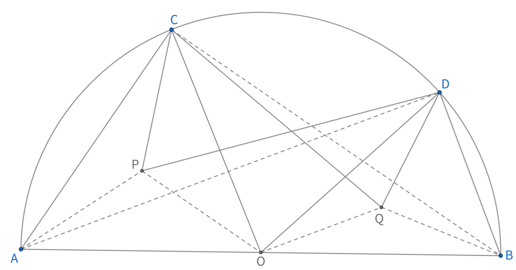
# 中国西部数学奥林匹克-几何 (2009 年-2014 年)

## 1 2014 年

### 1.1 Q2

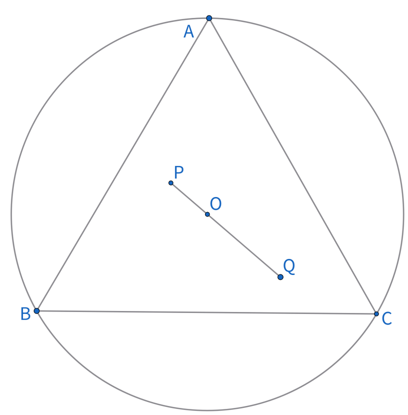
$AB$ 是半圆 $O$ 的直径，$C$、$D$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上两点，$P$、$Q$ 分别是 $\triangle OAC$ 与 $\triangle OBD$ 的外心。证明：$CP \cdot CQ = DP \cdot DQ$。




### 1.2 Q7

平面上，点 $O$ 是正三角形 $ABC$ 的中心，点 $P$、$Q$ 满足 $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{PO}$。证明：

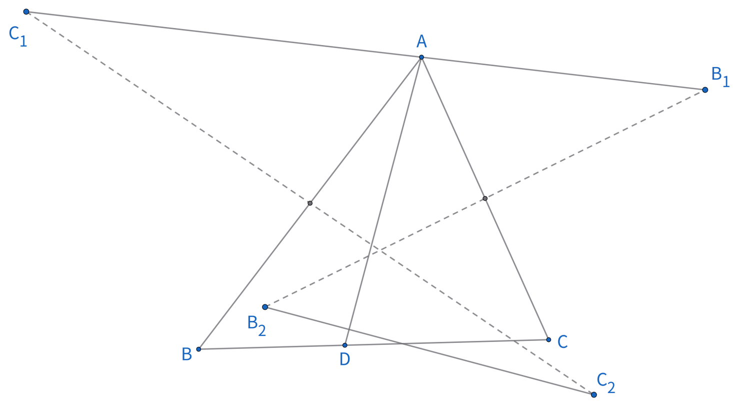
$$|PA| + |PB| + |PC| \le |QA| + |QB| + |QC|$$



# 2 2013 年

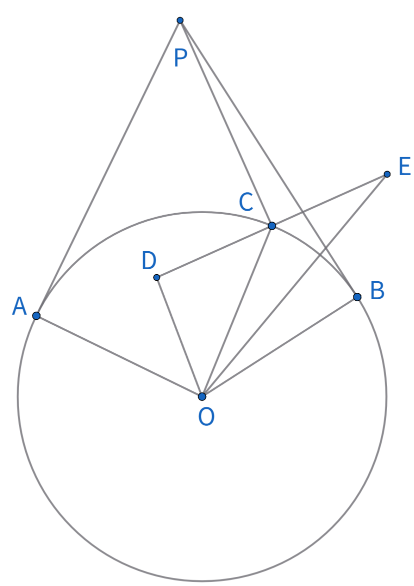
## 2.1 Q3

在 $\triangle ABC$ 中，点 $B_2$ 是 $AC$ 边上旁切圆圆心 $B_1$ 关于 $AC$ 中点的对称点，点 $C_2$ 是 $AB$ 边上旁切圆圆心 $C_1$ 关于 $AB$ 中点的对称点，$BC$ 边上旁切圆切 $BC$ 边于点 $D$。求证：$AD \perp B_2C_2$。




## 2.2 Q6

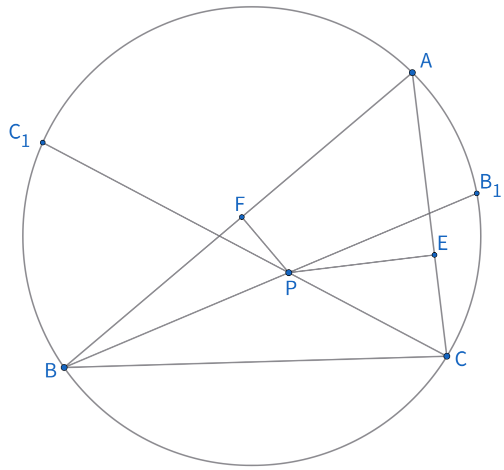
$PA$、$PB$ 为圆 $O$ 的切线，点 $C$ 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上（不含点 $A$、$B$）。过点 $C$ 作 $PC$ 的垂线 $l$，与 $\angle AOC$ 的平分线交于点 $D$，与 $\angle BOC$ 的平分线交于点 $E$。求证：$CD = CE$。



