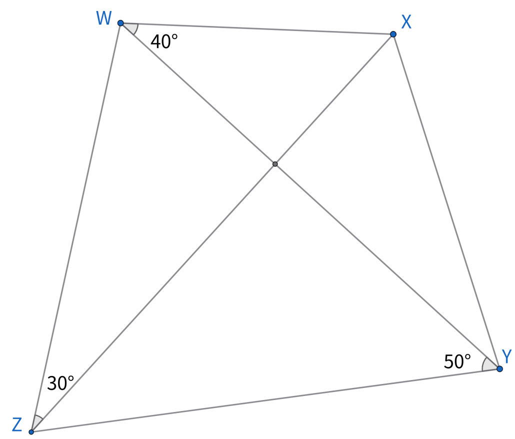
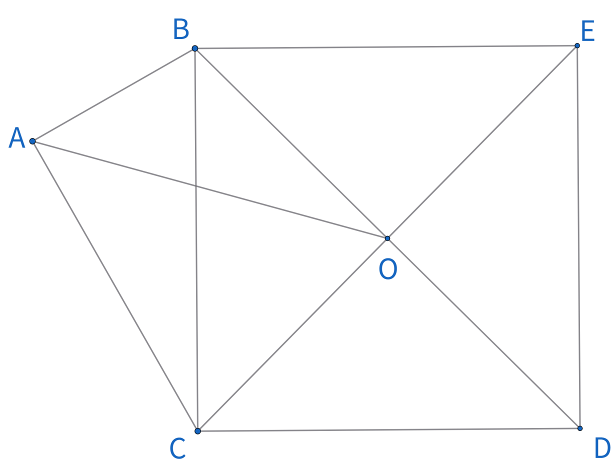
Part I

导角法

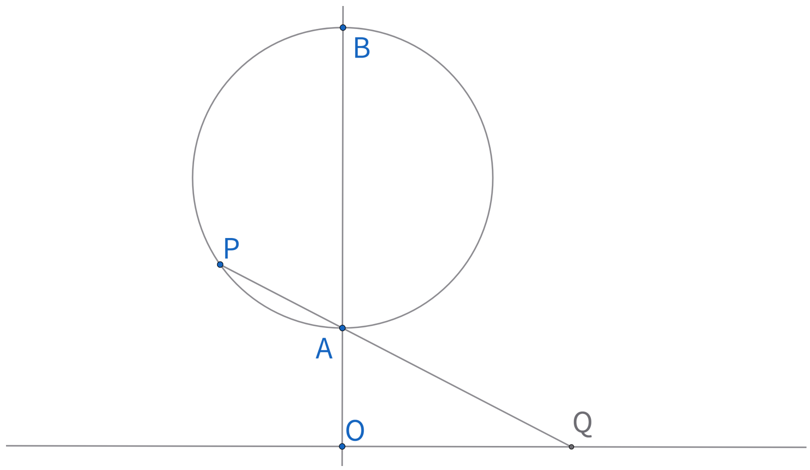
Exercise 0.1. 在四边形 $WXYZ$ 中，对角线相互垂直，已知 $\angle WZX = 30°$，$\angle XWY = 40°$，$\angle WYZ = 50°$。(a) 求 $\angle WZY$；(b) 求 $\angle WXY$。



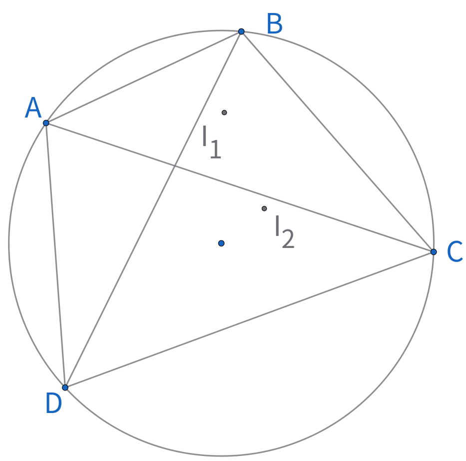
Exercise 0.2. 设 $ABCDE$ 是一个凸五边形，其中 $BCDE$ 是正方形，中心为 O，$\angle A = 90°$。证明：AO 平分 $\angle BAE$。



