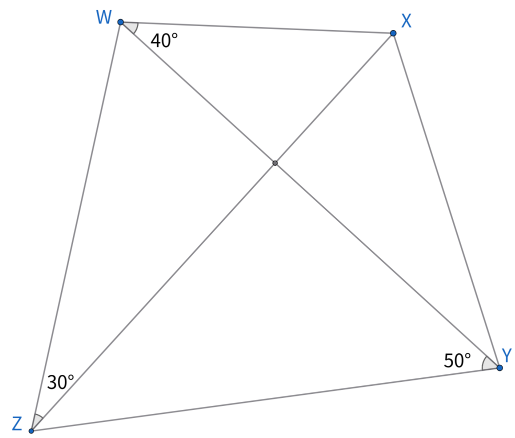
Part I

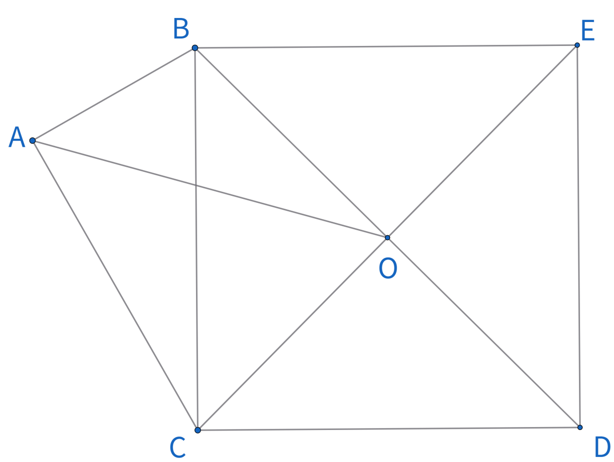
平面几何练习题

1 导角法

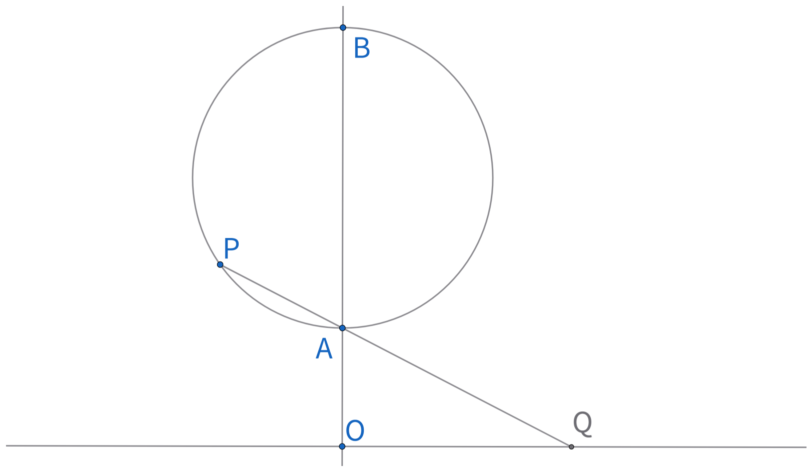
Exercise 1.1. 在四边形 $WXYZ$ 中，对角线相互垂直，已知 $\angle WZX = 30^\circ$，$\angle XWY = 40^\circ$，$\angle WYZ = 50^\circ$。(a) 求 $\angle WZY$；(b) 求 $\angle WXY$。



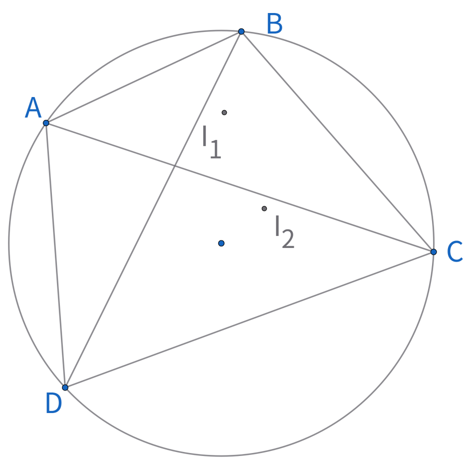
Exercise 1.2. 设 $ABCDE$ 是一个凸五边形，其中 $BCDE$ 是正方形，中心为 O，$\angle A = 90^\circ$。证明：AO 平分 $\angle BAE$。



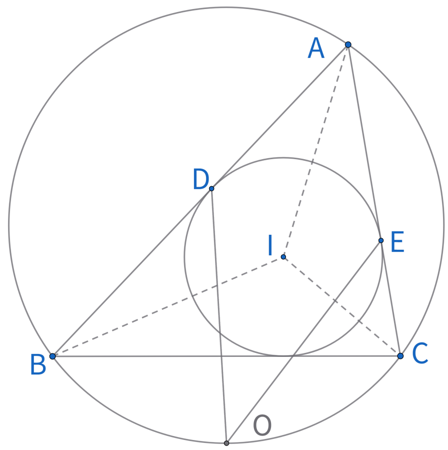
Exercise 1.3. (BAMO 1999/2) 设 $O=(0,0)$，$A=(0,a)$，$B=(0,b)$，其中实数 $0<a<b$。设 Γ 是直径为 AB 的圆，P 是 Γ 上另一点。直线 PA 与 x 轴交于点 Q。证明：$\angle BQP=\angle BOP$。



Exercise 1.4. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 I_1, I_2 分别是 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 的内心。证明：I_1, I_2, B, C 四点共圆。

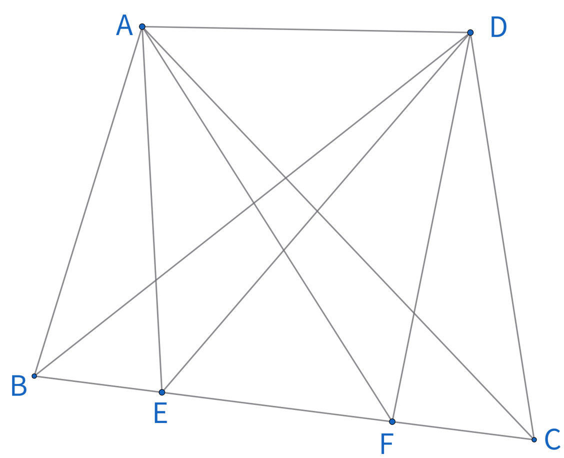


Exercise 1.5. (CGMO 2012/5) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 AB, AC 相切于点 D, E, O 是 $\triangle BCI$ 的外心。证明：$\angle ODB = \angle OEC$。

