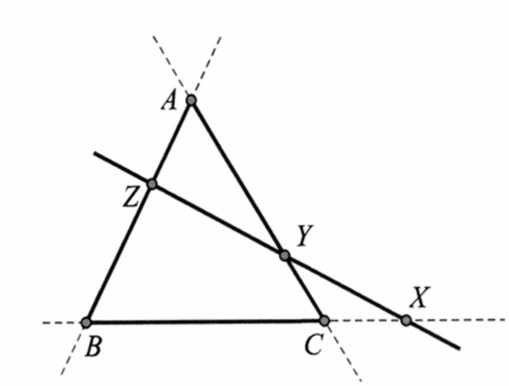
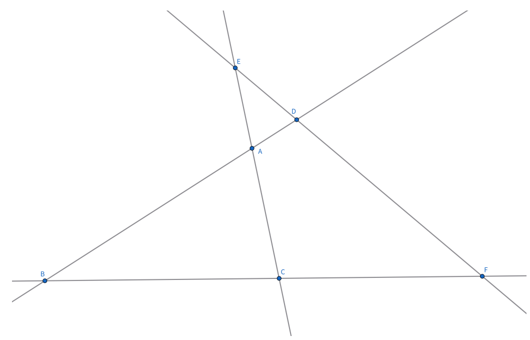
1 三点共线与三线共点

1.1 梅涅劳斯定理

Theorem 1.1 (梅涅劳斯 (Menelaus) 定理)**.** 如果一条不通过 A、B、C 三点的直线与 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 所在直线分别交于 X、Y、Z，则

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$





Theorem 1.2 (梅涅劳斯 (Menelaus) 逆定理)**.** 如果 X Y Z 中有偶数个点在 $\triangle ABC$ 的三边上，且点 X Y Z 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC CA AB 所在直线上的点，满足

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1,$$

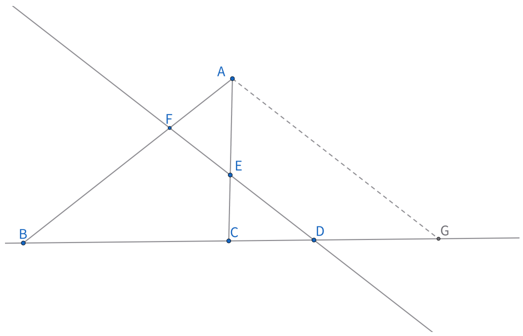
则 X Y Z 三点共线.

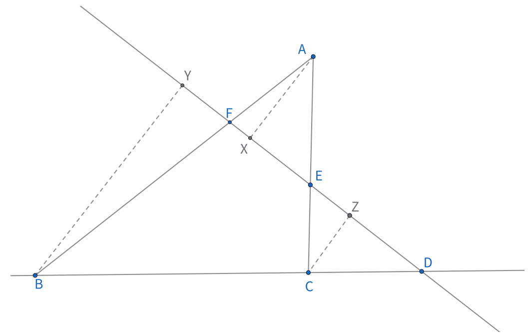
Remark 1.1. 梅涅劳斯定理中的恒等式可以按照顶点-截点-顶点的顺序记忆。

例如对 $\triangle ABC$ 首先确定三边顺序 AB、BC、AC，然后确定各个边上的截点 X、Y、Z，与各边顶点连接起来就得到了 (AX-XB)-(BY-YC)-(CZ-ZA)。

截线 XYZ 可以交于三边的延长线。

正定理多用于获得截线段比值关系，逆定理多用于证明三点共线问题。





1.2　塞瓦定理

Theorem 1.3 (塞瓦 (Ceva) 定理)**.** 已知平面上 $\triangle ABC$ 和点 P（P 不在 $\triangle ABC$ 三边上），直线 AP BP CP 分别与直线 BC CA AB 交于点 X Y Z ，则

