重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey 编著

2026.1.1

目录

第一章 基础恒等式 **1**

第二章 基础恒等变形 **4**

第三章 Abel 变换与求和技巧 **24**

第四章 进阶恒等变形 **33**

第五章 均值不等式 **39**

第六章 柯西不等式 **52**

第七章 综合练习 1 **75**

第一章　基础恒等式

定理 1.1 · 裂项与完全平方

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i\ne j} a_i a_j \tag{1.2}$$

定理 1.2 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \le i, j \le n \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \tag{1.4}$$

定理 1.3 · 方差型变形

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 \tag{1.5}$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}2a_ia_j \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}b_k-nb_i\right)^2=n^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \tag{1.7}$$

定理 1.4 · 循环差分恒等式

当 $a_{n+1}=a_1$ 时：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2 \tag{1.8}$$

定理 1.5 · 求和顺序交换

$$\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ia_j \tag{1.9}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i) \tag{1.11}$$

定理 1.6 · 前缀和的高阶恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i^2+2\sum_{1\le j<k\le n}(n+1-k)a_ja_k \tag{1.12}$$

$$(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}ia_i^2+2\sum_{1\le j<k\le n}ka_ja_k \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)=\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)a_ia_j \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}ia_i^2+2\sum_{1\le i<k\le n}ia_ia_k \tag{1.15}$$

例题 1.1 · 分式与乘积构造

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})} \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=i}^{i+k}a_j\right)}=1\quad(\text{其中}\prod_{i=1}^{n}a_i=1) \tag{1.17}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)=\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k}\right]^2+\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k+1}\right]^2 \tag{1.18}$$

第二章　基础恒等变形

练习 2.1

求下列各式的值：

1. $S_1 = \sum_{1\le i<j\le n}(i-j)^2$
2. $S_2 = \sum_{1\le i<j\le n} i\cdot j$
3. $S_3 = \sum_{1\le i<j\le n} (i^2+j^2)$

练习 2.2

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{2.1}$$

练习 2.3

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{2x_n^2}{x_n+x_{n+1}} \tag{2.2}$$

练习 2.4

证明：

$$\frac{4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{4a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \tag{2.3}$$

练习 2.5 · 2016 IMC

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \tag{2.4}$$

练习 2.6 · 2016 西部赛

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个非负实数，记 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i(1\le k\le n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\cdot\sum_{j=i}^{n}a_j^2\right)\le\sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\right)^2 \tag{2.5}$$

练习 2.7

设整数 $n \geq 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，设 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，证明：

$$M \cdot \sum_{i=1}^{n} i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tag{2.6}$$

练习 2.8 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \tag{2.7}$$

练习 2.9 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，且 $a_1 = a_{n+1}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2 \tag{2.8}$$

练习 2.10 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \tag{2.9}$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

练习 2.11

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 + \sqrt{x_i x_j}\right) \cdot \left(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}\right) \tag{2.10}$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

练习 2.12

给定整数 $n \geq 3$，且 $a_i \geq 1(i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{2.11}$$

练习 2.13 · 2001 韩国

已知实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$，证明：

$$1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \geq \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{2} \tag{2.12}$$

练习 2.14 · 2006 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n}{2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \tag{2.13}$$

练习 2.15

设 a_i, b_i, c_i 均为实数，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 且 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$，证明：

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (a_i c_j - a_j c_i)^2 \ge a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \tag{2.14}$$

练习 2.16

已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $0<a_i\leq\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1-a_i\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-a_i\right)\right]^2}\tag{2.15}$$

练习 2.17

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{2.16}$$

练习 2.18

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$ ，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2. \tag{2.17}$$

练习 2.19

设正整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) x_i x_j \tag{2.18}$$

的最大值。

练习 2.20 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1 \tag{2.19}$$

第三章　Abel 变换与求和技巧

定理 3.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0=0$，$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i\ (1\le k\le n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+b_nS_n \tag{3.1}$$

练习 3.1 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2. \tag{3.3}$$

练习 3.2

给定正整数 n，对任意 $1 \leq k \leq n$ 正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq k$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{3.4}$$

练习 3.3 · 1978 IMO

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是两两不同的正整数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{3.5}$$

