

# 重庆外国语学校-数学竞赛

## 代数不等式

---

2026.1.1

# 目录

<b>第一部分 基本方法</b>	<b>1</b>
<b>第一章 恒等变形</b>	<b>2</b>
1.1 基础知识 . . . . .	2
1.2 预习题 . . . . .	6
1.3 例题 . . . . .	7
1.4 作业题 . . . . .	20
<b>第二章 Abel 变换</b>	<b>27</b>
2.1 基础知识 . . . . .	27
2.2 预习题 . . . . .	29
2.3 例题 . . . . .	30
2.4 练习题 . . . . .	38
<b>第三章 局部不等式</b>	<b>44</b>
3.1 例题 . . . . .	44
3.2 练习题 . . . . .	56
<b>第四章 调整法</b>	<b>69</b>
4.1 预习题 . . . . .	70
4.2 例题 . . . . .	71
4.3 练习题 . . . . .	77

# 第一部分

## 基本方法

# 第一章 恒等变形

## 1.1 基础知识

### 定理 1.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \quad (1.1)$$

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \quad (1.2)$$

### 定理 1.2

当  $a_{n+1} = a_1$  时：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (1.3)$$

### 定理 1.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (1.5)$$

### 定理 1.4

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (1.6)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( 2 \sum_{k=1}^n b_k - nb_i \right)^2 = n^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (1.8)$$

### 定理 1.5

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_i a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j \quad (1.9)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) \quad (1.11)$$

### 定理 1.6

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (n+1-i) a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (n+1-k) a_j a_k \quad (1.12)$$

$$(n+1) \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} k a_j a_k \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) \left( \sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) a_i a_j \quad (1.14)$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=k}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} i a_i a_k \quad (1.15)$$

**定理 1.7**

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k(a_k + a_{k+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1})} \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left( \prod_{j=i}^{i+k} a_j \right)} = 1 \quad (\text{其中 } \prod_{i=1}^n a_i = 1) \quad (1.17)$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1) = \left[ \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k} \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k+1} \right]^2 \quad (1.18)$$

## 1.2 预习题

### 预习 1.1

求下列各式的值：

$$1. S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2$$

$$2. S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \cdot j$$

$$3. S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2 + j^2)$$

### 预习 1.2 · 1998 前南斯拉夫

设正整数  $n \geq 2$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是正实数, 证明:

$$\left( \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \quad (1.19)$$

### 1.3 例题

#### 例题 1.1

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (1.20)$$

**例题 1.2 · 2006 IMO 预选**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数，证明：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.21)$$

**例题 1.3 · 2016 西部赛**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个非负实数, 记  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i (1 \leq k \leq n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^n a_j^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n (a_i S_i)^2 \quad (1.22)$$

**例题 1.4**

设整数  $n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 设  $M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 证明:

$$M \cdot \sum_{i=1}^n ia_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.23)$$

**例题 1.5 · 1991 IMO 预选**

给定整数  $n \geq 2$ , 且非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \quad (1.24)$$

的最大值与最小值, 并给出相应的取等条件。

**例题 1.6**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \quad (1.25)$$

**例题 1.7 · 2018 西部赛**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ , 且  $a_1 = a_{n+1}$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1 a_n} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (1.26)$$

**例题 1.8**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \quad (1.27)$$

**例题 1.9**

设  $n \geq 3$ , 记正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的和为  $S$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^n \frac{S-a_i}{a_i} \quad (1.28)$$

**例题 1.10**

设正整数  $n \geq 3$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = n - 1$ , 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \quad (1.29)$$

**例题 1.11 · 2001 韩国**

已知实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ , 证明:

$$1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \geq \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{2} \quad (1.30)$$

**例题 1.12**

设正整数  $n \geq 2$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的和为 1, 求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)x_i x_j \quad (1.31)$$

的最大值。

**例题 1.13 · 2004 俄罗斯**

整数  $n \geq 4$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1 x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{1 + x_n + x_n x_1} > 1 \quad (1.32)$$

## 1.4 作业题

### 作业 1.1

证明：

$$\frac{4 \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_{i+1}}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{4a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \quad (1.33)$$

**作业 1.2 · 2016 IMC**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \quad (1.34)$$

### 作业 1.3

给定整数  $n \geq 2$ , 且非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \sqrt{x_i x_j}) \cdot (\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}) \quad (1.35)$$

的最大值, 并给出相应的取等条件。

**作业 1.4**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $0 < a_i \leq \frac{1}{2} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^n (1-a_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^n (1-a_i)\right]^2} \quad (1.36)$$

