计算机动画

北京大学 前沿计算研究中心

刘利斌

本节主要内容

- 计算机动画概述
- 关键帧与插值
  - 线性插值
  - 多项式插值
  - 样条插值
  - 旋转插值与SLERP

计算机动画概述

动画

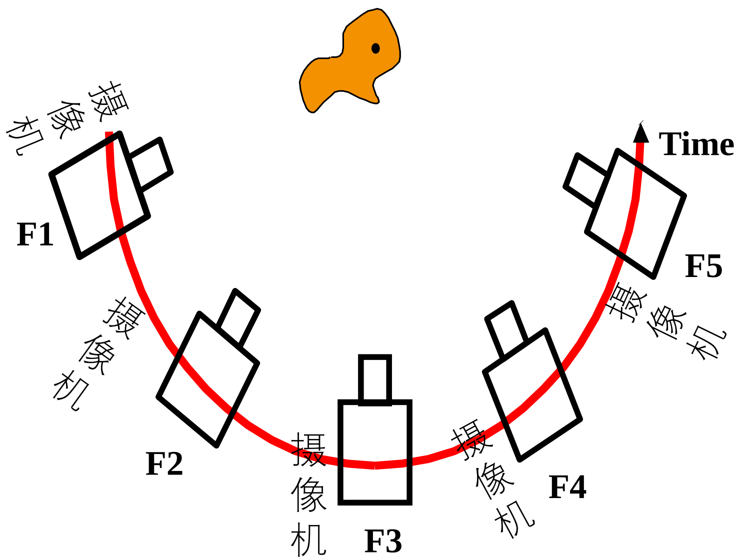
- 运动（活动）的画面（图像）
  - 通过连续播放一系列画面，给人的视觉造成连续变化的效果

原理

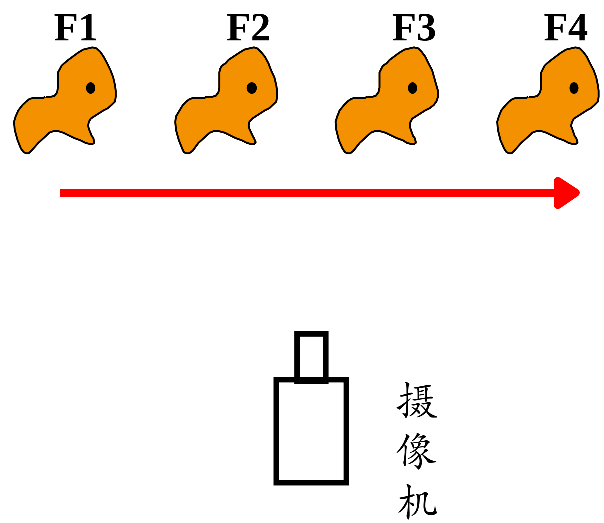
- 视觉暂留原理
  - 在人的研究看到一幅画或一个物体后，大约在0.05~0.1秒内不会消失
  - 24帧/秒

传统动画

- 动画是运动中的艺术



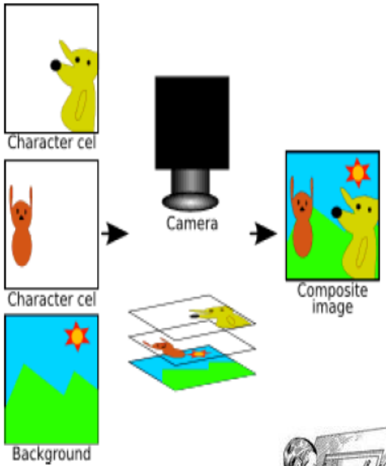
物体静止，摄像机运动

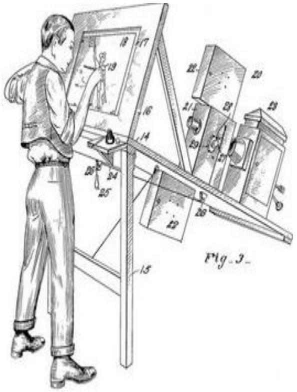


摄像机静止，物体运动

传统动画

- 逐帧手绘画面
  - 创作灵活性大，但费时费力
- 分层动画制作
  (Cel Animation, 1914)
  - 关键帧
  - 过渡、融合
- 影像描摹(Rotoscoping, 1915)
  - 描绘实拍影片的运动

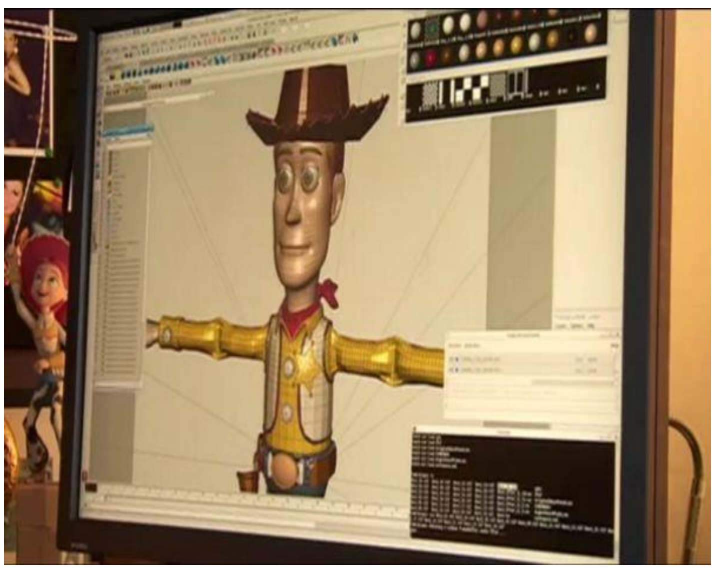


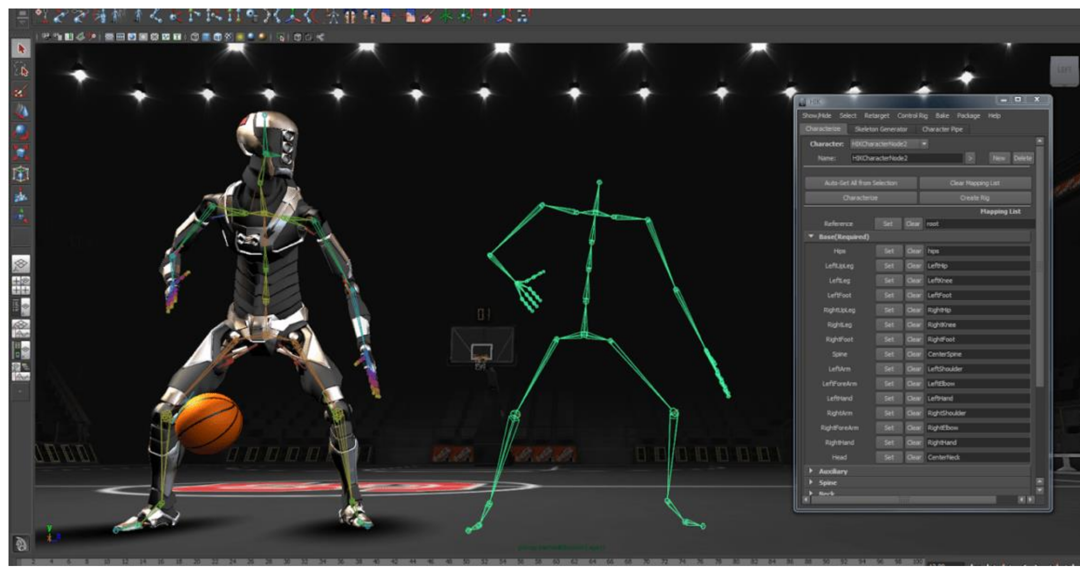


计算机动画

- 采用图形与图像的处理技术，借助于编程或动画制作软件生成一系列的画面

通过连续播放静止图像的方法产生物体运动的效果





计算机动画

- 动画形式
  - 物体位置、方向、大小和形状的变化
  - 虚拟摄像机的运动
  - 物体表面纹理、色彩的变化

计算机动画的历史

- 计算机图形学之前（1940s~mid-1960s）
  - 1950s， John Whitney， 通过模拟信号的电子计算机进行光线和物体控制， 生成运动的画面
  - 1957年， Russell Krisch等在数字计算机上扫描照片生成画面

1957年，SEAC扫描第一张数字图像

计算机动画的历史

- 早期2D（mid-1960s~mid-1970s）
  - 1964年，Ivan Surtherlands发明SketchPad
  - 1968年，苏联人在BESM-4计算机上创作了第一个计算机动画角色：行走的猫 [https://www.youtube.com/watch?v=so_HQKv-Bmk]
  - 1973年，美国米高梅公司发行第一部采用计算机动画处理的电影Westworld


BESM-4

Westworld

计算机动画的历史

- 中期3D（mid-1970s~1980s）
  - 1972年，影片Futureworld中使用了3D线框模型制作画面，成为最早的3D计算机动画电影
  - 1975年，第二部使用3D线框动画短片Great获奥斯卡奖
  - 1977年，第三部使用类似动画技术的影片是星球大战

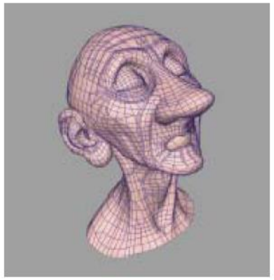

Futureworld

Great

Star Wars

计算机动画的历史

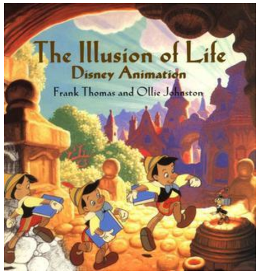
- 近期全3D（1990s~现在）
  - 1995年， Pixar公司玩具总动员
    - 首部完全使用电脑动画技术的动画长篇
  - 1998年， Pixar公司动画短片电影Geri’s Game获奥斯卡最佳短片奖



动画的基本原则

- Disney's twelve basic principles of animation

  - Squash and stretch
  - Anticipation
  - Staging
  - Straight-ahead action and pose-to-pose action
  - Follow-through and overlapping action
  - Slow in and slow out
  - Arcs
  - Secondary action
  - Timing
  - Exaggeration
  - Solid drawing
  - Appeal



Frank Thomas and **Ollie Johnston**, ***The Illusion of Life: Disney Animation***, *1981*

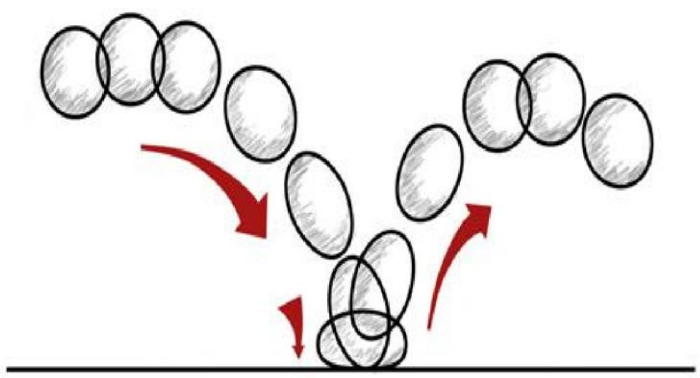
https://wave.video/blog/12-basic-principles-of-animation/

