重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分

基本方法

第一章　恒等变形

1.1　基础知识

定理 1.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i\ne j} a_i a_j \tag{1.2}$$

定理 1.2

当 $a_{n+1} = a_1$ 时：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1})^2 \tag{1.3}$$

定理 1.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_ia_j+b_ib_j)-(a_ib_j+a_jb_i)=(a_i-b_i)(a_j-b_j),\quad 1\le i,j\le n \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \tag{1.5}$$

定理 1.4

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \tag{1.6}$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}2a_ia_j \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^n\left(2\sum_{k=1}^n b_k-nb_i\right)^2=n^2\sum_{i=1}^n b_i^2 \tag{1.8}$$

定理 1.5

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_i a_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_i a_j \tag{1.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j b_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j + a_j b_i) \tag{1.11}$$

定理 1.6

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n}(n+1-k)a_j a_k \tag{1.12}$$

$$(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i a_i^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} k a_j a_k \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right) = \sum_{1\le i<j\le n}(j-i)a_i a_j \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i a_i^2 + 2\sum_{1\le i<k\le n} i a_i a_k \tag{1.15}$$

定理 1.7

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})} \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=i}^{i+k}a_j\right)}=1 \quad (\text{其中}\prod_{i=1}^{n}a_i=1) \tag{1.17}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)=\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k}\right]^2+\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k+1}\right]^2 \tag{1.18}$$

1.2 预习题

预习 1.1

求下列各式的值：

1. $S_1=\sum_{1\le i<j\le n}(i-j)^2$
2. $S_2=\sum_{1\le i<j\le n}i\cdot j$
3. $S_3=\sum_{1\le i<j\le n}(i^2+j^2)$

预习 1.2 · 2001 韩国

已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1$，证明：

$$1-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\ge\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{2} \tag{1.19}$$

1.3　例题

例题 1.1

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{1.20}$$

例题 1.2

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \tag{1.21}$$

例题 1.3 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \tag{1.22}$$

例题 1.4 · 2016 西部赛

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数，记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i (1 \le k \le n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^{n} a_j^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i\right)^2 \tag{1.23}$$

例题 1.5

设整数 $n \geq 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，设 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，证明：

$$M \cdot \sum_{i=1}^{n} i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tag{1.24}$$

例题 1.6 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，且 $a_1 = a_{n+1}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2 \tag{1.25}$$

例题 1.7 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \tag{1.26}$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

例题 1.8 · 2006 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)} \cdot \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \tag{1.27}$$

例题 1.9

设 a_i, b_i, c_i 均为实数，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 且 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$，证明：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i c_j - a_j c_i)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \tag{1.28}$$

例题 1.10

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{1.29}$$

例题 1.11

设整数 $n \geq 2$，$z_1, z_2, \ldots, z_n$ 是复数，求证：

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|\right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \tag{1.30}$$

例题 1.12

设 $n \geq 3$，记正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 S，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \tag{1.31}$$

例题 1.13

设正整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) x_i x_j \tag{1.32}$$

的最大值。

例题 1.14 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1 \tag{1.33}$$

例题 1.15

设正整数 $n \geq 3$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = n-1$，证明：

$$\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \tag{1.34}$$

1.4　作业题

作业 1.1

证明：

$$\frac{4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{4a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \tag{1.35}$$

作业 1.2 · 2016 IMC

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \tag{1.36}$$

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 + \sqrt{x_i x_j}\right) \cdot \left(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}\right) \tag{1.37}$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

作业 1.4

已知实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $0 < a_i \leq \frac{1}{2}(i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)\right]^2} \tag{1.38}$$

作业 1.5

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$ ，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 . \tag{1.39}$$

作业 1.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{1\leq k<j\leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \tag{1.40}$$

第二章　Abel 变换

2.1　基础知识

定理 2.1 ·　Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0 = 0$，$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\ (1 \le k \le n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \tag{2.1}$$

