第二章 統御方程式與邊界條件

2.1 基本假設與統御方程式

本文探討有限壁厚多孔質渠管內強制對流，文中所做的基本假設條件條列如下：

(1) 二維流場

(2) 不可壓縮流

(3) 多孔質孔隙度(porosity)均勻為一定值

(4) 多孔質的固相結構(porous matrix)與流體成非局部熱力平衡 (local non-thermodynamic equilibrium)

(5) 流場假設為 steady 和 fully developed，熱場則採用暫態列式， 根據文獻[2]，流場達到 steady 的時間非常短，因此流場可以穩態列式，而不影響結果。

(6) 忽略軸向熱傳導

根據以上之假設並使用體積平均法 (volume-averaging technique)，將速度與溫度以體積平均量表示，可導出下列具有因次之統御方程式：

動量方程式

$$0=-\frac{d\langle p\rangle}{dX}-\frac{m_f^*}{K}\langle U\rangle-\frac{r_f^* F e}{\sqrt{K}}\langle U\rangle^2+\frac{m_f^*}{e}\frac{d^2\langle U\rangle}{dY^2}$$ **<2.1>**

能量方程式

管壁區

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t^*}=a_w^*\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial Y^2}$$ **<2.2>**

孔質固體

$$(rc)_s^*(1-e)\frac{\partial\langle T\rangle_s}{\partial t^*}=\frac{\partial}{\partial X}\left((1-e)k_s^*\frac{\partial\langle T\rangle_s}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left((1-e)k_s^*\frac{\partial\langle T\rangle_s}{\partial Y}\right)-h_{loc}a^*\left(\langle T\rangle_s-\langle T\rangle_f\right)$$

<2.3>

孔質區內流體

$$(r_f c_f)^* e\frac{\partial\langle T\rangle_f}{\partial t^*}+(r_f c_f)^*\langle U\rangle\frac{\partial\langle T\rangle_f}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\left(ek_f^*\frac{\partial\langle T\rangle_f}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left((1-e)k_f^*\frac{\partial\langle T\rangle_f}{\partial Y}\right)+h_{loc}a^*\left(\langle T\rangle_s-\langle T\rangle_f\right)$$

<2.4>

在以上方程式中，K 代表多孔質之滲透率，下標 w 代表管壁性質，下標 f 代表流體性質，而下標 s 代表固體多孔質之性質，$\overline{q}$代表管壁溫度，其餘請參考符號說明。為了求解方便茲定義無因次變數如下：

$$\langle u\rangle=\frac{\langle U\rangle}{\frac{-H^2}{m_f^*}\frac{dp}{dx}}\quad,\quad x=\frac{X}{H}\quad,\quad y=\frac{Y}{H}\quad,\quad q=\frac{T-T_w}{T_e-T_w}\quad,\quad t=\frac{t^*H}{m_f^*}\left(\frac{-dp}{dx}\right),$$

$$t=\frac{t}{\Pr_f \mathrm{Re}}=\frac{t}{Pe}$$ **<2.5>**

經過無因次化處理後，統御方程式變為

動量方程式

$$0 = Da - \langle u \rangle - \varepsilon F_s \langle u \rangle^2 + \frac{Da}{\varepsilon}\frac{d^2\langle u \rangle}{dy^2}$$ **<2.6>**

管壁能量方程式

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} = \alpha_w \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2}$$ **<2.7>**

孔質固體相能量方程式

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial \langle \theta \rangle_s}{\partial \tau} = \alpha_s \left[\frac{\partial}{\partial x}\left((1-\varepsilon)\frac{\partial \langle \theta \rangle_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1-\varepsilon)\frac{\partial \langle \theta \rangle_s}{\partial y} \right) \right] - \xi \cdot \alpha_s \left(\langle \theta \rangle_s - \langle \theta \rangle_f \right)$$

<2.8>

孔質區內流體能量方程式

$$\varepsilon \frac{\partial \langle \theta \rangle_f}{\partial \tau} + \underbrace{\Pr_f \mathrm{Re}_h}_{Pe} \langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle_f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon k_f \frac{\partial \langle \theta \rangle_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon k_f \frac{\partial \langle \theta \rangle_f}{\partial y} \right) + \xi \cdot k_s \left(\langle \theta \rangle_s - \langle \theta \rangle_f \right)$$

<2.9>

在以上無因次統御方程式中，Da 為達西數(Darcy number)，多孔質之滲透率與本系統特徵長度平方之比值；Fs 為 Forchheimer 係數，代表二次慣性項之大小；ε則為孔隙度，x則代表孔質區固體與流體間熱對流強度與固體內部熱傳導率之比值。

