

重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分 基本不等式	1
第一章 均值不等式 (一)	2
1.1 均值不等式的加强	2
1.2 均值不等式的基本用法	4
1.3 作业题	11
第二章 均值不等式 (二)	15
2.1 基础知识	15
2.2 典型例题	17
2.3 作业题	24
2.4 补充练习题	28
第三章 柯西不等式 (一)	30
3.1 分式型柯西不等式	33
3.2 作业题	39
第四章 柯西不等式 (二)	43
4.1 换元法	43
4.2 待定系数法	47
4.3 裂项法	49
4.4 作业题	51
第五章 柯西不等式 (三)	55
5.1 拉格朗日恒等式	55
5.2 Hölder 不等式	62
5.3 作业题	65
5.4 柯西不等式补充练习题	67
第六章 排序不等式与切比雪夫不等式	71
6.1 基础知识	71

6.2 例题	73
6.3 作业题	81
第七章 补充练习题	85
 第二部分 基本方法	 91
第八章 恒等变形	92
8.1 基础知识	92
8.2 预习题	95
8.3 例题	96
8.4 作业题	111
第九章 Abel 变换	120
9.1 基础知识	120
9.2 预习题	122
9.3 例题	123
9.4 练习题	130
第十章 局部不等式	134
10.1 例题	134
10.2 练习题	145
第十一章 调整法	156
11.1 预习题	157
11.2 例题	158
11.3 练习题	164
 第三部分 高级不等式	 168
第十二章 伯努利不等式	169
12.1 基础知识	169
12.2 例题	170
12.3 练习题	178
第十三章 其他著名不等式	180
13.1 基础知识	180
13.2 例题	185
13.3 作业题	188

第十四章 反向不等式	192
14.1 基础知识	192
14.2 预习题	194
14.3 例题	194
14.4 练习题	202
第十五章 凸函数与不等式	204
15.1 重要定理	204
15.2 例题	207
15.3 作业题	215
第四部分 常见问题与方法	219
第十六章 绝对值不等式 (一)	220
16.1 例题	220
16.2 练习题	228
第十七章 绝对值不等式 (二)	232
17.1 例题	232
17.2 作业题	238
17.3 其他练习题	241
第十八章 平均值原理与不等式	243
18.1 例题	243
18.2 作业题	252
第十九章 归纳法与不等式 (一)	256
19.1 例题	256
19.2 作业题	264
第二十章 归纳法与不等式 (二)	268
20.1 例题	268
20.2 作业题	276

第一部分

基本不等式

第一章 均值不等式 (一)

均值不等式是三大基本不等式之一，本讲介绍其在证明 n 元不等式中的应用，需要体会均值不等式的适用情形、掌握“拆”的技巧、积累常见结构之间的关系。

1.1 均值不等式的加强

例题 1.1

设 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 是正实数，记 A_n, G_n 分别为 a_1, \dots, a_n 的算术平均值和几何平均值。求证：

1. $n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$;
2. $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \leq \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}$.

例题 1.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, b_1, b_2, \dots, b_n 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的一个排列。求证:

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\sqrt{b_{i+1}} - \sqrt{b_i})^2, \quad (1.1)$$

其中 $b_{n+1} = b_1$ 。

1.2 均值不等式的基本用法

例题 1.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 记 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \frac{S^k}{k!}. \quad (1.2)$$

例题 1.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} - a_{i+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}, \quad (1.3)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 1.5

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是非负实数, 对 $1 \leq k \leq n$, 记 $c_k = \prod_{i=1}^k b_i^{\frac{1}{k}}$. 求证:

$$nc_n + \sum_{k=1}^n k(a_k - 1)c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^k b_k. \quad (1.4)$$

例题 1.6

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right)^{n-1} \geq -n + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \prod_{k=1}^n a_k^{-\frac{1}{n}}, \quad (1.5)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 1.7

设整数 $n > 2$, 正实数 a_2, a_3, \dots, a_n 满足 $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > \frac{1}{4^{n-1}} n^n (n-1)^{n-1}. \quad (1.6)$$

例题 1.8

给定正整数 n 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求

$$\frac{(1+a_1)(1+a_1+a_2)\dots(1+a_1+a_2+\dots+a_n)}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (1.7)$$

的最小值。

例题 1.9

设 n 为正整数, x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}}\right)^2 \quad (1.8)$$

1.3 作业题

作业 1.1

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

作业 1.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ ($1 \leq i \leq n-1$)。求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \dots (a_n - a_1^2) \quad (1.10)$$

的最大值，其中 a_{n+1} 应理解为 a_1 或题目隐含循环条件（此处按题目原文保留 $a_n - a_1^2$ ）。

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1]$ ，都有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} + \lambda \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (1.11)$$

作业 1.4

设 n 是正整数, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$ 。求证:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n+1)a_n^n < 3. \quad (1.12)$$

第二章 均值不等式 (二)

2.1 基础知识

定理 2.1 · 对称交叉项

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (2.1)$$

定理 2.2 · 轮换交叉项

(四分之一引理) 设整数 $n \geq 4$, a_1, a_2, \dots, a_n 是非负实数, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

2.2 典型例题

例题 2.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.3)$$

的最小值。

例题 2.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.4)$$

的最小值。

例题 2.3

给定整数 $n \geq 3$ 。设 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数, 满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2n} > 0 \quad (2.5)$$

且对任意 $i = 1, 2, \dots, 2n$, 有 $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$ (这里 $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$)。求 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ 的最小值。

例题 2.4

给定整数 $n \geq 3$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$ 且满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ，求

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \tag{2.6}$$

的最大值。

例题 2.5

给定整数 $n \geq 4$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，均有

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + \lambda m M \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.7)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ ， $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

例题 2.6

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1, 1 \leq i \leq 100$, 其中脚标按模 100 理解。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+1}$ 的最大值。

例题 2.7

给定整数 $n \geq 3$, $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ 。设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $\sum a_i = \sum b_i = 1$ 。对 $1 \leq i \leq n$, 记 $c_i = (\lambda a_i + b_{i+1})(\lambda a_{i+1} + b_i)$, 其中 $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$ 。求 $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ 的最大值。

2.3 作业题

作业 2.1

设 a_1, a_2, \dots, a_{100} 是非负实数, 满足:

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 2$;
2. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{100} a_1 = 1$.