定理 2.2 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2. \tag{2.3}$$

2.2　预习题

预习 2.1

给定正整数 n，对任意 $1 \le k \le n$ 正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \le k$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{2.4}$$

预习 2.2 · 1978 IMO

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是两两不同的正整数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{2.5}$$

预习 2.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得对任意 $1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right|. \tag{2.6}$$

预习 2.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$，且对 $1 \le k \le n$，有 $\prod_{i=1}^{k} a_i \ge \prod_{i=1}^{k} b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{2.7}$$

预习 2.5

给定整数 $n \ge 2$ 以及不全为零的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 求 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足的充要条件，使得存在正整数 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \ge 0. \tag{2.8}$$

2.3　例题

例题 2.1 · 1994 USAMO

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，满足对 $1 \le k \le n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sqrt{k}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}. \tag{2.9}$$

例题 2.2 · 1999 APMO

设 $\{a_n\}$ 是正项数列，满足对任意 $i, j \geq 1$，有 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. 求证：对任意正整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \geq a_n. \tag{2.10}$$

例题 2.3 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \tag{2.11}$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}. \tag{2.12}$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right). \tag{2.13}$$

例题 2.4

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \tag{2.14}$$

例题 2.5

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正整数，满足对集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任一非空子集 I，$\sum_{i \in I} a_i$ 互不相同。求：

1. $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$ 的最小值；
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 的最小值；
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ 的最大值。

例题 2.6 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \tag{2.15}$$

例题 2.7

给定整数 $n, k \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ 满足：

1. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$;
2. 对 $1 \leq i \leq n$，有 $\sum_{j=1}^{i} c_j \leq i^k$.

求 $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \cdots + c_n a_n^k$ 的最大值。

2.4　练习题

作业 2.1

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证：

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \tag{2.16}$$

作业 2.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且对 $1 \leq k \leq n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}. \tag{2.17}$$

作业 2.3

给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$，记 $M = \max_{1\leq k\leq n} |a_k - a_{k+1}|$，证明：

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \frac{M}{2} \tag{2.18}$$

作业 2.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数。求证：对任意实数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 都有 $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le \sum_{i=1}^n b_i x_i$ 的充要条件是：对 $1 \le k \le n-1$，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \ge \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \tag{2.19}$$

第三章　局部不等式

3.1　例题

例题 3.1

设整数 $n \geq 3$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}. \tag{3.1}$$

例题 3.2

求所有的整数 $n \geq 2$，使得存在实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，满足

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{3.2}$$

例题 3.3

给定整数 $n \geq 3$，设不全为 0 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$。记

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)^2, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^3. \tag{3.3}$$

求 $\frac{A}{B}$ 的最大值。

例题 3.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_{i+1}}{1-(a_i-a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 3.5

设正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i}}. \tag{3.5}$$

例题 3.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \tag{3.6}$$

例题 3.7

设整数 $n \geq 3$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \tag{3.7}$$

其中 $a_0 = a_n$，$a_{n+1} = a_1$。

例题 3.8

设整数 $n \geq 3$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是不小于 1 的实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{3.8}$$

其中下标按模 n 理解。

例题 3.9

给定整数 $n \geq 3$，且 $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{3.9}$$

例题 3.10

设整数 $n \geq 3$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，证明：

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+(n-2)x_i}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{[1+(n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \tag{3.10}$$

例题 3.11

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1 \ (1 \leq i \leq 100)$，其中 $a_{101} = a_1$，$a_{102} = a_2$。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$ 的最大值。

3.2 练习题

作业 3.1

设整数 $n \geq 2$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$。求证：存在 $a \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，使得对任意 $1 \leq j \leq n$，都有

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \tag{3.11}$$

作业 3.2

求最大的实数 λ，使得对任意正整数 n 和任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，只要 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$，就有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^2. \tag{3.12}$$

作业 3.3

设实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i\right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \tag{3.13}$$

