平面几何-三角法

1　三角法常用结论

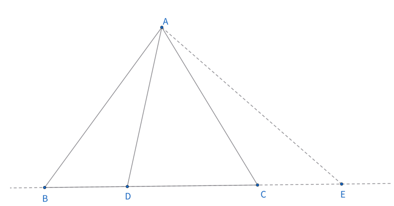
Theorem 1.1 (正弦定理)**.** 任意 $\triangle ABC$ 中，各边和它所对角的正弦值之比相等，且等于外接圆直径长，即

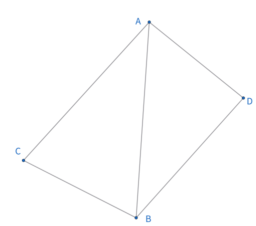
$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}.$$

Theorem 1.2 (分角线定理)**.** $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 所在直线上一点，则有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC}.$$

注意 AD 为中线或角平分线的特殊情况。





Proposition 1.3. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 共用 AB 边，则下列等式成立：

$$\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BAD}=\frac{BC}{BD}\cdot\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ADB}.$$

Proposition 1.4. 给定 $0<\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_1<180°$, 设 $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2<180°$, 若

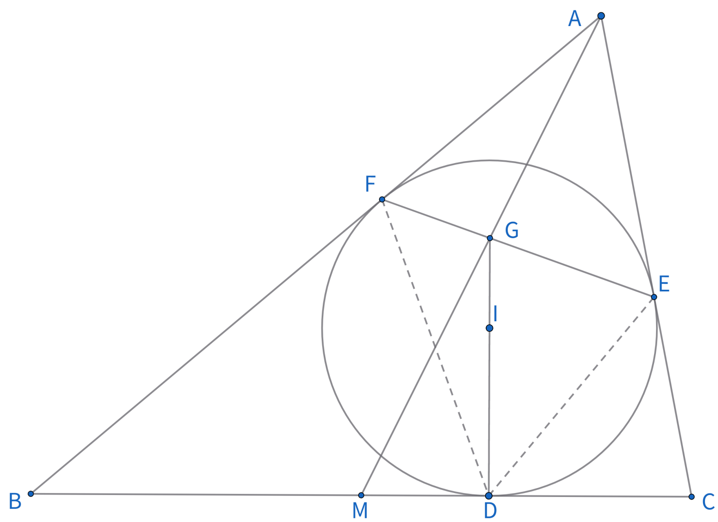
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2},$$

则有 $\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$.

2 例题

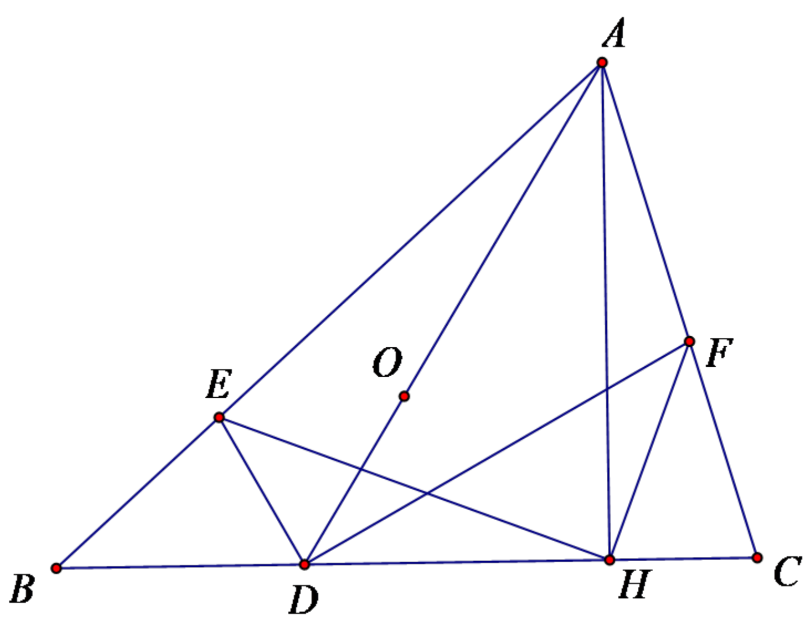
2.1 Ex1

给定 $\triangle ABC$，内切圆与三边切点分别是 D、E、F，过 D 作 BC 垂线交 EF 于点 G，M 为 BC 中点。证明：A、G、M 三点共线。



