

# 重庆外国语学校-数学竞赛

## 代数不等式

---

2026.1.1

# 目录

<b>第一部分 基本不等式</b>	<b>1</b>
<b>第一章 均值不等式 (一)</b>	<b>2</b>
1.1 均值不等式的加强 . . . . .	2
1.2 均值不等式的基本用法 . . . . .	4
1.3 作业题 . . . . .	11
<b>第二章 均值不等式 (二)</b>	<b>15</b>
2.1 基础知识 . . . . .	15
2.2 典型例题 . . . . .	17
2.3 作业题 . . . . .	24
2.4 补充练习题 . . . . .	28
<b>第三章 柯西不等式 (一)</b>	<b>30</b>
3.1 分式型柯西不等式 . . . . .	33
3.2 作业题 . . . . .	39
<b>第四章 柯西不等式 (二)</b>	<b>43</b>
4.1 换元法 . . . . .	43
4.2 待定系数法 . . . . .	47
4.3 裂项法 . . . . .	49
4.4 作业题 . . . . .	51
<b>第五章 柯西不等式 (三)</b>	<b>55</b>
5.1 拉格朗日恒等式 . . . . .	55
5.2 Hölder 不等式 . . . . .	62
5.3 作业题 . . . . .	65
5.4 柯西不等式补充练习题 . . . . .	67
<b>第六章 排序不等式与切比雪夫不等式</b>	<b>71</b>
6.1 基础知识 . . . . .	71

6.2 例题 . . . . .	73
6.3 作业题 . . . . .	81
<b>第七章 补充练习题</b>	<b>85</b>
 <b>第二部分 基本方法</b>	 <b>91</b>
<b>第八章 恒等变形</b>	<b>92</b>
8.1 基础知识 . . . . .	92
8.2 预习题 . . . . .	95
8.3 例题 . . . . .	96
8.4 作业题 . . . . .	111
<b>第九章 Abel 变换</b>	<b>120</b>
9.1 基础知识 . . . . .	120
9.2 预习题 . . . . .	122
9.3 例题 . . . . .	123
9.4 练习题 . . . . .	130
<b>第十章 局部不等式</b>	<b>134</b>
10.1 例题 . . . . .	134
10.2 练习题 . . . . .	145
<b>第十一章 调整法</b>	<b>156</b>
11.1 预习题 . . . . .	157
11.2 例题 . . . . .	158
11.3 练习题 . . . . .	164
 <b>第三部分 高级不等式</b>	 <b>168</b>
<b>第十二章 伯努利不等式</b>	<b>169</b>
12.1 基础知识 . . . . .	169
12.2 例题 . . . . .	170
12.3 练习题 . . . . .	178
<b>第十三章 其他著名不等式</b>	<b>180</b>
13.1 基础知识 . . . . .	180
13.2 例题 . . . . .	185
13.3 作业题 . . . . .	188

<b>第十四章 反向不等式</b>	<b>192</b>
14.1 基础知识 . . . . .	192
14.2 例题 . . . . .	194
14.3 练习题 . . . . .	203
<b>第十五章 凸函数与不等式</b>	<b>205</b>
15.1 重要定理 . . . . .	205
15.2 例题 . . . . .	208
15.3 作业题 . . . . .	216
<b>第四部分 常见问题与方法</b>	<b>220</b>
<b>第十六章 绝对值不等式 (一)</b>	<b>221</b>
16.1 例题 . . . . .	221
16.2 练习题 . . . . .	229
<b>第十七章 绝对值不等式 (二)</b>	<b>233</b>
17.1 例题 . . . . .	233
17.2 作业题 . . . . .	239
17.3 练习题 . . . . .	242
<b>第十八章 平均值原理与不等式</b>	<b>244</b>
18.1 例题 . . . . .	244
18.2 作业题 . . . . .	253
<b>第十九章 归纳法与不等式 (一)</b>	<b>257</b>
19.1 例题 . . . . .	257
19.2 作业题 . . . . .	265
<b>第二十章 归纳法与不等式 (二)</b>	<b>269</b>
20.1 例题 . . . . .	269
20.2 作业题 . . . . .	277

# 第一部分

## 基本不等式

# 第一章 均值不等式 (一)

均值不等式是三大基本不等式之一，本讲介绍其在证明  $n$  元不等式中的应用，需要体会均值不等式的适用情形、掌握“拆”的技巧、积累常见结构之间的关系。

## 1.1 均值不等式的加强

### 例题 1.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  是正实数，记  $A_n, G_n$  分别为  $a_1, \dots, a_n$  的算术平均值和几何平均值。求证：

1.  $n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$ ;
2.  $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \leq \left(\frac{A_{n+1}}{G_{n+1}}\right)^{n+1}$ .

**例题 1.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的一个排列。求证:

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\sqrt{b_{i+1}} - \sqrt{b_i})^2, \quad (1.1)$$

其中  $b_{n+1} = b_1$ 。

## 1.2 均值不等式的基本用法

### 例题 1.3

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 记  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \frac{S^k}{k!}. \quad (1.2)$$



**例题 1.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1} - a_{i+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}, \quad (1.3)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 1.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是非负实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记  $c_k = \prod_{i=1}^k b_i^{\frac{1}{k}}$ . 求证:

$$nc_n + \sum_{k=1}^n k(a_k - 1)c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^k b_k. \quad (1.4)$$

**例题 1.6**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} \right)^{n-1} \geq -n + 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \prod_{k=1}^n a_k^{-\frac{1}{n}}, \quad (1.5)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 1.7**

设整数  $n > 2$ , 正实数  $a_2, a_3, \dots, a_n$  满足  $a_2 a_3 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > \frac{1}{4^{n-1}} n^n (n-1)^{n-1}. \quad (1.6)$$

**例题 1.8**

给定正整数  $n$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求

$$\frac{(1+a_1)(1+a_1+a_2)\dots(1+a_1+a_2+\dots+a_n)}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}} \quad (1.7)$$

的最小值。

**例题 1.9**

设  $n$  为正整数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left(1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}}\right)^2 \quad (1.8)$$

## 1.3 作业题

### 作业 1.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{A_n}{G_n} \geq \max_{1 \leq i < j \leq n} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

**作业 1.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $9a_i > 11a_{i+1}^2$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )。求

$$(a_1 - a_2^2)(a_2 - a_3^2) \dots (a_n - a_1^2) \quad (1.10)$$

的最大值，其中  $a_{n+1}$  应理解为  $a_1$  或题目隐含循环条件（此处按题目原文保留  $a_n - a_1^2$ ）。



**作业 1.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1]$ ，都有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} + \lambda \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (1.11)$$

**作业 1.4**

设  $n$  是正整数, 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$ 。求证:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n+1)a_n^n < 3. \quad (1.12)$$

## 第二章 均值不等式 (二)

### 2.1 基础知识

#### 定理 2.1 · 对称交叉项

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 则

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq \frac{n-1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (2.1)$$

**定理 2.2 · 轮换交叉项**

(四分之一引理) 设整数  $n \geq 4$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是非负实数, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.2)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

## 2.2 典型例题

### 例题 2.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.3)$$

的最小值。

**例题 2.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数，求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \sum_{i=1}^n a_i \quad (2.4)$$

的最小值。

**例题 2.3**

给定整数  $n \geq 3$ 。设  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$  是  $4n$  个非负实数, 满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2n} > 0 \quad (2.5)$$

且对任意  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , 有  $a_i a_{i+2} \geq b_i + b_{i+1}$  (这里  $a_{2n+1} = a_1, a_{2n+2} = a_2, b_{2n+1} = b_1$ )。求  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$  的最小值。

**例题 2.4**

给定整数  $n \geq 3$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$  且满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ，求

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \tag{2.6}$$

的最大值。



**例题 2.5**

给定整数  $n \geq 4$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，均有

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + \lambda m M \leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2, \quad (2.7)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ， $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

**例题 2.6**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  满足  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1, 1 \leq i \leq 100$ , 其中脚标按模 100 理解。求  $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+1}$  的最大值。

**例题 2.7**

给定整数  $n \geq 3$ ,  $\lambda \in [\frac{1}{2}, 2]$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum a_i = \sum b_i = 1$ 。对  $1 \leq i \leq n$ , 记  $c_i = (\lambda a_i + b_{i+1})(\lambda a_{i+1} + b_i)$ , 其中  $a_{n+1} = a_1, b_{n+1} = b_1$ 。求  $c_1 + c_2 + \dots + c_n$  的最大值。

## 2.3 作业题

### 作业 2.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  是非负实数, 满足:

1.  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 2;$
2.  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{100} a_1 = 1.$

求  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$  的最大值和最小值。

**作业 2.2**

给定整数  $n \geq 4$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$ , 求

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \quad (2.8)$$

的最小值。

**作业 2.3**

给定整数  $n \geq 4$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 求

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_n a_1 a_2 \tag{2.9}$$

的最大值。

**作业 2.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设集合  $T = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, i \mid j\}$ 。对任意满足  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$  的非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 求

