数学基础
变换与旋转表示

北京大学 前沿计算研究中心

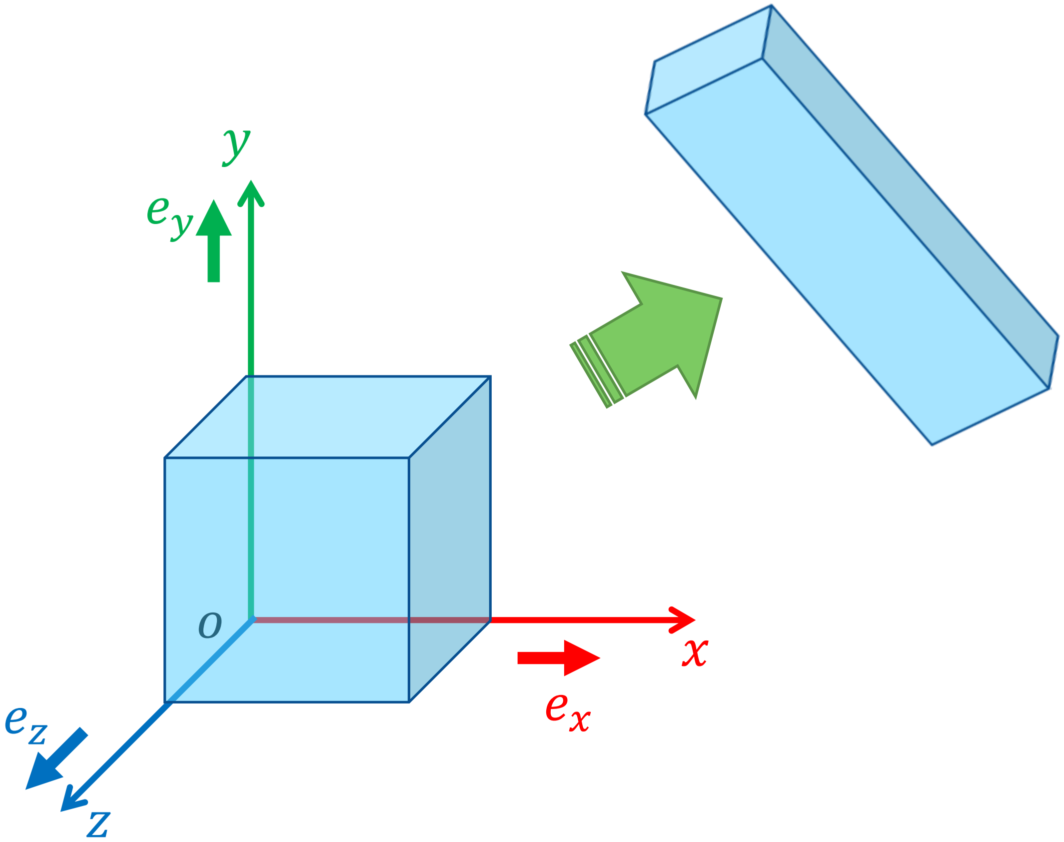
刘利斌

本节主要内容

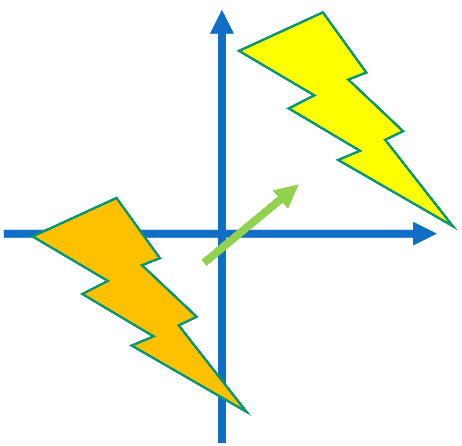
- 坐标变换
  - 三维旋转与表示
- 前向运动学

变换

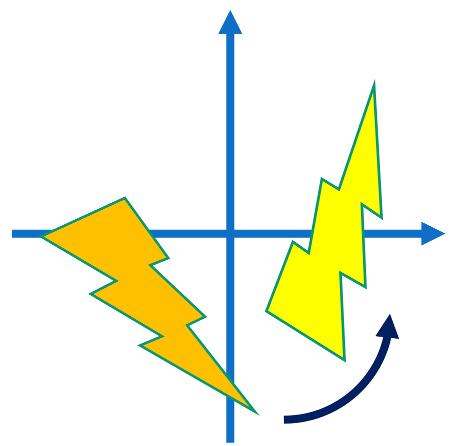
Transform



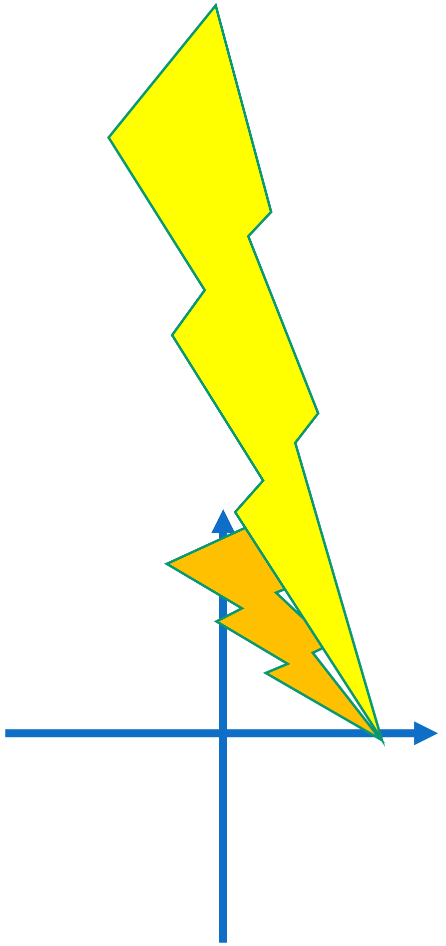
变换 = 平移 + 旋转 + 伸缩



平移

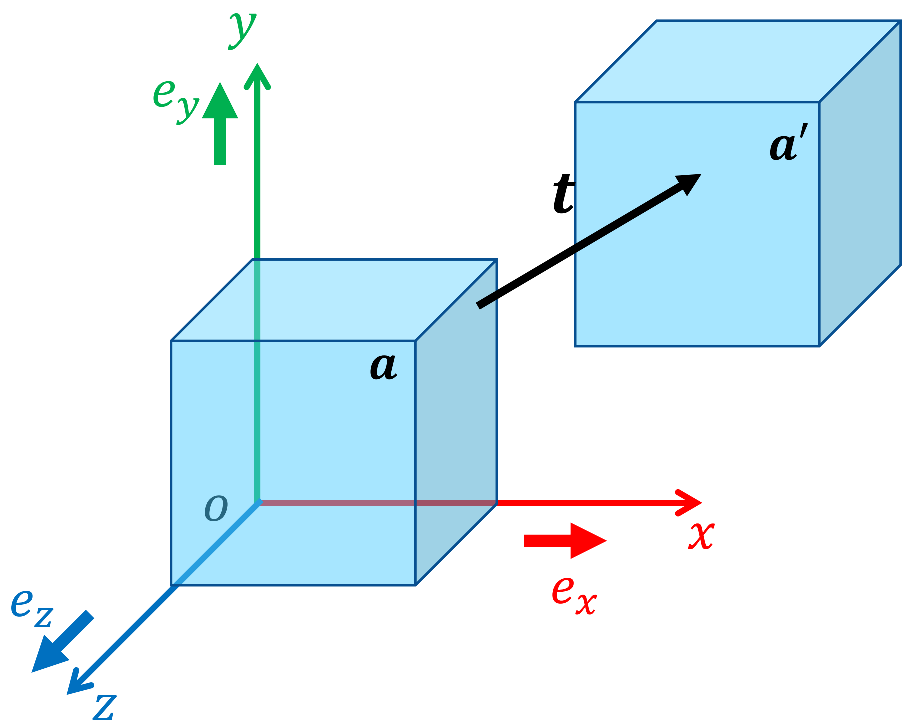


旋转



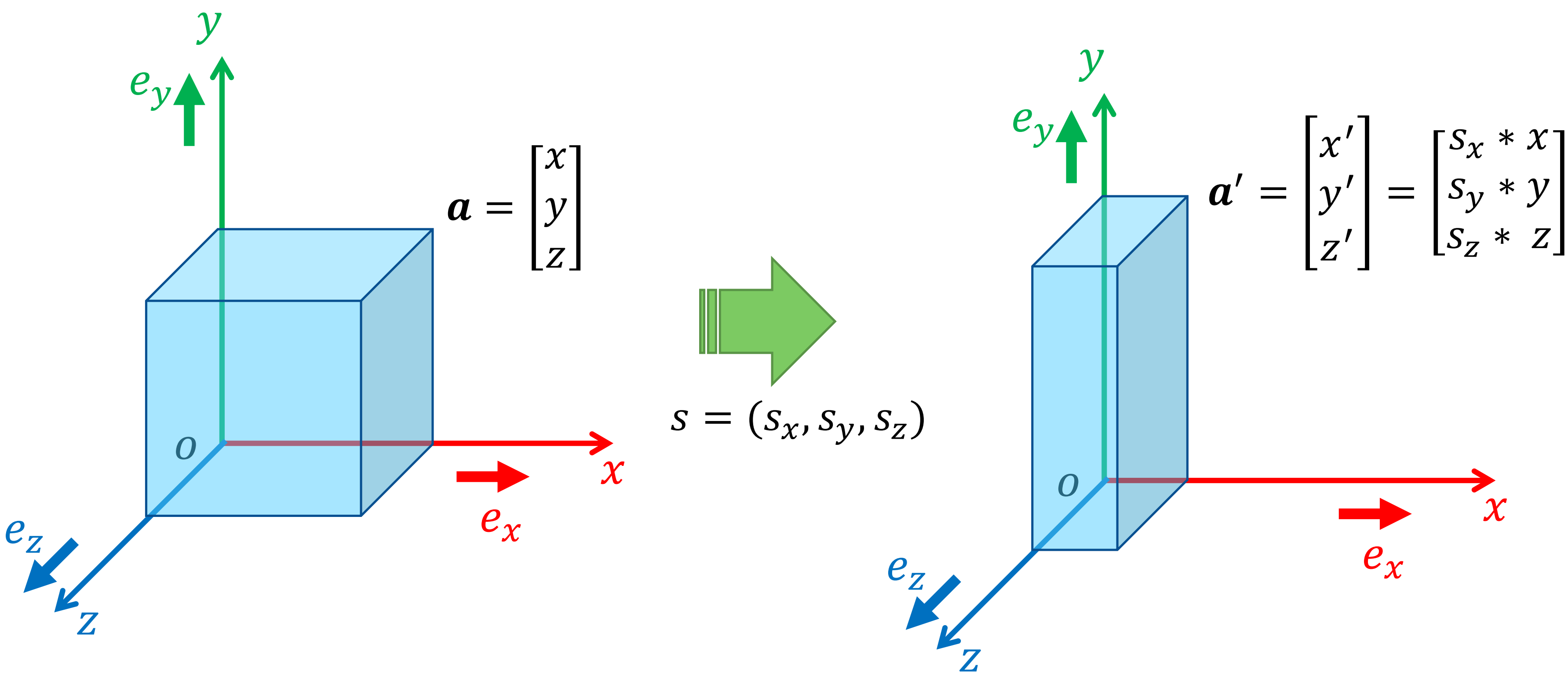
伸缩

平移



$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}$$

伸缩



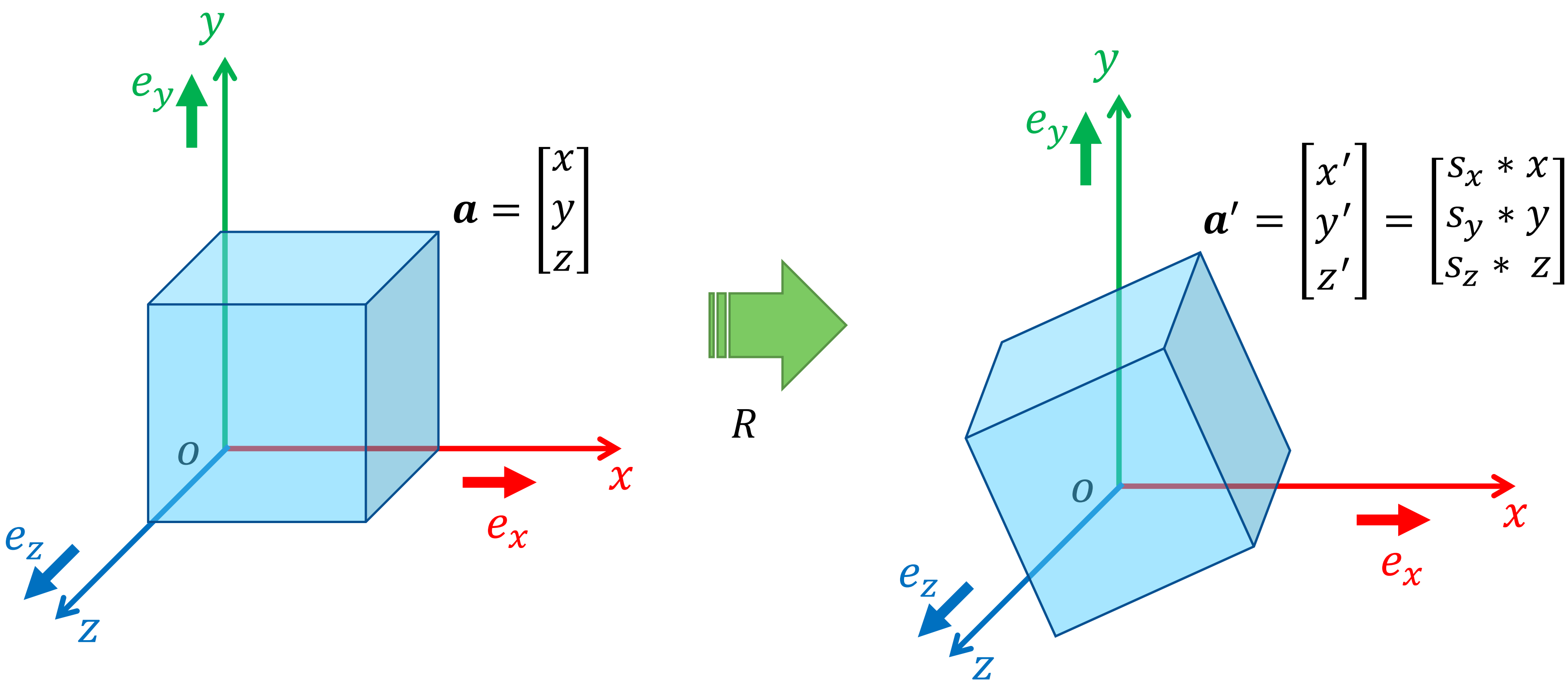
$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$s = (s_x, s_y, s_z)$$