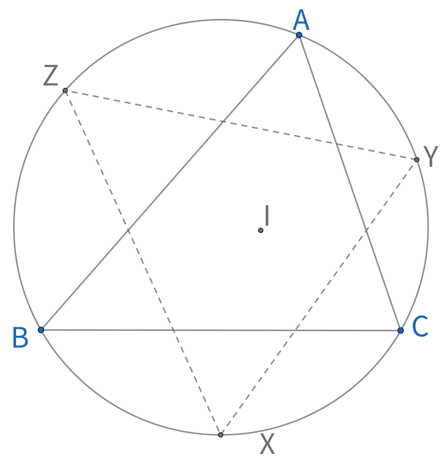


Exercise 1.6. (加拿大 1991/3) 设 P 是圆 ω 内一点，考虑 ω 的所有经过 P 的弦。证明：这些弦的中点都在一个圆上。

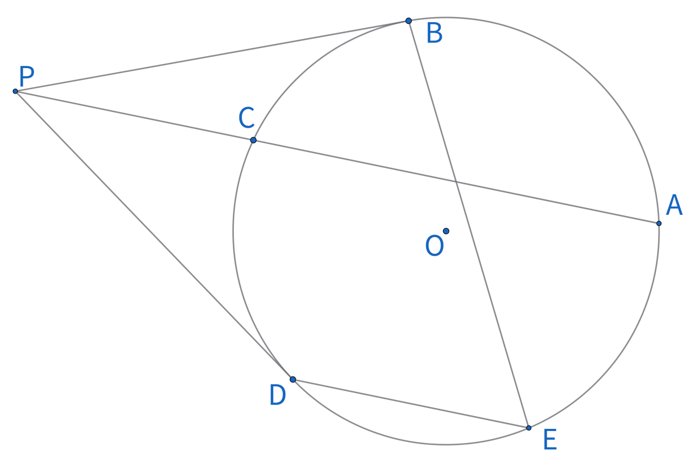
Exercise 1.7. (俄罗斯 1996) 点 E 和 F 在凸四边形 $ABCD$ 的边 BC 上（E 在 B 和 F 之间）。已知 $\angle BAE = \angle CDF$，且 $\angle EAF = \angle FDE$。证明：$\angle FAC = \angle EDB$。



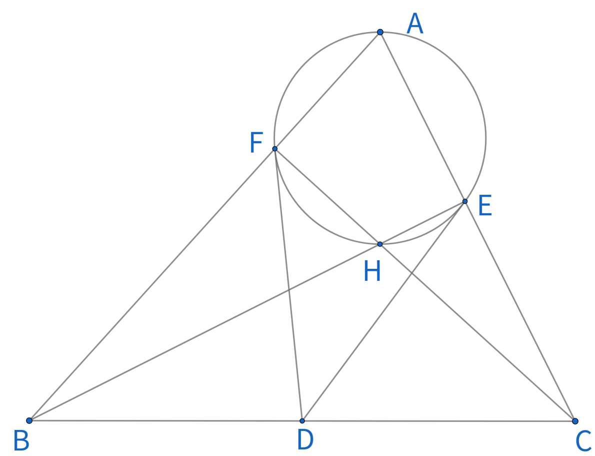
Exercise 1.8. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，X 是劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，类似地定义 Y, Z，证明：$\triangle XYZ$ 的垂心是 $\triangle ABC$ 的内心。



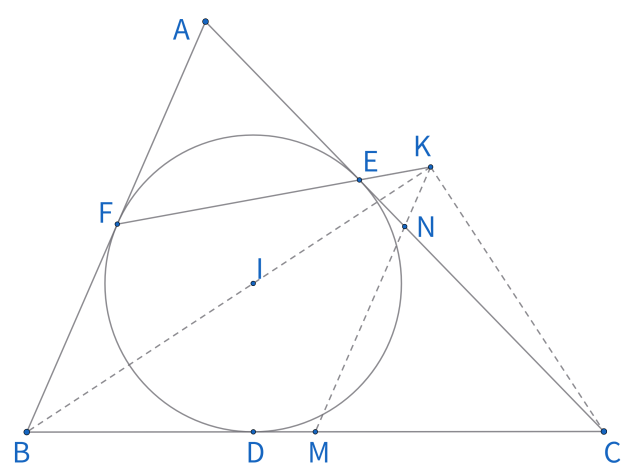
Exercise 1.9. (JMO 2011/5) 点 A, B, C, D, E 在圆 ω 上，而点 P 在圆 ω 外。这些点满足：(i) 直线 PB, PD 与圆 ω 相切；(ii) P, A, C 共线；(iii) $DE \parallel AC$。证明：BE 平分 AC。



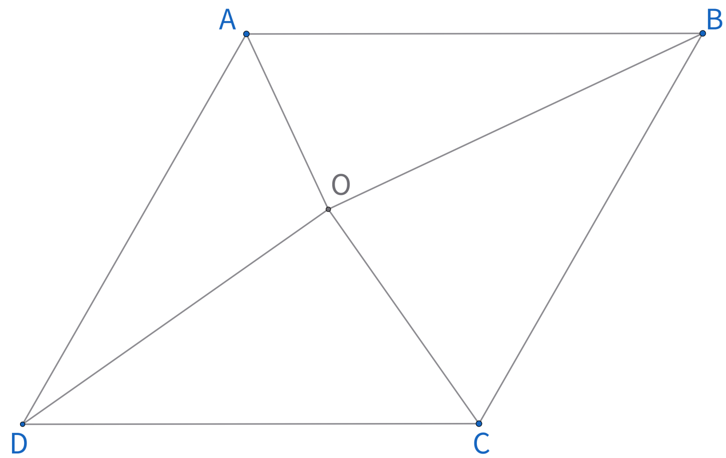
Exercise 1.10. 设锐角 $\triangle ABC$ 中，BE, CF 是高，D 是 BC 的中点。证明：DE, DF 和过 A 与 BC 平行的直线均与圆 (AEF) 相切。



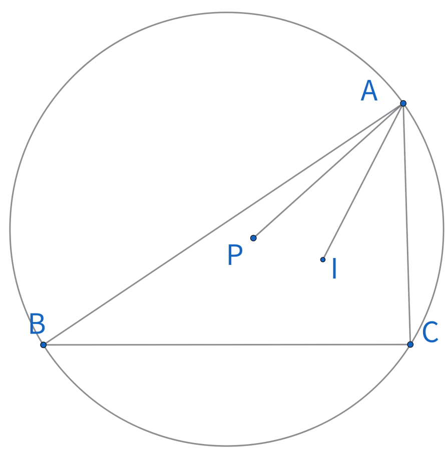
Exercise 1.11. (内切圆弦上的直线) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆在边 BC, CA, AB 上的切点分别是 D, E, F，内切圆圆心为 I。设 M, N 分别是 BC, AC 的中点。射线 BI 与直线 EF 相交于 K。证明：$BK \perp CK$，并且 K 在直线 MN 上。