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j \quad (2.10)$$

的最大值。

## 2.4 补充练习题

### 练习 2.1

知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , 证明:

$$(2 + a_1)(2 + a_2) \dots (2 + a_n) \geq 3^n. \quad (2.11)$$

### 练习 2.2

知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ , 证明:

$$1 + S + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n). \quad (2.12)$$

### 练习 2.3 · 17 北大挑战赛

定整数  $n$  和正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 且满足  $\prod_{i=1}^k a_i \geq k!$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 证明:

$$\frac{2!}{1 + a_1} + \frac{3!}{(1 + a_1)(2 + a_2)} + \dots + \frac{(n + 1)!}{(1 + a_1)(2 + a_2) \dots (n + a_n)} < 3. \quad (2.13)$$

### 练习 2.4 · 14 北约

知正数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ , 证明:

$$(\sqrt{2} + x_1)(\sqrt{2} + x_2) \dots (\sqrt{2} + x_n) \geq (\sqrt{2} + 1)^n. \quad (2.14)$$

### 练习 2.5 · 18 北大综合营

非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 求证: 对任意  $r > 0$  有

$$(1 + rx_1)(1 + rx_2) \dots (1 + rx_n) \geq (n + r)^n x_1 x_2 \dots x_n. \quad (2.15)$$

### 练习 2.6 · 07 女奥

整数  $n \geq 4$ , 非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$ , 记

$$P = \frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2 + 1} + \frac{a_n}{a_1^2 + 1}. \quad (2.16)$$

求  $P$  的最小值, 并给出相应的取等条件。



## 练习 2.7

整数  $n \geq 3$ , 且正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + \dots + \frac{1}{1+a_n^4} = 1.$$

求证:

$$a_1 a_2 \dots a_n \geq (n-1)^{n/4}. \quad (2.17)$$

## 练习 2.8

知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$ , 证明:

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n - 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (2.18)$$

## 练习 2.9 · 07 保加利亚

整数  $n \geq 2$ , 求常数  $C(n)$  的最大值, 使得对所有满足  $x_i \in (0, 1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 且  $(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) 的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 均有

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}). \quad (2.19)$$

## 练习 2.10

$n$  为正整数, 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} \leq 1$ , 证明:

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + na_{n-1}^{n-1} + (n+1)a_n^n < 3. \quad (2.20)$$

## 练习 2.11

$n$  为正整数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 证明:

$$1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^k < \left( 1 + \sqrt{\sum_{k=1}^n kx_k^{k+1}} \right)^2. \quad (2.21)$$

## 第三章 柯西不等式 (一)

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality) 是现代数学各个分支中应用最为广泛的不等式之一。本讲将系统介绍柯西不等式的多种形式、证明技巧（如换元、待定系数、裂项）以及相关的推广（如拉格朗日恒等式、Hölder 不等式）。

本节介绍柯西不等式的几种形式，以及在证明分式不等式中的应用。

### 定理 3.1 · 柯西不等式

### 定理 3.2 · 积分形式

设  $f, g$  是区间  $[a, b]$  上的可积函数，求证：

$$\left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right) \geq \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2. \quad (3.1)$$

**定理 3.3 · Wagner 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数,  $x \in [0, 1]$ 。求证:

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2x \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \right) \geq \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2. \quad (3.2)$$

**定理 3.4 · Aczel 不等式**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 满足  $a_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2$ 。求证:

$$\left(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\right) \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\right) \leq \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i\right)^2. \quad (3.3)$$

### 3.1 分式型柯西不等式

#### 例题 3.1

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 - a_{i+1} + n} \geq 1, \quad (3.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 3.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是给定的正实数, 求证: 存在和为 1 的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 使得对任意和为 1 的正实数  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i}{x_i + y_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (3.5)$$

**例题 3.3**

设整数  $m < n$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数。对集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $A$ , 记  $S_A = \sum_{i \in A} a_i$ 。求证:

$$\sum_{|A|=m} \frac{S_A}{S_{A^c}} \geq \frac{m}{n-m} C_n^m. \quad (3.6)$$

**例题 3.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = \frac{n}{2}$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{a_i + a_j} \geq \frac{n^2}{2}. \quad (3.7)$$



**例题 3.5**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ 。对  $1 \leq i \leq n$ , 记  $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq 1. \quad (3.8)$$

**例题 3.6 · 2006 CTST**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+a_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \quad (3.9)$$

## 3.2 作业题

### 作业 3.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \max\{a_i^2, b_i^2\} \right) \left( \sum_{i=1}^n \min\{a_i^2, b_i^2\} \right) \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (3.10)$$

**作业 3.2**

给定整数  $n \geq 3$ 。求最小的实数  $\lambda$ ，使得对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{S - a_i} + \frac{\lambda a_n}{S - a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}, \quad (3.11)$$

其中  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

**作业 3.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} \geq \frac{n}{2}. \quad (3.12)$$

**作业 3.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + 1} \right) \leq \frac{n^3}{2}. \quad (3.13)$$

## 第四章 柯西不等式 (二)

本节介绍柯西不等式与换元、待定系数、裂项等方法综合运用的问题。

### 4.1 换元法

#### 例题 4.1

给定正整数  $n$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  满足  $\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$ , 求

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (4.1)$$

的最大值。

**例题 4.2**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ , 求证:

$$\max_{1 \leq k \leq n} a_k^2 \leq \frac{n}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2. \quad (4.2)$$



**例题 4.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j a_i \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \left( \sum_{i=1}^j a_i \right)^2. \quad (4.3)$$

**例题 4.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{\frac{i}{j}} a_i a_j = 1$ , 求  $\sum_{i=1}^n a_i$  的最大值和最小值。

## 4.2 待定系数法

### 例题 4.5 · Ostrowski 不等式

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 1$ 。  
求证：

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2}. \quad (4.4)$$

**例题 4.6**

给定正整数  $n$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n ia_i = 1$ 。求

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (4.5)$$

的最小值。

### 4.3 裂项法

#### 例题 4.7

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证:

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1^2+\cdots+a_n^2} < \sqrt{n}. \quad (4.6)$$

**例题 4.8**

设整数  $n \geq 2$ , 正整数  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ 。求证: 对任意实数  $x$ , 有

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}. \quad (4.7)$$

## 4.4 作业题

### 作业 4.1

设实数  $1 = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ , 求证:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{i}(a_i - a_{i+1}). \quad (4.8)$$

**作业 4.2**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$  是实数, 求证:

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n-1} (a_i + \cdots + a_j)^2. \quad (4.9)$$



**作业 4.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的实数  $\lambda$ ，使得对任意满足  $\sum_{i=1}^n ia_i = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (4.10)$$

**作业 4.4**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_1+\cdots+a_n} < \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (4.11)$$

## 第五章 柯西不等式 (三)

本节介绍柯西不等式的两种推广和加强：拉格朗日恒等式与 Hölder 不等式，需要注意“平移不变”技巧的运用。

### 5.1 拉格朗日恒等式

#### 定理 5.1 · 拉格朗日恒等式

对于任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (5.1)$$

**例题 5.1 · 2010 中欧数学奥林匹克**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \lambda(a_1 - a_n)^2. \quad (5.2)$$

**例题 5.2**

设  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  是实数, 求证:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i^2 \geq \frac{1}{2n+1} \left( \sum_{i=0}^{2n} a_i \right)^2 + \frac{3}{n(n+1)(2n+1)} \left( \sum_{i=0}^{2n} (i-n)a_i \right)^2. \quad (5.3)$$

**例题 5.3**

设整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $t$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 3t$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 3t^2$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i^3 > 3t^3 + t$ . 求证: 存在  $1 \leq i < j \leq n$  使得  $|a_i - a_j| > 1$ .