求 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最大值和最小值。

作业 2.2

给定整数 $n \geq 4$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$, 求

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (2.8)$$

的最小值。

作业 2.3

给定整数 $n \geq 4$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ，求

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_n a_1 a_2 \tag{2.9}$$

的最大值。

作业 2.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设集合 $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, i \mid j\}$ 。对任意满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 求

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j \quad (2.10)$$

的最大值。

2.4 补充练习题

练习 2.1

知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, 证明:

$$(2 + a_1)(2 + a_2) \dots (2 + a_n) \geq 3^n. \quad (2.11)$$

练习 2.2

知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$, 证明:

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n). \quad (2.12)$$

练习 2.3 · 17 北大挑战赛

定整数 n 和正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 且满足 $\prod_{i=1}^k a_i \geq k! \ (1 \leq k \leq n)$, 证明:

$$\frac{2!}{1 + a_1} + \frac{3!}{(1 + a_1)(2 + a_2)} + \dots + \frac{(n + 1)!}{(1 + a_1)(2 + a_2) \dots (n + a_n)} < 3. \quad (2.13)$$

练习 2.4 · 14 北约

知正数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, 证明:

$$(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \dots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n. \quad (2.14)$$

练习 2.5 · 18 北大综合营

非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 求证: 对任意 $r > 0$ 有

$$(1 + rx_1)(1 + rx_2) \dots (1 + rx_n) \geq (n + r)^n x_1 x_2 \dots x_n. \quad (2.15)$$

练习 2.6 · 07 女奥

整数 $n \geq 4$, 非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$, 记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2 + 1} + \frac{a_n}{a_1^2 + 1}. \quad (2.16)$$

求 P 的最小值, 并给出相应的取等条件。

练习 2.7

整数 $n \geq 3$, 且正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \dots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1.$$

求证:

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq (n-1)^{n/4}. \quad (2.17)$$

练习 2.8

知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$, 证明:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (2.18)$$

练习 2.9 · 07 保加利亚

整数 $n \geq 2$, 求常数 $C(n)$ 的最大值, 使得对所有满足 $x_i \in (0, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且 $(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$ ($1 \leq i < j \leq n$) 的实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 均有

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}). \quad (2.19)$$

练习 2.10

n 为正整数, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$, 证明:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + na_{n-1}^{n-1} + (n+1)a_n^n < 3. \quad (2.20)$$

练习 2.11

n 为正整数, x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}} \right)^2. \quad (2.21)$$

第三章 柯西不等式 (一)

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 是现代数学各个分支中应用最为广泛的不等式之一。本讲将系统介绍柯西不等式的多种形式、证明技巧（如换元、待定系数、裂项）以及相关的推广（如拉格朗日恒等式、Hölder 不等式）。

本节介绍柯西不等式的几种形式，以及在证明分式不等式中的应用。

定理 3.1 · 柯西不等式

定理 3.2 · 积分形式

设 f, g 是区间 $[a, b]$ 上的可积函数，求证：

$$\left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2. \quad (3.1)$$

定理 3.3 · Wagner 不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, $x \in [0, 1]$ 。求证:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2. \quad (3.2)$$

定理 3.4 · Aczel 不等式

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 满足 $a_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2$ 。求证:

$$\left(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\right) \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\right) \leq \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i\right)^2. \quad (3.3)$$

3.1 分式型柯西不等式

例题 3.1

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 - a_{i+1} + n} \geq 1, \quad (3.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 3.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是给定的正实数, 求证: 存在和为 1 的正实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得对任意和为 1 的正实数 y_1, y_2, \dots, y_n , 都有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (3.5)$$

例题 3.3

设整数 $m < n$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数。对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集 A , 记 $S_A = \sum_{i \in A} a_i$ 。求证:

$$\sum_{|A|=m} \frac{S_A}{S_{A^c}} \geq \frac{m}{n-m} C_n^m. \quad (3.6)$$

例题 3.4

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = \frac{n}{2}$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{a_i + a_j} \geq \frac{n^2}{2}. \quad (3.7)$$

例题 3.5

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ 。对 $1 \leq i \leq n$, 记 $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq 1. \quad (3.8)$$

例题 3.6 · 2006 CTST

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+a_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (3.9)$$

3.2 作业题

作业 3.1

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \max\{a_i^2, b_i^2\} \right) \left(\sum_{i=1}^n \min\{a_i^2, b_i^2\} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (3.10)$$

作业 3.2

给定整数 $n \geq 3$ 。求最小的实数 λ ，使得对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{\lambda a_n}{S - a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}, \quad (3.11)$$

其中 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

作业 3.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} \geq \frac{n}{2}. \quad (3.12)$$

作业 3.4

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + 1} \right) \leq \frac{n^3}{2}. \quad (3.13)$$

第四章 柯西不等式 (二)

本节介绍柯西不等式与换元、待定系数、裂项等方法综合运用的问题。

4.1 换元法

例题 4.1

给定正整数 n 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_{2n} 满足 $\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$ ，求

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (4.1)$$

的最大值。

例题 4.2

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, 求证:

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k^2 \leq \frac{n}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2. \quad (4.2)$$

例题 4.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j a_i \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \left(\sum_{i=1}^j a_i \right)^2. \quad (4.3)$$

例题 4.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{\frac{i}{j}} a_i a_j = 1$, 求 $\sum_{i=1}^n a_i$ 的最大值和最小值。

4.2 待定系数法

例题 4.5 · Ostrowski 不等式

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$ 。
求证：

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}. \quad (4.4)$$

例题 4.6

给定正整数 n 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n ia_i = 1$ 。求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (4.5)$$

的最小值。

4.3 裂项法

例题 4.7

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1^2+\cdots+a_n^2} < \sqrt{n}. \quad (4.6)$$

例题 4.8

设整数 $n \geq 2$, 正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ 。求证: 对任意实数 x , 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}. \quad (4.7)$$

4.4 作业题

作业 4.1

设实数 $1 = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$, 求证:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{i}(a_i - a_{i+1}). \quad (4.8)$$

作业 4.2

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ 是实数, 求证:

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} (a_i + \cdots + a_j)^2. \quad (4.9)$$

作业 4.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的实数 λ , 使得对任意满足 $\sum_{i=1}^n ia_i = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (4.10)$$

作业 4.4

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_n} < \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (4.11)$$

第五章 柯西不等式 (三)

本节介绍柯西不等式的两种推广和加强：拉格朗日恒等式与 Hölder 不等式，需要注意“平移不变”技巧的运用。

5.1 拉格朗日恒等式

定理 5.1 · 拉格朗日恒等式

对于任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n ，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (5.1)$$

例题 5.1 · 2010 中欧数学奥林匹克

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2. \quad (5.2)$$

例题 5.2

设 a_0, a_1, \dots, a_{2n} 是实数, 求证:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i^2 \geq \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{i=0}^{2n} a_i \right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \left(\sum_{i=0}^{2n} (i-n)a_i \right)^2. \quad (5.3)$$

例题 5.3

设整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 t 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 3t$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 3t^2$, $\sum_{i=1}^n a_i^3 > 3t^3 + t$. 求证: 存在 $1 \leq i < j \leq n$ 使得 $|a_i - a_j| > 1$.

例题 5.4

设整数 $n \geq 3$ 。正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) = n^2 + 1$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right) \geq n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}. \quad (5.4)$$

例题 5.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{2n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{2n}} \right) - n^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i} \right)^2 \geq n^2. \quad (5.5)$$

例题 5.6

设 $a_1, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{2n}$ 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i \right)^2 \geq \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i) \right]^2. \quad (5.6)$$

5.2 Hölder 不等式

定理 5.2 · Hölder 不等式

设 $m, n \geq 2$ 为整数。给定 m 组非负实数：

$$(a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \quad (a_{1,2}, \dots, a_{n,2}), \quad \dots, \quad (a_{1,m}, \dots, a_{n,m}).$$

则有：

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7)$$

即：

$$\sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}^m \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,2}^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{i,m}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.8)$$

当且仅当这 m 组向量两两共线（即成比例）时，等号成立。

例题 5.7

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^3 + 1) \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 a_{i+1} + 1), \quad (5.9)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 5.8

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证：

$$(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) \left(\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} \right) \geq \frac{n}{n+1}. \quad (5.10)$$

5.3 作业题

作业 5.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \right)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (5.11)$$

