

v46

Der Faraday-Effekt

Joel Koch

joel.koch@tu-dortmund.de

Felix Symma

felix.symma@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.04.2023

Abgabe: 26.04.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Die effektive Masse	3
2.2	Zirkulare Doppelbrechung	3
2.3	Dotierte Halbleiter	5
2.4	Der Faraday-Effekt	5
3	Durchführung	6
3.1	Versuchsaufbau	6
3.2	Justierung der Apparatur	7
3.3	Messprogramm	7
4	Auswertung	8
4.1	Messung der magnetischen Flussdichte	8
4.2	Bestimmung der Rotationswinkel	9
4.3	Bestimmung der effektiven Masse	11
5	Diskussion	13
	Literatur	14

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es die effektive Masse der Leitungselektronen in einem n-dotiertem Galliumarsenid (n-GaAs) mithilfe des Faraday-Effektes zu bestimmen. Dazu wird der Winkel θ zwischen der Polarisationssebene einer einfallenden und einer auslaufenden Welle gemessen.

2 Theorie

2.1 Die effektive Masse

Die effektive Masse beschreibt in der Festkörperphysik das Konzept einer Masse eines Teilchens im Rahmen einer semiklassischen Beschreibung. Ähnlich der reduzierten Masse erlaubt die effektive Masse die Verwendung einer einfacheren Bewegungsgleichung, als mit der realen Masse. Die effektive Masse folgt aus einer Taylorreihenentwicklung der Elektronenenergie $\epsilon(\vec{k})$, mit dem Wellenvektor \vec{k} ,

$$\epsilon(\vec{k}) = \epsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_i^2} \right)_{k=0} k_i^2 + \dots \quad (1)$$

In der Taylorreihe (1) lässt sich der harmonische Oszillator

$$\epsilon = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

identifizieren, woraus der Ausdruck der effektiven Masse folgt,

$$m_i^* := \frac{\hbar^2}{\left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_i^2} \right)_{k=0}}. \quad (2)$$

2.2 Zirkulare Doppelbrechung

Zirkulare Doppelbrechung ist die Fähigkeit eines Kristalles die Polarisationssebene einer linear polarisierten Welle bei Transmission durch ein optisches Medium zu drehen, sofern ein äußeres Magnetfeld anliegt, dessen Magnetfeldlinien parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle sind. Grund dafür ist, dass die Phasengeschwindigkeiten für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht in einem Kristall verschieden sind. Der Winkel zwischen der Polarisationssebene der eintreffenden und auslaufenden Welle wird als Drehwinkel θ definiert. Um ebendiesen Winkel zu berechnen wird die Polarisationssebene einer linear polarisierten Welle, nachdem sie einen Kristall der Länge L durchquert hat, in einen linkszirkularen und einen rechtszirkularen Anteil zerlegt, die sich beide in z -Richtung ausbreiten.

$$E(z) = \frac{1}{2} (E_R(z) + E_L(z)). \quad (3)$$

Für eine Welle, die bei $z = 0$ in den Kristall eintritt, folgt, dass die Polarisation parallel zur x -Richtung polarisiert ist,

$$E(0) = E_0 \vec{x}_0. \quad (4)$$

Ein Skizze einer Welle, die von rechts in $z = 0$ in den Kristall eintritt und um den Winkel θ gedreht wird ist in Abbildung 1 abgebildet.

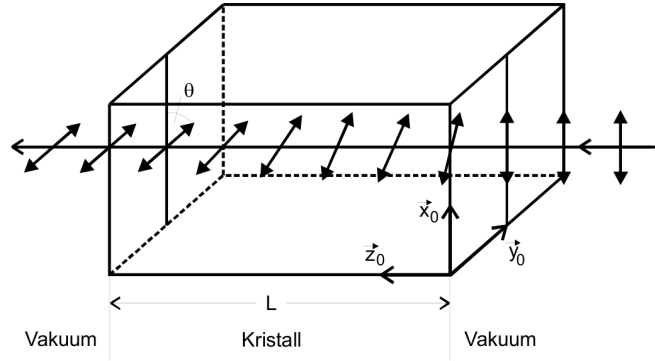


Abbildung 1: Skizze einer Drehung einer Polarisationsebene.[1]