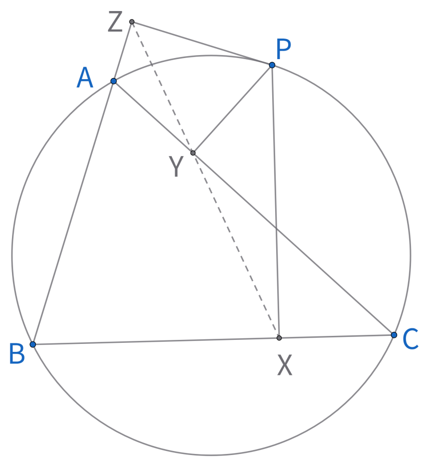
Exercise 1.12. (加拿大 1997/4) 点 O 在平行四边形 $ABCD$ 的内部，使得 $\angle AOB+\angle COD = 180°$。证明：$\angle OBC = \angle ODC$。



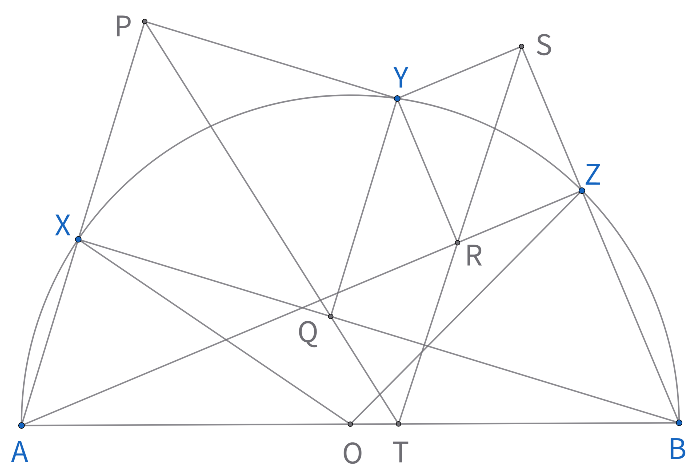
Exercise 1.13. (IMO 2006/1) 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I,P 在三角形内部,满足 $\angle PBA+\angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$。证明：$AP \geq AI$，等号成立当且仅当 $P = I$。



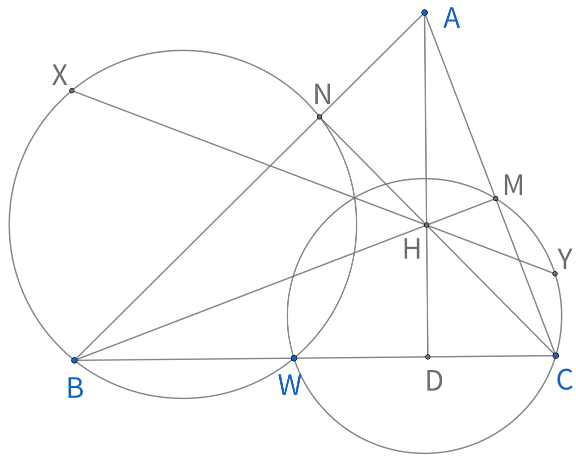
Exercise 1.14. (西姆松线) 如图 1.8D，设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点，X, Y, Z 分别是从 P 到直线 BC, CA, AB 的投影。证明：X, Y, Z 共线。



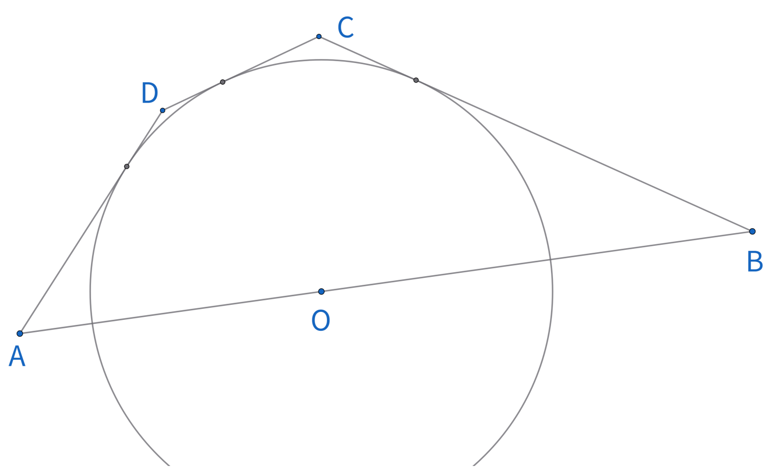
Exercise 1.15. (USAMO 2010/1) 设凸五边形 $AXYZB$ 内接于以 AB 为直径的半圆。记 P, Q, R, S 分别是 Y 到直线 AX, BX, AZ, BZ 上的投影。证明：直线 PQ 和 RS 形成的锐角是 $\angle XOZ$ 的一半，其中 O 是线段 AB 的中点。



Exercise 1.16. (IMO 2013/4) 设锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，W 是边 BC 上一点，位于 BC 中间。点 M, N 分别是从 B, C 引出的三角形的高的垂足。ω_1 是 $\triangle BWN$ 的外接圆，点 X 满足 WX 是 ω_1 的直径，类似地，点 Y 满足 WY 是 $\triangle CWM$ 外接圆 ω_2 的直径。证明：点 X, Y, H 共线。(如果改为 $\triangle BWM, \triangle CWN$ 的外接圆，结论变为 X,Y,A 共线。)

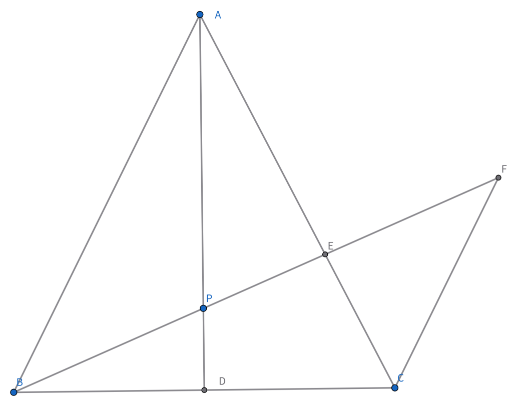


Exercise 1.17. (IMO 1985/1) 某个圆的圆心在圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并且与另外三边相切。证明：$AD + BC = AB$。

