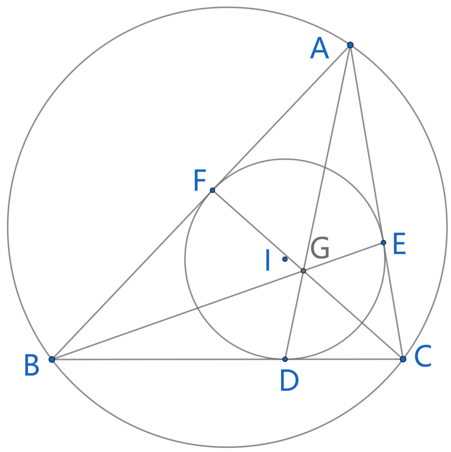
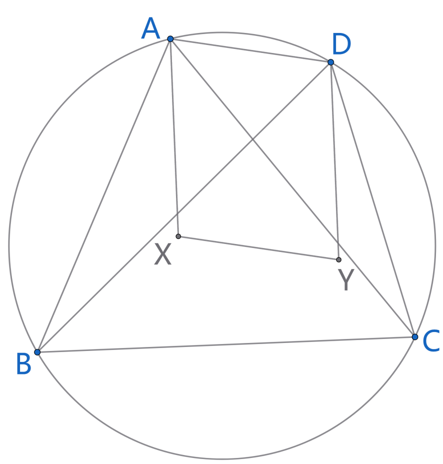
Part I

长度与比例

Exercise 0.1. 设 $\triangle ABC$ 的切触三角形为 $\triangle DEF$，证明：AD，BE，CF 三线共点。这个点被称作 $\triangle ABC$ 的 Gergonne 点。

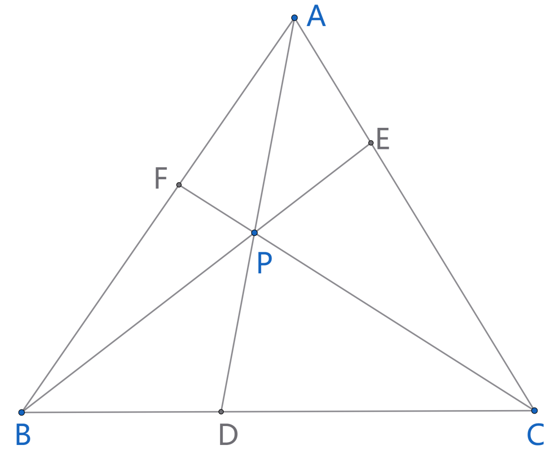


Exercise 0.2. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，点 X 和 Y 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的垂心。证明：$AXYD$ 是平行四边形。

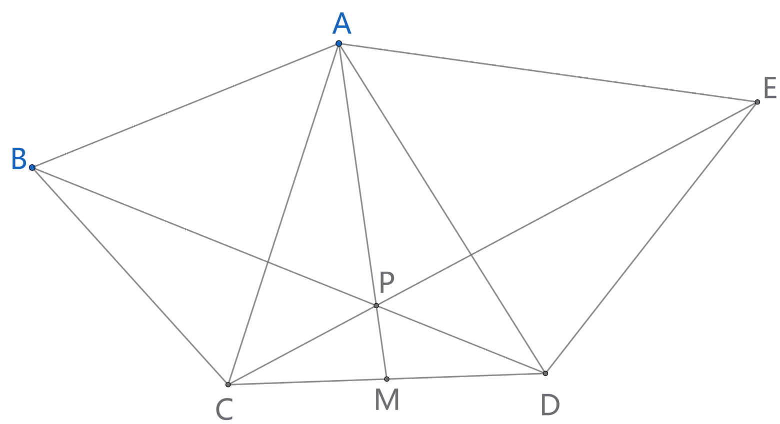


Exercise 0.3. 设 AD, BE, CF 是三角形中的塞瓦线，交于一点 P。证明：

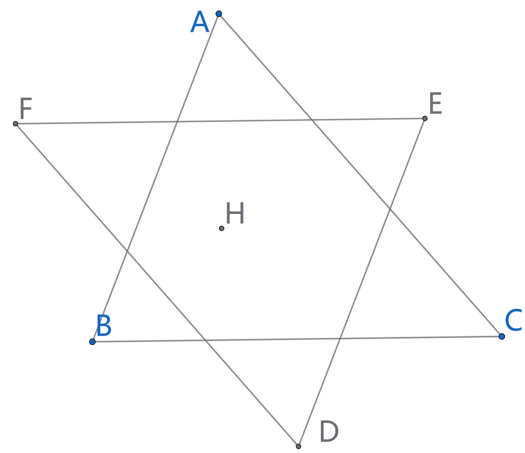
$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1.$$