作业 5.2

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_i > b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且 $\prod_{i=1}^n a_i b_i = 1$ 。
求证：

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a_i - b_i)}. \quad (5.12)$$

5.4 柯西不等式补充练习题

练习 5.1

$a_i, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (5.13)$$

练习 5.2 · 10 浙大自招

整数 $n \geq 2$, 且正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4. \quad (5.14)$$

练习 5.3 · 02 女奥

整数 $n \geq 2$, 且 P_1, P_2, \dots, P_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的任意排列, 证明:

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \dots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} > \frac{n-1}{n+2}. \quad (5.15)$$

练习 5.4 · 11 甘肃预赛

知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, 证明:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}. \quad (5.16)$$

练习 5.5

a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 证明:

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (5.17)$$

练习 5.6

$n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$, 证明:

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \dots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3}. \quad (5.18)$$

练习 5.7

整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, 证明:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2. \quad (5.19)$$

练习 5.8

知正实数 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 满足 $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)}\right)^2 \leq (n-1)x_{n+1}^2. \quad (5.20)$$

练习 5.9

知 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}. \quad (5.21)$$

练习 5.10

定整数 $n \geq 2$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \quad (5.22)$$

其中 $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$. 证明: $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$.

练习 5.11

17 HMMT) 设 $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ 均为实数, 求出最大的实数 c , 使得下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c x_{2017}^2. \quad (5.23)$$

练习 5.12 · 19 欧洲杯

知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 证明:

$$\sum_{k=1}^{2019} \frac{x_k^2}{2x_k x_{k+1} - 1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}. \quad (5.24)$$

练习 5.13

知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-1) \sum_{j \neq i} x_j^2 + x_i}{1 + \sum_{j \neq i} x_j} \geq \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}. \quad (5.25)$$

练习 5.14 · 96 波兰

整数 $n \geq 2$, 正数 $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 证明:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}, \quad (5.26)$$

并指出等号成立的充要条件。

练习 5.15

$a_i > 0$, $b_i > 0$, $a_i b_i = c_i^2 + d_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2. \quad (5.27)$$

练习 5.16 · 02 罗马尼亚

整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, 求证:

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \left(a_1 \sqrt{a_1} + a_2 \sqrt{a_2} + \dots + a_n \sqrt{a_n} \right)^2. \quad (5.28)$$

练习 5.17 · 98 罗马尼亚

知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1. \quad (5.29)$$

练习 5.18 · 14 东南

整数 $n \geq 2$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + \dots + x_n = 1$, 且 $x_{n+1} = x_1$, 求证:

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}. \quad (5.30)$$

练习 5.19

知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n^3}{n+1}. \quad (5.31)$$

练习 5.20 · 10 伊朗改

a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2. \quad (5.32)$$

练习 5.21

x_1, x_2, \dots, x_n 是正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}. \quad (5.33)$$

第六章 排序不等式与切比雪夫不等式

排序不等式是除均值不等式和柯西不等式之外的第三种基本不等式，有别于前两种通过平方和得到大小关系，排序不等式是通过序来得到的。切比雪夫 (Chebyshev) 不等式可以认为是排序不等式的特殊情况，但因其结构整齐，特别在近年出现的频率很高。

本讲介绍排序不等式和切比雪夫不等式的证明及应用。需要注意的是，有的题目虽然条件中没有给出序，但如果变量地位相同，我们可以不妨设一个序。

6.1 基础知识

定理 6.1 · 排序不等式

设实数组 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 和 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 。若 c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的任一排列，则有：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (6.1)$$

即：反序和 \leq 乱序和 \leq 同序和。当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时等号成立（严格递增时，仅当排列对应相同时取等）。

定理 6.2 · 切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)

1. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ (同序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.2)$$

2. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ (反序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.3)$$

6.2 例题

例题 6.1

设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ 。
 z_1, z_2, \dots, z_n 是 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个排列, 求证:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2. \quad (6.4)$$

例题 6.2

设 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i \geq \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \frac{\sin \theta_{i+1}}{\sin \theta_i}, \quad (6.5)$$

其中 $\theta_{n+1} = \theta_1$ 。

例题 6.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两不同的正整数，求证：

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (6.6)$$

例题 6.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}}. \quad (6.7)$$

例题 6.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{n}. \quad (6.8)$$

例题 6.6

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \leq \frac{n}{2}. \quad (6.9)$$

例题 6.7

给定整数 $n \geq 3$ 。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ，且满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求 $a_n \sum_{i=1}^n (n+1-i)a_i$ 的最大值。

例题 6.8

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n b_i b_{n+1-i} = 1. \quad (6.10)$$

求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j$ 的最小值。

6.3 作业题

作业 6.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 求证:

$$\sum_{k=2}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k}. \quad (6.11)$$

作业 6.2

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是非负实数。对 $1 \leq k \leq n$, 定义

$$C_k = \max\{a_1 b_k, a_2 b_k, \dots, a_k b_k, a_k b_{k-1}, \dots, a_k b_1\}.$$

设 σ 是 $1 \sim n$ 的一个置换, 求证:

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \leq C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (6.12)$$

作业 6.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的正实数 λ ，使得对任意满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} x_i y_i. \quad (6.13)$$

作业 6.4

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \geq (n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}. \quad (6.14)$$

第七章 补充练习题

练习 7.1

18 俄罗斯) 给定正实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 其中整数 $n \geq 2$, 证明:

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \dots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n. \quad (7.1)$$

练习 7.2

定正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 其中整数 $n \geq 2$, 证明:

$$\frac{a_1^2+1}{a_1a_2+1} + \frac{a_2^2+1}{a_2a_3+1} + \dots + \frac{a_n^2+1}{a_na_1+1} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}. \quad (7.2)$$

练习 7.3

16 新加坡) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 且 $a_{n+1} = a_1$, 证明:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \sqrt{\frac{1+a_2^2}{1+a_1^2}} + \sqrt{\frac{1+a_3^2}{1+a_2^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1+a_{n+1}^2}{1+a_n^2}}. \quad (7.3)$$

练习 7.4

正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1-a_2}{1-a_1} + \frac{1-a_3}{1-a_2} + \dots + \frac{1-a_1}{1-a_n}. \quad (7.4)$$

练习 7.5

整数 $n \geq 3$, 证明: 对于正实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 有

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} + \frac{x_n x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \quad (7.5)$$

练习 7.6

知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 记

$$b_k = \frac{a_k}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, 证明:

$$(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq \frac{1}{9}. \quad (7.6)$$

练习 7.7

正整数 $n \geq 2$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_j b_j} \geq \frac{4}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \quad (7.7)$$

练习 7.8

知 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (7.8)$$

练习 7.9

知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $0 \leq a_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j} + \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq 1. \quad (7.9)$$

练习 7.10

a_1, a_2, \dots, a_n 均大于 1, 且 x_0, x_1, \dots, x_n 满足 $x_0 = 1, x_k = \frac{1}{1 + a_k x_{k-1}} (1 \leq k \leq n)$, 证明:

$$\sum_{k=1}^n x_k > \frac{n^2(1 + \sum_{k=1}^n a_k)}{n^2 + (1 + \sum_{k=1}^n a_k)^2}. \quad (7.10)$$

练习 7.11

17 女奥) 设 $a_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, 证明:

$$\left[\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \cos x_i \right)^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \sin x_i \right)^2 \right]^2 \geq 4 \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right)^3. \quad (7.11)$$

