiterungen liefern eine Ausgleichsgerade vom Typ $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ mit den Parametern

$$\mu = 0.0297 \pm 0.0004,$$
$$b = 0.0001 \pm 0.0004.$$

Einheiten fehlen.

Das Elastizitätsmodul berechnet sich mit (8) zu

$$E = (149{,}2 \pm 2{,}0) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

4.1.2 Beidseitige Einspannung

Ganzes Protkolle ir

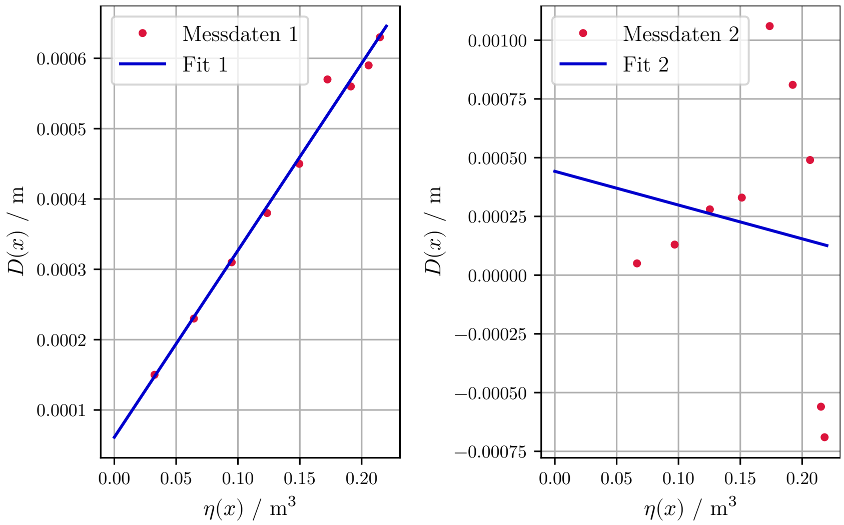
Aus Tabelle 3 sind die Messwerte der Biegung eines zylindrischen Stabes bei einseitiger Einspannung unter einem Gewicht von $m_{\text{Last}} = 750\,\mathrm{g}$, welches an der Position $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wurde, zu entnehmen. Abbildung 3 ist Plot zu den Messwerten aus Tabelle 3 und die lineare Regression zu entnehmen.

Hier nutzt ihr wie

Tabelle 3: Messung eines eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung (G = 1550 g).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_\mathrm{G}(x)$/mm
3	8,90	8,75
6	8,99	8,76
9	9,07	8,76
12	9,14	8,76
15	9,22	8,77
18	9,31	8,74
21	9,39	8,83
24	9,46	8,87
27	9,55	8,92
30	7,19	7,88
33	7,11	7,67
36	8,02	7,53
39	8,13	7,32
42	8,11	7,05
45	8,38	8,05
48	8,45	8,17
51	8,58	8,45
54	8,73	8,68

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseiger Einspannung des eckigen Stabes wird analog der einseitigen Einspannung vorgegangen. Da allerdings der Stab in zwei Teilen beschrieben wird, werden auch die Werte unabhängig voneinander ausgewertet



Wie gesagt, bei der beids

Abbildung 3: Messung eines quadratischen Stabes bei beidseiger Einspannung (G = 1550 g).

und geplottet. Für die erste Hälfte des Stabes, in der (3) gültig ist, wird die Hilfsvariable $\eta(x)$ definiert zu

$$\eta(x) = 3L^2x - 4x^3. \tag{10}$$

Für die andere Hälfte für $L/2 \leq x \leq L$ wird $\eta(x)$ zu

$$\eta(x) = 4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3 \tag{11}$$

definiert. Werden (10) und (11) analog zu (9) umgestellt und die Steigung μ mithilfe einer linearen Regression bestimmt, folgen zwei Werte für das Elastizitätsmodul

Auch die Steigung und b hat

$$\mu_1 = 0.00266 \pm 0.00012, \qquad b_1 = 0.00006 \pm 0.00012,$$
$$\mu_2 = -0.001 \pm 0.004, \qquad b_2 = 0,$$
$$E_1 = (143{,}0 \pm 6{,}0) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}, \qquad E_2 = (400 \pm 1500) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Der Mittelwert beträgt somit

$$\overline{E_\square} = (230 \pm 50) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

4.2 Elastizitätsmodul eines runden Stabes

Mit dem runden Stab wird wie mit dem eckigen Stab verfahren. Aus den Maßen des runden Stabes, die aus Tabelle 4 zu entnehmen sind, folgen die Mittelwerte für die Länge l und die Masse m des Stabes

$$m = (412{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g},$$
$$l = (59{,}20 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm}.$$

Tabelle 4: Abmaße des runden Stabes.

