重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分

基本不等式

第一章　均值不等式 (一)

均值不等式是三大基本不等式之一，本讲介绍其在证明 n 元不等式中的应用，需要体会均值不等式的适用情形、掌握“拆”的技巧、积累常见结构之间的关系。

1.1　均值不等式的加强

例题 1.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ 是正实数，记 A_n, G_n 分别为 $a_1, \ldots, a_n$ 的算术平均值和几何平均值。求证：

1. $n(A_n - G_n) \le (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$;
2. $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \le \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}$.

例题 1.2

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的一个排列。求证：

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{b_{i+1}} - \sqrt{b_i})^2, \tag{1.1}$$

其中 $b_{n+1} = b_1$。

1.2　均值不等式的基本用法

例题 1.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，记 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1}\frac{S^k}{k!}. \tag{1.2}$$

例题 1.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1} - a_{i+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}, \tag{1.3}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 1.5

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是非负实数，对 $1 \le k \le n$，记 $c_k = \prod_{i=1}^{k} b_i^{\frac{1}{k}}$。求证：

$$nc_n + \sum_{k=1}^{n} k(a_k - 1)c_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k^k b_k. \tag{1.4}$$

例题 1.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^{n-1} \geq -n + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\prod_{k=1}^{n} a_k{}^{-\frac{1}{n}}, \tag{1.5}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 1.7

设整数 $n > 2$，正实数 $a_2, a_3, \ldots, a_n$ 满足 $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$。求证：

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > \frac{1}{4^{n-1}} n^n (n-1)^{n-1}. \tag{1.6}$$

例题 1.8

给定正整数 n。设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求

$$\frac{(1+a_1)(1+a_1+a_2)\ldots(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)}{\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}} \tag{1.7}$$

的最小值。

例题 1.9

设 n 为正整数，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为正实数，证明：

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k x_k^{k+1}}\right)^2 \tag{1.8}$$

1.3　作业题

作业 1.1

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1\leq i<j\leq n}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{1.9}$$

作业 1.2

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ $(1 \leq i \leq n-1)$。求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2)\ldots(a_n - a_1^2) \tag{1.10}$$

的最大值，其中 a_{n+1} 应理解为 a_1 或题目隐含循环条件（此处按题目原文保留 $a_n - a_1^2$）。

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$。求最大的实数 λ，使得对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1]$，都有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{1}{n} + \lambda \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i). \tag{1.11}$$

作业 1.4

设 n 是正整数，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + 2a_2^3 + \cdots + na_n^{n+1} \le 1$。求证：

$$2a_1 + 3a_2^2 + \cdots + (n+1)a_n^n < 3. \tag{1.12}$$

第二章　均值不等式 (二)

2.1　基础知识

定理 2.1 · 对称交叉项

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 . \tag{2.1}$$

定理 2.2 · 轮换交叉项

（四分之一引理）设整数 $n \geq 4$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是非负实数，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2, \tag{2.2}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

2.2　典型例题

例题 2.1

给定整数 $n \geq 2$。设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2.3}$$

的最小值。

例题 2.2

给定整数 $n \geq 2$。设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{2.4}$$

的最小值。

例题 2.3

给定整数 $n \geq 3$。设 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}, b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数，满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} > 0 \tag{2.5}$$

且对任意 $i = 1, 2, \ldots, 2n$，有 $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$（这里 $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$）。求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ 的最小值。

例题 2.4

给定整数 $n \geq 3$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq -1$ 且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$，求

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n \tag{2.6}$$

的最大值。

例题 2.5

给定整数 $n \geq 4$。求最大的实数 λ，使得对任意非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，均有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} + \lambda m M \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2, \tag{2.7}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$。

例题 2.6

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1, 1 \leq i \leq 100$，其中脚标按模 100 理解。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+1}$ 的最大值。

例题 2.7

给定整数 $n \geq 3$, $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$。设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $\sum a_i = \sum b_i = 1$。对 $1 \leq i \leq n$，记 $c_i = (\lambda a_i + b_{i+1})(\lambda a_{i+1} + b_i)$，其中 $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$。求 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ 的最大值。

2.3　作业题

作业 2.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 是非负实数，满足：

1. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 2$;
2. $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{100}a_1 = 1$.

求 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2$ 的最大值和最小值。

作业 2.2

给定整数 $n \geq 4$。设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2$，求

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \tag{2.8}$$

的最小值。

作业 2.3

给定整数 $n \geq 4$。设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，求

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2 \tag{2.9}$$

的最大值。

作业 2.4

给定整数 $n \geq 2$。设集合 $T = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ i \mid j\}$。对任意满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，求

$$\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j \tag{2.10}$$

的最大值。

第三章　柯西不等式 (一)

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 是现代数学各个分支中应用最为广泛的不等式之一。本讲将系统介绍柯西不等式的多种形式、证明技巧（如换元、待定系数、裂项）以及相关的推广（如拉格朗日恒等式、Hölder 不等式）。

本节介绍柯西不等式的几种形式，以及在证明分式不等式中的应用。

定理 3.1 · 柯西不等式

定理 3.2 · 积分形式

设 f, g 是区间 $[a, b]$ 上的可积函数，求证：

$$\left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2. \tag{3.1}$$

定理 3.3 · Wagner 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，$x \in [0,1]$。求证：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{1 \le i < j \le n} b_i b_j\right) \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \ne j} a_i b_j\right)^2. \tag{3.2}$$

定理 3.4 · Aczel 不等式

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，满足 $a_1^2 > \sum_{i=2}^{n} a_i^2$。求证：

$$\left(a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2\right) \leq \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{3.3}$$

3.1　分式型柯西不等式

例题 3.1

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^3$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2 - a_{i+1} + n} \geq 1, \tag{3.4}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 3.2

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是给定的正实数，求证：存在和为 1 的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得对任意和为 1 的正实数 $y_1, y_2, \ldots, y_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3.5}$$

例题 3.3

设整数 $m < n$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数。对集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集 A，记 $S_A = \sum_{i \in A} a_i$。求证：

$$\sum_{|A|=m} \frac{S_A}{S_{A^c}} \geq \frac{m}{n-m} C_n^m. \tag{3.6}$$

例题 3.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} = \frac{n}{2}$。求证：

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{1}{a_i + a_j} \geq \frac{n^2}{2}. \tag{3.7}$$

例题 3.5

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j$。对 $1 \leq i \leq n$，记 $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i$。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq 1. \tag{3.8}$$

例题 3.6 · 2006 CTST

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+a_i}}\right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \tag{3.9}$$

3.2 作业题

作业 3.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \max\{a_i^2, b_i^2\}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \min\{a_i^2, b_i^2\}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{3.10}$$