练习 3.4 · 1999 APMO

设正实数列 $a_1, a_2, \ldots$ 对所有 $i, j \in \mathbb{N}^+$ 满足 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \geq a_n \tag{3.6}$$

练习 3.5

给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$，记 $M = \max_{1\leq k\leq n} |a_k - a_{k+1}|$，证明：

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \frac{M}{2} \tag{3.7}$$

练习 3.6

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \tag{3.8}$$

练习 3.7 · 1994 USAMO

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{n}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{3.9}$$

练习 3.8 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \tag{3.10}$$

第四章　进阶恒等变形

练习 4.1

设正整数 $n \geq 3$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = n-1$，证明：

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \tag{4.1}$$

练习 4.2

设整数 $n \geq 3$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，证明：

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+(n-2)x_i}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{[1+(n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \tag{4.2}$$

练习 4.3

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$，证明：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2} \tag{4.3}$$

练习 4.4

设 $n \geq 3$，记正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 S，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \tag{4.4}$$

练习 4.5

设整数 $n \geq 2$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 …，证明：

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|\right)^2 \geq (n-1) \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^2 \tag{4.5}$$

练习 4.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \tag{4.6}$$

第五章　均值不等式

练习 5.1

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$，证明：

$$(2+a_1)(2+a_2)\ldots(2+a_n) \geq 3^n \tag{5.1}$$

练习 5.2

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$，证明：

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \cdots + \frac{S^n}{n!} \geq (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \tag{5.2}$$

练习 5.3 · 2017 北大挑战赛

给定整数 n 和正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且满足 $\prod_{i=1}^{k} a_i \geq k!\ (1 \leq k \leq n)$，证明：

$$\frac{2!}{1+a_1} + \frac{3!}{(1+a_1)(2+a_2)} + \cdots + \frac{(n+1)!}{(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n)} < 3 \tag{5.3}$$

练习 5.4 · 2014 北约自主招生

已知正数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$，证明：

$$(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)\ldots(\sqrt{2}+x_n) \geq (\sqrt{2}+1)^n \tag{5.4}$$

练习 5.5 · 2018 北大综合营

设非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求证：对任意 $r > 0$ 有

$$(1 + rx_1)(1 + rx_2)\ldots(1 + rx_n) \geq (n + r)^n x_1 x_2 \ldots x_n \tag{5.5}$$

练习 5.6

设整数 $n \geq 4$，非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，求 $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ 的最大值。

练习 5.7 · 2007 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 4$，非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2$，记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2+1} + \frac{a_n}{a_1^2+1} \tag{5.6}$$

求 P 的最小值，并给出相应的取等条件。

练习 5.8

设整数 $n \geq 3$，且正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1$$

求证：

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geq (n-1)^{n/4} \tag{5.7}$$

练习 5.9 · 1998 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ 均为正实数，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$，证明：

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n \big[1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\big]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \tag{5.8}$$

练习 5.10

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$，证明：

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{5.9}$$

练习 5.11 · 2007 保加利亚

设整数 $n \geq 2$，求常数 $C(n)$ 的最大值，使得对所有满足 $x_i \in (0,1)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 且 $(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，均有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2x_ix_j + \sqrt{x_ix_j}\right) \tag{5.10}$$

练习 5.12

设 n 为正整数，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + 2a_2^3 + \cdots + na_n^{n+1} \leq 1$，证明：

$$2a_1 + 3a_2^2 + \cdots + na_{n-1}^{n-1} + (n+1)a_n^n < 3 \tag{5.11}$$

练习 5.13

设 n 为正整数，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为正实数，证明：

$$1+\sum_{k=1}^{n}(k+1)x_k^k<\left(1+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}kx_k^{k+1}}\right)^2 \tag{5.12}$$

第六章　柯西不等式

练习 6.1

设 $a_i, b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，证明：

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{6.1}$$

练习 6.2 · 2010 浙大自招

设整数 $n \geq 2$，且正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4 \tag{6.2}$$