Hier auch noch Dichte vom Mater

l / cm	d / cm	m / g
59.3	1	411.8
59.2	1	412.0
59.2	1	412.2
59.1	1	412.2
59.2	1	412.2

Warum nutzt ihr andere Einheiten für die Maße des

hier auch wieder unterschiedliche

4.2.1 Einseitige Einspannung

Aus Tabelle 5 sind die Messwerte $D_0(x)$ und $D_G(x)$ bei einseitiger Einspannung des runden Stabes mit einem Gewicht von $m_{\text{Last}} = 750\,\text{g}$, welches an der Stelle $x = 50\,\text{cm}$ eingespannt wurde, zu entnehmen.

Tabelle 5: Messung des runden Stabes bei einseitger Einspannung ($G = 750\,\text{g}$).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_G(x)$/mm
3	8,13	8,07
6	8,21	8,00
9	8,27	7,98
12	8,34	7,87
15	8,41	7,72
18	8,45	7,44
21	8,57	7,32
24	8,63	7,11
27	8,74	6,84
30	8,81	6,60
33	8,92	6,32
36	9,01	5,99
39	9,09	5,65
42	9,10	5,37
45	9,10	4,93
48	9,14	4,64

Die Hilfsvariable $\eta(x)$ ergibt sich nach (2) wieder zu (7). Nach (8) ergibt sich analog zu dem eckigen Stab ein linearer Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der

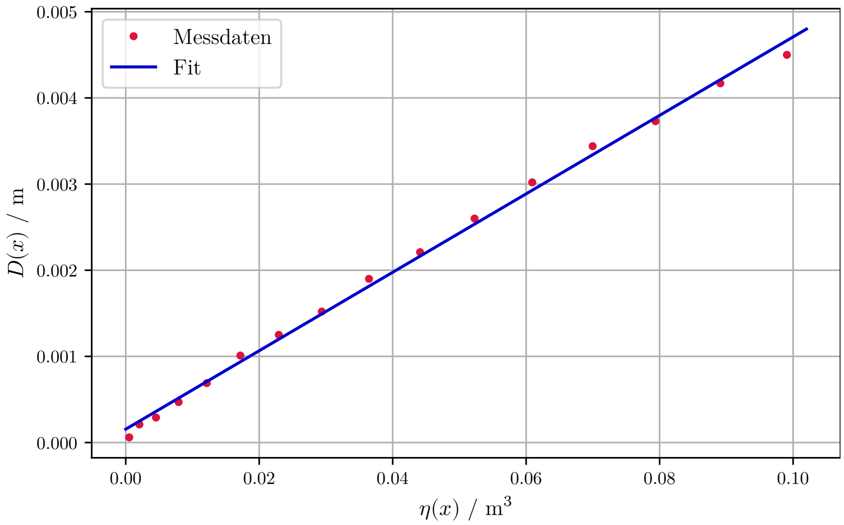


Abbildung 4: Messung eines runden Stabes bei einseitiger Einspannung (G = 750 g).

Variablen $\eta(x)$, wobei der runde Stab die folgenden Werte hat

Wenn ihr hier das Trägheitsmoment des r

$$I_\bigcirc = (\frac{1}{64} \pm 0.0)\mathrm{kgm}^2,$$
$$F_\bigcirc = (4{,}042 \pm 0{,}002)\,\mathrm{N}.$$

Die lineare Regression des Types $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ liefert die Parameter

$$\mu = 0.0455 \pm 0.0007,$$
$$b = 0.0002 \pm 0.0007,$$

Einheiten für Steigu

woraus mit (9) ein Elastizitäsmodul von

$$E = (517{,}0 \pm 8{,}0) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$$

folgt.

