

# 重庆外国语学校-数学竞赛

## 代数不等式

---

Joey

2026.1.1

# 目录

<b>第一部分 基本不等式</b>	<b>1</b>
<b>第一章 均值不等式 (一)</b>	<b>2</b>
1.1 均值不等式的加强 . . . . .	2
1.2 均值不等式的基本用法 . . . . .	4
1.3 作业题 . . . . .	11
<b>第二章 均值不等式 (二)</b>	<b>15</b>
2.1 基础知识 . . . . .	15
2.2 典型例题 . . . . .	17
2.3 作业题 . . . . .	24
<b>第三章 柯西不等式 (一)</b>	<b>28</b>
3.1 分式型柯西不等式 . . . . .	31
3.2 作业题 . . . . .	37
<b>第四章 柯西不等式 (二)</b>	<b>41</b>
4.1 换元法 . . . . .	41
4.2 待定系数法 . . . . .	45
4.3 裂项法 . . . . .	47
4.4 作业题 . . . . .	49
<b>第五章 柯西不等式 (三)</b>	<b>53</b>
5.1 拉格朗日恒等式 . . . . .	53
5.2 Hölder 不等式 . . . . .	60
5.3 作业题 . . . . .	63
<b>第六章 排序不等式与切比雪夫不等式</b>	<b>65</b>
6.1 基础知识 . . . . .	65
6.2 典型例题 . . . . .	67
6.3 作业题 . . . . .	75

第七章 补充练习题

79

# 第一部分

## 基本不等式

# 第一章 均值不等式（一）

均值不等式是三大基本不等式之一，本讲介绍其在证明  $n$  元不等式中的应用，需要体会均值不等式的适用情形、掌握“拆”的技巧、积累常见结构之间的关系。

## 1.1 均值不等式的加强

### 例题 1.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  是正实数，记  $A_n, G_n$  分别为  $a_1, \dots, a_n$  的算术平均值和几何平均值。求证：

1.  $n(A_n - G_n) \leq (n + 1)(A_{n+1} - G_{n+1})$ ;
2.  $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \leq \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}$ .

**例题 1.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个排列。求证:

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\sqrt{b_{i+1}} - \sqrt{b_i})^2, \quad (1.1)$$

其中  $b_{n+1} = b_1$ 。

## 1.2 均值不等式的基本用法

### 例题 1.3

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 记  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \frac{S^k}{k!}. \quad (1.2)$$

**例题 1.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} - a_{i+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}, \quad (1.3)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 1.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是非负实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记  $c_k = \prod_{i=1}^k b_i^{\frac{1}{k}}$ 。求证:

$$nc_n + \sum_{k=1}^n k(a_k - 1)c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^k b_k. \quad (1.4)$$

**例题 1.6**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数，求证：

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} \right)^{n-1} \geq -n + 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \prod_{k=1}^n a_k^{-\frac{1}{n}}, \quad (1.5)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 1.7**

设整数  $n > 2$ , 正实数  $a_2, a_3, \dots, a_n$  满足  $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > \frac{1}{4^{n-1}} n^n (n - 1)^{n-1}. \quad (1.6)$$

**例题 1.8**

给定正整数  $n$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数，求

$$\frac{(1+a_1)(1+a_1+a_2)\dots(1+a_1+a_2+\dots+a_n)}{\sqrt{a_1a_2\dots a_n}} \quad (1.7)$$

的最小值。

**例题 1.9**

设  $n$  为正整数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}}\right)^2 \quad (1.8)$$

### 1.3 作业题

#### 作业 1.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

**作业 1.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $9a_i > 11a_{i+1}^2$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )。求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \dots (a_n - a_1^2) \quad (1.10)$$

的最大值，其中  $a_{n+1}$  应理解为  $a_1$  或题目隐含循环条件（此处按题目原文保留  $a_n - a_1^2$ ）。

### 作业 1.3

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ , 使得对任意实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1]$ , 都有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} + \lambda \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (1.11)$$