$$\boldsymbol{a}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x * x \\ s_y * y \\ s_z * z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}' = \begin{bmatrix} s_x & & \\ & s_y & \\ & & s_z \end{bmatrix} \boldsymbol{a}$$

旋转



$$\boldsymbol{a}' = R\boldsymbol{a}$$

R: 旋转矩阵

三维旋转的表示

- 旋转矩阵 (Rotation Matrix)
- 欧拉角 (Euler Angle)
- 轴角表示法 (Axis-Angle)
- 四元数 (Quaternion)

旋转矩阵 (Rotation Matrix)

$$R = [\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z]$$

- 正交方阵： $R^T R = I$
- $\det R = 1$
- $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$

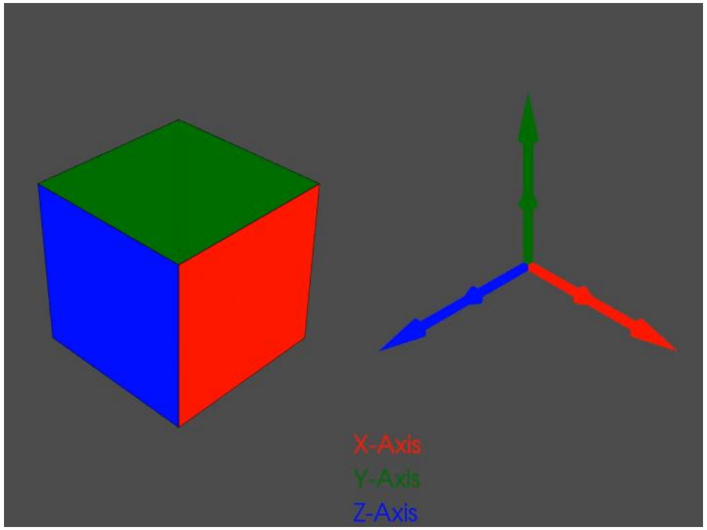
三维旋转的表示

- 旋转矩阵 (Rotation Matrix)
- 欧拉角 (Euler Angle)
- 轴角表示法 (Axis-Angle)
- 四元数 (Quaternion)

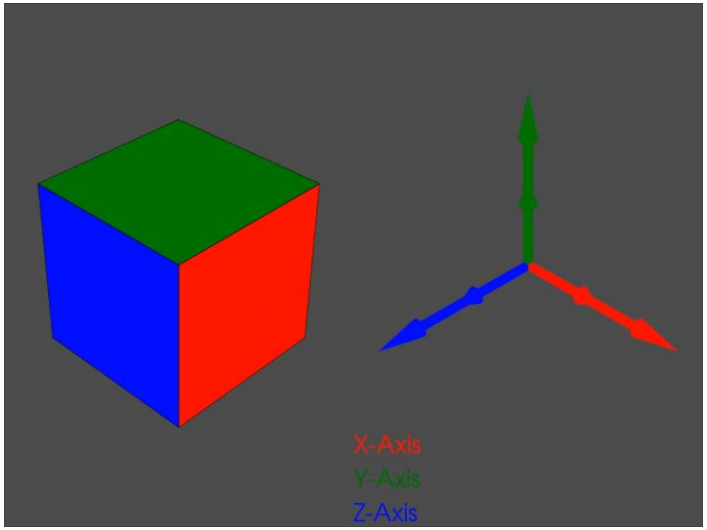
欧拉角 (Euler Angle)

- 将旋转表示为三个基本旋转的叠加

$$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} R_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix} R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$R_z(72°)R_y(45°)R_x(60°)$



$R_x(69.2°)R_y(4.0°)R_z(42.4°)$

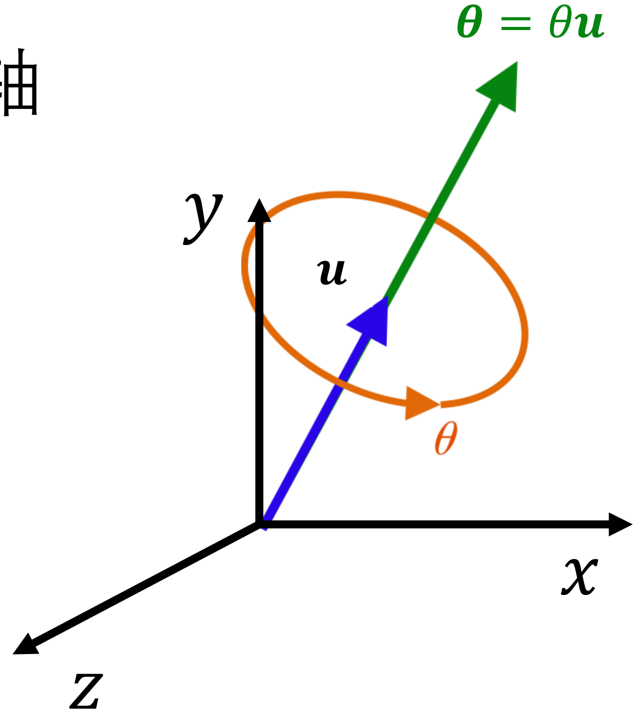
轴角表示 (Axis-Angle)