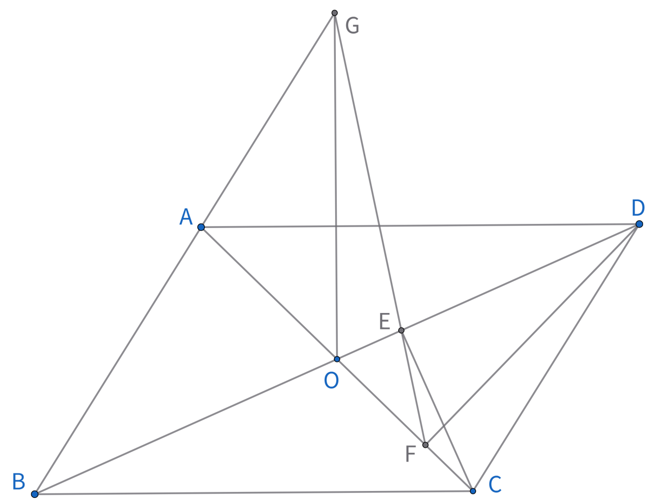
2.2 Ex2

锐角 $\triangle ABC$ 中，O 为外接圆圆心，AH 为 BC 边上高线，延长 AO 交 BC 于 D，$\angle ADB, \angle ADC$ 内角平分线分别交 AB、AC 于 E、F，证明： EHF=90°.



2.3 Ex3

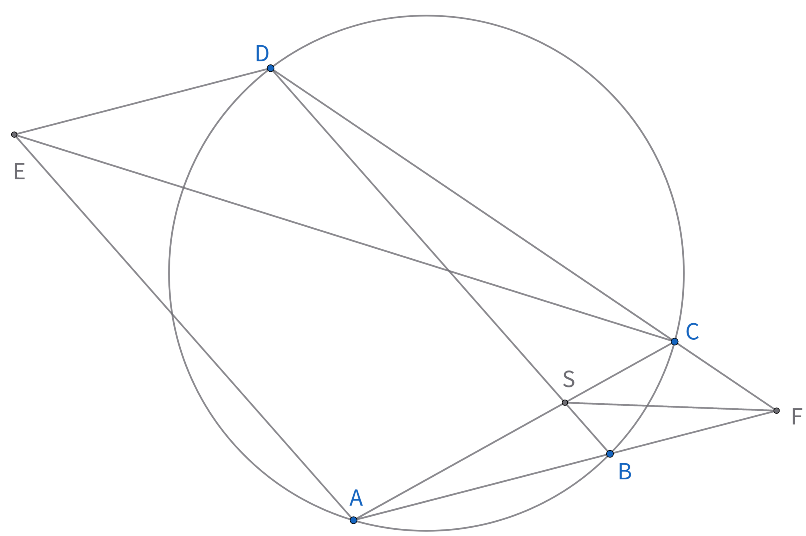
给定平行四边形 ABCD，DF、CE 为 $\triangle OCD$ 的两条高，过 O 做 AD 垂直线交 BA 延长线于 G。证明：G、E、F 共线。



