Part I
全等与相似

1 全等三角形

1.1 基础定义

Definition 1.1 (全等关系)**.** (1) 经过翻转、平移、旋转后，能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。
(2) 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等，记作

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

(3) 全等三角形的的三组对应边以及三组对应角全部相等，即

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F.$$

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF.$$

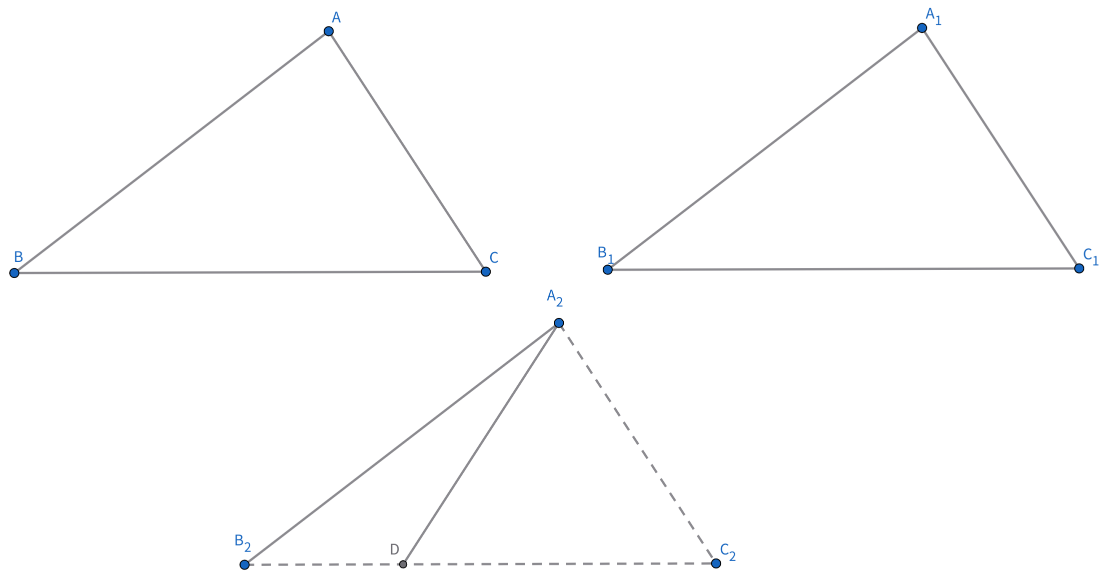


图 1: 边边角不能判定全等

1.2 判定定理

Theorem 1.1 (全等三角形判定定理)**.** 若两三角形满足下列判别法中的其一，则一定全等。
SSS (边边边): 三组边对应相等。
SAS (边角边): 两边及其夹角对应相等。
ASA (角边角): 两角及其夹边对应相等。
AAS (角角边): 两角及其中一角的对边对应相等。

2 平行线分线段成比例定理

Theorem 2.1 (平行线分线段成比例定理). 假设有三条直线 l_1, l_2, l_3 互相平行，设另两条直线分别与 l_1, l_2, l_3 相交于 A, B, C 和 D, E, F 点。则

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

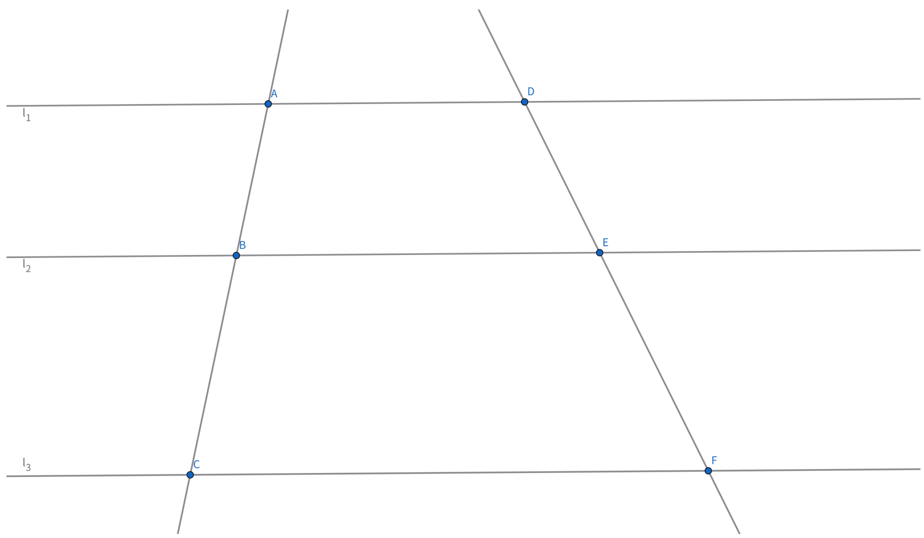


图 2: 平行线分线段成比例

Proposition 2.2 (平行相似). 在 $\triangle ABC$ 中，取 AB、AC 上的点 DE 平行于 BC，则一定有 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

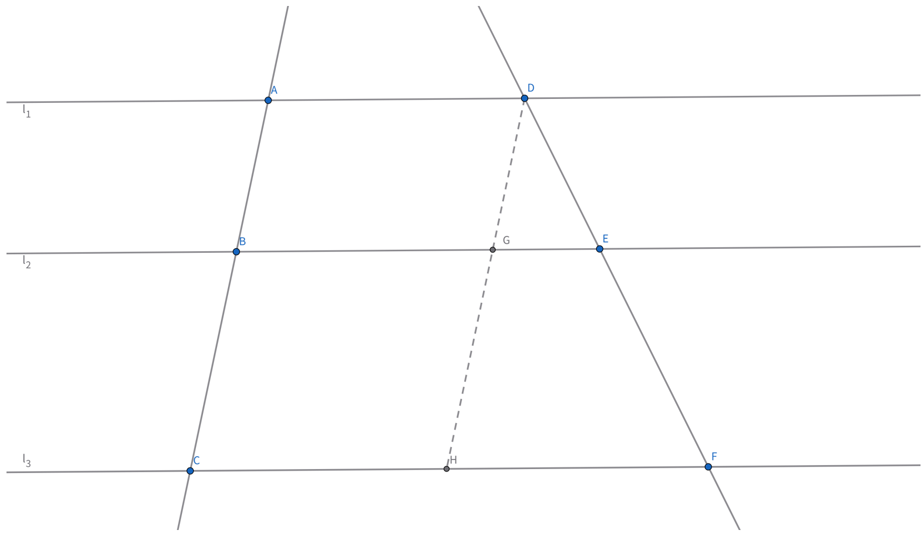


图 3: 平行相似

3 相似三角形

3.1 基本概念

Definition 3.1 (相似关系)**.** (1) 对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形。
(2) 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，记作

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

(3) 相似三角形的三组对应角全部相等，即

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F.$$

(4) 相似三角形的三组对应边比例相等，即

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k.$$

k 称作是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比。特别的，k=1 时两三角形即为全等。

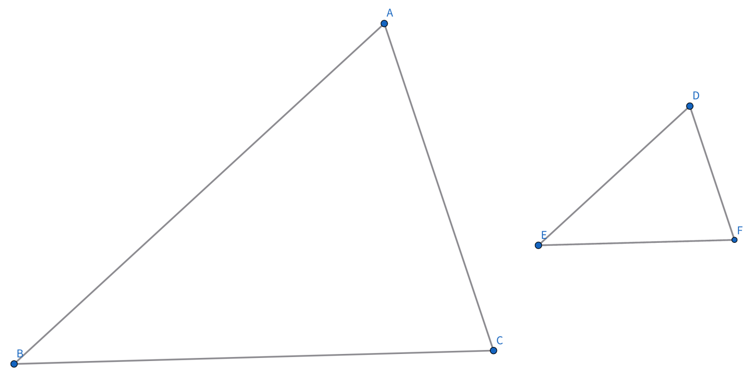


图 4: 相似三角形

Proposition 3.1. (5) 相似三角形的对应线段比也都等于相似比 k，例如对应高线、角平分线、中线、中位线等。
(6) 相似三角形的面积比为相似比的平方，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = k^2.$$

(6) 相似三角形同样具有传递性。

3.2 判定定理

Theorem 3.2. 若两三角形满足下列判别法中的其一，则一定相似。
AA (角角) / AAA (角角角): 两角对应相等，则两三角形相似。
SAS (边角边): 两边对应成比例且夹角相等，则两三角形相似。
SSS (边边边): 三边对应成比例，则两三角形相似。

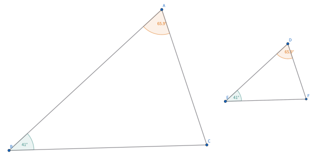


图 5: AA 相似

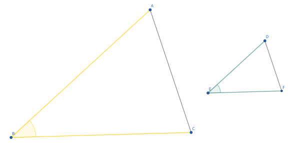


图 6: SAS 相似

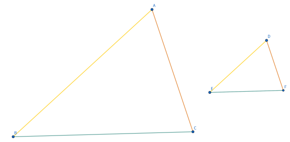


图 7: SSS 相似

3.3 常见形式

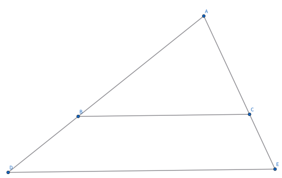


图 8: 平行相似

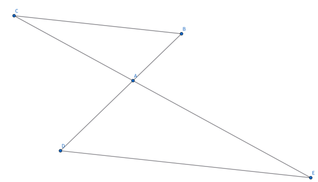


图 9: 平行相似

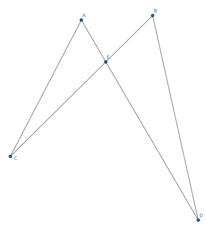


图 10: 蝴蝶型相似

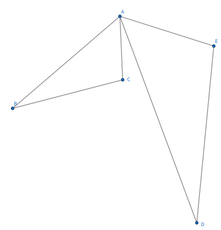


图 11: 旋转型相似

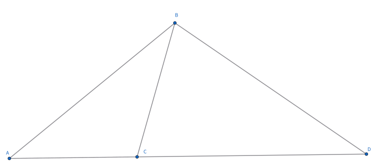


图 12: 子母型相似

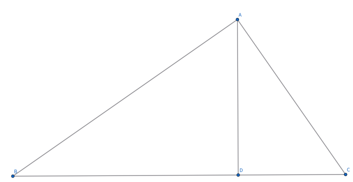


图 13: 直角子母型相似

3.4 射影定理

Theorem 3.3 (射影定理)**.** 在直角 $\triangle ABC$ 中，AD 为斜边 BC 上的垂线，D 为垂足。有下面等式成立：

$$BA^2 = BD \cdot BC,$$
$$CA^2 = CD \cdot CB,$$
$$AD^2 = DB \cdot DC$$

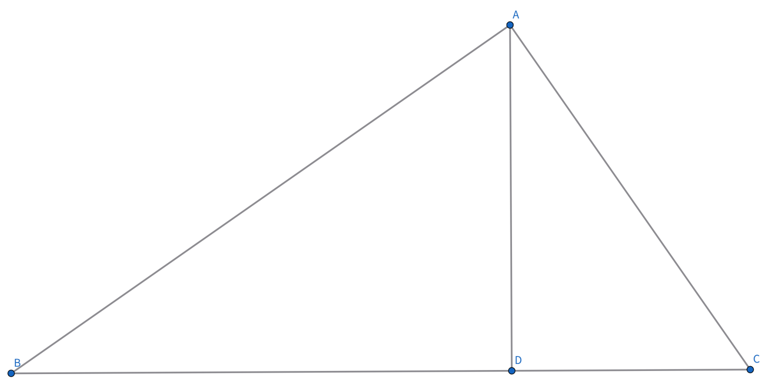
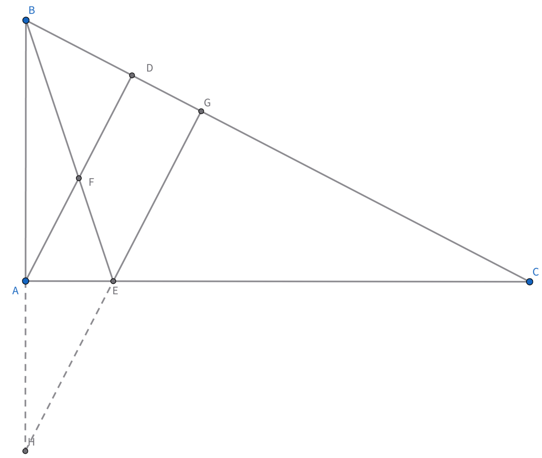