**例题 5.4**

设整数  $n \geq 3$ 。正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}) = n^2 + 1$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right) \geq n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}. \quad (5.4)$$

**例题 5.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^{2n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{2n}} \right) - n^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i} \right)^2 \geq n^2. \quad (5.5)$$



**例题 5.6**

设  $a_1, \dots, a_{2n}, b_1, \dots, b_{2n}$  是实数, 求证:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\right)^2 \geq \left[\sum_{i=1}^n (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\right]^2. \quad (5.6)$$

## 5.2 Hölder 不等式

### 定理 5.2 · Hölder 不等式

设  $m, n \geq 2$  为整数。给定  $m$  组非负实数：

$$(a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \quad (a_{1,2}, \dots, a_{n,2}), \quad \dots, \quad (a_{1,m}, \dots, a_{n,m}).$$

则有：

$$\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^m a_{i,j} \right) \leq \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.7)$$

即：

$$\sum_{i=1}^n a_{i,1} a_{i,2} \cdots a_{i,m} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_{i,1}^m \right)^{\frac{1}{m}} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,2}^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left( \sum_{i=1}^n a_{i,m}^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5.8)$$

当且仅当这  $m$  组向量两两共线（即成比例）时，等号成立。

**例题 5.7**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^3 + 1) \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 a_{i+1} + 1), \quad (5.9)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 5.8**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证：

$$(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) \left( \frac{a_1}{a_2^2 + a_2} + \frac{a_2}{a_3^2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_1} \right) \geq \frac{n}{n+1}. \quad (5.10)$$

## 5.3 作业题

### 作业 5.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证:

$$\left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \right)^2 \leq \frac{n^2 - 1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (5.11)$$

**作业 5.2**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_i > b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 且  $\prod_{i=1}^n a_i b_i = 1$ 。  
求证：

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a_i - b_i)}. \quad (5.12)$$

## 5.4 柯西不等式补充练习题

### 练习 5.1

$a_i, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ , 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (5.13)$$

### 练习 5.2 · 10 浙大自招

整数  $n \geq 2$ , 且正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4. \quad (5.14)$$

### 练习 5.3 · 02 女奥

整数  $n \geq 2$ , 且  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的任意排列, 证明:

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \dots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} > \frac{n-1}{n+2}. \quad (5.15)$$

### 练习 5.4 · 11 甘肃预赛

知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 证明:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}. \quad (5.16)$$

### 练习 5.5

$a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 证明:

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (5.17)$$

### 练习 5.6

$n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$ , 证明:

$$1 \cdot \sqrt{C_n^1} + 2 \cdot \sqrt{C_n^2} + \dots + n \cdot \sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1} n^3}. \quad (5.18)$$

## 练习 5.7

整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_n \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ , 证明:

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq 2(n-1)^2 + 2. \quad (5.19)$$

## 练习 5.8

知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  满足  $x_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)}\right)^2 \leq (n-1)x_{n+1}^2. \quad (5.20)$$

## 练习 5.9

知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}. \quad (5.21)$$

## 练习 5.10

定整数  $n \geq 2$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = n + C_n^2, \quad (5.22)$$

其中  $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ . 证明:  $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ .

## 练习 5.11

17 HMMT) 设  $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$  均为实数, 求出最大的实数  $c$ , 使得下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i(x_i + x_{i+1}) \geq c x_{2017}^2. \quad (5.23)$$



## 练习 5.12 · 19 欧洲杯

知数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 证明:

$$\sum_{k=1}^{2019} \frac{x_k^2}{2x_k x_{k+1} - 1} > \frac{2019^2}{x_{2019}^2 + \frac{1}{x_{2019}^2}}. \quad (5.24)$$

## 练习 5.13

知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-1) \sum_{j \neq i} x_j^2 + x_i}{1 + \sum_{j \neq i} x_j} \geq \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}. \quad (5.25)$$

## 练习 5.14 · 96 波兰

整数  $n \geq 2$ , 正数  $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , 证明:

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}, \quad (5.26)$$

并指出等号成立的充要条件。

## 练习 5.15

$a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $a_i b_i = c_i^2 + d_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n c_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n d_i \right)^2. \quad (5.27)$$

## 练习 5.16 · 02 罗马尼亚

整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , 求证:

$$\frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \geq \frac{4}{5} \left( a_1 \sqrt{a_1} + a_2 \sqrt{a_2} + \dots + a_n \sqrt{a_n} \right)^2. \quad (5.28)$$

**练习 5.17 · 98 罗马尼亚**

知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1. \quad (5.29)$$

**练习 5.18 · 14 东南**

整数  $n \geq 2$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + \dots + x_n = 1$ , 且  $x_{n+1} = x_1$ , 求证:

$$\frac{x_1}{x_2 - x_2^3} + \frac{x_2}{x_3 - x_3^3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_{n+1}^3} \geq \frac{n^3}{n^2 - 1}. \quad (5.30)$$

**练习 5.19**

知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , 证明:

$$\left( \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n^3}{n+1}. \quad (5.31)$$

**练习 5.20 · 10 伊朗改**

$a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2. \quad (5.32)$$

**练习 5.21**

$x_1, x_2, \dots, x_n$  是正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \frac{4(x_1 - x_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}. \quad (5.33)$$

## 第六章 排序不等式与切比雪夫不等式

排序不等式是除均值不等式和柯西不等式之外的第三种基本不等式，有别于前两种通过平方和得到大小关系，排序不等式是通过序来得到的。切比雪夫 (Chebyshev) 不等式可以认为是排序不等式的特殊情况，但因其结构整齐，特别在近年出现的频率很高。

本讲介绍排序不等式和切比雪夫不等式的证明及应用。需要注意的是，有的题目虽然条件中没有给出序，但如果变量地位相同，我们可以不妨设一个序。

### 6.1 基础知识

#### 定理 6.1 · 排序不等式

设实数组  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  和  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 。若  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的任一排列，则有：

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i c_i \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (6.1)$$

即：反序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  同序和。当且仅当  $a_1 = \cdots = a_n$  或  $b_1 = \cdots = b_n$  时等号成立（严格递增时，仅当排列对应相同时取等）。

**定理 6.2 · 切比雪夫不等式 (Chebyshev's Inequality)**

1. 若  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  且  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$  (同序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.2)$$

2. 若  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  且  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$  (反序), 则

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (6.3)$$

## 6.2 例题

### 例题 6.1

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ 。  
 $z_1, z_2, \dots, z_n$  是  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的一个排列, 求证:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2. \quad (6.4)$$

**例题 6.2**

设  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 求证:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i \geq \sum_{i=1}^n \theta_i \cdot \frac{\sin \theta_{i+1}}{\sin \theta_i}, \quad (6.5)$$

其中  $\theta_{n+1} = \theta_1$ 。

**例题 6.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两不同的正整数，求证：

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (6.6)$$

**例题 6.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}}. \quad (6.7)$$



**例题 6.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{n}. \quad (6.8)$$

**例题 6.6**

设整数  $n \geq 2$ ，正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \right) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) \leq \frac{n}{2}. \quad (6.9)$$

**例题 6.7**

给定整数  $n \geq 3$ 。设非负实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ，且满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求  $a_n \sum_{i=1}^n (n+1-i)a_i$  的最大值。

**例题 6.8**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ,  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n b_i b_{n+1-i} = 1. \quad (6.10)$$

求  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j$  的最小值。

## 6.3 作业题

### 作业 6.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个排列, 求证:

$$\sum_{k=2}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k}. \quad (6.11)$$

**作业 6.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是非负实数。对  $1 \leq k \leq n$ , 定义

$$C_k = \max\{a_1 b_k, a_2 b_k, \dots, a_k b_k, a_k b_{k-1}, \dots, a_k b_1\}.$$

设  $\sigma$  是  $1 \sim n$  的一个置换, 求证:

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_n b_{\sigma(n)} \leq C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (6.12)$$

**作业 6.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的正实数  $\lambda$ ，使得对任意满足  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ,  $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$  且  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$  的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} x_i y_i. \quad (6.13)$$

**作业 6.4**

设整数  $n \geq 2$ ，正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} \geq (n+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i}. \quad (6.14)$$



## 第七章 补充练习题

### 练习 7.1

18 俄罗斯) 给定正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 其中整数  $n \geq 2$ , 证明:

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \dots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n. \quad (7.1)$$

### 练习 7.2

定正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 其中整数  $n \geq 2$ , 证明:

$$\frac{a_1^2+1}{a_1a_2+1} + \frac{a_2^2+1}{a_2a_3+1} + \dots + \frac{a_n^2+1}{a_na_1+1} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}. \quad (7.2)$$

### 练习 7.3

16 新加坡) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 且  $a_{n+1} = a_1$ , 证明:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \sqrt{\frac{1+a_2^2}{1+a_1^2}} + \sqrt{\frac{1+a_3^2}{1+a_2^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1+a_{n+1}^2}{1+a_n^2}}. \quad (7.3)$$

### 练习 7.4

正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{1-a_2}{1-a_1} + \frac{1-a_3}{1-a_2} + \dots + \frac{1-a_1}{1-a_n}. \quad (7.4)$$

## 练习 7.5

整数  $n \geq 3$ , 证明: 对于正实数  $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ , 有

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} + \frac{x_n x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \quad (7.5)$$

## 练习 7.6

知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ , 记

$$b_k = \frac{a_k}{a_k^2 + a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ , 证明:

$$(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq \frac{1}{9}. \quad (7.6)$$

## 练习 7.7

正整数  $n \geq 2$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} a_j b_j} \geq \frac{4}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \quad (7.7)$$

## 练习 7.8

知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \quad (7.8)$$

## 练习 7.9

知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $0 \leq a_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j} + \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq 1. \quad (7.9)$$

## 练习 7.10

$a_1, a_2, \dots, a_n$  均大于 1, 且  $x_0, x_1, \dots, x_n$  满足  $x_0 = 1, x_k = \frac{1}{1 + a_k x_{k-1}} (1 \leq k \leq n)$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n x_k > \frac{n^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right)}{n^2 + \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k\right)^2}. \quad (7.10)$$

