重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一章　伯努利不等式

1.1　基础知识

定理 1.1 · 伯努利不等式 (Bernoulli's Inequality)

对任意实数 $x > -1$ 和实数 α，有：

1. 当 $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 时：

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \tag{1.1}$$

2. 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时：

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \tag{1.2}$$

当且仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $x = 0$ 时取等号。

定理 1.2 · 伯努利不等式的多变量形式

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为符号相同的实数，且 $x_i > -1$，则：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1.3}$$

1.2 例题

例题 1.1

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$，求证：

$$(1+a_1)^{\frac{1}{a_2}}(1+a_2)^{\frac{1}{a_3}}\ldots(1+a_n)^{\frac{1}{a_1}} \geq 2^n. \tag{1.4}$$

例题 1.2

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n). \tag{1.5}$$

例题 1.3

求最小的实数 λ，使得对任意正整数 n 及任意满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\lambda \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq 1-\sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{1.6}$$

例题 1.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+n-1) \geq n^{n-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2. \tag{1.7}$$

例题 1.5

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$。求证：

$$(a_1^n + 1)(a_2^n + 1)\ldots(a_n^n + 1) \geq 2^n. \tag{1.8}$$

例题 1.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不全为 1 的正整数，满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k$ 是整数。求证：多项式

$$P(x) = a_1 a_2 \ldots a_n (x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) \tag{1.9}$$

没有正根。

例题 1.7

设整数 $n \geq 3$，多项式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ 有 n 个实根，且都在区间 $(0,1)$ 内。求证：

$$\sum_{i=1}^{n-2} i a_i > 0. \tag{1.10}$$

练习 1.1

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i \geq -1$，$i = 1, 2, \ldots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) + \frac{n}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 1. \tag{1.11}$$

练习 1.2

给定整数 $n \geq 2$，求最小的实数 λ，使得对任意非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i+\lambda)}. \tag{1.12}$$