图 14: 射影定理

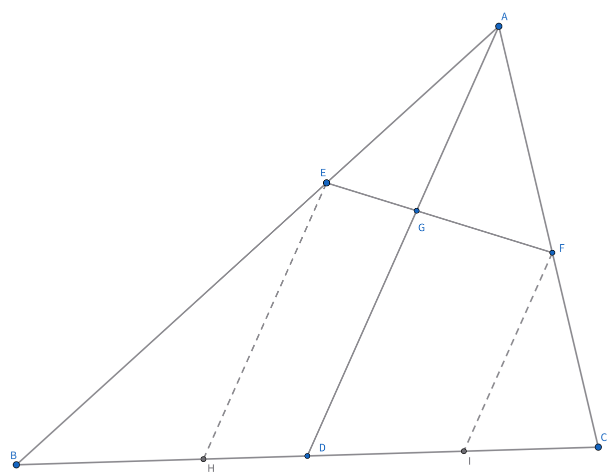
Exercise 3.1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 的高，F 是 AD 的中点，BF 延长线交 AC 于 E，$EG \perp BC$ 于 G。求证：

$$EG^2 = AE \cdot EC$$



Exercise 3.2. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边的中点，E、F 分别在边 AB、AC 上，且 AE=AF，EF 与 AD 交于 G，求证：

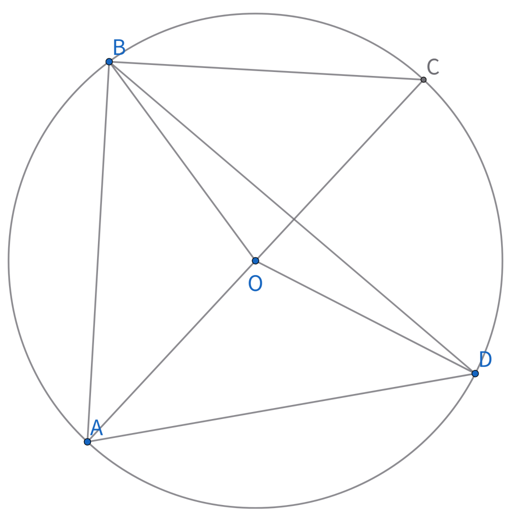
$$\frac{AB}{AC} = \frac{GF}{GE}.$$



Part II
圆

4 基本性质

Definition 4.1 (圆)**.** 平面内围绕一个定点 O 并以一定长度 r 为距离旋转一周所形成的封闭曲线叫做圆 (Circle)。
定点 O 称作圆心，r 称作圆的半径。圆是到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合。
(1) 半径: 连接圆心和圆上任意一点的线段叫做半径，字母表示为 r。
(2) 直径: 通过圆心并且两端都在圆上的线段叫做直径，字母表示为 d。直径所在的直线是圆的对称轴。
(3) 弦: 连接圆上任意两点的线段叫做弦，在同一个圆内最长的弦是直径。
(4) 弧: 圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧，符号表示为 $\overset{\frown}{AB}$。大于半圆的弧称为优弧，例如 $A\overset{\frown}{D}B$；小于半圆的弧称为劣弧，如 $\overset{\frown}{AB}$。同一圆中能够互相重合的两条弧叫做等弧。
(5) 任意定点及定长可以构成一个圆。圆心和半径同时相同的圆为同圆，圆心相同半径不同的圆称作同心圆，半径相同圆心不同的圆称作等圆。



5 垂径定理

Theorem 5.1 (垂径定理)**.** 圆具有旋转不变性以及对称性。垂直于弦的直径平分这条弦，且平分弦所对的两条弧。

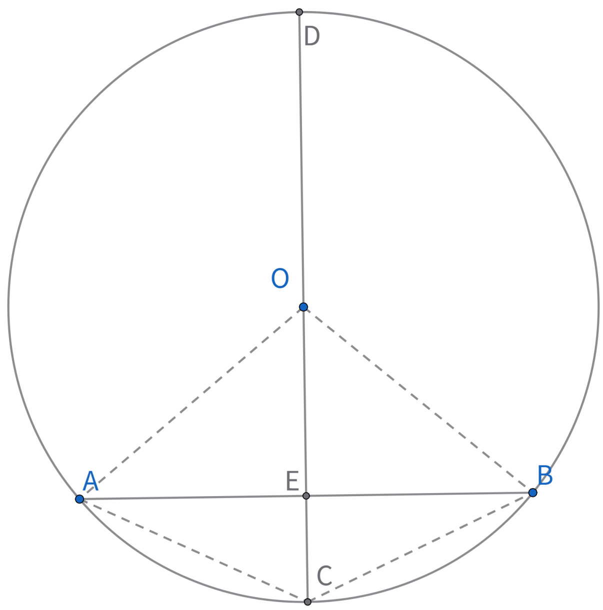


图 15: 垂径定理

6 圆周角定理

Theorem 6.1 (圆周角定理)**.** 对任意一条弦，与圆心构成的顶角称作圆心角，与圆周上另一点构成的顶角叫做圆周角。圆内的圆周角具有如下性质：
(1) 直径所对圆周角为 90 度。
(2) 同弧所对圆周角度数是圆心角的一半。
(3) 同弧或等弧所对圆周角度数相等。
(4) 弦分割的两圆弧所对圆周角互补。

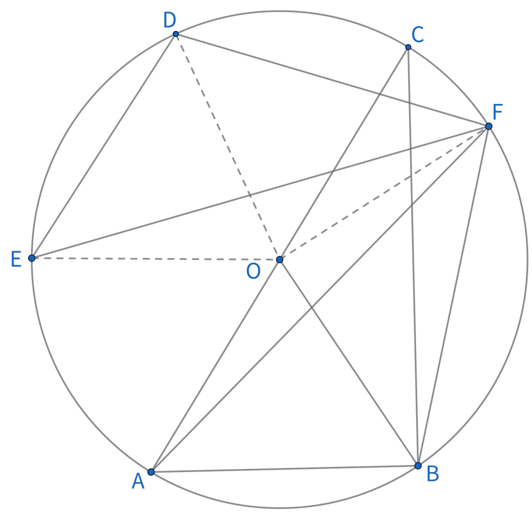


图 16: 圆周角定理

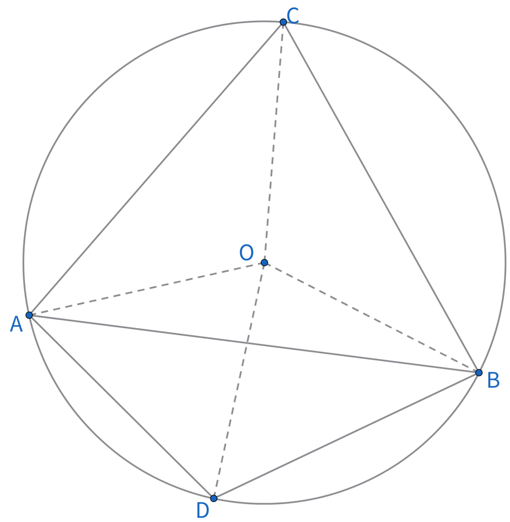


图 17: 对角互补

Exercise 6.1. 设 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，外心为 O，点 K 满足 KA 与外接圆 (ABC) 相切，并且 $\angle KCB = 90°$。点 D 在 $\overline{BC}$ 上，满足 $KD \parallel AB$。证明：直线 DO 经过点 A。

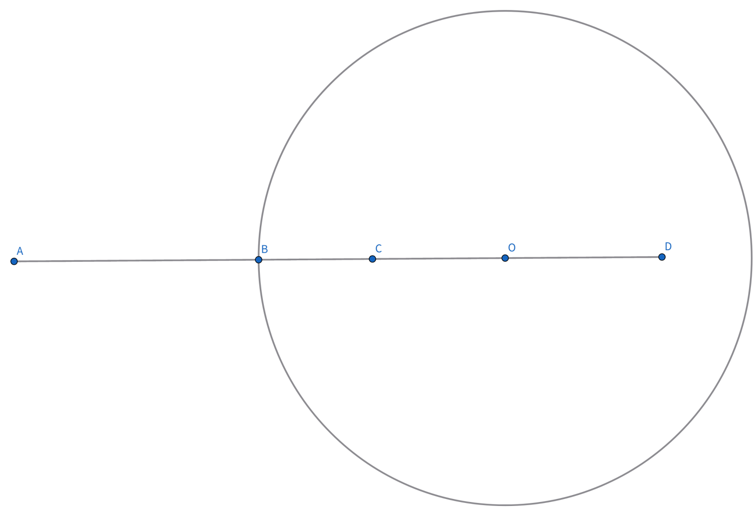
Exercise 6.2. 在 $\triangle ABC$ 中，射线 AO 交 BC 于 D，点 K 满足 KA 与圆 (ABC) 相切，而且 $\angle KCB = 90°$。证明：$KD \parallel AB$。

Exercise 6.3. 不等边 $\triangle ABC$ 中，设 K 是 $\angle A$ 的平分线与 BC 的垂直平分线的交点。证明：A, B, C, K 四点共圆。