练习 6.3 · 2002 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 2$，且 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的任意排列，证明：

$$\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2} \tag{6.3}$$

练习 6.4 · 2011 甘肃预赛

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，证明：

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n} \tag{6.4}$$

练习 6.5

给定整数 $n \geq 2$，非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^3$，且 $a_{n+1} = a_1$，证明：

$$\frac{1}{a_1^2 - a_2 + n} + \frac{1}{a_2^2 - a_3 + n} + \cdots + \frac{1}{a_n^2 - a_{n+1} + n} \geq 1 \tag{6.5}$$

练习 6.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，证明：

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{6.6}$$

练习 6.7

设 $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}^+$，证明：

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \cdots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3} \tag{6.7}$$

练习 6.8

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$，证明：

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2 \tag{6.8}$$

练习 6.9

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 满足 $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)}\right)^2 \le (n-1)\, x_{n+1}^2 \tag{6.9}$$

练习 6.10

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2} \tag{6.10}$$

练习 6.11

给定整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \tag{6.11}$$

其中 $C_a^b = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$。证明：$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$。

练习 6.12 · 2017 HMMT

设 $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ 均为实数，求出最大的实数 c，使得下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c\, x_{2017}^2 \tag{6.12}$$

练习 6.13 · 2019 欧洲杯

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$，证明：

$$\sum_{k=1}^{2019}\frac{x_k^2}{2x_kx_{k+1}-1}>\frac{2019^2}{x_{2019}^2+\dfrac{1}{x_{2019}^2}} \tag{6.13}$$

练习 6.14

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)\sum_{j\neq i} x_j^2 + x_i}{1 + \sum_{j\neq i} x_j} \geq \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} \tag{6.14}$$

练习 6.15 · 1996 波兰

设整数 $n \geq 2$，正数 $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，证明：

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}, \tag{6.15}$$

并指出等号成立的充要条件。

练习 6.16

设 $a_i > 0,\ b_i > 0,\ a_ib_i = c_i^2 + d_i^2\ (i = 1, 2, \ldots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 \tag{6.16}$$

练习 6.17 · 2002 罗马尼亚

设整数 $n \geq 4$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right)^2 \tag{6.17}$$

练习 6.18 · 1998 罗马尼亚

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 \tag{6.18}$$

练习 6.19 · 2014 东南

设整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + \cdots + x_n = 1$，且 $x_{n+1} = x_1$，求证：

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1} \tag{6.19}$$

练习 6.20

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n^3}{n+1} \tag{6.20}$$

练习 6.21 · 2006 CTST

设正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}} \tag{6.21}$$

练习 6.22 · 2010 伊朗改

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2} \geq \frac{n^3+1}{(n^2+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^2 \tag{6.22}$$

练习 6.23

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \tag{6.23}$$

第七章　综合练习 1

练习 7.1 · 2018 俄罗斯

给定正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，其中整数 $n \geq 2$，证明：

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\cdots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n \tag{7.1}$$

练习 7.2

给定正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，其中整数 $n \geq 2$，证明：

$$\frac{a_1^2+1}{a_1a_2+1}+\frac{a_2^2+1}{a_2a_3+1}+\cdots+\frac{a_n^2+1}{a_na_1+1} \leq \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1} \tag{7.2}$$

练习 7.3 · 2016 新加坡

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，且 $a_{n+1} = a_1$，证明：

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \sqrt{\frac{1+a_2^2}{1+a_1^2}} + \sqrt{\frac{1+a_3^2}{1+a_2^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1+a_{n+1}^2}{1+a_n^2}} \tag{7.3}$$

练习 7.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，证明：

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1-a_2}{1-a_1} + \frac{1-a_3}{1-a_2} + \cdots + \frac{1-a_1}{1-a_n} \tag{7.4}$$

练习 7.5

设整数 $n \geq 3$，证明：对于正实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$，有

$$\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1}+\frac{x_nx_1}{x_2} \geq x_1+x_2+\cdots+x_n \tag{7.5}$$

练习 7.6

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，记

$$b_k = \frac{a_k}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，证明：

$$(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq \frac{1}{9} \tag{7.6}$$

练习 7.7

设正整数 $n \geq 2$，且 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_j b_j} \geq \frac{4}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \tag{7.7}$$

练习 7.8

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{1+a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \tag{7.8}$$

练习 7.9

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $0 \le a_i \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_j} + \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \le 1 \tag{7.9}$$