**作业 1.4**

设  $n$  是正整数, 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + 2a_2^3 + \cdots + na_n^{n+1} \leq 1$ 。求证:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \cdots + (n+1)a_n^n < 3. \quad (1.12)$$

## 第二章 均值不等式 (二)

### 2.1 基础知识

#### 定理 2.1 · 对称交叉项

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (2.1)$$

### 定理 2.2 · 轮换交叉项

(四分之一引理) 设整数  $n \geq 4$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是非负实数, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.2)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

## 2.2 典型例题

### 例题 2.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.3)$$

的最小值。

**例题 2.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.4)$$

的最小值。

**例题 2.3**

给定整数  $n \geq 3$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$  是  $4n$  个非负实数，满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} > 0 \quad (2.5)$$

且对任意  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 有  $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$  (这里  $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$ )。求  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$  的最小值。

**例题 2.4**

给定整数  $n \geq 3$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$  且满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 求

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n \quad (2.6)$$

的最大值。

**例题 2.5**

给定整数  $n \geq 4$ 。求最大的实数  $\lambda$ , 使得对任意非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 均有

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + \lambda m M \leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.7)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ,  $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

**例题 2.6**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  满足  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1, 1 \leq i \leq 100$ , 其中脚标按模 100 理解。求  $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+1}$  的最大值。

**例题 2.7**

给定整数  $n \geq 3$ ,  $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum a_i = \sum b_i = 1$ 。对  $1 \leq i \leq n$ , 记  $c_i = (\lambda a_i + b_{i+1})(\lambda a_{i+1} + b_i)$ , 其中  $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$ 。求  $c_1 + c_2 + \dots + c_n$  的最大值。

## 2.3 作业题

### 作业 2.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  是非负实数，满足：

1.  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 2;$
2.  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{100}a_1 = 1.$

求  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$  的最大值和最小值。

**作业 2.2**

给定整数  $n \geq 4$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$ , 求

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (2.8)$$

的最小值。

**作业 2.3**

给定整数  $n \geq 4$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 求

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \dots + a_na_1a_2 \quad (2.9)$$

的最大值。

**作业 2.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设集合  $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, i \neq j\}$ 。对任意满足  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$  的非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j \tag{2.10}$$

的最大值。

# 第三章 柯西不等式 (一)

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 是现代数学各个分支中应用最为广泛的不等式之一。本讲将系统介绍柯西不等式的多种形式、证明技巧（如换元、待定系数、裂项）以及相关的推广（如拉格朗日恒等式、Hölder 不等式）。

本节介绍柯西不等式的几种形式，以及在证明分式不等式中的应用。

## 定理 3.1 · 柯西不等式

## 定理 3.2 · 积分形式

设  $f, g$  是区间  $[a, b]$  上的可积函数，求证：

$$\left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right) \geq \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2. \quad (3.1)$$

### 定理 3.3 · Wagner 不等式

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数,  $x \in [0, 1]$ 。求证:

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \right) \geq \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2. \quad (3.2)$$

**定理 3.4 · Aczel 不等式**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 满足  $a_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2$ 。求证:

$$\left( a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2 \right) \left( b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2 \right) \leq \left( a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i \right)^2. \quad (3.3)$$

### 3.1 分式型柯西不等式

#### 例题 3.1

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 - a_{i+1} + n} \geq 1, \quad (3.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 3.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是给定的正实数, 求证: 存在和为 1 的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使得对任意和为 1 的正实数  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (3.5)$$

**例题 3.3**

设整数  $m < n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数。对集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $A$ , 记  $S_A = \sum_{i \in A} a_i$ 。求证:

$$\sum_{|A|=m} \frac{S_A}{S_{A^c}} \geq \frac{m}{n-m} C_n^m. \quad (3.6)$$

**例题 3.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = \frac{n}{2}$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{a_i + a_j} \geq \frac{n^2}{2}. \quad (3.7)$$

**例题 3.5**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ 。对  $1 \leq i \leq n$ , 记  $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq 1. \quad (3.8)$$

**例题 3.6 · 2006 CTST**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+a_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (3.9)$$