7 点与圆的位置关系

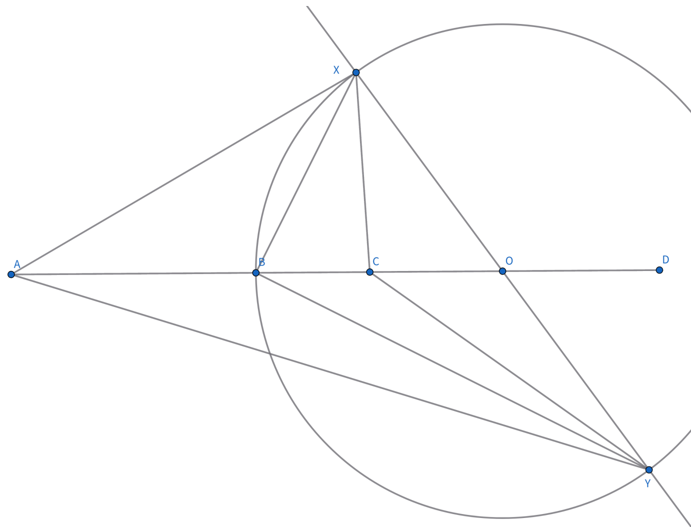
用 $d(A, B)$ 表示两点 A 和 B 的距离，点与圆的关系可分为三类。

- 点在圆外：当点 A 与圆心 O 的距离大于半径 r 时，即 $d(A, O) > r$。
- 点在圆上：当点 A 与圆心 O 的距离等于半径 r 时，即 $d(A, O) = r$。
- 点在圆内：当点 A 与圆心 O 的距离小于半径 r 时，即 $d(A, O) < r$。



设 XY 为圆 O 的直径，$\angle XPY$ 也可以反应点 P 与圆 O 的关系。

- 点在圆外：$\angle XAY < 90°$。
- 点在圆上：$\angle XBY = 90°$。
- 点在圆内：$\angle XCY > 90°$。

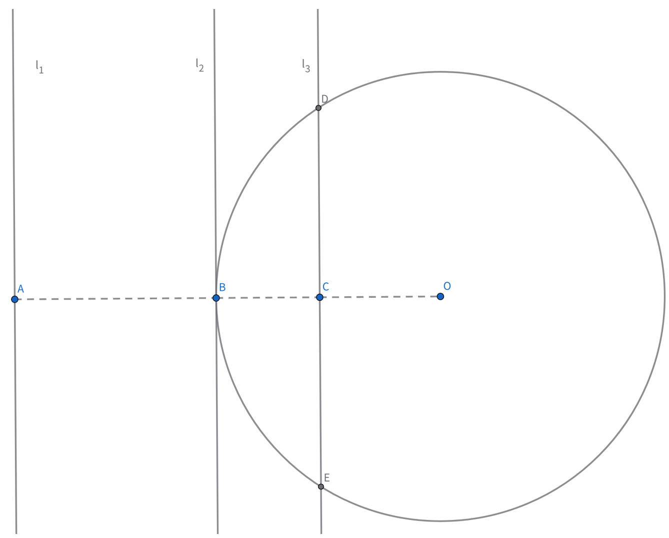


Example 7.1. 对任意凸四边形 ABCD 以及形内一点 P，以四边为直径作圆，则 P 至少在一个圆的内部。

8 直线与圆的位置关系

考虑直线 l 与圆 O 的交点个数，或圆心到直线的距离，可以将直线与圆的位置关系分为三类。

- 相离：$d(O, l_1) = OA > r$, 直线与圆无交点。
- 相切：$d(O, l_1) = OA > r$, 直线与圆恰好有一个交点。称直线 l 为圆 O 的切线，交点称作切点。
- 相交：$d(O, l_1) = OA > r$, 直线与圆有两个交点。称 l 为圆 O 的割线，交点 AB 的连线段为圆 O 的弦。



8.1 相交弦定理

Theorem 8.1 (相交弦定理)**.** 假设平面内有一半径为 R 的圆 O，E 为圆内一定点。过 E 作任意弦 AC、BD，一定有

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED = R^2 - EO^2$$

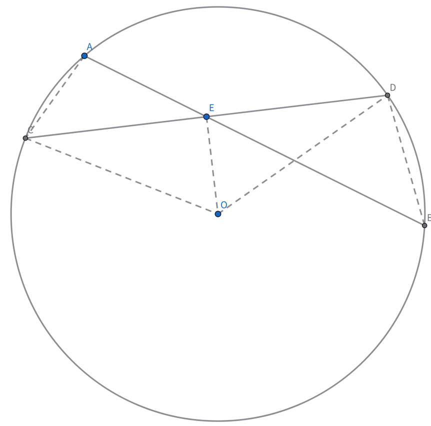


图 18: 相交弦定理

8.2 割线定理

Theorem 8.2 (割线定理)**.** 假设平面内有一半径为 R 的圆 O，E 为圆外一定点。过 E 作两条圆 O 割线分别交于 AB、CD，一定有

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED = EO^2 - R^2$$

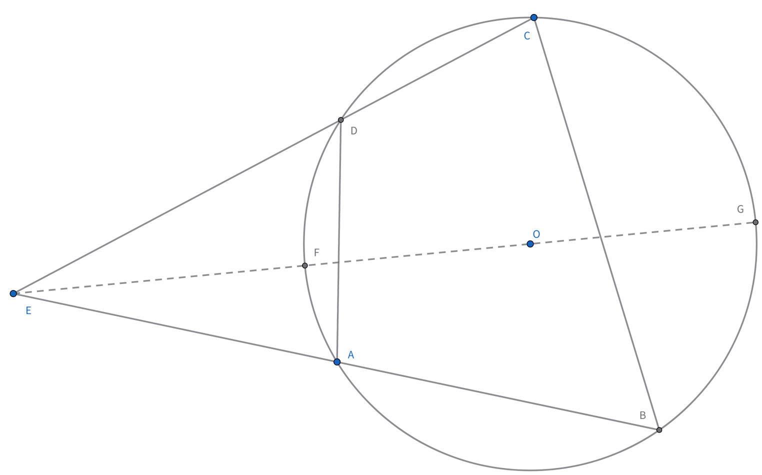


图 19: 割线定理

8.3 切割线定理

Proposition 8.3 (切线准则)**.** 假设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，E 是平面上一点，则下面的条件等价：
(1) PA 与圆 (ABC) 相切。
(2) $OA \perp AP$.
(3) $\angle PBA = \angle PCB$.

Proposition 8.4. 切线准则

Theorem 8.5 (切割线定理)**.** 假设平面内有一半径为 R 的圆 O，E 为圆外一定点。过 E 作任意割线交圆于 AC，作切线交圆于 B，一定有

$$EB^2 = EA \cdot EC = EO^2 - R^2$$

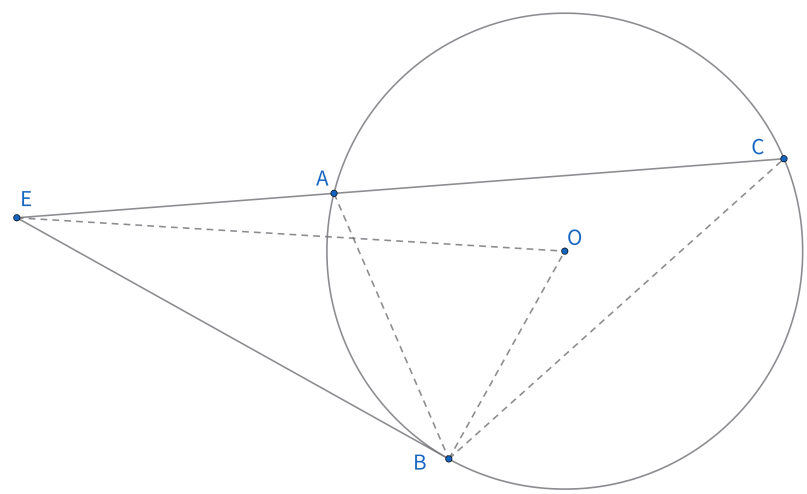


图 20: 切割线定理

8.4 圆与圆的位置关系

圆与圆的位置关系可分为五类，包括外离、外切、相交、内切、内含。

- 相离：两圆无交点，可分为外离与内含。
- 相切：两圆恰好有一个交点，交点称作切点，可分为外切与内切。

- 相交：两圆有两个交点，交点 AB 构成的连线段称作两圆的相交弦。

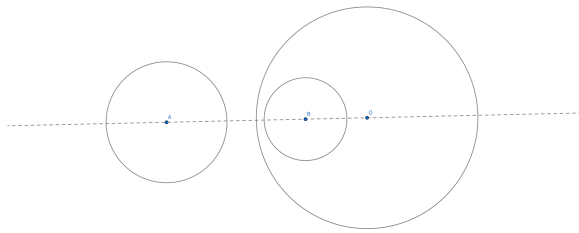


图 21: 外离与内含

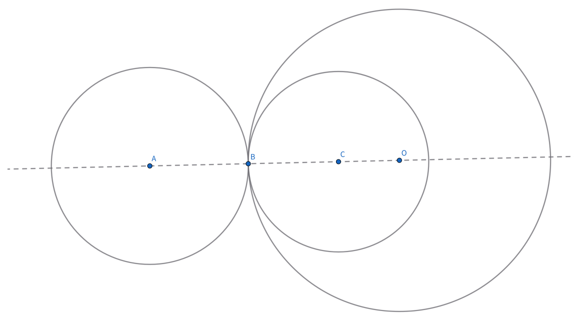


图 22: 外切与内切

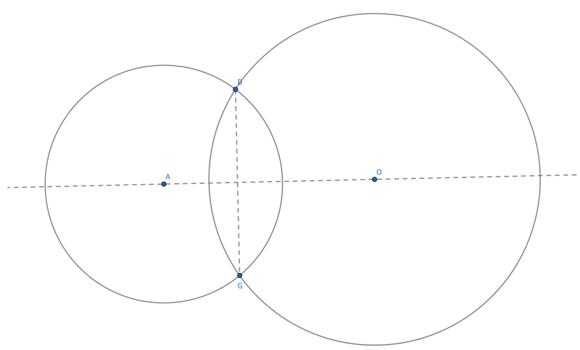


图 23: 圆相交

9 外接圆

Definition 9.1. 任意不共线的三点 A、B、C 可以唯一确定一个圆，这个圆 O 称作是 $\triangle ABC$ 的外接圆。
取三边 BC、AB、AC 的中点 D、E、F，假设 BC 中垂线与 AC 中垂线交于 O，则 A、B、C 三点一定在以 O 为圆心，以 OA 为半径的圆上。

Theorem 9.1. 对任意 $\triangle ABC$，一定有下式成立:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R.$$