练习 7.10

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 均大于 1，且 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 满足 $x_0 = 1$，$x_k = \dfrac{1}{1 + a_k x_{k-1}}$ $(1 \leq k \leq n)$，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} x_k > \frac{n^2\left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)}{n^2 + \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} \tag{7.10}$$

练习 7.11 · 2017 女奥 (CGMO)

设 $a_i \geq 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$，证明：

$$\left[\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \cos x_i\right)^2 + \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i \sin x_i\right)^2\right]^2 \geq 4\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 \tag{7.11}$$

练习 7.12

设 n 为正整数，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$，证明：

$$\sum_{1 \leq i \cdot j \leq n} a_i a_j < 2\sqrt{n} \tag{7.12}$$

练习 7.13 · 1999 CTST

设 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ 是实数，证明：

$$\sum_{i=0}^{2n} x_i^2 \geq \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{i=0}^{2n} x_i\right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)}\left(\sum_{i=0}^{2n}(i-n)x_i\right)^2 \tag{7.13}$$

练习 7.14

设正整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，证明：

$$\frac{3}{n^2-1}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)a_k\right]^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}a_k^2 \tag{7.14}$$

练习 7.15

给定正整数 n，设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i<j \leq n} a_i a_j, \tag{7.15}$$

记 $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_j - a_i \ (1 \leq i \leq n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leq 1 \tag{7.16}$$

练习 7.16 · 2019 浙江预赛

设 $a_i, b_i > 0\ (1 \leq i \leq n+1)$，$b_{i+1} - b_i \geq \delta > 0$（$\delta$ 为常数），若 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i\sqrt[i]{a_1 a_2 \cdots a_i b_1 b_2 \cdots b_i}}{b_i b_{i+1}} < \frac{1}{\delta} \tag{7.17}$$

练习 7.17

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为非负实数，证明

$$\frac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\frac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\frac{x_n}{(1+x_n)^2}\leq k_n^2 \quad (7.18)$$

其中数列 $\{k_n\}$ 满足 $k_1=\frac{1}{2}$，$k_{n+1}=\dfrac{k_n^2+1}{2}$。

练习 7.18

设正整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} = n^2 + 1$，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} > n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)} \tag{7.19}$$

练习 7.19

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，且 $n \geq 3$, $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{S-a_i} + \sqrt[n-1]{\left(\frac{(n-1)a_i}{S-a_i}\right)^{n-2}}\right] \geq \frac{n^2}{n-1} \tag{7.20}$$

练习 7.20 · 2011 西班牙 (改编)

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，且 $n \geq 3$，设 $S = \sum_{i=1}^n a_i$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{2}{n-1}\sqrt{\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_i a_j}{(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2}} \geq \frac{n+2}{n-1} \tag{7.21}$$

练习 7.21 · 2010 地中海数学竞赛

已知 $n>2$，正实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，证明：

$$\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_1+n-2}+\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2+n-2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{a_n+n-2}\leq\frac{1}{(n-1)^2} \tag{7.22}$$

练习 7.22

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，且 $n \geq 3$，设 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S + a_i^2} \leq \frac{n^3}{n+1} \tag{7.23}$$

练习 7.23

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+1)^2}{a_i^2+n-1} \geq \frac{n}{n-1} \tag{7.24}$$

练习 7.24

已知实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-2)x_i^2 + 2x_i}{(n-1)x_i^2 + 1} \geq 0 \tag{7.25}$$

练习 7.25 · 1986 苏联

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 均为正实数，证明：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \tag{7.26}$$

练习 7.26

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为非负实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}(k+1)x_k^2 \tag{7.27}$$

练习 7.27 · 2005 韩国

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为非负实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \tag{7.28}$$

练习 7.28

设 $0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0 < 1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i-1} - x_i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i x_i - 1 \tag{7.29}$$

练习 7.29

给定实数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，对于满足 $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 1$ 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，记

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \tag{7.30}$$

求 P 的最小值，并给出相应的取等条件。

练习 7.30

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为正实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)^2 \tag{7.31}$$

练习 7.31

给定整数 $n \geq 3$，求最大的实数 λ，使得只要正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < \lambda (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,$$

就有 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均可作为某个三角形的边长。