动画的基本原则

- Squash and stretch （挤压和伸展）

  通过物体的形变来表现物体的刚度和质量：保持体积

  蕴含的物理原理：影响运动的因素包括质量、外力、材料属性、表面接触的位置等



动画的基本原则

- Anticipation （预期动作）

  动画中的动作通常包括动作的准备、实际的动作和动作的完成三部分。第一部分就叫做预期性。

anticipation　　action　　reaction

动画的基本原则

- Staging（演出方式）

  以一种容易理解的方式展示动作或对象

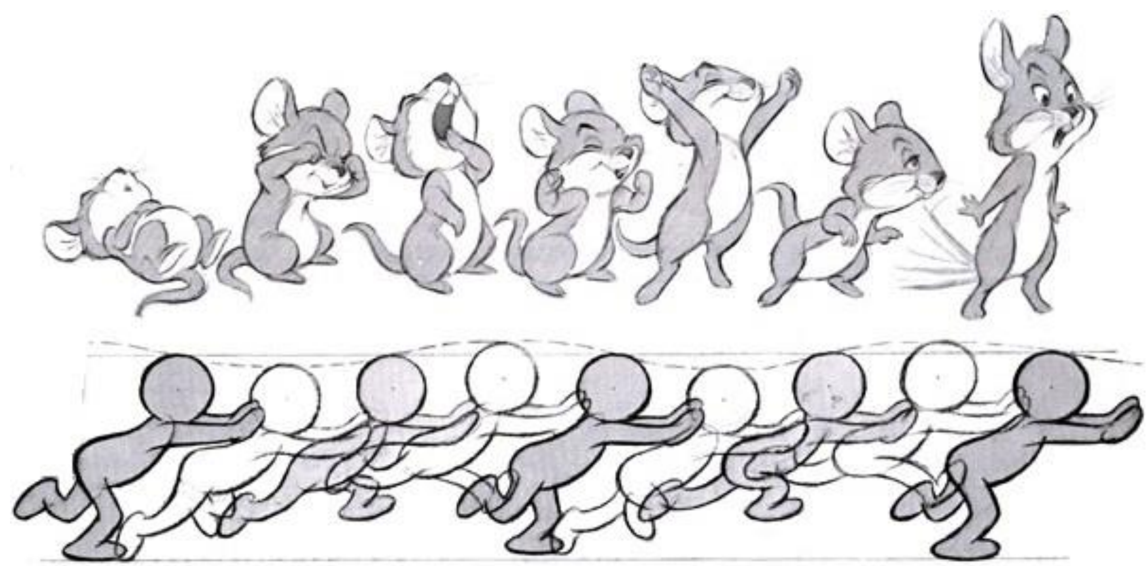
  角色的仪态及表演方式，配合适当的摄影机运动，使得动 画能够有效地表达角色的特性及故事中的信息