## 练习 7.11

17 女奥) 设  $a_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ , 证明:

$$\left[ \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \cos x_i\right)^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \sin x_i\right)^2 \right]^2 \geq 4 \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i\right)^3. \quad (7.11)$$

## 练习 7.12

$n$  为正整数, 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ , 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j < 2\sqrt{n}. \quad (7.12)$$

## 练习 7.13

正整数  $n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 证明:

$$\frac{3}{n^2 - 1} \left[ \sum_{k=1}^n (2k - n - 1) a_k \right]^2 + \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (7.13)$$

## 练习 7.14

定正整数  $n$ , 设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \quad (7.14)$$

记  $x_i = \sum_{j=1}^n a_j - a_i (1 \leq i \leq n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i} \leq 1. \quad (7.15)$$

## 练习 7.15

19 浙江预赛) 设  $a_i, b_i > 0$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ),  $b_{i+1} - b_i \geq \delta > 0$  ( $\delta$  为常数), 若  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_i b_1 b_2 \cdots b_i}}{b_i b_{i+1}} < \frac{1}{\delta}. \quad (7.16)$$

## 练习 7.16

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为非负实数, 证明

$$\frac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2} + \frac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+x_n)^2} \leq k_n^2 \quad (7.17)$$

其中数列  $\{k_n\}$  满足  $k_1 = \frac{1}{2}$ ,  $k_{n+1} = \frac{k_n^2 + 1}{2}$ .

## 练习 7.17

知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 且  $n \geq 3$ ,  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i}{S-a_i} + \sqrt[n-1]{\left( \frac{(n-1)a_i}{S-a_i} \right)^{n-2}} \right] \geq \frac{n^2}{n-1}. \quad (7.18)$$

## 练习 7.18 · 11 西班牙改

知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 且  $n \geq 3$ , 设  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S-a_i} + \frac{2}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j}{(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2}} \geq \frac{n+2}{n-1}. \quad (7.19)$$

## 练习 7.19 · 10 地中海

知  $n > 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ , 证明:

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}, \quad (7.20)$$

**练习 7.20**

知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 且  $n \geq 3$ , 设  $S = \sum_{i=1}^n a_i^2$ , 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{S + a_i^2} \leq \frac{n^3}{n+1}. \quad (7.21)$$

**练习 7.21**

知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + 1)^2}{a_i^2 + n - 1} \geq \frac{n}{n-1}. \quad (7.22)$$

**练习 7.22**

知实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n-2)x_i^2 + 2x_i}{(n-1)x_i^2 + 1} \geq 0. \quad (7.23)$$

**练习 7.23**

86 苏联) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  均为正实数, 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right). \quad (7.24)$$

**练习 7.24**

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为非负实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (k+1)x_k^2. \quad (7.25)$$

## 练习 7.25

05 韩国) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为非负实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n x_k^2. \quad (7.26)$$

## 练习 7.26

$0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 < 1$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_{i-1} - x_i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i x_i - 1. \quad (7.27)$$

## 练习 7.27

定实数  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 对于满足  $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 1$  的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 记

$$P = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \quad (7.28)$$

求  $P$  的最小值, 并给出相应的取等条件。

## 练习 7.28

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)} \left( \sum_{i=1}^n i x_i \right)^2. \quad (7.29)$$

## 练习 7.29

定整数  $n \geq 3$ , 求最大的实数  $\lambda$ , 使得只要正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \lambda (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2,$$

就有  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中任意三个数均可作为某个三角形的边长。

## 第二部分

### 基本方法

## 第八章 恒等变形

### 8.1 基础知识

#### 定理 8.1

$$a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \quad (8.1)$$

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \quad (8.2)$$

#### 定理 8.2

当  $a_{n+1} = a_1$  时:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (8.3)$$



**定理 8.3 · 拉格朗日恒等式 (Lagrange)**

$$(a_i a_j + b_i b_j) - (a_i b_j + a_j b_i) = (a_i - b_i)(a_j - b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (8.4)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (8.5)$$

**定理 8.4**

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (8.6)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_i a_j \quad (8.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( 2 \sum_{k=1}^n b_k - n b_i \right)^2 = n^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (8.8)$$

## 定理 8.5

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_i a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i a_j \quad (8.9)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j + a_j b_i) \quad (8.11)$$

## 定理 8.6

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (n+1-i) a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (n+1-k) a_j a_k \quad (8.12)$$

$$(n+1) \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} k a_j a_k \quad (8.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) \left( \sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) a_i a_j \quad (8.14)$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=k}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} i a_i a_k \quad (8.15)$$

## 定理 8.7

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k(a_k + a_{k+1})} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}(a_k + a_{k+1})} \quad (8.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-2} \left( \prod_{j=i}^{i+k} a_j \right)} = 1 \quad \left( \text{其中 } \prod_{i=1}^n a_i = 1 \right) \quad (8.17)$$

$$\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1) = \left[ \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k} \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} (-1)^k \sigma_{2k+1} \right]^2 \quad (8.18)$$

## 8.2 预习题

## 预习 8.1

求下列各式的值：

1.  $S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2$
2.  $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \cdot j$
3.  $S_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i^2 + j^2)$

## 预习 8.2 · 2001 韩国

已知实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ ，证明：

$$1 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{2} \quad (8.19)$$

## 8.3 例题

### 例题 8.1

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (8.20)$$

**例题 8.2**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为正实数, 且  $x_{n+1} = x_1$ , 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{2x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{2x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{2x_n^2}{x_n + x_{n+1}} \quad (8.21)$$

**例题 8.3 · 1998 前南斯拉夫**

设正整数  $n \geq 2$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是正实数, 证明:

$$\left( \sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \sum_{i \neq j} b_i b_j \quad (8.22)$$

**例题 8.4 · 2016 西部赛**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个非负实数, 记  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i (1 \leq k \leq n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i S_i \cdot \sum_{j=i}^n a_j^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n (a_i S_i)^2 \quad (8.23)$$

**例题 8.5**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 设  $M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 证明:

$$M \cdot \sum_{i=1}^n i a_i \geq \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.24)$$



**例题 8.6 · 2018 西部赛**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ , 且  $a_1 = a_{n+1}$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \quad (8.25)$$

**例题 8.7 · 1991 IMO 预选**

给定整数  $n \geq 2$ ，且非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \cdot (x_i + x_j) \quad (8.26)$$

的最大值与最小值，并给出相应的取等条件。

**例题 8.8 · 2006 IMO 预选**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n}{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \quad (8.27)$$

**例题 8.9**

设  $a_i, b_i, c_i$  均为实数, 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 且  $\sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i c_i = 1, \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ , 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i c_j - a_j c_i)^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \quad (8.28)$$

**例题 8.10**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \quad (8.29)$$

**例题 8.11**

设整数  $n \geq 2$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  是复数, 求证:

$$\left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2. \quad (8.30)$$

**例题 8.12**

设  $n \geq 3$ ，记正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的和为  $S$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + n(n-2)S \leq S \sum_{i=1}^n \frac{S-a_i}{a_i} \quad (8.31)$$

**例题 8.13**

设正整数  $n \geq 2$ ，非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的和为 1，求

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)x_i x_j \quad (8.32)$$

的最大值。



**例题 8.14 · 2004 俄罗斯**

整数  $n \geq 4$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1 \quad (8.33)$$

**例题 8.15**

设正整数  $n \geq 3$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = n-1$ , 证明:

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{n(n-2)}{6} \quad (8.34)$$

## 8.4 作业题

### 作业 8.1

证明：

$$\frac{4 \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_{i+1}}{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{4a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \quad (8.35)$$

**作业 8.2 · 2016 IMC**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_i + b_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i - (\sum_{i=1}^n b_i)^2}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \quad (8.36)$$

**作业 8.3**

给定整数  $n \geq 2$ ，且非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ，求

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \sqrt{x_i x_j}) \cdot (\sqrt{x_i} + \sqrt{x_j}) \quad (8.37)$$

的最大值，并给出相应的取等条件。

**作业 8.4**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $0 < a_i \leq \frac{1}{2} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^n (1 - a_i)^2}{[\sum_{i=1}^n (1 - a_i)]^2} \quad (8.38)$$

**作业 8.5**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$  , 求证:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq \frac{4}{n^2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k \right)^2. \quad (8.39)$$

**作业 8.6**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq \frac{(n-1)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_k a_j} + n^2 - 2n + 2 \quad (8.40)$$



**作业 8.7**

定整数  $n \geq 3$ , 且  $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (8.41)$$

**作业 8.8**

整数  $n \geq 3$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的和为 1, 证明

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)}. \quad (8.42)$$

**作业 8.9**

整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ , 证明

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (8.43)$$

## 第九章 Abel 变换

### 9.1 基础知识

定理 9.1 · Abel 变换 (分部求和公式)

