重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一章 Abel 变换 **1**

1.1 基础知识 1

1.2 预习题 3

1.3 例题 4

1.4 练习题 11

第一章　Abel 变换

1.1　基础知识

定理 1.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令 $S_0 = 0$，$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ (1 \le k \le n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \tag{1.1}$$

定理 1.2 · 钟开莱不等式

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ 且对任意 $1 \leq k \leq n$ 有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2. \tag{1.3}$$

1.2　预习题

预习 1.1

给定正整数 n，对任意 $1 \le k \le n$ 正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \le k$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{1.4}$$

预习 1.2 · 1978 IMO

已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是两两不同的正整数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{1.5}$$

预习 1.3

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是实数，求证：存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得对任意 $1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right|. \tag{1.6}$$

预习 1.4

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$，且对 $1 \le k \le n$，有 $\prod_{i=1}^{k} a_i \ge \prod_{i=1}^{k} b_i$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{1.7}$$

预习 1.5

给定整数 $n \ge 2$ 以及不全为零的实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. 求 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足的充要条件，使得存在正整数 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$，满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \ge 0. \tag{1.8}$$

1.3 例题

例题 1.1 · 1994 USAMO

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正实数，满足对 $1 \le k \le n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sqrt{k}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}. \tag{1.9}$$

例题 1.2 · 1999 APMO

设 $\{a_n\}$ 是正项数列，满足对任意 $i, j \geq 1$，有 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. 求证：对任意正整数 n，有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} \geq a_n. \tag{1.10}$$

例题 1.3 · 加强形式的 Chebyshev 不等式

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数，满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \tag{1.11}$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}. \tag{1.12}$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right). \tag{1.13}$$

例题 1.4

已知实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \tag{1.14}$$

例题 1.5

给定整数 $n \geq 2$，设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是正整数，满足对集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任一非空子集 I，$\sum_{i \in I} a_i$ 互不相同。求：

1. $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$ 的最小值；
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 的最小值；
3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ 的最大值。

例题 1.6 · 2018 清华飞测

对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i \le n^2$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \tag{1.15}$$

例题 1.7

给定整数 $n, k \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ 满足:

1. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$;
2. 对 $1 \leq i \leq n$，有 $\sum_{j=1}^{i} c_j \leq i^k$.

求 $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \cdots + c_n a_n^k$ 的最大值。

1.4　练习题

练习 1.1

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \tag{1.16}$$

练习 1.2

设正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且对 $1 \leq k \leq n$，有 $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}. \tag{1.17}$$

练习 1.3

给定实数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$，记 $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$，证明:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \tag{1.18}$$

练习 1.4

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是实数。求证：对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 都有 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ 的充要条件是：对 $1 \leq k \leq n-1$，有

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{1.19}$$