Mit den Abkürzungen

$$\psi \equiv \frac{1}{2}L(k_R + k_L), \quad (5)$$

$$\theta \equiv \frac{1}{2}L(k_R - k_L), \quad (6)$$

folgt ein Ausdruck für die Polarisationsebene nachdem eine Welle einen Kristall der Länge L durchquert hat zu

$$E(L) = E_0 e^{i\psi} (\cos(\theta) \vec{x}_0 + \sin(\theta) \vec{y}_0). \quad (7)$$

Die Gleichung (7) beschreibt eine linear polarisierte Welle an der Stelle $z = L$, deren Polarisation um den Winkel θ gegenüber der eingehenden Welle gedreht ist. Die Doppelbrechung der Welle innerhalb eines Kristalles entsteht durch induzierte elektrische Dipolmomente, die sowohl auf die Atome auf den Gitterplätzen, als auch auf die Bandelektronen, die in Wechselwirkung mit den Atomrümpfen stehen, zurückgeht. Es kann sich deshalb nur um induzierte Dipole handeln, da permanente Dipole eine zu große Relaxationszeit aufweisen, als dass sie mit dem Wechselfeld einer Lichtquelle interagieren können.

Die makroskopische Polarisation eines Kristalls lässt sich mit

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (8)$$

beschreiben, wobei \vec{P} die Polarisation selber ist, ε_0 die Influenzkonstante und χ die dielektrische Suszeptibilität beschreibt. Die dielektrische Suszeptibilität ist in isotropen

Kristallen, wie etwa in Gläsern ohne äußerem Magnetfeld, eine skalare Größe, wohingegen sie in anisotropen Kristallen einen Tensor darstellt. Für doppelbrechende Materialien treten nicht-diagonale Elemente in dem eigentlich symmetrischen Tensor auf, die komplex konjugiert sind,

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ i\chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Wird die Wellengleichung für eine ebene Welle gelöst, dann folgt als Ergebnis, dass die Wellenzahl für ebensolche Materialien nur die Werte

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(1 + \chi_{xx}) \pm \chi_{xy}} \quad (10)$$

annehmen kann. Damit lässt sich der Drehwinkel in der folgenden Form darstellen,

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2cn} \chi_{xy}. \quad (11)$$

2.3 Dotierte Halbleiter

Aufgrund der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband in der Bandstruktur von Halbleitern, werden Halbleiter mit Fremdatomen versehen, wodurch sich die elektrische Leitfähigkeit steigert. Solche Halbleiter werden dotierte Halbleiter genannt. Es wird zwischen n-dotierten Halbleitern und p-dotierten Halbleitern unterschieden. N-Halbleiter, fügen in einem vierwertigen Atom fünfwertige Fremdatome auf den Gitterplätzen hinzu, wodurch vier Valenzelektronen zum Aufbau der vier kovalenten Bindung genutzt werden kann. Es bleibt dabei ein Elektron über, welches über viele Gitteratome delokalisiert ist und deshalb als frei angesehen werden kann. Es genügt bereits eine geringe Energie um das delokalisierte Hüllenelektron zu lösen und zu einem Leitungselektron zu machen. Aus diesem Grund werden die Fremdatome auch Donatoren genannt. Die Energieniveaus der Donatoren sind dicht unter der Leitungsbandkante und können nur mit einem Zustand besetzt werden. Die bei n-Halbleitern zur Leitfähigkeit beitragenden Elektronen sind die von den Donatoren ins Leitungsband abgegebenen Elektronen, die damit die elektrische Leitfähigkeit erhöhen.

Bei p-Halbleitern werden in ein System aus vierwertigen Atomen dreiwertige Fremdatome gebracht, wobei eine der vier kovalenten Bindungen nur noch mit einem, anstatt ursprünglich mit zwei Elektronen, besetzt werden kann. Es entsteht demnach ein Loch, in dem ein Elektron eingefangen werden kann. Die Fremdatome eines p-Halbleiters werden deshalb Akzeptoren genannt. Das Energieniveau der Akzeptoren befindet sich knapp über dem Valenzband und somit tragen überwiegend die Löcher im Valenzband, die durch die Akzeptoren entstanden sind, zur elektrischen Leitfähigkeit bei [2].