动画的基本原则

- Straight-ahead action and pose-to-pose action （连贯动作法与关键动作法）

连贯动作法：根据连续的动作依序制作每一帧画面

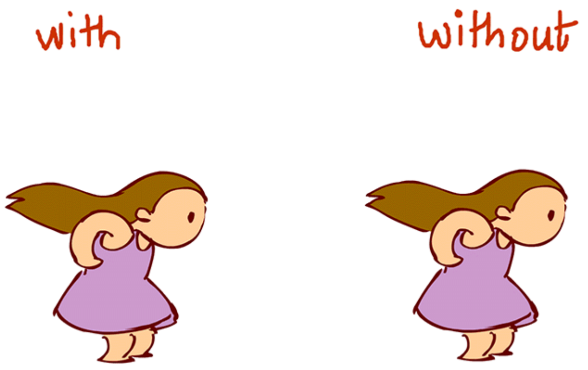
关键动作法：是先定义关键的主要动作，而后再制作关键动作间的画面（关键帧方法）



动画的基本原则

- Follow-through and overlapping action
  （跟随动作与重叠动作）

  没有任何一种物体会突然停止，物体的运动是一个部分接着一个部分的

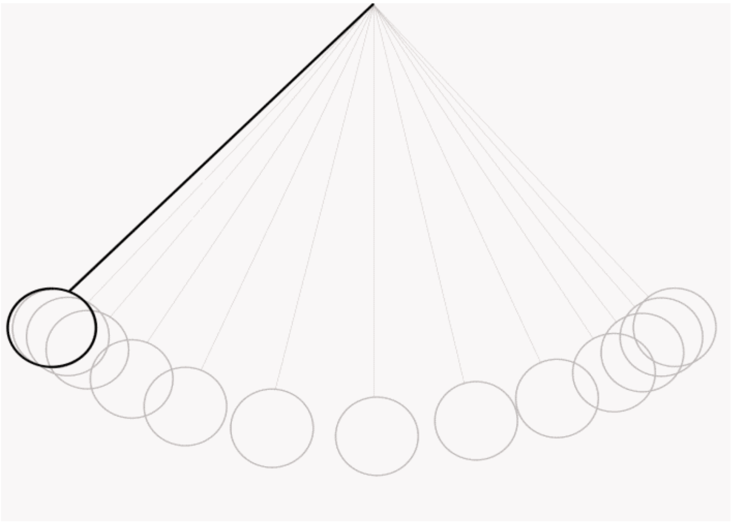


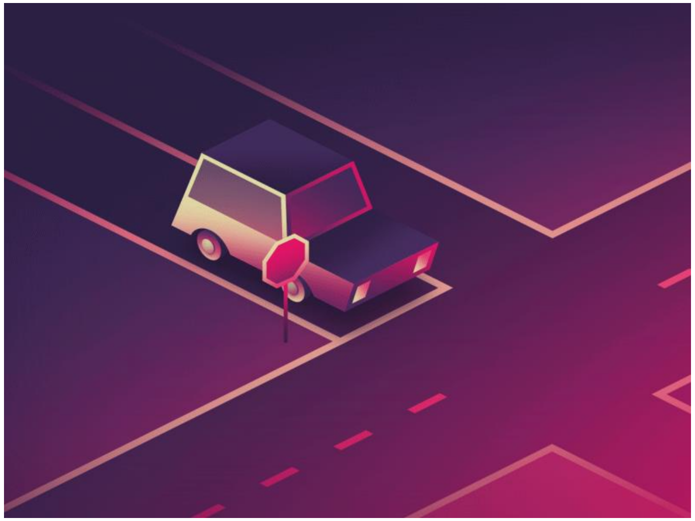
动画的基本原则

- Slow in and slow out（渐入和渐出）

  自然界中物体的运动具有加速和减速的性质

  动作的慢入和慢出使得物体的运动更加符合自然规律，因此应该应用于绝大多数的动作



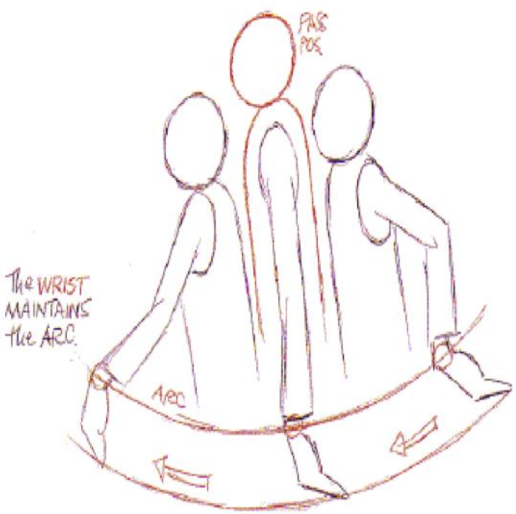


动画的基本原则

