

# 重庆外国语学校-数学竞赛

## 代数不等式

---

Joey

2026.1.1

# 目录

<b>第一部分 常见问题与方法</b>	<b>1</b>
<b>第一章 绝对值不等式 (一)</b>	<b>2</b>
1.1 例题 . . . . .	2
1.2 练习题 . . . . .	10
<b>第二章 绝对值不等式 (二)</b>	<b>14</b>
2.1 例题 . . . . .	14
2.2 作业题 . . . . .	20
2.3 其他练习题 . . . . .	23
<b>第三章 平均值原理与不等式</b>	<b>25</b>
3.1 作业题 . . . . .	34
<b>第四章 归纳法与不等式 (一)</b>	<b>38</b>
4.1 例题 . . . . .	38
4.2 作业题 . . . . .	46
<b>第五章 归纳法与不等式 (二)</b>	<b>50</b>
5.1 例题 . . . . .	50
5.2 作业题 . . . . .	58

# 第一部分

## 常见问题与方法

# 第一章 绝对值不等式（一）

本讲介绍含绝对值的不等式，最常用的方法是三角不等式和正负分离。

## 1.1 例题

### 例题 1.1

设整数  $n \geq 2$ ， $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数，求证：存在  $1 \leq k \leq n$ ，使得

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|. \quad (1.1)$$

**例题 1.2**

设整数  $n \geq 2$ ，实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = 1$ 。对  $1 \leq k \leq n$ ，记  $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ ，求证：

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i - A_{i+1}| \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (1.2)$$

**例题 1.3**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是实数, 满足  $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。求证: 对任意实数  $t$ ,

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ta_{i+1} - a_{i+2}|. \quad (1.3)$$

**例题 1.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  且  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 。求：

1.  $\sum_{i=1}^n |a_i|$  的最小值和最大值；
2.  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$  的最小值和最大值。

**例题 1.5**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ,  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求：

1.  $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$  的最大值；
2.  $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$  的最大值。

**例题 1.6**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$ ,  $-1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq 1$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ 。求  $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$  的最大值。

**例题 1.7**

设整数  $n \geq 3$ ，非零实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = 0$ 。求证：

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| - \min_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right). \quad (1.4)$$

**例题 1.8**

设实数  $a < b$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [a, b]$ 。设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 - y_i^2) \right| \leq (b - a) \sqrt{1 - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}. \quad (1.5)$$

## 1.2 练习题

### 作业 1.1

设整数  $n \geq 2$ ，非零实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ 。求证：存在  $1 \leq i < j \leq n$ ，使得

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{a_i}{a_j} \right| \leq 2. \quad (1.6)$$

**作业 1.2**

设整数  $n \geq 3$ ，正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。对  $1 \leq k \leq n$ ，记  $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ 。求证：

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| < \frac{n-1}{2}. \quad (1.7)$$

**作业 1.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意和为 0 的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 \geq \lambda \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (1.8)$$

**作业 1.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_i}. \quad (1.9)$$

## 第二章 绝对值不等式 (二)

本讲继续介绍含绝对值的不等式，包括设序和离散介值原理等方法，以及几个综合性的问题。

### 2.1 例题

#### 例题 2.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{2.1}$$

的最大值。

**例题 2.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-1, 1]$ , 求

$$\left| a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \left| a_2 - \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \dots + \left| a_n - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n} \right| \quad (2.2)$$

的最大值。

**例题 2.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足：

1.  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ;
2.  $|a_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

求  $\min_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - a_{i+1}|$  的最大值。

**例题 2.4**

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ ,  $|a_i| \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。求证:  
存在正整数  $k < n$ , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \leq 1. \quad (2.3)$$

**例题 2.5**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{40}$  满足  $\sum_{i=1}^{40} a_i = 0$  且对  $1 \leq i \leq 40$ , 都有  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ , 这里  $a_{41} = a_1$ 。记  $a = a_{10}$ ,  $b = a_{20}$ ,  $c = a_{30}$ ,  $d = a_{40}$ 。

1. 求  $a + b + c + d$  的最大值;
2. 求  $ab + cd$  的最大值。

**例题 2.6**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$  满足  $a_1 = a_{1001}$ ,  $|a_i + a_{i+2} - 2a_{i+1}| \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, 999$ )。求

$$\max_{1 \leq i < j \leq 1001} |a_i - a_j| \quad (2.4)$$

的最大值。

## 2.2 作业题

### 作业 2.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足：

1.  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ;
2.  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = 1$ .

