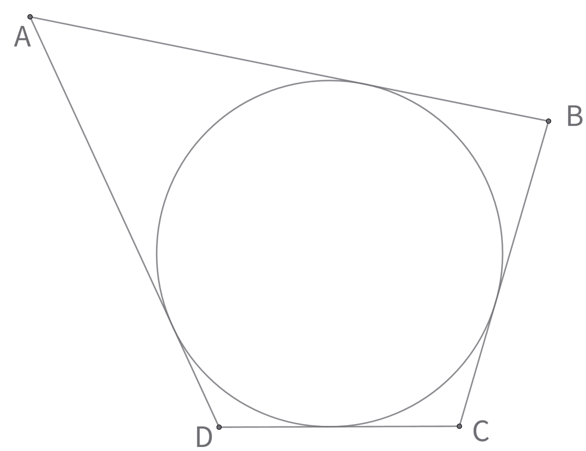
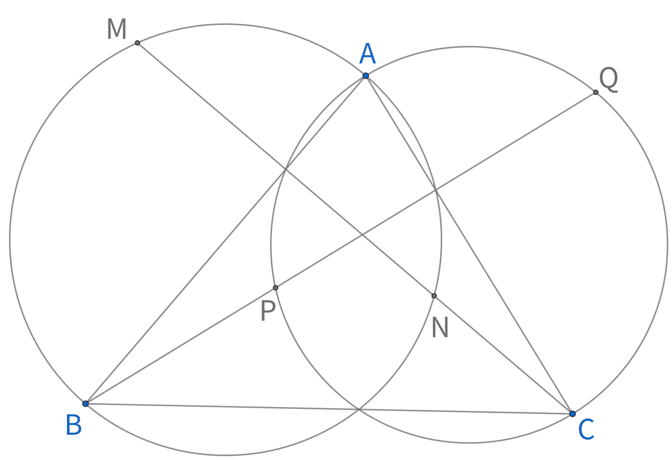
Part I

圆与三角形五心

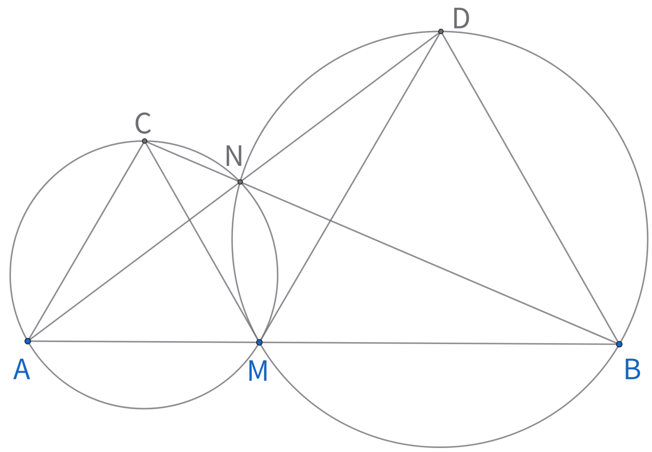
Exercise 0.1. (Pitot 定理) 设四边形 $ABCD$ 有一个内切圆，证明：$AB+CD=BC+DA$。（逆定理同样成立）



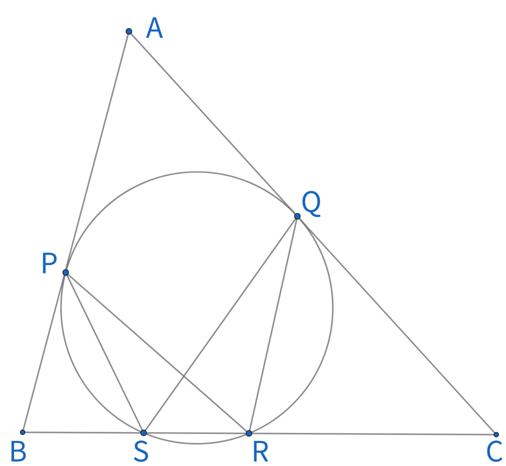
Exercise 0.2. (USAMO 1990/5) 平面上给定锐角 $\triangle ABC$。以 AB 为直径的圆与高 CC' 及其延长线分别交于 M,N，以 AC 为直径的圆与高 BB' 及其延长线分别交于 P,Q。证明：M,N,P,Q 四点共圆。



