

Part I

全等与相似

1 全等三角形

1.1 基础定义

Definition 1.1 (全等关系). (1) 经过翻转、平移、旋转后，能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

(2) 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等，记作

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

(3) 全等三角形的三组对应边以及三组对应角全部相等，即

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F.$$

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF.$$

1.2 判定定理

Theorem 1.1 (全等三角形判定定理). 若两三角形满足下列判别法中的其一，则一定全等。

SSS (边边边): 三组边对应相等。

SAS (边角边): 两边及其夹角对应相等。

ASA (角边角): 两角及其夹边对应相等。

AAS (角角边): 两角及其中一角的对边对应相等。

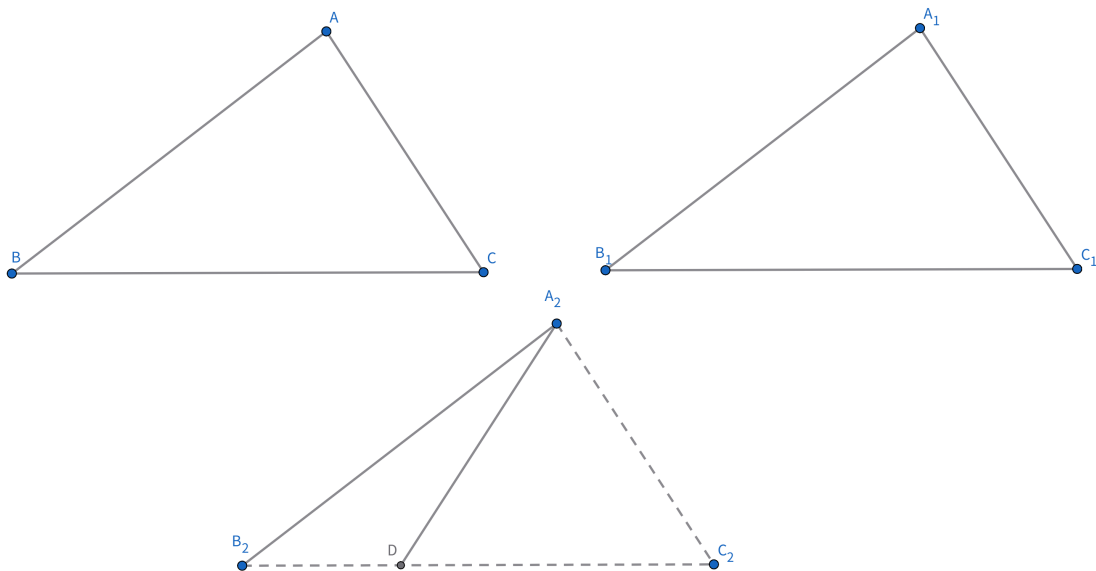


图 1: 边边角不能判定全等

2 平行线分线段成比例定理

Theorem 2.1 (平行线分线段成比例定理). 假设有三条直线 l_1, l_2, l_3 互相平行, 设另两条直线分别与 l_1, l_2, l_3 相交于 A, B, C 和 D, E, F 点。则

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

Proposition 2.2 (平行相似). 在 $\triangle ABC$ 中, 取 AB, AC 上的点 D, E 平行于 BC , 则一定有 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

