

重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分 常见问题与方法	1
第一章 绝对值不等式（一）	2
1.1 例题	2
1.2 练习题	10
第二章 绝对值不等式（二）	14
2.1 例题	14
2.2 作业题	20
2.3 其他练习题	23
第三章 平均值原理与不等式	25
3.1 作业题	34
第四章 归纳法与不等式（一）	38
4.1 例题	38
4.2 作业题	46
第五章 归纳法与不等式（二）	50
5.1 例题	50
5.2 作业题	58

第一部分

常见问题与方法

第一章 绝对值不等式（一）

本讲介绍含绝对值的不等式，最常用的方法是三角不等式和正负分离。

1.1 例题

例题 1.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 求证: 存在 $1 \leq k \leq n$, 使得

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|. \quad (1.1)$$

例题 1.2

设整数 $n \geq 2$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = 1$ 。对 $1 \leq k \leq n$, 记 $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i - A_{i+1}| \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (1.2)$$

例题 1.3

设整数 $n \geq 2$, a_0, a_1, \dots, a_n 是实数, 满足 $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。求证: 对任意实数 t ,

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ta_{i+1} - a_{i+2}|. \quad (1.3)$$

例题 1.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 。求：

1. $\sum_{i=1}^n |a_i|$ 的最小值和最大值；
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ 的最小值和最大值。

例题 1.5

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求：

1. $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$ 的最大值；
2. $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 1.6

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$, $-1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq 1$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ 。求 $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 1.7

设整数 $n \geq 3$, 非零实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = 0$ 。求证:

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| - \min_{1 \leq i \leq n} |x_i|). \quad (1.4)$$

例题 1.8

设实数 $a < b$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [a, b]$ 。设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ 。求证：

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 - y_i^2) \right| \leq (b-a) \sqrt{1 - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}. \quad (1.5)$$

1.2 练习题

作业 1.1

设整数 $n \geq 2$, 非零实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ 。求证: 存在 $1 \leq i < j \leq n$, 使得

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{a_i}{a_j} \right| \leq 2. \quad (1.6)$$

作业 1.2

设整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。对 $1 \leq k \leq n$, 记 $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| < \frac{n-1}{2}. \quad (1.7)$$

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ , 使得对任意和为 0 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 \geq \lambda \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (1.8)$$

作业 1.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_i}. \quad (1.9)$$

第二章 绝对值不等式 (二)

本讲继续介绍含绝对值的不等式，包括设序和离散介值原理等方法，以及几个综合性的问题。

2.1 例题

例题 2.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (2.1)$$

的最大值。

例题 2.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-1, 1]$, 求

$$\left| a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \right| + \left| a_2 - \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \right| + \cdots + \left| a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n} \right| \quad (2.2)$$

的最大值。

例题 2.3

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足：

1. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$;
2. $|a_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$.

求 $\min_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - a_{i+1}|$ 的最大值。

例题 2.4

设整数 $n \geq 3$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i > 1$, $|a_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。求证:
存在正整数 $k < n$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \leq 1. \quad (2.3)$$

例题 2.5

设实数 a_1, a_2, \dots, a_{40} 满足 $\sum_{i=1}^{40} a_i = 0$ 且对 $1 \leq i \leq 40$, 都有 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$, 这里 $a_{41} = a_1$ 。记 $a = a_{10}, b = a_{20}, c = a_{30}, d = a_{40}$ 。

1. 求 $a + b + c + d$ 的最大值;
2. 求 $ab + cd$ 的最大值。

例题 2.6

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$ 满足 $a_1 = a_{1001}$, $|a_i + a_{i+2} - 2a_{i+1}| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 999$)。求

$$\max_{1 \leq i < j \leq 1001} |a_i - a_j| \quad (2.4)$$

的最大值。

2.2 作业题

作业 2.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足：

1. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$;
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = 1$.