- 任意三维旋转可以表示成
  - 一个单位向量 $\boldsymbol{u}$，代表旋转轴
  - 一个数 θ，代表旋转角度

  的组合$(\boldsymbol{u}, \theta)$

- 旋转向量（rotation vector）

  $$\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{u}$$

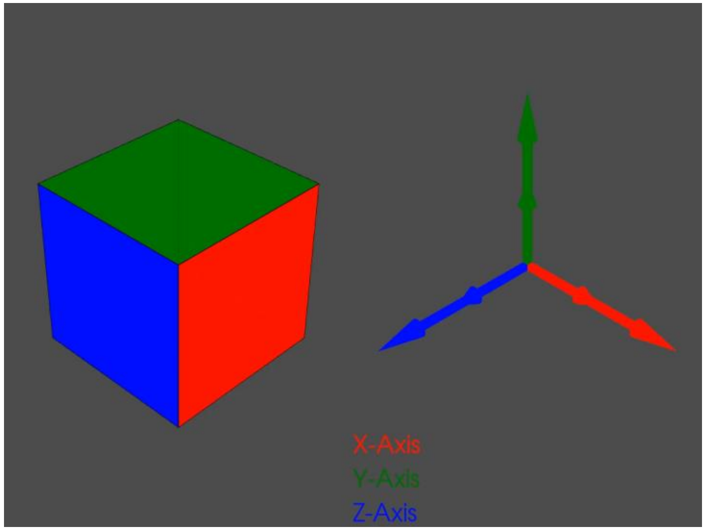


轴角表示 (Axis-Angle)

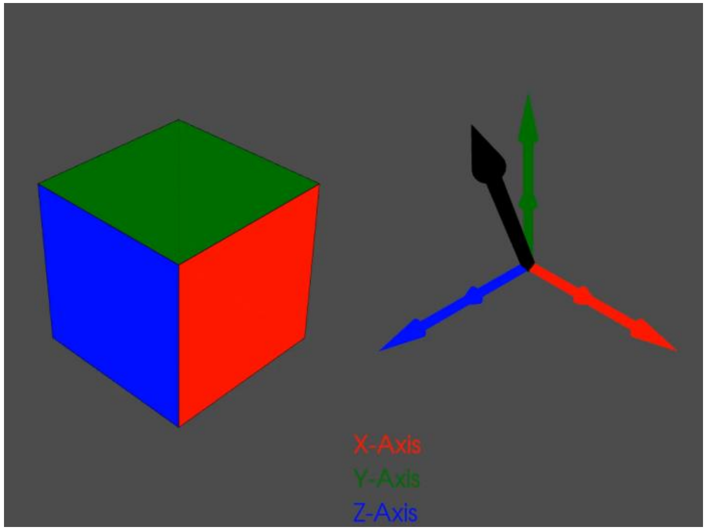
- Rodrigues' Rotation Formula

$$[\boldsymbol{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{u}, \theta) \rightarrow \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \sin\theta\, [\boldsymbol{u}]_\times + (1 - \cos\theta)[\boldsymbol{u}]_\times^2$$



$R_z(72^\circ)R_y(45^\circ)R_x(60^\circ)$

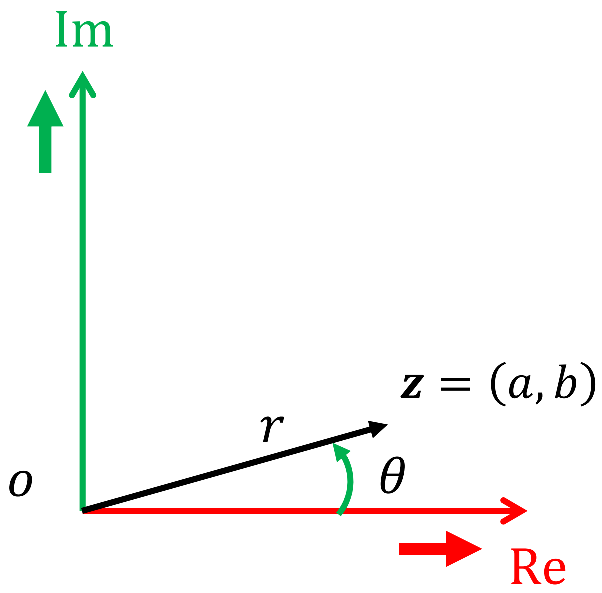


$u = (0.28, 0.83, 0.48)$
$\theta = 81.1^\circ$

三维旋转的表示

- 旋转矩阵 (Rotation Matrix)
- 欧拉角 (Euler Angle)
- 轴角表示法 (Axis-Angle)
- 四元数 (Quaternion)

复数与二维旋转

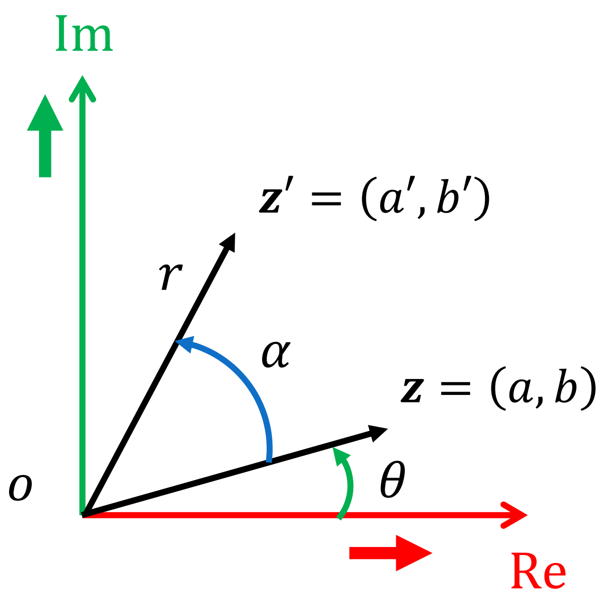


- 复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}$
- 其中$a, b \in \mathbb{R}$，且 $i^2 = -1$
- 欧拉公式