- Arcs（弧形动作）

  现实世界中，几乎所有的运动都是沿着一条略带圆弧的轨道移动的，尤其是生物的运动

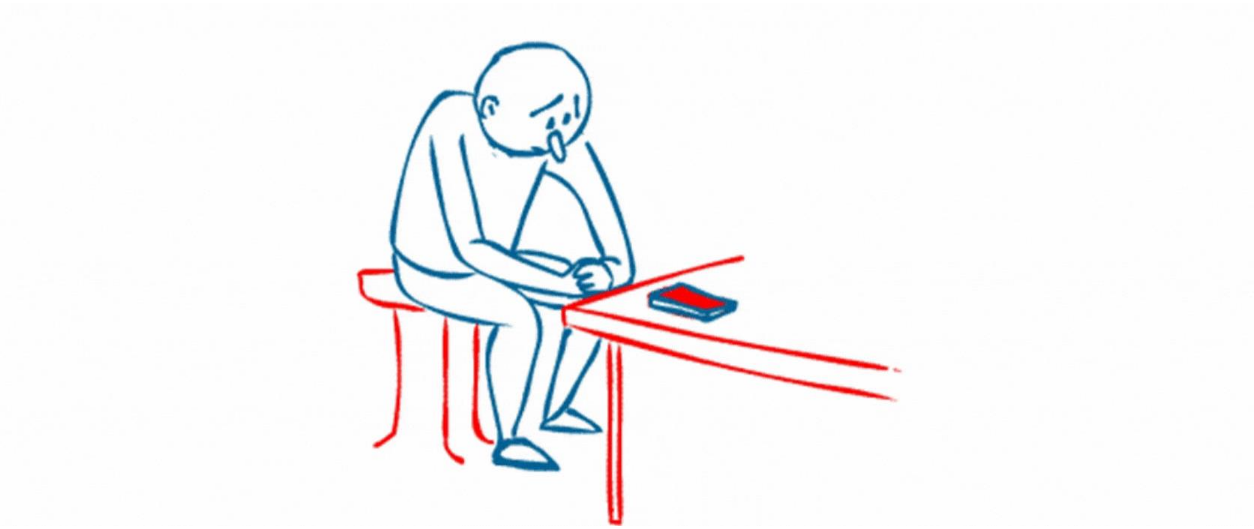
  作画时要以自然的弧形方式呈现运动



动画的基本原则

- Secondary action（附属动作）

  角色的主要动作之外能够帮助角色性格表达的其他动作为动画增添乐趣和真实性

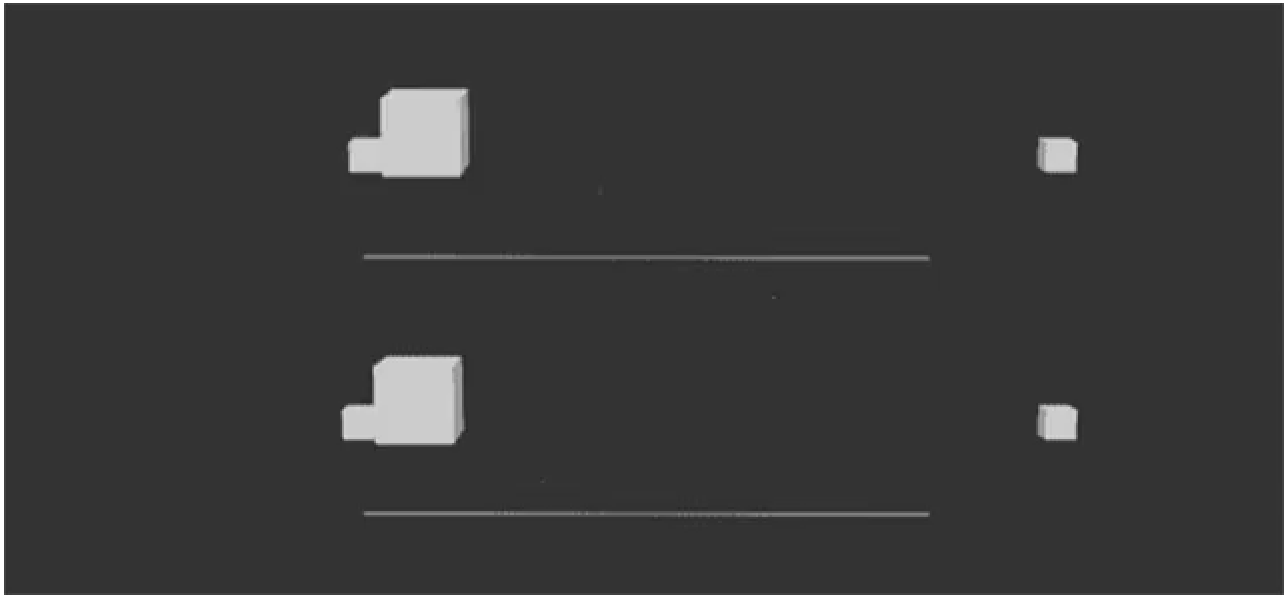


动画的基本原则

- Timing（掌握时序）

  运动的速度和节奏

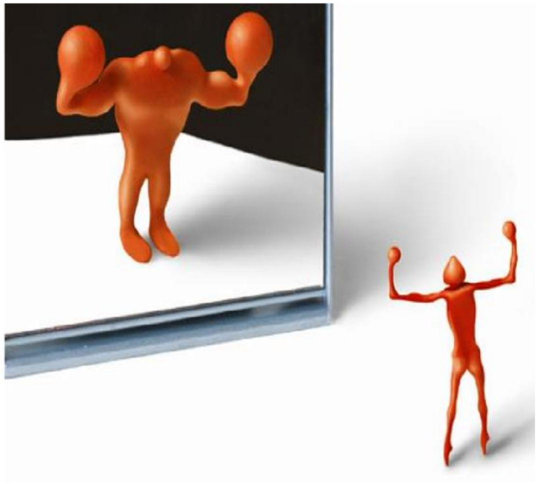
  通过时序来表现物体的大小、重量和个性



动画的基本原则

- Exaggeration （夸张）

  强调某个动作，使动画更加有趣



动画的基本原则

- Appeal（吸引力）

  鲜明、独特、有吸引力的外观及剧情

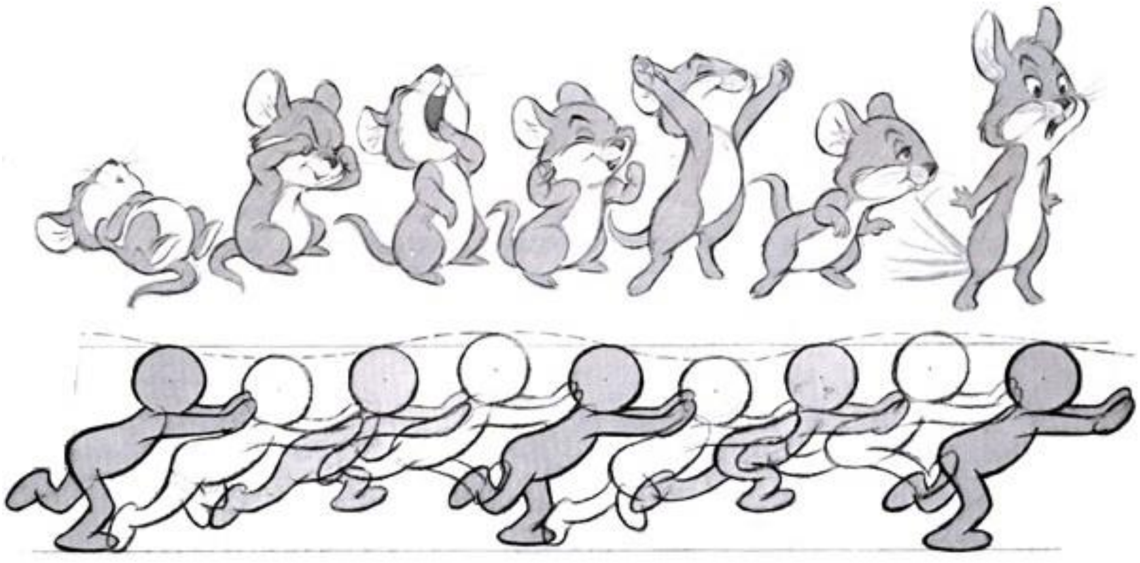
关键帧与插值

动画的基本原则

- Straight-ahead action and pose-to-pose action
