重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分

高级不等式

第一章　伯努利不等式

1.1　基础知识

定理 1.1 · 伯努利不等式 (Bernoulli's Inequality)

对任意实数 $x > -1$ 和实数 α，有：

1. 当 $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 时：

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \tag{1.1}$$

2. 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时：

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \tag{1.2}$$

当且仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $x = 0$ 时取等号。

定理 1.2 · 伯努利不等式的多变量形式

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为符号相同的实数，且 $x_i > -1$，则：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1.3}$$

1.2　例题

例题 1.1

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$，求证：

$$(1+a_1)^{\frac{1}{a_2}}(1+a_2)^{\frac{1}{a_3}}\ldots(1+a_n)^{\frac{1}{a_1}} \geq 2^n. \tag{1.4}$$

定理 1.3 · Mitrinovic 不等式

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：对 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的任一排列 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{b_i} > 1. \tag{1.5}$$

例题 1.2

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n). \tag{1.6}$$

例题 1.3

求最小的实数 λ，使得对任意正整数 n 及任意满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\lambda \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{1.7}$$

例题 1.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 + n - 1) \geq n^{n-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2. \tag{1.8}$$

例题 1.5

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$。求证：

$$(a_1^n + 1)(a_2^n + 1)\ldots(a_n^n + 1) \geq 2^n. \tag{1.9}$$

例题 1.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不全为 1 的正整数，满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=k$ 是整数。求证：多项式

$$P(x)=a_1a_2\ldots a_n(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) \tag{1.10}$$

没有正根。

例题 1.7

设整数 $n \geq 3$，多项式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ 有 n 个实根，且都在区间 $(0,1)$ 内。求证：

$$\sum_{i=1}^{n-2} ia_i > 0. \tag{1.11}$$

1.3　练习题

作业 1.1

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i \geq -1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) + \frac{n}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 1. \tag{1.12}$$

作业 1.2

给定整数 $n \geq 2$，求最小的实数 λ，使得对任意非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i + \lambda)}. \tag{1.13}$$

第二章　其他著名不等式

2.1　基础知识

定理 2.1 · Jensen 不等式

1. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则对任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$，有

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\tag{2.1}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$。则对任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\tag{2.2}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

定理 2.2 · 加权均值不等式

设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i} \tag{2.3}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

定理 2.3 · 幂平均不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，非零实数 $\alpha < \beta$。则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{2.4}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

定理 2.4 · 范数不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是非负实数，正实数 $\alpha < \beta$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.5}$$

当且仅当 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中至少有 $n-1$ 个为 0 时等号成立。

定理 2.5 · Hölder 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是正实数，p, q 是大于 1 的实数，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.6}$$

当且仅当 $\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=\cdots=\frac{a_n^p}{b_n^q}$ 时等号成立。

定理 2.6 · Minkowski 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是正实数，实数 $p \geq 1$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

2.2 例题

例题 2.1 · 樊畿不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \frac{1}{2}]$，求证：

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\left(\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}. \tag{2.8}$$

例题 2.2

设 n 是正整数，$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数，满足 $p < q$，且 $x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$。求证：

1. $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$
2. $(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} < (x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

例题 2.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$。求证：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k}-1)^n} \geq \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(a_1 a_2 \ldots a_n - 1)^n}. \tag{2.9}$$

2.3　作业题

作业 2.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不小于 1 的实数，求证：

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}+1}. \tag{2.10}$$

作业 2.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1+a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{n-a_i}{1-a_i}. \tag{2.11}$$

作业 2.3

设 m,n 是给定的大于 1 的整数，$\alpha<\beta$ 是给定的正实数，对不全为 0 的非负实数 a_{ij} $(1\le i\le n,\ 1\le j\le m)$，求

$$\frac{\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{2.12}$$

的最大值。

作业 2.4

给定正整数 n。求最大的实数 λ，使得对所有满足

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+2)^n \geq \prod_{i=1}^{2n} x_i \tag{2.13}$$

的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$，都有

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+1)^n \geq \lambda \prod_{i=1}^{2n} x_i. \tag{2.14}$$

第三章　反向不等式

3.1　基础知识

定理 3.1 · Kantorović 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \tag{3.1}$$

定理 3.2 · Polyá-Szegö 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < A,\ b < B$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, A],\ b_1, b_2, \ldots, b_n \in [b, B]$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{3.2}$$