求  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i - a_{i+1}|$  的最小值，其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**作业 2.2**

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ , 且  $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$  ( $1 \leq i \leq n$ )。求证:  
存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 使得

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}. \quad (2.5)$$

**作业 2.3**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$  满足  $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$  ( $1 \leq i \leq 2018$ ), 其中  $a_{2019} = a_1$ 。求

$$\sum_{i=1}^{2018} |a_i| - \left| \sum_{i=1}^{2018} a_i \right| \quad (2.6)$$

的最大值。

## 2.3 其他练习题

### 练习 2.1

已知  $n$  个实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的算术平均值为  $a$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |x_k - a| \right)^2.$$

### 练习 2.2

设  $a_0 = 0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n |a_k(a_k - a_{k-1})| \leq \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})^2.$$

### 练习 2.3

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  均大于 1, 且  $|a_{k+1} - a_k| < 1$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

### 练习 2.4

(18 浙江预赛) 将  $2n$  ( $n \geq 2$ ) 个不同的整数分成两组  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , 证明:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_i - b_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \geq n.$$

### 练习 2.5

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  均不超过 1, 证明:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \leq n^2.$$

**练习 2.6**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , 求  $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$  的最大值。

**练习 2.7**

对每一个整数  $n \geq 2$ , 求最大的常数  $c_n$ , 使得不等式

$$c_n \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

对任意满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  成立。

## 第三章 平均值原理与不等式

平均值原理是一种整体思想，本讲介绍两类能用平均值原理处理的问题，一类是存在性问题，一类与最大最小有关。

### 例题 3.1

设非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求证：存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，使得

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

**例题 3.2**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是实数, 求证: 存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n i a_i \right| \geq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \quad (3.2)$$

**例题 3.3**

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ , 整数  $k \geq 2$ . 求证: 存在不全为 0 的整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得其中每一个的绝对值都不超过  $k-1$ , 且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \quad (3.3)$$

**例题 3.4**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ 。求证：存在  $x \in [0, 1]$  使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x - a_i|} \leq 8n \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \right). \quad (3.4)$$

**例题 3.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是小于 1 的正实数,  $k$  是正整数, 求证:

$$\min\{a_1(1-a_2)^k, a_2(1-a_3)^k, \dots, a_n(1-a_1)^k\} \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \quad (3.5)$$

**例题 3.6**

给定正实数  $a, b$ , 整数  $n \geq 2$ 。设函数  $f(x) = (x+a)(x+b)$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$  的最大值。

**例题 3.7**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_9$  满足  $\sum_{i=1}^9 a_i = 1$ 。记

$$S = \min\{a_1, a_2\} + 2 \min\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \min\{a_9, a_1\}, \quad (3.6)$$

$$T = \max\{a_1, a_2\} + 2 \max\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \max\{a_9, a_1\}. \quad (3.7)$$

当  $S$  取最大值  $S_0$  时，求  $T$  的所有可能值。

**例题 3.8**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n i a_i\right) \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (3.8)$$

**例题 3.9**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的正实数  $\lambda$ ，使得对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (3.9)$$

## 3.1 作业题

### 作业 3.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求证：存在实数  $x$ ，使得

$$\{x - a_1\} + \{x - a_2\} + \cdots + \{x - a_n\} \leq \frac{n-1}{2}, \quad (3.10)$$

其中  $\{x\}$  表示实数  $x$  的小数部分。

**作业 3.2**

设整数  $n \geq 3$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证: 存在  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $S$ , 满足对任意  $1 \leq i \leq n-2$ , 有  $1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$  且

$$\left| \sum_{i \in S} a_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (3.11)$$

**作业 3.3**

给定整数  $n \geq 4$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意满足  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\lambda \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq \min\{a_1, a_2\} + \min\{a_2, a_3\} + \cdots + \min\{a_n, a_1\}. \quad (3.12)$$

### 作业 3.4

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数。对  $1 \leq i \leq n$ , 定义

$$d_i = \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \min_{i \leq j \leq n} a_j. \quad (3.13)$$

令  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ 。

1. 求证：对任意实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ,  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| \geq \frac{d}{2}$ 。
2. 求证：存在实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  使得 (1) 中等号成立。

## 第四章 归纳法与不等式 (一)

凡是与正整数有关的命题都可以尝试用归纳法证明，在不等式中也是如此，本讲主要介绍第一数学归纳法的一些例子。

### 4.1 例题

#### 例题 4.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 1. \quad (4.1)$$

**例题 4.2**

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - a_i a_{i+1} + 1) \geq 1, \quad (4.2)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 4.3**

