v61

Der Helium-Neon-Laser

Joel Koch Felix Symma joel.koch@tu-dortmund.de felix.symma@tu-dortmund.de

Durchführung: 05.05.2023 Abgabe: 08.03.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	setzung	3
2	The	orie	3
	2.1	Grundlagen des He-Ne Lasers	3
	2.2	TEM-Moden	4
	2.3	Wellenlänge	4
3	Vers	suchsaufbau	4
4	Dur	chführung	5
	4.1	Messung der Stabilität	5
	4.2	Messung des Frequenzspektrums	5
	4.3	Messung des TEM-Moden	6
	4.4	Messung der Polarisation	6
	4.5	Messung der Wellenlänge	6
5	Aus	wertung	6
	5.1	Wellenlängenbestimmung	6
	5.2	TEM-Moden	8
		5.2.1 TEM ₀₀ -Mode	8
		5.2.2 TEM ₀₁ -Mode	10
	5.3	Polarisationsmessung	11
	5.4	Stabilitätsbedingung	12
	5.5	Frequenzbreite	13
6	Disk	kussion	13
Lit	teratı	ur	14

1 Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es den Aufbau und die Funktionsweise eines Helium-Neon Lasers zu beschrieben und näher zu untersuchen. Konkret werden seine Stabilität, zwei TEM-Moden, seine Polarisation und seine Wellenlänge gemessen.

2 Theorie

2.1 Grundlagen des He-Ne Lasers

Jeder Laser besteht aus drei Kernkomponenten. Diese sind ein aktives Medium, eine Pumpquelle und ein optischer Resonator. Beim He-Ne Laser besteht das aktive Medium aus einem Helium-Neon Gemisch mit einem Verhältnis von 5 zu 1. Als Pumpquelle wird an das Gemisch eine Spannung angelegt. Durch Wechselwirkungen mit den Elektronen werden die Atome im aktiven Medium angeregt. Diese angeregten Zustände sind im Helium wesentlich langlebiger als im Neon. Die Heliumatome sind in der Lage ihren angeregten Zustand durch einen Stoß an die Neonatome zu übertragen. Dies führt dazu, dass man den gewünschten Zustand erreicht, in dem sich mehr Elektronen im Neon in einem höheren Energieniveau befinden als im Niedrigeren. Dieser Zustand wird Besetzungsinversion genannt.

Für die Elektronen im höheren Niveau gibt es nun zwei Möglichkeiten in ein niedrigeres Niveau zurück zu kommen. Diese werden spontane Emission und stimulierte Emission gennant. Wie der Name vermuten lässt, können Elektronen spontan, also lediglich durch Quantenflktuation, in ein niedrigeres Energieniveau zurück fallen. Dabei emitieren sie ein Photon mit einer Energie, die der Differenz der beiden Niveaus entspricht. Die Richtung in die das Photon emittiert wird ist hierbei beliebig.

Auch bei der stimulierten Emission wechselt das Elektron vom höheren ins niedrigere Energieniveau. Der Unterschied ist, dass dieser Vorgang durch ein einfallendes Photon ausgelößt wird. Voraussetzung hierfür ist, dass die Energie des Photons der Differenz der Energieniveaus entspricht. Bei der stimulierten Emission wird ebenfalls ein Photon der selben Energie emittiert, dieses bewegt sich jedoch immer parallel zum einfallenden Photon. Aus diesem Grunde ist es für die gewünschte Verstärkung des Lasers notwendig, dass die stimulierten Emissionen der dominante Prozess sind.

Als optischer Resonator werden beim He-Ne Laser zwei Spiegel verwendet. Einer der Spiegel ist teildurchlässig, damit der Laserstrahl zu einer Seite hin ausgekoppelt werden kann. Hiefür können die Spiegel sowohl planparallelen, als auch sphärischen sein. Auch eine Kombination ist möglich. Die Verlusste der Spiegel müssen hierbei jedoch möglichst gering sein, um Oszillatorverhalten zu erreichen. Ein selbsterhaltender Resonator ist nur dann möglich, wenn diese Verluste kleiner sind, als die Verstärkung durch die induzierten Emissionen. Es folgt somit für einen stabilen Resonator die Relation

$$0 \le g_1 \cdot g_2 \le 1. \tag{1}$$

Hierbei sind die Resonatorparameter g_1 und g_2 gegeben durch

$$g_{\rm i} = 1 - \frac{L}{r_{\rm i}}.\tag{2}$$

L beschreibt hierbei die Resonatorlänge und $r_{\rm i}$ die Krümmungsradien der Spiegel. Da die Resonatorlänge sehr viel größer ist, als die Wellenlänge des Lasers, gibt es sehr viele Frequenzen, die die Resonatorbedingung einer stehenden Welle erfüllen.