令  $S_0 = 0$ ,  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + b_n S_n \quad (9.1)$$

**定理 9.2 · 钟开莱不等式**

给定整数  $n \geq 2$ , 设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$  且对任意  $1 \leq k \leq n$  有  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$ , 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (9.2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i^2. \quad (9.3)$$

## 9.2 预习题

### 预习 9.1

给定正整数  $n$ , 对任意  $1 \leq k \leq n$  正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq k$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (9.4)$$

### 预习 9.2 · 1978 IMO

已知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是两两不同的正整数, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (9.5)$$

### 预习 9.3

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证: 存在  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得对任意  $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$  都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|. \quad (9.6)$$

### 预习 9.4

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ , 且对  $1 \leq k \leq n$ , 有  $\prod_{i=1}^k a_i \geq \prod_{i=1}^k b_i$ . 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i. \quad (9.7)$$

### 预习 9.5

给定整数  $n \geq 2$  以及不全为零的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 求  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足的充要条件, 使得存在正整数  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ , 满足

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0. \quad (9.8)$$

## 9.3 例题

### 例题 9.1 · 1994 USAMO

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 满足对  $1 \leq k \leq n$ , 有  $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sqrt{k}$ . 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (9.9)$$

**例题 9.2 · 1999 APMO**

设  $\{a_n\}$  是正项数列, 满足对任意  $i, j \geq 1$ , 有  $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ . 求证: 对任意正整数  $n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \geq a_n. \quad (9.10)$$



**例题 9.3 · 加强形式的 Chebyshev 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 满足

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (9.11)$$

$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}. \quad (9.12)$$

求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right). \quad (9.13)$$

**例题 9.4**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} + \frac{3}{2(n+1)^3} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \quad (9.14)$$

**例题 9.5**

给定整数  $n \geq 2$ , 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正整数, 满足对集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的任一非空子集  $I$ ,  $\sum_{i \in I} a_i$  互不相同。求:

1.  $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$  的最小值;
2.  $\sum_{i=1}^n a_i^2$  的最小值;
3.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$  的最大值。

**例题 9.6 · 2018 清华飞测**

对任意  $n \in \mathbb{N}^+$  设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4} \log_2 n \quad (9.15)$$

**例题 9.7**

给定整数  $n, k \geq 2$ . 设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$  满足:

1.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ;

2. 对  $1 \leq i \leq n$ , 有  $\sum_{j=1}^i c_j \leq i^k$ .

求  $c_1 a_1^k + c_2 a_2^k + \dots + c_n a_n^k$  的最大值。

## 9.4 练习题

### 作业 9.1

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 \leq a_3, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n.$$

求证:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}. \quad (9.16)$$

**作业 9.2**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , 且对  $1 \leq k \leq n$ , 有  $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$ . 求证:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}. \quad (9.17)$$

**作业 9.3**

给定实数  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ , 记  $M = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - a_{k+1}|$ , 证明:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \frac{M}{2} \quad (9.18)$$



**作业 9.4**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数。求证：对任意实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  都有  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \sum_{i=1}^n b_i x_i$  的充要条件是：对  $1 \leq k \leq n-1$ ，有

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (9.19)$$

## 第十章 局部不等式

### 10.1 例题

#### 例题 10.1

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ , 且满足  $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}. \quad (10.1)$$

**例题 10.2**

求所有的整数  $n \geq 2$ , 使得存在实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 满足

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (10.2)$$

**例题 10.3**

给定整数  $n \geq 3$ ，设不全为 0 的实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ 。记

$$A = \left( \sum_{k=1}^n x_k^3 \right)^2, \quad B = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^3. \quad (10.3)$$

求  $\frac{A}{B}$  的最大值。

**例题 10.4**

设整数  $n \geq 2$ ，正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{1 - (a_i - a_{i+1})^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (10.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 10.5**

设正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{1 + x_i + \dots + x_i^{i-1}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{1 + x_i + \dots + x_i^i}. \quad (10.5)$$

**例题 10.6**

设整数  $n \geq 2$ ，正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n$ 。求证：

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}. \quad (10.6)$$

**例题 10.7**

设整数  $n \geq 3$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i(a_i^2 + a_{i-1}a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}(a_i + a_{i+1})}, \quad (10.7)$$

其中  $a_0 = a_n$ ,  $a_{n+1} = a_1$ 。



**例题 10.8**

设整数  $n \geq 3$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是不小于 1 的实数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i x_{i+1} - 1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (10.8)$$

其中下标按模  $n$  理解。

**例题 10.9**

给定整数  $n \geq 3$ , 且  $a_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \quad (10.9)$$

**例题 10.10**

设整数  $n \geq 3$ ，非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的和为 1，证明：

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + (n-2)x_i} \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{[1 + (n-2)x_i]^2} + \frac{n}{4(n-1)} \quad (10.10)$$

**例题 10.11**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  满足  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 1$  ( $1 \leq i \leq 100$ ), 其中  $a_{101} = a_1$ ,  $a_{102} = a_2$ 。求  $\sum_{i=1}^{100} a_i a_{i+2}$  的最大值。

## 10.2 练习题

### 作业 10.1

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ . 求证: 存在  $a \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 使得对任意  $1 \leq j \leq n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq a + 2x_j + nax_j^2. \quad (10.11)$$

**作业 10.2**

求最大的实数  $\lambda$ , 使得对任意正整数  $n$  和任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 只要  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3} \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2. \quad (10.12)$$

**作业 10.3**

设实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n+1}$ , 求证:

$$\left( \sum_{i=1}^{2n+1} a_i \right)^2 \geq 4n \sum_{i=1}^{n+1} a_i a_{n+i}. \quad (10.13)$$

**作业 10.4**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是正实数, 求证:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{n}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}. \quad (10.14)$$



**作业 10.5**

设整数  $n \geq 2$ ，且非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_i \leq 4 \quad (10.15)$$

**作业 10.6**

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ , 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n^2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \quad (10.16)$$

**作业 10.7 · 2004 CTST**

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} = 1$ , 证明:

$$\frac{x_1}{n-1+x_1^2} + \frac{x_2}{n-1+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n^2} \leq 1 \quad (10.17)$$

**作业 10.8**

设  $a_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ , 记  $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ , 证明:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \dots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3} \quad (10.18)$$

**作业 10.9**

设整数  $n \geq 2$ , 且正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = n$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[n+1]{a_i} \geq \frac{2n}{n+1} \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j - \frac{n^2 - 2n - 1}{2} \right) \quad (10.19)$$

**作业 10.10 · 2007 白俄罗斯**

已知  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  均为正数, 证明:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1 x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1 x_2 \dots x_{n+1}) \quad (10.20)$$

**作业 10.11 · 1993 圣彼得堡**

设  $a_i \in [-1, 1]$ ,  $a_i a_{i+1} \neq -1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $a_{n+1} = a_1$ , 证明:

$$\frac{1}{1+a_1 a_2} + \frac{1}{1+a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{1+a_n a_{n+1}} \geq \frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n^2} \quad (10.21)$$

# 第十一章 调整法

## 定理 11.1

1. 设  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k = t$ , 若在  $a_1$  最大、 $a_2$  最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\frac{t}{n}, a_1 + a_2 - \frac{t}{n}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过  $n-1$  次调整将  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全调为  $\frac{t}{n}$ 。

2. 设  $a_k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\prod_{k=1}^n a_k = t$ , 若在  $a_1$  最大、 $a_2$  最小的前提下能证明

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(\sqrt[n]{t}, \frac{a_1 a_2}{\sqrt[n]{t}}, a_3, \dots, a_n\right),$$

则可经过  $n-1$  次调整将  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全调为  $\sqrt[n]{t}$ 。

## 定理 11.2 · 端点调整

若  $a_k \in [a, b]$ , 将  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  视为  $a_k$  的一元函数  $g(x)$ , 且  $g'(x)$  单调, 则可将  $a_k$  调为  $a$  或  $b$ 。

## 定理 11.3 · 磨光变换法 (无限调整法、SMV 定理)

## 定理 11.4 · EV(Equal Variable) 定理



## 11.1 预习题

### 预习 11.1

已知  $0 \leq a, b, c \leq 1$ , 证明:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (11.1)$$

### 预习 11.2

设  $x, y, z$  都是非负实数且  $x + y + z = 1$ , 证明:

$$yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad (11.2)$$

### 预习 11.3

设正实数  $a, b, c, d$  满足  $abcd = 1$ , 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{4}{a+b+c+d} \geq 5 \quad (11.3)$$

### 预习 11.4

设实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 1$ ,  $abc > 0$ , 证明:

$$ab + bc + ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4} \quad (11.4)$$

## 11.2 例题

### 例题 11.1

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) 满足不等式  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$ , 求  $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$  的最小值。

**例题 11.2**

已知正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 证明:

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n. \quad (11.5)$$

**例题 11.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_i x_j \geq 1$  (其中  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ), 证明:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}. \quad (11.6)$$

**例题 11.4**

已知正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = n$ , 证明:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 a_2 \cdots a_n \geq n + 1. \quad (11.7)$$

**例题 11.5**

设  $x_i \in (0, 1]$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $0 < \lambda \leq 2$ , 证明:

$$\sum_{i=1}^n [1 + (i-1)\lambda] \cdot x_i^2 \geq \frac{2 + (n-1)\lambda}{2n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (11.8)$$

**例题 11.6**

已知  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为正实数, 证明:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2\}. \quad (11.9)$$

## 11.3 练习题

### 作业 11.1

给定正整数  $n \geq 4$ ，且  $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ ， $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n^2$ ，证明：这  $n$  个数中一定有一个数大于等于 2。



**作业 11.2**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中的最大数为  $a$ ，证明：

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (11.10)$$

并确定不等式等号成立的条件。

**作业 11.3**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  ( $n \geq 2$ ) 个互不相同的实数, 记

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \quad M = \min_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2. \quad (11.11)$$

证明:  $12S \geq n(n-1)M$ .