2.2 邊界條件

速度邊界條件經無因次化後書寫如下：

$$\left.\frac{d\langle u\rangle}{dy}\right|_{y=0}=0$$ <2.10a>

$$\left.\langle u\rangle\right|_{y=1}=0$$ <2.10b>

式子<2.10a>為在管中心面對稱之條件，而<2.10b>則是在管壁不滑動之條件。至於無因次溫度邊界條件則為：

$$\bar{q}=0 \quad at \quad y=1+\frac{H_w}{H}$$ <2.11a>

$$e\cdot\langle q\rangle_f+(1-e)\langle q\rangle_s=\bar{q} \quad \text{at } y=1$$ <2.11b>

$$\frac{\partial\langle q\rangle_f}{\partial y}=k_s\frac{\partial\langle q\rangle_s}{\partial y}=k_w\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} \quad at \quad y=1$$ <2.11c>

$$\frac{\partial q}{\partial y}=0 \quad at \quad y=0$$ <2.11d>

$$\frac{\partial\langle q\rangle_s}{\partial y}=0 \quad at \quad y=0$$ <2.11e>

<2.11a>為管壁外等溫之邊界條件，<2.11d>及<2.11e>分別為孔質固體溫度及流體溫度對稱之條件，而<2.11b>代表孔質管壁介面上溫度連續但$\langle q\rangle_f$及$\langle q\rangle_s$允許有溫差存在，至於<2.11c>則代表熱通量在介面各相間為均勻，而由<2.11b>及<2.11c>可得到在介面上孔質固、流體總熱通量等於管壁熱通量之結果，如[22]。

溫度的入口條件

$$\langle q \rangle_s = \langle q \rangle_f = 1 \quad at \quad x = 0$$ **<2.12>**

至於管壁及孔質固、流體溫度之初始條件為

$$\langle q \rangle_f = \langle q \rangle_s = \bar{q} = q_{in} \quad for \quad t = 0$$

必須說明的是初始溫度會影響暫態結果，但不會影響穩態結果，本文為方便起見，q_{in} 的數值取 1。

第三章 數值方法

3.1 求解方法

本文使用有限差分法將統御方程式離散化。本研究參考[2]有限差分法解算溫度的離散統御方程式，根據[13]有限差分法解算速度的離散統御方程式，先求得速度場後，在代入能量方程式解溫度場，速度場採疊代求解，溫度場則以隱性法(implicit scheme)求解。求解中較大的困難在於介面條件的滿足。

各統御方程式離散化的結果如附錄 A，在此不詳述。必須說明的是網格配置採用 [2] 所提出之非均勻網格配置，x 方向為均勻等分格點，y 方向採可變格點，格點比率 r 為 1.02，其冪級次法則(power rule)，如下式：

$$S_{j+1} = \Delta \sum_{j=0}^{n} \frac{(1-S)\left(1-\frac{1}{r}\right)}{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n}} = \Delta \sum_{j=0}^{n} d^{j} \qquad \text{<3.1>}$$

其中，S_{j+1}表示第 j+1 條格點線，Δ表示第一條格點線與邊界之離距，而 r 則為格點延伸率。Y 方向採可變格點的原因是為了較準確的計算管內靠近壁面的熱、流場之變化。

3.2 紐賽數的計算

本文對於紐賽數的計算採用下式

$$Nu = \frac{2k_w \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}}{-\left(\dfrac{T_{beff} - T_w}{T_e - T_w}\right)\left[e + (1-e)k_s\right]}$$ <3.2>

其中

$$\frac{T_{b,eff} - T_w}{T_e - T_w} = \int_0^1 \frac{u}{u_m}\left[e\langle q\rangle_f + (1-e)\langle q\rangle_s\right]dy$$ <3.3>

為無因次有效平均溫度，而 u_m 表平均速度。

3.3 求解程序

各個溫度的求解程序玆描述如下:

1. 首先猜測管壁位於介面之溫度 q_w
2. 解管壁面能量方程式以求管壁溫度分佈 $\bar{q}$
3. 計算 $k_w \dfrac{\partial \bar{q}}{\partial y}$ 在介面上之值
4. 解孔質區流體能量方程式以求溫度分佈 $\langle q\rangle_f$
5. 解孔質區固體能量方程式以求溫度分佈 $\langle q\rangle_s$
6. 測試介面條件 $e \cdot \langle q\rangle_f + (1-e)\langle q\rangle_s = \bar{q}$
7. 如果不滿足第 6 項則使用

$$q_w^{'} = (1-r)q_{w(old)} + rq_{w(new)}$$ $0<r<1$(under relaxation)

8.重複 2 至 7 項，直到符合收斂條件。

9.求下一個時間之解

求解程序流程圖如圖 3.1。