  （连贯动作法与关键动作法）

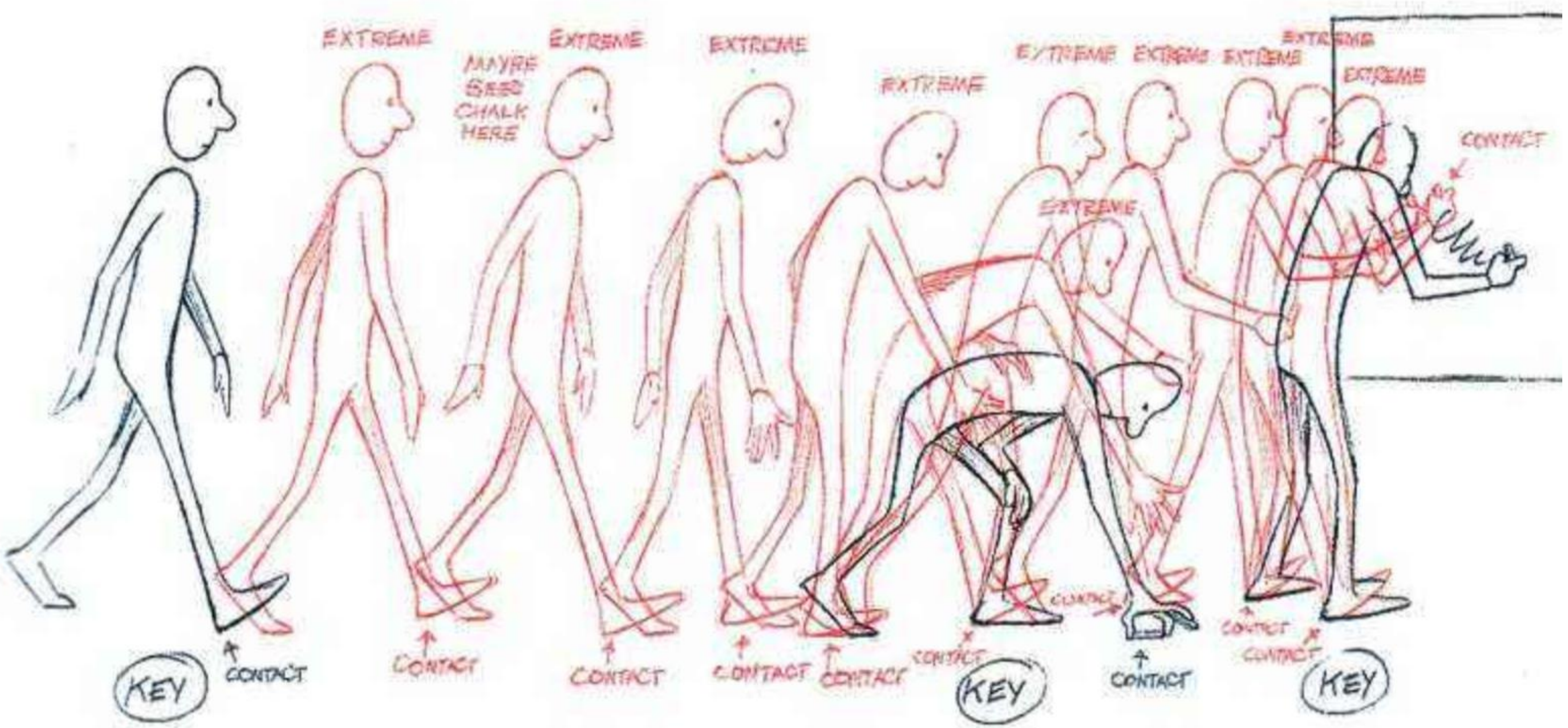
  连贯动作法：根据连续的动作依序制作每一帧画面

  关键动作法：是先定义关键的主要动作，而后再制作关键动作间的画面（关键帧方法）



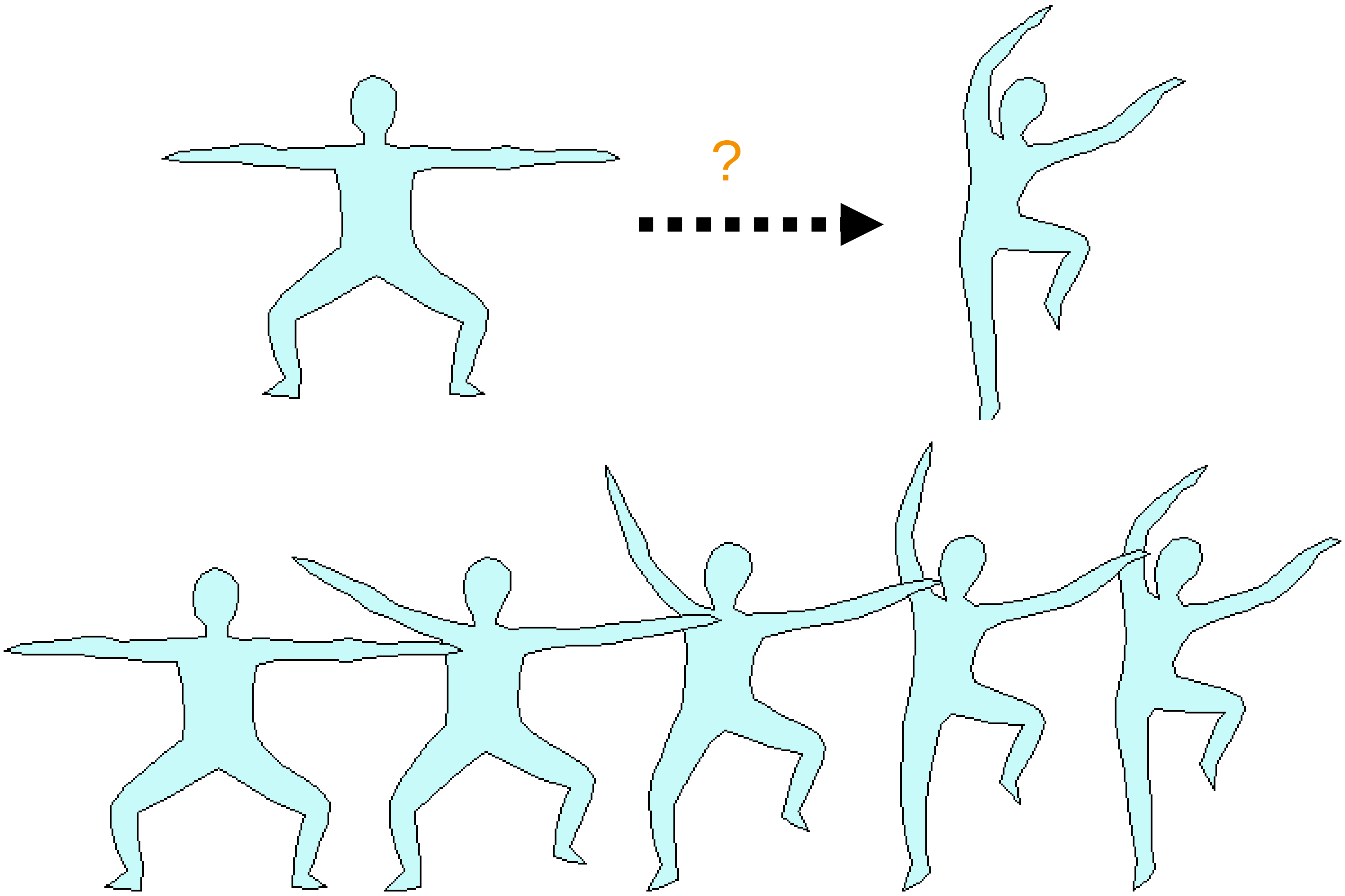
关键帧动画

补间动画

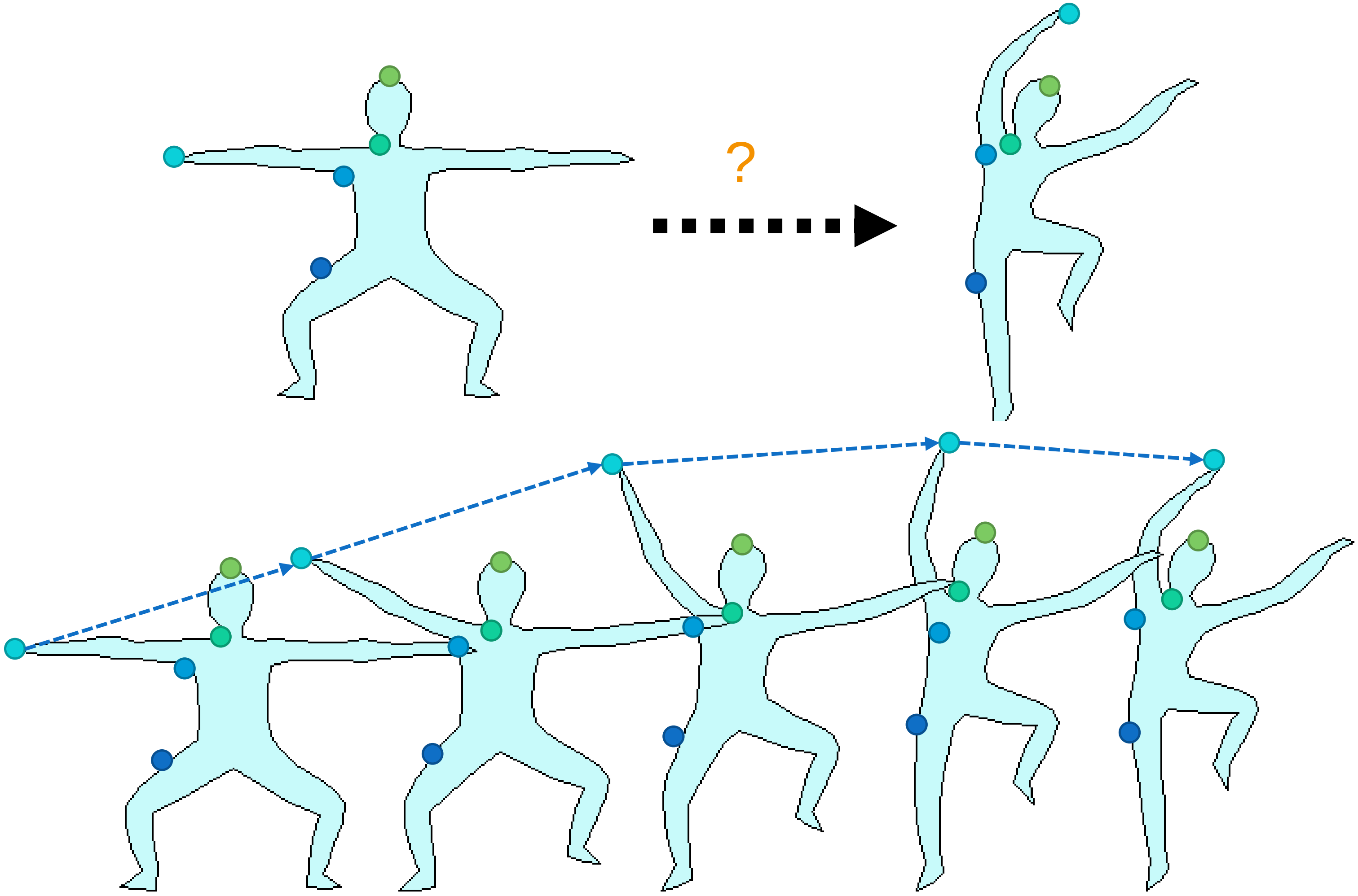


关键帧 关键帧 关键帧

关键帧插值

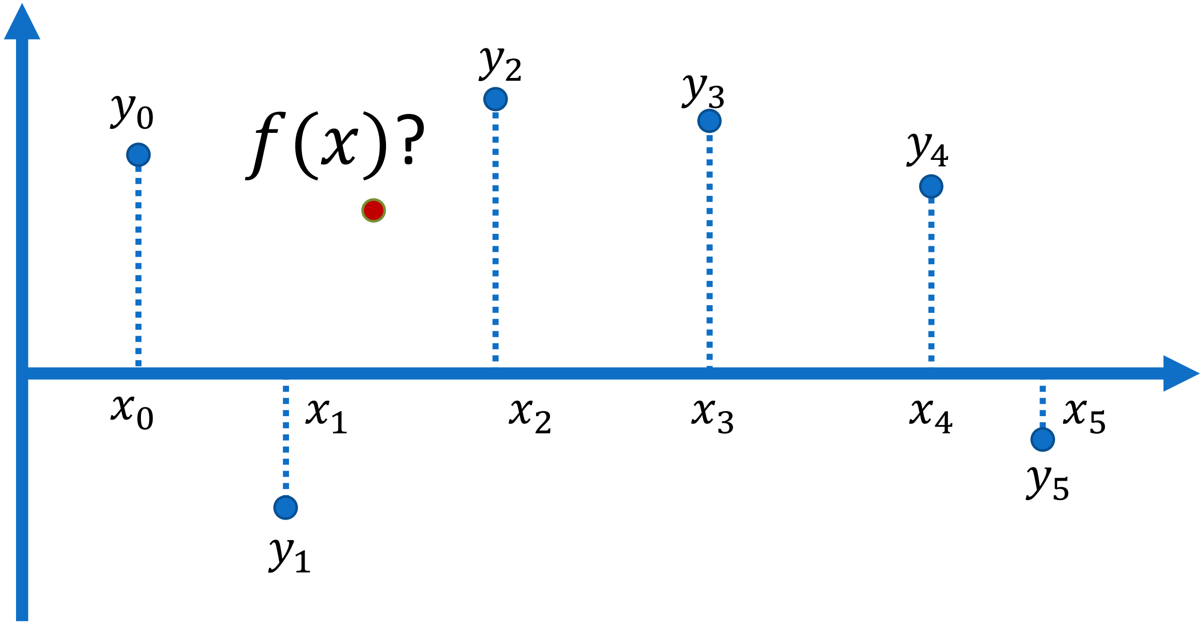


关键帧插值



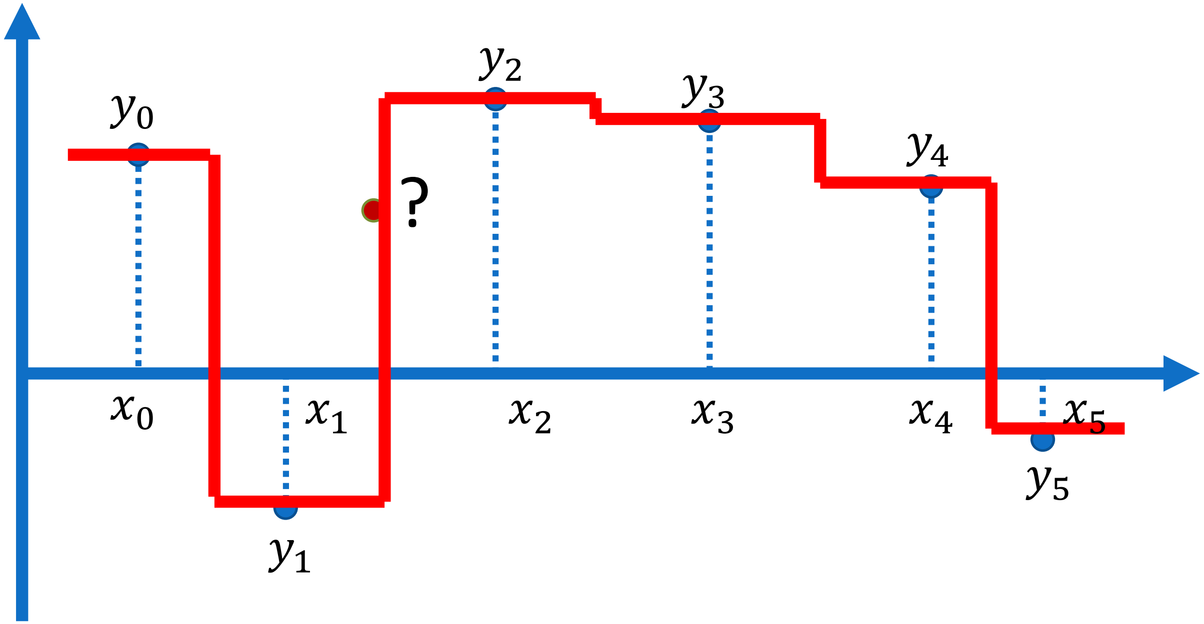
插值（Interpolation，内插）

- 给出离散的数据点集合 $D = \{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$，在范围内求新数据点 x 的值 $f(x)$ 的方法
  - 要求：$f(x_i) = y_i, \forall (x_i, y_i) \in D$