作业 3.2

给定整数 $n \geq 3$。求最小的实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{\lambda a_n}{S - a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}, \tag{3.11}$$

其中 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

作业 3.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1} \geq \frac{n}{2}. \tag{3.12}$$

作业 3.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2+1}\right) \leq \frac{n^3}{2}. \tag{3.13}$$

第四章　柯西不等式 (二)

本节介绍柯西不等式与换元、待定系数、裂项等方法综合运用的问题。

4.1　换元法

例题 4.1

给定正整数 n。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ 满足 $\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$，求

$$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n) \tag{4.1}$$

的最大值。

例题 4.2

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$，求证：

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k^2 \leq \frac{n}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2. \tag{4.2}$$

例题 4.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} a_i \le 2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\left(\sum_{i=1}^{j} a_i\right)^2. \tag{4.3}$$

例题 4.4

给定整数 $n \geq 2$。设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{\frac{i}{j}} a_i a_j = 1$，求 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最大值和最小值。

4.2 待定系数法

例题 4.5 · Ostrowski 不等式

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}. \tag{4.4}$$

例题 4.6

给定正整数 n。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} i a_i = 1$。求

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tag{4.5}$$

的最小值。

4.3　裂项法

例题 4.7

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：

$$\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1^2+\cdots+a_n^2}<\sqrt{n}. \tag{4.6}$$

例题 4.8

设整数 $n \geq 2$，正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 1$。求证：对任意实数 x，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2 + x^2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}. \tag{4.7}$$

4.4　作业题

作业 4.1

设实数 $1 = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$，求证：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}(a_i - a_{i+1}). \tag{4.8}$$

作业 4.2

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ 是实数，求证：

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} (a_i + \cdots + a_j)^2. \tag{4.9}$$

作业 4.3

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意满足 $\sum_{i=1}^{n} i a_i = 0$ 的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{4.10}$$

作业 4.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_1+\cdots+a_n}<\sqrt{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}. \tag{4.11}$$

第五章　柯西不等式 (三)

本节介绍柯西不等式的两种推广和加强：拉格朗日恒等式与 Hölder 不等式，需要注意“平移不变”技巧的运用。

5.1　拉格朗日恒等式

定理 5.1 · 拉格朗日恒等式

对于任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i b_j - a_j b_i)^2. \tag{5.1}$$

例题 5.1 · 2010 中欧数学奥林匹克

给定整数 $n \geq 2$。求最大的实数 λ，使得对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2. \tag{5.2}$$

例题 5.2

设 $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ 是实数，求证：

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i^2 \geq \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{i=0}^{2n} a_i\right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)}\left(\sum_{i=0}^{2n}(i-n)a_i\right)^2. \tag{5.3}$$

例题 5.3

设整数 $n \geq 4$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 t 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 3t$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 3t^2$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 > 3t^3 + t$。求证：存在 $1 \leq i < j \leq n$ 使得 $|a_i - a_j| > 1$。

例题 5.4

设整数 $n \geq 3$。正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) = n^2 + 1$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}\right) \geq n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}. \tag{5.4}$$

例题 5.5

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{2n}}\right) - n^2 \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right)^2 \ge n^2. \tag{5.5}$$

例题 5.6

设 $a_1, \ldots, a_{2n}, b_1, \ldots, b_{2n}$ 是实数，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\right)^2 \geq \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\right]^2. \tag{5.6}$$

5.2　Hölder 不等式

定理 5.2 · Hölder 不等式

设 $m, n \geq 2$ 为整数。给定 m 组非负实数：

$$(a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}), \quad (a_{1,2}, \ldots, a_{n,2}), \quad \ldots, \quad (a_{1,m}, \ldots, a_{n,m}).$$

则有：

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^{m} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.7}$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}^{m} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}^{m} \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,m}^{m} \right)^{\frac{1}{m}} \tag{5.8}$$

当且仅当这 m 组向量两两共线（即成比例）时，等号成立。

例题 5.7

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^3+1) \geq \prod_{i=1}^{n}(a_i^2 a_{i+1}+1), \tag{5.9}$$

其中 $a_{n+1}=a_1$。

例题 5.8

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$。求证：

$$(a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1}\right) \geq \frac{n}{n+1}. \quad (5.10)$$

5.3　作业题

作业 5.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：

$$\left(\sum_{1\le i<j\le n} |a_i - a_j|\right)^2 \le \frac{n^2-1}{3} \sum_{1\le i<j\le n} (a_i - a_j)^2. \tag{5.11}$$

作业 5.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $a_i > b_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ 且 $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i)}. \tag{5.12}$$

第六章　排序不等式与切比雪夫不等式

排序不等式是除均值不等式和柯西不等式之外的第三种基本不等式，有别于前两种通过平方和得到大小关系，排序不等式是通过序来得到的。切比雪夫 (Chebyshev) 不等式可以认为是排序不等式的特殊情况，但因其结构整齐，特别在近年出现的频率很高。

本讲介绍排序不等式和切比雪夫不等式的证明及应用。需要注意的是，有的题目虽然条件中没有给出序，但如果变量地位相同，我们可以不妨设一个序。

6.1　基础知识

定理 6.1 · 排序不等式

设实数组 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 和 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$。若 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 的任一排列，则有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{6.1}$$

即：**反序和** $\le$ **乱序和** $\le$ **同序和**。当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时等号成立（严格递增时，仅当排列对应相同时取等）。

定理 6.2 · 切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)

1. 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 且 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$（同序），则

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \tag{6.2}$$

2. 若 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 且 $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$（反序），则

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \tag{6.3}$$

6.2 典型例题

例题 6.1

设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 满足 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$，$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$。$z_1, z_2, \ldots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的一个排列，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2. \tag{6.4}$$

例题 6.2

设 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq \sum_{i=1}^{n} \theta_i \cdot \frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i}, \tag{6.5}$$

其中 $\theta_{n+1} = \theta_1$。

例题 6.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是两两不同的正整数，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{6.6}$$

例题 6.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}. \tag{6.7}$$

例题 6.5

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{n}. \tag{6.8}$$

例题 6.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i}\right)\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j\right) \leq \frac{n}{2}. \tag{6.9}$$

例题 6.7

给定整数 $n \geq 3$。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求 $a_n \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i$ 的最大值。

例题 6.8

给定整数 $n \geq 2$。设非负实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$，满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} b_i b_{n+1-i} = 1. \tag{6.10}$$

求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j$ 的最小值。

6.3　作业题

作业 6.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，求证：

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}. \tag{6.11}$$

作业 6.2

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是非负实数。对 $1 \leq k \leq n$，定义

$$C_k = \max\{a_1 b_k, a_2 b_k, \ldots, a_k b_k, a_k b_{k-1}, \ldots, a_k b_1\}.$$