### 作业 1.5

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$ ，求证：

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^2. \quad (1.37)$$

## 作业 1.6

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \quad (1.38)$$

### 作业 1.7

定整数  $n \geq 3$ , 且  $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (1.39)$$

# 第二章 Abel 变换

## 2.1 基础知识

定理 2.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令  $S_0 = 0$ ,  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \quad (2.1)$$

### 定理 2.2 · 钟开莱不等式

给定整数  $n \geq 2$ , 设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$  且对任意  $1 \leq k \leq n$  有  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ ,  
求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i^2. \quad (2.3)$$

## 2.2 预习题

### 预习 2.1

给定正整数  $n$ , 对任意  $1 \leq k \leq n$  正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq k$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (2.4)$$

### 预习 2.2 · 1978 IMO

已知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两不同的正整数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (2.5)$$

## 2.3 例题

### 例题 2.1 · 1994 USAMO

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数，满足对  $1 \leq k \leq n$ ，有  $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sqrt{k}$ . 证明：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (2.6)$$

**例题 2.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证: 存在  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得对任意  $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$  都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|. \quad (2.7)$$

**例题 2.3 · 1999 APMO**

设  $\{a_n\}$  是正项数列，满足对任意  $i, j \geq 1$ ，有  $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ . 求证：对任意正整数  $n$ ，有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \geq a_n. \quad (2.8)$$

**例题 2.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ , 且对  $1 \leq k \leq n$ , 有  $\prod_{i=1}^k a_i \geq \prod_{i=1}^k b_i$ . 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i. \quad (2.9)$$

### 例题 2.5 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数，满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (2.10)$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}. \quad (2.11)$$

求证：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (2.12)$$

**例题 2.6**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (2.13)$$

**例题 2.7 · 2018 清华飞测**

对任意  $n \in \mathbb{N}^+$  设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \quad (2.14)$$

**例题 2.8**

给定整数  $n, k \geq 2$ . 设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$  满足:

1.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ;
2. 对  $1 \leq i \leq n$ , 有  $\sum_{j=1}^i c_j \leq i^k$ .

求  $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \dots + c_n a_n^k$  的最大值。

## 2.4 练习题

### 作业 2.1

给定整数  $n \geq 2$  以及不全为零的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 求  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足的充要条件, 使得存在正整数  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ , 满足

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq 0. \quad (2.15)$$

## 作业 2.2

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \quad (2.16)$$

### 作业 2.3

给定实数  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ , 记  $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$ , 证明:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \quad (2.17)$$

## 作业 2.4

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数。求证：对任意实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  都有  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n b_i x_i$  的充要条件是：对  $1 \leq k \leq n-1$ ，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (2.18)$$

**作业 2.5**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , 且对  $1 \leq k \leq n$ , 有  $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ . 求证:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}. \quad (2.19)$$

## 作业 2.6

给定整数  $n \geq 2$ , 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正整数, 满足对集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的任一非空子集  $I$ ,  $\sum_{i \in I} a_i$  互不相同。求:

1.  $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$  的最小值;
2.  $\sum_{i=1}^n a_i^2$  的最小值;
3.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$  的最大值。

# 第三章 局部不等式

## 3.1 例题

### 例题 3.1

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ , 且满足  $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}. \quad (3.1)$$

**例题 3.2**

求所有的整数  $n \geq 2$ , 使得存在实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 满足

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (3.2)$$

**例题 3.3**

给定整数  $n \geq 3$ , 设不全为 0 的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ 。记

$$A = \left( \sum_{k=1}^n x_k^3 \right)^2, \quad B = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^3. \quad (3.3)$$

求  $\frac{A}{B}$  的最大值。

**例题 3.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{1 - (a_i - a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 3.5**

设正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{1+x_i+\dots+x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{1+x_i+\dots+x_i^i}. \quad (3.5)$$

**例题 3.6**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (3.6)$$

**例题 3.7**

设整数  $n \geq 3$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \quad (3.7)$$

其中  $a_0 = a_n$ ,  $a_{n+1} = a_1$ .

**例题 3.8**

设整数  $n \geq 2$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  是复数, 求证:

$$\left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \quad (3.8)$$

**例题 3.9**

设整数  $n \geq 3$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是不小于 1 的实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.9)$$

其中下标按模  $n$  理解。

**例题 3.10**

给定整数  $n \geq 3$ , 且  $a_i \geq 1(i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (3.10)$$

**例题 3.11**

设整数  $n \geq 3$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的和为 1, 证明:

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \quad (3.11)$$

**例题 3.12**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  满足  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$  ( $1 \leq i \leq 100$ ), 其中  $a_{101} = a_1$ ,  $a_{102} = a_2$ 。求  $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$  的最大值。