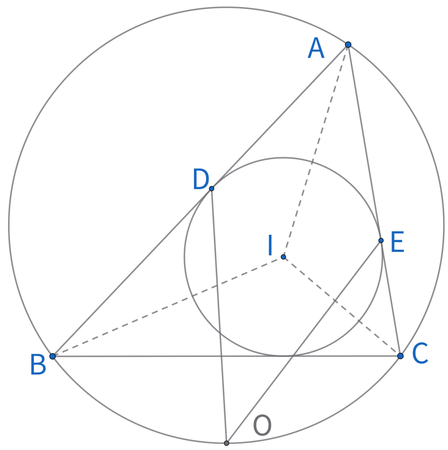
Exercise 0.3. (BAMO 1999/2) 设 $O=(0,0)$，$A=(0,a)$，$B=(0,b)$，其中实数 $0<a<b$。设 Γ 是直径为 AB 的圆，P 是 Γ 上另一点。直线 PA 与 x 轴交于点 Q。证明：$\angle BQP=\angle BOP$。



Exercise 0.4. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 I_1,I_2 分别是 $\triangle ABC,\triangle DBC$ 的内心。证明：I_1,I_2,B,C 四点共圆。

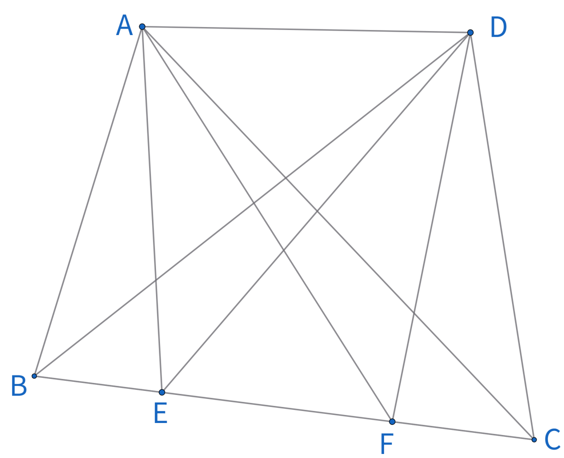


Exercise 0.5. (CGMO 2012/5) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 AB, AC 相切于点 D, E, O 是 $\triangle BCI$ 的外心。证明：$\angle ODB = \angle OEC$。

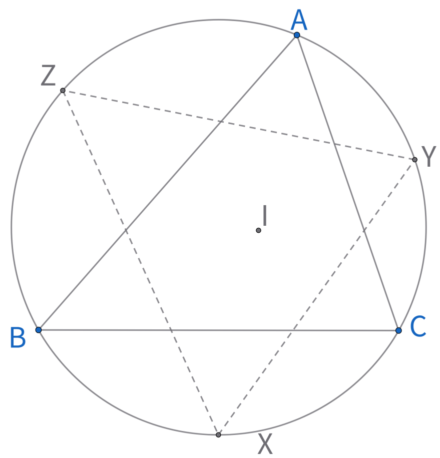


Exercise 0.6. (加拿大 1991/3) 设 P 是圆 ω 内一点，考虑 ω 的所有经过 P 的弦。证明：这些弦的中点都在一个圆上。

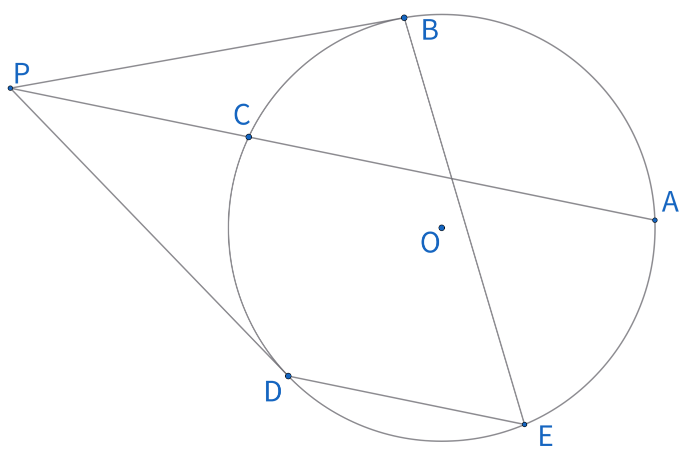
Exercise 0.7. (俄罗斯 1996) 点 E 和 F 在凸四边形 $ABCD$ 的边 BC 上（E 在 B 和 F 之间）。已知 $\angle BAE = \angle CDF$，且 $\angle EAF = \angle FDE$。证明：$\angle FAC = \angle EDB$。