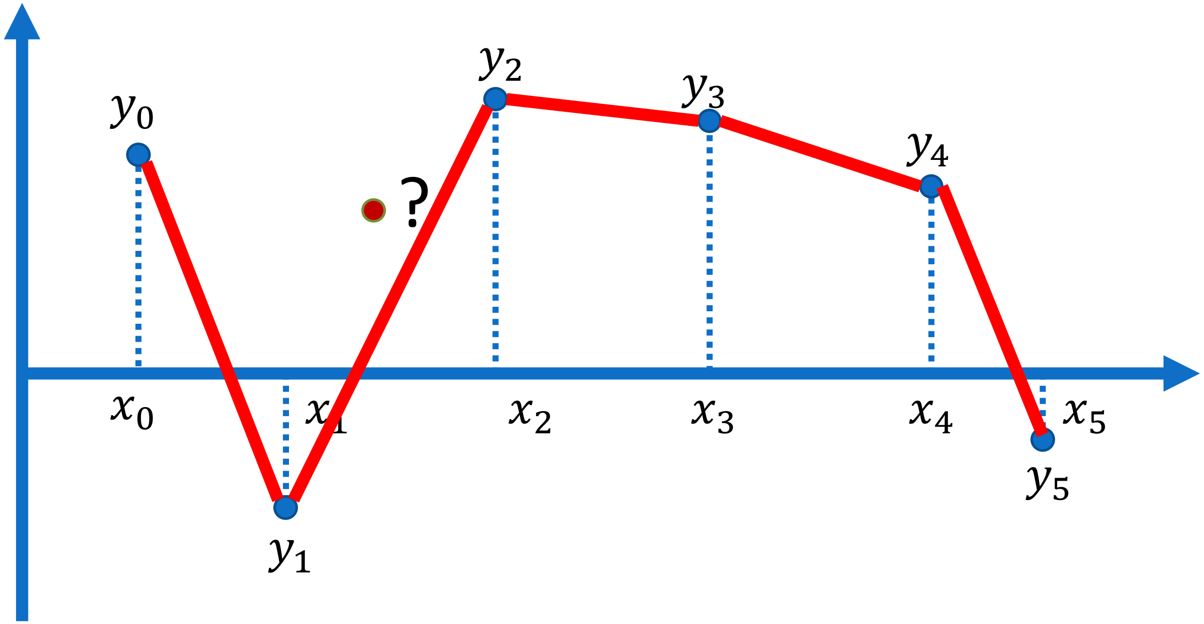
阶梯插值

$$f(x) = y_1$$



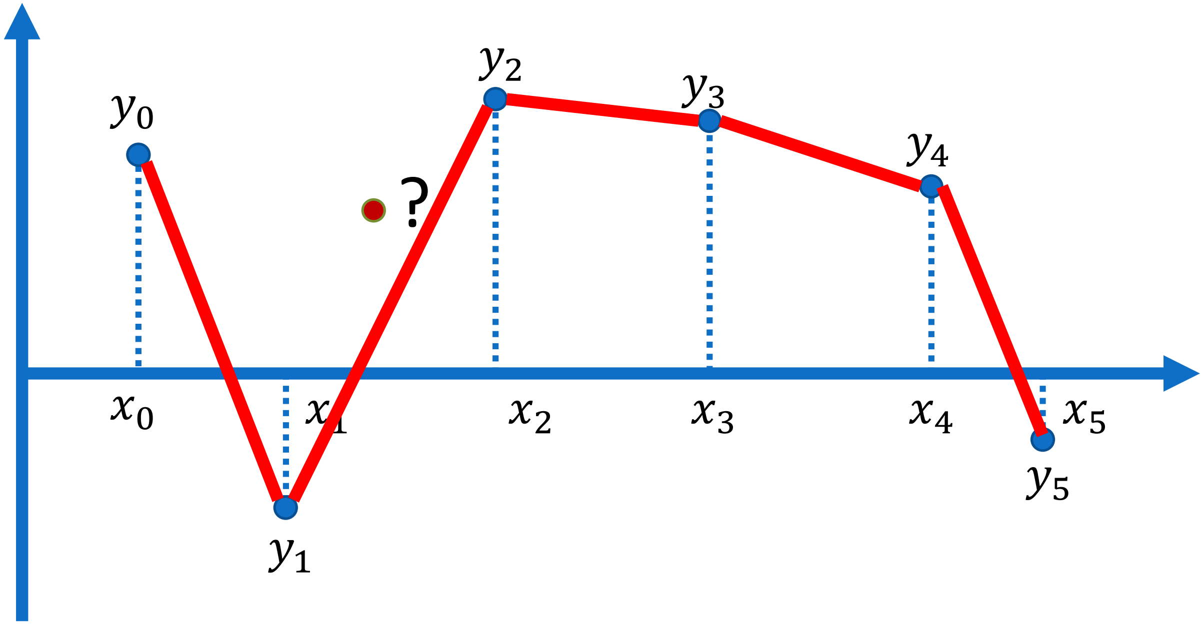
线性插值

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



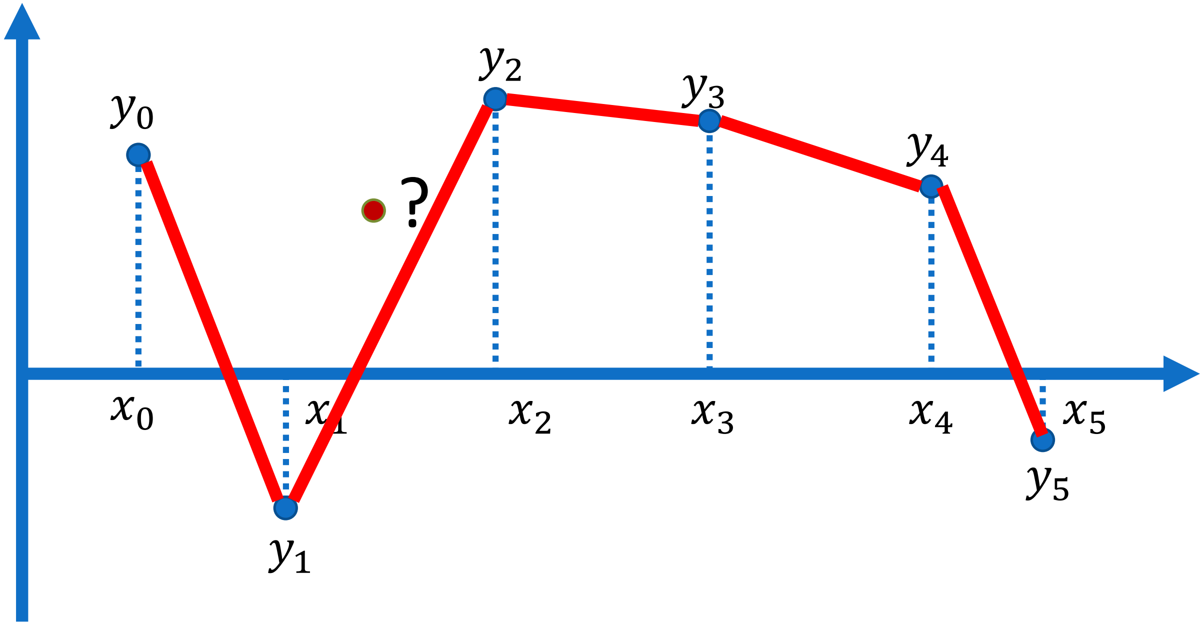
线性插值

$$f(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$



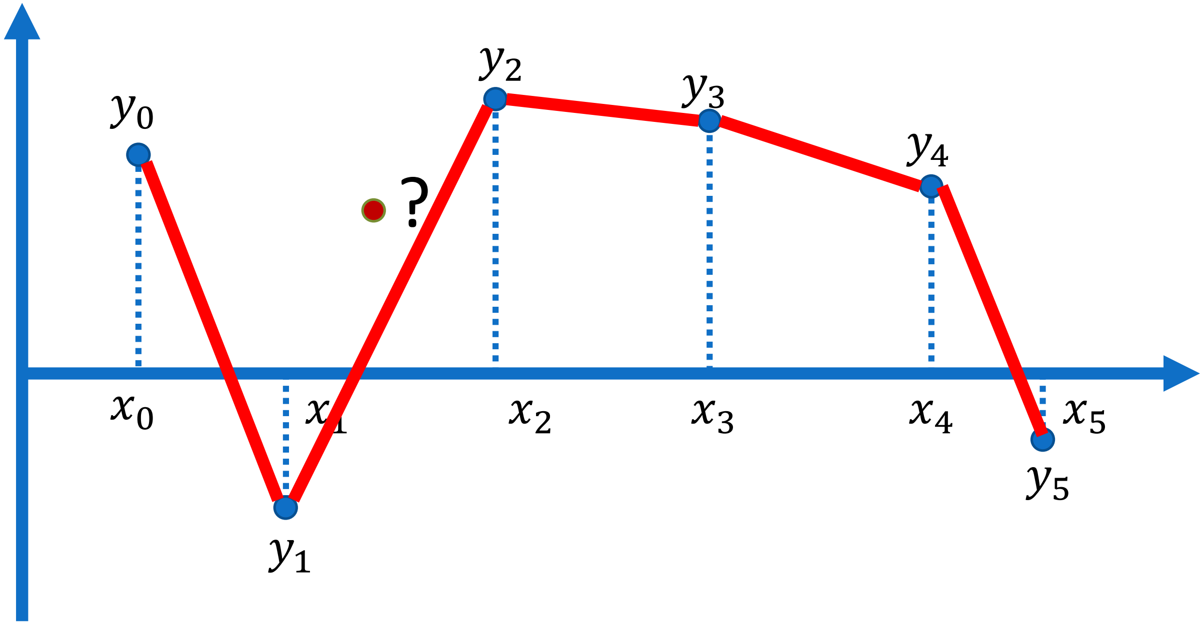
线性插值

$$f(x) = y_1 + t(y_2 - y_1)$$



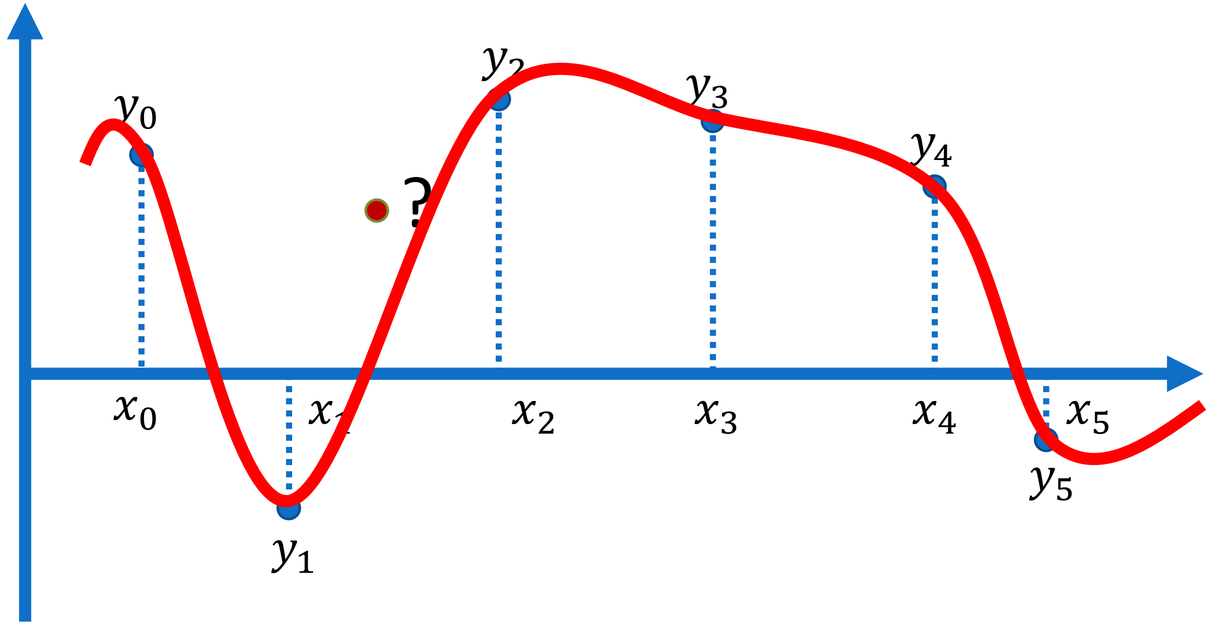
线性插值

$$f(x) = (1-t)y_1 + ty_2$$



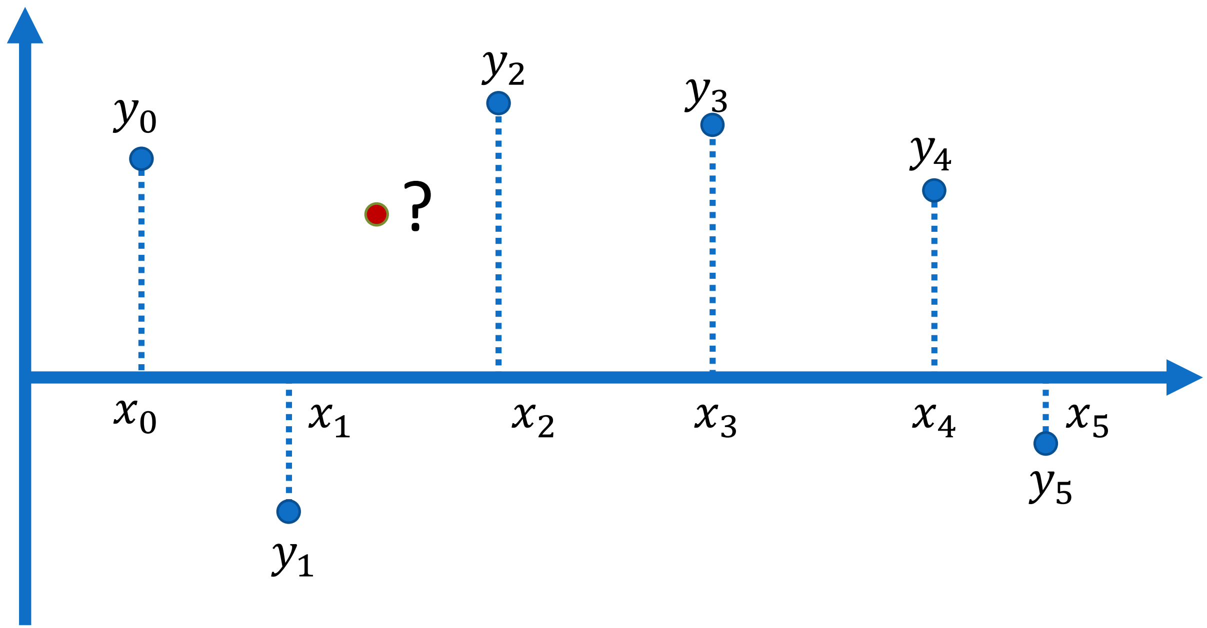
非线性插值

$$f(x) = ?$$



多项式插值

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$



多项式插值

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

数据点集合 $\mathrm{D} = \{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0$$
$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1$$
$$f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n = y_2$$

…… ……

$$f(x_N) = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \cdots + a_n x_N^n = y_N$$

多项式插值

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

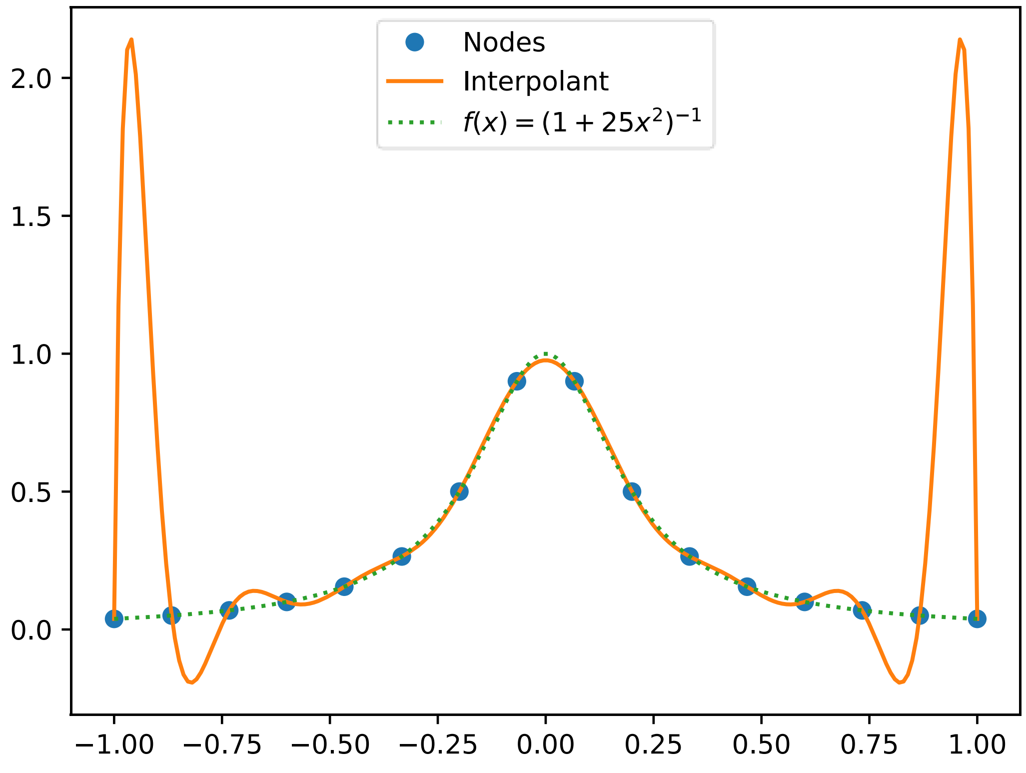
数据点集合 D $= \{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

