

重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一部分 基本不等式	1
第一章 均值不等式 (一)	2
1.1 均值不等式的加强	2
1.2 均值不等式的基本用法	4
1.3 作业题	11
第二章 均值不等式 (二)	15
2.1 基础知识	15
2.2 典型例题	17
2.3 作业题	24
第三章 柯西不等式 (一)	28
3.1 分式型柯西不等式	31
3.2 作业题	37
第四章 柯西不等式 (二)	41
4.1 换元法	41
4.2 待定系数法	45
4.3 裂项法	47
4.4 作业题	49
第五章 柯西不等式 (三)	53
5.1 拉格朗日恒等式	53
5.2 Hölder 不等式	60
5.3 作业题	63
第六章 排序不等式与切比雪夫不等式	65
6.1 基础知识	65
6.2 典型例题	67
6.3 作业题	75

第七章 补充练习题	79
-----------	----

第一部分

基本不等式

第一章 均值不等式 (一)

均值不等式是三大基本不等式之一，本讲介绍其在证明 n 元不等式中的应用，需要体会均值不等式的适用情形、掌握“拆”的技巧、积累常见结构之间的关系。

1.1 均值不等式的加强

例题 1.1

设 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 是正实数，记 A_n, G_n 分别为 a_1, \dots, a_n 的算术平均值和几何平均值。求证：

1. $n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$;
2. $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \leq \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}$.

例题 1.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, b_1, b_2, \dots, b_n 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的一个排列。求证:

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\sqrt{b_{i+1}} - \sqrt{b_i})^2, \quad (1.1)$$

其中 $b_{n+1} = b_1$ 。

1.2 均值不等式的基本用法

例题 1.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 记 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \frac{S^k}{k!}. \quad (1.2)$$

例题 1.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} - a_{i+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}, \quad (1.3)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 1.5

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是非负实数, 对 $1 \leq k \leq n$, 记 $c_k = \prod_{i=1}^k b_i^{\frac{1}{k}}$. 求证:

$$nc_n + \sum_{k=1}^n k(a_k - 1)c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^k b_k. \quad (1.4)$$

例题 1.6

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right)^{n-1} \geq -n + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \prod_{k=1}^n a_k^{-\frac{1}{n}}, \quad (1.5)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 1.7

设整数 $n > 2$, 正实数 a_2, a_3, \dots, a_n 满足 $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > \frac{1}{4^{n-1}} n^n (n-1)^{n-1}. \quad (1.6)$$

例题 1.8

给定正整数 n 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求

$$\frac{(1+a_1)(1+a_1+a_2)\dots(1+a_1+a_2+\dots+a_n)}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (1.7)$$

的最小值。

例题 1.9

设 n 为正整数, x_1, x_2, \dots, x_n 为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}}\right)^2 \quad (1.8)$$

1.3 作业题

作业 1.1

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

作业 1.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ ($1 \leq i \leq n-1$)。求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \dots (a_n - a_1^2) \quad (1.10)$$

的最大值，其中 a_{n+1} 应理解为 a_1 或题目隐含循环条件（此处按题目原文保留 $a_n - a_1^2$ ）。

作业 1.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1]$ ，都有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} + \lambda \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (1.11)$$

作业 1.4

设 n 是正整数, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$ 。求证:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n+1)a_n^n < 3. \quad (1.12)$$

第二章 均值不等式 (二)

2.1 基础知识

定理 2.1 · 对称交叉项

设整数 $n \geq 2$, a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (2.1)$$

定理 2.2 · 轮换交叉项

(四分之一引理) 设整数 $n \geq 4$, a_1, a_2, \dots, a_n 是非负实数, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.2)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

2.2 典型例题

例题 2.1

给定整数 $n \geq 2$ 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.3)$$

的最小值。

例题 2.2

给定整数 $n \geq 2$ 。设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.4)$$

的最小值。

例题 2.3

给定整数 $n \geq 3$ 。设 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数, 满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2n} > 0 \quad (2.5)$$

且对任意 $i = 1, 2, \dots, 2n$, 有 $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$ (这里 $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$)。求 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ 的最小值。

例题 2.4

给定整数 $n \geq 3$ 。设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$ 且满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ，求

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \tag{2.6}$$

的最大值。

例题 2.5

给定整数 $n \geq 4$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，均有

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + \lambda m M \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.7)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ ， $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

例题 2.6

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_{100} 满足 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1, 1 \leq i \leq 100$, 其中脚标按模 100 理解。求 $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+1}$ 的最大值。

例题 2.7

给定整数 $n \geq 3$, $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ 。设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $\sum a_i = \sum b_i = 1$ 。对 $1 \leq i \leq n$, 记 $c_i = (\lambda a_i + b_{i+1})(\lambda a_{i+1} + b_i)$, 其中 $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$ 。求 $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ 的最大值。

2.3 作业题

作业 2.1

设 a_1, a_2, \dots, a_{100} 是非负实数, 满足:

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 2$;
2. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{100} a_1 = 1$.