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \arctan\frac{b}{a}$$

复数与二维旋转



- 复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}$
- 旋转 $\alpha, z' = a' + b'i$
- 欧拉公式

$$
\begin{aligned}
z' &= re^{i(\theta+\alpha)} \\
&= e^{i\alpha} \times re^{i\theta} \\
&= \boxed{e^{i\alpha}} z
\end{aligned}
$$

单位复数 ➔ 二维旋转

复数的扩展

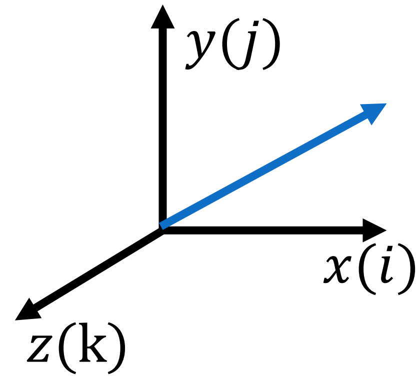
$$z = a + bi + \boldsymbol{cj} + \boldsymbol{dk} + ????$$

$$i^2 = -1$$

$$j^2 = -1, j \neq i$$

$$k^2 = -1, k \neq i, j$$

四元数 (Quaternion)



- “扩展”的复数
- 定义 $\boldsymbol{q} = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
  - 其中$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
  - $ij = k, ji = -k$ (单位向量叉乘)
  - $jk = i, kj = -i$
  - $ki = j, ik = -j$
- 可以用一个三维的向量来表示虚部
  - $\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{v} = (x, y, z)^\mathrm{T}$
  - **纯四元数** $\boldsymbol{q} = [0, \boldsymbol{v}]$ 实部为0，只有虚部三维向量

William Rowan Hamilton
发明了四元数

四元数的性质

- 模长 $\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{w^2+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$
- 加法

$$\boldsymbol{q}_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k = w_1 + \boldsymbol{v}_1$$
$$\boldsymbol{q}_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k = w_2 + \boldsymbol{v}_2$$

$$\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

$$= (w_1 + w_2) + (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

- 标量乘法 $t\boldsymbol{q_1} = ta_1 + tb_1 i + tc_1 j + td_1 k$
- 点乘 $\boldsymbol{q_1}\cdot\boldsymbol{q_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ (类比向量点乘)

四元数乘法

$$\boldsymbol{q_1}\ \boldsymbol{q_2} = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ * (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

展开一共$4 \times 4 = 16$项

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q_1 q_2} = {} & a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ & +(b_1 a_2 + a_1 b_2 - d_1 c_2 + c_1 d_2) i \\ & +(c_1 a_2 + d_1 b_2 + a_1 c_2 - b_1 d_2) j \\ & +(d_1 a_2 - c_1 b_2 + b_1 c_2 + a_1 d_2) k\end{aligned}$$

注意:

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$ij = k, ji = -k$ (单位向量叉乘)

$jk = i, kj = -i$

$ki = j, ik = -j$

四元数乘法

$$\boldsymbol{q_1}\ \boldsymbol{q_2} = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) * (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

- 写成矩阵形式

$$\boldsymbol{q_1 q_2} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

四元数乘法

$$\boldsymbol{q}_1\,\boldsymbol{q}_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) * (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

- 或者（Grassmann Inner Product)

$$\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{v} = (x, y, z)^{\top}$$

$$\boldsymbol{q_1 q_2} = [w_1 w_2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2, \; w_1 \boldsymbol{v}_2 + w_2 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2]$$

四元数性质

- $\boldsymbol{q_1 q_2} \neq \boldsymbol{q_2 q_1}$，与矩阵乘法类似，不满足交换律
- 四元数的**逆** $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{q}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{q} = 1$, 也即 $[1,(0,0,0)]$
- 四元数 $\boldsymbol{q} = a + bi + ck + dj$ 的**共轭四元数**

$$\boldsymbol{q}^* = a - bi - cj - dk$$

  - $\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}]$的共轭可以写成 $\boldsymbol{q}^* = [w, -\boldsymbol{v}]$
- $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{q}^*\boldsymbol{q} = \|\boldsymbol{q}\|^{\boldsymbol{2}}$，也即 $[\|\boldsymbol{q}\|^{\boldsymbol{2}},(0,0,0)]$
- 四元数的逆 $\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\boldsymbol{q}^*}{\|\boldsymbol{q}\|^2}$

单位四元数

- **模长为 1** 的四元数

$$\boldsymbol{q} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}}{\|\widetilde{\boldsymbol{q}}\|}$$

- 可记为 $q = [w, \boldsymbol{v}] = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}]$， $\|\boldsymbol{u}\| = \mathbf{1}, \theta \in \mathbb{R}$

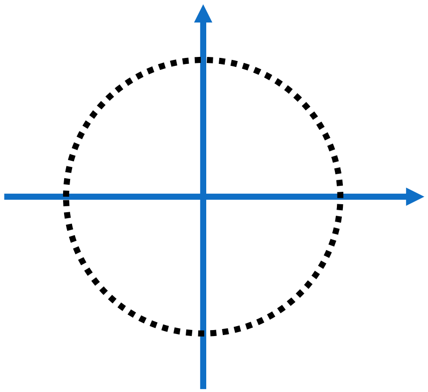
- 单位四元数的逆 $\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{*}$

单位四元数

- **模长为 1** 的四元数

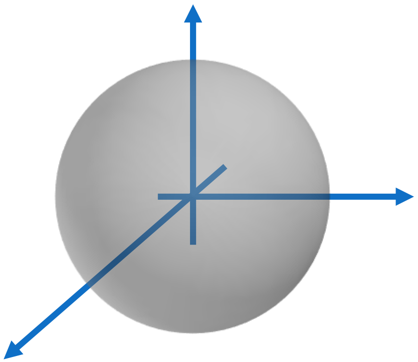
$$\boldsymbol{q} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}}{\|\widetilde{\boldsymbol{q}}\|}$$

- 可记为 $\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}] = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}]$， $\|\boldsymbol{u}\| = \boldsymbol{1}, \theta \in \mathbb{R}$



单位复数

$z = \cos\theta + i\sin\theta$



单位四元数

$q = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}]$

用单位四元数表示旋转

- 任意三维旋转可以表示为**单位四元数**

$$\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}] = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}]$$

  - $\boldsymbol{u}$为旋转轴，θ为旋转角
  - 对应轴角表示 $(\boldsymbol{u}, \theta)$ 或 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{u}$