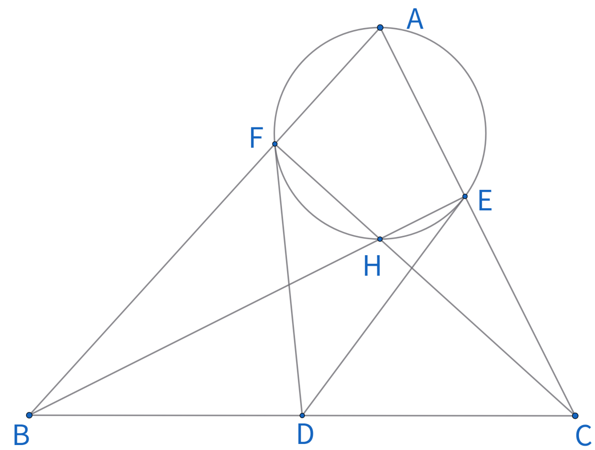
Exercise 0.8. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，X 是劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，类似地定义 Y, Z，证明：$\triangle XYZ$ 的垂心是 $\triangle ABC$ 的内心。



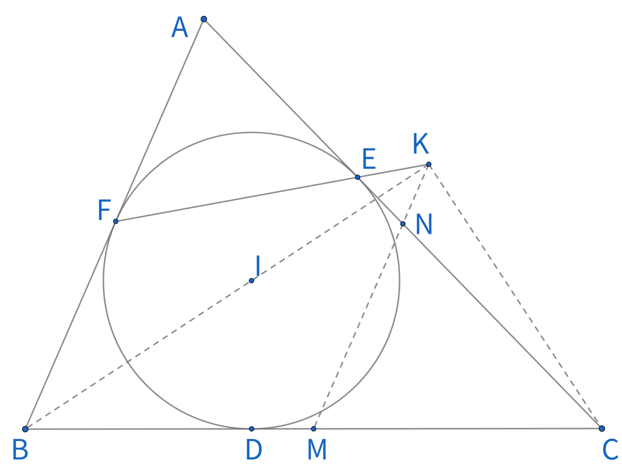
Exercise 0.9. (JMO 2011/5) 点 A, B, C, D, E 在圆 ω 上，而点 P 在圆 ω 外。这些点满足：(i) 直线 PB, PD 与圆 ω 相切；(ii) P, A, C 共线；(iii) $DE \parallel AC$。证明：BE 平分 AC。



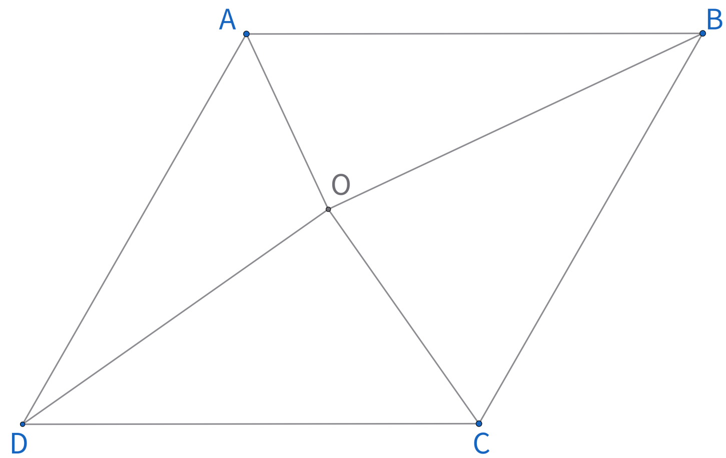
Exercise 0.10. 设锐角 $\triangle ABC$ 中，BE, CF 是高，D 是 BC 的中点。证明：DE, DF 和过 A 与 BC 平行的直线均与圆 (AEF) 相切。



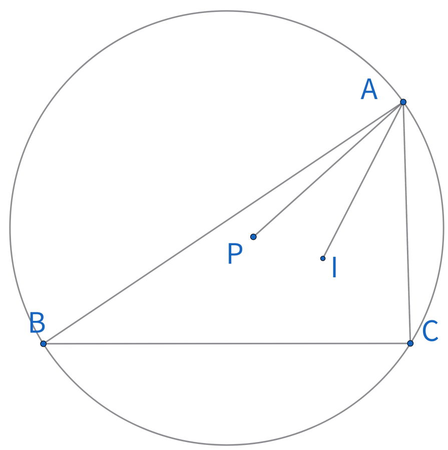
Exercise 0.11. (内切圆弦上的直线) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆在边 BC, CA, AB 上的切点分别是 D, E, F，内切圆圆心为 I。设 M, N 分别是 BC, AC 的中点。射线 BI 与直线 EF 相交于 K。证明：$BK \perp CK$，并且 K 在直线 MN 上。