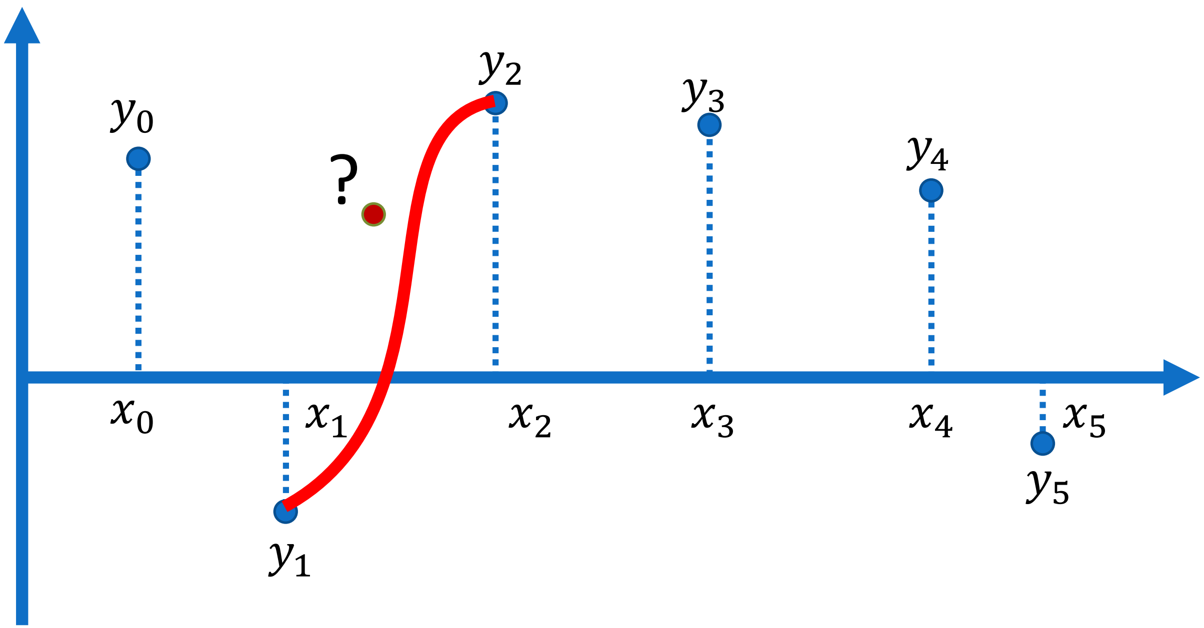
多项式插值

- 龙格现象 Runge's phenomenon
  - 高阶多项式可能会在数据点间产生震荡



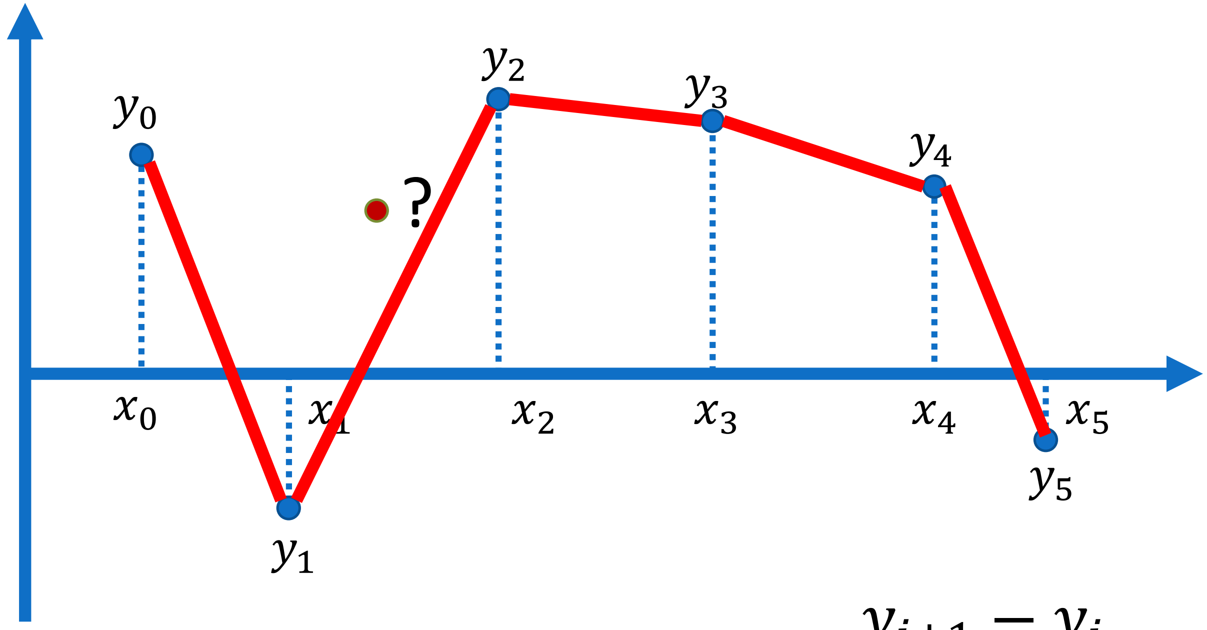
样条插值（Spline）

- 使用低阶多项式**分段**处理已知数据点
  - $f(x) = S_i(x), \text{when } x \in [x_i, x_{i+1}]$



样条插值（Spline）

- 使用低阶多项式**分段**处理已知数据点
  - 一次样条 → 线性插值

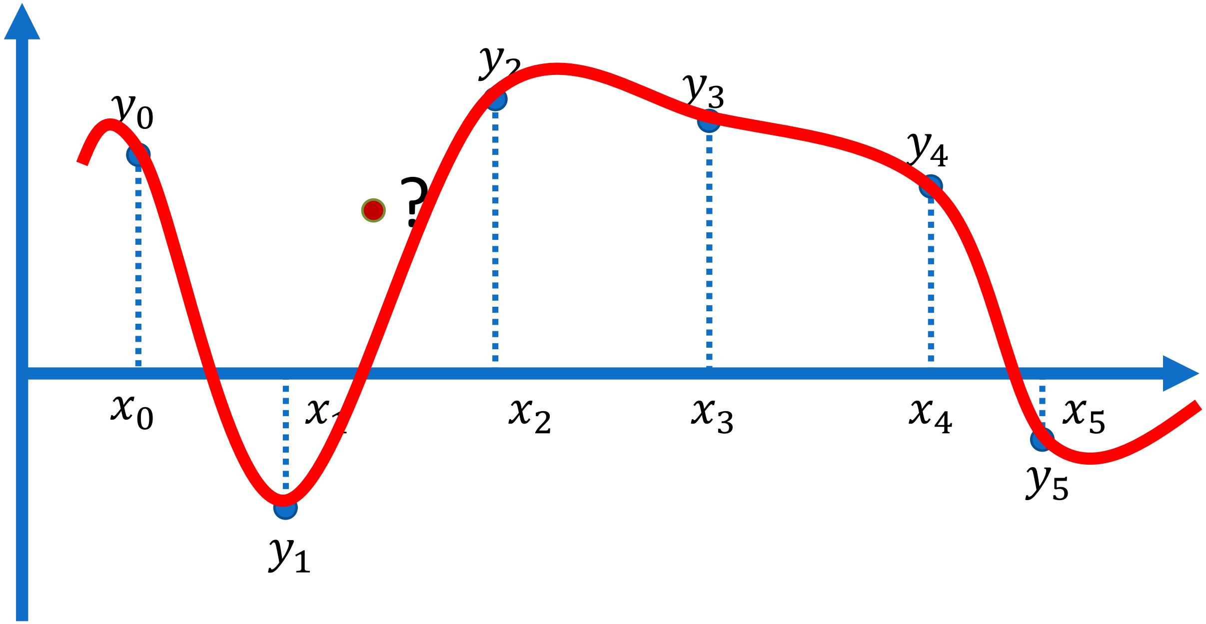


$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

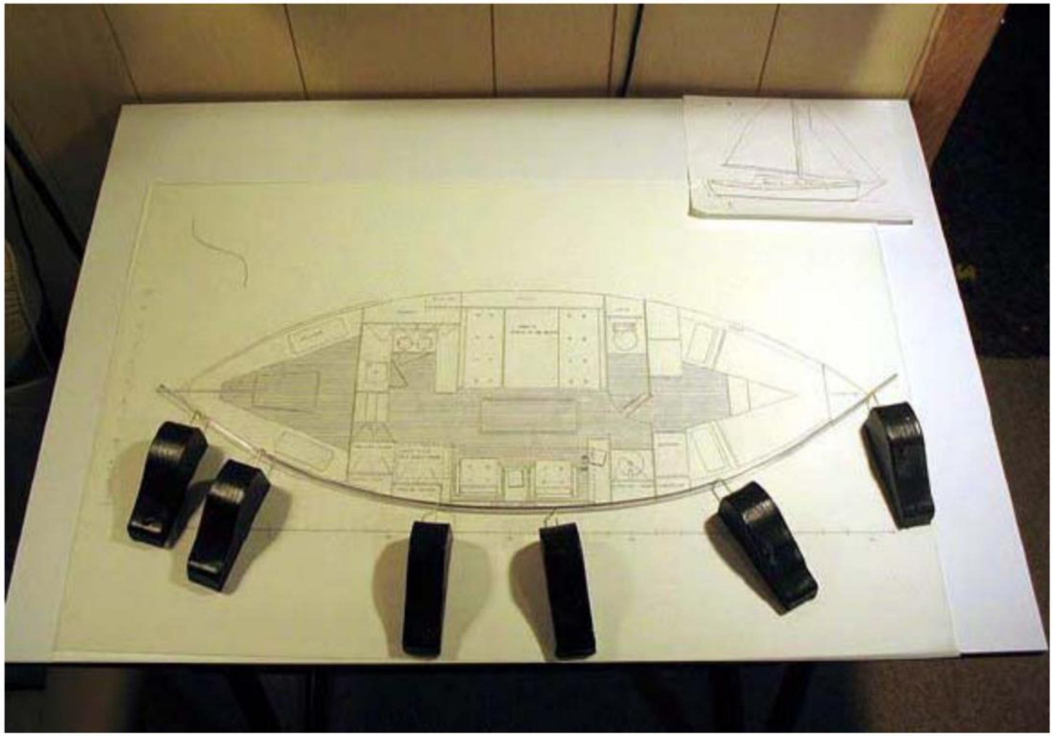
样条插值（Spline）

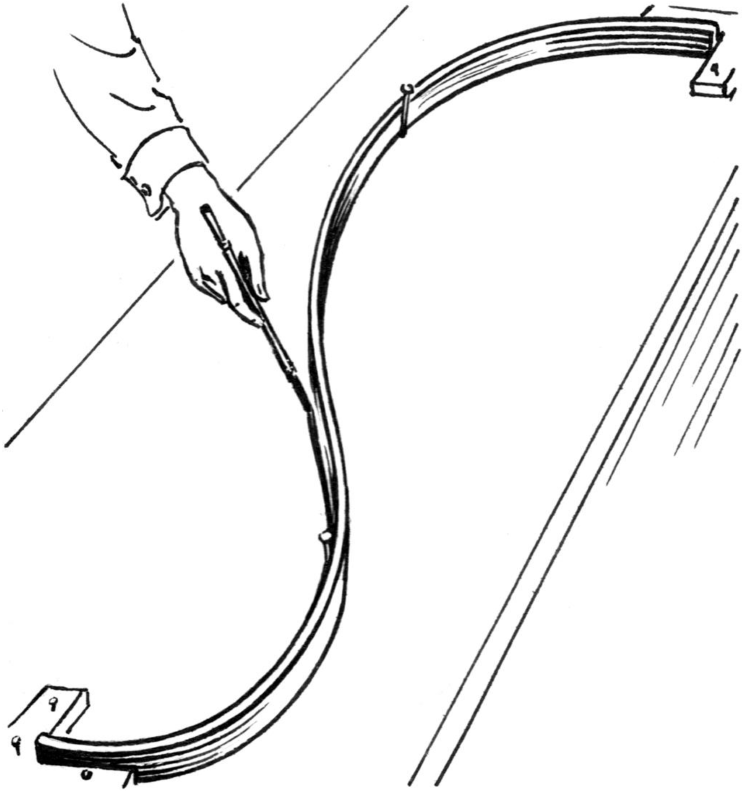
- 使用低阶多项式**分段**处理已知数据点
  - 三次样条

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$



样条插值（Spline）

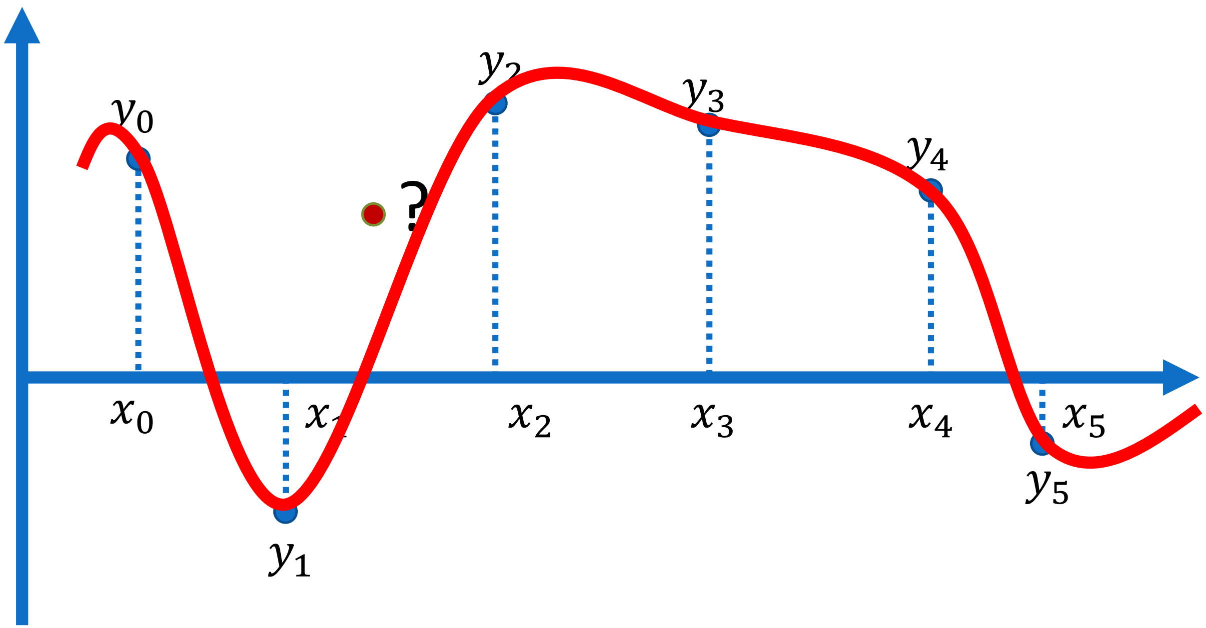




三次样条插值

- 给出数据点 $D = \{(x_i, y_i) | i = 0, \dots, N\}$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$



三次样条插值

- 给出数据点 D = $\{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

需求解共 4N 个未知数

- 插值约束： $S_i(x_i) = y_i$
- 零阶连续： $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$
- 一阶连续： $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$
- 二阶连续： $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$
- 边界条件： $S'_0(x_0), S''_0(x_0), S'_{n-1}(x_n), S''_{n-1}(x_n)$
- 解线性方程

三次Hermite（厄米特）插值

- 给出数据点 $D = \{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- 插值约束：$S_i(x_i) = y_i$
- 零阶连续：$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$
- 一阶连续：$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$
- 二阶连续：$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$
- 边界条件：$S'_0(x_0), S''_0(x_0), S'_{n-1}(x_n), S''_{n-1}(x_n)$
- 解线性方程

三次Hermite（厄米特）插值

- 给出数据点 D = $\{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- 插值约束：$S_i(x_i) = y_i$
- 零阶连续：$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$
- ~~一阶连续：~~ $\cancel{S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)}$
- ~~二阶连续：~~ $\cancel{S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)}$
- ~~边界条件：~~ $\cancel{S'_0(x_0), S''_0(x_0), S'_{n-1}(x_n), S''_{n-1}(x_n)}$
- 解线性方程