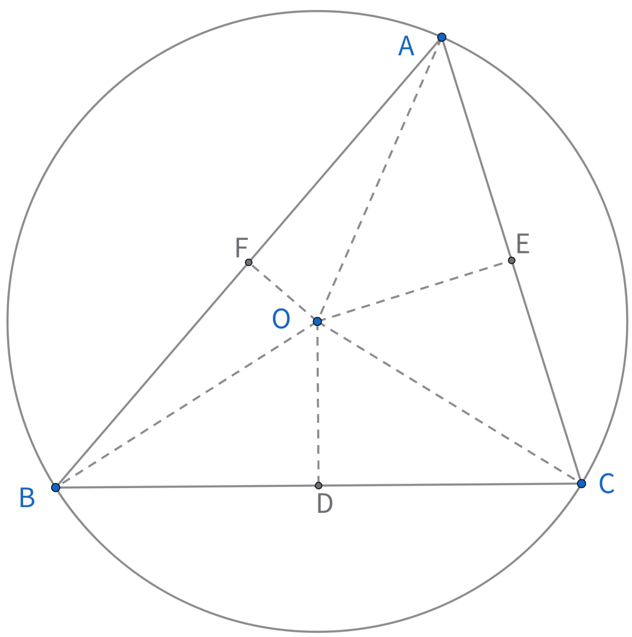
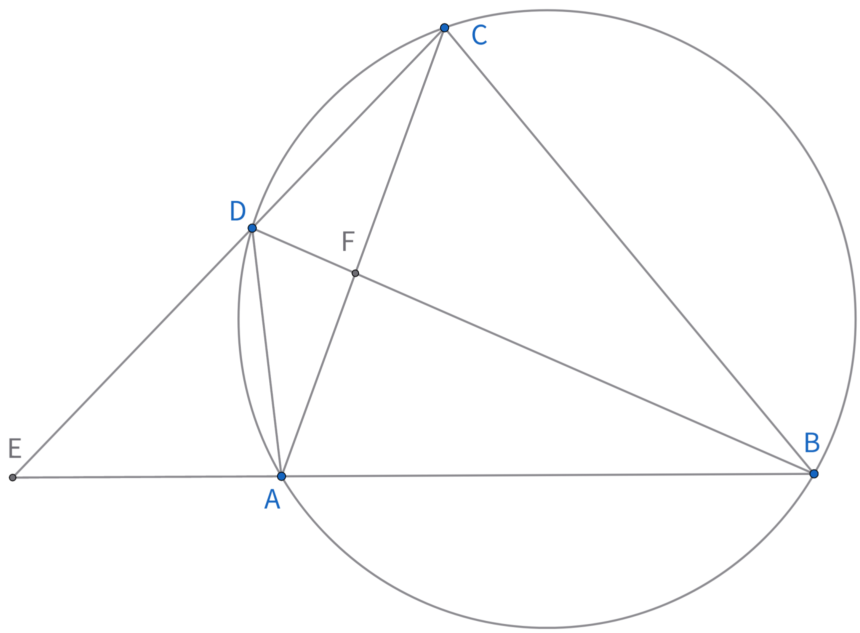


图 24: 正弦定理

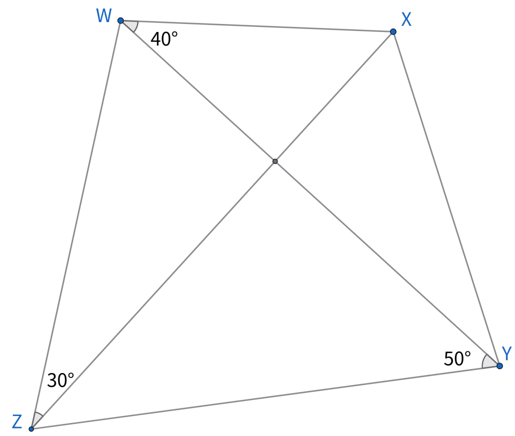
10 四点共圆

Proposition 10.1 (四点共圆判定方法)**.** 四边形 ABCD 顶点均在圆 O 上，等价于下列任一条件成立。
(1) A、B、C、D 到同一点 O 的距离相同。
(2) 存在一组对角互补。
(3) 有一边与另两点构成的顶角度数相同。
(4) 对角线交于 F 点，$AF \cdot FC = BF \cdot FD$。
(5) 有一组对边 AB、CD 的延长线相交于 E，若 $EA \cdot EB = ED \cdot EC$。

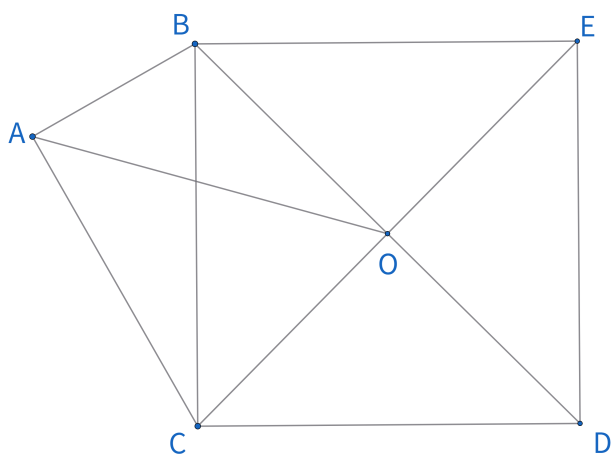


Exercise 10.1. 梯形是圆内接四边形当且仅当它是等腰梯形。

Exercise 10.2. 在四边形 $WXYZ$ 中，对角线相互垂直，已知 $\angle WZX = 30°$，$\angle XWY = 40°$，$\angle WYZ = 50°$。(a) 求 $\angle WZY$；(b) 求 $\angle WXY$。

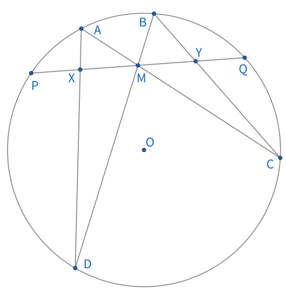


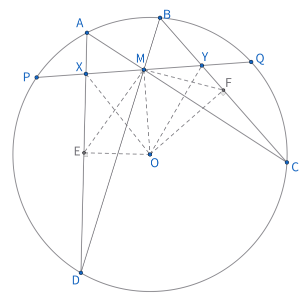
Exercise 10.3. 设 $ABCDE$ 是一个凸五边形，其中 $BCDE$ 是正方形，中心为 O，$\angle A = 90°$。证明：AO 平分 $\angle BAE$。



11 蝴蝶定理

Theorem 11.1. 设 M 为圆内弦 PQ 的中点，过 M 作弦 AB 和 CD。设 AD 和 BC 各相交 PQ 弦于点 X 和 Y，则 M 是 XY 的中点。





12 托勒密 (Ptolemy) 定理

Theorem 12.1. 圆的内接四边形对角线乘积等于两组对边乘积之和。

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

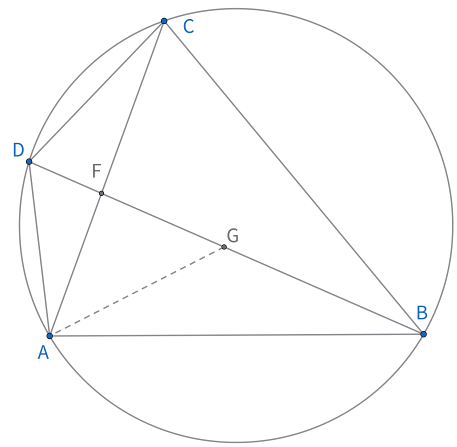


图 25: 托勒密定理

Part III

三角形五心

13 外心

Definition 13.1 (外心)**.** 三角形外接圆的圆心简称为三角形的外心，通常使用 O 表示。

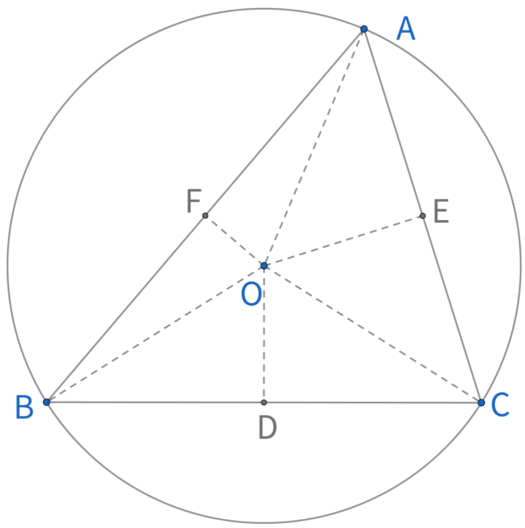


图 26: 外心

Proposition 13.1 (外心性质)**.** 三角形外心具有如下性质。
(1) 三角形的外心是三条边中垂线的交点。
(2) 平面内一点是三角形外心的充分必要条件为：该点到三顶点的距离相等。
(3) 锐角三角形的外心在形内，直角三角形的外心为斜边中点，钝角三角形的外心在形外。

Exercise 13.1. 用 $\triangle ABC$ 外接圆半径长 R 以及三顶角的正弦函数表示所有线段长。

14 内心

Definition 14.1 (内心)**.** 三角形内切圆的圆心简称为三角形的内心，通常使用 I 表示。

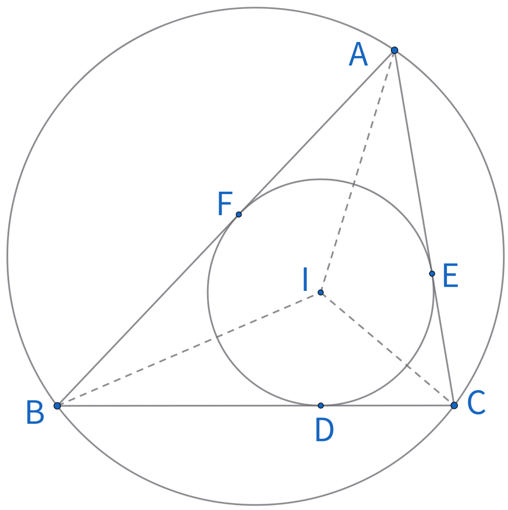


图 27: 内心

Proposition 14.1 (内心性质)**.** 三角形内心具有如下性质。
(1) 三角形的内心是三条内角平分线的交点。
(2) 内心到三边的距离相等。
(3) 平面内一点 I 是三角形 $\triangle ABC$ 内心的充分必要条件为：

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A, \quad \angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}B, \quad \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}C.$$

Proposition 14.2 (切线长性质)**.** 设 D、E、F 分别为内切圆 I 在 BC、CA、AB 上的切点，则

$$AE = AF = s - a = \frac{1}{2}(b + c - a),$$
$$BF = BD = s - b = \frac{1}{2}(a + c - b),$$
$$CD = CE = s - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Theorem 14.3 (鸡爪定理)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，O、I 分别为其外心和内心。设 AI 延长线与圆 O 相交于 D，D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，并且满足

$$DB = DI = DC.$$

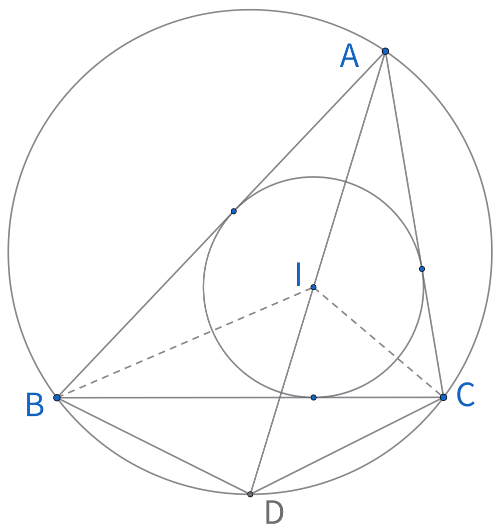


图 28: 鸡爪定理

Exercise 14.1. 计算 $\angle IBD, \angle ICD, \angle BID, \angle CID$。

Exercise 14.2. 表示 $\triangle ABC$ 内切圆半径长。

Exercise 14.3. 设 $\triangle DEF$ 为切点三角形，表示 $\triangle DEF$ 的三边长和三顶角大小。

Exercise 14.4 (内外径的欧拉定理)**.** $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径分别为 R, r. 若 O, I 分别是二者的圆心，则 $OI^2 = R(R - 2r)$.