练习 7.12

n 为正整数, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, 证明:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j < 2\sqrt{n}. \quad (7.12)$$

练习 7.13

正整数 $n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n$ 是实数, 证明:

$$\frac{3}{n^2 - 1} \left[\sum_{k=1}^n (2k - n - 1) a_k \right]^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (7.13)$$

练习 7.14

定正整数 n , 设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \quad (7.14)$$

记 $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i (1 \leq i \leq n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i} \leq 1. \quad (7.15)$$

练习 7.15

19 浙江预赛) 设 $a_i, b_i > 0$ ($1 \leq i \leq n+1$), $b_{i+1} - b_i \geq \delta > 0$ (δ 为常数), 若 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i \sqrt[i]{a_1 a_2 \cdots a_i b_1 b_2 \cdots b_i}}{b_i b_{i+1}} < \frac{1}{\delta}. \quad (7.16)$$

练习 7.16

x_1, x_2, \dots, x_n 为非负实数, 证明

$$\frac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2} + \frac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+x_n)^2} \leq k_n^2 \quad (7.17)$$

其中数列 $\{k_n\}$ 满足 $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_{n+1} = \frac{k_n^2 + 1}{2}$ 。

练习 7.17

知 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 且 $n \geq 3$, $S = \sum_{i=1}^n a_i$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{S - a_i} + \sqrt[n-1]{\left(\frac{(n-1)a_i}{S - a_i} \right)^{n-2}} \right] \geq \frac{n^2}{n-1}. \quad (7.18)$$

练习 7.18 · 11 西班牙改

知 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 且 $n \geq 3$, 设 $S = \sum_{i=1}^n a_i$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{2}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j}{(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2}} \geq \frac{n+2}{n-1}. \quad (7.19)$$

练习 7.19 · 10 地中海

知 $n > 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 证明:

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}, \quad (7.20)$$

练习 7.20

知 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 且 $n \geq 3$, 设 $S = \sum_{i=1}^n a_i^2$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{S + a_i^2} \leq \frac{n^3}{n+1}. \quad (7.21)$$

练习 7.21

知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + 1)^2}{a_i^2 + n - 1} \geq \frac{n}{n-1}. \quad (7.22)$$

练习 7.22

知实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-2)x_i^2 + 2x_i}{(n-1)x_i^2 + 1} \geq 0. \quad (7.23)$$

练习 7.23

86 苏联) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 均为正实数, 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right). \quad (7.24)$$

练习 7.24

x_1, x_2, \dots, x_n 为非负实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^2. \quad (7.25)$$

练习 7.25

05 韩国) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为非负实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n x_k^2. \quad (7.26)$$

练习 7.26

$0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 < 1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_{i-1} - x_i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i x_i - 1. \quad (7.27)$$

练习 7.27

定实数 p_1, p_2, \dots, p_n , 对于满足 $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 1$ 的实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 记

$$P = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \quad (7.28)$$

求 P 的最小值, 并给出相应的取等条件。

练习 7.28

x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)} \left(\sum_{i=1}^n i x_i \right)^2. \quad (7.29)$$

练习 7.29

定整数 $n \geq 3$, 求最大的实数 λ , 使得只要正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \lambda (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2,$$

就有 a_1, a_2, \dots, a_n 中任意三个数均可作为某个三角形的边长。

第二部分

基本方法

第八章 恒等变形

8.1 基础知识

定理 8.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \quad (8.1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \quad (8.2)$$

定理 8.2

当 $a_{n+1} = a_1$ 时:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (8.3)$$

定理 8.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (8.4)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (8.5)$$

定理 8.4

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (8.6)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \quad (8.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(2 \sum_{k=1}^n b_k - n b_i \right)^2 = n^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (8.8)$$

定理 8.5

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_i a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j \quad (8.9)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) \quad (8.11)$$

定理 8.6

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (n+1-i) a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (n+1-k) a_j a_k \quad (8.12)$$

$$(n+1) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} k a_j a_k \quad (8.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) a_i a_j \quad (8.14)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} i a_i a_k \quad (8.15)$$

定理 8.7

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k(a_k + a_{k+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1})} \quad (8.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\prod_{j=i}^{i+k} a_j \right)} = 1 \quad \left(\text{其中 } \prod_{i=1}^n a_i = 1 \right) \quad (8.17)$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1) = \left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k} \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k+1} \right]^2 \quad (8.18)$$

8.2 预习题

预习 8.1

求下列各式的值：

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2$
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \cdot j$
3. $S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2 + j^2)$

预习 8.2 · 2001 韩国

已知实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ ，证明：

$$1 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{2} \quad (8.19)$$

8.3 例题

例题 8.1

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (8.20)$$

例题 8.2

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \quad (8.21)$$

例题 8.3 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是正实数, 证明:

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \quad (8.22)$$

例题 8.4 · 2016 西部赛

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个非负实数, 记 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i (1 \leq k \leq n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^n a_j^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n (a_i S_i)^2 \quad (8.23)$$

例题 8.5

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 设 $M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 证明:

$$M \cdot \sum_{i=1}^n i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.24)$$

例题 8.6 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 且 $a_1 = a_{n+1}$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (8.25)$$

例题 8.7 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \quad (8.26)$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

例题 8.8 · 2006 IMO 预选

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.27)$$

例题 8.9

设 a_i, b_i, c_i 均为实数, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 且 $\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i c_i = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i c_j - a_j c_i)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \quad (8.28)$$

例题 8.10

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \quad (8.29)$$

例题 8.11

设整数 $n \geq 2$, z_1, z_2, \dots, z_n 是复数, 求证:

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \quad (8.30)$$

例题 8.12

设 $n \geq 3$ ，记正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 的和为 S ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^n \frac{S-a_i}{a_i} \quad (8.31)$$

例题 8.13

设正整数 $n \geq 2$ ，非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)x_i x_j \quad (8.32)$$

的最大值。

例题 8.14 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1 \quad (8.33)$$

例题 8.15

设正整数 $n \geq 3$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = n-1$, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \quad (8.34)$$

8.4 作业题

作业 8.1

证明：

$$\frac{4 \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_{i+1}}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{4a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \quad (8.35)$$

作业 8.2 · 2016 IMC

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 满足 $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \quad (8.36)$$

作业 8.3

给定整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \sqrt{x_i x_j}) \cdot (\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}) \quad (8.37)$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

作业 8.4

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $0 < a_i \leq \frac{1}{2} (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)^2}{[\sum_{i=1}^n (1 - a_i)]^2} \quad (8.38)$$

作业 8.5

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$, 求证:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2. \quad (8.39)$$

作业 8.6

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \quad (8.40)$$

作业 8.7

定整数 $n \geq 3$, 且 $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (8.41)$$

作业 8.8

整数 $n \geq 3$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和为 1, 证明

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)}. \quad (8.42)$$

作业 8.9

整数 $n \geq 2$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$, 证明

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (8.43)$$

第九章 Abel 变换

9.1 基础知识

定理 9.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ($1 \leq k \leq n$), 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \quad (9.1)$$

定理 9.2 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$, 设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (9.2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i^2. \quad (9.3)$$

9.2 预习题

预习 9.1

给定正整数 n , 对任意 $1 \leq k \leq n$ 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq k$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (9.4)$$