2.2 TEM-Moden

Die möglichen Wellenlängen im Resonator werden als longitudinale Mode bezeichnet. Da die Resonatorspiegel nicht frei von Unebenheiten sind, können auch transversale Moden auftreten. Die verschiedenen Moden eines Resonators werden als $\mathrm{TEM}_{\mathrm{lqp}}$ klassifiziert, wobei die Indizes l und p die Knoten in x- und y-Richtung und q die longitudinale Mode beschreiben. Die TEM_{00} Grundmode ist hierbei die Mode mit der höchsten Symmetrie und daher mit den geringsten Verlusten. Ihre Intensitätsverteilung kann durch eine Gaußverteilung der Form

$$I(r) = I_0 e^{\frac{-2r^2}{\omega^2}} \tag{3}$$

beschrieben werden, wobei I_0 die Maximalintensität, r der Abstand zur optischen Achse und ω der Strahlradius ist. Dieser kann über

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\theta z}{\omega_0}\right)^2},\tag{4}$$

mit dem Abstand z von der minimalen Strahltaillie ω_0 , berechnet werden. $\theta = \frac{\lambda}{\pi}\omega_0$ beschreibt hierbei die Divergenz des Gaußschen Strahls.

2.3 Wellenlänge

Trifft kohärentes Licht durch ein optisches Gitter auf einen Schirm, so entsteht ein Beugungsmuster. Durch Messen des Abstandes vom Gitter zum Schirm und von den jeweiligen Maxima zum Hauptmaximum kann mit der Gleichung

$$\lambda = \frac{b}{n} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{d_n}{L}\right)\right). \tag{5}$$

die Wellenlänge bestimmt werden.

3 Versuchsaufbau

Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 abgebildet.

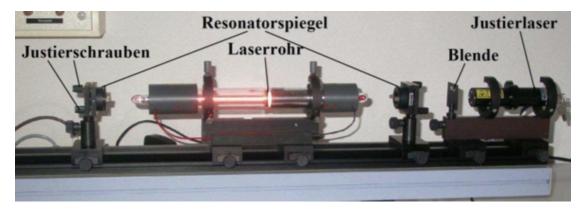


Abbildung 1: Aufbau des Versuches [1].

Sämtliche für die Justierung und folgenden Messungen verwendeten Bauteile befinden sich auf einer optischen Schiene. Es wird als Justierlaser ein grüner Laser mit einer Wellenlänge von $\lambda=532\,\mathrm{nm}$ und einer Leistung von $P=0,2\,\mathrm{mW}$ verwendet. Zu beiden Seiten des He-Ne Laserrohrs befindet sich jeweils ein Resonatorspiegel. Das Laserrohr hat hierbei eine Länge von $l=408\,\mathrm{mm}$ und einen Durchmesser von $d=1,1\,\mathrm{mm}$. Für die verschiedenen Messungen stehen außerdem eine Photodiode, ein Polarisationsfilter und Gitter verschiedener Konstanten zur Verfügung, die nach Bedarf ebenfalls auf der optischen Schiene befestigt werden können.

4 Durchführung

Bevor mit den verschiedenen Messungen begonnen werden kann muss zunächst der Laser justiert werden. Hierfür wird der Justierlaser verwendet um die Feineinstellungen an den Spiegeln vorzunehmen. Die Leistung des Lasers wird dabei von einer Photodiode gemessen. Die Justierung ist abgeschlossen, sobald man für die Lesitung des Lasers ein Maximum erreicht.

4.1 Messung der Stabilität

Für die Bestimmung der Stabilität wird erneut die Leistung des Lasers mit Hilfe der Photodiode gemessen. Diese Messung wird allerdings mehrmals für größer werdende Spiegelabstäde wiederholt. Dabei werden für jeden Abstand die Spiegel nachjustiert, um die jeweils größte Laserleistung zu erreichen. Dies wird wiederholt, bis ein Abstand erreicht wurde, bei dem keine Intensität messbar ist. Es werden dabei sowohl ein Konkav-Konkav-Resonator als auch ein Plan-Konkav-Resonator verwendet.