## 3 2012 年

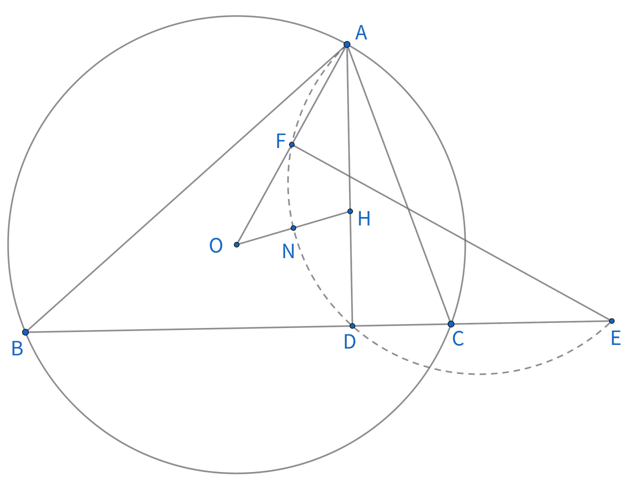
### 3.1 Q4

已知点 $P$ 为锐角 $\triangle ABC$ 内部任意一点，点 $E$、$F$ 分别为 $P$ 在边 $AC$、$AB$ 上的射影。$BP$、$CP$ 的延长线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 $B_1$、$C_1$，设 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径分别为 $R$ 和 $r$。求证：$\frac{EF}{B_1C_1} \geq \frac{r}{R}$，并确定等号成立时点 $P$ 的位置。




### 3.2 Q5

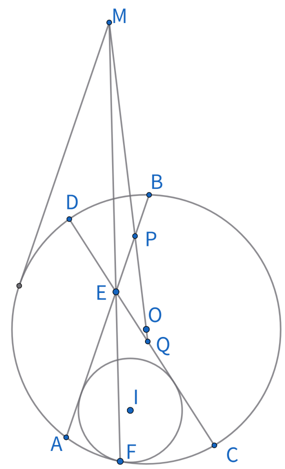
在锐角 $\triangle ABC$ 中，$H$ 是垂心，$O$ 是外心（$A$、$H$、$O$ 三点不共线），点 $D$ 是 $A$ 在边 $BC$ 上的射影，线段 $AO$ 的中垂线交直线 $BC$ 于点 $E$。求证：线段 $OH$ 的中点在 $\triangle ADE$ 的外接圆上。



# 4 2011 年

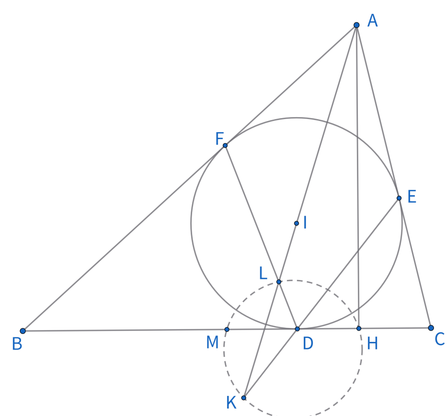
## 4.1 Q4

线段 $AB$、$CD$ 是 $\odot O$ 中长度不相等的两条弦，$AB$ 与 $CD$ 的交点为 $E$，$\odot I$ 内切 $\odot O$ 于点 $F$，且分别与弦 $AB$、$CD$ 相切于点 $G$、$H$。过点 $O$ 的直线 $l$ 分别交 $AB$、$CD$ 于点 $P$、$Q$，使得 $EP = EQ$。直线 $EF$ 与直线 $l$ 交于点 $M$，求证：过点 $M$ 且与 $AB$ 平行的直线是 $\odot O$ 的切线。




