

## Part I

# 三角形五心

## 1 外心

**Definition 1.1** (外心). 三角形外接圆的圆心简称为三角形的外心，通常使用  $O$  表示。

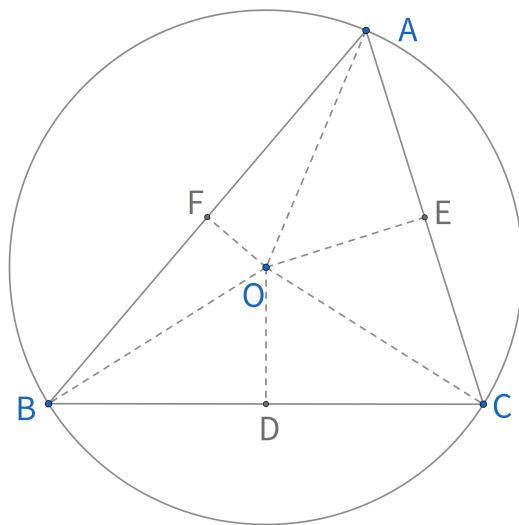


图 1: 外心

**Proposition 1.1** (外心性质). 三角形外心具有如下性质。

- (1) 三角形的外心是三条边中垂线的交点。
- (2) 平面内一点是三角形外心的充分必要条件为：该点到三顶点的距离相等。
- (3) 平面内一点  $O$  是三角形  $\triangle ABC$  外心的充分必要条件为：

$$\angle BOC = 2A, \quad \angle COA = 2B, \quad \angle AOB = 2C.$$

- (4)  $BC = 2R \sin A$ ,  $AC = 2R \sin B$ ,  $AB = 2R \sin C$ .
- (5) 锐角三角形的外心在形内，直角三角形的外心为斜边中点，钝角三角形的外心在形外。

## 2 内心

**Definition 2.1** (内心). 三角形内切圆的圆心简称为三角形的内心, 通常使用  $I$  表示。

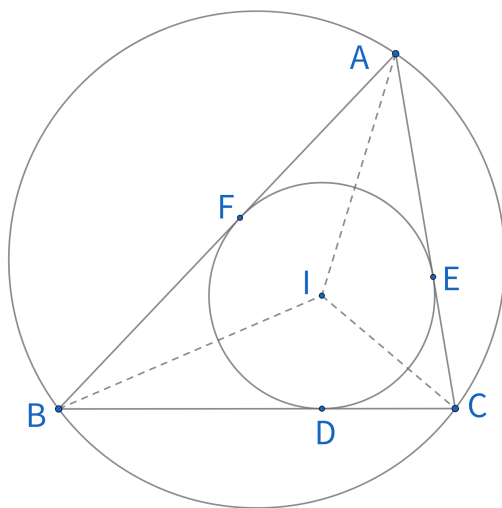


图 2: 内心

**Proposition 2.1** (内心性质). 三角形内心具有如下性质。

- (1) 三角形的内心是三条内角平分线的交点。
- (2) 内心到三边的距离相等。
- (3) 平面内一点  $I$  是三角形  $\triangle ABC$  内心的充分必要条件为:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A, \quad \angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}B, \quad \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}C.$$

- (4) 设  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别为内切圆  $I$  在  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  上的切点, 那么

$$ID \perp BC, \quad IE \perp AC, \quad IF \perp AB.$$

切线长度可由三边边长表示:

$$BF = BD = \frac{1}{2}(a + c - b), \quad CD = CE = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad AE = AF = \frac{1}{2}(b + c - a).$$

**Theorem 2.2** (鸡爪定理). 对平面内任意  $\triangle ABC$ ,  $O$ 、 $I$  分别为其外心和内心。设  $AI$  延长线与圆  $O$  相交于  $D$ ,  $D$  为  $\widehat{BC}$  的中点, 并且满足