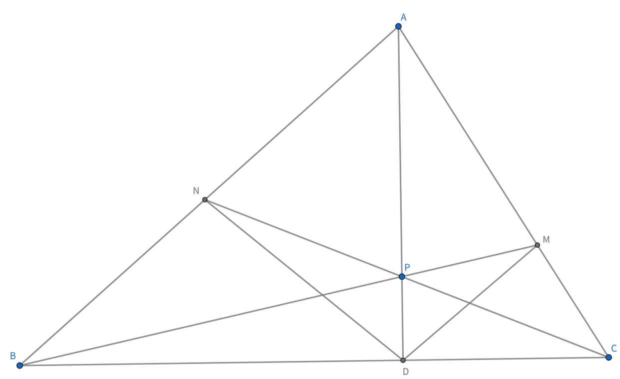


Exercise 1.18. 在 $\triangle ABC$ 中 AB=AC，AD 为中线，P 为 AD 上的一点，过 C 做 CF 平行于 AB，延长 BP 交 AC 于 E 交 CF 于 F。求证：

$$BP^2 = PE \cdot PF.$$

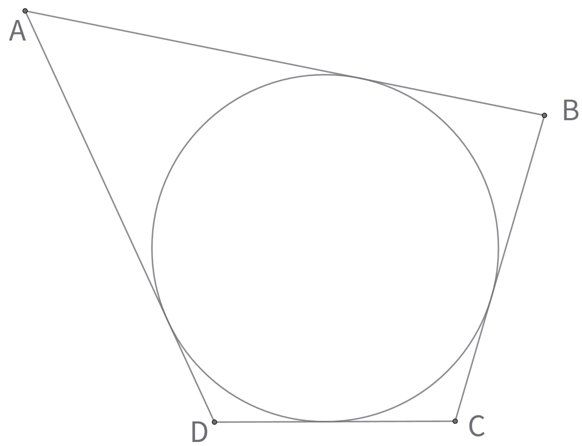


Exercise 1.19. 不等边锐角 $\triangle ABC$ 中，D 为底边 BC 上一点，AD 上有一点 P，延长 BP、CP，分别交 AC、AB 于 M、N，若 DA 平分 $\angle MDN$，证明 $AD \perp BC$.

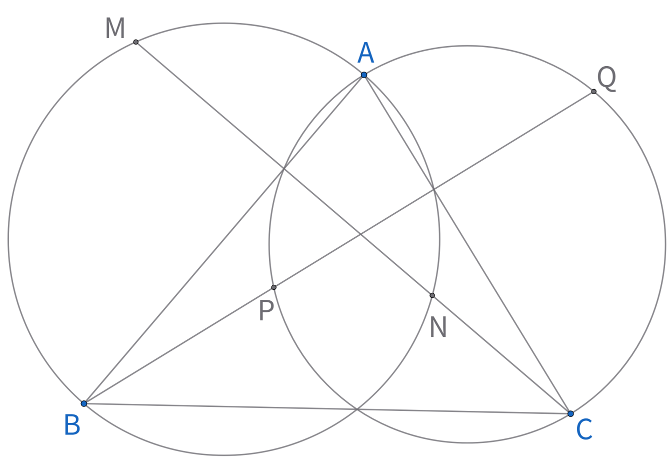


2 圆与三角形五心

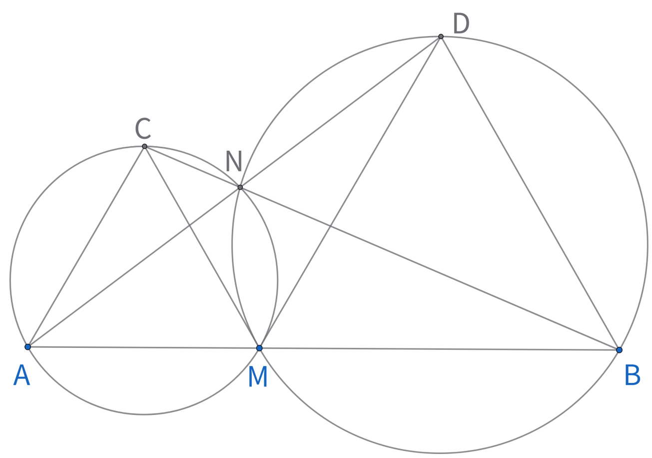
Exercise 2.1. (Pitot 定理) 设四边形 $ABCD$ 有一个内切圆，证明：$AB+CD=BC+DA$。（逆定理同样成立）



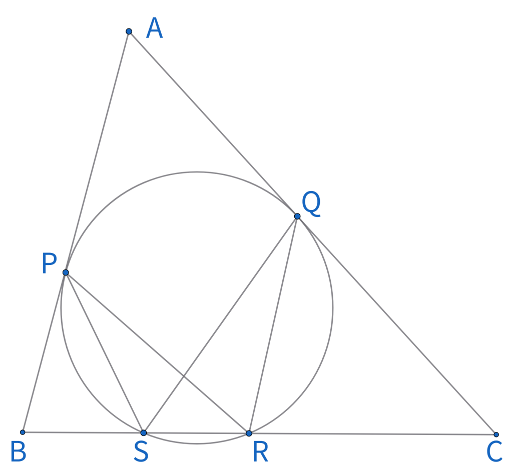
Exercise 2.2. (USAMO 1990/5) 平面上给定锐角 $\triangle ABC$。以 AB 为直径的圆与高 CC' 及其延长线分别交于 M,N，以 AC 为直径的圆与高 BB' 及其延长线分别交于 P,Q。证明：M,N,P,Q 四点共圆。



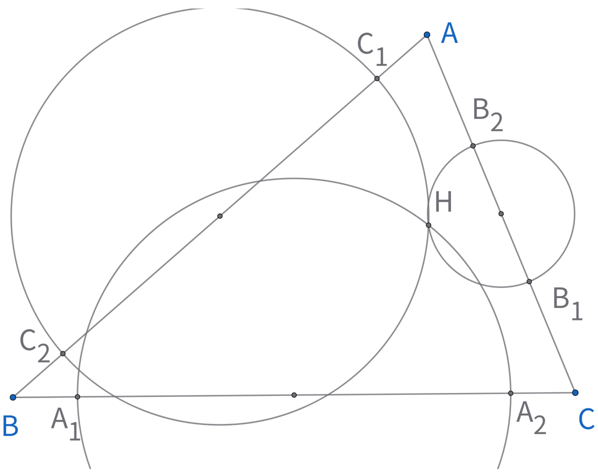
Exercise 2.3. (BAMO 2012/4) 给定平面上的线段 AB，在在线段上选择不同于 A, B 的一点 M。平面上两个等边 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMD$ 在线段 AB 的同一侧，两个三角形的外接圆交于点 M 和另外一点 N。(a) 证明：AD 和 BC 经过点 N。(b) 证明：当 M 在线段 AB 上移动时，所有的直线 MN 经过平面上某固定点 K。



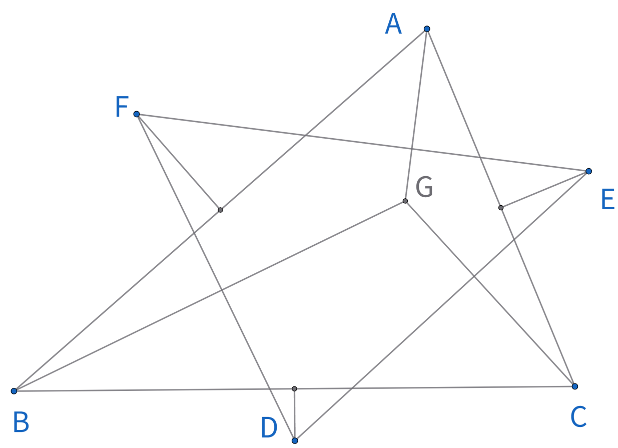
Exercise 2.4. (JMO 2012/1) 给定 $\triangle ABC$，设 P, Q 分别是线段 AB, AC 上的点，满足 $AP = AQ$。设 S, R 是线段 BC 上的不同点，S 在 B, R 之间，$\angle BPS = \angle PRS$，$\angle CQR = \angle QSR$。证明：P, Q, R, S 四点共圆。