2.4 Der Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt beschreibt das Auftreten von Doppelbrechung in einem optisch aktiven Medium, also wenn es mit einem Magnetfeld durchzogen ist. Die Anwesenheit dieses

Magnetfeldes erniedrigt die Symmetrie eines Kristalles und so lässt sich zeigen, dass der Drehwinkel der auftretenden Doppelbrechung proportional zur magnetischen Flussdichte B , zur Probenlänge L und zur Zahl der Ladungsträger N pro Volumeneinheit ist,

$$\theta = \frac{e_0^3 \omega^2 N B L}{e \epsilon_0 c (-m \omega^2 + K)^2 - (e_0 \omega B)^2 n}, \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{e_0^3 \omega^2 N B L}{2 \epsilon_0 c m^2 \left((-\omega^2 + K/m)^2 - \left(\frac{e_0}{m} B \omega \right)^2 \right) n}. \quad (13)$$

In (13) ist der Faktor $\sqrt{K/m}$ als Resonanzfrequenz ω_0 , die bei Halbleitern im Infrarotbereich liegt, und $\frac{B e_0}{m}$ als Zyklotronfrequenz ω_c zu identifizieren. Unter der Annahme, dass die Messfrequenz weit unterhalb der Resonanzfrequenz liegt, folgt der Fall der quasifreien Ladungsträger, der im Grenzfall $\omega_0 \rightarrow 0$ mit $\omega_0 > \omega_c$ betrachtet wird. Es folgt,

$$\theta(\lambda) = \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\epsilon_0} \frac{1}{m^2} \frac{1}{\lambda^2 \omega_0^4} \frac{N B L}{n}. \quad (14)$$

Wird die Masse des Elektrons m durch die effektive Masse m^* ersetzt und die Faraday-Rotation pro Einheitslänge $\theta_{\text{frei}} = \theta/L$ eingefügt, vereinfacht sich (14) zu folgenden Ausdruck,

$$\theta_{\text{frei}} = \frac{e_0^3}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 (m^*)^2} \lambda^2 \frac{N B}{n}. \quad (15)$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Der Versuch wird nach Abbildung 2 aufgebaut.

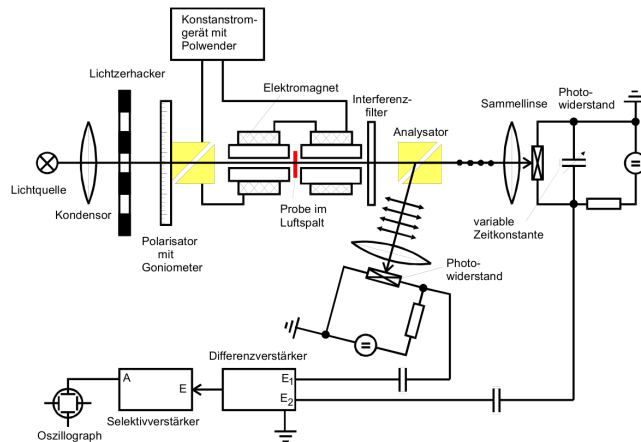


Abbildung 2: Skizze des Versuchsaufbaus [1].

Als Lichtquelle wird eine Halogenlampe verwendet, dessen Lichtspektrum zum Teil im nahen Infrarotbereich liegt. Das emittierte Licht wird mithilfe einer Kondensatorlinse gebündelt. Danach wird der Lichtstrahl mithilfe eines Lichtzerhackers in Bündel geteilt, was das Rauschen der Photowiderstände aufgrund ihrer hohen Innenwiderstände reduziert. Der Lichtzerhacker ist an einen Selektivverstärker angeschlossen und verwendet dieselbe Mittenfrequenz, wie es der Lichtzerhacker tut, wodurch das Signalrauschen weiter unterdrückt wird. Hinter dem Lichtzerhacker befindet sich ein Glan-Thomson-Prisma aus Kalkspat, das dazu genutzt wird das Licht linear zu polarisieren. Das Licht trifft danach auf eine scheibenförmige Probe, die sich innerhalb eines Magnetfeldes befindet, dessen Magnetfeldlinien parallel zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes sind. Hinter dem Elektromagneten können verschiedene Interferenzfilter geschaltet werden. Um die Rotation der Polarisationssebene messen zu können, wird der Lichtstrahl mithilfe eines zweiten Glan-Thomson-Prismas in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, deren Polarisierung orthogonal zueinander steht. Das Licht wird erneut durch Linsen gebündelt und die Intensität mithilfe von Photowiderständen gemessen. Die Signale der Photowiderstände werden an einen Differenzverstärker angeschlossen, dessen Ausgang an einem Oszilloskop angezeigt wird [1].