3 练习题

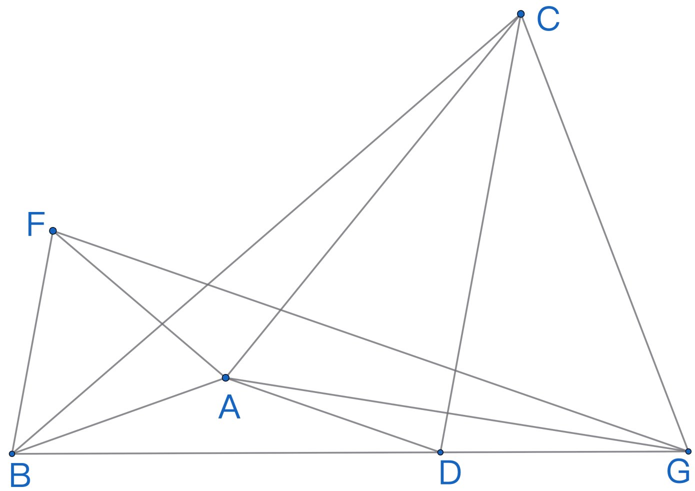
3.1 Q1

设 ABCD 四点共圆，四边形 ABDE 为平行四边形。AC 与 BD 交于点 S，射线 AB 与 DC 交于点 F。证明：$\angle AFS = \angle ECD$.



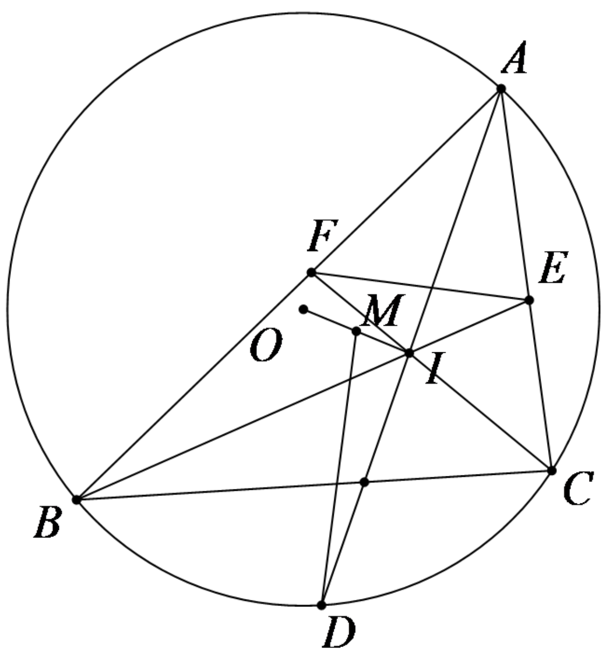
3.2 Q2

已知 $\triangle ABF, \triangle AGC$ 是等边三角形，AD 平行于 FG。证明：$CD \parallel BF$.



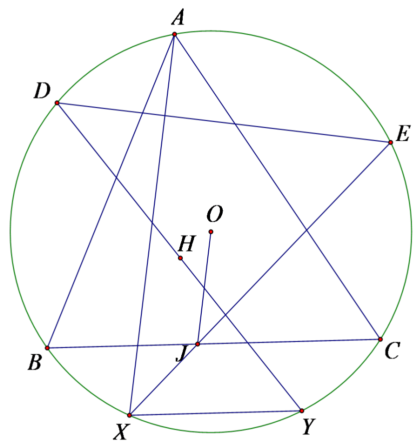
3.3 Q3

已知 O、I 是 $\triangle ABC$ 外心、内心，CI、BI 分别交 AB、AC 于 E、F，$\angle BAC$ 角平分线交 $\triangle ABC$ 外接圆 O 于 D，M 是 OI 中点。证明：$DM \perp EF$.



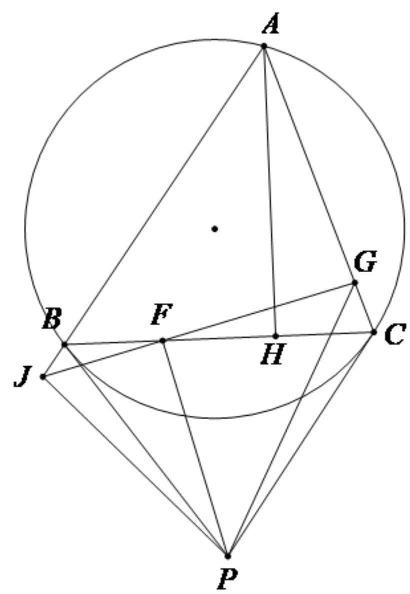
3.4 Q4

已知 O、H 是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，XY 是 $\triangle ABC$ 外接圆 O 的弦，且 XY 平行于 BC，YH 延长线交圆 O 于 D，过 D 作 AX 垂线，交圆 O 于 E，XE 交 BC 于 J。证明：$OJ \parallel AX$.