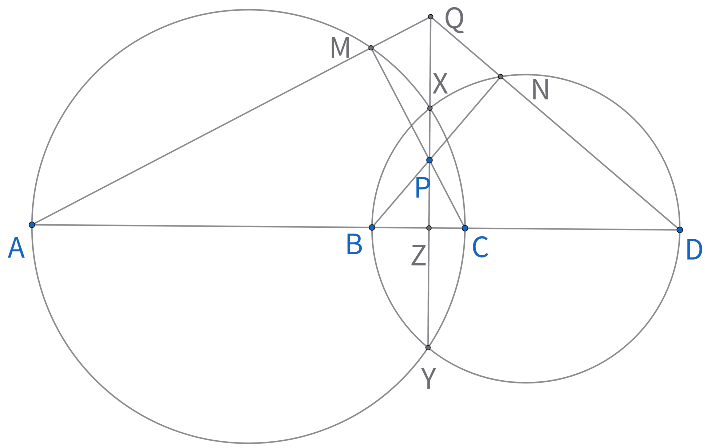
Exercise 2.5. (IMO 2008/1) 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心。圆 Γ_A 以 BC 的中点为圆心，过点 H，交直线 BC 于点 A_1, A_2。类似地定义点 B_1, B_2, C_1, C_2。证明：六个点 $A_1, A_2, B_2, B_2, C_1, C_2$ 共圆。



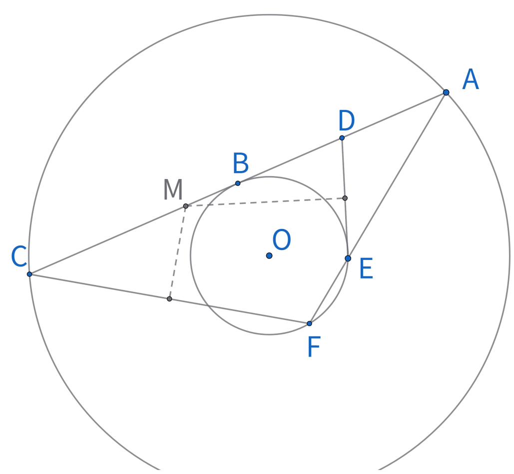
Exercise 2.6. (USAMO 1997/2) 给定 $\triangle ABC$，点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 的垂直平分线上。证明：过 A, B, C 分别垂直于 EF, FD, DE 的直线共点。



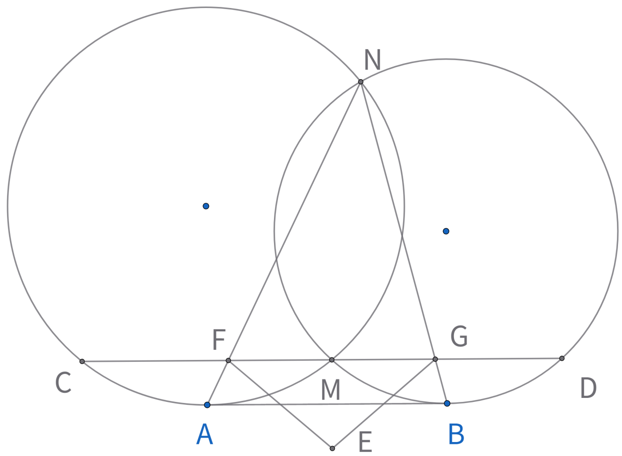
Exercise 2.7. (IMO 1995/1) 设 A, B, C, D 是一条直线上的依次四点。以 AC 和 BD 为直径的圆相交于 X, Y，直线 XY 交 BC 于 Z，点 P 是 XY 上不同于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆交于 C, M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆交于 B, N。证明：直线 AM, DN, XY 三线共点。



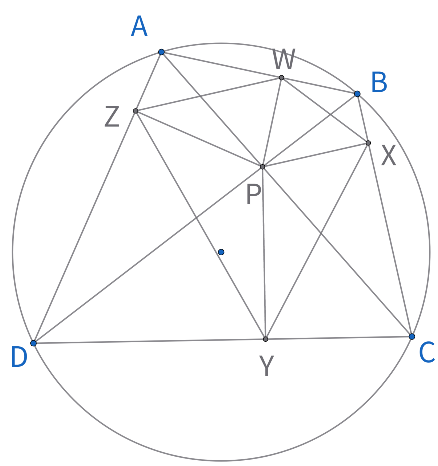
Exercise 2.8. (USAMO 1998/2) 已知 C_1 和 C_2 是两个同心圆 (C_2 在 C_1 内)。点 A 为 C_1 上任意一点，过 A 引 C_2 的切线 AB ($B \in C_2$)，交 C_1 于另一点 C，取 AB 的中点 D. 过 A 引一条直线交 C_2 于点 E 和 F，使得 DE 和 CF 的中垂线交于 AB 上一点 M. 求 $\frac{AM}{MC}$ 的值，并予以证明。



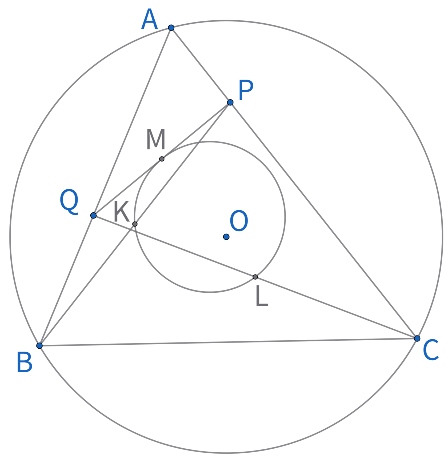
Exercise 2.9. (IMO 2000/1) 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N。设直线 AB 与 G_1, G_2 分别相切于 A, B，并且 M 距离 AB 比 N 近。设直线 CD 经过点 M 且与 AB 平行，C 在 G_1 上，D 在 G_2 上。直线 CA 和 DB 相交于点 E，直线 AN 和 CD 相交于点 P，直线 BN 和 CD 相交于点 Q。证明：$EP = EQ$。