Exercise 14.5. (USAMO 1988/4) 设 $\triangle ABC$ 的内心是 I。证明：$\triangle IAB, \triangle IBC, \triangle ICA$ 的外心所在的圆必是 $\triangle ABC$ 的外心。

15 垂心

Definition 15.1 (垂心). 三角形三边上高线的交点称为三角形的垂心，通常使用 H 表示。

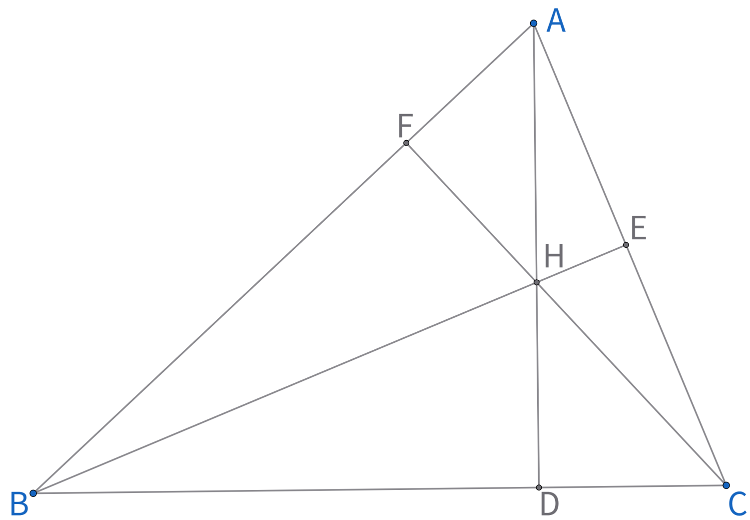


图 29: 垂心

Proposition 15.1 (垂心性质). 三角形垂心具有如下性质。
(1) 若 H 是三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，则

$$\angle BHC = 180^\circ - A, \quad \angle AHC = 180^\circ - B, \quad \angle AHB = 180^\circ - C.$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则

$$AH = 2R \cdot |\cos A|, \quad BH = 2R \cdot |\cos B|, \quad CH = 2R \cdot |\cos C|.$$

(3) 锐角三角形的垂心在形内，直角三角形的垂心在直角顶点，钝角三角形的垂心在形外。
(4) 若 H 为三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，则 A、B、C、H 四点中任意一点是其余三点构成的三角形的垂心，称 A、B、C、H 为垂心组。

15.1 垂足三角形

Proposition 15.2 (垂足三角形)**.** 设 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，H 是垂心，则：(1) A, E, F, H 在以 AH 为直径的圆上。
(2) B, E, F, C 在以 BC 为直径的圆上。
(3) H 是 $\triangle DEF$ 的内心。

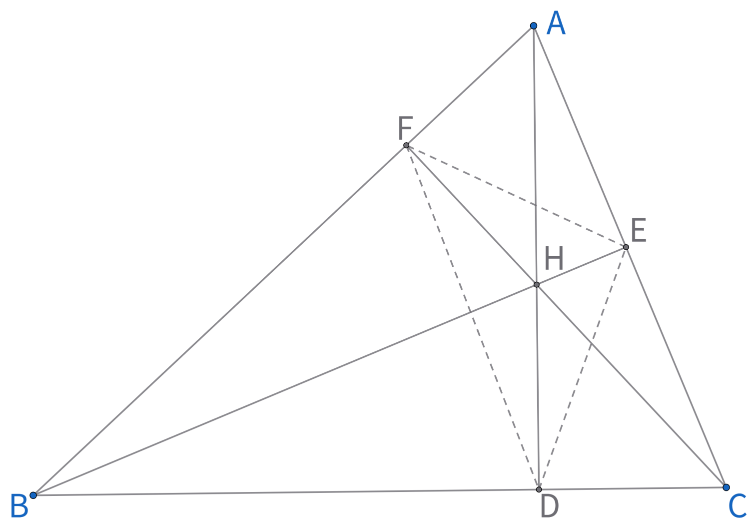


图 30: 垂足三角形

Exercise 15.1. 用 $\triangle ABC$ 的三边边长，以及三顶角的三角函数表示下面的量。

(1) 顶点与垂足连线段的长度，如 BD, CD。

(2) 垂心 H 到三边的距离，如 HD。

(3) 垂心 H 到三顶点的距离，如 HA。

(4) 两垂足连线段的长度，如 EF。

(5) 计算图中所有角的度数，如 $\angle BAH, \angle AHF, \angle AEF, \angle FHE$。

15.2 垂心的对称性质

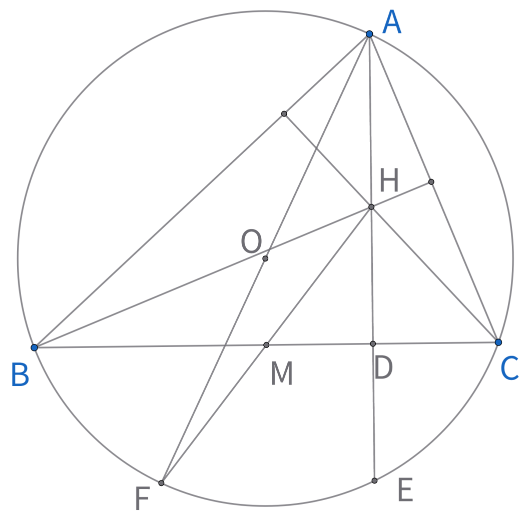


图 31: 垂心性质

Theorem 15.3 (垂心的对称性质)**.** 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，设 E 是 H 关于 BC 的对称点，F 是 H 关于 BC 中点 M 的对称点。
(1) E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上。
(2) F 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上。
(3) A, O, F 三点共线。
(4) (卡诺定理) 顶点到垂心距离是外心到对边距离的 2 倍，即 $AH = 2OM$.
(5) H 是外心 O 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点，即

$$\angle BAO = \angle CAH, \quad \angle ACO = \angle BCH, \quad \angle CBO = \angle ABH.$$

16 重心

Definition 16.1 (重心)**.** 三角形三条中线的交点称为三角形的重心，通常使用 G 表示。

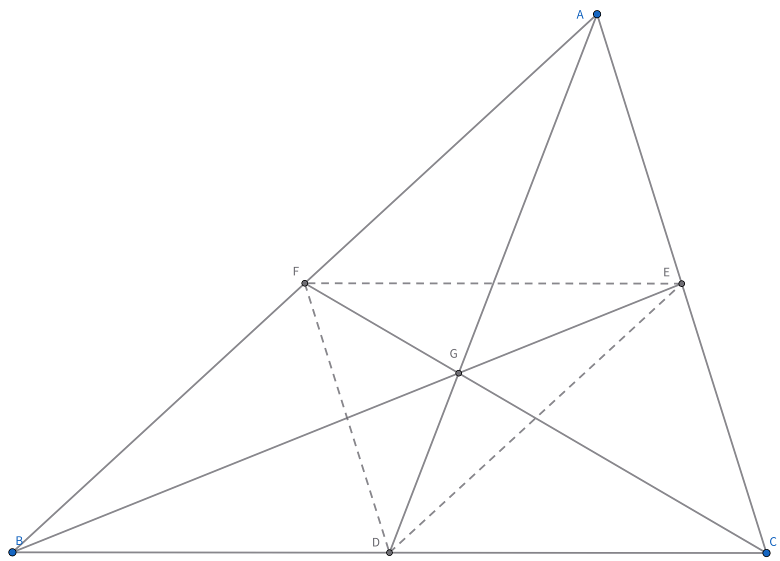


图 32: 重心

Proposition 16.1 (重心性质)**.** 三角形重心具有如下性质。
(1) 重心 G 为三条中线的三等分点，满足

$$AG = 2GD, \quad BG = 2GE, \quad CG = 2GF.$$

(2) 三边与重心组成的三角形面积相等，即

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG}.$$

(3) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$，且相似比为 2.

Exercise 16.1. 证明：$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$.

Exercise 16.2. 证明：在平面直角坐标系中，重心 G 的坐标可以表示为三顶点坐标的算术平均值。

17 旁心

Definition 17.1 (旁心)**.** 与三角形一边外侧相切，又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆，通常用 J，或者 I_a, I_b, I_c 表示。

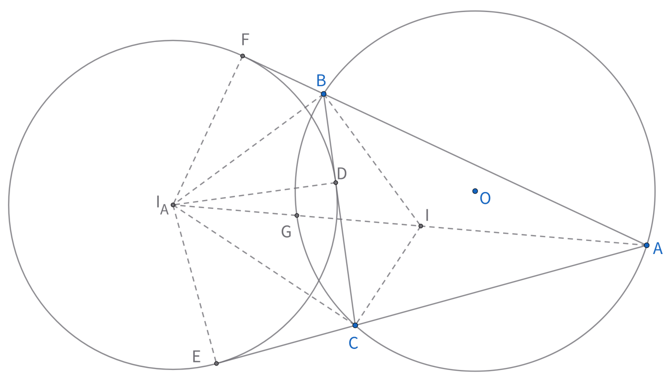


图 33: 旁心

Proposition 17.1 (旁心性质)**.** 三角形旁心具有如下性质。
(1) 旁心是三角形一内角平分线及其他两角外角平分线的交点。
(2) 旁心到三角形三边的距离相等。
(3) $\angle I_ABC = 90° - \frac{1}{2}B, \angle I_ACB = 90° - \frac{1}{2}C, \angle BI_AC = 90 - \frac{1}{2}A.$
(4) $IB \perp BI_A, \quad IC \perp CI_A.$

Proposition 17.2 (切线长性质)**.** 设 D、E、F 分别为旁切圆 I_A 在 BC、CA、AB 上的切点，则

$$AE = AF = s = \frac{1}{2}(a+b+c),$$
$$BF = BD = s - c = \frac{1}{2}(a+b-c),$$
$$CD = CE = s - b = \frac{1}{2}(a+c-b).$$

17.1 鸡爪定理

Theorem 17.3 (鸡爪定理)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，I, J 分别为其内心和 A-旁心，设 AI 延长线与圆 O 相交于 D，则 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，IJ 的中点，并且为 $IBJC$ 外接圆的圆心。

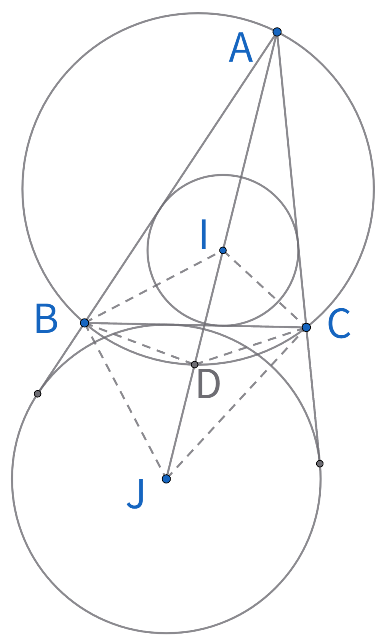


图 34: 鸡爪定理

Exercise 17.1. 计算 $\angle BIJ, \angle CIJ, \angle IBD, \angle ICD$。

Exercise 17.2. 计算 IJ。

Exercise 17.3 (旁切圆半径)**.** 证明：A-旁切圆的半径为 $r_a = \frac{s}{s-a}r$.