预习 9.2 · 1978 IMO

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两不同的正整数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (9.5)$$

预习 9.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证: 存在 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得对任意 $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|. \quad (9.6)$$

预习 9.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, 且对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\prod_{i=1}^k a_i \geq \prod_{i=1}^k b_i$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i. \quad (9.7)$$

预习 9.5

给定整数 $n \geq 2$ 以及不全为零的实数 a_1, a_2, \dots, a_n . 求 a_1, a_2, \dots, a_n 满足的充要条件, 使得存在正整数 $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, 满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0. \quad (9.8)$$

9.3 例题

例题 9.1 · 1994 USAMO

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 满足对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sqrt{k}$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (9.9)$$

例题 9.2 · 1999 APMO

设 $\{a_n\}$ 是正项数列, 满足对任意 $i, j \geq 1$, 有 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. 求证: 对任意正整数 n , 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \geq a_n. \quad (9.10)$$

例题 9.3 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 是实数, 满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (9.11)$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}. \quad (9.12)$$

求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (9.13)$$

例题 9.4

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (9.14)$$

例题 9.5

给定整数 $n \geq 2$, 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正整数, 满足对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任一非空子集 I , $\sum_{i \in I} a_i$ 互不相同。求:

1. $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$ 的最小值;
2. $\sum_{i=1}^n a_i^2$ 的最小值;
3. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ 的最大值。

例题 9.6 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \quad (9.15)$$

例题 9.7

给定整数 $n, k \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ 满足:

1. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$;

2. 对 $1 \leq i \leq n$, 有 $\sum_{j=1}^i c_j \leq i^k$.

求 $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \dots + c_n a_n^k$ 的最大值。

9.4 练习题

作业 9.1

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \quad (9.16)$$

作业 9.2

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 且对 $1 \leq k \leq n$, 有 $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}. \quad (9.17)$$

作业 9.3

给定实数 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , 记 $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$, 证明:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \quad (9.18)$$

作业 9.4

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数。求证：对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 都有 $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n b_i x_i$ 的充要条件是：对 $1 \leq k \leq n-1$ ，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (9.19)$$

第十章 局部不等式

10.1 例题

例题 10.1

设整数 $n \geq 3$, 实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$, 且满足 $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}. \quad (10.1)$$

例题 10.2

求所有的整数 $n \geq 2$, 使得存在实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 满足

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (10.2)$$

例题 10.3

给定整数 $n \geq 3$, 设不全为 0 的实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ 。记

$$A = \left(\sum_{k=1}^n x_k^3 \right)^2, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^3. \quad (10.3)$$

求 $\frac{A}{B}$ 的最大值。

例题 10.4

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{1 - (a_i - a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (10.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 10.5

设正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{1 + x_i + \dots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{1 + x_i + \dots + x_i^i}. \quad (10.5)$$

例题 10.6

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (10.6)$$

例题 10.7

设整数 $n \geq 3$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \quad (10.7)$$

其中 $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$.

例题 10.8

设整数 $n \geq 3$, x_1, x_2, \dots, x_n 是不小于 1 的实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (10.8)$$

其中下标按模 n 理解。

例题 10.9

给定整数 $n \geq 3$, 且 $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (10.9)$$

例题 10.10

设整数 $n \geq 3$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的和为 1, 证明:

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \quad (10.10)$$

例题 10.11

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$ ($1 \leq i \leq 100$), 其中 $a_{101} = a_1$, $a_{102} = a_2$ 。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$ 的最大值。

10.2 练习题

作业 10.1

设整数 $n \geq 2$, 实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 。求证: 存在 $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 使得对任意 $1 \leq j \leq n$, 都有

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \quad (10.11)$$

作业 10.2

求最大的实数 λ , 使得对任意正整数 n 和任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 只要 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2. \quad (10.12)$$

作业 10.3

设实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i \right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \quad (10.13)$$

作业 10.4

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}. \quad (10.14)$$

作业 10.5

设整数 $n \geq 2$ ，且非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i \leq 4 \quad (10.15)$$

作业 10.6

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$, 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \quad (10.16)$$

作业 10.7 · 2004 CTST

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$, 证明:

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \leq 1 \quad (10.17)$$

作业 10.8

设 $a_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$, 记 $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$, 证明:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \quad (10.18)$$

作业 10.9

设整数 $n \geq 2$, 且正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \quad (10.19)$$

作业 10.10 · 2007 白俄罗斯

已知 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 均为正数, 证明:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1}) \quad (10.20)$$

作业 10.11 · 1993 圣彼得堡

设 $a_i \in [-1, 1]$, $a_i a_{i+1} \neq -1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_{n+1} = a_1$, 证明:

$$\frac{1}{1+a_1 a_2} + \frac{1}{1+a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_n a_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \quad (10.21)$$

第十一章 调整法

定理 11.1

1. 设 $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n a_k = t$, 若在 a_1 最大、 a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过 $n-1$ 次调整将 a_1, a_2, \dots, a_n 全调为 $\frac{t}{n}$ 。

2. 设 $a_k \in \mathbb{R}^+$, $\prod_{k=1}^n a_k = t$, 若在 a_1 最大、 a_2 最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过 $n-1$ 次调整将 a_1, a_2, \dots, a_n 全调为 $\sqrt[n]{t}$ 。

定理 11.2 · 端点调整

若 $a_k \in [a, b]$, 将 $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 视为 a_k 的一元函数 $g(x)$, 且 $g'(x)$ 单调, 则可将 a_k 调为 a 或 b 。

定理 11.3 · 磨光变换法（无限调整法、SMV 定理）

定理 11.4 · EV(Equal Variable) 定理

11.1 预习题

预习 11.1

已知 $0 \leq a, b, c \leq 1$, 证明:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (11.1)$$

预习 11.2

设 x, y, z 都是非负实数且 $x + y + z = 1$, 证明:

$$yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad (11.2)$$

预习 11.3

设正实数 a, b, c, d 满足 $abcd = 1$, 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{4}{a+b+c+d} \geq 5 \quad (11.3)$$

预习 11.4

设实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, $abc > 0$, 证明:

$$ab + bc + ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4} \quad (11.4)$$

11.2 例题

例题 11.1

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) 满足不等式 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$, 求 $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$ 的最小值。

例题 11.2

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n. \quad (11.5)$$

例题 11.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_i x_j \geq 1$ (其中 $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$), 证明:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \quad (11.6)$$

例题 11.4

已知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$, 证明:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \quad (11.7)$$

例题 11.5

设 $x_i \in (0, 1]$ ($1 \leq i \leq n$), $0 < \lambda \leq 2$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n [1 + (i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \geq \frac{2 + (n-1)\lambda}{2n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (11.8)$$

例题 11.6

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}. \quad (11.9)$$

11.3 练习题

作业 11.1

给定正整数 $n \geq 4$, 且 $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n^2$, 证明: 这 n 个数中一定有一个数大于等于 2。

作业 11.2

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中的最大数为 a , 证明:

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (11.10)$$

并确定不等式等号成立的条件。

作业 11.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n ($n \geq 2$) 个互不相同的实数, 记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (11.11)$$

证明: $12S \geq n(n-1)M$.