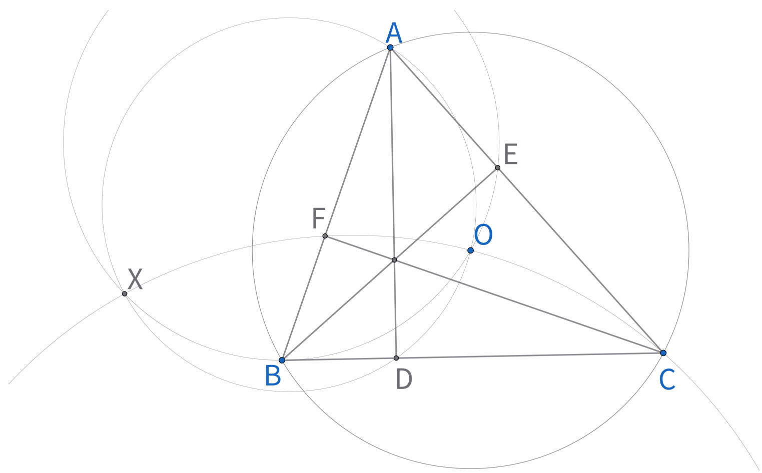
Exercise 2.10. (加拿大 1990/3) 设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 P。设 W, X, Y, Z 分别是 P 到 AB, BC, CD, DA 的投影。证明：$WX + YZ = XY + WZ$。



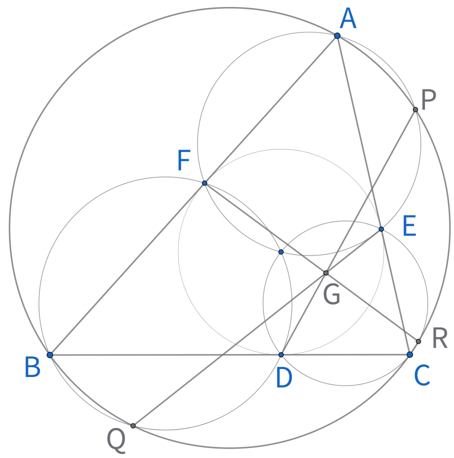
Exercise 2.11. (IMO 2009/2) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O。点 P, Q 分别是线段 CA, AB 内的点，点 K, L, M 分别是线段 BP, CQ, PQ 的中点，圆 F 经过 K, L, M。假设直线 PQ 与 F 相切，证明：$OP = OQ$。



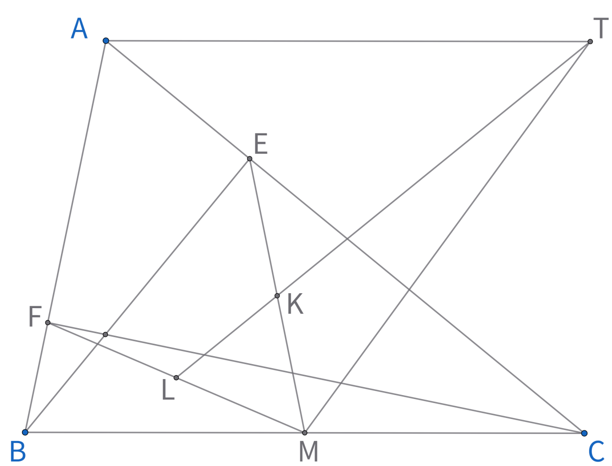
Exercise 2.12. 设 AD, BE, CF 是不等边 $\triangle ABC$ 的三条高，O 是 $\triangle ABC$ 的外心。证明：三个圆 $(AOD), (BOE), (COF)$ 相交于不同于 O 的另外一点 X。



Exercise 2.13. (加拿大 2007/5) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于 D, E, F，设 $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别是 $\triangle ABC, \triangle AEF, \triangle BDF, \triangle CDE$ 的外接圆。设 ω 和 ω_1 交于 A, P；ω 和 ω_2 交于 B, Q；ω 和 ω_3 交于 C, R。(a) 证明：$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 交于一点。(b) 证明：直线 PD, QE, RF 三线共点。

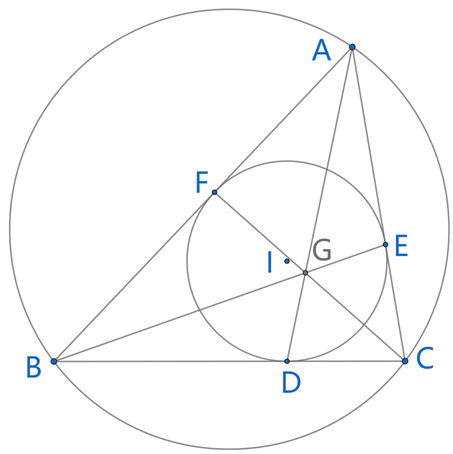


Exercise 2.14. (伊朗 TST 2011/1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle B > \angle C$。设 M 是 BC 的中点，E, F 分别是从 B, C 出发的高的垂足。设 K, L 分别是 ME, MF 的中点。点 T 在直线 KL 上，满足 $TA \parallel BC$。证明：$TA = TM$。

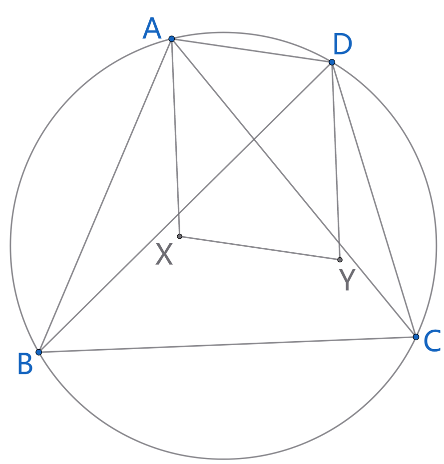


3 长度与比例

Exercise 3.1. 设 $\triangle ABC$ 的切触三角形为 $\triangle DEF$，证明：AD，BE，CF 三线共点。这个点被称作 $\triangle ABC$ 的 Gergonne 点。

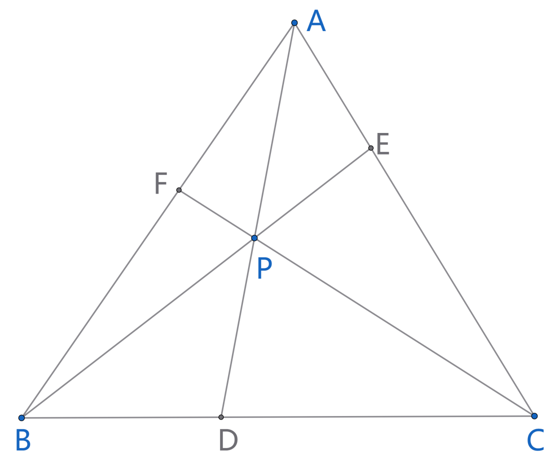


Exercise 3.2. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，点 X 和 Y 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的垂心。证明：$AXYD$ 是平行四边形。