用单位四元数表示旋转

- 任意三维旋转可以表示为**单位四元数**

$$\boldsymbol{q} = [w, \boldsymbol{v}] = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}]$$

  - $\boldsymbol{u}$为旋转轴，θ为旋转角
  - 对应轴角表示 $(\boldsymbol{u}, \theta)$ 或 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{u}$

- 单位四元数 $\boldsymbol{q}$ 与 $-\boldsymbol{q}$ 代表相同的旋转

四元数表示下的旋转

- 给出单位四元数 $\boldsymbol{q}$ 和任意三维向量 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{q}$ 作用下的旋转可以写为

$$\widehat{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{q}\widehat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{q}^*$$

其中 $\hat{v}$ 为纯四元数 $\widehat{\boldsymbol{v}} = [0, \boldsymbol{v}]$

运算结果仍为纯四元数 $\widehat{\boldsymbol{v}}' = [\mathbf{0}, \boldsymbol{v}']$

$\boldsymbol{v}'$ 即为旋转后的向量

两个旋转的复合

- 对于旋转 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$, 向量 $\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{q_2}(\boldsymbol{q_1}\boldsymbol{v}\boldsymbol{q_1^*})\boldsymbol{q_2^*} = (\boldsymbol{q_2}\boldsymbol{q_1})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q_2}\boldsymbol{q_1})^* \\ &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}^*\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_2}\boldsymbol{q_1}$ 表示 $\boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{q_1}$ 的复合旋转

四元数总结

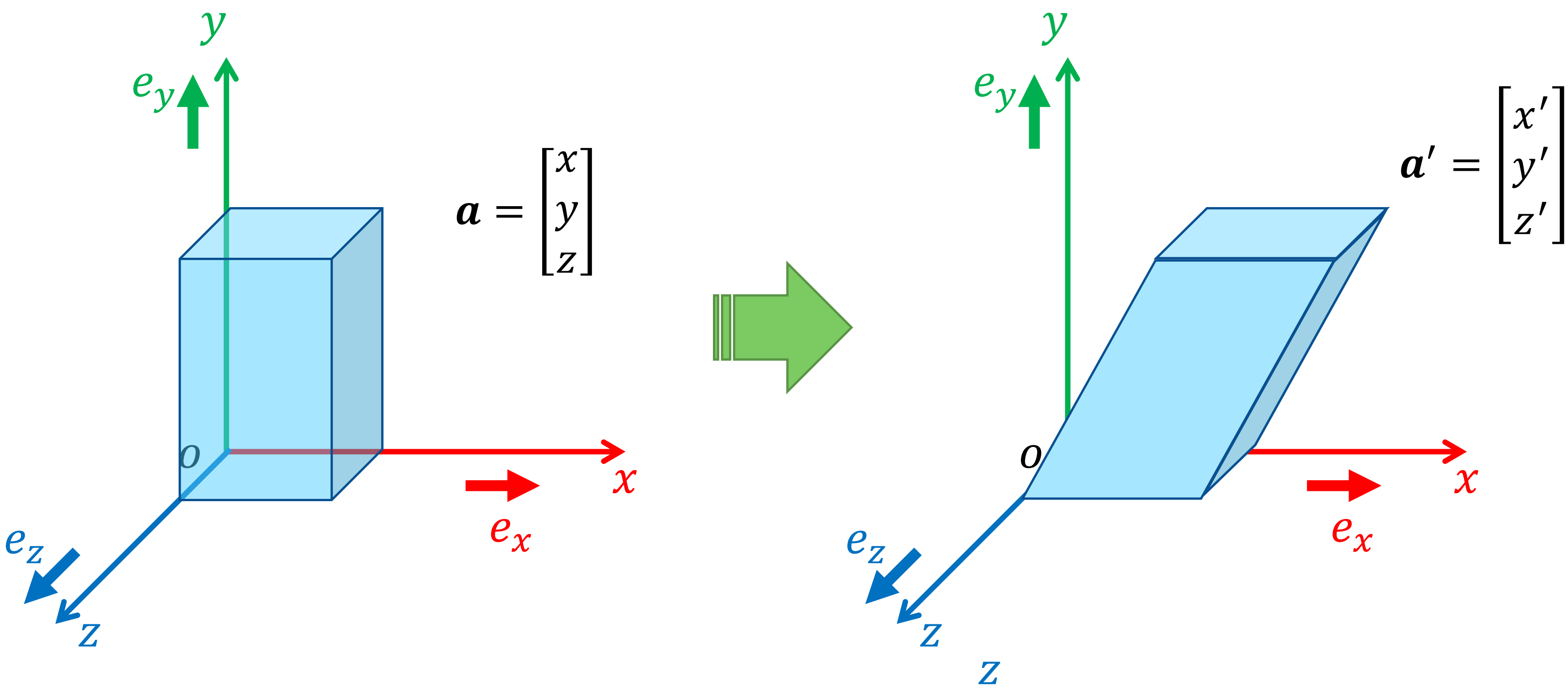
- 只有单位四元数才表示旋转
- $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}$
- 方便在运算时做归一化
- $\boldsymbol{q}$ 与 $-\boldsymbol{q}$ 代表相同的旋转
- 插值, 求逆等操作方便
- 较为常用(物理仿真等)

其他旋转表示

- 旋转表示的间断点问题
  - [Zhou et al. 2018 - *On the Continuity of Rotation Representations in Neural Networks*]