Seid ihr sicher, dass ihr keinen Fehler in der Berechung gemacht habt?E

4.2.2 Beidseitige Einspannung

Konsistente Defini

Aus Tabelle 6 sind die Messwerte für die Auslenkungen $D_0(x)$ und $D_\mathrm{G}(x)$ zu entnehmen, wobei ein Gewicht von $m = 1550\,\mathrm{g}$ bei $x = 27{,}5\,\mathrm{cm}$ positioniert wurde. Abbildung 5 ist die grapische Darstellung der Messwerte, die jeweils in $0 \neq x \neq L/2$ und $L/2 \neq x \neq L$ unterteilt wurden. Es ist außerdem eine lineare Regression für beide Einteilungen aufzufinden.

Schreibt am be

Auflage

Tabelle 6: Messung des runden Stabes bei beidseitiger Einspannung (G = 1550 g).

x / cm	$D_0(x)$/cm	$D_G(x)$/mm
3	9,93	8,67
6	9,95	8,59
9	9,97	8,44
12	9,86	8,30
15	9,82	8,12
18	9,67	7,85
21	9,60	7,74
24	9,52	7,63
27	9,36	7,51
30	7,50	6,63
33	7,38	6,56
36	7,26	6,54
39	7,17	6,51
42	7,04	6,49
45	6,95	6,49
48	6,68	6,48
51	6,72	6,53
54	6,51	6,60

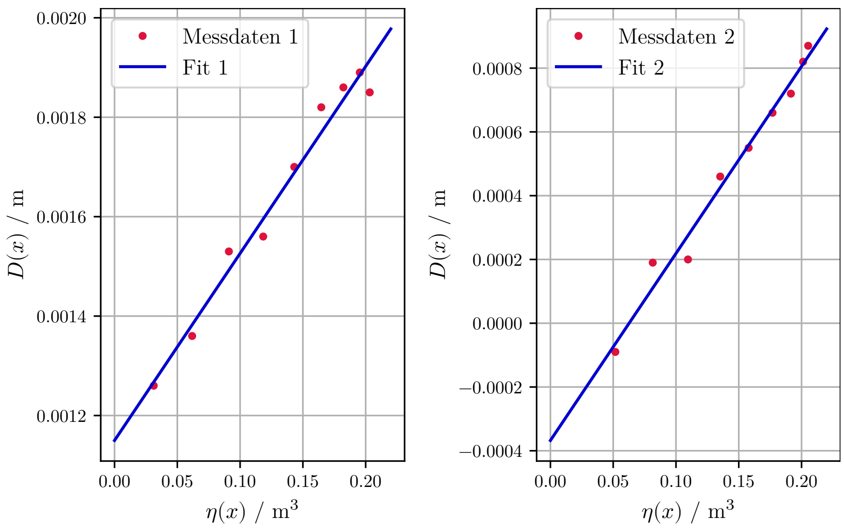


Abbildung 5: Messung eines runden Stabes bei beidseitiger Einspannung (G = 1550 g).

Analog der Berechnung der Elastizitätsmodule des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung werden für die lineare Regression die Hilfsvariablen (10) und (11) definiert. Aus der linearen Regression der Form $D(x) = \mu \cdot \eta(x) + b$ folgen die Elastizitätsmodule

$$\mu_1 = 0.00376 \pm 0.00023, \qquad b_1 = 0.00115 \pm 0.00023,$$
$$\mu_2 = 0.00587 \pm 0.00031, \qquad b_2 = -0.00037 \pm 0.00031,$$
$$E_1 = (539 \pm 330) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}, \qquad E_2 = (345 \pm 180) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Die E-Module sind auch wieder recht groß. Ich glaub

Der Mittelwert beträgt somit

$$\overline{E_{\bigcirc}} = (467 \pm 130) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

5 Diskussion

Der Literaturwert für das Elastizitätsmodul von Kupfer lautet nach [1]

$$E_{lit} = 125 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Aus dem Versuch wurden zwei Elastizitätsmodule, das eines eckigen und das eines runden Stabes bestimmt,

$$\overline{E_{\square}} = (230 \pm 50) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa},$$
$$\overline{E_{\bigcirc}} = (467 \pm 130) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}.$$