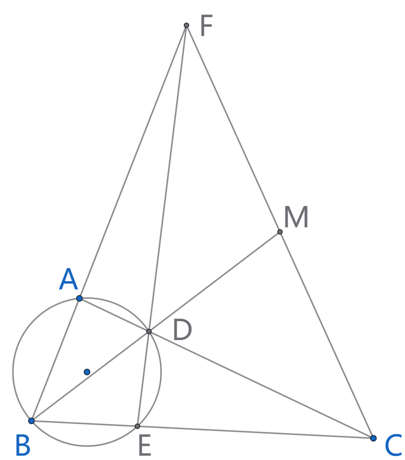
Exercise 0.4. (预选题 2006/G3) 设凸五边形 $ABCDE$ 满足 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE, \angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$。对角线 BD 和 CE 交于点 P。证明：射线 AP 平分 CD。



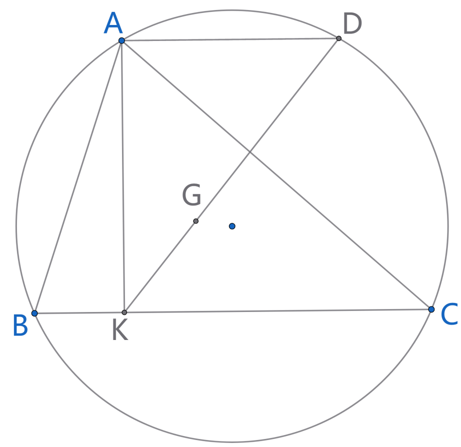
Exercise 0.5. (BAMO 2013/3) 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，考虑 $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ 的外心。证明：这三个外心构成的三角形与 $\triangle ABC$ 全等。



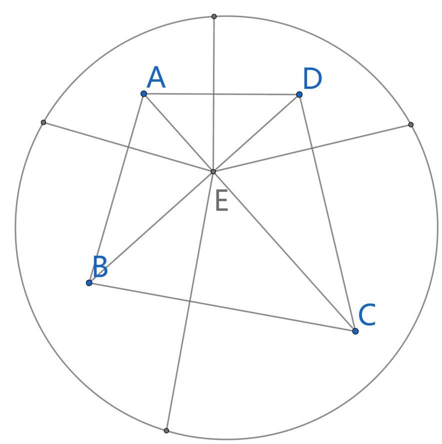
Exercise 0.6. (USAMO 2003/4) 设 $\triangle ABC$ 中，经过点 A, B 的一个圆与线段 AC, BC 分别相交于 D, E，直线 AB 与 DE 相交于 F，直线 BD 与 CF 相交于 M。证明：$MF = MC$ 当且仅当 $MB \cdot MD = MC^2$。



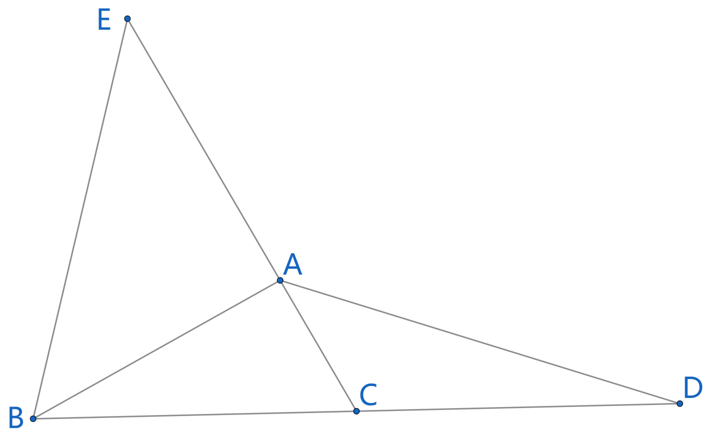
Exercise 0.7. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点 $D \neq A$，满足 $AD \parallel BC$。设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，K 是从点 A 出发的高的垂足。证明：K, G, D 共线。