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

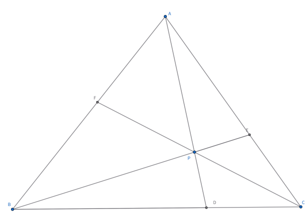


图 1: 情形 1

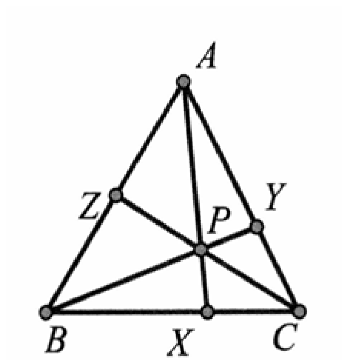


图 2: 情形 2

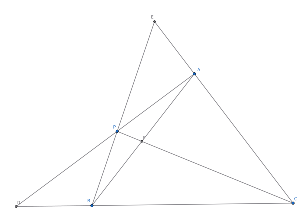
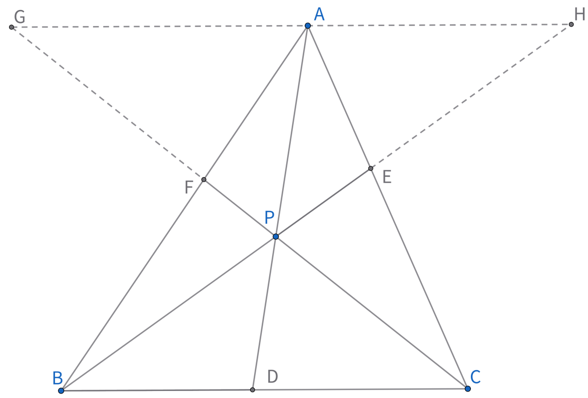


图 3: 情形 3

Theorem 1.4 (塞瓦 (Ceva) 逆定理)**.** 如果 X Y Z 中有奇数个点在 $\triangle ABC$ 的三边上，且点 X Y　Z 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC CA AB 所在直线上的点，满足

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1,$$

则 AX BY CZ 三条直线交于一点或彼此平行.



Remark 1.2. 塞瓦定理与梅涅劳斯定理的记忆方法类似，都是按照顶点-截点-顶点的顺序。

塞瓦定理中点 P 可以不在 $\triangle ABC$ 形内。

P 为无穷原点时，BE、AD、CF 三线平行，等式依然成立。

Theorem 1.5 (角元形式赛瓦定理)**.** 已知平面上 $\triangle ABC$ 和点 P（P 不在 $\triangle ABC$ 三边上）。设 D、E、F 分别是 BC、CA、AB 所在直线上的点。则 AD、BE、CF 三线共点等价于

$$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}=1$$

1.3 西姆松定理

Theorem 1.6 (西姆松 (Simson) 定理)**.** 过 $\triangle ABC$ 外接圆 O 上异于三角形顶点的任意一点 P 作三边所在直线的垂线，则三垂足共线，此线称为西姆松线 (Simson line)。
西姆松定理的逆定理为：若一点 P 在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上。

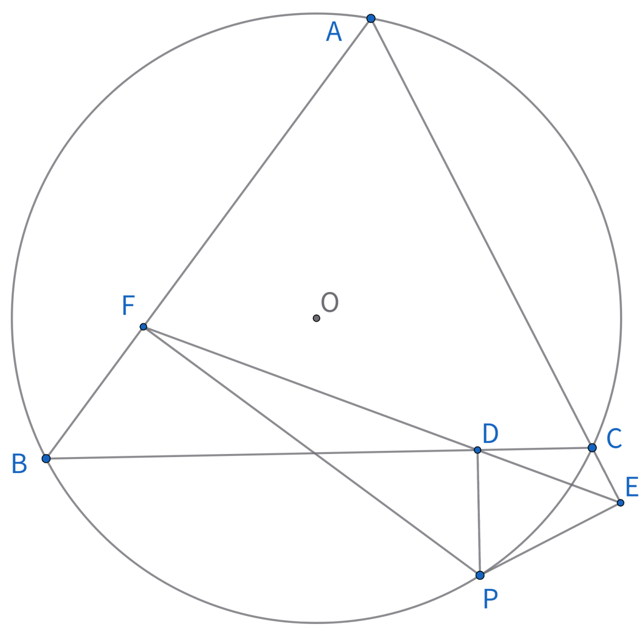


图 4: 西姆松线

1.4 帕普斯定理

Theorem 1.7 (帕普斯 (Pappus) 定理)**.** 直线 l1 上依次有点 A、B、C，直线 l2 上依次有点 D、E、F。设 AE、BD 交于 P，AF、DC 交于 Q，BF、EC 交于 R，则 P、Q、R 共线。

