重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一章　局部不等式

1.1　例题

例题 1.1

设整数 $n \geq 3$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}. \tag{1.1}$$

例题 1.2

求所有的整数 $n \geq 2$，使得存在实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，满足

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{1.2}$$

例题 1.3

给定整数 $n \geq 3$，设不全为 0 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$。记

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)^2, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^3. \tag{1.3}$$

求 $\frac{A}{B}$ 的最大值。

例题 1.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_{i+1}}{1-(a_i-a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{1.4}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 1.5

设正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i}}. \tag{1.5}$$

例题 1.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \tag{1.6}$$

例题 1.7

设整数 $n \geq 3$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \tag{1.7}$$

其中 $a_0 = a_n$，$a_{n+1} = a_1$。

例题 1.8

设整数 $n \geq 3$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是不小于 1 的实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{1.8}$$

其中下标按模 n 理解。

例题 1.9

给定整数 $n \geq 3$，且 $a_i \geq 1(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j| \tag{1.9}$$

例题 1.10

设整数 $n \geq 3$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，证明：

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+(n-2)x_i}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{[1+(n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \tag{1.10}$$

例题 1.11

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$ $(1 \leq i \leq 100)$，其中 $a_{101} = a_1$，$a_{102} = a_2$。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$ 的最大值。

1.2 练习题

练习 1.1

设整数 $n \geq 2$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$。求证：存在 $a \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，使得对任意 $1 \leq j \leq n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \tag{1.11}$$

练习 1.2

求最大的实数 λ，使得对任意正整数 n 和任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，只要 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$，就有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^2. \tag{1.12}$$

练习 1.3

设实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$，求证：

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i\Big)^2 \geq 4n\sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \tag{1.13}$$

练习 1.4

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}. \tag{1.14}$$

练习 1.5

设整数 $n \geq 2$，且非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i \leq 4 \tag{1.15}$$

练习 1.6

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$，证明：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \tag{1.16}$$

练习 1.7 · 2004 CTST

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$，证明：

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \leq 1 \tag{1.17}$$

练习 1.8

设 $a_i \in [0,1], i = 1, 2, \ldots, n$，记 $S = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$，证明：

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \tag{1.18}$$

练习 1.9

设整数 $n \geq 2$，且正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2-2n-1}{2} \right) \tag{1.19}$$

练习 1.10 · 2007 白俄罗斯

已知 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 均为正数，证明：

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \ldots x_{n+1}) \tag{1.20}$$

练习 1.11 · 1993 圣彼得堡

设 $a_i \in [-1,1]$，$a_i a_{i+1} \neq -1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 $a_{n+1} = a_1$，证明：

$$\frac{1}{1+a_1 a_2} + \frac{1}{1+a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_n a_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \tag{1.21}$$