## 3.2 练习题

### 作业 3.1

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 。求证: 存在  $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 使得对任意  $1 \leq j \leq n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \quad (3.12)$$

**作业 3.2**

求最大的实数  $\lambda$ , 使得对任意正整数  $n$  和任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 只要  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3} \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2. \quad (3.13)$$

**作业 3.3**

设实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$ , 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \quad (3.14)$$

**作业 3.4**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}. \quad (3.15)$$

**作业 3.5**

设整数  $n \geq 2$ , 且非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i \leq 4 \quad (3.16)$$

**作业 3.6**

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ , 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \quad (3.17)$$

**作业 3.7**

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$ , 证明:

$$\frac{n-1}{n-1+x_1^2} + \frac{n-1}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{n-1}{n-1+x_n^2} \geq 1 \quad (3.18)$$

**作业 3.8 · 2004 CTST**

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$ , 证明:

$$\frac{x_1}{n - 1 + x_1^2} + \frac{x_2}{n - 1 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n - 1 + x_n^2} \leq 1 \quad (3.19)$$

**作业 3.9**

设  $a_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ , 记  $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ , 证明:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \quad (3.20)$$

**作业 3.10**

设整数  $n \geq 2$ , 且正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = n$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \quad (3.21)$$

**作业 3.11 · 2007 白俄罗斯**

已知  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  均为正数, 证明:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \cdots x_{n+1}) \quad (3.22)$$

**作业 3.12 · 1993 圣彼得堡**

设  $a_i \in [-1, 1]$ ,  $a_i a_{i+1} \neq -1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $a_{n+1} = a_1$ , 证明:

$$\frac{1}{1+a_1a_2} + \frac{1}{1+a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_na_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \quad (3.23)$$

**作业 3.13**

设整数  $n \geq 2$ , 且  $x_1, x_2, \dots, x_n$  均为正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j - x_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{n-1}}{n-1} \quad (3.24)$$

## 第四章 调整法

独立变量：固定其余变量，考虑单一变量的影响，利用单调性。约束变量：固定其余变量，固定两个变量的和或积，考虑变化影响。

### 定理 4.1

- 设  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k = t$ , 若在  $a_1$  最大、 $a_2$  最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过  $n - 1$  次调整将  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全调为  $\frac{t}{n}$ 。

- 设  $a_k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\prod_{k=1}^n a_k = t$ , 若在  $a_1$  最大、 $a_2$  最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过  $n - 1$  次调整将  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全调为  $\sqrt[n]{t}$ 。

### 定理 4.2 · 端点调整

若  $a_k \in [a, b]$ , 将  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  视为  $a_k$  的一元函数  $g(x)$ , 且  $g'(x)$  单调, 则可将  $a_k$  调为  $a$  或  $b$ 。

### 定理 4.3 · 磨光变换法（无限调整法、SMV 定理）

### 定理 4.4 · EV(Equal Variable) 定理

## 4.1 预习题

### 预习 4.1

已知  $0 \leq a, b, c \leq 1$ , 证明:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (4.1)$$

### 预习 4.2

设  $x, y, z$  都是非负实数且  $x + y + z = 1$ , 证明:

$$yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad (4.2)$$

### 预习 4.3

设正实数  $a, b, c, d$  满足  $abcd = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{4}{a+b+c+d} \geq 5 \quad (4.3)$$

### 预习 4.4

设实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 1$ ,  $abc > 0$ , 证明:

$$ab + bc + ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4} \quad (4.4)$$

## 4.2 例题

### 例题 4.1

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) 满足不等式  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$ , 求  $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$  的最小值。

**例题 4.2**

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n. \quad (4.5)$$

**例题 4.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_i x_j \geq 1$  (其中  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ),  
证明:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \quad (4.6)$$

**例题 4.4**

已知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = n$ , 证明:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \quad (4.7)$$

**例题 4.5**

设  $x_i \in (0, 1]$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $0 < \lambda \leq 2$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n [1 + (i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \geq \frac{2 + (n-1)\lambda}{2n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (4.8)$$

**例题 4.6**

已知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}. \quad (4.9)$$

### 4.3 练习题

#### 作业 4.1

给定正整数  $n \geq 4$ , 且  $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n^2$ , 证明: 这  $n$  个数中一定有一个数大于等于 2。

**作业 4.2**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中的最大数为  $a$ , 证明:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (4.10)$$

并确定不等式等号成立的条件。

**作业 4.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  ( $n \geq 2$ ) 个互不相同的实数, 记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (4.11)$$

证明:  $12S \geq n(n - 1)M$ .

**作业 4.4**

设整数  $n \geq 2$ ,  $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 证明:

$$\prod_{i=1}^n \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (4.12)$$