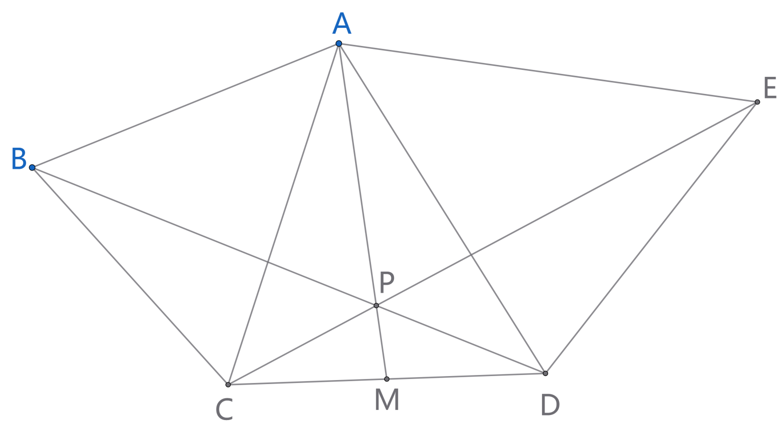


Exercise 3.3. 设 AD, BE, CF 是三角形中的塞瓦线，交于一点 P。证明：

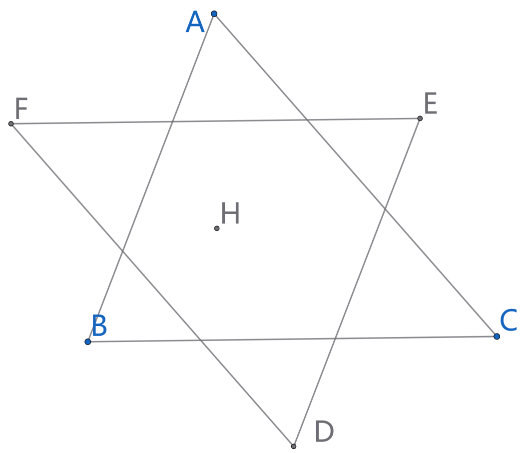
$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1.$$



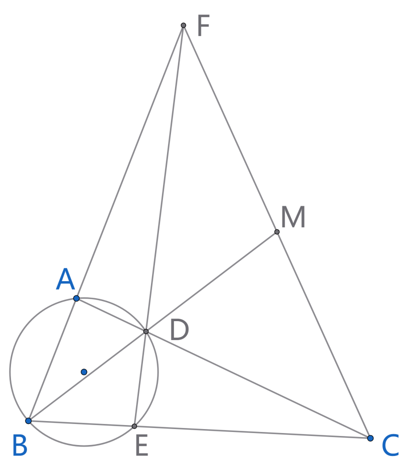
Exercise 3.4. (预选题 2006/G3) 设凸五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE, \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$。对角线 BD 和 CE 交于点 P。证明：射线 AP 平分 CD。



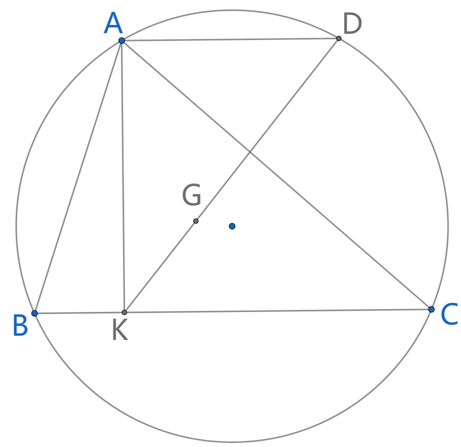
Exercise 3.5. (BAMO 2013/3) 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，考虑 $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ 的外心。证明：这三个外心构成的三角形与 $\triangle ABC$ 全等。



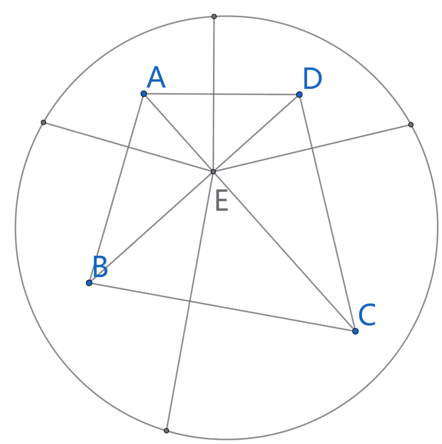
Exercise 3.6. (USAMO 2003/4) 设 $\triangle ABC$ 中，经过点 A, B 的一个圆与线段 AC, BC 分别相交于 D, E，直线 AB 与 DE 相交于 F，直线 BD 与 CF 相交于 M。证明：$MF = MC$ 当且仅当 $MB \cdot MD = MC^2$。



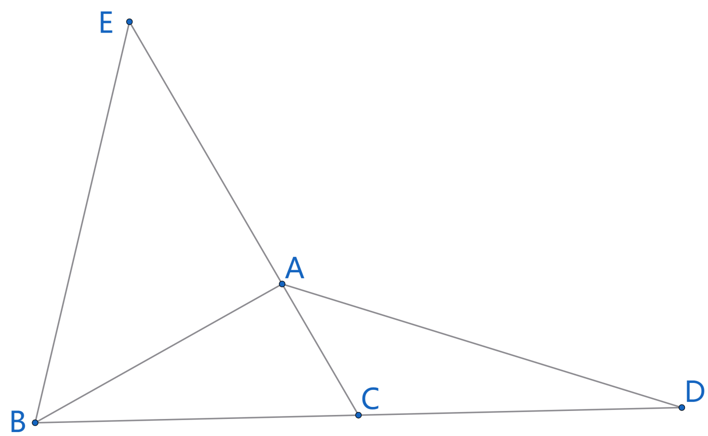
Exercise 3.7. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点 $D \neq A$，满足 $AD \parallel BC$。设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，K 是从点 A 出发的高的垂足。证明：K, G, D 共线。



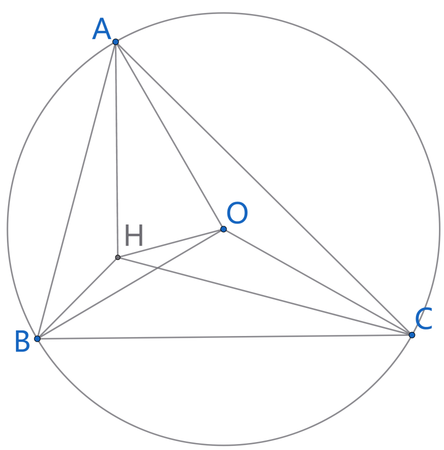
Exercise 3.8. (USAMO 1993/2) 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 垂直相交于 E。证明：E 关于 AB, BC, CD, DA 的反射点共圆。



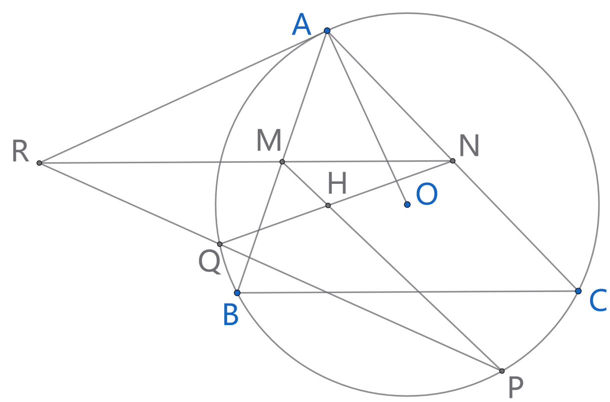
Exercise 3.9. (EGMO 2013/1) 将 $\triangle ABC$ 的边 BC 延长到 D，使得 $CD = BC$。将边 CA 延长到 E 使得 $AE = 2CA$。证明：若 $AD = BE$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形。