Exercise 17.4. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆和 A-旁切圆在 BC 上的切点分别是 D, X。证明：$BX = CD, BD = CX$。

17.2 旁心三角形

Proposition 17.4 (旁心三角形)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，I, I_A, I_B, I_C 为其内心和三旁心。则 I 是旁心所构成 $\triangle I_AI_BI_C$ 的垂心，$\triangle ABC$ 是其垂足三角形。

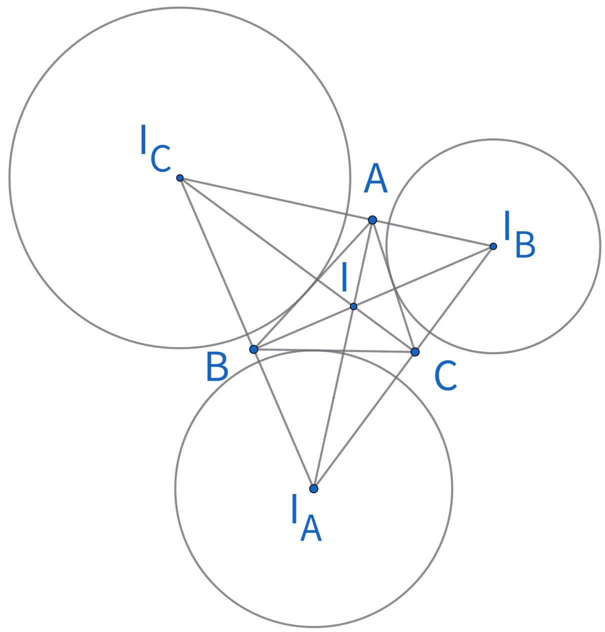


图 35: 旁心三角形

Part IV
圆幂与根心

18 圆幂

Definition 18.1 (圆幂)**.** 定义 P 点到圆 O 的圆幂为

$$\mathrm{Pow}_O(P) = OP^2 - R^2,$$

其中 R 为圆 O 的半径，OP 为点 P 到圆心的距离。

Theorem 18.1 (圆幂定理)**.** 假设平面内有一半径为 R 的圆 O，P 为平面内任意一点。
(1) $\mathrm{Pow}_O(P)$ 根据 P 在圆外，圆上或圆内分别取正值、零、负值。
(2) 若直线 l 经过点 P，与圆 O 相交于两点 A 和 B，则

$$PA \cdot PB = |\mathrm{Pow}_O(P)|$$

(3) 若 P 在圆外，PA 与圆相切于点 A，则

$$PA^2 = |\mathrm{Pow}_O(P)|$$

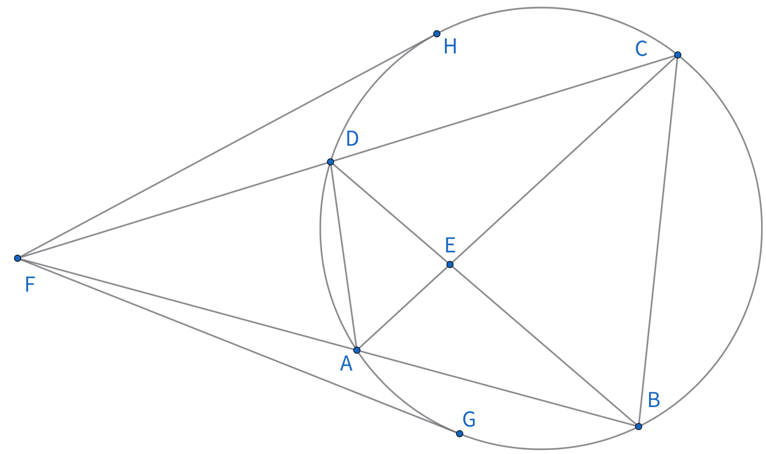


图 36: 圆幂定理

Remark 18.1. 定点到定圆的圆幂是一个定值，与割线的取法无关。

Theorem 18.2 (圆幂逆定理)**.** 设 A, B, C, D 是平面上四个不同的点，直线 AB 和 CD 相交于 P。假设 P 或者同时在两条线段 AB 和 CD 内，或者同时在两条线段外。若 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$，则 A, B, C, D 四点共圆。

19 根轴

Theorem 19.1 (根轴)**.** 对于两已知圆有等幂点的轨迹，为一条垂直于连心线的直线。

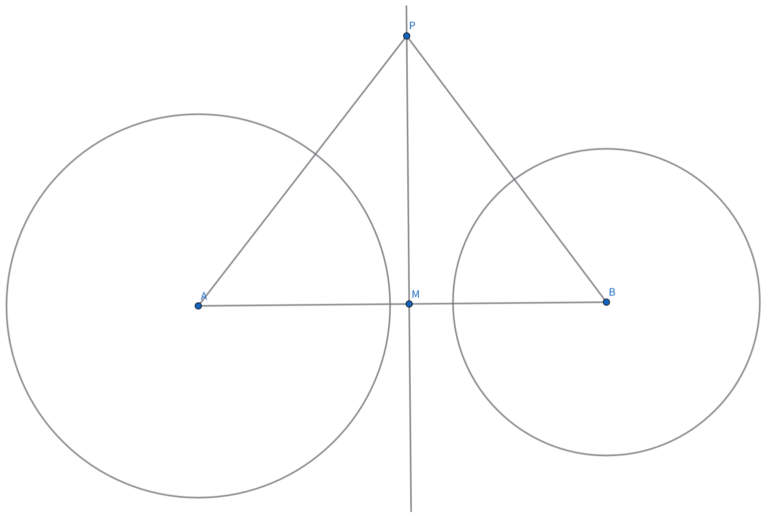


图 37: 根轴

Proposition 19.2 (根轴性质)**.** 两圆的根轴有如下性质：
(1) 若两圆相交，其根轴就是公共弦所在的直线。
(2) 若两圆相切 (内切或外切)，其根轴就是过两圆切点的公切线。
(3) 若两圆外离，则两圆的四条公切线的中点在根轴上。

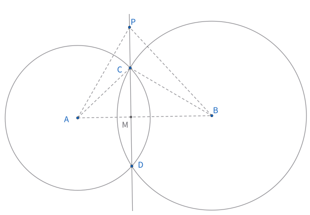


图 38: 相交圆根轴

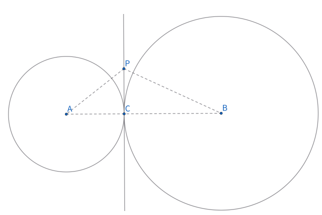


图 39: 相切圆根轴

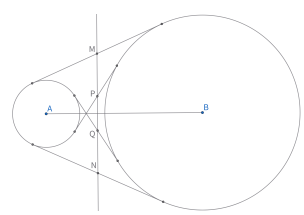


图 40: 相离圆根轴

Exercise 19.1. 设 P 在 $\triangle ABC$ 的内部，假设 BC 与 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 的外接圆均相切。证明：射线 AP 平分 $\overline{BC}$。

Exercise 19.2. 用根轴证明三角形的垂心存在，也就是说，若 AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的三个高，证明它们共点。

20 根心

Theorem 20.1 (根心定理)**.** 平面内的三个定圆，他们两两的根轴或相交于一点，或互相平行。

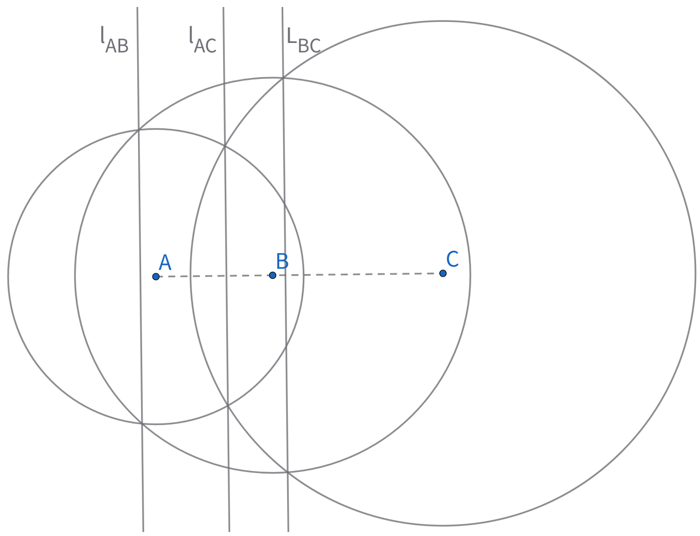


图 41: 平行根轴

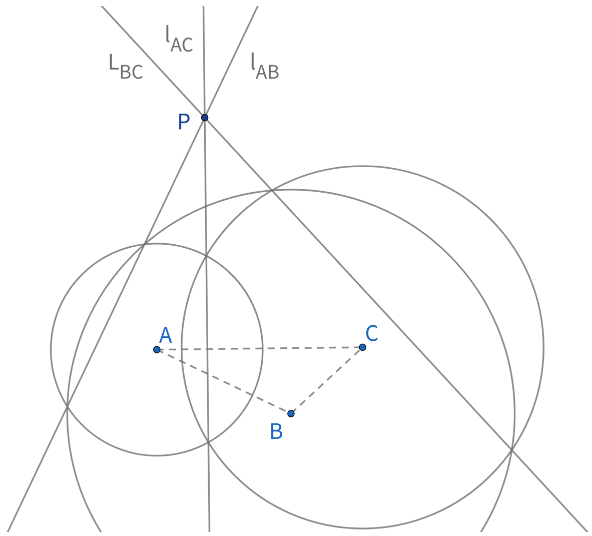


图 42: 根心

Exercise 20.1. (USAMO 2009/1) 两圆 ω_1, ω_2 的圆心与 ω_1 相交于点 X, Y。直线 l_1 经过 ω_1 的圆心与 ω_2 相交于 P, Q；直线 l_2 经过 ω_2 的圆心与 ω_1 相交于 R, S。证明：若 P, Q, R, S 共圆，则此圆圆心在直线 XY 上。