$$DB = DI = DC.$$

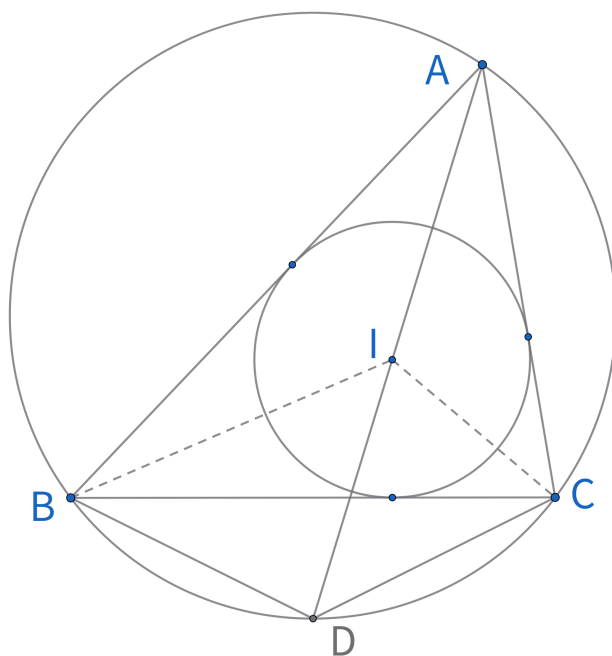


图 3: 鸡爪定理

### 3 垂心

**Definition 3.1** (垂心). 三角形三边上高线的交点称为三角形的垂心, 通常使用  $H$  表示。

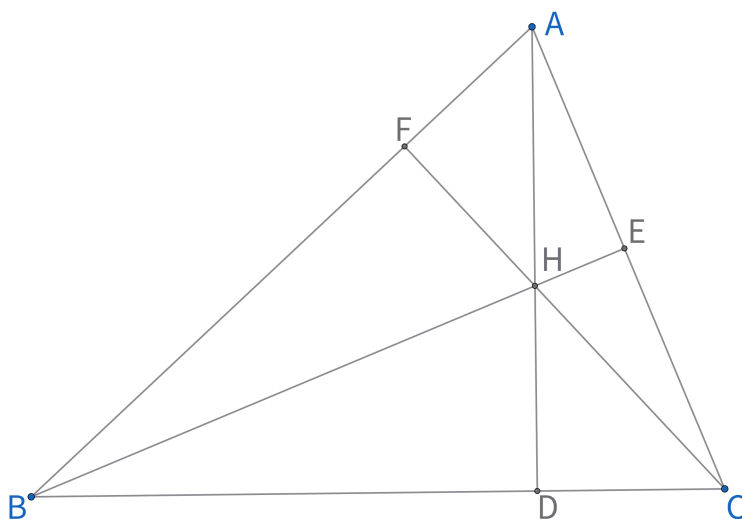


图 4: 垂心

**Proposition 3.1** (垂心性质). 三角形垂心具有如下性质。

(1) 若  $H$  是三角形  $\triangle ABC$  的垂心, 则

$$\angle BHC = 180^\circ - A, \quad \angle AHC = 180^\circ - B, \quad \angle AHB = 180^\circ - C.$$

(2) 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $R$ , 则

$$AH = 2R \cdot |\cos A|, \quad BH = 2R \cdot |\cos B|, \quad CH = 2R \cdot |\cos C|.$$

(3) 垂心  $H$  为垂足  $\triangle DEF$  的内心。

(4) 锐角三角形的垂心在形内, 直角三角形的垂心在直角顶点, 钝角三角形的垂心在形外。

(5) 若  $H$  为三角形  $\triangle ABC$  的垂心, 则  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $H$  四点中任意一点是其余三点构成的三角形的垂心, 称  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $H$  为垂心组。

### 3.1 垂足三角形

**Proposition 3.2** (垂足三角形). 设  $\triangle DEF$  是锐角  $\triangle ABC$  的垂足三角形,  $H$  是垂心, 则: (1)  $A, E, F, H$  在以  $AH$  为直径的圆上。  
(2)  $B, E, F, C$  在以  $BC$  为直径的圆上。  
(3)  $H$  是  $\triangle DEF$  的内心。

