Part I

三角形五心

1 外心

Definition 1.1 (外心)**.** 三角形外接圆的圆心简称为三角形的外心，通常使用 O 表示。

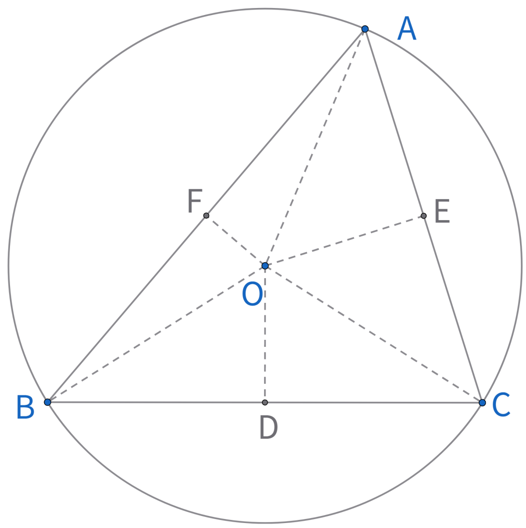

图 1: 外心

Proposition 1.1 (外心性质)**.** 三角形外心具有如下性质。
(1) 三角形的外心是三条边中垂线的交点。
(2) 平面内一点是三角形外心的充分必要条件为：该点到三顶点的距离相等。
(3) 平面内一点 O 是三角形 $\triangle ABC$ 外心的充分必要条件为：

$$\angle BOC = 2A, \quad \angle COA = 2B, \quad \angle AOB = 2\angle C.$$

(4) $BC = 2R\sin A, \quad AC = 2R\sin B, \quad AC = 2R\sin C.$
(5) 锐角三角形的外心在形内，直角三角形的外心为斜边中点，钝角三角形的外心在形外。

2 内心

Definition 2.1 (内心). 三角形内切圆的圆心简称为三角形的内心，通常使用 I 表示。

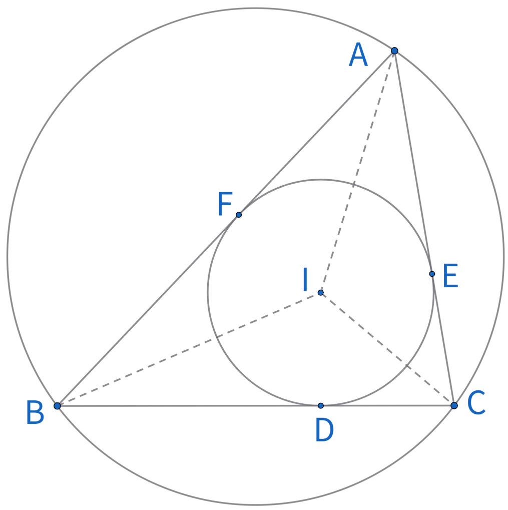

图 2: 内心

Proposition 2.1 (内心性质). 三角形内心具有如下性质。
(1) 三角形的内心是三条内角平分线的交点。
(2) 内心到三边的距离相等。
(3) 平面内一点 I 是三角形 $\triangle ABC$ 内心的充分必要条件为：

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A, \quad \angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}B, \quad \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}C.$$

(4) 设 D、E、F 分别为内切圆 I 在 BC、CA、AB 上的切点，那么

$$ID \perp BC, \quad IE \perp AC, \quad IF \perp AB.$$

切线长度可由三边边长表示：

$$BF = BD = \frac{1}{2}(a+c-b), \quad CD = CE = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad AE = AF = \frac{1}{2}(b+c-a).$$

Theorem 2.2 (鸡爪定理)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，O、I 分别为其外心和内心。设 AI 延长线与圆 O 相交于 D，D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，并且满足