## 3.2 作业题

### 作业 3.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \max\{a_i^2, b_i^2\} \right) \left( \sum_{i=1}^n \min\{a_i^2, b_i^2\} \right) \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (3.10)$$

**作业 3.2**

给定整数  $n \geq 3$ 。求最小的实数  $\lambda$ , 使得对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{\lambda a_n}{S - a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}, \quad (3.11)$$

其中  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

**作业 3.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} \geq \frac{n}{2}. \quad (3.12)$$

**作业 3.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + 1} \right) \leq \frac{n^3}{2}. \quad (3.13)$$

# 第四章 柯西不等式 (二)

本节介绍柯西不等式与换元、待定系数、裂项等方法综合运用的问题。

## 4.1 换元法

### 例题 4.1

给定正整数  $n$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  满足  $\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$ , 求

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad (4.1)$$

的最大值。

**例题 4.2**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 求证:

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k^2 \leq \frac{n}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2. \quad (4.2)$$

**例题 4.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j a_i \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \left( \sum_{i=1}^j a_i \right)^2. \quad (4.3)$$

**例题 4.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{\frac{i}{j}} a_i a_j = 1$ ，求  $\sum_{i=1}^n a_i$  的最大值和最小值。

## 4.2 待定系数法

### 例题 4.5 · Ostrowski 不等式

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$ 。  
求证:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}. \quad (4.4)$$

**例题 4.6**

给定正整数  $n$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n ia_i = 1$ 。求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (4.5)$$

的最小值。

### 4.3 裂项法

#### 例题 4.7

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1^2+\cdots+a_n^2} < \sqrt{n}. \quad (4.6)$$

**例题 4.8**

设整数  $n \geq 2$ , 正整数  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ 。求证: 对任意实数  $x$ , 有

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}. \quad (4.7)$$

## 4.4 作业题

### 作业 4.1

设实数  $1 = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ , 求证:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{i}(a_i - a_{i+1}). \quad (4.8)$$

**作业 4.2**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$  是实数, 求证:

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} (a_i + \cdots + a_j)^2. \quad (4.9)$$

**作业 4.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的实数  $\lambda$ , 使得对任意满足  $\sum_{i=1}^n ia_i = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 都有

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (4.10)$$

**作业 4.4**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_n} < \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (4.11)$$

# 第五章 柯西不等式 (三)

本节介绍柯西不等式的两种推广和加强：拉格朗日恒等式与 Hölder 不等式，需要注意“平移不变”技巧的运用。

## 5.1 拉格朗日恒等式

### 定理 5.1 · 拉格朗日恒等式

对于任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，有

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (5.1)$$

**例题 5.1**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ , 使得对任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2. \quad (5.2)$$

**例题 5.2**

设  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  是实数, 求证:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i^2 \geq \frac{1}{2n+1} \left( \sum_{i=0}^{2n} a_i \right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \left( \sum_{i=0}^{2n} (i-n)a_i \right)^2. \quad (5.3)$$

**例题 5.3**

设整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $t$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 3t$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 3t^2$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i^3 > 3t^3 + t$ 。求证: 存在  $1 \leq i < j \leq n$  使得  $|a_i - a_j| > 1$ 。

**例题 5.4**

设整数  $n \geq 3$ 。正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) = n^2 + 1$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right) \geq n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}. \quad (5.4)$$

**例题 5.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^{2n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{2n}} \right) - n^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i} \right)^2 \geq n^2. \quad (5.5)$$

**例题 5.6**

设  $a_1, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{2n}$  是实数, 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{2n} b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{2n} a_i b_i \right)^2 \geq \left[ \sum_{i=1}^n (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i) \right]^2. \quad (5.6)$$

## 5.2 Hölder 不等式

### 定理 5.2 · Hölder 不等式

设  $m, n \geq 2$  为整数。给定  $m$  组非负实数：

$$(a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \quad (a_{1,2}, \dots, a_{n,2}), \quad \dots, \quad (a_{1,m}, \dots, a_{n,m}).$$

则有：

$$\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^m a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7)$$