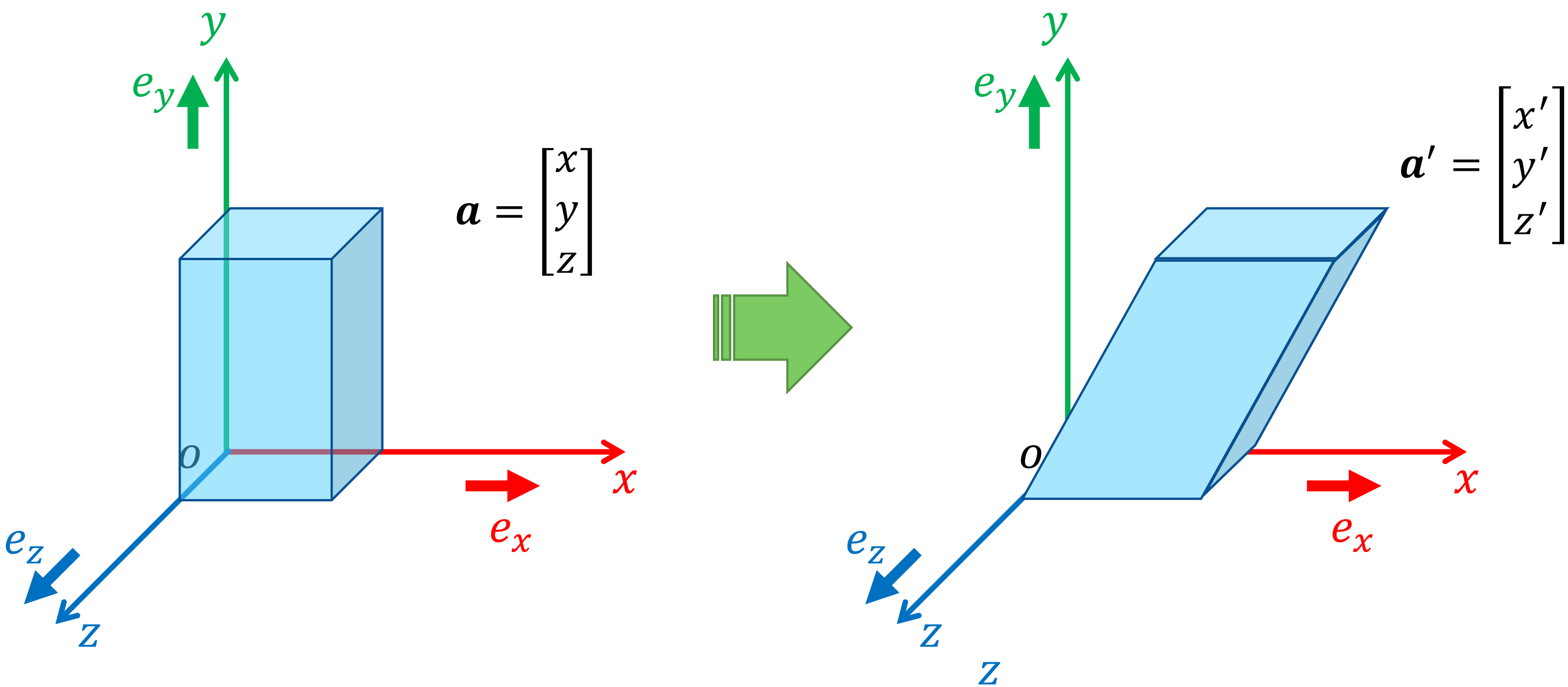
- 6D-vector
  - 使用旋转矩阵的前两列表示旋转
    - 第三列 ← 叉乘
  - 没有不连续点
  - 与旋转矩阵相似，较难直接修改

切变



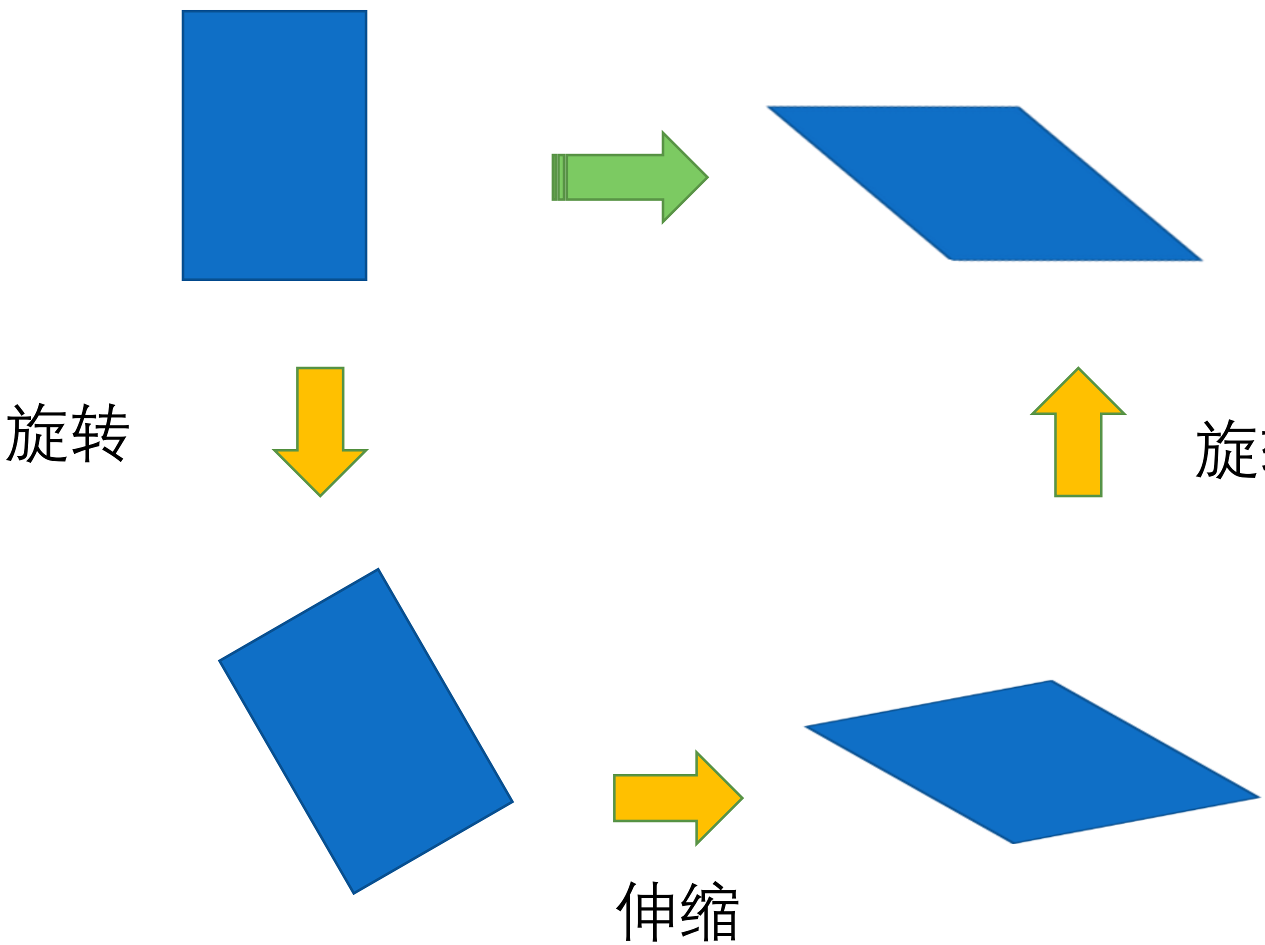
y
e_y
$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
o
x
e_x
e_z
z
y
e_y
$\boldsymbol{a}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$
o
x
e_x
e_z
z
z