求 $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i - a_{i+1}|$ 的最小值，其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

作业 2.2

设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$, 且 $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ ($1 \leq i \leq n$)。求证:
存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 y_1, y_2, \dots, y_n , 使得

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}. \quad (2.5)$$

作业 2.3

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ 满足 $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$ ($1 \leq i \leq 2018$), 其中 $a_{2019} = a_1$ 。求

$$\sum_{i=1}^{2018} |a_i| - \left| \sum_{i=1}^{2018} a_i \right| \quad (2.6)$$

的最大值。

2.3 其他练习题

练习 2.1

已知 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的算术平均值为 a , 证明:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k - a| \right)^2.$$

练习 2.2

设 $a_0 = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{k=1}^n |a_k(a_k - a_{k-1})| \leq \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})^2.$$

练习 2.3

设整数 $n \geq 3$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 均大于 1, 且 $|a_{k+1} - a_k| < 1$ ($1 \leq k \leq n-1$), 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

练习 2.4

(18 浙江预赛) 将 $2n$ ($n \geq 2$) 个不同的整数分成两组 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 证明:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_i - b_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \geq n.$$

练习 2.5

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 均不超过 1, 证明:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \leq n^2.$$

练习 2.6

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, 求 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ 的最大值。

练习 2.7

对每一个整数 $n \geq 2$, 求最大的常数 c_n , 使得不等式

$$c_n \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

对任意满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n 成立。

第三章 平均值原理与不等式

平均值原理是一种整体思想，本讲介绍两类能用平均值原理处理的问题，一类是存在性问题，一类与最大最小有关。

例题 3.1

设非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求证：存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 a_1, a_2, \dots, a_n ，使得

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

例题 3.2

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是实数，求证：存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 a_1, a_2, \dots, a_n ，使得

$$\left| \sum_{i=1}^n i a_i \right| \geq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \quad (3.2)$$

例题 3.3

设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, 整数 $k \geq 2$ 。求证: 存在不全为 0 的整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得其中每一个的绝对值都不超过 $k - 1$, 且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \quad (3.3)$$

例题 3.4

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ 。求证：存在 $x \in [0, 1]$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x - a_i|} \leq 8n \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right). \quad (3.4)$$

例题 3.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是小于 1 的正实数, k 是正整数, 求证:

$$\min\{a_1(1 - a_2)^k, a_2(1 - a_3)^k, \dots, a_n(1 - a_1)^k\} \leq \frac{k^k}{(k + 1)^{k+1}}. \quad (3.5)$$

例题 3.6

给定正实数 a, b , 整数 $n \geq 2$ 。设函数 $f(x) = (x+a)(x+b)$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$ 的最大值。

例题 3.7

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_9 满足 $\sum_{i=1}^9 a_i = 1$ 。记

$$S = \min\{a_1, a_2\} + 2 \min\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \min\{a_9, a_1\}, \quad (3.6)$$

$$T = \max\{a_1, a_2\} + 2 \max\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \max\{a_9, a_1\}. \quad (3.7)$$

当 S 取最大值 S_0 时，求 T 的所有可能值。

例题 3.8

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n ia_i \right) \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (3.8)$$

例题 3.9

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的正实数 λ , 使得对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$\sum_{i=1}^n \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (3.9)$$

3.1 作业题

作业 3.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数，求证：存在实数 x ，使得

$$\{x - a_1\} + \{x - a_2\} + \cdots + \{x - a_n\} \leq \frac{n-1}{2}, \quad (3.10)$$

其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分。

作业 3.2

设整数 $n \geq 3$, a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证: 存在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集 S , 满足对任意 $1 \leq i \leq n - 2$, 有 $1 \leq |S \cap \{i, i + 1, i + 2\}| \leq 2$ 且

$$\left| \sum_{i \in S} a_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (3.11)$$

作业 3.3

给定整数 $n \geq 4$ 。求最大的实数 λ , 使得对任意满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$\lambda \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq \min\{a_1, a_2\} + \min\{a_2, a_3\} + \cdots + \min\{a_n, a_1\}. \quad (3.12)$$

作业 3.4

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数。对 $1 \leq i \leq n$, 定义

$$d_i = \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \min_{i \leq j \leq n} a_j. \quad (3.13)$$

令 $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ 。

1. 求证：对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| \geq \frac{d}{2}$.
2. 求证：存在实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 使得 (1) 中等号成立。

第四章 归纳法与不等式（一）

凡是与正整数有关的命题都可以尝试用归纳法证明，在不等式中也是如此，本讲主要介绍第一数学归纳法的一些例子。

4.1 例题

例题 4.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 1. \quad (4.1)$$

例题 4.2

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - a_i a_{i+1} + 1) \geq 1, \quad (4.2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 4.3