即：

$$\sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_{i,1}^m \right)^{\frac{1}{m}} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,2}^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left( \sum_{i=1}^n a_{i,m}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.8)$$

当且仅当这  $m$  组向量两两共线（即成比例）时，等号成立。

**例题 5.7**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^3 + 1) \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 a_{i+1} + 1), \quad (5.9)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 5.8**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证：

$$(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1) \left( \frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} \right) \geq \frac{n}{n+1}. \quad (5.10)$$

### 5.3 作业题

#### 作业 5.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求证：

$$\left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \right)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (5.11)$$

**作业 5.2**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_i > b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 且  $\prod_{i=1}^n a_i b_i = 1$ 。  
求证：

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a_i - b_i)}. \quad (5.12)$$

# 第六章 排序不等式与切比雪夫不等式

排序不等式是除均值不等式和柯西不等式之外的第三种基本不等式，有别于前两种通过平方和得到大小关系，排序不等式是通过序来得到的。切比雪夫 (Chebyshev) 不等式可以认为是排序不等式的特殊情况，但因其结构整齐，特别在近年出现的频率很高。

本讲介绍排序不等式和切比雪夫不等式的证明及应用。需要注意的是，有的题目虽然条件中没有给出序，但如果变量地位相同，我们可以不妨设一个序。

## 6.1 基础知识

### 定理 6.1 · 排序不等式

设实数组  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  和  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。若  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的任一排列，则有：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (6.1)$$

即：反序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  同序和。当且仅当  $a_1 = \dots = a_n$  或  $b_1 = \dots = b_n$  时等号成立（严格递增时，仅当排列对应相同时取等）。

**定理 6.2 · 切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)**

1. 若  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  且  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$  (同序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.2)$$

2. 若  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  且  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$  (反序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.3)$$

## 6.2 典型例题

### 例题 6.1

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ ,  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ 。  
 $z_1, z_2, \dots, z_n$  是  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的一个排列, 求证:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2. \quad (6.4)$$

**例题 6.2**

设  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 求证:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i \geq \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \frac{\sin \theta_{i+1}}{\sin \theta_i}, \quad (6.5)$$

其中  $\theta_{n+1} = \theta_1$ 。

**例题 6.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两不同的正整数，求证：

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (6.6)$$

**例题 6.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}}. \quad (6.7)$$

**例题 6.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{n}. \quad (6.8)$$

**例题 6.6**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \right) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \leq \frac{n}{2}. \quad (6.9)$$

**例题 6.7**

给定整数  $n \geq 3$ 。设非负实数  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , 且满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求  $a_n \sum_{i=1}^n (n+1-i)a_i$  的最大值。

**例题 6.8**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n b_i b_{n+1-i} = 1. \quad (6.10)$$

求  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j$  的最小值。

### 6.3 作业题

#### 作业 6.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个排列，求证：

$$\sum_{k=2}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k}. \quad (6.11)$$

## 作业 6.2

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是非负实数。对  $1 \leq k \leq n$ , 定义

$$C_k = \max\{a_1 b_k, a_2 b_k, \dots, a_k b_k, a_k b_{k-1}, \dots, a_k b_1\}.$$

设  $\sigma$  是  $1 \sim n$  的一个置换, 求证:

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leq C_1 + C_2 + \cdots + C_n. \quad (6.12)$$

### 作业 6.3

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的正实数  $\lambda$ , 使得对任意满足  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ,  $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$  且  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$  的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} x_i y_i. \quad (6.13)$$

**作业 6.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \geq (n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}. \quad (6.14)$$

# 第七章 补充练习题

## 练习 7.1

已知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , 证明:

$$(2 + a_1)(2 + a_2) \dots (2 + a_n) \geq 3^n \quad (7.1)$$

## 练习 7.2

已知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ , 证明:

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \quad (7.2)$$

### 练习 7.3 · 2017 北大挑战赛

给定整数  $n$  和正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 且满足  $\prod_{i=1}^k a_i \geq k!$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 证明:

$$\frac{2!}{1+a_1} + \frac{3!}{(1+a_1)(2+a_2)} + \cdots + \frac{(n+1)!}{(1+a_1)(2+a_2) \cdots (n+a_n)} < 3 \quad (7.3)$$