4.2 Messung des Frequenzspektrums

Da für die Bestimmung der Schwebungsfrequenzen ebenfalls verschiedene Resonatorlängen notwendig sind, ist es sinnvoll, diese Messung parallel zur Bestimmung der Stabilität durchzuführen. Hierfür muss lediglich bei jeder Resonatorlänge die Photodiode durch

eine schnelle Photodiode ausgewechselt werden. Diese ist an einen Spektrumsanalysator angeschlossen, an dem dann die Frequenzpeaks abgelesen werden können.

4.3 Messung des TEM-Moden

Zur Vermessung der TEM-Moden wird ein als Modenblende fungierender Wolframdraht zwischen Laserrohr und Spiegel gespannt. Dieser wird dann so ausgerichtet, dass die verschiedenen Moden auf dem Schirm sichtbar werden. Um die Moden vermessen zu können, muss der Strahlendurchmesser mittels einer Streulinse vergrößert werden. Mit Hilfe einer Lochblende und Photodiode kann dann die Intensitätsverteilung der Moden sekrecht zur optischen Achse vermessen werden.

4.4 Messung der Polarisation

Um die Polarisation zu bestimmen wird zwischen Resonatorspiegel und Photodiode ein Polarisationsfilter eingebaut. Dabei wird für volle 360° in jeweils 10°-Schritten die Intensität mit der Photodiode gemessen.

4.5 Messung der Wellenlänge

Für die Bestimmung der Wellenlänge werden verschiedene Gitter mit Gitterkonstanten von $g=80\,\frac{\text{Linien}}{\text{mm}},\,g=100\,\frac{\text{Linien}}{\text{mm}},\,g=600\,\frac{\text{Linien}}{\text{mm}}$ und $g=1200\,\frac{\text{Linien}}{\text{mm}}$ verwendet. Es werden für die vier Beugungsmuster jeweils die Abstände der Maxima zum Hauptmaximum, zusammen mit dem Abstand des Gitters zum Schirm gemessen, um daraus die Wellenlänge zu berechnen.

5 Auswertung

Im folgenden werden die in Abschnitt 4 aufgenommenen Messwerte ausgewertet. Dazu sollten ursprünglich zwei Spiegelkonfigurationen getrennt voneinander betrachtet werden, im Versuch war es jedoch nicht möglich einen Laser mit einer plan-konkaven Spiegelkonfiguration aufzubauen. Dies wird in Abschnitt 6 näher betrachtet werden. Die Berechnungen werden mit den Python-Erweiterungen numpy [2], scipy [3] und uncertainties [4] ausgerechnet und mit matplotlib [5] grafisch dargestellt.

5.1 Wellenlängenbestimmung

Die zur Bestimmung der Wellenlänge des HeNe-Lasers aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle 1 abgebildet, wobei für die unterschiedlichen Gitter die Abstände zum Hauptmaximum aufgetragen wurden. Das erste Gitter wird mit d_1 gekennzeichnet und hat $(80\,\mathrm{Linien}\,/\,\mathrm{mm})$, das zweite hat $(100\,\mathrm{Linien}\,/\,\mathrm{mm})$, das dritte $(600\,\mathrm{Linien}\,/\,\mathrm{mm})$ und das vierte Gitter besitzt $(1200\,\mathrm{Linien}\,/\,\mathrm{mm})$. Die Abstände der ersten beiden Gitter zum Schirm sind jeweils die gleichen und betragen am linken Rand $L_\mathrm{links} = 67.5\,\mathrm{cm}$ und am rechten Rand $L_\mathrm{rechts} = 59.3\,\mathrm{cm}$, woraus sich ein durchschnittlicher Schrimabstand von $L = 63.4\,\mathrm{cm}$ ergibt. Die letzten beiden Gitter haben jeweils erneut die gleichen Abstände

und betragen am linken Rand $L_{\rm links}=58\,{\rm cm}$ und am rechten Rand $L_{\rm rechts}=37.5\,{\rm cm}$, woraus sich der durchschnittlicher Schrimabstand von $L=47.75\,{\rm cm}$ ergibt.

Tabelle 1: Abstände der Interferenzmaxima der jeweiligen Gitter zum entsprechenden Maximum.