设 σ 是 $1 \sim n$ 的一个置换，求证：

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq C_1 + C_2 + \cdots + C_n. \tag{6.12}$$

作业 6.3

给定整数 $n \geq 2$。求最大的正实数 λ，使得对任意满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$，$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$，都有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} x_i y_i. \tag{6.13}$$

作业 6.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$。求证：

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i} \geq (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}. \tag{6.14}$$

第七章　补充练习题

练习 7.1

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$，证明：

$$(2+a_1)(2+a_2)\ldots(2+a_n) \geq 3^n \tag{7.1}$$

练习 7.2

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$，证明：

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \cdots + \frac{S^n}{n!} \geq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \tag{7.2}$$

练习 7.3 · 2017 北大挑战赛

给定整数 n 和正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，且满足 $\prod_{i=1}^{k} a_i \geq k!\ (1 \leq k \leq n)$，证明：

$$\frac{2!}{1+a_1} + \frac{3!}{(1+a_1)(2+a_2)} + \cdots + \frac{(n+1)!}{(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n)} < 3 \tag{7.3}$$

练习 7.4 · 2014 北约自主招生

已知正数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$，证明：

$$(\sqrt{2}+x_1)(\sqrt{2}+x_2)\ldots(\sqrt{2}+x_n) \geq (\sqrt{2}+1)^n \tag{7.4}$$

练习 7.5 · 2018 北大综合营

设非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求证：对任意 $r > 0$ 有

$$(1+rx_1)(1+rx_2)\ldots(1+rx_n) \geq (n+r)^n x_1 x_2 \ldots x_n \tag{7.5}$$

练习 7.6 · 2007 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 4$，非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2$，记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2+1} + \frac{a_n}{a_1^2+1} \tag{7.6}$$

求 P 的最小值，并给出相应的取等条件。

练习 7.7

设整数 $n \geq 3$，且正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1$$

求证：

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geq (n-1)^{n/4} \tag{7.7}$$

练习 7.8 · 1998 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ 均为正实数，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$，证明：

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n \left[1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \tag{7.8}$$

练习 7.9

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$，证明：

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{7.9}$$

练习 7.10 · 2007 保加利亚

设整数 $n \geq 2$，求常数 $C(n)$ 的最大值，使得对所有满足 $x_i \in (0,1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 且 $(1 - x_i)(1 - x_j) \geq \frac{1}{4}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，均有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}\right) \tag{7.10}$$

练习 7.11

设 $a_i, b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，证明：

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{7.11}$$

练习 7.12 · 2010 浙大自招

设整数 $n \geq 2$，且正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4 \tag{7.12}$$

练习 7.13 · 2002 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 2$，且 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的任意排列，证明：

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \cdots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} > \frac{n-1}{n+2} \tag{7.13}$$

练习 7.14 · 2011 甘肃预赛

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，证明：

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n} \tag{7.14}$$

练习 7.15

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，证明：

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{7.15}$$

练习 7.16

设 $n \geq 2$，$n \in \mathbb{N}^+$，证明：

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \cdots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3} \tag{7.16}$$

练习 7.17

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$，证明：

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2 \tag{7.17}$$

练习 7.18

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 满足 $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)}\right)^2 \leq (n-1)\, x_{n+1}^2 \tag{7.18}$$

练习 7.19

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \tag{7.19}$$

练习 7.20

给定整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \tag{7.20}$$

其中 $C_a^b = \dfrac{a!}{b!(a-b)!}$。证明：$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$。

练习 7.21 · 2017 HMMT

设 $x_1, x_2, \ldots, x_{2017}$ 均为实数，求出最大的实数 c，使得下列不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c\, x_{2017}^2 \tag{7.21}$$

练习 7.22 · 2019 欧洲杯

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}\ (n\in\mathbb{N}^+)$，证明：

$$\sum_{k=1}^{2019}\frac{x_k^2}{2x_kx_{k+1}-1}>\frac{2019^2}{x_{2019}^2+\dfrac{1}{x_{2019}^2}} \tag{7.22}$$

练习 7.23

已知正实数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)\sum_{j\neq i}x_j^2+x_i}{1+\sum_{j\neq i}x_j}\geq\frac{n^2-n+1}{2n-1} \tag{7.23}$$

练习 7.24 · 1996 波兰

设整数 $n\geq 2$，正数 $a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i=1$，$\sum_{i=1}^n x_i=1$，证明：

$$2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\leq\frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i^2}{1-a_i}, \tag{7.24}$$

并指出等号成立的充要条件。

练习 7.25

设 $a_i > 0,\ b_i > 0,\ a_ib_i = c_i^2 + d_i^2\ (i = 1, 2, \ldots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i\Big)^2 \tag{7.25}$$

练习 7.26 · 2002 罗马尼亚

设整数 $n \geq 4$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right)^2 \tag{7.26}$$

练习 7.27 · 1998 罗马尼亚

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1x_2\ldots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 \tag{7.27}$$

练习 7.28 · 2014 东南

设整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + \cdots + x_n = 1$，且 $x_{n+1} = x_1$，求证：

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1} \tag{7.28}$$

练习 7.29 · 2010 伊朗改

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \right)^2 \tag{7.29}$$

练习 7.30

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \tag{7.30}$$

第二部分

基本方法

第八章　恒等变形

8.1　基础知识

定理 8.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \tag{8.1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i\ne j} a_i a_j \tag{8.2}$$

定理 8.2

当 $a_{n+1} = a_1$ 时：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1})^2 \tag{8.3}$$

定理 8.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_ia_j+b_ib_j)-(a_ib_j+a_jb_i)=(a_i-b_i)(a_j-b_j)\,,\quad 1\le i,j\le n \tag{8.4}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\sum_{i=1}^n b_i^2=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 \tag{8.5}$$

定理 8.4

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \tag{8.6}$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^n a_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}2a_ia_j \tag{8.7}$$

$$\sum_{i=1}^n\left(2\sum_{k=1}^n b_k-nb_i\right)^2=n^2\sum_{i=1}^n b_i^2 \tag{8.8}$$

定理 8.5

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_ia_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_ia_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_ia_j \tag{8.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j \tag{8.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_jb_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j + a_jb_i) \tag{8.11}$$

定理 8.6

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n}(n+1-k)a_ja_k \tag{8.12}$$

$$(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} ia_i^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n} ka_ja_k \tag{8.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right) = \sum_{1\le i<j\le n}(j-i)a_ia_j \tag{8.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} ia_i^2 + 2\sum_{1\le i<k\le n} ia_ia_k \tag{8.15}$$