3.2 Justierung der Apparatur

Um die Apparatur zu Justieren wird zunächst die Probe und der Interferenzfilter aus der Vorrichtung herausgenommen. Die Kondensatorlinse ist so einzustellen, dass das meiste Licht in den vorgesehenen Lichtkanal geleitet wird. Als nächstes muss überprüft werden, ob die Polarisationsvorrichtung funktioniert. Dazu wird das Prisma so eingestellt werden, dass die Lichtintensität von einem der beiden Strahlgänge vollständig verschwindet. Nun wird der Lichtzerhacker auf 450 Hz eingestellt und die Mittenfrequenz beim Selektivverstärker auf denselben Wert gestellt. Der Photowiderstand, auf den auch das Licht gestrahlt wird, wird mit dem Selektivverstärker über den Kanal "Input" verbunden. Der Ausgang "Resonance" wird an das Oszilloskop angeschlossen. Mithilfe der Frequenzstellknöpfe am Selektivverstärker wird das Signal so gewählt, das die Amplitude maximal wird. Es ist der Gütefaktor auf den Maximalwert $Q = 100$ einzustellen [1].

3.3 Messprogramm

Es wird nun mit einer reinen Probe des Galliumarsenid die Faraday-Rotation gemessen, indem das Glan-Thomson-Prisma bei maximaler Magnetfeldstärke so eingestellt wird, dass das Signal auf dem Oszilloskop minimal wird. Nachdem der Winkel des Prismas gemessen wurde, kann das Magnetfeld langsam heruntergedreht, umgepolst und wieder auf den Maximalwert hochgedreht werden. Das Prisma ist erneut auf den Minimalwert einzustellen, um den Winkel abzulesen. Die Messung wird mit allen Interferenzfiltern wiederholt und dient später als Referenz.

Das Messprogramm wird mit zwei Proben dotierten Galliumarsenids mit unterschiedlichen Dichten dotieren Materials wiederholt. Zum Schluss wird die magnetische Flussdichte in Richtung des einfallenden Lichtes mit Hilfe einer Hall-Sonde bei maximalem Magnetfeld-

strom vermessen [1].

4 Auswertung

4.1 Messung der magnetischen Flussdichte

Die Werte von der Messung der magnetischen Flussdichte sind Tabelle 1 zu entnehmen.

Tabelle 1: Messwerte der magnetischen Flussdichte.

Abstand [mm]	Flussdichte [mT]
-10	277
-9	311
-8	344
-7	368
-6	384
-5	393
-4	401
-3	406
-2	409
-1	411
0	411
1	410
2	408
3	405
4	399
5	390
6	379
7	364
8	333
9	303
10	253

Die Messwerte sind in Folgender Abbildung 3 graphisch dargestellt.