3.2　预习题

3.3　例题

例题 3.1 · 1978 苏联

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$，其中 $0 < a < b$，证明：

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2 \tag{3.3}$$

例题 3.2 · 2016 克罗地亚

已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均为非负实数，证明：

$$\left(x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right)\cdot(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)\le\frac{(n+1)^2}{4n}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \tag{3.4}$$

例题 3.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{3.5}$$

求证：$\max\{a_1, \ldots, a_n\} \leq 4\min\{a_1, \ldots, a_n\}$。

例题 3.4

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 2]$，求

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \tag{3.6}$$

的最大值。

例题 3.5 · 1998 年高中联赛

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in [1, 2]$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{3.7}$$

例题 3.6

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) < n^2 + 1. \tag{3.8}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

例题 3.7

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < b$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, b]$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{3.9}$$

其中 $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$。

例题 3.8

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3.10}$$

练习 3.1

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + \lambda \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{3.11}$$

3.4 练习题

练习 3.2

已知非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，其中 $n \geq 3$，求

$$\sum_{i=1}^{n} ia_i \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i})^2 \tag{3.12}$$

的最大值。

练习 3.3

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，证明：

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} (2i-1)x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2i-1} \leq \frac{n^2}{2n-1} \tag{3.13}$$

练习 3.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且 $a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{n}$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}}. \tag{3.14}$$

练习 3.5

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \tag{3.15}$$

练习 3.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq \frac{M^2 - Mm + m^2}{Mm} \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{3.16}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

练习 3.7

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2. \tag{3.17}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

练习 3.8

给定整数 $n \geq 3$。求最大的实数 λ，使得只要正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \tag{3.18}$$

那么 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数便能构成三角形的三边长。

第四章　凸函数与不等式

本讲介绍凸函数的两个应用，一是用于处理变量有界的情形；二是卡拉玛特 (Karamata) 不等式，这两个都是强有力的工具，有了它们会对之前的很多问题有新的理解。

4.1　重要定理

定理 4.1 · 优超关系 (Majorization)

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是实数，如果满足：

1. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ 且 $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$;
2. 对任意 $1 \leq k \leq n-1$，有 $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i$;
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

则称 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 优超于 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，记作 $(x) \succ (y)$。

定理 4.2 · 卡拉玛特不等式 (Karamata's Inequality)

设 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$。

1. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 下凸函数 ** (Convex)，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \tag{4.1}$$

2. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 上凸函数 ** (Concave)，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \tag{4.2}$$

定理 4.3 · Popoviciu 不等式

设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，则对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} f(b_i) \tag{4.3}$$

其中 $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$，$b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} a_j$。

4.2　例题

练习 4.1

给定整数 $n \geq 3$，设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$，求 $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}$ 的最值，其中 $a_{n+1} = a_1$。

练习 4.2

设整数 $n \geq 2$，正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \frac{(M-m)^2}{Mm}. \tag{4.4}$$

练习 4.3

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$。记 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+S-a_i} + \prod_{i=1}^{n} (1-a_i) \leq 1. \tag{4.5}$$

练习 4.4

给定整数 $n>2$。设非负实数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2\sqrt{x_1x_2\ldots x_n} \tag{4.6}$$

的最大值和最小值。

练习 4.5

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是非负实数，求证：

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \geq \prod_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.7}$$

练习 4.6

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{1997} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$，且满足 $\sum_{i=1}^{1997} a_i = -318\sqrt{3}$。求 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^{12}$ 的最大值。

练习 4.7

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in (n-1, n)$。记 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求证：

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \prod_{i=1}^{n} (S - (n-1)a_i). \tag{4.8}$$

练习 4.8

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2a_i + a_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}, \tag{4.9}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$a_{n+2} = a_2$。

4.3　作业题

作业 4.1 · Ozeki 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $0 \leq m_1 \leq a_i \leq M_1$，$0 \leq m_2 \leq b_i \leq M_2$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left[\frac{n^2}{3}\right](M_1M_2 - m_1m_2)^2. \tag{4.10}$$

作业 4.2

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i + 1)^2 + 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{4.11}$$

的最大值。

作业 4.3

给定正整数 n 和正实数 a。设 $k, x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是正整数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$。求 $a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots+a^{x_k}$ 的最大值。

作业 4.4

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{3}, \tag{4.12}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$a_{n+2} = a_2$。