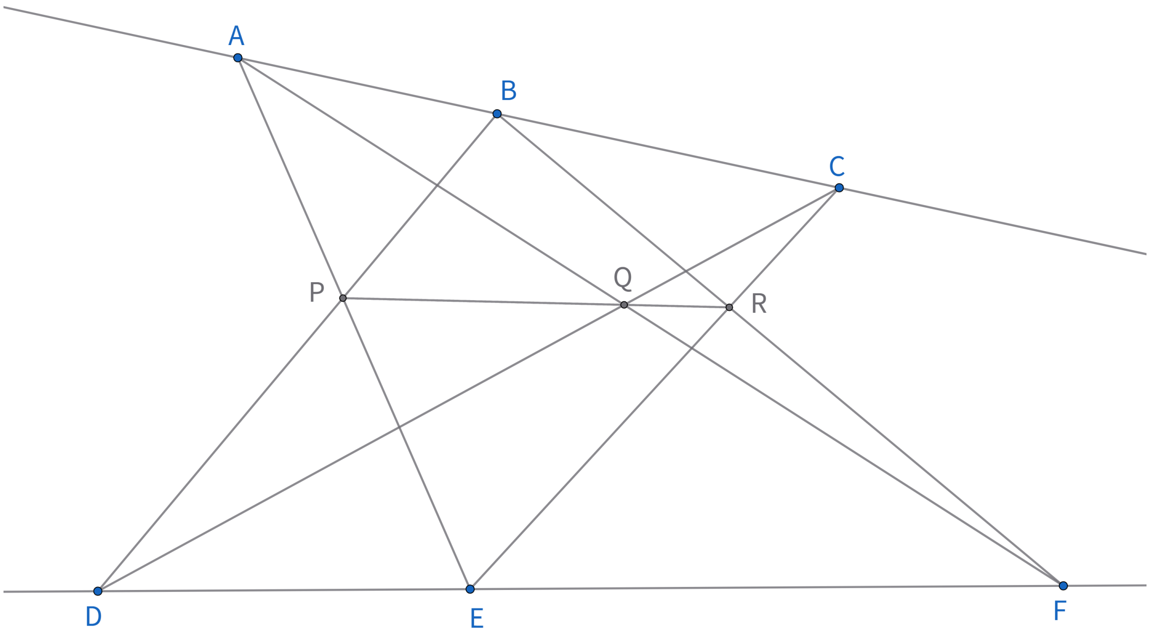


图 5: 帕普斯定理

1.5 帕斯卡定理

Theorem 1.8 (帕斯卡 (Pascal) 定理)**.** 设 A、B、C、D、E、F 为圆 O 上的点，设 AE、BD 交于 P，AF、DC 交于 Q，BF、EC 交于 R，则 P、Q、R 共线。

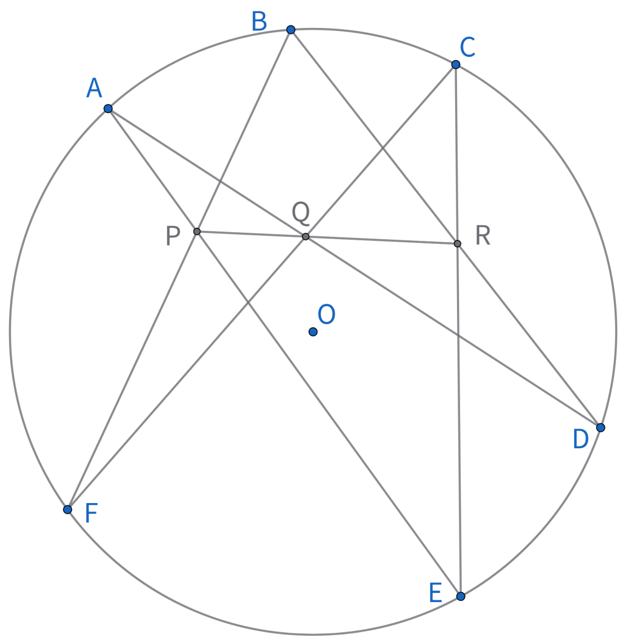


图 6: 帕斯卡定理

1.6 勒莫恩定理

Theorem 1.9 (勒莫恩 (Lemoine) 定理)**.** 过 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 作它外接圆 O 的切线，分别和 BC、CA、AB 所在直线交于 D、E、F，则 D、E、F 三点共线。