Part V

三点共线与三线共点

21 梅涅劳斯定理

Theorem 21.1 (梅涅劳斯 (Menelaus) 定理)**.** 如果一条不通过 A, B, C 三点的直线与 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 所在直线分别交于 X, Y, Z, 则

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

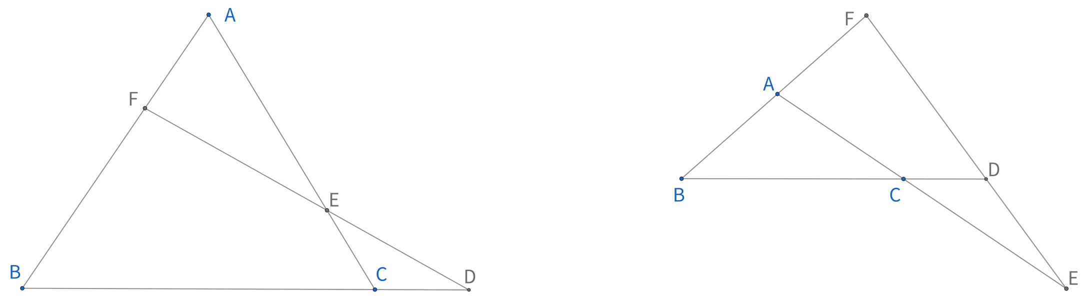
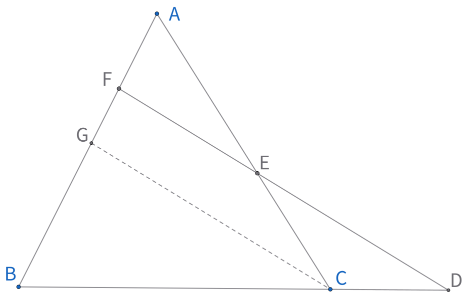


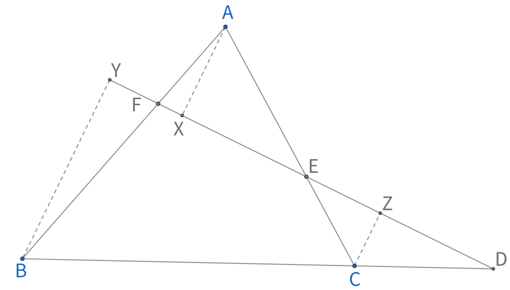
图 43: 两种情形的梅涅劳斯定理

Theorem 21.2 (梅涅劳斯 (Menelaus) 逆定理)**.** 如果 X, Y, Z 中有偶数个点在 $\triangle ABC$ 的三边上，且点 X, Y, Z 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 所在直线上的点，满足

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1,$$

则 X, Y, Z 三点共线.





Remark 21.1. 梅涅劳斯定理中的恒等式可以按照顶点-截点-顶点的顺序记忆。

例如对 $\triangle ABC$ 首先确定三边顺序 AB, BC, AC, 然后确定各个边上的截点 X, Y, Z, 与各边顶点连接起来就得到了 (AX-XB)-(BY-YC)-(CZ-ZA)。

截线 XYZ 可以交于三边的延长线。

正定理多用于获得截线段比值关系，逆定理多用于证明三点共线问题。

22 塞瓦定理

Theorem 22.1 (塞瓦 (Ceva) 定理)**.** 已知平面上 $\triangle ABC$ 和点 P(P 不在 $\triangle ABC$ 三边上)，直线 AP, BP, CP 分别与直线 BC, CA, AB 交于点 X, Y, Z ，则

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

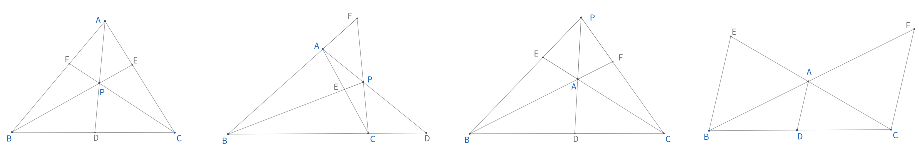
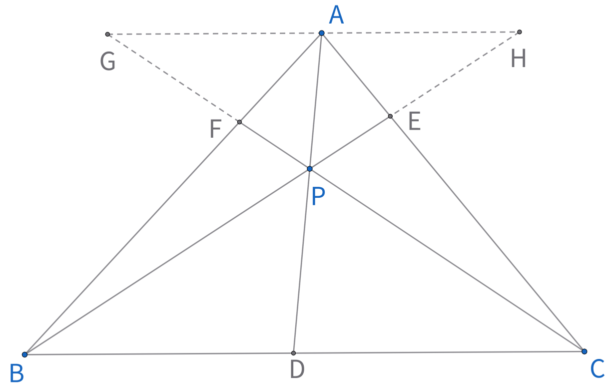


图 44: 四种情形的塞瓦定理

Theorem 22.2 (塞瓦 (Ceva) 逆定理)**.** 如果 X, Y, Z 中有奇数个点在 $\triangle ABC$ 的三边上，且点 X, Y, Z 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 所在直线上的点，满足

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1,$$

则 AX, BY, CZ 三条直线交于一点或彼此平行.



Remark 22.1. 塞瓦定理与梅涅劳斯定理的记忆方法类似，都是按照顶点-截点-顶点的顺序。

塞瓦定理中点 P 可以不在 $\triangle ABC$ 形内。

P 为无穷原点时, BE, AD, CF 三线平行, 等式依然成立。

Theorem 22.3 (角元形式赛瓦定理)**.** 已知平面上 $\triangle ABC$ 和点 P (P 不在 $\triangle ABC$ 三边上)。设 D, E, F 分别是 BC, CA, AB 所在直线上的点。则 AD, BE, CF 三线共点等价于

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}=1$$

23 西姆松定理

Theorem 23.1 (西姆松 (Simson) 定理)**.** 过 $\triangle ABC$ 外接圆 O 上异于三角形顶点的任意一点 P 作三边所在直线的垂线, 则三垂足共线, 此线称为西姆松线 (Simson line)。
西姆松定理的逆定理为: 若一点 P 在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上。

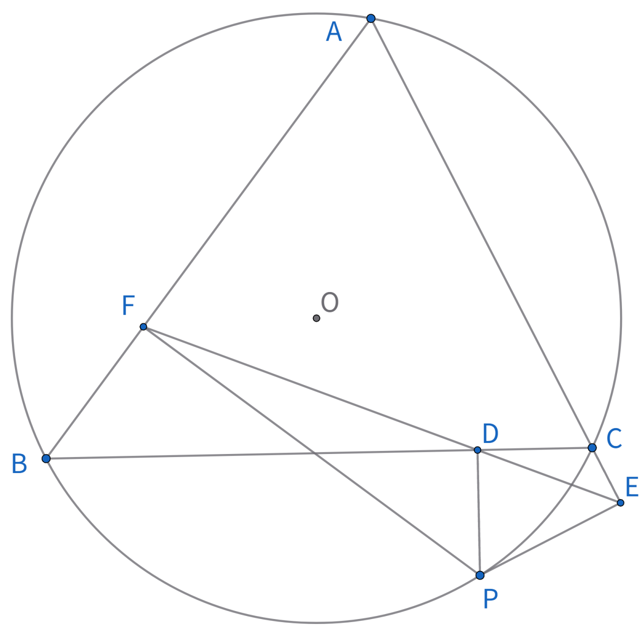


图 45: 西姆松线

24 帕普斯定理

Theorem 24.1 (帕普斯 (Pappus) 定理)**.** 直线 l1 上依次有点 A, B, C, 直线 l2 上依次有点 D, E, F。设 AE, BD 交于 P, AF, DC 交于 Q, BF, EC 交于 R, 则 P, Q, R 共线。

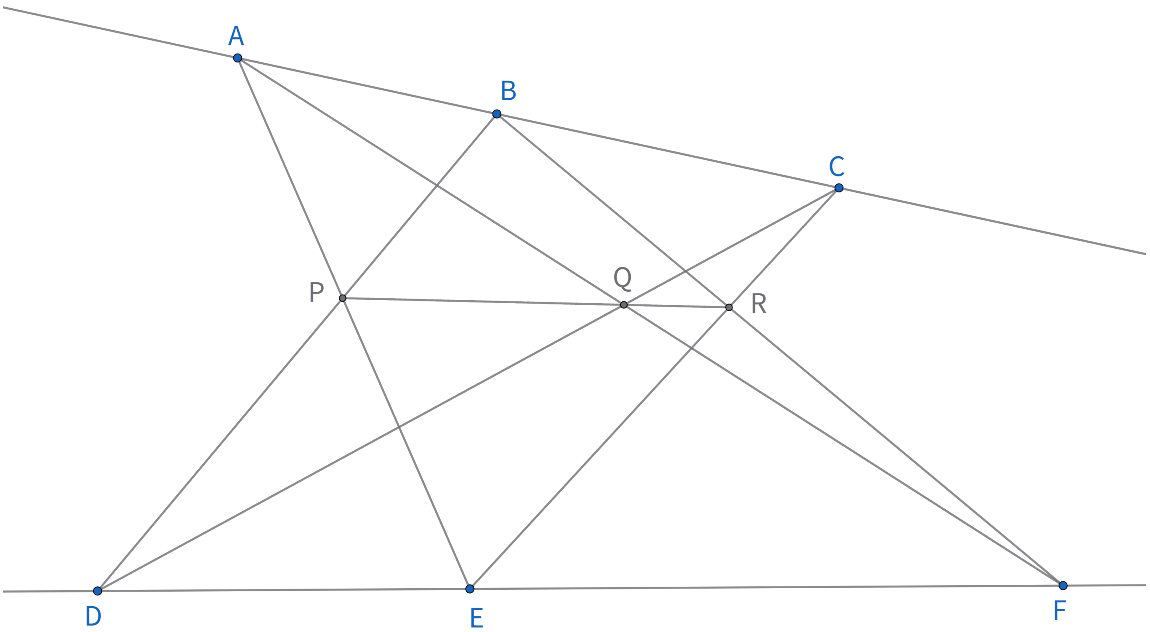


图 46: 帕普斯定理

25 帕斯卡定理

Theorem 25.1 (帕斯卡 (Pascal) 定理)**.** 设 A, B, C, D, E, F 为圆 O 上的点, 设 AE, BD 交于 P, AF, DC 交于 Q, BF, EC 交于 R, 则 P, Q, R 共线。