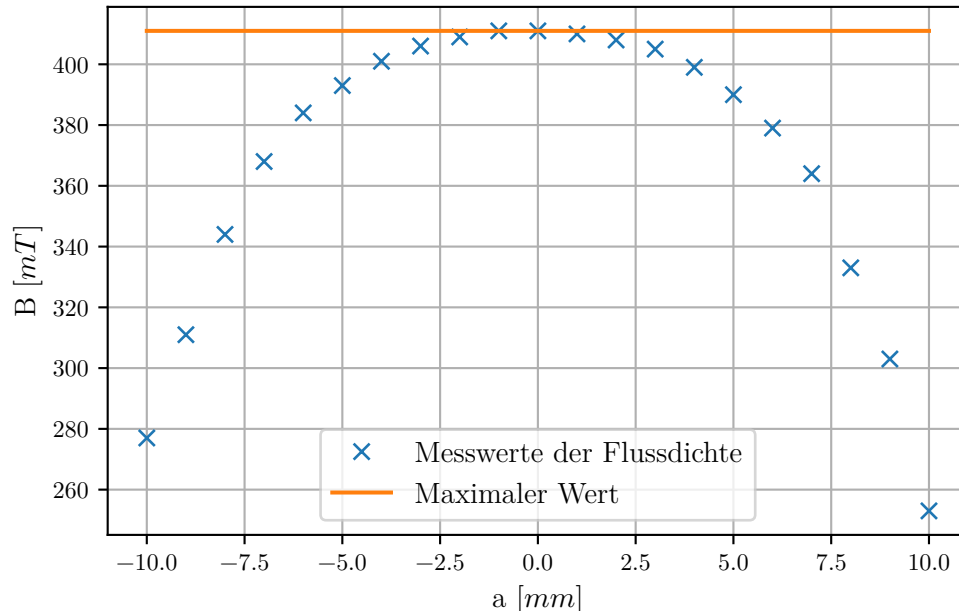


Abbildung 3: Messwerte der magnetischen Flussdichte.

Der maximale Wert für die magnetische Flussdichte kann als 411 mT abgelesen werden.

4.2 Bestimmung der Rotationswinkel

Die Eigenschaften der drei verwendeten Proben sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2: Eigenschaften der verwendeten Proben.

	1.Probe	2.Probe	3.Probe
Dotierung N [$1/\text{cm}^3$]	-	$1,2 \cdot 10^{18}$	$2,8 \cdot 10^{18}$
Länge L [mm]	5,11	1,36	1,296

Die Messwerte der Drehwinkel sind in den folgenden Tabellen für die jeweiligen Proben dargestellt. θ_1 und θ_2 beschreiben hierbei die gemessenen Winkel bei entgegengesetzt gepolten Magnetfeldern. Ebenfalls in der Tabelle aufgeführt sind die zugehörigen Rotationswinkel die durch

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$$

folgen. Die Rotationswinkel werden hierbei mit Hinblick auf weitere Rechnungen im Bogenmaß angegeben und auf die jeweilige Länge L der zugehörigen Probe normiert.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\theta_1/^\circ$	$\theta_2/^\circ$	$\theta/d/\text{rad m}^{-1}$
1,06	129,42	105,75	40,5
1,29	115,33	108,83	11,12
1,45	127,83	109,83	30,8
1,72	121,33	111,67	16,54
1,96	120,83	112,75	13,83
2,156	124,0	116,0	13,69
2,34	125,58	121,33	7,27
2,51	135,17	130,0	8,84
2,65	121,42	119,67	2,99

Tabelle 3: Messwerte der zwei Winkel für die jeweilige Wellenlänge mit der zugehörigen Winkeldifferenz in Radiant für die undotierte Probe.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\theta_1/^\circ$	$\theta_2/^\circ$	$\theta/d/\text{rad m}^{-1}$
1,06	121,08	112,25	56,68
1,29	112,75	121,25	54,54
1,45	118,75	116,0	17,65
1,72	119,0	116,83	13,9
1,96	119,17	111,33	50,26
2,156	116,92	127,08	65,24
2,34	131,25	129,92	8,56
2,51	0,0	0,0	0,0
2,65	104,75	123,33	119,24

Tabelle 4: Messwerte der zwei Winkel für die jeweilige Wellenlänge mit der zugehörigen Winkeldifferenz in Radiant für die $1,2 \cdot 10^{18} \text{1/cm}^3$ Probe.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\theta_1/^\circ$	$\theta_2/^\circ$	$\theta/d/\text{rad m}^{-1}$
1,06	122,5	108,92	91,46
1,29	118,67	110,0	58,36
1,45	120,08	112,92	48,26
1,72	119,17	108,83	69,58
1,96	121,75	109,33	83,61
2,156	122,5	111,83	71,82
2,34	122,67	121,25	9,54
2,51	0,0	0,0	0,0
2,65	127,33	108,33	127,94

Tabelle 5: Messwerte der zwei Winkel für die jeweilige Wellenlänge mit der zugehörigen Winkeldifferenz in Radiant für die $2,8 \cdot 10^{18} \text{1/cm}^3$ Probe.