Für beide Werte lässt sich aus dem Versuch der Theoriewert nicht verifizieren, da die Abweichungen von $\Delta_{\square} = 84\%$ und $\Delta_{\bigcirc} = 273.6\%$ viel zu hoch sind. Wenn man den zweiten Wert für das Elastizitätsmodul des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung ($(400 \pm 1500) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$) aus dem Mittelwert streicht, da der Wert viel zu ungenau ist, so kommt ein neuer Mittelwert von

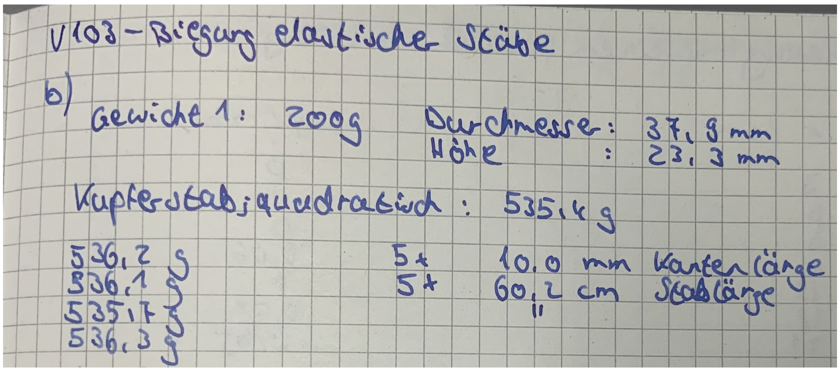
$$\overline{E_{\square}} = (146{,}0 \pm 3{,}4) \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$$

heraus. Dieser Wert hat somit nur noch eine Abweichung von $\Delta_{\square} = 14.38\%$. Für diesen Mittelwert lässt sich der Literaturwert für Kupfer verifizieren.

Eure Messu

Grund für diese sehr hohen Ungenauigkeiten werden mitunter die Messuhren sein, die große Ungenauigkeiten verursachen können. So schlugen die Zeiger bereits nach den kleinsten Erschütterungen aus, was das Messen erschwerte. Ein weiterer Grund für Abweichungen sind die Zustände der benutzten Kupferstäbe. So war der eckige Kupferstab laut der Messuhr von großen Verbiegungen durchzogen, weshalb die Messwerte nicht linear erfolgten. Bei der Messung der Auslenkungen bei beidseitigen Einspannungen wurden zwei Messuhren benutzt, eine rechts und eine links des Gewichtes. Die linke Messuhr hat dabei keine den Werten der rechten Uhr kongruenten Werte gemessen, auch wenn dieselben Positionen vermessen wurden. Auch die vergleichsweise nur geringen Auslenkungen der beiden Stäbe verursachen hohe Ungenauigkeiten, da nur in einem kleinen Messbereich mit geringem Gewicht gemessen wird. Eine andere mögliche Fehlerquelle könnte ein falscher Versuchsaufbau sein. So durfte bei beidseitiger Messung der Stabe nicht eingespannt werden, wenn dies allerdings doch getan wurde, so sind die Werte ungenau Punkt

6 Anhang



V103 – Biegung elastische Stäbe

b)

Gewicht 1: 200g Durchmesser: 37,9 mm

Höhe : 23,3 mm

Kupferstab, quadratisch : 535,4 g

536,2 g 5x 10,0 mm Kantenlänge

536,1 g 5x 60,2 cm Stablänge

535,7 g

536,3 g

Abbildung 6: Originale Messdaten.