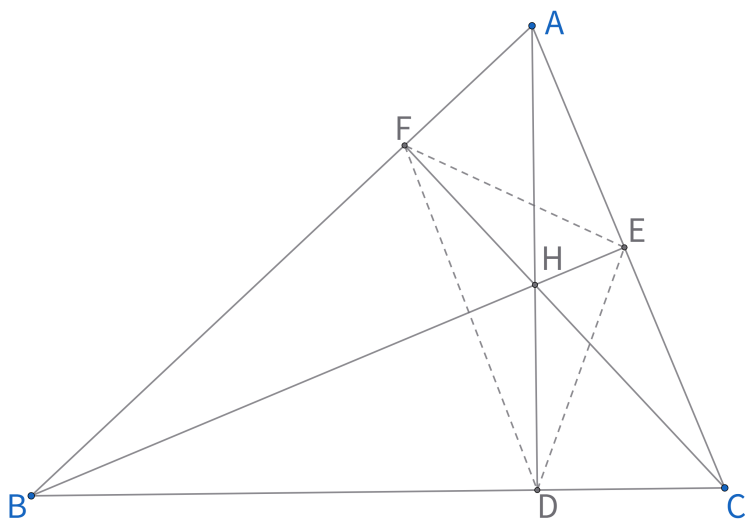


图 5: 垂足三角形

### 3.2 垂心的对称性质

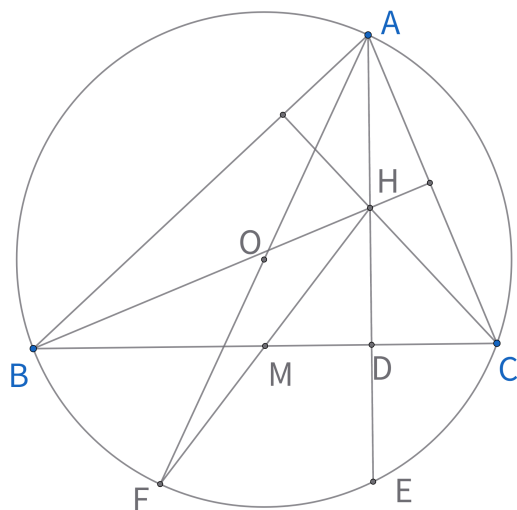


图 6: 垂心性质

**Theorem 3.3** (垂心的对称性质). 设  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心, 设  $E$  是  $H$  关于  $BC$  的对称点,  $F$  是  $H$  关于  $BC$  中点  $M$  的对称点。

- (1)  $E$  在  $\triangle ABC$  的外接圆  $O$  上。
- (2)  $F$  在  $\triangle ABC$  的外接圆  $O$  上。
- (3)  $A, O, F$  三点共线。
- (4) (卡诺定理) 顶点到垂心距离是外心到对边距离的 2 倍, 即  $AH = 2OM$ .
- (5)  $H$  是外心  $O$  关于  $\triangle ABC$  的等角共轭点, 即

$$\angle BAO = \angle CAH, \quad \angle ACO = \angle BCH, \quad \angle CBO = \angle ABH.$$

## 4 重心

**Definition 4.1** (重心). 三角形三条中线的交点称为三角形的重心，通常使用  $G$  表示。

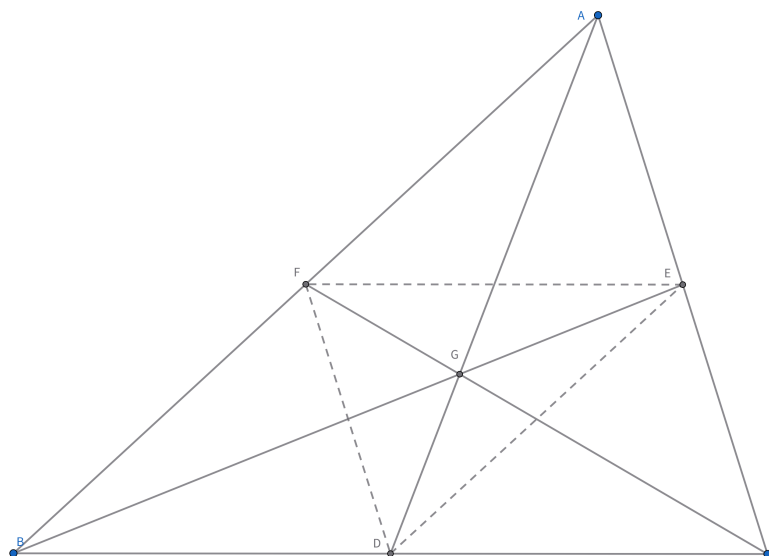


图 7: 重心

**Proposition 4.1** (重心性质). 三角形重心具有如下性质。

(1) 重心  $G$  为三条中线的三等分点，满足

$$AG = 2GD, \quad BG = 2GE, \quad CG = 2GF.$$

(2) 三边与重心组成的三角形面积相等，即

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG}.$$

(3)  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且相似比为 2.

(4)  $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$ .