Die sich daraus ergebenden Winkeldifferenzen sind in Abbildung 4 gegen λ^2 graphisch dargestellt.

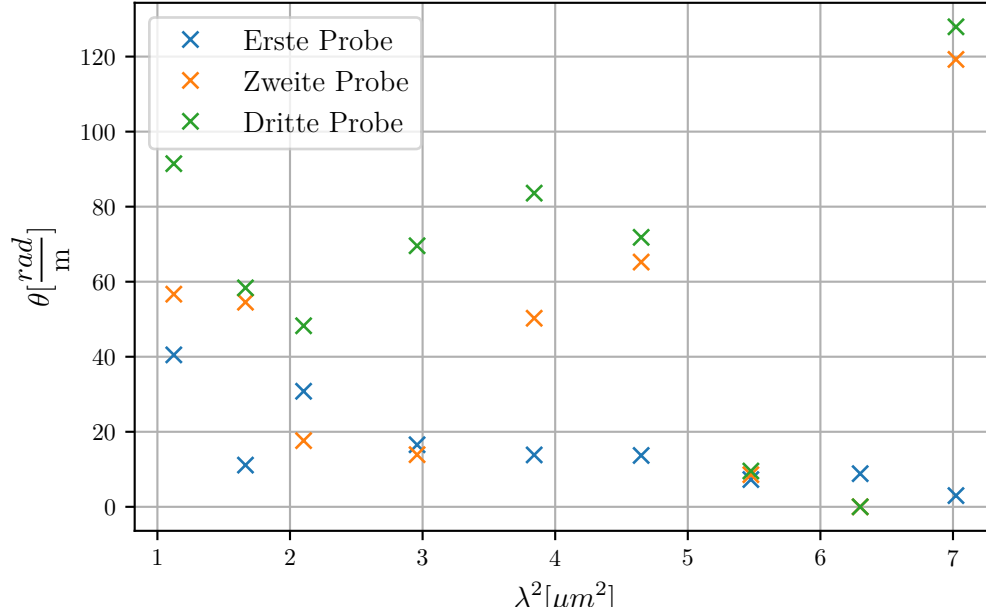


Abbildung 4: Messwerte der Rotationswinkel gegen jeweilige Wellenlänge λ^2 für alle drei Proben.

4.3 Bestimmung der effektiven Masse

Um die effektive Masse zu bestimmen, werden zunächst von den Werten der dotierten Proben, die der hochreinen GaAs Probe subtrahiert, um die Effekte der Leitungselektronen auf den Rotationswinkel zu isolieren. Die Differenzen werden anschließend, wie zuvor, gegen λ^2 aufgetragen und eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt.