$$DB = DI = DC.$$

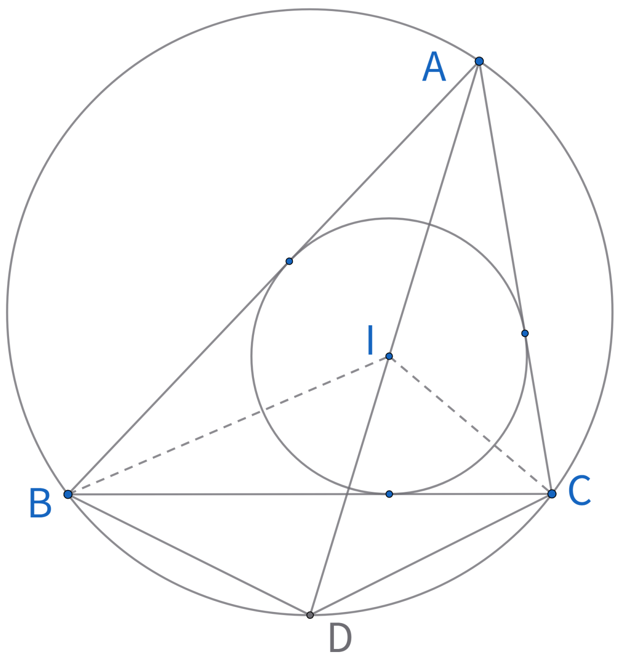

图 3: 鸡爪定理

3 垂心

Definition 3.1 (垂心). 三角形三边上高线的交点称为三角形的垂心，通常使用 H 表示。

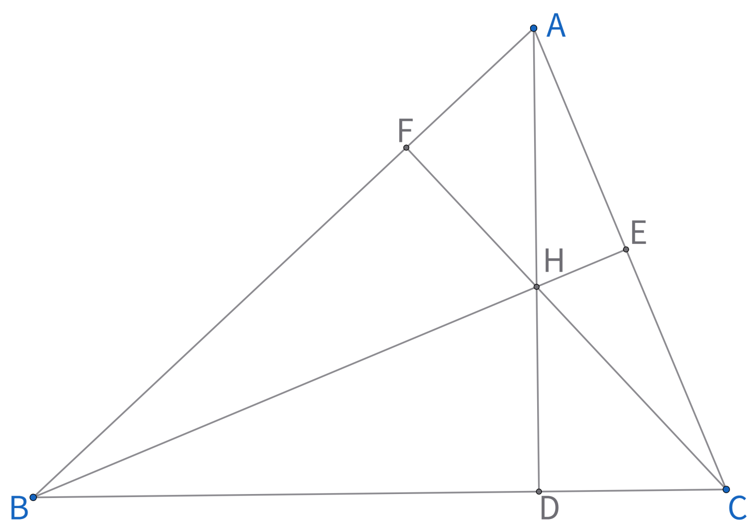

图 4: 垂心

Proposition 3.1 (垂心性质). 三角形垂心具有如下性质。
(1) 若 H 是三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，则

$$\angle BHC = 180^\circ - A, \quad \angle AHC = 180^\circ - B, \quad \angle AHB = 180^\circ - C.$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则

$$AH = 2R \cdot |\cos A|, \quad BH = 2R \cdot |\cos B|, \quad CH = 2R \cdot |\cos C|.$$

(3) 垂心 H 为垂足 $\triangle DEF$ 的内心。
(4) 锐角三角形的垂心在形内，直角三角形的垂心在直角顶点，钝角三角形的垂心在形外。
(5) 若 H 为三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，则 A、B、C、H 四点中任意一点是其余三点构成的三角形的垂心，称 A、B、C、H 为垂心组。

3.1 垂足三角形

Proposition 3.2 (垂足三角形)**.** 设 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，H 是垂心，则：(1) A, E, F, H 在以 AH 为直径的圆上。
(2) B, E, F, C 在以 BC 为直径的圆上。
(3) H 是 $\triangle DEF$ 的内心。