定理 8.7

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})} \tag{8.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=i}^{i+k}a_j\right)}=1 \quad (\text{其中}\prod_{i=1}^{n}a_i=1) \tag{8.17}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)=\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k}\right]^2+\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k+1}\right]^2 \tag{8.18}$$

8.2 预习题

预习 8.1

求下列各式的值：

1. $S_1=\sum_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2$
2. $S_2=\sum_{1\leq i<j\leq n}i\cdot j$
3. $S_3=\sum_{1\leq i<j\leq n}(i^2+j^2)$

预习 8.2 · 2001 韩国

已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1$，证明：

$$1-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\geq\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{2} \tag{8.19}$$

8.3　例题

例题 8.1

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} \le \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{8.20}$$

例题 8.2

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \tag{8.21}$$

例题 8.3 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \tag{8.22}$$

例题 8.4 · 2016 西部赛

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数，记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i (1 \leq k \leq n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^{n} a_j^2\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i\right)^2 \tag{8.23}$$

例题 8.5

设整数 $n \geq 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，设 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，证明：

$$M \cdot \sum_{i=1}^{n} i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tag{8.24}$$

例题 8.6 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，且 $a_1 = a_{n+1}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1 a_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2 \tag{8.25}$$

例题 8.7 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \tag{8.26}$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

例题 8.8 · 2006 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n}{2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)} \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \tag{8.27}$$

例题 8.9

设 a_i, b_i, c_i 均为实数，其中 $i=1,2,\cdots,n$. 且 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2=\sum_{i=1}^{n} b_i c_i=1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i=0$，证明：

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i c_j-a_j c_i\right)^2 \ge a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \tag{8.28}$$

例题 8.10

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{8.29}$$

例题 8.11

设整数 $n \geq 2$，$z_1, z_2, \ldots, z_n$ 是复数，求证：

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|\right)^2 \geq (n-1) \sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|^2. \tag{8.30}$$

例题 8.12

设 $n \geq 3$，记正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 S，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \tag{8.31}$$

例题 8.13

设正整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) x_i x_j \tag{8.32}$$

的最大值。

例题 8.14 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1 \tag{8.33}$$

例题 8.15

设正整数 $n \geq 3$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = n-1$，证明：

$$\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \tag{8.34}$$

8.4　作业题

作业 8.1

证明：

$$\frac{4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{4a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \tag{8.35}$$

作业 8.2 · 2016 IMC

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_i + b_i > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i - \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \tag{8.36}$$

作业 8.3

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(1 + \sqrt{x_i x_j}\right) \cdot \left(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}\right) \tag{8.37}$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

作业 8.4

已知实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $0 < a_i \leq \frac{1}{2}(i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)\right]^2} \tag{8.38}$$

作业 8.5

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$ ，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2. \tag{8.39}$$

作业 8.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \tag{8.40}$$

第九章　Abel 变换

9.1　基础知识

定理 9.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0=0$，$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i\ (1\le k\le n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+b_nS_n \tag{9.1}$$

定理 9.2 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \tag{9.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2. \tag{9.3}$$

9.2　预习题

预习 9.1

给定正整数 n，对任意 $1 \leq k \leq n$ 正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq k$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{9.4}$$

预习 9.2 · 1978 IMO

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是两两不同的正整数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{9.5}$$

预习 9.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得对任意 $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right|. \tag{9.6}$$

预习 9.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$，且对 $1 \leq k \leq n$，有 $\prod_{i=1}^{k} a_i \geq \prod_{i=1}^{k} b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{9.7}$$

预习 9.5

给定整数 $n \geq 2$ 以及不全为零的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 求 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足的充要条件，使得存在正整数 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq 0. \tag{9.8}$$

9.3 例题

例题 9.1 · 1994 USAMO

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，满足对 $1 \le k \le n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sqrt{k}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}. \tag{9.9}$$

例题 9.2 · 1999 APMO

设 $\{a_n\}$ 是正项数列，满足对任意 $i, j \geq 1$，有 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. 求证：对任意正整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \geq a_n. \tag{9.10}$$

例题 9.3 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 是实数，满足

$$a_1 \geq \frac{a_1+a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \tag{9.11}$$

$$b_1 \geq \frac{b_1+b_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}. \tag{9.12}$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{9.13}$$

例题 9.4

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \tag{9.14}$$

例题 9.5

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正整数，满足对集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任一非空子集 I，$\sum_{i \in I} a_i$ 互不相同。求：

1. $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$ 的最小值；
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 的最小值；
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ 的最大值。

例题 9.6 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \tag{9.15}$$

例题 9.7

给定整数 $n,k\geq 2$. 设非负实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n,c_1,c_2,\ldots,c_n$ 满足：

1. $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$;
2. 对 $1\leq i\leq n$，有 $\sum_{j=1}^{i}c_j\leq i^k$.

求 $c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots+c_na_n^k$ 的最大值。

9.4　练习题

作业 9.1

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证：

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \tag{9.16}$$

作业 9.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且对 $1 \leq k \leq n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}. \tag{9.17}$$

作业 9.3

给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$，记 $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$，证明：

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \tag{9.18}$$

作业 9.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数。求证：对任意实数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 都有 $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le \sum_{i=1}^n b_i x_i$ 的充要条件是：对 $1 \le k \le n-1$，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \ge \sum_{i=1}^k b_i \quad 且 \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \tag{9.19}$$

第十章　局部不等式

10.1　例题

例题 10.1

设整数 $n \geq 3$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$，且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}. \tag{10.1}$$

例题 10.2

求所有的整数 $n \geq 2$，使得存在实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，满足

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{10.2}$$

例题 10.3

给定整数 $n \geq 3$，设不全为 0 的实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$。记

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right)^2, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^3. \tag{10.3}$$

求 $\frac{A}{B}$ 的最大值。

例题 10.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_{i+1}}{1-(a_i-a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{10.4}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 10.5

设正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{1 + x_i + \cdots + x_i^{i}}. \tag{10.5}$$

例题 10.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \tag{10.6}$$

例题 10.7

设整数 $n \geq 3$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \tag{10.7}$$

其中 $a_0 = a_n$，$a_{n+1} = a_1$。

例题 10.8

设整数 $n \geq 3$，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是不小于 1 的实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{10.8}$$

其中下标按模 n 理解。

例题 10.9

给定整数 $n \geq 3$，且 $a_i \geq 1(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j| \tag{10.9}$$

例题 10.10

设整数 $n \geq 3$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，证明：

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+(n-2)x_i}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{[1+(n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \tag{10.10}$$