### 练习 7.4 · 2014 北约自主招生

已知正数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 证明:

$$(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \cdots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n \quad (7.4)$$

### 练习 7.5 · 2018 北大综合营

设非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ , 求证: 对任意  $r > 0$  有

$$(1 + rx_1)(1 + rx_2) \cdots (1 + rx_n) \geq (n + r)^n x_1 x_2 \cdots x_n \quad (7.5)$$

### 练习 7.6 · 2007 女奥 (CGMO)

设整数  $n \geq 4$ , 非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$ , 记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2 + 1} + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (7.6)$$

求  $P$  的最小值, 并给出相应的取等条件。

### 练习 7.7

设整数  $n \geq 3$ , 且正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \dots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1$$

求证:

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq (n-1)^{n/4} \quad (7.7)$$

### 练习 7.8 · 1998 IMO 预选

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) 均为正实数, 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ , 证明:

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}} \quad (7.8)$$

### 练习 7.9

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$ , 证明:

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (7.9)$$

### 练习 7.10 · 2007 保加利亚

设整数  $n \geq 2$ , 求常数  $C(n)$  的最大值, 使得对所有满足  $x_i \in (0, 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 且  $(1 - x_i)(1 - x_j) \geq \frac{1}{4}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) 的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}) \quad (7.10)$$

**练习 7.11**

设  $a_i, b_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ , 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (7.11)$$

**练习 7.12 · 2010 浙大自招**

设整数  $n \geq 2$ , 且正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4 \quad (7.12)$$

**练习 7.13 · 2002 女奥 (CGMO)**

设整数  $n \geq 2$ , 且  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的任意排列, 证明:

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \dots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} > \frac{n-1}{n+2} \quad (7.13)$$

### 练习 7.14 · 2011 甘肃预赛

已知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 证明:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n} \quad (7.14)$$

### 练习 7.15

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 证明:

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (7.15)$$

### 练习 7.16

设  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , 证明:

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \dots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3} \quad (7.16)$$

**练习 7.17**

设整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ , 证明:

$$\left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2 \quad (7.17)$$

**练习 7.18**

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  满足  $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , 证明:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \right)^2 \leq (n-1)x_{n+1}^2 \quad (7.18)$$

**练习 7.19**

已知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \quad (7.19)$$

### 练习 7.20

给定整数  $n \geq 2$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \quad (7.20)$$

其中  $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ 。证明:  $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ 。

### 练习 7.21 · 2017 HMMT

设  $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$  均为实数, 求出最大的实数  $c$ , 使得下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c x_{2017}^2 \quad (7.21)$$

### 练习 7.22 · 2019 欧洲杯

已知数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 证明:

$$\sum_{k=1}^{2019} \frac{x_k^2}{2x_k x_{k+1} - 1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}} \quad (7.22)$$

### 练习 7.23

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-1) \sum_{j \neq i} x_j^2 + x_i}{1 + \sum_{j \neq i} x_j} \geq \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} \quad (7.23)$$

### 练习 7.24 · 1996 波兰

设整数  $n \geq 2$ , 正数  $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , 证明:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}, \quad (7.24)$$

并指出等号成立的充要条件。

**练习 7.25**

设  $a_i > 0, b_i > 0, a_i b_i = c_i^2 + d_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n c_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n d_i \right)^2 \quad (7.25)$$

**练习 7.26 · 2002 罗马尼亚**

设整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , 求证:

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \left( a_1 \sqrt{a_1} + a_2 \sqrt{a_2} + \dots + a_n \sqrt{a_n} \right)^2 \quad (7.26)$$

**练习 7.27 · 1998 罗马尼亚**

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1 \quad (7.27)$$

**练习 7.28 · 2014 东南**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + \dots + x_n = 1$ , 且  $x_{n+1} = x_1$ , 求证:

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1} \quad (7.28)$$

**练习 7.29 · 2010 伊朗改**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2 \quad (7.29)$$

**练习 7.30**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \quad (7.30)$$