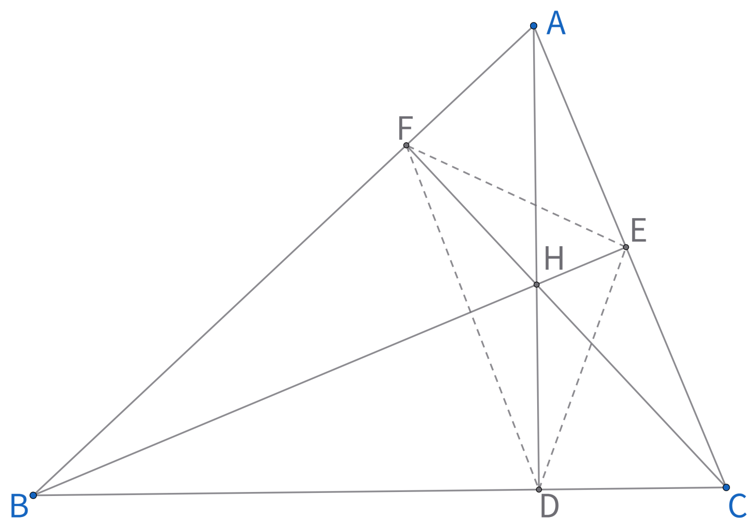

图 5: 垂足三角形

3.2 垂心的对称性质

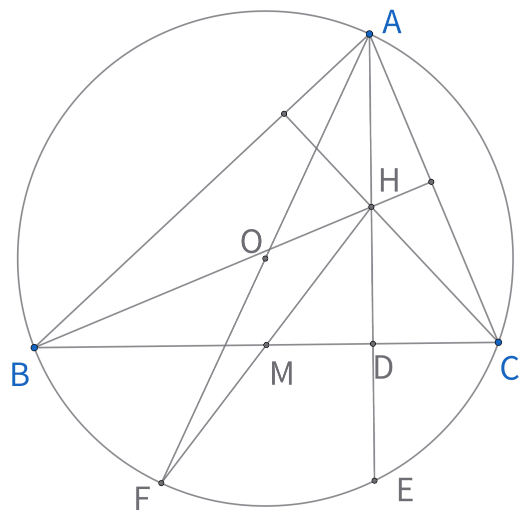

图 6: 垂心性质

Theorem 3.3 (垂心的对称性质)**.** 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，设 E 是 H 关于 BC 的对称点，F 是 H 关于 BC 中点 M 的对称点。
(1) E 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上。
(2) F 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上。
(3) A, O, F 三点共线。
(4) (卡诺定理) 顶点到垂心距离是外心到对边距离的 2 倍，即 $AH = 2OM$.
(5) H 是外心 O 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点，即

$$\angle BAO = \angle CAH, \quad \angle ACO = \angle BCH, \quad \angle CBO = \angle ABH.$$

4 重心

Definition 4.1 (重心)**.** 三角形三条中线的交点称为三角形的重心，通常使用 G 表示。

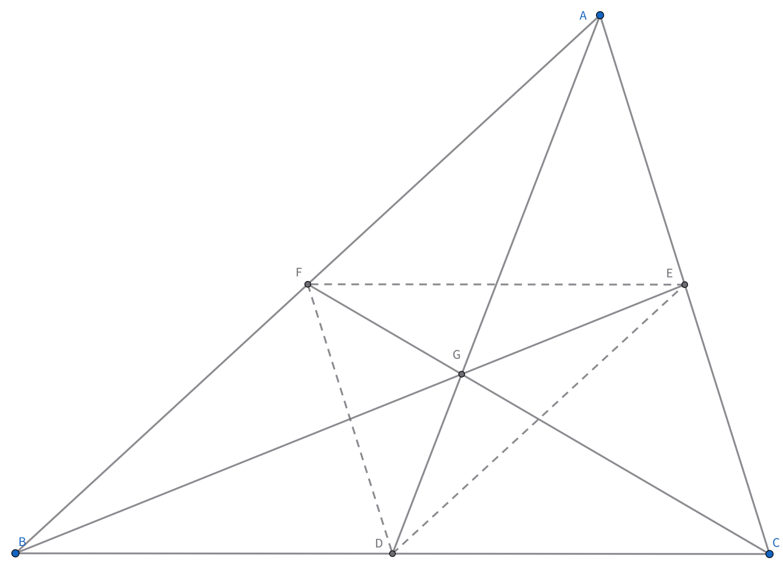

图 7: 重心

Proposition 4.1 (重心性质)**.** 三角形重心具有如下性质。
(1) 重心 G 为三条中线的三等分点，满足

$$AG = 2GD, \quad BG = 2GE, \quad CG = 2GF.$$

(2) 三边与重心组成的三角形面积相等，即

$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG}.$$

(3) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$，且相似比为 2.
(4) $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$.

