

重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

2026.1.1

目录

第一部分 基本方法	1
第一章 恒等变形	2
1.1 基础知识	2
1.2 预习题	6
1.3 例题	7
1.4 作业题	20
第二章 Abel 变换	27
2.1 基础知识	27
2.2 预习题	29
2.3 例题	30
2.4 练习题	38
第三章 局部不等式	44
3.1 例题	44
3.2 练习题	56
第四章 调整法	69
4.1 预习题	70
4.2 例题	71
4.3 练习题	77

第一部分

基本方法

第一章 恒等变形

1.1 基础知识

定理 1.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \quad (1.1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \quad (1.2)$$

定理 1.2

当 $a_{n+1} = a_1$ 时:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (1.3)$$

定理 1.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (1.5)$$

定理 1.4

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (1.6)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(2 \sum_{k=1}^n b_k - n b_i \right)^2 = n^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (1.8)$$

定理 1.5

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_i a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j \quad (1.9)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) \quad (1.11)$$

定理 1.6

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (n+1-i) a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (n+1-k) a_j a_k \quad (1.12)$$

$$(n+1) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} k a_j a_k \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) a_i a_j \quad (1.14)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} i a_i a_k \quad (1.15)$$

定理 1.7

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k(a_k + a_{k+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1})} \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\prod_{j=i}^{i+k} a_j \right)} = 1 \quad \left(\text{其中 } \prod_{i=1}^n a_i = 1 \right) \quad (1.17)$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1) = \left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k} \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k+1} \right]^2 \quad (1.18)$$

1.2 预习题

预习 1.1

求下列各式的值：

$$1. S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2$$

$$2. S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \cdot j$$

$$3. S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2 + j^2)$$

预习 1.2 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$ ，且 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \quad (1.19)$$

1.3 例题

例题 1.1

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (1.20)$$

例题 1.2 · 2006 IMO 预选

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.21)$$

例题 1.3 · 2016 西部赛

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个非负实数, 记 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i (1 \leq k \leq n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^n a_j^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n (a_i S_i)^2 \quad (1.22)$$

例题 1.4

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 设 $M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 证明:

$$M \cdot \sum_{i=1}^n i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (1.23)$$

例题 1.5 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \quad (1.24)$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

例题 1.6

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \quad (1.25)$$

例题 1.7 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 且 $a_1 = a_{n+1}$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (1.26)$$

例题 1.8

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \quad (1.27)$$

例题 1.9

设 $n \geq 3$ ，记正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 的和为 S ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^n \frac{S - a_i}{a_i} \quad (1.28)$$

例题 1.10

设正整数 $n \geq 3$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = n-1$, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \quad (1.29)$$

例题 1.11 · 2001 韩国

已知实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$, 证明:

$$1 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{2} \quad (1.30)$$

例题 1.12

设正整数 $n \geq 2$ ，非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)x_i x_j \quad (1.31)$$

的最大值。

例题 1.13 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1 \quad (1.32)$$

1.4 作业题

作业 1.1

证明：

$$\frac{4 \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_{i+1}}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{4a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \quad (1.33)$$

作业 1.2 · 2016 IMC

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 满足 $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \quad (1.34)$$

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \sqrt{x_i x_j}) \cdot (\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}) \quad (1.35)$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

作业 1.4

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $0 < a_i \leq \frac{1}{2} (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)^2}{[\sum_{i=1}^n (1 - a_i)]^2} \quad (1.36)$$

作业 1.5

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$, 求证:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2. \quad (1.37)$$

作业 1.6

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \quad (1.38)$$

作业 1.7

定整数 $n \geq 3$, 且 $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (1.39)$$

第二章 Abel 变换

2.1 基础知识

定理 2.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ($1 \leq k \leq n$), 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \quad (2.1)$$

定理 2.2 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$, 设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i^2. \quad (2.3)$$

2.2 预习题

预习 2.1

给定正整数 n ，对任意 $1 \leq k \leq n$ 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq k$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (2.4)$$