作业 11.4

设整数 $n \geq 2$, $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 证明:

$$\prod_{i=1}^n \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (11.12)$$

第三部分

高级不等式

第十二章 伯努利不等式

12.1 基础知识

定理 12.1 · 伯努利不等式 (Bernoulli's Inequality)

对任意实数 $x > -1$ 和实数 α , 有:

1. 当 $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 时:

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad (12.1)$$

2. 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时:

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad (12.2)$$

当且仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $x = 0$ 时取等号。

定理 12.2 · 伯努利不等式的多变量形式

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为符号相同的实数, 且 $x_i > -1$, 则:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n \quad (12.3)$$

12.2 例题

例题 12.1

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$, 求证:

$$(1 + a_1)^{\frac{1}{a_2}} (1 + a_2)^{\frac{1}{a_3}} \dots (1 + a_n)^{\frac{1}{a_1}} \geq 2^n. \quad (12.4)$$

定理 12.3 · Mitrinovic 不等式

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证: 对 a_1, a_2, \dots, a_n 的任一排列 b_1, b_2, \dots, b_n , 都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^{b_i} > 1. \quad (12.5)$$

例题 12.2

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$, 求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n + 1} (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (12.6)$$

例题 12.3

求最小的实数 λ , 使得对任意正整数 n 及任意满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 的正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 都有

$$\lambda \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (12.7)$$

例题 12.4

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 + n - 1) \geq n^{n-2} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (12.8)$$

例题 12.5

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$ 。求证：

$$(a_1^n + 1)(a_2^n + 1) \dots (a_n^n + 1) \geq 2^n. \quad (12.9)$$

例题 12.6

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为 1 的正整数, 满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$ 是整数。求证: 多项式

$$P(x) = a_1 a_2 \dots a_n (x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n) \quad (12.10)$$

没有正根。

例题 12.7

设整数 $n \geq 3$, 多项式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ 有 n 个实根, 且都在区间 $(0, 1)$ 内。求证:

$$\sum_{i=1}^{n-2} i a_i > 0. \quad (12.11)$$

12.3 练习题

作业 12.1

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i \geq -1$, $i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 。求证：

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) + \frac{n}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 1. \quad (12.12)$$

作业 12.2

给定整数 $n \geq 2$ ，求最小的实数 λ ，使得对任意非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n (a_i + \lambda)}. \quad (12.13)$$

第十三章 其他著名不等式

13.1 基础知识

定理 13.1 · Jensen 不等式

1. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的下凸函数, 则对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, 有

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (13.1)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时等号成立。

2. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的下凸函数, 正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。则对任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (13.2)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时等号成立。

定理 13.2 · 加权均值不等式

设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \quad (13.3)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

定理 13.3 · 幂平均不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 非零实数 $\alpha < \beta$ 。则

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (13.4)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

定理 13.4 · 范数不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是非负实数, 正实数 $\alpha < \beta$ 。则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (13.5)$$

当且仅当 a_1, a_2, \dots, a_n 中至少有 $n-1$ 个为 0 时等号成立。

定理 13.5 · Hölder 不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是正实数, p, q 是大于 1 的实数, 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (13.6)$$

当且仅当 $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$ 时等号成立。

定理 13.6 · Minkowski 不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是正实数, 实数 $p \geq 1$ 。则

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (13.7)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

13.2 例题

例题 13.1 · 樊畿不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \frac{1}{2}]$, 求证:

$$\frac{(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{(\prod_{i=1}^n (1 - a_i))^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - a_i)}. \quad (13.8)$$

例题 13.2

设 n 是正整数, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数, 满足 $p < q$, 且 $x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ 。求证:

1. $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$
2. $(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} < (x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

例题 13.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$ 。求证:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k} - 1)^n} \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 a_2 \dots a_n - 1)^n}. \quad (13.9)$$

13.3 作业题

作业 13.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不小于 1 的实数, 求证:

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + 1}. \quad (13.10)$$

作业 13.2

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\prod_{i=1}^n \frac{1+a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^n \frac{n-a_i}{1-a_i}. \quad (13.11)$$

作业 13.3

设 m, n 是给定的大于 1 的整数, $\alpha < \beta$ 是给定的正实数, 对不全为 0 的非负实数 a_{ij} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), 求

$$\frac{\left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^\alpha \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta}}}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^\beta \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (13.12)$$

的最大值。

作业 13.4

给定正整数 n 。求最大的实数 λ ，使得对所有满足

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 2)^n \geq \prod_{i=1}^{2n} x_i \quad (13.13)$$

的正实数 x_1, x_2, \dots, x_{2n} ，都有

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 1)^n \geq \lambda \prod_{i=1}^{2n} x_i. \quad (13.14)$$

第十四章 反向不等式

14.1 基础知识

定理 14.1 · Kantorović 不等式

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. 设正实数 $m < M$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i} \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \quad (14.1)$$

定理 14.2 · Polyá-Szegö 不等式

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a < A$, $b < B$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, A]$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in [b, B]$ 。则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (14.2)$$

14.2 预习题

14.3 例题

例题 14.1 · 1978 苏联

设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, 其中 $0 < a < b$, 证明:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2 \quad (14.3)$$

例题 14.2 · 2016 克罗地亚

已知 x_1, x_2, \dots, x_n 均为非负实数，证明：

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \quad (14.4)$$

例题 14.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \left(n + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (14.5)$$

求证: $\max\{a_1, \dots, a_n\} \leq 4 \min\{a_1, \dots, a_n\}$ 。

例题 14.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, 2]$ ，求

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)^2 \quad (14.6)$$

的最大值。

例题 14.5 · 1998 年高中联赛

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in [1, 2]$ 且满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ 。
求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (14.7)$$

例题 14.6

设整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) < n^2 + 1. \quad (14.8)$$

求证: a_1, a_2, \dots, a_n 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

例题 14.7

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a < b$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$ 。求证:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \left(\frac{M}{2} \right)^{2 - \frac{2}{n}}, \quad (14.9)$$

其中 $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ 。

例题 14.8

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的实数 λ ，使得对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 都有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (14.10)$$

练习 14.1

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的实数 λ ，使得对任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (14.11)$$

14.4 练习题

练习 14.2

已知非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ，其中 $n \geq 3$ ，求

$$\sum_{i=1}^n i a_i \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \right)^2 \quad (14.12)$$

的最大值。

练习 14.3

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ，证明：

$$1 \leq \sum_{i=1}^n (2i-1)x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2i-1} \leq \frac{n^2}{2n-1} \quad (14.13)$$

练习 14.4

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ，且 $a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{n}$ 。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \frac{n+1}{2 \sqrt[n]{n!}}. \quad (14.14)$$

练习 14.5

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。设正实数 $m < M$ ，实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i}} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \quad (14.15)$$

练习 14.6

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $m < M$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq \frac{M^2 - Mm + m^2}{Mm} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (14.16)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

练习 14.7

设整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2. \quad (14.17)$$

求证: a_1, a_2, \dots, a_n 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

练习 14.8

给定整数 $n \geq 3$ 。求最大的实数 λ , 使得只要正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \quad (14.18)$$

那么 a_1, a_2, \dots, a_n 中任意三个数便能构成三角形的三边长。

第十五章 凸函数与不等式

本讲介绍凸函数的两个应用，一是用于处理变量有界的情形；二是卡拉玛特 (Karamata) 不等式，这两个都是强有力的工具，有了它们会对之前的很多问题有新的理解。

15.1 重要定理

定理 15.1 · 优越关系 (Majorization)