## 4.2 Q7

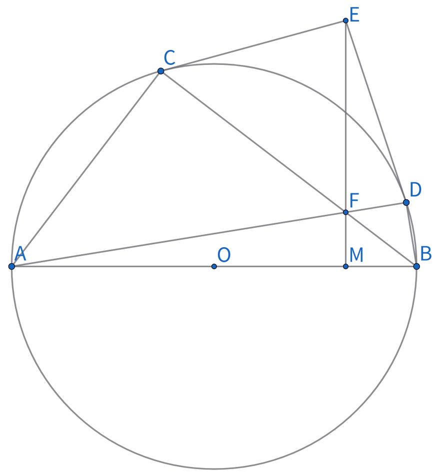
在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，内切圆 $\odot I$ 与边 $BC$、$CA$、$AB$ 分别相切于点 $D$、$E$、$F$，$M$ 是边 $BC$ 的中点，$AH \perp BC$ 于点 $H$。$\angle BAC$ 的平分线 $AI$ 分别与直线 $DE$、$DF$ 交于点 $K$、$L$。求证：$M$、$L$、$H$、$K$ 四点共圆。



## 5 2010 年

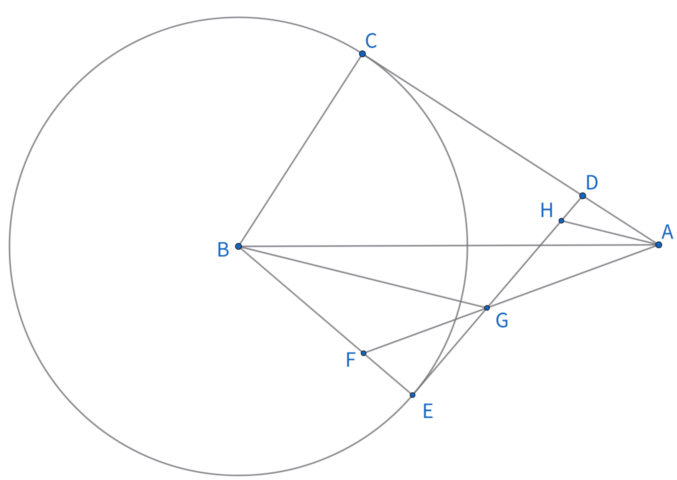
### 5.1 Q2

$AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$C$、$D$ 是圆周上异于 $A$、$B$ 且在 $AB$ 同侧的两点，分别过点 $C$、$D$ 作圆的切线，它们相交于点 $E$，线段 $AD$ 与 $BC$ 的交点为 $F$，直线 $EF$ 与 $AB$ 相交于点 $M$，求证：$E$、$C$、$M$、$D$ 四点共圆。




### 5.2 Q6

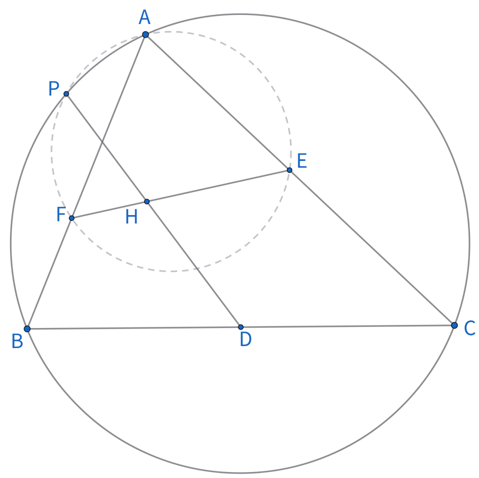
在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$。以 $B$ 为圆心、$BC$ 为半径作圆，点 $D$ 在边 $AC$ 上，直线 $DE$ 切 $\odot B$ 于点 $E$。过点 $C$ 垂直于 $AB$ 的直线与直线 $BE$ 交于点 $F$，$AF$ 交 $DE$ 于点 $G$，作 $AH \parallel BG$ 交 $DE$ 于点 $H$。求证：$GE = GH$。



# 6　2009 年

## 6.1　Q3

$H$ 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，$D$ 为边 $BC$ 的中点。过点 $H$ 的直线分别交边 $AB$、$AC$ 于点 $F$、$E$，使得 $AE = AF$。射线 $DH$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 $P$。求证：$P$、$A$、$E$、$F$ 四点共圆。




## 6.2　Q6

设点 $D$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上一点，以线段 $BD$ 为直径的圆分别交直线 $AB$、$AD$ 于点 $X$、$P$（异于点 $B$、$D$），以线段 $CD$ 为直径的圆分别交直线 $AC$、$AD$ 于点 $Y$、$Q$（异于点 $C$、$D$）。过点 $A$ 作直线 $PX$、$QY$ 的垂线，垂足分别为 $M$、$N$。证明：$\triangle AMN \sim \triangle ABC$ 的充分必要条件是直线 $AD$ 经过 $\triangle ABC$ 的外心。