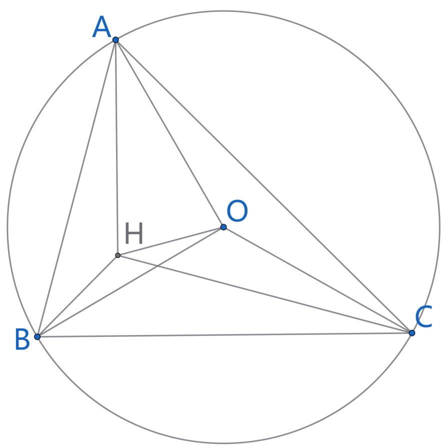
Exercise 0.8. (USAMO 1993/2) 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 垂直相交于 E。证明：E 关于 AB, BC, CD, DA 的反射点共圆。



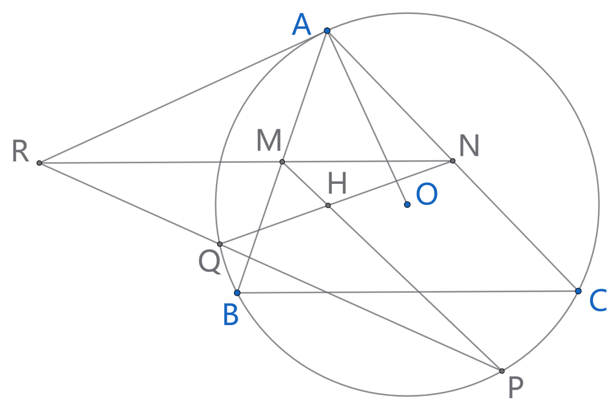
Exercise 0.9. (EGMO 2013/1) 将 $\triangle ABC$ 的边 BC 延长到 D，使得 $CD = BC$。将边 CA 延长到 E 使得 $AE = 2CA$。证明：若 $AD = BE$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形。



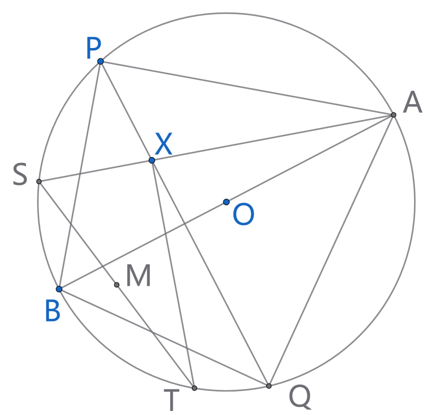
Exercise 0.10. (APMO 2004/2) 设 O 和 H 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心。证明:$\triangle AOH, \triangle BOH, \triangle COH$ 之一的面积等于另外两个面积之和。



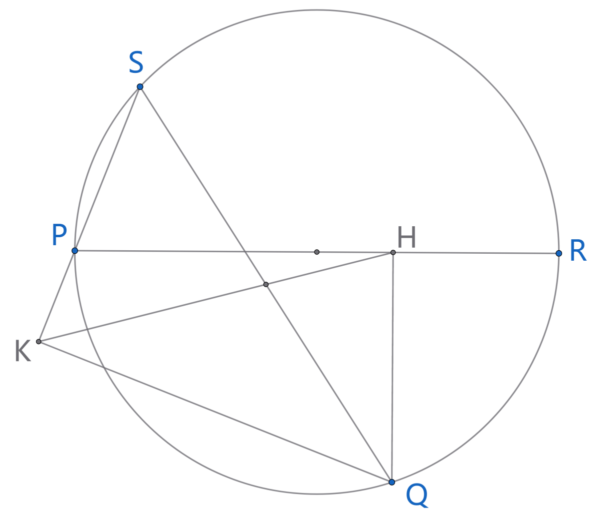
Exercise 0.11. (USATSTST 2011/4) 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 ω。设 H 和 O 分别表示它的垂心和外心，设 M, N 分别是 AB, AC 的中点。射线 MH, NH 分别与圆 ω 相交于 P, Q，直线 MN 和 PQ 相交于 R。证明：$OA \perp AR$。