**作业 11.4**

设整数  $n \geq 2$ ,  $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 证明:

$$\prod_{i=1}^n \cos \alpha_i \cdot \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}. \quad (11.12)$$

## 第三部分

### 高级不等式

## 第十二章 伯努利不等式

### 12.1 基础知识

#### 定理 12.1 · 伯努利不等式 (Bernoulli's Inequality)

对任意实数  $x > -1$  和实数  $\alpha$ , 有:

1. 当  $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$  时:

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad (12.1)$$

2. 当  $\alpha \in (0, 1)$  时:

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad (12.2)$$

当且仅当  $\alpha = 0, 1$  或  $x = 0$  时取等号。

#### 定理 12.2 · 伯努利不等式的多变量形式

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为符号相同的实数, 且  $x_i > -1$ , 则:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n \quad (12.3)$$

## 12.2 例题

### 例题 12.1

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$ , 求证:

$$(1 + a_1)^{\frac{1}{a_2}} (1 + a_2)^{\frac{1}{a_3}} \dots (1 + a_n)^{\frac{1}{a_1}} \geq 2^n. \quad (12.4)$$

**定理 12.3 · Mitrinovic 不等式**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证: 对  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的任一排列  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^{b_i} > 1. \quad (12.5)$$

**例题 12.2**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ , 求证:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n + 1} (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (12.6)$$



**例题 12.3**

求最小的实数  $\lambda$ , 使得对任意正整数  $n$  及任意满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  的正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都有

$$\lambda \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (12.7)$$

**例题 12.4**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 + n - 1) \geq n^{n-2} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (12.8)$$

**例题 12.5**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = n$ 。求证：

$$(a_1^n + 1)(a_2^n + 1) \dots (a_n^n + 1) \geq 2^n. \quad (12.9)$$

**例题 12.6**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为 1 的正整数, 满足  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$  是整数。求证: 多项式

$$P(x) = a_1 a_2 \dots a_n (x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n) \quad (12.10)$$

没有正根。

**例题 12.7**

设整数  $n \geq 3$ , 多项式  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$  有  $n$  个实根, 且都在区间  $(0, 1)$  内。求证:

$$\sum_{i=1}^{n-2} i a_i > 0. \quad (12.11)$$

## 12.3 练习题

### 作业 12.1

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i \geq -1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  且  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ 。求证：

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) + \frac{n}{4} \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 1. \quad (12.12)$$

**作业 12.2**

给定整数  $n \geq 2$ ，求最小的实数  $\lambda$ ，使得对任意非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n (a_i + \lambda)}. \quad (12.13)$$

## 第十三章 其他著名不等式

### 13.1 基础知识

#### 定理 13.1 · Jensen 不等式

1. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的下凸函数, 则对任意  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ , 有

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (13.1)$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时等号成立。

2. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的下凸函数, 正实数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。则对任意  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (13.2)$$

当且仅当  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  时等号成立。



**定理 13.2 · 加权均值不等式**

设正实数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \quad (13.3)$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。

**定理 13.3 · 幂平均不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 非零实数  $\alpha < \beta$ 。则

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (13.4)$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。

**定理 13.4 · 范数不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是非负实数, 正实数  $\alpha < \beta$ 。则

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (13.5)$$

当且仅当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中至少有  $n-1$  个为 0 时等号成立。

**定理 13.5 · Hölder 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是正实数,  $p, q$  是大于 1 的实数, 满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (13.6)$$

当且仅当  $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$  时等号成立。

**定理 13.6 · Minkowski 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是正实数, 实数  $p \geq 1$ 。则

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (13.7)$$

当且仅当  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  时等号成立。

## 13.2 例题

### 例题 13.1 · 樊畿不等式

设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \frac{1}{2}]$ , 求证:

$$\frac{(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{(\prod_{i=1}^n (1 - a_i))^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - a_i)}. \quad (13.8)$$

**例题 13.2**

设  $n$  是正整数,  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, p, q$  是正实数, 满足  $p < q$ , 且  $x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ 。  
求证:

1.  $x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \dots + x_n^q$
2.  $(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} < (x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}.$

**例题 13.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$ 。求证:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{a_k-1}}{(a_k^{a_k} - 1)^n} \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 a_2 \dots a_n - 1)^n}. \quad (13.9)$$

## 13.3 作业题

### 作业 13.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不小于 1 的实数, 求证:

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{a_n + 1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + 1}. \quad (13.10)$$



**作业 13.2**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。求证：

$$\prod_{i=1}^n \frac{1+a_i}{a_i} \geq \prod_{i=1}^n \frac{n-a_i}{1-a_i}. \quad (13.11)$$

**作业 13.3**

设  $m, n$  是给定的大于 1 的整数,  $\alpha < \beta$  是给定的正实数, 对不全为 0 的非负实数  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ), 求

$$\frac{\left[ \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij}^\alpha \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta}}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}^\beta \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (13.12)$$

的最大值。

**作业 13.4**

给定正整数  $n$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对所有满足

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 2)^n \geq \prod_{i=1}^{2n} x_i \quad (13.13)$$

的正实数  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ ，都有

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 1)^n \geq \lambda \prod_{i=1}^{2n} x_i. \quad (13.14)$$

## 第十四章 反向不等式

### 14.1 基础知识

#### 定理 14.1 · Kantorović 不等式

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。设正实数  $m < M$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ , 则

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i} \right) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \quad (14.1)$$

**定理 14.2 · Polyá-Szegö 不等式**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a < A$ ,  $b < B$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, A]$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_n \in [b, B]$ 。则

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}} \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (14.2)$$

## 14.2 例题

### 例题 14.1 · 1978 苏联

设  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ , 其中  $0 < a < b$ , 证明:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2 \quad (14.3)$$

**例题 14.2 · 2016 克罗地亚**

已知  $x_1, x_2, \dots, x_n$  均为非负实数, 证明:

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \quad (14.4)$$

**例题 14.3**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \leq \left( n + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (14.5)$$

求证:  $\max\{a_1, \dots, a_n\} \leq 4 \min\{a_1, \dots, a_n\}$ 。



**例题 14.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, 2]$ ，求

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)^2 \quad (14.6)$$

的最大值。

**例题 14.5 · 1998 年高中联赛**

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in [1, 2]$  且满足  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ 。  
求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (14.7)$$

**例题 14.6**

设整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) < n^2 + 1. \quad (14.8)$$

求证:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中任意三个数均能构成三角形的三边长。

**例题 14.7**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a < b$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$ 。求证:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \left( \frac{M}{2} \right)^{2 - \frac{2}{n}}, \quad (14.9)$$

其中  $M = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ 。

**例题 14.8**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的实数  $\lambda$ ，使得对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (14.10)$$

**例题 14.9**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的实数  $\lambda$ ，使得对任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| + \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (14.11)$$

## 14.3 练习题

### 练习 14.1

已知非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 其中  $n \geq 3$ , 求

$$\sum_{i=1}^n i a_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \right)^2 \quad (14.12)$$

的最大值。

### 练习 14.2

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , 证明:

$$1 \leq \sum_{i=1}^n (2i-1)x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2i-1} \leq \frac{n^2}{2n-1} \quad (14.13)$$

### 练习 14.3

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , 且  $a_1 \geq \frac{a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{n}$ 。求证:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \frac{n+1}{2 \sqrt[n]{n!}}. \quad (14.14)$$

### 练习 14.4

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  满足  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 。设正实数  $m < M$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i}} \leq (\sqrt{M} - \sqrt{m})^2. \quad (14.15)$$

### 练习 14.5

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $m < M$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq \frac{M^2 - Mm + m^2}{Mm} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (14.16)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**练习 14.6**

设整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2. \quad (14.17)$$

求证:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中任意三个数均能构成三角形的三边长。

**练习 14.7**

给定整数  $n \geq 3$ 。求最大的实数  $\lambda$ , 使得只要正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \quad (14.18)$$

那么  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中任意三个数便能构成三角形的三边长。



## 第十五章 凸函数与不等式

本讲介绍凸函数的两个应用，一是用于处理变量有界的情形；二是卡拉玛特 (Karamata) 不等式，这两个都是强有力的工具，有了它们会对之前的很多问题有新的理解。

### 15.1 重要定理

#### 定理 15.1 · 优越关系 (Majorization)

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是实数，如果满足：

1.  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  且  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ ;
2. 对任意  $1 \leq k \leq n-1$ ，有  $\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$ ;
3.  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ .