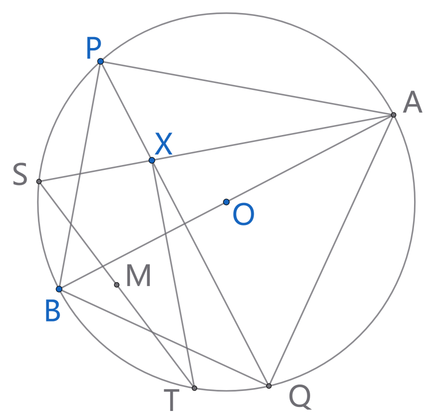
Exercise 3.10. (APMO 2004/2) 设 O 和 H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心。证明:$\triangle AOH, \triangle BOH, \triangle COH$ 之一的面积等于另外两个面积之和。



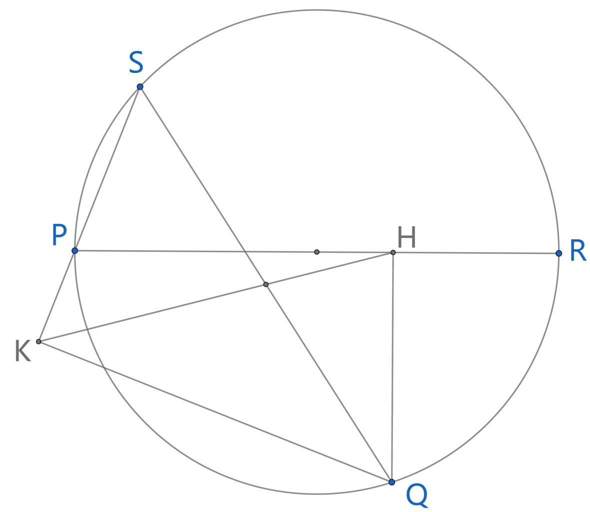
Exercise 3.11. (USATSTST 2011/4) 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 ω。设 H 和 O 分别表示它的垂心和外心，设 M,N 分别是 AB,AC 的中点。射线 MH,NH 分别与圆 ω 相交于 P,Q，直线 MN 和 PQ 相交于 R。证明：$OA\perp AR$。



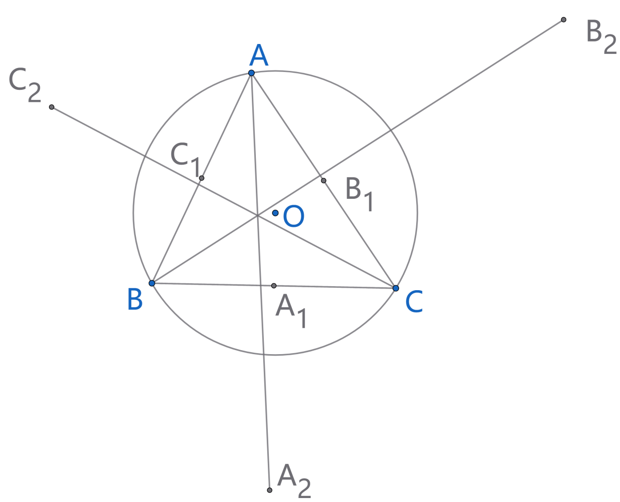
Exercise 3.12. (USAMO 2015/2) 四边形 $APBQ$ 内接于圆 ω，$\angle P=\angle Q=90°$，$AP=AQ<BP$。设 X 是线段 PQ 上的动点。直线 AX 与圆 ω 相交于不同于 A 的一点 S。点 T 在 ω 的弧 $A\overset{\frown}{Q}B$ 上，使得 $XT\perp AX$。设 M 是弦 ST 的中点。当 X 在 PQ 上变动时，证明：M 在某固定的圆上。



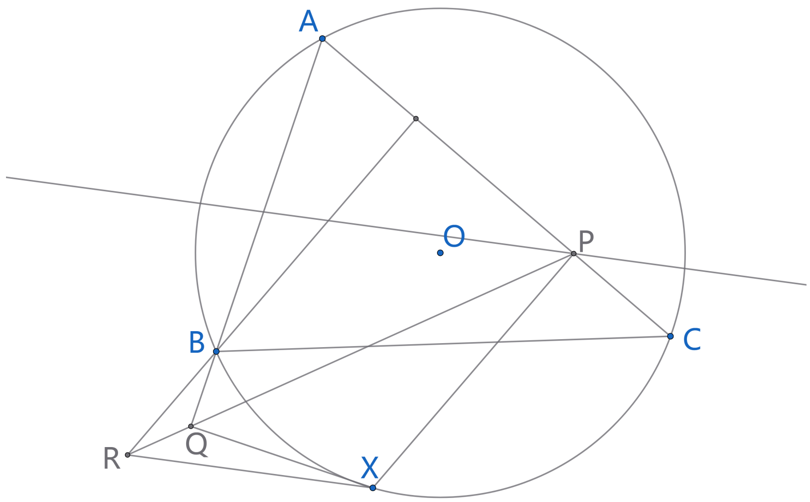
Exercise 3.13. (香港 1998) 设 $PQRS$ 是圆内接四边形，$\angle PSR = 90°$，且 H, K 分别是 Q 到直线 PR, PS 的高的垂足。证明 HK 平分 QS。



Exercise 3.14. (USAMO 1995/3) 给定不等边、非直角 $\triangle ABC$，设 O 是外心，A_1, B_1, C_1 分别是 BC, CA, AB 的中点。点 A_2 在射线 OA_1 上，使得 $\triangle OAA_1$ 和 $\triangle OA_2A$ 相似。点 B_2, C_2 分别在射线 OB_1, OC_1 上类似地定义。证明：AA_2, BB_2, CC_2 三线共点。



Exercise 3.15. (USATST 2014) 设 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，X 是劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点。设 P, Q 分别是 X 到直线 CA, CB 的投影。设 R 是直线 PQ 与 B 到 AC 的垂线的交点。设直线 l 经过 P 平行于 XR。证明：当 X 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上变动时，直线 l 总是经过一个定点。



Exercise 3.16. (USATST 2011/1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，D, E, F 分别是 BC, CA, AB 上的高的垂足，H 是垂心。点 P, Q 在线段 EF 上，满足 $AP \perp EF, HQ \perp EF$。直线 DP 和 QH 相交于 R。计算 $\frac{HQ}{HR}$。