例题 10.11

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$ $(1 \leq i \leq 100)$，其中 $a_{101} = a_1$，$a_{102} = a_2$。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$ 的最大值。

10.2　练习题

作业 10.1

设整数 $n \geq 2$，实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$。求证：存在 $a \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，使得对任意 $1 \leq j \leq n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \tag{10.11}$$

作业 10.2

求最大的实数 λ，使得对任意正整数 n 和任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，只要 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$，就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^2. \tag{10.12}$$

作业 10.3

设实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1} a_i\right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \tag{10.13}$$

作业 10.4

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正实数，求证：

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{2}{1+x_1+x_2}+\cdots+\frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}. \quad (10.14)$$

作业 10.5

设整数 $n \geq 2$，且非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i \leq 4 \tag{10.15}$$

作业 10.6

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$，证明：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \tag{10.16}$$

作业 10.7 · 2004 CTST

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$，证明：

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \leq 1 \tag{10.17}$$

作业 10.8

设 $a_i \in [0,1], i = 1,2,\ldots,n$，记 $S = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$，证明：

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \tag{10.18}$$

作业 10.9

设整数 $n \geq 2$，且正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \tag{10.19}$$

作业 10.10 · 2007 白俄罗斯

已知 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 均为正数，证明：

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \ldots x_{n+1}) \tag{10.20}$$

作业 10.11 · 1993 圣彼得堡

设 $a_i \in [-1,1]$, $a_i a_{i+1} \neq -1$, $i=1,2,\ldots,n$，且 $a_{n+1}=a_1$，证明：

$$\frac{1}{1+a_1a_2}+\frac{1}{1+a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_na_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2}+\frac{1}{1+a_2^2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n^2} \tag{10.21}$$

第十一章 调整法

定理 11.1

1. 设 $a_k \in \mathbb{R}$，$\sum_{k=1}^{n} a_k = t$，若在 a_1 最大、a_2 最小的前提下能证明
$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \cdots, a_n\right),$$
则可经过 $n-1$ 次调整将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全调为 $\frac{t}{n}$。

2. 设 $a_k \in \mathbb{R}^+$，$\prod_{k=1}^{n} a_k = t$，若在 a_1 最大、a_2 最小的前提下能证明
$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \cdots, a_n\right),$$
则可经过 $n-1$ 次调整将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全调为 $\sqrt[n]{t}$。

定理 11.2 · 端点调整

若 $a_k \in [a, b]$，将 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 视为 a_k 的一元函数 $g(x)$，且 $g'(x)$ 单调，则可将 a_k 调为 a 或 b。

定理 11.3 · 磨光变换法（无限调整法、SMV 定理）

定理 11.4 · EV(Equal Variable) 定理

11.1　预习题

预习 11.1

已知 $0 \le a, b, c \le 1$，证明：

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \le 2 \tag{11.1}$$

预习 11.2

设 x, y, z 都是非负实数且 $x+y+z=1$，证明：

$$yz+zx+xy-2xyz \le \frac{7}{27} \tag{11.2}$$

预习 11.3

设正实数 a, b, c, d 满足 $abcd=1$，证明：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{4}{a+b+c+d} \ge 5 \tag{11.3}$$

预习 11.4

设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$，$abc>0$，证明：

$$ab+bc+ca<\frac{\sqrt{abc}}{2}+\frac{1}{4} \tag{11.4}$$

11.2　例题

例题 11.1

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ 满足不等式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$，求 $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$ 的最小值。

例题 11.2

已知正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，证明：

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq (n-1)^n. \tag{11.5}$$

例题 11.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_i x_j \geq 1$（其中 $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$），证明：

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \tag{11.6}$$

例题 11.4

已知正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = n$，证明：

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \tag{11.7}$$

例题 11.5

设 $x_i \in (0,1]$（$1 \le i \le n$），$0 < \lambda \le 2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} [1+(i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \ge \frac{2+(n-1)\lambda}{2n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2. \tag{11.8}$$

例题 11.6

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 \right\}. \tag{11.9}$$

11.3　练习题

作业 11.1

给定正整数 $n \geq 4$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n^2$，证明：这 n 个数中一定有一个数大于等于 2。

作业 11.2

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中的最大数为 a，证明：

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{a^2}{4}. \tag{11.10}$$

并确定不等式等号成立的条件。

作业 11.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为 n $(n \geq 2)$ 个互不相同的实数，记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \tag{11.11}$$

证明：$12S \geq n(n-1)M$.

作业 11.4

设整数 $n \geq 2$，$\alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$（$i = 1, 2, \ldots, n$），证明：

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{11.12}$$

第三部分

高级不等式

第十二章　伯努利不等式

12.1　基础知识

定理 12.1 · 伯努利不等式 (Bernoulli's Inequality)

对任意实数 $x > -1$ 和实数 α，有：

1. 当 $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 时：

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x \tag{12.1}$$

2. 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时：

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x \tag{12.2}$$

当且仅当 $\alpha = 0, 1$ 或 $x = 0$ 时取等号。

定理 12.2 · 伯努利不等式的多变量形式

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为符号相同的实数，且 $x_i > -1$，则：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{12.3}$$

12.2 例题

例题 12.1

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$，求证：

$$(1+a_1)^{\frac{1}{a_2}}(1+a_2)^{\frac{1}{a_3}}\ldots(1+a_n)^{\frac{1}{a_1}} \geq 2^n. \tag{12.4}$$

定理 12.3 · Mitrinovic 不等式

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：对 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的任一排列 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{b_i} > 1. \tag{12.5}$$

例题 12.2

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n). \tag{12.6}$$

例题 12.3

求最小的实数 λ，使得对任意正整数 n 及任意满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\lambda \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq 1-\sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{12.7}$$

例题 12.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+n-1) \geq n^{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2. \tag{12.8}$$

例题 12.5

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$。求证：

$$(a_1^n + 1)(a_2^n + 1)\ldots(a_n^n + 1) \geq 2^n. \tag{12.9}$$

例题 12.6

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不全为 1 的正整数，满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=k$ 是整数。求证：多项式

$$P(x)=a_1a_2\ldots a_n(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) \tag{12.10}$$

没有正根。

例题 12.7

设整数 $n \geq 3$，多项式 $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ 有 n 个实根，且都在区间 $(0,1)$ 内。求证：

$$\sum_{i=1}^{n-2} i a_i > 0. \tag{12.11}$$

12.3　练习题

作业 12.1

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i \geq -1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) + \frac{n}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 1. \tag{12.12}$$

作业 12.2

给定整数 $n \geq 2$，求最小的实数 λ，使得对任意非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i+\lambda)}. \tag{12.13}$$