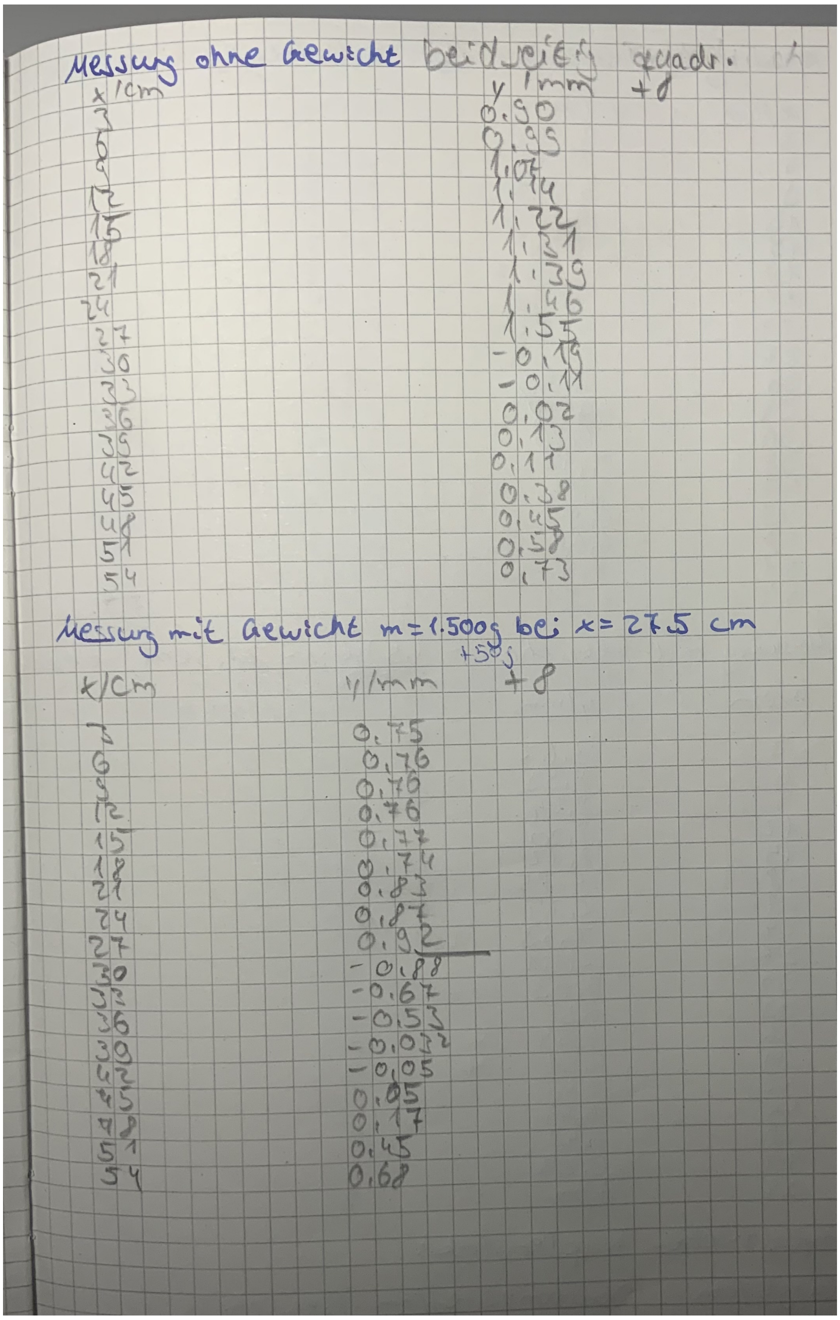