求 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ 的最大值和最小值。

作业 2.2

给定整数 $n \geq 4$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$, 求

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (2.8)$$

的最小值。

作业 2.3

给定整数 $n \geq 4$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ，求

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_n a_1 a_2 \tag{2.9}$$

的最大值。

作业 2.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设集合 $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, i \mid j\}$ 。对任意满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 求

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j \quad (2.10)$$

的最大值。

第三章 柯西不等式 (一)

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 是现代数学各个分支中应用最为广泛的不等式之一。本讲将系统介绍柯西不等式的多种形式、证明技巧（如换元、待定系数、裂项）以及相关的推广（如拉格朗日恒等式、Hölder 不等式）。

本节介绍柯西不等式的几种形式，以及在证明分式不等式中的应用。

定理 3.1 · 柯西不等式

定理 3.2 · 积分形式

设 f, g 是区间 $[a, b]$ 上的可积函数，求证：

$$\left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2. \quad (3.1)$$

定理 3.3 · Wagner 不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, $x \in [0, 1]$ 。求证:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2. \quad (3.2)$$

定理 3.4 · Aczel 不等式

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 满足 $a_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2$ 。求证:

$$\left(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\right) \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\right) \leq \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i\right)^2. \quad (3.3)$$

3.1 分式型柯西不等式

例题 3.1

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 - a_{i+1} + n} \geq 1, \quad (3.4)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 3.2

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是给定的正实数, 求证: 存在和为 1 的正实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得对任意和为 1 的正实数 y_1, y_2, \dots, y_n , 都有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (3.5)$$

例题 3.3

设整数 $m < n$, a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数。对集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集 A , 记 $S_A = \sum_{i \in A} a_i$ 。求证:

$$\sum_{|A|=m} \frac{S_A}{S_{A^c}} \geq \frac{m}{n-m} C_n^m. \quad (3.6)$$

例题 3.4

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = \frac{n}{2}$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{a_i + a_j} \geq \frac{n^2}{2}. \quad (3.7)$$

例题 3.5

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ 。对 $1 \leq i \leq n$, 记 $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq 1. \quad (3.8)$$

例题 3.6 · 2006 CTST

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+a_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (3.9)$$

3.2 作业题

作业 3.1

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \max\{a_i^2, b_i^2\} \right) \left(\sum_{i=1}^n \min\{a_i^2, b_i^2\} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (3.10)$$

作业 3.2

给定整数 $n \geq 3$ 。求最小的实数 λ ，使得对任意正实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，都有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{\lambda a_n}{S - a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}, \quad (3.11)$$

其中 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

作业 3.3

设整数 $n \geq 2$, 正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} \geq \frac{n}{2}. \quad (3.12)$$

作业 3.4

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + 1} \right) \leq \frac{n^3}{2}. \quad (3.13)$$

第四章 柯西不等式 (二)

本节介绍柯西不等式与换元、待定系数、裂项等方法综合运用的问题。

4.1 换元法

例题 4.1

给定正整数 n 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_{2n} 满足 $\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$, 求

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (4.1)$$

的最大值。

例题 4.2

设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, 求证:

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k^2 \leq \frac{n}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2. \quad (4.2)$$

例题 4.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j a_i \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \left(\sum_{i=1}^j a_i \right)^2. \quad (4.3)$$

例题 4.4

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{\frac{i}{j}} a_i a_j = 1$, 求 $\sum_{i=1}^n a_i$ 的最大值和最小值。

4.2 待定系数法

例题 4.5 · Ostrowski 不等式

设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$ 。
求证：

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}. \quad (4.4)$$

例题 4.6

给定正整数 n 。设实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n ia_i = 1$ 。求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (4.5)$$

的最小值。

4.3 裂项法

例题 4.7

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1^2+\cdots+a_n^2} < \sqrt{n}. \quad (4.6)$$

例题 4.8

设整数 $n \geq 2$, 正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ 。求证: 对任意实数 x , 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}. \quad (4.7)$$

4.4 作业题

作业 4.1

设实数 $1 = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$, 求证:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{i}(a_i - a_{i+1}). \quad (4.8)$$

作业 4.2

设整数 $n \geq 2$, $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ 是实数, 求证:

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} (a_i + \cdots + a_j)^2. \quad (4.9)$$

作业 4.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最小的实数 λ , 使得对任意满足 $\sum_{i=1}^n ia_i = 0$ 的实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 都有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (4.10)$$

作业 4.4

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_n} < \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (4.11)$$

第五章 柯西不等式 (三)