Maximum	d_1/cm	d_2/cm	d_3/cm	d_4/cm
1	2,4	3,2	8,5	25,2
2	5,0	6,4	25,3	
3	7,7	9,9		
4	10,5	13,2		
5	13,1	16,9		
6	16,0	20,8		
7	19,0	24,9		
8	22,0	29,7		

Die Wellenlängen ergeben sich über die folgende Relation,

$$\lambda = \frac{b}{n} \cdot \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{d_n}{L}\right)\right). \tag{6}$$

Hierbei ist n die Ordnung des Maximums, b die Gitterbreite, d der Abstand vom nten Maximum zum Hauptmaximum und L der Abstand zwischen dem Gitter und dem Schirm. Die Wellenlängen, die sich aus den Werten aus Tabelle 1 ergeben, sind in Tabelle 2 eingetragen.

Tabelle 2: Wellenlängen der Interferenzmaxima der jeweiligen Gitter zum entsprechenden Maximum.

Maximum	λ_1 / nm	λ_2 / nm	λ_3 / nm	λ_4 / nm
1	491.376	502.180	0.221	0.2199
2	502.355	514.273	0.148	
3	510.592	509.577		
4	505.876	515.136		
5	509.779	519.547		
6	512.626	522.231		
7	512.230	530.268		
8	472.847	504.090		

Die Mittelwerte ergeben sich zu,

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_1} &= 502,\!210\,\mathrm{nm},\\ \overline{\lambda_2} &= 514,\!663\,\mathrm{nm},\\ \overline{\lambda_3} &= 0,\!185\,\mathrm{nm}. \end{aligned}$$

Da die berechneten Wellenlängen der letzteren beiden Gitter nicht mehr im sichtbaren Spektrum liegen, werden sie bei der Berechnung eines gesamten Mittelwertes ausgelassen. Die Wellenlänge aus allen betrachteten Werten ergibt sich demnach zu $\lambda = 508,436\,\mathrm{nm}$.

5.2 TEM-Moden

Im folgenden werden die beiden im Versuch untersuchten Moden hinsichtlich der Theorie ausgewertet.

5.2.1 TEM $_{00}$ -Mode

Die Messwerte zur Auswertung der Grundmode, die in Tabelle 3 aufgetragen sind, werden in Abbildung 3 grafisch gegen eine Ausgleichskurve ausgewertet, die sich über folgende Form ergibt

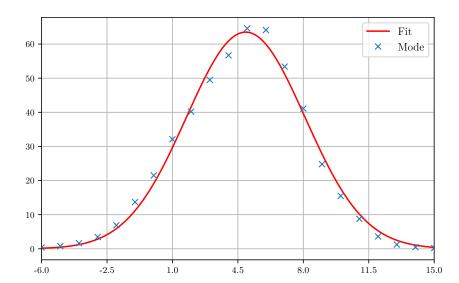
$$I_{(0,0)}(L) = I_0 \exp\left(-2\left(\frac{L - d_0}{\omega}\right)^2\right). \tag{7}$$

Dabei ist I_0 die maximale Intensität, d_0 die Verschiebung der Photodiode senkrecht zur Strahlebene und ω der Strahlradius. Die aus dem Fit berechneten Parameter lauten

$$\begin{split} I &= (63.5 \pm 1.1) \, \mu\text{W}, \\ d &= (4.918 \pm 0.004) \, \text{mm}, \\ \omega &= (4.918 \pm 0.004) \, \mu\text{W}. \end{split}$$

 $\begin{tabelle} \textbf{Tabelle 3:} Messwerte zur Auswertung der TEM-Grundmode in Abhängigkeit der Position. \end{tabelle}$

L / mm	I / μW
-6	0.38
-5	0.75
-4	1.63
-3	3.46
-2	6.9
-1	13.7
0	21.5
1	32.1
2	40.2
3	49.5
4	56.7
5	64.6
6	64.1
7	53.4
8	41.1
9	24.8
10	15.5
11	8.77
12	3.62
13	1.24
14	0.5
15	0.23



 ${\bf Abbildung~2:}~{\bf Grafische~Auswertung~und~Fit~der~Messwerte~zur~TEM-Grundmode.}$