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ , 且满足  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq 2n - H_n, \quad (4.3)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ,  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 。

**例题 4.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2, \quad (4.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 4.5**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \left( \frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} \right) \geq 4(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i^2}. \quad (4.5)$$

**例题 4.6**

设整数  $n \geq 3$ , 非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 \leq \frac{4}{27}. \quad (4.6)$$

**例题 4.7**

设正实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  满足  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i(1+a_i^{2^i})} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (4.7)$$

**例题 4.8**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i a_j \leq t^{|i-j|}$  对任意  $1 \leq i, j \leq n$  成立, 其中  $t \in (0, 1)$ 。求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{1 - \sqrt{t}}. \quad (4.8)$$

## 4.2 作业题

### 作业 4.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad (4.9)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**作业 4.2**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ 。求证:

$$\frac{\sqrt{1-a_1}}{a_1} + \frac{\sqrt{1-a_2}}{a_2} + \dots + \frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (4.10)$$

**作业 4.3**

设整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n - 1. \quad (4.11)$$

**作业 4.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i a_j \leq 4^{-|i-j|}$  对任意  $1 \leq i, j \leq n$  成立。  
求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{5}{3}. \quad (4.12)$$

## 第五章 归纳法与不等式 (二)

本讲继续介绍用归纳法证明不等式，包括第二数学归纳法、加强数学归纳法、反向数学归纳法，以及几个经典的不等式。

### 5.1 例题

#### 例题 5.1

设实数  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ) 满足：

1. 对  $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ，有  $a_i + a_{i+1} \geq 0$ ;
2. 对  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ，有  $a_{2j+1} \leq 0$ ;
3. 对  $0 \leq p \leq q \leq n$ ，有  $\sum_{k=2p}^{2q} b_k > 0$ .

求证： $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i b_i \geq 0$ .

**例题 5.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为零的非负实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \dots + a_k}{l}. \quad (5.1)$$

求证: 对任意正实数  $\alpha$ , 满足  $m_k > \alpha$  的  $k$  少于  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\alpha}$  个。

**例题 5.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$ 。求

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \dots + a_1a_2 \dots a_n \quad (5.2)$$

的最小值。

**例题 5.4**

设  $a_1, a_2, a_3, \dots$  是实数列, 满足存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n \geq N$  都有  $a_n = 1$ 。已知对任意整数  $n \geq 2$  都有  $a_n \leq a_{n-1} + \frac{1}{2^n} a_{2n}$ 。求证: 对任意正整数  $k$ , 都有  $a_k > 1 - \frac{1}{2^k}$ 。

**例题 5.5**

对实数列  $\{a_n\}$ , 定义数列  $\{b_n\}$  如下:

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (5.3)$$

求最小的正实数  $\lambda$ , 使得对任意实数列  $\{a_n\}$  以及任意正整数  $n$ , 都有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_i^2. \quad (5.4)$$

**例题 5.6**

求最大的正实数  $\lambda$ , 使得对任意正整数  $n$  以及任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 都有

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^k a_i)^2}. \quad (5.5)$$

**例题 5.7 · 牛顿不等式 (Newton's Inequality)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 对  $1 \leq k \leq n$  记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (5.6)$$

则  $S_{k-1}S_{k+1} \leq S_k^2$ , 其中  $S_0 = 1$ 。当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。

**例题 5.8 · 麦克劳林不等式 (Maclaurin's Inequality)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (5.7)$$

则

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}. \quad (5.8)$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。

## 5.2 作业题

### 作业 5.1

设  $n$  是正整数,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, A, B$  是正实数, 满足  $b_i \leq a_i \leq A, i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{B}{A}$ 。求证:

$$\frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)}{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)} \leq \frac{B + 1}{A + 1}. \quad (5.9)$$

**作业 5.2**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $y_1, y_2, \dots, y_n$  均为不减的正数数列, 满足  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ 。求证:

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} y_i} \leq 2^n - 1. \quad (5.10)$$

**作业 5.3**

设  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$ , 且对  $1 \leq i \leq n-1$ , 有  $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{b_i}{b_{i+1}}$ 。求证:

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \leq \left( \frac{A_n(b)}{G_n(b)} \right)^{n-1}, \quad (5.11)$$

其中  $A_n, G_n$  分别表示算术平均值和几何平均值。

**作业 5.4 · Suranyi 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 则

$$(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^n + n \prod_{i=1}^n a_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i^{n-1} \right). \quad (5.12)$$