作业 3.4

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{2}{1+x_1+x_2}+\cdots+\frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}. \tag{3.14}$$

作业 3.5

设整数 $n \geq 2$，且非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i \leq 4 \tag{3.15}$$

作业 3.6

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$，证明：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \tag{3.16}$$

作业 3.7 · 2004 CTST

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$，证明：

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \le 1 \tag{3.17}$$

作业 3.8

设 $a_i \in [0,1], i=1,2,\ldots,n$，记 $S=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$，证明：

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3}+\frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \le \frac{1}{3} \tag{3.18}$$

作业 3.9

设整数 $n \geq 2$，且正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \tag{3.19}$$

作业 3.10 · 2007 白俄罗斯

已知 $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ 均为正数，证明：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_1x_2\dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1-x_1x_2\dots x_{n+1}) \tag{3.20}$$

作业 3.11 · 1993 圣彼得堡

设 $a_i \in [-1,1]$，$a_i a_{i+1} \neq -1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 $a_{n+1} = a_1$，证明：

$$\frac{1}{1+a_1a_2} + \frac{1}{1+a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_na_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \tag{3.21}$$

第四章　调整法

定理 4.1

1. 设 $a_k \in \mathbb{R}$，$\sum_{k=1}^{n} a_k = t$，若在 a_1 最大、a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \cdots, a_n\right),$$

   则可经过 $n-1$ 次调整将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全调为 $\frac{t}{n}$。

2. 设 $a_k \in \mathbb{R}^+$，$\prod_{k=1}^{n} a_k = t$，若在 a_1 最大、a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \cdots, a_n\right),$$

   则可经过 $n-1$ 次调整将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全调为 $\sqrt[n]{t}$。

定理 4.2 · 端点调整

若 $a_k \in [a, b]$，将 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 视为 a_k 的一元函数 $g(x)$，且 $g'(x)$ 单调，则可将 a_k 调为 a 或 b。

定理 4.3 · 磨光变换法（无限调整法、SMV 定理）

定理 4.4 · EV(Equal Variable) 定理

4.1　预习题

预习 4.1

已知 $0 \leq a, b, c \leq 1$，证明：

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \leq 2 \tag{4.1}$$

预习 4.2

设 x, y, z 都是非负实数且 $x+y+z=1$，证明：

$$yz+zx+xy-2xyz \leq \frac{7}{27} \tag{4.2}$$

预习 4.3

设正实数 a, b, c, d 满足 $abcd=1$，证明：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{4}{a+b+c+d} \geq 5 \tag{4.3}$$

预习 4.4

设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$，$abc>0$，证明：

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4} \tag{4.4}$$

4.2 例题

例题 4.1

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ 满足不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$，求 $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$ 的最小值。

例题 4.2

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，证明：

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n. \tag{4.5}$$

例题 4.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_i x_j \geq 1$（其中 $i \neq j$，$1 \leq i \leq n$，$1 \leq j \leq n$），证明：

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \tag{4.6}$$

例题 4.4

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$，证明：

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \tag{4.7}$$

例题 4.5

设 $x_i \in [0,1]$（$1 \le i \le n$），$0 < \lambda \le 2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} [1+(i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \ge \frac{2+(n-1)\lambda}{2n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2. \tag{4.8}$$

例题 4.6

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 \right\}. \tag{4.9}$$

4.3 练习题

作业 4.1

给定正整数 $n \geq 4$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n^2$，证明：这 n 个数中一定有一个数大于等于 2。

作业 4.2

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中的最大数为 a，证明：

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}. \tag{4.10}$$

并确定不等式等号成立的条件。

作业 4.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n $(n \geq 2)$ 个互不相同的实数，记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \tag{4.11}$$

证明：$12S \geq n(n-1)M$.

作业 4.4

设整数 $n \geq 2$，$\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$（$i = 1, 2, \ldots, n$），证明：

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{4.12}$$