$\mathbf{5.2.2}\ \mathbf{TEM}_{01}\text{-}\mathbf{Mode}$

Die Auswertung der Messwerte aus Tabelle 4 wird analog zur Grundmode ausgewertet, wobei jedoch die Theoriekurve durch eine Funktion der Form

$$I_{\text{TEM}_{01}} = I_1 \frac{8 (x - x_0)^2}{\omega^2} \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{2\omega^2}\right) \tag{8}$$

beschrieben wird. Die Parameter aus dem Fit aus Abbildung 3 lauten damit

$$\begin{split} I_1 &= (3{,}6857 \pm 0{,}0021)\,\mu\text{W}, \\ x_0 &= (0{,}0519 \pm 0{,}0014)\,\text{mm}, \\ x_1 &= (0{,}0264 \pm 0{,}0015)\,\text{mm}, \\ \omega &= (0{,}0264 \pm 0{,}0015)\,\text{mm}. \end{split}$$

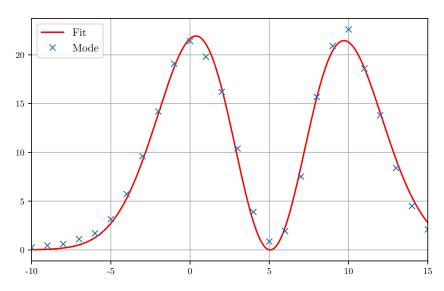


Abbildung 3: Grafische Auswertung der Messwerte zur TEM_{01} -Mode.

 Tabelle 4: Messwerte zur Auswertung der $\mathrm{TEM}_{01}\text{-}\mathrm{Mode}.$

L / mm	I / μW
-10	0.26
-9	0.45
-8	0.60
-7	1.1
-6	1.70
-5	3.14
-4	5.73
-3	9.60
-2	14.2
-1	19.1
0	21.4
1	19.8
2	16.2
3	10.4
4	3.9
5	0.86
6	1.93
7	7.52
8	15.68
9	20.9
10	22.6
11	18.6
12	13.8
13	8.4
14	4.5
15	2.1

5.3 Polarisationsmessung

Die Auswertung der Polarisationsmessung erfolgt analog zu denen aus den Abschnitten zuvor, indem die Messwerte gegen eine Theoriekurve gefittet werden. Die Theoriekurve ergibt sich durch eine Funktion der Form

$$I(\varphi) = I_0 \sin^2(\varphi - \varphi_0). \tag{9}$$

Die aus Abbildung 4 ausgerechneten Parameter ergeben

$$\begin{split} I_0 &= (4{,}109\,16 \pm 0{,}000\,04)\,\mu\text{W}, \\ \varphi_0 &= (-2{,}597\,37 \pm 0{,}000\,10)^\circ. \end{split}$$

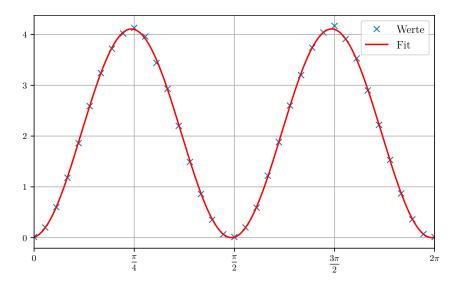


Abbildung 4: Grafische Auswertung der Messwerte zur TEM_{01} -Mode.

5.4 Stabilitätsbedingung

Um die Stabilitätsbedingung auszuwerten, wird die maximale Resonatorlänge bestimmt, die mit der Spiegelkonfiguration erreicht werden konnte. Die theoretisch zu erreichende, maximale Resonatorlänge L ergibt sich über

$$L_{\max}=r_1+r_2,$$

wobei r_1 und r_2 der jeweilige Krümmungsradius der konkaven Spiegel sind. In der im Versuch verwendeten Spiegelkonfiguration betragen die Krümmungsradien jeweils $r=1400\,\mathrm{mm}$, wodurch sich die maximale Resonatorlänge zu $L_{\mathrm{max}}=280\,\mathrm{cm}$ ergibt. Die Laserintensitäten in Abhängigkeit der Resonatorlängen sind in Tabelle 5 eingetragen.

Tabelle 5: Messwerte zur Auswertung der Stabilitätsbedingung in Abhängigkeit der Resonatorlängen.

L / cm	I / μW
50	6.13
75	5.15
100	5.10
125	4.12
150	1.31

Die maximale Länge konnte dabei nicht erreicht werden, weshalb die Gültigkeit nicht nachgewiesen werden konnte.

5.5 Frequenzbreite

Die gemessenen Frequenzpeaks f sind in Tabelle 6 in Abhängigkeit der Resonatorlänge L festgehalten.