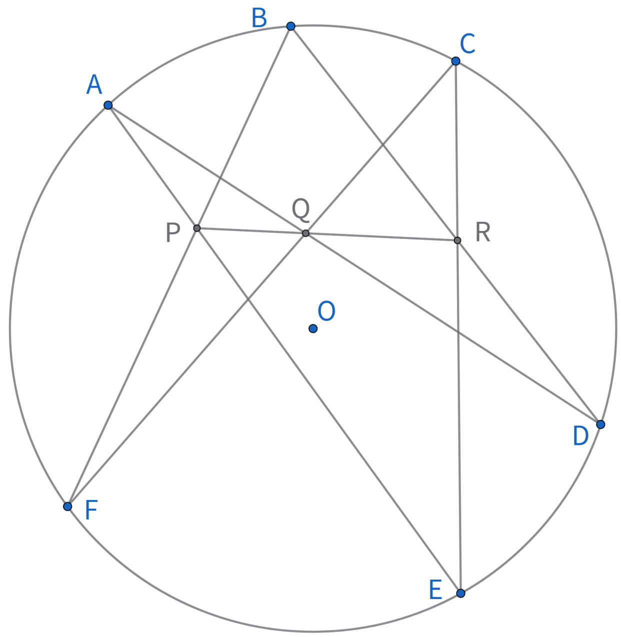


图 47: 帕斯卡定理

26 勒莫恩定理

Theorem 26.1 (勒莫恩 (Lemoine) 定理)**.** 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 作它外接圆 O 的切线, 分别和 BC, CA, AB 所在直线交于 D, E, F, 则 D, E, F 三点共线。

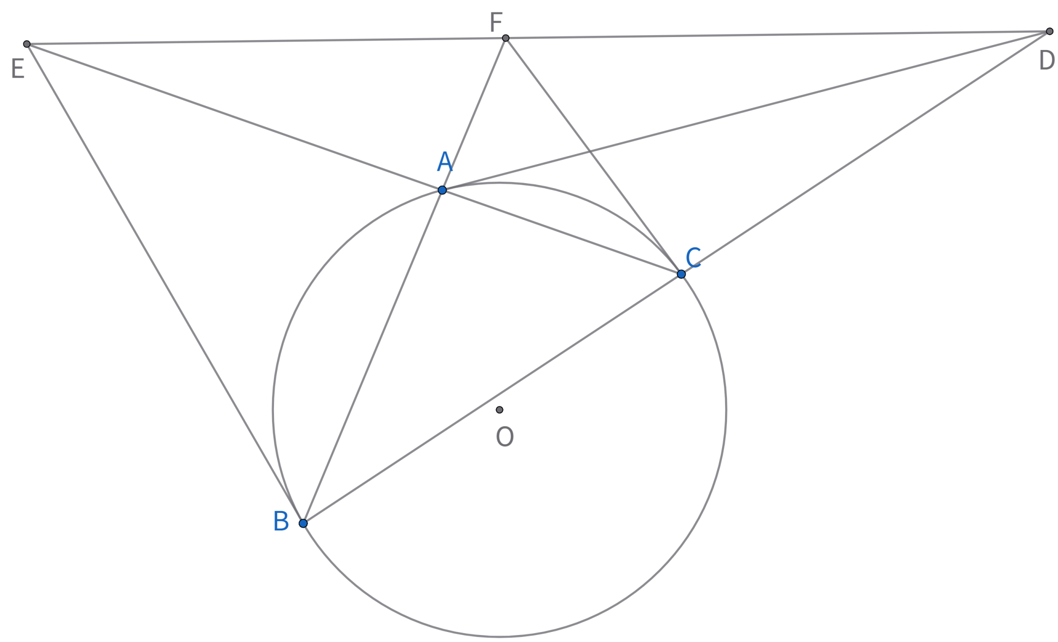


图 48: 勒莫恩定理

27 笛沙格定理

Theorem 27.1 (笛沙格 (Desargues) 定理)**.** 若 $\triangle ABC, \triangle DEF$ 的对应顶点连线共点(此点称为透视中心)，则其对应边的交点一定共线 (此线称为透视轴)。此定理的逆定理亦成立。满足德萨格定理的两个三角形称为透视的。

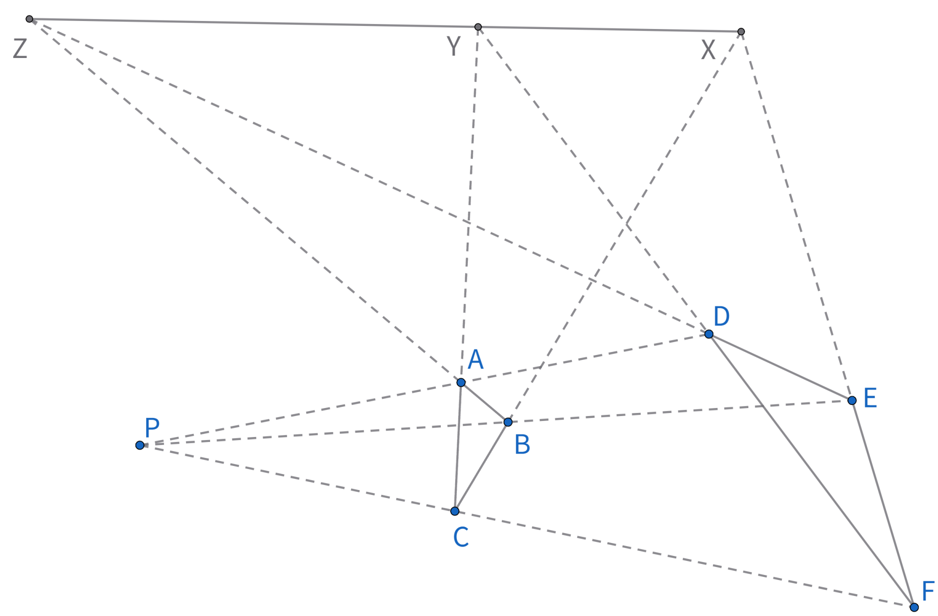


图 49: 笛沙格定理

28 布拉美古塔 (婆罗摩笈多) 定理

Theorem 28.1 (婆罗摩笈多 (Brahmagupta) 定理)**.** 圆内接四边形 ABCD 的对角线相互垂直, 交点为 M。过 M 做 BC 垂线交 BC 于点 E, 交 AD 于点 F, 则 F 是 AD 的中点。

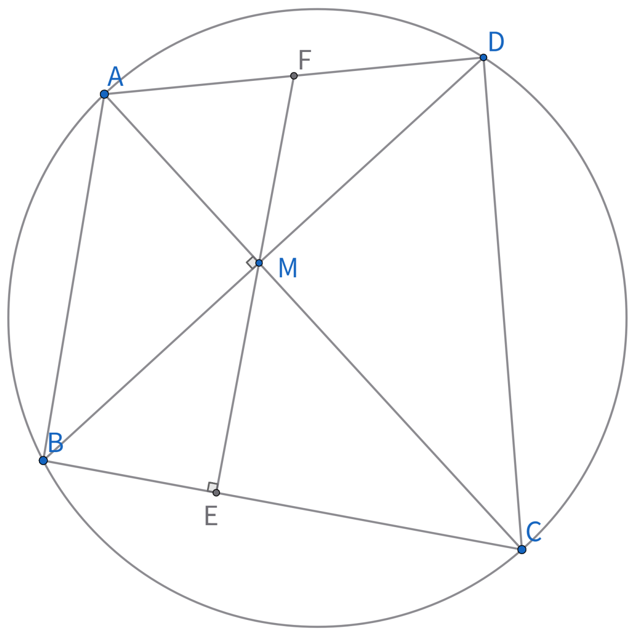


图 50: 婆罗摩笈多定理

29 牛顿定理

Theorem 29.1 (牛顿 (Newton) 定理)**.** 圆的外切四边形的对角线交点与对边切点连线交于一点。

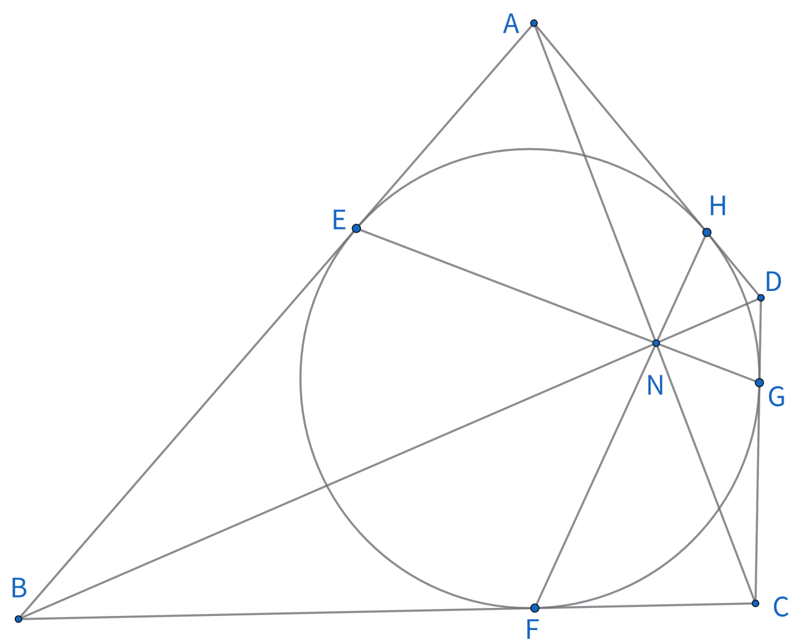


图 51: 牛顿定理

30 布利安香定理

Theorem 30.1 (布利安香 (Brainchon) 定理)**.** 若一个六边形的六条边均与同一圆锥曲线相切，则该六边形的三条主对角线共点，该交点称为布列安桑点。

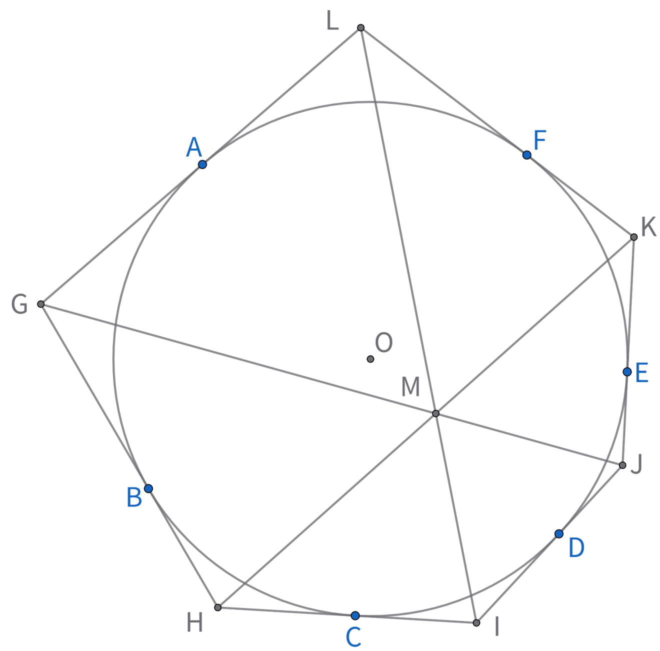


图 52: 布利安香定理