本节介绍柯西不等式的两种推广和加强：拉格朗日恒等式与 Hölder 不等式，需要注意“平移不变”技巧的运用。

5.1 拉格朗日恒等式

定理 5.1 · 拉格朗日恒等式

对于任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n ，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (5.1)$$

例题 5.1

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的实数 λ ，使得对任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2. \quad (5.2)$$

例题 5.2

设 a_0, a_1, \dots, a_{2n} 是实数, 求证:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i^2 \geq \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{i=0}^{2n} a_i \right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \left(\sum_{i=0}^{2n} (i-n)a_i \right)^2. \quad (5.3)$$

例题 5.3

设整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 t 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 3t$, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 3t^2$, $\sum_{i=1}^n a_i^3 > 3t^3 + t$. 求证: 存在 $1 \leq i < j \leq n$ 使得 $|a_i - a_j| > 1$.

例题 5.4

设整数 $n \geq 3$ 。正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) = n^2 + 1$ 。求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right) \geq n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}. \quad (5.4)$$

例题 5.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{2n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{2n}} \right) - n^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i} \right)^2 \geq n^2. \quad (5.5)$$

例题 5.6

设 $a_1, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{2n}$ 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\right)^2 \geq \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\right]^2. \quad (5.6)$$

5.2 Hölder 不等式

定理 5.2 · Hölder 不等式

设 $m, n \geq 2$ 为整数。给定 m 组非负实数：

$$(a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \quad (a_{1,2}, \dots, a_{n,2}), \quad \dots, \quad (a_{1,m}, \dots, a_{n,m}).$$

则有：

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7)$$

即：

$$\sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}^m \right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,2}^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{i,m}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.8)$$

当且仅当这 m 组向量两两共线（即成比例）时，等号成立。

例题 5.7

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^3 + 1) \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 a_{i+1} + 1), \quad (5.9)$$

其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

例题 5.8

设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证：

$$(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) \left(\frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} \right) \geq \frac{n}{n+1}. \quad (5.10)$$

5.3 作业题

作业 5.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 求证:

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \right)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (5.11)$$

作业 5.2

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_i > b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且 $\prod_{i=1}^n a_i b_i = 1$ 。
求证：

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a_i - b_i)}. \quad (5.12)$$

第六章 排序不等式与切比雪夫不等式

排序不等式是除均值不等式和柯西不等式之外的第三种基本不等式，有别于前两种通过平方和得到大小关系，排序不等式是通过序来得到的。切比雪夫 (Chebyshev) 不等式可以认为是排序不等式的特殊情况，但因其结构整齐，特别在近年出现的频率很高。

本讲介绍排序不等式和切比雪夫不等式的证明及应用。需要注意的是，有的题目虽然条件中没有给出序，但如果变量地位相同，我们可以不妨设一个序。

6.1 基础知识

定理 6.1 · 排序不等式

设实数组 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 和 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 。若 c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的任一排列，则有：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (6.1)$$

即：反序和 \leq 乱序和 \leq 同序和。当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$ 时等号成立（严格递增时，仅当排列对应相同时取等）。

定理 6.2 · 切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)

1. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ (同序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.2)$$

2. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ (反序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.3)$$

6.2 典型例题

例题 6.1

设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ 满足 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ 。
 z_1, z_2, \dots, z_n 是 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个排列，求证：

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2. \quad (6.4)$$

例题 6.2

设 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i \geq \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \frac{\sin \theta_{i+1}}{\sin \theta_i}, \quad (6.5)$$

其中 $\theta_{n+1} = \theta_1$ 。

例题 6.3

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是两两不同的正整数，求证：

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (6.6)$$

例题 6.4

设正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}}. \quad (6.7)$$

例题 6.5

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 求证:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{n}. \quad (6.8)$$

例题 6.6

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \leq \frac{n}{2}. \quad (6.9)$$

例题 6.7

给定整数 $n \geq 3$ 。设非负实数 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ，且满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求 $a_n \sum_{i=1}^n (n+1-i)a_i$ 的最大值。

例题 6.8

给定整数 $n \geq 2$ 。设非负实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n b_i b_{n+1-i} = 1. \quad (6.10)$$

求 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j$ 的最小值。

6.3 作业题

作业 6.1

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 求证:

$$\sum_{k=2}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k}. \quad (6.11)$$

作业 6.2

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是非负实数。对 $1 \leq k \leq n$, 定义

$$C_k = \max\{a_1 b_k, a_2 b_k, \dots, a_k b_k, a_k b_{k-1}, \dots, a_k b_1\}.$$

设 σ 是 $1 \sim n$ 的一个置换, 求证:

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \leq C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (6.12)$$

作业 6.3

给定整数 $n \geq 2$ 。求最大的正实数 λ ，使得对任意满足 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} x_i y_i. \quad (6.13)$$

作业 6.4

设整数 $n \geq 2$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \geq (n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}. \quad (6.14)$$