三次Hermite（厄米特）插值

- 给出数据点 D = $\{(x_i, y_i) | i = 0, \ldots, N\}$

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

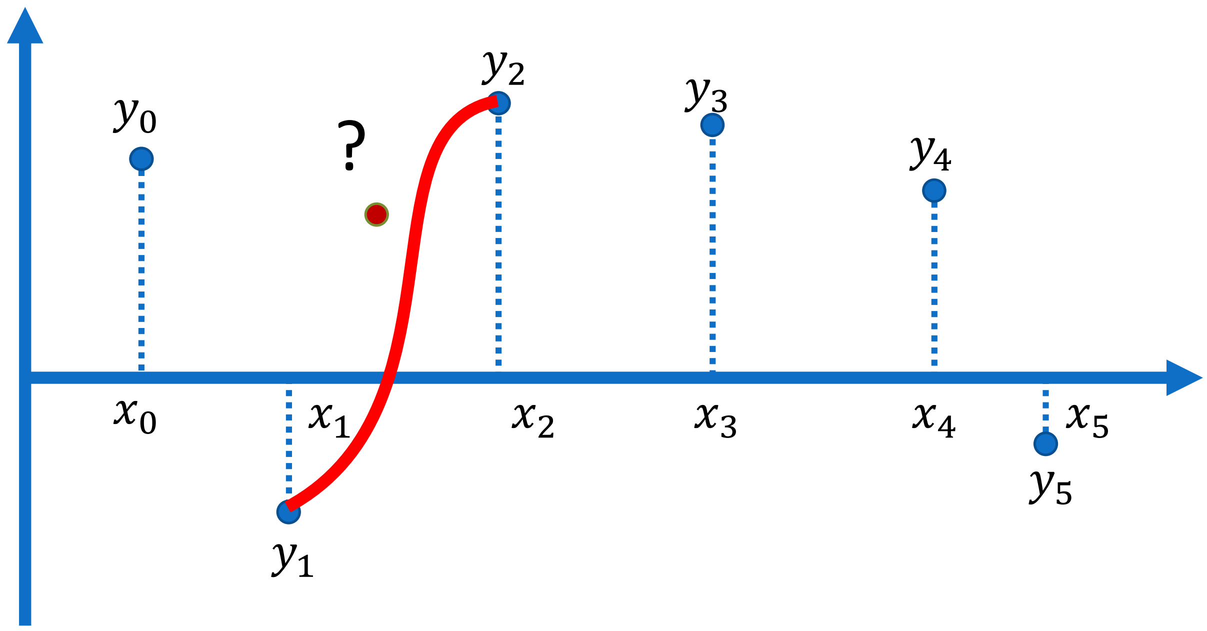
同时给出$D' = \{(x_i, m_i) | i = 0, \ldots, N\}, S_i' = m_i$

- 插值约束：$S_i(x_i) = y_i$
- 零阶连续：$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$
- ~~一阶连续：~~ $\cancel{S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)}$
- ~~二阶连续：~~ $\cancel{S_{i-1}''(x_i) = S_i''(x_i)}$
- ~~边界条件：~~ $\cancel{S_0'(x_0), S_0''(x_0), S_{n-1}'(x_n), S_{n-1}''(x_n)}$
- 解线性方程

三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$， 求三次多项式

$$S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$，求三次多项式

$$S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

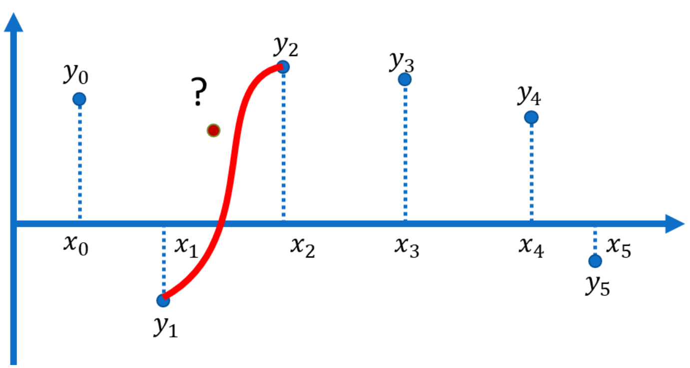
满足:

$S(x_1) = y_1$

$S(x_2) = y_2$

$S'(x_1) = m_1$

$S'(x_2) = m_2$



三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$，求三次多项式

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

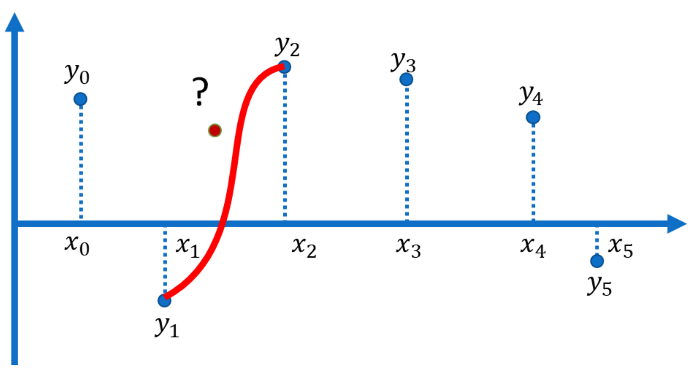
满足:

$$S(0) = y_1$$

$$S(1) = y_2$$

$$S'(0) = m_1$$

$$S'(1) = m_2$$



三次Hermite（厄米特）插值

已知$x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$，求三次多项式

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

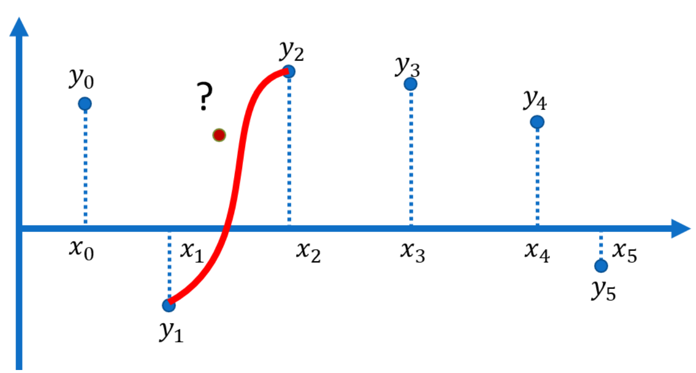
满足:

$$S(0) = y_1 = d$$

$$S(1) = y_2 = a + b + c + d$$

$$S'(0) = m_1 = c$$

$$S'(1) = m_2 = 3a + 2b + c$$



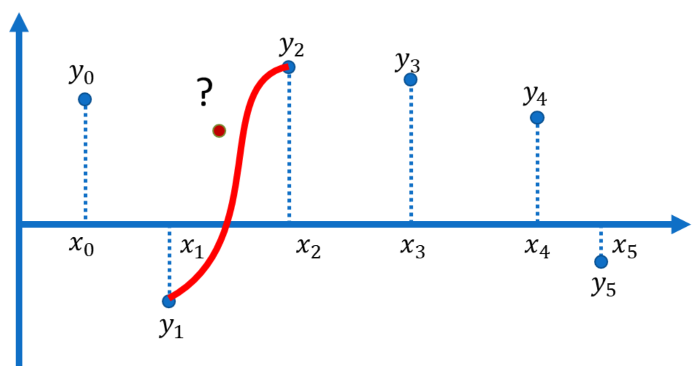
三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$， 求三次多项式

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$



三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$，求三次多项式

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

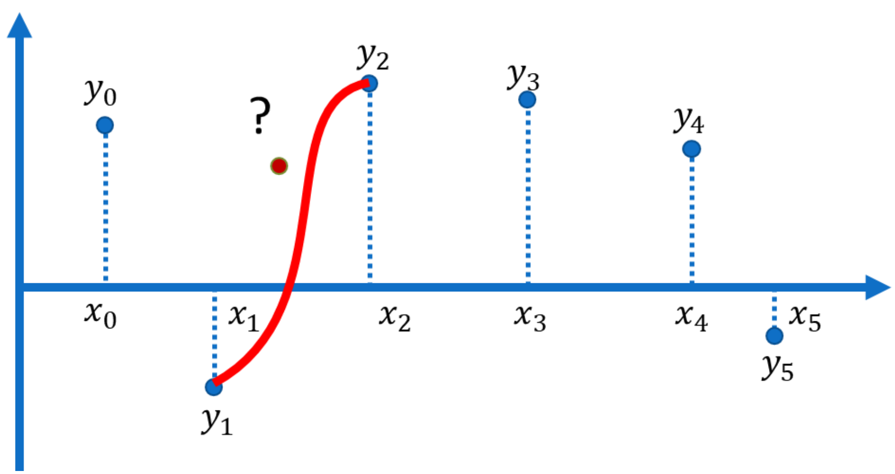
三次Hermite（厄米特）插值

已知 $x_1, x_2, y_1, y_2, m_1, m_2$，求三次多项式

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$



三次Hermite（厄米特）插值

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

三次Hermite（厄米特）插值

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

三次Hermite（厄米特）插值

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Hermite（厄米特）基函数

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

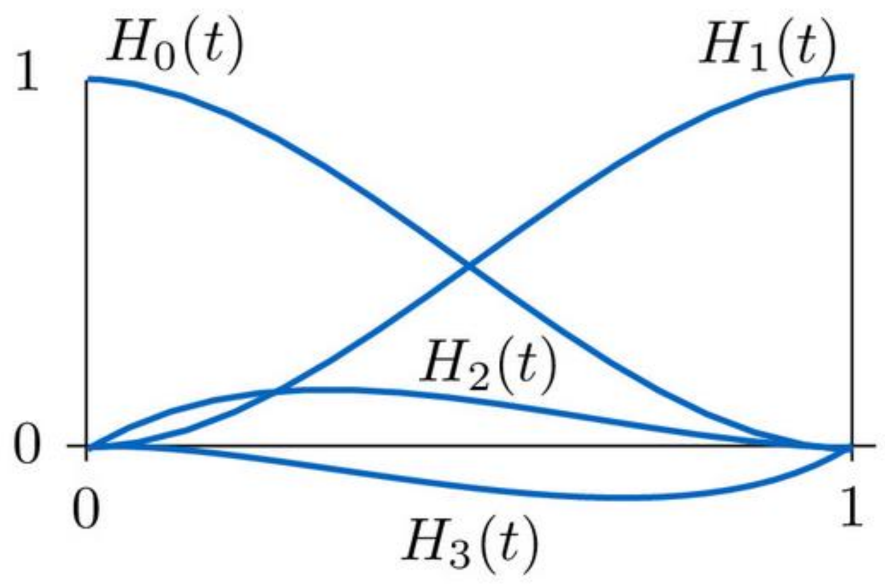
$$= \begin{bmatrix} H_0(t) & H_1(t) & H_2(t) & H_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

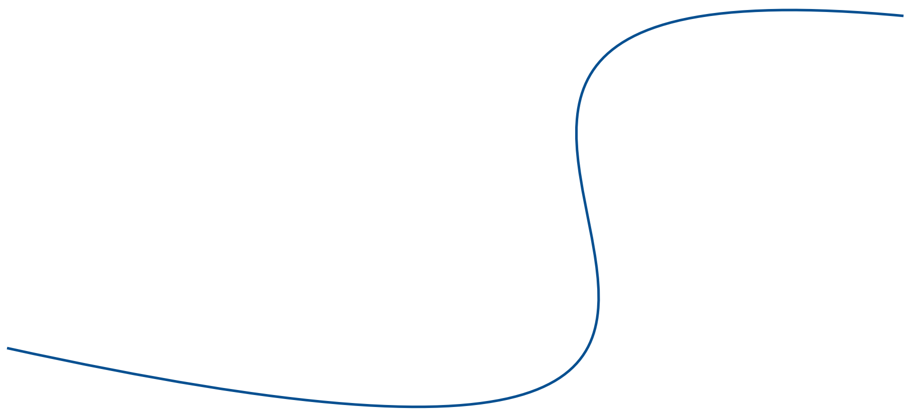
$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$



应用：PowerPoint 曲线（？）



Catmull-Rom样条插值

$$S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$= \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = p_1$$

$$y_2 = p_2$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\frac{p_2 - p_0}{x_2 - x_0}$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\frac{p_3 - p_1}{x_3 - x_1}$$