则称  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  优越于  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，记作  $(x) \succ (y)$ 。

**定理 15.2 · 卡拉玛特不等式 (Karamata's Inequality)**

设  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。

1. 若  $f(x)$  是区间  $I$  上的 \*\* 下凸函数 \*\* (Convex), 则

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i) \quad (15.1)$$

2. 若  $f(x)$  是区间  $I$  上的 \*\* 上凸函数 \*\* (Concave), 则

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n f(y_i) \quad (15.2)$$

**定理 15.3 · Popoviciu 不等式**

设  $f(x)$  是  $I$  上的下凸函数, 则对任意实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ , 都有

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) + n(n-2)f(a) \geq (n-1) \sum_{i=1}^n f(b_i) \quad (15.3)$$

其中  $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ ,  $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ 。

## 15.2 例题

### 例题 15.1

给定整数  $n \geq 3$ , 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ , 求  $\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1}$  的最值, 其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 15.2**

设整数  $n \geq 2$ ，正实数  $m < M$ ，实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [m, M]$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \leq n^2 + \left[ \frac{n^2}{4} \right] \frac{(M-m)^2}{Mm}. \quad (15.4)$$

**例题 15.3**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。记  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + S - a_i} + \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq 1. \quad (15.5)$$

**例题 15.4**

给定整数  $n > 2$ 。设非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ，求

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2\sqrt{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad (15.6)$$

的最大值和最小值。

**例题 15.5**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是非负实数, 求证:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2\right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i\right)^2 \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)^{\frac{1}{n}}. \quad (15.7)$$



**例题 15.6**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{1997} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ , 且满足  $\sum_{i=1}^{1997} a_i = -318\sqrt{3}$ 。求  $\sum_{i=1}^{1997} a_i^{12}$  的最大值。

**例题 15.7**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (n-1, n)$ 。记  $S = \sum_{i=1}^n a_i$ , 求证:

$$\prod_{i=1}^n a_i \geq \prod_{i=1}^n (S - (n-1)a_i). \quad (15.8)$$

**例题 15.8**

设整数  $n \geq 3$ ，正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{2a_i + a_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}, \quad (15.9)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$ 。

## 15.3 作业题

### 作业 15.1 · Ozeki 不等式

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $0 \leq m_1 \leq a_i \leq M_1$ ,  $0 \leq m_2 \leq b_i \leq M_2$ 。求证：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left[ \frac{n^2}{3} \right] (M_1 M_2 - m_1 m_2)^2. \quad (15.10)$$

**作业 15.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i + 1)^2 + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (15.11)$$

的最大值。

**作业 15.3**

给定正整数  $n$  和正实数  $a$ 。设  $k, x_1, x_2, \dots, x_k$  是正整数, 且满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ 。  
求  $a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_k}$  的最大值。

**作业 15.4**

设整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \leq \prod_{i=1}^n \frac{a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{3}, \quad (15.12)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$ 。

## 第四部分

### 常见问题与方法



## 第十六章 绝对值不等式（一）

本讲介绍含绝对值的不等式，最常用的方法是三角不等式和正负分离。

### 16.1 例题

#### 例题 16.1

设整数  $n \geq 2$ ， $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数，求证：存在  $1 \leq k \leq n$ ，使得

$$\sum_{i=1}^n |a_i - a_k| \leq \sum_{i=1}^n |b_i - a_k|. \quad (16.1)$$

**例题 16.2**

设整数  $n \geq 2$ ，实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| = 1$ 。对  $1 \leq k \leq n$ ，记  $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ ，求证：

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i - A_{i+1}| \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (16.2)$$

**例题 16.3**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是实数, 满足  $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。求证: 对任意实数  $t$ ,

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ta_{i+1} - a_{i+2}|. \quad (16.3)$$

**例题 16.4**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  且  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ 。求：

1.  $\sum_{i=1}^n |a_i|$  的最小值和最大值；
2.  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$  的最小值和最大值。

**例题 16.5**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ,  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求：

1.  $\min_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$  的最大值；
2.  $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$  的最大值。

**例题 16.6**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$ ,  $-1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \leq 1$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ 。求  $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$  的最大值。

**例题 16.7**

设整数  $n \geq 3$ ，非零实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = 0$ 。求证：

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| - \min_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right). \quad (16.4)$$

**例题 16.8**

设实数  $a < b$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [a, b]$ 。设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  满足  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 - y_i^2) \right| \leq (b - a) \sqrt{1 - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2}. \quad (16.5)$$



## 16.2 练习题

### 作业 16.1

设整数  $n \geq 2$ ，非零实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ 。求证：存在  $1 \leq i < j \leq n$ ，使得

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{a_i}{a_j} \right| \leq 2. \quad (16.6)$$

**作业 16.2**

设整数  $n \geq 3$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。对  $1 \leq k \leq n$ , 记  $A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$ 。求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| < \frac{n-1}{2}. \quad (16.7)$$

**作业 16.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意和为 0 的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 \geq \lambda \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (16.8)$$

**作业 16.4**

设正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \leq 2 - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{b_i} - \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_i}. \quad (16.9)$$

## 第十七章 绝对值不等式 (二)

本讲继续介绍含绝对值的不等式，包括设序和离散介值原理等方法，以及几个综合性的问题。

### 17.1 例题

#### 例题 17.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ ，求

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \tag{17.1}$$

的最大值。

**例题 17.2**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-1, 1]$ , 求

$$\left| a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \left| a_2 - \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right| + \dots + \left| a_n - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n} \right| \quad (17.2)$$

的最大值。

**例题 17.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足：

1.  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ;
2.  $|a_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

求  $\min_{1 \leq i \leq n-1} |a_i - a_{i+1}|$  的最大值。

**例题 17.4**

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $\sum_{i=1}^n a_i > 1$ ,  $|a_i| \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。求证: 存在正整数  $k < n$ , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \leq 1. \quad (17.3)$$



**例题 17.5**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{40}$  满足  $\sum_{i=1}^{40} a_i = 0$  且对  $1 \leq i \leq 40$ , 都有  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ , 这里  $a_{41} = a_1$ 。记  $a = a_{10}$ ,  $b = a_{20}$ ,  $c = a_{30}$ ,  $d = a_{40}$ 。

1. 求  $a + b + c + d$  的最大值;
2. 求  $ab + cd$  的最大值。

**例题 17.6**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$  满足  $a_1 = a_{1001}$ ,  $|a_i + a_{i+2} - 2a_{i+1}| \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, 999$ )。求

$$\max_{1 \leq i < j \leq 1001} |a_i - a_j| \quad (17.4)$$

的最大值。

## 17.2 作业题

### 作业 17.1

给定整数  $n \geq 2$ 。设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足：

1.  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ;
2.  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = 1$ .

求  $\max_{1 \leq i \leq n} |a_i - a_{i+1}|$  的最小值，其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**作业 17.2**

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ , 且  $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$  ( $1 \leq i \leq n$ )。求证: 存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 使得

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}. \quad (17.5)$$

**作业 17.3**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$  满足  $|a_{i+1} - a_i| \leq 1$  ( $1 \leq i \leq 2018$ ), 其中  $a_{2019} = a_1$ 。求

$$\sum_{i=1}^{2018} |a_i| - \left| \sum_{i=1}^{2018} a_i \right| \quad (17.6)$$

的最大值。

## 17.3 练习题

### 练习 17.1

已知  $n$  个实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的算术平均值为  $a$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |x_k - a| \right)^2.$$

### 练习 17.2

设  $a_0 = 0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , 证明:

$$\sum_{k=1}^n |a_k(a_k - a_{k-1})| \leq \frac{n+1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})^2.$$

### 练习 17.3

设整数  $n \geq 3$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  均大于 1, 且  $|a_{k+1} - a_k| < 1$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), 证明:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

### 练习 17.4

(18 浙江预赛) 将  $2n$  ( $n \geq 2$ ) 个不同的整数分成两组  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , 证明:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_i - b_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - a_i| + |b_j - b_i|) \geq n.$$

### 练习 17.5

已知非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  均不超过 1, 证明:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \leq n^2.$$

**练习 17.6**

已知实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ , 求  $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$  的最大值。