切变

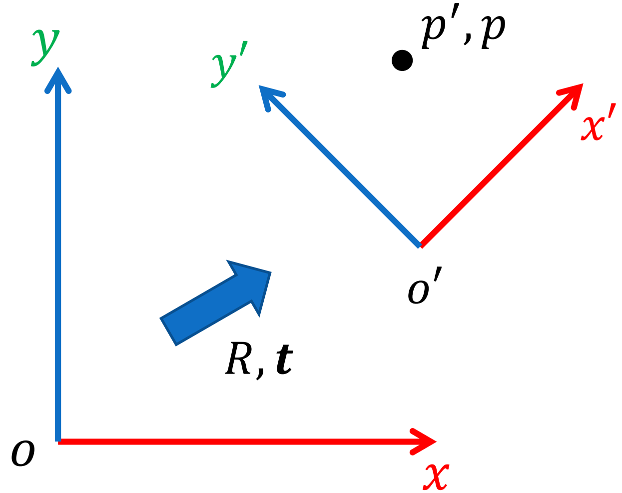


$$\boldsymbol{a}' = \begin{bmatrix} 1 & h_{yx} & h_{zx} \\ h_{xy} & 1 & h_{zy} \\ h_{xz} & h_{yz} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}$$

切变 ← 旋转 + 伸缩



坐标变换



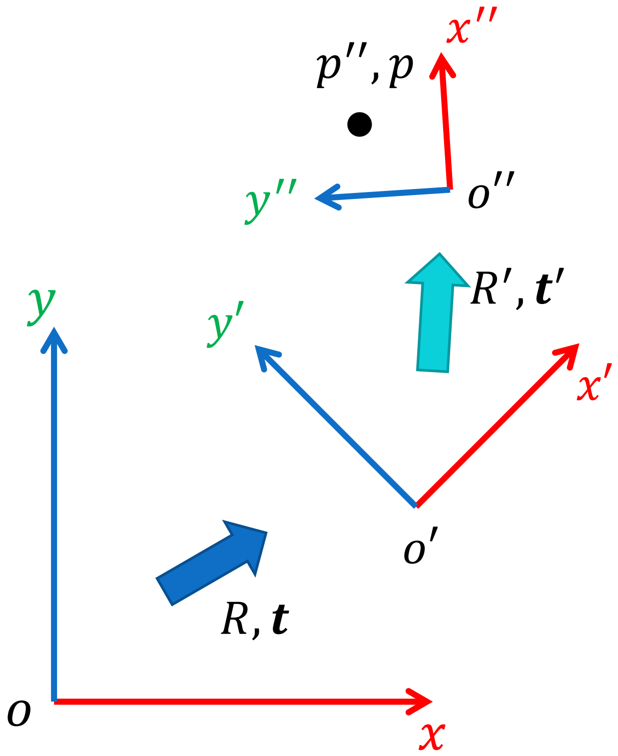
局部坐标系 -> 全局坐标系：

$$\boldsymbol{p} = R\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{t}$$

全局坐标系 -> 局部坐标系：

$$\boldsymbol{p}' = R^T(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{t})$$

坐标变换



局部坐标系 -> 全局坐标系：

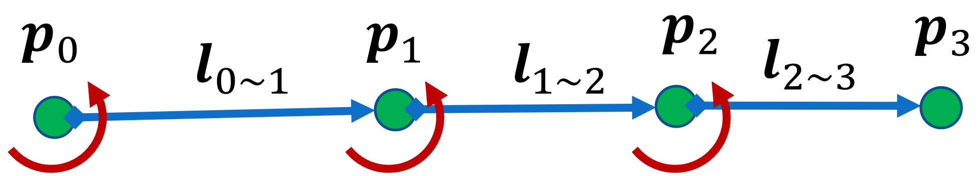
$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= R\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{t} \\ &= R(R'\boldsymbol{p}'' + \boldsymbol{t}') + \boldsymbol{t}\end{aligned}$$

全局坐标系 -> 局部坐标系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'' &= R'^{T}(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{t}') \\ &= R'^{T}(R^{T}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{t}')\end{aligned}$$

应用：正向运动学

- 运动链
  - （刚性）杆 + 关节

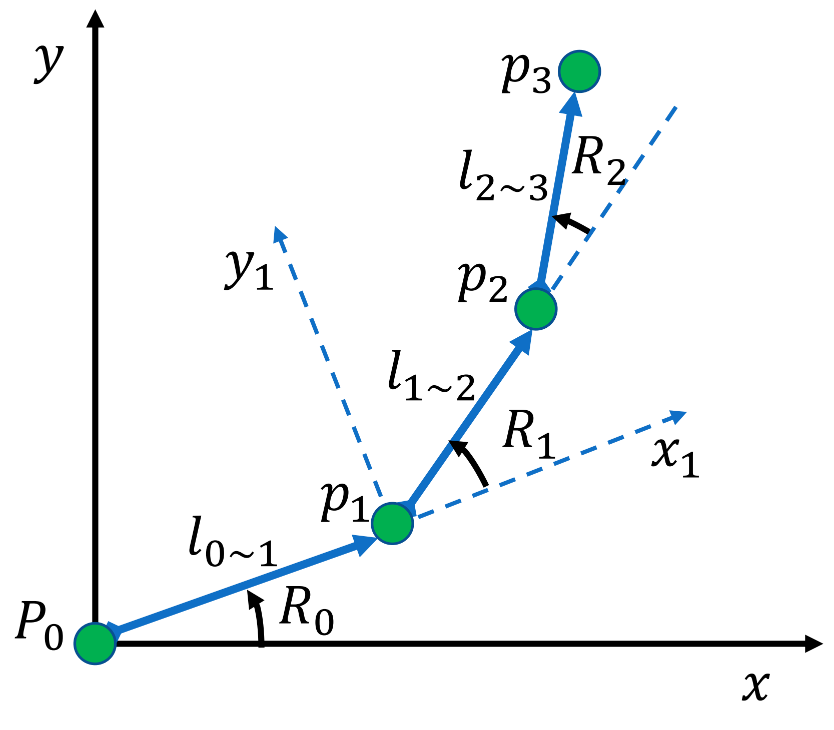


应用：正向运动学

- 正向运动学
  - 根据关节旋转计算关节位置

$$\boldsymbol{p}_1 = ?$$
$$\boldsymbol{p}_2 = ?$$
$$\boldsymbol{p}_3 = ?$$

递推



本节主要内容

- 坐标变换
  - 三维旋转与表示
- 前向运动学

Questions?