

sheet1_Koch_Symma

April 26, 2022

```
[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Aufgabe 1

Es werden zunächst die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ definiert.

```
[ ]: def f(x):
    return (x**3 + 1/3) - (x**3 - 1/3)

def g(x):
    return ((3+(x**3)/3) - (3-(x**3)/3))/x**3

x = np.logspace(0, 100, 10000)

fehler_f = abs(2/3-f(x))

fehler_g = abs(2/3-g(x))
```

Der erste Wert für x mit einer Abweichung größer als 1 % ist $x = 41731.31$.



2 Aufgabe 2

Bei Betrachtung von $f(x)$ fällt auf, dass Polstellen bei ganzzahligen Vielfachen von π auftreten. Es wird daher $f(x)$ auf einem 2π Intervall geplottet.

```
[ ]: y= 50/0.511
b = np.sqrt(1-y**(-2))
E=50

def f(x):
    return (2+np.sin(x)**2)/(1-b**2*np.cos(x)**2)

x=np.linspace(-np.pi, np.pi, 10000, dtype="float32")
plt.plot(x,f(x), label='f(x)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'f(x)')
```

```
#plt.savefig('PlotAufg2a.pdf')
```

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass $f(x)$ um die kritischen Stellen von π instabil ist. Es werden deshalb die gegebenen Substitutionen verwendet

um $f(x)$ zu $h(x) = \frac{5 - \cos(2\theta)}{1 - \cos(2\theta) + \frac{1}{\gamma^2}(1 + \cos(2\theta))}$ umzuschreiben. Anschließend werden beide

Funktionen in einem Intervall um π geplottet.

```
[ ]: def h(x):
    return ((5-np.cos(2*x))/(1-np.cos(2*x)+1/y**2*(1+np.cos(2*x))))

x=np.linspace(np.pi-1e-7, np.pi+1e-7, 10000, dtype="float64")
plt.plot(x, h(x), label='h(x)')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'f(x)')
#plt.savefig('PlotAufg2c.pdf')
```

Es fällt auf, dass die Funktion $h(x)$ wesentlich stabiler ist, als $f(x)$.

$K(x)$ ist definiert als $K(x) = \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right|$. Durch $f(x)$ ist $f'(x)$ gegeben als $f'(x) = -\frac{2 \sin \theta \cos \theta (3\beta^2 - 1)}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}$.

Somit ist $K(x)$ und dessen Abhängigkeit gegeben durch $K = \left| 2\theta \frac{\sin \theta \cos \theta (3\beta^2 - 1)}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)(2 + \sin^2 \theta)} \right|$. ✓

```
[ ]: x=np.linspace(0, np.pi, 10000, dtype="float32")

def condnumb(x):
    return abs(x*(2*np.sin(x)*np.cos(x)*(3*b**2-1))/((1-b**2*np.
    ↪cos(x)**2)*(2+np.sin(x)**2)))

plt.plot(x, condnumb(x))
plt.xticks(np.arange(0, np.pi+0.001, step=np.pi/4), [r'$0$', '␣',
    ↪r'$\dfrac{\pi}{4}$', r'$\dfrac{\pi}{2}$', r'$\dfrac{3\pi}{4}$', r'$\pi$'])
plt.xlim(0, np.pi)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel(r'K')
#plt.savefig('PlotAufg2e.pdf')
```

Beim Betrachten des Plots fällt auf, dass für Werte, die gegen π gehen, ein starkes Wachstum vorliegt. Das bedeutet, dass $f(x)$ für Werte kleiner als π gut konditioniert ist. Dies ändert sich jedoch, sobald sich die Werte π nähern.

Die Stabilität beschreibt den Einfluss von gerundeten Werten bei einer ungenauen Berechnung. Von Kondition wiederum wird die Fortpflanzung von ursprünglichen Unsicherheiten in einer exakten Berechnung beschrieben.