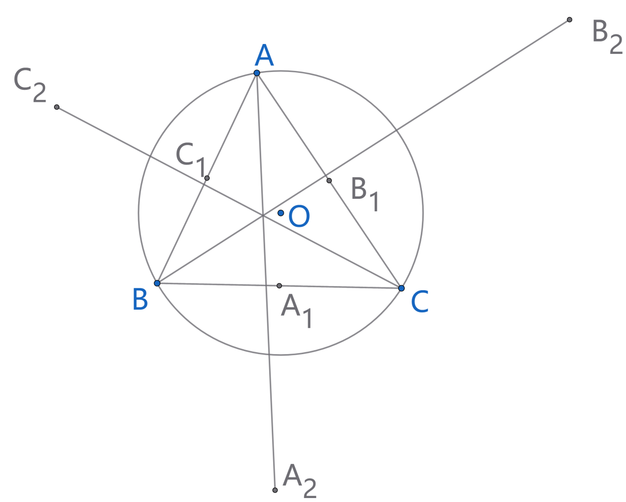
Exercise 0.12. (USAMO 2015/2) 四边形 $APBQ$ 内接于圆 ω，$\angle P = \angle Q = 90°$，$AP = AQ < BP$。设 X 是线段 PQ 上的动点。直线 AX 与圆 ω 相交于不同于 A 的一点 S。点 T 在 ω 的弧 $\overset{\frown}{AQB}$ 上，使得 $XT \perp AX$。设 M 是弦 ST 的中点。当 X 在 PQ 上变动时，证明：M 在某固定的圆上。



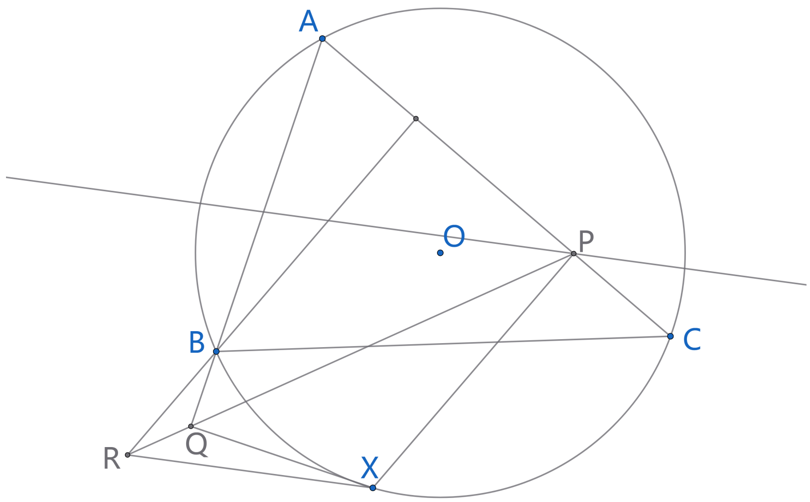
Exercise 0.13. (香港 1998) 设 $PQRS$ 是圆内接四边形，$\angle PSR = 90°$，且 H, K 分别是 Q 到直线 PR, PS 的高的垂足。证明 HK 平分 QS。



Exercise 0.14. (USAMO 1995/3) 给定不等边、非直角 $\triangle ABC$，设 O 是外心，A_1, B_1, C_1 分别是 BC, CA, AB 的中点。点 A_2 在射线 OA_1 上，使得 $\triangle OAA_1$ 和 $\triangle OA_2A$ 相似。点 B_2, C_2 分别在射线 OB_1, OC_1 上类似地定义。证明：AA_2, BB_2, CC_2 三线共点。



Exercise 0.15. (USATST 2014) 设 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，X 是劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点。设 P, Q 分别是 X 到直线 CA, CB 的投影。设 R 是直线 PQ 与 B 到 AC 的垂线的交点。设直线 l 经过 P 平行于 XR。证明：当 X 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上变动时，直线 l 总是经过一个定点。



Exercise 0.16. (USATST 2011/1) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，D, E, F 分别是 BC, CA, AB 上的高的垂足，H 是垂心。点 P, Q 在线段 EF 上，满足 $AP \perp EF, HQ \perp EF$。直线 DP 和 QH 相交于 R。计算 $\frac{HQ}{HR}$。