第七章 补充练习题

练习 7.1

已知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, 证明:

$$(2 + a_1)(2 + a_2) \dots (2 + a_n) \geq 3^n \quad (7.1)$$

练习 7.2

已知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$, 证明:

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \quad (7.2)$$

练习 7.3 · 2017 北大挑战赛

给定整数 n 和正实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 且满足 $\prod_{i=1}^k a_i \geq k!$ ($1 \leq k \leq n$), 证明:

$$\frac{2!}{1+a_1} + \frac{3!}{(1+a_1)(2+a_2)} + \cdots + \frac{(n+1)!}{(1+a_1)(2+a_2)\cdots(n+a_n)} < 3 \quad (7.3)$$

练习 7.4 · 2014 北约自主招生

已知正数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 证明:

$$(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n \quad (7.4)$$

练习 7.5 · 2018 北大综合营

设非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, 求证: 对任意 $r > 0$ 有

$$(1 + rx_1)(1 + rx_2) \cdots (1 + rx_n) \geq (n + r)^n x_1 x_2 \cdots x_n \quad (7.5)$$

练习 7.6 · 2007 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 4$, 非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$, 记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2 + 1} + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (7.6)$$

求 P 的最小值, 并给出相应的取等条件。

练习 7.7

设整数 $n \geq 3$, 且正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$\frac{1}{1 + a_1^4} + \frac{1}{1 + a_2^4} + \dots + \frac{1}{1 + a_n^4} = 1$$

求证:

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq (n - 1)^{n/4} \quad (7.7)$$

练习 7.8 · 1998 IMO 预选

设 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) 均为正实数, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$, 证明:

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \quad (7.8)$$

练习 7.9

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$, 证明:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (7.9)$$

练习 7.10 · 2007 保加利亚

设整数 $n \geq 2$, 求常数 $C(n)$ 的最大值, 使得对所有满足 $x_i \in (0, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且 $(1 - x_i)(1 - x_j) \geq \frac{1}{4}$ ($1 \leq i < j \leq n$) 的实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 均有

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}) \quad (7.10)$$

练习 7.11

设 $a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (7.11)$$

练习 7.12 · 2010 浙大自招

设整数 $n \geq 2$, 且正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4 \quad (7.12)$$

练习 7.13 · 2002 女奥 (CGMO)

设整数 $n \geq 2$, 且 P_1, P_2, \dots, P_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的任意排列, 证明:

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \dots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} > \frac{n-1}{n+2} \quad (7.13)$$

练习 7.14 · 2011 甘肃预赛

已知正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, 证明:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n} \quad (7.14)$$

练习 7.15

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数, 证明:

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (7.15)$$

练习 7.16

设 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$, 证明:

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \dots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3} \quad (7.16)$$

练习 7.17

设整数 $n \geq 3$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, 证明:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2 \quad (7.17)$$

练习 7.18

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 满足 $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)}\right)^2 \leq (n-1)x_{n+1}^2 \quad (7.18)$$

练习 7.19

已知 a_1, a_2, \dots, a_n 为正实数, 证明:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \quad (7.19)$$

练习 7.20

给定整数 $n \geq 2$, 非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \quad (7.20)$$

其中 $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ 。证明: $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ 。

练习 7.21 · 2017 HMMT

设 $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ 均为实数, 求出最大的实数 c , 使得下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c x_{2017}^2 \quad (7.21)$$

练习 7.22 · 2019 欧洲杯

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 证明:

$$\sum_{k=1}^{2019} \frac{x_k^2}{2x_k x_{k+1} - 1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}} \quad (7.22)$$

练习 7.23

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-1) \sum_{j \neq i} x_j^2 + x_i}{1 + \sum_{j \neq i} x_j} \geq \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} \quad (7.23)$$

练习 7.24 · 1996 波兰

设整数 $n \geq 2$, 正数 $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, 证明:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}, \quad (7.24)$$

并指出等号成立的充要条件。

练习 7.25

设 $a_i > 0, b_i > 0, a_i b_i = c_i^2 + d_i^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 \quad (7.25)$$

练习 7.26 · 2002 罗马尼亚

设整数 $n \geq 4$, 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, 求证:

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \left(a_1 \sqrt{a_1} + a_2 \sqrt{a_2} + \dots + a_n \sqrt{a_n} \right)^2 \quad (7.26)$$

练习 7.27 · 1998 罗马尼亚

已知正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, 证明:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 \quad (7.27)$$

练习 7.28 · 2014 东南

设整数 $n \geq 2$, 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + \dots + x_n = 1$, 且 $x_{n+1} = x_1$, 求证:

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1} \quad (7.28)$$

练习 7.29 · 2010 伊朗改

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2 \quad (7.29)$$

练习 7.30

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是正实数, 且 $x_{n+1} = x_1$, 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \quad (7.30)$$