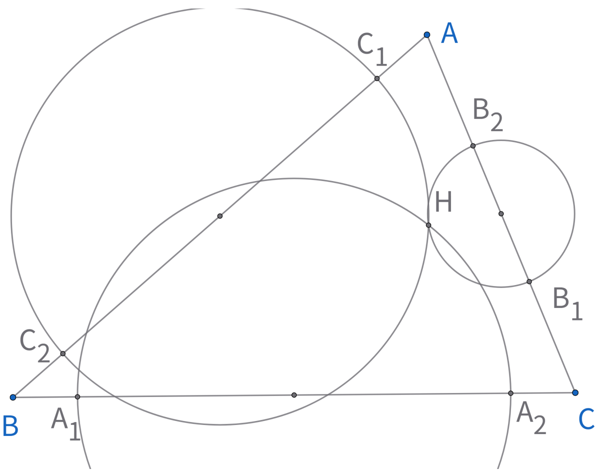
Exercise 0.3. (BAMO 2012/4) 给定平面上的线段 AB，在在线段上选择不同于 A, B 的一点 M。平面上两个等边 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMD$ 在线段 AB 的同一侧，两个三角形的外接圆交于点 M 和另外一点 N。(a) 证明：AD 和 BC 经过点 N。(b) 证明：当 M 在线段 AB 上移动时，所有的直线 MN 经过平面上某固定点 K。



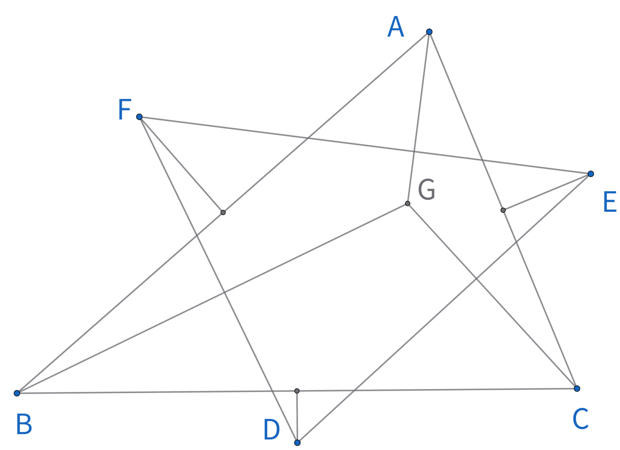
Exercise 0.4. (JMO 2012/1) 给定 $\triangle ABC$，设 P, Q 分别是线段 AB, AC 上的点，满足 $AP = AQ$。设 S, R 是线段 BC 上的不同点，S 在 B, R 之间，$\angle BPS = \angle PRS$，$\angle CQR = \angle QSR$。证明：P, Q, R, S 四点共圆。



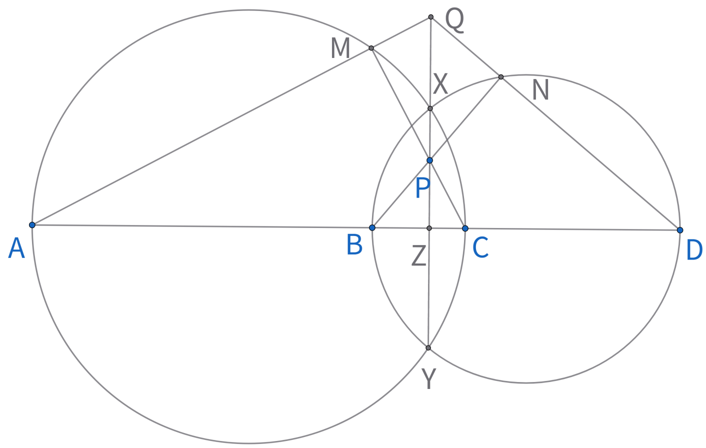
Exercise 0.5. (IMO 2008/1) 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心。圆 Γ_A 以 BC 的中点为圆心，过点 H，交直线 BC 于点 A_1, A_2。类似地定义点 B_1, B_2, C_1, C_2。证明：六个点 $A_1, A_2, B_2, B_2, C_1, C_2$ 共圆。