第十三章　其他著名不等式

13.1　基础知识

定理 13.1 · Jensen 不等式

1. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，则对任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$，有
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\tag{13.1}$$
当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数，正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$。则对任意 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a,b]$，有
$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)\tag{13.2}$$
当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

定理 13.2 · 加权均值不等式

设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i} \tag{13.3}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

定理 13.3 · 幂平均不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，非零实数 $\alpha < \beta$。则

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{13.4}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

定理 13.4 · 范数不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是非负实数，正实数 $\alpha < \beta$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{13.5}$$

当且仅当 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中至少有 $n-1$ 个为 0 时等号成立。

定理 13.5 · Hölder 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是正实数，p, q 是大于 1 的实数，满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{13.6}$$

当且仅当 $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$ 时等号成立。

定理 13.6 · Minkowski 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是正实数，实数 $p \geq 1$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{13.7}$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立。

13.2　例题

例题 13.1 · 樊畿不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \frac{1}{2}]$，求证：

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{\left(\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}. \tag{13.8}$$

例题 13.2

设 n 是正整数，$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p, q$ 是正实数，满足 $p < q$，且 $x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p$。求证：

1. $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$
2. $(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} < (x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

例题 13.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$。求证：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k}-1)^n} \geq \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(a_1 a_2 \ldots a_n - 1)^n}. \tag{13.9}$$

13.3　作业题

作业 13.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不小于 1 的实数，求证：

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}+1}. \tag{13.10}$$

作业 13.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1+a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{n-a_i}{1-a_i}. \tag{13.11}$$

作业 13.3

设 m,n 是给定的大于 1 的整数，$\alpha<\beta$ 是给定的正实数，对不全为 0 的非负实数 a_{ij} $(1\le i\le n,\ 1\le j\le m)$，求

$$\frac{\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{13.12}$$

的最大值。

作业 13.4

给定正整数 n。求最大的实数 λ，使得对所有满足

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+2)^n \geq \prod_{i=1}^{2n} x_i \tag{13.13}$$

的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$，都有

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+1)^n \geq \lambda \prod_{i=1}^{2n} x_i. \tag{13.14}$$

第十四章　反向不等式

14.1　基础知识

定理 14.1 · Kantorović 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \tag{14.1}$$

定理 14.2 · Polyá-Szegö 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < A,\ b < B$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, A],\ b_1, b_2, \ldots, b_n \in [b, B]$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{14.2}$$

14.2 预习题

14.3 例题

例题 14.1 · 1978 苏联

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$，其中 $0 < a < b$，证明：

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2 \tag{14.3}$$

例题 14.2 · 2016 克罗地亚

已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均为非负实数，证明：

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \quad (14.4)$$

例题 14.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{14.5}$$

求证：$\max\{a_1, \ldots, a_n\} \leq 4 \min\{a_1, \ldots, a_n\}$。

例题 14.4

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 2]$，求

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \tag{14.6}$$

的最大值。

例题 14.5 · 1998 年高中联赛

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in [1,2]$ 且满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2. \tag{14.7}$$

例题 14.6

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) < n^2 + 1. \tag{14.8}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

例题 14.7

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < b$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, b]$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{14.9}$$

其中 $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$。

例题 14.8

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{14.10}$$

练习 14.1

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{14.11}$$

14.4　练习题

练习 14.2

已知非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，其中 $n \geq 3$，求

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \tag{14.12}$$

的最大值。

练习 14.3

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，证明：

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} (2i-1) x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2i-1} \leq \frac{n^2}{2n-1} \tag{14.13}$$

练习 14.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且 $a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{n}$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}}. \tag{14.14}$$

练习 14.5

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \tag{14.15}$$

练习 14.6

设整数 $n \geq 2$，正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq \frac{M^2 - Mm + m^2}{Mm} \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{14.16}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

练习 14.7

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2. \tag{14.17}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

练习 14.8

给定整数 $n \geq 3$。求最大的实数 λ，使得只要正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \tag{14.18}$$

那么 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数便能构成三角形的三边长。

第十五章　凸函数与不等式

本讲介绍凸函数的两个应用，一是用于处理变量有界的情形；二是卡拉玛特 (Karamata) 不等式，这两个都是强有力的工具，有了它们会对之前的很多问题有新的理解。

15.1　重要定理

定理 15.1 · 优超关系 (Majorization)

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 是实数，如果满足：

1. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ 且 $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$;
2. 对任意 $1 \leq k \leq n-1$，有 $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i$;
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

则称 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 优超于 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，记作 $(x) \succ (y)$。

定理 15.2 · 卡拉玛特不等式 (Karamata's Inequality)

设 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$。

1. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 下凸函数 ** (Convex)，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \tag{15.1}$$

2. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的 ** 上凸函数 ** (Concave)，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \tag{15.2}$$

定理 15.3 · Popoviciu 不等式

设 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，则对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} f(b_i) \tag{15.3}$$

其中 $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$，$b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} a_j$。

15.2　例题

练习 15.1

给定整数 $n \geq 3$，设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$，求 $\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1}$ 的最值，其中 $a_{n+1} = a_1$。

练习 15.2

设整数 $n \geq 2$，正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \frac{(M-m)^2}{Mm}. \tag{15.4}$$

练习 15.3

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$。记 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+S-a_i} + \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \leq 1. \tag{15.5}$$

练习 15.4

给定整数 $n>2$。设非负实数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$，求

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2\sqrt{x_1x_2\ldots x_n} \tag{15.6}$$

的最大值和最小值。

练习 15.5

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是非负实数，求证：

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \geq \prod_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)^{\frac{1}{n}}. \tag{15.7}$$

练习 15.6

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{1997} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$，且满足 $\sum_{i=1}^{1997} a_i = -318\sqrt{3}$。求 $\sum_{i=1}^{1997} a_i^{12}$ 的最大值。

练习 15.7

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in (n-1, n)$。记 $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$，求证：

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \prod_{i=1}^{n} (S - (n-1)a_i). \tag{15.8}$$

练习 15.8

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2a_i + a_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}, \tag{15.9}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$a_{n+2} = a_2$。

15.3　作业题

作业 15.1 ·　Ozeki 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $0 \le m_1 \le a_i \le M_1$，$0 \le m_2 \le b_i \le M_2$。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left[\frac{n^2}{3}\right](M_1M_2 - m_1m_2)^2. \tag{15.10}$$

作业 15.2

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i + 1)^2 + 4 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{15.11}$$

的最大值。

作业 15.3

给定正整数 n 和正实数 a。设 $k, x_1, x_2, \ldots, x_k$ 是正整数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k = n$。求 $a^{x_1} + a^{x_2} + \cdots + a^{x_k}$ 的最大值。