预习 2.2 · 1978 IMO

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两不同的正整数，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (2.5)$$

2.3 例题

例题 2.1 · 1994 USAMO

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 满足对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sqrt{k}$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (2.6)$$

例题 2.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证: 存在 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得对任意 $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|. \quad (2.7)$$

例题 2.3 · 1999 APMO

设 $\{a_n\}$ 是正项数列, 满足对任意 $i, j \geq 1$, 有 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. 求证: 对任意正整数 n , 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \geq a_n. \quad (2.8)$$

例题 2.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, 且对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\prod_{i=1}^k a_i \geq \prod_{i=1}^k b_i$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i. \quad (2.9)$$

例题 2.5 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 是实数, 满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (2.10)$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}. \quad (2.11)$$

求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (2.12)$$

例题 2.6

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (2.13)$$

例题 2.7 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \quad (2.14)$$

例题 2.8

给定整数 $n, k \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ 满足:

1. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$;

2. 对 $1 \leq i \leq n$, 有 $\sum_{j=1}^i c_j \leq i^k$.

求 $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \dots + c_n a_n^k$ 的最大值。

2.4 练习题

作业 2.1

给定整数 $n \geq 2$ 以及不全为零的实数 a_1, a_2, \dots, a_n . 求 a_1, a_2, \dots, a_n 满足的充要条件, 使得存在正整数 $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, 满足

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq 0. \quad (2.15)$$

作业 2.2

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \quad (2.16)$$

作业 2.3

给定实数 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , 记 $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$, 证明:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \quad (2.17)$$

作业 2.4

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数。求证：对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 都有 $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n b_i x_i$ 的充要条件是：对 $1 \leq k \leq n-1$ ，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (2.18)$$

作业 2.5

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 且对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}. \quad (2.19)$$

作业 2.6

给定整数 $n \geq 2$, 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正整数, 满足对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任一非空子集 I , $\sum_{i \in I} a_i$ 互不相同。求:

1. $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$ 的最小值;
2. $\sum_{i=1}^n a_i^2$ 的最小值;
3. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ 的最大值。

第三章 局部不等式

3.1 例题

例题 3.1

设整数 $n \geq 3$, 实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$, 且满足 $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}. \quad (3.1)$$

例题 3.2

求所有的整数 $n \geq 2$, 使得存在实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 满足

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (3.2)$$

例题 3.3

给定整数 $n \geq 3$, 设不全为 0 的实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ 。记

$$A = \left(\sum_{k=1}^n x_k^3 \right)^2, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^3. \quad (3.3)$$

求 $\frac{A}{B}$ 的最大值。

例题 3.4

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{1 - (a_i - a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 3.5

设正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{1 + x_i + \dots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{1 + x_i + \dots + x_i^i}. \quad (3.5)$$

例题 3.6

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (3.6)$$

例题 3.7

设整数 $n \geq 3$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \quad (3.7)$$

其中 $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 3.8

设整数 $n \geq 2$, z_1, z_2, \dots, z_n 是复数, 求证:

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \quad (3.8)$$

例题 3.9

设整数 $n \geq 3$, x_1, x_2, \dots, x_n 是不小于 1 的实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.9)$$

其中下标按模 n 理解。

例题 3.10

给定整数 $n \geq 3$, 且 $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (3.10)$$

例题 3.11

设整数 $n \geq 3$ ，非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和为 1，证明：

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \quad (3.11)$$

例题 3.12

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$ ($1 \leq i \leq 100$), 其中 $a_{101} = a_1$, $a_{102} = a_2$ 。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$ 的最大值。

3.2 练习题

作业 3.1

设整数 $n \geq 2$, 实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 。求证: 存在 $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 使得对任意 $1 \leq j \leq n$, 都有

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \quad (3.12)$$

作业 3.2

求最大的实数 λ , 使得对任意正整数 n 和任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 只要 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2. \quad (3.13)$$

作业 3.3

设实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i \right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \quad (3.14)$$