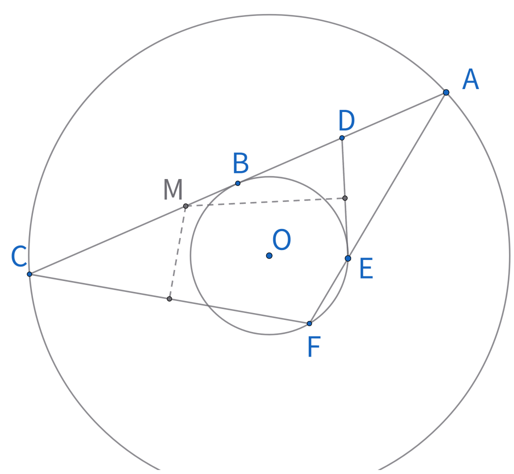
Exercise 0.6. (USAMO 1997/2) 给定 $\triangle ABC$，点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 的垂直平分线上。证明：过 A, B, C 分别垂直于 EF, FD, DE 的直线共点。



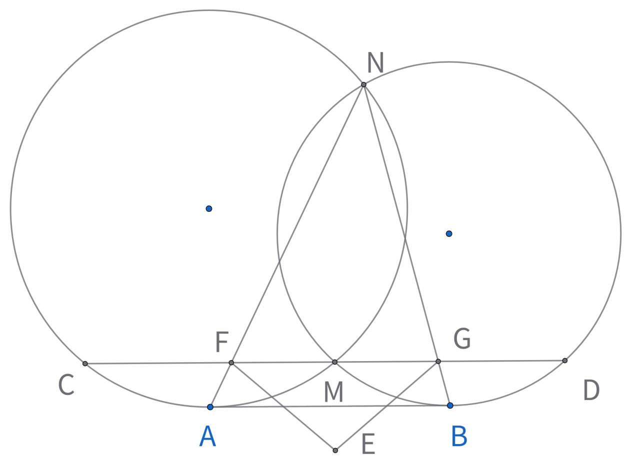
Exercise 0.7. (IMO 1995/1) 设 A, B, C, D 是一条直线上的依次四点。以 AC 和 BD 为直径的圆相交于 X, Y，直线 XY 交 BC 于 Z，点 P 是 XY 上不同于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆交于 C, M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆交于 B, N。证明：直线 AM, DN, XY 三线共点。



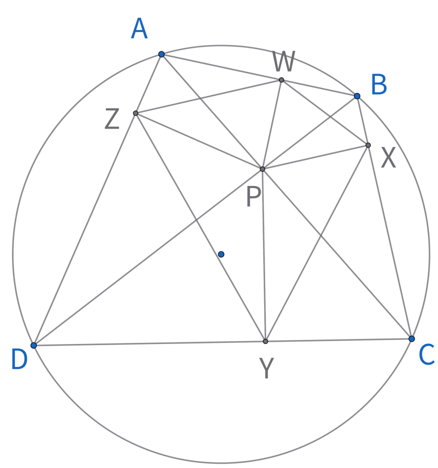
Exercise 0.8. (USAMO 1998/2) 已知 C_1 和 C_2 是两个同心圆 (C_2 在 C_1 内)。点 A 为 C_1 上任意一点，过 A 引 C_2 的切线 AB ($B \in C_2$)，交 C_1 于另一点 C，取 AB 的中点 D. 过 A 引一条直线交 C_2 于点 E 和 F，使得 DE 和 CF 的中垂线交于 AB 上一点 M. 求 $\frac{AM}{MC}$ 的值，并予以证明。