设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 是实数，如果满足：

1. $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ 且 $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$;
2. 对任意 $1 \leq k \leq n-1$ ，有 $\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$;
3. $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

则称 (x_1, x_2, \dots, x_n) 优越于 (y_1, y_2, \dots, y_n) ，记作 $(x) \succ (y)$ 。

定理 15.2 · 卡拉玛特不等式 (Karamata's Inequality)

设 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。

1. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 下凸函数 ** (Convex), 则

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i) \quad (15.1)$$

2. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 上凸函数 ** (Concave), 则

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n f(y_i) \quad (15.2)$$

定理 15.3 · Popoviciu 不等式

设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数, 则对任意实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$, 都有

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) + n(n-2)f(a) \geq (n-1) \sum_{i=1}^n f(b_i) \quad (15.3)$$

其中 $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$, $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ 。

15.2 例题

练习 15.1

给定整数 $n \geq 3$, 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$, 求 $\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1}$ 的最值, 其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

练习 15.2

设整数 $n \geq 2$ ，正实数 $m < M$ ，实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4} \right] \frac{(M-m)^2}{Mm}. \quad (15.4)$$

练习 15.3

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。记 $S = \sum_{i=1}^n a_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + S - a_i} + \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq 1. \quad (15.5)$$

练习 15.4

给定整数 $n > 2$ 。设非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ，求

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (15.6)$$

的最大值和最小值。

练习 15.5

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是非负实数, 求证:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2\right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right)^2 \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)^{\frac{1}{n}}. \quad (15.7)$$

练习 15.6

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{1997} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$, 且满足 $\sum_{i=1}^{1997} a_i = -318\sqrt{3}$ 。求 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^{12}$ 的最大值。

练习 15.7

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in (n-1, n)$ 。记 $S = \sum_{i=1}^n a_i$, 求证:

$$\prod_{i=1}^n a_i \geq \prod_{i=1}^n (S - (n-1)a_i). \quad (15.8)$$

练习 15.8

设整数 $n \geq 3$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{2a_i + a_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}, \quad (15.9)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ 。

15.3 作业题

作业 15.1 · Ozeki 不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n 满足 $0 \leq m_1 \leq a_i \leq M_1$, $0 \leq m_2 \leq b_i \leq M_2$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left[\frac{n^2}{3} \right] (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2. \quad (15.10)$$

作业 15.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i + 1)^2 + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (15.11)$$

的最大值。

作业 15.3

给定正整数 n 和正实数 a 。设 k, x_1, x_2, \dots, x_k 是正整数, 且满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ 。
求 $a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_k}$ 的最大值。

作业 15.4

设整数 $n \geq 3$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \leq \prod_{i=1}^n \frac{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{3}, \quad (15.12)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ 。

第四部分

常见问题与方法

第十六章 绝对值不等式（一）

本讲介绍含绝对值的不等式，最常用的方法是三角不等式和正负分离。

16.1 例题

例题 16.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数，求证：存在 $1 \leq k \leq n$ ，使得

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|. \quad (16.1)$$

例题 16.2

设整数 $n \geq 2$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = 1$ 。对 $1 \leq k \leq n$, 记 $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i - A_{i+1}| \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (16.2)$$

例题 16.3

设整数 $n \geq 2$, a_0, a_1, \dots, a_n 是实数, 满足 $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。求证: 对任意实数 t ,

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ta_{i+1} - a_{i+2}|. \quad (16.3)$$

例题 16.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 。求：

1. $\sum_{i=1}^n |a_i|$ 的最小值和最大值；
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ 的最小值和最大值。

例题 16.5

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求：

1. $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$ 的最大值；
2. $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 16.6

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$, $-1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq 1$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ 。求 $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 16.7

设整数 $n \geq 3$ ，非零实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = 0$ 。求证：

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| - \min_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right). \quad (16.4)$$

例题 16.8

设实数 $a < b$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [a, b]$ 。设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 - y_i^2) \right| \leq (b - a) \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}. \quad (16.5)$$

16.2 练习题

作业 16.1

设整数 $n \geq 2$, 非零实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ 。求证: 存在 $1 \leq i < j \leq n$, 使得

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{a_i}{a_j} \right| \leq 2. \quad (16.6)$$

作业 16.2

设整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。对 $1 \leq k \leq n$, 记 $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| < \frac{n-1}{2}. \quad (16.7)$$

作业 16.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意和为 0 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 \geq \lambda \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (16.8)$$

作业 16.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_i}. \quad (16.9)$$

第十七章 绝对值不等式 (二)

本讲继续介绍含绝对值的不等式，包括设序和离散介值原理等方法，以及几个综合性的问题。

17.1 例题

例题 17.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{17.1}$$

的最大值。

例题 17.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-1, 1]$, 求

$$\left| a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \left| a_2 - \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \dots + \left| a_n - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n} \right| \quad (17.2)$$

的最大值。

例题 17.3

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足：

1. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$;
2. $|a_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$.

求 $\min_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - a_{i+1}|$ 的最大值。

例题 17.4

设整数 $n \geq 3$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i > 1$, $|a_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。求证: 存在正整数 $k < n$, 使得

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \leq 1. \quad (17.3)$$

例题 17.5

设实数 a_1, a_2, \dots, a_{40} 满足 $\sum_{i=1}^{40} a_i = 0$ 且对 $1 \leq i \leq 40$, 都有 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$, 这里 $a_{41} = a_1$ 。记 $a = a_{10}$, $b = a_{20}$, $c = a_{30}$, $d = a_{40}$ 。

1. 求 $a + b + c + d$ 的最大值;
2. 求 $ab + cd$ 的最大值。

例题 17.6

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$ 满足 $a_1 = a_{1001}$, $|a_i + a_{i+2} - 2a_{i+1}| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 999$)。求

$$\max_{1 \leq i < j \leq 1001} |a_i - a_j| \quad (17.4)$$

的最大值。

17.2 作业题

作业 17.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足：

1. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$;
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = 1$.

求 $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i - a_{i+1}|$ 的最小值，其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

作业 17.2

设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$, 且 $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ ($1 \leq i \leq n$)。求证: 存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 y_1, y_2, \dots, y_n , 使得

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}. \quad (17.5)$$

作业 17.3

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ 满足 $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$ ($1 \leq i \leq 2018$), 其中 $a_{2019} = a_1$ 。求

$$\sum_{i=1}^{2018} |a_i| - \left| \sum_{i=1}^{2018} a_i \right| \quad (17.6)$$

的最大值。

17.3 其他练习题

练习 17.1

已知 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的算术平均值为 a , 证明:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k - a| \right)^2.$$

练习 17.2

设 $a_0 = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\sum_{k=1}^n |a_k(a_k - a_{k-1})| \leq \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})^2.$$

练习 17.3

设整数 $n \geq 3$, 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 均大于 1, 且 $|a_{k+1} - a_k| < 1$ ($1 \leq k \leq n-1$), 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

练习 17.4

(18 浙江预赛) 将 $2n$ ($n \geq 2$) 个不同的整数分成两组 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 证明:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_i - b_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \geq n.$$

练习 17.5

已知非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 均不超过 1, 证明:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \leq n^2.$$

练习 17.6

已知实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, 求 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ 的最大值。