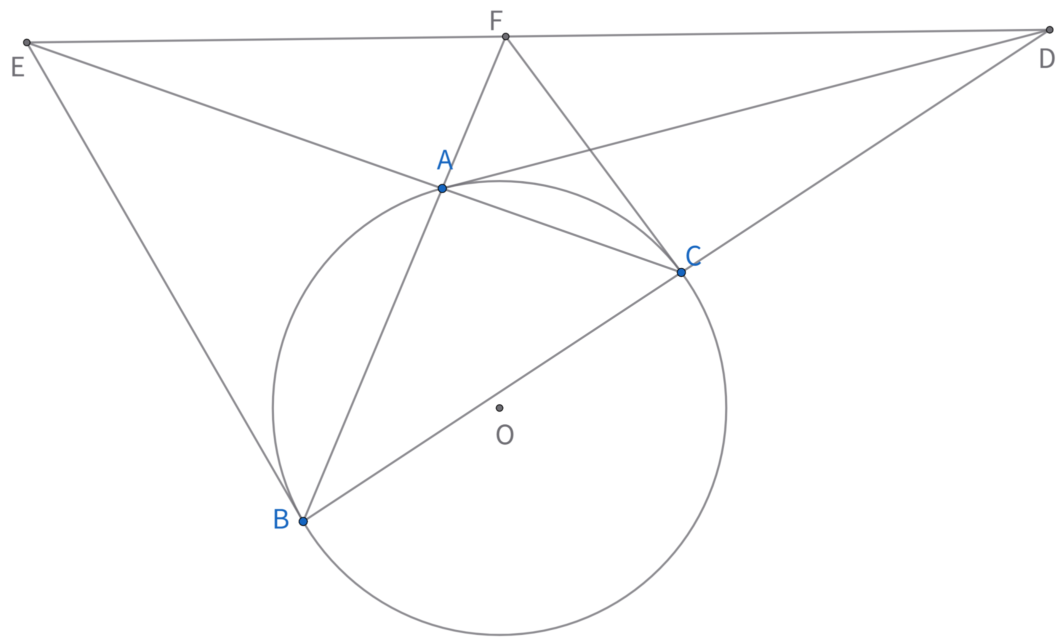


图 7: 勒莫恩定理

1.7 笛沙格定理

Theorem 1.10 (笛沙格 (Desargues) 定理)**.** 若 $\triangle ABC, \triangle DEF$ 的对应顶点连线共点 (此点称为透视中心)，则其对应边的交点一定共线 (此线称为透视轴)。此定理的逆定理亦成立。满足德萨格定理的两个三角形称为透视的。

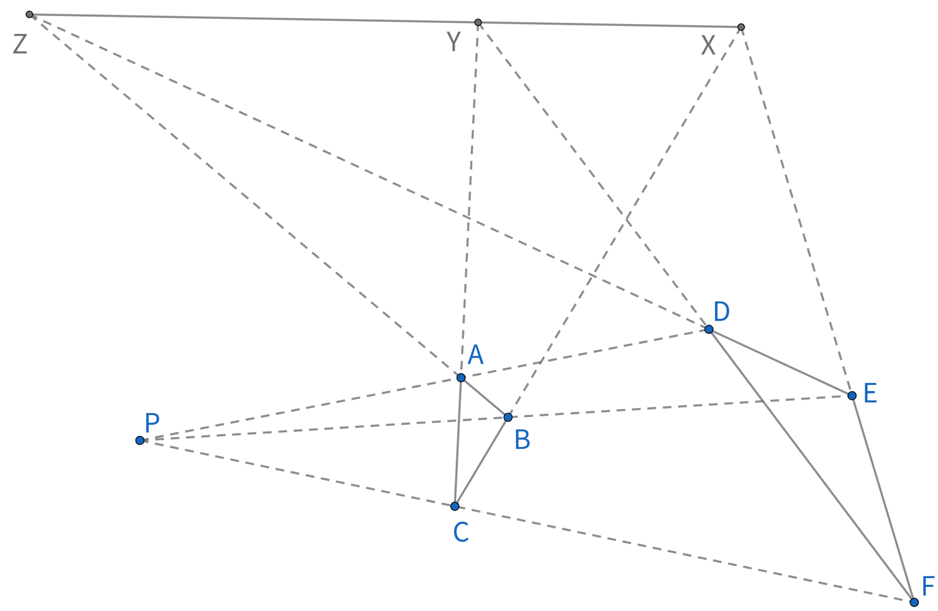


图 8: 笛沙格定理

1.8 布拉美古塔 (婆罗摩笈多) 定理

Theorem 1.11 (婆罗摩笈多 (Brahmagupta) 定理)**.** 圆内接四边形 ABCD 的对角线相互垂直，交点为 M。过 M 做 BC 垂线交 BC 于点 E，交 AD 于点 F，则 F 是 AD 的中点。