**练习 17.7**

对每一个整数  $n \geq 2$ , 求最大的常数  $c_n$ , 使得不等式

$$c_n \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

对任意满足  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  成立。

## 第十八章 平均值原理与不等式

平均值原理是一种整体思想，本讲介绍两类能用平均值原理处理的问题，一类是存在性问题，一类与最大最小有关。

### 18.1 例题

#### 例题 18.1

设非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求证：存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，使得

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1 \leq \frac{1}{n}. \quad (18.1)$$



**例题 18.2**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是实数, 求证: 存在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个排列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n i a_i \right| \geq \frac{n-1}{2} \max_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \quad (18.2)$$

**例题 18.3**

设实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ , 整数  $k \geq 2$ 。求证: 存在不全为 0 的整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使得其中每一个的绝对值都不超过  $k-1$ , 且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}. \quad (18.3)$$

**例题 18.4**

设实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ 。求证：存在  $x \in [0, 1]$  使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x - a_i|} \leq 8n \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1} \right). \quad (18.4)$$

**例题 18.5**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是小于 1 的正实数,  $k$  是正整数, 求证:

$$\min\{a_1(1-a_2)^k, a_2(1-a_3)^k, \dots, a_n(1-a_1)^k\} \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \quad (18.5)$$

**例题 18.6**

给定正实数  $a, b$ , 整数  $n \geq 2$ 。设函数  $f(x) = (x+a)(x+b)$ , 非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ 。求  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$  的最大值。

**例题 18.7**

设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_9$  满足  $\sum_{i=1}^9 a_i = 1$ 。记

$$S = \min\{a_1, a_2\} + 2 \min\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \min\{a_9, a_1\}, \quad (18.6)$$

$$T = \max\{a_1, a_2\} + 2 \max\{a_2, a_3\} + \cdots + 9 \max\{a_9, a_1\}. \quad (18.7)$$

当  $S$  取最大值  $S_0$  时, 求  $T$  的所有可能值。

**例题 18.8**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 求证:

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n i a_i\right) \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad (18.8)$$

**例题 18.9**

给定整数  $n \geq 2$ 。求最小的正实数  $\lambda$ ，使得对任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n \max\{a_1, \dots, a_i\} \cdot \min\{a_i, \dots, a_n\} \leq \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (18.9)$$



## 18.2 作业题

### 作业 18.1

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证: 存在实数  $x$ , 使得

$$\{x - a_1\} + \{x - a_2\} + \cdots + \{x - a_n\} \leq \frac{n-1}{2}, \quad (18.10)$$

其中  $\{x\}$  表示实数  $x$  的小数部分。

**作业 18.2**

设整数  $n \geq 3$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 求证: 存在  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集  $S$ , 满足对任意  $1 \leq i \leq n-2$ , 有  $1 \leq |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \leq 2$  且

$$\left| \sum_{i \in S} a_i \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (18.11)$$

**作业 18.3**

给定整数  $n \geq 4$ 。求最大的实数  $\lambda$ ，使得对任意满足  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$  的实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$\lambda \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq \min\{a_1, a_2\} + \min\{a_2, a_3\} + \cdots + \min\{a_n, a_1\}. \quad (18.12)$$

**作业 18.4**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数。对  $1 \leq i \leq n$ , 定义

$$d_i = \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \min_{i \leq j \leq n} a_j. \quad (18.13)$$

令  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ 。

1. 求证: 对任意实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ,  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - a_i| \geq \frac{d}{2}$ 。
2. 求证: 存在实数  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  使得 (1) 中等号成立。

## 第十九章 归纳法与不等式 (一)

凡是与正整数有关的命题都可以尝试用归纳法证明，在不等式中也是如此，本讲主要介绍第一数学归纳法的一些例子。

### 19.1 例题

#### 例题 19.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \leq 1. \quad (19.1)$$

**例题 19.2**

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - a_i a_{i+1} + 1) \geq 1, \quad (19.2)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**例题 19.3**

设整数  $n \geq 2$ , 实数  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ , 且满足  $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$  ( $1 \leq i \leq n-1$ )。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq 2n - H_n, \quad (19.3)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ ,  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 。

**例题 19.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} - n \leq \frac{1}{2a_1a_n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2, \quad (19.4)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。



**例题 19.5**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 。求证:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)^2 \left( \frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} \right) \geq 4(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i^2}. \quad (19.5)$$

**例题 19.6**

设整数  $n \geq 3$ , 非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ 。求证:

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 \leq \frac{4}{27}. \quad (19.6)$$

**例题 19.7**

设正实数  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  满足  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ 。求证：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i(1+a_i^{2^i})} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (19.7)$$

**例题 19.8**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i a_j \leq t^{|i-j|}$  对任意  $1 \leq i, j \leq n$  成立, 其中  $t \in (0, 1)$ 。求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{1}{1 - \sqrt{t}}. \quad (19.8)$$

## 19.2 作业题

### 作业 19.1

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ 。求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad (19.9)$$

其中  $a_{n+1} = a_1$ 。

**作业 19.2**

设整数  $n \geq 2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ 。求证:

$$\frac{\sqrt{1-a_1}}{a_1} + \frac{\sqrt{1-a_2}}{a_2} + \dots + \frac{\sqrt{1-a_n}}{a_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (19.10)$$

**作业 19.3**

设整数  $n \geq 4$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ 。求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} < n - 1. \quad (19.11)$$

**作业 19.4**

设整数  $n \geq 2$ , 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_i a_j \leq 4^{-|i-j|}$  对任意  $1 \leq i, j \leq n$  成立。  
求证:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{5}{3}. \quad (19.12)$$



## 第二十章 归纳法与不等式 (二)

本讲继续介绍用归纳法证明不等式，包括第二数学归纳法、加强数学归纳法、反向数学归纳法，以及几个经典的不等式。

### 20.1 例题

#### 例题 20.1

设实数  $a_i, b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ) 满足：

1. 对  $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ，有  $a_i + a_{i+1} \geq 0$ ;
2. 对  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ，有  $a_{2j+1} \leq 0$ ;
3. 对  $0 \leq p \leq q \leq n$ ，有  $\sum_{k=2p}^{2q} b_k > 0$ .

求证：  $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i b_i \geq 0$ .

**例题 20.2**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为零的非负实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \cdots + a_k}{l}. \quad (20.1)$$

求证: 对任意正实数  $\alpha$ , 满足  $m_k > \alpha$  的  $k$  少于  $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$  个。

**例题 20.3**

给定整数  $n \geq 2$ 。设非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$ 。求

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n \quad (20.2)$$

的最小值。

**例题 20.4**

设  $a_1, a_2, a_3, \dots$  是实数列, 满足存在正整数  $N$ , 使得对任意  $n \geq N$  都有  $a_n = 1$ 。  
已知对任意整数  $n \geq 2$  都有  $a_n \leq a_{n-1} + \frac{1}{2^n} a_{2n}$ 。求证: 对任意正整数  $k$ , 都有  $a_k > 1 - \frac{1}{2^k}$ 。

**例题 20.5**

对实数列  $\{a_n\}$ , 定义数列  $\{b_n\}$  如下:

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = a_{n+1} - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1. \quad (20.3)$$

求最小的正实数  $\lambda$ , 使得对任意实数列  $\{a_n\}$  以及任意正整数  $n$ , 都有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} b_i^2. \quad (20.4)$$

**例题 20.6**

求最大的正实数  $\lambda$ ，使得对任意正整数  $n$  以及任意正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，都有

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^k a_i)^2}. \quad (20.5)$$

**定理 20.1 · 牛顿不等式 (Newton's Inequality)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是实数, 对  $1 \leq k \leq n$  记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (20.6)$$

则  $S_{k-1}S_{k+1} \leq S_k^2$ , 其中  $S_0 = 1$ 。当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。

**定理 20.2 · 麦克劳林不等式 (Maclaurin's Inequality)**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 对  $1 \leq k \leq n$ , 记

$$S_k = \frac{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}}{C_n^k}. \quad (20.7)$$

则

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}. \quad (20.8)$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立。



## 20.2 作业题

### 作业 20.1

设  $n$  是正整数,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, A, B$  是正实数, 满足  $b_i \leq a_i \leq A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{B}{A}$ 。求证:

$$\frac{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_n + 1)}{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)} \leq \frac{B + 1}{A + 1}. \quad (20.9)$$

**作业 20.2**

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $y_1, y_2, \dots, y_n$  均为不减的正数数列, 满足  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ 。求证:

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} y_i} \leq 2^n - 1. \quad (20.10)$$

**作业 20.3**

设  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$ , 且对  $1 \leq i \leq n-1$ , 有  $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{b_i}{b_{i+1}}$ 。求证:

$$\frac{A_n(a)}{G_n(a)} \leq \left( \frac{A_n(b)}{G_n(b)} \right)^{n-1}, \quad (20.11)$$

其中  $A_n, G_n$  分别表示算术平均值和几何平均值。

**定理 20.3 · Suranyi 不等式**

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数, 则

$$(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^n + n \prod_{i=1}^n a_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i^{n-1} \right). \quad (20.12)$$