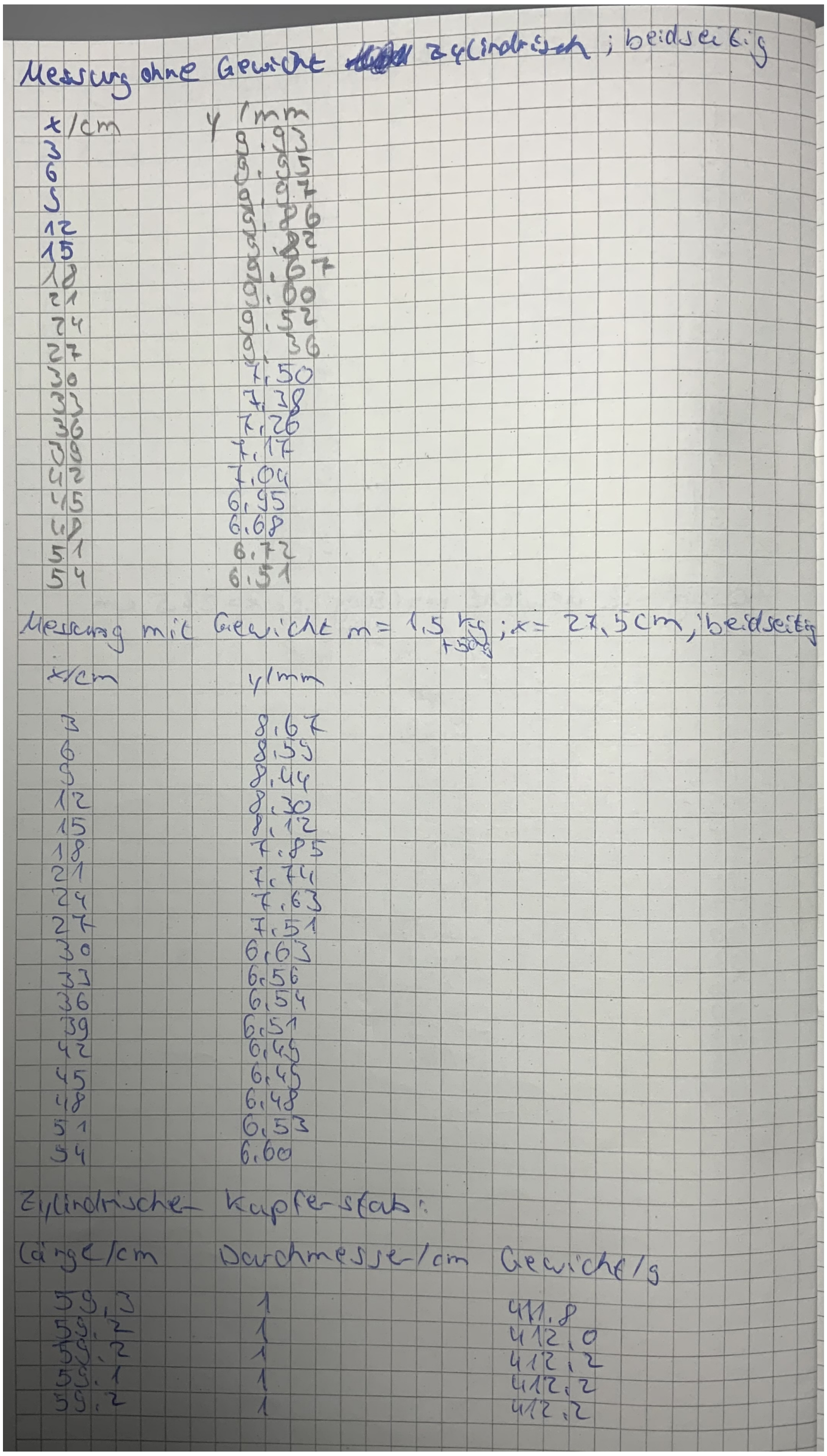