## 5 旁心

**Definition 5.1** (旁心). 与三角形一边外侧相切, 又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆, 通常用  $J$ , 或者  $I_a, I_b, I_c$  表示。

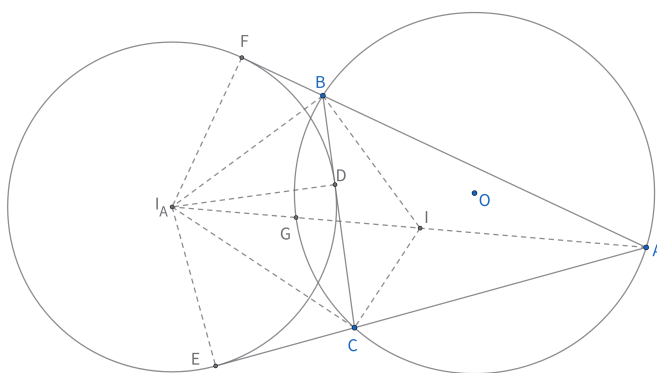


图 8: 旁心

**Proposition 5.1** (旁心性质). 三角形旁心具有如下性质。

- (1) 旁心是三角形一内角平分线及其他两角外角平分线的交点。
- (2) 旁心到三角形三边的距离相等。
- (3)  $\angle I_A B C = 90^\circ - \frac{1}{2} B$ ,  $\angle I_A C B = 90^\circ - \frac{1}{2} C$ ,  $\angle B I_A C = 90^\circ - \frac{1}{2} A$ .
- (4)  $IB \perp B I_A$ ,  $IC \perp C I_A$ , 所以  $B, I, C, I_A$  四点共圆, 且圆心为  $\widehat{BC}$  的中点。
- (5) 内心  $I$  是旁心三角形  $I_A I_B I_C$  的垂心。
- (6) 设  $D, E, F$  分别为内切圆  $I$  在  $BC, CA, AB$  上的切点, 则定点到旁切圆的切线长度可由三边边长表示:

$$AE = AF = \frac{1}{2}(a + b + c), \quad BF = BD = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad CD = CE = \frac{1}{2}(a + c - b).$$



## 5.1 鸡爪定理

**Theorem 5.2** (鸡爪定理). 对平面内任意  $\triangle ABC$ ,  $I, J$  分别为其内心和 A-旁心, 设  $AI$  延长线与圆  $O$  相交于  $D$ , 则  $D$  为  $BC$  的中点,  $IJ$  的中点, 并且为  $IBJC$  外接圆的圆心。

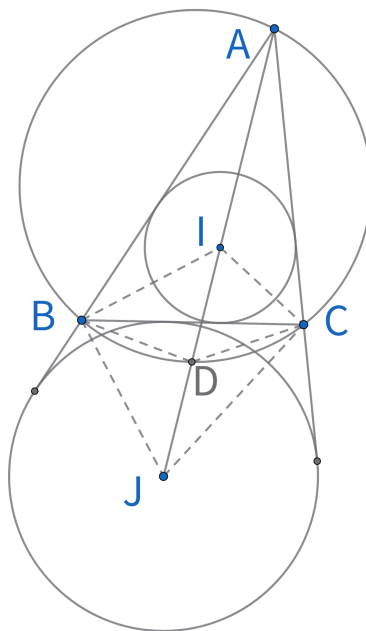


图 9: 鸡爪定理

## 5.2 旁心三角形

**Proposition 5.3** (旁心三角形). 对平面内任意  $\triangle ABC$ ,  $I, I_A, I_B, I_C$  为其内心和三旁心。则  $I$  是旁心所构成  $\triangle I_A I_B I_C$  的垂心。

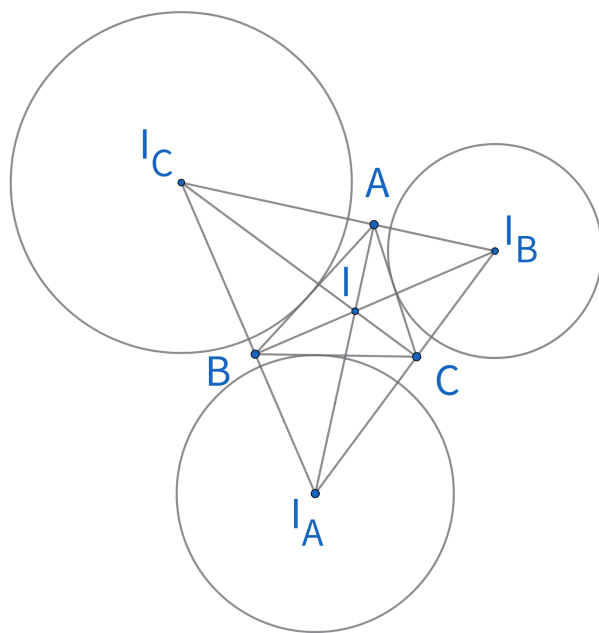


图 10: 旁心三角形