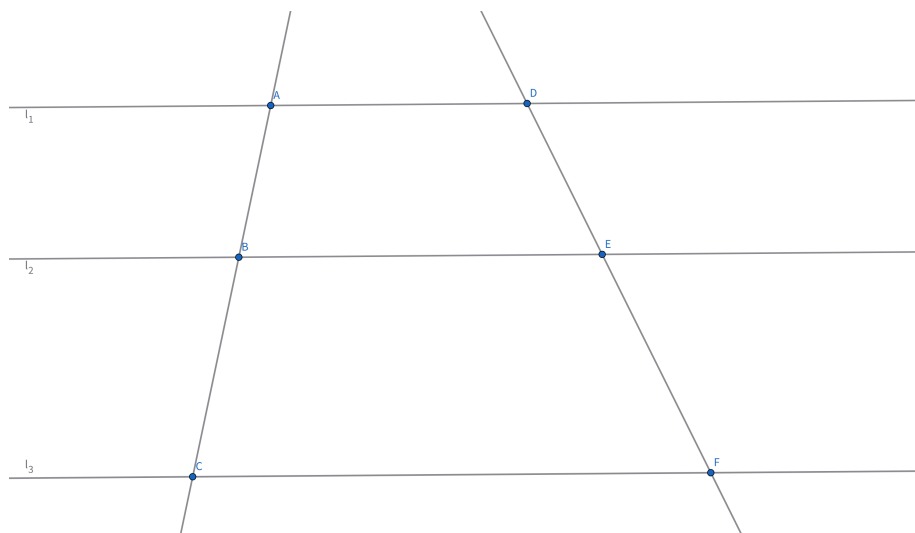


图 2: 平行线分线段成比例

3 相似三角形

3.1 基本概念

Definition 3.1 (相似关系). (1) 对应角相等, 对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形。

(2) 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似, 记作

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

(3) 相似三角形的三组对应角全部相等, 即

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F.$$

(4) 相似三角形的三组对应边比例相等, 即

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k.$$

k 称作是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比。特别的, $k=1$ 时两三角形即为全等。