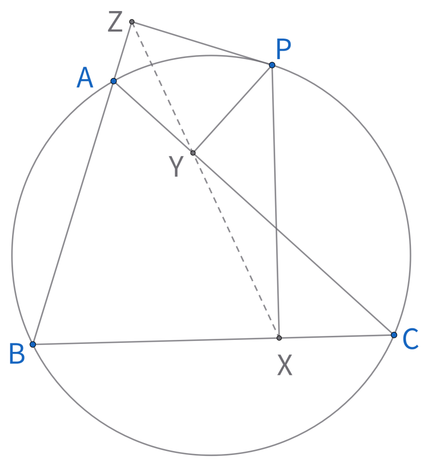
Exercise 0.12. (加拿大 1997/4) 点 O 在平行四边形 $ABCD$ 的内部，使得 $\angle AOB+\angle COD=180^\circ$。证明：$\angle OBC=\angle ODC$。



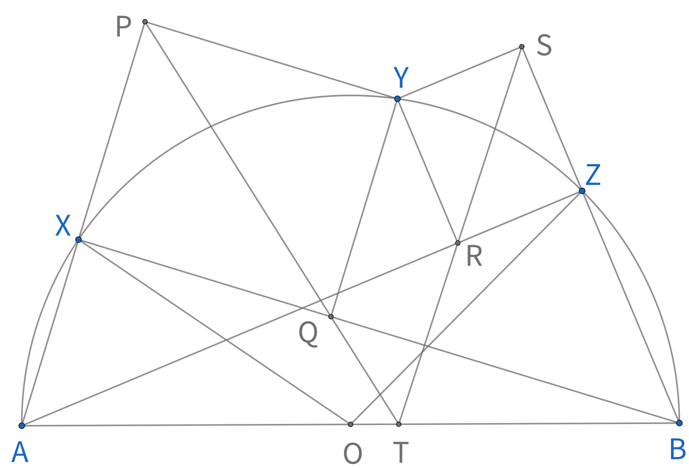
Exercise 0.13. (IMO 2006/1) 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I,P 在三角形内部,满足 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$。证明：$AP\geq AI$，等号成立当且仅当 $P=I$。



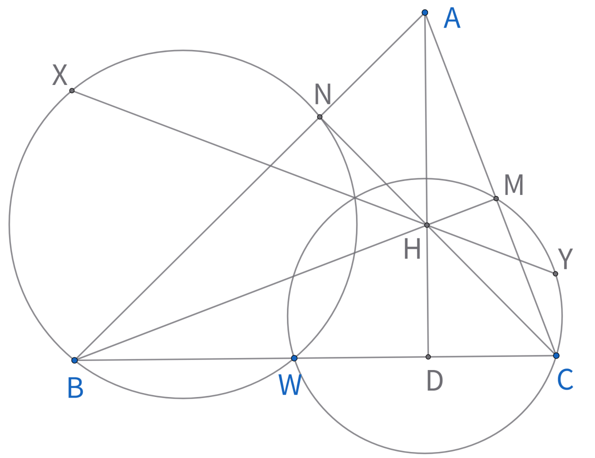
Exercise 0.14. (西姆松线) 如图 1.8D，设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点，X, Y, Z 分别是从 P 到直线 BC, CA, AB 的投影。证明：X, Y, Z 共线。



Exercise 0.15. (USAMO 2010/1) 设凸五边形 $AXYZB$ 内接于以 AB 为直径的半圆。记 P, Q, R, S 分别是 Y 到直线 AX, BX, AZ, BZ 上的投影。证明：直线 PQ 和 RS 形成的锐角是 $\angle XOZ$ 的一半，其中 O 是线段 AB 的中点。



Exercise 0.16. (IMO 2013/4) 设锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，W 是边 BC 上一点，位于 BC 中间。点 M, N 分别是从 B, C 引出的三角形的高的垂足。ω_1 是 $\triangle BWN$ 的外接圆，点 X 满足 WX 是 ω_1 的直径，类似地，点 Y 满足 WY 是 $\triangle CWM$ 外接圆 ω_2 的直径。证明：点 X, Y, H 共线。(如果改为 $\triangle BWM, \triangle CWN$ 的外接圆，结论变为 X,Y,A 共线。)



Exercise 0.17. (IMO 1985/1) 某个圆的圆心在圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，并且与另外三边相切。证明：$AD + BC = AB$。