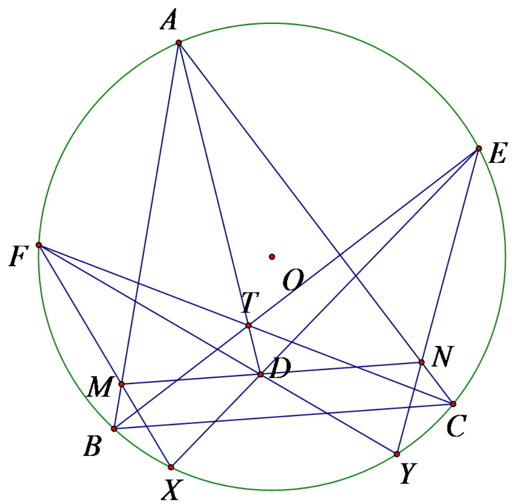
3.5 Q5

已知 $\triangle ABC$ 中 AH 为 BC 边上的高线，PB、PC 是 $\triangle ABC$ 外接圆切线，F 在 BC 上满足 $CH = BF$，过 F 做 PF 垂线交 AB 于 J，交 AC 于 G。证明：$\angle GPC = \angle BPJ$.



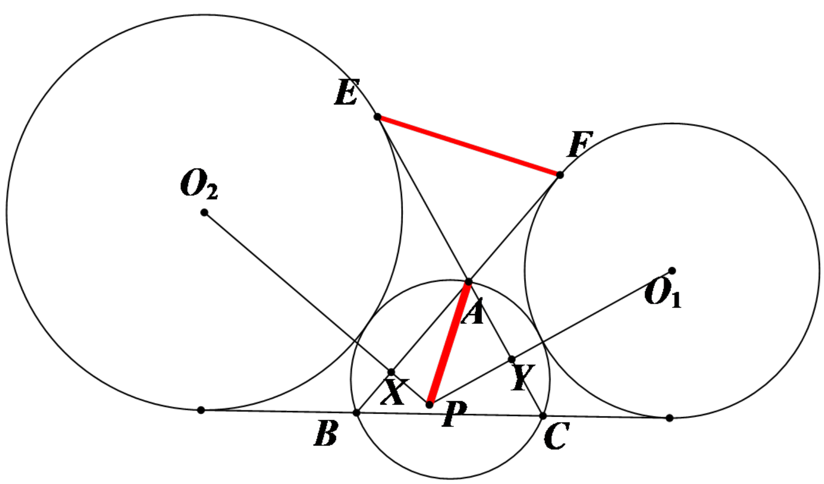
3.6 Q6

已知 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，T 是 AD 上一点，BT、CT 分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 于 E、F，FD、ED 分别交 $\odot O$ 于 Y、X，FX 与 AB 交于 M，EY 与 AC 交于 N。证明：$MN \parallel BC$



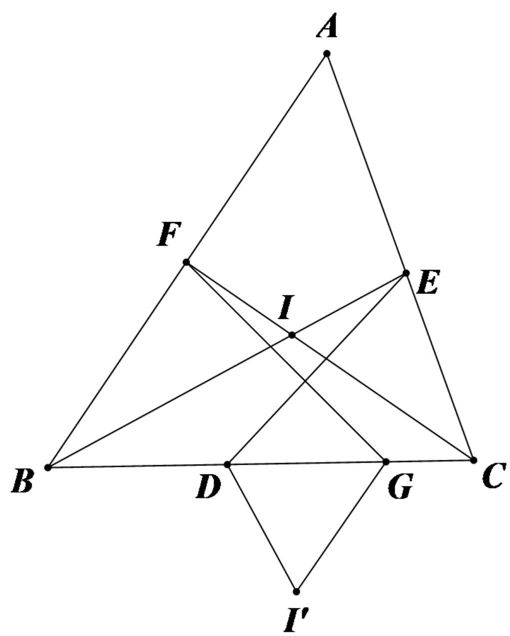
3.7 Q7

已知圆 O_1，圆 O_2 分别是 $\triangle ABC$ 伪旁切圆，在 AB，AC 上切点分别是 F，E，过 O_1，O_2 作 AC，AB 垂线交于点 P。证明：$AP \perp EF$.