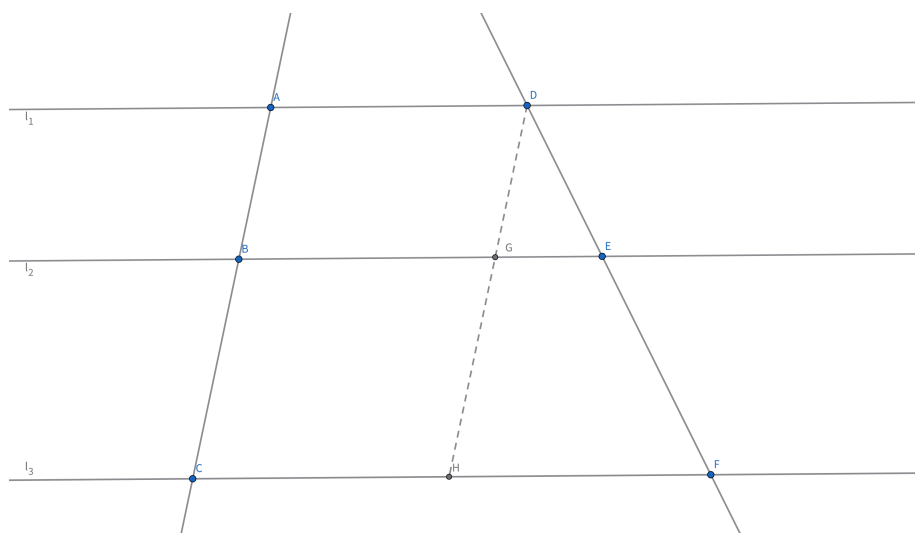


图 3: 平行相似

Proposition 3.1. (5) 相似三角形的对应线段比也都等于相似比 k ，例如对应高线、角平分线、中线、中位线等。

(6) 相似三角形的面积比为相似比的平方，即

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = k^2.$$

(6) 相似三角形同样具有传递性。

3.2 判定定理

Theorem 3.2. 若两三角形满足下列判别法中的其一，则一定相似。

AA (角角) / AAA (角角角): 两角对应相等，则两三角形相似。

SAS (边角边): 两边对应成比例且夹角相等，则两三角形相似。

SSS (边边边): 三边对应成比例，则两三角形相似。

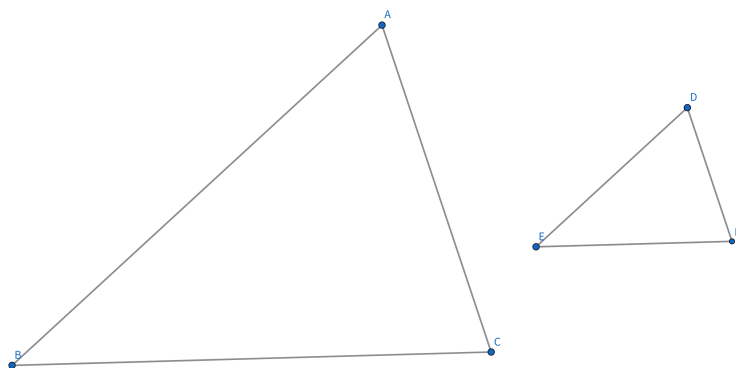


图 4: 相似三角形

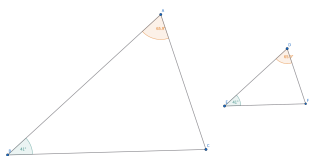


图 5: AA 相似

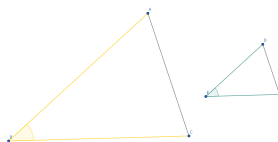


图 6: SAS 相似

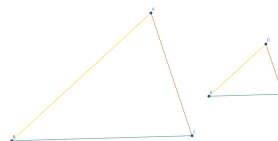


图 7: SSS 相似

3.3 常见形式

3.4 射影定理

Theorem 3.3 (射影定理). 在直角 $\triangle ABC$ 中, AD 为斜边 BC 上的垂线, D 为垂足。有下面等式成立:

$$BA^2 = BD \cdot BC,$$

$$CA^2 = CD \cdot CB,$$

$$AD^2 = DB \cdot DC$$

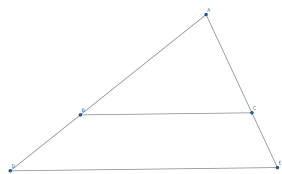


图 8: 平行相似

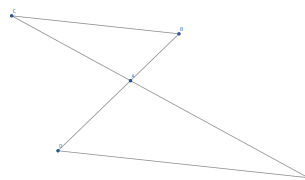


图 9: 平行相似

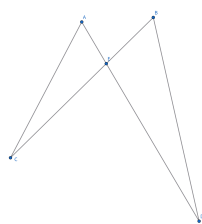


图 10: 蝴蝶型相似

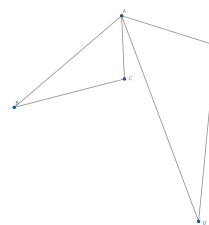


图 11: 旋转型相似

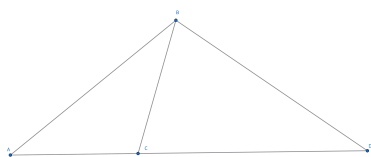


图 12: 子母型相似

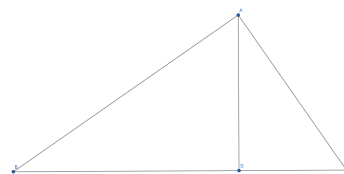


图 13: 直角子母型相似

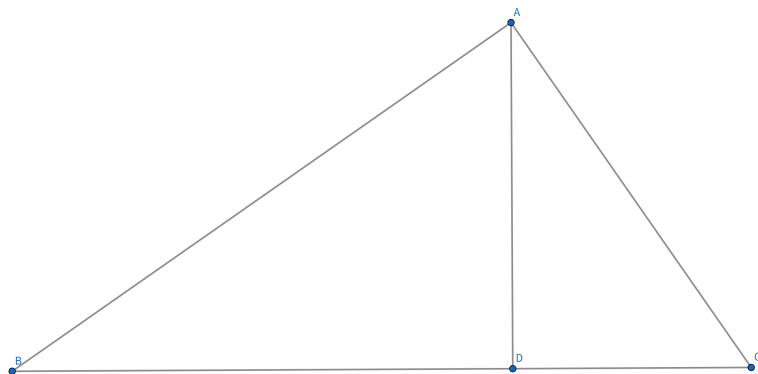


图 14: 射影定理