作业 15.4

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{3}, \tag{15.12}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$a_{n+2} = a_2$。

第四部分

常见问题与方法

第十六章　绝对值不等式（一）

本讲介绍含绝对值的不等式，最常用的方法是三角不等式和正负分离。

16.1　例题

例题 16.1

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，求证：存在 $1 \leq k \leq n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_k|. \tag{16.1}$$

例题 16.2

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = 1$。对 $1 \leq k \leq n$，记 $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i - A_{i+1}| \leq 1 - \frac{1}{n}. \tag{16.2}$$

例题 16.3

设整数 $n \geq 2$，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是实数，满足 $a_1 = a_{n-1} = 0$。求证：对任意实数 t，

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ta_{i+1} - a_{i+2}|. \tag{16.3}$$

例题 16.4

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$。求：

1. $\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ 的最小值和最大值；
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ 的最小值和最大值。

例题 16.5

给定整数 $n \geq 2$。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$。求：

1. $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$ 的最大值；
2. $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 16.6

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$，$-1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq 1$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$。求 $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$ 的最大值。

例题 16.7

设整数 $n \geq 3$，非零实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} = 0$。求证：

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot (\max_{1\leq i\leq n} |x_i| - \min_{1\leq i\leq n} |x_i|). \tag{16.4}$$

例题 16.8

设实数 $a < b$，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [a, b]$。设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$。求证：

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 - y_i^2)\right| \le (b-a)\sqrt{1 - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}. \tag{16.5}$$

16.2　练习题

作业 16.1

设整数 $n \geq 2$，非零实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$。求证：存在 $1 \leq i < j \leq n$，使得

$$\frac{1}{2} \leq \left|\frac{a_i}{a_j}\right| \leq 2. \tag{16.6}$$

作业 16.2

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$。对 $1 \leq k \leq n$，记 $A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$。求证：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} A_i\right| < \frac{n-1}{2}. \tag{16.7}$$

作业 16.3

给定整数 $n \geq 2$。求最大的实数 λ，使得对任意和为 0 的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{16.8}$$

作业 16.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1\leq i\leq n} \frac{a_i}{b_i} - \min_{1\leq i\leq n} \frac{b_i}{a_i}. \tag{16.9}$$

第十七章　绝对值不等式 (二)

本讲继续介绍含绝对值的不等式，包括设序和离散介值原理等方法，以及几个综合性的问题。

17.1　例题

例题 17.1

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{17.1}$$

的最大值。

例题 17.2

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [-1, 1]$，求

$$\left|a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\right| + \left|a_2 - \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\right| + \cdots + \left|a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n}\right| \tag{17.2}$$

的最大值。

例题 17.3

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足：

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$;
2. $|a_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

求 $\min_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - a_{i+1}|$ 的最大值。

例题 17.4

设整数 $n \geq 3$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i > 1$，$|a_i| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$。求证：存在正整数 $k < n$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i\right| \leq 1. \tag{17.3}$$

例题 17.5

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ 满足 $\sum_{i=1}^{40} a_i = 0$ 且对 $1 \leq i \leq 40$，都有 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$，这里 $a_{41} = a_1$。记 $a = a_{10}$，$b = a_{20}$，$c = a_{30}$，$d = a_{40}$。

1. 求 $a + b + c + d$ 的最大值；
2. 求 $ab + cd$ 的最大值。

例题 17.6

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{1001}$ 满足 $a_1 = a_{1001}$，$|a_i + a_{i+2} - 2a_{i+1}| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 999)$。求

$$\max_{1 \leq i < j \leq 1001} |a_i - a_j| \tag{17.4}$$

的最大值。

17.2　作业题

作业 17.1

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足：

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$;
2. $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = 1$.

求 $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i - a_{i+1}|$ 的最小值，其中 $a_{n+1} = a_1$。

作业 17.2

设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$，且 $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ $(1 \leq i \leq n)$。求证：存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一个排列 $y_1, y_2, \ldots, y_n$，使得

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}. \tag{17.5}$$

作业 17.3

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ 满足 $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$ $(1 \leq i \leq 2018)$，其中 $a_{2019} = a_1$。求

$$\sum_{i=1}^{2018} |a_i| - \left|\sum_{i=1}^{2018} a_i\right| \tag{17.6}$$

的最大值。

17.3　其他练习题

练习 17.1

已知 n 个实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的算术平均值为 a，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 \le \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k - a|\right)^2.$$

练习 17.2

设 $a_0 = 0$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k(a_k - a_{k-1})| \le \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})^2.$$

练习 17.3

设整数 $n \ge 3$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 均大于 1，且 $|a_{k+1} - a_k| < 1$ $(1 \le k \le n-1)$，证明：

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

练习 17.4

（18 浙江预赛）将 $2n$ $(n \ge 2)$ 个不同的整数分成两组 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$，证明：

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |a_i - b_j| - \sum_{1\le i<j\le n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \ge n.$$

练习 17.5

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均不超过 1，证明：

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| \le n^2.$$

练习 17.6

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$，求 $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ 的最大值。

练习 17.7

对每一个整数 $n \geq 2$，求最大的常数 c_n，使得不等式

$$c_n \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

对任意满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ 的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 成立。

第十八章　平均值原理与不等式

平均值原理是一种整体思想，本讲介绍两类能用平均值原理处理的问题，一类是存在性问题，一类与最大最小有关。

例题 18.1

设非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$。求证：存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，使得

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 \leq \frac{1}{n}. \tag{18.1}$$

例题 18.2

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是实数，求证：存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i a_i\right| \geq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \tag{18.2}$$

例题 18.3

设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$，整数 $k \geq 2$。求证：存在不全为 0 的整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，使得其中每一个的绝对值都不超过 $k-1$，且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \tag{18.3}$$

例题 18.4

设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n \le 1$。求证：存在 $x \in [0,1]$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x-a_i|} \le 8n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\right). \tag{18.4}$$

例题 18.5

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是小于 1 的正实数，k 是正整数，求证：

$$\min\{a_1(1-a_2)^k, a_2(1-a_3)^k, \ldots, a_n(1-a_1)^k\} \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \tag{18.5}$$

例题 18.6

给定正实数 a, b，整数 $n \geq 2$。设函数 $f(x) = (x+a)(x+b)$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$。求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$ 的最大值。

例题 18.7

设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_9$ 满足 $\sum_{i=1}^{9} a_i = 1$。记

$$S = \min\{a_1, a_2\} + 2\min\{a_2, a_3\} + \cdots + 9\min\{a_9, a_1\}, \tag{18.6}$$

$$T = \max\{a_1, a_2\} + 2\max\{a_2, a_3\} + \cdots + 9\max\{a_9, a_1\}. \tag{18.7}$$