5 旁心

Definition 5.1 (旁心)**.** 与三角形一边外侧相切，又与另两边的延长线相切的圆叫做三角形的旁切圆，通常用 J，或者 I_a, I_b, I_c 表示。

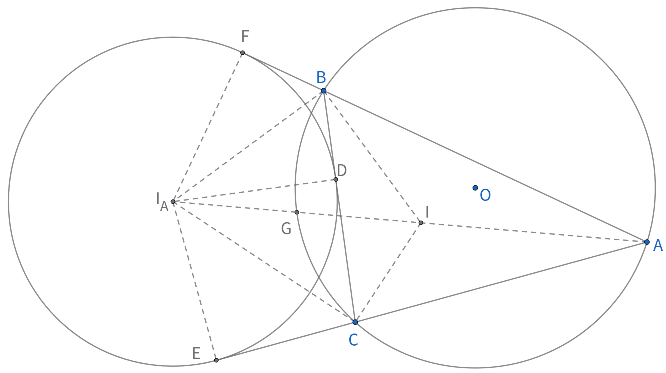

图 8: 旁心

Proposition 5.1 (旁心性质)**.** 三角形旁心具有如下性质。
(1) 旁心是三角形一内角平分线及其他两角外角平分线的交点。
(2) 旁心到三角形三边的距离相等。
(3) $\angle I_ABC = 90° - \frac{1}{2}B, \angle I_ACB = 90° - \frac{1}{2}C, \angle BI_AC = 90 - \frac{1}{2}A.$
(4) $\quad IB \perp BI_A, \quad IC \perp CI_A.$，所以 B, I, C, I_A 四点共圆，且圆心为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点。
(5) 内心 I 是旁心三角形 $I_AI_BI_C$ 的垂心。
(6) 设 D、E、F 分别为内切圆 I 在 BC、CA、AB 上的切点，则定点到旁切圆的切线长度可由三边边长表示：

$$AE = AF = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad BF = BD = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad CD = CE = \frac{1}{2}(a+c-b).$$

5.1 鸡爪定理

Theorem 5.2 (鸡爪定理)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，I, J 分别为其内心和 A-旁心，设 AI 延长线与圆 O 相交于 D，则 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，IJ 的中点，并且为 $IBJC$ 外接圆的圆心。

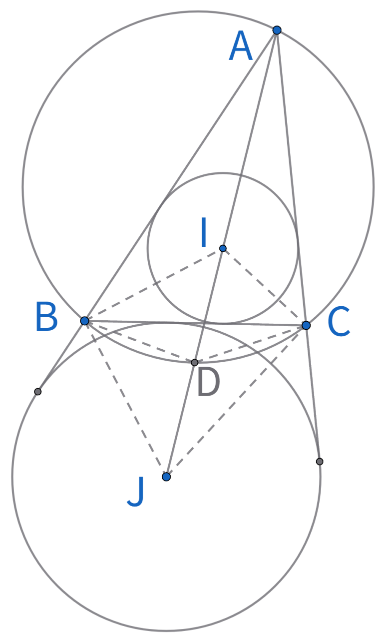

图 9: 鸡爪定理

5.2 旁心三角形

Proposition 5.3 (旁心三角形)**.** 对平面内任意 $\triangle ABC$，I, I_A, I_B, I_C 为其内心和三旁心。则 I 是旁心所构成 $\triangle I_AI_BI_C$ 的垂心。

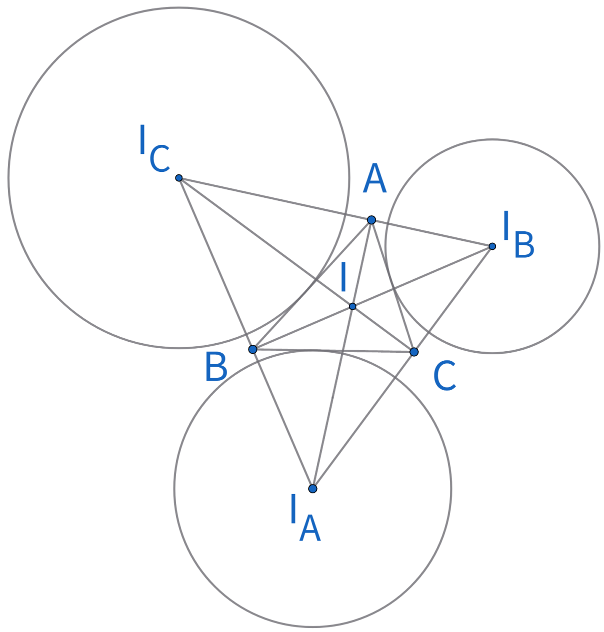

图 10: 旁心三角形