作业 3.4

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}. \quad (3.15)$$

作业 3.5

设整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i \leq 4 \quad (3.16)$$

作业 3.6

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$, 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \quad (3.17)$$

作业 3.7

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$, 证明:

$$\frac{n-1}{n-1+x_1^2} + \frac{n-1}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{n-1}{n-1+x_n^2} \geq 1 \quad (3.18)$$

作业 3.8 · 2004 CTST

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$, 证明:

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \leq 1 \quad (3.19)$$

作业 3.9

设 $a_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$, 记 $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$, 证明:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \quad (3.20)$$

作业 3.10

设整数 $n \geq 2$, 且正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \quad (3.21)$$

作业 3.11 · 2007 白俄罗斯

已知 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 均为正数, 证明:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1}) \quad (3.22)$$

作业 3.12 · 1993 圣彼得堡

设 $a_i \in [-1, 1]$, $a_i a_{i+1} \neq -1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_{n+1} = a_1$, 证明:

$$\frac{1}{1+a_1 a_2} + \frac{1}{1+a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_n a_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \quad (3.23)$$

作业 3.13

设整数 $n \geq 2$, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 均为正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j - x_i} \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{n-1}}{n-1} \quad (3.24)$$

第四章 调整法

独立变量：固定其余变量，考虑单一变量的影响，利用单调性。约束变量：固定其余变量，固定两个变量的和或积，考虑变化影响。

定理 4.1

1. 设 $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n a_k = t$, 若在 a_1 最大、 a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过 $n-1$ 次调整将 a_1, a_2, \dots, a_n 全调为 $\frac{t}{n}$ 。

2. 设 $a_k \in \mathbb{R}^+$, $\prod_{k=1}^n a_k = t$, 若在 a_1 最大、 a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过 $n-1$ 次调整将 a_1, a_2, \dots, a_n 全调为 $\sqrt[n]{t}$ 。

定理 4.2 · 端点调整

若 $a_k \in [a, b]$, 将 $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 视为 a_k 的一元函数 $g(x)$, 且 $g'(x)$ 单调, 则可将 a_k 调为 a 或 b 。

定理 4.3 · 磨光变换法（无限调整法、SMV 定理）

定理 4.4 · EV(Equal Variable) 定理

4.1 预习题

预习 4.1

已知 $0 \leq a, b, c \leq 1$, 证明:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (4.1)$$

预习 4.2

设 x, y, z 都是非负实数且 $x + y + z = 1$, 证明:

$$yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad (4.2)$$

预习 4.3

设正实数 a, b, c, d 满足 $abcd = 1$, 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{4}{a+b+c+d} \geq 5 \quad (4.3)$$

预习 4.4

设实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, $abc > 0$, 证明:

$$ab + bc + ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4} \quad (4.4)$$

4.2 例题

例题 4.1

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) 满足不等式 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$, 求 $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$ 的最小值。

例题 4.2

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n. \quad (4.5)$$

例题 4.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_i x_j \geq 1$ (其中 $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$), 证明:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \quad (4.6)$$

例题 4.4

已知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$, 证明:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \quad (4.7)$$

例题 4.5

设 $x_i \in (0, 1]$ ($1 \leq i \leq n$), $0 < \lambda \leq 2$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n [1 + (i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \geq \frac{2 + (n-1)\lambda}{2n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (4.8)$$

例题 4.6

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}. \quad (4.9)$$

4.3 练习题

作业 4.1

给定正整数 $n \geq 4$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n^2$, 证明: 这 n 个数中一定有一个数大于等于 2。

作业 4.2

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中的最大数为 a , 证明:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (4.10)$$

并确定不等式等号成立的条件。

作业 4.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n ($n \geq 2$) 个互不相同的实数, 记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (4.11)$$

证明: $12S \geq n(n-1)M$.

作业 4.4

设整数 $n \geq 2$, $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 证明:

$$\prod_{i=1}^n \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (4.12)$$