当 S 取最大值 S_0 时，求 T 的所有可能值。

例题 18.8

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，求证：

$$(\max_{1 \leq i \leq n} a_i)\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right) \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \tag{18.8}$$

例题 18.9

给定整数 $n \geq 2$。求最小的正实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{a_1, \ldots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \ldots, a_n\} \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{18.9}$$

18.1　作业题

作业 18.1

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：存在实数 x，使得

$$\{x - a_1\} + \{x - a_2\} + \cdots + \{x - a_n\} \leq \frac{n-1}{2}, \tag{18.10}$$

其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分。

作业 18.2

设整数 $n \geq 3$，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：存在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集 S，满足对任意 $1 \leq i \leq n-2$，有 $1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$ 且

$$\left|\sum_{i \in S} a_i\right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{18.11}$$

作业 18.3

给定整数 $n \geq 4$。求最大的实数 λ，使得对任意满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ 的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\lambda \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geq \min\{a_1, a_2\} + \min\{a_2, a_3\} + \cdots + \min\{a_n, a_1\}. \tag{18.12}$$

作业 18.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数。对 $1 \le i \le n$，定义

$$d_i = \max_{1 \le j \le i} a_j - \min_{i \le j \le n} a_j. \tag{18.13}$$

令 $d = \max_{1 \le i \le n} d_i$。

1. 求证：对任意实数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$，$\max_{1 \le i \le n} |x_i - a_i| \ge \frac{d}{2}$.
2. 求证：存在实数 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 使得 (1) 中等号成立。

第十九章　归纳法与不等式 (一)

凡是与正整数有关的命题都可以尝试用归纳法证明，在不等式中也是如此，本讲主要介绍第一数学归纳法的一些例子。

19.1　例题

例题 19.1

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 1. \tag{19.1}$$

例题 19.2

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$。求证：

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 - a_i a_{i+1} + 1) \geq 1, \tag{19.2}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 19.3

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$，且满足 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq 2n - H_n, \tag{19.3}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$，$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$。

例题 19.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1 a_n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2, \tag{19.4}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

例题 19.5

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} \right) \geq 4(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i^2}. \tag{19.5}$$

例题 19.6

设整数 $n \geq 3$，非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$。求证：

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \cdots + a_n^2 a_1 \leq \frac{4}{27}. \tag{19.6}$$

例题 19.7

设正实数 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 满足 $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i(1+a_i^{2^i})} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{19.7}$$

例题 19.8

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i a_j \leq t^{|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立，其中 $t \in (0,1)$。求证：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{1-\sqrt{t}}. \tag{19.8}$$

19.2　作业题

作业 19.1

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,1]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \left[\frac{n}{2}\right], \tag{19.9}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

作业 19.2

设整数 $n \geq 2$，$a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$。求证：

$$\frac{\sqrt{1-a_1}}{a_1} + \frac{\sqrt{1-a_2}}{a_2} + \cdots + \frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{19.10}$$

作业 19.3

设整数 $n \geq 4$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$。求证：

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n - 1. \tag{19.11}$$

作业 19.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_i a_j \leq 4^{-|i-j|}$ 对任意 $1 \leq i, j \leq n$ 成立。求证：

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{5}{3}. \tag{19.12}$$

第二十章　归纳法与不等式 (二)

本讲继续介绍用归纳法证明不等式，包括第二数学归纳法、加强数学归纳法、反向数学归纳法，以及几个经典的不等式。

20.1　例题

例题 20.1

设实数 a_i, b_i $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$ 满足：

1. 对 $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$，有 $a_i + a_{i+1} \geq 0$;
2. 对 $j = 0, 1, \ldots, n-1$，有 $a_{2j+1} \leq 0$;
3. 对 $0 \leq p \leq q \leq n$，有 $\sum_{k=2p}^{2q} b_k > 0$.

求证：$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i b_i \geq 0$.

例题 20.2

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是不全为零的非负实数，对 $1 \leq k \leq n$，记

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \cdots + a_k}{l}. \tag{20.1}$$

求证：对任意正实数 α，满足 $m_k > \alpha$ 的 k 少于 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$ 个。

例题 20.3

给定整数 $n \geq 2$。设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n$。求

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \cdots + a_1a_2\ldots a_n \tag{20.2}$$

的最小值。

例题 20.4

设 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是实数列，满足存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$ 都有 $a_n = 1$。已知对任意整数 $n \geq 2$ 都有 $a_n \leq a_{n-1} + \frac{1}{2^n} a_{2n}$。求证：对任意正整数 k，都有 $a_k > 1 - \frac{1}{2^k}$。

例题 20.5

对实数列 $\{a_n\}$，定义数列 $\{b_n\}$ 如下：

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \tag{20.3}$$

求最小的正实数 λ，使得对任意实数列 $\{a_n\}$ 以及任意正整数 n，都有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} b_i^2. \tag{20.4}$$

例题 20.6

求最大的正实数 λ，使得对任意正整数 n 以及任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2}. \tag{20.5}$$

例题 20.7 · 牛顿不等式 (Newton's Inequality)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，对 $1 \le k \le n$ 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}}{C_n^k}. \tag{20.6}$$

则 $S_{k-1} S_{k+1} \le S_k^2$，其中 $S_0 = 1$。当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

例题 20.8 · 麦克劳林不等式 (Maclaurin's Inequality)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，对 $1 \le k \le n$，记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}}{C_n^k}. \tag{20.7}$$

则

$$S_1 \ge \sqrt{S_2} \ge \sqrt[3]{S_3} \ge \cdots \ge \sqrt[n]{S_n}. \tag{20.8}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立。

20.2　作业题

作业 20.1

设 n 是正整数，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, A, B$ 是正实数，满足 $b_i \leq a_i \leq A$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 $\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{B}{A}$。求证：

$$\frac{(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_n+1)}{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)} \leq \frac{B+1}{A+1}. \tag{20.9}$$

作业 20.2

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 均为不减的正数数列，满足 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$。求证：

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \frac{\sum_{i\in S} x_i}{\sum_{i\in S} y_i} \leq 2^n - 1. \tag{20.10}$$

作业 20.3

设 $0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n > 0$，且对 $1 \le i \le n-1$，有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \le \frac{b_i}{b_{i+1}}$。求证：

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \le \left(\frac{A_n(b)}{G_n(b)}\right)^{n-1}, \tag{20.11}$$

其中 A_n, G_n 分别表示算术平均值和几何平均值。

作业 20.4 · Suranyi 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，则

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n\prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right). \tag{20.12}$$