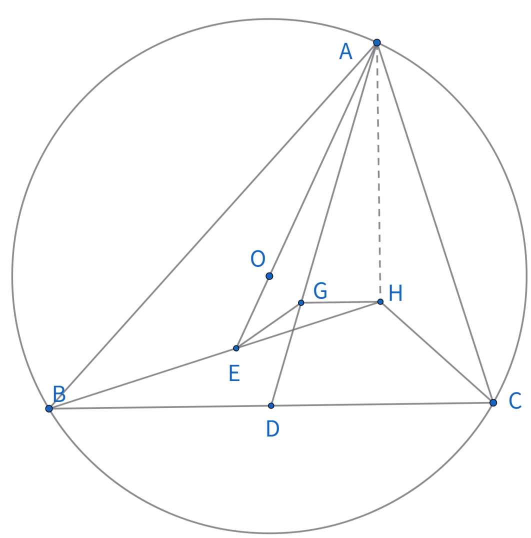
3.8 Q8

已知点 I 是 $\triangle ABC$ 内心，直线 BI、CI 交 AC、AB 分别于 E、F，点 I'、I 关于 BC 对称，$ID' \perp BE$，$I'G \perp CF$，分别交 BC 于 D、G。求证 $\angle BGF = \angle CDE$.



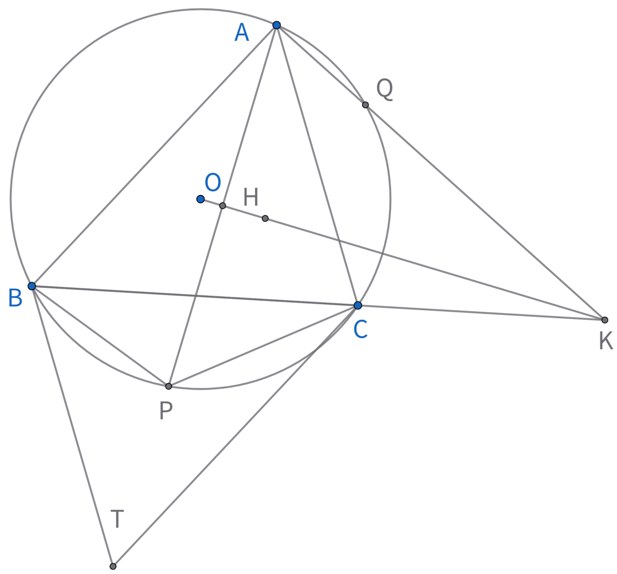
3.9 Q9

已知 H、O 是 $\triangle ABC$ 垂心，外心，D 是 BC 中点，过 H 作 BC 平行线交 AD 于 G，AO 交 BH 于 E。求证：$GH = EG$.



3.10 Q10

$\triangle ABC$ 内接于圆 O，H 为垂心，过 A 作 OH 垂线交外接圆于 P，OH 交 BC 延长线于 K，连接 AK 交外接圆于 Q，取 T 使得 $ACTB$ 为平行四边形。证明：T、P、H、Q 四点共圆。



3.11 Q11

在 $\triangle ABC$ 中，H 是垂心，BE、CF 是高，$\angle BAC$ 的角平分线交 EF 于 X，$\angle EHF$ 的角平分线交 EF 于 Y，EF 交 $\triangle AXH$ 的外接圆于 P，交 $\triangle AYH$ 的外接圆于 Q。证明：B、C、Q、P 四点共圆。