sheet1_Koch_Symma

April 26, 2022

[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Aufgabe 1

Es werden zunächst die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert.

[ ]:
```
def f(x):
    return (x**3 + 1/3) - (x**3 - 1/3)

def g(x):
    return ((3+(x**3)/3) - (3-(x**3)/3))/x**3

x  = np.logspace(0, 100, 10000)

fehler_f = abs(2/3-f(x))

fehler_g = abs(2/3-g(x))
```

Der erste Wert für x mit einer Abweichung größer als 1 % ist $x = 41731.31$.

2 Aufgabe 2

Bei Betrachtung von $f(x)$ fällt auf, das Polstellen bei ganzzahligen Vielfachen von π auftreten. Es wird daher $f(x)$ auf einem 2π Intervall geplottet.

[ ]:
```
y= 50/0.511
b = np.sqrt(1-y**(-2))
E=50

def f(x):
    return (2+np.sin(x)**2)/(1-b**2*np.cos(x)**2)

x=np.linspace(-np.pi, np.pi, 10000, dtype="float32")
plt.plot(x,f(x), label='f(x)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'f(x)')
```

```
#plt.savefig('PlotAufg2a.pdf')
```

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass $f(x)$ um die kritischen Stellen von π instabiel ist. Es werden desshalb die gegebenen Substitutionen verwendet um $f(x)$ zu $h(x) = \dfrac{5-\cos(2\theta)}{1-\cos(2\theta)+\dfrac{1}{\gamma^2}(1+\cos(2\theta))}$ umzuschreiben. Anschließend werden beide Funktionen in einem Intervall um π geplottet.

[ ]:
```
def h(x):
    return ((5-np.cos(2*x))/(1-np.cos(2*x)+1/y**2*(1+np.cos(2*x))))

x=np.linspace(np.pi-1e-7, np.pi+1e-7, 10000, dtype="float64")
plt.plot(x, h(x), label='h(x)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'f(x)')
#plt.savefig('PlotAufg2c.pdf')
```

Es fällt auf, das die Funktion $h(x)$ wesentlich stabiler ist, als $f(x)$.

$K(x)$ ist definiert als $K(x) = \left|x\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|$. Durch $f(x)$ ist $f'(x)$ gegeben als $f'(x) = -\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(3\beta^2-1)}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}$.

Somit ist $K(x)$ und dessen Abhängigkeit gegeben durch $K = \left|2\theta\dfrac{\sin\theta\cos\theta(3\beta^2-1)}{(1-\beta^2\cos^2\theta)(2+\sin^2\theta)}\right|$.

[ ]:
```
x=np.linspace(0, np.pi, 10000, dtype="float32")

def condnumb(x):
    return abs(x*(2*np.sin(x)*np.cos(x)*(3*b**2-1))/((1-b**2*np.
 ↪cos(x)**2)*(2+np.sin(x)**2)))

plt.plot(x, condnumb(x))
plt.xticks(np.arange(0, np.pi+0.001, step=np.pi/4), [r'$0$',␣
 ↪r'$\dfrac{\pi}{4}$', r'$\dfrac{\pi}{2}$', r'$\dfrac{3\pi}{4}$', r'$\pi$'])
plt.xlim(0, np.pi)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'K')
#plt.savefig('PlotAufg2e.pdf')
```

Beim Betrachten des Plots fällt auf, dass für Werte, die gegen π gehen, ein starkes Wachstum vorliegt. Das bedeutet, dass $f(x)$ für Werte kleiner als π gut konditioniert ist. Dies ändert sich jedoch, sobald sich die Werte π nähren.

Die Stabilität beschreibt den Einfluss von gerundeten Werten bei einer ungenauen Berechnung. Von Kondition wiederum wird die Fortpflanzung von ursprünglichen Unsicherheiten in einer exakten Berechnung beschrieben.