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$, 且满足 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ ($1 \leq i \leq n-1$)。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq 2n - H_n, \quad (4.3)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 。

例题 4.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1 a_n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2, \quad (4.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 4.5

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} \right) \geq 4(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i^2}. \quad (4.5)$$

例题 4.6

设整数 $n \geq 3$, 非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 \leq \frac{4}{27}. \quad (4.6)$$

例题 4.7

设正实数 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i(1+a_i^{2^i})} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (4.7)$$

例题 4.8

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i a_j \leq t^{|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立, 其中 $t \in (0, 1)$ 。求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{1 - \sqrt{t}}. \quad (4.8)$$

4.2 作业题

作业 4.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad (4.9)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

作业 4.2

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ 。求证:

$$\frac{\sqrt{1-a_1}}{a_1} + \frac{\sqrt{1-a_2}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (4.10)$$

作业 4.3

设整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n - 1. \quad (4.11)$$

作业 4.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i a_j \leq 4^{-|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。
求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{5}{3}. \quad (4.12)$$

第五章 归纳法与不等式 (二)

本讲继续介绍用归纳法证明不等式，包括第二数学归纳法、加强数学归纳法、反向数学归纳法，以及几个经典的不等式。

5.1 例题

例题 5.1

设实数 a_i, b_i ($i = 0, 1, \dots, 2n$) 满足：

1. 对 $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$, 有 $a_i + a_{i+1} \geq 0$;
2. 对 $j = 0, 1, \dots, n - 1$, 有 $a_{2j+1} \leq 0$;
3. 对 $0 \leq p \leq q \leq n$, 有 $\sum_{k=2p}^{2q} b_k > 0$.

求证： $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i b_i \geq 0$.

例题 5.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为零的非负实数，对 $1 \leq k \leq n$ ，记

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \cdots + a_k}{l}. \quad (5.1)$$

求证：对任意正实数 α ，满足 $m_k > \alpha$ 的 k 少于 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$ 个。

例题 5.3

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$ 。求

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n \quad (5.2)$$

的最小值。

例题 5.4

设 a_1, a_2, a_3, \dots 是实数列, 满足存在正整数 N , 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $a_n = 1$ 。已知对任意整数 $n \geq 2$ 都有 $a_n \leq a_{n-1} + \frac{1}{2^n} a_{2n}$ 。求证: 对任意正整数 k , 都有 $a_k > 1 - \frac{1}{2^k}$ 。

例题 5.5

对实数列 $\{a_n\}$, 定义数列 $\{b_n\}$ 如下:

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (5.3)$$

求最小的正实数 λ , 使得对任意实数列 $\{a_n\}$ 以及任意正整数 n , 都有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_i^2. \quad (5.4)$$

例题 5.6

求最大的正实数 λ , 使得对任意正整数 n 以及任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^k a_i)^2}. \quad (5.5)$$

例题 5.7 · 牛顿不等式 (Newton's Inequality)

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 对 $1 \leq k \leq n$ 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (5.6)$$

则 $S_{k-1} S_{k+1} \leq S_k^2$, 其中 $S_0 = 1$ 。当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

例题 5.8 · 麦克劳林不等式 (Maclaurin's Inequality)

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 对 $1 \leq k \leq n$, 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (5.7)$$

则

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}. \quad (5.8)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

5.2 作业题

作业 5.1

设 n 是正整数, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, A, B$ 是正实数, 满足 $b_i \leq a_i \leq A$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{B}{A}$ 。求证:

$$\frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)}{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)} \leq \frac{B + 1}{A + 1}. \quad (5.9)$$

作业 5.2

设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 均为不减的正数数列，满足 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ 。求证：

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} y_i} \leq 2^n - 1. \quad (5.10)$$

作业 5.3

设 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, 且对 $1 \leq i \leq n - 1$, 有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{b_{i+1}}{b_i}$ 。求证:

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \leq \left(\frac{A_n(b)}{G_n(b)} \right)^{n-1}, \quad (5.11)$$

其中 A_n, G_n 分别表示算术平均值和几何平均值。

作业 5.4 · Suranyi 不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数，则

$$(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^n + n \prod_{i=1}^n a_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^{n-1} \right). \quad (5.12)$$