重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一章　恒等变形

1.1　基础恒等式

定理 1.1 · 裂项与完全平方

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i\ne j} a_i a_j \tag{1.2}$$

定理 1.2 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \le i, j \le n \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \tag{1.4}$$

定理 1.3 · 方差型变形

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 \tag{1.5}$$

$$= (n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{1\le i<j\le n}2a_ia_j \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\sum_{k=1}^{n}b_k-nb_i\right)^2 = n^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \tag{1.7}$$

定理 1.4 · 循环差分恒等式

当 $a_{n+1}=a_1$ 时：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2 \tag{1.8}$$

定理 1.5 · 求和顺序交换

$$\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ia_j \tag{1.9}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i) \tag{1.11}$$

定理 1.6 · 前缀和的高阶恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i^2+2\sum_{1\le j<k\le n}(n+1-k)a_ja_k \tag{1.12}$$

$$(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}ia_i^2+2\sum_{1\le j<k\le n}ka_ja_k \tag{1.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)=\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)a_ia_j \tag{1.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}ia_i^2+2\sum_{1\le i<k\le n}ia_ia_k \tag{1.15}$$

定理 1.7 · 分式与乘积构造

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k(a_k+a_{k+1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}(a_k+a_{k+1})} \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=i}^{i+k}a_j\right)}=1\quad(\text{其中}\prod_{i=1}^{n}a_i=1) \tag{1.17}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+1)=\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k}\right]^2+\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\sigma_{2k+1}\right]^2 \tag{1.18}$$

1.2　基础恒等变形

例题 1.1

求下列各式的值：

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-j)^2$
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \cdot j$
3. $S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2 + j^2)$

例题 1.2

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_2x_3}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_nx_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1.19}$$

例题 1.3

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数，且 $x_{n+1} = x_1$，证明：

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \tag{1.20}$$

例题 1.4 · 1998 前南斯拉夫

设正整数 $n \geq 2$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正实数，证明：

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \tag{1.21}$$

例题 1.5 · 2016 西部赛

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数，记 $S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i (1 \leq k \leq n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^{n} a_j^2\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(a_i S_i\right)^2 \tag{1.22}$$

例题 1.6

设整数 $n \geq 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，设 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，证明：

$$M \cdot \sum_{i=1}^{n} i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tag{1.23}$$

例题 1.7 · 2018 西部赛

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，且 $a_1 = a_{n+1}$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2 \tag{1.24}$$

例题 1.8 · 1991 IMO 预选

给定整数 $n \geq 2$，且非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \tag{1.25}$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

例题 1.9 · 2006 IMO 预选

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数，证明：

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n}{2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)} \cdot \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \tag{1.26}$$

例题 1.10

设 a_i,b_i,c_i 均为实数，其中 $i=1,2,\cdots,n$. 且 $\sum_{i=1}^n b_i^2=\sum_{i=1}^n b_ic_i=1,\sum_{i=1}^n a_ib_i=0$，证明：

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_ic_j-a_jc_i)^2\ge a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \tag{1.27}$$

例题 1.11

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{1.28}$$

例题 1.12

设整数 $n \geq 2$，$z_1, z_2, \ldots, z_n$ 是复数，求证：

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|\right)^2 \geq (n-1) \sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|^2. \tag{1.29}$$

例题 1.13

设 $n \geq 3$，记正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 S，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \tag{1.30}$$

例题 1.14

设正整数 $n \geq 2$，非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) x_i x_j \tag{1.31}$$

的最大值。

例题 1.15 · 2004 俄罗斯

整数 $n \geq 4$，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$，证明：

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1 \tag{1.32}$$

例题 1.16

设正整数 $n \geq 3$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} = n-1$，证明：

$$\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \tag{1.33}$$

1.3　练习题

练习 1.1

证明：

$$\frac{4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{4a_ia_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \tag{1.34}$$

练习 1.2 · 2016 IMC

设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足 $a_i+b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i-\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i-b_i^2}{a_i+b_i} \tag{1.35}$$

练习 1.3

给定整数 $n\geq 2$，且非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求

$$Q=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(1+\sqrt{x_ix_j}\right)\cdot\left(\sqrt{x_i}+\sqrt{x_j}\right) \tag{1.36}$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

练习 1.4 · 2001 韩国

已知实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=1$，证明：

$$1-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\geq\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{2} \tag{1.37}$$

练习 1.5

已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $0<a_i\leq\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right]^2} \tag{1.38}$$

练习 1.6

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 0$ ，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2. \tag{1.39}$$

练习 1.7 · 2010 中欧数学奥林匹克

给定正整数 $n \geq 2$，求最大的实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，均有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2 \tag{1.40}$$

练习 1.8

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为正实数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \tag{1.41}$$