Abbildung 7: Originale Messdaten.



Messung ohne Gewicht ~~[illegible]~~ zylindrisch ; beidseitig

x/cm	y/mm
3	9.93
6	9.95
9	9.97
12	9.86
15	9.82
18	9.67
21	9.60
24	9.52
27	9.36
30	7,50
33	7,38
36	7,26
39	7,17
42	7,04
45	6,95
48	6.68
51	6.72
54	6.51

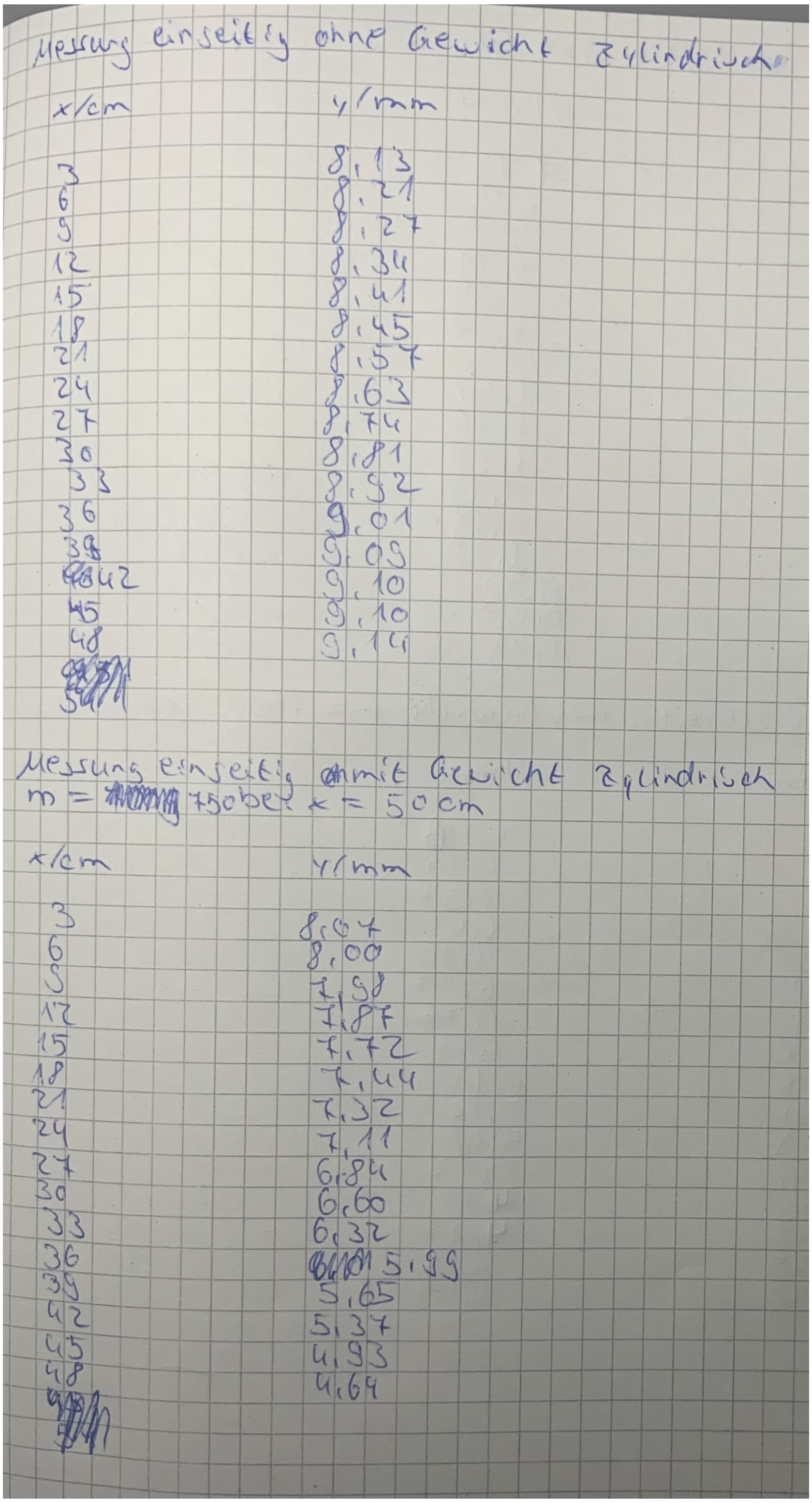
Messung mit Gewicht m = 1,5 kg +50 g ; x = 27,5 cm, beidseitig

x/cm	y/mm
3	8,67
6	8,59
9	8,44
12	8,30
15	8,12
18	7.85
21	7,74
24	7.63
27	7.51
30	6,63
33	6,56
36	6,54
39	6,51
42	6,45
45	6,45
48	6,48
51	6,53
54	6.60

Zylindrische Kupferstab:

Länge/cm	Durchmesser/cm	Gewicht/g
59,3	1	411.8
59.2	1	412,0
59.2	1	412,2
59.1	1	412,2
59.2	1	412,2

Abbildung 8: Originale Messdaten.



Messung einseitig ohne Gewicht zylindrisch

x/cm	y/mm
3	8,13
6	8,21
9	8,27
12	8,34
15	8,41
18	8,45
21	8,57
24	8,63
27	8,74
30	8,81
33	8,92
36	9,01
39	9,09
42	9,10
45	9,10
48	9,14

Messung einseitig ~~ohne~~ mit Gewicht zylindrisch
m = 750 bei x = 50 cm

x/cm	y/mm
3	8,07
6	8,00
9	7,98
12	7,87
15	7,72
18	7,44
21	7,32
24	7,11
27	6,84
30	6,60
33	6,32
36	5,99
39	5,65
42	5,37
45	4,93
48	4,64

Abbildung 9: Originale Messdaten.

Literatur

[1] Horst Czichos und Manfred Hennecke. *HÜTTE - Das Ingenieurwissen.* Springer, 2008. ISBN: 9783540718512.

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: http://www.scipy.org/.

[4] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.

[5] *Versuch 103 - Biegung elastischer Stäbe.* TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.