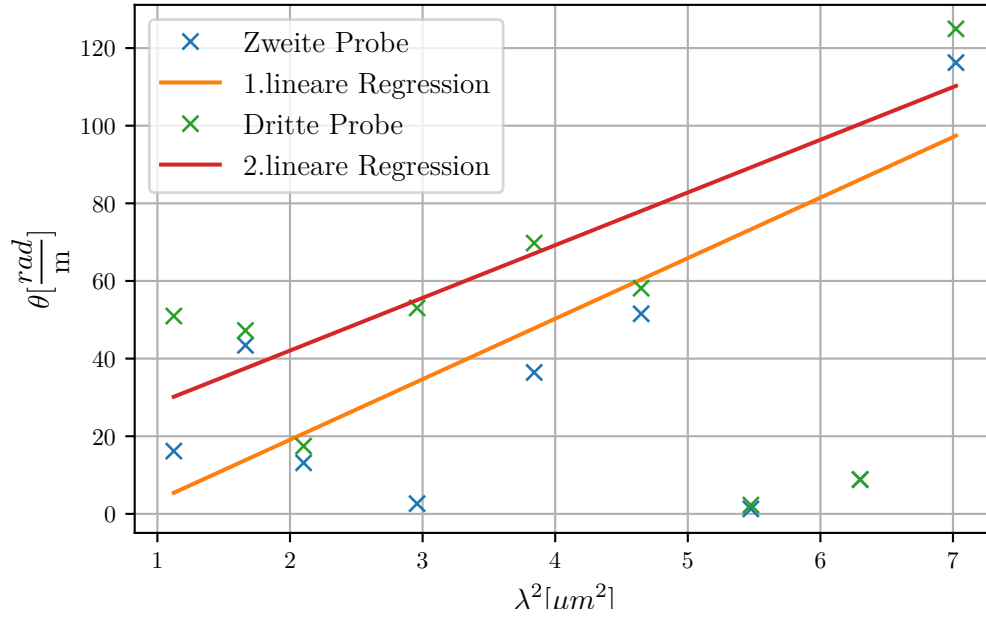


Abbildung 5: Differenzwerte der Rotationswinkel von Dotierten und Undotierten Proben mit Ausgleichsgeraden.

Die linearen Ausgleichsrechnungen der Form

$$\theta_{\text{frei}}(\lambda^2) = a \cdot \lambda^2 \quad (16)$$

liefern die Werte

$$a_1 = (15,6 \pm 4,56) \text{ m}^{-3}$$

$$a_2 = (13,6 \pm 3,83) \text{ m}^{-3},$$

wobei zu beachten ist, dass die Werte für $\lambda = 2,34 \mu\text{m}$ und $\lambda = 2,51 \mu\text{m}$ in der Rechnung nicht berücksichtigt wurden. Dies liegt daran, dass sie sehr weit vom Trend der anderen Werte abweichen und somit als Ausreißer zu betrachten sind. Es kann nun durch einsetzen von Gleichung 16 in Gleichung 15 die Gleichung

$$m^* = \sqrt{\frac{e_0^3}{8\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{NB}{n} \frac{1}{a}}$$

zur Bestimmung der effektiven Masse gefunden werden. Für die Berechnung werden

folgende Werte verwendet.

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1,2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} \\
N_2 &= 2,8 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} \\
a_1 &= (15,6 \pm 4,56) \text{ m}^{-3} \\
a_2 &= (13,6 \pm 3,83) \text{ m}^{-3} \\
B &= 0,411 \text{ T} \\
n &= 3,354 \\
e_0 &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
\varepsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}} \\
c &= 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Die Werte liefern für die effektive Masse die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
m_1^* &= (4,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-32} \text{ kg} \\
m_2^* &= (7,4 \pm 1,0) \cdot 10^{-32} \text{ kg}.
\end{aligned}$$

5 Diskussion

Die Messung der magnetischen Flussdichte lief, wie zu erwarten, problemlos ab und das Ergebniss entspricht den Erwartungen.

Bei den weiterführenden Messungen gab es jedoch Schwierigkeiten. Bei den Messungen der Rotationswinkel konnten mit dem Interferenzfilter mit $\lambda = 2,51 \mu\text{m}$ bei beiden Dotierten Proben keine Messwerte aufgenommen werden. Dies lag daran, dass die Signalspannung sich bei variierendem Winkel am Goniometer nicht zu verändern schien. Dies machte es unmöglich, einen Winkel zu finden, für den sie minimal würde.

Auch bei den restlichen Messwerten gab es teilweise Probleme beim Finden der minimalen Signalspannung, da sich diese für einen großen Winkelbereich nicht verändert hat und so kein einzelner Winkel für das Minimum erkennbar war. In diesen Fällen musste ein Winkel aus diesem Bereich gewählt werden, was teilweise die große Streuung der Werte erklären könnte.

Die final resultierenden Werte für die effektive Masse im Verhältnis zur Elektronmasse lauten

$$\begin{aligned}
m_1^* &= (4,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-32} \text{ kg} = (0,050 \pm 0,007) \cdot m_e \\
m_2^* &= (7,4 \pm 1,0) \cdot 10^{-32} \text{ kg} = (0,081 \pm 0,011) \cdot m_e.
\end{aligned}$$

Der zu erwartende Wert liegt bei $m = 0,063 \cdot m_e$. Dies ergibt eine relative Abweichung von 20,6% und 28,6%.

Literatur

- [1] *V46 - Faraday-Effekt an Halbleitern*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2019.
- [2] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper*. 5. Aufl. Springer, 2016.