练习 17.7

对每一个整数 $n \geq 2$, 求最大的常数 c_n , 使得不等式

$$c_n \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

对任意满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n 成立。

第十八章 平均值原理与不等式

平均值原理是一种整体思想，本讲介绍两类能用平均值原理处理的问题，一类是存在性问题，一类与最大最小有关。

18.1 例题

例题 18.1

设非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求证：存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 a_1, a_2, \dots, a_n ，使得

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (18.1)$$

例题 18.2

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是实数, 求证: 存在 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个排列 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n i a_i \right| \geq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \quad (18.2)$$

例题 18.3

设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, 整数 $k \geq 2$. 求证: 存在不全为 0 的整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 使得其中每一个的绝对值都不超过 $k-1$, 且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \quad (18.3)$$

例题 18.4

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ 。求证：存在 $x \in [0, 1]$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x - a_i|} \leq 8n \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1} \right). \quad (18.4)$$

例题 18.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是小于 1 的正实数, k 是正整数, 求证:

$$\min\{a_1(1-a_2)^k, a_2(1-a_3)^k, \dots, a_n(1-a_1)^k\} \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \quad (18.5)$$

例题 18.6

给定正实数 a, b , 整数 $n \geq 2$ 。设函数 $f(x) = (x+a)(x+b)$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$ 的最大值。

例题 18.7

设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_9 满足 $\sum_{i=1}^9 a_i = 1$ 。记

$$S = \min\{a_1, a_2\} + 2 \min\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \min\{a_9, a_1\}, \quad (18.6)$$

$$T = \max\{a_1, a_2\} + 2 \max\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \max\{a_9, a_1\}. \quad (18.7)$$

当 S 取最大值 S_0 时, 求 T 的所有可能值。

例题 18.8

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n i a_i\right) \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (18.8)$$

例题 18.9

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的正实数 λ ，使得对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\sum_{i=1}^n \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (18.9)$$

18.2 作业题

作业 18.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证: 存在实数 x , 使得

$$\{x - a_1\} + \{x - a_2\} + \cdots + \{x - a_n\} \leq \frac{n-1}{2}, \quad (18.10)$$

其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分。

作业 18.2

设整数 $n \geq 3$, a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证: 存在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集 S , 满足对任意 $1 \leq i \leq n-2$, 有 $1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$ 且

$$\left| \sum_{i \in S} a_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (18.11)$$

作业 18.3

给定整数 $n \geq 4$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\lambda \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq \min\{a_1, a_2\} + \min\{a_2, a_3\} + \cdots + \min\{a_n, a_1\}. \quad (18.12)$$

作业 18.4

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数。对 $1 \leq i \leq n$, 定义

$$d_i = \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \min_{i \leq j \leq n} a_j. \quad (18.13)$$

令 $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ 。

1. 求证：对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| \geq \frac{d}{2}$ 。
2. 求证：存在实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 使得 (1) 中等号成立。

第十九章 归纳法与不等式 (一)

凡是与正整数有关的命题都可以尝试用归纳法证明，在不等式中也是如此，本讲主要介绍第一数学归纳法的一些例子。

19.1 例题

例题 19.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 1. \quad (19.1)$$

例题 19.2

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - a_i a_{i+1} + 1) \geq 1, \quad (19.2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 19.3

设整数 $n \geq 2$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$, 且满足 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ ($1 \leq i \leq n-1$)。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq 2n - H_n, \quad (19.3)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 。

例题 19.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2, \quad (19.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 19.5

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} \right) \geq 4(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i^2}. \quad (19.5)$$

例题 19.6

设整数 $n \geq 3$, 非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 \leq \frac{4}{27}. \quad (19.6)$$

例题 19.7

设正实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i(1+a_i^{2^i})} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (19.7)$$

例题 19.8

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i a_j \leq t^{|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立, 其中 $t \in (0, 1)$ 。求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{1 - \sqrt{t}}. \quad (19.8)$$

19.2 作业题

作业 19.1

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad (19.9)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

作业 19.2

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ 。求证:

$$\frac{\sqrt{1-a_1}}{a_1} + \frac{\sqrt{1-a_2}}{a_2} + \dots + \frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (19.10)$$

作业 19.3

设整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n - 1. \quad (19.11)$$

作业 19.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_i a_j \leq 4^{-|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。
求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{5}{3}. \quad (19.12)$$

第二十章 归纳法与不等式 (二)

本讲继续介绍用归纳法证明不等式, 包括第二数学归纳法、加强数学归纳法、反向数学归纳法, 以及几个经典的不等式。

20.1 例题

例题 20.1

设实数 a_i, b_i ($i = 0, 1, \dots, 2n$) 满足:

1. 对 $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$, 有 $a_i + a_{i+1} \geq 0$;
2. 对 $j = 0, 1, \dots, n - 1$, 有 $a_{2j+1} \leq 0$;
3. 对 $0 \leq p \leq q \leq n$, 有 $\sum_{k=2p}^{2q} b_k > 0$.

求证: $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i b_i \geq 0$.

例题 20.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为零的非负实数, 对 $1 \leq k \leq n$, 记

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \cdots + a_k}{l}. \quad (20.1)$$

求证: 对任意正实数 α , 满足 $m_k > \alpha$ 的 k 少于 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$ 个。

例题 20.3

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$ 。求

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \dots + a_1a_2 \dots a_n \quad (20.2)$$

的最小值。

例题 20.4

设 a_1, a_2, a_3, \dots 是实数列, 满足存在正整数 N , 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $a_n = 1$ 。已知对任意整数 $n \geq 2$ 都有 $a_n \leq a_{n-1} + \frac{1}{2^n} a_{2n}$ 。求证: 对任意正整数 k , 都有 $a_k > 1 - \frac{1}{2^k}$ 。

例题 20.5

对实数列 $\{a_n\}$, 定义数列 $\{b_n\}$ 如下:

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (20.3)$$

求最小的正实数 λ , 使得对任意实数列 $\{a_n\}$ 以及任意正整数 n , 都有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_i^2. \quad (20.4)$$

例题 20.6

求最大的正实数 λ , 使得对任意正整数 n 以及任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^k a_i)^2}. \quad (20.5)$$

例题 20.7 · 牛顿不等式 (Newton's Inequality)

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 对 $1 \leq k \leq n$ 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (20.6)$$

则 $S_{k-1}S_{k+1} \leq S_k^2$, 其中 $S_0 = 1$ 。当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

例题 20.8 · 麦克劳林不等式 (Maclaurin's Inequality)

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 对 $1 \leq k \leq n$, 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (20.7)$$

则

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}. \quad (20.8)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立。

20.2 作业题

作业 20.1

设 n 是正整数, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, A, B$ 是正实数, 满足 $b_i \leq a_i \leq A, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{B}{A}$ 。求证:

$$\frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)}{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)} \leq \frac{B + 1}{A + 1}. \quad (20.9)$$

作业 20.2

设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 均为不减的正数数列, 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ 。求证:

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} y_i} \leq 2^n - 1. \quad (20.10)$$

作业 20.3

设 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, 且对 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{b_i}{b_{i+1}}$ 。求证:

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \leq \left(\frac{A_n(b)}{G_n(b)} \right)^{n-1}, \quad (20.11)$$

其中 A_n, G_n 分别表示算术平均值和几何平均值。

作业 20.4 · Suranyi 不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 则

$$(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^n + n \prod_{i=1}^n a_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^{n-1} \right). \quad (20.12)$$