重庆外国语学校-数学竞赛

代数不等式

Joey

2026.1.1

目录

第一章　反向不等式

1.1　基础知识

定理 1.1 · Kantorović 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}\right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \tag{1.1}$$

定理 1.2 · Polyá-Szegö 不等式

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < A,\ b < B$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, A],\ b_1, b_2, \ldots, b_n \in [b, B]$。则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{1.2}$$

1.2 预习题

1.3 例题

例题 1.1 · 1978 苏联

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$，其中 $0 < a < b$，证明：

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2 \tag{1.3}$$

例题 1.2 · 2016 克罗地亚

已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均为非负实数，证明：

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \quad (1.4)$$

例题 1.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{1.5}$$

求证：$\max\{a_1, \ldots, a_n\} \leq 4\min\{a_1, \ldots, a_n\}$。

例题 1.4

给定整数 $n \geq 2$。设实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, 2]$，求

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \tag{1.6}$$

的最大值。

例题 1.5 · 1998 年高中联赛

设整数 $n \geq 2$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in [1,2]$ 且满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{1.7}$$

例题 1.6

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) < n^2 + 1. \tag{1.8}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

例题 1.7

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a < b$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, b]$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{1.9}$$

其中 $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$。

例题 1.8

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.10}$$

1.4 练习题

练习 1.1

已知非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，其中 $n \geq 3$，求

$$\sum_{i=1}^{n} ia_i \cdot (\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i})^2 \tag{1.11}$$

的最大值。

练习 1.2

已知非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，证明：

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n}(2i-1)x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2i-1} \leq \frac{n^2}{2n-1} \tag{1.12}$$

练习 1.3

设整数 $n \geq 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$，且 $a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{n}$。求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{n+1}{2\sqrt[n]{n!}}. \tag{1.13}$$

练习 1.4

设整数 $n \geq 2$，正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。设正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \tag{1.14}$$

练习 1.5

设整数 $n \geq 2$，正实数 $m < M$，实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [m, M]$。求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq \frac{M^2 - Mm + m^2}{Mm} \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{1.15}$$

其中 $a_{n+1} = a_1$。

练习 1.6

设整数 $n \geq 3$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2. \tag{1.16}$$

求证：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数均能构成三角形的三边长。

练习 1.7

给定整数 $n \geq 3$。求最大的实数 λ，使得只要正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 < \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \tag{1.17}$$

那么 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中任意三个数便能构成三角形的三边长。

练习 1.8

给定整数 $n \geq 2$。求最小的实数 λ，使得对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{1.18}$$