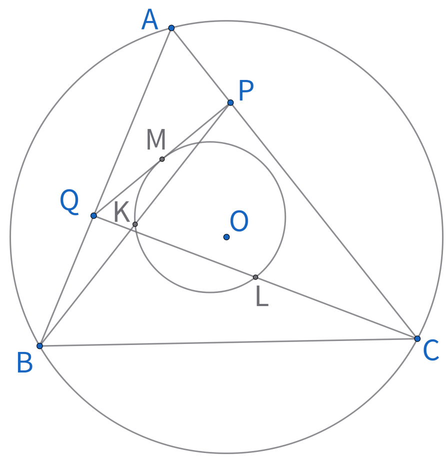
Exercise 0.9. (IMO 2000/1) 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N。设直线 AB 与 G_1, G_2 分别相切于 A, B，并且 M 距离 AB 比 N 近。设直线 CD 经过点 M 且与 AB 平行，C 在 G_1 上，D 在 G_2 上。直线 CA 和 DB 相交于点 E，直线 AN 和 CD 相交于点 P，直线 BN 和 CD 相交于点 Q。证明：$EP = EQ$。



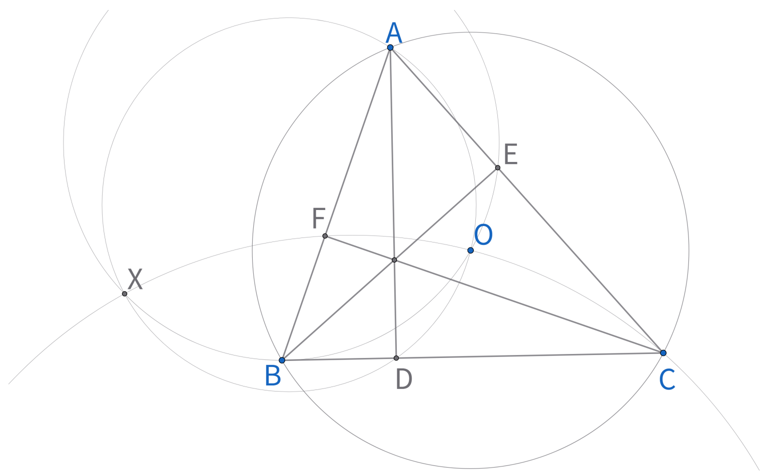
Exercise 0.10. (加拿大 1990/3) 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 P。设 W, X, Y, Z 分别是 P 到 AB, BC, CD, DA 的投影。证明：$WX + YZ = XY + WZ$。



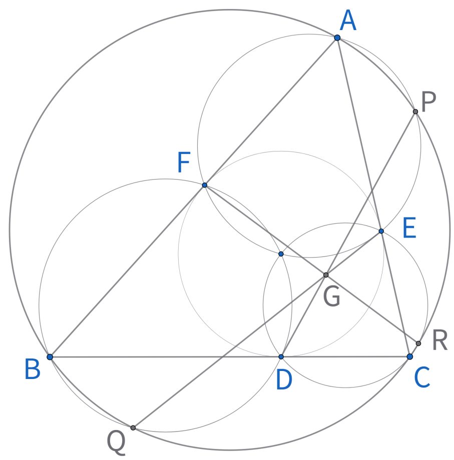
Exercise 0.11. (IMO 2009/2) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O。点 P, Q 分别是线段 CA, AB 内的点，点 K, L, M 分别是线段 BP, CQ, PQ 的中点，圆 F 经过 K, L, M。假设直线 PQ 与 F 相切，证明：$OP = OQ$。



Exercise 0.12. 设 AD, BE, CF 是不等边 $\triangle ABC$ 的三条高，O 是 $\triangle ABC$ 的外心。证明：三个圆 $(AOD), (BOE), (COF)$ 相交于不同于 O 的另外一点 X。



Exercise 0.13. (加拿大 2007/5) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于 D, E, F，设 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别是 $\triangle ABC, \triangle AEF, \triangle BDF, \triangle CDE$ 的外接圆。设 ω 和 ω_1 交于 A, P；ω 和 ω_2 交于 B, Q；ω 和 ω_3 交于 C, R。(a) 证明：$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 交于一点。(b) 证明：直线 PD, QE, RF 三线共点。



Exercise 0.14. (伊朗 TST 2011/1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle B > \angle C$。设 M 是 BC 的中点，E, F 分别是从 B, C 出发的高的垂足。设 K, L 分别是 ME, MF 的中点。点 T 在直线 KL 上，满足 $TA \parallel BC$。证明：$TA = TM$。