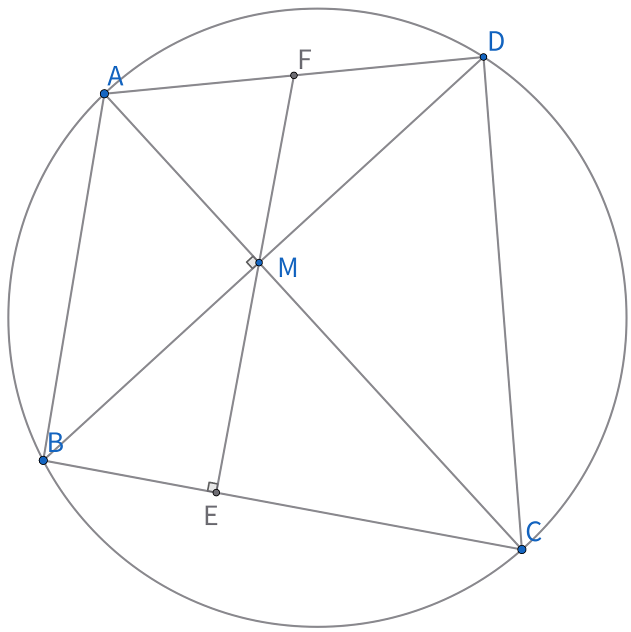


图 9: 婆罗摩笈多定理

1.9 牛顿定理

Theorem 1.12 (牛顿 (Newton) 定理)**.** 圆的外切四边形的对角线交点与对边切点连线交于一点。

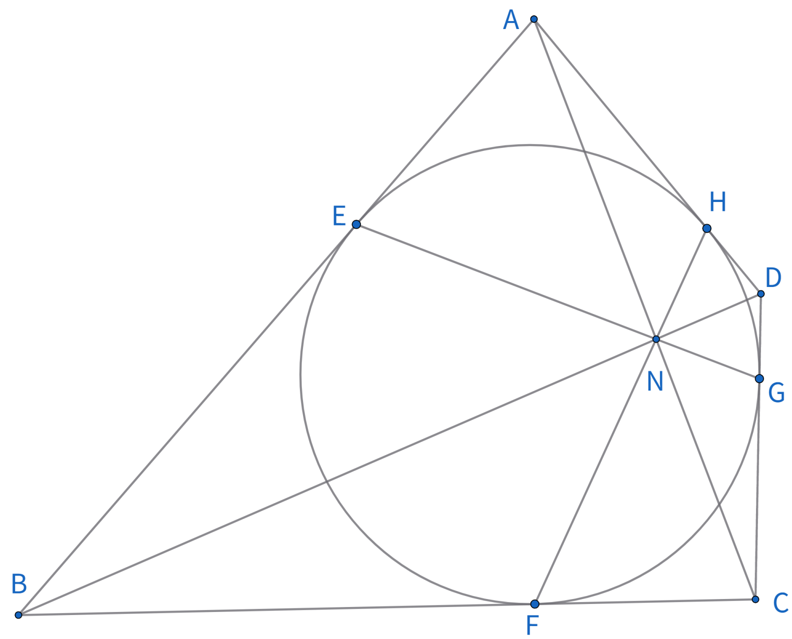


图 10: 牛顿定理

1.10 布利安香定理

Theorem 1.13 (布利安香 (Brainchon) 定理)**.** 若一个六边形的六条边均与同一圆锥曲线相切，则该六边形的三条主对角线共点，该交点称为布列安桑点。

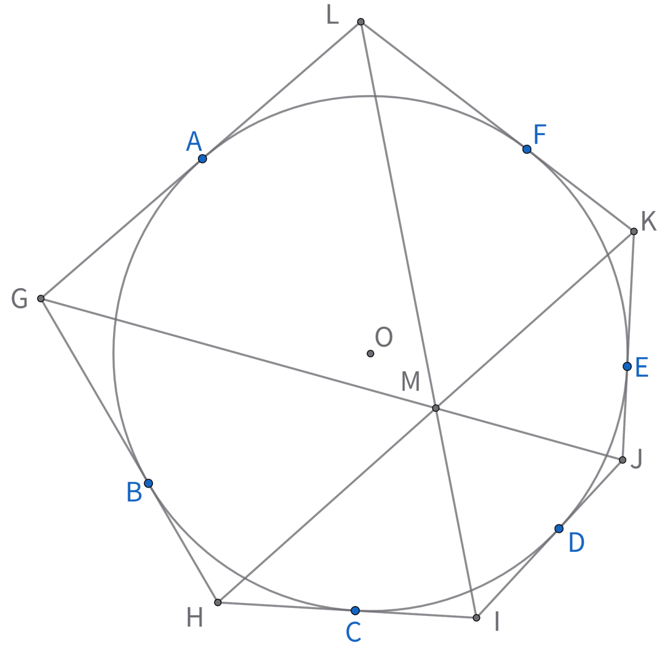


图 11: 布利安香定理