L / cm	$f \ / \ \mathrm{MHz}$	Δf / MHz
50	304, 608, 675, 911, 1219	≈ 300
75	203, 405, 608, 806, 1009, 1211, 1414	≈ 200
100	150, 300, 454, 604, 758, 908, 1058, 1208, 1361	≈ 150
125	124, 244, 364, 484, 604, 724, 848, 968, 1088, 1208, 1328	≈ 125

Tabelle 6: Messwerte zur Auswertung der Frequenzpeaks.

Die Anzahl der möglichen Moden ist abhängig von dem Bereich, in dem die Lichtverstärkung des Lasers stattfinden kann, was als Doppler-Breite $f=1500\,\mathrm{MHz}$ bezeichnet wird. Die maximale Frequenz wurde dabei zwar nie direkt erreicht, kam aber immer sehr nah heran, weshalb anzunehmen ist, dass der Laser im Singlemode läuft. Über die Gleichung

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{c}{2L} \tag{10}$$

kann die Resonatorlänge L durch die Schwebungsfrequenz Δf berechnet werden. In Tabelle 7 sind die bestimmten Resonatorlängen $L_{\rm max}$ gegen die tatsächliche Resonatorlänge L aufgetragen, um die Abweichung ΔL zu bestimmen.

Tabelle 7: Experimentell bestimmte Werte der Resonatorlängen, sowie die Abweichung von der tatsächlichen Länge.

L / cm	$L_{\rm max}$ / cm	ΔL
50	49.97	0.9993~%
75	74.95	0.9993~%
100	99.93	0.9993~%
125	119.92	0.9593~%

6 Diskussion

Die ermittelten Werte für die TEM-Moden weisen eine hohe Übereinstimmung mit den Theoriewerten auf, was an den Grafiken [3] und [4] zu erkennen ist. So weisen die Moden deutlich erkennbare Maxima auf. Auch die Polarisationsmessung zeigt eine hohe Genauigkeit mit der Ausgleichskurve und bestätigt somit die theoretische Vorhersage. Die Betrachtung der Frequenzbreite konnte den Modenbetrieb des Lasers nachweisen und die Resonatorlängen auf eine Genauigkeit von < 1% bestimmen.

Mit einer Abweichung von 80.32% der berechneten Wellenlänge $\lambda = 508,436\,\mathrm{nm}$ vom Literaturwert $\lambda_{\mathrm{lit}} = 633\,\mathrm{nm}$ kann die Bestimmung der Wellenlänge als nicht erfolgreich

angesehen werden. Die Betrachtung der Stabilitätsbedingung kann ebenfalls nicht als erfolgreich oder aussagekräftig eingestuft werden. Es konnten keine Resonatorlängen von über 150 cm eingestellt werden, weil der Laser einfach nicht mehr stabilisiert werden konnte. Ebenso erfolglos konnte der Laser mit einer anderen Spiegelkonfiguration stabilisiert werden, egal welche Abstände die Spiegel dabei zueinander hatten. Die Messung der Stabilitätsbedingung ist demnach als fehlgeschlagen einzuordnen und kann die theoretischen Vorhersagen weder falsifiziern, noch verifizeren.

Der Hauptgrund für dieses Fehlschlagen ist wahrscheinlich, dass die Strahlachse des Lasers nicht mit der optischen Achse der gesamten Vorrichtung übereinstimmt. Grund für die Annahme war, dass auf den beiden planen Spiegeln der Laserstrahl bei einem stabilen Laser nicht durch die Mitte der beiden Spiegel ging. Die beiden konkaven Spiegel mussten also die Abweichung beider Achsen korrigieren, was die plan-konkave Spiegelvorrichtung nicht mehr korrigieren konnte und somit kein stabiler Laser zustande kam. Ein weiterer Grund liegt wohl darin, dass der Brennpunkt des semipermeablen Spiegels nicht in der Glasröhre lag. Somit ergab sich eine halbmondförmige Rückkopplung des Spiegels anstatt wider erwarten eine punktförmige Rückkopplung.

Literatur

- [1] v61 He-Ne Laser. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.
- [2] Charles R. Harris u. a. "Array programming with NumPy". In: Nature 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2.
- [3] Pauli Virtanen u. a. "SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python". In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.
- [5] John D. Hunter. "Matplotlib: A 2D Graphics Environment". Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: http://matplotlib.org/. Current version 3.4.3, DOI: 10.5281/zenodo.5194481.